REVISTA

DE LOS

PROGRESOS DE LAS CIENCIAS

EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES.

TOMO 22.—N.º 1.º

MADRID.

IMPRENTA DE LA VIUDA É HIJO DE D. E. AGUADO.—PONTEJOS, 8.

1886.

OBRAS

publicadas por la Real Academia de Ciencias, y que se hallan de venta en la Secretaría de la misma, plaza de la Villa, núm. 2, piso principal.

	RÚSTICA. *Ptas. Cént.*
MEMORIAS.—9 tomos completos, precio de cada uno.......	12,50
REVISTA DE LA ACADEMIA.—21 tomos, precio de cada uno...	6,00
ANUARIOS.—Cuatro tomos: 1883 al 1886, precio de cada uno.	2,50

Tomando de 5 á 10 ejemplares á la vez, de cualquiera de estas obras, se hará en los precios la rebaja del 15 por 100 y de 10 ejemplares en adelante la del 25 por 100.

LIBROS DEL SABER DE ASTRONOMIA

DEL REY

DON ALFONSO X DE CASTILLA,

COPILADOS, ANOTADOS Y COMENTADOS

POR DON MANUEL RICO Y SINOBAS,

individuo numerario de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, y Catedrático de la Facultad de Ciencias en la Universidad Central.

Obra publicada de Real orden.—Se hallan de venta los 5 tomos encartonados, á 25 pesetas cada uno.

CIENCIAS EXACTAS.

MÉTODO DE WANTZEL

para conocer si un problema puede resolverse con la recta y el círculo.

El Teorema de Lindemann sobre la rectificación de la circunferencia supone el conocimiento de algunos teoremas de Wantzel, comprendidos en una memoria que se publicó en el *Journal* de Liouville del año 1837, y de la cual vamos á dar una idea, ampliándola y explicándola en sus detalles más importantes. Creemos, en efecto, conveniente, para facilitar la inteligencia del interesante asunto que en ella se expone, variar algo la forma adoptada por dicho autor, sobrado concisa para buen número de nuestros lectores.

De los problemas que pueden resolverse con la recta y el círculo.—Para que un problema se resuelva por la recta y la circunferencia de círculo es necesario y suficiente, que todos y cada uno de los puntos que encadenan los datos con el resultado, y en que han de irse apoyando las construcciones, se determinen de una de estas tres maneras:

1.° Por intersección de rectas;

2.° Por la intersección de una recta y una circunferencia;

3.° Por la intersección de dos circunferencias.

Examinemos estos tres casos separadamente.

1.° Por intersección de rectas.—Tomando dos ejes coordenados rectangulares, las ecuaciones de ambas rectas serán

$$y = a\,x + b$$
$$y = a'x + b';$$

y las ordenadas del punto buscado, la x, por ejemplo, vendrá dada por la siguiente ecuación:

$$(a - a')\,x + b - b' = 0:$$

ó bien

$$x = -\frac{b - b'}{a - a'}:$$

es decir por una *expresión racional* de a, a', b, b': funciones conocidas de los datos y de cantidades determinadas por construcciones anteriores.

Lo que se ha dicho de x pudiera decirse de y.

2.º Por la intersección de una recta y de una circunferencia.—Las ecuaciones de ambas líneas serán:

$$y = a\,x + b$$
$$(y - y')^2 + (x - x')^2 = r^2;$$

y el valor de x se determinará eliminando y. Tendremos, pues:

$$(a\,x + b - y')^2 + (x - x')^2 = r^2:$$

ó bien

$$a^2 x^2 + 2\,a\,(b - y')\,x + (b - y')^2 + x^2 - 2\,x\,x' + x'^2 = r^2:$$

de donde

$$(a^2 + 1)\,x^2 + 2\,(a\,b - a\,y' - x')\,x + (b - y')^2 + x'^2 - r^2 = 0:$$

ecuación de segundo grado en x, de la forma

$$x^2 + A\,x + B = 0:$$

en la cual A y B son funciones racionales de los datos y de cantidades conocidas por construcciones anteriores, es decir, de a, b, x', y', r.

Otro tanto pudiera decirse de y.

3.º Por la intersección de dos circunferencias.—Representemos por

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 = r^2$$
$$(x - x'')^2 + (y - y'')^2 = r'^2$$

las ecuaciones de ambas líneas, y determinemos x.

Restando una de otra, resultará

$$2x(x'-x'')+2y(y'-y'')-x'^2+x''^2-y'^2+y''^2+r^2-r'^2=0;$$

ecuacion de primer grado en x, y cuyos coeficientes son funciones racionales de x', y', x'', y'', r, r'.

Esta ecuación, combinada con una de las anteriores, resuelve el problema y reduce el tercer caso al segundo, puesto que se trata ya de la intersección de una circunferencia y una recta.

Resulta de todo lo expuesto que las coordenadas de un punto cualquiera del problema, lo mismo de uno de los intermedios, que de los puntos definitivos, dependen de una ecuación general de segundo grado en x (si se trata de la abscisa):

$$x^2+Ax+B=0,$$

cuyos coeficientes A, B *serán funciones racionales, fraccionarias en general, de los datos y de las coordenadas de los puntos ya determinados por construcciones anteriores.*

Esta función de segundo grado podrá ser de primero y reducirse á $Cx+D=0$, en el primer caso considerado.

Observación importante.—Aunque cada punto intermedio de la serie de construcciones, así como los puntos definitivos, dependen de dos coordenadas, x, y, como estas cantidades están en todos los casos enlazadas por ecuaciones de primer grado, siempre podremos suponer eliminadas las y, con lo cual las únicas incógnitas del problema serán las abscisas x de la serie de puntos.

Podemos, pues, prescindir en lo que sigue de la cantidad y, y no considerar más que la serie de las x para todos los puntos del encadenamiento de construcciones.

Consecuencia final.—La incógnita x_1 del primer punto que se determine dependerá generalmente de una ecuación

$$x_1^2+Ax_1+B=0,$$

en la cual A y B serán *funciones racionales* de los datos p, q, r..., pudiendo ser en algún caso esta ecuación de primer grado.

Del mismo modo la segunda incognita x_2 dependerá de una ecuación

$$x_2^2 + A_1 x_2 + B_1 = 0,$$

en la cual A y B serán *funciones racionales* de p, q, r... x_1; es decír, de los datos y de la incognita anterior x_1.

El tercer punto x_3, vendrá dado por una ecuación

$$x_3^2 + A_2 x_3 + B_2 = 0,$$

en la cual A_2 y B_2 serán *funciones racionales* de los datos p, q, r... y de las dos incognitas x_1, x_2 ya determinadas.

Y en general, la incognita x_m dependerá de una ecuación de segundo grado (que á veces podrá ser de primero).

$$x_m^2 + A_{m-1} x_m + B_{m-1} = 0,$$

en la cual los coeficientes A_{m-1} y B_{m-1} serán funciones racionales de los datos p, q, r... y de las incógnitas anteriores ya determinadas x_1, x_2, x_3, ... x_{m-1}.

Por último, aparecerá la verdadera incognita del problema x_n en una ecuación de segundo grado

$$x_n^2 + A_{n-1} x_n + B_{n-1} = 0,$$

cuyos coeficientes A_{n-1} y B_{n-1} serán funciones racionales de los datos p, q, r... y de las incógnitas intermedias x_1, x_2, x_3 ... x_{n-1}.

Verdad es que alguna de dichas ecuaciones podrá ser de primer grado y de la forma

$$A_{s-1}\, x_s + B_{s-1} = 0,$$

siendo A_{s-1} y B_{s-1} funciones racionales de los datos p, q, r... y de las incógnitas anteriores x_1, x_2... x_{s-1}; pero en este caso podemos despejar x_s de dicha ecuación y sustituir su valor en todas las ecuaciones restantes, con lo cual no habrán dejado de ser funciones racionales de x_1, x_2, x_3... todos los coeficientes, ni dejarán de ser de segundo grado las ecuaciones que lo sean, y se habrá disminuído una ecuación, desapareciendo la incógnita intermedia x_s.

De aquí se deduce, como consecuencia final, que todo problema susceptible de ser resuelto por rectas y circunferencias depende de una serie de ecuaciones de segundo grado de esta forma:

$$\left.\begin{array}{l} x_1^2 + A\,x_1 + B = 0 \\ x_2^2 + A_1 x_2 + B_1 = 0 \\ x_3^2 + B_2 x_3 + B_2 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1}^2 + A_{n-2} x_{n-1} + B_{n-2} = 0 \\ x_n^2 + A_{n-1} x_n + B_{n-1} = 0 \end{array}\right\} \quad (1)$$

Todas las ecuaciones de primer grado habrán desaparecido como queda dicho, y podremos además suponer *que el número de estas ecuaciones es el* MENOR POSIBLE, *ó que se ha planteado el problema en forma correcta, eliminando las incógnitas inútiles*. En estas ecuaciones la significación de cada letra es la ya explicada, y el subíndice de las A, B, indica las incógnitas intermedias que estas funciones contienen;

$x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ es la serie de incógnitas, por el orden en que se van determinando, hasta llegar á la verdadera incógnita del problema, ó sea á x_n;

p, q, r... son los datos; y

A, B son funciones racionales de p, q, r...

A_1, B_1 funciones racionales también de p, q, r... x_1

A_2, B_2 de p, q, r... x_1, x_2

....

A_{n-1}, B_{n-1} de p, q, r... x_1, z_2, $x_3 \ldots x_{n-1}$

SIMPLIFICACIÓN DE LOS COEFICIENTES A, B.—Cada uno de estos coeficientes es, según hemos demostrado, una *función racional*, en general fraccionaria, de los datos p, q, r... y de las incógnitas anteriores á la ecuación de que dicha cantidad A ó B forma parte.

Primera simplificación.—Consideremos uno de ellos, A_m, por ejemplo: lo que de él digamos se podrá decir de todos los restantes.

A_m será en general fraccionario, y el numerador y el denominador serán polinomios enteros de p, q, r... x_1, x_2, x_3... x_m. Uno de estos polinomios, ordenados por relación á x_m, tendrá la forma

$$S_0 x_m^s + S_1 x_m^{s-1} + S_2 x_m^{s-2} + \ldots\ldots + S_s \ldots\ldots (S)$$

siendo S_0, S_1, S_2... funciones enteras de p, q, r... x_1, x_2, x_3... x_{m-1}; pero como existe la relación anterior á la

$$x_{m+1}^2 + A_m x_{m+1} + B_m = 0,$$

en que entran A_m y B_m; es decir, la relación

$$x_m^2 + A_{m-1} x_m + B_{m-1} = 0,$$

siendo A_{m-1} y B_{m-1} funciones racionales de p, q, r... x_1, x_2... x_{m-1}, es evidente que sustituyendo

$$x_m^2 = - A_{m-1}\, x_m - B_{m-1} \text{ en } S_0 x_m^s + S_1 x_m^{s-1} + \ldots + S_s$$

cuantas veces sea preciso, se irá rebajando en esta última el grado s de mitad en mitad en las potencias pares, y en las potencias impares, disminuídas en una unidad, de mitad en mitad también. Por ejemplo x_m^6 se convertirá en $(x_m^2)^3 = (-A_{m-1}\, x_m - B_{m-1})^3$: es decir en un polinomio de tercer grado; y asimismo $x_m^7 = x_m\, x_m^6 = x_m\,(-A_{m-1} x_m - B_{m-1})^3$, ó su polinomio de cuarto grado.

En resumen: el polinomio (S) se reducirá á una expresión de primer grado en x_m.

Lo mismo puede decirse del denominador: con lo cual resulta que todos los coeficientes, A_m, B_m, por ejemplo, serán de esta forma, después de efectuar las debidas operaciones:

$$A_m \text{ ó } B_m = \frac{C_{m-1}x_m + D_{m-1}}{E_{m-1}x_m + F_{m-1}},$$

siendo C_{m-1}, D_{m-1}, E_{m-1}, F_{m-1} funciones racionales y enteras de p, q, r... x_1, x_2... x_{m-1}, que para indicar que contienen hasta x_{m-1} llevan el subíndice $(m-1.)$

Segunda simplificación. Pero aun pueden simplificarse más estas cantidades A, B, y tomar forma entera en x_m.

Dividiendo $x_m^2 + A_{m-1}x_m + B_{m-1}$ por $E_{m-1}x_m + F_{m-1}$ tendremos

$$x_m^2 + A_{m-1}x_m + B_{m-1} = 0 = [E_{m-1}x_m + F_{m-1}] \times$$

$$\left[\frac{1}{E_{m-1}}x_m + \left(A_{m-1} - \frac{F_{m-1}}{E_{m-1}}\right)\frac{1}{E_{m-1}}\right] + B_{m-1} - \left(A_{m-1} - \frac{F_{m-1}}{E_{m-1}}\right)\frac{F_{m-1}}{E_{m-1}};$$

y como todas las cantidades que llevan el subíndice $m-1$ son funciones racionales de p, q, r... x_1... x_{m-1} podremos abreviadamente escribir

$$0 = [E_{m-1}x_m + F_{m-1}]\,[G_{m-1}x_m + H_{m-1}] + L_{m-1}$$

de donde

$$\frac{1}{E_{m-1}x_m + F_{m-1}} = -\left(\frac{G_{m-1}}{L_{m-1}}x_m + \frac{H_{m-1}}{L_{m-1}}\right):$$

con lo cual hemos sustituído á la expresión lineal del denominador otra de forma entera en x_m'

Resultará, pues, esta expresión:

$$\frac{C_{m-1}x_m + D_{m-1}}{E_{m-1}x_m + F_{m-1}} = (C_{m-1}x_m + D_{m-1})\frac{1}{E_{m-1}x_m + F_{m-1}}$$

$$= -(C_{m-1}x_m + D_{m-1})\left(\frac{G_{m-1}}{L_{m-1}}x_m + \frac{H_{m-1}}{L_{m-1}}\right);$$

y, aunque es de segundo grado en x_m, por medio de la ecuación $x^2_m+A_{m-1}x_m+B_m=0$ puede eliminarse de ella la segunda potencia x^2_m, reduciéndose á una función lineal de x_m.

Es decir, que todos los coeficientes... A_m, B_m... serán de la forma

$$A'_{m-1}x_m+B'_{m-1}$$

siendo A'_{m-1} y B'_{m-1} funciones racionales de p, q, r..... x_1, x_2..... x_{m-1}, en general fraccionarias.

De este modo queda demostrado que todo problema que pueda resolverse por rectas y circunferencias dependerá de una serie de ecuaciones,

$$\left.\begin{array}{l} x_1^2+Ax_1+B=0, \\ x_2^2+A_1x_2+B_1=0, \\ x_3^2+A_2x_3+B_2=0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ x_m^2+A_{m-1}x_m+B_{m-1}=0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{n-1}^2+A_{n-2}x_{n-1}+B_{n-2}=0, \\ x_n^2+A_{n-1}x_n+B_{n-1}=0, \end{array}\right\} \quad (1')$$

en las cuales podemos suponer:

1.° Que el número de estas ecuaciones ES EL MENOR POSIBLE, evitando incógnitas y ecuaciones intermedias é inútiles.

2.° Que los coeficientes

A , B son funciones racionales de p, q, r... ;

A_1, B_1 funciones lineales de x_1, con coeficientes racionales de p, q, r...;

A_2, B_2 funciones lineales de x_2, con coeficientes racionales de p, q, r... x_1;

A_3, B_3 funciones lineales de x_3, con coeficientes racionales de p, q, r... x_1, x_2;

....

A_{m-1} B_{m-1} funciones lineales de x_{m-1}, con coeficientes racionales de $p, q, r\ldots x_1, x_2, \ldots x_{m-2}$;

. . . .

A_{n-1}, B_{n-1} funciones lineales de x_{n-1}, con coeficientes racionales de $p, q, r\ldots x_1, x_2\ldots x_{n-2}$;

Con estos antecedentes podemos establecer tres teoremas importantes.

Teorema 1.° Una cualquiera de las ecuaciones, por ejemplo

$$x^2_{m+1}+A_m x_{m+1}+B_m=0, \qquad (2)$$

no puede ser satisfecha por una función racional

$$x_{m+1}=f\,(p,\ q,\ r\ldots x_1,\ x_2,\ldots x_m)$$

de los datos y de alguno de los sistemas de raíces de las ecuaciones precedentes.

Demostración.—Si un valor racional

$$x_{m+1}=f\,(p,\ q,\ r\ldots x_1,\ldots x_m)$$

satisficiese á la ecuación (2), poniendo x_{m+1} en (2) tendríamos

$$f^2+A_m f+B_m=0;$$

pero esta es una función racional de $p, q, r\ldots x_1\ldots x_m$, puesto que f lo es por hipótesis, y lo son A_m y B_m: luego podrá ponerse, empleando el método indicado, bajo la forma lineal

$$A'_{m-1}x_m+B'_{m-1}=0,$$

siendo A'_{m-1} y B'_{m-1} funciones racionales de

$$p,\ q,\ r\ldots x_1\ldots x_{m-1}.$$

Este valor de x_m, sustituído en

$x^2_m+A_{m-1}x_m+B_{m-1}=0$, daría $A'_{m-2}x_{m-1}+B'_{m-2}=0$.

El valor de x_{m-1}, deducido de la anterior, sustituído en $x^2_{m-1}+A_{m-2}x_{m-1}+B_{m-2}=0$, daría también $A'_{m-3}x_{m-2}+B'_{m-3}=0$.

Y así sucesivamente hasta $A'x_1+B'=0$: es decir que $x^2_1+A\,x_1+B=0$, cuyos coeficientes A y B son funciones racionales de $p, q, r\ldots$, tiene una raíz $x_1=-\dfrac{B'}{A'}$ función racional de

p, q, r...: de donde se deduce que la otra raíz lo es también, por ser igual al cociente de B dividido por $-\frac{B'}{A'}$.

Cada uno de estos valores de x_1, sustituído en la serie de ecuaciones (1'), da un sistema de $n-1$ ecuaciones (puesto que la primera desaparece) con una incógnita menos, la x_1, que desaparece también.

De aquí resulta que el sistema (1') podrá reducirse á menor número de ecuaciones, lo cual es contra la hipótesis.

La demostración caería en defecto si una de las relaciones intermedias, la que se obtiene, por ejemplo, poniendo el valor de x_s, deducido de $A'_{s-1}\,x_s+B'_{s-1}=0$, en $x_s^2+A_{s-1}x_s+B_{s-1}=0$, en vez de reducirla á $A'_{s-2}\,x_{s-1}+B'_{s-2}=0$, la redujera á una identidad $0=0$; pero esto querría decir que $x_s=-\frac{B'_{s-1}}{A'_{s-1}}$ era una raíz de $x_s^2+A_{s-1}x_s+B_{s-1}=0$ *para cualquier valor de* x_1, x_2, x_3... x_{s-1}; y entonces podríamos eliminar x_s de todas las ecuaciones que siguen á $x_s^2+A_{s-1}x_s+B_{s-1}=0$, poniendo sus dos valores en dichas ecuaciones, con lo cual obtendríamos dos series distintas de $n-1$ ecuaciones con $n-1$ incógnitas, á saber:

Primera serie: Las anteriores y siguientes á la

$$x_s^2+A_{s-1}x_s+B_{s-1}=0,$$

poniendo en ellas la *primera raíz* de x_s.

Segunda serie: Las anteriores y siguientes también, poniendo por x_s la *segunda raíz*.

Se suprimirá la ecuación $x_s^2+A_{s-1}x_s+B_{s-1}=0$ y la incognita x_s.

Y se obtendrá así un resultado contrario á la hipótesis fundamental de un número mínimo de ecuaciones.

Observación importante.—Para comprender bien la demostración precedente, rigorosa en verdad, pero un poco sutil, hay que fijarse en las condiciones del problema: las cantidades

x_1, x_2, x_3... no tienen un valor único, sino multiplicidad de valores.

Por ejemplo, x_1 tiene dos valores.

En la segunda ecuación de las (1') á cada valor de x_1 que entra en A_1, B_1, corresponden dos valores para x_2.

En la tercera ecuación de la misma serie (1') á cada sistema de valores de x_1, x_2, que son cuatro, corresponden otros dos para la incógnita, y por lo tanto resultan ocho valores para x_3; y así sucesivamente: de modo que hay muchos sistemas de valores para $x_1, x_2, \ldots x_n$, como habíamos dicho.

Ahora bien, la ecuación $x_{m+1} = f\,(p, q, r \ldots x_1, x_2 \ldots x_m)$ sólo suponemos que existe *para uno de estos sistemas*, y por consiguiente no es general para todos los sistemas. Si lo fuese, la demostración anterior sería inútil, porque bastaba eliminar x_{m+1} de todas las ecuaciones, con lo que tendríamos una ecuación menos y una incógnita menos, lo cual es contra la hipótesis de haberse reducido el sistema (1') al menor número de ecuaciones.

Teorema 2.º La ecuación final en x_n, que es la del problema y se obtiene eliminando $x_1, x_2, x_3 \ldots x_{n-1}$ del sistema (1'), es del grado 2^n, siempre en la hipótesis de un mínimo de ecuaciones.

Demostración.—La demostración está reducida á repetir lo dicho en la *observación* precedente.

La primera ecuación da dos valores x'_1, x''_1 para x_1.

Poniendo cada uno de estos valores en la segunda ecuación en A_1 y B_1, para cada uno dicha ecuación dará otros dos valores, puesto que es de segundo grado, y tendremos cuatro sistemas, ó sea 2^2, á saber:

$$\text{para } x'_1 \begin{cases} x'_2 \\ x''_2 \end{cases} \qquad\qquad \left.\begin{matrix} x'_1, & x'_2 \\ x'_1, & x''_2 \end{matrix}\right\}$$

$$\text{para } x''_1 \begin{cases} x'''_2 \\ x^{IV}_2 \end{cases} \qquad\qquad \left.\begin{matrix} x''_1, & x'''_2 \\ x''_1, & x^{IV}_2 \end{matrix}\right\}.$$

Sustituyendo estos cuatro grupos en la tercera ecuación, es decir, en A_2, B_2, para cada uno dicha ecuación dará dos valores ó en totalidad $4 \times 2 = 2^2 \times 2 = 2^3$: es decir, estos ocho sistemas:

$$\text{para}\begin{cases} x'_1,\ x'_2 \begin{cases} x'_2 \\ x''_3 \end{cases} & \qquad \left.\begin{matrix} x'_1,\ x'_2,\ x'_3 \\ x'_1,\ x'_2,\ x''_3 \end{matrix}\right\}, \\ x'_1,\ x''_2 \begin{cases} x'''_3 \\ x^{IV}_3 \end{cases} & \qquad \left.\begin{matrix} x'_1,\ x''_2,\ x'''_3 \\ x'_1,\ x''_2,\ x^{IV}_3 \end{matrix}\right\}, \\ x''_1,\ x'''_2 \begin{cases} x^{V}_3 \\ x^{VI}_3 \end{cases} & \qquad \left.\begin{matrix} x''_1,\ x'''_2,\ x^{V}_3 \\ x''_1,\ x'''_2,\ x^{VI}_3 \end{matrix}\right\}, \\ x''_1,\ x^{IV}_2 \begin{cases} x^{VII}_3 \\ x^{VIII}_3 \end{cases} & \qquad \left.\begin{matrix} x''_1,\ x^{IV}_2,\ x^{VII}_3 \\ x''_1,\ x^{IV}_2,\ x^{VIII}_3 \end{matrix}\right\}. \end{cases}$$

Sustituyendo estos ocho sistemas en la cuarta ecuación, á cada uno corresponderán dos valores para x_4 y tendremos diez y seis sistemas, $= 2^4$, y una ecuación del grado diez y seis en x_4 y cantidades conocidas.

En general la ecuación n.^{ma}, que sólo contendrá x_n, p, q, r..., y que será la ecuación del problema, ascenderá al grado 2^n, que es precisamente lo que nos proponíamos demostrar.

Así, pues, en problemas bien planteados, sólo podrán resolverse con la recta y el círculo los que den una ecuación final del grado 2^n: resultado importantísimo.

Teorema 3.º La ecuación en x_n del grado 2^n, que da todas las soluciones del problema, y ninguna solución extraña; es decir, que puede descomponerse en *n* ecuaciones *sucesivas*, de segundo grado (no en *n* factores: hay que fijarse bien en esto) cada una de las cuales podrá resolverse por intersecciones de rectas y circunferencias, por ser de segundo grado; dicha ecuación, repetimos, *es una ecuación irreducible:* ó de otro modo, no podrá tener raíces comunes con ninguna ecuación de grado menor y cuyos coeficientes sean funciones racionales de los datos p, q, r..., conforme la definición de las ecuaciones irreducibles pide.

Demostración.—Supongamos que así no fuese y que tuvieran una raíz común la ecuación

$$x_n^2+A_{n-1}x_n+B_{n-1}=0,$$

y la ecuación $F(x_n)=0$, cuyos coeficientes también suponemos que son cantidades racionales de p, q, r...

Decir que ambas ecuaciones tienen una raíz común, quiere decir, que un mismo valor de x_n satisface á $F(x_n)=0$, y á $x_n^2+A_{n-1}x_n+B_{n-1}$, poniendo en esta última los valores de $x_1, x_2, x_3... x_{n-1}$ que con x_n forman uno de los 2^n sistemas de las ecuaciones propuestas.

Ahora bien, como $F(x_n)=0$ es una función racional y entera en x_n, eliminando, como ya hicimos anteriormente, las potencias superiores de x_n por medio de $x_n^2+A_{n-1}x_n+B_{n-1}=0$, tendremos una ecuación lineal en x_n, de la forma $A'_{n-1}x_n+B'_{n-1}=0$, en la cual A'_{n-1} y B'_{n-1} serán funciones racionales de p, q, r... $x_1, x_2... x_{n-1}$ (y por eso ponemos á A'_{n-1}, B'_{n-1} el subíndice $n-1$: para recordarlo): advirtiendo que estas x_1, $x_2, x_3... x_{n-1}$. son únicamente los valores que con x_n forman parte del sistema á que la raíz comun x_n pertenece.

Tendremos, pues, en vez de $F(x_n)=0$,..$A'_{n-1}x_n+B'_{n-1}=0$.

Pero es preciso que A'_{n-1} y B'_{n-1} sean nulas ambas, es decir, que la ecuación precedente sea idéntica; porque si no la ecuación $x_n^2+A_{n-1}x_n+B_{n-1}=0$ quedaría satisfecha por el valor $x_n=-\frac{B'_{n-1}}{A'_{n-1}}$, es decir, por una función racional de p, q, r... $x_1, x_2... x_{n-1}$: lo cual, por el primero de estos tres teoremas, hemos demostrado que es imposible.

Tendremos pues:

$$A'_{n-1}=0; \; B'_{n-1}=0.$$

Cada una de estas dos ecuaciones se encuentra en el mismo caso que $F(x_n) = 0$: pudiendo ponerse,

$$A'_{n-1}=0 \text{ bajo la forma } A'_{n-2}\, x_{n-1}+B'_{n-2}=0; \text{ y}$$

$$B'_{n-1}=0 \text{ bajo la forma } A''_{n-2} x_{n-1}+B''_{n-2}=0.$$

Y por la misma razón, es decir, para que los valores deducidos para x_{n-1} no satisfagan á $x^2_{n-1}+A_{n-2}x_{n-1}+B_{n-2}=0$, debe suponerse que

$$A'_{n-2}=0,\ B'_{n-2}=0,\ A''_{n-2}=0,\ B''_{n-2}=0.$$

A cada una de estas ecuaciones, que se hallan en el mismo caso de $F(x_n)=0$, es decir que son funciones racionales de p, q, r... x_1, x_2... x_{n-2}, se le puede dar la forma lineal en x_{n-2}, y se deberán igualar sus coeficientes á cero.

Siguiendo este procedimiento, llegaremos á una serie de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{llll} A'_1=0, & A''_1=0, & A'''_1=0, & \ldots\ldots \\ B'_1=0, & B''_1=0, & B'''_1=0, & \ldots\ldots \end{array}\right\} \quad (3)$$

cada una de las cuales será una función racional de p, q, r... x_1, que, por medio de la ecuación $A\,x_1^2 + A\,x_1 + B = 0$, debe ser idénticamente nula: de suerte que en último análisis demostraremos que

$$A'=0,\ A''=0,\ A'''=0\ldots..$$

$$B'=0,\ B''=0,\ B'''=0\ldots..$$

Pero en A' y B'..... no entran ya más que cantidades conocidas, p, q, r..; de suerte que se anulan por sí mismas, independientemente de los valores de x_1.

Luego cada una de las ecuaciones $A'x_1+B'=0$ se reducirá á cero para las dos raíces de $x_1^2+A\,x_1+B=0$, ó sea para los dos valores de x_1: tanto da, en efecto, poner en vez de x_1 el valor x'_1, como x''_1: siempre $A'x'_1+B'$ y $A'x''_1+B'$ serán nulas, porque lo son sus coeficientes.

Y lo mismo puede decirse de todas las cantidades de la serie (3), y de todas las series anteriores análogas á ésta.

De aquí resulta, como consecuencia final, que la expresión de donde hemos partido, la $A'_{n-1}x_n+B'_{n-1}$, ó su equivalente $F(x_n)$, será nula para todos los sistemas de valores de x_1, x_2, x_3...: es decir, que la $F(x_n)=0$ será nula para todos los valores de x_n.

O, de otro modo: $F(x_n)=0$ admite todas las raíces x_n de la ecuación final del sistema (1'); y esto nos prueba que $F(x_n) = 0$, ó es la misma ecuación final ó la contiene como factor, y es, por lo tanto, de grado superior, y no, como sería preciso para que dicha ecuación final fuese reducible, de grado inferior á ésta.

En definitiva, la hipótesis es inadmisible: el hecho de contener $F(x_n)=0$ una sola raíz x_n obliga á dicha ecuación á contenerlas todas.

Resumen—1.° Toda *ecuación* final de un problema, susceptible de ser resuelto por la línea recta y la circunferencia de círculo, puede considerarse como la ecuación final de un sistema análogo al (1').

2.° Su grado será precisamente, en la hipótesis del número mínimo de ecuaciones, 2^n.

3.° Dicha ecuación final debe ser precisamente *irreducible*.

Método general.—El método general es bien sencillo en teoría, aunque de tal complicación material en la práctica, que en muchos casos es inaplicable.

Todo está reducido, una vez puesto en ecuación el problema de que se trata, á ver si dicha ecuación puede descomponerse en el sistema (1').

Supongamos que el problema geométrico que nos ocupe está expresado por la ecuación

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \dots + Rx + S = 0.$$

1.° Veremos, ante todo, si esta ecuación es irreducible: si lo es, podemos seguir adelante; si no lo fuese, se descompondría en sus factores irreducibles, á cada uno de los cuales sería preciso aplicar lo que sigue. Y notemos que el método de Wantzel supone ya la resolución de este primer problema: *dada una ecuación algebráica de una incógnita, determinar si es ó no irreducible; y, dado que no lo sea, descomponerla en factores irreducibles.*

Luego volveremos sobre esta cuestión previa.

2.º Suponiendo que la ecuación del problema sea irreducible, atenderemos al exponente m de su grado: si es de la forma 2^n, podrá tal vez ser el problema de los que se resuelven con rectas y circunferencias; *pero, si no lo es, puede desde luego afirmarse que no es susceptible de tal resolución.* Este es un punto importantísimo, porque en varios casos la simple inspección del exponente m nos permite negar la posibilidad de una solución en el sentido que se pretende.

3.º Supongamos ya que la ecuación

$$x_n^{2^n} + Px_n^{2^n-1} + Qx_n^{2^n-2} + \ldots\ldots + S = 0 \quad (4)$$

sea irreducible y que su exponente afecte la forma 2^n.

En este caso es preciso obtener la ecuación final del siguiente sistema (4') é identificarla con la (4), puesto que ambas representan el mismo problema.

Fijémonos, pues, en el sistema fundamental de las ecuaciones susceptibles de ser resueltas con la recta y el círculo:

$$\left.\begin{array}{l}
x_1^2 + A\,x_1 + B = 0, \\
x_2^2 + A_1x_2 + B_1 = 0, \\
x_3^2 + A_2x_3 + B_2 = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_{n-2}^2 + A_{n-3}x_{n-2} + B_{n-3} = 0, \\
x_{n-1}^2 + A_{n-2}x_{n-1} + B_{n-2} = 0, \\
x_n^2 + A_{n-1}x_n + B_{n-1} = 0.
\end{array}\right\} \quad (4')$$

En *teoría,* parece á primera vista que la eliminación de las incógnitas intermedias x_1, x_2, $x_3 \ldots x_{n-1}$, podría efectuarse directamente por los métodos generales de eliminación; pero no ha de olvidarse que

en A, B entran $p, q, r\ldots$
en A_1, B_1 $p, q, r\ldots\ x_1$
en A_2, B_2 $p, q, r\ldots\ x_1, x_2$;

y así sucesivamente: es decir que es preciso poner en evidencia dichas incógnitas auxiliares para efectuar la verdadera eliminación.

A_{n-1}, B_{n-1}, son lineales en x_{n-1}: de modo que pueden ponerse bajo esta forma:

$$A_{n-1}=a_{n-2}x_{n-1}+a'_{n-2}\,;\ B_{n-1}=b_{n-2}x_{n-1}+b'_{n-2}$$

siendo los coeficientes a_{n-2}, a'_{n-2}, b_{n-2}, b'_{n-2}, como el subíndice lo indica, funciones racionales de $p, q, r\ldots\ x_1, x_2\ldots\ x_{n-2}$

Poniendo estos valores en la última de las ecuaciones (4'), tendremos:

$$x_n^2+(a_{n-2}x_{n-1}+a'_{n-2})\,x_n+b_{n-2}x_{n-1}+b'_{n-2}=0.$$

Pero esta ecuación es de primer grado en x_{n-1}, de suerte que obtendremos resolviéndola:

$$x_{n-1}=-\frac{x_n^2+a'_{n-2}x_n+b'_{n-2}}{a_{n-2}x_n+b_{n-2}}\,;$$

y sustituyendo este valor en la penúltima de (1'), resultará:

$$\left(\frac{x_n^2+a'_{n-2}x_n+b'_{n-2}}{a_{n-2}x_n+b_{n-2}}\right)^2-A_{n-2}\left(\frac{x_n^2+a'_{n-2}x_n+b'_{n-2}}{x_{n-2}x_n+b_{n-2}}\right)+B_{n-2}=0$$

Esta ecuación es de 4.° grado en x_n; segun los subíndices, sólo entran en ella $p, q, r\ldots\ x_1, x_2\ldots\ x_{n-2}$; y puede ponerse en evidencia x_{n-2}, dando á a_{n-2}, a'_{n-2}, b_{n-2}, b'_{n-2}, A_{n-2}, B_{n-2} la forma lineal en x_{n-2}; es decir que:

$$
\begin{aligned}
a_{n-2} &= a_{n-3}\, x_{n-2} + b_{n-3}\\
b_{n-2} &= a'_{n-3}\, x_{n-2} + b'_{n-3}\\
a'_{n-2} &= a''_{n-3}\, x_{n-2} + b''_{n-3}\\
b'_{n-2} &= a'''_{n-3}\, x_{n-2} + b'''_{n-3}\\
A_{n-2} &= a^{IV}_{n-3}\, x_{n-2} + b^{IV}_{n-3}\\
B_{n-2} &= a^{V}_{n-3}\, x_{n-2} + b^{V}_{n-3}
\end{aligned}
$$

Tendremos, pues, para la ecuación de 4.° grado en x_n:

$$x_n^4 + M_1 x_n^3 + M_2 x_n^2 + M_3 x_n + M_4 = 0,$$

siendo M_1, M_2, M_3, M_4, funciones racionales de

$$a_{n-3},\ a'_{n-3} \ldots\ b_{n-3},\ b'_{n-3} \ldots\ x_{n-2}$$

Pero todas estas funciones pueden convertirse en funciones lineales de x_{n-2} por medio de la ecuación

$$x_{n-2}^2 + A_{n-3} x_{n-2} + B_{n-3} = 0.$$

Luego tendremos

$$x_n^4 + \left(M_1' x_{n-2} + M_1''\right) x_n^3 + \left(M_2' x_{n-2} + M_2''\right) x_n^2 +$$

$$\left(M_3' x_{n-2} + M_3''\right) x_n + M_4' x_{n-2} + M_4'' = 0;$$

y como esta última ecuación es lineal en x_{n-2}, resultará, despejando:

$$x_{n-2} = -\frac{x_n^4 + M_1'' x_n^3 + M_2'' x_n^2 + M_3'' x_n + M_4''}{M_1' x_n^3 + M_2' x_n^2 + M_3' x_n + M_4'}$$

cuyo valor, sustituído en

$$x_{n-2}^2 + A_{n-3} x_{n-2} + B_{n-3} = 0,$$

dará una ecuación de 8.° grado en x_n.

Los nuevos coeficientes (M) serán funciones racionales de $a_{n-3} \ldots b_{n-3} \ldots A_{n-3}$ y B_{n-3}; y como todas estas cantidades pueden ponerse bajo la forma lineal $a^s_{n-4} x_{n-3} + b^s_{n-4}$, en la cual a^s_{n-4} y b^s_{n-4} son funciones de $p, q, r \ldots x_1, x_2 \ldots x_{n-4}$, estaremos siempre en el mismo caso: la ecuación de 8.° grado en x_n podrá ponerse bajo forma lineal respecto á x_{n-4}; se podrá despejar x_{n-4}; sustituirla en

$$x^2_{n-4} + A_{n-5} x_{n-4} + B_{n-5} = 0;$$

y obtener una ecuación del grado 16. Y así sucesivamente, hasta llegar á las primeras ecuaciones del grupo (4'),

Al obtener la ecuación del grado 2^n, sus coeficientes serán funciones de $a, a', a'' \ldots b, b', b'' \ldots A, B$: cantidades que ya no llevan subíndice, porque no son funciones de ninguna x; sino que *deben ser* funciones racionales (desconocidas aún) de $p, q, r \ldots$: es decir, de los datos.

Sea dicha ecuación

$$x_n^{2^n} + f_1(a, a' \ldots b, b' \ldots A, B)\, x_n^{2^n-1} + f_2(a, a' \ldots b, b' \ldots A, B)\, x_n^{2^n-2} + \ldots$$

$$\ldots + f_n(a, a' \ldots b, b' \ldots A, B) = 0 \qquad (5).$$

Esta ecuación ha de ser idéntica á la (4), que es la del problema; y tendremos, identificando los coeficientes y recordando que $P, Q, R \ldots S$ son funciones de $p, q, r \ldots$

$$\left.\begin{array}{l} f_1(a, b \ldots a', b' \ldots A, B) = P(p, q, r \ldots) \\ f_2(a, b \ldots a', b' \ldots A, B) = Q(p, q, r \ldots) \\ f_3(a, b \ldots a', b' \ldots A, B) = R(p, q, r \ldots) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(a, b \ldots a', b' \ldots A, B) = S(p, q, r \ldots) \end{array}\right\} (6)$$

Los datos son $p, q, r \ldots$: es decir, los propios del problema de que se trata.

Y las incógnitas son $a, b \ldots a', b' \ldots A, B$, que, para la posibilidad del problema, deben ser funciones racionales de $p, q, r \ldots$

Si del sistema (6) pueden deducirse a, b... a′, b′... A, B en *función racional* de p, q, r... el problema será posible con la recta y la circunferencia, y fácilmente podrán formarse las ecuaciones (4), toda vez que conoceremos A, B, A_1, B_1, etc., pues conocemos sus elementos.

Y si hay imposibilidad absoluta de expresar dichas cantidades a, b... a′, b′... A, B, en la forma indicada, imposible será también resolver el problema por intersecciones de rectas y circunferencias.

Tal es el método de Wantzel; y basta la exposición hecha para comprender su complicación en los cálculos y desarrollos, cuando el grado de la ecuación final á que conduce pasa del 8.°

Notemos aún que la resolución del problema general d que se refiere, supone resuelto este otro:

Dado un sistema de ecuaciones, investigar si pueden resolsolverse por funciones racionales de los datos.

Número de incógnitas. En rigor, el método de Wantzel conduce á un sistema en que el número de incógnitas es muy superior al de ecuaciones; pero puede reducirse dicho número al verdadero, como indicaremos más adelante en un ejemplo.

Esto no solamente es preciso, sino que simplifica los cálculos en extremo.

Problemas de que depende el problema principal.—Hemos visto que el problema principal depende de estos dos problemas, en general dificilísimos:

1.° Dada una ecuación de forma entera con una incógnita, ó en general, un sistema de varias ecuaciones de coeficientes racionales, investigar si admiten como solución valores racionales de las incógnitas.

2.° Dada una ecuación entera con una incógnita, y cuyos coeficientes son *funciones racionales* de los datos, decidir si la ecuación es *irreducible.*

Estos problemas, en rigor, se enlazan entre sí con cierta dependencia, como vamos á ver.

Primer problema— Sea la ecuación:

$$x^m + P\,(p,\ q,\ r\ldots)\ x^{m-1} + Q\,(p,\ q,\ r\ldots)\ x^{m-2} + \ldots$$
$$+ S\,(p,\ q,\ r\ldots) = 0$$

en la que P, Q, R. . son funciones racionales de los datos p, q, r...

En rigor, este problema es idéntico en el fondo al de la resolución en números enteros de las ecuaciones de grado superior, y puede tratarse por el mismo procedimiento.

Debe empezarse por convertir todos los coeficientes en funciones enteras, siendo el coeficiente de x^m la unidad.

Después se descompondrá S (p, q, r..,) en sus factores racionales, simples y enteros, ó sea en funciones irreducibles; y si existen raíces de forma entera en p, q, r... entre estos factores deberán hallarse: basta, pues, ensayar cada uno por los métodos conocidos, ó sustituyéndolos directamente en la ecuación, y viendo si la reducen á la identidad $0 = 0$.

Pero esto, que tan fácilmente se dice, es de una complicación enorme en la mayor parte de los casos, y además supone la solución del segundo de los problemas indicados: á saber la descomposición de S (p, q, r...) en factores irreducibles racionales y enteros, funciones de p, q, r...

Wantzel propone otro método que parece más sencillo, aunque en el fondo sea tan complicado como el anterior.

Hé aquí su procedimiento.

Si existe una raíz de forma entera f (p, q, r...), de la ecuación $x^m + P x^{m-1} ... + S = 0$ (transformada previamente en otra de coeficientes enteros y de coeficiente 1 para x^m), aquella raíz, f (p, q, r...), que deberá ser un divisor de S, ordenada con relación á p, por ejemplo, podrá también escribirse de este modo:

$$a_0 p^t + a_1 p^{t-1} + ... + a_t;$$

siendo a_0, a_1, a_2... a_t funciones enteras de q, r.... Pero aunque no conozcamos el valor de t, no podrá ser superior al de la misma cantidad en S (p, q, r...): admitamos que sea igual, y pongamos $x = a_0 p^t + a_1 p^{t-1} + a_2 p^{t-2} ... + a_t$ en la ecuación propuesta.

Ordenada ésta, que debe ser una identidad en p, q, r..., por relación á p, todos los coeficientes deben ser nulos, y tendremos un sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l}\pi_1\,(a_0,\ a_1,\ a_2\ldots\ P,\ Q,\ R\ldots)=0\\ \pi_2\,(a_0,\ a_1,\ a_2\ldots\ P,\ Q,\ R\ldots)=0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\}\quad(\pi)$$

en las cuales las incógnitas a_0, a_1, a_2.,. son funciones de q, r..: es decir, que en éstas ya no entra la p.

Expresando cada incógnita, a_0 por ejemplo, por un polinomio ordenado con relación á q, tendremos

$$a_0 = a_0' q^s + a_0'' q^{s-1} + \ldots,$$

y lo mismo

$$a_1 = a_1' q^{s'} + a_1'' q^{s'-1} + \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Sustituyendo estos valores en el sistema (π), ordenando por relación á q, é igualando los coeficientes á cero, obtendremos otro sistema, cuyas incógnitas a'_0, a''_0... a'_1, a''_1... serán funciones de r...: es decir, que habrán desaparecido p, q.

Y, continuando este procedimiento, llegaremos á ecuaciones numéricas, á las que se aplican los métodos conocidos para resolverlas en números enteros.

Muchas observaciones podrían hacerse respecto á este método, entre otras, la relativa á los exponentes t, s, s'...; pero esto nos llevaría muy lejos; y, por otra parte, el procedimiento es impracticable en la mayor parte de los casos, como hemos indicado varias veces.

Segundo problema. No menos difícil y complicado es el segundo de los dos problemas anteriores.

Sea una ecuación $A_0x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \ldots + A_m = 0$, representando por A_0, A_1, A_2.., funciones racionales y enteras de p, q, r.. Para averiguar si es irreducible hay que ver:

1.º Si admite divisores de primer grado en x;

2.º Si admite divisores de segundo grado de dicha cantidad x; y así sucesivamente.

Por ejemplo: supongamos que se quiere ver si admite ó no divisores de 3.er grado. Representando uno de éstos por $a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$, en el que a_0, a_1, a_2, a_3 han de ser funciones racionales de p, q, r..., se dividirá $A_0x^m + A_1x^{m-1} + \ldots$

por dicho divisor, y, representado el resto por $r_0x^2+r_1x+r_2-$, se igualarán á cero sus coeficientes, y tendremos:

$$\begin{array}{lll} r_0=0 & \text{ó} & r_0\,(p,\ q,\ r,\ a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots)=0 \\ r_1=0 & \text{ó} & r_1\,(p,\ q,\ r,\ a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots)=0 \\ r_2=0 & \text{ó} & r_2\,(p,\ q,\ r,\ a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots)=0 \end{array}$$

Será preciso, para que la ecuación propuesta tenga divisores de 1^er^ grado con coeficientes racionales, que puedan determinarse para a_0, a_1, a_2, a_3, ó para sus relaciones $\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0}, \frac{a_3}{a_0}$, funciones racionales (enteras ó fraccionarias) que satisfagan á las ecuaciones $r_0=0$, $r_1=0$, $r_2=0$: problema que es precisamente el primero que hemos resuelto.

También pudieran seguirse otros procedimientos; pero como estas cuestiones son del dominio del Algebra superior y las suponemos conocidas, no insistiremos sobre ellas, limitándonos á las ligerísimas indicaciones que preceden y á los *artificios prácticos* que veremos más adelante.

SIMPLICACIÓN DE LAS ECUACIONES GENERALES Y REDUCCIÓN DEL NÚMERO DE INCÓGNITAS.—Basta examinar ligeramente el método general expuesto para convencerse de que en la determinación de la ecuación final en x^n de las ecuaciones (4′) entran un número de incógnitas, a, b... a′, b′... A, B, superior al número de ecuaciones (6). Esta diferencia es aparente no más; porque puede hacerse que el número de ecuaciones y de incógnitas sea el mismo, y á la vez simplificarse dicho sistema (6) de ecuaciones fundamentales.

Estas son, como ya sabemos, las siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} x_1^2+A\ \ x_1+B\ \ =0, \\ x_2^2+A_1\,x_2+B_1=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-3}^2+A_{n-4}x_{n-3}+B_{n-4}=0, \\ x_{n-2}^2+A_{n-3}x_{n-2}+B_{n-3}=0, \\ x_{n-1}^2+A_{n-2}x_{n-1}+B_{n-2}=0, \\ x_n^2\ \ +A_{n-1}\,x_n\ \ +B_{n-1}=0; \end{array}\right\}\quad (4')$$

debiendo ademas recordar que A_{n-1} y B_{n-1} pueden ponerse bajo la forma siguiente:

$$A_{n-1} = a_{n-2}\, x_{n-1} + a'_{n-2},$$

$$B_{n-1} = b_{n-2} x_{n-1} + b'_{n-2}.$$

Pero no hay dificultad alguna en tomar como incógnita, en sustitución de x_{n-1}, la cantidad B_{n-1}: todo está reducido á despejar x_{n-1}, en función de B_{n-1}, lo cual dará

$$x_{n-1} = \frac{B_{n-1} - b'_{n-2}}{b_{n-2}}$$

y á sustituir este valor en A_{n-1}. La última ecuación del sistema (4') se convertirá así en la que sigue:

$$x_n^2 + \left(a_{n-2}\, \frac{B_{n-1} - b'_{n-2}}{b_{n-2}} + a'_{n-2}\right) x_n + B_{n-1} = 0$$

O, representando $\frac{a_{n-2}}{b_{n-2}}$, y $a'_{n-2} - \frac{a_{n-2} \times b'_{n-2}}{b_{n-2}}$, por una sola letra cada una, con el subíndice $n-2$, para indicar funciones racionales de p, q, r... x_1, x_2... x_{n-2}, tendremos esta otra:

$$x_n^2 + \left(c_{n-2}\, B_{n-1} + c'_{n-2}\right) x_n + B_{n-1} = 0$$

Y, volviendo á las notaciones primitivas, y poniendo por B_{n-1} la misma letra x_{n-1}, aunque es claro que será distinta de la anterior x_{n-1},

$$x_n^2 + \left(a_{n-2}\, x_{n-1} + a'_{n-2}\right) x_n + x_{n-1} = 0.$$

Es evidente que el valor de x_{n-1}, en función de B_{n-1}, deberá también sustituirse en la ecuación penúltima, volviendo luego para más sencillez á las notaciones ordinarias.

Esta misma transformación puede aplicarse á todas las ecuaciones del sistema (4′), tomando en la penúltima B_{n-2} por incógnita; en la anterior B_{n-3}, etc.: todo está reducido á la eliminación de x_{n-2}, x_{n-3}, x_{n-4}, etc., de este modo:

$$\begin{array}{ll} x_{n-2} \text{ en función} & \text{de } B_{n-2}, \\ x_{n-3} & \text{de } B_{n-3}, \\ x_{n-4} & \text{de } B_{n-4}, \\ \dots\dots\dots & \end{array}$$

Por este artificio al sistema (4′) puede sustituirse el siguiente, mucho más sencillo:

$$\left.\begin{array}{l} x_1^2+A\ x_1+B=0, \\ x_2^2+A_1x_2+x_1=0, \\ x_3^2+A_2x_3+x_2=0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{n-3}^2+A_{n-4}x_{n-3}+x_{n-4}=0, \\ x_{n-2}^2+A_{n-3}x_{n-2}+x_{n-3}=0, \\ x_{n-1}^2+A_{n-2}x_{n-1}+x_{n-2}=0, \\ x_n^2\ +A_{n-1}x_n\ +x_{n-1}=0. \end{array}\right\} \quad (4'')$$

Repitiendo para el grupo (4″) lo expuesto para el grupo (4′), veremos fácilmente que el número de ecuaciones es igual al de incógnitas.

En efecto: la última ecuación (4″) da *dos cantidades* con el subíndice $n-2$, á saber: los coeficientes a_{n-2} y a'_{n-2} de A_{n-1} $=a_{n-2}\ x_{n-1}+a'_{n-2}$; y, al despejar x_{n-1} y al sustituir esta cantidad en la penúltima, la ecuación de cuarto grado en x_{n-1} contendrá *tres cantidades* con dicho subíndice $n-2$, á saber: A_{n-2}, a_{n-2} y a'_{n-2}: es decir, un número igual á $4-1$.

Al sustituir á A_{n-2}, a_{n-2}, a'_{n-2}, cantidades binomias lineales con x_{n-2}, el número de cantidades con subíndice $n-3$ será $3\times2=6$; y, al poner el valor de x_{n-2} en la antepenúltima, habrá que agregar el coeficiente A_{n-3}; de suerte que el número de coeficientes con el subíndice $n-3$ en la ecuación de octavo grado en x_{n-2} será $6+1=7$, ú $8-1$.

Siguiendo de este modo, al llegar á la ecuación del grado 2^n en x_n el número de funciones incógnitas de $p, q, r\ldots$ será 2^n-1, contando sólo con A; y, agregando B, tendremos precisamente el número 2^n, que es el de las ecuaciones (6).

En rigor, de esta manera se excluye el caso posible de que $B_{n-1}, B_{n-2}, \ldots$ no sean funciones lineales de las incógnitas auxiliares, á saber: de x_{n-1} la B_{n-1}; de x_{n-2} la $B_{n-2}\ldots$; sino cantidades independientes de esta incógnita y dependientes sólo de las anteriores: es decir, de que $b\,x_{n-1}+b'$, por ejemplo, se reduzca á b', por ser $b=0$ idénticamente; pero este caso debe tratarse separadamente, ó demostrarse que está comprendido en el anterior, como indicaremos en un ejemplo.

Observación.—Debe fijarse la atención en que la mayor parte de las transformaciones indicadas respecto al sistema (1), la anterior inclusive, no han de efectuarse en cada caso, y que su único objeto es determinar la forma final y definitiva (4'') de dichas ecuaciones: son pues transformaciones de pura *demostración*, con objeto de probar que todo problema susceptible de ser resuelto por rectas y circunferencias puede expresarse por un sistema de ecuaciones sucesivas de segundo grado de la forma que indica el grupo (4''). Demostrado esto, sólo queda para cada problema la determinación de la ecuación final en x_n por el *método general* ya expuesto.

Complemento del método general. — Hemos supuesto al aplicar éste, que la ecuación (4) del problema, á saber

$$F(x)=x_n^{2^n}+P\,x_n^{2^{n-1}}+Q\,x_n^{2^{n-2}}+\ldots+S=0 \quad (4)$$

solo contenía en sus coeficientes $P, Q, R\ldots S$ números enteros ó fraccionarios, pero racionales ó funciones racionales de líneas dadas $p, q, r\ldots$; mas puede ocurrir otro caso de mayor generalidad, á saber: qne dichos coeficientes contengan como datos números irracionales: por ejemplo que p sea irracional.

En esta hipótesis p estará definido como raíz de una ecuación $f(p)=0$, ó sea

$$p^s+N_1\,p^{s-1}+N_2\,p^{s-1}+\ldots\ldots=0,$$

que podremos suponer irreducible; porque, si no lo fuera, descomponiéndola en factores irreducibles, de uno de éstos sería raíz p, y este es el que consideraríamos en vez de $f(p) = 0$.

Ahora bien, el problema consiste en averiguar si la ecuación $F(x)=0$ puede tener una raíz *función algebráica* de p, q, r... aunque algunas de estas cantidades sean irracionales, como hemos supuesto para p.

El método de las raíces enteras ó fraccionarias que da la teoría general de ecuaciones no es legítimo en este caso, porque siendo x función (aunque sea función racional) de números irracionales, como hemos supuesto que lo es p, será un número irracional también, y esto exigiría un examen especial.

Será preciso aplicar el método general, es decir, suponer,

$$x=a_0\, p^m + a_1\, p^{m-1} + \ldots\ldots + a_m,$$

siendo a_0, a_1, a_2... *funciones racionales* de q, r..., sean éstas racionales ó no, y sustituir dicho valor de x en $F(x) = 0$, determinando a_0, a_1, a_2... de modo que resulte una identidad,

Hecha esta sustitución, tendremos una ecuación ó polinomio en p, cuyos coeficientes serán funciones de las incógnitas a_0, a_1, a_2... y de los coeficientes de $F(x) = 0$; pero no podremos igualar á cero todos los coeficientes de las potencias de p, porque entre estas potencias hay una relación $f(p)=0$. y será preciso, ó dividir F (x) por F (p), ó eliminar la potencia p^s y las superiores de

$$F(a_0\, p^m + a_1\, p^{m-1} + \ldots + a_m)=0,$$

por medio de

$$p^s + N_1\, p^{s-1} + N_2\, p^{s-2} + \ldots = 0;$$

que es lo mismo que dividir una por otra ambas ecuaciones. Igualando á cero los coeficientes del resto, es decir, de las potencias p^{s-1}, p^{s-2}, p^{s-3}... tendremos un sistema de ecuaciones al cual se aplicará el método general en sus varias formas, según sean q, r..., primero, *números racionales;* segundo, *cantidades algebráicas racionales;* ó, tercero, *números irracionales,* como hemos supuesto que lo fuese p.

De todas maneras, eliminando letras ó números irracionales, llegaremos á ecuaciones que deberán ser satisfechas por números racionales de los que la teoría general de ecuaciones estudia en los tratados elementales.

Adviértase que el número *m* debe siempre ser inferior á *s:* observación que puede utilizarse en la práctica.

Aplicaciones del método de Wantzel.

1.º *Duplicación del cubo.*—Veamos si este célebre problema de la antigüedad es susceptible de ser resuelto por la recta y el círculo.

Representando por a el lado del cubo, su volúmen será a^3 y el doble $2a^3$.

Representando por x el lado del cubo, cuyo volúmen ha de ser doble del propuesto, su volúmen será x^3, y la ecuación del problema

$$x^3 = 2a^3 \text{ ó bien } x^3 - 2a^3 = 0$$

1.º Veamos si esta ecuación es irreducible, ó si puede descomponerse en factores racionales de x y de a.

Si es posible la descomposición, solo podrá efectuarse de dos maneras: en un factor de *primer grado* y uno de *segundo*, ó en tres de *primero;* y en ambos casos ha de haber un factor racional de primer grado.

Todo queda reducido á investigar si $x^3 - 2a^3$ tiene un factor $x - \alpha$, en que α sea función racional de a, única cantidad algebráica que la ecuación contiene; ó, de otro modo, si la ecuación propuesta tiene una raíz racional.

En este caso la raíz ha de ser un divisor del último término: luego será: 2, a, a^2, a^3, 2a, $2a^2$, ó $2a^3$, ó estas cantidades con signos negativos; y excluímos 1, porque $1 - 2a^3$ en general no es cero.

Pero ninguna de estas cantidades es raíz de $x^3 - 2a^3 = 0$.

En efecto: 2 da $8 - 2a^3$, que no es nula en general, es decir, para cualquier valor de α.

a da $a^3 - 2a^3 = -a^3$, que tampoco es nulo, á menos que tengamos $a = 0$.

a^2 da $a^6 - 2a^3 = a^3(a^3 - 2)$, que en general es también diferente de 0.

a^3 da $a^9 - 2a^3 = a^3(a^6 - 2)$, de cuyo resultado podemos decir otro tanto.

2a da $8a^3 - 2a^3 = 6a^3$, que solo se anula con *a*.

$2a^2$ da $8a^6 - 2a^3 = 2a^3(4a^3 - 1)$, distinta de cero en general.

$2a^3$ da $8a^9 - 2a^3 = 2a^3(4a^6 - 1)$, para la cual puede decirse lo mismo.

Y en los otros seis casos se llega á la misma conclusión.

2.º Resulta, pues, que la ecuación $x^3 - 2a^3 = 0$ es irreducible; pero su exponente 3 no es de la forma 2^n: luego nunca podrá resolverse el problema en general, [es decir, sin particularizar numéricamente a], por la recta y el círculo.

Para ciertos *valores numéricos* de a, que se deducen del cuadro precedente, el problema es posible: por ejemplo, en el *tercer caso*, haciendo $a^3 - 2 = 0$, de donde $a = \sqrt[3]{2}$, tendremos $x^3 - 4 = 0$; y, dividiendo por $x - a^2 = x - \sqrt[3]{4}$, resultará por cociente $x^2 + \sqrt[3]{4}\,x + \sqrt[3]{16}$ ó $x^2 + a^2x + a^4$, cuyas raíces son imaginarias. El lado del cubo será $x = a^2$, ó si se quiere $x = \frac{a^2}{1}$, que se construye fácilmente con la línea irracional dada, a, y la unidad.

2.º *La trisección del ángulo.* Establezcamos ante todo la ecuación del problema, que será la $F(x) = 0$ de que hablábamos al exponer el método general.

La ecuación conocida

$$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$$

da, poniendo $b = 2a$,

$$\operatorname{sen} 3a = \operatorname{sen} a \cos 2a + \operatorname{sen} 2a \cos a$$

y sucesivamente

$$\text{sen } 3a = \text{sen } a\,(\cos^2 a - \text{sen}^2 a) + 2\ \text{sen } a \cos^2 a;\ \text{ó}$$

$$\text{sen } 3a = \text{sen } a\,(1 - 2\ \text{sen}^2 a) + 2\ \text{sen } a\,(1 - \text{sen}^2 a);\ \text{ó}$$

$$\text{sen}^3 a - \frac{3}{4}\,\text{sen } a + \frac{\text{sen } 3a}{4} = 0.$$

El arco dado es 3a, el que se busca a; y, representando el dato sen 3a por p y la incógnita sen a por x, tendremos como ecuación del problema:

$$x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{p}{4} = 0.$$

1.° Veamos si esta ecuación es irreducible.

Poniendo $x = \frac{z}{2}$, para que todos los coeficientes sean enteros, tendremos

$$\frac{z^3}{8} - \frac{3}{4} \cdot \frac{z}{2} + \frac{p}{4} = 0:$$

de donde

$$z^3 - 3z + 2p = 0.$$

Lo mismo que en el caso anterior, para ser reducible debe tener un factor de primer grado, racional: de manera que sólo podrán ser raíces suyas 2, p, y 2p, ó estas cantidades con signo negativo.

Ensayemos estas tres cantidades:

2 da $8 - 6 + 2p = 2 + 2p$: cantidad que sólo es nula para $p = -1$: es decir. para un arco de *tres cuadrantes* ó para *menos* un arco *de un cuadrante.*

La ecuación $x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$, dividida por $x - 1$ (puesto que en $x = \frac{z}{2}$ á $z = 2$ corresponde $x = 1$) da $x^2 + x + \frac{1}{4}$, cuyas dos raíces iguales son $-\frac{1}{2}$: y, en efecto, las terceras partes buscadas son un *cuadrante*, determinado por $x = 1$, y un arco de -30°, determinado por $x = -\frac{1}{2}$.

p da $p^3 - 3p + 2p = p^3 - p = p(p^2 - 1)$, que en general no es nulo: únicamente para $p = 0$ ó $p = 1$, es decir, para valores numéricos determinados, se reduce á cero: $p = 1$ corresponde á un cuadrante, y este caso se sabe resolver y se comprueba con facilidad suma.

2 p da $8p^3 - 6p + 2p = 8p^3 - 4p = 8p\left(p^2 - \frac{1}{2}\right)$: cantidad distinta de cero, á no ser para $p = 0$, ó para $p = \sqrt{\frac{1}{2}}$, que corresponde al arco de 45.° Y, en efecto, en este caso el problema se resuelve con la recta y el círculo.

Lo mismo podríamos decir de los valores negativos.

2.° Resulta, pues, que la ecuación propuesta es irreducible; pero que, como su exponente 3 no está comprendido en 2^n, el problema no puede resolverse en general por la recta y el círculo.

3.° *Rectificación de la circunferencia (ó cuadratura del círculo).*—Hemos visto el procedimiento de Lindemann para demostrar que con rectas y circunferencias no puede combinarse una construcción que dé la longitud de una circunferencia cuyo radio se conoce; y, aunque dicho método no sea una aplicación directa ó inmediato del de Wantzel, puesto que el problema es por su naturaleza trascendente y no puede escribirse en una ecuación entera, cuyos coeficientes sean funciones racionales del radio, es lo cierto que Lindemann demuestra su teorema fundándose en que π no puede ser raíz de una ecuación algebráica irreducible, lo cual supone que toda incógnita de un problema, resoluble por la recta y el círculo, ha de ser precisamente raíz de una ecuación de esta clase: es decir, que Lindemann parte de la primera consecuencia de la teoría de Wantzel. Puede, pues, afirmarse que el método de Lindemann se funda en el método general de su predecesor.

4.° *Dado un ángulo recto y un punto en la bisectriz, tra-*

zar por él una recta tal, que determine en el ángulo recto un segmento igual á una magnitud dada. (fig. 1.ª)

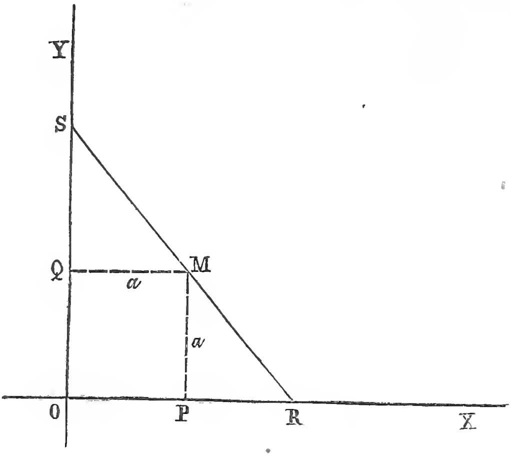


Figura 1.ª

Sean O R y O S dos rectas, que se cortan en ángulo recto, y M un punto tal que M P=M Q=a; y sea además m una longitud dada.

El problema consiste en trazar por M una recta tal que R S=m.

Formemos ante todo la ecuación del problema y tomemos por incógnita la longitud O R=x.

Y supongamos, para simplificar que:

M P=M Q=a;

O R=x, incógnita definitiva;

O S=y;

R S=m.

Tendremos, pues:

$$\overline{OR}^2+\overline{OS}^2=\overline{RS}^2$$

$$\frac{PR}{MP}=\frac{MQ}{QS}$$

ó bien :

$$x^2+y^2=m^2,$$

$$\frac{x-a}{a}=\frac{a}{y-a}.$$

De donde se deduce sucesivamente:

$$(x-a)(y-a)=a^2;$$

$$x\,y-a\,(x+y)=0;$$

$$y=+\frac{a\,x}{x-a}.$$

Sustituyendo este valor de y en la primera ecuación, resulta :

$$x^2+\frac{a^2\,x^2}{(a-x)^2}=m^2;$$

y, desarrollando:

$$(a-x)^2\,x^2+a^2x^2=m^2\,(a-x)^2;$$

$$x^4-2ax^3+(2a^2-m^2)x^2+2am^2x-a^2m^2=0.$$

Para simplificar una transformación posterior pongamos $a=2\,b$, con lo cual la ecuación tomará la forma,

$$x^4-4bx^3+(8b^2-m^2)x^2+4bm^2x-4b^2m^2=0.$$

Haciendo desaparecer el segundo término, para lo cual pondremos $x=z+b$, resultará

$$\left.\begin{array}{r} z^4+4b\,z^3+6b^2z^2+4b^3z+b^4 \\ -4b\,(z^3+3b\,z^2+3b^2z+b^3) \\ +(8b^2-m^2)\,(z^2+2bz+b^2) \\ +4bm^2\,(z+b\,) \\ -4b^2\,m^2 \end{array}\right\}=0;$$

ó bien, ordenando:

$$\left.\begin{array}{r|r|l} z^4+6b^2 & z^2+4b^3 & z+b^4 \\ -12b^2 & -12b^3 & -4b^4 \\ +8b^2 & +16b^3 & +(8b^2-m^2)\,b^2 \\ -m^2 & -2bm^2 & +4b^2m^2 \\ & +4bm^2 & -4b^2m^2 \end{array}\right\}=0;$$

ó, en último extremo:

$$\left. \begin{array}{r} z^4+2\,b^2 \\ -\;m^2 \end{array} \right| \begin{array}{l} z^2+8\,b^3 \\ \;+2\,b\,m^2 \end{array} \left| \begin{array}{l} z+5\,b^4 \\ -m^2\,b^2 \end{array} \right| =0. \qquad (1)$$

Esta es la ecuación del problema, la cual depende de las dos magnitudes b y m.

1.º Debemos ante todo asegurarnos de que es una ecuación irreducible, ó, si no lo fuere, descomponerla en factores.

Las descomposiciones posibles serán, *primero:* en un factor de primer grado y otro de tercero; y, *segundo:* en dos factores de segundo grado.

Examinemos ambos casos. Si admite un factor de primer grado, su raíz será uno de los factores racionales del último término, el cual se descompone de este modo: $b^2(5b^2 - m^2)$. Pero $5b^2 - m^2$ es evidentemente irreducible, porque sus dos factores $(b\sqrt{5}-m)$ $(b\sqrt{5}+m)$ lo son irracionales; luego los factores irreducibles de dicha expresión serán b, b, $5b^2-m^2$, y los factores que en todo caso podrían ser raíces racionales de la ecuación en z, b, b^2, $5b^2-m^2$, $b(5b^2-m^2)$, $b^2(5b^2-m^2)$; y estas mismas cantidades con signo negativo: en suma debemos ensayar 10 cantidades como raíces racionales *posibles* y *únicas* de la ecuación en z: b y b^2 es inútil sustituírlas en dicha ecuación (1), porque los términos que solo contienen b deben destruirse entre sí, y esto no es posible porque todos son positivos.

Respecto á las tres cantidades que siguen, lo más sencillo será aplicar el método general; á saber: dividir el último término de (1) por ellas; agregar á los cocientes el penúltimo coeficiente; dividir de nuevo por las supuestas raíces; y continuar así sucesivamente.

Estas operaciones se indican en el siguiente cuadro:

a): raíces supuestas:

$$5b^2-m^2; \quad b\,(5b^2-m^2); \quad b^2(5b^2-m^2)$$

b): cocientes de la primera división:

$$b^2; \qquad\qquad b; \qquad\qquad 1$$

c): sumas con el coeficiente $8b^3+2bm^2$:

$$8b^3+(b2m^2)b; \; 8b^3+(1+2m^2)b; \; 8b^3+2bm^2-1$$

Y como ninguna de estas cantidades es divisible por la raíz correspondiente, pueden desecharse todas ellas.

Pasemos á ensayar

$-b, -b^2, -(5b^2-m^2), -b\,(5b^2-m^2)$, y $-b^2\,(5b^2-m^2)$

$-b$ anula todos los términos en b^4; pero los que contienen m^2b^2, como resultado de sustituir $-b$ por z, son todos negativos y se suman: de suerte que $-b$ no es raíz.

$-b^2$ da desde luego un término b^8, que no puede destruirse con ninguno: luego $-b^2$ tampoco es raíz.

Para ensayar como raíces las tres cantidades siguientes, aplicaremos el método general formando un cuadro análogo al anterior.

a):	$-(5b^2-m^2)$;	$-b\,(5b^2-m^2)$;	$-b^2(5\,b^2-m^2)$
b):	$-b^2$;	$-b$;	-1
c):	$8b^3-b^2+2bm^2$;	$8b^3+(2m^2-1)b$;	$8b^3+2bm^2-1$.

Y como ninguna de estas cantidades es divisible por la raíz supuesta correspondiente, podemos desecharlas todas.

Con esto queda demostrado que la ecuación (1) no admite ningún factor lineal $z-\alpha$, en que α sea función entera y racional de b y m.

Pasemos á los factores de segundo grado.

Sean estos z^2+Az+B y $z^2+A'z+B'$; y veamos si es posible determinar para A, B, A', B' funciones racionales y enteras de b y m.

Efectuando el producto. $(z^2+Az+B)\cdot(z^2+A'z+B')=z^4+(A+A')\,z^3+(B+B'+AA')\,z^2+(AB'+A'B)\,z+BB'$, é identificando con la ecuación (1), tendremos el sistema:

$$\begin{aligned}&A+A'=0,\\&B+B'+AA'=2\,b^2-m^2,\\&AB'+A'B=8\,b^3+2bm^2,\\&B\,B'=5b^4-m^2b^2:\end{aligned}$$

ó bien sustituyendo $A'=-A$ en las tres últimas:

$$\begin{aligned}&B+B'-A^2=2b^2-m^2\\&B-B'=\frac{8b^3+2bm^2}{A}\\&B\,B'=5b^4-m^2b^2\end{aligned}$$

Despejando B y B' de las dos primeras y sustituyendo en la tercera, tendremos la ecuación de sexto grado:

$$A^6 + 2(2b^2 - m^2)A^4 + [(2b^2 - m^2)^2 - 4(5b^4 - m^2b^2)]A^2 - (8b^3 + 2bm^2)^2 = 0:$$

y es preciso ver si A admite valores racionales en m y b.

Podríamos seguir el método general; pero, á fin de exponer uno de los varios medios que hay de simplificar la solución de estos problemas, emplearemos un artificio sencillísimo, que en ningún autor hemos visto empleado, y que es muy rápido y muy fecundo.

Si la ecuación anterior admite por raíz una función entera de b y m, para valores numéricos y enteros de estas cantidades la raíz de la ecuación que resulte será un número entero: luego, en el caso de dar á b y m valores numéricos y no admitir la nueva ecuación raíces enteras, tampoco admitiría la propuesta funciones enteras de b y m como raíces. Si lo contrario sucediese, nada podría deducirse, y sería preciso emplear otros números de ensayo.

Pongamos en la ecuación en A, por ejemplo $b=1$, $m=1$, y resultará:

$$A^6 + 2A^4 - 15A^2 - 100 = 0.$$

Si esta ecuación admite raíces enteras, éstas sólo podrán ser 1, 4, 25, 100; y, como ninguna de ellas lo es, resulta que en el *caso particular* que indica la ecuación última, no hay raices enteras: de donde se deduce que tampoco las hay algebráicas enteras en la *ecuación general*.

Hemos probado plenamente que la ecuación en z (1) es irreducible.

Pero su exponente 4 está comprendido en la expresión 2^n: luego no aparece imposibilidad inmediata de que el problema pueda resolverse por la recta y el círculo.

Será preciso emplear el método general ya expuesto, y ante todo deducir la forma de la ecuación final en x_n para compararla con la ecuación (1) en z.

Puesto que la ecuación es de 4.º grado, sólo dos de las ecuaciones generales debemos emplear. Sean estas:

$$x_1^2+Ax_1+B=0,$$

$$x_2^2+A_1x_2+x_1=0.$$

Dando á A_1 la forma ax_1+a', según indica el método general, tendremos:

$$x_1^2+Ax_1+B=0,$$

$$x_2^2+(ax_1+a')x_2+x_1=0,$$

O, recordando que hemos representado la incógnita final del problema por z:

$$x_1^2+Ax_1+B=0,$$

$$z^2+(ax_1+a')z+x_1=0.$$

Despejando x_1 de la última, tendremos:

$$x_1=-\frac{z^2+a'z}{az+1};$$

y, sustituyendo en la anterior:

$$\left(\frac{z^2+a'z}{az+1}\right)^2+A\times-\frac{z^2+a'z}{az+1}+B=0.$$

De donde necesariamente se deduce:

$$z^4+(2a'-Aa)z^3+(a'^2-Aaa'-A+Ba^2)z^2+ (2Ba-Aa')z+B=0. \qquad (2)$$

Si, para simplificar, representamos en la ecuación (1), que es la del problema,

$$\left.z^4+\begin{array}{l}2b^2\\-m^2\end{array}\right|z^2+\left.\begin{array}{l}8b^3\\+2bm^2\end{array}\right|z+\left.\begin{array}{l}5b^4\\-m^2b^2\end{array}\right|=0, \qquad (1)$$

los coeficientes por una sola letra, á la ecuación (1) podremos sustituir esta otra:

$$z^4+pz^2+qz+r=0 \qquad (1')$$

en la cual $p=2b^2-m^2$, $q=8b^3+2bm^2$, $r=5b^4-m^2b^2$.

Identificando las ecuaciones (1') y (2), la primera que es la del problema, y la segunda que debe ser esta misma, en la hipótesis de que el problema sea posible con la recta y la circunferencia, tendremos las siguientes ecuaciones de condición:

$$\left.\begin{array}{l} 2a'-Aa=0 \\ a'^2-Aaa'-A+Ba^2=p \\ 2Ba-Aa'=q \\ B=r. \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Todo queda reducido á ver si es posible determinar A, B, a, a' en función racional de b y m, que son los datos del problema.

Poniendo el valor $B=r$ en la tercera, ésta y la primera forman el siguiente grupo:

$$\begin{array}{c} 2a'-Aa=0 \\ 2ar-Aa'=q \end{array}$$

De donde podremos deducir los siguientes valores de a y a', en función de A:

$$a=\frac{2q}{4r-A^2}; \quad a'=\frac{Aq}{4r-A^2}$$

Y, sustituyendo en la 2.ª ecuación del sistema, y además $B=r$,

$$\left(\frac{Aq}{4r-A^2}\right)^2-A\,\frac{2q^2A}{(4r-A^2)^2}-A+r\left(\frac{2q}{4r-A^2}\right)^2=p.$$

Desarrollando se obtiene:

$$A^2q^2-2A^2q^2-A\,(4r-A^2)^2+4q^2r=p(4r-A^2)^2:$$

y simplificando:

$$q^2(4r-A^2)=(p+A)\,(4r-A^2)^2,$$

ó bien, suprimiendo el factor $4r-A^2$, que da para A el valor irracional $A=2\sqrt{r}$, tendremos, finalmente:

$$q^2=(p+A)\,(4r-A^2),$$

ó sea la ecuación de 3.er grado en A

$$A^3+pA^2-4rA+q^2-4pr=0.$$

En resumen, el grupo de condiciones (3), que expresa la posibilidad de sustituir á la ecuación en z del problema un sistema de ecuaciones de 2.º grado, podrá sustituirse por el siguiente:

$$\left.\begin{aligned} &B=r \\ &a=\frac{2q}{4r-A^2} \\ &a'=\frac{Aq}{4r-A^2} \\ &A^3+pA^2-4rA+q^2-4rp=0. \end{aligned}\right\} \quad (3')$$

Las tres primeras expresan B, a, a′ en función racional de los datos q, r y de A: de suerte que, si la ecuación en A puede resolverse racionalmente, el problema será posible; y no lo será en el caso contrario.

Estudiemos, pues, esta ecuación.

Poniendo por p, q, r sus valores, tendremos:

$$A^3+(2b^2-m^2)A^2-4(5b^4-m^2b^2)A+(8b^3+2bm^2)^2$$
$$-4(5b^4-m^2b^2)(2b^2-m^2)=0;$$

ó bien:

$$A^3+(2b^2-m^2)A^2-4(5b^4-m^2b^2)A+12b^4(2b^2+5m^2)=0. \quad (4)$$

El último término admite como factores simples 2, 3, b y $(2b^2+5m^2)$, excluyendo $A=1$, que evidentemente no es raíz de la ecuación, porque $A^3=1$ no podría destruirse con ningún otro término. Podríamos aplicar el método general á todos estos divisores del último término; pero la investigación puede simplificarse por medio de artificios particulares.

En efecto, la ecuación puede ponerse bajo esta forma:

$$\left.\begin{aligned} &A^3+2b^2A^2-20b^4A+24b^6 \\ &-m^2A^2+4m^2b^2A+60b^4m^2 \end{aligned}\right\}=0.$$

Si A sólo contiene factores numéricos, y además el factor b, cada línea deberá anularse por sí, porque la segunda contiene m, de suerte que deberemos tener:

$$\left.\begin{aligned} A^3+2b^2A^2-20b^4A+24b^6&=0 \\ A^2-4\,b^2A-60b^4&=0. \end{aligned}\right\} \quad (4')$$

Despejando A de la segunda, tendremos:

$$A=2b^2\pm\sqrt{4b^4+60b^4}=2b^2\pm 8b^2=\left\{\begin{matrix}+10b^2 \\ -6b^2\end{matrix}\right.$$

Pero $10b^2$ contiene un factor 5 que no entra en el último término de la ecuación propuesta (4): luego deberemos desecharlo.

Ensayando $-6b^2$, vemos que satisface á la ecuación (4′), porque el factor b^6 es común á todos los términos, y el factor -6 da sucesivamente:

24 dividido por -6.....	-4
agregando -20.........	-24
dividiendo por -6......	$+4$
agregando 2............	$+6$
dividiendo por -6......	-1
agregando 1	0

Así, pues, $-6b^2$ es raíz racional de la ecuación (4).

Es inútil buscar nuevas raíces racionales, porque no las tiene la ecuación, como desde luego se demuestra descomponiendo el último término de este modo: $-6b^2 \times -2b^2(2b^2+5m^2)$; pero ni el factor numérico, ni una potencia de b multiplicada por ± 1 puede ser raíz, porque raíces de esta forma sólo hay la $-6b^2$: luego en todo caso las raíces serían todo el factor $-2b^2(2b^2+5m^2)$ y la unidad; y como ésta no es raíz tampoco, resulta en último análisis, que no existen más raíces racionales en b y m.

La única raíz racional $-6b^2$ da, sustituída en (3′) con los valores de p, q, r, el siguiente sistema:

$$A=-6b^2$$
$$B=5b^4-m^2b^2$$

$$a=\frac{2(8b^2+2bm^2)}{4(5b^4-m^2b^2)-36b^4}=\frac{4b^2+m^2}{-4b^3-m^2b}$$

$$a'=\frac{-6b^2(8b^3+2bm^2)}{4(5b^4-m^2b^2)-36b^4}=\frac{-3b^2(4b^2+m^2)}{-4b^3-m^2b}.$$

El problema es, por lo tanto, posible con la recta y el círculo, y se resuelve por las dos ecuaciones de 2.º grado,

$$x_1^2-6b^2x_1+5b^4-m^2b^2=0,$$

de donde

$$x_1=3b^2\pm b\sqrt{4b^2+m^2},$$

y además

$$z^2+\left[\frac{4b^2+m^2}{-4b^3-m^2b}x_1+\frac{-3b^2(4b^2+m^2)}{-4b^3-m^2b}\right]z+x_1=0;$$

ó bien,

$$z^2+\left(-\frac{x_1}{b}+3b\right)z+x_1=0.$$

La primera ecuación, por rectas y circunferencias, da x_1; sustituídos en la segunda sus dos valores, cada uno determina en función de m y b, por construcciones también en que sólo entra la recta y el círculo, dos valores para z; y cada uno de los 4 valores de z, sustituídos en la ecuación $x=z+b$, da un valor para x y una recta R S (*fig.* 1.ª)

Debe recordarse que $b=\frac{a}{2}$: de suerte que x_1 y x sólo dependen de las dos cantidades dadas m y a.

Las construcciones, que resultan muy sencillas, y su comparación con las que generalmente se dan en los autores para este problema, son ejercicios elementales en que no nos detendremos. (Véase entre otras la *Analítica de Biot*).

Observación.—Para las ecuaciones fundamentales.

$$x_1^2+Ax_1+B=0,$$

$$x_2^2+A_1x_2+B_1=0;$$

hemos admitido la forma:

$$x_1^2+Ax_1+B=0.$$

$$x_2^2+(ax_1+a')x_2+x_1=0.$$

Pero, si con esta forma no hubiéramos llegado á *probar la posibilidad* del problema en los términos supuestos, no por eso hubiéramos deducido legítimamente su imposibilidad absoluta. Hubiera sido preciso ensayar esta segunda forma:

$$x_1'^2+A'x_1'+B'=0,$$

$$x_2^2+x_1'x_2+b'=0,$$

para examinar el caso en que el último término se reduzca á una función de los datos y no contenga la incógnita auxiliar.

Sin embargo, fácilmente se demuestra que el nuevo sistema no cambia las condiciones del problema, ni da ocasión á nuevas soluciones: en suma, el último grupo puede tomar la forma del primero con sólo sustituir á x_2 la nueva incógnita z, determinada por la relación $x_2 = z + c$, siendo c una función racional de los datos.

En efecto, sustituyendo, en la última ecuación, $x_2 = z + c$, tendremos:

$$(z+c)^2 + x'_1(z+c) + b' = 0,$$

ó bien

$$z^2 + (2c + x'_1)\, z + x'_1 c + c^2 + b' = 0.$$

Y poniendo

$$x'_1 c + c^2 + b' = x''_1;$$

de donde,

$$x'_1 = \frac{x''_1 - c^2 - b'}{c}$$

$$z^2 + \left(2c + \frac{x''_1}{c} - c - \frac{b'}{c}\right) z + x''_1 = 0,$$

$$\left(\frac{x''_1 - c^2 - b'}{c}\right)^2 + A' \frac{x''_1 - c^2 - b'}{c} + B' = 0.$$

La última es de la forma

$$x''^2_1 + A'' x''_1 + B'' = 0,$$

y la anterior de esta otra forma:

$$z^2 + \left(a''_1 x''_1 + a'''\right) z + x''_1 = 0,$$

que es la general adoptada.

5.° *Dadas dos rectas que se cortan en ángulo recto, Ox, Oy, y un punto M en cualquier posición, trazar por dicho punto una recta RS, tal que determine un segmento $RS = m$. (fig. 2ª.)*

La marcha que seguiremos en este problema será la misma que para el anterior, tanto más, cuanto que sólo se trata de la generalización de aquél.

Supondremos, pues, que $MP=b$; $MQ=a$; $RS=m$; y tomaremos por incógnita la distancia $OR=x$.

La incógnita intermedia OS la representaremos por y.

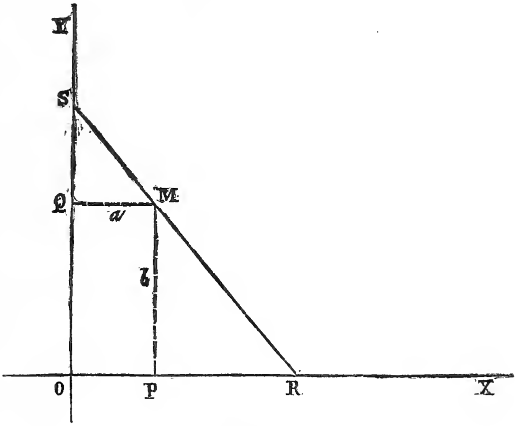


Figura 2.ª

La figura da evidentemente:

$$\overline{OR}^2+\overline{OS}^2=\overline{RS}^2, \quad \frac{PR}{PM}=\frac{MQ}{QS};$$

ó bien:

$$x^2+y^2=m^2, \quad \frac{x-a}{b}=\frac{a}{y-b},$$

De donde, sucesivamente:

$$(x-a)\,(y-b)=ab,$$
$$xy-ay-bx=0,$$
$$y=\frac{bx}{x-a}.$$

Sustituyendo en la primera:

$$x^2+\frac{b^2x^2}{(a-x)^2}=m^2.$$

Y desarrollando y simplificando,

$$(a-x)^2x^2+b^2x^2=m^2(a-x)^2;\ \text{ó}$$
$$x^4-2ax^3+(a^2+b^2-m^2)x^2+2m^2ax-a^2m^2=0,$$

Para simplificar resultados posteriores, pongamos $a=2c$, con lo cual la ecuación toma la forma,

$$x^4-4cx^3+(4c^2+b^2-m^2)\,x^2+4cm^2x-4c^2m^2=0.$$

Haciendo desaparecer el 2.º término, siempre con el objeto de simplificar los cálculos que han de seguir, á cuyo fin pondremos $x=z+c$, resultará:

$$(z+c)^4-4c(z+c)^3+(4c^2+b^2-m^2)\,(z+c)^2+4cm^2(z+c)-$$
$$-4c^2m^2=0;$$

ó desarrollando:

$$\left.\begin{array}{c} z^4+4cz^3+6c^2z^2+4c^3z+c^4 \\ -4c(z^3+3cz^2+3c^2z+c^3) \\ +(4c^2+b^2-m^2)\,(z^2+2cz+c^2) \\ +4cm^2(z+c)\ -4c^2m^2 \end{array}\right\}=0;$$

y ordenando

$$\left.\begin{array}{r|r|l} z^4+6c^2 & z^2+4c^3 & z\ +c^4 \\ -12c^2 & -12c^3 & -4c^4 \\ +4c^2 & +8c^3 & +(4c^2+b^2-m^2)c^2 \\ +b^2 & +2b^2c & +4m^2c^2 \\ -m^2 & -2m^2c & -4m^2c^2 \\ & +4m^2c & \end{array}\right\}=0;$$

ó bien

$$\begin{array}{r|r|r|} z^4-2c^2 & z^2+2b^2c & z+c^4 \\ +b^2 & +2m^2c & +b^2c^2 \\ -m^2 & & -m^2c^2 \end{array}=0. \qquad (1)$$

Ecuación que, suponiendo $b=a$ y poniendo $a=2c$ (ó $2b$, según la notación del ejemplo precedente) se reduce, como debe ser, á la (1) de dicho ejemplo; puesto que aquél es un caso particular de éste en que a y b son iguales.

Que la ecuación (1) es irreducible es evidente, toda vez que la (1) del ejemplo anterior demostramos que lo era, y aquella no es otra cosa que un caso particular de ésta, como queda expuesto. Podemos, pues, ahorrarnos dicha investigación.

Sólo queda la aplicación del método general: es decir, sustituir en el sistema (3′) en vez de p, q y r los nuevos valores, en función de los nuevos datos b, c, m.

Tendremos, pues:

$$p=-2c^2+b^2-m^2,$$
$$q=2b^2c+2m^2c,$$
$$r=c^4+b^2c^2-m^2c^2;$$

y la ecuación en A del sistema (3′) tomara la forma:

$$A^3+(-2c^2+b^2-m^2)A^2-4(c^4+b^2c^2-m^2c^2)A+(2b^2c+2m^2c)^2$$
$$-4(-2c^2+b^2-m^2)(c^4+b^2c^2-m^2c^2)=0.$$

Simplificando los términos independientes de A, tendremos, pues:

$$A^3+(-2c^2+b^2-m^2)A^2-4(c^4+b^2c^2-m^2c^2)A$$
$$+4c^2(4b^2m^2+2c^4+b^2c^2-m^2c^2)=0.$$

Todo el problema queda reducido á investigar si esta ecuación admite para A raíces algebraicas racionales, en función entera de b, c, m.

En este último caso el problema podrá resolverse con la recta y el círculo; en el contrario no admitirá ninguna solución de esta clase.

Lo directo sería descomponer el último término en sus factores simples y aplicar un método análogo al de las raices enteras, como ya hemos hecho en el ejemplo anterior; pero, á fin de simplificar los cálculos, emplearemos un artificio más rápido y del cual ya hicimos también uso anteriormente.

Si la ecuación anterior admitiese una raíz de la forma algebráica entera f(b, c, m), poniendo números enteros, en dicha ecuación, en vez de estas tres cantidades, por ejemplo $b=3$, $c=1$, y $m=10$, tendremos que f (3, 1, 10) sería un número entero y sería raíz de la ecuación en A, convertida ya *en ecuación de coeficientes numéricos.*

De aquí se deduce que si una sustitución numérica, de números enteros, *no da raíces enteras, la ecuación propuesta no admitirá tampoco soluciones enteras algebraicas.*

La recíproca no es cierta: es decir, que en un caso particular, por ejemplo para $a=b$, la ecuación tendría raíces algebráicas ó numéricas enteras, y no las tendrá en general cuando $a \gtrless b$.

De suerte que un resultado, que podemos llamar *positivo*, nada prueba; pero un resultado *negativo*, es decir, que no dé raíces enteras, prueba que la ecuación no admite las raíces que buscamos.

Más aún: podríamos proponernos este problema: ¿el número de sustituciones numéricas capaces de dar raíces numéricas enteras, no existiendo raíces algebráicas enteras, es *limitado?* Y quizá esto nos proporcionaría un método general para resolver los dos problemas fundamentales, *investigación de raíces enteras algebráicas, y descomposición en factores racionales*, por medio de las raíces *enteras numéricas*; pero no es este el momento oportuno para desarrollar dicha teoría, que quizá en otra ocasión expondremos, porque nos parece importante.

Para el caso concreto que nos ocupa, sustituyamos los valores más sencillos: $c=1$, $b=1$, $m=1$, en la ecuación en A, y tendremos:

$$A^3-2A^2-4A+24=0,$$

pudiendo desde luego excluir $A=\pm 1$, que no es raíz.

Los factores de 24 son 2, 4, 8, 3, 6, 12, 24, con signos positivos y negativos.

Sometiéndolos al procedimiento general, se formará el siguiente cuadro, sólo aplicable á las raices que están dentro de los límites de raíces positivas y negativas.

	2	4	3	—2	—3
Dividiendo 24...	12	6	8	—12	—8
Agregando —4..	8	2	4	—16	—12
Dividiendo......	4	»	»	+8	+4
Agregando —2..	2	»	»	+6	+2
Dividiendo......	1	»	»	—3	»
Agregando 1....	2	»	»	—2	»

Ninguno de los números ensayados es raíz entera: luego *la ecuación no puede resolverse por valores algebráicos y enteros de* A, *ni el problema con la recta y la circunferencia.*

Si el problema no puede resolverse en dicha forma, cuando el ángulo es recto, con más razón no podrá resolverse para un ángulo cualquiera, siendo *a* y *b* arbitrarias, porque aquel problema es un caso particular de éste.

José Echegaray.

CIENCIAS NATURALES.

DICTAMEN

sobre la obra de Mr. J. Lichtenstein, titulada: Los Pulgones.—Monografía de los Afidios (*Aphididæ*, de Passerini, ó *Phytophtires*, de Bourmeister).

La obra á que este informe se refiere constará de cuatro partes: una ya publicada, y tres que podrán darse á luz muy en breve, pues el texto está ya casi terminado, y sólo falta el complemento indispensable de las láminas, que por su gran número y condiciones difíciles de ejecución, y elevado precio consiguiente, acaso influyan para que tan importante trabajo científico quede, por algún tiempo todavía, desgraciadamente inédito. Pues como dice muy bien el autor, al impetrar con este motivo el auxilio indispensable de los entomólogos, aficionados á semejante género de estudios, y, más en general, de los Gobiernos ilustrados y de las Corporaciones sabias, «para »publicar un trabajo de esta especie, útil y práctico, se nece- »sitan dibujos, y muchos dibujos iluminados, no sólo para »indicar las deformidades de las hojas, sino también las mo- »dificaciones de la coloración que las picaduras de los pulgo- »nes determinan en los vegetales que atacan. Semejantes lá- »minas son muy costosas, y, hasta el presente, sólo la *R. So- »ciety* de Londres ha emprendido la publicación de los *British »Aphides*, de M. B. Buckton, con 134 láminas, magnífica- »mente iluminadas.»

No es posible, en efecto, que un particular pueda por sí solo hacer, para publicar una obra referente á los pulgones del mundo entero, lo que una poderosa Sociedad inglesa ha hecho solamente para los de la Gran Bretaña; y, por lo mismo, el Sr. Lichtenstein tendrá que limitar forzosamente sus gastos á los auxilios que le presten las personas que se interesan por el adelantamiento de los estudios de la Historia Natural; y así, según sea el número de suscritores, ofrece dar un número mayor ó menor de láminas, en negro ó iluminadas, si para ello reuniera medios suficientes.

La primera parte, que me propongo analizar, consta de 188 páginas en 4.°, con cuatro láminas iluminadas.

Después de una breve Introducción en que el autor indica el motivo de su entretenida tarea, dedica el Capítulo I á la *Bibliografía de los Pulgones*, citando por orden cronólogico las 74 obras que ha consultado, las más notables que tratan de *Afidios*.

El Capítulo II contiene el catálogo de todos los Pulgones hasta el día descritos, que son 718, repartidos en diversos géneros, siendo la parte sinonímica la que da más importancia á esta lista, tanto por la nomenclatura diversa empleada para una misma cosa, como por la citación de los autores que la han aplicado.

El Capítulo III trata de la clasificación de todos los afidios, divididos según costumbre taxonómica en tribus y géneros, resultando 8 de las primeras y 58 de los segundos, dentro de los cuales se encuentran comprendidas las 718 especies del catálogo referido.

Curioso es el asunto del Capítulo IV, titulado *Flora de los Afidios*, en la cual, por orden alfabético, se citan las plantas y los géneros y especies de Pulgones que las atacan, viéndose así la importancia que tiene el estudio de tales insectos, tanto para los agricultores como para los selvicutores; pues si bien hay vegetales que alimentan á solo una especie de tales parásitos, existen muchas otras, y son de las útiles al hombre, que ceban á tres especies, como es el alerce; á cuatro, como la vid y la berza; á cinco, como la cebada; á siete, como el trigo, maíz y el cardo; á ocho, como el melocotonero, acerolo y zanahoria; á nueve, como la lechuga; á diez, como el abeto; á doce, como el ciruelo; á trece, como el olmo; á diez y seis, como el abedul y el peral; á veintitres, como el sáuce y el pino; á treinta y dos, como los robles y encinas; y hasta treinta y tres, como los chopos.

En los Capítulos V y VI se ve el difícil estudio que el señor Lichtensteín ha hecho de los Pulgones, pues detalla la organografía exterior é interna de tan diminutos séres, casi impalpables por su blandura extrema, y que solo al cogerlos se extrujan y se reducen á humores; por cuyo motivo apenas figuran en las colecciones entomológicas, si no es deformados por la desecación é inconoscibles. Nuestro colega ha encontrado el medio de evitar esta falta, y por un procedimiento que me enseñó en Montpellier conserva indefinidamente intactos los Pulgones, para en todo tiempo poder estudiarlos, merced á lo cual, en su colección pueden compulsarse siempre las descripciones que de tales animales ha publicado.

Desconocido por muchos el proteimorfismo de los Pulgones, ha sido esto causa de la infundada creación de especies, considerando algunos entomólogos como dos ó tres distintas la que es una sola. Nuestro consocio, que durante quince años ha verificado minuciosos y pacientísimos estudios biológicos sobre los *afidios* y *coccídeos*, ha disipado muchos errores, cometidos por hombres notables.

La digénesis, metagénesis, ó generación alternante, es cosa corriente en los Pulgones, admitiéndose desde hace mucho tiempo su reproducción por fecundación sexual, ó por la partenogénesis, llamada por otros gemmípara ó brotadora, porque consideran los nuevos gérmenes, no como huevos verdaderos, y sí como yemas ó brotes; y de aquí que el Sr. Lichtensteín, que opina de este modo, crea que los Pulgones que, siendo vírgenes, ponen ó paren, son falsas hembras (*Pseudogynæ* llama): porque, á su entender, aquellos séres misteriosos no cumplen más que con una parte de las funciones de la hembra: la reproducción, no siendo aptos para la cópula.

Esta singular teoría de nuestro consocio le ha puesto en pugna ó controversia con los embriólogos, que han declarado que tales *Pseudogynæ* son verdaderas hembras; y así opino yo también, por haberlo comprobado y consignado en la organografía de la *Phylloxera vastatrix,* publicada en mi Memoria oficial de 1881. Pero el Sr. Lichtensteín dice, «que, á pe- »sar de la respetable mayoría que declara ser verdaderas »hembras sus *Pseudogynæ*, y tan hembras como las que copu- »lan y solo ponen huevos, él sostiene con hechos su teoría »sobre la evolución de los Pulgones; porque, aun cuando »quepa en lo posible que se equivoque, ya que así lo creen los »maestros, los hechos en que se funda están revestidos de »tanta verdad, y de tal modo confirman las hipótesis que hace »diez años viene exponiendo, que, sin atreverse á decir á las »eminencias científicas que le combaten, si no encontrais di- »ferencias *es porque no sabéis buscarlas bien*, espera que algún »día le darán la razón.»

La insistencia de nuestro consocio en su teoría evolutiva de los Pulgones se funda, á mi ver, en la diferencia que él cree existir entre la epigénesis espontánea y la provocada, por más que sean iguales los resultados.

En las funciones reproductoras de las *Pseudogynæ* ó falsas hembras, como las llama Lichtensteín, solo ve, repito, una cosa parecida á lo que pasa en las plantas productoras ó provistas de bulbillos, como sucede en la *Poa bulbosa*, var. *vivípara,* ó en los *Lilium bulbiferum et lancifolium*, que la una y los otros pueden sin flores, por medio de los bulbillos que crecen, no en los ovarios, y sí en otros puntos de la planta muy diferentes, reproducirse: por cuyo motivo los que de otro modo vemos las cosas, no podemos admitir igualdad absoluta entre la verdadera reproducción gemmípara y la ovípara ó vivípara, que se realiza en las que Lichtensteín llama falsas hembras: pues la disposición fundamental y actividad vital de sus órganos reproductores, son idénticas á las de las que nuestro autor llama hembras sexuadas, que todas lo son igualmente; y el desarrollo de los huevos y fetos, que ponen ó paren, tiene lugar siempre en los ovarios y partes anexas, exactamente como se verifica en las hembras fecundadas; no existiendo además igualdad ni semejanza alguna entre el producto de la gemmación y el de la ovulación verdadera.

No: no es en el órgano generador de unas y otras hembras donde debe buscarse la diferencia; porque, como me he cerciorado con el microscopio, la aguja anatómica, y los reactivos, igualmente en todas es aquél el órgano productor de gérmenes-huevos. La diferencia sorprendente está en que los producidos por las madres vírgenes, sin estimulación seminal, nacen avivados; al paso que no sucede otro tanto con los dados á luz por las hembras llamadas sexuales, si previamente no hubiesen recibido aquellos el bautismo del humor fecundante ó prolífico, como decía mi sapientísimo amigo y maestro León Dufour, príncipe admirable de la Anatomía y Biología de los insectos.

Prescindiendo con lo dicho de la parte discutible del Capítulo VI de nuestro digno consoció, digna por muchos conceptos es de resumirse en breves frases la teoría biológica del celoso entomólogo de Montpellier.

Normalmente, dice, preceden cuatro *Pseudogynæ* ó falsas hembras á la aparición en la escena de los individuos sexuados de ambos géneros. Llama á la primera *Pseudogyna fundatrix*, á la segunda *Pseudogyna migrans*, á la tercera *Pseudogyna gemmans*, y á la cuarta *Pseudogyna pupífera*.

Según el autor, estas cuatro formas que dice reemplazan las cuatro laterales de los otros insectos, tienen una intermitencia de estados alados y ápteros, cosa que, siendo verdad, no sucede en todos los tiempos como él mismo reconoce, dejando, por lo tanto, de constituir regla general hasta en la forma sexuada masculina, en la cual, siendo siempre áptera la hembra, el macho unas veces lo es también y otras en la misma especie es áptero ó alado: esto es, dimorfo.

Tampoco á mi modo de ver es bastante exacta la comparación que el Sr. Lichtensteín hace de las distintas formas de los Pulgones con los estados larvales de los otros insectos; porque en éstos el polimorfismo es evidente, no pareciéndose en nada la oruga á la crisálida, ni ésta á la mariposa, que de una y otra procede; ni menos la larva ó verme, apodo de un díptero múscido, á la pupa ni moscardón en que se transforma. Los Pulgones conservan en todos los períodos mucho parecido, y las transiciones de formas de ápteros ó alados tienen lugar como en los ortópteros, de un modo gradual y aparente; pues sucesivamente los rudimentos de los nuevos órganos van desenvolviéndose á medida que se acerca la época en que las exigencias de la vida los hace necesarios, confirmando esto las sabias teorías del célebre Lamarck, que tanto sorprenden á los que no las han estudiado con conocimientos bastantes.

Pero, prescindiendo de esto, tengo otras razones de más peso para no estar acorde con el parecer de mi colega, y es que en el período larval, en el que considera á sus *Pseudogynæ*, los insectos no son aun aptos para reproducirse de ninguna manera; y si efectivamente en los cuatro períodos, de *Pseudogyna fundatrix*, *migrans*, *gemmans*, *et pupífera* fuesen larvas los Pulgones, ó impúberas, no veríamos poner ni parir á estas hembras partenogenésicas, como lo hacen después de verificadas sus cuatro mudas de piel, lo mismo que sucede á los Pulgones digénicos, cuyos individuos ni son fecundables ni fecundantes hasta después de verificadas las cuatro mudas de piel que marcan el período de pubertad en unas y en otras.

¡Cómo es posible calificar de larvas á los Pulgones madres que llevan en su seno fetos pupiformes de ambos sexos, tales cuales el mismo autor de la obra nos lo dió á conocer el primero en la filoxera alada!

Pero no es esto todo: porque el Sr. Lichtensteín admite las colonias partenogenésicas permanentes, cuyos individuos se multiplican sin fecundación, lo cual viene en apoyo de la hipótesis de la reproducción ágama indefinida, ó sea sin término conocido, como la he visto confirmada en el Pulgón de la zanahoria, que después de cien generaciones sucésivas partenogenésicas, escrupulosamente observadas por mí, al fin me cansé de esperar la venida de los individuos digénicos, que tanto tardaban en llegar. ¿Y qué falta hacían para la perpetuidad de la especie, existiendo esas mal llamadas *falsas hembras*, que son más prolíficas y fecundas que las que considera como verdaderas?

Recordando que ya Reaumur planteó esta cuestión en sus días, y que fueron admitidas por Bonnet y Kiber las colonias permanentes de Pulgones ágamas, que sin fecundación previa se reproducen, el mismo Lichtensteín nos dice no repugna al buen sentido admitir esta clase de propagación exclusivamente femenina y eterna; pero añade, en apoyo de la idea que le domina, el ejemplo de reproducción indefinida ágama en dos árboles dióicos, el desmayo ó llorón *(Salix babilónica)*, y el álamo ó chopo de Italia *(Pópulus itálica)*, de los que uno de los sexos hace siglos ha desaparecido, siendo imposible la producción de una semilla fértil, no quedando otro medio de multiplicarse que la gemmación: todo lo que, siendo exacto, no lo creo aplicable á la reproducción ágama de los Pulgones, que, como dejo dicho, es ovípara ó vivípara, y no por retoños ni yemas, tal cual sucede en los mencionados árboles.

Siguiendo el Sr. Lichtensteín la relación de los estudios biológicos que de los Pulgones ha hecho, nos habla del *modus vivendi* de tales insectos, que es por demás curioso y sorprendente, porque demuestra la verdad del lema de la Sociedad Entomológica de Francia, que dice: *Natura maxime miranda in minimis.*

Cada afidio tiene predilección para alimentarse con determinadas partes de las plantas en que habita, tanto en las leñosas como en las herbáceas, eligiendo ya las sumidades de los árboles, ó las raicillas capilares más hondas. La misma especie cambia á veces de residencia y manjar, pues algunas, durante su estado áptero, residen en las raíces ánuas de una gramínea, trasladándose al cobrar alas á las hojas de un árbol, donde para alojar su prole forman agallas ó vejigas en los apéndices foliáceos, cuyas caprichosas formas, por su constancia, pueden servir para reconocer por la obra al artífice de ella. Y precisamente la parte iconográfica de tales producciones anormales sería una de las que darían más estima al libro del Sr. Lichtensteín, sí, como desea, pudiera publicarla completa, como lo demuestran, á título de ejemplo, las cuatro láminas que acompañan á la parte primera, publicada.

Nos dice el autor que se ha escrito mucho y discutido no poco sobre las causas que pueden influir en el desarrollo de las agallas y caprichosas formas que ofrecen tales monstruosidades vegetales, que unos atribuyen á la estimulación mecánica de los picotazos del Pulgón, y otros, quizás con más fundamento, á la acción química ó deletérea del humor especial inyectado por el mismo al herir la capa de parénquima generador subepidérmico. Lástima que la perspicacia de nuestro consocio no haya podido esclarecer este punto oscuro de la generación de tejidos anormales, ó quizá patológicos; pues, de haberlo conseguido, de importantísima consecuencia fuera para otros estudios.

Lleno de noticias curiosas el capítulo biológico de los Pulgones escrito por nuestro consocio, aunque discordantes en algunos puntos que ya he consignado, califico el trabajo que representa, en conjunto, de importantísimo; pues recopila todos los anteriormente publicados sobre los afidios, rectificando no pocos errores, y ampliando su historia con muchas novedades y especies no descritas: de lo cual resultan llenos no pocos vacíos de los que existían en la Historia natural de los Pulgones. A pesar de lo cual, aun quedan bastantes cuestiones de resolución difícil, como por ejemplo las siguientes:

¿Por qué la *Pseudogyna migrans* (usando la nomenclatura del autor), que frecuentemente es alada, aunque oriunda de la misma madre, es unas veces áptera y otras en parte áptera y en parte alada?

¿Cómo puede explicarse el polimorfismo de los individuos machos en los Pulgones, que son ápteros unos y otros alados, encontrándose á veces en la misma especie individuos ápteros y alados?

¿Por qué de una misma madre partenogenésica nacen individuos que seguirán siendo indefinidamente ápteros ellos y su prole, mientras da á luz otros, en los que, pasado cierto tiempo, aparecen las alas, y así aunque partenogenésicos, siguen unos produciendo madres vírgenes, mientras que resulta digénica la cría de los otros?

Y, por fin, ¿cómo se explica el polimorfismo de ciertos Pulgones, tales como los *Chaithophorus*, en los cuales de una misma madre nacen tres clases de hermanos, tan heteromorfos que en nada se parecen?

Arcanos son estos que están aguzando el ingenio de los naturalistas que se afanan por descifrarlos; y bien merecen eficaz auxilio para conseguirlo, aquellos que, como el señor

Lichtensteín, pasan su vida empeñados en disipar las nieblas que velan tan sorprendentes fenómenos. ¡Qué de tiempo y paciencia debe haber costado á nuestro entusiasta afidiófilo monspesulano averiguar que el Pulgón parásito de las raíces de las lechugas, que en Setiembre se transforma en alado, es uno de los que producen las agallas en Octubre, en los peciolos de las hojas de los chopos; y que aquellos otros que durante su vida subterránea chupan las raíces del trigo, maíz y avena, son también los productores de las bolsas ó vejigas de las hojas del olmo y las cornicabras del terebinto!

En el Capítulo VII explana el autor su clasificación de los afidios; y, además de insertar los necesarios cuadros sinópticos para facilitar la aplicación, razona y explica el uso que hace de ciertos caracteres biológicos, imprescindibles en la determinación de las especies de unos seres tan proteiformes, que con frecuencia precisa, para su distinción exacta, estudiarlos vivos y en su actividad funcional.

El polimorfismo de los Pulgones, debido á la digénesis á que están sometidos, será, en mi entender, una gran dificultad para la caracterización específica, que á veces exige descripciones múltiples para que resulte una frase completa, cosa no fácil de hacer mientras no sean bien conocidas todas las formas de cada especie, como ya se ha conseguido con algunas de ellas, tal por ejemplo las filoxeras.

Por fin termina en el Capítulo VIII la primera parte ó *Género*, como el autor la titula, exponiendo cuanto se refiere á la caza, preparación y conservación ordenada de las colecciones de afidios.

Sin la lectura de este capítulo, que debe aprender de memoria quien se dedique al estudio monográfico de los Pulgones, hallará éste grandes dificultades para conseguir su objeto, que sólo ha logrado el Sr. Lichtensteín al cabo de quince años de ímprobos trabajos, cuyos importantes resultados hoy nos regala, facilitándonos hacer esta clase de investigaciones con buen resultado.

Según el autor nos dice, las tres partes restantes de la obra están destinadas á la descripción de las especies de Pulgones descubiertas hasta el día, si bien nos advierte que, no habiéndole sido posible verlos todos, pues muchos son exóticos, ha tenido que atenerse en tales casos á las diagnósis dadas por los naturalistas que los describieron, declinando en ellos la responsabilidad científica.

Basta lo expuesto para comprender de cuánta importancia es en conjunto, y por sus detalles, el libro del Sr. Lichtenstein: libro con aprecio sumo acogido por varias Sociedades científicas, tales como la de Historia Natural, del Herault; la Entomológica de Francia, tribunal supremo en cuestiones como la fundamental de que la obra trata; y la misma Academia de Ciencias de París, que á las teorías biológicas y trabajos de investigación de su ilustre autor, nuestro consocio, tan afecto á las cosas de España, ha prodigado merecidos elogios. Justo es también que á las referidas se asocie nuestra Academia, y aliente á nuestro corresponsal extranjero para que no desista en dar á su interesante obra la cumplida extensión que estaba en su propósito.

El Ponente,

MARIANO DE LA PAZ GRAELLS

VARIEDADES.

Sobre la extracción de la raíz cuadrada de los números.—El Sr. Navarro, Doctor en Ciencias y Catedrático de Matemáticas en el Instituto de Salamanca, ha publicado recientemente muy sucinto folleto, dando á conocer un curioso procedimiento para la extracción de la raíz cuadrada de los números, por rápidas aproximaciones sucesivas, debido á la admirable inventiva de D. Bernardino de Sena, domiciliado en aquella ciudad, persona de clara inteligencia y de laboriosidad extraordinaria; pero completamente desprovista de conocimientos técnicos matemáticos. Del folleto del Sr. Navarro son, á su vez, compendio abreviado los siguientes párrafos, suficientes para que el lector comprenda el procedimiento ó regla de cálculo á que se refieren.

1) Supongamos que, con error inferior á $^1/_b$,

$$\sqrt{n} = 1 + \frac{1}{b}, \qquad \ldots \quad (\alpha)$$

y además que

$$\left(1 + \frac{a}{b}\right)^2 = n + \frac{1}{b^2}. \qquad \ldots \quad (\alpha_1)$$

En este doble supuesto, resulta que, con error inferior á

$$\frac{1}{b \times 2\,(a+b)},$$

mucho menor que el precedente,

$$\sqrt{n} = 1 + \frac{a \times 2\,(a+b) - 1}{b \times 2\,(a+b)}; \qquad \ldots \quad (\beta)$$

ó que

$$\left\{1 + \frac{a \times 2\,(a+b) - 1}{b \times 2\,(a+b)}\right\}^2 = n + \frac{1}{[b \times 2\,(a+b)]^2} \qquad \ldots \quad (\beta_1)$$

Relación de cantidades esta última cuya certidumbre puede demostrarse ó comprobarse sencillamente, teniendo en cuenta la análoga primera.

Si, pues, como ejemplo ó aclaración de estas fórmulas generales, supiésemos que, con error inferior á $^1/_{12}$,

$$\sqrt{2} = 1 + {}^5/_{12},$$

verificándose además que

$$(1 + {}^5/_{12})^2 = 2 + \frac{1}{144},$$

resultaría inmediatamente que

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{169}{408}, \text{ con error } < \frac{1}{408};$$

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{195025}{470832}, \; \ldots\ldots < \frac{1}{470832}; \text{ etc., etc.}$$

2) De la expresión (β_1) inmediatamente se deduce que la (β) da el valor de $\sqrt{n}$ aproximado por *exceso*, con error inferior, según ya se ha dicho, á $\frac{1}{b \times 2\,(a+b)}$. Para obtenerle por *defecto*, con el mismo grado de aproximación, basta restar otra unidad del numerador del quebrado contenido en el segundo miembro de la expresión (β): lo cual es de suyo casi evidente. Pero, en comprobación de esta verdad, nada más fácil tampoco que cerciorarse directamente de la exactitud de esta otra relación de cantidades

$$n > \left(1 + \frac{a \times 2\,(a+b) - 2}{b \times 2\,(a+b)}\right)^2,$$

teniendo siempre en cuenta la hipotética fundamental (α_1).

3) Obtenido por este procedimiento un valor cualquiera de $\sqrt{n}$, igual, en general, á $1 + \frac{A}{B}$, fácil es ver que el error de que adolece, no sólo es inferior á $\frac{1}{B}$, sino inferior á $\frac{1}{B\,(A+B)}$: propiedad muy importante.

En efecto: designando por x la verdadera raíz cuadrada del número n, la relación

$$\left(1 + \frac{A}{B}\right)^2 = n + \frac{1}{B^2},$$

se convierte en esta otra:

$$\left(1 + \frac{A}{B}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{B^2} \quad \ldots\ldots \quad (\gamma).$$

Y el error buscado, e, vendrá expresado de este modo:

$$e = 1 + \frac{A}{B} - x = \frac{A + B - Bx}{B} \quad \ldots\ldots \quad (\gamma_1).$$

Pero de (γ) se deduce que

$$Bx = \frac{(A+B)^2 - 1}{Bx}, \text{ y } Bx < A + B.$$

Luego:

$$Bx > \frac{(A+B)^2-1}{A+B}\ ; \ ó\ Bx > (A+B) - \frac{1}{A+B}\ ;$$

ó:

$$A + B - Bx < \frac{1}{A+B}.$$

Y con esto la igualdad (γ_1) se transforma en la siguiente desigualdad, que corresponde al enunciado del teorema:

$$e < \frac{1}{B\,(A+B)}$$

Si, pues, 1)

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{195025}{470832},$$

el error de esta aproximación no sólo será, sogún lo en un principio previsto ó demostrado, inferior á 1: 470832; sino inferior á

$$1 : 470832 \times 665857\ ;\ ó\ á\ {}^1/_{10^{11}}.$$

4) Para que el procedimiento de que se trata pueda comenzar á practicarse, menester es, representando la fracción primitiva $\frac{a}{b}$ por f, y su denominador, por de pronto desconocido, por z, determinar este denominador mediante la siguiente relación,

$$(1+f)^2 = n + \frac{1}{z^2}.$$

De la cual se deduce que

$$1 + f = \frac{\sqrt{nz^2+1}}{z},$$

Y como f es número racional, z deberá determinarse por tanteos, ó sustituciones sucesivas, de manera que nz^2+1 resulte cuadrado perfecto. Y este es, indudablemente, el punto flaco de la teoría.

Supongamos, por ejemplo, que $n = 7$

Si $z = 1$, será $nz^2 + 1 = 8$;
$z = 2$, $nz^2 + 1 = 29$;
$z = 3$, $nz^2 + 1 = 64$.

En este caso

$$1 + f = \frac{8}{3} = 1 + \frac{5}{3} = \sqrt{7}$$

servirá de expresión inicial, ó punto de partida.

Vemos, pues:

1.°) Que el problema reviste carácter evidente de indeterminación en esta su última, ó primera, parte, según se considere.

2.º) Que de la posibilidad de su resolución no puede *à priori* responderse á ciencia cierta. Y

3.º) Que para resolverle, en pasando de 100 la expresión numérica $nz^2 + 1$, hay que saber extraer la raíz cuadrada de los números por procedimiento distinto de aquél de que se trata: lo cual envuelve cierta petición de principio.

Mas, á pesar de todo, este procedimiento, imaginado por el superior instinto matemático del Sr. Sena, por su originalidad y sencillez merece fijar la atención de cuantos al estudio de la Aritmética se dedican, y en la consideración de las propiedades misteriosas y sutiles combinaciones de los números se recrean.

Del origen ó procedencia de las estrellas fugaces.—De una interesante conferencia, dada no ha mucho tiempo en la *Institución Real de la Gran Bretaña*, por el profesor Dewar, extractamos, sin atenernos demasiado á la letra del original, las siguientes muy contadas líneas, complemento oportuno de otras, referentes al mismo asunto de que éstas tratan, insertas en los dos anteriores últimos números de esta Revista.

Desde ha ya cerca de un siglo sirven de clave para explicar el origen ó procedencia de los meteoros luminosos, conocidos con el nombre genérico de *estrellas fugaces*, las conjeturas sobre tan interesante asunto emitidas por Chladni, que, en dos palabras, pueden resumirse como sigue.

Por el espacio interplanetario, y tal vez por el interestelar, ó por los abismos insondables de la aparente, indefinida esfera celeste, circulan en órbitas irregulares, de magnitudes gigantescas y que unas con otras se entrelazan ó cruzan, al parecer sin orden ni concierto, muchedumbres sin cuento de pequeñas masas ó de corpúsculos de materia sólida; y estos corpúsculos, desviados por accidente de su camino, al pasar cerca de los grandes planetas, como la Tierra, pueden precipitarse y caer sobre tan poderosos centros de atracción, perturbadores de sus movimientos, y generar, si realmente caen, los *aerolitos;* ó convertirse en *estrellas fugaces*, si, por efecto de la velocidad de que se presentan animados, logran al fin evadirse de los lazos de la atracción en que por breves momentos se encuentran aprisionados. Lo difícil en esta sencillísima y muy racional teoría es explicar la causa de la elevada temperatura, y hasta candencia, de los aerolitos recién caídos sobre la Tierra, y la aparente inflamación y como disipación de la materia constitutiva de las estrellas fugaces, propiamente dichas. En la época de Chladni, por el atraso relativo de las ciencias físicas, la explicación era punto menos que imposible. Pero en la actualidad no sucede lo mismo.

Porque suponer, como durante mucho tiempo se ha supuesto, que la simple compresión de la atmósfera terrestre desenvuelve calor bastante para producir los fenómenos de candencia, ó de inflamación y dispersión consiguiente de la materia encandecida y evaporada, poco antes mencionados, vale tanto casi como dar por sabido y cierto precisamente lo que se trata de averiguar. La solución del problema hay que buscarla en el concepto superior de la conversión en calor de toda potencia, ó efecto mecánico, en la apariencia destruída, *equivalente* por *equivalente*, á razón de *una caloría*, ó del calor necesario para elevar *un grado* la temperatura de *un kilogramo de agua*, por 430 kilográmetros de *trabajo* mecánico, consumido, como tal trabajo, en elevar la temperatura del cuerpo que le recibe y absorve.

La velocidad planetaria de buen número de estrellas fugaces ha sido aproximadamente determinada por diversos observadores, á contar de los tiempos de Chladni y Brandes; y, en época muy posterior, Joule ha demostrado que, por referencia á la mayoría de aquéllos asteroídes infinitesimales, el calor, equivalente al efecto mecánico de su primitiva fuerza viva, empleada en vencer la resistencia que á su movimiento opone la atmósfera terrestre, es suficiente para liquidarlos ó volatizarlos, reducirlos á menudísimos fragmentos, y dispersar sus masas por el espacio. En los casos excepcionales de no ser sus velocidades primitivas bastante considerables para la producción de estos efectos, de extraordinario caldeamiento, á la fusión y volatilización reemplazará la simple candencia, elevada hasta los colores azul y blanco, sin disgregación sensible ó exagerada de los cuerpos que la experimentan, y que, faltos ya de impulso para continuar circulando por el espacio y alejarse cada vez más y más de la Tierra, caen entonces sobre ésta en forma de aerolitos. Pero la regla general de conversión por el calor, en polvo meteórico impalpable, de los corpúsculos que constituyen las estrellas fugaces, debe admitir muchas menos excepciones de las que por de pronto propendemos á considerar como posibles.

Mas ¿de dónde proceden aerolitos y estrellas fugaces, las *piedras* venidas del cielo, ó los simples corpúsculos meteóricos?

La hipótesis lunar, emitida por Laplace, aunque no tomada á la letra, conforme tan sabio autor la formuló, ó sin correctivo alguno, ha sido adoptada varias veces, y puede serlo todavía sin demasiada exageración ó violencia, para tratar de explicarlo, en todos sus detalles y sin ningún género de duda, inexplicable y á duras penas concebible. Porque si bien es verdad que la especie de proceder los meteoritos de emanaciones volcánicas de la Luna, lanzadas directamente hacia la Tierra por centros de erupción en actual actividad, no se compadece ni con lo que la observación nos enseña, referente á la constitución y vida presentes de nuestro satélite, ni con las condicionés puramente dinámicas del problema; también es cierto que de la existencia de las vastas cavidades y numerosísimos cráteres de la Luna, tan enormes algunos como el llamado de Tico, y resultado todos de espantosos cataclismos, puede lógicamente inferirse que del cuerpo de aquel astro se desprendieron, en época ó épocas muy remotas, considerables fragmentos y muchedumbre de variados corpúsculos, que desde entonces ruedan ó circulan por el espacio, en órbitas complicadísimas y expuestas á continuas perturbaciones y graves trastornos de forma, y que, por lo mismo, de vez en cuando, y como por excepción, quedan sometidos á la acción preponderante del globo terráqueo, que los absorve, fuerza á penetrar en su atmósfera, y obliga por último á descender hasta el suelo, con velocidad vertiginosa y atronador estrépito muchas veces.

Pero ¿qué necesidad hay de fijarse, como exclusivo, en centro tan limitado de producción ú orígen de las estrellas fugaces? Más racional es suponer, como Chladni suponía, que los corpúsculos generadores, últimos peldaños en la escala de la creación de los mundos, pululan por el espacio, como circulan por él los globos de mayor cuantía, denominados soles, planetas y satélites: inmensamente grandes por su comparación con aquellos mismos corpúsculos, á primera vista despreciables, como granos de polvo cósmico, ó menudas aristas de tamo, que débil brisa arrebata, y zarandea, y lanza sin resistencia apenas de un lado para otro; pero globos, bien considerados, ni grandes ni pequeños en absoluto.

Lo sustancial en este punto no consiste en tratar de averiguar la procedencia originaria de las estrellas fugaces en sus diversas variedades, lo cual es casi pueril; sino el módo de conversión de los corpúsculos, que hormiguean por el firmamento, en tales aparentes estrellas, cuando, como por azar, ó por ley de muy complicada definición, penetran en la esfera de acción predominante y atmósfera de la Tierra. Y sobre este particular los términos en que discurre Joule, uno de los más ilustres fundadores de la Teoría Mecánica del Calor, son dignos por más de un concepto, de conocerse y divulgarse.

¡Admirable disposición, nos dice, la del Universo! En su rápido movimiento de revolución alrededor del Sol, la Tierra posee tal cantidad de fuerza viva que, si se convirtiera de pronto en calor equivalente, la temperatura de todo el globo resultaría mil veces superior á la del hierro enrojecido por el fuego; y el planeta apagado que ahora nos sustenta volvería á resplandecer con claridad comparable á la del mismo Sol. Tanto que, si la Tierra, desviada de su camino por cualquier causa se precipitase sobre el astro central, regulador de la armonía planetaria, en vez de enfriarle por su cadavérico contacto, como haz inmenso de combustible lanzado en devoradora hoguera, por resultado de su fuerza viva, transformada en cantidad equivalente de calor, avivaría, sin duda alguna, la actividad y resplandor irresistibles del potente luminar en torno del cual gira sumisa. De la conservación de la fuerza viva de la Tierra depende la conservación de nuestra existencia: como de la conversión en calor sensible de la fuerza viva de los cuerpos en movimiento, derivamos en multitud de casos particulares incalculables beneficios.

Bien conocido es el fenómeno de la producción de *estrellas fugaces:* meteoros que de repente brotan del fondo negro del cielo, y que, tras rápida y efímera carrera, se desvanecen y disipan, convertidos en brillantes ráfagas de fuego. Pues, en atención á las velocidades con que se mueven y cruzan presurosos por el espacio, apenas puede quedar asomo de duda de que semejantes misteriosos meteoros proceden de menudísimos planetas, que en sus revoluciones incesantes alrededor del Sol sometidos á continuas y poderosas causas de perturbación en sus giros consecutivos, concluyen por ser atraídos y absorbidos por la fuerza predominante de la Tierra.

Y, siendo esto así, reflexionemos por un momento en las consecuencias del descenso de uno de tales meteoritos sobre la población ó vivienda en que habitamos, con velocidad sesenta veces mayor que la de una bala de cañón, despedida por enorme carga de pólvora. ¡Horror causa pensarlo!

Pero los efectos espantosos de tales proyectiles, asestados contra la Tierra por invisible y potente mano, quedan eficazmente desvirtuados por la atmósfera sutil, extendida como levísima gasa alrededor de nuestro globo; pero que, sin embargo, opone resistencia bastante para refrenar la velocidad vertiginosa de las piedras meteóricas al través suyo descendentes, dando con esto lugar á la conversión en calor de la fuerza viva de aquellos temerosos proyectiles, en cantidad suficiente para fundirlos y volatilizarlos, ó reducirlos á menudos fragmentos y como impalpable polvo, que cae al fin inadvertido y extensamente desparramado por el suelo. No de otro modo se concibe y explica el hecho singular de que, siendo tan frecuentes y tantas las estrellas fugaces perceptibles cualquier noche, y, en noches excepcionales, tan enormemente prodigioso su número, sean tan contadas siempre las piedras meteóricas que descienden hasta la tierra; y que estas pocas, en el acto de caer ó á los pocos momentos de su descenso, presenten en su aspecto y superficie señales manifiestas de caldeamiento excesivo, y hasta de fusión poco profunda.

Poniendo artificialmente en movimiento Joule y Thomson un cuerpecillo metálico, con velocidad de 53 metros por segundo (175 pies ingleses), lograron que la temperatura del móvil se elevase un grado del termómetro centígrado; y $5^{0},3$ cuando la velocidad ascendió á 113 metros, ó 372 pies, también por segundo de tiempo: siendo muy probable que el efecto térmico vaya indefinidamente creciendo conforme el cuadrado de la velocidad aumenta. Pues, en este supuesto, á la velocidad de una milla (1.600 metros) por segundo, corresponderá un incremento de temperatura, aproximadamente, de 900^{0}; y á la de veinte millas (32 kilómetros), que puede considerarse como promedio de las velocidades con que los meteoritos penetran en la atmósfera terrestre, el inconcebible casi de 300000^{0}!.....

No admite, pues, duda racional que las estrellas fugaces proceden de pequeños corpúsculos errantes por el firmamento que, con velocidad de veinte y más millas por segundo, penetran en la atmósfera terrestre; que inmediatamente se encandecen, funden, disgregan y volatilizan; y que en su casi totalidad arden y se reducen á polvo oxidado, de todo punto impalpable. ¡Y todo esto por resultado no más del en la apariencia insignificante obstáculo que al libre movimiento de aquellos corpúsculos opone la atmósfera terrestre, en sus altas regiones extremadamente diluída! La Providencia no pudo idear preservativo más sencillo y eficaz á favor nuestro, y de cuantos seres y creaciones nos rodean, contra el continuo y furioso bombardeo á que de todas partes nos hallamos expuestos: bombardeo destructor, si la atmósfera no nos amparase y sirviese como de impenetrable muro: fantástico y de sin par belleza, en realidad, gracias á la tenue envolvente gaseosa que con amante solicitud nos protege y acaricia.

La temperatura de la Tierra.—La mayoría de los geólogos contemporáneos atribuye á la costra superficial terrestre muy pequeño espesor relativo, fundándose para ello en la hipótesis más comúnmente adoptada sobre la naturaleza y procedencia de los volcanes, y en el incremento que la temperatura de aquella costra experimenta con la profundidad, dando por buena, y como infalible, la ley de este incremento que en las capas más someras del suelo se advierte. Pero, en cambio, los astrónomos propenden á dar al estrato sólido superficial considerable espesor, infiriéndolo de la carencia de mareas lunisolares, que la masa flúida interna debería experimentar si realmente existiese, protegida tan sólo por tenue película de materiales consistentes.

Para los sostenedores de ambas opiniones opuestas, el problema de la variación de la temperatura con la profundidad es, por lo tanto, de muy grande importancia.

Sobre tan interesante asunto débense las primeras investigaciones á Genssane, que las emprendió por el año 1740, y á quien, con posterioridad, secundaron en sus tentativas Duboisson, Saussure y Cordier, estudiando las variaciones de temperatura en las minas de carbón fósil y metalíferas: estudio que tomó gran vuelo, muy avanzado ya el siglo XVIII, cuando se emprendieron con empeño las perforaciones de pozos artesianos, y Walferdin proporcionó á los observadores el termómetro de su nombre, perfectamente adecuado para ello.

De todos los trabajos hasta su época verificados dió cuenta detallada Arago en una de sus más interesantes noticias ó memorias científicas. Pero, en tiempos más recientes, la Comisión inglesa, creada en 1866 para el estudio de cuanto al carbón fósil atañe, recogió, sobre el punto á que estas líneas se refieren, gran número de observaciones, que otra Comisión, designada por la Asociación Británica para fomentar los Progresos de las Ciencias, recibió especial encargo de completar, y de cuyos trabajos dieron oportuna cuenta los *Annual Reports* de la misma Asociación, correspondientes á los años 1868 y 1883.

Y, sin embargo, de todas estas tan laboriosas investigaciones ningún resultado preciso, ó bien definido, ha podido concluirse hasta la fecha: fluctuando la incertidumbre sobre el espesor ó profundidad que corresponde á la variación de *un grado* centígrado de temperatura entre los límites, uno de otro muy lejanos, de 16,20 y 64,80 metros. En vez del promedio de estos números, ó de 40 metros de profundidad por cada grado de variación, valor por su procedencia muy cuestionable, admitíase como preferible en Francia el de 35 metros. Menester era, pues, volver á discutir las observaciones verificadas en distintos tiempos y lugares, para poner en claro la verdad, ó reducir por lo menos la amplitud enorme que separa aquellos dos límites extremos de su expresión numérica aproximada.

A este trabajo se ha dedicado con grande asiduidad el Sr. Prastwich, profesor de Geología en Oxford, el cual ha discutido pacientemente los resultados obtenidos en 350 distintas localidades ó estaciones, distribuídas en tres diversas categorías: *minas de carbón; minas de cualquier otra clase; y sondeos ó perforaciones de pozos artesianos*. Las conclusiones á que ha llegado son, en muy sucinto resumen, las siguientes.

1.° *Minas de carbón.*—Gran número de causas de error influyen en la determinación de la temperatura en esta clase de minas. Por que si bien los termómetros se hallan embutidos, por lo regular, tres y cuatro pies dentro de las paredes de las galerías, y en remota exposición á la influencia del aire, esto no es óbice para que la ventilación, producida por el ingreso en los pozos de 1.500 á 5.000 metros de aire por minuto, no rompa ó perturbe el equilibrio de temperatura en la roca: como que la diferencia de temperaturas del aire externo y del pozo de mina fácilmente puede llegar á 12 y á 15° centígrados.

Los desprendimientos de gases, contenidos en el carbón fósil, pueden ser además causa de enfriamiento, muy sensible y varias veces observado. Y causa de confusión también la irregularidad de la superficie externa del suelo: pues, á igualdad de nivel dentro de la mina, la temperatura es relativamente elevada, cuando la galería subterránea se extiende por debajo de una colina, y menos sensible cuando por debajo de un valle. Las buenas observaciones geotérmicas deben satisfacer, por lo tanto, á muchas condiciones, y para apreciarlas en su justo valor, es preciso conocer:

1.° La altura de la boca del pozo sobre el nivel del mar.

2.° La temperatura media anual de la localidad.

3.° La profundidad, bajo del suelo, del lugar preciso de observación.

4.° Su distancia (lateral?) al pozo.

5.° La temperatura y cantidad del aire en circulación.

6.° El tiempo trascurrido desde la libre exposición de la roca al aire.

7.° La cantidad de gases contenidos en la mina.

Que satisfagan á todas estas condiciones pocas son las observaciones efectuadas, considerándose como las mejores las hechas en Boldon, North Seaton, South Hetton, Rosebridge, Walkefield, Liège y Mons: de los cuales resulta la variación de 1° de temperatura por 26,71 metros de profundidad. De los sondeos hechos en Blythswood, South Balgray y el Creusot, se han deducido parecidamente 27,37 metros por grado.

2.° *Minas en general.*—En las minas metalíferas ordinarias la ventilación no es causa de error tan eficaz como en las de carbón de piedra; pero, en cambio, la enorme cantidad de agua que de ellas se extrae lo es de considerable enfriamiento. Baste en prueba de ello recordar que de algunas, como la de Dolcoatk, las bombas extraen 2.350.000 litros de agua por día; y de la de Huel Abraham hasta 9.000.000 de litros, en el mismo tan breve intervalo de tiempo: agua en su mayor parte procedente de pozos, á la temperatura de 15 y 20°, y no de la que cae del cielo sobre la tierra, y logra penetrar por filtración lenta dentro de las minas. Sin contar con que los manantiales de agua más caliente, ó procedente de mayores profundidades, ó caldeada por acciones químicas, no son raros en las galerías subterráneas.

De las mejores observaciones, hechas por los Sres. Henwood y Fox en las minas de Cornwall ó Cornualles, deduce el Sr. Prestwich la variación de 1° de temperatura por la de 22,22 metros de profundidad: sin que de los datos análogos, procedentes de otros países y lugares, por su vaguedad é inexactitud haya podido concluir resultado alguno que merezca recordarse.

3.° *Pozos artesianos.*—Las observaciones en ellos resultan falseadas por la presión del agua contra los termómetros, y por las corrientes que propenden á uniformar la temperatura de toda la masa líquida. El promedio de los resultados obtenidos asciende en este caso á 1° de variación en la temperatura por 27,96 metros de profundidad.

De todo lo cual infiere, por conclusión, el Sr. Prestwich que, como término medio ó en conjunto, el incremento geotérmico es de 1° por cada 25,92 ó 26 metros de descenso: resultado, confiesa aquel diligente investigador, no más que aproximado á la verdad todavía, y en su opinión no tan rápido como acaso lo sea en realidad.—(*Ciel et Terre.*)

Tempestad desastrosa.— Lo fué la que al caer la tarde y cerrar la noche del 18 de Agosto estalló por el N. de Barcelona, en los pueblos de Gallifa, Grunera, San Lorenzo Savall, Castellar den Huch, y término de Savadell, según desde el primero escribe D. Pedro C. Sobregrau. Sin grande aparato eléctrico, las nubes soltaron de repente sobre aquellos tristes campos tan gran cantidad de granizo que ni vestigio de vejetación quedó en varios lugares, huertas y viñedos, esmeradamente cultivados. La zona devastada en San Lorenzo medía 4 kilómetros de anchura, y $2\,{}^{1}/_{2}$ kilómetros en los alrededores de Sabadell, por longitud mucho mayor. Y en Castellar se recogieron piedras ó témpanos de hielo enormes, alguno de 400 gramos de peso.

M. M.

ÍNDICE

DE LAS MATERIAS CONTENIDAS EN ESTE NÚMERO.

CIENCIAS EXACTAS.

Método de Wantzel para conocer si un problema puede resolverse con la recta y el círculo.. 1

CIENCIAS NATURALES.

Dictámen sobre la obra de Mr. J. Lichtenstein, titulada: LOS PULGONES.— Monografía de los Afidios (*Aphididæ*, de Passerini, ó *Phytophthîres*, de Bourmeister.).. 48

VARIEDADES.

Sobre la extracción de la raíz cuadrada de los números.................. 58
Del orígen y procedencia de las estrellas fugaces........................ 61
La temperatura de la Tierra.. 65
Tempestad desastrosa... 68

Se suscribe en la portería de la Academia de Ciencias, plaza de la Villa, núm. 2, piso principal.

Cada tomo de la Revista constará de nueve números.

REVISTA

DE LOS

PROGRESOS DE LAS CIENCIAS

EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES.

TOMO 22.—N.° 2.°

MADRID.

IMPRENTA DE LA VIUDA É HIJO DE D. E. AGUADO.—PONTEJOS, 8.

1887.

OBRAS

publicadas por la Real Academia de Ciencias, y que se hallan de venta en la Secretaría de la misma, plaza de la Villa, núm. 2, piso principal.

	RÚSTICA. Ptas. Cént.
MEMORIAS.—9 tomos completos, precio de cada uno.......	12,50
REVISTA DE LA ACADEMIA.—21 tomos, precio de cada uno...	6,00
ANUARIOS.—Cuatro tomos: 1883 al 1887, precio de cada uno.	2,50

Tomando de 5 á 10 ejemplares á la vez, de cualquiera de estas obras, se hará en los precios la rebaja del 15 por 100 y de 10 ejemplares en adelante la del 25 por 100.

LIBROS DEL SABER DE ASTRONOMIA

DEL REY

DON ALFONSO X DE CASTILLA,

COPILADOS, ANOTADOS Y COMENTADOS

POR DON MANUEL RICO Y SINOBAS,

individuo numerario de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, y Catedrático de la Facultad de Ciencias en la Universidad Central.

Obra publicada de Real orden.—Se hallan de venta los 5 tomos encartonados, á 25 pesetas cada uno.

CIENCIAS EXACTAS.

DIVISIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA EN PARTES IGUALES.

El problema de la división de la circunferencia en partes iguales presupone el conocimiento de varios principios que no se suelen explicar en las Matemáticas elementales; y como el principal objeto de los trabajos de ampliación, que vamos ordenando, es el de facilitar el estudio de las teorías superiores, partiendo siempre de los elementos, comenzaremos ahora por exponer algunos teoremas relativos á *la divisibilidad de los números, á la inversión de funciones, y á las raíces propias y primitivas de las ecuaciones binomias.*

PRELIMINARES.

A. DIVISIBILIDAD.—*Problema.* Dado un número entero N, hallar cuántos números primos con N existen, inferiores á éste, contando entre ellos la unidad.

Resolución.—Descompongamos N en sus factores primos a, b, c...; y sea

$$N = a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \ldots\ldots s^{\sigma}.$$

Todo está reducido á tomar la serie 1, 2, 3, 4.... N, y á quitar de ella cuantos números sean divisibles por a, por b, por c....: el número de los que queden será el número buscado.

1,° En dicha serie 1, 2, 3.... N, encontraremos los siguientes números, múltiplos de a:

$$a,\ 2a,\ 3a\ldots\ \frac{N}{a}a:\ \frac{N}{a}\ \text{en totalidad.}$$

Descontándolos de la serie, quedarán, pues,

$$N-\frac{N}{a}=N\left(1-\frac{1}{a}\right).$$

2.° En la misma serie 1, 2, 3.... N, encontraremos los siguientes múltiplos de b:

$$b,\ 2b,\ 3b\ldots\ \frac{N}{b}b:\ \text{en número total de}\ \frac{N}{b}.$$

Y como, descontados los múltiplos de a, ya no quedaban más que $N\left(1-\frac{1}{a}\right)$, ahora sólo restarán

$$N\left(1-\frac{1}{a}\right)-\frac{N}{b}.$$

Pero algunos de los múltiplos de b formarán parte de la serie, ya suprimida, a, 2a, 3a, ..., $\frac{N}{a}$ a, de múltiplos de a: de modo que los habremos descontado *dos veces*. Para llevarlos en cuenta y aumentarlos *una vez* á la diferencia anterior, hay, pues, que averiguar cuántos múltiplos de b contiene la serie a, 2a, 3a,..., $\frac{N}{a}$ a.

Como a y b son primos sólo habrá que buscar los múltiples de b en la serie de los factores 1, 2, 3... $\frac{N}{a}$, que serán

$$b,\ 2b,\ 3b,\ \ldots,\ \frac{\frac{N}{a}}{b}\,b,\ \text{cuyo número es}\ \frac{\frac{N}{a}}{b}=\frac{N}{ab}.$$

De suerte que, suprimiendo de la serie primitiva los múltiplos de a y los de b, sólo quedará un número de términos igual á

$$N\left(1-\frac{1}{a}\right)-\frac{N}{b}+\frac{N}{ab}=$$
$$N\left(1-\frac{1}{a}\right)-N\left(1-\frac{1}{a}\right)\frac{1}{b}=N\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right).$$

3.° Quitemos ahora de este resto el número de términos múltiplos de c, que serán los que formen la serie

$$c,\ 2c,\ 3c,\ldots\ \frac{N}{c}c, \text{ en número total de } \frac{N}{c}.$$

Esta nueva reducción parece que da para el número de términos restantes, primos con a, b, c,

$$N\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)-\frac{N}{c}.$$

Pero, al suprimir en la serie primitiva todos los múltiplos de a y de b, habremos quitado algunos múltiplos de c; y, si ahora los quitamos todos, habremos restado estos últimos dos veces: menester será, por lo tanto, agregarlos una vez.

Hay, pues, que buscar en la serie $c,\ 2c,\ 3c,\ldots \frac{N}{c}c$ el número de múltiplos de a y b que contiene; pero lo mismo da buscarlos en esta serie que en la $1,\ 2,\ 3\ldots \frac{N}{c}$; puesto que c es primo con a y b.

Ahora bien: el número de términos divisibles por a y b en la serie $1,\ 2,\ 3\ldots \frac{N}{c}$ es, según se ha demostrado en el caso segundo, toda vez que aquí representa $\frac{N}{c}$ lo que allí N,

$$\frac{N}{c}\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right).$$

Y estos son los únicos de la serie $c,\ 2c,\ 3c\ldots \frac{N}{c}c$ que deben quitarse, y no $\frac{N}{c}$: con lo cual tendremos para el número de términos de la serie 1, 2, 3... N, primos con a, b, c:

$$N\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)-\frac{N}{c}\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)=$$
$$N\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right).$$

Y, prosiguiendo el mismo método de reducción, tendremos, finalmente, que el número de números, inferiores á N y primos con N, contando entre ellos la unidad, será

$$N\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{1}{s}\right):$$

con lo cual queda resuelto el problema,

Varias formas y símbolo. El número anterior puede tomar evidentemente estas tres formas

$$N\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{s}\right)=$$
$$a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}\ldots\ldots s^{\sigma}\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{s}\right)=$$
$$a^{\alpha-1}b^{\beta-1}c^{\gamma-1}\ldots\ldots s^{\sigma-1}(a-1)(b-1)(c-1)\ldots\ldots(s-1).$$

Si el número dado N toma diversos valores, la expresión anterior variará también, de suerte que en rigor es una función de N: es decir, un *número entero* variable, que depende de otro entero, variable también, desde 1 á ∞.

El símbolo generalmente adoptado para representarlo es el siguiente: φ (N). De suerte que

$$\varphi(N)=N\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{1}{s}\right)$$

expresa el número de enteros inferiores á N y primos con él, incluyendo entre estos números la unidad.

Si N no contiene más que un factor primo de cada clase, será

$$N = a.\ b.\ c.\ d. \ldots.\ s;\ y$$

$$\varphi(N) = a\,b\,c\,d \ldots.\ s\left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right)\left(1 - \frac{1}{c}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{s}\right) =$$

$$(a-1)(b-1)(c-1)\ldots\ldots(s-1).$$

Ejemplo. Sea $N = 60 = 2^2.3.5$

$$\varphi(N) = 60\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right)$$

$$= 60.\ \frac{1}{2}\ .\ \frac{2}{3}\ .\ \frac{4}{5} = 16.$$

Y, en efecto, en la serie

$\underline{1}$, 2, 3, 4, 5, 6, $\underline{7}$, 8, 9, 10, $\underline{11}$, 12, $\underline{13}$, 14, 15, 16, $\underline{17}$, 18, $\underline{19}$, 20, 21, 22, $\underline{23}$, 24, 25, 26, 27, 26........ 60.

los números primos con 60 é inferiores á 60 son los 16 siguientes:

1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 49, 53, 59:

todos los demás tienen algún factor común con 60.

Veamos ahora dos teoremas fundamentales de esta teoría.

Teorema 1.° La función φ de un producto de dos enteros N y N′, primos entre sí, es igual al producto de las funciones φ de ambos factores.

Es decir

$$\varphi(N \times N') = \varphi(N) \times \varphi(N').$$

Demostración. Supongamos

$$N = a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \ldots\ldots s^{\sigma}\ \ y\ \ N' = a'^{\alpha'} b'^{\beta'} c'^{\gamma'} \ldots\ldots s'^{\sigma'}.$$

Puesto que en N N′ entran los factores primos a, b, c, ... s, a′, b′, c′..... s′, todos distintos, por ser N y N′ primos entre sí, la fórmula general, función φ, da

$$\varphi(NN') = NN'\left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right)\ldots\ldots\left(1 - \frac{1}{s}\right)\times$$

$$\left(1 - \frac{1}{a'}\right)\left(1 - \frac{1}{b'}\right)\ldots\ldots\left(1 - \frac{1}{s'}\right).$$

Pero el segundo miembro puede descomponerse en dos factores, de este modo:

$$\varphi(NN') = \left[N\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{1}{s}\right)\right]\times$$
$$\left[N'\left(1-\frac{1}{a'}\right)\left(1-\frac{1}{b'}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{1}{s'}\right)\right]:$$

el primero de los cuales es igual á $\varphi(N)$ y el segundo á $\varphi(N')$.

Luego

$$\varphi(NN') = \varphi(N)\times\varphi(N').$$

Observaciones. 1.ª Este teorema puede evidentemente extenderse á un número cualquiera de factores.

En efecto:

$$\varphi(NN'N'') = \varphi(NN')\,\varphi(N'') = \varphi(N)\,\varphi(N')\,\varphi(N'').$$

2.ª Para que sea general y no tengamos que introducir en su enunciado restricción alguna *hay que suponer que* $\varphi(1)=1$.

En efecto:

$$\varphi(N) = \varphi(1\times N) = \varphi(1)\times\varphi(N):$$

de suerte que es preciso suponer como hemos dicho $\varphi(1)=1$ para que no resulte un absurdo.

No se pierda de vista, sin embargo, que esta condición es *puramente convencional* y que sólo sirve para facilitar la aplicación de las fórmulas, y no incurrir á cada momento en excepciones innecesarias.

Teorema 2.º Sea un número entero cualquiera N; determinemos la serie de todos sus divisores simples y compuestos, comprendiendo en esta serie *la unidad* y el *mismo número* N; y para cada uno de estos divisores determinemos la función φ: la suma de todas estas funciones, que son otros tantos números enteros, es igual al número propuesto N.

Demostración. Empezaremos por demostrar que, si el teorema es cierto para un número compuesto de n factores, iguales ó desiguales, también lo es cuando se agrega un factor más, ó para el número compuesto de $n+1$ factores.

Sean, N el número de n factores; 1, d, d′, d″ ..... N todos sus divisores simples y compuestos, comprendiendo la *unidad* y el mismo número N; y a el nuevo factor primo: el nuevo número, de $n+1$ factores, será Na.

Los divisores de Na serán:

1.º Todos los divisores de N, á saber: 1, d, d′, d″..... N.

2.º Y todos los productos de a por estos divisores: es decir, a, d a, d′a, d″a ..... Na

En cuanto al divisor a de Na, ya está contado en la serie anterior.

De suerte que la suma de todas las funciones φ, de todos los divisores de Na, será:

$$\varphi(1)+\varphi(d)+\varphi(d')+\ldots\varphi(N)+\varphi(a)+\varphi(ad)+\varphi(ad')+\ldots\varphi(aN)$$

Pero la primera parte

$$\varphi(1)+\varphi(d)+\varphi(d')+\ldots\ldots\varphi(N),$$

puesto que el teorema lo suponemos cierto para n factores, será igual á N; y la suma precedente se transforma en esta otra, descomponiendo además cada término

$$\varphi(a\,d),\ \varphi(a\,d')\ \ldots\ldots\varphi(aN)$$

en sus dos funciones φ:

$$N+\varphi(a)+\varphi(d)\varphi(a)+\varphi(d')\varphi(a)+\varphi(d'')\varphi(a)\ldots\ldots+\varphi(N)\varphi(a)=$$
$$N+(1+\varphi(d)+\varphi(d')+\varphi(d'')+\ldots+.\varphi(N))\varphi(a)=N+N\varphi(a).$$

Ahora bien, siendo a *primo*, todos los números menores que él son primos con él mismo; y, como estos son en número a—1, tendremos que

$$\varphi(a)=a-1:$$

de donde resulta

$$N+N\varphi(a)=N+N(a-1)=Na:$$

que es precisamente el nuevo número con un factor más.

Demostrado esto, puede probarse que el teorema es cierto para *un solo factor primo*.

En efecto, dado un factor primo a, la serie de sus divisores, comprendiendo el 1 y el mismo número, es 1, *a;* y la suma de las funciones φ para todos estos divisores

$$\varphi(1)+\varphi(a).$$

Mas, por convención, cuya importancia vemos ahora,

$$\varphi(1)=1;$$

y además

$$\varphi(a)=a-1:$$

luego

$$\varphi(1)+\varphi(a)=1+a-1=a:$$

que es el mismo número propuesto.

Siendo cierto el teorema para el caso de un factor primo, en virtud de lo demostrado anteriormente lo será para el caso de *dos factores*, y así sucesivamente.

Ejemplo. Sea $N=2^2\times3\times5$: sus divisores simples y compuestos serán:

$$1,\ 2,\ 4,\ 3,\ 6,\ 12,\ 5,\ 10.\ 20,\ 15,\ 30,\ 60;$$

y la suma de sus funciones φ, serán asimismo:

$$\varphi(1)+\varphi(2)+\varphi(4)+\varphi(3)+\varphi(6)+\varphi(12)+\varphi(5)+\varphi(10)+$$
$$+(20)+\varphi(15)+\varphi(30)+\varphi(60)=1+1+\varphi(4)+2+\varphi(2)\varphi(3)+$$
$$+\varphi(4)\varphi(3)+4+\varphi(2)\varphi(5)+\varphi(4)\varphi(5)+\varphi(3)\varphi(5)+$$
$$+\varphi(2)\varphi(3)\varphi(5)+\varphi(4)\varphi(3)\varphi(5).$$

Y obsérvese que hemos podido descomponer las φ de números compuestos en producto de funciones φ de dos ó más factores primos entre sí, pero no cuando no lo eran: por ejemplo, á $\varphi(4)$ no hubieramos podido sustituir $\varphi(2)\ \varphi(2)$, ni, á $\varphi(40)$, el producto $\varphi(2)\,\varphi(20)$.

Continuando el cálculo numérico, tendremos:

$$1+1+4\left(1-\frac{1}{2}\right)+2+2+4\left(1-\frac{1}{2}\right).2+4+$$
$$+4+4\left(1-\frac{1}{2}\right).4+8+8+4\left(1-\frac{1}{2}\right).8=$$
$$1+1+2+2+2+4+4+4+8+8+8+16=60$$

que es el número propuesto.

Observación. De todas estas teorías sólo tomamos lo puramente preciso para nuestro objeto: el lector que desee ampliar sus estudios en la materia puede consultar los varios tratados especiales sobre *Teoría de los Números:* por ejemplo, entre otros, el Algebra superior de Serret; las Lecciones sobre teoría de números de Dirichlet, publicadas por Dedekind; y el Tratado elemental sobre la misma *Teoría* de D. Eulogio Jimenez.

B. Inversión de funciones. Supongamos un número N de la forma

$$N = a\,b\,c \,.....\, s$$

siendo a, b, c ..... s sus factores primos: lo cual significa que no los contiene más que una sola vez.

La función φ de este número N será

$$\varphi(N) = (a-1)(b-1)(c-1)\,.....\,(s-1).$$

Este producto es muy importante y da lugar á teoremas en extremo fecundos.

Desde luego $(a-1)(b-1)(c-1)\,.....\,(s-1)$, desarrollado en términos monomios, contiene todos los divisores simples y compuestos de N, incluyendo la *unidad* y el mismo número N: por ejemplo contiene uno cualquiera m n p, porque basta tomar entre los productos parciales de

$$(a-1)(b-1)(c-1)\,.....\,(m-1)(n-1)(p-1)\,.....\,(s-1)$$

un producto compuesto de los primeros términos en $(m-1)$, $(n-1)$, $(p-1)$ y de las *unidades* en todos los demás.

Pero, aunque la expresión $(a-1)(b-1\,.....\,(s-1)$, desarrollada algebraicamente, contendrá todos los divisores de N, unos llevarán el signo +, si en el producto entrán un número par de unidades negativas, y otros el signo —, si el número de segundos términos, ó de unidades negativas que entran como factores, es impar.

Representemos para abreviar por Σd_1 la suma de todos los divisores que llevan el signo +, y por Σd_2 la de todos los que llevan el signo — : en este caso

$$(a-1)(b-1)(c-1)\,.....\,(s-1) = \Sigma d_1 - \Sigma d_2$$

y en el conjunto de ambas Σ estarán como hemos probado todos los divisores de $N = abc \ldots\ldots s$, desde 1 á N, ambos inclusive.

Con lo cual podemos demostrar fácilmente el siguiente:

Teorema. 1.° Si representamos por d un divisor cualquiera de N, pero inferior á N [divisor que será precisamente uno de los d_1 ó de los d_2, exceptuando N], este divisor d dividirá á tantos términos en Σd_1 como en Σd_2.

Demostración. Empecemos por demostrar que el teorema es exacto para los números compuestos de dos factores primos no repetidos: es decir para $N = ab$.

En este caso

$$(a-1)(b-1) = ab+1 - a - b:$$

de suerte que $\Sigma d_1 = ab+1$ y $\Sigma d_2 = a+b$; y como todos los divisores, exceptuando ab, son 1, a, b, se ve claramente que 1 divide *á los dos términos*, ab y 1 en Σd_1, y también á los dos términos a, b, de Σd_2; que a divide un solo término, ab, en Σd_1, y un solo término a en Σd_2; y que igualmente b divide un término no más, ab, en Σd_1, y otro, b, en Σd_2.

Luego el teorema es exacto en este caso.

Para completarlo debemos probar que, si es cierto para un número

$N = abc \ldots\ldots s$, de *n* factores, lo es para
$N' = abc \ldots\ldots st$,

compuesto de un factor más.

En efecto, $\varphi(N) = \Sigma_n d_1 - \Sigma_n d_2$: en cuya fórmula el subíndice *n* sirve para recordar que N se compone de *n* factores; y el segundo miembro es el producto $(a-1)(b-1) \ldots (s-1)$, agrupados los productos positivos d_1 en $\Sigma_n d_1$, y los productos negativos d_2 en $\Sigma_n d_2$.

Además suponemos que el teorema es cierto para

$$\Sigma_n d_1 - \Sigma_n d_2.$$

Ahora bien:

$$\varphi(N') = (a-1)(b-1)(c-1) \ldots\ldots (s-t)(t-1) = (\Sigma_n d_1 - \Sigma_n d_2)(t-1):$$

y desarrollando,

$$(a-1)(b-1) \ldots\ldots (t-1) = [t\Sigma_n d_1 + \Sigma_n d_2] - [t\Sigma_n d_2 + \Sigma_n d_1]$$

Tendremos evidentemente

$$\Sigma_{n+1}d_1 = + t\Sigma_n d_1 + \Sigma_n d_2 \qquad (p)$$
$$\Sigma_{n+1}d_2 = + t\Sigma_n d_2 + \Sigma_n d_1 \qquad (q)$$

Todo divisor de $N' = abc \ldots\ldots st$ ó contendrá ó no contendrá t.

1.º Si no contiene t, dividirá tantos términos en (p) como en (q), porque en ambas fórmulas entran las mismas d_1 y las mismas d_2, y por cada una d_1 ó d_2 de (p) habrá otra en (q).

2.º Si contiene t, será de la forma td; pero d divide tantas d_1 como d_2 por hipótesis, toda vez que d es un divisor del primer número N: luego tantos divisores de td habrá en $t\Sigma_n d_1$ de (p) como en $t\Sigma_n d_2$ de (q): es decir que td dividirá tantos términos de $\Sigma_{n+1} d_1$ como de $\Sigma_{n+1} d_2$. Queda, pues, probado el teorema en general.

Podemos generalizar dicho teorema de este modo.

Sea un número $N = a^m b^n c^p \ldots\ldots g^s$: su función $\varphi(N)$ puede ponerse bajo esta forma

$$\varphi(N) = a^{m-1}\, b^{n-1}\, c^{p-1} \ldots g^{s-1} (a-1)(b-1)(c-1) \ldots (g-1)$$

ó abreviadamente

$$\varphi(N) = N'(a-1)(b-1)(c-1) \ldots\ldots (g-1)$$

en que $\qquad N' = a^{m-1} b^{n-1} c^{p-1} \ldots\ldots g^{s-1}.$

La última parte $(a-1)\, b-1\, (c-1) \ldots\ldots (g-1)$ puede descomponerse como en el teorema anterior en dos grupos: uno de productos positivos, Σd_1; y otro de productos negativos Σd_2; y tendremos:

$$\varphi(N) = N'(\Sigma d_1 - \Sigma d_2)$$

ó bien

$$\varphi(N) = \Sigma N'd_1 - \Sigma N'd_2.$$

Todos los términos parciales $\ldots\ldots N'd_1 \ldots\ldots$ y $\ldots\ldots N'd_2 \ldots\ldots$, serán evidentemente divisores de N; pero no serán la totalidad de los divisores de N, sino dos grupos particulares: esto es evidente con solo observar que todos ellos contienen $N' = a^{m-1}\, b^{n-1}\, c^{p-1} \ldots\ldots g^{s-1}$ por lo menos; de suerte que, si el divisor de N contiene a, elevado á una potencia inferior á $m-1$, ó b, á una potencia inferior á $n-1$, y así sucesivamente, dicho divisor de N no podrá estar en ninguna de las dos Σ. Representando en general por D_1 y D_2 los divisores de ambos grupos tendremos

$$\varphi(N) = \Sigma D_1 - \Sigma D_2$$

en cuya expresión no debemos olvidar que ... D_1... y ... D_2..., son algunos divisores de N y no todos, y que se obtienen, como queda indicado, por la multiplicación de N′ por todos los divisores del número a b c ... g: es decir por todas las d_1 y d_2 del desarrollo $(a-1)\, b-1)\, (c-1) \ldots\ldots (g-1)$.

He aquí ahora el teorema á que nos referimos.

Teorema 2.º En la expresión $\Sigma D_1 - \Sigma D_2$, dado un divisor cualquiera, D, de $N = a^m b^n c^p \ldots\ldots g^s$, pero inferior á N, hay tantos términos en ΣD_1, divisibles por D, como en el grupo negativo ΣD_2.

Demostración. Una de dos: ó el divisor D es de los que entran en ΣD_1 ó ΣD_2, ó es de los que, por la razon expuesta anteriormente, no entran en ambas series.

Si lo último, el teorema es evidente, porque D no dividirá á ningún término de ΣD_1 como tampoco á ningún término de ΣD_2, y cero es igual á cero.

Si lo primero, su forma general será esta: $D = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots\ldots$ siendo *uno* por lo menos, ó varios exponentes α, β, γ ..... inferiores á m, n, p ..... y pudiendo ser algunos de ellos nulos.

Todos los números D_1, D_2 tienen la forma N′d, siendo $N' = a^{m-1} b^{n-1} c^{p-1} \ldots\ldots g^{s-1}$ y estando d compuesto de algunos de los factores primos a, b, c ..... : es decir siendo uno de los números d del primer caso.

Si hallamos el máximo común divisor, δ, de $D = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$ y de $N' = a^{m-1} b^{n-1} c^{p-1} \ldots\ldots$, éste se compondrá de los factores a, b, c ..... elevados á α, β, γ ..... si son inferiores á $m-1$, $n-1$, $p-1$ .....; ó á estos últimos si son algunos de aquellos iguales á m, n, p .....; y, separando este m. c. d de D, sólo quedarán algunos de los factores primos a, b, c ..... elevados á la primera potencia.

Por ejemplo, si $N = a^4 b^3 c^5 d^6$ y $D = b^3 c^2 d^6$, el máximo común divisor de $N' = a^3 b^2 c^4 d^5$ y $D = b^3 c^2 d^6$ será $b^2 c^2 d^5$, y dividiendo por él á D quedará bd, que sólo contiene b y d elevados á la primera potencia.

Ahora bien, para que $D = \delta\, d$ (siendo d uno de los divisores de Σd_1 ó Σd_2) divida á $N' d_1$ ó $N' d_2$ es preciso, puesto que δ divide á N', y agota por decirlo así las máximas potencias de a, b, c ....., que d divida á d_1 ó d_2: de suerte que la divisibilidad de D_1 ó D_2 por D, se reduce á la de d_1 ó d_2 por d: es decir al primer caso.

De aquí resulta inmediatamente que D dividirá á tantos términos en ΣD_1 como en ΣD_2.

Esta observación sencillísima permite resolver una clase de problemas que á primera vista parecen complicados y difíciles, y á los que podemos dar el nombre de problemas de *inversión de funciones*.

Uno se refiere á *sumas* y otro á *productos;* y, aunque el primero sea inútil para nuestro objeto, trataremos de ambos por su originalidad y elegancia.

Problema 1.° Supongamos que se demuestra la siguiente relación para toda clase de números.

$$F(N) = \Sigma f(D): \qquad (1)$$

N es un número entero cualquiera:

F (N) y f (D) son funciones de N y D, pero no precisamente de las formas ordinarias, sino de mayor grado de generalidad; es decir, expresiones cuyo valor y *cuya forma* dependen de N ó D, de suerte que hasta pueden ser índices, subíndices, ó números de orden que caractericen la función. En suma F (N) y f (D) dependen en valor y en forma de los números N y D:

D uno cualquiera de los divisores de N, desde 1 á N, ambos inclusive; y Σ una suma que se extiende á todas las funciones f, caracterizadas por todos los divisores de N, de 1 á N. De aquí resulta que las f de Σ pueden ser distintas en la forma: basta que cada una corresponda á cada valor de D.

Ahora bien: el problema consiste en deducir f (N) en función de las distintas funciones F (D). Se trata, pues, de algo parecido á una inversión de funciones: así como la F está en función de las f, el problema determina la f de N en función de las F de D.

Resolución.—Puesto que la fórmula (1) *suponemos* que está demostrada para todo número y sus divisores, apliquémosla, 1.º: á todos los números de la serie D_1', D_1'', D_1'''... N, comprendidos en la ΣD_1 de la fórmula $\Sigma D_1 - \Sigma D_2$; 2.º á todos los números ó divisores de N comprendidos en la ΣD_2 de la misma fórmula, es decir, á D_2', D_2'', D_2''' ..... $D_2^{(n)}$.

Tendremos para la 1.ª serie:

$$F(D_1') = \Sigma f \text{ (divisores de } D_1')$$
$$F(D_1'') = \Sigma f \text{ (divisores } D_1'')$$
$$F(D_1''') = \Sigma f \text{ (divisores } D_1''')$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$F(N) = \Sigma f \text{ (divisores de } N)$$

Y, sumando,

$$\Sigma F(D_1) = \Sigma f \text{ (divisores de } D_1') + \Sigma f \text{ (divisores de } D_1'')$$
$$+ \Sigma f \text{ (divisores de } D_1''') \ldots + \Sigma f \text{ (divisores de } N)$$

E igualmente tendremos para la segunda serie

$$F(D_2') = \Sigma f \text{ (divisores de } D_2')$$
$$F(D_2'') = \Sigma f \text{ (divisores } D_2'')$$
$$F(D_2''') = \Sigma f \text{ (divisores } D_2''')$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$F(D_2^{(n)}) = \Sigma f \text{ (divisores } D_2^{(n)})$$

Y, sumando,

$$\Sigma F(D_2) = \Sigma f \text{ (divisores de } D_2') + \Sigma f \text{ (divisores de } D_2'')$$
$$+ \Sigma f \text{ (divisores de } D_1''') + \ldots + \Sigma f \text{ (divisores de } D_2^{(n)})$$

Restando de una suma otra, el primer miembro será

$$\Sigma F(D_1) - \Sigma F(D_2):$$

extendiéndose la *primera* Σ á todas la funciones F correspondientes á todos los divisores D_1 comprendidos en la parte positiva de $a^{m-1}\, b^{n-1}\, c^{p-1} \ldots (a-1)(b-1)(c-1)\ldots$ incluyendo la función que corresponde á N; y la *segunda* Σ á todas las funciones F, correspondientes á los divisores D_2 de la parte negativa de dicha expresión.

En cuanto á los segundos miembros observemos que todos los términos de la primera serie de Σ serán iguales y contrarios á los de la 2.ª serie, exceptuando f (N); y que por lo tanto se destruirán dos á dos.

En efecto sea δ''' un divisor de D_1''', y supongamos para fijar las ideas que divide á *tres* terminos de $\Sigma\, D_1$: tendremos tres términos iguales

$$f(\delta'''),\ f(\delta'''),\ f(\delta''').$$

Pero, en virtud del teorema demostrado anteriormente, en $\Sigma\, D_2$ habrá otros trés términos divisibles por δ''' y á ellos corresponderán tres funciones f

$$f(\delta'''),\ f(\delta'''),\ f(\delta''')$$

que al restar destruirán los tres anteriores.

Más claro: si δ''' es divisor de D_1', D_1'' y D_1'''

en Σ f (divisores de D_1') habrá un término $f(\delta''')$;

en Σ f (divisores de D_1'') otro igual $f(\delta''')$;

en Σ f (divisores de D_1''') otro también igual á $f(\delta''')$.

Es evidente por lo demás que una de estas D_1', D_1'', D_1''' será la misma δ'''.

Y otro tanto puede decirse de todos los términos de la primera y segunda serie.

Mas ha de recordarse que el teorema citado dice: *divisores inferiores á* N; y, por lo tanto, quedará f (N) como resultado final de restar los segundos miembros.

Es decir que tendremos

$$f(N)=\Sigma\, F(D_1)-\Sigma\,(D_2):$$

extendiéndose las Σ á los divisores D_1 y D_2 de los dos términos de la otra fòrmula

$$\varphi(N)=\Sigma\, D_1-\Sigma\, D_2.$$

La que se acaba de hallar

$$f(N)=\Sigma\, F(D_1)-\Sigma\, F(D_2)$$

nos da la función f expresada en valores de las funciones F.

Podemos establecer relativamente á los productos un teorema análogo al anterior.

Problema 2.º Supongamos que para cualquier número N se ha llegado á demostrar la siguiente fórmula:

$$F(N)=f(1).\ f(D).\ f(D').\ f(D'')\ldots\ldots f(N):$$

ó abreviadamente y representando por Π un producto, como antes hemos representado pos Σ una suma:

$$F(N)=\Pi\, f(D) \qquad (1)$$

extendiéndose los factores á todos los divisores desde 1 á N, ambos inclusive, del número N.

Se trata de despejar la f (N) en función de las F: es decir, de invertir en cierto modo estas funciones especiales.

Por lo demás todas las observaciones que hemos hecho respecto á f y F en el problema anterior son aplicables á este, de suerte que D y N *caracterizan* la función y la determinan, pero en términos más generales que en las funciones ordinarias, es decir que son como verdaderos índices de determinación.

Resolución.—Puesto que la fórmula (1) se aplica á todos los números y á sus divisores podremos aplicarla: 1.º á todos los números D_1, del grupo positivo $\Sigma\ D_1$, y á sus divisores; 2.º á todos los números D_2, del grupo negativo $\Sigma\ D_2$, y á sus divisores asimismo.

Tendremos, pues, llamando D_1', D_1'', D_1''' ..... N á los diferentes números D_1, entre los cuales estará N que pertenece al grupo positivo, y D_2', D_2'', D_2''' ..... á los números D_2:

Primer grupo:

$$F(D_1')=\Pi\, f(\text{divisores de } D_1')$$

$$F(D_1'')=\Pi\, f(\text{divisores} \quad D_1'')$$

$$F(D_1''')=\Pi\, f(\text{divisores} \quad D_1''')$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$F(N)\ =\Pi\, f(\text{divisores de } N)$$

Y, multiplicando todas estas ecuaciones,

$$\Pi F(D_1) = \Pi \text{ (f divisores de } D_1'). \ \Pi \text{ f (divisores de } D_1'')\ldots$$
$$\Pi \text{ f (divisores de N):}$$

Segundo grupo:

$$F(D_2') = \Pi \text{ f (divisores de } D_2')$$
$$F(D_2'') = \Pi \text{ f (divisores } \quad D_2'')$$
$$F(D_2''') = \Pi \text{ f (divisores } \quad D_2''')$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$F(D_2^{(n)}) = \Pi \text{ f (divisores } \quad D_2^{(n)})$$

Y, multiplicando,

$$\Pi F(D_2) = \Pi \text{ f (divisores } D_2'). \ \Pi \text{ f (divisores de } D_2'')\ldots\ldots$$
$$\Pi \text{ f (divisores de } D_2^{(n)}).$$

Dividiendo el primer resultado por el segundo, los primeros miembros darán este otro:

$$\frac{\Pi F(D_1)}{\Pi F(D_2)}:$$

en el cual las Π se extenderán á todas las funciones F correspondientes á todos los términos D_1 y D_2 de los grupos positivos y negativos, respectivamente, de $\Sigma D_1 - \Sigma D_2$; advirtiendo que en el numerador habrá un factor F (N).

En cuanto á los segundos miembros podemos hacer una observación análoga á la del problema precedente.

Si, por ejemplo, δ''' es un divisor do D_1''', que divide á tres términos de la serie ΣD_1, dará origen este divisor á tres funciones, f, iguales:

$$f(\delta'''), \ f(\delta'''), \ f(\delta''')$$

que entrarán como factores en el numerador del segundo término que estamos formando. Pero, en virtud del teorema general, δ''' será divisor de tres términos, y no más que de tres en la serie que corresponde á ΣD_2: luego dará origen á tres factores en el denominador, iguales todos ellos

$$f(\delta'''), \ f(\delta'''), \ f(\delta''')$$

y podremos suprimirlos del numerador y denominador.

Y como esto mismo puede repetirse para todos los divisores de todas las funciones comprendidas bajo el signo Π, tanto para las D_1, como para las D_2, solo quedará en el numerador $f(N)$, porque la ley general excluye al número N, pues solo se aplica á divisores inferiores á este número.

El segundo miembro, será, pues, $f(N)$; y tendremos, invirtiendo el orden de los miembros:

$$f(N) = \frac{\Pi F(D_1)}{\Pi F(D_2)}$$

llegando $\Pi F(D_1)$ hasta el mismo número N.

Observación.—Para comprender bien lo que precede, hay que fijarse en que δ''' es un divisor cualquiera, simple ó compuesto, de uno de los números D_1; que cada divisor da origen á una función f; y que la clave de la demostración está en que, habiendo tantos divisores iguales á δ''' en la serie de los números D_1 como en la de los D_2 (exceptuando N), los mismos factores habrá en el numerador que en el denominador.

C. Ecuaciones binomias: raíces propias y primitivas.— Aunque la teoría de las ecuaciones binomias se explica en los elementos de la teoría general de ecuaciones, bueno será recordar algunas de sus propiedades, principalmente las que se refieren á sus raíces *propias* y *primitivas*.

Se llama ecuación binomia á una de la forma

$$x^n - 1 = 0,$$

pues á este tipo pueden reducirse todas las de dicha clase.

Se sabe que

$$x = \cos\frac{2k\pi}{n} + \sqrt{-1}\ \text{sen}\ \frac{2k\pi}{n}$$

En efecto, sustituyendo tendremos

$$\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + \sqrt{-1}\ \text{sen}\ \frac{2k\pi}{n}\right)^n - 1 = 0:$$

que se convierte por el teorema de Moivre en

$$\cos\frac{2k\pi}{n}n + \sqrt{-1}\ \text{sen}\ \frac{2k\pi}{n}n - 1 = 0$$

ó bien en

$$\cos 2k\pi + \sqrt{-1}\ \text{sen}\ 2k\pi - 1 = 0.$$

Y, como k es entero,

$$\cos 2k\pi=1 \quad , \quad \operatorname{sen} 2k\pi=0;$$

Tendremos, pues,

$$1-1=0$$

Como la expresión

$$x=\cos\frac{2k\pi}{n}+\sqrt{-1}\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}$$

admite infinitos valores, puesto que k, con tal de ser entero, es cantidad indeterminada, parece á primera vista que la ecuación $x^n-1=0$ admite infinitas raíces: lo cual es absurdo.

Pero puede demostrarse:

1.° Que dando á k la serie de valores,

	0, 1, 2..........	n—1
ó la	1, 2, 3..........	n

se obtienen n valores distintos, que son las n raíces de

$$x^n-1=0.$$

2.° Que los nuevos valores que se den á k á partir de n reproducen las mismas raíces halladas.

Ambos teoremas se demuestran con facilidad suma.

1.° Dando á k dos valores k' y k'', inferiores á n, los valores de x son distintos.

En efecto: si tuviéramos

$$\cos\frac{2k'\pi}{n}+\sqrt{-1}\operatorname{sen}\frac{2k'\pi}{n}=\cos\frac{2k''\pi}{n}+\sqrt{-1},\operatorname{sen}\frac{2k''\pi}{n},$$

igualando las partes reales é imaginarias, resultaría

$$\cos\frac{2k'\pi}{n}=\cos\frac{2k''\pi}{n} \quad ; \quad \operatorname{sen}\frac{2k'\pi}{n}=\operatorname{sen}\frac{2k''\pi}{n}.$$

Pero dos arcos $\frac{2k'\pi}{n}$ y $\frac{2k''\pi}{n}$, que tienen el mismo *seno* y el mismo *coseno*, solo pueden diferir por un número entero de circunferencias: luego, representando por l un número entero, tendríamos

$$\frac{2k'\pi}{n}-\frac{2k''\pi}{n}=2\,l\,\pi$$

ó bien

$$k' - k'' = l\,n:$$

resultado absurdo, porque k' y k'' son inferiores á n y con más razón su diferencia.

Puesto que los n valores obtenidos son desiguales, y todos ellos son raíces, claro es que serán las n raíces de $x^n - 1 = 0$.

Observación.—Tanto da empezar por 0 como por 1.

Si lo primero, á $k=0$ corresponde $\cos 0 + \operatorname{sen} 0 \sqrt{-1} = 1$

Si lo segundo, á $k=n$ corresponde

$$\cos \frac{2n\pi}{n} + \sqrt{-1} \operatorname{sen} \frac{2n\pi}{n} = \cos 2\pi + \sqrt{-1} \operatorname{sen} 2\pi = 1$$

De suerte que toda la diferencia consiste en que la raíz 1 aparezca al principio ó al fin de la serie de las n raíces.

2.° Probemos ahora que estas n raíces se repiten cuando k sigue creciendo.

Para ello basta demostrar que, siendo r un entero inferior á n, y l un número entero cualquiera, la misma raiz da r que $r+ln$.

En efecto, á r corresponde

$$\cos \frac{2r\pi}{n} + \sqrt{-1} \operatorname{sen} \frac{2r\pi}{n}$$

y á $r+ln$

$$\cos \frac{2(r+ln)\pi}{n} + \sqrt{-1} \operatorname{sen} \frac{2(r+ln)\pi}{n}$$

Esta última es igual á

$$\left(\cos \frac{2r\pi}{n} + 2l\pi\right) + \sqrt{-1} \operatorname{sen} \left(\frac{2r\pi}{n} + 2l\pi\right)$$

ó, quitando l múltiplos de 2π, á

$$\cos \frac{2r\pi}{n} + \sqrt{-1} \operatorname{sen} \frac{2r\pi}{n}:$$

que es precisamente la que corresponde á r.

Es decir que la raíz no cambia por que se aumente r en un múltiplo de n.

Las mismas raíces dan

$$k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots\ldots\ n,$$

que

$$k=1+n,\ 2+n,\ 3+n,\ 4+n\ \ldots\ldots\ n+n,$$

que

$$k=1+2\ n,\ 2+2\ n,\ 3+2\ n,\ 4+3\ n\ \ldots\ldots\ n+2\ n,$$

y, en general, que

$$k=1+l\ n,\ 2+l\ n,\ 3+l\ n,\ 4+l\ n,\ \ldots\ldots\ n+ln,$$

El período se repite indefinidamente, y aun se repite para valores negativos de ln, pues la demostración subsiste sea l positivo ó negativo.

Establecido esto, podemos demostrar algunos teoremas importantes.

Teorema 1.° Toda potencia entera de una raíz de $x^n-1=0$ es también raíz de dicha ecuación.

Demostración.—De dos modos puede demostrarse: ó acudiendo á la forma trigonométrica de las raíces, ó directamente.

1.° La forma de una raíz es

$$\cos\frac{2k\pi}{n}+\sqrt{-1}\ \text{sen}\frac{2k\pi}{n},$$

y su potencia p será

$$\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+\sqrt{-1}\ \text{sen}\frac{2k\pi}{n}\right)^p=\cos\frac{2kp\pi}{n}+\sqrt{-1}\ \text{sen}\frac{2kp\pi}{n}.$$

Pero kp es un número entero que podremos representar por k': luego la expresión anterior se reduce á

$$\cos\frac{2k'\pi}{n}+\sqrt{-1}\ \text{sen}\frac{2k'\pi}{n},$$

que es la forma general de las raíces, sea cual fuere k'.

2.° Puede directamente demostrarse que, si a es raíz de $x^n-1=0$, a^p lo será también.

En efecto: por ser a raíz tendremos

$$a^n-1=0;\ ó\ a^n=1.$$

Y, si a^p es raíz debe verificarse asimismo que

$$(a^p)^n-1=0.$$

Pero invirtiendo las potencias resulta $(a^p)^n-1=(a^n)^p-1$; y como $a^n=1$, tendremos por fin

$$(a^p)^n-1=(a^n)^p-1=1-1=0:$$

con lo cual queda demostrado el teorema.

Raíces propias.—Hemos demostrado que toda raíz de $x^n-1=0$, elevada á cualquier potencia, da otra raíz, y la comprobación de este teorema, ya demostrado, la tenemos en la forma general de las raíces.

En efecto, esta forma es

$$x=\cos\frac{2\,k\,\pi}{n}+\sqrt{-1}\ \text{sen}\,\frac{2\,k\,\pi}{n}$$

en la cual debemos dar á k todos los valores enteros desde 0 á n—1, ó desde 1 á n; con lo cual obtendremos las n raíces de la ecuación.

Pero esta expresión puede escribirse también de este modo (por el teorema de Moivre):

$$x=\cos\frac{2k\pi}{n}+\sqrt{-1}\ \text{sen}\frac{2k\pi}{n}=\left(\cos\frac{2\pi}{n}+\sqrt{-1}\ \text{sen}\frac{2\pi}{n}\right)^n;$$

y como $\cos\frac{2\pi}{n}+\sqrt{-1}\ \text{sen}\frac{2k\pi}{n}$ es una de las raíces, la que corresponde á $k=1$, resulta que elevando

$$\cos\frac{2\pi}{n}+\sqrt{-1}\ \text{sen}\ \frac{2\pi}{n}$$

á todas las potencias, desde 0 á n—1 (ó desde 1 á n), se obtienen *todas las raíces* de $x^n-1=0$.

Si, para abreviar, representamos por r este valor particular

$\cos\frac{2\pi}{n}+\sqrt{-1}\ \text{sen}\ \frac{2\pi}{n}$, las raíces de la ecuación binomia, y todas ellas, serán

$$1,\ r,\ r^2,\ r^3 \ldots\ldots r^{n-1}:$$

ó bien

$$r,\ r^2,\ r^3 \ldots\ldots r^{n-1},\ r^n=1$$

que es la misma serie pasando la *unidad* al fin.

Pero aquí es de la mayor importancia dividir todas las raíces de $x^n-1=0$ en dos grupos distintos. Cualquiera raíz elevada á una potencia da otra raíz, es cierto; pero *unas raíces*, al elevarlas á potencias, dan *todas las raíces* de $x^n-1=0$: como sucede, según hemos demostrado, con

$$\cos\frac{2\pi}{n}+\sqrt{-1}\ \text{sen}\ \frac{2\pi}{n};$$

mientras que *otras*, al elevarlas á potencias sucesivas, dan *algunas raíces* de x^n-1, pero no todas: como si girasen, por decirlo así, en un círculo más estrecho, repitiendo constantemente unas cuantas raíces de la ecuación, sin producir nunca las demás.

A las *primeras*, que son las más importantes, se les da el nombre de RAÍCES PROPIAS de la ecuación $x^n-1=0$, ó abreviadamente del exponente n.

Y á las segundas se les podría llamar, con más ó menos exactitud, *raíces impropias*.

A las *raíces propias* del exponente n otros autores las designan con esta frase: *raíces que pertenecen al exponente* n.

A veces también se les llama *raíces primitivas* de n: aunque por lo regular la denominación de raíces primitivas se reserva para un caso particular del exponente n, como luego diremos.

En resumen: toda raíz de $x^n-1=0$ que, elevada á las potencias 1, 2, 3... n, produce todas las n raíces de dicha ecuación, se llama *raíz propia* de la ecuación $x^n-1=0$; ó *raíz propia* del exponente n (dado n, la ecuación $x^n-1=0$ también está dada); ó raíz que pertenece al exponente n; ó raíz primitiva de $x^n-1=0$, ó del exponente n.

Observación.—En toda esta teoría venimos afirmando que las n raíces de $x^n - 1 = 0$ son distintas, es decir, que esta ecuación no tiene raíces iguales; y, en efecto, la derivada $n\,x^{n-1}$ de $x^n - 1 = 0$ no divide á esta expresión, ni entre ambas existe un máximo común divisor. Lo cual es evidente: porque todo factor x de x^{n-1} divide á x^n (en $x^n - 1$) y no divide á 1: luego no divide á $x^n - 1$.

Hecha la clasificación de las raíces de $x^n - 1 = 0$ en *propias* é *impropias*, fácilmente se observa que, las raíces que más importancia tendrán serán las raíces *propias*, porque conocer *una sola* es conocer *todas* las raíces de la ecuación, bastando para ello elevar ésta á las potencias 1, 2, 3... n; al paso que, conociendo una raíz impropia, sólo puede conocerse un grupo, aquel á que pertenece, de las raíces de $x^n - 1 = 0$.

Pero, dada una raíz propia, a, no sólo pueden conocerse todas las raíces de la ecuación por la serie de potencias

$$a,\ a^2,\ a^3,\ a^4 \ldots\ldots a^n;$$

sino que pueden obtenerse separadamente las raíces *propias* y las *impropias*.

En efecto, vamos á demostrar el siguiente

Teorema 2.° Dada una raíz propia, a, de una ecuación $x^n - 1 = 0$ (ó si se quiere emplear una frase más breve, *dada una raiz propia del número* n) se obtienen también *raíces propias* elevando la a á las potencias indicadas por todos los números *primos* con n é *inferiores* á n.

Demostración.—Sea e un número inferior á n y primo con n; y vamos á demostrar que a^e es una raíz propia de $x^n - 1 = 0$.

Basta para ello demostrar que elevando a^e á todas las potencias 1, 2, 3... n se obtienen todas las raíces, porque esta es la propiedad característica de las raíces propias. Y, en efecto, cualquier potencia de a^e, como por ejemplo, $(a^e)^p$, es raíz de $x^n - 1 = 0$, porque $(a^e)^p = a^{ep}$ es una potencia e p de a; y además su número, de 1 á n, es n: luego basta probar que aquellas potencias son desiguales para demostrar que están todas y que a^e es raíz propia de n.

Pero, en efecto, dos potencias $(a^e)^p$ y $(a^e)^q$ (siendo p y q inferiores á n, pues ya sabemos que las potencias superiores á este número n se reducen á potencias menores) no pueden ser iguales.

Para que tuviésemos

$$(a^e)^p = (a^e)^q$$

sería preciso que fuese

$$a^{ep} = a^{eq}.$$

Y, una de dos:

1.º Si ep y eq son inferiores á n, la igualdad es imposible: porque, siendo a raíz propia, engendra todas las raíces de $x^n - 1 = 0$, y dos potencias de a, inferiores á n, no pueden ser iguales.

2.º Si una de ambas ó las dos cantidades ep y eq son superiores á n, para que se verifique la igualdad será preciso que ep y eq difieran en un múltiplo de n: tendremos, pues la condición

$$ep - eq = l\,n$$

siendo l un entero. De donde

$$p - q = \frac{l\,n}{e}$$

Mas, por hipótesis, e es primo con n; luego divide á l, porque $\frac{l\,n}{e}$, igual á $p - q$, es un número entero.

Llamando l' al cociente de l por e, tendremos

$$p - q = l'n:$$

resultado absurdo, porque p y q son inferiores á n, y su diferencia no puede ser un múltiplo de dicho número n.

De aquí se deduce otro teorema que determina el número de raíces propias.

Teorema 3.º El número de raíces propias de $x^n - 1 = 0$ es igual á $\varphi(n)$, es decir, al número de números primos con n é inferiores á n.

Demostración.—Hemos demostrado que, dada una raíz propia, basta elevarla á todas las potencias 1, e, e', e'', ... de los números primos con n é inferiores á éste, para obtener otras tantas raíces propias; pero ocurre esta duda: ¿habrá alguna otra raíz propia además de a, a^e, $a^{e'}$, $a^{e''}$... ? ó de otro modo: ¿si e no es primo con n, a^e no podría ser raíz propia?

No podrá serlo y vamos á demostrarlo. Basta para ello observar que para valores p, q, inferiores á n y convenientemente determinados, puede obtenerse

$$(a^e)^p = (a^e)^q \text{ ó bien } a^{ep} = a^{eq}.$$

En efecto, la igualdad queda satisfecha si e p y e q difieren en un múltiplo de n: porque, si $ep - eq = ln$, tendremos $a^{eq+ln} = a^{eq}$; $a^{ln} = 1$; $(a^n)^l = 1$; $1 = 1$.

Pero, no siendo e primo con n, siempre puede satisfacerse á la igualdad

$$ep - eq = ln$$

con valores enteros de p y q, inferiores á n.

En efecto, sean d el máximo común divisor de e y n, y e' y n' los cocientes $\frac{e}{d} = e'$, $\frac{n}{d} = n'$, siendo evidentemente $n' < n$.

Tendremos, dividiendo por d:

$$\frac{e}{d} p - \frac{e}{d} q = \frac{ln}{d}:$$

ó bien $$e'p - e'q = ln';$$

y, por lo tanto,

$$p - q = \frac{ln'}{e'}$$

Pero n' y e' son primos entre sí, porque á e y n se les ha quitado el mayor factor común: luego e', que divide exactamente á ln', debe dividir á l; y, llamando l' al cociente, tendremos

$$p - q = l'n':$$

ecuación que siempre es posible y en general de varios modos.

Suponiendo, por ejemplo, $l' = 1$, se deduce que $p - q = n'$:

y, como p y q son inferiores á n, habrá varios números que satisfagan á esta condición, y cuya diferencia sea un número entero n' menor también que n, como se comprueba fácilmente.

De aquí resulta que, si a es una raíz propia de $x^n-1=0$, todas las potencias cuyos exponentes 1, e, e', e'',... sean inferiores á n y primos con él serán raíces *propias;* que, si se eleva á algún otro exponente que no sea primo con n, la raíz será *impropia*; y que, por la definición de *raíz propia*, todas las raíces a, a^e, $a^{e'}$, $a^{e''}$... serán distintas.

La consecuencia final de este análisis es que se obtienen las raíces propias de $x^n-1=0$, y no mas que las raíces propias, elevando una de ellas, a, á potencias representadas por todos los números enteros 1, e, e', e'' ... inferiores á n y primos con él. Pero ya sabemos que el número de cantidades 1, e, e', e'' ... es $\varphi(n)$: luego el número de *raíces propias* de n es $\varphi(n)$, según queríamos demostrar; y el de raíces impropias será el restante: $n-\varphi(n)$.

Caso particular. Si n es número primo absoluto, $\varphi(n)=n-1$: luego el número de raíces de un número primo n es $n-1$: es decir, todas menos la *unidad.*

Observación. Todas estas propiedades se demuestran del mismo modo partiendo de la fórmula trigonométrica

$$x=\cos\frac{2k\pi}{n}+\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}\sqrt{-1},$$

y también por otro método que indicaremos en breve.

Raíces primitivas. Cuando el exponente de la ecuación binomia es de la forma $\varphi(n)$, es decir cuando la ecuación binomia es $x^{\varphi(n)}-1=0$, las raíces propias toman el nombre de *raíces primitivas* del número n: de suerte que las raíces *primitivas* de n son las raíces propias de una clase particular de ecuaciones binomias.

Como para el objeto concreto de que nos ocupamos las raíces primitivas no tiene aplicación, no insistiremos en su estudio, indicando tan solo que les pertenecen todas las propiedades de las raíces propias.

De la propiedad fundamental de las *raíces propias*, ó, mejor dicho, de su definición se deduce esta otra propiedad importante.

Teorema 3.° Toda raíz propia, a, de una ecuación $x^n - 1 = 0$, elevada á una potencia comprendida entre 0 y n, no puede nunca ser igual á 1.

Demostración. Decimos, comprendida entre 0 y n, porque $a^0 = 1$ y $a^n = 1$: de suerte que el exponente á que se refiere el teorema debe pertenecer á la serie 2, 3, ... $n - 1$

En efecto, si

$$a^p = 1,$$

siendo p uno de los números 2, 3, 4, ... $n - 1$, multiplicando por a tendremos

$$a^{p+1} = a:$$

resultado absurdo, porque entre 0 y n dos potencias de a no pueden ser iguales, puesto que a es raíz propia y engendra por sus potencias 1, 2, 3,.. n todas las raíces de $x^n - 1 = 0$ que son desiguales.

Aun en el caso de ser $p = n - 1$, tendríamos el absurdo $a^{n-1+1} = a$; es decir, $a^n = a = 1$.

Esta propiedad, como veremos más adelante, hubiera podido servir de base para la teoría de las raíces propias.

Del factor que comprende todas las raíces propias de una ecuación binomia. Hemos dicho que, dada una ecuación binomia $x^n - 1 = 0$, sus raíces pueden dividirse en dos grupos: *raíces propias* y *raíces impropias*. Si designamos las raíces propias por

$$a_1,\ a_2,\ a_3 \ldots\ldots a_{\varphi(n)}$$

y las raíces impropias por

$$b_1,\ b_2,\ b_3 \ldots\ldots b_{n-\varphi(n)}$$

en cuyas series los últimos subíndices indican el número de unas y otras, la ecuación binomia, descompuesta en sus factores simples, dará

$$x^n - 1 = (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) \ldots (x - a_{\varphi(n)}) \times$$
$$(x - b_1)\ (x - b_2)\ (x - b_3) \ldots (x - b_{n-\varphi(n)})$$

Y, representando por $f_p(x)$ y $f_i(x)$ los productos ó polinomios de ambos grupos, es decir el grupo de binomios correspondientes à las raíces propias

$$(x - a_1)\,(x - a_2)\,(x - a_3) \dots (x - a_{\varphi(n)})$$

por $f_p(x)$ (con el subíndice p que quiere decir raíces *propias*), y el grupo de los binomios correspondientes á las raíces impropias

$$(x - b_1)\,(x - b_2)\,(x - b_3) \dots (x - b_{n - \varphi(n)})$$

por $f_i(x)$ (con el subíndice *i*, inicial de las raíces *impropias*), tendremos

$$x^n - 1 = f_p(x)\, f_i(x).$$

Ahora se presenta este problema:

PROBLEMA. Dada la ecuación $x^n - 1 = 0$, determinar el factor $f_p(x)$ que contenga todos los binomios $x - a$ de las raíces propias, sin determinar directamente ninguna de ellas. (En vez de $f_p(x)$ pondremos $f_n(x)$ para recordar que se trata de las raíces propias de n).

Resolución. Sea $x^n - 1 = 0$ la ecuación dada; y sean

$$1,\ D,\ D',\ D'' \dots n$$

todos los divisores simples y compuestos de n, desde 1 al mismo número n.

Supongamos que se determinan: la raíz propia de $x^1 - 1 = 0$, que será 1; las raíces propias de $x^D - 1 = 0$, que llamaremos

$$a'_D,\ a''_D,\ a'''_D \dots a^{\varphi(D)}_D,$$

cuyo número sabemos que es $\varphi(D)$; las raíces propias de $x^{D'} - 1 = 0$, que llamaremos

$$a'_{D'},\ a''_{D'},\ a'''_{D''}, \dots a^{\varphi(D')}_{D''},$$

cuyo número es $\varphi(D')$; las raíces propias de $x^{D''} - 1 = 0$, que llamaremos

$$a'_{D''},\ a''_{D''},\ a'''_{D'''}, \dots a^{\varphi(D'')}_{D''},$$

cuyo número es $\varphi(D')$; y así sucesivamente para todos los divisores de n, hasta las raíces propias de n ó de $x^n - 1$, que llamaremos

$$a'_n,\ a''_n,\ a'''_n \ldots a^{\varphi(n)}_n,$$

cuyo número es $\varphi(n)$: y vamos á demostrar ahora que todas estas raíces

$$1,\ a'_D,\ a''_D \ldots;\ a'_{D'},\ a''_{D'},\ \ldots a'_{D''};\ a''_{D''} \ldots a'_n,\ a''_n \ldots \qquad (a)$$

son las n raíces de la ecuación $x^n - 1 = 0$.

En *primer lugar* todas ellas son raíces de $x^n - 1 = 0$. En efecto, tomemos una cualquiera que supondremos que pertenece á $x^{D''} - 1 = 0$, y que para abreviar llamaremos r.

Puesto que es raíz de $x^{D''} - 1 = 0$, tendremos $r^{D''} = 1$; pero D'' es un divisor de n, de modo que $\frac{n}{D''} = l$, siendo l entero. Pues elevando $r^{D''} = 1$ á l tendremos $r^{D''l} = 1$, ó $r^{D''l} - 1 = 0$, ó $r^n - 1 = 0$. Donde se ve que r es raíz de la propuesta $x^n - 1 = 0$.

Son, pues, raíces de $x^n - 1 = 0$ todas las cantidades (a).

Veamos en *segundo lugar* cuál es su número.

El número de las a_D es $\varphi(D)$; el de las $a_{D'}$, es $\varphi(D')$; y así sucesivamente: luego el número total de las raíces (a) será

$$1 + \varphi(D) + \varphi(D') + \varphi(D') + \ldots + \varphi(n).$$

Pero esta cantidad hemos visto que es igual á n: por lo tanto las raíces (a) son en número n: de suerte que, si son desiguales, serán precisamente las n raíces de $x^n - 1 = 0$.

Pero es fácil ver, en *tercer lugar,* que esto se verifica. En efecto:

Las a_D, ó $a_{D'}$, ó $a_{D''}$ ... de cada grupo son desiguales entre sí, porque las raíces propias de una ecuación binomia lo son.

Y además las de un grupo son distintas de las de otro. Porque si así no fuese, y, por ejemplo, tuviésemos

$$a'_{D''} = a''_{D'''}$$

suponiendo $D''' > D''$, elevando á D'' nos resultaría que

$$a'_{D''}{}^{D''} = a''_{D'''}{}^{D''}$$

Pero $a'_{D''}$ es una raíz de $x^{D''} - 1 = 0$: luego

$$1 = a''_{D'''}{}^{D''}:$$

resultado absurdo, porque hemos visto que una raíz propia $a''_{D'''}$ de $x^{D'''} - 1 = 0$, elevada á una potencia $D'' < D'''$, no puede dar por resultado la unidad.

De suerte que, si las cantidades (a) son todas ellas raíces de $x^n - 1 = 0$, si son en número n, y si además son distintas, claro es que constituyen las n raíces desiguales de dicha ecuación y que podremos escribir:

$$x^n - 1 = (x-1)\,(x - a'_D)\,(x - a''_D)\,\ldots\,(x - a'_{D'})\,(x - a''_{D'})\ldots$$
$$\ldots\,(x - a''_{D''})\,(x - a''_{D''})\,\ldots\,(x - a'_n)\,(x - a''_n)\,\ldots$$

Cada grupo, correspondiente á 1, D, D', .. n, es el producto de las raíces propias de las ecuaciones

$$x-1=0,\ x^D - 1 = 0,\ x^{D'} - 1 = 0,\ x^{D''} - 1 = 0 \ldots x^n - 1 = 0,$$

luego, si representamos, en general, por $f_p(x)$ el producto de los factores de primer grado de las raíces propias de $x^p - 1 = 0$: tendremos

$$x^n - 1 = f_1(x)\,.\,f_D(x)\,.\,f_{D'}(x)\,.\,f_{D''}(x)\ldots f_n(x):$$

ó, empleando el signo Π para expresar un producto,

$$x^n - 1 = \Pi f_D(x)$$

extendiéndose Π á todos los factores $f(x)$, correspondientes á todos los divisores de *n*, desde 1 á *n*, ambos inclusive.

Esta expresión es análoga á la del 2.º problema de la inversión de funciones; y, aplicando la fórmula de dicha inversión, tendremos

$$f_n(x) = \frac{\Pi F_{D_1}(x)}{\Pi F_{D_2}(x)}:$$

representando $f_n(x)$ el factor que comprende todos los binomios de las raíces propias de $x^n - 1 = 0$, que es precisamente el que buscamos; siendo además la forma general de F

$$F_p(x) = x^p - 1;$$

y extendiéndose la $\Pi F_{D_1}(x)$ á todas las funciones F para los divisores D_1 de n, y la $\Pi F_{D_2}(x)$ á todas las funciones F para los divisores D_2 de n.

Debe recordarse que D_1 y D_2 significan los divisores con signo + y signo — en

$$\Sigma D_1 - \Sigma D_2.$$

El problema de la determinación del factor $f_n(x)$ de $x^n - 1 = 0$, que contiene todas las raíces propias, queda con esto plenamente resuelto por un método de gran generalidad y de indiscutible elegancia.

Casos particulares. 1.° Supongamos que n es de la forma p^π: siendo p un número primo, y π un entero cualquiera.

Ante todo debemos determinar las D_1 y las D_2

La fórmula

$$\varphi(N) = a^{m-1} b^{n-1} c^{p-1} \ldots (a-1)(b-1)(c-1)\ldots$$

da en este caso

$$\varphi(n) = p^{\pi-1}(p-1) = p^\pi - p^{\pi-1}.$$

Luego no hay más que una d_1 que es p, y una d_2 que es 1; y por lo tanto una

$$D_1 = p^{\pi-1}.p = p^\pi$$

y una

$$D_2 = p^{\pi-1}.1 = p^{\pi-1}$$

De aquí resulta que en la fórmula

$$f_n(x) = \frac{\Pi F_{D_1}(x)}{\Pi F_{D_2}(x)}$$

cada Π solo tendrá un factor, á saber:

$$\Pi F_{D_1}(x) = \Pi(x^{D_1} - 1) = x^{p^\pi} - 1$$

y

$$\Pi F_{D_2}(x) = \Pi(x^{D_2} - 1) = x^{p^{\pi-1}} - 1.$$

Luego el factor que contenga los binomios de las raíces propias de $x^n - 1 = 0$ (que en este caso es $x^{p^\pi} - 1 = 0$) será

$$f_n(x) = \frac{x^{p^\pi} - 1}{x^{p^{\pi-1}} - 1}:$$

cuyo numerador puede ponerse en esta forma

$$\left(x^{p^{\pi-1}}\right)^p - 1;$$

y, representando $x^{p^{\pi-1}}$ por z,

$$f_n(x) = \frac{z^p - 1}{z - 1} = z^{p-1} + z^{p-2} + z^{p-3} + \ldots + z + 1:$$

ó, sustituyendo el valor de z,

$$f_n(x) = \left(x^{p^{\pi-1}}\right)^{p-1} + \left(x^{p^{\pi-1}}\right)^{p-2} + \left(x^{p^{\pi-1}}\right)^{p-3} + \ldots + x^{p^{\pi-1}} + 1$$

$$f_n(x) = x^{p^{\pi-1}(p-1)} + x^{p^{\pi-1}(p-2)} + x^{p^{\pi-1}(p-3)} + \ldots + x^{p^{\pi-1}} + 1$$

Esta ecuación tiene $p^{\pi-1}(p-1)$ raíces: como debía ser, porque el número de raíces propias de

$$x^{p^\pi} - 1 = 0 \quad \text{es} \quad \varphi(p^\pi) = p^{p-1}(p-1).$$

2.º Si n es un número primo p, se reducirá π á la unidad, y la fórmula anterior á

$$f_n(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + x^{p-3} + \ldots + x + 1.$$

Aunque el método de separacion de las raíces propias de $x^n - 1 = 0$, que acaba de exponerse, ó el método para formar una ecuación $f_n(x) = 0$, que tenga por raíces todas las raíces propias de $x^n - 1 = 0$ y ninguna más, es en extremo ingenioso y elegante, pueden obtenerse los últimos resultados con mucha más rapidez, y casi intuitivamente, por otro método que vamos á indicar. Pero antes presentaremos la teoría de las raices propias bajo otra forma importantísima.

Teorema 1.° Toda raíz propia de una ecuación $x^n - 1 = 0$ no puede ser raíz de una ecuación binomia $x^{n'} - 1 = 0$, cuyo grado sea inferior al de la propuesta, es decir en que se tenga $n' < n$.

Demostración. En efecto, si a fuese una raíz propia de

$$x^n - 1 = 0$$

y se tuviese

$$a^{n'} - 1 = 0 \quad ó \quad a^{n'} = 1,$$

multiplicando por a tendríamos $a^{n'+1} = a$: resultado absurdo, porque $n' + 1 < n$ en general, y dos potencias de a, la 1 y la $n'+1$, comprendidas entre 0 y n, no pueden ser iguales, puesto que a es raíz propia.

Aun en el caso extremo de ser $n' = n - 1$ ó $n' + 1 = n$ resultaría este absurdo

$$a^{n'+1} = a^{n'} = 1:$$

porque tendríamos

$$a = 1.$$

Esta demostración es la misma que ya dimos anteriormente y podía excusarse diciendo que ninguna raíz propia, elevada á una potencia comprendida entre 0 y n, puede dar la unidad.

Teorema 2.° Toda raíz impropia de $x^n - 1 = 0$ es raíz de una ecuación, por lo menos, $x^{n'} - 1 = 0$, si $n' < n$.

Demostración. Puesto que a es raíz impropia de $x^n - 1 = 0$ y su caracter es que dos potencias de a, cuyos exponentes estén comprendidos entre 0 y n, han de ser iguales, tendremos $a^p = a^q$ siendo p y q inferiores á n.

Si suponemos $q < p$ y dividimos por a^q los dos miembros de la igualdad anterior, resultará

$$a^{p-q} = 1 \quad ó \quad a^{p-q} - 1 = 0$$

Pero $p < n$ y $q < n$; luego $p - q < n$: con lo cual resulta demostrado el teorema.

Teorema 3.º En el caso anterior a es raíz de una ecuación

$$x^m - 1 = 0$$

cuyo exponente m no sólo es inferior á n, sino divisor exacto de n.

Demostración. Puesto que a es raíz de $x^n - 1 = 0$, tendremos,

$$a^n = 1$$

Y, puesto que a es raíz impropia, según el teorema anterior será raíz de una ecuación $a^{n'} - 1 = 0$, siendo $n' < n$: es decir

$$a^{n'} = 1.$$

Dividamos n por n': si la división es exacta, el teorema queda demostrado; y si no lo fuere resultaría

$$n = ln' + n'',$$

siendo l el cociente y n'' el resto, que será $< n'$.

En este último caso podremos escribir

$$a^n = 1 \text{ y } a^{n'} = 1$$

bajo esta forma:

$$a^{ln'+n''} = 1 \text{ y } a^{ln'} = 1,$$

sustituyendo para ello por n su valor en la primera, y elevando á l la segunda. Y, por la división de una por otra, se concluye que

$$\frac{a^{ln'+n''}}{a^{ln'}} = 1, \text{ ó bien } a^{n''} = 1.$$

Siguiendo el mismo método, podremos dividir n' por n''; y, suponiendo que la división da l' por cociente y n''' por resto, llegaremos á $a^{n'''} = 1$; y así sucesivamente.

Ahora bien: hemos dividido n por n'

n' por el resto anterior n''

n'' por el resto n'''

. . . .

y, una de dos: ó n y n' tienen un máximo común divisor, m, ó son primos. Si lo primero, tendremos $a^m=1$: donde se ve que a' es raíz de $x^m=1$, siendo m divisor de n, puesto que es máximo común divisor de n y n', y el teorema queda demostrado.

Si lo segundo, el último resto será 1 y tendremos $a^1=1$, que también está comprendido como caso particular en el teorema, puesto que 1 divide á n.

Consecuencia de los teoremas anteriores para las raíces impropias, en el caso de $n=p^\pi$.—Puesto que toda raíz impropia, a, es raíz de una ecuación $x^m=1$, siendo m divisor de p^π, habrá de ser m de la forma $p^{\pi'}$, $(\pi'<\pi)$, y tendremos:

$$a^{p^{\pi'}}=1;$$

y, elevando á $p^{\pi-\pi'-1}$,

$$\left(a^{p^{\pi'}}\right)^{p^{\pi-\pi'-1}}=1;$$

ó bien

$$a^{p^{\pi'}.\,p^{\pi-\pi'-1}}=1;$$

y por último

$$a^{p^{\pi-1}}-1=0:$$

luego todas las raíces impropias son raíces de

$$a^{p^{\pi-1}}-1=0,$$

Pero ¿habrá alguna otra raíz en la ecuación precedente?

Para averiguarlo veamos cuál es el número de raíces impropias de $x^{p^\pi}-1=0$.

El número total de raíces en este caso es p^π.

El de raíces propias es

$$\varphi(p^\pi)=p^{\pi-1}(p-1)=p^\pi-p^{\pi-1}$$

Luego el de raíces impropias será

$$p^\pi-(p^\pi-p^{\pi-1})=p^{\pi-1}:$$

precisamente el grado de la ecuación

$$x^{p^{\pi-1}}-1=0.$$

Resumiendo: todas las raíces impropias están en $x^{p^{\pi-1}}-1=0$; su número es $p^{\pi-1}$; y son desiguales, pues desiguales son las raíces de $x^n-1=0$: luego precisamente $x^{p^{\pi-1}}-1=0$ es el factor correspondiente á las raíces impropias, las contiene todas, y no contiene ninguna más.

De aquí resulta como consecuencia final que, dividiendo $x^{p^\pi}-1$ por $x^{p^{\pi-1}}-1$, se tendrá el factor de las raíces propias: es decir que en el caso $n=p^\pi$

$$f_n(x)=\frac{x^{p^\pi}-1}{x^{p^{\pi-1}}-1}:$$

resultado idéntico al que obtuvimos por el método de la inversión, pero con mucha más rapidez ahora.

Sólo hemos expuesto de estas diversas teorías lo puramente preciso para la cabal inteligencia de la nota de Wantzel: quien desee profundizarlas puede, repetimos, consultar los tratados clásicos de Gauss, el Algebra superior de Serret, y la obra citada de Dedekin: ó la de D. Eulogio Jiménez, en la cual con gran acierto, aunque con excesiva concisión á veces, se hallan condensados los fundamentos de la Teoría de los Números.

DIVISIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA EN PARTES IGUALES.

Supongamos que se pretende dividir una circunferencia en n partes iguales.

Desde luego puede simplificarse el teorema si n es un número compuesto.

Supongamos que n se descompone en dos factores primos entre sí, N y N′, de modo que

$$n = N \times N'.$$

El problema de dividir la circunferencia en n partes quedará resuelto si se sabe dividir en N y N′ partes respectivamente.

Supongamos en efecto que por la recta y el círculo sabemos buscar dos arcos (siendo el radio 1)

$$\frac{2\pi}{N} \quad y \quad \frac{2\pi}{N'}.$$

Repitamos el primer arco m veces y m′ veces el segundo, siendo m y m′ números enteros que ya determinaremos: resultarán dos arcos

$$m\frac{2\pi}{N} \quad y \quad m'\frac{2\pi}{N'};$$

y, restándolos uno de otro, tendremos un arco

$$x = m\frac{2\pi}{N} - m'\frac{2\pi}{N'} = 2\pi\frac{mN' - m'N}{NN'} = \frac{2\pi}{n}(mN' - m'N).$$

Siendo N y N′ primos entre sí, se sabe, por la teoría de las ecuaciones indeterminadas de primer grado, que siempre pueden determinarse dos enteros, m′ y m, tales que

$$mN' - m'N = 1$$

Luego

$$x = \frac{2\pi}{n}:$$

con lo cual queda la circunferencia dividida en n partes iguales, porque sumar arcos y restarlos es operación que se efectúa con la recta y el circulo.

El problema general se reduce, pues, á otro mas sencillo; y podrá dividirse 2π en n partes, siendo

$$n = a^{\alpha}\, b^{\beta}\, c^{r}\ldots,$$

si sabemos y podemos dividir 2π en

$$a^{\alpha},\; b^{\beta},\; c^{r}\ldots$$

partes iguales.

Tratemos pues de este problema: dividir la circunferencia en n partes iguales, siendo

$$n = p^{\pi}.$$

Aplicación de la ecuación binomia. Dada en general la ecuación

$$x^n - 1 = 0,$$

(siendo n cualquiera) hemos visto que es raíz de dicha ecuación

$$x = \cos\frac{2\pi}{n} + \sqrt{-1}\,\text{sen}\frac{2\pi}{n}.$$

Pues bien, si por la recta y el circulo pudiésemos construir esta raíz, el problema quedaba resuelto, porque

$$\cos\frac{2\pi}{n} \text{ y } \text{sen}\frac{2\pi}{n}$$

son el coseno y el seno de la n^{ma}. parte de 2π.

Más aun: si se quiere evitar el empleo de imaginarias, puede determinarse una ecuación cuyas raíces den los valores de

$$\cos\frac{2\pi}{n},\ \cos\frac{4\pi}{n};\ \cos\frac{6\pi}{n}\ \ldots$$

En efecto: si suponemos n impar y dividimos $x^n - 1$ por $x - 1$, para suprimir la raíz 1, la ecuación

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \ldots + x + 1 = 0$$

es de la forma de las ecuaciones recíprocas; y sustituyendo en ella $x + \dfrac{1}{x} = z$, puede obtenerse una ecuación del grado $\dfrac{n-1}{2}$ en z, cuyas raíces serán

$$\cos\frac{2k\pi}{n} + \sqrt{-1}\,\text{sen}\frac{2k\pi}{n} + \frac{1}{\cos\dfrac{2k\pi}{n} + \sqrt{-1}\,\text{sen}\dfrac{2k\pi}{n}};$$

ó bien

$$\cos\frac{2k\pi}{n} + \sqrt{-1}\,\text{sen}\frac{2k\pi}{n} + \frac{\cos\dfrac{2k\pi}{n} - \sqrt{-1}\,\text{sen}\dfrac{2k\pi}{n}}{\cos^2\dfrac{2k\pi}{n} + \text{sen}^2\dfrac{2k\pi}{n}},$$

que es igual á

$$\cos\frac{2k\pi}{n}+\sqrt{-1}\,\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}+\cos\frac{2k\pi}{n}-\sqrt{-1}\,\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}=2\cos\frac{2k\pi}{n}$$

Si n fuese par, podria fácilmente reducirse este caso al anterior por los métodos generales del Algebra; pero es inútil insistir sobre este punto, porque para dividir 2π en

$$n = 2^s a^\alpha b^\beta \ldots$$

basta dividir la circunferencia en 2^s partes, y después en a^α, en b^β etc., según poco antes hemos visto.

La división de dos en dos partes no ofrece dificultad, y sólo queda la división en p^π, siendo p un número impar: de suerte que nos basta examinar este caso.

Supongamos, pues, según hemos dicho, que $n=p^\pi$, representando por p un entero impar.

La ecuación del problema, la $F(x) = 0$ del método general de Wantzel, será en este caso

$$x^{p^\pi} - 1 = 0;$$

y el primer problema que debemos resolver es el de averiguar si esta ecuación es ó no irreducible. Desde luego no lo es porque tiene el factor $x-1$; pero aun tiene otro factor de mayor grado, que es precisamente el que contiene todos los binomios $x - a$ de las raíces propias.

Hemos visto, en efecto, que

$$x^{p^\pi} - 1 = \left[x^{p^{\pi-1}(p-1)} + x^{p^{\pi-1}(p-2)} + x^{p^{\pi-2}(p-3)} \ldots + \right.$$
$$\left. + x^{p^{\pi-1}} + 1\right]\left[x^{p^{\pi-1}} - 1\right].$$

El primer factor contiene la raíz propia

$$x = \cos\frac{2\pi}{n} + \sqrt{-1}\,\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n},\ (\text{siendo } n = p^\pi)$$

que es la del problema, porque $\cos\frac{2\pi}{n}$ es el coseno del arco que buscamos: luego la verdadera ecuación del problema será:

$$x^{p^{\pi-1}(p-1)}+x^{p^{\pi-1}(p-2)}+x^{p^{\pi-1}(p-3)}+\ldots+x^{p^{\pi-1}}+1=0,$$

y se presenta la siguiente cuestión fundamental para que podamos aplicar el método de Wantzel : ¿esta ecuación es irreducible?

Resolución. La ecuación propuesta, que para abreviar llamaremos X, es decir

$$X=x^{p^{\pi-1}(p-1)}+x^{p^{\pi-1}(p-2)}+\ldots+x^{p^{\pi-1}}+1=0,$$

es en efecto irreducible, y he aquí la sencillisima demostración que da Kronecker y que ha reproducido D. Eulogio Jiménez en su obra citada.

Si X no es irreducible, podrá descomponerse en dos factores ó polinomios, de coeficientes enteros, que llamaremos $\varphi(x)$ y $\Psi(x)$, porque esta es la definición de las ecuaciones reducibles y tendremos:

$$X=\varphi(x)\ \Psi(x);$$

ó bien

$$x^{p^{\pi-1}(p-1)}+x^{p^{\pi-1}(p-2)}+x^{p^{\pi-1}(p-3)}\ldots+x^{p^{\pi-1}}+1$$
$$=\varphi(x)\ \Psi(x).$$

Haciendo $x=1$ en la *identidad anterior*, resultará:

$$1+1+1+\ldots+1+1=\varphi(1)\ \Psi(1).$$

El número de unidades del primer miembro es el de términos de X, igual á p: luego

$$p=\varphi(1)\,\Psi(1)$$

Mas como p es un número primo, que no puede, por lo tanto, descomponerse en dos factores enteros, una de las dos cantidades, $\varphi(1)$ ó $\Psi(1)$, será necesariamente igual á ± 1, para que desaparezca el absurdo indicado. Supongamos para fijar las ideas que $\varphi(1)$ sea la que se reduce á la unidad, y tendremos

$$\varphi(1)=\pm 1.$$

Ahora bien: si a es una raíz propia de $x^{p^\pi}-1=0$, las potencias

$$a,\ a^\alpha,\ a^\beta,\ a^\gamma \ldots$$

representando α, β, γ ... los números primos con p^π, é inferiores al mismo, serán precisamente la totalidad de las raíces de $X=0$ (que es la ecuación que contiene todas las raíces propias); y para que X se reduzca á cero será preciso que uno de sus factores, φ ó Ψ, se reduzca á cero. Resulta, pues, que algunas de estas raíces anularán á $\varphi(x)$; y, sustituyéndolas todas en φ (x), en el producto

$$\varphi(a)\,.\,\varphi(a^\alpha)\,.\,\varphi(a^\beta)\,.\,\varphi(a^\gamma)\ldots$$

uno ó varios factores serán nulos de modo que tendremos

$$\varphi(a)\,.\,\varphi(a^\alpha)\,.\,\varphi(a^\beta)\,.\,\varphi(a^\gamma)\ldots=0.$$

Lo que hemos dicho para la raíz propia a puede repetirse para todas las demas raíces a′, a″ ...: luego la ecuación

$$\varphi(x)\,.\,\varphi(x^\alpha)\;\varphi(x^\beta)\;\varphi(x^\gamma)\ldots=0$$

se anula por a, a′, a″ ..., es decir por todas las raíces de $X=0$: lo cual significa que dicha ecuación contiene á X como factor. Tendremos, pues,

$$\varphi(x)\;\varphi(x^\alpha)\;\varphi(x^\beta)\;\varphi(x^\gamma)\ldots=X\,.\,C(x)$$

representando por C (x) el polinomio entero que resulta de

dividir $\varphi(x)\;\varphi(x^\alpha)\;\varphi(x^\beta)\ldots$ por X

Haciendo en esta identidad $x=1$, tendremos:

$$[\varphi(1)]^{\varphi(p^\pi)}=p\,.\,C(1),\quad \text{ó bien}\quad 1=p\,C(1):$$

puesto que el número de factores $\varphi(1)$ es el de números primos con p^π inferiores á él aunque esto nada importa, porque $\varphi(1)=\pm 1$; y porque X, para $x=1$, se reduce como hemos visto á p: además C (1) es número entero que no puede ser *cero*, pues entonces tendríamos $1=0$.

Pero la ecuación $1 = pC$ (1) es absurda, puesto que 1 no puede ser igual á un entero p, distinto de la unidad, ni á un múltiplo suyo.

Este resultado absurdo nos prueba que la ecuación $X = 0$ no es reducible, toda vez que dicho resultado es consecuencia lógica de suponerla reducible.

Casos de posibilidad. Puesto que

$$x^{p^{\pi-1}(p-1)} + x^{p^{\pi-1}(p-2)} + \ldots\ldots + x^{p^{\pi-1}} + 1 = 0$$

es la ecuación del problema y es irreducible, para que la división del círculo en partes ó arcos iguales *sea posible*, será preciso, según la teoría general de Wantzel, que $p^{\pi-1}(p-1)$, que expresa el grado de la ecuación, sea de la forma 2^n: condición *necesaria* aunque no *suficiente*.

Mas para que $p^{\pi-1}(p-1)$ sea igual á 2^n, será preciso también que solo contenga factores primos iguales á 2.

Examinemos con dicho criterio los dos factores $p^{\pi-1}$ y $p-1$.

1.° Siendo p impar, como hemos supuesto, para que $p-1$ sólo contenga el factor primo 2, ó se verifique que

$$p - 1 = 2^{n'}$$

p ha de ser de la forma

$$p = 2^{n'} + 1.$$

Pero en este caso

$$p^{\pi-1} = (2^{n'} + 1)^{\pi-1},$$

que es el otro factor, no puede ser de la forma $2^{n''}$, porque es esencialmente impar: luego es preciso que se reduzca á la unidad ya que no puede ser una potencia de 2; y así tendremos

$$\pi - 1 = 0 \text{ ó } \pi = 1.$$

Luego la primera *condicion de posibilidad* de la división de la circunferencia en partes iguales por la recta y el círculo, cuando el número n en que ha de dividirse la circunferencia es primo p y está elevado á 1, es que dicho número primo sea de la forma $2^{n'} + 1$. Condición de *posibilidad* quiere decir condición *necesaria*, pero no *suficiente*.

2.° El factor $p^{\pi-1}$, si $\pi-1$ no es igual á *cero*, tiene que ser igualmente de la forma $2^{n''}$: luego $p=2$; en cuyo caso $p-1=1$.

Es, pues, segunda *condición de posibilidad* cuando el número primo p entra elevado á una potencia que p sea igual á 2.

Ahora bien: cuando estas condiciones se verifican, para apurar la cuestión y ver si realmente es posible la división propuesta, será preciso aplicar ó el método de Wantzel, ó el de Gauss, ó el general de las ecuaciones abelianas.

Ejemplos. Sabemos dividir 2π en 2, 3 y 4 partes iguales por los métodos elementales de la Geometría, y todos estos casos están comprendidos en los dos de posibilidad indicados.

Porque $2=2^1$;

$3=2^1+1$

y $4=2^2$.

También es posible dividir 2π en 5 partes iguales, porque $5=2^2+1$.

Para dividir 2π en 6 partes se dividirá en 3 y 2.

Para dividirlo en 7 partes, hay que aplicar la fórmula general; y, como la mayor potencia de 2 contenida en 7 es 4, y queda un resto igual á 3, el problema no es posible.

La división en 8 partes es posible, y en efecto $8=2^2$.

No lo es la división en 9 partes, porque $9=3^2$.

Es posible la división en 10 partes, por la división en 5 y 2.

No lo es la división en 11 partes, porque $11=8+3=2^3+3$.

Es posible la división en 12 partes, porque $12=2^2.3$.

No lo es la división en 13, porque $13=2^3+5$.

No lo es la división en 14, porque $14=2.7$

Es posible la división en 15, atendiendo á que $15=3.5$

También es posible la división en 16, porque $16=2^4$

Y hay posibilidad (preventiva al menos, que luego se ve que es real) de dividir 2π en 17 partes, porque

$$17=16+1=2^4+1$$

Y así sucesivamente.

El estudio del caso $n = 17$, en el cual la aplicación del método general de Wantzel trae consigo cálculos pesadísimos, nos ha inducido á introducir algunas simplificaciones en dicho método, y entre otras las que resultan de resolver el siguiente problema.

Problema. Dado un sistema de varias ecuaciones con varias incógnitas x, y, z, etc., determinar las raíces enteras, sin necesidad de obtener la ecuación final de cada incógnita.

Como la idea es en extremo sencilla y no la hemos visto tomada en cuenta por ningún autor, la expondemos sumariamente.

Resolucion. Para ello es preciso ante todo demostrar un

Lema. Si una de las ecuaciones del sistema, ordenada por relación á una incógnita, x por ejemplo, es de la forma

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-1} + \ldots\ldots + Tx + N = 0,$$

siendo A, B, $C \ldots\ldots$ polinomios enteros de las demás incógnitas, y la cantidad independiente de x es un número entero N, los valores enteros de x, si los hay en combinación con valores enteros también de y, z, ..., serán divisores de N, y entre los divisores de N deberán buscarse, por lo tanto, dichas raíces como en el caso sencillísimo de una ecuación con una incógnita.

En efecto, si $x = a$, $y = b$, $z = c \ldots\ldots$ es un sistema entero que satisface á todas las ecuaciones, y por lo tanto á

$$x^m + A x^{m-1} + Bx^{m-1} + \ldots\ldots + T x + N = 0,$$

tendremos, efectuando dicha sustitución,

$$a^m + A(b, c, \ldots)a^{m-1} + B(b, c \ldots)\, a^{m-1} + \ldots T(d, c \ldots)\, a + N = 0:$$

ó, dividiendo por a,

$$a^{m-1} + A(b, c \ldots)\, a^{m-2} + B(b, c \ldots)\, a^{m-3} + \ldots\; T(d, c \ldots) = -\frac{N}{a}$$

Pero el primer miembro es entero: luego $\frac{N}{a}$ también lo es: y a es un divisor de N, como queríamos demostrar.

La dificultad consiste en que este caso es al parecer particularísimo; pues en general tendremos

$$x^m + A(y,z....)x^{m-1} + B(y,z....)x^{m-2} + ... + T(y,z....)x + U(y,z....) + N = 0,$$

siendo $U(y, z.....)$ un polinomio entero de todas las incógnitas, menos x.

El teorema se aplica entonces á $U(y,z.....)+N$ como antes á N; pero de nada sirve esta observación, porque y, z..... son incógnitas cuyos valores no conocemos todavía.

Y, sin embargo, este caso general puede reducirse al del lema, eliminando sucesivamente todos los términos de $U(y, z.....)$ como vamos á indicar.

Para más claridad en las ideas consideremos por de pronto un caso particular, y aun éste aclarémoslo con un ejemplo.

Propongámonos resolver con números enteros las dos ecuaciones

$$x^2 - 2xy + y^2 - y + 2 = 0$$
$$x^2 + xy - y^2 + 2y - 7 = 0$$

Toda la dificultad consiste en hacer que desaparezcan los términos con y, quedando únicamente términos con x y cantidades constantes.

Para ello vamos á eliminar el término $+y^2$ y el $-y$ de la primera; y el $-y^2$ y el $+2y$ de la segunda; y como importa poco lo que pueda resultar de los términos en x, con tal que todos contengan x, los representaremos invariablemente por (x), prescindiendo de las alteraciones de sus coeficientes.

Las dos ecuaciones propuestas tomarán la forma

$$\left.\begin{array}{l}(x) + y^2 - y + 2 = 0 \\ (x) - y^2 + 2y - 7 = 0\end{array}\right\} (1)$$

Sumando para eliminar y^2 tendremos

$$(x) + y - 5 = 0:$$

advirtiendo que esta (x) no será la misma que antes, lo cual importa poco.

A las dos ecuaciones propuestas podemos sustituir estas dos:

$$\left.\begin{array}{l}(x) - y^2 + 2y - 7 = 0 \\ (x) + y - 5 = 0.\end{array}\right\} (2)$$

Ó, multiplicando la última por y, estas otras dos:

$$\left.\begin{array}{l}(x) - y^2 + 2y - 7 = 0 \\ (x) + y^2 - 5y = 0.\end{array}\right\} (3).$$

Sumándolas tendremos

$$(x) - 3y - 7 = 0.$$

Y al sistema (3) podremos sustituir el siguiente:

$$\left.\begin{array}{l}(x) - 3y - 7 = 0 \\ (x) + y - 5 = 0.\end{array}\right\}$$

Multiplicando la segunda por 3 se convierte en

$$(x) + 3y - 15 = 0:$$

y, sumando este resultado con la anterior, en

$$(x) - 22 = 0$$

En la cual (x) es un polinomio en x sin término constante, cuyos coeficientes son funciones de y. Dicha ecuación está comprendida en el *Lema*: luego, si hay soluciones enteras para x, y, los valores de x serán, con el signo $\pm$,

1, 2, 11 ó 22.

Ensayemos todos estos valores.

Sustituyendo $x = 1$ en la primera, por ejemplo, de las dos ecuaciones propuestas tendremos:

$$1 - 2y + y^2 - y + 2 = 0$$

ó bien

$$y^2 - 3y + 3 = 0,$$

que no tiene raíces enteras: luego debemos desechar $x = 1$.

Sustituyendo $x = 2$ en la misma, resultará

$$4 - 4\,y + y^2 - y + 2 = 0,$$

ó bien

$$y^2 - 5\,y + 6 = 0,$$

que tiene las dos raíces $y = 2$, $y = 3$

Pero, sustituyendo en la 2.ª de las propuestas, resulta

$$4+2\,y-y^2+2\,y-7=0,$$

ó bien

$$y^2-4\,y+3=0,$$

que solo admite la raiz 3.

Tenemos, pues, el sistema

$$x=2\ ;\ y=3.$$

Del mismo modo ensayaríamos la solución $x=11$,

Podríamos haber empezado por determinar la y, poniendo las ecuaciones propuestas bajo esta forma

$$y^2 \begin{array}{r|l} -2x & \\ -\ 1 & \end{array} y+x^2+2=0$$

$$y^2 \begin{array}{r|l} -x & \\ -2 & \end{array} y-x^2+7=0$$

ó bien

$$(y)+x^2+2=0$$
$$(y)-x^2+7=0$$

Y, sumándolos, habríamos deducido esta otra finalmente:

$$(y)+9=0,$$

que nos induciria á ensayar como valores de y los números 1, 3 (ya determinado), y el 9

Observaciones.—1.ª En vez de las eliminaciones sucesivas de las potencias de una de las incógnitas, y, por ejemplo, pudiera aplicarse el método de las determinantes, multiplicando cuantas veces fuere preciso ambas ecuaciones por y, y buscando la determinante final en que resultasen eliminadas las potencias de y, como en el conocido método de Sylvester.

2.ª Si se observan atentamente las operaciones efectuadas, se verá que equivalen á la aplicación de las divisiones sucesivas de los polinomios finales hasta llegar á un resto independiente de la incógnita.

Caso general.—Puede generalizarse este procedimiento para el caso de m ecuaciones con m incógnitas.

Basta elegir una de ellas y ordenar por relación á sus potencias: sea x dicha incógnita.

El término independiente de x en cada ecuación será un polinomio con m—1 incógnitas, y, z, t..., Eliminando las potencias de y por los métodos indicados, obtendremos m — 1 ciones, cuyos últimos polimonios solo contendrán las m—2 incognitas z, t...; y, siguiendo el mismo procedimiento, llegaremos á una ecuación en la que el término independiente de x será un número entero. Entre sus divisores estarán los únicos valores enteros y posibles de x.

Aclaremos esta idea general por un ejemplo.

Sean las tres ecuaciones con tres incógnitas.

$$\begin{aligned} (y^2-1)z+x^2+xy+y-7&=0 \\ z^2+yz+xy^2+4&=0 \\ (-y+1)z^2+(-y+1)z+x-2&=0 \end{aligned}$$

que pueden ponerse bajo esta forma:

$$\left.\begin{aligned} &(z)+x^2+xy+y-7=0, \\ &(z)+xy^2+4=0, \\ &(z)+x-2=0. \end{aligned}\right\}\ldots \qquad (1)$$

Eliminemos de las dos últimas la x, multiplicando la última por y^2 y restando; y así tendremos

$$\begin{aligned} (z)+x\,y^2+4&=0 \\ (z)+x\,y^2-2\,y^2&=0 \end{aligned}$$

y, por fin,

$$(z)+2y^2+4=0\ \ldots \qquad (2)$$

Eliminemos entre la primera y la tercera de (1) las potencias sucesivas de x. Tendremos:

$$\begin{aligned} &(z)+x^2+xy+y-7=0, \\ &(z)+x-2=0, \\ &(z)+x^2-2x=0 \\ &(z)+(2+y)x+y-7=0 \end{aligned}$$

Esta ecuación y la segunda forman un grupo

$$\begin{aligned} &(z)+(2+y)x+y-7=0 \\ &(z)+x-2=0 \end{aligned}$$

que solo contiene x, la cual podremos eliminar, resultando por consiguiente:

$$(z)+(2+y)x+y-7=0$$
$$(z)+(2+y)x-2(2+y)=0$$

de donde $$(z)+2(2+y)+y-7=0$$

ó bien

$$(z)+3y-3=0 \ldots \qquad (3)$$

La (2) y (3) forman el siguiente grupo, que solo contiene y:

$$(z)+2y^2+4=0$$
$$(z)+3y-3=0.$$

Multiplicando la segunda por 2 y y la primera por 3, y restando, resulta

$$(z)+6y+12=0$$

Y ésta y la segunda forman el grupo

$$(z)+3y-3=0$$
$$(z)+6y+12=0$$

de donde, eliminando y, obtendremos:

$$(z)+18=0 \ldots \qquad (4)$$

En suma: para el caso que nos ocupa, al sistema propuesto de tres ecuaciones podremos sustituir el siguiente:

$$z^2+yz+xy^2+4=0$$
$$(z)+3y-3=0$$
$$(z)+18=0:$$

la primera de las cuales sólo contiene x, y, en el polinomio final; solamente y la segunda; y el número 18 la tercera.

Si hay valores enteros para z serán 1, 2, 3, 9, 6, ó 18, tanto con signos positivos como negativos.

Suprimiendo pormenores sencillísimos y simplificaciones que desde luego ocurren, ensayemos $z=3$.

Las dos primeras ecuaciones fundamentales se convierten en

$$(y^2-1)3+x^2+xy+y-7=0$$
$$9+3y+xy^2+4=0$$

ó bien

$$x^2+xy+3y^2+y-10=0$$
$$xy^2+3y+13=0$$

ó, en forma más sencilla:

$$(x)+3y^2+y-10=0$$
$$(x)+3y+18=0$$

Aplicando á estas dos ecuaciones uno de los métodos generales, el del m. c. d por ejemplo, tendremos

$$(x)+42=0.$$

Los valores de x deben buscarse entre los divisores de 42: para abreviar tomemos sólo el 2, y tendremos el sistema $z=3$, $x=2$, que, sustituído en una de las primeras ecuaciones, da

$$4+2\,y+3\,y^2+y-10=0$$

ó bien

$$y^2+y-2=0:$$

ecuación satisfecha por $y=1$.

Así, pues, el sistema propuesto admite los valores $z=3$, $x=2$, $y=1$.

A pesar de lo expedito del método, los cálculos que su aplicación exige son pesados, como se advierte en ejemplos tan sencillos como los que preceden; pero en cambio pueden emplearse multitud de *simplificaciones* y *exclusiones de valores* que den rapidez al procedimiento.

Nueva generalización.—Todo lo dicho para las soluciones enteras puede aplicarse en general á las soluciones enteras y racionales de varias ecuaciones con varias incógnitas en que los datos sean algebráicos.

El problema anterior es el *primero* de los que deben resolverse para hallar la solución del problema principal, referente á la división por 17 de la circunferencia.

El segundo consiste en determinar las *soluciones fraccionarias* de un sistema de ecuaciones sin pasar por la ecuación final: cuestión mucho más difícil, y en la cual por falta de tiempo no podemos detenernos ya, pues el presente trabajo va tomando excesiva extensión: mucho más de la que en un principio imaginamos que alcanzaría.

Ambas cuestiones se completan con esta otra: determinación *de límites* para las raíces reales en un sistema de ecuaciones, lo cual quizá pueda conseguirse por un artificio particular y aplicando la teoría de las desigualdades.

Pero aún resueltas estas diferentes cuestiones preliminares, el método de Wantzel conduce, en el caso concreto que nos ocupa, á cálculos sumamente pesados, porque la ecuación final es de octavo grado; y á fin de simplificar su aplicación hemos dividido el problema en dos partes: tomando por de pronto una ecuación de 4.º grado y otra de 2.º; y después, ya determinados los coeficientes numéricos de la primera, reemplazándola por dos de 2.º grado.

Todo esto es en extremo enojoso, si no difícil; y por las razones expuestas y por falta de tiempo, daremos fin por ahora á nuestra tarea, aplazando para ocasión más desahogada la terminación y análisis minuciosa de todas las cuestiones que hemos indicado ligeramente.

J. Echegaray.

CIENCIAS FÍSICAS.

REFLEXIONES SOBRE LA FÓRMULA PSICROMÉTRICA.

No ha demasiados años todavía, por el 1867, que el señor Govi, actualmente profesor de Física muy distinguido en la Universidad de Nápoles, publicó un sucinto folleto, procurando demostrar en él la exactitud de una regla de cálculo sencillísima para deducir de las temperaturas señaladas por los dos termómetros, seco y humedecido, del psicrómetro, la del *punto de rocío;* y, conseguido esto, por referencia á una tabla de *tensiones máximas* del vapor acuoso á distintas temperaturas, la tensión, ó fuerza elástica, del vapor existente en la atmósfera á la temperatura del primero de aquellos dos termómetros; y en conclusión, mediante fácil y rápida operación aritmética, la *humedad relativa*, ó fracción de saturación del aire, á que la fuerza elástica encontrada corresponde.

La regla de que se trata, ya enunciada en 1825 por el profesor Augusto, de Berlín, si no inventor del psicrómetro (ya sustancialmente inventado por J. Hutton en 1772, y en la forma modificado por Leslie, en 1800; en 1802 por Lüdicke; y en 1822 por Ivory, que estudió su teoría detenidamente), perfeccionador y divulgador de tan sencillo é ingenioso instrumento, destinado á la determinación indirecta del estado higrométrico del aire, se reduce á lo siguiente: «Dadas las temperaturas t y t_1 de los dos termómetros del psicrómetro, la del *punto de* *rocío* se hallará restando de la t_1 la diferencia $t - t_1$: ó duplicando la segunda y restando de este duplo la primera.» De modo que, si esto fuese cierto, ó suficientemente aproximado á la verdad, resultaría que $t_2 = 2t_1 - t = t_1 - (t - t_1)$. Y como cierto, con grado de aproximación admisible ó tolerable en la práctica, dedujo Augusto de sus numerosas experiencias comparativas del psicrómetro con el higrómetro de Demiell que podía la precedente relación de temperaturas considerarse entre los 12 y los 30° centígrados, y presión barométrica de 747 á 767 mm.

Prendado, con razón, el Sr. Govi de la sencillez y elegancia de estas fórmulas empíricas, y teniendo en cuenta que los resultados de las observaciones psicrométricas, aun cuando rigorosamente calculados, sólo como meras aproximaciones á la verdad deben considerarse, por causa de la índole compleja ó mal definida del fenómeno á que se refieren, procuró justificar su certidumbre práctica y la oportunidad de su empleo, discurriendo en los términos siguientes,

Si, como ya se ha dicho, se designan por t y t_1 las temperaturas de los dos termómetros del psicrómetro, seco y humedecido; por b la presión barométrica, expresada en milímetros de mercurio, á la temperatura de 0°; por f_1 la fuerza elástica *máxima* del vapor acuoso, á la t_1; y por φ la tensión, grande ó pequeña, del vapor existente en el aire, en cualquier momento, á la t, ó *máxima* f_2 á la t_2 ($f_2 = \varphi$), de las fórmulas de Augusto y de Regnault, levemente alteradas ó simplificadas, se deduce por de pronto que

$$\varphi = f_2 = f_1 - 0.000957\,(t - t_1)\,b$$

En función de la temperatura t á que corresponde, la fuerza elástica máxima f del vapor acuoso no admite expresión algebráica sencilla; y de aquí la dificultad de transformar la ecuación anterior en otra, en la cual, por eliminación de las f_2 y f_1, sólo figuren las tres temperaturas t, t_1 y t_2, cuya relación se busca.

Govi, sin embargo, supone que entre los límites de 2 á 22° de temperatura, aceptables en la práctica, la tensión f puede, con suficiente grado de aproximación á la verdad, representarse de este modo:

$$f=3^{mm},8663+0^{mm},71785\,t,$$

considerando el número t, de grados centígrados en realidad, como simple número abstracto. Y, apoyándose en esta hipótesis, de la ecuación anterior fácilmente se concluye que

$$t_2=t_1-\frac{0{,}000957\times b}{0{,}718}(t-t_1)$$

O, atribuyendo á b el valor de 718^{mm}, con error insignificante, y conforme se quería demostrar, que

$$t_2=t_1-(t-t_1)=2t_1-t.$$

El mismo Govi aplica la regla, en estos tan sencillos términos formulada, á la resolución de varios ejemplos; y, comparando los resultados obtenidos con los procedentes de la expresión analítica, mucho más complicada y considerada como exacta, de donde aquella regla se ha desprendido, las discrepancias, de signo variable según los casos, ó según los valores atribuídos á t y t_1, son, en efecto, muy pequeñas, y como despreciables hasta cierto punto en la práctica.

Que algún fundamento racional tiene la conjetura de Augusto, concerniente á la relación, siquiera no sea más que aproximada, que debe existir entre la temperatura t del aire, la de evaporación t_1 de la humedad que impregna exteriormente el depósito del segundo termómetro del psicrómetro, y de condensación t_2 del vapor acuoso, flotante en el aire, cuando la t disminuye por cualquier causa, no admite duda, tras la ingeniosa análisis del problema, efectuada por Govi: relación de extraordinaria sencillez, y por lo mismo utilizable, cuando no se trata de investigaciones higrométricas, también de exagerada pulcritud.

Contra el uso universal del psicrómetro, opónese por algunos observadores la dificultad de que nada inmediato indica concerniente al estado higrométrico del aire (lo cual dista mucho de ser cierto), como lo indican en el acto otros aparatos, más defectuosos en otros conceptos, de manipulación larga y complicada, y que, pesados todos sus inconvenientes y ventajas, no hay motivo fundado para que le sean preferidos. Y aunque la objeción no es de peso, nada se perdería por destruirla de raíz, suprimiendo el pretexto en que se funda.—¿Sirve para esto la regla enunciada por Augusto, y que Govi trató con empeño de razonar y divulgar?

Como no sea en casos excepcionales, y como regla de tosca ó lejana aproximación, creemos que no sirve La argumentación de Govi estriba, bien mirado, en dos supuestos, si no falsos, de muy cuestionable certidumbre por lo menos: en el de que, para el cálculo de f_2 por la fórmula no simplificada y admitida como buena, aunque no rigorosamente exacta,

$$f_2 = f_1 - A\,(t - t_1)\,b,$$

por A puede ponerse, sin titubear, el valor numérico 0,000957; y en el de que la tensión f, en sus límites ó extremos de temperatura, poco distantes uno de otro, admite por expresión la siguiente;

$$f = p + q\,t$$

Pero ni en lo primero convienen los físicos experimentadores que en el asunto se han ocupado, ni lo segundo lo admite tampoco como bueno, sin manifiesta repugnancia, el mismo Govi. Entre 0° y 30°, la anterior expresión analítica simplificada de f es en gran manera errónea; y el valor atribuído al coeficiente A por el físico italiano es además un poco fuerte. Por A, según Kaemtz, debe ponerse el número 0,000804; el 0,000815, según Burg; el 0,000783, en opinión de Stierlin; y el 0,000714 ó, mejor aún, el 0,000626, según Regnault: autoridades todas aducidas por Cornelius en su importante tratato de Meteorología, para señalar, en conclusión, como valor numérico, más aceptable que ningún otro en la práctica, el 0,0008. Pues de este número al 0,000957, preferido por Govi, la diferencia es bastante considerable para que las conclusiones de su razonamiento resulten sensible y lastimosamente falseadas.

Nuestro objeto, sin embargo, al señalar los puntos vulnerables de la fórmula de Govi, no ha sido, ni remotamente, el de anularla ó desprestigiarla por completo. Es tan notable la ley física que representa que, por el contrario, duélenos que no pueda admitirse como cierta, ó siquiera como expresión suficientemente apropiada á la realidad de las cosas. Y, obligados á renunciar á ella, ocúrrenos preguntar: ¿no habría modo de suplirla con otra, igualmente sencilla y aceptable como buena sin tantos reparos en la práctica?

Para decidirlo, pongamos en la fórmula completa por A el valor 0,0007, propuesto como preferible á todos las demás por Regnault, y nos resultará que

$$\varphi = f_2 = f_1 - 0{,}0007\,(t - t_1)\,b.$$

Y si por b ponemos el valor de 720 mm., correspondiente á una altitud como de 450 metros, media en España de los lugares habitados, obtendremos este otro resultado.

$$f_2 = f_1 - 0^{\mathrm{mm}}{,}504\,(t - t_1)$$

O, muy próximamente:

$$f_2 = f_1 - {}^1/_2\,(t - t_1)\,mm.$$

si la diferencia de temperatura $t - t_1$, en grados centígrados, se considera como número abstracto.

Y la incertidumbre en el valor de A nos autoriza para suponer que este resultado es independiente casi del valor de b, entre límites de presión barométrica no desmesuradamente discrepantes. Aun cuando, en efecto, fuese la presión de 700^{mm} ó de 760^{mm}, y la diferencia de temperaturas, en caso muy extremo, de 15°, la de resultados obtenidos por la última fórmula y por la precedente, de la cual inmediatamente se deriva, no ascendería, por exceso ó defecto, á medio milímetro.

¿Cabe mayor sencillez que la de esta última fórmula para el cálculo de f_2 (*humedad absoluta* del aire), de t_2 luego (*punto de rocío*), y de h (*humedad relativa*) finalmente?—Todo lo que pide es una tabla de *tensiones máximas* del vapor acuoso á diversas temperaturas, que podría grabarse en el mismo paicrómetro como graduación auxiliar, y suplir así la deficiencia para el objeto de las simples indicaciones de ambos termómetros comparados. Si, por ejemplo, $t=25^{\circ},7$ y $t_1=14^{\circ},9$, tomando de la tabla la tensión f_1, igual á $12^{mm},6$, correspondiente á la temperatura t_1, y restando de esta tensión la semidiferencia $t-t_1$, igual á $5^{mm},4$, de grados de ambos termómetros, como si fueran milímetros, hallaríamos, por valor de f_2 ó de φ, $7^{mm},2$. A esta tensión, por la inversa, corresponde en la tabla mencionada la temperatura de $6^{\circ},5$, igual á t_2: temperatura del punto de rocío. Y si la misma tensión, f_2, se divide por la máxima f, igual á $24^{mm},6$, que corresponde á la temperatura t, de $25^{\circ},7$, hallaremos la fracción de saturación ó la *humedad relativa* h, en centésimas partes de la unidad: resultado que más fácil y rápidamente todavía puede encontrarse convirtiendo la división en multiplicación, valiéndose para ello de otra tabla de valores de $\frac{1}{f}=F$, fraccionarios abstractos.

Lo malo de todo esto, según ya desde un principio se advirtió, es que la fórmula de donde hemos partido, $f_2=f_1-A(t-t_1)b$, sólo como aproximada á la verdad, y no con exceso en muchos casos, puede considerarse. Para persuadirse de lo cual, y como objeto de curiosidad científica, no con demasiados detalles estudiado en los libros elementales de Física, transcribimos á continuación el razonamiento de Augusto, fundamental de aquella fórmula, tal como, con leves variantes de redacción, le expone Schmid en su repertorio ó voluminoso *Tratado de Meteorología*. (Lehrbuch der Meteorologíe, Leipzig, 1860.)

Para ello, sin prescindir de los símbolos

$$t,\ t_1 \text{ y } t_2,\ f,\ f_1 \text{ y } f_2\ (=\varphi),\ \text{y } b,$$

cuya significación es ya conocida, designaremos además

por d $(=0,6235)$ la densidad del vapor acuoso, referida á la del aire seco, en igualdad de condiciones de temperatura y de presión;

por c_1 el calor específico del aire seco (0,24) por unidad de peso, y

por c_2 el del vapor de agua (0,48);

por l el calor latente, ó de formación, de este mismo vapor (606° ?);

por k el coeficiente de dilatación del aire y de los gases ($=0{,}000375$, ó $^1/_{267}$);

por p el peso de un cierto volumen de aire seco, á la presión normal de 760 mm. y temperatura de 0°. (un litro $=$ 1.g2932);

por p_1 el del mismo volumen, cualquiera que sea, de aire, seco también en su origen, mas saturado ahora de vapor acuoso á la temperatura t_1, presión total b de la mezcla, y suya en particular $b-f_1$;

por p_2 el del mismo volumen de vapor acuoso solamente, á la temperatura t_1, pero no en estado de saturación, sino con la tensión f_2; y

por p_3 también el del mismo volumen de vapor recientemente formado (que unido al p_2 satura el peso, p_1, de aire seco), sometido asimismo á la temperatura t_1, aunque no más que con la tensión f_1-f_2.

De estas notaciones, dedúcese inmediatamente que

$$p_1=\frac{b-f_1}{760}\times\frac{p}{1+kt_1};\ p_2=\frac{f_2}{760}\times\frac{pd}{1+kt_1};\ \text{y}\ p_3=\frac{f_1-f_2}{760}\times\frac{pd}{1\times kt_1}$$

El peso p_1 de aire seco, á la temperatura t_1, demanda para ascender á la t una cantidad de calor, C_1, representada por esta fórmula:

$$C_1=p_1\,c_1\,(t-t_1).$$

Y el peso p_2 de vapor acuoso, mezclado con el aire ambiente, á la misma temperatura t_1, demanda parecidamente esta otra cantidad:

$$C_2=p_2\,c_2\,(t-t_1)$$

Mas si el aire y el vapor, en contacto casi con el termómetro humedecido del psicrómetro, no poseen la temperatura t, señalada por el termómetro seco, debe atribuirse á que las cantidades C_1 y C_2, expresadas en grados termométricos, se consumen al parecer en la producción del vapor acuoso p_3, necesario para que la tensión del ya existente al rededor del aparato ascienda de f_2 á f_1. Luego

$$C_1+C_2=p_3\times l:\ \text{ó}$$

$$c_1\,(b-f_1)\,(t-t_1)+c_2\,f_2\,d\,(t-t_1)=(f_1-f_2)\,dl.$$

De donde se concluye que

$$f_2 = \varphi = f_1 \times \frac{1 + \frac{c_1}{dl}(t - t_1)}{1 + \frac{c_2}{l}(t - t_1)} - \frac{\frac{c_1}{dl}(t - t_1)}{1 + \frac{c_2}{l}(t - t_2)} \times b$$

O, muy aproximadamente, que

$$f_2 = \varphi = f_1 - b \times \frac{c_1}{dl}(t - t_1)$$

El razonamiento, como se ve, de puro sutil se quiebra casi; y la fórmula final á que conduce sólo como aproximada á la verdad puede mirarse, no tanto en razón de las pequeñas cantidades, de índole variable por cierto, despreciadas para pasar á ella desde la anterior, mucho más complicada, cuanto por la simplificación teórica preliminar de las condiciones y visicitudes atmosféricas que inmediata y eficazmente contribuye al desequilibrio de temperaturas, señaladas por los dos termómetros del psicrómetro. No es, en consecuencia, de extrañar que en aquella última fórmula al coeficiente teórico $\frac{c_1}{dl}$ (=0,000645 ?) se haya sustituído otro, , de A carácter hasta cierto punto indeterminado; y que, con la determinación empírica de este coeficiente, se haya procurado subsanar lo incompleto ó defectuoso del razonamiento empleado para deducirlo.

Por lo demás, la expresión simbólica

$$f_2 = f_1 - A(t - t_1)\, b,$$

presentada en esta otra forma:

$$t - t_1 = \frac{1}{A} \times \frac{f_1 - f_2}{b},$$

significa por junto que el enfriamiento $t - t_1$, producido por la evaporación del agua, indudablemente con tanta mayor rapidez y amplitud cuanto mayor sea la diferencia de tensiones $f_1 - f_2$ y menor la presión b, varía precisamente en razón directa de $f_1 - f_2$ é inversa de b, presión total de la atmósfera:

lo cual, si en términos generales es admisible como cierto, muy cuestionable parece que lo sea, bajando la mano á los detalles. Y en la duda creemos que, cuando no se trate de alambicar con exceso la materia, no puede haber grave inconveniente en reemplazar la fórmula anterior por aquella otra que de su simplificación hemos poco antes deducido

$$f_2 = f_1 - {}^1/_2\,(t - t_1),$$

completada con las dos adjuntas tablas auxiliares, para facilitar su aplicación en la práctica, de valores de f y de $\frac{1}{f}$ $(=F)$, correspondientes á las indicaciones t de la escala termométrica, entre límites no exagerada é inútilmente distantes uno de otro.

TABLA PRIMERA

Tensiones máximas, f, *del vapor de agua, en mm. de mercurio, á las temperaturas* t.

t	0.°0	0.°2	0.°4	0.°6	0.°8	*t*	0.°0	0.°2	0.°4	0.°6	0.°8
—10°	2.1	2.0	2.0	2.0	2.0	+10°	9.2	9.3	9.4	9.5	9.7
9	2.3	2.2	2.2	2.1	2.1	11	9.8	9 9	10.1	10.2	10.3
8	2.5	2.4	2.4	2.3	2.3	12	10.5	10.6	10.7	10.7	11.0
7	2.7	2.6	2.6	2.5	2.5	13	11.2	11.3	11.5	11.6	11.8
6	2.9	2.8	2.8	2.7	2.7	14	11.9	12.1	12.2	12.4	12.5
— 5	3.1	3.1	3.0	3.0	2.9	+15	12.7	12.9	13.0	13.2	13.4
4	3.4	3.3	3.3	3.2	3.2	16	13.5	13.7	13.7	14 0	14.2
3	3.7	3.6	3.5	3.5	3.4	17	14.4	14.6	14.8	15.0	15.2
2	4 0	3.9	3 8	3.8	3.7	18	15.4	15.6	15.7	15 9	16 1
1	4.3	4.2	4.1	4.1	4 0	19	16.3	16.6	16.8	17.0	17.2
0	4.6	4.5	4.5	4.4	4.3	20	17.4	17.6	17.8	18.0	18.3
+ 0	4.6	4.7	4.7	4.8	4.9	+21	18.5	18.7	19.0	19.2	19.4
1	4.9	5.0	5.1	5.1	5.2	22	19.7	19.9	20.1	20 4	20.6
2	5.3	5.4	5.5	5.5	5.6	23	20.9	21.1	21.4	21.7	21.9
3	5.7	5.8	5.8	5.7	6.0	24	22.2	22.5	22.7	23.0	23.3
4	6.1	6.2	6.3	6.4	6.4	25	23.5	23.8	24.1	24.4	24.7
+ 5	6.5	6.6	6.7	6.8	6 9	26	25.0	25.3	25.6	25.9	26.2
6	7.0	7.1	7.2	7.3	7.4	27	26.5	26.8	27.1	27.5	27.8
7	7.5	7.6	7.7	7.8	7.9	28	28.1	28.4	28.8	29 1	29.4
8	8.0	8.1	8.2	8.3	8.5	29	29.8	30.1	30.5	20.8	31.2
9	8.6	8.7	8.8	8.9	9.0	30	31.5	31.9	32.3	32.6	33.0
10	9.2	9.3	9.4	9.5	9.7	31	33.4	33 8	34.2	34.6	35.9

TABLA SEGUNDA.

Valores recíprocos, $\frac{1}{f} = F$, *de las tensiones máximas del vapor de agua á las temperaturas* t.

t	0°.0	0°.2	0°.4	0°.6	0°.8	*t*	0°.0	0°.2	0°.4	0°.6	0°.8
— 5°	31.9	32.4	33.0	33.5	34.0	+ 15°	7.9	7.8	7.7	7.6	7.5
4	29.5	30.0	30.5	31.0	31.4	16	7.4	7.3	7.2	7.1	7.0
3	27.3	27.7	28.2	28.6	29.1	17	6.9	6.8	6.8	6.7	6.6
2	25.3	25.7	26.1	26.5	26.9	18	6.5	6.4	6.4	6.3	6.2
1	23.4	23.8	24.0	24.5	24.9	19	6.1	6.0	6.0	5.9	5.8
0	21.7	22.1	22.1	22.8	23.1	20	5.7	5.7	5.6	5.5	5.5
+ 0	21.7	21.4	21.1	20.8	20.5	21	5.4	5.3	5.3	5.2	5.1
1	20.2	20.0	19.7	19.4	19.1	22	5.1	5.0	5.0	4.9	4.8
2	18.9	18.6	18.3	18.1	17.8	23	4.8	4.7	4.7	4.6	4.6
3	17.6	17.3	17.1	16.9	16.6	24	4.5	4.5	4.4	4.4	4.3
4	16.4	16.2	15.9	15.7	15.5	25	4.2	4.2	4.1	4.1	4.0
5	15.3	15.1	14.9	14.7	14.5	26	4.0	4.0	3.9	3.9	3.8
6	14.3	14.1	13.9	13.7	13.5	27	3.8	3.7	3.7	3.6	3.6
7	13.4	13.2	13.0	12.8	12.6	28	3.6	3.5	3.5	3.4	3.4
8	12.5	12.3	12.1	12.0	11.8	29	3.4	3.3	3.3	3.2	3.2
9	11.7	11.5	11.4	11.2	11.1	30	3.2	3.1	3.1	3.1	3.0
10	10.9	10.8	10.6	10.5	10.3	31	3.0	3.0	3.0	2.9	2.9
11	10.2	10.1	10.0	9.8	9.7	32	2.8	2.8	2.8	2.7	2.7
12	9.6	9.4	9.3	9.2	9.1	33	2.7	2.7	2.6	2.6	2.6
13	9.0	8.8	8.7	8.6	8.5	34	2.5	2.5	2.5	2.4	2.4
14	8.4	8.3	8.2	8.1	8.5	35	2.4	2.4	2.4	2.3	2.3
15	7.9	7.8	7.7	7.6	7.5	36	2.3	2.3	2.3	2.2	2.2

M. M.

VARIEDADES.

Nota sobre un punto importante, referente á la teoría elemental de las fracciones continuas.—Tan breve y sencilla como es la demostración del teorema de que «cualquier fracción continua periódica, pura ó mixta, representa necesariamente el valor numérico, indefinidamente aproximado á la verdad, de una raíz de 2.º grado», tan larga y fastidiosa es la demostración del teorema inverso, según el cual «las raíces reales de cualquier ecuación de 2.º grado pueden expresarse por medio de fracciones continuas periódicas, de una ú otra especie.» Tanto, que muy contados son los tratados de Álgebra elemental, como el de Lefebure de Fourcy, en que á la demostración de este teorema, propuesta por el célebre Lagrange, suele, modificada en los detalles, darse cabida: quedando por ello como defectuosa ó manca la importante teoría de las fracciones continuas. De hoy en adelante, sin embargo, no debe suceder lo mismo, merced á la sutileza de ingenio desplegada por el matemático francés Hermite para abreviar y simplificar, sin alteración sustancial en el fondo, el complicado y penoso razonamiento de aquel su ilustre predecesor mencionado.

La demostración de Hermite, publicada en el *Boletín de las Ciencias Matemáticas* de los Sres. Darboux, Hoüel y Tannery, correspondiente al mes de Enero de 1886, dice, con leves variantes de forma y algo mayor amplitud en la frase, como sigue:

Supongamos que la ecuación de 2.º grado

$$\mathrm{A}\,x^2 + 2\,\mathrm{B}\,x + \mathrm{C} = 0$$

posee dos raíces reales, *positiva* una, a, y otra, b, *positiva* ó *negativa;* que la a, por los procedimientos ordinarios del Álgebra, se ha expresado en fracción continua, formada por los *cocientes incompletos* $a_0, a_1, a_2 \ldots\ldots a_{n-1}, a, a_n, a_{n+1} \ldots\ldots$; y que las *reducidas* correspondientes á los cocientes a_{n-1} y a_n sean $\frac{\mathrm{P}_{n-1}}{\mathrm{Q}_{n-1}}$ y $\frac{\mathrm{P}_n}{\mathrm{Q}_n}$. Si por λ representamos la porción total de fracción continua, que comienza por a_{n+1}, sabido es que la raíz a podrá representarse de este modo:

$$a = \frac{\mathrm{P}_n\,\lambda + \mathrm{P}_{n-1}}{\mathrm{Q}_n\,\lambda + \mathrm{Q}_{n-1}}.$$

Y sustituyendo en la ecuación propuesta, en vez de x, este valor de a, deduciremos esta otra:

$$A(P_n\lambda+P_{n-1})^2+2B(P_n\lambda+P_{n-1})(Q_n\lambda+Q_{n-1})+C(Q_n\lambda+Q_{n-1})^2=0$$

Ó la que sigue,

$$G\lambda^2+2H\lambda+K=0,$$

si convenimos en que sean:

$$G=AP_n^2+2BP_nQ_n+CQ_n^2,$$
$$H=AP_nP_{n-1}+BP_{n-1}Q_n+BP_nQ_{n-1}+CQ_nQ_{n-1}, \text{ y}$$
$$K=AP_{n-1}^2+2BP_{n-1}Q_{n-1}+CQ_{n-1}^2.$$

De donde se deduce esta otra muy importante relación:

$$H^2-GK=(B^2-AC)(P_{n-1}Q_n-P_nQ_{n-1})^2=B^2-AC.$$

Advirtamos ahora que la ecuación $G\lambda^2+\ldots=0$ debe tener sus dos raíces reales: positiva, y mayor que la unidad, una: la que necesitamos para completar el valor de la raíz a, correspondiente á la ecuación propuesta, $Ax^2+\ldots=0$; y otra, acerca de cuyo valor y signo nada sabemos todavía. Pero si con esta segunda raíz, μ, formamos la expresión

$$\frac{P_n\mu+P_{n-1}}{Q_n\mu+Q_{n-1}},$$

no admite duda que esta nueva expresión coincidirá, en valor y signo, con la segunda raíz, b, de la ecuación propuesta. Luego

$$\mu=\frac{P_{n-1}-Q_{n-1}b}{Q_nb-P_n}=-\frac{Q_{n-1}}{Q_n}+\frac{P_{n-1}Q_n-P_nQ_{n-1}}{Q_n(Q_nb-P_n)}=$$
$$-\frac{Q_{n-1}}{Q_n}\pm\frac{1}{Q_n(Q_nb-P_n)}$$

Mas, prescindiendo del signo, la reducida $\frac{P_n}{Q_n}$ expresa el valor de a con error inferior á $\frac{1}{Q_n^2}$. Luego, si por ε designamos un número menor que la unidad, podremos escribir esta nueva igualdad:

$$a-\frac{P_n}{Q_n}=\frac{\varepsilon}{Q_n^{\ 2}},\ \text{ó}\ P_n=aQ_n-\frac{\varepsilon}{Q_n}.$$

Y, en consecuencia,

$$\mu=-\frac{Q_{n-1}}{Q_n}\pm\frac{1}{Q_n^{\ 2}(b-a)+\varepsilon}$$

Expresión la última de la cual se deduce que, á partir de cierto valor de Q_n, μ estará representada, con aproximación á la verdad indefinidamente creciente, por la fracción $-\frac{Q_{n-1}}{Q_n}$. Luego las ecuaciones como $G\lambda^2 + ... = 0$, que siempre poseen una raíz *positiva* y *superior á la unidad*, concluirán, á contar de cierta reducida en adelante, ó desde que Q_n sea de cierta cuantía, creciente conforme n aumenta, por poseer todas también una raíz *negativa*, y, en valor absoluto, *menor que la unidad:* para lo cual es menester que, desde el indicado punto, ó momento, en adelante, los coeficientes G y K sean siempre de signos contrarios, y el H del mismo signo que K.— Si suponemos, en efecto, que el G sea positivo, para que la ecuación á que corresponde tenga sus dos raíces reales, positiva una, y otra negativa, menester es que el K sea negativo. Y aun entonces, porque la raíz positiva ha de ser mayor que la unidad, deberá verificarse esta condición: $\sqrt{H^2 + GK} > H + G$, si fuere positivo el H. Pero en este nuevo supuesto, y mediante la condición que envuelve por referencia á la raíz positiva, la negativa resultaría, en valor absoluto, mayor que la unidad asimismo. Luego los signos de H y K deben ser del mismo nombre.

Y como $H^2 - GK$ es un binomio de valor constante $(= B^2 - AC)$, y compuesto de términos esencialmente positivos, conclúyese, de todo lo expuesto, que los valores de los números enteros G, H y K han de apurarse necesariamente, después de un número *finito* de combinaciones, generadoras de aquel resultado constante. Y donde comience la reproducción simultánea de estos tres coeficientes, principiará la de los valores de λ, ó la periodicidad de la fracción continua, que expresa el valor de la raíz a, cuya existencia se trataba de demostrar.

Aunque no tan interesante como el teorema de Lagrange, demostrado por Hermite, es lo mucho otro, con él muy de cerca relacionado, y del cual, aunque nada nuevo, se trata también en el mismo número del *Boletín de Ciencias Matemáticas*, antes mencionado, atribuyendo la demostración, por extremo concisa que allí se apunta, al célebre Galois. El teorema es este:

«Si una raíz real de 2.º grado puede expresarse en fracción continua, *inmediatamente* periódica ó *pura*, el valor recíproco de la negativa, tomado positivamente, lo será por otra fracción de la misma especie, formada por los mismos cocientes incompletos que la primera, considerados en orden inverso.»

Á título de lema, muy curioso, comencemos por advertir ó recordar que si $a_0, a_1, a_2 ... a_{n-2}, a_{n-1}$, y a_n designan los cocientes incompletos, constitutivos de una fracción continua, finita ó limitada, las reducidas correspondientes podrán representarse de este modo:

$$\frac{P_0}{Q_0} = \frac{a_0}{1}; \frac{P_1}{Q_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1}; \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P_1 a_0 + P_0}{Q_1 a_2 + Q_0}; ... \text{ y } \frac{P_n}{Q_n} = \frac{P_{n-1} a_n + P_{n-2}}{Q_{n-1} a_n + Q_{n-2}}.$$

Pues, proponiéndonos desenvolver en fracción continua la fracción ordinaria $\frac{P_n}{P_{n-1}}$, nos resultaría lo siguiente:

$$\frac{P_n}{P_{n-1}} = a_n + \frac{1}{\left(\frac{P_{n-1}}{P_{n-2}}\right)};\ \frac{P_{n-1}}{P_{n-2}} = a_{n-1} + \frac{1}{\left(\frac{P_{n-2}}{P_{n-3}}\right)};\ldots\frac{P_2}{P_1} = a_2 + \frac{1}{\left(\frac{P_1}{P_0}\right)}: \text{ó}$$

$$\frac{P_2}{P_1} = a_2 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_0}}$$

Y de análogo modo:

$$\frac{Q_n}{Q_{n-1}} = a_n + \frac{1}{\left(\frac{Q_{n-1}}{Q_{n-2}}\right)};\ldots\ldots\frac{Q_2}{Q_1} = a_2 + \frac{1}{\left(\frac{Q_1}{Q_0}\right)} = a_2 + \frac{1}{a_1}.$$

De manera que la fracción $\frac{P_n}{P_{n-1}}$, expresada en fracción continua, consta de los mismos cocientes incompletos, ó fracciones integrantes, que la $\frac{P_n}{Q_n}$, *tomados en orden inverso;* y la $\frac{Q_n}{Q_{n-1}}$ coincide con la reducida que inmediatamente precede á la $\frac{P_n}{P_{n-1}}$, al retroceder, en el desarrollo de ésta, de la fracción continua á la generatriz de donde provino.

Esto sentado, supongamos ahora que

$$[\alpha] \qquad x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cdots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{x}}};$$

y resultará que $x = \frac{P_n\, x + P_{n-1}}{Q_n\, x + Q_{n-1}}$ es raíz positiva de la ecuación

$$Q_n\, x^2 + (Q_{n-1} - P_n)\, x - P_{n-1} = 0 \quad [1].$$

Y si análogamente suponemos que

$$[\beta] \qquad y = a_n + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cdots + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_0 + \cfrac{1}{y}}}};$$

designando por $\frac{P_n}{P_{n-1}}$ y por $\frac{Q_{n-1}}{Q_n}$ lo mismo que antes designamos, se concluirá sin la menor dificultad que

$$y = \frac{P_n\, y + Q_n}{P_{n-1}\, y + Q_{n-1}};\ \text{ó}$$

$$P_{n-1}\, y^2 + (Q_{n-1} - P_n)\, y - Q_n = 0 \ldots \quad [2]$$

Pero la ecuación [2] se deduce de la [1] poniendo en ésta por x la expresión $-\frac{1}{y}$. Luego si la raíz positiva de la ecuación [1] está representada por la fracción continua [α], el valor recíproco de la negativa, tomado con signo contrario, lo estará por la [β], conforme el enunciado del teorema prometía.

M. M.

PROGRAMA

PARA LA

ADJUDICACIÓN DE PREMIOS EN EL AÑO DE 1888.

ARTÍCULO 1.º La Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales abre concurso publico para adjudicar tres premios á los autores de las Memorias que desempeñen satisfactoriamente, á juicio de la misma Corporación, los temas siguientes:

I.

«*Catálogo ordenado de todas las curvas de cualquier clase que han recibido nombre especial, acompañado de una idea sucinta de la forma, ecuaciones y propiedades generales de cada una, añadiendo la noticia de los libros ó autores que primeramente las han dado á conocer.*»

II.

«*Obtención del azúcar prismática, sin emplear la caña ni la remolacha, usadas de ordinario en esta industria.*»

El aspirante presentará un kilogramo de azúcar blanca y cristalizada, y también muestra de los productos indirectos, en el debido estado de conservación, así como de las materias primeras con que haya trabajado.

También justificará que ha efectuado sus trabajos en España y con primeras materias de este país.

III.

«*Topografía botánica de una ó varias provincias, ó de una región natural de España, estudiando las relaciones entre la vegetación espontánea y el suelo y el clima, y detallando principalmente la distribución de las especies exclusivamente españolas.*»

Al texto deberá acompañar la representación gráfica, necesaria para la mejor inteligencia del mismo, hecha sobre el mapa de la Península, ó sobre el de la región á que la Memoria se refiera.

2.º Los premios que se ofrecen y adjudicarán, conforme lo merezcan las Memorias presentadas, serán de tres clases: *premio*, propiamente dicho; *accésit*; y *mención honorífica*.

3.º El premio consistirá en un diploma especial en que conste su adjudicación; una medalla de oro, de 60 gramos de peso, exornada con el sello y lema de la Academia, que en sesión pública entregará el Sr. Presidente de la Corporación á quien le hubiese merecido y obtenido, ó á persona que le represente; retribución pecuniaria al mismo autor ó concurrente premiado de 1.500 pesetas; impresión por cuenta de la Academia, en la colección de sus Memorias, de la que hubiere sido laureada; y entrega, cuando esto se verifique, de 100 ejemplares al autor.

4.º El *premio* se adjudicará á las Memorias que no sólo se distingan por su relevante mérito científico, sino también por el orden y método de exposición de materias, y redacción bastante esmerada, para que desde luego pueda procederse á su publicación.

5.º El *accésit* consistirá en diploma y medalla iguales á los del premio y adjudicados del mismo modo; y en la impresión de la Memoria, coleccionada con las de la Academia, y entrega de los mismos 100 ejemplares al autor.

6.º El *accésit* se adjudicará á las Memorias poco inferiores en mérito á las premiadas y que versen sobre los mismos temas; ó, á falta de término superior con que compararlas, á las que reunan condiciones científicas y literarias aproximadas, á juicio de la Corporación, á las impuestas para la adjudicación ú obtención de premio.

7.º La *mención honorífica* se hará en un diploma especial, análogo á los de *premio* y *accésit*, que se entregará también en sesión pública al autor ó concurrente agraciado, ó á persona que le represente.

8.º La *mención honorífica* se hará de aquellas Memorias verdaderamente notables por algún concepto; pero que, por no estar exentas de lunares é imperfecciones, ni redactadas con el debido esmero y necesaria claridad para proceder inmediatamente á su publicación, por cuenta y bajo la responsabilidad de la Academia, no se consideren dignas de *premio* ni de *accésit*.

9.º El concurso quedará abierto desde el día de la publicación de este Programa en la *Gaceta de Madrid*, y cerrado el 31 de Diciembre de 1888, hasta cuyo día se recibirán en la Secretaría de la Academia cuantas Memorias se presenten.

10. Podrán optar al concurso todos los que presenten Memorias que satisfagan á las condiciones aquí establecidas, sean nacionales ó extranjeros, excepto los individuos Nnmerarios de esta Corporación.

11. Las Memorias habrán de estar escritas en castellano ó latín.

12. Las Memorias que se presenten optando al premio se entregarán en la Secretaría de la Academia, dentro del plazo señalado en el anuncio de convocatoria al concurso, y en pliegos cerrados, sin firma ni indicación del nombre del autor, pero con un lema perfectamente legible en el sobre ó cubierta, que sirva para diferenciarlas unas de otras. El mismo lema de la Memoria deberá ponerse en el sobre de otro pliego, también cerrado, dentro del cual constarán el nombre del autor y las señas de su domicilio ó paradero.

13. De las Memorias y pliegos cerrados el Secretario de la Academia dará á las personas que los presenten y entreguen un recibo, en que consten el lema que los distingue y el número de orden de su presentación.

14. Los pliegos cerrados, con los mismos lemas de las Memorias dignas de *premio* ó *accésit*, se abrirán en la sesión en que se acuerde ó decida otorgar á sus autores una ú otra distinción y recompensa, y el Sr. Presidente proclamará los nombres de los autores laureados en aquellos pliegos contenidos.

15. Los pliegos señalados con los mismos lemas de las Memorias dignas de *mención honorífica* no se abrirán hasta que sus autores, conformándose con la decisión de la Academia, concedan su beneplácito para ello. Para obtenerle se publicarán en la *Gaceta de Madrid* los lemas de las Memorias en este último

concepto premiadas; y, en el improrrogable término de dos meses, los autores respectivos presentarán en Secretaría el recibo que de la misma dependencia obtuvieron como concurrentes al certamen; y otorgarán por escrito la venia que se les pide para dar publicidad á sus nombres. Trascurridos los dos meses de plazo que para llenar esta formalidad se conceden, sin que nadie se dé por aludido, la Academia entenderá que los autores de aquellas Memorias renuncian á la honrosa distinción que legítimamente les corresponde.

16. Los pliegos que contengan los nombres de los autores no premiados, ni con *premio*, propiamente dicho, ni con *accésit*, ni con *mención honorífica*, se quemarán en la misma sesión en que la absoluta falta de mérito de las Memorias se hubiese decidido. Lo mismo se hará con los pliegos correspondientes á las Memorias agraciadas con *mención honorífica*, cuando, en los dos meses de que trata la regla anterior, los autores no hubiesen concedido permiso para abrirlos.

17. Las Memorias originales, premiadas ó no premiadas, pertenecen á la Academia, y no se devolverán á sus autores. Lo que, por acuerdo especial de la Corporación podrá devolvérseles, con las formalidades necesarias, serán los comprobantes del asunto en aquellas Memorias tratado: como modelos de construcción, atlas ó dibujos complicados de reproducción difícil, colecciónes de objetos naturales, etc. Presentando en Secretaría el resguardo que de la misma dependencia recibieron al depositar en ella sus trabajos como concurrentes al certamen, obtendrán permiso los autores para sacar una copia de las *Memorias* que respectivamente les correspondan.

Madrid 31 de Diciembre de 1886.—*El Secretario*, Miguel Merino.

Con opción á los premios ofrecidos por esta Academia en los concursos ordinario y extraordinario, abiertos hasta el último día del mes de Diciembre de 1886, se presentaron en tiempo hábil las Memorias señaladas con los lemas ó palabras siguientes:

CONCURSO ORDINARIO.

—

LEMAS.

Núm. 1.—«*Ampère y Faraday*».

Núm. 2.—«..... *Creó el Sol, la Luna y las estrellas.*»

CONCURSO EXTRAORDINARIO.

Núm. 1.—«*El Universo es materia viviente en perpetua volición y metamórfosis.....*»

Núm. 2.—«*(Sin lema.)*»—Memoria sobre los errores de división del círculo meridiano de Troughton.

Núm. 3.—«*La continua producción de un efecto cualquiera exige la intervención constante de una causa que le ocasione.*»

Núm. 4.—«*Si queréis seguir dando testimonio de vuestro amor al progreso, multiplicad los certámenes como el presente......*»

Núm. 5.—«$a^x = y;\ x = \dfrac{\log y}{\log a}$»

Núm. 6.—«*Laboremus.*»

Núm. 7.—«*Fiat lux.*»

Núm. 8.—«*Bobina Ruhmkorff de corriente continua... .*»

Núm. 9.—«*La Bora gran deu Carreras.....*»

Núm. 10.—*Ars cum Natura ad salutem conspirat.*

Núm. 11.—«*Denen die Gott lieben müssen alle Dinge zum besten dienen.*»

Núm. 12.—«*Clasificación cronológica de los estratos que forman la costra sólida del globo terráqueo.....*»

Núm. 13.—«*.....Todo está dispuesto canforme á peso, medida y número.*»

Núm. 14.—«*.....Ohne Rast und Ruh' immer zu!*»

Núm. 15.—«*Est color in plantis non modo ad ornatum, sed etiam quasi elementum vitæ.*»

Núm. 16.—«*Mais il-y-a une Algèbre supérieure qui repose toute entière sur la théorie de l'ordre et des combinaisons.*»

Madrid 3 de Enero de 1887.—*El Secretario de la Academia*, Miguel Merino.

ÍNDICE

DE LAS MATERIAS CONTENIDAS EN ESTE NÚMERO.

CIENCIAS EXACTAS.

División de la circunferencia en partes iguales........................ 69

CIENCIAS FÍSICAS.

Reflexiones sobre la fórmula psicrométrica............................ 121

VARIEDADES.

Nota sobre un punto importante referente á la teoría elemental de las fracciones continuas.. 132
Programa para la adjudicación de premios en el año de 1888............ 137
Resultado de los concursos á premios, ordinarios y extraordinarios, en 1886. 139

Se suscribe en la portería de la Academia de Ciencias, plaza de la Villa, núm. 2, piso principal.

Cada tomo de la Revista constará de nueve números.

REVISTA

DE LOS

PROGRESOS DE LAS CIENCIAS

EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES.

TOMO 22.—N.º 3.º

MADRID.

IMPRENTA DE LA VIUDA É HIJO DE D. E. AGUADO.—PONTEJOS, 8.

1887.

OBRAS

publicadas por la Real Academia de Ciencias, y que se hallan de venta en la Secretaría de la misma, plaza de la Villa, núm. 2, piso principal.

	RÚSTICA. *Ptas. Cént.*
MEMORIAS.—9 tomos completos, precio de cada uno.......	12,50
REVISTA DE LA ACADEMIA.—21 tomos, precio de cada uno...	6,00
ANUARIOS.—Cuatro tomos: 1883 al 1887, precio de cada uno.	2,50

Tomando de 5 á 10 ejemplares á la vez, de cualquiera de estas obras, se hará en los precios la rebaja del 15 por 100 y de 10 ejemplares en adelante la del 25 por 100.

LIBROS DEL SABER DE ASTRONOMIA

DEL REY

DON ALFONSO X DE CASTILLA,

COPILADOS, ANOTADOS Y COMENTADOS

POR DON MANUEL RICO Y SINOBAS,

Individuo numerario de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, y Catedrático de la Facultad de Ciencias en la Universidad Central.

Obra publicada de Real orden.—Se hallan de venta los 5 tomos encartonados, á 25 pesetas cada uno.

CIENCIAS NATURALES.

ICTIOLOGÍA IBÉRICA.

Memoria de los «Peces del Mar de Andalucía»: autógrafo inédito del Magistral Cabrera, que da á luz anotado el Voçal naturalista de la Comisión central de Pesca, Mariano de la Paz Graells.

Al ingresar en nuestra Academia D. Laureano Pérez Arcas, en su discurso, que tuvo por objeto la «apreciación de los trabajos zoológicos más notables, sobre todo cuando tan grande se mostró España á los ojos del mundo por sus altas empresas, etc.,» hablando, en la página 30, del Magistral Don Antonio Cabrera, nos dijo, que: «Mayor importancia tenía la *Lista de los Peces de Andalucía*, que se publicó en Cádiz en 1817, sin nombre del autor; pero que era debida á D. Antonio Cabrera, Magistral de aquella Catedral; á D. Leonardo Pérez, médico de la misma ciudad; y á D. Félix Haenseler, farmacéutico establecido en Málaga. Que estaban anotados en dicha lista, con gran exactitud y precisión, los nombres vulgares de los peces de la costa andaluza, en la que se indican, y denominan como nuevos, gran número de especies que no encontraron en el corto número de libros que pudieron consultar; siéndolo, en efecto, muchos de ellos, de los que algunos no se han publicado hasta época muy reciente, pero que, por desgracia, no dieron las descripciones que de todas las especies habían hecho, teniendo, por lo mismo, que ser relegados á la sinonimia los nombres nuevos que les habían dado.»

Cuando en 1868 así hablaba el citado Académico, tenía en mi poder el autógrafo del Magistral Cabrera, en que se describen los peces de la lista citada en el referido discurso, la que de un modo casual había venido á mis manos, teniéndole destinado á una publicación que proyectaba, y para la que años hace escribí bastantes cuartillas, que no sé si llegaré á verlas copiadas en letra de molde; pues, aunque su asunto bibliográfico es interesante, por ocuparse de memorias y libros de zoólogos españoles, otros estudios, de índole más original, me distrajeron antes de haber terminado aquel trabajo.

Para que el ictiológico del laborioso Magistral Cabrera no desaparezca, ya que está en mi mano evitarlo, entrego á la Academia las cuartillas referentes á la «Memoria de los Peces del Mar de Andalucía», rogándola determine la publicación en su Revista; y de este modo, aunque tardíamente, se sabrá que aquel venerable sacerdote fué el autor de uno de los pocos catálogos descriptivos que en español se han hecho de los peces que viven en nuestras aguas; pues sólo conozco de parecidos escritos el del célebre Licenciado Jerónimo de Huerta, publicado en el libro IX de la *Historia Natural* de Cayo Plinio, cuya traducción anotó aquel célebre médico y filósofo en 1602; el del insigne Cornide, en su *Ensayo de una Historia Natural de los Peces y otras Producciones marinas de la costa de Galicia*, año de 1788; y el del no menos célebre naturalista aragonés D. Ignacio de Asso, que también describió varios peces en su *Introducción á la Ictiología Oriental de España*, dado á luz en el tomo IV, pág. 28, de los *Anales de Ciencias Naturales*, que se publicaban en Madrid á principios de este siglo.

Fuera de estas publicaciones ictiológicas antiguas, las que posteriormente se han dado á luz (1) son meras listas, más ó

(1) «Lista de Peces de Mallorca», suministrada por D. José del Puig, Regente de la Audiencia de Mallorca, y remitida al Conde de Campomanes. Fué publicada en el *Memorial Literario* y número de Julio de 1786. Sólo contiene nombres triviales que están por orden alfabético, mezclando con los de los peces, otros de moluscos, crustáceos y demás mariscos.

1802.—Anónimo.—«Catálogo d'ets paixos qu'es crian é peixquen en lo mar menos completas, aunque siempre utilísimas para el que un día emprenda la ardua tarea de escribir la Fauna ictiológica española, y lo son desde ahora para la Academia de la Len-

---

de Valencia.»—En Valencia, 1802: por la viuda de Martín Peris, etc.—Curiosísima lista en valenciano de 106 peces, dispuesta por orden alfabético, que termina con la siguiente décima.

No entench que pugen juntarse
En mitg la mar tots los peixos
Que así falten; y quan de exos
No voldrán molt allunyarse!
Be, que no pot senyalarse
El mitg, el migt de la mar.
Qui se habia de ficar
A buscar (per ser curios)
Mes calitats? Cent y dos
Son bastants pera admirar.

Tiene este escrito cierto sabor científico, y revela la erudición concedida por todos al autor que, aunque oculta su nombre, se sabe lo fué D. Marcos Antonio de Orellana.

?—«Relación de los géneros de pescados que regularmente se cogen en esta marina de Valencia, por todo el año respectivamente, según los meses».—Anónimo, que, sin indicación del año, parece ser el primero del siglo. La nomenclatura es vulgar, el orden por meses, indicando la escasez ó abundancia en que se pescan. También se leen mezclados los nombres de los peces con los de los mariscos; y, así y todo, resulta ser una lista de mucho interés para los ictiólogos y pescadores.

1814. Ramis y Ramis (D. Juan.) *Specimen animalium, vegetabilium et mineralium in Insula Minorica frequentiorum ad normam Linnœani sistematis exaratum*, etc.—*Magone Balearium.*

Contiene una lista de 69 peces, ordenados por el *Systema naturæ,* nomenclatura linneana y sinoninia vulgar.

1817.—Se publicó la «Lista de los Peces del Mar de Andalucía,» cuyas descripciones se dan en la presente Memoria inédita, del Magistral Cabrera.

1855.—Graells.—«Catálogo de los Peces de las costas de Cataluña y Valencia,» publicado en las Memorias de la Comisión del Mapa Geológico de la provincia de Madrid: 1885, pág. 63.

Este mismo Catálogo fué reproducido en el Anuario de la Comisión permanente de Pesca, pág. 410: año 1869.

1857.—Machado.—«Catálogo de los Peces que habitan ó frecuentan las costas de Cádiz y Huelva, con inclusión de los del río Guadalquivir.»-Sevilla, 1857.

1864.—Graells.—«Catálogo y Calendario de los Peces de agua dulce y salada, cuya multiplicación puede sujetarse á la piscicultura natural y artificial con probabilidades de buen éxito.»—En el Manual práctico de Piscicultura, págs. 67 y siguientes.

1868.—«Descripción y plano submarino del golfo de Valencia—Peces que en él se crían.»—Notas de D. Peregrín Cerveró, presentadas á la Comisión permagua, que con la sinonimia vulgar encontrará la referencia al nombre científico.

La Memoria descriptiva de «Peces del Mar de Andalucía,»

---

nente de Pesca, y publicadas en el Anuario de 1868, pág. 99. En la 111 se da noticia de varios peces y sus instalaciones en el referido golfo.

1867.—Cisternas (D. Rafael.)—«Catálogo de los Peces comestibles que se crían en las costas españolas del Mediterráneo, y en los ríos y los lagos de la provincia de Valencia.»—Trabajo metódico bien ejecutado, que honra á su autor.

1868.—«Noticia presentada á la Comisión de Pesca de Cádiz, por su Vocal D. Pedro José de Castro, de los Peces que se cogen en las costas meridionales, inclusas las de Marruecos y Portugal, y sus circunstancias.» (Así está escrito el título.)

Esta lista alfabética, sólo de nombres vulgares, puede servir de confirmatoria á las ya antes dadas por otros, y entre ellos por el mismo Magistral Cabrera. Además de los nombres de peces, contiene otras noticias curiosas, referentes á su calidad comestible, época del desove, fondos donde desovan, tiempo que necesitan para crecer y llegar á ser utilizables, tiempo de residencia en aquellas costas, las especies de paso, etc., etc.

1868.—Barceló y Combis (D. Francisco.)—«Catálogo metódico de los Peces que habitan ó frecuentan las costas de las islas Baleares.»—Madrid, 1868. Revista de los Progresos de las Ciencias, tomo 18, núms. 3 y 4.—Mereció que nuestra Academia acordara su publicación en la *Revista*.

1870.—Graells.—«Exploración científica de las costas del Departamento del Ferrol.» En la pág. 301 principia el «Catálogo de los Peces,» que recogió y estudió el autor en su exploración y trajo al Museo de Pesca del Ministerio de Marina, donde se conservan y pueden verse.

1877.—Cisternas.—«Ensayo descriptivo de los Peces de agua dulce que habitan en la provincia de Valencia.»—Anales de la Sociedad Española de Historia Natural, tomo 6, cuaderno 1.º, pág. 69, y cuaderno 2.º, pág. 513.—Recomendable trabajo que entra ya en el orden de los descriptivos.

1885.—«Descripción de los peces, moluscos y crustáceos que habitan y se extraen del litoral gaditano.»—Memoria sobre la industria y legislación de pesca que comprende desde el año 1879 al 1884. Madrid, 1885, pág. 879.

Siguen unos estados de los peces, moluscos y crustáceos que habitan y se pescan en el litoral de Cádiz. El orden es alfabético y la nomenclatura vulgar, siendo el autor de este escrito D. Juan Antonio de Vera.

Omito citar otras listas de peces de nuestras aguas dulces ó saladas, hechas por extranjeros, así como escritos nuestros, que sólo incidentalmente, ó de un modo somero, nombran algunas especies de peces, sin objeto científico.

De esta noticia bibliográfico-ictiológica, resulta que nuestros zoólogos han estudiado más los peces del Mediterráneo que los del Océano, y de este mar los del litoral andaluz; pues solo Cornide y el autor de esta nota han publicado noticias científicas de los peces que viven en las aguas saladas del litoral gallego y cantábrico.

Por fin, existe también inédito un trabajo ictiológico español de grandísima importancia, sobre el que me propongo dar noticia cabal en otra memoria. Es que nos dejó inédita el Magistral Cabrera, está escrita en español y en términos concisos, queriendo imitar la frase linneana latina, sin conseguir siempre lo que aquel gran maestro, que en doce palabras retrataba el objeto de un modo cabal y reconocible. El orden que sigue es el mismo del *Systema naturæ*, pero pospone, á los peces de esqueleto óseo, los condropterigios, que Linneo antepuso.

En el manuscrito autógrafo no añade al nombre científico el del autor que le impuso; y como en la Lista impresa, que se insertará también por Apéndice á la Memoria, lo hizo, yo de ésta lo copio, sin salir responsable de si está bien ó mal, ni menos enmendarlo, aunque conozca que no siempre haya sido bien elegido, lo mismo que la ortografía de algunas palabras.

Por fin, me he permitido, cuando ha sido necesario, anotar en varias especies algunas observaciones para aclarar los conceptos oscuros.

MARIANO DE LA PAZ GRAELLS.

---

debido al autor del «Diccionario histórico de la Pesca nacional», el Comisario Real de Guerra de Marina, D. Antonio Sañer Reguart; y, si bien no he podido encontrar sino una pequeñísima parte del texto manuscrito, existen 343 dibujos copiados del natural, y de ellos hay grabados 133, referentes á peces de nuestro litoral mediterráneo y oceánico.

El título de esta obra importante, que sale mucho de la esfera de las antes citadas, es: «Colección de Producciones de los mares de España, formada de »orden de S. M. Tomo 1.°, (inédito), año de 1796.»

La colección de 39 peces de la costa cantábrica, iluminados al natural, por mis indagaciones minuciosas, resultan ser parte de los 133 grabados, que antes mencioné, y que, aunque citados y celebrados por Cuvier y Valencienes en su grande obra, *Histoire Naturelle des Poissons*, hasta que dí con su origen, nadie conocía al autor.

En su honra, como en la del Magistral Cabrera hoy, otro día llamaré la atención de la Real Academia.

MEMORIA DE LOS PECES DEL MAR DE ANDALUCÍA.

APODES.

La primera clase, Apodes, es de los peces que carecen de aletas ventrales, teniendo agallas huesosas. Consta de varios géneros. Estas son las especies de cada uno que se encuentran en Cádiz.

GÉNERO.—**Muræna.**—LINN.

Cabeza leve, narices tubulosas, la membrana branquiostega de diez radios, el cuerpo rollizo y lúbrico, la aleta dorsal continuada con la de la cola y del ano, respiradero junto á la cabeza, ó las aletas pectorales.

Se siguen las especies.

1.ª

La Morena.—*Murœna Helena.*—LINN.

Sin aletas pectorales y el cuerpo manchado de amarillo sobre fondo oscuro.

2.ª

La Anguilla.—*Murœna Anguilla.*—LINN.

El cuerpo de un solo color oscuro, blanquecino en el vientre, la mandíbula inferior muy larga.

3.ª

El Congrio ó Zafio.—*Murœna Conger.*—LINN.

La línea lateral compuesta de puntos blanquecinos, dos antenillas en la mandíbula superior.

4.ª

La Morenata.—*Muræna cœca.*—Linn.

Carece de toda aleta y de ojos; posee el hocico prolongado y agudo.

Género.—*Stromateus.*—Linn.

Cabeza comprimida, dientes en las mandíbulas y en el paladar; el cuerpo aovado, extenso, lúbrico, la cola ahorquillada.

Especie.—**El Pámpano.**—*Stromateus Fiatola.*—Linn.

Cubierto hermosamente de listas en ángulos de color azul turquí sobre blanco de plata.

Género.—*Xiphias.*—Linn.

La mandíbula superior termina en una espada; boca sin dientes; la membrana branquiostega de ocho radios; el cuerpo cilíndrico, sin escamas.

Especie.—**El Pexe espada.**—*Xiphias Gladius.*—Linn.

La boca grande; la frente en declive; la mandíbula inferior aguda; la superior terminada en una espada huesosa de dos filos; poco menos que todo el cuerpo.

JUGULARES.

La segunda clase, Jugulares, comprende los peces que poseen las aletas inferiores en el yúgulo, ó en el cuello, y agallas huesosas. Los géneros de ella, de los cuales se halla alguna especie en estos mares, son los siguientes.

Género.—*Uranoscopus.*—Linn.

Cabeza grande, áspera, deprimida, con la boca hacia arriba; la membrana branquiostega, de seis radios papiloso-dentada, opérculos ciliados membranáceos; el ano en medio del cuerpo.

Especie.—**La Rata.**—*Uranoscopus Scaber.*—Linn.

El dorso leve; cabeza grande de cuatro lados. llena de asperezas, espinas y aguijones.

Género.—*Gadus.*—Linn.

La cabeza leve; la membrana branquiostega de siete radios; el cuerpo oblongo con las escamas caedizas; las aletas cubiertas de la piel común; muchas en el dorso y en el ano; las pectorales adelgazadas.

Especie 1.ª—**Pescadilla.**—*Gadus Minutus.*—Linn.

No corresponde exactamente con la descripción de los autores; pero parece que debe reducirse á esta especie.

Especie 2.ª—**La Pescada.**—*Gadus Pollachius.*—Linn.

Otro tanto digo de la presente especie, que excepto algunas pequeñas diferencias debe tenerse por el pez que designan los naturalistas por aquel nombre.

Género.—*Blennius.*—Linn.

La cabeza inclinada, cubierta; la membrana branquiostega de seis radios; cuerpo lanceolado; aletas ventrales de dos radios; la anal distinta.

Especie 1.ª—**La Brotola.**—*Blennius Phicis.*—Linn.

La cabeza con un tumorcillo como cresta; una barbilla debajo del labio inferior; dos aletas en el dorso; la primera menor.

Especie 2.ª—**El Ocelar.**—*Blennius Ocellaris.*—Linn.

En la aleta dorsal primera posee una mancha orbicular negra.

Especie 1.ª—**El Viviparo.**—*Blennius Viviparus.*—Linn.

Sobre la cabeza tiene dos hilos de media pulgada, boca pequeña, la mandíbula superior más larga.

Especie 4.ª—**La Brótola blanca.**—*Blennius Alvidus* Sp. N.

La aleta inferior es de un sólo radio que llega hasta los dos tercios de su cuerpo; su color es blanquísimo. Carece de cresta.

Especie 5.ª—**La Putita.**—*Blennius Murenoides* (1).

La frente triangular, prominente, el cuerpo estrecho y larguito, de tres ó cuatro pulgadas de largo.

Especie 6.ª—**La Faneca.**—*Blennius Tripterigius.*—Sp. N. (2).

Debajo de la boca una barbilla; las aletas ventrales cuadriradiadas, con el radio exterior muy largo; las anales negruzcas y largas; la cabeza prolongada; la boca pequeña; las dorsales son tres distintas.

THORACICOS.

—

A la tercera clase, Thorácicos, corresponden aquellos peces cuyas aletas inferiores se hallan insertas en el thórax, ó en el pecho, con las agallas huesosas. De los géneros de esta clase se encuentran las siguientes especies:

Género.—*Cepola.*—Linn.

Cabeza redondeada, comprimida; la boca hacia arriba; dientes corvos; la membrana branquiostega de seis radios; el cuerpo ensiforme, desnudo; el vientre casi del mismo tamaño que la cabeza.

Especie.—*Cepola-Rubescens.*—Linn.—**La Doncella.** (3).

Todo su cuerpo es de un hermoso color de carne sonrosado; las mandíbulas agudas.

Género.—*Echeneis.*—Linn.

La cabeza deprimida, desnuda, con un plano marginado, lleno de surcos y rayas transversales y que forman ángulos; el cuerpo desnudo.

Especie.—*Echeneis.*—*Ræmora.*—Linn. (4).—**El Pegador.**

La cola bifurcada; las estrías de la cabeza, con las cuales se pega á los cuerpos que encuentra, son diez y ocho.

---

(1) De esta especie no se hace mención en la lista impresa y por lo tanto es posible que el autor la suprimiera reduciéndola á otra.

(2) Esta especie falta en la lista impresa, que en la pág. 7 con el mismo nombre vulgar y el de Paneca se incluye en el género *Gadus*, especie G. Blennoides. Linn.

(3) En la lista añade la *Cepola tenia* Linn. que llama otra Doncella.

(4) En la lista la llama vulgarmente *Rémora,* nombre significativo que el Diccionario de la lengua acepta para expresar cualquier cosa que detiene, embaraza ó suspende la marcha de los negocios por atribuir á este pez la propiedad de detener las naves.

GÉNERO.—*Coryphena*.—LINN.

La cabeza declive y truncada; la membrana branquiostega de cinco radios; la aleta dorsal del largo del mismo dorso.

ESPECIE.—**El Dorado.**—*Coryphena Equiselis*.—LINN. (1).

La cola bifurcada; todo el cuerpo de color dorado resplandeciente.

GÉNERO.—*Gobius*. LINN.

Cabeza pequeña; la membrana branquiostega de cuatro rayos; cuerpo pequeño, comprimido; una berruga junto al ano; las aletas inferiores unidas en figura oval.

ESPECIE.—**El Caboso.**—*Gobius Gracilis*.—SP. N. (2).

Carece de línea lateral; las aletas, pectoral, caudal y ventral redondeadas; la dorsal manchada de amarillo y oscuro; el vientre blanco.

GÉNERO.—*Scorpena*..—LINN.

Cabeza grande, obtusa, desnuda, llena de espinas y aguijones; dientes en las mandíbulas, paladar y fauces, cuerpo toroso; la aleta dorsal, única, larga, con los rayos anteriores espinosos.

ESPECIE 1.ª—**La Gallineta.**—*Scorpena Porcus*.—LINN.

Ojos muy grandes, el operculo con tres espinas; la aleta dorsal larga, cuyos radios primeros rematan en púas corvas.

ESPECIE 2.ª—**El Rescacio.**—*Escorpena Capensis* (3).

Al rededor de los ojos posee cuatro espinas, y las láminas de los opérculos terminan igualmente en púas mayores y menores.

GÉNERO.—*Zeus*.—LINN.

La cabeza comprimida y en declive; el labio superior unido á la mandíbula por una membrana; el último de los radios branquiostegos transversal; el cuerpo comprimido; los radios dorsales filamentosos.

---

(1) En la lista impresa añadió el Austriaco: *Corif. Hippuris* Linn.; y la Xaputa *Corif. variegata*, Sp. N. Sin nombre *Corif. Cornide*.

(2) La lista impresa contiene además el Pez del diablo: *Gobius Gozzo* Linn.—El Canqueso, *Gobius niger* Linn.

(3) Este nombre está enmendado en la lista impresa con el de *Scorp. Scropha*, Linn. y además añade, la Polla. *Scorp. maculata,* Sp. N.

Especie.—**El pez de San Pedro.**—*Zeus Faber.*—Linn. (1).

En medio del cuerpo tiene una mancha negra por cada lado; dos aletas anales; el dorso aquillado.

Género.—*Pleuronectes.*—Linn.

Los ojos ambos en un lado del cuerpo; la boca arqueada, que es comprimido y chato, plana por un lado y algo convexo por el otro.

Especie 1.ª—**La Lengua.**—*Pleuronectes Trichodactilus.*—Linn. (2).

Cuerpo áspero con manchas negras sobre fondo oscuro; los ojos al lado derecho.

Especie 2.ª—**El Tambor.**—*Pleuronectes Flexus.*—Linn. (3).

Su línea lateral es áspera; manchas oscuras esparcidas por los radios de las aletas; carece de las espinas que se expresan en la descripción del *Pleuronectes Flexus*, á quien se asemeja en lo demás.

Especie 3.ª—**El Soldado.**—*Pleuronectes Limandoides.*—Linn. (4).

Cuerpo oblongo; la aleta dorsal empieza desde los ojos; los radios escamosos.

Especie 4.ª—**El Lenguado.**—*Pleuronectes Solea.*—Linn.

Escamas dentadas; la cabeza truncada; los ojos bien distantes.

Especie 5.º—**La Solleta.**—*Pleuronectes Linguatula.*—Linn.

El ano al lado izquierdo y los ojos al derecho. Todo su cuerpo se observa punteado de manchitas blancas y oscuras.

Especie 6.ª—**El Rodaballo.**—*Pleuroneetes Rombus.*—Linn. (5).

Su operculo termina en ángulo obtuso; las aletas rodean todo el cuerpo, que es de figura romboide.

---

(1) En la lista impresa señala otra especie de *Zeus* que llama el Ochavo y es el *Z. Asper* Linn.

(2) En la lista enmienda el nombre científico poniendo *Pl. Limandoides.* Linn.

(3) También enmienda esta especie cambiando el nombre de *P. Flesus.* Linn. por el de *Pl. Obtusus* Sp. N.

(4) Lo mismo sucede con esta otra especie que llama en la lista impresa *Pleuronectes tricodactilus.* Linn.

(5) En la lista llama al Rodaballo *Pl. Maximus* Linn. y al *Rhombus* Linn. otro Rodaballo.

Especie 7.ª—**La Acedia.**—*Pleuronectes Terreus.*—Sp. N. (1).

Los ojos al lado derecho; de color de tierra; la cabeza y la boca pequeñas.

Especie 8.ª—**El Tapaculo.**—*Pleuronectes Oblongus.*—Sp. N. (2).

Los ojos al lado izquierdo; la cabeza con tubérculos; las aletas pectorales desiguales; la caudal entera; las escamas blancas ribeteadas de una línea oscura.

Especie 9.ª—**El Peludo en randa.**-*Pleuronectes Fimbriatus.*-Sp. N.

Sus ojos se hallan al lado izquierdo; línea lateral recta; las aletas pectorales desiguales; todo el cuerpo se observa rodeado de ellas; aletas anal y dorsal, cuyos radios sobresalen de la mitad á la membrana que las une.

Género.—*Chœtodon.*—Linn.

Cabeza pequeña; boca chica; dientes cerdosos y movibles: cuerpo ancho, comprimido; las aletas dorsal y anal rígidas, carnosas y escamosas.

Especie 1.ª—**Le Xaputa.**—*Chœtodon Umbratus.*—Sp. N.

Negro azulado; escamas romboidales; cabeza en declive, la mandíbula inferior más larga; la cola semilunar; la aleta pectoral muy larga.

Especie 2.ª—**El Rondanil.**—*Chœtodon Umbratus.*—Vs. (3).

Es semejante al anterior, pero las aletas dorsal y anal que en ambos se hallan opuestas, son en éste más pequeñas y desiguales.

Género.—*Sparus.*—Linn.

Dientes robustos; labios dobles; operculos escamosos; la membrana branquiostega de cinco radios; cuerpo comprimido; la línea lateral encorvada en su remate, las aletas pectorales redondeadas.

---

(1) Esta especie está suprimida en la lista impresa en la que no se encuentra su equivalente. La Acedia es el *Microchirus luteus* ó *Pleuronectes lutens* de Risso publicado en 1810, época en que Cabrera debió haberlo visto ya y dió por Sp. N. con fundamento bastante.

(2) En la lista impresa cambia el nombre científico *Oblongus* Sp. N. en *Cusnidatus*. Sp. N.

(3) La lista impresa tiene tres especies más de *Chœtodon*, el Quarto *Ch. Minimum* Sp. N.—El *Trasalte Ch. Truncatum*. Sp. N.—Sin nombre, *Ch. Sparoides*. Sp. N.

ESPECIE 1.ª—**La Dorada.**—*Sparus Auratas.*—LINN.

Una faja de color de oro entre los ojos; una mancha negra al nacimiento de la cola.

ESPECIE 2.ª—**El Sargo.**—*Sparus Sargus.*—LINN.

Una mandíbula negra hacia la cola y varias fajas transversales del mismo color.

ESPECIE 3.ª—**El Sargo picudo.**—*Sparus Puntazzo.*—LINN.

El hocico algo prolongado y agudo; el cuerpo con fajas negras; la cola semilunar.

ESPECIE 4.ª—**La Hurta** (1).—*Sparus Hurta.*—LINN.

La cola vífida; el cuerpo con fajas transversales rojas.

ESPECIE 5.ª—**El Pagel ó Denton Rojo.**—*Sparus Erhitrinus.*-LINN.

La cola entera; el color encendido sobre fondo blanco. Es pez hermoso.

ESPECIE 6.ª—**El Pargo.**—*Sparus Pagrus.*—LINN.

Rojizo; las aletas dorsal y anal se esconden en una especie de vaina que forma el cutis. Se halla una variedad con cierta eminencia sobre la frente.

ESPECIE 7.ª—**La Boga.**—*Sparus Boops.*—LINN.

El cuerpo es casi cilíndrico, con líneas longitudinales poco marcadas; los ojos grandes.

ESPECIE 8.ª—**El Cromis, el Soldado.**—*Sparus Chromis.*—LINN.

Es de color castaño, pequeño y tiene el segundo radio de la aleta ventral terminado en una cerda larga.

ESPECIE 9.ª—**La Salema, Salpa.**—*Sparus Salpa.*—LINN.

Adornan su cuerpo once rayas longitudinales de color de oro por cada lado.

ESPECIE 10.—**El Denton.**—*Sparus Dentex.*—LINN.

La cola vífida con los cuatro dientes delanteros de su boca mayores y más fuertes.

---

(1) En la lista impresa le llama también la *Urta la Samsa*.

ESPECIE 11.—**La Herrera.**—*Sparus Mormyrus.*—LINN.

La cola vífida y once líneas transversales de color negro; la mandíbula inferior más larga.

ESPECIE 12.—**La Oblada ó Doblada ó Doblaeta**, etc.—*Sparus Melanurus.*—LINN.

Su mancha negra en la cola á lo largo lleno de líneas negras de que carece á veces ó se conocen poco.

ESPECIE 13.—**El Trompero.**—*Sparus Rostratus.*—SP. N.

El hocico es prolongado; el color plateado, con algunos humillos negros á lo largo de la línea lateral.

ESPECIE 14.—**El Bocinegro.**—*Sparus Nigrirostris.*—SP. N.

Se distingue por una mancha grande negra, que le rodea la boca, que es algo prolongada.

ESPECIE 15.—**El Besugo.**—*Sparus Axilo-maculatus.*—S. N. (1).

Los ojos grandes, una mancha negra en el nacimiento de las aletas pectorales.

ESPECIE 16.—**La Chopa.**—*Sparus Cantharus.*—LINN.

Le adornan unas líneas longitudinales de color amarillo bajo; al lomo y la mayor parte de su cuerpo tiene una ligera tinta de azul oscuro, el vientre blanco.

ESPECIE 17.—**La Faxóa.**—*Sparus Mycrocephalus.*—SP. N.

Se distingue por tener la cabeza muy pequeña, como la boca, que se observa armada de dos órdenes de dientes.

ESPECIE 18.—**El Capitán.**—*Sparus cetaceus.*— SP. N.

El segundo rayo de la aleta dorsal remata en tres pulgadas de una cerda rígida.

ESPECIE 19.—**La Breca.**—*Sparus Breca.*—SP. N.

Son sus aletas pectorales las mayores de todos los peces de este género; superan media pulgada al dorso. La aleta dorsal embaína.

ESPECIE 20.—**Sargo burdo.**—*Sparus vittatus* SP. N., *Variegatus, Bonneterræ.*

Su cuerpo se distingue por cuatro fajas negras transversales y

(1) En la lista le llama Sp. *Axillanis* Sp. N.

anchas y una mancha del mismo color que le ocupa el nacimiento de la cola.

Especie 21.—**El Garapello.**—*Sparus Versicolor.*—Sp. N.

Con muchas líneas longitudinales alternadamente doradas y plateadas; el tercer radio externo de la aleta pectoral es más largo que los demás. Las aletas todas, con especialidad la de la cola, con cierto viso de rosa.

Especie 23.—**La Mojarra.**—*Sparus Orbiculatus.*—Sp. N.

Su cuerpo es perfectamente aovado; tiene junto á la cola una mancha negra y otros en el opérculo.

Especie 24.—**El Cachucho.**—*Sparus an Chrisops.*—Linn.

Ojos grandes; cabeza ancha; la cola vífida; todo el cuerpo con cierto color cerúleo. Puede convenirle la descripción del *Crisops.*

Especie 25.—**La Mojarra prieta.**—*Sparus Orbiculatus.*—Sp. N.

Parece una variedad de la Mojarra, de un color negro esparcido por todo el cuerpo, y las demás notas idénticas.

Especie 26.—**El Pachan.**—*Sparus Curvatus.*—Sp. N. (1).

Tiene el dorso más arqueado que los demás de su género; los ojos grandes; la aleta dorsal un poco recogida dentro del lomo; la cola vífida.

Género.—*Labrus.*—Linn.

Dientes agudos; labios sencillos; operculos escamosos; la branquiostega de seis; la aleta dorsal ramentácea en su extremidad; cuerpo oblongo.

Especie 1.ª—**El Bodion.**—*Labrus Julis.*—Linn. (2).

Variado de muchas líneas longitudinales de color verde rojo, blanco y amarillo. La cola entera; la cabeza algo prolongada.

Especie 2.ª—**El Bodion,** (otro).—*Labrus Fuscus.*—Linn.

De color oscuro; el vientre blanquecino. Se observa alguna vez punteado de manchas menudas blanquiscas. La cola entera.

---

(1) Además en la lista impresa añade el Burás, Sp. *Vorax* Sp. N.—El Higo, Sp. *Virescens* Sp. N.—El Page, Sp. *Maculatus*, Sp. N. la Sabia, Sp. *Sabia*, Sp. N.

(2) En la lista impresa el Bodion le refiere al *Labrus fuscus,* Linn. como lo hace aquí con la especie siguiente que llama «el Bodion otro.»

Especie 3.ª—**Bodion verde**.—*Labrus viridis*.—Linn.

Todo es de color verde. Alguna vez varía con una línea longitudinal blanca ó amarilla. La cola entera.

Especie 4.ª—**La Doncella ó Gallito del Rey**.—*Labrus pavo*.—Linn. (1).

Variado de verde, ceruleo, rojo y amarillo; es hermosísimo; su cola entera; su aleta dorsal ramentácea; su cuerpo largo y oblongo.

Género.—*Sciena*.—Linn.

La cabeza escamosa, la membrana branquiostega de seis radios; su aleta dorsal se esconde en una fósula que posee en el dorso.

Especie 1.ª—**La Corvina**.—*Sc. Corvina*.—Sp. N.

Crece hasta vara y media; la branquiostega de siete radios; la cola entera un poco levantada; la aleta anal pequeña y triangular; el opérculo aserrado.

Especie 2.ª—**La Corvinata**.—*Sciena Cirrosa*.—Linn. (2).

El opérculo de dos láminas; la primera aserrada; la línea lateral encorvada; aletas dorsales, dos; la de la cola entera; la membrana branquiostega de seis radios; la mandíbula inferior más corta, con una barbilla pequeña.

Género.—*Perca*.

Las mandíbulas desiguales; los dientes corvos; la lámina de los opérculos aserrada; la membrana de siete radios; aletas espinosas; el ano más inmediato á la cola que á la cabeza.

Especie 1.ª—**La Bayla**.—*Perca Punctata*.—Linn.

Es de color de plata y tiene salpicado el dorso de manchas negras desiguales y redondas.

Especie 2.ª—**Cabrilla**.—*Perca Cabrilla*.—Linn.

Con fajas longitudinales de un color de sangre. Es pez de un geme.

---

(1) En la lista le llama *Labrus julis* Linn. y en ella no cita al *Labrus pavo*; pero además añade el Mata Soldado *Labrus Scina*, Linn. el Borriquete, *Lab. Antias* Linn.—Otro Borriquete, *Lab. Merula*.—El Toro, *Lab. Tinca* Linn.—El Zorzal, *Lab. Varius* Linn.—La Xaputa de piedras, *Lab. Niger* Linn.—El Loro, *Lab. Psitacus*, Linn. y la Bruja, *Lab. Pertusus*, Sp. N.

(2) En la lista impresa la considera Sp. N. y la llama *Sc. Curvata*, además, añade otra que llama *Sc. Umbra* Linn.

Especie 3.ª—**La Cherna.**—*Perca Gigas.*—Linn.

Los opérculos rematan en tres puntas, la de enmedio mayor; la séptima espina de la aleta dorsal es la más chica de todos sus radios.

Especie 4.ª—**El Asperillo.**—*Perca Pusilla* (1).

Su cuerpo es aovado comprimido y muy áspero al tacto.

Especie 5.ª—**Robalo.**—*Perca Saxatilis.*—Sp. N. (2).

Dos aletas dorsales; la caudal entera; el dorso oscuro; el vientre blanco; el cuerpo oblongo.

Especie 6.ª—**El Mero.**—*Perca Merus.*—Sp. N.

Los once primeros radios de la aleta dorsal son espinosos; los demás progresivamente mayores hasta el remate; dientes muchos, amontonados; el color oscuro amarillazo. Es pez grande, mayor de á vara.

Especie 7.ª—**El Abadejo.**—*Perca Flavescens.*—Sp. N.

Es grande y toda de color amarillazo; la cabeza prolongada; la cola un poco levantada; la lámina última del opérculo remata en punta aguda.

Especie 8.ª—**El Abadejo Rayado.**—*Perca Diagramma.*—Linn.

Sobre fondo rojizo lo adornan ciertas líneas longitudinales amarillas. Nuestro pez tiene la cabeza más prolongada que la estampa que trae Seba de la Perca Diagramma.

Especie 9.ª—**El Romerito.**—*Perca Cinerea.*—Sp. N.

Su color es ceniciento; el cuerpo muy ancho hacia la cabeza; esta es grande; la cola entera; la aleta dorsal más ancha hácia su fin. En la lámina inferior del opérculo una prominencia angulosa horizontal.

Especie 10.—**El Berrugate.**—*Perca Berrucaria.*—Sp. N.

Debajo de la boca se observa una berruga que le caracteriza. Se hallan dos variedades, una oscura y otra blanca, á quien llaman Berruguete blanco.

---

(1) No la incluye en la lista impresa.

(2) Enmendado en la lista de los peces del Mar de Andalucía con el nombre de *Perca Labrax*, Bonterre.

Especie 11.—**La Corva.**—*Perca Curvata.*—Sp. N.

La cabeza en declive; la boca pequeña; aletas dos; la de la cola entera. La anal con una esquina robusta de color negruzco; las pectorales del mismo color. El vientre y el pecho sobre una línea recta y arqueada desde la frente á la cabeza.

Especie 12.—**El Borriguete** (1).—*Perca Asellus.*—Sp. N.

Su frente en declive; su boca pequeña; su cola enterísima. Oscura por el lomo y blanca por el vientre.

Especie 13.—**El Roncador.**—*Perca Grunniens.*—Sp. N. (2).

Este pez, cuando nada, suele hacer cierto ruido á modo de ronquidos, de donde le ha venido el nombre: los primeros diez radios de la aleta dorsal son puntiagudos; el recto forma la aleta más elevada; su cuerpo es oblongo; su color oscuro en el dorsó y blanco en el vientre.

Especie 14.—**La Baquilla ó Cabrilla serrana.**—*Perca Vitella.*—Sp. N. (3).

Es pez de un geme con cuatro fajas rojas transversales; vestido de escamas menudas, ásperas; el hocico prolongado y la boca pequeña.

Género.—*Gasterosteus.*—Linn. (4).

Cabeza oblonga, lisa; él cubierto hacia su cola de escudillos, que forman por ambos lados cierta especie de quillas con espinas solitarias ante la aleta dorsal.

Especie.—**La Corzeta.**—*Gasterosteus Lisan.*—Sp. N. (5).

Carece de escudetes; posee siete espinas en el dorso y dos antes de la aleta anal. Bonneterre, que trae de él una buena estampa, lo reduce al *Scomber amia* de Linneo, mas no es posible.

---

(1) En la lista impresa la llama *Borriquete.*

(2) En la lista impresa la llama *Perca Stridens.*

(3) En la lista añade otra especie que llama la *Castañuela*, *Perca fimbriata*, Sp. N.

(4) En la lista cita el género *Cicloplerus* y señala la especie *Lepidogaster*, del que nada dice el autógrafo inédito.

(5) En la lista impresa se añaden.=El Pez Limon, *Gaster. Ductor.* Linn.= La Palometa: *G. Columbarius*, Sp. N.=El Salpa Xurel, *G. Trachurus,* Sp. N.= El Caballo, *G. Equus*, Sp. N.=El Lirio, *G. Sinutus*, Sp. N.=El Punzon, el Pez Clavo, *G. Muricatus,* Sp, N.; y uno, sin nombre vulgar, que llama *G. Malacensis*, Sp. N.

Género.—*Scomber.*—Linn.

Cabeza comprimida lisa; la línea lateral aquillada en su remate; aletas falsas hacia la cola; esto en algunas especies.

Especie 1.ª—**La Caballa** (1).—*Scomber Scomber.*—Linn.

Cinco aletas falsas; una espina antes de la aleta anal, por encima negra ondeada de azul.

Especie 2.ª—**El Bonito.**—*Scomber Pelamis.*—Linn.

Aletas falsas siete; el color aplomado con líneas oscuras longitudinales; cuatro al dorso oscuro.

Especie 3.ª—**El Atún.**—*Scomber Thinnus.*—Linn.

Ocho aletas espurias; nueve en al algunos individuas; crece hasta algunas varas.

Especie 4.ª—**El Xurel.**—*Scomber Trachurus.*—Linn.

La línea lateral compuesta de escudetes espinosos. Carece de aletas espurias.

Especie 5.ª—**El Xurel dorado.**—*Scomber Auratus* (2).

Es de color dorado. El nuestro carece de aletas falsas.

Especie 6.ª—**La Albacora.**—*Scomber Albacora, Bonnete* (3).

Especie 7.ª—**La Palometa.**

Tampoco describe esta especie que no se encuentra en la lista impresa, ni le da nombre científico.

La Tonina es el Delphinus$_*$—*Phocena* (4).

Género.—*Centrogaster.*—Houtt.

Cabeza comprimida y lisa; cuerpo deprimido, aunque no en todas las especies; las aletas ventrales unidas por una membrana de cuatro espinas y seis radios blandos.

---

(1) En la lista impresa le llama El Estornino, y á la Caballa *Scomber Colias,* Linn.

(2) Este nombre está enmendado en la lista impresa con el de *Scomber Chrisops*, Linn.

(3) No le describe y en la lista impresa no le da nombre científico latino. Además cita un Scomber sin nombre, que refiere al *Scomber Alatunga*, Linn.

(4) ¿Por qué incluiría este cetáceo junto á los atunes? Quizá por el nombre de toñina que se da en algún sitio al atún?

Especie.—**La Melva.**—*Centrogaster Scutatus.*—Sp. N.

En el nacimiento de las pinnas ventrales se observa un hueco de la figura de un triángulo isósceles, donde recoge y esconde las aletas, que se hallan unidas entre sí. Tiene aletas espurias (1).

Género.—*Mullus.*—Linn.

Cabeza comprimida; declive, escamosa; los ojos verticales, los opérculos de tres láminas; el cuerpo redondeado; color bermejo; escamas flojas.

Especie 1.ª—**Salmonete.**—*Mullus Barbatus.*—Linn.

Es de un bellísimo color rojo; se ven debajo de la boca dos barbillas de color blanco.

Especie 2.ª—**Salmonete rayado.**—*Mullus Surmuletus.*—Linn.

Líneas longitudinales amarillas.

Género.—*Trigla.*—Linn.

Cuerpo en forma de cuña, adelgazado hacia la cola; la cabeza con hocico y aguijones; la mandíbula superior bífida en algunas especies; junto á las aletas pectorales unos hilos largos, rígidos en mayor y menor número, que Linneo llama dedos.

Especie 1.ª—**El Armadillo.**—*Trigla Cataphracta.*—Linn.

Dos digitaciones; el cuerpo cubierto de láminas huesosas y anguloso.

Especie 2.ª—**El Borracho.**—*Trigla Gurnardus.*—Linn.

Tres digitaciones color rojísimo, con algunas manchas en la aleta dorsal.

Especie 3.ª—**La Cabrilla.**—*Trigla Lucerna.*

Tres digitaciones; la primera aleta dorsal con los radios puntiagudos. Es variedad del Regel ó Trigla Lucerna.

Especie 4.ª—**El Garneo.**—*Trigla Lira.*—Linn.

Tres digitaciones; narices tubulosas; sobre cada ojo una espina corva.

---

(1) Además de esta especie, en la Lista impresa hay otra con los nombres vulgares de Choa y Chova, que lleva el nombre científico de *Cen. Scombrarius.* Sp. N.

Especie 5.ª—**El Cabete.**—*Trigla Minuta.*—Linn.

Tres digitaciones; nuestro pez tiene en la cabeza espinas pequeñas y el dorso doblemente aquillado.

Especie 6.ª—**El Rubio.**—*Trigla Rubens.*—Sp. N. (1).

El hocico subdividido; la línea lateral lisa; dos series de espinas en el dorso; las aletas pectorales azuladas; las demás rojas; dos espinas en la parte posterior de los ojos.

Especie 7.ª—**El Regel.**—*Trigla Lucerna.*—Linn.

El hocico casi subdividido en dos; la línea lateral bífida; los radios de la aleta dorsal primera setáceos alguno de ellos.

Especie 8.ª—**La Golondrina.**—*Trigla Hirundo.*—Linn.

Tres digitaciones; la línea lateral con una larga serie de púas; las aletas pectorales larguísimas.

Especie 9.ª—**El Cuclillo.**—*Trigla Cuculus.*—Linn.

Tres digitaciones; la línea lateral lisa, doble, compuesta de escamas blanquecinas.

Especie 10.—**El Rapete.**—*Trigla Spinosa.*—Sp. N. (2).

Las espinas de la aleta dorsal primera son más fuertes que en las demás especies de su género, y la primera ligeramente aferrada por su parte exterior.

ABDOMINALES.

Pertenecen á la cuarta clase los peces cuyas aletas ventrales se miran colocadas en el abdomen con agallas huesosas. He aquí las especies pertenecientes á los géneros de esta clase, que se pescan en nuestro mar.

Género.—*Esox.*

Cuerpo largo, redondeado, la cabeza con hocico prolongado, mandíbulas iguales; la abertura de la agalla grande; falcada; la membrana branquiostega de 5 á 14 radios.

Especie 1.ª—**La Aguja.**—*Esox Belone.*—Linn.

Las dos mandíbulas terminan en unas puntas largas, que son prolongaciones de ellas y forman un pico delgado y agudo.

(1) En la lista impresa la llama *Tr. Rubescens,* Sp. N.

(2) En la lista impresa la llama *Tr. Serrata.* Linn.

Especie 2.ª—**El Picudo ó Espeton.**—*Esox Lucius* (1).

Su cuerpo es casi cuadrangular; tiene pico aunque no muy largo; la mandíbula inferior más delgada.

Género.—*Argentina.*—Linn.

Cuerpo oblongo, redondeado, algo comprimido; la cabeza más ancha que el cuerpo; la frente deprimida; los opérculos orbiculares; una aleta falsa al fin del lomo en algunas especies.

Especie.—**El Pexe Plata.**—*Argentina Sphirena.*—Linn.

Sin dientes; la cabeza deprimida; la cola hendida.

Género.—*Atherina.*—Linn.

Cuerpo oblongo, comprimido, escamoso; cabeza plana por encima con cuatro poros, dos en la nuca y dos ante los ojos; la abertura de la agalla en ángulos, dientes muchos aglomerados.

Especie.—**El Pexe Rey.**—*Atherina Hepsetus.*—Linn.

Es un pequeño pez de color de plata, con la línea lateral es doble, con una faja blanquecina entre las dos.

Género.—*Mugil.*—Linn.

Cuerpo oblongo casi comprimido, blanquecino, cubierto de escamas estriadas y truncadas; cabeza cónica; boca sin dientes.

Especie 1.ª—**El Capitán ó Cabezudo.**—*Mugil Cephalus.*—Linn.

Su gran cabeza plana por encima y su carne deliciosa distinguen á este pez bastantemente.

Especie 2.ª—**La Liza.**—*Mugil Albula.*—Linn. (2).

Parece que pueden fácilmente reducirse á esta especie nuestras lisas, aunque su cabeza es algo más prolongada de lo que representa el dibujo en Mr. Bonneterre.

Género.—*Exocetus.*—Linn.

Cuerpo oblongo, redondeado por detrás y anguloso por delante,

(1) En la lista impresa le llama *Esox Sphirena*, Linn., y Peto, como sinónimo vulgar. Además añade otras dos especies: el Mosquitero, *Esox Marginatus*, Linn., y el Salton, *Esox Pinnulatus*, Sp. N.

(2) La lista impresa añade una variedad con el nombre vulgar de Bausel.

cabeza casi de tres lados; frente deprimida; las aletas pectorales larguísimas, agujadas, voladoras.

Especie.—**Volador.**—*Exocetus Evolans.*—Linn.

La mandíbula inferior más larga; el abdomen redondo; las aletas ventrales brevísimas.

Género.—*Clupea.*—Linn.

Cuerpo deprimido, casi lanceado, leve deprimido; el abdomen aquillado; cabeza comprimida; frente deprimida; mandíbulas extensas desiguales; los opérculos de tres piezas escamosos.

Especie 1.ª—**La Saboga.**—*Clupea Harengus.*—Linn.

La mandíbula inferior más larga; la cabeza pequeña; una mancha encima del opérculo que se desvanece con su muerte.

Especie 2.ª—**La Sardina.**—*Clupea Spratus.*

No debe separarse de esta especie nuestra sardina, aunque ofrece algunas pequeñas diferencias.

Especie 3.ª—**La Lacha ó Negrilla.**—*Clupea Alosa.*—Linn. (1).

Su mandíbula superior se halla dividida ligeramente en dos porciones; sus escamas son grandes y cahedizas.

Especie 4.ª—**La Anchoa ó Boquerón.**-*Clupea Encrasicolus.*-Linn.

Sumamente pequeño y sabrosísimo; la mandíbula inferior más larga.

Género.—*Ciprinus.*—Linn.

Boca sin dientes; la boca con dos surcos; cuerpo leve, blanquisco; las aletas ventrales con nueve radios.

Especie 1.ª—**El Pez de Redoma.**—*Ciprinus Auratus.*—Linn. (2).

Rojo dorado y plateado son los colores que adornan este gracioso pez, que se cría en los estanques y en las habitaciones se conserva en redomas de cristal.

Especie 2.ª—**El Barbo.**—*Ciprinus Barbus.*—Linn.

El segundo rayo de la aleta dorsal es aserrado; baja á nuestra bahía de los riachuelos que desaguan en ella (3).

---

(1) En la lista impresa se cita una variedad que llama Sábalo.

(2) Este pez ni es de mar, ni tampoco de Andalucía, pues procede de la China.

(3) Además de estas dos especies, en la lista impresa añade el Albur, que refiere al *Ciprinus Alburnus*, Linn.

Branquiostegos.

La quinta clase se compone de los peces cuyas agallas se observan destituídas de huesos, y la disposición de las aletas ventrales solo sirve para caracterizar los géneros, de los cuales se hallan las especies siguientes.

GÉNERO.—*Tetrodon*.—LINN.

Cabeza con las mexillas huesosas, prolongadas, bipartidas; la abertura de las agallas lineal; el cuerpo punteado por debajo, y sin aletas ventrales.

ESPECIE.—**La Mola ó Bordador.**—*Tetrodon Mola*.—LINN.

Comprimido; redondeado; la boca prolongada; las aletas dorsal y anal muy largas, opuestas y unidas con la de la cola, que es continua.

GÉNERO.—*Singnatus*.—LINN.

Cabeza pequeña; pico cilíndrico, largo reflejo en su ápice; boca terminal sin dientes, ni lengua; el cuerpo con escudetes y articulado, sin aletas ventrales.

ESPECIE 1.ª—**El Caballito.**—*Singnatus Hippocampus*.—LINN.

Su cuerpo se halla marcado con siete ángulos lleno de tubérculos, espinas menudas y prominencias. Su cabeza tiene una grosera representación de la de un caballo.

ESPECIE 2.ª—**La Aguja.**—*Singnatus Acus*.—LINN. (1).

El cuerpo con siete ángulos, largo y delgado, atenuado hacia la cola; el pico agudo; su aleta dorsal es pequeña y con una manchita.

GÉNERO.—*Centriscus*.—LINN.

La cabeza con un pico delgado y agudo, la boca sin dientes; el cuerpo comprimido y plano, con el abdómen aquillado.

ESPECIE.—**El Trompetero.**—*Centriscus Velitaris*.—LINN.

Se halla cubierta la parte anterior de su cuerpo con una coraza que remata en punta rígida por encima del lomo; es pequeño; su color de rojo bajo (2).

---

(1) En la lista impresa añade una variedad de esta especie que llama vulgarmente la Mula, y además otra especie que denomina el Alfiler y refiere al *Singnatus Ophidium*.

(2) En la lista impresa añade, con el nombre vulgar de Pito Real, el *Centriscus Svolopax*, Linn.

GÉNERO.—*Balistes*.—LINN.

La cabeza y el cuerpo comprimido; boca pequeña; escamas pegadas y reunidas á la piel; sobre los ojos una espina recia en muchas especies. La abertura de la agalla angosta, colocada sobre las aletas pectorales.

ESPECIE.—**La Mula.**—*Balistes Trispinosus.*—SP. N. (1).

Se halla con tres espinas antes de la aleta dorsal; la primera larga con un resorte en su nacimiento; la boca chica; los dientes largos y con filo; la cola semilunar.

GÉNERO.—*Lophius*.—LINN.

La cabeza deprimida; los ojos verticales; el cuerpo sin escamas; sin línea lateral; las aletas dorsal y anal opuestas y muy cercanas á la cola.

ESPECIE 1.ª—**El Rape.**—*Lophius Piscatorius*.—LINN.

La cabeza redondeada y muy grande; lo mismo la boca grandísima, rodeada de ciertas barbillas; las aletas ventrales breves y rígidas.

ESPECIE 2.ª—**El Sapo.**—*Lophius Gadicensis*.—SP. N.

Su color es por encima manchado de amarillo sobre fondo rojo oscuro; tiene bien señalada la línea lateral.

CONDROPTERIGIOS.

Corresponden á la sexta y última clase aquellos peces cuyas agallas son cartilaginosas; de cuyos varios géneros hay las siguientes especies.

GÉNERO.—*Accipenser*.—LINN.

Cabeza obtusa; la boca por debajo sin dientes; la abertura de la agalla lateral; el cuerpo alargado y anguloso con muchas series de escudillos.

ESPECIE.—**El Sollo.**—*Accipenser Sturio*.—LINN.

Hocico prolongado obtuso con cuatro barbillas antes de la boca; es pez grande de cinco ángulos, robusto y de carne delicada al paladar (2).

---

(1) El nombre científico de esta especie se ve rectificado en la lista impresa con el de *Balistes Triacantos*, Sp. N.

(2) La lista impresa añade otra especie: el *Accipenser Huso,* Linn., que también llama Sollo, y no ha sido después señalado por ningún otro naturalista.

GÉNERO.—*Squalus*.—LINN.

En los lados tiene de cuatro á siete agujeros semilunares, que le sirven de agalla; su cuerpo es prolongado; la cabeza varía en las distintas especie.

ESPECIE 1.ª—**La Mermejuela ó Angelote.**—*Squalus Squatina*.—BONTER.

Las aletas pectorales son grandes y carnosas ; la boca terminal ; la cabeza chata. Su forma es bien extraña.

ESPECIE 2.ª—**El Ferron** (1).—*Squalus Acanthias*.—LINN.

Las aletas dorsales espinosas; el cuerpo redondo; la cabeza comprimida y en forma de cuña; negruzco por el lomo y blanquecino por el vientre.

ESPECIE 3.ª—**El Marrajo.**—*Squalus Nasus, Bonneter y Bruson*.

A cada lado de la cola se observan ciertas prominencias y pliegues en el cutis; las aletas dorsal segunda y anal opuestas y pequeñas.

ESPECIE 4.ª—**El Pexe Clavo.**—*Squalus Spinosus*.—LINN.

Todo él claveteado de tubérculos desiguales, anchos y redondos por la base, y que de su centro se eleva una ó dos espinas corvas; el hocico cónico; los dientes cuadrados; respiraderos cinco.

ESPECIE 5.ª—**El Boquidulce.**—*Squalus Griscus*.—LINN.

Posee seis respiraderos; una sola aleta dorsal; las pectorales horizontales; la anal pequeña.

ESPECIE 6.ª—**La Pintarroja.**—*Squalus Rufescens*.—SP. N. (2).

Es afine al *Squalus Canicula*, pero se distingue en ser más pequeño; el cutis poco áspero; la boca chica. Comparece con el *Squalus stellaris*, vulgo, Pique. Parecen variedades.

ESPECIE 7.ª—**La Lixa.**—*Squalus Licha, Bonneterre* (3).

El cutis asperísimo; la cabeza pequeña; las aletas dorsal y anal opuestas; la de la cola estrecha y escotada.

---

(1) En la lista, con el nombre de Galludo, señala una variedad de esta especie.

(2) En la lista impresa corrige el nombre científico de la Pintarroja, llamándola *Squalus Canicula*, Linn., con mayor acierto.

(3) Suprimido en la lista impresa; pero, existiendo en las aguas de Málaga, es posible se encuentre en las de Cadiz, donde Cabrera observaba. Los autores escriben *Lichia*.

Especie 8.ª—**El Cazon** (1).—*Squalus Mustelus.*—Linn.

El hocico cónico comprimido; el cuerpo redondeado; las aletas pectorales cortas, en el lomo oscuro. A los pequeños peces de esta especie llaman piques.

Especie 9.ª—**El Tollo ó Melga** (2).—*Squalus Fernandinus, Molina.*

Sin aleta anal, las dorsales espinosas; el cuerpo redondeado y con manchas blanquizcas en fondo oscuro de violeta.

Especie 10.—**El Kelvas** (3).

Especie 11.-**La Tintorera ó Caella.**-*Squalus Carcharias.*-Linn. (4)

Los dientes triangulares y aferrados, son muchísimos; la boca grande; el hocico terminado en punta. Es pez grandísimo y voracísimo.

Especie 12.—**El Cochino.**—*Squalus Spinax.*—Linn.

Todo negro; las aletas dorsales espinosas; las narices en la punta del hocico.

Especie 13.—**El Pexe Martillo ó Cornudilla.**—*Squalus Zigœna.* —Linn.

La cabeza transversal, de modo que el cuerpo forma la figura de un martillo; en la extremidad de cada lado de la cabeza se hallan los ojos; las aletas semilunares en su remate.

Especie 14.—**El Pexe Peyne.**—*Squalus Galeus.*—Linn.

Sus dientes son triangulares y aserrados en sus bordes; las narices junto á la boca y junto á los ojos otros dos agujeros; respiraderos siete; aleta dorsal, una pequeña.

Especie 15.—**El Pexe Sorro.**—*Squalus Vulpes.*—Linn. (5).

Una de las divisiones de su aleta á la cola es del tamaño de todo el cuerpo, cuyo carácter basta para distinguirle.

---

(1) En la lista impresa señala con el nombre Caella una variedad de esta especie.

(2) En la lista se lee Mielga. De donde Cabrera el nombre de *Squalus Fernandinus,* Molin., aplicable al *Mustelus plebijus* Bp.

(3) En la lista impresa le llama científicamente *Squalus Kelves,* Sp. N. y vulgarmente Kelvacho también. No da descripción de esta especie.

(4) En la lista impresa llama *Squalus glaucus,* Linn. á la Tintorera, enmendando la equivocación, pues el *S. Carcharias* es el Tiburon.

(5) Non Linn. sed Gmelin.

Especie 16.—**El Pexe Perro.**—*Squalus Catulus.*—Linn. (1).

Le cabeza grande; el color manchado; la aleta dorsal posterior á las ventrales pequeña; la anal opuesta á la dorsal segunda; los lados algo comprimidos.

Género.—*Raya.*—Linn.

Su cuerpo es comprimido, romboidal ó redondeado; la boca y los respiraderos por debajo; éstos son diez, cinco de un lado y cinco de otro; los ojos encima al lado opuesto, verticales más ó menos.

Especie 1.ª—**La Tremielga, Tremeriega ó Tembladera.**—*Raya Torpedo.*—Linn.

Varía considerablemente su color, ya oscuro, ya amarillo; á veces con dos manchas ó cuatro redondas á los lados del dorso, el cuerpo redondeado; la cabeza obtusa; los ojos pequeños; carece de toda espina.

Especie 2.ª—**Levi-Raya** (2).—*Raya Batis.*—Linn.

Leve; el dorso oscuro; el vientre blanco á lo largo de la cola, y por medio de ella una línea de espinas menudas y corvas al remate de ella, con una aletita.

Especie 3.ª—**La Noriega.**—*Raya Clavata.*—Linn. (3).

El hocico es agudo, y posee el largo de la cola una serie de espinas; el color oscuro; crece á gran magnitud.

Especie 4.ª—**La Raya Baca.**—*Raya Oxirincus.*—Linn.

Con una serie de espinas en el dorso y en la cola; cuatro sobre los ojos; el color manchado de amarillo bajo sobre oscuro.

Especie 5.ª—**El Chucho.**—*Raya Aguila.*—Linn.

La cabeza obtusa; el cuerpo todo liso; en la cola tiene un aguijón que sale del medio de ella, duro y puntiagudo y aserrado, rematando en una aletita pequeña.

---

(1) Además de las especies de Squalideos citados, añade en la lista impresa el Taburon, *Squal. Tiburo,* Linn.

El Jaqueton, *Varietas præcedentis,* Linn.

El Alitan, *Squal. Ocellaris*, Linn.

Sin nombre vulgar, *Squalus Maximus,* Linn.

La Negra, *Squalus Ater*, Sp. N.

(2) En la lista impresa la llama la Romaguera. Nótese que en el manuscrito inédito escribe *Rayas*, y en la lista impresa *Raia.* Linneo escribe *Raja.*

(3) En la lista impresa la llama *Raia obscura*, Sp. N.

ESPECIE 6.ª—**El Bramante.**—*Raya Tubercula-Bonneterre* (1).

Puede reducirse á esta especie aunque con algunas diferencias: tiene aglomeradas al rededor de los ojos muchas espinitas pequeñas en semicírculo; el pico de la cabeza largo.

ESPECIE 7.ª—**Raya Vera.**—*Raya Miraletus.*—LINN. (2).

Lisa por el vientre y por el dorso, con tres órdenes de espinas en la cola; dos aletas dorsales, y una en el fin de la cola, con manchas redondas por encima algunas veces.

ESPECIE 8.ª—**La Agujeta** (3).—*Raya Aptera.*—SP. N.

Leve, sin aletas ni aguijones ni espinas en todo el cuerpo, ni en la cola: blanca, por debajo y oscura ó amarillaza por encima; los dientes....................; la cabeza en punta pequeña; la cola ó rabo largo y delgado puntiagudo. Puede ser la Pastinaca.

ESPECIE 9.ª—**El Machudo ó peje Mahoma.**—*Raya Machuelo.*—*Bonnete* (4).

Sembrado el cuerpo de manchitas blanquizcas en fondo oscuro; el cuerpo oblongo; la cabeza puntiaguda en demasia.

GÉNERO.—*Petromizon.*—LINN.

El cuerpo cilíndrico, largo, siete respiraderos laterales redondos; una cisura ó raja en la nuca; sin aletas ventrales unas especies y otras sin las pectorales.

ESPECIE 1.ª—**La Lamprea.**—*Petromizon Marinus.*—LINN.

La boca llena de glándulas; por dentro dos aletas dorsales; la segunda separada de la de la cola; el cuerpo entre fusco con visos verduscos ó manchas amarillas.

ESPECIE 2.ª—**Otra Lamprea.**—*Petromizon Fluviatilis.*—LINN.

La aleta dorsal segunda casi triangular. Es de color negruzco por encima con ciertas líneas ondeadas; blanquizco por debajo. Desciende de los ríos á la bahía, en cuyas playas se coge algunas veces, aunque raras.

---

(1) En la lista impresa le llama también Pez de Mahoma y la refiere á la *Raia rubus*, Linn.

(2) En la lista impresa dice equivocadamente *Miralaletus*.

(3) No está en la lista impresa.

(4) En la lista impresa refiere el Pez de Mahoma á la *Raia Rubus*, Linn. y no habla del Machuelo.

ADDENDA.

Las siguientes especies de peces y moluscos cefalópodos debieron ser vistos por el autor, posteriormente á los nombrados antes, pues de otro modo los hubiera colocado en su lugar correspondiente.

Caella.—*Squalus Glaucus.*

Las aletas dorsal segunda y anal opuestas. Los dientes agudos.

Sparus Pinnilepidus.

Tiene la aleta caudal, ventral, y la mitad de la dorsal cubiertas de escamas; el color oscuro negruzco; los dientes reunidos; los interiores más pequeños y los exteriores progresivamente más largos.

Vieja ó *Sparus-Setaceus Varietas.*

Tiene el cuerpo más ancho que el Capitán; una mancha roja en el remate de la aleta dorsal, y el radio segundo de la ventral algo más largo que los demás.

El Bobon.—*Sparus Sinagris.*

Tiene siete y ocho líneas doradas á lo largo del cuerpo; los dientes amontonados, corvos agudos, y los delanteros mayores.

El Pez Obispo.

Es una Raya, cuyo hocico es plano prolongado, obtuso con cierta grosera semejanza á la mitra de los obispos; la cola muy larga; los ojos prominentes colocados en la cabeza, que se levanta por cima del hocico.

El Taboron.—*Squalus Tiburo.*

Tiene la cabeza plana, casi triangular; los ojos laterales. Parece el Tiburonis *Species minor* de Margrave.

El Mata-Soldado.—*Labrus Scina.*

Es de un color oscuro; la aleta de la cola manchada con pintas negras y lo mismo la anal; la dorsal continuada; negro enteramente, el primer radio de las pectorales es espinoso.

ESPECIE.—**El Pez Araña.**—*Trachinus Draco.*—LINN.

La mandíbula inferior más larga; el dorso oscuro; el vientre blanco, con ciertas líneas oscuras y azuladas en la cabeza; los radios de la primera aleta dorsal rígidos espinosos, cuyas picaduras son venenosas.

La Bruja.—*Labrus Pertusus.*—Sp. N.

Es de color oscuro salpicado de manchas longitudinales de color blanquizco; todo el cuerpo se halla taladrado de puntos entre las mismas escamas; el cuerpo más ancho que otros de su género; la cabeza muy prolongada. La cola ahorquillada.

El Pez Diablo.—*Gobius Jozo.*

Los rayos de la primera aleta son todos terminados en cerdas largas; sus ojos casi verticales y oblongos; la cola entera aovada.

Blennius Galerita.

Con cresta en la cabeza del mismo cutis formada; pez de cuatro pulgadas, de color oscuro. Carece de nombre vulgar.

La Culebra ó Pez Culebrar—*Murœna Mirus.*

El pico agudo con aletas pectorales y caudal, es color blanco y posee en las aletas algunas manchas negras.

Especie.—**El Duarto.**—*Chetodon Minimus.*

La mandíbula inferior áspera, con muchas espiritas por debajo; la superior termina en dos espinas; nueve espinas en el dorso. El cuerpo redondo cuadrangular; el color rojizo; pulgada y media de largo.

Especie.—**El Buroz.**—*Sparus Vorax.* ($^1/_3$ de largo).

Los ojos muy grandes; el hocico algo prolongado; la línea lateral ancha de casi una línea paralela al dorso; el cuerpo aovado oblongo; la cola bífida. La aleta dorsal escondida en una vaina que posee en el lomo, por lo cual se acerca al género Sciena, pero su traza es de Esparo; el color dorado por encima y blanco por debajo junto á los opérculos; al principio de la línea una mancha negra.

Especie.—**Raya Hucha.**—*Raya Pastinaca.*

Varía con dos aguijones.

La cabeza puntiaguda; todo el cuerpo leve; carece de aletas, pero en la cola trae un aguijón largo, puntiagudo y aferrado, y algunas veces dos espinas; el color del lomo es vario, oscuro amarillo, manchado, etc.

Especie.—**El Dragon.**—*Callionimus Lira.*

El primer rayo de la aleta dorsal anterior remata en un radio setáceo larguísimo; las partes laterales de la cabeza armadas de espinas corvas.

Especie.—**Alitan.**—*Squalus Ocellaris.*

Tiene el dorso manchado de negro en fondo blanco, nunca rojizo; carece de las manchas junto á los ojos, pero le convienen las demás propiedades.

Especie.—**Rapulto.**—*Squalus.*

Sin descripción.

Especie.—**Galludo.**—*Squalus.*

Sin descripción.

Especie.—**El Bramante.**—*Raya Halavi.*

Puede reducirse á esta especie aunque con algunas diferencias.

Especie.—**La Guitarra.**—*Raya Rhinobatos.*

El cuerpo oblongo; dos aletas dorsales triangulares, la de la cola ciñe su remate; el color oscuro amarillazo, blanca por debajo.

Especie.—**El Pigue.**—*Squalus Stellaris.*

La nariz con dos lóbulos; la última aleta del dorso cercana á la cola; goteado de manchas blancas sobre fondo oscuro; el vientre blanquizco. Compárese con la Pintarroja.

Especie.—**El Pulpo.**—*Sepia Octopus.*

El cuerpo sin túnica; el abdómen aovado, convexo; el color de tierra.

Género.—*Sepia.*

Cuerpo carnoso, envainado sobre la cabeza, y junto á ella cierto número de hilos gruesos y largos que terminan en berrugas; la boca entre los hilos, terminal córneo.

Especie 1.ª—**La Xivia.**—*Sepia Oficinalis.*

El cuerpo sin túnica sobrepuesta, tiene dentro una especie de escama huesosa á lo largo del dorso; posee una vejiguilla de cierto licor negro que arroja de su cuerpo para ocultarse contra sus enemigos. El color blanco.

Especie 2.ª—**El Calamar.**—*Sepia Loligo.*

Su cuerpo es casi cilíndrico, aguzado en su remate; cubierto en él de una túnica romboidal; su escama interior es cartilaginosa; tiene menos tinta que la Xivia. El color rojizo blanquecino.

Especie 3.ª—**El Choco.**—*Sepia Sepiola.*

Es pequeña; el cuerpo con túnica en su término, redondeada y corta. El color blanco y algo oscuro por encima.

PECES.

ESPECIE.—**La Cañabota.**—*Raya.*

No la describe.

ESPECIE.—**La Cerda.**—*Comber.*

No le describe.

El autor incluye en su Memoria también los cetáceos que ha observado en las costas del mar de Andalucía y son los siguientes:

GÉNERO.—*Balæna.*

En lugar de dientes tiene una lámina córnea en la mandíbula superior; sus respiraderos son dos sobre la cabeza; la cola horizontal; el sexo masculino visible.

ESPECIE.—*La Ballena* (1).

No frecuenta estos mares, pero el año de ....., arrojó el mar á la playa muerta una que era la Balæna Misticetus. Su cabeza enorme, pues ocupaba una tercera parte de su cuerpo que era de 20 varas; la boca grandísima; por encima del dorso negra y blanca por debajo.

GÉNERO.—*Delphinus.*—LINN.

Con dientes en ambas mandíbulas; el cuerpo prolongado; con hocico en la parte anterior de la cabeza; por la parte superior posee un respiradero por donde arroja el agua; la cola horizontal; el sexo masculino exteriormente visible.

ESPECIE.—**La Tonina.**—*Delphinus Phocæna.*—LINN.

El cuerpo cónico; el dorso ancho; el hocico casi obtuso, negro cerúleo por encima, por debajo blanco, la cola ahorquillada horizontal.

ESPECIE 2.ª—**El Espadarte.**—*Delphinus Orca.*—LINN.

Suele perseguir á los atunes; el hocico elevado para arriba y una aleta dorsal dura, angosta y larga de dos varas, de que se sirve como de arma y de donde le viene el nombre vulgar; llega hasta seis u ocho varas de tamaño.

Por fin termina señalando cinco peces mas que son:

---

(1) No determina la especie, que después en la lista impresa dice ser la *Balena Misticetus*, Linn.

ESPECIE.—**Mosquitero.**—*Esox Marginatus.*

La mandíbula inferior larguísima; la superior corta; la línea lateral argentada ancha; las aletas dorsal y anal opuestas.

ESPECIE.—**El Volador.**—*Trigla Volitans.*

Sus digitaciones son 18 ó 20 unidas con una membrana; las aletas pectorales grandísimas, con las cuales vuela largo rato.

El Pexe Limon.

No le describe.

GÉNERO.—*Diodon.*

Mexillas huesosas; la abertura de la agalla lineal; el cuerpo cubierto de espinas interiormente huecas; triangulares en su base; largas, movibles y sin aletas ventrales; en su boca, que es pequeña, dos dientes.

ESPECIE.—**Los Erizos.**—*Diodon Histrix.*

El cuerpo casi esférico, algo prolongado hacia la cola, que es enterísima; la boca pequeña; las aletas dorsal y anal opuestas.

ESPECIE.—**La Choa.**—*Entrogaster Scombrarius.*—SP. N.

Por tener las aletas ventrales unidas con una membrana sensible, parece debe reducirse á este género. Tiene semejanza en su traza con las especies del género Scomber. Opérculos de dos láminas; la mandíbula inferior más larga; la cola ahorquillada, la línea lateral recta.

Como la Lista impresa de los Peces de Andalucía, á que tantas veces me he referido en las notas que acompañan á esta Memoria, es casi imposible encontrarla de venta, para facilitar su conocimiento á nuestros naturalistas y á los extranjeros, que casi todos ignoran su existencia, y para completar la publicación ictiológica inédita del Magistral Cabrera, la reproduzco, copiándola íntegra en las siguientes páginas.

LISTA

DE LOS

PECES DEL MAR DE ANDALUCÍA.

CÁDIZ:
En la Imprenta Gaditana de D. Esteban Picardo, calle de la Carne.

AÑO 1817.

GÉNERO 1.

La Morena	Murena Helena	*Lin.*
La Anguilla	Murena Anguilla	*Lin.*
El Congrio / *El Záfio*	Murena Conger	*Lin.*
La Culebra	Murena Serpens	*Lin.*
La Culebra picuda	Murena Mirus	*Lin.*
La Morenata	Murena Cœca	*Lin.*

GÉNERO 2.

El Pámpano	Stromateus Fiatola	*Lin.*
El Emperador	Stromateus Imperator	*Sp. N.*

GÉNERO 3.

El Saltón	Ammodites Tobianus	*Lin.*

GÉNERO 4.

El Pez-Sable	Ophidium Barbatum	*Lin.*

GÉNERO 5.

El Pez-Espada	Xiphias Glaudius	*Lin.*

GÉNERO 6.

La Rata	Uranoscopus Scaber	*Lin.*

GÉNERO 7.

El Dragón	Callionimus Dracunculus	*Lin.*
El Lagarto *La Guitarra*	Callionimus Lira	*Lin.*

GÉNERO 8.

La Araña	Thachinus Draco	*Lin.*

GÉNERO 9.

El Escolar	Gadus Albidus	*Lin.*
La Paneca *La Faneca*	Gadus Blennoides	*Lin.*
El Bacalao	Gadus Bacalaus	*Sp. N.*
La Pescada	Gadus Pisciota	*Sp. N.*
La Pescadilla *La Pijotilla*	Varietas	

GÉNERO 10.

El Torillo	Blennius Ocellaris	*Lin.*
La Babosa	Blennius Viviparus	*Lin.*
La Brotola	Blennius Phicis	*Lin.*
La Brotola blanca	Blennius Alvidus	*Sp. N.*

Sin nombre	Blennius. Simus.	*Lin.*
Sin nombre	Blennius. Galerita.	*Lin.*

GÉNERO 11.

La Doncella	Cepola. Rubescens.	*Lin.*
Otra Doncella	Cepola. Tenia.	*Lin.*

GÉNERO 12.

Remora. *Pegador*	Echeneis. Remora.	*Lin.*

GÉNERO 13.

El Dorado	Coriphena. Equiselis.	*Lin.*
El Autriaco	Coriphena. Hippuris.	*Lin.*
La Xaputa	Coriphena. Variegata.	*Sp. N.*
Sin nombre	Coriphena. Cornide.	*Sp. N.*

GÉNERO 14.

El Pez del diablo	Gobius. Jozzo.	*Lin.*
El Caboso	Gobius. Gracilis.	*Sp. N.*
El Canqueso	Gobius. Niger.	*Lin.*

GÉNERO 15.

Gallineta	Scorpena. Porcus.	*Lin.*
Rescacio.	Scorpena. Scropha.	*Lin.*
Pollo	Scorpena. Maculata.	*Sp. N.*

GÉNERO 16 (1).

El Pez-Sable	Lepidopus. Malacensis.	*Sp. N.*

(1) Este género le trae Bonneterre en la Enciclopedia.

Género 17.

El Pez de San Pedro...	Zeus. Faber.	*Lin.*
El Ochavo...........	Zeus. Asper.	*Lin.*

Género 18.

El Lenguado.........	Pleuronectes. Solea.	*Lin.*
El Soldado..........	Pleuronectes. Tricodactilus.	*Lin.*
La Lengua...........	Pleuronectes. Limandoides.	*Lin.*
La Solleta...........	Pleuronectes. Linguatula.	*Lin.*
El Rodaballo.........	Pleuronectes. Maximus.	*Lin.*
Otro Rodaballo.......	Pleuronectes. Rhombus.	*Lin.*
El Tambor...........	Pleuronectes. Obtusus.	*Sp. N.*
La Platixa.	Pleuronectes. Platessa.	*Lin.*
El Tapaculo.........	Pleuronectes. Cuspidatus.	*Sp. N.*
El Peludo en randa....	Pleuronectes. Fimbriatus.	*Sp. N.*

Género 19.

La Xaputa...........	Chœtodon. Umbratus.	*Sp. N.*
El Rondanil.........	Varietas.	»
El Quarto...........	Chœtodon. Minimum.	*Sp. N.*
El Trasalte..........	Chœtodon. Truncatum.	*Sp. N.*
Sin nombre..........	Chœtodon. Sparoides.	*Sp. N.*

Género 20.

La Chuela...........	Sparus. Mæna.	*Lin.*
La Dorada...........	Sparus. Auratus.	*Lin.*
El Sargo............	Sparus. Sargus.	*Lin.*
El Sargo burdo.	Sparus. Variegatus.	*Lin.*

El Sargo picudo	Sparus Puntazzo	*Lin.*
La Urta *La Sama*	Sparus Urta	*Lin.*
El Pagel *El Dentón roxo*	Sparus Erhitrinus	*Lin.*
El Pargo	Sparus Pagrus	*Lin.*
La Boga	Sparus Boops	*Lin.*
El Soldado	Sparus Chromis	*Lia.*
La Salpa *La Salema*	Sparus Salpa	*Lia.*
El Dentón	Sparus Dentex	*Lin.*
La Oblada *La Doblada* *La Doblaeta*	Sparus Melanurus	*Lin.*
La Chopa	Sparus Cantharus	*Lin.*
El Cachucho	Sparus Chrisops	*Lin.*
El Bobón	Sparus Sinagris	*Lin.*
La Faxóa	Sparus Mycrocephalus	*Sp. N.*
El Trompero	Sparus Rostratus	*Sp. N.*
El Bocinegro	Sparus Nigrirostris	*Sp. N.*
El Besugo	Sparus Axilaris	*Sp. N.*
El Capitán	Sparus Cetaceus	*Sp. N.*
La Vieja	Varietas	»
La Breca	Sparus Breca	*Sp. N.*
El Garapello	Sparus Versicolor	*Sp. N.*
La Mojara	Sparus Orbiculatus	*Sp. N.*
La Mojarra prieta	Varietas	»
El Pachan	Sparus Curvatus	*Sp. N.*
El Burás	Sparus Vorax	*Sp. N.*
El Higo	Sparus Virescens	*Sp. N.*
El Page	Sparus Maculatus	*Sp. N.*

La Sabia............	Sparus....................... Sabia........................	*Sp. N.*

GÉNERO 21.

El Mata Soldados.....	Labrus...................... Scina........................	*Lin.*
El Borriquete.........	Labrus...................... Antias.......................	*Lin.*
Otro Borriquete.......	Labrus...................... Merula......................	*Lin.*
El Tordo.............	Labrus...................... Tinca........................	*Lin.*
El Zorzal............	Labrus...................... Varius.......................	*Lin.*
La Xaputa de piedras..	Labrus...................... Niger........................	*Lin.*
El Loro..............	Labrus...................... Psitacus....................	*Lin.*
El Bodion............	Labrus...................... Fuscus......................	*Lin.*
El Bodion verde.......	Labrus...................... Viridis......................	*Lin.*
La Doncella.......... *El Gallito del Rey*....	Labrus...................... Julis........................	*Lin.*
La Bruja.............	Labrus...................... Pertusus....................	*Lin.*

GÉNERO 22.

La Corbina...........	Sciena....................... Corbina.....................	*Sp. N.*
Otra Corbina.........	Sciena....................... Umbra.......................	*Lin.*
La Corbinata.........	Sciena....................... Curvata.....................	*Sp. N.*

GÉNERO 23.

La Baila.............	Perca........................ Punctata....................	*Lin.*
La Cabrilla..........	Perca........................ Cabrilla....................	*Lin.*
La Cherna...........	Perca........................ Gigas.......................	*Lin.*
El Róbalo............	Perca........................ Labrax......................	*Bonterre.*
La Vaqueta..........	Perca........................ Mediterranea...............	*Lin.*
El Abadejo rayado....	Perca........................ Diagramma..................	*Lin.*

El Roncador...........	Perca................... Stridens...................	*Sp. N*
El Abadejo...........	Perca................... Flavescens...................	*Sp. N.*
El Mero...........	Perca................... Merus...................	*Sp. N.*
El Romerito...........	Perca................... Cinerea...................	*Sp. N.*
El Berruguete...........	Perca................... Berrucaria...................	*Sp. N.*
La Corva...........	Perca................... Curvata...................	*Sp. N.*
El Borriquate...........	Perca................... Asellus...................	*Sp. N.*
La Vaquilla........... *La Serrana*...........	Perca................... Vitella...................	*Sp. N.*
La Castañuela...........	Perca................... Fimbriata...................	*Sp. N.*

GÉNERO 24.

Sin nombre...........	Ciclopterus...................	»
	Lepidogaster...................	»

GÉNERO 25.

Pez Limón...........	Gasterosteus................... Ductor...................	*Lin.*
La Corseta...........	Gasterosteus................... Lisan...................	*Sp. N.*
La Palometa...........	Gasterosteus................... Columbarius...................	*Sp. N.*
El Salpa Xurel...........	Gasterosteus................... Trachurus...................	*Sp. N.*
El Caballo...........	Gasterosteus................... Equus...................	*Sp. N.*
El Lirio...........	Gasterosteus................... Sinuatus...................	*Sp. N.*
El Punzón........... *El Pez-Clavo*...........	Gasterosteus................... Muricatus...................	*Sp. N.*
Sin nombre...........	Gasterosteus................... Malacensis...................	*Sp. N.*

GÉNERO 26.

El Estornino...........	Scomber................... Scomber...................	*Lin.*
La Caballa...........	Scomber................... Colias...................	*Lin.*

(1) Este género le trae Bonneterre en la Enciclopedia.

El Xurel	Scomber Trachurus	*Lin.*
La Xurela	Varietas	*Lin.*
El Bonito	Scomber Pelamis	*Lin.*
El Atun	Scomber Thinnus	*Lin.*
El Xurel dorado	Scomber Chrisops	*Lin.*
Sin Nombre	Scomber Alatunga (1)	*Lin.*
La Cerda	Scomber	»
La Albacora	Scomber	»

GÉNERO 27.

La Melva	Centrogaster Scutatus	*Sp. N.*
La Choa *La Chova*	Centrogaster Scombrarius	*Sp. N.*

GÉNERO 28.

El Salmonete	Mullus Barbatus	*Lin.*
El Salmonete rayado	Mullus Surmuletus	*Lin.*

GÉNERO 29.

El Armado	Trigla Cataphracta	*Lin.*
El Borracho	Trigla Gurnardus	*Lin.*
El Regel	Trigla Lucerna	*Liu.*
La Cabrilla	Varietas	»
El Garneo	Trigla Lira	*Lin.*
El Arete	Trigla Cuculus	*Lin.*
La Golondrina	Trigla Hirundo	*Lin.*
El Volador	Trigla Volitans	*Lin.*
El Cabete	Trigla Minuta	*Lin.*
El Rubio	Trigla Rubescens	*Sp. N.*
El Rapete	Trigla Serrata	*Lin.*

(1) *Alatunga* es un error tipográfico que debe decir *Alalenga*.— M. P. Graells.

Género 30.

El Peto *El Espetón* *El Picudo*	Esox Sphirena	*Lin.*
La Aguja	Esox Belone	*Lin.*
El Mosquitero	Esox Marginatus	*Lin.*
El Saltón	Esox Pinnulatus	*Sp. N.*

Género 31.

El Pez-plata	Argentina Sphirena	*Lin.*

Género 32.

El Pez Rey	Atherina Hepsetus	*Lin.*

Género 33.

El Capitán *El Cabezudo*	Mugil Cephalus	*Lin.*
La Lisa	Mugil Albula	*Lin.*
El Bausel	Varietas	»

Género 34.

El Volador	Exocetus Evolans	*Lin.*

Género 35.

La Sardina	Clupea Spratus	*Lin.*
El Boquerón *La Anchoa*	Clupea Encrasicolus	*Lin.*
La Saboga	Clupea Arengus	*Lin.*
La Lacha	Clupea Alosa	*Lin.*
El Sábalo	Varietas	»

Género 36 (1).

El Barbo	Ciprinus Barbus	*Lin*

---

(1) Son peces de agua dulce.

El Albur	Ciprinus Alburnus	*Lin.*
El Pez de redoma	Ciprinus Auratus	*Lin.*

GÉNERO 37.

La Mola. *El Rodador*	Tetraodon Mola	*Lin.*

GÉNERO 38.

El Pez Erizo	Diodon Hixtris	*Lin.*

GÉNERO 39.

El Caballito	Singnatus Hippocampus	*Lin.*
La Aguja	Singnatus Acus	*Lin.*
La Mula	Varietas	»
El Alfiler	Singnatus Ophidium	*Lin.*

GÉNERO 40.

El Trompetero	Centriscus Velitaris	*Lin.*
El Pito real	Centriscus Scolopax	*Lin.*

GÉNERO 41.

La Mula	Balistes Triacantos	*Sp. N.*

GÉNERO 42.

El Rape	Lophius Piscatorius	*Lin.*
El Sapo	Lophius Gadicensis	*Sp. N.*

GÉNERO 43.

El Sollo	Accipenser Sturio	*Lin.*
Otro Sollo	Accipenser Huso	*Lin.*

GÉNERO 44.

La Mermejuela. *El Angelote*	Squalus Squatina	*Lin*

El Marrajo...........	Squalus..................... Nasus.......................	*Boneter.*
El Ferron...........	Squalus..................... Acanthias.................	*Lin.*
El Gàlludo...........	Varietas....................	»
El Boquidulce........	Squalus..................... Griseus.....................	*Lin.*
El Pez-Clabo.........	Squalus..................... Spinosus...................	*Lin.*
La Pintarroja.........	Squalus..................... Canicula...................	*Liu.*
El Cazón............. *La Mozuela*...........	Squalus..................... Mustelus...................	*Lin*
La Caella............	Varietas	»
El Tollo............. *La Mielga*............	Squalus..................... Fernandinus..............	*Molín.*
La Tintorera.........	Squalus..................... Glaucus....................	*Lin.*
El Pez Martillo...... *La Cornudilla*.........	Squalus....... .... Zigœna.....................	*Lin.*
El Cochino...........	Squalus..................... Spinax......................	*Lin.*
El Pez Peine.........	Squalus..................... Galeus......................	*Lin.*
El Pez Zorro.........	Squalus..................... Vulpes......................	*Lin.*
El Pez Perro.........	Squalus..................... Catulus.....................	*Lin.*
El Taburón...........	Squalus..................... Tiburo......................	*Lin.*
El Jaquetón..........	Varietas....................	»
El Alitán............	Squalus..................... Ocellaris..................	*Lin.*
Sin nombre...........	Squalus..................... Maximus.........	*Lin.*
La Negra.............	Squalus..................... Ater........................	*Sp. N.*
El Kelves............ *El Kelvacho*..........	Squalus..................... Kelves......................	*Sp. N*

GÉNERO 45.

La Tembladera........ *La Tremielga*.........	Raia........................ Torpedo.....................	*Lin.*
La Guitarra..........	Raia....... .... Rhinobatos.................	*Lin.*
La Romaguera........	Raia........................ Batis.......................	*Lin.*
El Bramante......... *El Pez de Mahoma* (1)..	Raia................. .... Rubus.......................	*Lin.*

(1) El apellido de la familia de Mahoma *Coreis* significa un pez notable por su fuerza y valor.

El Chucho	Raia Aquila	*Lin.*
La Raia vera	Raia Miralaletus	*Lin.*
La Raia baca	Raia Pastinaca	*Lin.*
Raia	Raia Oxirincus	*Lin.*
Raia	Raia Fullonica	*Lin.*
Sin Nombre	Raia Mobularis	*Bonter.*
Raia	Raia Machuelo	*Bonter.*
La Noriega	Raia Obscura	*Sp. N.*
El Pez Obispo	Raia Obtusirostris	*Sp. N.*

Género 46.

La Lamprea	Petromison Marinum	*Lin.*
Otra Lamprea	Petromison Flubiatile	*Lin.*

Género 47.

La Tonina	Delphinus Phocena	*Lin.*
El Espadarte	Delphinus Orca	*Lin.*

Género 48.

La Ballena (1)	Ballena Misticerus	*Lin.*

Género 49.

La Xivia	Sepia Oficinalis	*Lin.*
El Calamar	Sepia Loligo	» »
El Pulpo	Sepia Octopus	*Lin.*
El Choco	Sepia Sepiola	*Lin.*

(1) Algunas que se han visto en estas costas eran de este género y especie.

Restan algunos peces, cuyos nombres vulgares se saben, pero no se han podido examinar ni determinar, y aunque muchos podrán ser sinónimos entre sí, y con los ya determinados, pero parece que deben incluirse algunas especies ó variedades distintas. Sus nombres son estos:

EN CÁDIZ.	EN MÁLAGA.
La Penca.	*El Bocaus.*
El Paula.	*El Buñuelo.*
El Pasador.	*El Correplayas.*
El Palitroque.	*El Cayote.*
La Maragata.	*El Caramelo.*
La Lamonga.	*La Cholveta.*
El Gorrión.	*La Corneta.*
El Dentudo.	*El Escarapelo.*
El Bordayo.	*La Gasula.*
El Alecrín.	*El Judío*
La Alvariña.	*La Lopena.*
El Robine.	*El Mirlán.*
El Rapel.	*El Peralta.*
La Zorreja.	*La Pota.*
El Champán.	*El Salvaie.*
	El Tordillo.
	El Morro.

LISTA DE LOS MISMOS PECES

arreglados según el sistema de Bloch (1).

GÉNERO 2.

La Paneca............ *La Faneca*............	Gadus...................... Blennoides.................	» »
El Escolar...........	Gadus...................... Albidus....................	*Gmelin.*
El Bacalao...........	Gadus...................... Bacalaus...................	*Sp. N.*
La Pescada...........	Gadus...................... Pisciota...................	*Sp. N.*
La Pescadilla......... *La Pijotilla*..........	Varietas...................	»

GÉNERO 3.

El Volador...........	Trigla..................... Volitans...................	» »
El Borracho..........	Trigla..................... Gurnardus..................	» »

(1) Este Autor es el ictiologista más moderno.

El Regel	Trigla	»
	Lucerna	»
La Cabrilla	Varietas	»
El Garneo	Trigla	»
	Lira	»
El Arete	Trigla	»
	Cuculus	»
La Golondrina	Trigla	»
	Hirundo	»
El Armado	Trigla	»
	Catafracta	»
El Cabete	Trigla	»
	Minuta	»
El Rubio	Trigla	*Sp. N.*
	Rubescens	
El Rapete	Trigla	*Sv N.*
	Serrata	

Género 5.

El Atún	Scomber	»
	Thinnus	»
La Caballa	Scomber	»
	Colias	»
El Bonito	Scomber	»
	Pelamis	»
El Estornino	Scomber	»
	Scomber	»
El Xurel	Scomber	»
	Trachurus	»
La Xurela	Varietas	»
El Xurel dorado	Scomber	»
	Chrisurus	»
Sin nombre	Scomber	*Gmelín.*
	Alatunga	
La Albacora	Scomber	»
La Cerda	Scomber	»

Género 6.

El Dragón	Callionimus	»
	Dracunculus	»
El Lagarto	Callionimus	»
La Guitarra	Lira	»

Género 8.

La Rata	Uranoscopus	»
	Scaber	»

Género 10.

La Araña	Trachinus	»
	Draco	»

GÉNERO 11.

La Brótola..........	Phicis..................... Tinca.....................	» »
La Brótola...	Varietas..................	»

GÉNERO 18.

El Canqueso..........	Gobius.................... Niger.....................	» »
El Pez del diablo......	Gobius.................... Jozzo.....................	» »
El Caboso...........	Gobius.................... Gracilis..................	*Sp. N.*

GÉNERO 18.

El Salmonete.........	Mullus.................... Barbatus..................	» »
El Salmonete rayado...	Mullus.................... Surmuletus................	» »

GÉNERO 19.

La Corvina..........	Sciena.................... Corvina...................	*Sp. N.*
La Corvinata.........	Sciena.................... Curvata...................	*Sp. N.*
Otra Corvina.........	Sciena.................... Umbra.....................	*Gmelín.*

El ejemplar de la Lista copiada que yo poseo, llega hasta aquí, pero queda incompleta, y supongo faltan páginas con bastante fundamento.

VARIEDADES.

Ejercicios de Trigonometría.—En los *Nuevos Anales de Matemáticas* de los Sres. Gerono y Brisse, publicó, pocos años ha todavía (Agosto de 1880, págs. 362 á 367), un tan sencillo cuanto fecundo teorema de Trigonometría el sabio profesor G. Dóstor. El teorema á que nos referimos y las consecuencias inmediatas que de él en admirable copia se desprenden son las siguientes.

1. Teorema.—«En cualquier relación analítica, existente entre los tres ángulos, A, B, C, de un triángulo rectilíneo, se pueden reemplazar estos ángulos: 1.° por los *complementos de sus mitades*; y 2.° por los *suplementos de los ángulos duplos*.»

De la ecuación fundamental

$$A + B + C = 180^{\circ}$$

se concluye, efectivamente,

1.° Que

$$\left(90^{\circ} - \frac{A}{2}\right) + \left(90^{\circ} - \frac{B}{2}\right) + \left(90^{\circ} - \frac{C}{2}\right) = 270^{\circ} - {}^{1}/_{2}\,(A + B + C) = 180^{\circ};\ \text{y}$$

2.° Que

$$(180^{\circ} - 2A) + (180^{\circ} - 2B) + (180^{\circ} - C) = 540^{\circ} - 2(A + B + C) = 180^{\circ}.$$

Lo cual significa que, si los ángulos A, B, C corresponden á un triángulo rectilíneo, á otro triángulo de la misma especie corresponderán los

$$90^{\circ} - \frac{A}{2},\ 90^{\circ} - \frac{B}{2},\ \text{y}\ 90^{\circ} - \frac{C}{2};$$

y á otro los

$$180^{\circ} - 2A,\ 180^{\circ} - 2B,\ \text{y}\ 180^{\circ} - 2C.$$

Y, por lo tanto, que la relación analítica que entre los tres primeros exista, existirá también entre los tres segundos, y los tres terceros: complementos de sus mitades, y suplementos de sus duplos, respectivamente.

2. Pues, en consecuencia de este teorema, de las dos fórmulas, relativamente vulgares, y muy usadas en las transformaciones trigonométricas:

(I)..... $\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C = 4 \cos \frac{A}{2} . \cos \frac{B}{2} . \cos \frac{C}{2}$, y

(II)..... $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A . \operatorname{tg} B . \operatorname{tg} C$,

poniendo en ellas, sucesivamente, por A, B y C, los complementos y suplementos mencionados, se desprenden en el acto y sin la menor dificultad las que siguen:

(III)... $\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}=4\cos\left(45^0-\frac{A}{4}\right)\cos\left(45^0-\frac{B}{4}\right)\cos\left(45^0-\frac{C}{4}\right)$

(IV)..... $\operatorname{cotg}\frac{A}{2}+\operatorname{cotg}\frac{B}{2}+\operatorname{cotg}\frac{C}{2}=\operatorname{cotg}\frac{A}{2} . \operatorname{cotg}\frac{B}{2} . \operatorname{cotg}\frac{C}{2}$

(V)..... $\operatorname{sen} 2A + \operatorname{sen} 2B + \operatorname{sen} 2C = 4 \operatorname{sen} A . \operatorname{sen} B . \operatorname{sen} C$

(VI)..... $\operatorname{tg} 2A + \operatorname{tg} 2B + \operatorname{tg} 2C = \operatorname{tg} 2A . \operatorname{tg} 2B . \operatorname{tg} 2C$.

La fórmula (IV) puede también deducirse directamente, por procedimiento que no carece de interés.

En efecto: puesto que $A + B + C = 180^0$, resulta desde luego que

$$\operatorname{tg}\left(\frac{B+C}{2}\right)=\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{A}{2}}=\frac{\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{B}{2} . \operatorname{tg}\frac{C}{2}}$$

De donde se deduce esta otra muy curiosa y elegante relación:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} . \operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{A}{2} . \operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2} . \operatorname{tg}\frac{C}{2}=1.$$

De la cual se desprende la (IV) dividiendo sus dos miembros por el producto

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} . \operatorname{tg}\frac{B}{2} . \operatorname{tg}\frac{C}{2}.$$

Y también es de advertir que, como se ha pasado de la (II) á la (VI), así, por sustituciones sucesivas, análogas á la primera, se llegaría á deducir la siguiente, muy notable:

$$\operatorname{tg} 2^n A + \operatorname{tg} 2^n B + \operatorname{tg} 2^n C = \operatorname{tg} 2^n A \times \operatorname{tg} 2^n B \times \operatorname{tg} 2^n C.$$

De ampliación, ó generalización, parecida son asimismo susceptibles las demás fórmulas.

3. Por análogo procedimiento que la relación fundamental (I), se deduce ó comprueba esta otra, en la forma muy semejante:

(VII)..... $\operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C - \operatorname{sen} A = 4 \operatorname{sen} \frac{B}{2} . \operatorname{sen} \frac{C}{2} . \cos \frac{A}{2}$.

Para ello basta sustituir por los dos términos del primer miembro el producto

$$2 \operatorname{sen} {}^1/_2 (B + C) \cos {}^1/_2 (B - C);$$

y por el tercero,

$$\operatorname{sen} A = \operatorname{sen} {}^1/_2 (B + C),$$

el producto también

$$2 \operatorname{sen} {}^1/_2 (B + C) \cos {}^1/_2 (B + C):$$

con lo cual el primer miembro tomará la forma

$$2 \cos \frac{A}{2} \left\{ \cos {}^1/_2 (B - C) - \cos {}^1/_2 (B + C) \right\} = 4 \cos \frac{A}{2} . \operatorname{sen} \frac{B}{2} . \operatorname{sen} \frac{C}{2} .$$

Pues de la (VII), así obtenida ó demostrada, por aplicación del teorema enunciado al principio, se concluyen estas otras:

$$(\text{VIII}) \ldots \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} - \cos \frac{A}{2} = 4 \operatorname{sen} \left(45^0 - \frac{B}{4} \right) \operatorname{sen} \left(45^0 - \frac{C}{4} \right) \cos \left(45^0 - \frac{A}{4} \right)$$

$$(\text{IX}) \ldots\ldots \quad \operatorname{sen} 2B + \operatorname{sen} 2C - \operatorname{sen} 2A = 4 \cos B . \cos C . \operatorname{sen} A .$$

4. De las sencillas transformaciones trigonométricas, que á continuación se indican,

$$\frac{\operatorname{sen} 2A}{\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C} = \frac{2 \operatorname{sen} A . \cos A . \cos B \cos C}{\operatorname{sen} (B + C)} = 2 \cos A . \cos B . \cos C,$$

dedúcese que

$$(\text{X}) \ldots\ldots \frac{\operatorname{sen} 2A}{\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C} = \frac{\operatorname{sen} 2B}{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} C} = \frac{\operatorname{sen} 2C}{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B} = 2 \cos A . \cos B . \cos C.$$

Por el mismo procedimiento se hallaría también que

$$(\text{XI}) \ldots\ldots \frac{\operatorname{sen} 2A}{1 - \operatorname{cotg} B \operatorname{cotg} C} = \frac{\operatorname{sen} 2B}{1 - \operatorname{cotg} A . \operatorname{cotg} C} = \frac{\operatorname{sen} 2C}{1 - \operatorname{cotg} A . \operatorname{cotg} B}$$
$$= 2 \operatorname{sen} A . \operatorname{sen} B . \operatorname{sen} C.$$

Y, por división de las (XI) por las (X), se concluiría finalmente que

$$(\text{XII}) \ldots\ldots \frac{\operatorname{tg} A . + \operatorname{tg} B}{1 - \operatorname{cotg} A . \operatorname{cotg} B} = \frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} C}{1 - \operatorname{cotg} A . \operatorname{cotg} C} = \frac{\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C}{1 - \operatorname{cotg} B \operatorname{cotg} C}$$
$$= \operatorname{tg} A . \operatorname{tg} B . \operatorname{tg} C.$$

Expresiones las últimas equivalentes á la sencillísima (II).

5. En las ecuaciones (X), (XI) y (XII) pónganse ahora por A, B, C los complementos de sus mitades, y se obtendrán las que siguen:

$$\text{(XIII)}\ldots\ldots \quad \frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{cotg}\frac{B}{2}+\operatorname{cotg}\frac{C}{2}}=\frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{cotg}\frac{A}{2}+\operatorname{cotg}\frac{C}{2}}=\frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{cotg}\frac{A}{2}+\operatorname{cotg}\frac{B}{2}}$$
$$=2\operatorname{sen}\frac{A}{2}.\operatorname{sen}\frac{B}{2}.\operatorname{sen}\frac{C}{2};$$

$$\text{(XIV)}\ldots\ldots \quad \frac{\operatorname{sen} A}{1-\operatorname{tg}\frac{B}{2}.\operatorname{tg}\frac{C}{2}}=\frac{\operatorname{sen} B}{1-\operatorname{tg}\frac{A}{2}.\operatorname{tg}\frac{C}{2}}=\frac{\operatorname{sen} C}{1-\operatorname{tg}\frac{A}{2}.\operatorname{tg}\frac{B}{2}}$$
$$=2\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2};\text{ y}$$

$$\text{(XV)}\ldots\ldots \quad \frac{\operatorname{cotg}\frac{A}{2}+\operatorname{cotg}\frac{B}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{A}{2}.\operatorname{tg}\frac{B}{2}}=\frac{\operatorname{cotg}\frac{A}{2}+\operatorname{cotg}\frac{C}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{A}{2}.\operatorname{tg}\frac{C}{2}}=\frac{\operatorname{cotg}\frac{B}{2}+\operatorname{cotg}\frac{C}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{B}{2}.\operatorname{tg}\frac{C}{2}}$$
$$\operatorname{cotg}\frac{A}{2}.\operatorname{cotg}\frac{B}{2}.\operatorname{cotg}\frac{C}{2}.$$

6. De las expresiones anteriores, por combinaciones diversas, pueden deducirse otras muchas, entre las cuales merecen siquiera citarse las siguientes:

$$\text{(XVI)}\ldots\ldots \left\{\begin{array}{l}\operatorname{sen}^2 B+\operatorname{sen}^2 C-\operatorname{sen}^2 A=2\operatorname{sen} B.\operatorname{sen} C.\cos A, \quad \text{y}\\ \cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}-\cos^2\frac{A}{2}=\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}.\operatorname{sen}\frac{A}{2}\end{array}\right.$$

La segunda de las cuales es corolario de la primera; y ésta resultado, inmediato casi, de multiplicar una por otras las (I) y (VII).

$$\text{(XVII)}\ldots\ldots \left\{\begin{array}{l}\dfrac{\operatorname{sen}^2 A+\operatorname{sen}^2 B-\operatorname{sen}^2 C}{\operatorname{sen}^2 A+\operatorname{sen}^2 C-\operatorname{sen}^2 B}=\dfrac{\operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} C}, \quad \text{y}\\[2ex] \dfrac{\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}-\cos^2\frac{C}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{C}{2}-\cos^2\frac{B}{2}}=\dfrac{\operatorname{tg}\frac{C}{2}}{\operatorname{tg}\frac{B}{2}}\end{array}\right.$$

Corolarios ambas de las (XVI).

$$\text{(XVIII)}\ldots\ldots \left\{\begin{array}{l}\dfrac{\operatorname{sen}^2 A+\operatorname{sen}^2 B+\operatorname{sen}^2 C}{2\operatorname{sen} A.\operatorname{sen} B.\operatorname{sen} C}=\operatorname{cotg} A+\operatorname{cotg} B+\operatorname{cotg} C, \quad \text{y}\\[2ex] \dfrac{\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}}{2\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}}=\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}.\end{array}\right.$$

Relacionadas una con otra, como las anteriores, por los complementos de las mitades de los ángulos; y la primera (XVIII) con la primera (XVI), de este modo:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}^2 A + \operatorname{sen}^2 B + \operatorname{sen}^2 C = \\ 2\,(\operatorname{sen} B.\operatorname{sen} C.\cos A + \operatorname{sen} A.\operatorname{sen} A) = \\ 2\,(\operatorname{sen} B.\operatorname{sen} C.\cos A + \operatorname{sen}(B + C).\operatorname{sen} A) = \\ 2\operatorname{sen} A.\operatorname{sen} B.\operatorname{sen} C\,(\operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C).\end{aligned}$$

$$(\text{XIX})\ldots\ldots \begin{cases} \dfrac{2\operatorname{sen} A.\operatorname{sen} B.\operatorname{sen} C}{(\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C)^2} = \operatorname{tg}\dfrac{A}{2}.\operatorname{tg}\dfrac{B}{2}.\operatorname{tg}\dfrac{C}{2}; \quad \text{y} \\ \dfrac{2\operatorname{sen} 2A.\operatorname{sen} 2B.\operatorname{sen} 2C}{(\operatorname{sen} 2A + \operatorname{sen} 2B + \operatorname{sen} 2C)^2} = \operatorname{cotg} A.\operatorname{cotg} B.\operatorname{cotg} C). \end{cases}$$

Corolarios, también, la segunda de la anterior; y ésta, muy inmediato, de la (I).

$$\text{X)}\ldots \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}^2 A + \operatorname{sen}^2 B + \operatorname{sen}^2 C}{(\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C)^2} = \dfrac{\operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C}{\operatorname{cotg}\dfrac{A}{2}.\operatorname{cotg}\dfrac{B}{2}.\operatorname{cotg}\dfrac{C}{2}} \\ \dfrac{\cos^2\dfrac{A}{2} + \cos^2\dfrac{B}{2} + \cos^2\dfrac{C}{2}}{\left(\cos\dfrac{A}{2} + \cos\dfrac{B}{2} + \cos\dfrac{C}{2}\right)^2} = \dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{A}{2} + \operatorname{tg}\dfrac{B}{2} + \operatorname{tg}\dfrac{C}{2}}{\operatorname{cotg}\left(45^0 - \dfrac{A}{4}\right).\operatorname{cotg}\left(45^0 - \dfrac{B}{4}\right).\operatorname{cotg}\left(45^0 - \right.} \end{cases}$$

Consecuencia, como de costumbre, la segunda de la primera; y resultado ésta de la multiplicación de la primera (XVIII) por la primera también (XIX).

M. M.

Perturbaciones advertidas en los niveles de los instrumentos astronómicos, como indicio ó consecuencia de terremotos lejanos.

El profesor Albrecht, Jefe de Sección del Instituto Geodésico de Berlín, ha publicado recientemente una nota muy curiosa, referente á la percepción de los terremotos, á distancia muy considerable del lugar de su producción, ó de su manifestación violenta y desastrosa.

En la noche del 2 de Agosto de 1885, hallándose varios observadores ocupados en la determinación de las diferencias de longitudes geográficas de Berlín, Breslau y Königsberg, advirtiéronse en los niveles de los instrumentos meridianos, establecidos para tal objeto en las tres localidades mencionadas, extrañas oscilaciones, simultáneas casi, que á ninguna otra causa pueden atribuirse sino al terremoto á la misma hora experimentado en el Asia Central. Siendo éste no más que un ejemplo de otras coincidencias análogas, consignadas de tarde en tarde en los anales de la Astronomía, suficientes para establecer con certeza la correlación de ambos, siquiera por la intensidad, tan desemejantes fenómenos.

Wagner, en efecto, trabajando en el Observatorio de Pulkova, el 20 de Setiembre de 1867, vióse durante un cuarto de hora imposibilitado de efectuar lectura alguna de confianza en el nivel de su anteojo meridiano, perturbado por extraña agitación: precisamente minutos después, según más tarde se averiguó, de ocurrido un temblor de tierra en la isla de Malta. Y el mismo fenómeno se reprodujo, y fué advertido en aquel Observatorio, el 4 de Agosto de 1868, cinco minutos después de las violentas sacudidas subterráneas experimentadas en el Turkestan.

La publicación de estas noticias en las Memorias de la Academia de San Petersburgo trajo á la memoria el hecho, referido con anterioridad por Argelander, de misteriosa perturbación ocurrida en el nivel de su instrumento en la mañana del 28 de Setiembre de 1849, que aquel célebre astrónomo no logró, por más que lo intentara, concertar con la producción de ningún temblor de tierra.

El 19 de Octubre de 1874, Romberg, también en Pulkova, observó varias veces, separadas por intervalos de tiempo de 14 á 20 segundos, la agitación de la burbuja de otro nivel, correspondiente al círculo meridiano de Repsold, en los momentos críticos de un fuerte terremoto, por entonces experimentado en Guatemala, entre ambas Américas.

Y el 10 de Mayo de 1877, Nyren, compañero de Romberg, observó el mismo fenómeno, en cierto modo concomitante con el temblor de tierra que en Iquique, al S. del Perú, ocurrió 1^h14^m antes de la conmoción advertida en el nivel del Observatorio ruso.

Sobre aviso ya con estos curiosos antecedentes, Albrecht estudió cuidadosamente las oscilaciones anómalas de los niveles de Berlín, Breslau y Königsberg, durante la operación geodésica mencionada, del mes de Agosto de 1885.

Hecha en el primero de aquellos lugares una lectura del nivel, en perfecta calma de la burbuja, se intentó efectuar otra en posición inversa del aparato, á las 10^h40^m de la noche del 2. Pero la burbuja entonces pareció animada de movimiento oscilatorio, como de $2''$ de amplitud y duración aproximada de 5^s, que se fué amortiguando poco á poco, pero que no se extinguió por completo hasta después de transcurridos 11 minutos de espera. Y en las estaciones de Breslau y de Königsberg advirtiéronse al propio tiempo perturbaciones análogas, subsistentes por término de un cuarto de hora casi.

La sospecha de que tan inesperadas y raras perturbaciones procedían de profunda y extensa conmoción subterránea surgió naturalmente desde luego, y se trocó en convicción bien justificada cuando, á los pocos días, se tuvo noticia de que en la mencionada noche, del 2 al 3 de Agosto, se habían experimentado en el Turkestan recias sacudidas del terreno, productoras de grandes desastres. En la ciudad de Pischpek, de las más cruelmente castigadas, sintióse la primera á las 2^h20^m de tiempo medio local, en la madrugada del 3: lo cual corresponde á las 10^h15^m de la noche, en tiempo de Berlín. Y como la distancia entre ambas poblaciones abarca un arco de círculo máximo, de 41° de amplitud, resulta que la velocidad de propagación del movimiento subterráneo ascendió á $3^1/_5$ kilómetros por segundo. Rapidez asombrosa, muy superior á cuanto referente al mismo asunto se ha deducido hasta ahora de las observaciones hechas en las regiones más inmediatamente sometidas á la influencia de los terremotos, y que induce á sospechar que las conmociones de la masa terrestre emanan ó arrancan de profundidades considerables, por referencia á la superficie del suelo. Pero sin ulterior confirmación, ó mayor número de pruebas, tan importante conclusión no puede admitirse, ni con mucho, como cierta, ó como ya demostrada, todavía. Para poner bien en claro la verdad, menester sería idear algún sistema de niveles autográficos, hasta ahora desconocido, y plantearle con acierto, conforme Plantamour, de Ginebra, y otros diligentes y perspicaces observadores lo proyectaron y ensayaron. (*Archives des Sciences Physiques et Naturelles*, 15 *Mars* 1887.)

M. M.

Apropósito de **Los terremotos experimentados en la Liguria y alta Italia, Suiza, y occidente y mediodía de Francia,** en la mañana del 23 Febrero de 1887, ha publicado la antigua y acreditada revista científica francesa, titulada *Cosmos*, correspondiente al 7 de Marzo, el siguiente interesante artículo, suscrito por el señor C. Maze, redactor habitual del mismo periódico.

Sin duda alguna nuestros lectores esperan que les ofrezcamos un estudio, si no completo, científico por lo menos, de la catástrofe subterránea ocurrida el 23 de Febrero último y de la cual tanto se habla en estos días. Por desgracia, nos es imposible satisfacer por ahora sus deseos; porque semejante trabajo no se improvisa. Para reunir y centralizar los documentos para ello necesarios, necesítanse algunas semanas de espera; y la discusión de estos documentos ó noticias exige tiempo mucho más largo todavía. Por el momento, hallámonos, pues, incapacitados de dar cuenta exacta de tan terrible fenómeno; y por lo que á la descripción sumaria, más ó menos pintoresca, del mismo se refiere, el lector puede consultar, y habrá ya revisado sin duda, las hojas periódicas cuotidianas. Tampoco del asunto así considerado tenemos para qué ocuparnos.

Por hoy limitarémonos á consignar que, por el contrario de lo que los primeros telegramas recibidos nos hicieron suponer, el centro de la conmoción ha correspondido á la Liguria, y que desde allí el fenómeno se ha extendido en todos sentidos, hasta dentro del mar, donde varias sacudidas han sido comprobadas. El sentido general de las oscilaciones fué de N. O. á S. E. Pero el único seismógrafo que existe en Francia, perteneciente al Observatorio Meteorológico de Perpignan, indicó, sin embargo, á las $5^h 45^m$ de la mañana, una oscilación del O. al E., seguida de un movimiento giratorio.

Lo que por primera vez consta en este caso, perfectamente comprobado en los anales de la ciencia, es una perturbación de los magnetógrafos en el momento del temblor de tierra. A las $5^h 45^m$ de la mañana, hora de París, los aparatos de Perpignan, de París y de Lyon registraron una perturbación manifiesta; mientras que el de Nantes no indicó absolutamente nada. Habida cuenta de las diferencias de longitud, conclúyese que la hora de la perturbación fué exactamente la misma en los tres aparatos mencionados. De donde parece deducirse que aquella perturbación procedió de una corriente eléctrica repentina, causa ó efecto del temblor de tierra; pues, de haber sido producida por el movimiento del suelo, antes se hubiera percibido en Lyon que en París.

Menester nos es ahora tratar de contestar á varias preguntas que de diversos lugares nos han sido dirigidas; pero, antes de hacerlo, llamaremos la atención del lector sobre un detalle de graves consecuencias en la práctica. En los primeros telegramas recibidos de Niza decíase que numerosos grupos de personas, atemorizadas por la presencia ó inminencia del peligro, habían acampado en el paseo de los Ingleses. Pues bien: en los momentos críticos de un temblor de tierra nada más peligroso que la proximidad del mar, conforme lo demuestran los hechos siguientes.

El 18 de Noviembre de 1867, durante el terremoto de Santo Tomás, en las Antillas (al E. de Puerto Rico), una ola monstruosa se precipitó sobre la población y produjo en ella considerables destrozos. El 23 de Diciembre de 1854, durante el que se experimentó en la bahía de Simoga, en el Japón, otras dos olas enormes destruyeron la ciudad. En Enero de 1783, en el momento de sentirse el formidable terremoto de la Calabria, precipitóse el mar sobre la famosa roca de Scila, y, después de arrebatar en su furia á más de dos mil personas que se encontraban en la playa, penetró furiosa en el puerto de Mesina, echó á pique todos los barcos que allí había, derrumbó las casas inmediatas á la ribera del mar, y ocasionó la muerte de otras 12.000 personas. Durante el gran terremoto de Lisboa de 1.° de Noviembre de 1755, retiráronse súbitamente las aguas y el puerto quedó completamente en seco; pero, de repente, formóse y apareció una ola de más de 16 metros de altura, que se precipitó sobre las casas aun existentes en la orilla, obligando á los que las habitaban á buscar su salvación en la huida: lance temeroso muy parecido al que ya se había observado también en Lisboa, en el terremoto de 1831. En esta misma infausta fecha del 1.° de Noviembre de 1755, y por la misma causa descrita, pereció el nieto de Racine, en el momento en que atravesaba en silla de posta la lengua de tierra que une á Cádiz con el continente. Señal grande de aturdimiento es, según tan repetidos desastres lo acreditan, la de buscar refugio cerca del mar durante los temblores de tierra; y peligroso es igualmente buscarle en terrenos de rápida y considerable pendiente, ó al amparo de árboles corpulentos.

Pregúntasenos: ¿se experimentan las oscilaciones del suelo en el sentido vertical ó en el horizontal? ¿En forma de sacudida violenta ó de suave balanceo?

De ambas maneras, y además de otra distinta. En el centro ó foco de la conmoción dominan las sacudidas verticales, de abajo arriba, y de arriba abajo. Al rededor de aquel centro, las sacudidas oblicúan; y, conforme la distancia aumenta, propenden á ser horizontales. Pero muchas veces acontece que la tierra tiembla ó se estremece en varias direcciones opuestas: lo que produce una especie de giro, indicado por el cambio de orientación de algunos edificios, advertido después de pasado el terremoto.

Otra pregunta, que constituye á modo de grave acusación lanzada á los hombres de ciencia: ¿cómo, se nos dice, los Observatorios, y el de Niza en particular, no han prevenido á las poblaciones, en esta ocasión castigadas, el desastre que las amenazaba? Sencillamente porque en el estado actual de la ciencia no hay manera de prever la producción de un terremoto. En la manifestación de algunos fenómenos celestes, como la de lluvias aparentes de estrellas fugaces; ó terrestres, como las borrascas y tempestades, se han basado algunos presagios de las conmociones del suelo; pero si tales fenómenos, de orden relativamente vulgar, han precedido ó acompañado á determinados temblores de tierra, nada prueba que entre fenómenos tan heterogéneos exista correlación ninguna. Y efectivamente, no son pocas las tempestades ordinarias, y las lluvias de estrellas fugaces observadas, sin acompañamiento de terremotos ; n los terremotos no precedidos de borrascas, ni de fenómenos celestes, notables por ningún concepto. Los presagios mejor fundados descansan en la observación de las variaciones repentinas, experimentadas en el caudal y limpieza de algunos manantiales: variaciones que pueden ser efecto y como prueba de un trabajo subterráneo, cuyas consecuencias se harán bien pronto sentir en mayor escala sobre la tierra. Dícese también que antes de la catástrofe las ratas y los ratones abandonan sus guaridas: lo cual, de ser cierto, indicaría que estos animales funcionan como verdaderos seismómetros, sensibles á las primeras sacudidas del terreno, aun cuando sean éstas demasiado débiles para que los hombres distraídos las adviertan. Y, pues que de seismómetros hablamos, añadiremos que tampoco estos aparatos sirven para presagiar ó pronosticar á tiempo los temblores de tierra; pues que sólo indican las sacudidas ya realizadas; y, si la catástrofe principia por una conmoción violenta del terreno, seismómetros y seismógrafos habrán permanecido hasta entonces en completo reposo, y cuando su agitación se advierta será ya demasiado tarde para ponerse en guardia contra la catástrofe (1).

---

(1) Sin discusión y muy detenido examen, no sabemos hasta qué punto puede sostenerse, con razón sobrada para ello, que los seismómetros ó seismoscopios no anuncian con alguna anticipación la inminencia de un terremoto. La dificultad, por ahora, nos parece que radica: 1.° en la acertada instalación de aquellos aparatos; y 2.° en la de observarlos con asiduidad, que pone á dura prueba la paciencia humana. Porque, no verificándose, por gran fortuna, en cada localidad los terremotos sino muy de tarde en tarde, ni los aparatos gráficos, inactivos por años, suelen hallarse en estado de prestar servicio en el momento crítico, precursor ó coetáneo de la catástrofe, ni hay observador que consagre su vida al examen atento y casi continuo de los seismoscopios ordinarios, con la esperanza muy incierta, y las más veces ilusoria, de sorprenderlos en el acto de indicar que el peligro de la conmoción subterránea se aproxima. Que algo puede ó merece intentarse, sin embargo, para tratar de resolver tan importante problema, hasta cierto punto lo demuestran los hechos siguientes.

En el Observatorio de Madrid existen, de poco tiempo á esta parte, algunos aparatillos, indicadores de las conmociones del terreno, que desde su instalación hasta la fecha, nada, en verdad, y por fortuna repetimos, significativo y terminante han indicado; y entre ellos figura un sencillísimo micrófono, instalado contra el muro de fábrica de la fachada del mediodía, de la mejor manera posible. Pues este artificio electro-mecánico, que si de algo peca es de excesivamente sensible, y que, por su mismo exceso de sensibilidad, queda con frecuencia fuera de servicio, dió señales de muy extraña agitación en el suelo durante casi todo el mes de Febrero último. Propiamente en calma solo se le advirtió en los días 9, 12 y 13, naturalmente en los momentos, fugaces por necesidad, de su observación. En los demás, siempre se le encontró agitado y rumoroso, con frecuencia sin orden ni concierto. Por lo que valgan, y aunque á nada fructuoso conduzcan por de pronto, á continuación trasladamos íntegras las notas consignadas en el cuaderno original de observaciones, corres-

En fin, la dificultad principal, nudo, ó clave de todas las demás, es la siguiente: ¿cuál es la causa de los terremotos? Pregunta de contestación difícil, porque los sabios distan mucho de hallarse conformes en los términos en que debe formularse. Tanto que con un autor podemos en este caso decir: *quot capita tot sensus*: tantas cabe zas, otras tantas opiniones; ó, con aplicación al caso presente: más opiniones que geólogos. Nuestra traducción es en verdad un poco

---

pondientes á unos pocos días inmediatos, anteriores y posteriores, al 23 de Febrero.

Día 15, á las 12 $^1/_2$ horas. . . . .—«Micrófono en estado normal.»

Día 16, id.. . . . .—«Chasquidos secos.»

Día 18, id.. . . . . , . .—«Chasquidos secos y fuertes.»

Día 20, 2 $^1/_2$ horas de la tarde. .—«Borrasca telúrica. Con dificultad se consigue establecer la corriente. Los chasquidos del aparato son extraordinarios por lo irregulares y violentos.»

Día 21, á las 12 horas. . . . . . .—«Continúa el desconcierto. En la aguja del galvanómetro se advierten sacudidas febriles. ¿Pasará algo en el mundo?

Día 21, á las 6 de la tarde. . . . .—«Continúa el aparato haciendo toda clase de gestos. En el seismoscopio de Cecchi se advierten indicios de inquietud.»

Día 22, á las 9 $^1/_2$ horas.. . . . .—«Restablecida la calma. Oyénse algunos chasquidos sueltos.»

Día 22, á las 10 $^1/_2$ de la noche. .—«Cencerrea y chasca.»

Día 23, á las 10 $^1/_2$ de la mañana.—«Animadito: algún chasquido.»

Día 23, á las 12 de la noche. . . .—«Vario: chasca y cencerrea.»

Día 24, á las 10 h. de la mañana..—«Orquesta completa. Soberbios redobles y piporrazos.»

Día 24, á las 12 de la noche. . . .—«Continúa vario y desbaratado.»

Día 25, á las 9 $^1/_2$ de la mañana..—«Ordenado y cadencioso. Cualquiera entiende esta historia!»

Día 25, á las 12 de la noche. . . .—«De nuevo se perciben chasquidos secos con raras intermitencias.»

Día 26, á las 10 de la mañana. . .—«Estrepitoso: tremendo! Pero sin interrupciones de corriente.»

Día 27, á las 12 horas. . . . . . .—«Desordenado, estrepitoso, mudo ahora, alborotado poco después.»

Día 27, á las 7 de la noche.. . . .—«Continúa sobreexcitado.»

Día 28, á las 9 $^1/_2$ de la mañana..—«Chasquidos secos á compás. Etc., etc.»

Con estos antecedentes, ¿es temerario ó cándido suponer que, en comarcas expuestas á frecuentes sacudidas del terreno, cabe en lo posible plantear, con alguna esperanza de buen éxito, un servicio microfónico, aplicable á la previsión de las borrascas telúricas?

El asunto, ya que no otra cosa, merece por lo menos meditarse, antes de resolverle de plano en ningún sentido.

libre, pero exacta; y, tanto más exacta, cuanto que á las opiniones de los geólogos hay que agregar las de algunos astrónomos.

Han creído algunos, en efecto, que los terremotos proceden de acciones puramente eléctricas en su origen; y Hœfer, ampliando esta idea fundamental, admite tres especies de tempestades del mismo nombre: 1.º tempestades atmosféricas vulgares; 2.º tempestades subterráneas que se engendran y estallan en las profundidades del Globo; y 3.º tempestades mixtas, en las cuales la electricidad subterránea, al pasar del interior del suelo á la superficie y diseminarse por la atmósfera, produce los temblores de tierra.

Otros han creído que la causa principal de tan terrible fenómeno era el magnetismo terrestre, basándose para ello en la coincidencia eventual de las auroras boreales, con las grandes conmociones de nuestro Globo.

Mr. Poey admite estrecha relación entre los ciclones atmosféricos y la agitación de la corteza terrestre, y cree, con otros varios observadores, que el movimiento giratorio del ciclón se trasmite á las capas subterráneas, y produce las desastrosas sacudidas que trastornan y quebrantan la superficie.

Mr. F. Laur sostiene que basta un cambio en la presión barométrica para producir los temblores de tierra y las grandes erupciones volcánicas; y, para hacer comprensible su pensamiento, pone el ejemplo de una botella de champagne, que estalla fácilmente por resultado de mínima agitación del líquido que contiene (1).

---

(1) Desde muy antiguo, según el seismólogo Milne, atribuían los chinos la producción de los terremotos al aire, aprisionado por cualquier causa en las concavidades internas de la tierra, en su furiosa é incesante pugna por escapar de tan estrecha cárcel y salir á la superficie. Y á la mayor dificultad que para lograrlo encontraba en los países de altas y ponderosas montañas, que en los de extensas planicies, atribuían la mayor frecuencia de las sacudidas del suelo al N. que al S. de la China. Así como suponían también que, cuando el viento soplaba furioso al aire libre, reinaba calma completa en el interior de la Tierra, y viceversa.—Aristóteles y otros sabios de la clásica antigüedad atribuían á la misma causa mencionada la producción de los terremotos, y, todavía en los tiempos modernos, el poeta Shakespeare, en su tragedia «Enrique IV», habla de la tierra, afligida y atormentada por dolores como de trabajoso parto, á consecuencia del viento desencadenado que alienta en sus entrañas.

Por los años de 1760, el Dr. Stukely, y también Percival y Priestley, idearon y sostuvieron con empeño la teoría de las descargas eléctricas, como causa originaria de la producción de los terremotos: teoría actualmente muy en boga en la California, donde se supone que la red de ferrocarriles por allí extendida impide la acumulación peligrosa de electricidad en lugares determinados. En el Japón, sin embargo, advierte Milne, los hechos observados después del establecimiento de los caminos de hierro, contradicen la influencia que, como preservadores de las conmociones subterráneas, se les atribuye á éstos en la California.

En opinión de otros autores lo que produce el estallido inicial es la acción de los grandes cuerpos celestes, y particularmente de la Luna, en las zizigias. Flammarión defiende esta tesis con aplicación á los últimos terremotos. Pero, de la estadística formada por un partidario de la misma idea, por Mr. Alexis Parrey, resulta que, de 41 terremotos, ocurrieron 21 no más en la época de las zizigias, y 20 al tiempo de las cuadraturas: la diferencia de resultados no es, en verdad, demasiado grande, y si algo prueba es precisamente lo contrario de lo que aduciéndola se pretendía demostrar.

Darwin, Boussingault, etc., opinan que la causa principal de los terremotos radica en el descenso ó rotura de las cavernas subterráneas, producida por la presión de las masas que sobre ellas gravitan: existiendo, en concepto de aquellos y otros muchos sabios, en diversos lugares del interior del Globo, y particularmente en los países montañosos, inmensas cavidades, cuyas paredes, corroídas por las corrientes y filtraciones acuosas que las atraviesan é impregnan, flaquean y ceden al fin, comunicándose su derrumbamiento á distancias más ó menos grandes. Y por eso, habiéndose hundido en 1840 una elevada colina del Jura, en los momentos temerosos de un violento terremoto, los habitantes de la comarca atribuyeron

---

Milne además opina que las descargas eléctricas, concomitantes á veces de los terremotos, no son causa, sino consecuencia de los mismos. Y para tratar de ponerlo en claro ha provocado artificialmente algunos pequeños temblores de tierra, valiéndose de cartuchos de dinamita, atacados en el suelo, y dispuestos de manera que los efectos eléctricos, consiguientes á su explosión, pudieran observarse por medio de un galvanómetro. Cuando la tierra saltaba y se extremecía, el galvanómetro acusaba, en efecto, la existencia de una corriente eléctrica, ó producida por acciones y reacciones químicas, ó por la compresión violenta del terreno y rozamiento de unos materiales con otros.

A la teoría eléctrica sucedió, antes de alborear el corriente y ya casi espirante siglo, la química: según la cual proceden los terremotos de las acciones y reacciones, más ó menos violentas, de varias sustancias sepultadas y confundidas bajo de tierra, como el azufre, el nitro, el vitriolo, y otras, productoras á veces de gran cantidad de vapores, suficiente para levantar y conmover el suelo.

El Dr. Milchell, que sobre este asunto discurrió por entonces latamente, enunció en 1760 la especie, después muy celebrada y también controvertida, de que entre volcanes y terremotos existe conexión ó dependencia muy estrecha. Y, como advirtiese que en las erupciones volcánicas se desprenden enormes cantidades de vapor, llegó á la conclusión de que los terremotos representan otros tantos conatos de formaciones volcánicas, y provienen de las pulsaciones del terreno, producidas por la fluencia del vapor al través de los estratos que le comprimen. Opinión que por entonces modificó el profesor americano Rodgers, sosteniendo que los terremotos proceden, no del flujo más ó menos contrariado de enormes masas de vapores, sino del de corrientes de lava encandecida, que dislocaban, levantándolas ó deprimiéndolas, las capas del terreno subterráneo por donde trabajosamente circulaban.

la conmoción y quebrantamiento del suelo á un manantial que veinte años antes había desaparecido, y que en tan largo tiempo pudo muy bien corroer y falsear la base de la montaña.

Y, en fin, el mayor número de sabios atribuye los terremotos á la acción del fuego central, y los relaciona con la existencia de los volcanes. Partiendo del hecho de que el calor aumenta con la profundidad del suelo, en razón media aproximada de un grado por cada 30 metros de profundidad, conclúyese que, á los 50 kilómetros de descenso, la temperatura debe ser suficiente para fundir el hierro y el granito, y que á los 100 no habría cuerpo alguno que resistiese á la fusión. Esto, en principio, es cierto: pero ¿el incremento de temperatura continuará en la misma progresión hasta llegar al centro de la Tierra? En caso afirmativo, la temperatura en el centro ascendería á 212370 grados centígrados; y, como en tal supuesto los cuerpos por allí situados, no solamente estarían fundidos, sino en estado gaseoso, sometidos á una enorme compresión y con fuerza elástica equivalente, ¿cómo la película superficial resistiría sin estallar y reducirse á menudos fragmentos? La progresión mencionada no debe, por lo tanto, regular el incremento de temperatura, á poco que profundicemos á contar del haz de la Tierra (1).

Dificultad que algunos sabios sortean suponiendo que la parte del Globo en estado de fusión no se extiende hasta el centro; sino que, por el contrario, el centro está formado por un núcleo sólido de muy considerable densidad. Y otros admitiendo que, si bien en conjunto el globo terrestre es sólido, en su seno, y como á un centenar de kilómetros de la superficie, se encuentran diseminados extensos lagos y como mares de fuego, donde los cuerpos yacen en estado de fusión ó de volatilización completas. En su concepto, pues, el calor desprendido de reacciones químicas, en actividad perpetua, produce inmensos depósitos de lavas incandescentes, aprisionadas entre paredes sólidas, como la miel lo está en los panales y alveolos de cera.

Y, partiendo de estos antecedentes hipotéticos, los temblores de tierra se explican admitiendo, por añadidura, que la materia encandecida y flúida experimenta ciertas oscilaciones que provocan el levantamiento de la costra superficial terrestre, sea por efecto de la misma efervescencia y agitación de la masa en ignición, cuando en contacto con ella se pone el agua que por las hendeduras del terreno se va filtrando poco á poco, sea, á guisa de marea, por el de las atracciones planetarias. La primera teoría, según la cual ha-

(1) A propósito de este asunto, véanse las págs. 65 y siguientes del tomo XXII de esta Revista. Y, sobre todo, consúltese el discurso, de recepción en la Academia, del Sr. Cortázar, y el de contestación al mismo, del Sr. Fernández de Castro.

bría manifiesta analogía entre un terremoto y la explosión de una caldera de máquina de vapor, desconcertadamente alimentada y calentada, cuenta mayor número de partidarios que ninguna otra.

Como se ve, existen explicaciones de los terremotos acomodadas á todos los gustos; y descontentadizos deben ser los mortales á quienes ninguna satisfaga. Al número de éstos, sin embargo, confesamos ingenuamente que pertenecemos; pues de todas las teorías apuntadas ninguna nos parece que interpreta fielmente los fenómenos observados, ni que descansa sobre hechos de todo punto incontestables.

Por la traducción y las notas,

MIGUEL MERINO.

ÍNDICE

DE LAS MATERIAS CONTENIDAS EN ESTE NÚMERO.

CIENCIAS NATURALES.

Ictiología Ibérica.. 141

VARIEDADES.

Ejercicios de Trigonometría... 190
Perturbaciones advertidas en los niveles de los instrumentos astronómicos, como indicio ó consecuencia de terremotos lejanos.......... 194
Los terremotos experimentados en la Liguria y alta Italia, Suiza, y occidente y mediodía de Francia.. 196

Se suscribe en la portería de la Academia de Ciencias, plaza de la Villa, núm. 2, piso principal.
Cada tomo de la Revista constará de nueve números.

REVISTA

DE LOS

PROGRESOS DE LAS CIENCIAS

EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES.

TOMO 22.—N.° 4.°

MADRID.

IMPRENTA DE LA VIUDA É HIJO DE D. E. AGUADO.—PONTEJOS, 8.

1887.

CIENCIAS EXACTAS.

ESTUDIOS

SOBRE

ELECTRO-ESTÁTICA Y ELECTRO-DINÁMICA.

OBJETO DE LA MEMORIA.

El presente trabajo tiene un triple objeto:

1.º Exponer algunas ideas, que creo nuevas, y que, si bien reconozco que tal como hoy las someto al público son imperfectas, pudieran adquirir mayor importancia convenientemente desarrolladas.

2.º Dar cuenta de diversos métodos hasta ahora poco conocidos, facilitando su inteligencia y su estudio á las personas que se interesan por las teorías matemáticas de la electro-estática y de la electro-dinámica.

3.º Completar los trabajos anteriores con el examen de algunos problemas de las máquinas-dinamos; del trasporte de la energía; y de algunas otras aplicaciones de la electricidad.

I.

LA FÓRMULA DE AMPÈRE.

El ilustre Ampère, partiendo de ciertas hipótesis y de un corto número de resultados experimentales, dedujo, que cuando dos elementos de corriente eléctrica se hallan en presencia, su acción mutua está expresada por la siguiente fórmula,

$$F = \frac{1}{\omega^2} \frac{I I' ds\, ds'}{r^2} (2 \cos \varepsilon - 3 \cos \theta \cos \theta'),$$

en la cual:

F representa la atracción ó repulsión de los dos elementos de corriente, acción aplicada sobre la recta que une dos puntos cualesquiera de ambos elementos infinitamente pequeños;

I é I′ las intensidades de ambas corrientes;

ds y ds' las longitudes de los elementos que se consideran;

r la distancia de uno á otro elemento;

ε el ángulo que forman;

θ, θ' los ángulos de r con ds y ds';

ω un coeficiente numérico, que en unidades electro-estáticas expresa próximamente la velocidad de la luz.

Esta fórmula se demuestra: 1.° con el auxilio de *una* primera hipótesis, á saber: que la acción de un elemento de corriente ds sobre otro es igual á la del conjunto de sus *tres* componentes dx, dy, dz sobre este segundo elemento ds', ó sobre sus tres componentes respectivas dx', dy', dz'; y también con el de esta *segunda* hipótesis: que dichas fuerzas *son funciones* de las distancias entre cada dos elementos, actuando según la recta que los une.

2.° Con la aplicación del cálculo matemático y de una serie de transformaciones tan fecundas como ingeniosas, que constituyen en la actualidad una teoría clásica de la física-matemática.

3.° Con el auxilio de *dos experiencias,* que permitan determinar las naturaleza de las dos funciones desconocidas que entran en la fórmula.

Agregando á estas *hipótesis, cálculos* y *experiencias,* algunos principios racionales de carácter evidente, como el de la simetría, por ejemplo, se llega á la fórmula indicada, que marca un notable progreso en las teorías que nos ocupan.

Es un primer paso, sin duda alguna, y da unidad y base á los problemas de la electro-dinámica y aun del magnetismo; pero la ciencia exige más. Desde el momento en que los fenómenos de la electro-estática y de la electro-dinámica son fenómenos puramente eléctricos, se impone la necesidad de deducir los segundos de los primeros y de las leyes generales de la Mecánica. De suerte que la fórmula Ampère ha de ser una consecuencia lógica de la mecánica del éter, y han de deducirse su forma y sus coeficientes, de las atracciones y repulsiones eléctricas, así como de la estructura de los cuerpos conductores y de los dieléctricos.

Tal es el objeto del presente estudio: deducir directamente la fórmula de Ampère de los principios de la *electro estática.* Creo que es la primera vez que esto se intenta; y, aunque no diré que se consigue con perfección absoluta, se indica al menos un camino, *á mi entender*, seguro, y se llega á un resultado, que someto al juicio del público, como base y estímulo de otros más rigorosos y completos.

Sin embargo, antes de entrar en materia, y para que mi trabajo aproveche al mayor número posible de lectores, recordaré los principios generales de la electro-estática, que han de servirme de fundamento en esta Memoria.

IDEAS GENERALES DE ELECTRO-ESTÁTICA.

I. *Las dos hipótesis de la electro-estática.* Dos son las hipótesis que se disputan la preferencia al explicar los fenómenos eléctricos: á saber:

La *hipótesis dualista*, ó de los dos fluidos, el *fluido positivo* y el *fluido negativo.*

La *hipótesis unitaria* ó de un solo fluido, que ha de ser precisamente el *éter*, es decir, el mismo fluido que sirve para explicar los fenómenos de la *luz* y del calor *radiante.*

De la *primera* nada diremos porque es conocida y vulgar: aunque antifilósofica é innecesaria, tiene ventajas prácticas de sencillez y simetría que no pueden desconocerse.

Respecto á la *segunda*, que rara vez se expone en forma rigorosa, haremos algunas indicaciones, tomadas de la excelente obra de Mr. Briot.

Todos los fenómenos de la Física pueden explicarse con dos elementos: los *átomos ponderables* y el *éter*. Cada parte infinitesimal del mundo inorgánico, en su mayor estado de complicación, se compondrá de un núcleo ponderable rodeado por una atmósfera de éter. Y, aun suponiendo que esta concepción no correspondiese rigorosamente á la realidad, no puede negarse, que es una *hipótesis esquemática*, que da unidad á la ciencia y permite someter al cálculo todos los fenómenos mecánicos del mundo atómico.

Agréguense á esto las siguientes hipótesis, ó los siguientes resultados experimentales, porque de uno y otro carácter participan, á saber:

1. Que los *átomos ponderables* se atraen entre sí proporcionalmente á las masas y en razón inversa del cuadrado de las distancias.

2.º Que los *átomos ponderables* y los *elementos del éter* (ó *átomos etéreos*) se atraen según la misma ley.

Y 3.º Que los *átomos de éter* se rechazan también en proporción directa de las masas é inversa del cuadrado de las distancias.

Y con esto tendremos lo bastante para aplicar á la electro-estática los principios de la mecánica racional.

Por el pronto la hipótesis dualista es innecesaria: con un sólo flúido se da cuenta de las atracciones y repulsiones eléctricas.

Supongamos en presencia y á la distancia r (*fig.* 1.ª) dos

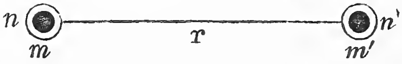


Fig. 1.ª

masas ponderables m, m', rodeadas de dos atmósferas de éter, cuyas masas representaremos por n, n': la acción de los sistemas (m, n) y (m', n') se compondrá:

Primero. De la atracción $f\dfrac{m\,m'}{r^2}$ de las masas ponderables, representando f un coeficiente constante.

Segundo. De las atracciones $f_1\left(\dfrac{m\,n'}{r^2}+\dfrac{m'\,n}{r^2}\right)$ de las masas ponderables y de las atmósferas etéreas, representando f_1 otro coeficiente constante.

Tercero. De la repulsión $f_2 \frac{n\,n'}{r^2}$ de las dos atmósferas de éter, siendo f_2 el coeficiente que corresponde á esta acción.

La resultante total según la línea (m, m') será

$$f\frac{m\,m'}{r^2}+f_1\frac{m n'+m' n}{r^2}-f_2\frac{n\,n'}{r^2}=\frac{m\,m'}{r^2}\left[f+f_1\left(\frac{n}{m}+\frac{n'}{m'}\right)-f_2\frac{n\,n'}{m\,m'}\right];$$

ó bien: acción de los dos sistemas =

$$F=\frac{m\,m'}{r^2}\left[f+f_2\left(\frac{f_1}{f_2}\left(\frac{n}{m}+\frac{n'}{m'}\right)-\frac{n}{m}\,\frac{n'}{m'}\right)\right] \quad (1).$$

Ahora bien: se dice que los cuerpos se hallan en estado *neutro* ó *natural*, cuando la relación de sus atmósferas á sus masas ponderables es igual á la de los coeficientes f_1, f_2: de suerte que el estado neutro está caracterizado por esta relación:

$$\frac{n}{m}=\frac{n'}{m'}=\frac{f_1}{f_2} \quad (2).$$

En este caso el valor de F se convierte, sustituyendo por $\frac{n}{m}$ y $\frac{n'}{m'}$ su valor común $\frac{f_1}{f_2}$, en la siguiente expresión:

$$F=\frac{m\,m'}{r^2}\left(f+\frac{f^2_1}{f_2}\right) \quad (3).$$

Representa esta fórmula la ley de la atracción universal, que varía proporcionalmente á las masas m, m', y en razón inversa del cuadrado de la distancia r^2; conforme determina además el coeficiente constante $f+\frac{f^2_1}{f_2}$.

Y nótese que la ley subsistiría aunque f fuese *cero;* es decir, aunque la materia no atrajese á la materia, sólo con que subsistieran las acciones indicadas entre la materia ponderable y el éter y entre las particulas de éste: todo quedaría reducido á que el coeficiente fuese $\frac{f^2_1}{f_2}$.

Pero supongamos que cualquier acción física ó atómica, el calor, el contacto, una reacción química, etc., altera la constancia de la relación $\frac{n}{m}=\frac{n'}{m'}$, de suerte que $\frac{n}{m}$ recibe la variación a, y $\frac{n'}{m'}$ la variación a': el nuevo valor de F será el siguiente, poniendo por $\frac{n}{m}=\frac{n'}{m'}$ su valor $\frac{f_1}{f_2}$, y dando á ambas cantidades $\frac{n}{m}$ y $\frac{n'}{m'}$ sus respectivas variaciones:

$$F=\frac{m\,m'}{r^2}\left[f+f_2\left[\frac{f_1}{f_2}\left(\frac{f_1}{f_2}+a+\frac{f_1}{f_2}+a'\right)-\left(\frac{f_1}{f_2}+a\right)\left(\frac{f_1}{f_2}+a'\right)\right]\right];$$

desarrollando tendremos:

$$F=\frac{m\,m'}{r^2}\left[f+f_2\left[\frac{2f_1^2}{f_2^2}+\frac{f_1}{f_2}(a+a')-\frac{f^2{}_1}{f^2{}_2}-\frac{f_1}{f_2}(a+a')-a\,a'\right]\right],$$

y por fin

$$F=\frac{m\,m'}{r^2}\left[f+\frac{f_1{}^2}{f_2}-f_2\,a\,a'\right].$$

De suerte que el valor (3) ha experimentado la variación

$$\frac{m\,m'}{r^2}\times-f_2\,a\,a',$$

ó bien

$$-f_2\frac{m\,a\times m'\,a'}{r^2}.$$

Ahora bien, si representamos por n_1 y n'_1 las nuevas masas de las atmósferas, tendremos

$$\frac{n_1}{m}=\frac{n}{m}+a;\quad \frac{n'_1}{m'}=\frac{n'}{m'}+a';$$

ó sea

$$n_1=n+m\,a;\quad n'_1=n'+m'\,a':$$

de modo que ma y $m'\,a'$ son las variaciones de las masas de éter. Representándolas por dn y dn', tendremos finalmente, para la *nueva fuerza*, que viene á modificar la primitiva, y que procede de la alteración del estado normal:

$$-f_2 \frac{dn \times dn'}{r^2} \qquad (4)$$

1.º Si ambas atmósferas han sufrido *un aumento*, dn y dn' serán *positivas* y el valor (4) será *negativo*: es decir, que resultará, como fuerza nueva, una *repulsión*.

2.º Si ambas atmósferas experimentan *una disminución*, dn, dn' serán negativas y el valor de (4) será todavía *negativo*, ó sea una *repulsión*.

3.º Si una de las dn, dn' es positiva y la otra negativa, obtendremos para (4) un valor *positivo*, ó sea una *atracción*

Por lo tanto, llamando ELECTRICIDAD, en general, al *aumento* ó *disminución* de éter sobre la *cantidad normal;* y *electricidad positiva*, al incremento y *electricidad negativa* á la disminución de éter, tendremos explicadas racionalmente las leyes generales de las atracciones y repulsiones eléctricas:

Electricidades del mismo nombre se repelen.

Electricidades desemejantes ó de distinto nombre se atraen.

De aquí se deduce que los dos fluidos *positivo* y *negativo* no son más que aumentos ó disminuciones de uno mismo, el éter, sobre la cantidad normal; ó, como pudiéramos decir, sobre el nivel medio.

Cuando un sistema se halla en su estado normal, con una masa ponderable m (*fig* 2.ª) y una masa etérea n, en la relación $\frac{n}{m} = \frac{f_1}{f_2}$ no ejerce dicho sistema acción alguna sobre cualquier

Fig. 2.ª

átomo libre de éter n'; porque la acción de (m, n) sobre n', será

atracción de $\qquad m \ldots\ldots f_1 \frac{m\, n'}{r^2};$

repulsión de $\qquad n\ldots\ldots f_2 \dfrac{n\,n'}{r^2}$;

acción total

$$f_1 \frac{m\,n'}{r^2} - f_2 \frac{n\,n'}{r^2} = \frac{n'}{r^2}(f_1 m - f_2 n) = 0$$

en virtud de la relación $\dfrac{n}{m} = \dfrac{f_1}{f_2}$.

No sucedería así, sí en (m, n) existiese *electricidad libre*, es decir, un exceso ó un defecto relativamente á la cantidad n que en cierto modo satura y equilibra la acción de m.

En cambio n' tiende á perturbar el sistema (n, m) separando de sí n, acercando m, y destruyendo ó tendiendo á destruir el grupo (m, n). Pero, si alrededor de (m, n) todo es *simétrico*, si no hay perturbación en el campo eléctrico, ni el éter se ha condensado en ciertos puntos, dilatándose en otros, todas las acciones de la atmósfera que rodea á (m, n) se compensarán y subsistirá el equilibrio del sistema.

II. El *potencial de fuerzas*. Supongamos que una *masa* m (*fig.* 3.ª) de materia ponderable ó etérea, atrae ó rechaza á

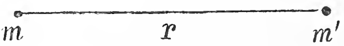


Fig. 3.ª

á otra masa m', según la ley general: la fuerza entre m y m' será $\dfrac{m\,m'}{r^2}$, prescindiendo del coeficiente para más sencillez.

Así, pues: acción de m sobre $m' = \mathrm{F} = \dfrac{m\,m'}{r^2}$.

Esta expresión se ve desde luego que es el producto de $\dfrac{m}{r^2}$ por m': de suerte que, en cada caso, la acción de m sobre el punto (m') es el producto de la acción m sobre la *unidad de masa* situada en (m'), multiplicada por la masa que exista en dicho punto.

Lo que interesa, por tanto, en los problemas de esta clase, es determinar la acción de las masas actuantes sobre la *unidad* *de masa*, para cada punto; y, por consiguiente, sólo estudiaremos la expresión $f = \frac{m}{r^2}$, que representa la acción de m sobre el punto (m') si en dicho punto existe la unidad de masa: en otro caso cualquiera no habría más, según queda dicho, que multiplicar la fuerza f por m'.

Pero se ve desde luego que $\frac{m}{r^2}$ es la derivada de $\frac{m}{r}$ respecto á r, con signo contrario:

Por lo tanto:

$$f = \frac{m}{r^2} = -\frac{d\,\frac{m}{r}}{dr}.$$

La expresión $\frac{m}{r}$ tiene en estas y otras muchas cuestiones de la física matemática gran importancia y se denomina el *potencial* de m, ó la función potencial de m.

Para cada punto del espacio su valor es distinto y sólo depende de r: varía por lo tanto cuando aquel varía.

Hemos visto que su derivada, en cualquier punto del espacio A′, (*fig.* 4.ª) con relación á r, es la acción de m sobre la

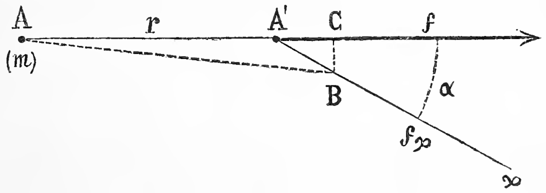


Fig. 4.ª

unidad de masa, si tal unidad de masa existiese en A′; pero el teorema es mas general.

La acción de A sobre A′ es, según queda dicho, $\frac{m}{r^2}$, actuando por ejemplo, según A′ C; y su componente en cualquier dirección, A′x, será, llamándola f_x, el producto de f por el coseno de CA′$x = \alpha$. En consecuencia:

$$f_x = \frac{m}{r^2} \cos \alpha.$$

Suponiendo que A′ se moviese en la dirección $A'x$, pasando de A′ al punto infinitamente próximo B, tendríamos, proyectando B sobre AA′:

$$A'C = AB - AA' = dr = A'B \cos \alpha,$$

ó sea

$$dr = dx \cos \alpha.$$

Luego

$$f_x = \frac{m}{r^2} \cos \alpha = - \frac{d \frac{m}{r}}{dr} \frac{dr}{dx} = \frac{- d \frac{m}{r}}{dx}.$$

De donde se deduce que la función potencial $\frac{m}{r}$ goza de esta propiedad general: que cuando el punto A′ se mueve en cualquier dirección $A'x$, la derivada de $\frac{m}{r}$, respecto á dicha dirección, expresa la componente de la fuerza sobre la misma recta $A'x$.

Generalizando estas primeras nociones, supongamos, una serie de puntos, ó masas eléctricas, m, m', m'', (*fig.* 5.ª), po-

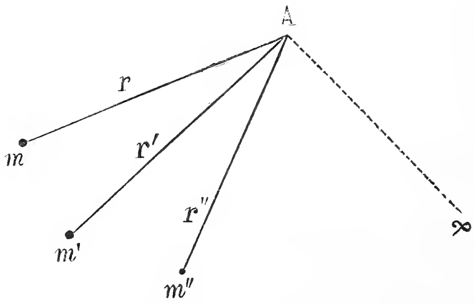


Fig. 5.ª

sitivas ó negativas, distribuídas en forma continua ó discontinua, y estudiemos su acción sobre un punto A, en el caso que existiera sobre dicho punto la *unidad de masa positiva*, por ejemplo.

La acción de m sobre A tendrá *una componente* sobre cualquier eje x, representada por la expresión,

$$-\frac{d\,\dfrac{m}{r}}{dx}.$$

La acción de m' sobre A tendrá por componente según la misma dirección,

$$-\frac{d\,\dfrac{m'}{r'}}{dx}.$$

La componente de la acción de m'' será asimismo,

$$-\frac{d\,\dfrac{m''}{r''}}{dx}:$$

y así sucesivamente.

Luego la componente F_x de la acción de todo el sistema actuante m, m', m'', sobre un punto cualquiera A, en el que colocásemos la unidad de electricidad positiva, tendrá por valor:

$$F_x = -\frac{d\dfrac{m}{r}}{dx} - \frac{d\dfrac{m'}{r'}}{dx} - \frac{d\dfrac{m''}{r''}}{dx} \cdots = -\frac{d\left(\dfrac{m}{r} + \dfrac{m'}{r'} + \dfrac{m''}{r''} \cdots\cdots\right)}{dx}.$$

A la expresión $\dfrac{m}{r} + \dfrac{m'}{r'} + \dfrac{m''}{r''} + \ldots$ ó en general $\sum \dfrac{m}{r}$ (pudiendo esta $\sum$ contener integrales, si algunas de las masas están distribuídas en forma continua sobre superficies ó en volúmenes) se le da el nombre de *el potencial* del sistema, ó la *función potencial* de las masas m, m', m'', etc.: representándola para abreviar por V, tendremos: $V = \sum \dfrac{m}{r}$, y el teorema precedente se expresará así:

$$F_x = -\frac{dV}{dx}.$$

Como el eje de las x es arbitrario, podremos tomar tres ejes, por ejemplo rectangulares, para las x, y, z, y referir á ellos todo el sistema de masas eléctricas y todo el campo sometido á su influencia. En este supuesto tendremos: que dado un sistema continuo ó discontinuo de masas eléctricas m, m', m''... y representando por $V = \sum \frac{m}{r}$ su potencial, relativa á cualquier punto del campo, la acción que ejercerá dicho sistema sobre el punto elegido, suponiendo en él una masa positiva igual á la unidad, tendrá por componentes,

$$-\frac{dV}{dx}; \quad -\frac{dV}{dy}; \quad -\frac{dV}{dz}:$$

la resultante será evidentemente,

$$F = \sqrt{\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2};$$

y los cosenos de los ángulos qus esta resultante forma con los ejes, serán

$$\frac{-\frac{dV}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2}} \quad \text{etc.}$$

Conviene aclarar las ideas precedentes con algunas observaciones.

1.ª Hasta ahora nada hemos dicho de la naturaleza del campo eléctrico. Si fuese el *vacío absoluto*, claro es, que el valor de F sería nulo de hecho, y sólo debería considerarse como un esfuerzo posible, en el caso de que en determinado punto se colocase una masa eléctrica: si era $+1$, la fuerza valdría $+F$ y sus componentes $-\frac{dV}{dx}, -\frac{dV}{dy}, -\frac{dV}{dz}$: si su valor fuese -1, el de la fuerza sería $-F$ y los de las componentes, $+\frac{dV}{dx}, +\frac{dV}{dy}, +\frac{dV}{dz}$: si, en general, la masa que existiera en el punto considerado, fuese $\pm m_1$, la fuerza y las componentes serían $\pm m_1 F$,

$$\mp m_1 \frac{dV}{dx}; \quad \mp m_1 \frac{dV}{dy}; \quad \mp m_1 \frac{dV}{dz}.$$

Si el campo eléctrico, como siempre sucederá, contiene *éter*, sobre cada molécula y en cada punto del campo se ejercerá un esfuerzo que modificará las condiciones de equilibrio del sistema, creando presiones distribuídas según cierta ley.

Este es precisamente el caso que hemos de considerar más adelante y en el que hemos de demostrar directamente la fórmula de Ampère, base de toda la electro-dinámica.

2.ª La función V, ó sea la *función potencial*, depende del sistema eléctrico que se considere, es decir, de las masas eléctricas y de su posición geométrica, ó sea de sus coordenadas; porque, en efecto, llamando a, b, c; a', b', c' ... á las coordenadas de los puntos m, m' ... el valor de V es:

$$V = \sum\left(\frac{m}{\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2}} + \frac{m'}{\sqrt{(a'-x)^2+(b'-y)^2+(c'-z)^2}} + \frac{m''}{\sqrt{(a''-x)^2+(b''-y)^2+(c''-z)^2}} + \ldots\right).$$

Mas, para un sistema dado, ó sea para valores determinados de m, a, b, c; m', a', b', c'; ..., la potencial depende del punto respecto al cual se tome: es decir, de las coordenadas x, y, z. Puede, pues, decirse que V es función de dichas coordenadas. Así:

$$V = \text{función } (x, y, z, \text{constantes}).$$

Estas constantes son precisamente las cantidades

$$m, a, b, c; \; m', a', b', c' \ldots$$

que determinan el sistema eléctrico actuante.

Cada sistema de masas tiene *una forma* analítica para su potencial, que varía de uno á otro. Y *en cada sistema* la potencial cambia de valor con las coordenadas x, y, z del punto que se considere.

3.ª Desde luego se ve una primera ventaja de la potencial, cuando se trata de determinar la acción de un sistema de masas m, m', m'' ... (continuas ó discontinuas, positivas ó negativas) sobre un punto eléctrico del campo. En vez de calcular *tres* componentes F_x, F_y, F_z, se calcula *una sola expresión* V, ó sea la potencial, y tomando sus tres derivadas con el signo cambiado,

$$-\frac{dV}{dx}, \quad -\frac{dV}{dy}, \quad -\frac{dV}{dz},$$

se obtienen las tres componentes buscadas: sustituyendo por decontado en las expresiones

$$-\frac{dV}{dx} = V'_x\,(x, y, z); -\frac{dV}{dy} = V'_y\,(x, y, z);$$

$$-\frac{dV}{dz} = V'_z\,(x, y, z),$$

en vez de x, y, z las coordenadas del punto que se considere.

Pero no es esta la única ventaja de la potencial: no es una pura creación analítica, que simplifique ó reduzca el número de integraciones: tiene significación mecánica importantísima, y sobre ella estriba toda la teoría moderna de la electricidad y del magnetismo como iremos viendo.

III. *Las lineas de fuerza y las superficies equipotenciales.* Supongamos un sistema eléctrico cualquiera, que para abreviar llamaremos S, (*fig.* 6.ª) compuesto de la manera más general,

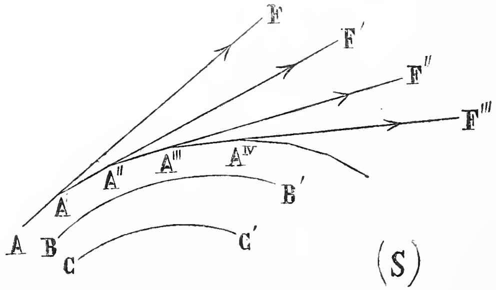


Fig. 6.ª

de *puntos eléctricos*, positivos ó negativos, aislados; de *líneas* de electricidad; de *superficies* y *volúmenes* con determinadas cargas de uno ú otro signo distribuídas en forma continua; de *con-*

ductores con ciertas masas eléctricas en sus respectivas superficies; etc.: en suma, un sistema tan complicado, ó tan sencillo, como se quiera, y rodeado de un campo eléctrico, es decir, de *un espacio* sobre el cual pueda ejercer su acción.

Tomemos, para fijar las ideas, un punto A, y determinemos, suponiendo en este punto una masa $+1$, la acción del sistema S sobre el punto A: sea la dirección de dicha fuerza AF.

Tomemos sobre AF otro punto A', infinitamente próximo al A, y determinemos asimismo la acción del sistema S sobre este segundo punto: su dirección A' F' diferirá infinitamente poco de la AF.

Repitamos esta operación un número infinito de veces, y tendremos el polígono infinitesimal, y en el límite la línea continua AA'A''A'''...

A esta línea se le da el nombre de *línea de fuerza* y queda con lo dicho perfectamente definida.

Una línea de fuerza cualquiera, la que pasa por A, por ejemplo, es aquella, en cada punto de la cual, la tangente coincide con la dirección de la fuerza que el sistema S ejerce sobre el punto de que se trata, si en él existe una masa de éter (es decir, una masa eléctrica); ó, suponiendo que fuese el vacío, la que ejercería, si en dicho punto se colocase cualquier masa: la masa $+1$, por ejemplo. Porque nótese que la dirección de F no depende de la masa del punto sobre el cual se busca la acción, sino del sistema en sí. Esto es evidente, puesto que

$$\frac{mF_x}{mF} = \frac{F_x}{F} \text{ etc.}$$

Como lo que hemos dicho del punto A, pudiera decirse de otro cualquiera B, resulta que todo el campo eléctrico, ó sea el sometido á la influencia de S, está cruzado por infinito número de *líneas* de *fuerza* AA$^{\text{IV}}$; BB', CC';...

Es como si dicho campo eléctrico estuviese cuajado de cordones elásticos, sometidos á las tensiones de las fuerzas F y reobrando unos sobre otros.

Esta concepción tan sencilla como fecunda é ingeniosa, y tan verdadera á mi entender, es debida al ilustre Faraday.

Más adelante insistiremos sobre ella.

A la noción de las *líneas* de *fuerza* va unida lógicamente la de las superficies *equipotenciales* ó superficies de nivel eléctrico.

Hemos dicho que la potencial de un sistema S, por relación á un punto cualquiera del espacio, es función de las coordenadas de este punto, de suerte que V es función de x, y, z: por lo tanto

$$V = V(x, y, z).$$

Si queremos conocer el lugar geométrico de todos los puntos en que la potencial tenga un valor constante C, tendremos que establecer la condición,

$$V(x, y, z) = C = \text{constante};$$

y dicho lugar geométrico será una superficie, que tendrá por ecuación la precedente y que se llama superficie *equipotencial ó de nivel.*

Variando el valor de la constante C, obtendremos una serie de superficies de nivel ó equipotenciales:

$$V = C;\ V = C';\ V = C'' \text{ etc.}$$

El espacio quedará dividido (*fig.* 7) en *zonas* por las super-

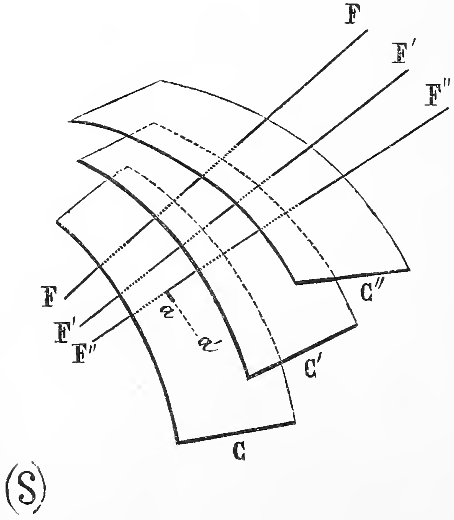


Fig. 7.ª

ficies de nivel, C, C′, C″... como quedaba dividido en filetes ó línea de fuerza por dichas líneas F, F′, F″.

Entre las líneas de fuerza y las superficies equipotenciales ó de nivel existe una relación geométrica notable: *las líneas de fuerza cortan normalmente á las superficies de nivel:* son trayectorias ortogonales de estas.

En efecto: tomemos un punto a (x, y, z) en una superficie de nivel $V = C$: y sobre esta superficie un punto infinitamente próximo a' cuyas coordenadas serán

$$x + dx, \; y + dy, \; z + dz.$$

Las cantidades dx, dy, dz satisfarán á la diferencial de $V = C$, y tendremos, puesto que C es una constante:

$$\frac{dV}{dx}\, dx + \frac{dV}{dy}\, dy + \frac{dV}{dz}\, dz = 0;$$

ó, representando por F la fuerza eléctrica en a, dividiendo por Fds y cambiando signos:

$$\frac{-\dfrac{dV}{dx}}{F}\,\frac{dx}{ds} + \frac{-\dfrac{dV}{dy}}{F}\,\frac{dy}{ds} + \frac{-\dfrac{dV}{dz}}{F}\,\frac{dz}{ds} = 0. \qquad (1)$$

Pero

$$\frac{-\dfrac{dV}{dx}}{F}; \quad \frac{-\dfrac{dV}{dy}}{F}; \quad \frac{-\dfrac{dV}{dz}}{F},$$

son los cosenos de la fuerza eléctrica del sistema S, ó de la tangente $F''F''$ en (x, y, z) á la línea de fuerza, con los ejes coordenados; y $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ son asimismo los cosenos de la tangente aa' á una línea cualquiera trazada en la superficie $V = C$: luego ambas líneas, según la relación (1) y en virtud de un teorema bien conocido de analítica, resultan perpendiculares: por lo tanto las líneas de fuerza cortan normalmente á las superficies de nivel, toda vez que la dirección de (dx, dy, dz), es decir de aa' en el plano tangente, es arbitraria.

Si en una superficie de nivel C (*fig.* 8.ª) trazamos un contorno A infinitamente pequeño, y por todos sus puntos hace-

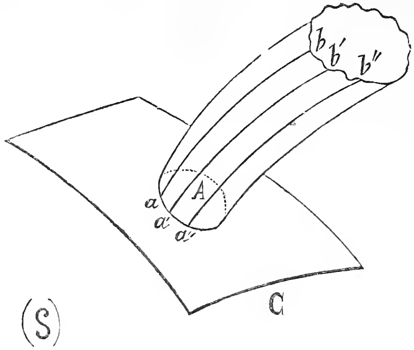


Fig. 8.ª

mos pasar líneas de fuerza *ab*, *a'b'*, *a''b''* ... tendremos un *tubo* de fuerza, de sección A.

La división del espacio por las líneas de fuerza puede expresarse inmediatamente de muchas maneras.

Primero. Por lo que llaman algunos autores el *flujo de fuerza*. Supongamos que sobre una superficie de nivel C (*figura* 9.ª) se traza una línea, que comprenda una área A; y sea F

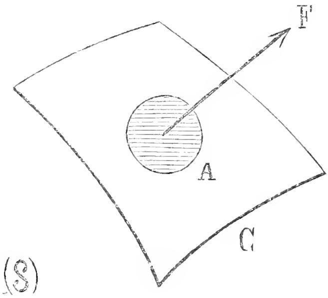


Fig. 9.ª

la fuerza eléctrica media del sistema S (es decir, del sistema cuyas superficies de nivel son C... y cuyas líneas de fuerza son F) respecto al área A: en este caso se llama *flujo* de *fuerza* al producto F $\times$ A; ó sea al producto de la *fuerza por el área.* Es como si la fuerza fuese un flúido y pasase con la velocidad F por la sección A. Pinta el flujo de fuerza materialmente, la circulación de la fuerza por el campo eléctrico. Es una representación cómoda y natural de las acciones eléctricas sobre el campo que rodea á las masas actuantes. Y además permite enunciar muchos teoremas de electro-estática y electro-dinámica con elegancia y brevedad.

Si A = 1, en este caso F por sí sola representará el flujo de fuerza.

Segundo. Por el *número* de líneas. Supongamos que F vale 8 unidades de fuerza y que A vale 1; pues se dirá que por cada unidad de superficie pasan 8 líneas de fuerza y por una superficie A pasaran 8A.

En general se calculan las acciones por el *número* de líneas de fuerza, cuidando de fijar en cada caso, sin género de duda, cual es la *unidad de línea* de fuerza que se elige. En nuestro caso una línea de fuerza es aquella sobre la cual actua la unidad de fuerza; y decir que en la superficie A actúan N líneas de fuerza es decir que actúa una fuerza de N unidades.

(*Se continuará.*)

José Echegaray.

CIENCIAS NATURALES.

CONGRESOS CIENTÍFICOS DE GINEBRA Y NANCY

EN AGOSTO DE 1886.

Con motivo de la reunión de la Sociedad helvética de Ciencias Naturales, congregáronse en la capital del Leman la geográfica y geológica suizas, la médica del país latino ó francés, y, por último, la Comisión de nomenclatura del Congreso internacional geológico, según acuerdo tomado en el de Berlín, con el objeto de ir preparando materiales para el que ha de celebrarse en 1888 en Londres.

Otros años completábase la Asamblea helvética realizando alguna expedición geológica después de sus sesiones; pero este verano creyó oportuno el Profesor de Lausana Renevier organizar la correría por los Alpes del cantón de Vaud para antes de reunirse aquella, á cuyo fin pasó invitaciones á los individuos de la Sociedad geológica, así nacionales como extranjeros: en virtud de cuya circular acudimos á Lausana con seis días de anticipación, ó sea el 4 de Agosto último, hasta diez ó doce entusiastas cultivadores de la ciencia, entre los cuales figuraba, siquiera en último lugar, el relator de este mal perjeñado informe.

Proponíase aquel Profesor, mi amigo, demostrar prácticamente la complicada estructura de aquella parte de la gran cordillera, acerca de cuya naturaleza y accidentes ha publicado varias Memorias interesantes, conservando en el Museo de aquella ciudad, que corre á su cargo, la mayor parte de las piezas justificantes, razón que le movió á que las consultáramos antes de realizar el reconocimiento que se hizo bajo su acertada dirección.

Terminada esta correría, nos reunimos en Ginebra con los restantes individuos de la Sociedad geológica y con los de las otras Corporaciones, que durante los días 10, 11 y 12 celebraron sus respectivas Asambleas. Al día siguiente trasladéme á la ciudad de Nancy, saludando en Berna á mi maestro de Geología alpina, Bernardo von Studer, que entró ya en sus 94 Abriles ó Diciembres, como se quiera llamarlos, haciendo el viaje por París, donde tenía que procurarme un libro nuevo sobre España y Portugal del Sr. Cartaillhac, acerca del cual tenía el presentimiento de que algo tendría que decirle en la sección antropológica de la Asociación francesa para el progreso de las ciencias, cuya décimaquinta Asamblea celebrábase en aquella capital de la antigua Lorena, desde el 12 hasta el 20 de Agosto.

En este Congreso casi puede decirse fuí el único representante de nuestro país, tan soberanamente indiferente por los grandes certámenes de la inteligencia que todos los años se verifican en las naciones que por esto mismo nos llevan una ventaja inmensa; y digo que fuí casi solo, pues siquiera hacia los últimos días se presentó el Dr. Hanser, este señor no figuraba en la lista de los asistentes á la Asociación como español, sino como Médico ejerciendo en Madrid.

En Ginebra por fortuna fuimos tres los españoles, á saber; D. Emilio Ribera, discípulo mío, Catedrático de Historia Natural en el Instituto de Valencia y su Secretario; D. Tomás Andrés y Montalvo, excedente del Instituto de Segovia, también Profesor en Historia Natural, que reside en Ginebra, donde desempeña no sé qué Comisión; y este impenitente y perpetuo congresista, á quien tan perfectamente bien sienta la vida de estudiante eterno y de viejo escudriñador, siquiera con escaso resultado, de la estructura y composición de la costra sólida del planeta que nos sirve de morada.

Pasando ya de estas generalidades al terreno práctico, entro resueltamente en materia, comenzando por manifestar que el principal objeto que se propuso el profesor Renevier, de Lausana, al disponer la expedición á los Alpes, de la cual y en la que él fué nuestro sabio y experto guía, era demostrarnos la presencia en el sitio llamado de las *Cabañas* y en los altos de Arbignan, 1621^{m} sobre el nivel del mar, del terreno carbonífero, con sus plantas características, en las consabidas y uniformes pizarras ampelíticas, de las que recogimos unos cuantos ejemplares, y algo más arriba, esto es, á 2.000 y pico de metros, en lo que se llama el diente de Morcles, una serie de capas tan profundamente dislocadas, que, á la manera de lo que en 1882 tuve el gusto de ver en el cantón de Glaris, se observa que los terrenos terciario y cretáceo ocupan la parte inferior de aquellos profundos barrancos, y los más antiguos jurásico, trias y hasta carbonífero, invertidos, se hallan como formando su magnífico remate ó coronamiento: ¡qué movimientos orogénicos aquellos, tan extraordinarios!: y ¡cómo se ostentan en toda su majestad tan remotos y seculares trastornos, en aquellos enhiestos picos, formados de capas verticales unas, rebasando otras la perpendicular, y todas con las más extrañas y caprichosas ondulaciones!: y ¡cuán pequeño y, si se permite la frase, liliputiense se presenta allí el hombre, en presencia y en medio de tan majestuosas escenas! Recuerdo á este propósito una famosa exclamación de uno de nuestros compañeros de viaje, el Profesor Fallenberg, de Berna, quien habiéndose despejado á la tardecita la niebla y las nubes que durante todo el día nos habían impedido gozar del grandioso panorama de Montblanc, y ostentándose este en toda su magnificencia, quitóse el hongo de viaje en señal de respeto, y dijo en alta voz: ¡Oh le Monarque! Explosión de entusiasmo hecha por un antiguo republicano helvético, quien, según la reflexión que hice en el acto, no encontró frase más propia para expresar la impresión de grandeza que la vista del coloso blanco le causaba, que la del Monarca, esto es, la de un Jefe de Estado, que prácticamente no se sabe lo que es en su tierra, pues por allí no se estilan los Soberanos desde hace muchos siglos. Y, sin embargo, el hombre tan anonadado ante las grandiosas escenas de aquellos Alpes incomparables, merced á la superioridad intelectual que le distingue, debida á ese destello de la Divinidad que eleva y enaltece su mente, es el único que no sólo las comprende, sino que hasta intenta explicar tan intrincados fenómenos por medio de teorías y hasta de experimentos ingeniosos, como los que explicó con el auxilio de aparatos de su invención en el Congreso de Berna, en 1878, mi amigo el Profesor Fabre de Ginebra (1) y los realizados por Heim de Zurich, Daubre de París, y de tantos otros. A este propósito, recuerdo que en la sesión de la sección geológica, celebrada el 13 de Setiembre de 1883 bajo mi presidencia, por más que estuviera muy lejos de merecer semejante honrosa distinción, que siempre se dispensa á los extranjeros como testimonio de afectuosa deferencia, los Sres. Heim, de Zurich, y Lory, de Grenoble, partiendo ambos del secular enfriamiento de la costra sólida, dieron ingeniosa explicación de dislocaciones análogas que la víspera habíamos visto desde el valle de Elm, y Kalkstokle 2.606^{m} hasta Linthal; y confieso que ninguna logró dejar mi ánimo convencido de la verdad del procedimiento por la naturaleza empleado para producir tan radicales trastornos. Todo esto en el encerado, por medio del dibujo, ó doblando unos pliegos de papel, se explica perfectamente; pero cuando se reflexiona que los bancos de los terrenos invertidos constan de rocas hoy duras y rígidas, y aunque fueran ó estuviesen blandas y pastosas cuando el hecho ocurrió, y la vasta escala en que hubo de realizarse, puesto que según se ve repite de un extremo á otro de la cordillera alpina, el ánimo se confunde, y siquiera aplauda los esfuerzos de ingenio que la cosa supone, se queda uno con la duda de si se habrá realizado como aquellos sabios pretenden, ó de otra manera, aun no puesta en claro. Y de que la cosa es dificililla de comprender, no tan sólo por inteligencias tan limitadas como lo es por desgracia la mía, sino por otras bastante más perspicuas, debe aducirse la prueba de existir autores respetables que, lejos de reconocer el hecho tantas veces observado desde que lo indicó Saussure á últimos del siglo

(1) Véase el libro de los Congresos de Chalon Berria, París, etc. donde se expone todo esto.

anterior, lo niegan en redondo, suponiendo que cada grupo de materiales ocupa el lugar que le corresponde.

Por supuesto que hoy no existe geólogo alguno, ni suizo ni extraño á aquel país clásico del saber, que admita semejante opinión, pues á más de las pruebas evidentes é incuestionables del hecho en sí, bajo el punto de vista estratigráfico, puede aducirse la de que en este linaje de disquisiciones hace de piedra de toque, ó de tribunal de alzada, la naturaleza é índole especial de los fósiles, los cuales encuéntrense en la posición que se quiera, siempre señalan de un modo evidente las condiciones biológicas bajo cuya influencia vivieron, y en cuyo concepto las capas que contienen los peces numulíticos del cantón de Glaris, aunque se hallen coronadas por otras muchas cretáceas, jurásicas y triásicas, siempre serán bastante más modernas. Conste, pues, que las tales inversiones totales de los materiales terrestres en diversos puntos de los Alpes, fué el objeto culminante de la expedición que como preliminar al Congreso realizamos Renevier, Heim de Zurich, Fallenberg de Berna, Boelim de Triburgo, Bertrand de París y otros varios, deseando todos ver por nuestros propios ojos, uno de los más notables ejemplos de estos grandes trastornos que allá en remotas edades sufrió nuestro globo. Pocos días después daba cuenta de todo ello en el Congreso de Ginebra el Sr. Director de la exploración, según se dirá en lugar oportuno.

Después de la correría por los Alpes, hábilmente preparada por el infatigable y laborioso Profesor de Lausana, Sr. Renevier, como por vía de aperitivo geológico, si es permitido decirlo así, regresamos á Ginebra, donde según queda dicho, iban á celebrarse varias Asambleas con motivo de la reunión anual de la Sociedad helvética de Ciencias naturales.

Por de pronto ésta congregábase allí en Agosto por la 69 vez desde su fundación, siendo la que dió en Europa el ejemplo del fecundo sistema hoy adoptado en los países cultos que disfrutan de sus notorias ventajas, reportando inmensas utilidades. Mas para reseñar, siquiera fuese á la ligera, los principales asuntos en todas aquellas Asambleas expuestos y discutidos, se necesitaría un libro como el que está presentado en el Ministerio de Fomento, y espero no he de tardar mucho en ver impreso, conocida la ilustración y amor patrio que distinguen á los Sres. Navarro y Rodrigo y Calleja, Ministro y Director de Instrucción Pública, respectivamente. No siendo, pues, posible hacer esto, sobre todo tratándose de una Revista como la de los progresos de las ciencias, habré de limitarme á lo que me parezca de mayor y más inmediato interés.

Comenzando por la Sociedad helvética, diré que ésta celebra, según su ley reglamentaria, una sesión general para dar comienzo á sus tareas, con el discurso del presidente y la exposición de temas generales; otra Asamblea para poner fin al Congreso, fijar el punto de reunión del año próximo, y discutir asuntos administrativos: verificándose en el día intermedio, la exposición de todos los asuntos de las diversas secciones; hallándose la cosa tan perfectamente dispuesta, que nada queda por hacer. Por supuesto que con esto alternan los obsequios y agasajos de Corporaciones y particulares, aprovechando los momentos que dejan libres las tareas, y sobre todo las noches; pero, aunque en este concepto la ciudad de Ginebra y sus representantes echaron por decirlo así el resto, me abstendré de hacer la menor indicación, tanto para no robar tiempo y espacio en la Revista, con el relato de asuntos profanos y ajenos á la ciencia, siquiera la hagan más amable, cuanto para no excitar la envidia en sus numerosos lectores.

Concretándome, pues, á lo puramente instructivo, debo comenzar haciendo los elogios que se merece el discurso del presidente Sr. Soret, así por la elegancia y corrección de estilo, como por la trascendencia del tema que desarrolló sobre las relaciones que existen entre las ciencias físicas y la estética ó la ciencia de lo bello. Después de las frases de galantería dedicadas en primer lugar al bello sexo que asiste á dichas funciones, y también á los congresistas todos, pero muy especialmente á los extranjeros, comenzó el Sr. Soret su interesante peroración recordando que en Ginebra nació en 1815 la Sociedad helvética, y que allí se celebró también el 50.º aniversario de sus Asambleas, consagrando con este motivo un delicado recuerdo á la memoria de los malogrados Augusto de la Rive y Julio Pictet, presidente y vicepresidente de la celebrada en la capital del Leman en 1865, y dirigiendo lisonjeras pero merecidas frases á Alfonso Decandolle, que fué otro de los vicepresidentes de aquella Asamblea, conservado, á Dios gracias, según propias frases, en la plenitud de su actividad científica.

Entrando luego de lleno en el desarrollo de la tesis, hizo notar que por medio de los sentidos recibimos las impresiones estéticas y penetra en el espíritu el sentimiento de lo bello, proporcionándonos los goces más puros y delicados, de donde es fácil inferir que á dicha percepción concurren dos elementos, fisiológico el uno, que enlaza ó procede de las ciencias físicas y naturales, psicológico el otro, cuya importancia suprema en manera alguna puede desconocerse. Ahora bien, añade el orador: reflexionando acerca del aspecto fisiológico del problema, llama muy particularmente mi atención, la capital importancia que hay que conceder á la repetición de los mismas sensaciones; siendo este el momento que me obliga á discurrir sobre el particular, como elemento de primer orden para la determinación de las relaciones que existen entre la ciencia y la belleza, declarando noblemente el discreto Sr. Soret, que la idea lejos de ser nueva, se encuentra ya iniciada en la teoría física de la Música de Helmholtz, por más que sea de lamentar no verla suficientemente generalizada, á lo cual dice desea él contribuir con este estudio. Después de manifestar que empleará en el discurso la frase impresiones ó sensaciones estéticas, no en el sentido que le da el vulgo, sino en el sentido científico, en el que muchas cosas sin alcanzar un alto grado de belleza, son, sin embargo, tan agradables que el encanto que producen no debiendo confundirse con el goce puramente sensual, entra de lleno en los dominios de la Estética, hecha ya esta indispensable declaración, pasa á clasificar en dos grandes categorías las impresiones bellas, á saber:

1.ª Las que se refieren á los caracteres físicos y materiales de las cosas ú objetos, en cuyo concepto apreciamos por las sensaciones directas las cualidades que nos agradan ó nos repugnan; como por ejemplo, podemos encontrar bello un objeto por sus formas ó por el conjunto armónico de sus colores.

2.ª Las impresiones estéticas, generalmente de orden superior ó más sublimes, que son de índole psíquica ó intelectual; en este caso las sensaciones físicas sufren los efectos de una reacción provocada ó puesta en función por la inteligencia, en virtud de la cual, ya no son ni las formas mismas, ni las otras cualidades físicas las que nos encantan, sino más bien las ideas que la contemplación de las mismas hacen brotar en el espíritu.

Excusado es declarar que muy á menudo ambos elementos físico y espiritual se confunden y compenetran, circunstancia que no podía menos de dificultar la tarea del Sr. Soret, quien, atento más bien á dar la preferencia al concepto de la ciencia física que con tanto provecho cultiva, no podía en muchos casos prescindir del elemento psíquico, cuya importancia es preponderante en la estética, según propia declaración. También recomienda el mismo no olvidar que el sentimiento general concede á la variedad grande importancia, como condición necesaria de la percepción de lo bello; ya que por sí sola no basta para despertar ó producir impresiones bellas, contribuye á avivarlas, ó por lo menos, á evitar que se emboten ó adormezcan.

Hechas ya todas estas advertencias previas, entra Soret resueltamente en el fondo de la complicada é interesantísima cuestión, dividiendo el discurso para mayor claridad, en tres partes equivalentes á las tres categorías principales en que por decirlo así, se hallan sintetizados todos los materiales que las artes toman ó reciben de nuestras impresiones ó sensaciones propiamente dichas. Pasaremos, pues, en revista, sucesivamente, dice aquél, lo que concierne á la forma de los objetos, que percibimos por el sentido de la vista; luego examinaremos los sonidos que entran por el oído; y, por último, los fenómenos que ofrecen los colores; en todos cuyos conceptos fácil será apreciar la importancia que tienen las impresiones repetidas ó reiteradas.

En la imposibilidad de seguir paso á paso al sabio Profesor en el desarrollo de su hermoso tema, habré de limitarme á apuntar tan solo los títulos de las tres partes que comprende su discurso, y las divisiones que en cada una de ellas admite, con el exclusivo fin de despertar la curiosidad del lector, quien podrá saborear las delicias de esta producción científica y literaria, bien sea leyéndola en la *Revista* titulada *Archives scientifiques de Géneve*, ó en el oportuno y extenso extracto que yo inserto en el informe sobre dicho Congreso, el día tal vez próximo, en que tenga el gusto de verlo en letras de molde.

Primera parte.—La forma:

La belleza de la forma constituye la base de la Escultura, de la Arquitectura y del arte del dibujo: limitándonos al examen de las impresiones de orden material, veamos cuáles son los principales caracteres geométricos y fisiológicos que nos agradan en la forma de los objetos.

El 1.° es la Simetría, y de ella trata extensamente en el primer capítulo.

El 2.° lo representa la múltiple repetición de una misma figura, que es lo que Soret llama dibujos ó diseños repetidos, y explana ingeniosamente en 2.° capítulo.

El 3.° es la continuidad de las líneas y superficies, que expone perfectamente y con varios ejemplares, en el cap. 3.°

En el 4.° de la primera parte explana el concepto de la función que desempeñan las impresiones repetidas.

La parte 2.ª la titula Soret los sonidos, cuyos caracteres estéticos son:

El 1.° el ritmo, asunto del primer capítulo, en el que expresa todo lo que constituye la belleza, fundada en el orden y regla que presiden á los intervalos de tiempo, según el cual se suceden las notas, los acordes y hasta los ruidos.

El 2.° lo representa el sonido musical ó la continuidad.

El 3.° lo sintetiza en la escala musical y la melodía.

El 4.° la repetición de los temas melódicos.

Y el 5.° la armonía.

Por último, la 3.ª parte del discurso lo titula su autor:

Los colores, cuya belleza estriba en su sentir:

1.° En la mezcla y combinación armónica.

2.° En la sobre ó justaposición ordenada de los mismos.

Y 3.° en la repetición de los matices ó tintas que los distinguen.

Terminada toda esta exposición, por vía de síntesis el Señor Soret aplica las enunciadas premisas á las bellezas que ostenta la naturaleza, primero en el reino animal, luego en el botánico, contemplados los vegetales desde luego aisladamente y más tarde en el conjunto que recibe el nombre de vegetación y paisaje, examinándolo en cada uno de sus tres elementos ó factores, á saber: la atmósfera ó el cielo, el agua y la tierra propiamente dicha.

Terminado el discurso del Presidente, la Asamblea acordó por aclamación que la Sociedad se reuniera el año próximo 1887 en Fraeenfeld (cantón de Turgovia) bajo la presidencia del Profesor Grubermam, tomando además varias otras resoluciones concernientes al régimen interno de la corporación, al nombramiento de socios honorarios, recepción de nuevos adictos, etc.

En aquella misma Asamblea general el Sr. Marcel Desprez expuso los brillantes resultados obtenidos por él, en la trasmisión á distancia de la fuerza desarrollada por la electricidad. Los ensayos hanse realizado entre París en la Chapelle y Creil puestas ambas máquinas en función por una de Gramm, habiéndose conseguido con una sola generatriz y otra receptora transportar á 56 kilómetros de distancia una fuerza industrial utilizable de 52 caballos con un rendimiento de 45 por 100 sin exceder una corriente de 10 amperes y velocidad de 216 vueltos por minuto. A cada vuelta de los anillos de la máquina generatriz se obtiene un trabajo mecánico de 1.000 á 1.200 kilogramos utilizable en la industria á 56 kilómetros de distancia, asegurando el eminente físico francés que el rendimiento de fuerza puede llegar á ser de 50 por 100 imprimiendo á la máquina una fuerza que dé 300, en vez de 200 vueltas, disminuyendo en igual proporción la resistencia de los anillos.

En la propia sesión inaugural el Sr. Alberto Rilliet dió cuenta de los resultados obtenidos acerca de la transparencia de las aguas del lago Leman por la Comisión nombrada en 1883 á propuesta de Mr. Soret, y de la que formaban parte C. de Candolle, Fol, Plantamour, Raoul Pictet, A. Rilliet, Soret, J. T. y Carlos Soret: he aquí las principales conclusiones obtenidas de los numerosos ensayos y estudios hechos:

1.ª El agua es mucho más transparente en Invierno que en Verano.

2.ª Esta transparencia es mayor en las grandes profundidades, lo cual confirma el resultado de las investigaciones de Mr. Forel.

3.ª Los diferentes colores no se trasmiten por igual, observándose que el agua absorbe de preferencia las radiaciones menos refrangibles.

4.ª La intensidad de la luz influye poco en cuanto á la distancia á la que desaparece el objeto, siendo sensiblemente gual para una lámpara de arco muy brillante y para otra de solas algunas bujías.

5.ª El límite de la visibilidad es siempre el mismo, cualquiera que sea la dirección de los rayos lumínicos.

A estos resultados el Sr. Fol agrega los obtenidos por él y por Sarasín acerca del estudio comparativo de las aguas del lago y las del Mediterráneo, del cual resulta que estas son mucho más transparentes supuesto que llega á 400 metros el límite de la penetración de la luz, al paso que no excede de 240 en las aguas del Leman, diferencia que Forel atribuye á la presencia en éste de grandes cantidades de polvo que no enturbian las ondas mediterráneas.

Por último, el Profesor Alberto Heim de Zurich presentó un aparato que ha inventado para evidenciar los efectos de la presión que los materiales terrestres producen en los fósiles en general, pero muy especialmente en los peces, en virtud de cuya variada deformación resulta haber tomado, sobre todo Agassiz, por especies diferentes, lo que sólo debe considerarse como consecuencia legítima de estas acciones terrestres. Asunto es este de la mayor importancia para el paleontólogo, pues como ya han hecho notar varios autores, y especialmente D'Orbigny en su *Paleontología estratigráfica*, la deformación puede llegar hasta cambiar los caracteres genéricos y específicos de los restos orgánicos.

Levantada á las doce la sesión, la Sociedad trasladóse inmediatamente y en masa al paseo llamado de los Baluartes, con el fin de inaugurar el monumento, dedicado al fundador de la Sociedad helvética H. A. Gosse, reducido al retrato de éste , abierto en un canto errático procedente de una propiedad de la familia titulada Mont-Gosse en las faldas del llamado

Saleve, y en territorio del pueblo de Mornex (Saboya), donde el día 6 de Octubre de 1815 inauguróse la Sociedad helvética de ciencias naturales. Una inscripción en la cual figura esta fecha y la dedicatoria de la Sociedad á su fundador en 1886 completan el monumento que por su especial índole no sólo recuerda uno de los hechos más curiosos que en Suiza ofrece el estudio de la Física terrestre, sino también el que mereció entre otros la predilección de el fundador y de muchos otros distinguidos naturalistas, como objeto de sus minuciosas investigaciones. La ceremonia estuvo brillante, amenizándola varios oradores con su calurosa palabra, los unos como Sarasín en honor de Enrique Alberto Gosse; los otros como el Sr. Court, hablando á nombre del Consejo administrativo de la ciudad de Ginebra, prometiendo respetar y proteger un monumento que tanto honra á la Sociedad y al país todo, y por último, el nieto del fundador Catedrático en la Academia de Ginebra, para dar gracias por la señalada honra que se dispensaba á la familia. El discurso del Sr. Serasín versó principalmente sobre la historia de la Sociedad helvética, iniciada ya en Berna á fines del siglo XVIII, por la reunión de delegados que se verificó en 1797 en Herzogenbuchse, y definitivamente constituída en 1815 poco tiempo después de entrar el de Ginebra á formar el cantón 22 helvético. La fecha, según se grabó en el canto errático, de este acontecimiento memorable, fué el 6 de Octubre de aquel año y el lugar de la reunión la bonita residencia de la familia Gosse en Mornex, á donde acudieron los invitados en número de treinta y seis á quienes obsequió con una modesta y frugal comida en un templete que había erigido á la buena naturaleza, donde tras de solemne invocación á la Providencia, declaró fundada la Sociedad helvética de ciencias naturales. En la noche de aquel día solemne la Sociedad reunióse en el local de la llamada de las Artes, para constituirse definitivamente, nombrando presidente para la sesión próxima al Sr. de Wyttenbach de Berna que fué uno de los más eficaces auxiliares de Gosse en la realización del feliz pensamiento, y lo llamo así, porque sin género alguno de duda la Sociedad helvética ha contribuído de una manera eficacísima á los admirables progresos que la cultura general del país ha realizado.

de la mencionada Institución helvética, pasa el Sr. Sarasín á señalar los grandes servicios á la ciencia y á la patria por su fundador Gosse prestados, debiendo entre otros hacer especial mención, de los notables estudios que llevó á cabo y publicó acerca de la digestión; de la invención, auxiliado de Schwapp, del procedimiento para la fabricación de aguas minerales artificiales; de la aplicación del hidrógeno en vez del aire caliente para la navegación aérea; de la enseñanza de la botánica, y formación de un precioso herbario que hoy se conserva en las colecciones de la ciudad. Gosse fué también fundador del primer periódico de Ginebra, y en los primeros tiempos de la ocupación francésa desempeñó las funciones de agregado auxiliar del Alcalde de Ginebra.

La idea que logró ver realizada, implantándola allí donde el terreno estaba perfectamente preparado, de los Congresos por decirlo así ambulantes, ó *itinerantes* como dice el Sr. Sarasín, fué más tarde imitada en Alemania, Inglaterra, Francia y otros países, pero por desgracia el creador de tan fecundo pensamiento, no pudo asistir á la segunda Asamblea por haber sucumbido á una afección cerebral el 1.° de Febrero de 1816.

Puso fin Sarasín á su discurso, dirigiendo al Presidente é individuos del Consejo administrativo de la ciudad frases de galantería y reconocimiento por haber secundado los deseos de la Sociedad, y encomendando al celo y amor patrio que á todos distingue, la conservación del monumento que tan gratos recuerdos entraña: concluyendo con un viva á la Suiza y á la Sociedad helvética de ciencias naturales, que fué repetido por la muchedumbre que se había congregado.

Las palabras que pronunció el Sr. Constan en su calidad de Presidente del Consejo administrativo, fueron breves pero elocuentes y entusiastas, así como el breve y expresivo discurso de gracias del nieto del fundador con el que terminó la grata ceremonía, mereció los más calurosos aplausos.

El día siguiente 11 de Agosto destinóse mañana y tarde á los trabajos de las respectivas secciones; pero antes de proceder á señalar lo más importante de lo que en ellas se trató, vamos á referir por lo menos, los asuntos que se abordaron en

Trazada de esta manera la historia del origen y desarrollo la segunda Asamblea general que se celebró el día 12 y con lo cual dióse por terminada la sesión 69, anunciando la 70 para 1887, en Frauenfeld (Turgovia).

El primer asunto que se expuso y discutió en dicha segunda Asamblea general fué el relativo á la formación de los médanos y su importancia como facies geológica é hidrográfica, desarrollado perfectamente por el Sr. Bouthislier de Beaumont presidente honorario de la Sociedad de Geografía de Ginebra. Tomando como tipo los médanos del Departamento de las Landas (Francia), y apoyando su razonamiento en la ilustración que le suministraron varios mapas, propúsose tan distinguido físico demostrar que más bien que los vientos que soplan del atlántico, las aguas del mar son las que deben considerarse como principal agente de este hecho geográfico.

El Profesor de París Alglave discurre extensamente y con gran energía contra el alcoholismo, al que considera como verdadera plaga de la Sociedad moderna, pues asegura que si bien el alcohol etílico es casi inofensivo, los llamados amílico y propélico son tan dañinos, que en su concepto bastan 30 gramos de cualquiera de ellos para envenenar á una persona.

Conocida la causa de tan grave mal, este Profesor, que es uno de mis amigos asistente asiduo á los Congresos, después de apuntar varios remedios para combatirlo, se decide, apesar de ser ultraliberal, por el que consiste en conceder al Estado el monopolio de la fabricación.

Otra comunicación importante hizo en dicha reunión general el Profesor H. Fol de Ginebra, sobre la rabia y el microbio que la producen en sentir de Pasteur y Gilier, de quienes hace los más calurosos elogios, asegurando que el procedimiento de la inoculación preventiva es el más eficaz, sin perjuicio de continuar practicando la cauterización de las heridas, por cuanto la inmunidad que aquella pueda dar no siempre es segura ni absoluta. Y como quiera que en los casos de heridas profundas en la cabeza, el hierro candente ofrece algún peligro por la difícil aplicación, el señor Fol aconseja el empleo de la esencia de trementina, la cual sobre no ofrecer ninguno de los inconvenientes que tienen el ácido fénico, el agua oxigenada y el sublimado corrosivo, obra con gran eficacia, aunque se aplique muy diluída.

El Doctor Marc Dufour, de Lausana, expuso sus ideas acerca de las causas de la ceguera, que son: 1.º la blenorrea de los recién nacidos; 2.º las keratitis é iritis de los primeros meses de la vida; 3.º la atrofia de los nervios ópticos, sea local, cerebral, consecuencia de meningitis, etc.: 4.º deformaciones congénitas del bulbo, microtalmo, etc.; 5.º las cataratas congénitas; 6.º enfermedades internas del ojo; 7.º viruela, y 8.º accidentes varios.

Del examen comparativo de los informes del Asilo de Lausana durante un espacio de tiempo que no baja de 35 á 40 años, resulta: 1.º que disminuye hasta casi anularse por completo la blenorrea; 2.º que por el contrario, aumenta la atrofia del nervio óptico, siendo casi siempre local ó cerebral, jamás espinal; y 3.º que las causas congénitas permanecen invariables ó estacionadas.

Por último, puso fin á dicha sesión solemne, el insigne y humorístico Profesor Carlos Vogt, disertando con amplitud sobre algunas herejias darwinistas, tendiendo á demostrar: 1.º que las clasificaciones zoológicas son todas artificiales, por cuanto no pueden expresar la procedencia filogénica de los seres comprendidos en un grupo, debiendo tener en cuenta para ello los datos elocuentes que nos suministra la geografía geológica; 2.º que la llamada ley biogénita es falsa, por cuanto las fases de la ontogenia y las de la filogenia no pueden corresponderse, no existiendo un dessarrollo armónico en el concepto de desarrollarse todos los órganos á la par, sino supeditándose los unos al predominio de otro ú otros, según se observa en el hombre en el que todo se halla subordinado al desarrollo cerebral, las armonías sólo son relativas, y 3.º que los cuadros zoológicos filogénicos no deben, en la inmensa mayoría de los casos, proceder de lo simple á lo complicado, sino al revés, debiendo figurar como tronco ó copa lo que en Paleontología se llaman tipos colectivos, explicándose de este modo la presencia en los terrenos más antiguos de tipos de organización muy compleja. De aquí infiere Vogt, y así lo expuso en aquella conferencia que tuve el gusto de oirle, que la *cenogenia* ó embriología falsificada es una idea ó un concepto perfectamente ilógico, por cuanto, dice, que no pudiendo verificarse las transformaciones sino sobre órganos ó rudimentos de ellos, la consecuencia natural es que los organismos complejos no pueden proceder de tipos simples, en razón á que éstos no llegan á poseer los esbozos de dichos órganos, sino por el contrario, los animales sencillos deben proceder por retrogradación sucesiva de troncos complejos. De todos modos, decía Vogt para concluir, por virtud de la convergencia de los caracteres, nuestra clasificación con referencia á las cepas de los diferentes tipos, mejor que como se ha hecho hasta ahora, deberá representarse, y así lo dibujó en la pizarra, á la manera de los árboles puestos en espaldera, en la cual se observa que los diferentes compartimientos contienen ramas que arrancan de troncos diversos.

Oyendo primero tan interesante conferencia, y reflexionando después acerca de lo que con la habilidad y gracia que le distingue expuso el insigne Profesor ginebrino, decía para mis adentros, ¿serán en puridad ciertos y positivos los principios sentados por mi amigo Vogt, ó deberá considerarse lo dicho como ingeniosa explicación de los muchos hechos paleontológicos poco propicios á la teoría transformista, de la que siempre hubo aquel de mostrarse entusiasta partidario? Dejo al buen juicio del lector que saque la consecuencia que el diferente grado de cultura le permita, bastando á mi propósito dejar consignada esta perplejidad del ánimo.

El día 11 de Agosto fué el destinado mañana y tarde á la reunión de las varias secciones de la Sociedad helvética, y apesar de ser el tiempo tan limitado, es lo cierto que merced al espíritu práctico que preside en la discusión y del que se hallan todos animados, es grande el partido que se saca, porque á la sobriedad en la exposición de hechos y doctrinas, se agrega el ser harto raro empeñarse en estériles controversias, como por desgracia sucede en otros países.

Respondiendo el relator de estos Congresos á tan prudente y acertada conducta, y ateniéndose á ella extrictamente, procede en consecuencia á exponer lo más importante de la sección de Física que ocupa el primer lugar en dicha Asamblea.

Bajo la presidencia del Profesor Hagenbach, de Basilea, y desempeñando las funciones de Secretario el Dr. Guye de Ginebra, inauguró las tareas el Profesor Amagat de Lión (Francia) exhibiendo un manómetro inventado por él mismo, y discurriendo después acerca de la medida de las altas presiones en el estudio de la compresibilidad de los cuerpos; en apoyo de cuya doctrina adujo luego observaciones muy atinadas sobre la compresibilidad del agua y del éter. A esta comunicación siguió la de Luciano de la Rive, ensalzando los resultados de estos experimentos y tentativas, ya que las constantes que resultan, permiten comprobar las consecuencias matemáticas de las hipótesis ideadas para darse cuenta del trascendental problema de la constitución de la materia.

El Sr. Forster, Catedrático y Director del Observatorio de Roma, relata los resultados obtenidos con los *tronómetros* sincrónicos montados en Basilea y Berna, para la observación de movimientos microsísmicos.

Marcel Deprez advirtió que en su concepto las indicaciones suministradas por los tronómetros tales como los instalados en las capitales indicadas, no dan la medida absoluta de la intensidad de los movimientos microscópicos terrestres. Este mismo diligente físico francés describió dos nuevas disposiciones por ól ideadas, con el objeto de alcanzar la mayor exactitud posible en la medida de la pesantez, apreciada con el péndulo; en la 1.ª las oscilaciones se cuentan automáticamente sin el menor roce mecánico, al paso que en la 2.ª el modo como se verifica la suspensión, evita el tener cuenta en la distribución de la masa del cuerpo, hallándose todos los puntos animados al propio tiempo, de una misma velocidad de traslación.

El Sr. Gladstone de Londres, expone los resultados de sus últimos estudios sobre los equivalentes de refracción y de dispersión; insistiendo en la manera como pueden servir estas constantes en el estudio de ciertos casos de isomnería, en química orgánica.

El Profesor Thuv de Ginebra, describe el nuevo sismómetro anotador construído bajo su dirección para el Observatorio de aquella capital, á cuyo propósito el Sr. Forel señala los excelentes resultados obtenidos con aparatos iguales por la Comisión anglo-japonesa.

El Profesor Lang de Viena, dice y prueba que el método estático puede servir á demostrar ciertas propiedades de la relipse.

El Catedrático Enrique Dufour, de Lausana, comunica los resultados por él obtenidos en las investigaciones hechas con las substancias higrométricas, presentando también un aparato por él inventado, para medir la evaporación, construído con arreglo al principio del *siccimetro* suyo, pero con un ingeniosa modificación que facilita sobremanera la lectura de los resultados.

El Sr. Luciano de la Rive, presenta una Memoria matemática sobre la composición de las sensaciones y su aplicación á la idea que pueda formarse del concepto de espacio.

Forel de Morges, comunica las observaciones hechas en la gruta natural de Arolla, acerca de la estructura del glaciar, las cuales le han probado que este no es infiltrable, aun sometiéndolo á la presión de dos atmósferas.

El Profesor Carlos Dufour, de Morges, habló de la aceleración observada en la marcha de la luna, y del modo como en su sentir podría darse exacta cuenta del fenómeno.

Terminadas las tareas de esta sección, que duraron siete horas, casi no interrumpidas, sus individuos trasladáronse al Observatorio, para oir las explicaciones que dió el Sr. Thuv sobre el sismómetro suyo, del que antes se ha hecho mérito.

La sección de Química nombró presidente de honor al Profesor Marignac de Ginebra; presidente efectivo, al Catedrático Grœbe, también de aquella Universidad y Secretario á Claparede.

Comenzó en ella el Profesor Schiff de Florencia, dando cuenta de la esparragina, y de un isomero físico y químico recientemente preparado, la dextro-esparragina. Él mismo presenta dos aparatos, á saber; una lámpara microquímica, que da una llama muy diminuta; y un refrigerante de bolas, dotado de considerable poder condensador.

El presidente Græbe, expuso el resultado de investigaciones hechas en colaboración del Dr. Féur, sobre la constitución del euxantono, principio que se extrae del amarillo índico, materia colorante de origen desconocido, opinando que no se puede aplicar la fórmula de una lactona.

El propio Profesor, auxiliado en parte por el Sr. Julliard, ha hecho interesantes estudios acerca de la composición del ácido diftálico, observándose que tratado con la potasa cáustica, se obtiene una reacción semejante á la de la benzila, siquiera vaya hasta dar una lectona, derivada del difenilmetano.

Dióse cuenta de que el Sr. Racine ha logrado preparar á fuerza de paciencia el aldeido-ácido — $C_6H_4 < {COOH \atop CHO}$, que se buscaba inútilmente hace mucho tiempo sin poder obtenerle.

A este propósito dijo el Sr. Schiff, que hace cosa de 20 años fué él quizás el primero que empleó la reacción de la rosanilina y el ácido sulfuroso, para reconocer los aldeidos.

El Profesor Billeter de Neufchatd, dice haber obtenido diferentes ditio-carbimidos ó esencias de mostaza (isosulfocianatos), tratando las diaminas con el cloruro de thiocarbonilo; además dió cuenta de ciertas modificaciones introducidas en el procedimiento más comúnmente empleado.

El Catedrático de la Universidad de Upsal P. T. Cleve, indicó un caso de isomeria que se observa por el ácido platoxálico.

El Profesor Schiff, dice haber estudiado la materia colorante roja descubierta por Persoz, mezclando la anilina con el furfurol, de cuyos dos cuerpos participa, en la proporción de 2 moléculas de la primera por una de la segunda. La reacción se debe, según el mismo, al grupo aldeídico del furfurol: la substancia coloreada procede de un cuerpo análogo al trifenilmetano. Como la coloración de la anilina permite advertir con facilidad la presencia del furfurol, el Sr. Schiff asegura que se encuentra en muchas reacciones y especialmente en no pocas operaciones culinarias.

La sección geológica designó como presidente al Profesor Capellini, de Bolonia y secretario al Dr. Hans Schardt, de Montreux.

El Sr. Lory Catedrático de Geologia en Grenoble, dió cuenta de la existencia en las rocas jurásicas del Delfinado y Bajos Alpes, de cristalitos microscópicos inatacables por el ácido clorhídrico diluído, y afectando la forma de prismas bipiramidales; asegurando que los unos son de cuarzo, y los otros de aspecto clinoroínbico, ofrecen la composición del feldspato ostosa.

El Sr. Greppín, de Basilea, dió cuenta del hallazgo de una notable fauna fósil en un reducido espacio vertical de la grande oolita del jurárico en el cantón de Basilea, representada por 150 especies, todas de pequeña talla, pero muy bien conservadas, que formaran el objeto de una interesante Monografia.

El Sr. Renevier asegura que existe notable analogía entre esta fauna y la por él observada en el departamento francés de Calvados; pero Lapparent dice que hay diferencia de nivel entre la roca de los Ardenes, la de la Normandía y de la verdadera grande oolita.

El Sr. Fellenberg, de Bema, refiere el descubrimiento hecho cerca del pueblo de Guttannen (Haslithal), de un tronco de árbol fosilizado en el interior de un gran canto de gneis, pareciendo indicar el aspecto de un enorme calamistes, que mide $1^{m},50$ de largo, y bastante grueso. Enseña además el mismo Profesor dos fotografías de este interesante objeto que figura hoy en el Museo de Bema.

A propósito de este hallazgo, Capellini y Baltzer, de Roma, recuerdan el de un calamites encontrado en otro canto de gneis en la Valtellina, por Sismonda.

El Sr. Golliez, de Saint-Croix, dió algunos detalles acerca de la estratigrafía y fósiles curiosos encontrados en las cercanías de aquella villa, en el Jura vaudense, y en especial sobre el horizonte harterivense, en cuya parte inferior existe una fauna muy rica, contenida en capas cuyo espesor no excede de 10^{m}; con la particularidad de recordar á la vez la base de aquel horizonte y la parte superior del Valenagine, dando la lista caracteristica de los fósiles que contiene, entre los cuales está la ostrea Couloni, muchos gastrópodos, espongiarios, y pequeñas tereturablas.

El Sr. Schards, es de parecer que dichas capas son las equivalentes en el Jura de Neufchatel, de las margas de Briozoos, y del horizonte del Am. Astierianus, y en el Jura meridional (Reculet, Unache, Saleve, etc.), de la caliza de ostrea rectangularis, cuya facies recuerda la de el piso Valenginense superior.

Gollier dice que esta ostrea es muy rara en el Croix, no habiendo podido recoger más que un solo ejemplar.

Jaccard asegura haber observado hechos análogos en el Jura de Neufchatel, y Renevier siente que Gollier no haya hecho la separación de los fósiles de las diferentes capas que encierra la mencionada fauna, pues hubiera sido muy interesante observar la afinidad de los fósilés contenidos en cada capa, con los pisos superiores ó inferiores.

El Profesor Hebert, de la Sorbona, expuso las últimas observaciones hechas en las más antiguas formaciones de sedimento de el N. O. de Francia, compuestas de filadios, de conglomerados de color púrpura, y de pizarras y areniscas rojizas, situadas sobre las rocas cristalinas, y sirviendo de base al terreno cambrico, y quisiera que la expresión precámbrico fuera sustituída por la de arcáica ó arqueense, aplicándola á los filadios y conglomerados, con exclusión de las pizarras cristalinas.

El Sr. Renevier no acepta esta idea; pues, en su sentir, el vocablo arcáico debe reservarse para las pizarras cristalinas, y no para los filadios y conglomerados purpúreos.

Tercia también en el debate Lapparent, cuya opinión es contraria á la de Hebert.

El supremo juez en esta materia es la Sociedad geológica de Francia, la cual, por cierto, se reunió pocos días después en el lugar del litigio (Bretaña), para resolver la cuestión: ya nos lo dirá el *Boletín* que aquella publica.

El Profesor Renevier, en su calidad de Director de la exposición realizada por los Alpes, como preliminar del Congreso, dió somera cuenta de todo lo que en ella nos fué dado observar, entre lo cual descuellan los replegamientos y gigantescas inversiones de terrenos, y la sucesión, no siempre normal; de éstos, desde las pizarras cristalinas y permo-carboníferas, pasando por los secundarios, hasta el numulítico y el horizonte del Flisch.

El Sr. Sinner, de Berna, dice haber observado un grupo de 50 cantos erráticos situados á corta distancia de Yoerdon, al descubierto desde hace poco tiempo, pues antes se hallaban sumergidos en las aguas del lago de Neufchatel; son de granito, de gueis, de pizarras micáceas, de pudingas y hasta de caliza.

El Sr. Schardt de Mondreux, describió la estructura geológica de los dientes del Mediodía y de las torres dichas Salieres, en cuyos enhiestos montes el terreno jurásico no llega hasta las altas cumbres, deteniéndose en el punto dicho collado de Susanfe, dando origen con sus estratos, varias veces replegados, á las Salieres y al monte Ruan. El horizonte neocomiense formando grandes ondulaciones, constituye toda la arista que se extiende desde el diente de Bonnavaux hasta la cima del Este. El numulítico aparece en Salanfe y en los picachos llamados de Gagneaic. Los perfiles que el Sr. Schard presentó como complemento de su comunicación, ofrecen una notoria semejanza con los trazados por Renevier representativos de los Dientes de Morces.

El Dr. Maillard, de Zurich, reseña las investigaciones hechas en las plantas fucoideas del flisch coceno, las cuales han dado por resultado advertir que ciertas formas que se consideraban como propias de géneros diferentes, se encuentran á veces en el propio individuo, citando en apoyo de este aserto el género Caulerpa, que no es sino la parte basilar de los Chondrites, ocurriendo otro tanto en el género Delesserites, respecto de el Caulerpa: de todo lo cual saca Maillard una consecuencia contraria á la teoría de Nathorst que atribuye los fucoides á impresiones de Vevmes.

El Sr. Renevier, asegura en pro de la naturaleza vegetal, no sólo de los Fucus del Flisch, sino también del Zoophycos del horizonte batonense, por haberlos visto cubiertos por una capa ó película de materia carbonosa.

El Sr. H. de Saussure, da extensa descripción de los terrenos que constituyen el istmo de Corinto.

Por último, el Sr. Steinmann, de Friburgo en Brisgovia, reseñó extensamente la estructura geológica de la cordillera de los Andes, que durante dos años recorrió con detenimiento.

A las tres de la tarde, terminadas ya las tareas de la sesión, reunímonos bajo la presidencia del Sr. Capellini, los de la comisión internacional geológica de nomenclatura para discutir los temas que han de proponerse al Congreso de Londres en 1888.

JUAN VILANOVA.

VARIEDADES.

Sobre la resolución en números enteros de la ecuación indeterminada de primer grado $ax + by = c$.

La ecuación de que se trata sólo admite soluciones enteras cuando los coeficientes a y b son números primos entre sí: lo cual es de suyo casi evidente. Cuando aquellos coeficientes satisfacen á esta condición, necesariamente existe un par de valores enteros conjugados, de x é y, que también satisfacen á la ecuación propuesta. Y desde el momento en que un par de valores, x_0 é y_0, de esta especie es conocido, ó en que se ha encontrado una solución particular de la ecuación de que tratamos, todas las demás soluciones, ó valores conjugados, x_n é y_n, de x é y, forman dos progresiones por diferencia, cuyos términos generales son estos:

$$x_n = x_0 - nb$$
$$y_n = y_0 + na.$$

La primera proposición, por su sencillez, casi no necesita demostrarse, conforme ya antes se dijo.

La segunda, muy importante, se demuestra habitualmente como sigue

Si $ax + by = c$, resulta que

$$x = \frac{c - by}{a}.$$

Demos á y los valores consecutivos $0, 1, 2 \dots (a-1)$; y á uno de ellos necesariamente corresponderá otro entero para x. Pues, en el supuesto contrario, obtendríamos a cocientes enteros distintos, acompañados de otros tantos residuos, entre los cuales habría por lo menos dos iguales, r_h y r_k, pongamos como ejemplo, por el hecho de ser todos inferiores al divisor a. Resultaríanos entonces lo siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} x_h = \dfrac{c}{a} - \dfrac{by_n}{a} = q_h + \dfrac{r_h}{a} = q_h + \dfrac{r}{a} \\[2ex] x_k = \dfrac{c}{a} - \dfrac{by_k}{a} = q_k + \dfrac{r_k}{a} = q_k + \dfrac{r}{a} \end{array}\right\} : \frac{b}{a}(y_k - y_h) = q_h - q_k.$$

Pero, siendo a y b primos entre sí, é inferiores al a los números y_k é y_n, es imposible que el primer miembro de esta expresión represente un número entero, como le representa el segundo. Luego el resultado obtenido, partiendo del supuesto de ser iguales los residuos r_n y r_k, es absurdo: luego absurdo será también aquel supuesto. Y, por lo tanto, entre las a residuos, procedentes de la división de $c - by$ por a, atribuyendo á y los valores 0, 1, 2... $(a - 1)$, uno por lo menos debe ser igual á cero. Al valor entero de y que le produzca corresponderá, pues, otro valor entero de x; y por estos dos valores, simultáneamente considerados, la ecuación $ax + by = c$ quedará satisfecha.

Para demostrar la tercera proposición, á estos dos valores designemólos por x_0 é y_0; y nos resultará:

$$\left.\begin{aligned} ax + by &= c \\ ax_0 + by_0 &= c \end{aligned}\right\}: a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

$$x - x_0 = -\frac{b(y - y_0)}{a}$$

De donde se infiere, por un teorema elemental, y recordando que b y a son números primos entre sí, que

$$y - y_0 = \pm na, \quad \text{ó} \quad y = y_0 \pm na; \quad \text{y}$$
$$x - x_0 = \mp nb \quad \text{ó} \quad x = x_0 \mp nb$$

Las soluciones, pues, de la ecuación $ax + by = c$ se distribuyen en dos progresiones por diferencia, de términos correspondientes, como sigue, sin prejuzgar el signo de n:

$$y_0 \mp na, \ldots \; y_0 - 2a, \; y_0 - a, \; y_0, \; y_0 + a, \; y_0 + 2a, \; \ldots\ldots \; y_0 \pm na$$
$$x_0 \pm nb, \ldots \; x_0 + 2b, \; x_0 + b, \; x_0, \; x_0 - b, \; x_0 - 2b, \; \ldots\ldots \; x_0 \mp nb.$$

Y toda la dificultad de la solución general se reduce á la de hallar dos cualesquiera de estos términos, correspondientes ó conjugados, en ambas progresiones.

La teoría de las fracciones continuas suministra un medio directo y seguro de hallar una de estas soluciones, y por ende todas las demás, conforme acaba de probarse. Pero, basándose también en algunas propiedades sencillísimas de las progresiones por diferencia, muy poco vulgarizadas, se puede también, con gran sencillez y prontitud en muchos casos, obtener el mismo resultado.

Las propiedades á que nos referimos son estas: (*)

a) «Si en dos progresiones por diferencia, cuyos términos ordenados por gradación ascendente ó descendente se corresponden, se multiplica el del lugar n en la primera por el de lugar $n + 1$ en la

(*) W. Berkhan.—Die Auflösung der Diophantischen Gleichungen ersten Grades.

segunda, y, recíprocamente, el del lugar n en la segunda por el del lugar $n+1$ en la primera, la diferencia de ambos productos será constante, cualquiera que el valor de n sea, é igual á la de productos del primer término de la primera progresión por la razón de la segunda, y del primero de la segunda por la razón de la primera.»

Sean, en efecto, éstas las dos progresiones:

$$\alpha,\ \alpha+a,\ \alpha+2a,\ \ldots\ldots\ \alpha+(n-1)a,\ \alpha+na,\ \ldots\ldots$$
$$\beta,\ \beta+b,\ \beta+2a,\ \ldots\ldots\ \beta+(n-1)a,\ \beta+nb,\ \ldots\ldots$$

El enunciado del teorema, facilísimo de comprobar en términos generales, cualesquiera que sean los valores de a y b, y de α y β, se reduce á lo siguiente:

$$[\alpha+(n-1)a]\cdot[\beta+nb]-[\beta+(n-1)b]\cdot[\alpha+na]=\alpha b-\beta a.$$

b) El teorema anterior es caso particular de este otro:

«Si en dos progresiones por diferencia, cuyos términos se corresponden, el término del lugar $h+1$ en la primera se multiplica por el del lugar $n+1$ en la segunda, y el del lugar $h+1$ en ésta por el del $n+1$ en la anterior, la diferencia de ambos productos así obtenidos será igual á la de productos del primer término de la primera progresión por la razón de la segunda, y del primero de la segunda por la razón de la primera, multiplicada por la diferencia de lugares, $n-h$, de los términos en ambas progresiones considerados.»

O, más brevemente y sin que haya casi motivo de vacilación ó duda:

$$(\alpha+ha)\ (\beta+nb)-(\beta+hb)\ (\alpha+na)=(\alpha b-\beta a)\ (n-h),$$

Cuando h sea igual á $n-1$ los términos de ambas progresiones serán consecutivos, y la diferencia de sus productos, en orden alternado, constante, é igual á la diferencia $a\beta-b\alpha$, conforme renglones antes se concluyó.

c) No menos curioso que los anteriores teoremas es el siguiente, de análoga índole:

«Si, dadas dos progresiones por diferencia, cuyos términos se corresponden, se multiplica un término cualquiera de la primera por la razón de la segunda, y el correspondiente en ésta por la razón de la primera, la diferencia de productos así obtenidos será constante, é igual á la de productos, en orden alternado, de dos términos consecutivos de la primera progresión por los correspondientes en la otra.»

Así se desprende sencillísimamente de la siguiente expresión que se confunde casi con una identidad, y del primero de los teoremas anteriores:

$$(\alpha+na)\ b-(\beta+nb)\ a=\alpha b-\beta a.$$

d) Del mismo teorema *a)* se desprende también esta otra interesante consecuencia:

«Si en las progresiones por diferencia

$$\ldots, x_0, x_0 - b, x_0 - 2b, \ldots x_0 - (n-1)\, b, x_0 - nb, \ldots..$$
$$\ldots, y_0, y_0 + a, y_0 + 2a, \ldots y_0 + (n-1)\, a, y_0 + na, \ldots..$$

que comprenden todas las soluciones en números enteros de la ecuación.

$$ax + by = c,$$

se toman dos términos consecutivos cualesquiera, y se multiplican en orden alternado, la diferencia de productos resultantes será constante é igual á c.»

En efecto:

$$[x_0 - (n-1)\, b] \,.\, [y_0 + na] - [y_0 + (n-1)\, a] \,.\, [x_0 - nb] = x_0\, a - y_0 (-b) = c$$

e) «En el supuesto de ser primos entre sí los coeficientes a y b, como es indispensable que lo sean para que la ecuación de que se trata admita soluciones en números enteros, si se forma la progresión

$$1,\ 1 + a,\ 1 + 2a, \ldots..\ 1 + na, \ldots..$$

se obtendrá necesariamente un término, múltiplo de la diferencia $a - b$.»

Para demostrarlo, comencemos por recordar que, si a y b son primos entre sí, su diferencia $a - b$ lo será también necesariamente con relación á cualquiera de ellas. Pues, en este supuesto, para que el término $1 + na$ sea múltiplo de $a - b$, basta saber si la ecuación

$$1 + na = m\ (a - b),$$

puede quedar satisfecha por valores enteros de n y m: lo cual es precisamente lo demostrado como cierto en los primeros renglones de esta nota.

f) «Si en la progresión

$$1,\ 1 + a,\ 1 + 2a, \ldots..\ 1 + na, \ldots..$$

el término $1 + na$ es múltiplo de la diferencia $a - b$, en la

$$1,\ 1 + b,\ 1 + 2b, \ldots..\ 1 + nb, \ldots..$$

también lo será el término correspondiente, $1 + nb$, de la misma diferencia.»

En efecto:

$$1 + nb = 1 + nb + na - na = (1 + na) - (a - b)\, n.$$

Lo cual demuestra la proposición enunciada.

Pues, con estos antecedentes, dada la ecuación

$$ax + by = c,$$

fórmense las dos progresiones

$$1,\ 1 + a,\ 1 + 2a,\ \ldots\ldots$$
$$1,\ 1 + b,\ 1 + 2b,\ \ldots\ldots$$

y prolónguense hasta llegar á los dos términos correspondientes $1 + na$ y $1 + nb$, múltiplos ambos de la diferencia $a - b$. Y, conseguido esto, designando por A y B los cocientes enteros de $1 + nb$ y $1 + na$, divididos por $a - b$, inmediatamente se deduce que:

$$(1 + nb)\,a - (1 + na)\,b = a - b;$$
$$A\,a + (\ -B\,)\,b = 1; \qquad \text{y}$$
$$a \times Ac + b \times - Bc = c.$$

Luego, finalmente,

$$x_0 = + Ac\ \ldots\ldots\ x = x_0 - nb$$
$$y_0 = - Bc\ \ldots\ldots\ y = y_0 + na$$

En la práctica basta en realidad formar una sola de las dos progresiones consideradas: aquella cuya razón, a ó b, sea menor; y, obtenido el término que se busca, múltiplo de $a - b$, ó de $b - a$, calcular el término que le corresponde en la otra progresión, por la fórmula general adecuada á este objeto.

Resolvamos muy contados ejemplos en aclaración de cuanto precede.

1.° $\qquad 17\,x - 19\,y = 3.$

Progresiones:

$$\left.\begin{array}{ll} 1,\ 20,\ 39,\ \ldots\ldots & (\text{Razón: } 19) \\ 1,\ 18,\ 35,\ \ldots\ldots & 17) \end{array}\right\}\ a - b = 2$$

$$17.\ (+20) - 19.\ (+18) = -2;$$
$$17.\ (-10) - 19.\ (-9) = \ \ 1;$$
$$17.\ (-30) - 19.\ (-27) = \ \ 3$$

$$\begin{array}{l} x = -30 + 19\,n \\ y = -27 + 17\,n \end{array}\ \text{ó}\ \begin{array}{l} x = 8 + 19\,n \\ y = 7 + 17\,n \end{array}$$

2.° $\qquad 31\,x - 5\,y = 24$

Progresión más sencilla, prolongada hasta hallar un múltiplo de $a - b$, igual á 26, la siguiente:

$$1,\ 6,\ 11,\ 16,\ 21,\ 26,\ \ldots\ldots\quad (5).$$

Término en la otra progresión, correspondiente al 26: el 156.

Consecuencias:

$$
\begin{array}{l}
31 \times 26 - 5 \times 156 = 26 \\
31 \times 1 - 5 \times 6 = 1 \\
31 \times 249 - 5 \times 6 \times 249 = 249
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lllll}
x_0 = 249 & » & x = 249 - 5n & » & x = 4 - 5n \\
y_0 = 1494 & » & y = 1494 - 31n & » & y = -25 - 31n
\end{array}
$$

3.º $\quad 24x + y = 1000$

1, 8, 15, 22, 29, 36, 43, 50, 57, 64, 71, 78, 85 (7

1, 25, 49, ... 289 (24

$$
\begin{array}{l}
24.\ (+85) - 7.\ (+ 289) = 17 \\
24.\ (+ 5) + 7.\ (- 17) = 1 \\
24.\ (5000) + 7.\ (-17000) = 1000
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lllll}
x_0 = 5000 & » & x = 5000 - 7n & » & x = 2 - 7n \\
y_0 = -17000 & » & y = -17000 + 24n & » & y = 136 + 24n.
\end{array}
$$

Influencia pacificadora de los aceites en el oleaje violento de los mares.—Problema es éste enunciado ó vislumbrado desde muy antiguo; olvidado por completo casi durante largo tiempo; y en la época moderna, después de muy controvertido, resuelto, al parecer, en sentido favorable y digno de fijar la atención de los hombres pensadores, por su importancia teórica y sorprendentes aplicaciones en la práctica. En las siguientes líneas, tomadas del «Tratado de Construcciones en el Mar», edición de 1886, escrito por el sabio ingeniero Don Pedro Pérez de la Sala, se halla resumido con brevedad y lucidez el estado actual de problema tan interesante.

«Apesar de la gran fuerza que parece llevar la ola en su estado oscilatorio, basta el menor obstáculo para rebajar su altura y casi anularla. Una red de pescador es suficiente, en muchos casos, para producir este efecto; y gran número de lanchas se han salvado en recias tempestades, navegando al abrigo de una balsa formada con sus palos. Los rompeolas flotantes están, en su mayor parte, fundados en los mismos hechos.

»Los mares de sargazo, donde no se sienten corrientes ni otras agitaciones, y donde están acumuladas inmensas masas de aquella planta, desde la época en que Colón cruzó aquellos mares (cuando menos para el Atlántico del Norte, según Arago), es otra prueba más de la facilidad con que ligeros obstáculos quebrantan la fuerza de las olas. Una cosa parecida se observa en el mar del Norte, entre Brest y Dunquerque, donde se ven flotar, en extensiones de 100 kilómetros cuadrados, fucos de la especie *Filum*, que forman una zona de reposo para las corrientes de marea.

»Pero uno de los efectos más sorprendentes, y hasta cierto punto inexplicable, es el producido sobre las olas por los cuerpos grasos. Ciertos resultados llamaron la atención del célebre Franklin, á mediados del siglo pasado, lo que le movió á emprender una serie de ensayos, cuyos resultados favorables se consignaron en las *Transacciones filosóficas* de 1774. En vista de ellos, aconseja el empleo del aceite como medio de aplacar la mar en un temporal; y, antes que él, un guarda-almacén de Kilda, citado por Martín, acostumbraba, en tiempo de tempestad, dejar flotando á la popa del bote, por medio de un cable, un paquete de tortas, amasadas con el hígado de aves marinas, con lo cual impedía romper las olas y calmaba la mar. Cuando el vapor de hélice de Goole, llamado *William Becket*, se fué á pique el 12 de Noviembre de 1886, su tripulación se salvó en los botes, con una gruesa mar, empleando el aceite. También hacen uso de él los pescadores holandeses; y un testigo ocular, que presenció sus efectos en el puerto de Scarborough, asegura se pueden calificar de mágicos, estableciéndose alrededor del buque un extenso espacio de agua tranquila. Es conveniente consignar aquí estos hechos, pues quizás tengan utilidad aplicándolos á los botes salva-vidas, al salvamento de náufragos en las costas, y á facilitar la entrada en los puertos. La explicación de este fenómeno es desconocida. Tessan la atribuye á la facilidad con que el aire se desliza sobre la superficie untuosa de la delgada película de aceite, sin ejercer su acción sobre la masa de agua cubierta por ella.

»Vancouver observó cerca de la punta de la Concepción, en la Nueva Inglaterra, que el mar aparecía cubierto, en cuanto alcanzaba la vista, de una sustancia semejante á brea, resultando alrededor del buque un espacio tranquilo de grande extensión. Una cosa parecida refiere Scoresby del mar del Norte: la mar se aplaca en cuanto principia la formación de los primeros cristales de hielo. Sin embargo, los cuerpos grasos no deben producir el mismo efecto sobre las olas formadas lejos del punto en que se encuentre el buque, y á ello pudiera atribuirse el mal resultado de algunos experimentos intentados. Todo esto parece dar alguna fuerza á la opinión de los que afirman que el viento obra sobre el mar por la adherencia del aire y por el rozamiento contra la superficie del agua.

»Por último, es una observación hecha por todos los marinos, que la acción del viento sobre el mar en tiempo de lluvia es menor que en tiempo seco.

»La Academia de Ciencias de París nombró una comisión de su seno á fin de averiguar la verdad del fenómeno; pero, si bien los resultados de la investigación fueron negativos, preciso es declarar que la manera de llevar á cabo los ensayos deja bastante que desear, y la opinión formulada, apoyándose en ellos, dista mucho de ser decisiva. Antes por el contrario, Mr. Shields ha emprendido recientemente, en Peterhead y Aberdeen, una serie de experimentos, que, de ser exactos, parecen concluyentes en favor de la eficacia de los cuerpos grasos para calmar la agitación de las olas. Basándose en ellos, Mr. Van der Mensbrughe ha expuesto una teoría mecánica para explicar los efectos del aceite. El almirante Bourgeois, sin negar la exactitud de los experimentos, considera que su influencia se limita á impedir que la ola descabece, esto es, que su cresta rompa: resultado importante, dice, pues la mar de superficie no es peligrosa para el buque, al paso que es en extremo temible el que la ola descabece ó principie á romper. Cita, en apoyo de esta opinión, un hecho observado frecuentemente por los marinos en los trópicos, cuando la fosforescencia de las aguas revela la existencia de innumerables seres orgánicos. Los buques cruzan entonces las aguas sin formar espuma, y las olas, por grandes que sean, no descabezan.

»Los hechos repetidos de salvamentos realizados, merced al aceite y á los cuerpos grasos, movió á la Dirección de Hidrografía de los Estados Unidos á publicar cuantos documentos pudo recoger acerca del empleo del aceite para aplacar las olas. Estos hechos son tales, que, unidos á los anteriores, parecen demostrar y desvanecer toda duda acerca de los efectos de los cuerpos grasos en el mar. He aquí los más notables.

»Durante el viaje desde Portland (Oregón) á Queenstown, el buque *Mirtle Holme* encontró una mar tan gruesa que fué menester atar al timonel para no ser arrastrado por las olas que embarcaba, barriendo el buque de popa á proa. El capitán colgó de la verga mayor un saco de lona, cubierto de pequeños agujeros, con 2 litros de aceite de arder. A los dos minutos el buque no embarcaba agua, y sólo recibia el choque de las pequeñas olas que rompían al encontrar la delgada capa aceitosa que el buqne dejaba á sotavento.

»El vapor *Napier* corrió un temporal terrible, rompiendo furiosamente olas monstruosas contra la popa. El capitán formó dos sacos, como los anteriores, con 9 litros de aceite, que remolcaba por las dos bandas. Las olas rompían á 20 ó 30 metros del buque, pasando luego debajo de él, como una mar gruesa ordinaria. Esto duró tres días consecutivos, sin embarcar un solo golpe de mar. El consumo de aceite fué de 36 litros por 10 horas.

»En otra circunstancia se salvó un buque por un bote de pintura, al cual se le hizo en el fondo un agujero para dejar gotear el aceite, y otro en la tapa para la salida del aire. En otro temporal la corbeta *Argelia*, se salvó durante la travesía de Saint-John á Liverpool con una calceta llena de aceite.

»Por último, la Sociedad de Salvamento de los Estados Unidos hace constar, en una de sus Memorias, los buenos efectos obtenidos por las tripulaciones de los botes salva-vidas, cuando empleaban el aceite.

»También en Holanda el uso del aceite está muy recomendado. Los periódicos de Hamburgo publicaron en el mes de Abril de este año el diario del capitán del paquebot *Bohemia*, que por dos veces fué acometido por un temporal durante la travesía de aquel puerto á Nueva York. El capitán hizo suspender, en las dos, cinco sacos de estopa bien empapada en aceite, reproduciéndose los resultados de los casos anteriores. Los sacos de lona, agujereados, se llenaron con la mitad de estopa y la otra mitad con aceite de linaza ó de engrasar la máquina, y se cosieron por la parte superior. Cada saco contenía medio litro de aceite y duraba más de hora y cuarto. La cantidad de aceite gastada en las 22 horas que duró el temporal fué de 59 kilogramos, ó poco más de $2^1/_2$ kilogramos por hora; pero en cambio se economizaron 35 toneladas de carbón y el aceite ó sebo para engrasar la máquina. Los sacos se suspendían á sotavento, á unos 15 metros de distancia unos de otros.

»La eficacia de los aceites minerales es muy escasa y menos real que la de los vegetales ó animales. Un capitán anglo-americano intentó usar el petróleo refinado remolcando muchos sacos llenos de este aceite, sin obtener ningún efecto, mientras que con los de linaza, de pescados, con grasa de cerdo, etc., han dado siempre excelente resultado. El petróleo en bruto los da también, tanto más satisfactorios cuanto más impuros y más densos son.»

De este mismo tan sorprendente asunto trató también incidentalmente D. Eduardo Benot en su Memoria sobre la «Movilización de la Fuerza del Mar», que constituye el tomo IX de las publicadas por esta Academia; y, después de transcribir lo que ya el Sr. la Sala había consignado en la primera edición de su libro, publicada en 1871, añadía lo siguiente:

«Un periódico de Bombay publica la siguiente relación sobre el empleo dado al aceite para calmar el furor de las olas y poder socorrer á un buque durante la tempestad. Dice así:

»El *King Cenrie*, buque de 1490 toneladas, salió de Liverpool para Bombay en el mes de Julio último. Después de haber doblado el cabo de Buena Esperanza, experimentó un fuerte viento de Noroeste, que duró bastante tiempo. Olas inmensas, precipitándose sobre el buque, invadieron las escotillas, arrastraron cuanto encontraron sobre el puente, y rompieron las cámaras, destruyendo las del capitán y los oficiales.

»La tempestad duró cerca de cinco días, y las olas no dejaban un solo instante de barrer el puente.

»Uno de los oficiales, Mr. Brower, tuvo la feliz inspiración de hacer la prueba de arrojar al mar cierta cantidad de aceite.

»Se tomaron 2 sacos de lona, y se llenaron con dos galones (sobre 9 litros) de aceite fino cada uno.

»A cada saco se le hicieron unos agujeros pequeños, y se arrojaron á ambos costados del buque.

»El resultado fué mágico: las olas dejaron de precipitarse contra la popa y los costados del buque, y á algunos metros de distancia, en aquellos puntos en que se había extendido el aceite, tanto en la proa como en la estela, se encontraba un vasto círculo de mar tranquila.

»La tripulación pudo hacer cómodamente entonces las reparaciones necesarias.

»Dos 2 sacos de aceite duraron 2 días; y, habiéndose calmado enteramente el mar, ya no fué necesario gastar más aceite».

Y continuaba diciendo el Sr. Benot, de su propia cosecha.

«Esta propiedad de los cuerpos grasos debió ser conocida de los antiguos, pues recuerdo haber leído, cuando yo tendría 12 ó 13 años, algo relativo al particular en un viejo libro de mitología, cuyo título he olvidado, pero de cuyas señas me acuerdo.

»Por lo demás, esta es una propiedad constantemente utilizada en la práctica por los buques de cabotaje que entran desde el Atlántico al brazo de mar llamado Sancti Petri, que desemboca en la bahía de Cádiz.

»Al hacer los faluchos por la boca del canal, con mar gruesa de Sudoeste, llevan ésta por la popa; y, una vez en la boca, les es forzoso atravesarse para gobernar al Nordeste, teniendo, por tanto, que recibir la mar sobre el costado. Y, para evitar los daños que el romper de la mar pudiera ocasionarles, arrojan al agua, poco antes de orzar, 8 á 10 litros de aceite.»

Aluminio.—Sobre la producción comercial del aluminio metálico puro, por el procedimiento del Dr. Kleiner, de Zurich, da el periódico inglés *The Engineering* las siguientes interesantes noticias.

El tiempo necesario para la preparación del aluminio no pasa de dos ó tres horas, valiéndose para ello de un aparato muy sencillo, sustancialmente compuesto de una máquina de vapor y dinamo eléctrica, y de un horno ó crisol. En el crisol obtiénese el aluminio, separado de los demás cuerpos, con los cuales estaba poco antes combinado, en estado de pureza, y en pedazos de tamaño variable, desde el de un guisante al de una pequeña manzana.

La reacción química procede de la corriente eléctrica, agente en este caso de un modo completamente distinto que en el horno de aluminio y sistema de obtención de este metal propuesto por Cowles. En aquel sistema la corriente eléctrica es por junto agente de calefacción, y sirve para elevar el mineral de alúmina (corindon), juntamente con el cobre y el carbono de que se encuentra rodeado, á una temperatura tal que el oxígeno de la alúmina se combina con el carbono, y el aluminio queda en aleación con el cobre. Mientras que en el procedimiento de Kleiner la acción química de la corriente es la preponderante, obteniéndose el metal, por electrólisis, á relativamente baja temperatura, después de fundido el mineral: condición previa indispensable de la misma electrólisis. La fusión de la materia empleada en la operación se consigue fácilmente; y una vez fundida, y transformada con esto en conductor eléctrico, apenas si es menester elevar un punto más su temperatura; pues la amplitud y abundancia de la masa líquida facilitan el flujo de la corriente eléctrica, y la electrólisis del mineral continúa desde entonces verificándose sin obstáculo.

El mineral empleado es la *criolita*, ó fluoruro doble de sodio y aluminio, reducido á polvo fino, y resoluble por la electricidad, después de fundido, en aluminio y en fluoruro de sodio, soluble éste en el agua. Prolongada la operación por tiempo prudencial, ó en cuanto las condiciones mecánicas lo consienten, interrúmpese la corriente; y, después de enfriada la masa á ella sometida, tritúrase y se echa en el agua. El aluminio, en forma de terrones, ó de pequeños fragmentos, queda en el fondo; la sal de sosa se disuelve, y puede conservarse para convertirla en sosa cáustica; y el mineral no reducido, insoluble en el agua, se recoge también, y, después de seco, se devuelve al crisol ó baño, y se somete á ulterior tratamiento electrolítico.

Resulta, pues, de lo dicho que, para obtener el aluminio, necesítanse, en grande escala, mineral apropiado, y fuerza aplicable á la propulsión enérgica de la dinamo. Fuerza sobre todo; pues para disociar al aluminio de los demás elementos, con los cuales se halla muy estrechamente combinado ó unido, su gasto es enorme: como de un caballo por hora para obtener $3\,{}^1/_2$ gramos (${}^1/_{130}$ lb.) de aluminio puro, según pruebas efectuadas en Londres por el Dr. John Hopkuison. O, en otros términos: para obtener, en proporción industrial, cosa de 36 kilogramos de aluminio por semana, es menester que la dinamo funcione 20 horas por día, con fuerza de 100 caballos eléctricos.

Los hornillos ó crisoles donde se lleva á cabo la operación son de construcción muy sencilla, y fabricados de plombagina generalmente. Del fondo del crisol se eleva un electrodo de carbono, constituído por un grupo de varillas ó baquetas de esta sustancia: el negativo. Y el positivo le constituye otro grupo de varillas, independientes del crisol, pero que pueden penetrar superiormente dentro de su cavidad, más ó menos, conforme fuere necesario. Para dar comienzo á la operación pónese la criolita, molida y seca, en el fondo de la vasija, en cantidad suficiente para cubrir el electrodo ó polo negativo de la corriente; y, hecho esto, se baja la varilla central del positivo hasta formar un arco ó chorro eléctrico: lo cual se consigue en cuanto la corriente se halla representada por 80 á 100 *volts*, ó por 60 á 80 *ampéres*. En breve tiempo la criolita se funde cerca del arco; y, agregando entonces nuevas cantidades de su polvo, consíguese sin dificultad, y á temperatura que las paredes del crisol resisten perfectamente, obtener una masa fluida de aquella materia, reluciente en el centro del baño. Desde este momento la corriente fluye de un electrodo á otro sin formar arco; y, para activar y entretener sus efectos, bájanse gradualmente todas las varillas hasta tocar en la criolita fundida: con lo cual la fuerza electromotriz de la corriente queda reducida á 50 *volts*. Por espacio de dos ó tres horas se procura sostener este estado de cosas, de fusión suave y tranquila de la criolita, á la más baja temperatura posible. Y, pasado este tiempo, aplícase la corriente á la fusión y electrólisis de una nueva cantidad de materia, preparada en otra vasija.

El Dr. Kleiner parece que acaba de introducir en el procedimiento de obtención expuesto un perfeccionamiento sencillo y de grande importancia.

Habíase, en efecto, advertido que el consumo de las varillas de carbono, que constituyen el electrodo positivo, rápido y costoso, se verificaba principalmente á 4 ó 5 centímetros por cima de la superficie del baño, conservándose, por el contrario, intactas casi en la porción sumergida dentro de la criolita fundida. Pues la variante propuesta por el Dr. Kleiner consiste en disponer las cosas de manera que las varillas del polo positivo, en figura de cilindros huecos de carbono puro, queden por completo sumergidas en la criolita fundida, y en prolongar hasta su nivel las que componen el negativo, y se elevan del fondo del crisol. La primera fusión de la criolita se logra mediante un arco voltáico, producido entre el polo negativo y una baqueta especial, en relación con el positivo, la cual puede moverse y guiarse á mano, y aproximarse, más ó menos, según convenga para regular la fusión, á las varillas fijas que propiamente constituyen ambos polos. En cosa de diez minutos la fusión inicial queda realizada; y, retirando con esto la baqueta móvil que sirvió para provocarla, la fusión suave ulterior, y electrólisis consiguiente, producidas por el flujo eléctrico continuo, se verifican como antes se dijo, sin deterioro sensible de las varillas de carbono de que ambos polos se hallan formados.

Tal es por el momento el sistema adoptado para la obtención del aluminio, bastante sencillo, y de coste fácil de calcular.

La criolita, en estado de suficiente pureza, puede obtenerse en cantidad indefinida, trayéndola de Groenlandia, al precio máximo de 18 á 20 libras esterlinas por tonelada. Pero artificialmente, y á mitad de precio, también sería dable prepararla, y se preparará sin duda, en cuanto las necesidades de la nueva industria así lo exijan y consientan. El doble fluoruro mencionado contiene en cada cien partes, 12,85 de aluminio; 32,85 de sodio; y 54,30 de fluor, íntimamente combinados.

Para la producción de abundantes é intensas corrientes eléctricas, lo que se necesita previamente es fuerza mecánica, en cantidad también considerable. Para obtenerla con facilidad, y á precio relativamente bajo, los interesados en la explotación del procedimiento del Dr. Kleiner comenzaron por adquirir los derechos de propiedad de la mitad del agua que acarrea el Rhin por Shaffhausen, donde se hallan situadas las célebres cascadas de este nombre, y además un terreno de suficiente amplitud para la utilización de la fuerza que aquellos saltos de líquido representan, valuada en unos 15.000 caballos, y suficiente para la producción de 600.000 libras de aluminio por año, á precio muy moderado. Mas, por desgracia, y so pretexto de que así la belleza de las cascadas desmerecería considerablemente, y con ella la afluencia de viajeros al territorio donde radican, con perjuicio de respetables intereses, de muy antiguo adquiridos, opusiéronse resueltamente las autoridades de Shaffhausen á la realización de aquel vasto proyecto, y los atrevidos industriales que le concibieron vense en los momentos actuales obligados á ensayarle, en muy pequeña escala, valiéndose de máquinas de vapor, de 500 caballos de fuerza, que en breve tiempo abrigan la esperanza de poder elevar á varios miles. Con los recursos de que hasta ahora disponen, la producción de aluminio puro no excederá de 200 lbs. por semana; suficiente como ensayo, pero no como negocio mercantil. El iniciador y director de la naciente industria, planteada en Birmingham, y servida por dinamos excelentes, del sistema Edison-Hopknison, el Mayor J. F. Ricarde Seaver, no piensa sin embargo cejar en su empeño de perfeccionarle y ampliarle hasta lograr, mediante el empleo de 15.000 caballos de fuerza, la producción de una tonelada de aluminio puro por día: lo cual permitirá expenderlo á razón de 15 pesetas kilogramo.

Y á este precio sus aplicaciones industriales, aleado principalmente al cobre y al acero, serían variadísimas y de excepcional importancia, por su poco peso, brillo especial, ductilidad y resistencia, en las fábricas de armas, construcciones navales, maquinaria textil, y objetos de arte de muy diversas especies. Aleado, por ejemplo, con el cobre, en la proporción de 1 á 10, su empleo en la artillería y armamentos navales sería ventajosísimo, á precio muy reducido, como de 3 pesetas el kilogramo. Muy de aplaudir son por lo mismo, los desvelos del Sr. Ricarde Seaver, de quien la Academia ha recibido las noticias en esta nota contenidas, para la preparación en grande escala de metal tan valioso como el aluminio, y dignos sus esfuerzos é infatigable actividad de éxito feliz en breve tiempo.

M. M.

ÍNDICE

DE LAS MATERIAS CONTENIDAS EN ESTE NÚMERO.

CIENCIAS EXACTAS.

Estudios sobre electro-estática y electro-dinámica........................ 205

CIENCIAS NATURALES.

Congresos científicos de Ginebra y Nancy en Agosto de 1886............ 224

VARIEDADES.

De la resolución en números enteros de la ecuación indeterminada de primer grado $ax + by = c$.. 247
Influencia pacificadora de los aceites en el oleaje violento de los mares.... 252
Explotación del aluminio.. 256

Se suscribe en la portería de la Academia de Ciencias, plaza de la Villa, núm. 2, piso principal.

Cada tomo de la Revista constará de nueve números.

REVISTA

DE LOS

PROGRESOS DE LAS CIENCIAS

EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES.

TOMO 22.—N.º 5.º

MADRID.

IMPRENTA DE D. LUIS AGUADO.—PONTEJOS, 8.

1888.

CIENCIAS EXACTAS.

ESTUDIOS SOBRE ELECTRO-ESTÁTICA Y ELECTRO-DINÁMICA.

(Continuación.)

IV. *Ecuaciones de Laplace y Poisson.* Hay dos ecuaciones en la electro-estática, cuya importancia demostraremos en breve, y que es indispensable conocer, pues sin ellas no puede darse un solo paso en las teorías modernas.

Estas ecuaciones se deben á Laplace y Poisson y pueden demostrarse de muchas maneras: pero como sólo nos proponemos en esta *introducción* dar una idea sucinta, aunque exacta, de los principios generales de electricidad y magnetismo, indicaremos las demostraciones que Mascart y Joubert presentan en su magnífica obra.

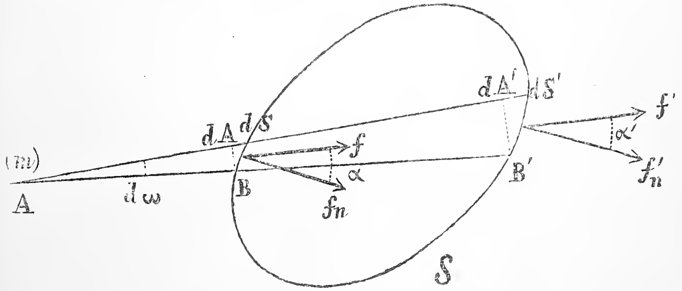


Fig. 10.

1.º Sean S (*fig.* 10) una superficie cerrada y A *un punto exterior*, en el cual se halla una masa eléctrica m (positiva ó negativa).

Tracemos, tomando A por vértice, un cono de abertura $d\omega$ infinitamente pequeña, (ya se sabe que $d\omega$ es la superficie que limita dicho cono en una esfera cuyo centro sea A y cuyo radio sea 1), que corte á la superficie S: sea dS el área de entrada y dS$'$ el área de salida.

Tracemos igualmente dos esferas desde A como centro y con los radios AB, AB$'$; y designemos por dA y dA$'$ las áreas que determina en ambas esferas el cono A.

La fuerza eléctrica de m en un punto de dS, suponiendo, como siempre, que para medirla se colocase en dicho punto una masa eléctrica $+$ 1, y suponiendo que las unidades eléctricas son tales que el coeficiente constante es 1, será

$$f = \frac{m}{r^2},$$

llamando r á la distancia AB. Análogamente la fuerza eléctrica en un punto de dS$'$ será asimismo

$$f' = \frac{m}{r'^2}.$$

Llamando f_n y f'_n á las componentes de f y f', normales á la superficie; y designando por α y α' los ángulos de f_n y f'_n con f y f', tendremos:

$$f_n = \frac{m}{r^2} \cos \alpha; \quad f'_n = \frac{m}{r'^2} \cos \alpha';$$

y, multiplicando los dos miembros de la primera ecuación por dS y por dS$'$ los dos de la segunda:

$$f_n \, dS = \frac{m}{r^2} \cos \alpha \, dS; \quad f'_n \, dS' = \frac{m}{r'^2} \cos \alpha' \, dS'$$

Pero

$$dS \cos \alpha = dA \quad \text{y} \quad dS' \cos \alpha' = dA':$$

luego

$$f_n \, dS = m \frac{dA}{r^2}; \quad f'_n \, dS' = m \frac{dA'}{r'^2}.$$

Como, por otra parte,

$$\frac{dA}{r^2} = \frac{dA'}{r'^2} = d\omega,$$

tendremos por último

$$f_n \, dS = m d\omega \ \text{ y } \ f'_n \, dS' = m d\omega.$$

Ahora bien, si de igual manera que al producto de una fuerza eléctrica F (*fig.* 9.ª) por un área normal A le hemos dado el nombre *flujo de fuerza á través del plano* C, llamamos al producto de la componente normal F'_n (*fig.* 11) de una fuerza eléctrica F', por un área A' situada en un plano P', obli-

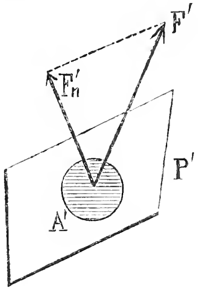


Fig. 11.

cuo respecto á F', *flujo de fuerza á través del plano* P' (siguiendo la analogía del flujo de un fluido en movimiento), podremos traducir la igualdad numérica de $f_n\ dS$ y $f'_n dS'$ diciendo que

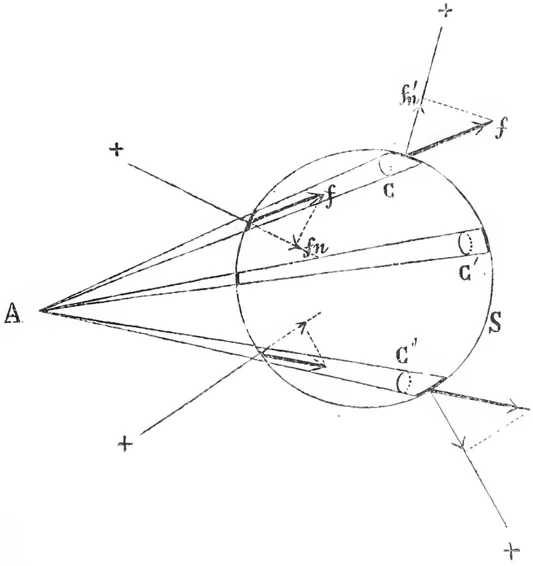


Fig. 12.

el flujo de fuerza que entra por dS es igual al flujo que sale por dS'.

Ahora bien, si tomamos, en las normales á S (*fig.* 12) por parte positiva la que va al exterior, f_n y f'_n tendrán signos contrarios, de suerte que apreciando en

$$f_n dS, \ f'_n dS'$$

no sólo el valor numérico sino el signo, se verificará que

$$f_n dS + f'_n dS' = 0.$$

Repitiendo esto mismo para los infinitos conos AC, AC', AC''... que parten de A y cortan á S; estableciendo sus respectivas ecuaciones análogas á las precedentes; y sumando, tendremos:

$$\int f_n dS + \int f'_n dS' = 0;$$

ó, con mayor brevedad,

$$\int f_n dS = 0,$$

si f_n representa la componente normal de la fuerza eléctrica en cada punto de la superficie S con el signo que le corresponde, y se extiende además la $\int$ á toda la superficie en cuestión.

Se puede decir en general: *que el flujo de fuerza en toda la superficie es nulo*. Pero lo que hemos dicho para una masa m podríamos repetirlo para un número cualquiera de masas: siempre tendríamos ecuaciones análogas á la precedente: y sumándolas, sacando dS factor común de las fuerzas normales de todas las masas, representando la fuerza normal total por f_n, y extendiendo la $\int$ como siempre á la superficie total S, nos resultaría en fin

$$\int f_n dS = 0:$$

en la cual f_n es una fuerza normal en el elemento dS, componente que resulta de la fuerza eléctrica total del sistema en dicho punto ó elemento dS; y extendiéndose además, como queda dicho, la integral á toda la superficie.

Podremos pues establecer el siguiente teorema:

Cuando una superficie cerrada no comprende ninguna masa eléctrica, la suma algebraica de los flujos de fuerzas normales sobre toda la superficie es nula.

O de otro modo: *el flujo de fuerza que sale por dicha superficie es nulo.*

2.º Supongamos que el punto A (*fig.* 13) es interior: es decir, que la masa m está envuelta por la superficie.

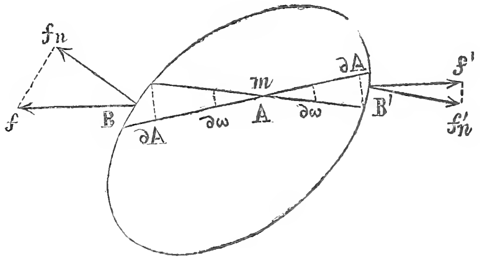


Fig. 13.

Repitiendo todos los razonamientos del primer caso, llegaremos á la ecuación

$$f_n dS = f'_n dS' = m d\omega.$$

Pero las componentes f_n y f'_n tienen aquí el mismo signo, de suerte que $f_n dS$ y $f'_n dS'$ son flujos normales de igual signo también.

Sumándolos, resultará que

$$f_n dS + f'_n dS' = 2 m d\omega.$$

Trazando alrededor de A infinitos conos que llenen el espacio; escribiendo para cada cono una ecuación análoga á la precedente; y sumando, se deduce:

$$\int f_n dS = m \int d\omega.$$

Pero $\int d\omega$ es la superficie total de una esfera de radio 1, igual á 4π: luego

$$\int f_n dS = 4\pi m.$$

Repitiendo para todas las masas comprendidas en S esto mismo y sumando las ecuaciones resultantes, llegaremos á la ecuación final:

$$\int f_n dS = 4\pi M.$$

En la cual f_n es la componente normal de la fuerza eléctrica del sistema de masas en cada elemento dS; M la masa total comprendida en la superficie; y la $\int$ se extiende á toda la superficie de que se trata.

De aquí este teorema:

Cuando una superficie cerrada comprende varias masas m, m'... *cuya suma es* M, *la suma algebráica de los flujos normales de fuerza producidos por las masas interiores es igual á* 4πM.

O de otro modo: *sale de la superficie un flujo de fuerza* 4πM.

Estas dos ecuaciones:

$$\int f_n dS = 0,$$

para las masas exteriores; y

$$\int f_n dS = 4\pi M,$$

para las masas interiores, que sumada con la anterior da todavía

$$\int f_n dS = 4\pi M,$$

extendiéndose la $\int$ á toda la superficie, y designando f_n la componente de todas las fuerzas así interiores como exteriores; estas ecuaciones, repetimos, son fundamentales: no sólo expresan teoremas importantísimos, sino que de ellas se desprenden las ecuaciones diferenciales del problema general de la electro-estática.

En efecto, expresan una *propiedad general* de las fuerzas eléctricas: propiedad independiente de la distribución geométrica de las masas, y que por lo tanto subsiste para todos los sistemas imaginables; y como por otra parte las superficies S pueden envolver un espacio tan pequeño como se quiera, de aquí resultará, como vamos á ver, la ecuación diferencial, ó las ecuaciones diferenciales de todo problema, sean cuales fueren las condiciones particulares de cada uno.

La hipótesis de masas eléctricas, sobre la superficie S, no es más que un artificio para ligar todos los valores de la fuerza alrededor de un espacio cerrado: así vemos que al final la hipótesis desaparecé y no queda más que una relación entre los valores numéricos de la fuerza referidos á la unidad de masa en cada punto de la superficie, exista ó no exista en dicho punto masa alguna eléctrica. Si existe, la fuerza será real y efectiva: si no existe, su valor numérico expresará una *posibilidad* por decirlo así: pero *las relaciones* de estos *valores numéricos* serán en todos los casos las que marcan dichas ecuaciones.

De todas maneras, las ecuaciones diferenciales que vamos á establecer pueden obtenerse directamente, como hacen muchos autores, entre ellos Mr. Mathieu en su gran obra sobre *el potencial*.

Advertiremos, finalmente, que el método y las consecuencias serían las mismas aunque cada cono cortase, no 2 veces, sino 4 ó 6, ó un número par de veces á la superficie S.

Advertiremos también que, entre el caso de masas exteriores y el de masas interiores, hay un *caso límite*: el de masas sobre la misma superficie, que es por de pronto caso de *indeterminación*.

Pero el carácter de estos apuntes nos impide detenernos en el examen completo de dicho caso particular.

1.° Veamos ahora cómo de la ecuación $\int f_n dS = 0$ se deduce la *ecuación de Laplace*.

Consideremos un paralelepípedo infinitamente pequeño, formado por dx, dy, dz para cualquier punto del campo eléctrico de un sistema T de masas (*fig.* 14); y sea este paralelepípedo la superficie S del teorema anterior.

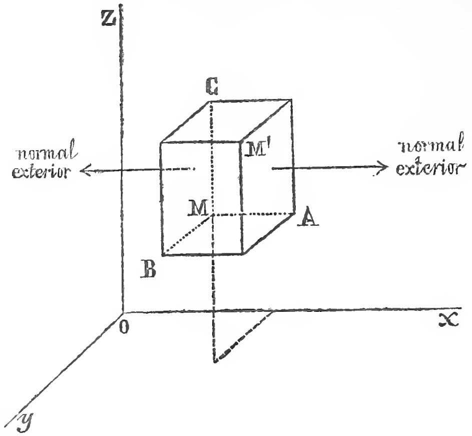


Fig. 14.

Supongamos que todas las masas eléctricas son exteriores. En esta hipótesis la suma de los flujos de fuerza para las seis caras será nula.

El flujo normal en la cara BMC, perpendicular al eje de las x, será la componente normal á BMC $\times$ área BMC.

Pero, llamando V la potencial del sistema, sabemos que se obtiene la componente según cualquier dirección, tomando la derivada de V respecto á la dirección de que se trata con el signo —.

De modo que la expresión del flujo será

$$+\frac{dV}{dx}\times dy\ .\ dz.$$

Ponemos el signo + porque la derivada se toma respecto á la dirección negativa del eje de las x, y este signo con el signo — de la fórmula general da el signo positivo.

El flujo de la cara AM' será, análogamente, el que se obtenga dando á x en $-\frac{dV}{dx}$ el incremento que corresponde:

$$-\left(\frac{dV}{dx}+\frac{d^2V}{dx^2}\,dx\right) dy\ .\ dz.$$

Aquí se pone el signo — porque la normal exterior coincide con la dirección de las x positivas.

El flujo de las dos caras opuestas será por lo tanto:

$$-\frac{d^2V}{dx^2}\, dx,\, dy,\, dz.$$

Del mismo modo hallaremos para el flujo de las caras BM′, AC

$$-\frac{d^2V}{dy^2}\, dx,\, dy,\, dz.$$

Y para el de las caras AB, M′C

$$-\frac{d^2V}{dz^2}\, dx,\, dy,\, dz.$$

La suma de estas tres expresiones debe ser cero; y, dividiendo por $dx,\ dy\ .\ dz$ y cambiando el signo, tendremos la ecuación de Laplace:

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 0.$$

5.ª Repitiendo todos los cálculos precedentes, pero suponiendo ahora que el interior del paralelepípedo está lleno por una masa eléctrica, cuya densidad designaremos por ρ, y cuyo valor será $\rho\, dx\ .\, dy\ .\ dz$, tendremos, con sólo aplicar la fórmula

$$\int f_n\, dS = 4\pi\rho,$$

la siguiente:

$$\left(-\frac{d^2V}{dx^2} - \frac{d^2V}{dy^2} - \frac{d^2V}{dz^2}\right) dx\ dy\ dz = 4\pi\rho\ dx\ dy\ dz,$$

ó, dividiendo por $dx\ dy\ dz$,

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dx^2} = -4\pi\rho.$$

Tal es la ecuación de Poisson.

Las ecuaciones de Laplace y Poisson son, pues, dos ecuaciones diferenciales de la potencial *en todos los problemas de la electro-estática*. La primera sirve para todos los puntos del campo eléctrico en que no hay electricidad libre; y la segunda para aquellos puntos en que hay masas eléctricas.

Las integrales más generales de ambas comprenderán todos los problemas; y no habrá más, en cada caso, que determinar las funciones arbitrarias que contuviesen dichas integrales de modo que satisfagan á las demás condiciones llamadas iniciales.

Tal es el problema en toda su generalidad; pero esta misma generalidad de ambas fórmulas, que lo comprenden todo, y expresan un carácter común á infinitos sistemas, constituye en cierto modo su impotencia relativa para resolver problemas concretos; porque en cada caso hay que introducir en las integrales las condiciones particulares que caractericen dicho caso: lo cual es en extremo difícil, dado por otra parte que la integración de las ecuaciones es problema de análisis de inmensas complicaciones en la mayor parte de los ejemplos que pueden presentarse.

Como la expresión

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2}$$

es muy común en el análisis, se representa abreviadamente por ΔV; designando Δ la expresión simbólica

$$\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}.$$

De este modo se escriben en forma abreviada ambas fórmulas:

fórmula de Laplace $\quad \Delta V = 0;$

fórmula de Poisson $\quad \Delta V = -4\pi\rho.$

V. *Consecuencias de las teorías anteriores.* Las teorías anteriores, y en todo caso la fórmula de Green que sirve para reducir integrales triples á integrales dobles, son la base de toda la teoría matemática de la electro-estática.

Indiquemos, como ejemplo, algunas consecuencias.

1.ª Hemos visto la importancia de la *función potencial*. Por su medio, y dado que sea conocida, pueden determinarse las componentes de la fuerza eléctrica de cualquier sistema; pero además de esta ventaja, de carácter analítico, tiene una significación mecánica fundamental.

Sea $V = V(x, y, z)$ la potencial de cualquier sistema eléctrico, actuante sobre el campo que le rodea. Dando dos valores cualesquiera á la constante que determina cada superficie equipotencial, tendremos dos superficies de nivel:

$$V(x, y, z) = C,$$
$$V(x, y, z) = C'.$$

Imaginemos, que una masa eléctrica m (*fig.* 15) pasa de una superficie C′ á la otra C, siguiendo cualquier curva M′ M: con-

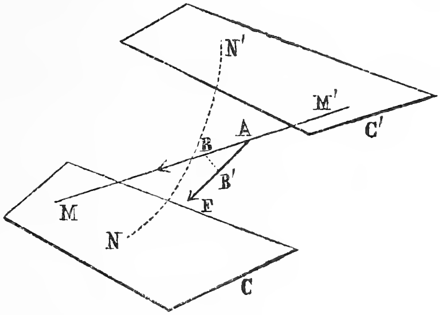


Fig. 15.

sideremos un elemento AB de su trayectoría, y sea F la intensidad de la fuerza eléctrica del sistema en A.

El trabajo de dicha fuerza, mientras el móvil recorre AB, será $m \times F \times AB'$; y como el valor de F para el punto A es la derivada de $V(x, y, z)$, según AB′, poniendo por x, y, z las coordenadas del punto A, tendremos, representando por n la dirección de la fuerza actuante que será normal á C, C′:

$$\text{Trabajo elemental según AB} = -\frac{dV}{dn}\, dn \times m.$$

De donde se deduce que el trabajo total de M′ á M será:

$$\text{trabajo de M}' \text{ á M} = \int_{M'}^{M} -m\frac{dV}{dn}\, dn = -(mV)_{M'}^{M};$$

y, como el valor de V en M es C, y su valor en M′ es C′, se deducirá por último:

$$\text{trabajo total} = (C' - C)\, m.$$

En suma, el trabajo del sistema eléctrico, mientras una masa m pasa de una superficie equipotencial á otra, es el producto de la masa por la diferencia de ambas potenciales.

Si la potencial C′ es mayor que C, la fuerza eléctrica tendrá la dirección que indica la figura, suponiendo además que la masa m es positiva: obedecerá, por decirlo así, á la repulsión de C′ mayor que la de C; y, siendo $m\,(C' - C)$ positivo, el trabajo será positivo también.

Si C′ fuese menor que C, siendo siempre m positiva, la expresión $m\,(C' - C)$ sería negativa, y resistente el trabajo: es decir, que no pasaría m por sí de M′ á M, sino que deberíamos obligar á m á describir la expresada trayectoría, venciendo un trabajo de resistencia, igual numéricamente á $m\,(C' - C)$. La masa positiva va siempre por sí de la mayor potencial á la menor: la negativa al contrario.

Obsérvase desde luego que el mismo trabajo, motor ó resistente, correspondería á la masa m al pasar de C′ á C, fuera la que quisiese la curva descrita, M′M, ó N′N, con tal que partiese de la superficie C′ y terminase en la C.

La analogía entre este caso y el del movimiento de los cuerpos pesados sobre la Tierra, al atravesar diversos planos horizontales bajo la acción de la gravedad, es completa.

El trabajo en este último caso está determinado por la *masa* que cae y por el *desnivel* ó diferencia de los dos planos horizontales.

Y, de igual modo en el movimiento de las masas eléctricas, el trabajo depende de la *masa* que se mueve y de las dos superficies equipotenciales extremas, ó de lo que pudieramos llamar la caida ó *desnivel de las dos potenciales*.

La analogía es aun mayor. Los dos planos horizontales pueden referirse á un nivel cualquiera, y el trabajo sólo depende del desnivel; pues la potencial V sabemos que no tiene un valor determinado, porque puede agregársele una constante C_0 sin que pierda ninguna de sus propiedades; y así lo mismo se expresan las dos superficies por C' y C, que por

$$C' + V_0, \text{ y } C + V_0:$$

de todas maneras la caida de la potencial será la misma $C' - C$,

ó bien $$(C' + V_0) - (C + V_0) = C' - C.$$

Sabemos, que la potencial de cualquier sistema de masas eléctricas, tiene la forma

$$V = \sum \left(\frac{m}{\sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2}} + \frac{m'}{\sqrt{(a'-x)^2 + (b'-y)^2 + (c'-z)^2}} \ldots \right)$$

siendo m, m', etc., las masas; a, b, c las coordenadas de m; a', b', c' la de m'; etc.; y x, y, z las del punto variable que se considera: y de aquí se deduce una consecuencia importante.

Supongamos que una masa eléctrica μ viene de un punto del infinito al punto (x, y, z): el trabajo positivo ó negativo que corresponde á este trasporte de electricidad (ó de éter) será:

$$-\mu (V - V_0),$$

siendo V el valor de la potencial en (x, y, z), que es una de las posiciones extremas, y V_0 el valor de V en el punto del infinito, que es otra posición extrema de μ.

Pero en el valor anterior, cuando el punto μ está en el infinito, una de las coordenadas x, y, z por lo menos será infinita y el valor de V será cero: por lo tanto $V_0 = 0$, y el trabajo anterior se reducirá, pues, á $-\mu V$: si $\mu = 1$, dicho trabajo es $-V$.

De suerte que la potencial V representa numéricamente el trabajo que ha de consumirse sobre una masa eléctrica 1, para hacerla venir desde el infinito á la posición que ocupa.

He aquí otra significación importantísima de la potencial, que algunos autores toman por definición de la misma: porque en efecto una vez colocada μ en el espacio finito, representa un trabajo potencial: es decir, *posible*.

Resumiendo: la *potencial* de un sistema eléctrico es una función de x, y, z cuyas propiedades fundamentales son las siguientes.

1.° La derivada de la potencial en cualquier dirección es, con signo contrario, la componente de la fuerza eléctrica en dicha dirección para el punto que se considera.

2.° La potencial representa el trabajo almacenado en una masa + 1, al venir desde el infinito al punto para el cual se toma el valor de la potencial: abandonada á sí devolverá el trabajo que en ella se gastó para traerla á la posición que ocupa.

3.° Todos los problemas de la electro-estática dependen de lo que sea la potencial para cada sistema, y dicha función es la que entra en las ecuaciones diferenciales.

Hemos dicho que la potencial es nula en el infinito, pero puede serlo en el espacio finito. Por ejemplo: dos masas $+m$ y $-m$ (*fig.* 16) dan una potencial nula en todos los puntos

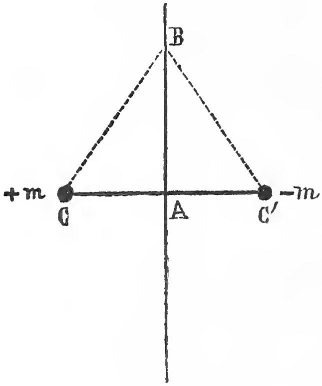


Fig. 16.

de una recta AB ó de un plano perpendicular á CC′ en su punto medio.

En efecto: la potencial en B será

$$\frac{+m}{\mathrm{CB}} + \frac{-m}{\mathrm{C'B}} = 0.$$

En general, si en una superficie la potencial es constante y vale C_0, aumentando la constante $-C_0$ será *cero* para dicha superficie.

Al calcular el trabajo necesario para traer una masa μ desde el infinito al punto x, y, z, en el cual de antemano por la acción de un sistema eléctrico existía la potencial V, hemos supuesto, que la masa μ no alteraba sensiblemente dicho sistema; es decir que μ era sumamente pequeña. De no ser así, sería preciso dividirla en elementos $d\mu$.

El primero exigiría para su trasporte el trabajo $Vd\mu$.

El segundo encontraría, no ya la potencial V, sino otra $V + dV$, producida por las alteraciones que el primer elemento $d\mu$ hubiese introducido en el sistema: de suerte que el trabajo sería $(V + dV)\, d\mu$. Y así sucesivamente. Este problema es sumamente sencillo y está resuelto en todos los tratados.

Como para nuestro objeto importa poco, no insistiremos sobre una cuestión puramente analítica.

2.º Hay multitud de teoremas sobre sistemas eléctricos en equilibrio, que pueden verse en las obras especiales de Mascart, Briot, Clerk-Maxwell y otros autores; pero de todos ellos sólo citaremos, pues de él hemos de hacer uso más adelante, el de *máximos* y *mínimos* de la potencial.

Supongamos que M (*fig.* 17) sea un punto en que la po-

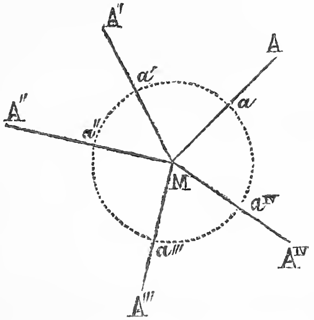


Fig. 17.

tencial alcance un máximo P. Si al rededor de M, en todas las direcciones del espacio, trazamos rectas MA, MA′, MA″, MA‴... y si elegimos un valor $P' = P - dP$ algo inferior á P, podremos encontrar en cada recta un punto para el cual la potencial sea P'. Esto es evidente, toda vez que siendo P un máximo, á su alrededor y en todos sentidos la potencial desciende.

Sean a, a', a''... dichos puntos: la superficie a, a', a''... que pasa por todos ellos constituirá la equipotencial de valor P'.

Tendremos, pues, que alrededor del punto M (*fig.* 18) de potencial máximo, las superficies de nivel constituyen superficies cerradas que envuelven á M.

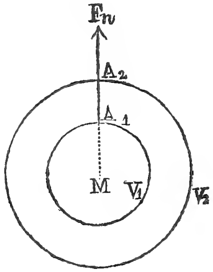


Fig. 18.

Si V_1 y V_2 representan dos de estas superficies infinitamente próximas, y $A_1 A_2 = n$ la normal común en cualquier punto, la fuerza eléctrica de todo el sistema en A_1 será

$$F_n = \frac{V_1 - V_2}{n}:$$

cantidad evidentemente positiva, porque V_1 es mayor que V_2, puesto que desde M el valor de la potencial va descendiendo, como hemos dicho, en todas direcciones.

Llamando ds al elemento de superficie V_2, el flujo de fuerza será para la superficie V_2

$$\Sigma \frac{V_1 - V_2}{n} ds = \Sigma F_n ds;$$

cantidad que, por componerse de sumandos positivos, tiene *un valor positivo*, H por ejemplo.

Ahora bien, de las dos ecuaciones

$$\Sigma F_n ds = 0 \quad \text{y} \quad \Sigma F_n ds = 4\pi m,$$

ó sea
$$H = 0 \quad \text{y} \quad H = 4\pi m,$$

la primera es absurda: luego ha de verificarse la segunda; de donde se deduce $m = \frac{H}{4\pi}$: es decir, que en el interior de las superficies V_2, V_1... ó sea en el punto M, existe una masa eléctrica positiva $m = \frac{H}{4\pi}$.

En el caso del *mínimo* los razonamientos serían análogos: bastaría tomar sobre MA, MA$'$, MA$''$... puntos cuyas potenciales fuesen iguales á $P + dP$.

H sería negativa y en el punto M existiría una masa negativa $m = \frac{H}{4\pi}$.

Resulta, pues, este importante teorema:

Dado un sistema eléctrico, el cual tendrá determinada función potencial, el valor de ésta no puede ser máximo ni mínimo sino en puntos en que exista una masa eléctrica: en el resto del campo, y en cualquier dirección ó continuamente, crece ó decrece continuamente.

Si, por ejemplo, tenemos cuerpos conductores A, B... (*figura* 19) con cargas eléctricas; y además masas fijas D, C...; y á

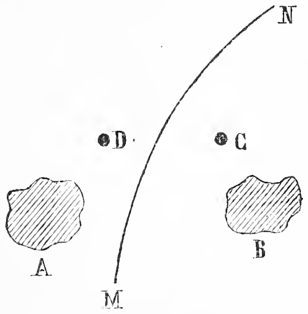


Fig. 19.

partir de cualquier punto M trazamos una línea MN, al caminar sobre ella, la potencial irá constantemente creciendo ó decreciendo, hasta que encuentre una masa eléctrica en A, B... C, D.., ó hasta que se anule en el infinito.

Claro es, y esta es una observación general, que todos los teoremas que exponemos, y casi todos los que nos restan, lo mismo se aplican al *equilibrio eléctrico* que á un instante ó estado de cualquier sistema dinámico: basta para convertir un estado en otro suponer fijas las masas en el momento que se considere.

Lo que hemos dicho de los puntos máximos ó mínimos puede decirse en términos generales de las *líneas ó superficies de máxima ó mínima* potencial.

Por ejemplo, si se trata de una *línea* AB, (*fig.* 20) tomaremos un elemento infinitamente pequeño ab; normalmente á

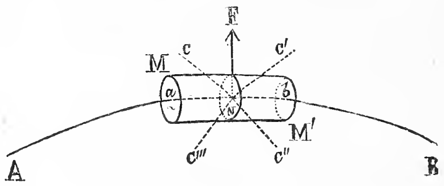


Fig. 20.

dicho elemento trazaremos una serie de planos; en cada uno, infinitas líneas radicales Nc, Nc', Nc''...; y, repitiendo el razonamiento del caso anterior, formaremos próximamente un cilindro MM', cuyo eje será el elemento ab: las fuerzas eléctricas F, normales á la superficie lateral del cilindro, darán un flujo de fuerza positivo, si la potencial sobre ab es un máximo, y negativo si es un mínimo; pero en general nunca será cero, porque todos los flujos elementales son del mismo signo. Por otra parte, el flujo sobre las caras M y M' puede despreciarse, porque siempre es posible hacer que las áreas M, M' sean de órden superior á la superficie del cilindro.

Por ejemplo, si ab es infinitamente pequeño de primer órden, y los radios de M y M' de segundo orden, el área lateral será de tercer grado y las dos bases de cuarto.

Desde el momento que el flujo de fuerza es una cantidad $\pm$ H, la fórmula $\pm \mathrm{H} = 4\pi m$ demuestra que hay sobre ab una masa eléctrica $m = \frac{\pm \mathrm{H}}{4\pi}$ positiva ó negativa.

Análoga demostración podría darse si existiera una superficie de máxima ó mínima potencial.

Tomando sobre la superficie de máxima ó mínima potencial MM' (*fig.* 21) un área A; trazando el cilindro normal

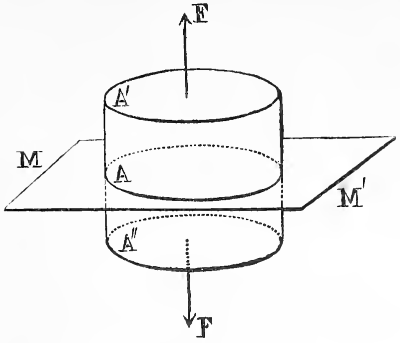


Fig. 21.

A'A'', que termine en dos superficies equipotenciales á un lado y otro de MM; eligiendo la altura de un orden suficientemente pequeño para que pueda despreciarse el flujo de la superficie lateral; y calculando el flujo de las fuerzas eléctricas normales sobre las bases, vendremos á parar á un resultado análogo al precedente: á saber que existen masas eléctricas sobre la superficie MM.

Podremos establecer, pues, este teorema de suma trascendencia.

En todo campo eléctrico no puede haber ni máximos ni mínimos para la función potencial, sino en donde hay masas eléctricas.

3.º La marcha, por decirlo así, del flujo eléctrico á lo lar-

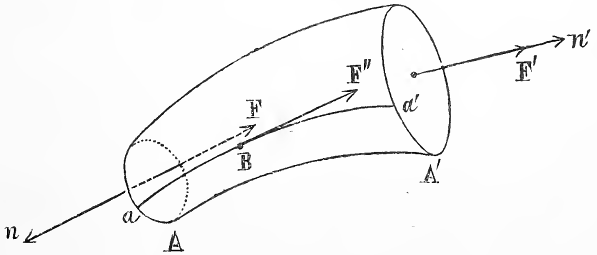


Fig. 22.

go de un tubo de fuerza es una consecuencia inmediata de los teoremas fundamentales, ya citados.

Consideremos un tubo de fuerza AA' (*fig.* 22) y cortémoslo por dos secciones normales, que serán dos elementos de dos superficies equipotenciales.

Consideremos un *espacio cerrado* por la superficie del tubo (que estará compuesto de líneas de fuerza) y por las secciones normales A, A'. A esta superficie podremos aplicarle el teorema general; y suponiendo, *primero*: que en el interior no hay ninguna masa eléctrica, tendremos:

flujo de la cara A + flujo de la superficie lateral + flujo de la cara A' = 0.

Si admitimos (hipotéticamente) que la fuerza eléctrica F tiene la dirección que marca la figura, como la normal *n* exterior á la cara A va en sentido contrario de F, resultará:

flujo sobre A = — FA (representando A el área).

Sobre cada punto de la superficie lateral la fuerza eléctrica F'' es tangente á la línea de fuerza *aa'*, por lo tanto á la superficie del tubo, y, por consiguiente, su componente normal será nula, de donde se duduce:

flujo de fuerza de la superficie lateral = 0.

Por último, en la cara A' la dirección y el sentido de F' son los mismos que los de la normal exterior *n'*. Así pues:

flujo de la cara A' = + F A'.

Resultará sustituyendo:

$$-FA + F'A' = 0;$$

ó bien
$$FA = F'A'.$$

En primer lugar esto prueba que la hipótesis relativa á las direcciones de F y F' es la única posible; porque de otro modo, ó si tuviesen direcciones opuestas una á otra, resultaría

$$-FA = F'A':$$

lo cual sería absurdo, porque A y A', que son dos áreas, representan cantidades esencialmente positivas, y además consideramos á F y F' como cantidades positivas tambien.

Por lo tanto, la ecuación FA = F'A', que se aplica á dos secciones cualesquiera, demuestra: que *á lo largo de un tubo de fuerza el flujo de fuerza eléctrica es constante, interin no encuentra una masa eléctrica.*

Si, en *segundo lugar*, en el espacio AA′ hubiese una masa eléctrica m, tendríamos:

$$-\mathrm{FA} + \mathrm{F'A'} = 4\pi m;$$

es decir,
$$\mathrm{F'A'} = \mathrm{FA} + 4\pi m.$$

Luego el flujo eléctrico FA se aumentaría (algebraicamente, porque m puede ser positiva ó negativa) en la cantidad $4\pi m$.

Todos estos teoremas, de una sencillez y de una elegancia extraordinarias, dan idea clarísima del mecanismo interno, por decirlo así, de los campos eléctricos; al menos en cuanto á la distribución, orden, y modificaciones de la fuerza eléctrica.

4.° Veremos más adelante, pero no hay dificultad en que anticipemos estas ideas, que los *campos eléctricos* ó espacios en que las masas eléctricas ejercen su acción, pueden ser de varias clases:

1.° El *vacío absoluto* (hipótesis abstracta que no se verifica en la realidad), en cuyo caso las acciones de las masas eléctricas son no mas que *posibilidades de acción*, por decirlo de este modo; pero subsistiendo todos los teoremas, como leyes de Geometría y de Mecánica puras.

2.° *Masas eléctricas fijas* en puntos, líneas, superficies ó volúmenes: este caso, en cierto modo, se materializa en los *cuerpos aisladores*: en ellos la electricidad no puede circular y se queda en el punto en que se engendra ó deposita. Claro es que las nociones de *aislamiento* y *conductibilidad* no son absolutas y que todos los cuerpos son más ó menos conductores; pero de todas maneras la clasificación que indicamos es cómoda y conveniente para establecer las teorías generales.

3.° *Espacios dieléctricos*, en los que la electricidad sólo puede tomar pequeños movimientos, produciendo desequilibrios limitados en cada elemento de volúmen.

4.° *Cuerpos conductores*, en que la menor fuerza eléctrica engendra movimientos de condensación ó desprendimiento de las atmósferas etéreas, ó como se dice en la antigua nomenclatura, movimientos de las dos electricidades.

De estos últimos nos ocuparemos únicamente por ahora, porque sus condiciones de equilibrio se deducen con facilidad suma de lo que llevamos expuesto.

Consideremos un cuerpo conductor AB A'B', (*fig.* 23) y

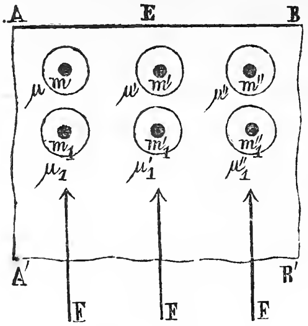


Fig. 23.

para fijar las ideas, y hacer mas clara la explicación, representemos dos filas, ó mejor dicho, dos capas de moléculas ponderables:

$$m,\ m',\ m''\dots\ m_1,\ m'_1,\ m''_1\dots$$

con sus correspondientes atmósferas de éter:

$$\mu,\ \mu,\ \mu'''\dots\ \mu_1,\ \mu'_1,\ \mu''_1.$$

Supongamos dicho cuerpo sometido á fuerzas eléctricas F, F, F, procedentes de cualquier sistema.

Estas fuerzas tienden á separar una parte de las atmósferas μ_1, μ'_1, $\mu''_1\dots$ disminuyendo la masa etérea (ó eléctrica) de las moléculas m_1, m'_1, $m''_1\dots$, y á aumentar con estas cantidades de éter las atmósferas de las moléculas m, m', $m''\dots$

Si, para simplificar la explicación, reducimos á dos capas de moléculas el cuerpo conductor AB A'B' como queda dicho, y si además admitimos en AB una superficie, que no pueda traspasar el fluido eléctrico por estar formado el espacio E por

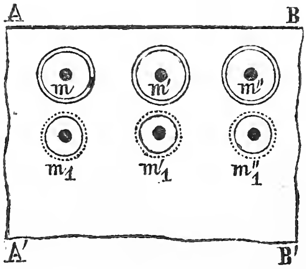


Fig. 24.

un aislador ó cuerpo dieléctrico, podremos representar simbólicamente el nuevo estado del cuerpo como indica la (*fig.* 24).

Las moléculas m, m', m''... tendrán mayor atmósfera etérea que antes: y se hallarán electrizadas *positivamente*.

En cambio las moléculas m_1, m_1', m''_1... habrán perdido una parte de éter, toda la que ha aumentado las atmósferas de la capa superior, y se hallarán electrizadas *negativamente*.

El carácter distintivo de los cuerpos conductores es este: que la menor fuerza eléctrica separa una parte de *éter* poniéndolo en movimiento. En el antiguo sistema se diría que la menor fuerza eléctrica descompone el fluido neutro, poniendo en movimiento en sentido contrario las dos electricidades.

El resultado es un movimiento de éter á través de la masa; acumulación de electricidad ya positiva ya negativa en determinados puntos; y, suponiendo fijeza en las causas perturbadoras iniciales, un estado definitivo de equilibrio: las fuerzas que nacen del desiquilibrio del éter (ó sea de las dos electricidades creadas) vienen á compensar las fuerzas primitivas.

La primera condición de equilibrio en el interior de un cuerpo conductor es, por lo tanto, que la fuerza eléctrica sea nula.

Y, en efecto, si no lo fuere, arrancaría una parte de la atmósfera etérea de los puntos en que actuase, ó traería á ella nuevas masas de éter: en ambos casos continuaría el movimiento de electricidad á través de la masa.

Decir que en cada punto del conductor la fuerza eléctrica ha de ser nula, es lo mismo que decir que la potencial ha de ser constante; porque siendo $\frac{dV}{ds}$ la fuerza eléctrica, la condición $\frac{dV}{ds} = 0$, supone $V =$ constante.

Podemos, por lo tanto, establecer, que, *para el equilibrio del fluido eléctrico en un conductor, es preciso y suficiente que la potencial en toda su masa sea constante.*

De estas dos condiciones, que equivalen á una sola, anulación de la fuerza eléctrica ó constancia de la potencial, se deduce esta consecuencia importantísima: en el interior de un cuerpo conductor, que ha llegado al equilibrio eléctrico, no puede haber *electricidad libre*.

En efecto, apliquemos la fórmula

$$\Delta V = -4\pi\rho,$$

ó bien su expresión desarrollada,

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = -4\pi\rho,$$

á cualquier punto del conductor. Puesto que V es constante, los tres coeficientes son nulos y tendremos:

$$0 = -4\pi\rho;$$

ó bien ρ = densidad en el punto elegido = 0.

No hay, pues, electricidad libre en el interior del conductor: no hay atmósferas etéreas descargadas, ni otras con mayor masa de éter: todas las moléculas *del interior* han recobrado, al llegar el sistema al equilibrio, su estado neutro y normal.

Este resultado, puramente analítico, había sido ya puesto en evidencia experimentalmente.

Pero téngase en cuenta que, tanto la demostración analítica como la posibilidad práctica, suponen que la ley de las atracciones y repulsiones eléctricas es la ya indicada, á saber la de la relación inversa de los cuadrados de las distancias. Ley que por otra parte ya había deducido Coulomb de sus conocidas experiencias.

No ocultaremos que en este punto surge una duda respecto á la identidad que hemos supuesto entre la electricidad y el fluido etéreo.

Las experiencias directas de Coulomb, y el hecho, experimental también, de no existir electricidad en el interior de los cuerpos conductores, una vez establecido el equilibrio eléctrico, hecho que sólo puede explicarse analíticamente por la citada ley de Coulomb, prueban que las acciones eléctricas dependen de la *relación inversa del cuadrado de las distancias*; y hasta la manera de reducir la hipótesis *dualista* á la *unitaria*, en cuyo cálculo hemos admitido siempre dicha relación, comprueba esto mismo.

Sin embargo, la teoría matemática de la luz, y en ella las teorías de la doble refracción y de la dispersión, exigen que las acciones moleculares del éter varíen en razón inversa de la *sexta potencia* de las distancias.

Tenemos pues una contradicción por lo menos aparente:

Acción de dos átomos etéreos en la teoría de la luz $= \frac{\mu \mu'}{r^6}$;

Acción de los mismos en la teoría unitaria de la electricidad $= \frac{\mu\mu'}{r^2}$.

No obstante lo expuesto, la contradicción no es tan absoluta como parece y quizá podría resolverse de este modo. Supongamos que las acciones en cuestión, contuviesen dos términos (por lo menos) y que fuera esta su forma:

$$\left(\frac{A}{r^2} + \frac{B}{r^6}\right)\mu\mu'.$$

Si el coeficiente B tuviera un valor muy pequeño respecto al coeficiente A, para ciertos valores de r tales que r^6 fuese mucho mayor que B, el término $\frac{B}{r^6}$ podría despreciarse: este sería el caso de las atracciones eléctricas en que r es del orden molecular.

En cambio para valores de r suficientemente pequeños, $\frac{B}{r^6}$ podría ser mucho mayor que $\frac{A}{r^2}$ y dominaría dicho término $\frac{B}{r^6}$: este sería á su vez el caso de los movimientos luminosos en que r es del orden atómico.

Sin profundizar el problema, indicamos de pasada estas ideas generales por si hubieran de ser tenidas en cuenta.

5.ª No basta, para que un cuerpo conductor esté en equilibrio, que la potencial sea constante en todo su interior; que, por lo tanto, la fuerza eléctrica sea nula en todo él; y que en él no exista electricidad libre. Aun suponiendo que ésta acuda

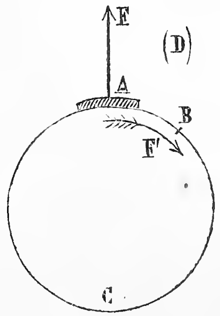


Fig. 25.

á la superficie, formando como una capa envolvente, será preciso que sobre la misma superficie ABC del conductor (*fig.* 25) sea constante la potencial. De lo contrario, si A y B, por ejemplo, tuviesen potenciales distintas V y V', existiría una fuerza eléctrica tangencial F', cuyo valor, llamando *ds* á la distancia AB, sería $\frac{V - V'}{ds}$.

Claro es que, existiendo fuerzas tangenciales sobre la superficie ABC de un conductor, la electricidad no penetrará al interior; pero se moverá sobre dicha superficie: con lo cual el supuesto equilibrio será imposible.

Es, pues, indispensable que sobre toda la superficie de un conductor en equilibrio la potencial sea constante, y la fuerza eléctrica tangencial nula por lo tanto.

Decir que la fuerza eléctrica *tangencial es nula* es decir que en todos los puntos de la superficie la fuerza eléctrica F debe ser normal á la expresada superficie. La masa eléctrica A, solicitada hacia el exterior, sólo estará en equilibrio por la mala conductibilidad, ó, de otro modo, por la impenetrabilidad del espacio D, que rodea al cuerpo y que forma como una pared que contiene el éter, que el cuerpo pretende arrojar de sí.

La teoría general no sólo determina, como acabamos de ver, las condiciones de equilibrio eléctrico de cada conductor, sino que da la fórmula de dos elementos importantísimos, á saber: *fuerza eléctrica* en cualquier punto de la superficie; y *presión* que la electricidad ejerce sobre el espacio exterior á dicha superficie límite.

No han de confundirse estas dos ideas, *fuerza eléctrica* y *presión*.

Si consideramos un punto del campo eléctrico, y en él imaginamos, ó colocamos en él materialmente, una masa eléctrica igual á la unidad, por ejemplo un pequeño *plano* de prueba, es decir, una hoja metálica, ó una esferilla cargada de electricidad, esa masa imaginaria, ó esa masa real, sufrirán una acción del sistema eléctrico: tal acción ó fuerza es lo que se llama, como varias veces hemos dicho, *fuerza eléctrica* en el punto que consideramos. Esto suponiendo que la electricidad que introducimos como prueba no altera sensiblemente el sistema que ya existía de antemano.

En cambio, considerando una extensión plana σ en el campo eléctrico, todas las acciones del sistema darán sobre esta superficie σ una acción total, que será la *fuerza elástica,* ó en términos generales, *la presión sobre* σ.

Estos dos conceptos de fuerza eléctrica y de presión (ó fuerza elástica) se presentan en todas las cuestiones análogas á la que nos ocupa; y, casi sería una puerilidad el insistir en tales ideas, que son elementales, sino fuese por la conveniencia de llevar la claridad y la precisión al último límite, mirando por lo mucho que importa facilitar el presente estudio á aquellas personas que por vez primera se dediquen á esta clase de materias.

Sucede con la *fuerza eléctrica,* y la *acción elástica,* lo que en el aire, por ejemplo, con otros dos conceptos análogos. Si imaginamos una masa de aire, una cosa será la *atracción* que la Tierra ejerce sobre dicha masa, y otra muy distinta serán las *presiones elásticas* del medio ambiente sobre las caras de la masa que consideramos.

La *primera* sólo depende de la masa terrestre y de la masa y distancia del volumen de aire de que se trata: la *segunda* de todo el espacio que rodea al volumen en cuestión y de sus condiciones de equilibrio: es una resultante elástica del campo.

Comprendido esto, supongamos un conductor M (*fig.* 26)

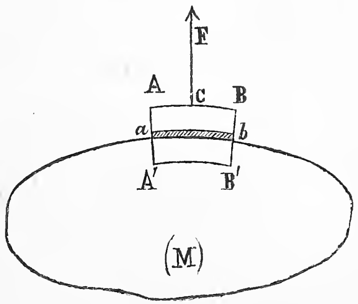


Fig. 26.

en equilibrio, en cuya superficie se habrá acumulado una capa eléctrica, de la cual consideraremos la parte infinitamente pequeña *ab*. Veamos cuál es la *fuerza eléctrica* de *todo el sistema*: es decir, no sólo del cuerpo M sino de todos los que constituyen sistema con él y de resultas de cuyo equilibrio aparece la capa *ab* de electricidad.

Por el contorno de *ab* hagamos pasar un cilindro, que cortaremos por dos secciones rectas AB, A'B': la primera en el espacio exterior, la segunda en el interior del cuerpo M.

Establecido esto, determinemos el flujo de fuerza en AB, A'B'.

El flujo sobre las caras AA', BB' es nulo, porque las fuerzas eléctricas son normales á la superficie *ab*; y sus componentes, normales á dichas caras AA', BB', son por lo tanto nulas.

El flujo en la cara A'B' es nulo igualmente; porque, dado el equilibrio, la fuerza eléctrica es nula en el interior de M.

El flujo sobre AB será F $\times$ área AB; representando por F la fuerza eléctrica que buscamos.

Por otra parte el volumen AB A'B' comprende la masa eléctrica *ab*.

De suerte que, llamando σ al área *ab*, y ρ á la densidad del fluido eléctrico en *ab*, es decir, á la cantidad de electricidad por unidad de superficie, tendremos

$$F\sigma = 4\pi\sigma\rho \quad \text{ó bien} \quad F = 4\pi\rho.$$

Esta fórmula es importantísima y da la fuerza eléctrica en los puntos exteriores del cuerpo M, inmediatamente próximos á la superficie que lo limita.

Pero no se crea que es tan facil determinarla en cada caso particular; porque al fin F depende de ρ, y, dado un sistema, no es fácil, y casi siempre es dificilísimo, averiguar qué cantidad de fluido eléctrico aparecerá en los conductores y cómo se distribuirá sobre sus superficies. De suerte que con toda su importancia la fórmula no hace más que sustituir una incógnita por otra: F por ρ.

Eso sí, conocida ρ, dicha fórmula da no sólo la fuerza eléctrica en la proximidad de M, sino en cualquier punto del espacio, suponiendo que se determinen previamente las superficies equipotenciales y los tubos de fuerza.

Por ejemplo, si se quiere conocer la fuerza eléctrica en *b*, (*fig.* 27) y se considera el tubo de fuerza AB A'B' que comprende dicho punto, hasta que termine en una superficie AA',

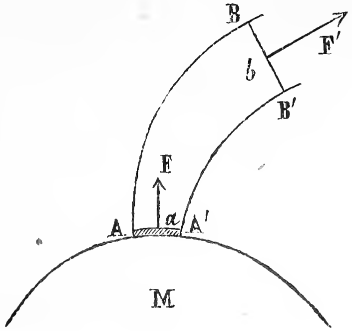


Fig. 27.

de M por ejemplo, tendremos igualando los flujos de fuerza:

$$F \times \text{área } AA' = F' \times \text{área } BB';$$

y como $F = 4\pi\rho$, resultará:

$$4\pi\rho \,.\, \text{área } AA' = F' \times \text{área } BB':$$

de donde

$$F' = 4\pi\rho \, \frac{\text{área } AA'}{\text{área } BB'}:$$

cantidad que podrá conocerse si se conoce ρ.

Veamos ahora qué *presión* ejerce sobre el exterior la capa eléctrica EE', extendida sobre un conductor M por la influencia de un sistema eléctrico cualquiera.

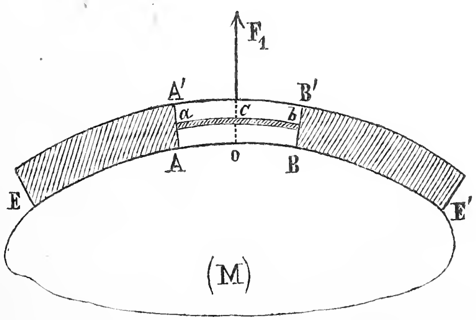


Fig. 28.

Sea, como hemos dicho, EE' (*fig.* 28) la capa eléctrica, cuyo espesor exajeramos para más claridad en la explicación.

Consideremos una extensión infinitamente pequeña AB A'B' de dicha capa, y dividamos AB A'B' en capas infinitamente estrechas: sea *ab* una de estas.

La presión total sobre A'B' $= d$S será la suma de las presiones que ejercen todas las capas infinitesimales *ab* de ABA B'.

Llamando ρ la densidad (no la densidad superficial, sino la masa por unidad de volumen) de un punto cualquiera de *ab*, que supondremos que es la misma para toda la capa en la extensión infinitamente pequeña que ocupa, y recordando que en cualquier punto la fuerza eléctrica es $-\frac{dV}{dn}$, siendo V la potencial y dn el espesor de *ab*; tendremos que la fuerza que empuja hacia el exterior á toda la masa *ab*, masa cuyo valor es $\rho dS dn$, será

$$\rho\, dS\, dn \times - \frac{dV}{dn}.$$

La fuerza total F_1, ó sea la presión sobre dS, será la integral de la expresión anterior para todo el espesor AA' $= e$. Así pues:

$$F_1 = \int_0^e \rho\, dS\, dn \times - \frac{dV}{dn};$$

ó bien:

$$\frac{F_1}{dS} = \text{presión por unidad de superficie} = p = \int_0^e \rho \times - \frac{dV}{dn}\, dn.$$

La fórmula general de Poisson,

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = -4\pi\rho,$$

aplicada á cualquier punto de la masa AA' BB', se simplifica notablemente. En efecto, recordando que las componentes $\frac{dV}{dx}$ y $\frac{dV}{dy}$ son nulas (tomando los ejes de las x, y en un plano paralelo á AB), puesto que la fuerza eléctrica es normal á AB, y suponiendo además el eje de las z en la dirección del espesor n; se convierte dicha fórmula en

$$\frac{d^2V}{dn^2} = -4\pi\rho;$$

de donde,

$$\rho = -\frac{1}{4\pi}\frac{d^2V}{dn^2}.$$

Sustituyendo este valor en el de p, tendremos

$$d = \int_o^e -\frac{1}{4\pi}\frac{d^2V}{dn^2} \times -\frac{dV}{dn}dn = \frac{1}{4\pi}\int_o^e \frac{d^2V}{dn^2}\cdot\frac{dV}{dn}dn =$$

$$\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{dV}{dn}\right)^2\right)_o^e = \frac{1}{8\pi}\left[\left(\frac{dV}{dn}\right)_e^2 - \left(\frac{dV}{dn}\right)_o^2\right]$$

Pero $\left(\frac{dV}{dn}\right)_o$, ó sea el valor de $\frac{dV}{dn}$ en o, es nulo porque en el interior del cuerpo es nula la fuerza; y $\left(\frac{dV}{dn}\right)_e$, ó el valor de $\frac{dV}{dn}$ en e, es (con signo contrario) el valor de la fuerza eléctrica en el exterior y en puntos infinitamente próximos á A'B', fuerza que llamamos F. Resultará pues

$$p = \frac{1}{8\pi}F^2.$$

Tal es el valor de la *presión* en función de la *fuerza* eléctrica.

Si queremos expresar p en función de la *densidad superficial* σ en AB A'B', no hay más que sacar el valor de F de la fórmula

$$F = 4\pi\sigma,$$

y sustituirla en la expresión de p. Tendremos:

$$p = \frac{1}{8\pi}(4\pi\sigma)^2 = 2\pi\sigma^2.$$

Notemos que en la *presión* entra el cuadrado de la densidad: resultado que es general, porque las presiones son resultantes de las acciones dos á dos de los átomos etéreos, de suerte que entra forzosamente el cuadrado de las *masas* ó sea de las *densidades*.

Aunque hemos aplicado, para deducir los valores de la presión y de la fuerza eléctrica en el exterior, y en puntos infinitamente próximos á la superficie, las fórmulas generales, siguiendo la marcha, que siguen, por ejemplo, Mrs. Mascart y Joubert en su excelente obra, fácil sería deducir ambas expresiones por un método directo.

Por ejemplo, podemos determinar con facilidad suma el valor de la fuerza eléctrica en *a*, (*fig.* 29) punto infinitamente

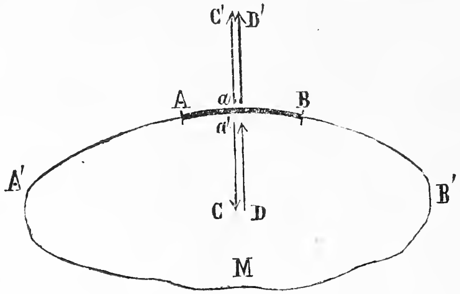


Fig. 29.

próximo á la superficie A'A BB' de un cuerpo conductor M en equilibrio eléctrico.

Consideremos, en efecto, el elemento AB, y tomemos dos puntos *a* y *a'*, el primero exterior é interior el segundo, á una distancia de AB infinitamente pequeña de orden superior, siendo AB de primer orden, por ejemplo.

La fuerza eléctrica en *a'* se compondrá de dos fuerzas:

Primero. La acción sobre el punto *a'* del elemento AB, que llamaremos C.

Segundo. La acción del resto de la superficie AA' M B'B, que llamaremos D.

Pero la fuerza eléctrica en *a'* es nula, porque es un punto interior y así lo exigen las leyes de equilibrio: luego $C = -D$.

La fuerza eléctrica en *a* se compondrá asimismo de dos partes:

Primero, La acción de AB sobre *a*, que por *razón de simetría* será igual y contraria á C: de suerte que $C' = -C$.

Segundo. De la acción del resto de superficie AA' M B'B, que será la misma que antes, es decir D, puesto que la distancia *aa'* es un infinitamente pequeño de orden superior, y aquí no cabe aplicar la ley de simetría á que hemos acudido antes.

De aquí se deduce, que la acción en a será

$$C' + D' = C' + D = -C - C = -2C:$$

ó, de otro modo, la acción eléctrica sobre a es numéricamente igual al doble de la acción del elemento AB, sobre un punto que diste de él un infinitamente pequeño superior al orden de la *dimensión lineal* de dicho elemento AB, calculando dicha acción como si estuviese aislado el elemento.

Tenemos por lo tanto que resolver este problema: hallar la fuerza eléctrica de una superficie AB (*fig.* 30), infinitamente

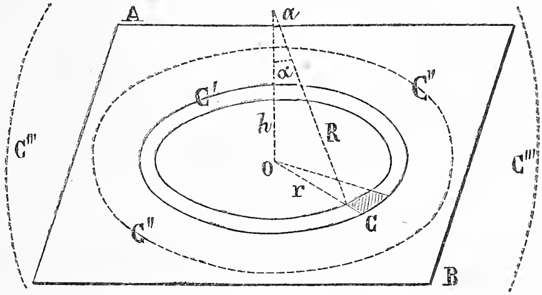


Fig. 30.

pequeña, sobre un punto a, que se puede suponer tan próximo á AB como se quiera.

Proyectemos a sobre AB y sea o dicha proyección.

Tracemos desde o como centro anillos infinitamente estrechos CC', y busquemos la acción de uno de estos anillos eléctricos sobre a.

Además, como la resultante es normal á AB, basta que determinemos los componentes según ao.

Llamando r al radio del anillo;

h la altura oa,

α al ángulo oaC,

R á la distancia aC,

la acción del elemento eléctrico C (que designaremos por $\sigma d\omega$, siendo σ la densidad y $d\omega$ el área) sobre la unidad de electricidad, colocada en a, será evidentemente $\frac{\sigma d\omega}{R^2}$; y su componente, según ao, será asimismo $\frac{\sigma d\omega}{R^2} \times \cos \alpha$.

La componente de todo el anillo será $\frac{\sigma}{R^2}\cos\alpha\int d\omega$; y

como $\int d\omega$ es el área CC', ó bien $2\pi r dr$,

tendremos desde luego:

$$\text{acción del anillo CC' sobre } a = \frac{\sigma}{R^2}\cos\alpha.\,2\pi r dr.$$

Para no dejar más variable que el ángulo α, basta observar que

$$\frac{h}{R} = \cos\alpha, \text{ ó } \frac{h}{\sqrt{h^2+r^2}} = \cos\alpha.$$

Diferenciando con relación á r y á α, resultará:

$$-\frac{h\,rdr}{R^3} = -\operatorname{sen}\alpha\,d\alpha;$$

y como

$$\frac{h}{R} = \cos\alpha,$$

se deduce que

$$\frac{rdr}{R^2} = \frac{\operatorname{sen}\alpha\,d\alpha}{\cos\alpha}.$$

Así, pues: acción del anillo CC' $= 2\pi\sigma\operatorname{sen}\alpha\,d\alpha$; é integrando, desde $\alpha = o$ hasta $\alpha = \frac{\pi}{2}$, puesto que, á medida que h tiende hacia cero, el ángulo α tiende á 90 grados, tendremos:

Acción total de la superficie

$$AB = 2\pi\sigma\int_o^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}\alpha\,d\alpha = 2\pi\sigma\left(-\cos\alpha\right)_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi\sigma\,(0+1).$$

El valor buscado es por lo tanto $2\pi\sigma$.

Y el doble de este valor $4\pi\sigma$.

A este mismo resultado llega el Sr. D. Francisco de P. Rojas en su excelente Memoria sobre dinamos, premiada por la Academia, al calcular la acción de un *plano infinito sobre un punto cualquiera.*

Y, en efecto, un plano infinito y un punto que dista de él una cantidad finita, constituyen un sistema de la misma clase, por decirlo así, que un plano infinitamente pequeño y un punto que se acerca á él indefinidamente, siendo el orden de la distancia superior á la dimensión lineal de la superficie.

Parece, sin embargo, que la demostración no es rigurosa, porque el contorno AB en general no coincidirá con una circunferencia límite C''; pero toda duda desaparece observando que la integral de los anillos no depende del límite superior C'', sino del elemento singular del punto O. En efecto, suponiendo que el cálculo se efectua para dos circunferencias C'', C'''; una C'' interior al contorno AB, y otra C''' exterior, ambas dan el mismo resultado $2\pi\sigma$, y el mismo resultado dará el contorno AB que está entre ambas.

VI. *Problema general de la electro-estática.* El problema general de la electro-estática consiste en determinar las condiciones de equilibrio de cualquier sistema; la distribución de las masas eléctricas y por lo tanto de las fuerzas eléctricas; y las presiones, las superficies equipotenciales, y las líneas de fuerza: cantidades todas, como otras muchas, que dependen de la primera: es decir, de la distribución de la electricidad en toda la extensión del campo eléctrico.

Este puede hallarse, como hemos indicado, en diversas condiciones: puede ser el espacio vacío; ó un dieléctrico; ó masas eléctricas fijas; ó un cuerpo conductor con ó sin carga previa, ya aislado, ya en comunicación con el depósito común, masa infinita de potencial nula.

Del espacio vacío, nada diremos, limitándonos á estos tres casos: masas fijas, conductoras y dieléctricas.

1.° Masas eléctricas fijas sin cuerpos más ó menos conductoras en presencia. El problema en este caso es sumamente sencillo, al menos como problema de electro-estática; y si alguna dificultad presenta, será puramente analítica.

En efecto, dados varios puntos fijos de electricidad, *continuos ó discontinuos*, cuyas masas llamaremos m, m', m''... y cuyas coordenadas representaremos por

$$a,\ b,\ c;\ a',\ b',\ c';\ a'',\ b'',\ c''...$$

la potencial en un punto cualquiera x, y, z del espacio, será como ya sabemos:

$$V=\sum\frac{m}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(2-0)^2}}.$$

Todo queda reducido á efectuar la suma si los puntos son en número finito ó las integrales si constituyen líneas, superficies ó volúmenes eléctricos.

La sencillez del problema consiste en que la distribución de las masas eléctricas no puede alterarse, y además en que de antemano es conocida, sin que en todo el campo eléctrico puedan presentarse nuevas masas que compliquen el problema.

Conocida por lo tanto la íntegral V, á saber:

$$V=V\ (x, y, z),$$

todos los demás problemas son sencillísimos.

Derivando V con relación á x, y, z, se obtienen (cambiando signos) las tres componentes de la fuerza eléctrica.

Igualando V á una constante, $V=C$ se obtienen las superficies equipotenciales.

Y por un problema de analítica bien conocido, se determinan las trayectorías normales de

$$V\ (x, y, z)=C,$$

ó sean las líneas de fuerza.

De todos estos problemas que á veces dan origen á cuestiones dificilísimas de análisis, sólo examinaremos, por ser las que nos importan, dos casos particulares: fuerzas eléctricas (ó potenciales, puesto que tanto da determinar unas como otras) de una esfera homogénea; es decir de una masa eléctrica homogénea y esférica; y en segundo lugar el caso de dos masas de signos contrarios infinitamente próximas.

Claro es que todos estos problemas, en el fondo no son otros que los de atracciones y repulsiones en razón inversa del cuadrado de las distancias y proporcionales á las masas, problemas que se estudian todos en los tratados de Mecánica.

Fuerza eléctrica de una masa esférica homogénea. Dividiendo la esfera en capas esféricas de espesor infinitamente pequeño y determinando la fuerza eléctrica de cada una, podremos, después, por medio de una integración, resolver el primer problema.

Examinemos, pues, este caso sencillo: *fuerza eléctrica de una capa esférica y homogénea en un punto cualquiera del campo eléctrico.*

Sea una esfera eléctrica homogénea, y en ella *(fig. 31)* la

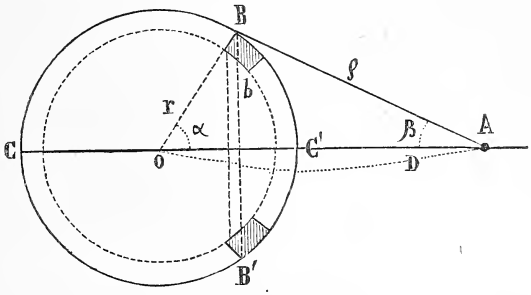


Fig. 31.

capa B C B': determinemos la fuerza eléctrica sobre el punto A de masa 1.

Como en virtud de la simetría la resultante tendrá la dirección O A, basta que calculemos las componentes de las acciones elementales sobre dicha recta.

Considerando el filete circular proyectado en BB', y engendrado por la revolución de Bb alrededor de OA, cuyos puntos todos están á igual distancia de A y cuya fuerza por lo tanto será igual, para cada elemento, á su masa dividida por el cuadrado inverso de AB, sólo restará que integremos todos los filetes análogos, según planos normales á O A, desde C' á C.

Representemos por,

O B el radio de la capa eléctrica;

ρ la distancia (constante para el filete) A B;

α y β los ángulos variables BO A, B AO;

D la distancia O A;

y δ la densidad eléctrica de la capa.

El volumen del filete será: su sección B b, cuyas dimensiones son dr y $rd\,\alpha$, y cuya área será $rdrd\,\alpha$, por su longitud, que es la circunferencia que se proyecta en B B', es decir

$$2\,\pi\,r \operatorname{sen} \alpha:$$

tendremos pues:

$$\text{volumen B B}' = 2\,\pi\,r^2\,dr\,d\,\alpha \text{ sen } \alpha.$$

Su masa eléctrica valdrá

$$2\,\pi\,\delta\,r^2\,dr\,d\,\alpha \text{ sen } \alpha$$

y la componente buscada

$$\frac{2\,\pi\,\delta\,r^2\,dr\,d\,\alpha \text{ sen } \alpha}{\rho^2} \times \cos\beta;$$

Todo queda reducido á integrar desde C′ á C, y tendremos:
F=fuerza eléctrica de la capa esférica

$$= \int_{(c')}^{(c)} \frac{2\,\pi\,\delta\,r^2\,dr\,d\,\alpha \text{ sen } \alpha}{\rho^2} \cos\beta,$$

y, sacando las cantidades constantes fuera de la integral,

$$F = 2\pi\delta r^2 dr \int_{(c')}^{(c)} \frac{d\alpha \text{ sen } \alpha \cos\beta}{\rho^2}.$$

Tomemos por variable de la integración ρ, y expresemos α y β en función de dicha variable.

El triángulo OBA da:

$$\rho^2 = r^2 + D^2 - 2rD\cos\alpha;$$

y, diferenciando respecto á α y ρ, resultará:

$$2\rho\, d\rho = 2rD \text{ sen } \alpha\, d\alpha;$$

de donde se deduce:

$$\rho d\rho = rD \text{ sen } \alpha\, d\alpha,$$

y

$$\text{sen } \alpha\, d\alpha = \frac{\rho d\rho}{rD}:$$

así podemos eliminar α en función de ρ.

El mismo triángulo da:

$$r^2 = D^2 + \rho^2 - 2D\rho\cos\beta;$$

de donde

$$\cos\beta = \frac{D^2 - r^2 + \rho^2}{2D\rho};$$

que nos da β en función de ρ.

Sustituyendo los valores de sen $\alpha\, d\alpha$ y de cos β en la integral, tendremos:

$$F = 2\pi\delta r^2 dr \int_{(c')}^{(c)} \frac{\rho\, d\rho}{rD} \cdot \frac{D^2 - r^2 + \rho^2}{2D\rho} \cdot \frac{1}{\rho^2};$$

ó, simplificando,

$$F = \frac{2\pi\delta\, rdr}{2D^2} \int_{(c')}^{(c)} \frac{D^2 - r^2 + \rho^2}{\rho^2}\, d\rho = \frac{\pi\delta\, rdr}{D^2} \times$$

$$\int_{(c')}^{(c)} \left[(D^2 - r^2) \frac{d\rho}{\rho^2} + d\rho \right] = \frac{\pi\delta\, rdr}{D^2} \left[-\frac{D^2 - r^2}{\rho} + \rho \right]_{(c')}^{(c)}.$$

Pero en el punto C′ el valor de ρ es $D - r$; y en C el límite es $D + r$: luego tendremos

$$F = \frac{\pi\delta\, rdr}{D^2} \left[\left(-\frac{D^2 - r^2}{D + r} + D + r \right) - \left(-\frac{D^2 - r^2}{D - r} + D - r \right) \right] = \frac{4\pi\delta\, r^2 dr}{D^2}.$$

Ahora bien, $4\pi r^2 dr$ es el volumen de la capa eléctrica, y $4\pi r^2 \delta dr$ la masa eléctrica: llamándola m, resulta:

$$F = \frac{m}{D^2}.$$

De suerte que la atracción de la capa esférica, sobre un punto cualquiera, es la misma que si toda ella se reuniese en su centro.

Como otro tanto puede decirse de todas las capas en que se dividió la esfera, tendremos finalmente: *que la acción eléctrica de una esfera homogénea sobre un punto exterior es igual á la de una masa equivalente reunida en su centro.*

Lo mismo se deduce integrando $\dfrac{4\pi\delta\, r^2 dr}{D^2}$ respecto á r: resultaría en efecto:

$$F = \frac{4}{3} \pi r^3 \delta \frac{1}{D^2}:$$

y como $\frac{4}{3} \pi r^3 \delta$ es la masa total eléctrica, el valor de la fuerza eléctrica será el de una masa igual á la suya y distante del punto la longitud D, que es precisamente la que corresponde al centro de la esfera.

Si queremos hallar la acción de una capa esférica homogénea sobre un punto interior A (*fig.* 32), se aplicará el mismo

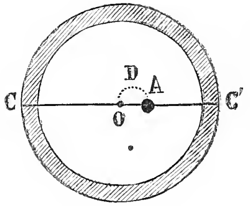


Fig. 32.

método y se llegará á la misma integral; pero los límites serán distintos. El límite inferior AC' será $r - D$, y el límite superior AC tendrá por valor $r + D$: por lo tanto, el valor de la fuerza eléctrica F será:

$$F = \frac{\pi \delta r\, dr}{D^2}\left(-\frac{D^2 - r^2}{\rho} + \rho\right)_{r-D}^{r+D} =$$

$$\frac{\pi\delta\, r dr}{D^2}\left[\left(-\frac{D^2 - r^2}{r+D} + r + D\right) - \left(-\frac{D^2 - r^2}{r - D} + r - D\right)\right] = 0.$$

De modo que una capa esférica de densidad constante no ejerce esfuerzo eléctrico en su interior: es una capa de equilibrio.

Todos estos resultados son perfectamente conocidos y se hallan en los libros elementales; sin embargo, hemos creído conveniente recordarlos para facilitar la lectura de este trabajo, que en gran parte tiene por objeto propagar los fundamentos de las teorías que nos ocupan.

(Se continuará.)

JOSÉ ECHEGARAY.

CIENCIAS FÍSICAS

REFLEXIONES SOBRE LAS RAYAS DEL ESPECTRO.

Con fecha 29 de Agosto de 1884, dirigí á la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales una sucinta comunicación, en que manifestaba haber encontrado realizada una sospecha que hacía tiempo abrigaba, á saber: que las diferentes rayas del espectro de un mismo cuerpo simple son armónicas: esto es, que los números de vibraciones, ó las longitudes de onda correspondientes á esas rayas, deben estar en relaciones conmensurables y con frecuencia muy sencillas.

Dejándome la responsabilidad de mis opiniones, como es muy natural, dicha sabia Corporación creyó conveniente dar á la estampa aquel humilde manuscrito; y yo me creo hoy en el deber de corresponder á tal atención, reforzando aquellas noticias con otras, adquiridas con posterioridad, y que constituyen un peso tal vez mayor que el de aquellas. Entonces se me advirtió, muy justamente por cierto, que no apoyaba mis interpretaciones en consideración alguna teórica, susceptible de apreciación científica valedera; y ello motivará la segunda parte del presente modesto trabajo, donde me permitiré algunas reflexiones con toda sinceridad, prudencia y reserva: siquiera sea manifestando al propio tiempo que es aun prematuro cuanto quiera aventurarse en términos muy concretos, y que, por el momento, á vueltas con la investigación, no hay más recurso que dejarse llevar por la inspiración, según presunciones un tanto vagas é indecisas.

Vamos ahora al objeto principal de este artículo, que es el examen de las armonías entre las rayas del espectro de un mismo cuerpo simple.

El ejemplo más notable que he encontrado es el del *galio*, cuyas longitudes de onda más aproximadas que he podido proporcionarme son las siguientes:

0'0004170 m m.
0'0004031 »

La relación entre ellas es exactamente de $\frac{30}{29}$: todo lo más sencilla que puede ser, dado el intervalo entre las rayas, puesto que los dos términos de esta fracción sólo difieren en una unidad.

Sigue á este el *rubidio:*

0'0004510 m m.
0'0004101 »

Y la relación entre estas dos longitudes de onda es $\frac{301}{300}$, con un error que está bien lejos de influir en el último orden decimal de aquellos números.

Después de éstos, y tal vez más que el último por lo menos, se presenta el *hidrógeno*, de que ya hablaba en mi citado artículo: las longitudes de onda de sus cuatro rayas, bien reconocidas, son, según Angstrom:

H_α..........	0'00065618	m m.
H_β..........	0'00048606	»
H_γ..........	0'00043400	»
H_δ..........	0'00041012	»

Entre la primera y la última de estas longitudes la relación es $\frac{8}{5}$, con menos error de $\frac{3}{100000}$: relación bien curiosa, mucho más, si se tienen en cuenta las singulares propiedades del hidrógeno, y que su espectro, como el de todos los metales alcalino-térreos, está formado por un número muy reducido de rayas, al menos las bien reconocidas. Las relaciones que proporcionan las rayas segunda y tercera ya no son tan sencillas: comparadas con la primera, dan las relaciones, bien notables por cierto, $\frac{4}{3}$ y $\frac{3}{2}$, con menos error de 0'02; y, si se quiere más aproximación, se obtienen las relaciones, $\frac{27}{20}$ de la primera á la segunda, y $\frac{32}{27}$ de la segunda á la cuarta: ambas sumamente aproximadas. La tercera raya no ofrece otra relación tan notable.

El *calcio* ofrece también relaciones muy curiosas: siendo la principal la que existe entre las dos longitudes de onda,

0'00052695 m m.
0'00042155 »

que viene expresada por la fracción continua siguiente:

$$1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2107}}}$$

cuya tercera reducida, $\frac{5}{4}$, es extraordinariamente aproximada á la verdad, á pesar de su extremada sencillez.

Del *sodio* ya indiqué, en mi mencionado artículo, la relación $\frac{8}{7}$, con menor error de 0'0001 entre la raya D_2 de Fraunhofer y la Na_γ: ambas pertenecientes á dicho cuerpo.

No he podido proporcionarme las longitudes de onda de las dos rayas más notables del potasio.

En los cuerpos de espectro más complicado es muy difícil llegar á conclusiones interesantes: en el *hierro*, sin embargo, he encontrado entre las longitudes de onda

0'00053704 m m.
0'00049232 »

la fracción continua siguiente:

$$1 + \cfrac{1}{11 + \cfrac{1}{111 + \dots}}$$

cuya segunda reducida, $\frac{12}{11}$, es sumamente aproximada.

Que no es decisivo un número de relaciones tan reducido, lo reconozco: téngase en cuenta, sin embargo, que ellas resultan de bien pocos datos, y de un número muy contado de combinaciones con ellos, y que, cuando se trata de reducir á fracción continua una relación entre dos números enteros, tomados al azar, es muy común el cociente incompleto *1*, rarísimo encontrar cocientes incompletos grandes, y de todo punto improbable hallarlos tan grandes como el 1366 del hidrógeno, y el 2107 del calcio, con la circunstancia, además, de estar tan próximos á los primeros. Yo, fuera del asunto que ahora me ocupa, he hecho muchos desarrollos en fracción continua para buscar relaciones aproximadas; y, prescindiendo del desarrollo del valor de π, en que aparece un cociente incompleto 292, que da una gran aproximación á la célebre relación de Adriano Metio, $\frac{355}{113}$, nunca he hallado un cociente incompleto que llegase á centenas, como ocurre aun en el hierro. ¡Quién puede prever la importancia de los resultados á que podría conducir un minucioso análisis sobre abundancia de datos!

Hacer un cálculo de probabilidades sobre este asunto, sería extremadamente enojoso y de bien poca utilidad.

Aun resultando confirmadas las sospechas sobre que me permito llamar la atención, dudo aún si esas relaciones deberán ser exactas ó muy aproximadas: tal vez nos delaten tan sólo que, si la constitución de los hoy considerados como cuerpos simples es heterogénea, esa armonía aproximada sea una condición de la íntima combinación; ó bien ésta sea la causa de aquella armonía aproximada, modificando los ritmos de los elementos componentes. Las curiosísimas modificaciones que experimentan los espectros de los cuerpos, cuando cambian las condiciones de temperatura y presión á que se hallan sometidos, si algo inclinan á sospechar, es, una estructura complicada aun en los llamados cuerpos simples. Por fin; es bien de notar que las relaciones que he presentado, aunque lo sean mucho, no son las más sencillas que pudieran ofrecerse.

El estar constituídos los espectros de los gases por un número contado de rayas, correspondientes cada una á un ritmo perfectamente determinado, induce á presumir que en ellos la materia, por lo menos la que vibra para producir una de dichas rayas, tiene todos sus puntos en idénticas condiciones, y creo bien difícil darse cuenta de este resultado de otro modo que imaginando una forma vesicular ó anular: en cambio en los sólidos y líquidos dicha materia parece ofrecer algún espesor, y no hallándose los puntos del interior en iguales condiciones que los del exterior, sino variando de una manera continua, se produce una variación de ritmos también continua, y por consiguiente un espectro contínuo entre ciertos límites.

Una duda se ofrece con este motivo: ¿es el átomo mismo el que vibra para producir la luz y el calor? Si la vibración ha de ser del conjunto del átomo, como si fuese un punto material ó un sólido invariable, moviéndose en traslación, yo no sabría concebir que el átomo, que vibra al ritmo relativamente lento que produce el sonido, fuese también capaz del ritmo vertiginoso que produce la luz y el calor. Y que el movimiento que constituyen estos dos agentes es oscilatorio, me parece indudable: ese movimiento de traslación que imaginan muchos autores, y en el que cifran la presión que un gas produce sobre las paredes del recipiente que lo contiene, bombardeando, por decirlo así, dichas paredes, es de todo punto inverosímil: yo en esa forma no sabría cómo imaginar el equilibrio de un gas; y, sobre todo, en el momento en que dos gases diferentes se hallasen en contacto, la mezcla sería instantánea, lo cual no ocurre ciertamente.

Si se imagina que el calor consiste, no en una vibración del conjunto del átomo, sino en alguna forma de movimiento esférico de sus diferentes puntos, movimiento permitido por una cierta elasticidad que se conceda al átomo; sabiendo que todos los átomos necesitan igual cantidad de calor aproximadamente, es decir, una misma cantidad de fuerza viva, para una misma elevación de temperatura, y teniendo dichos átomo diferente masa, por compensación deberían tener también sus puntos animados de diferente velocidad; y de ese modo es bien difícil concebir en qué forma podría verificarse el equilibrio de temperatura entre dos sustancias diferentes en contacto.

Así, pues, parece que lo que vibra para producir el calor y la luz es algo que tienen todos los átomos de común, tal vez una especie de atmósfera de igual masa en todos ellos; y esta sospecha se fortifica al ver que una determinada cantidad de electricidad arrastra, en las descomposiciones químicas por la pila, un mismo número de átomos electro-positivos al polo negativo en los diferentes cuerpos compuestos; porque tal vez lo que constituya la electricidad, sea lo que fuere, tenga átomos y esos acompañen uno á cada átomo de la llamada materia.

Pero sobre este particular necesitamos añadir algunas reflexiones. Confieso que me vi bien perplejo, cuando, al explicar un curso de Mecánica racional, tuve que inquirir la manera de precisar algunas de las ideas fundamentales de la Dinámica: advirtiendo que nunca he tenido la pueril ocurrencia de querer concebir esencias de nada; yo deseaba tan sólo definiciones precisas y positivas. Y sin embargo, ¿qué voy á decir yo qué es masa? ¿qué voy á decir qué es fuerza? me preguntaba. Acudí á todos los autores que pude proporcionarme, y todos me contestaban, como á coro, en estos ú otros términos: la masa es algo en que difieren los cuerpos, y que hace que éstos tomen distinta aceleración bajo la acción de una misma fuerza. (1) Pero ¿cómo podremos decir que dos fuerzas aplicadas á diferentes cuerpos son iguales, antes de conocer las masas de aquellos? A esto contestan: diremos que dos fuerzas aplicadas á dos cuerpos M y M' son iguales si, oprimiendo con ellas (por medio de los cuerpos á que están aplicadas, debe entenderse) un mismo aparato, de muelles por ejemplo, producen la misma defor-

(1) Aun suponiendo la acción de ésta repartida hemogéneamente por todo el cuerpo, de modo que todos los puntos de éste sufran igual aceleración por la acción de aquella fuerza. Así las consideraremos en lo que sigue.

mación. Pero, aun dando de barato la continuidad de la fuerza, cuando cambia su dirección ó las circunstancias en que obra, sólo podremos asegurar que sobre el dicho aparato obra en los dos casos la misma fuerza; mas el afirmar que son iguales las fuerzas que obran sobre los cuerpos M y M', envuelve el principio de la igualdad entre la acción y la reacción.

Así, pues, podremos decir de un modo mucho más positivo: *se ha reconocido que, si se tienen varios puntos materiales, se puede atribuir á cada uno de ellos un cierto número constante, tal que, si entre dos cualesquiera de aquellos puntos se desarrollan acciones mutuas, multiplicando respectivamente por aquellos números las aceleraciones que dichos puntos adquieran por el solo efecto de aquellas acciones, los dos productos son iguales.* Aquellos números se llaman *masas*, y estos productos *fuerzas*. Yo he ido reconociendo, paso á paso, que toda la Dinámica se establece muy cómodamente sobre esas definiciones, y que con ellas, ni hay que admitir más principios experimentales que los adoptados, ni se da más comprensión á alguno de ellos. La noción abstracta especial de fuerza es de todo punto innecesaria, y, sin la igualdad entre la acción y reacción, esa noción y la de masa estarían de más: la aceleración y, por consiguiente, la Cinemática bastarían, ó debería introducirse alguna otra noción diferente de aquellas.

Ahora bien, cualquiera que sea la causa de la masa, tanto en el átomo, como en la atmósfera que le acompaña, si la hay, ó en la especie de vehículo común á todos, en cuyo seno existan, parece que á todos los casos debe aplicarse el principio de igualdad entre la acción y reacción, que tan general se presenta ante la experiencia: luego, las transmisiones de fuerza viva á todo aquello que, admitiendo diferentes aceleraciones, desempeñe el papel de masa, se harán según las mismas leyes que las transmisiones de fuerza viva entre los átomos que constituyan propiamente la materia; y, por consiguiente, sea lo que quiera lo que vibra para constituir el calor, la igualdad de fuerza viva de los átomos á la misma temperatura, y el no concebir posibilidad de equilibrio si vibran de diferente manera, nos conduce á reconocer que son iguales las masas que vibran; y, no siéndolo las que constituyen propiamente los átomos, es necesario concluir que vibra algo que todos ellos tienen común, en cuanto á masa por lo menos.

Si imaginamos, pues, que cada átomo de materia va acompañado de uno de electricidad, hemos de admitir que entre estos últimos los hay de dos clases, y que unos átomos de materia van acompañados cada uno de un átomo de electricidad positiva, y otros de uno de electricidad negativa, siquiera la diferencia no consista más que en el sentido de una rotación ú otra circunstancia cualquiera; y el colocarse aquellos átomos alternados nos explicaría la fuerza de cohesión, que á pequeñas distancias es mucho mayor de lo que debiera, si no fuese más que continuación de la gravitación universal á distancias sensibles; porque á estas distancias, la atracción que cada átomo de electricidad experimenta por los de la otra clase, es equilibrada por la repulsión que sobre él ejercen los de su misma especie.

¿Por qué, si no, la cohesión es mucho mayor que en el hierro, por ejemplo, en el acero, que, compuesto en proporción conveniente de dos sustancias, admite que cada una de éstas se acompañe del átomo de electricidad positiva ó negativa, según las afinidades respectivas? El suponer que esa carga eléctrica diferente no se necesita más que en el momento de la combinación no explica nada.

Pero hay otra propiedad mucho más significativa respecto á esto, á saber: en toda combinación química de dos cuerpos simples,si el compuesto y los componentes se hallan en estado gaseoso, representando sus volúmenes por los números proporcionales enteros más sencillos, aunque la suma de los que corresponden á los componentes sea impar, el correspondiente al compuesto es siempre par. No parece sino que haya una necesidad de que se formen en igual número elementos de dos clases diferentes, unos electro-positivos, y otros electro-negativos. Yo creo que el profundo menosprecio que la moderna teoría atómica profesa al dualismo en química es bastante prematuro; y, sin embargo, no doy á ese dualismo la importancia que antes se le atribuía, porque los numerosos compuestos que estudia la llamada Química orgánica, que en nada esencial difieren de los de la inorgánica, parece que tienden á probar que los cuerpos simples pueden combinarse en proporciones cualesquiera, con la única condición de ser definidas.

Cuando, queriendo salir de la atmósfera vaga en que se mecen las conjeturas que acabo de comunicar, trato de investigar alguna fórmula que encierre todos los hechos conocidos, aun sin pretender concepciones ó discusiones metafísicas, y sí sólo una forma positiva y precisa de relacionar todos aquellos hechos, me encuentro sumergido en un mar de confusiones, del que sólo me parece desprenderse que el átomo simple de la Química es un ser mucho más complejo de lo que generalmente se cree. Ya es motivo suficiente para sospecharlo el ver radicales reconocidamente compuestos, como lo son el amonio y el cianógeno, comportarse químicamente como otros cuerpos simples. Es verdad que hay algo que caracteriza á los cuerpos simples, como la ley de los caloricos específicos de los átomos, no aplicable según mis noticias al amonio; pero ésta pudiera ser una propiedad más contingente que esencial.

Más fácil encuentro el reducir los fenómenos de la vida orgánica á simples efectos de los agentes físicos conocidos, sin pretender discutir lo que éstos sean en último análisis: sobre cuyo particular, publiqué un artículo en el «Boletín de la Real Sociedad Económica de Amigos del País» de las Islas Filipinas («Revista filipina de Ciencias y Artes, correspondiente al 1.º de Mayo de 1884); en cuyo modesto trabajo, si hay algunas ideas vagas en los detalles, las fundamentales están bien concretas y reunidas en el epílogo, inspirándome gran confianza por el sinnúmero de importantes congruencias en que se apoyan.

MANUEL HERRERA.

Bilbao 8 Octubre 1887.

VARIEDADES.

Sobre las mareas extraordinarias, observadas en el puerto de Málaga, durante los días 14 al 17 de Noviembre de 1887.—El Sr. D. Manuel Casado, persona de grande ilustración, residente en Málaga, comunicó á la Academia, en los términos que siguen, lo ocurrido en aguas de aquel litoral, por la época mencionada, digno, como suceso muy curioso, de ser consignado en las páginas de esta Revista, cualquiera que sea la causa de donde procediese.

«Cundió la voz anteayer, martes, (escribía el Sr. Casado, con fecha 17 de Noviembre), que por las tardes subía el mar de una manera tan inusitada que cubría por completo el nuevo dique ó calzada, que, dentro del puerto, se ha construído para facilitar provisionalmente la carga y descarga de los buques. Y, por de pronto, se creyó que se habría producido algún hundimiento en la obra. Pero, al advertir que al día siguiente, al amanecer, sobresalía ésta del agua hasta su primitiva altura, desechóse por infundada aquella primera suposición, y diéronse las gentes á discurrir si el inesperado fenómeno observado procedería de una marea extraordinaria, aunque del orden vulgar, ó si debería atribuirse á un movimiento ó desequilibrio seísmico submarino. Como de costumbre en casos tales, antes de bien estudiados los hechos, ya se buscaba con afán la causa de donde dimanaban. Y los hechos eran los siguientes.

»El lunes 14, como á las 11 h. de la mañana, los trabajos en el indicado dique, que se construye con una elevación de 1,20 m. sobre el nivel ordinario del mar, en el interior del puerto y en aguas siempre tranquilas, tuvieron que suspenderse por efecto de extraña inundación, que obligó á retirarse de la faena á los operarios. Es de notar que en este puerto de Málaga la diferencia entre la baja mar y la pleamar oscila entre 0,60 m. y 0,70 m., alcanzando la más alta marea conocida, como muy excepcional, una altura de 0,90. Por lo cual se consideró más que suficiente dar al dique una elevación de 1,20 m.

»El martes se acentuó todavía más el movimiento de ascensión, principiando á manifestarse á las $9^1/_2$ h. de la mañana, y llegando á su máxima altura á las $4^1/_2$ de la tarde. Y lo mismo sucedió el miércoles, y parece que está ya verificándose hoy, jueves.

»El fenómeno se ha observado también fuera del puerto, en los nuevos diques que se prolongan mar adentro, en extensión de 300 metros, sobre fondo de 6,50 m. de profundidad, elevándose el agua en sus extremos á 0,50 m. de altura sobre su nivel en la mayor pleamar.—Observaciones son estas, bien entendido, de no demasiado minuciosa exactitud, por referirse á fenómeno inesperado ó imprevisto, y no estar hechas con aparatos adecuados al objeto, de la necesaria precisión; pero que, no obstante, bastan para poner fuera de duda la realidad del fenómeno y dar idea aproximada de su amplitud. Los ingenieros encargados de las obras del puerto valúan la altura de estas tan extraordinarias mareas en cosa de 1,40 m. sobre la baja mar, ó en 0,60 m. sobre las de mayor elevación hasta la fecha conocidas, y que se tenían como límite de las de su especie, por lo menos en condiciones normales de muy antiguo observadas. Y así se explican, no sólo la inundación de los nuevos diques en obra, sino la sumersión completa de una antigua boya flotante, sujeta al fondo del mar por pesada ancla, á pesar de la longitud un poco exagerada que siempre se da á las cuerdas de retención de estos aparatos».

El Sr. Casado concluía su interesante comunicación preguntando, ó preguntándose mejor dicho: «¿qué causa puede invocarse para explicar satisfactoriamente los hechos descritos? ¿será fenómeno local en la costa del Mediterráneo el advertido estos días en Málaga? ¿ó producto tal vez de profunda perturbación en el régimen habitual de las mareas del Océano?»

En demanda de algún tenue rayo de luz que aclarase estos misterios, la Academia acudió al Instituto Geográfico y Estadístico, que años há ya tiene establecidos y perfectamente montados tres mareógrafos, en Alicante, Cádiz y Santander; y el Director de aquel Instituto, General D. Carlos Ibáñez, miembro de la misma Academia, facilitó á ésta las siguientes noticias de lo ocurrido en aquellos dos primeros puertos, en los mismos días señalados como críticos por el Sr. Casado en Málaga. De estas noticias, bastante detalladas, y que revisten notable carácter de precisión, dedúcese, en suma, que los movimientos del mar en Málaga fueron de índole puramente local. Lo cual, antes complica que simplifica su explicación satisfactoria. Como antecedentes ó base para ulteriores investigaciones y conjeturas, á renglón seguido se insertan las noticias procedentes del Instituto Geográfico.

Mareógrafo de Alicante.

»Las variaciones experimentadas por el nivel del mar en el puerto de Alicante, durante la segunda decena del mes de Noviembre de 1887, deducidas de las observaciones hechas en el mareógrafo que, en aquel punto, tiene establecido la Dirección general del Instituto Geográfico y Estadístico, son las expresadas en el siguiente *Estado.*

Dias.	Alturas mínimas.		Alturas máximas.		Oscilación.	Alturas medias	Estado del mar.
	h. m.	m.	h. m.	m.	m.	m.	
11	19 12	+ 0,0905	0 51	+ 0,2640	0,1735	+ 0,1641	Picada.
12	16 54	+ 0,0913	0 57	+ 0,2164	0,1251	+ 0,1431	Gruesa.
13	9 3	+ 0,1501	23 6	+ 0,2700	0,1199	+ 0,2013	Idem.
14	8 12	+ 0,2064	23 18	+ 0,3414	0,1350	+ 0,2641	Picada.
15	9 21	+ 0,2033	23 48	+ 0,4427	0,2394	+ 0,3220	Idem.
16	9 48	+ 0,2708	23 51	+ 0,4824	0,2116	+ 0,3831	Idem.
17	9 42	+ 0,3049	1 18	+ 0,4843	0,1794	+ 0,4135	Idem.
18	9 9	+ 0,3247	1 39	+ 0,4923	0,1676	+ 0,3986	Gruesa
19	11 24	+ 0,2382	1 24	+ 0,4149	0,1767	+ 0,3258	Picada.
20	12 12	+ 0,1925	23 54	+ 0,3978	0,2053	+ 0,3057	Idem..

»El examen de las oscilaciones, antes insertas, no indica nada digno de ser notado, no presentándose anomalías ni grandes variaciones en los valores calculados.

»La altura media de las aguas del mar ha crecido continuamente desde el día 12 hasta el 17, en que llegó á su valor máximo, de 0,4135 m., para comenzar á decrecer desde el siguiente día hasta el 20, último de los calculados.

»Estudiando los resultados obtenidos en el mareógrafo de Alicante, desde el año 1874 hasta el 1887, se observa que hay frecuentemente oscilaciones de igual ó mayor amplitud que las antes expuestas, siendo su mayor valor 0,5187, alcanzando en Noviembre de 1879, y mucho mayor que todos los observados en los diez días, á que el presente estudio se refiere.

»La altura máxima á que han llegado las aguas del mar, en los días comprendidos entre el 10 y el 21 de Noviembre de este año, aunque no es frecuente que se haya alcanzado en otras ocasiones, no por eso es digna de llamar la atención, ni sobrepuja á todas las máximas antes encontradas: baste decir que, tomando por origen la señal NP. 1, establecida en Alicante, se ha observado la cota máxima —2,8073 m.; y que, refiriendo al mismo punto de partida la altura máxima del 18 de Noviembre de este año, se obtiene la cota

—3,0126 m., más baja que la anterior en 0,2053. Además, sin pasar á exponer observaciones alejadas del período que se estudia, las cotas máximas encontradas en los años 1886-87, 1885-86, 1884-85, son, respectivamente,—3,0186 m.,—3,0722 m., y —2,8590, siendo esta última inferior á la cota máxima correspondiente al día 18 de Noviembre de 1887.

»Las alturas mínimas tampoco ofrecen nada extraordinario, siendo general el haber llegado á valores bastante menores que los encontrados en la segunda decena del pasado Noviembre. La cota mínima, correspondiente al día 11 del citado mes, es:—3,4144; mientras que las encontradas en los años 1884-85, 1885-86 y 1886-87, son, respectivamente, —3.6907, —3,6260 y —3,7411, habiéndose llegado en anteriores años á —3,8648.

»En cuanto á las alturas medias, si bien la generalidad de las observadas en la segunda década del último Noviembre exceden á la correspondiente al nivel medio del mar,—suceso muy natural en épocas análogas,—no por eso presentan nada de sorprendente, toda vez que hay numerosos ejemplos de haber llegado las aguas á alturas medias superiores á las consignadas.

Mareógrafo de Cádiz.

»El *Estado* que sigue indica los resultados obtenidos en el mareógrafo de Cádiz, durante la segunda decena de Noviembre de 1887, estando contadas las cotas á partir de la señal N. P. 1, establecida en Alicante.

Días.	Cotas mínimas.		Cotas máximas.		Oscilación.	Cotas medias.	Estado del mar.
	h. m.	h.	h. m.	m.			
11	4 48	— 4,270	22 55	— 1,655	2,615	— 3,032	Fuerte oleaje.
12	5 15	4,435	11 33	1,610	2,825	3,027	Agitado.
13	6 15	4.590	12 20	1.305	3,285	3,000	Fuerte oleaje.
14	7 7	4,630	13 7	1,185	3,445	2,940	Idem.
15	20 11	4,560	13 54	0,875	3,685	2,765	Idem.
16	20 57	4,430	2 27	1,010	3,420	2,714	Idem.
17	21 32	4,365	2 57	1,035	3,330	2,733	Idem.
18	22 29	4,205	3 58	1,495	2,710	2,830	Idem.
19	10 37	4,070	17 5	1,755	2,315	2,923	Idem.
20	0 7	3,945	20 6	1.990	1,955	2,918	Idem.

»La comparación de estos valores entre sí muestra que el día 14 llegó el mar en Cádiz á su menor nivel y el 15 al mayor, ocurriendo en este día la mayor oscilación, y presentándose en el día 16 la altura media de más considerable valor.

»También se observa que en los valores antes consignados en el *Estado*, no hay variaciones bruscas ni grandes diferencias que hagan sospechar que se verificara algún fenómeno extraordinario en las mareas.

»Se afirma aun más esta idea comparando los resultados obtenidos en los días ya citados, con los deducidos en épocas anteriores, de los cuales puede formarse juicio por los insertos á continuación:

AÑOS.	Cotas máximas.	Cotas mínimas.	Cotas medias.	OSCILACIONES DIURNAS	
				Máximas.	Mínimas.
	m.	m.	m.	m.	
1884-85. . . .	— 1,140	— 4,305	— 2,937	3,085	0,980
1885-86. . . .	1,225	4,355	2,982	2,910	0,945
1886-87. . . .	1,135	4,950	3,043	3,780	1,010
1880-87. . . .	0,5465	4,950	2,9908	3,780	0,945

Consideraciones sobre la carta del Sr. Casado.

»Los datos que da el Sr. Casado en su carta son:

Elevación del dique sobre el *nivel ordinario* del mar. 1,20 m.
Oscilación ordinaria del nivel del mar............ 0,60 á 0,70 m.
Id. diurna máxima............................ 0,90 m.
Id. id., observada en Noviembre de 1887.......... 1,40 m.
Altura de la pleamar extraordinaria, sobre la mayor antes observada............................ 0,50 m.

»Si estos datos tuvieran toda la precisión posible, algo podría deducirse de su estudio y de su comparación con los obtenidos para los puertos de Alicante y Cádiz; pero la falta de aparatos apropiados en Málaga y de repetidísimas observaciones, así como las prudentes salvedades que el Sr. Casado hace, parecen dar poca fuerza á los datos antes consignados.

»De ser ciertos los números antes escritos, resulta que en los días 15 y 16 de Noviembre de 1887 hubo, en efecto, una marea extraordinaria; y, como las aguas cubrieron las obras del puerto, al oscilar 1,40 m., y éstas estaban 1,20 sobre el nivel medio, resulta una altura de agua bajo este nivel de 0,20 m. en la baja mar, y sobre el mismo punto en la pleamar otra de 1,20 m. por lo menos.

»En Alicante la máxima oscilación observada fué de 0,52, y la mayor altura del agua sobre el nivel medio de 0,56. En cambio en Cádiz la oscilación más grande vale 3,78 m.; y ocasión ha habido en que ha llegado el nivel del mar 2,44 por encima de su altura media

»Málaga, aunque situada en la costa del Mediterráneo, como Alicante, está mucho más alejada de este punto que de Cádiz, y no demasiado distante del Estrecho de Gibraltar: así es, que si bien no es presumible que el mar oscile en ella tanto como en Cádiz, tampoco lo es que varíe tan poco como en Alicante.

»Si no fuera por los datos que el Sr. Casado suministra, y dados los deducidos para Alicante y Cádiz, no sorprenderían los fenómenos observados en Málaga, y se creería, por el contrario, que deben haberse verificado antes, y que seguirán repitiéndose; pero siendo la observación directa lo que da fe en esta clase de cuestiones, y viniendo, al parecer, en contra de esa sospecha, debe desecharse ésta desde luego.

»En las mareas de los días 15 y 16 deben haber tenido influencia indudable las diferencias de nivel entre el Océano y el Mediterráneo, que, como se observa en el *Estado* que sigue, exceden, aunque no mucho, ni de manera inusitada, á la diferencia entre los niveles medios de los mares de Cádiz y Alicante, que, por las observaciones hechas hasta la fecha, solo difieren en 0,3805.

Días.	Cotas medias en Alicante.	Cotas medias en Cadiz.	Diferencia.
11	— 3,341	— 3,032	0,309
12	3,362	3,027	0,335
13	3.304	3,000	0,304
14	3,241	2,940	0,301
15	3,183	2,765	0,418
16	3,122	2,714	0,408
17	3,091	2,733	0,358
18	3,106	2,830	0,276
19	3,179	2,923	0,256
20	3,199	2,918	0,281

»Resulta, por lo tanto, que del estudio del nivel del mar en Alicante y Cádiz, no puede deducirse que, necesariamente, hubiera de ocurrir ningún hecho sin precedente en las mareas de Málaga».

Nevada notable en Madrid, en los días 6 y 7 de Abril últimos.—Sin depresión barométrica considerable, ni descenso demasiado grande tampoco de temperatura, la nieve, muy rara en Madrid en esta época del año, cayó en la mañana del primero de aquellos días, durante muchas horas consecutivas, aunque en cantidad muy varia por momentos, menuda y polvorosa al principio, antes de amanecer, y más blanda y esponjosa luego, impelida y zarandeada por viento impetuoso del N. E. Conforme tocaba en el suelo, se fundía ó licuaba, salvo en algunos parajes, tapizados de menuda hierba, ó resguardados de la acción directa del viento. A juzgar por la cantidad de agua recogida en el pluviómetro, de 6 milímetros hasta las doce del día, y suponiendo que la densidad de la nieve sea aproximadamente $^1/_{10}$ de la del agua, conforme por regla general enseña la experiencia, el espesor de la capa de nieve, tan pronto desvanecida como caída, hubiera ascendido á otros tantos centímetros. Pero, en campo abierto, el espesor efectivo ni á 2 centímetros por igual llegó en ningun momento.

Interpolada con lluvia en las primeras horas de su descenso, comenzó á caer otra nevada á las ocho de la noche del mismo día 6, que se prolongó sin interrupción, muy copiosa ó nutrida largos ratos, hasta las nueve horas de la mañana del 7, sin depresión notable del barómetro, ni descenso grande de temperatura, como en la mañana precedente, y con viento suave del N. N. E. ahora. A las ocho de la mañana cubría el campo una manta de nieve, blanda é impregnada de agua, que no podía pisarse sin que el pie se hundiera hasta tocar en la tierra, de unos 4 á 6 centímetros de espesor, por término medio. El agua de fusión, correspondiente al espesor de $5^1/_2$ centímetros, ascendió á 13 milímetros: lo cual arroja entre la densidad de la nieve y la del agua una relación como de 1 á 4, en vez de la de 1 á 10, obtenida en otras ocasiones en el rigor del invierno, con nieve mucho más distante que ahora de su punto de licuación.

La fusión comenzó perceptiblemente á poco de amanecer, y se produjo con celeridad, conforme el día fué avanzando, favorecida por la lluvia que, de las nueve á las doce, y más aún de las doce á las tres de la tarde, cayó sin cesar apenas un momento. A esta hora tan sólo quedaban algunas manchas de nieve por derretir, diseminadas por el campo.

ÍNDICE

DE LAS MATERIAS CONTENIDAS EN ESTE NÚMERO.

CIENCIAS EXACTAS.

Estudios sobre electro-estática y electro-dinámica (*Continuación*)........ 261

CIENCIAS FÍSICAS.

Reflexiones sobre las rayas del espectro.............................. 301

VARIEDADES.

Sobre las mareas extraordinarias, observadas en el puerto de Málaga, durante los días 14 al 17 de Noviembre de 1887.......................... 310
Nevada notable en Madrid, en los días 6 y 7 de Abril últimos............ 315

Se suscribe en la portería de la Academia de Ciencias, plaza de la Villa, núm. 2, piso principal.

Cada tomo de la Revista constará de nueve números.

REVISTA

DE LOS

PROGRESOS DE LAS CIENCIAS

EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES.

TOMO 22.—N.º 6.º

MADRID.

IMPRENTA DE D. LUIS AGUADO.—PONTEJOS, 8.

1888.

OBRAS

publicadas por la Real Academia de Ciencias, y qu se hallan de venta en la Secretaría de la misma, plaz de la Villa, núm. 2, piso principal.

	RÚSTICA. Ptas. Cén
MEMORIAS.—12 tomos completos, precio de cada uno......	12,5
REVISTA DE LA ACADEMIA.—21 tomos, precio de cada uno...	6,0
ANUARIOS.—Seis tomos: 1883 al 1888, precio de cada uno...	2,5

Tomando de 5 á 10 ejemplares á la vez, de cualquiera de estas obras, se hará en lo precios la rebaja del 15 por 100; y de 10 ejemplares en adelante la del 25 por 100.

LIBROS DEL SABER DE ASTRONOMIA

DEL REY

DON ALFONSO X DE CASTILLA

COPILADOS, ANOTADOS Y COMENTADOS

POR DON MANUEL RICO Y SINOBAS,

Individuo numerario de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, y Catedrático de la Facultad de Ciencias en la Universidad Central.

Obra publicada de Real orden.—Se hallan de venta los 5 tomos encartonados, á 25 pesetas cada uno.

CIENCIAS EXACTAS.

ESTUDIOS SOBRE ELECTRO-ESTÁTICA Y ELECTRO-DINÁMICA.

(Continuación.)

Fuerza eléctrica de dos masas de dimensiones infinitamente pequeñas y de signos contrarios. El ejemplo que vamos á presentar es importantísimo para el fin que nos proponemos y constituye una de las bases de la demostración directa de la fórmula de Ampére.

Sean dos masas $+m$, $-m$ cuya distancia AA′ (*fig.* 33) supondremos sumamente pequeña.

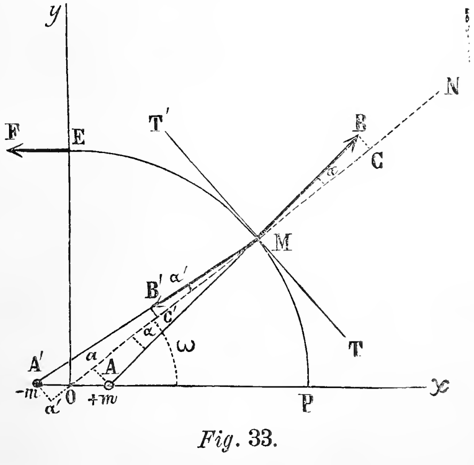


Fig. 33.

Propongámonos calcular la fuerza eléctrica del sistema $(+m, -m)$ en un punto M, cuya distancia OM al punto medio O de la recta AA′ sea muy grande respecto á AA′: esto equivale á calcular dicha fuerza eléctrica en cualquier punto del espacio, que no diste de A, A′ una cantidad comparable por su pequeñez con AA′. Por lo demás, como se puede suponer que el sistema total de fuerzas eléctricas, líneas de fuerza, y superficies equipotenciales, es un sistema de revolución alrededor de Ox, basta que consideremos un plano meridiano cualquiera xOy.

Determinaremos, pues así nos conviene por motivos que más adelante se comprenderán, las dos componentes de la fuerza eléctrica en M, según la recta OMN y su perpendicular MT; es decir, según el radio y la tangente de la circunferencia EMP, cuyo centro es O y OM el radio: por otra parte, conocer las dos componentes es conocer la resultante y su dirección.

Suponiendo en M (como siempre) una masa eléctrica $+1$, esta masa estará solicitada por una *repulsión*

$$\mathrm{MB} = \frac{m}{\mathrm{AM}^2}$$

producida por la masa $+ m$; por y una *atracción*

$$\mathrm{MB}' = \frac{m}{\mathrm{A'M}^2}$$

determinada por la masa $-m$.

La resultante de MB y MB′ será la fuerza eléctrica, que buscamos; pero como lo que nos interesa son las componentes, proyectaremos directamente ambas fuerzas sobre MT y MN.

Puesto que los ángulos OMA y OMA′ son infinitamente pequeños, las componentes según MN de MB y MB′ difieren de estas fuerzas en infinitamente pequeños de 2.º orden.

De suerte que tendremos:

Componente de la fuerza eléctrica según ON

$$= \mathrm{MC} - \mathrm{MC}' = \mathrm{MB} - \mathrm{MB}' = \frac{m}{\overline{\mathrm{MA}}^2} - \frac{m}{\overline{\mathrm{MA}}'^2}.$$

Y, haciendo

$$\mathrm{MA} = r,\ \ \mathrm{MA}' = r',\ \ \mathrm{AA}' = a,\ \ \mathrm{MO}x = \omega,\ \ \mathrm{OM} = \mathrm{R};$$

y designando por F_n la componente buscada:

$$F_n = \text{componente sobre ON}$$

$$= \frac{m}{r^2} - \frac{m}{r'^2} = m\left(\frac{1}{\left(R - \frac{a}{2}\cos\omega\right)^2} - \frac{1}{\left(R + \frac{a}{2}\cos\omega\right)^2}\right)$$

De donde:

$$F_n = \frac{2Ram}{\left(R^2 - \frac{a^2}{4}\cos^2\omega\right)^2}\cos\omega;$$

y despreciando en el denominador desde la segunda potencia de a en adelante, por comparación con R,

$$F_n = \frac{2am}{R^3}\cos\omega.$$

Generalmente al producto am de la masa eléctrica por la distancia a se le llama *momento eléctrico*, por analogía con el momento magnético, y designándolo por ϖ tendremos

$$F_n = \frac{\varpi}{R^3}\,2\cos\omega \qquad (1).$$

Del mismo modo hallaremos la componente F_t, paralela á MT.

Tendremos

$$F_t = \frac{m}{r^2}\operatorname{sen}\alpha + \frac{m}{r'^2}\operatorname{sen}\alpha';$$

porque las dos componentes de MB y MB′ actúan en la dirección MT′ y se suman.

Sustituyendo,

$$r = R - \frac{a}{2}\cos\omega;\; r' = R + \frac{a}{2}\cos\omega;$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{Aa}{MA} = \frac{a}{2r}\operatorname{sen}\omega;\quad \operatorname{sen}\alpha' = \frac{A'a'}{MA'} = \frac{a}{2r'}\operatorname{sen}\omega,$$

en el valor de F_t, resultará:

$$F_t = m\left(\frac{\frac{a}{2}\operatorname{sen}\omega}{\left(R - \frac{a}{2}\cos\omega\right)^3} + \frac{\frac{a}{2}\operatorname{sen}\omega}{\left(R + \frac{a}{2}\cos\omega\right)^3}\right) =$$

$$\frac{ma}{2}\operatorname{sen}\omega\,\frac{\left(R + \frac{a}{2}\cos\omega\right)^3 + \left(R - \frac{a}{2}\cos\omega\right)^3}{\left(R^2 - \frac{a^2}{2}\cos^2\omega\right)^3}.$$

Y, despreciando infinitamente pequeños de orden superior:

$$F_t = \frac{ma}{R^3} \operatorname{sen} \omega:$$

ó bien,

$$F_t = \frac{\varpi}{R^3} \operatorname{sen} \omega. \qquad (2)$$

Las dos fórmulas (1) y (2) son fundamentales para nuestro objeto: son las mismas que por otro procedimiento deducen en su obra Mrs. Mascart y Joubert, y sobre ellas haremos una observación importante.

Si quisiéramos obtener la fuerza eléctrica del sistema $(+m, -m)$ en P; es decir, á una distancia R en su propia dirección AA′, bastaría hacer $\omega = 0$: lo cual nos daría,

$$F_n = 2\frac{\varpi}{R^3}, \quad y \quad F_t = 0 \qquad (3).$$

De suerte que, en los polos P del sistema, la fuerza eléctrica sigue la dirección del eje: lo cual es evidente, y además la 1.ª de las ecuaciones (3) hubiera podido obtenerse desde luego.

Si en cambio quisiéramos obtener la fuerza eléctrica F en el ecuador E del sistema, deberíamos hacer en (1) y (2), $\omega = \frac{\pi}{2}$, lo cual nos daría,

$$F_t = \frac{\varpi}{R^3}; \quad F_n = 0 \qquad (4);$$

es decir, que la fuerza eléctrica será paralela al eje Ox.

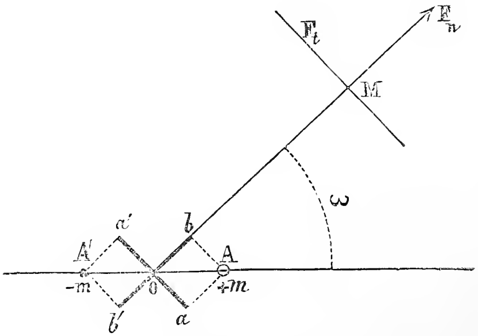


Fig. 34.

He aquí ahora la observación á que nos referimos.

Si proyectamos el sistema $(+m, -m)$ (*fig.* 34) en la dirección OM y en la de una perpendicular, y si imaginamos dos sistemas de masas $+m$ y $-m$, uno en (a, a'), otro en (b, b'), sus momentos eléctricos $m \times aa'$ y $m \times bb'$ serían, respectivamente, ma sen ω, ma cos ω, ó bien ϖ sen ω, ϖ cos ω: de suerte que la componente F_n según las fórmulas (1) y (3) es la fuerza eléctrica producida por el sistema proyectado sobre OM; y la fuerza eléctrica F^t es, asimismo, según se deduce de (2) y (4) la que corresponde al sistema proyectado sobre la perpendicular Oa.

Es decir que, para hallar la fuerza eléctrica del sistema primitivo $(+m, -m)$ sobre un punto M se puede proyectar este sistema en dos direcciones, la del radio OM, y la de su perpendicular, y cada proyección del sistema dará la componente correspondiente, como si estuviera aislado.

Esta observación justifica, como más adelante veremos, la hipótesís de Ampère, al sustituir á la acción de dos elementos de corriente la de sus componentes según tres ejes. Más aún: los coeficientes 2 y 1 de las fórmulas (1) y (2) dan orígen á los dos coeficientes 2 y 3 de la fórmula de Ampère.

Más adelante insistiremos sobre esta importantísima propiedad.

Como AM (*fig.* 35) es menor que A'M (dada la posición

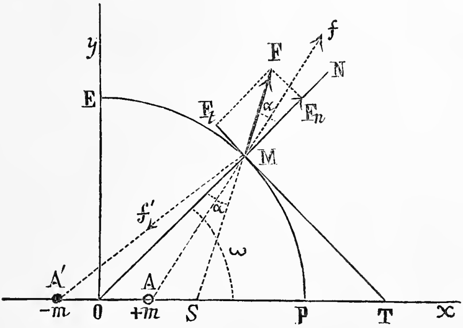


Fig. 35.

del punto M) la *repulsión* f de la masa $+m$ de A será mayor que la atracción f' de la masa $-m$ de A': de modo que la componente total según OM tendrá la dirección MF_n; y como, por otra parte, las dos componentes de f y f' según la tangente se suman, la componente total según dicha tangente tendrá la dirección MF_t. La resultante tomará la dirección MF.

Si la prolongamos hasta que corte al eje Ox en S, podremos demostrar fácilmente un teorema debido á Gauss.

En el triángulo OMS tenemos, llamando α al ángulo FMN:

$$\frac{OM}{\operatorname{sen} OSM} = \frac{OS}{\operatorname{sen} \alpha};$$

ó bien

$$\frac{OM}{\operatorname{sen}(\omega + \alpha)} = \frac{OS}{\operatorname{sen} \alpha}.$$

De donde se deduce

$$OS = R \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \omega \cos \alpha + \cos \omega \operatorname{sen} \alpha} = R \frac{\operatorname{tang} \alpha}{\operatorname{sen} \omega + \operatorname{tang} \alpha \cos \omega}.$$

Pero las componentes F_t y F_n tienen los valores:

$$F_t = \frac{\varpi}{R^3} \operatorname{sen} \omega; \qquad F_n = \frac{\varpi}{R^3} 2 \cos \omega,$$

de donde se deduce:

$$\frac{F_t}{F_n} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \omega}{2 \cos \omega} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \omega.$$

Luego

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{1}{2} \operatorname{tang} \omega;$$

y, sustituyendo este valor de α en el de OS, resultará:

$$OS = R \frac{\frac{1}{2} \operatorname{tang} \omega}{\operatorname{sen} \omega + \frac{1}{2} \tan \omega \cos \omega};$$

ó, reduciendo,

$$OS = \frac{1}{3} \frac{R}{\cos \omega}.$$

Pero $\frac{R}{\cos \omega}$ es evidentemente OT: luego

$$OS = \frac{1}{3} OT.$$

Este teorema da un medio facilísimo para determinar la dirección de la fuerza eléctrica del sistema $(+m, -m)$ en cualquier punto M.

Basta trazar MT perpendicular á OM, es decir, la tangente en M á la circunferencia MP; tomar $OS = \frac{1}{3}$ OT; y unir el punto S á M: SMF será la dirección de la fuerza.

Su sentido será MF, como si el punto M fuese *rechazado* por la masa *más próxima* $+ m$, que es del mismo signo que la masa $+ 1$ que suponemos en M.

En cuanto á la magnitud F de la fuerza eléctrica será evidentemente

$$F = \sqrt{F^2_n + F^2_t} = \frac{\varpi}{R^3} \sqrt{\operatorname{sen}^2\omega + 4\cos^2\omega} = \frac{\varpi}{R^3} \sqrt{1 + 3\cos^2\omega}.$$

Conocidos estos principios, es facil deducir la distribución

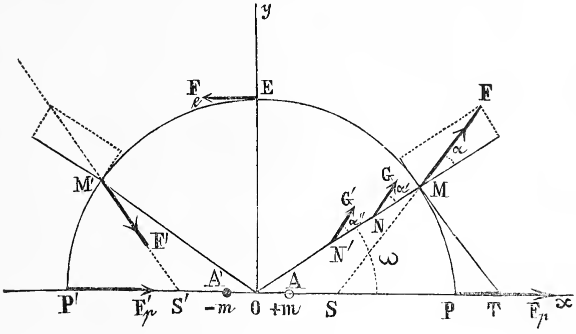


Fig. 36.

de la fuerza eléctrica á lo largo de cualquier circunferencia PEP′ y de cualquier radio OM (*fig.* 36).

Si tomamos un punto M′, simétrico con M respecto á OE, las acciones de A y A′ sobre M′ serán simétricas con las de M en cuanto á la dirección, pero habrán cambiado de signo, puesto que $+ m$, por ejemplo, ejercía una repulsión sobre M, y el simétrico $- m$ de $+ m$ ejercerá una atracción sobre M′, de igual intensidad que la anterior y simétricamente colocada, pero en sentido contrario.

De aquí resulta que, trazando M′S′ simétrica con SM, y tomando M′F′=MF y en sentido contrario, tendremos la fuerza eléctrica en M′.

Facil es ya seguir paso á paso la variación de la fuerza eléctrica sobre cualquier circunferencia P′EP.

En P′ tiene la dirección $P'F_p'$ y su intensidad $\frac{2\varpi}{R^3}$ se obtiene haciendo $\omega = \pi$ en

$$\frac{\varpi}{R^3}\sqrt{1+3\cos^2\omega}.$$

Desde P′ á E disminuirá de valor, puesto que $\cos^2\omega$ será cada vez menor.

En E tendrá la dirección F_e paralela á P′P, como se ve directamente por los valores de las componentes y como podría deducirse del teorema de Gauss, puesto que $\frac{1}{3}\,0\,\infty$ es infinito. El valor de F_e se obtiene haciendo $\omega = \frac{\pi}{2}$ en el valor de F. Resulta $F_e = \frac{\varpi}{R^3}$, igual á la mitad del que corresponde al punto P′.

En los puntos del cuadrante EP la fuerza va creciendo y está dirigida hacia el exterior.

En P la dirección es la de OT y el valor $\frac{2\varpi}{R^3}$, que se obtiene haciendo $\pi = 0$ en el valor general.

Respecto á la variación de la fuerza eléctrica en los diferentes puntos de un mismo radio, OM por ejemplo, se ve fácilmente que dicha fuerza eléctrica tiene una dirección constante.

En efecto, los ángulos α, α', α''..... son iguales, puesto que tienen por tangentes las relaciones de F_t á F_n, es decir

$$\frac{\frac{\varpi}{R^3}\,2\cos\omega}{\frac{\varpi}{R^3}\operatorname{sen}\omega} = 2\text{cotang. }\omega:$$

antidad independiente de R y dependiente tan sólo del ángulo ω que determina cada radio.

Esta observación es importante para la demostración directa de la fórmula de Ampère.

Determinemos ahora la ecuación de las líneas de fuerza. Pudiéramos emplear varios métodos indirectos, aunque sencillos, que son los que generalmente se usan; pero creemos preferible emplear el método natural y directo, tan sencillo como cualquiera de los anteriores.

Sea A′B′ (*fig.* 37) una curva referida á coordenadas pola-

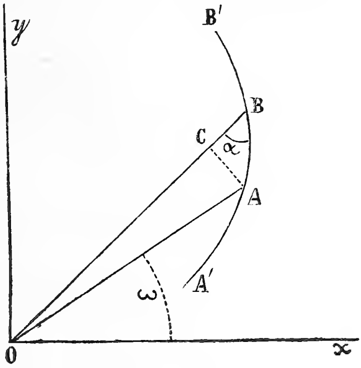


Fig. 37.

res: sean asimismo *ox* el eje, O el polo, y R y ω las dos coordenadas de cualquier punto.

El ángulo α sabemos que se determina en el triángulo infinitamente pequeño ABC por la ecuación

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{AC}{CB} = \frac{R\,d\omega}{dR}.$$

Pero, si A′B′ es una línea de fuerza, se tiene

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{F_t}{F_n} = \frac{\dfrac{\varpi}{R^3}\ \text{sen}\,\omega}{\dfrac{\pi}{R^3}\ 2\cos\omega} = \frac{1}{2}\ \text{tang}\,\omega:$$

y por lo tanto resultará

$$\frac{R\,d\omega}{d\,R} = \frac{1}{2}\ \text{tang}\,\omega;$$

ó bien,

$$2\,\frac{d\omega}{\text{tang}\,\omega} = \frac{d\mathrm{R}}{\mathrm{R}},$$

que puede escribirse así:

$$2\,\frac{\cos\omega\,d\,\omega}{\text{sen}\,\omega} = \frac{d\,\mathrm{R}}{\mathrm{R}}.$$

Integrando y representando por log. C la constante, se deduce

$$2\ \text{log. sen}\,\omega + \text{log. C} = \text{log. R};$$

y, pasando á los números,

$$\mathrm{R} = \mathrm{C}\ \text{sen}^2\,\omega.$$

Tal es la ecuación general de las líneas de fuerza.

Si se diera el punto del eje de las y por donde ha de pasar una de ellas, tendríamos para $\omega = \frac{\pi}{2}$, $\mathrm{R} = \mathrm{R}_0$ por ejemplo, y por lo tanto $\mathrm{R}_0 = \mathrm{C}$: de donde

$$\mathrm{R} = \mathrm{R}_0\ \text{sen}^2\,\omega.$$

Haciendo variar la constante R_0, desde un valor muy pequeño hasta ∞, se obtendrán todas las líneas de fuerza.

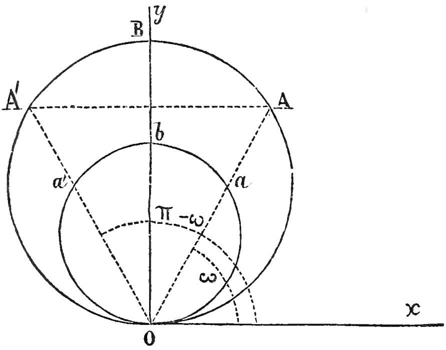


Fig. 38.

Fácilmente se deduce la forma general de las líneas de fuerza, de la relación polar que precede.

1.° Puesto que sólo entra ω en $\text{sen}^2.\omega$, para dos valores, ω y $\pi-\omega$, los de R serán iguales: los puntos A y A′ serán simétricos respecto á y.

Las líneas de fuerza tienen por eje de simetría el eje de las y.

2.° Para $\omega=0$ se tiene $R=0$, de suerte que todas pasan por el origen.

Además todas son tangentes en O al eje de las x; porque, en efecto, cuando se hace $\omega=0$, de la ecuación $\text{tang}\,\alpha=\frac{1}{2}\text{tang}\,\omega$, se deduce $\alpha=0$: es decir, que la tangente coincide con el radio; pero como el radio á su vez coincide con el eje ox, resulta que la tangente, coincide con ox.

3.° El valor de R va creciendo desde cero, para $\omega=0$, hasta R_0, para $\omega=\frac{\pi}{2}$.

4.° Para conocer el punto A (*fig.* 39) de una línea de fuerza

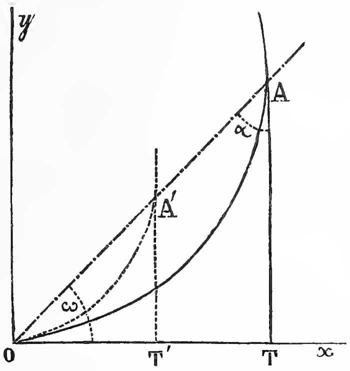


Fig. 39.

cualquiera, en que la tangente es paralela á Oy, basta recordar que α está en general dada por la ecuación $\text{tang}\,\alpha=\frac{1}{2}\text{tang}\,\omega$. Pero, si AT es perpendicular á Ox, la tangente de α será la cotangente de ω y tendremos $\cot\omega=\frac{1}{2}\text{tang}\,\omega$, ó bien $\text{tang}\,\omega=\sqrt{2}$: expresión que determina la dirección de OA común para todas líneas de fuerza, de manera que, en los puntos correspondientes de éstas, A, A′... las tangentes AT, A′T′... son paralelas á Oy.

Puesto que el ángulo α que forma la tangente á una línea de fuerza con el radio, que pasa por el origen y va al punto que se considera, está dado por la expresión $\operatorname{tang} \alpha = \frac{1}{2} \operatorname{tang} \omega$, resulta que sólo depende α de la dirección del radio y no de su magnitud, como ya hemos hecho observar: de modo que, tirando un radio OR (*fig.* 40), y trazando las tangentes AT,

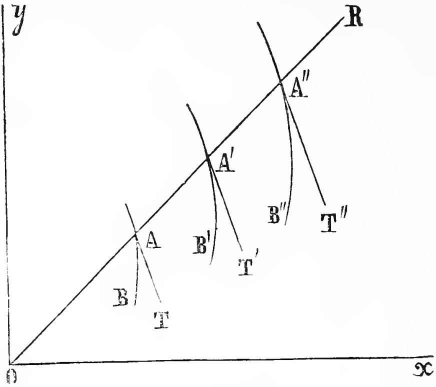


Fig. 40.

A'T', A''T'', en todos los puntos en que corte á una serie de líneas de fuerza AB, A'B', A''B''... todas estas tangentes serán paralelas.

Esta observación demuestra que las líneas de fuerza del sistema $(+m, -m)$ son curvas semejantes: lo cual se deduce desde luego de la ecuación $R = R_0 \operatorname{sen}^2 \omega$ de dichas líneas.

En efecto: sean

$$R = R_0 \operatorname{sen}^2 \omega \quad \text{y} \quad R' = R_1 \operatorname{sen}^2 \omega',$$

las ecuaciones de dos de estas líneas.

Para un mismo radio tendremos:

$$R = R_0 \operatorname{sen}^2 \omega, \qquad R' = R_1 \operatorname{sen}^2 \omega.$$

Y dividiendo una por otra, $\frac{R}{R'} = \frac{R_0}{R_1} = \text{constante}$.

De suerte que son curvas semejantes, y el origen es el centro de semejanza.

Dos observaciones haremos para terminar este punto.

Es la primera que cuanto llevamos dicho sólo se aplica á distancias muy superiores á la distancia a de las dos masas $+m$ y $-m$. En la proximidad de O, punto en que hemos podido suponer que $+m$, $-m$ y su punto medio se confunden, el problema no es tan sencillo ni las consecuencias á que hemos llegado son legítimas.

Pero, como nada de esto tiene importancia para nuestro objeto, no insistiremos en una discusión más curiosa que útil en este instante.

Es la 2.ª observación, que la figura del plano x, y no es más que un meridiano de la superficie de revolución alrededor de Ox, que representa la superficie de fuerza.

Consideraciones tan sencillas como las precedentes pueden servirnos para completar el problema y para determinar las superficies equipotenciales ó de nivel; ó, mejor dicho, las curvas meridianas de estas superficies de revolución.

Muchos métodos pueden seguirse para determinar dichas líneas equipotenciales.

Tomaremos uno cualquiera de ellos: los demás pueden verse en los tratados especiales, y sobre todo en el tantas veces citado de Mascart y Joubert.

Sea xy un plano meridiano: (*fig.* 41)

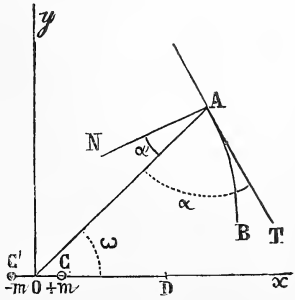


Fig. 41.

OA un radio cualquiera.

AB la línea de fuerza que pasa por A.

AT su tangente.

AN la normal á AT, que será la tangente de la línea equipotencial.

α' el ángulo que forma con OA.

Hemos visto que, $\operatorname{tang} \alpha = \frac{1}{2} \operatorname{tang} \omega$, de donde se deduce,

$$\operatorname{tang} \alpha' = \frac{2}{\operatorname{tang} \omega}.$$

La ecuación diferencial de la línea equipotencial será, puesto que (véase la figura) R disminuye cuando ω crece :

$$-\frac{R\, d\omega}{d R} = \frac{2}{\operatorname{tang} \omega}.$$

De donde,

$$-\frac{\operatorname{sen} \omega\, d\omega}{\cos \omega} = 2\, \frac{d R}{R}.$$

E integrando:

$$\log. \cos \omega = 2 \log R + \log. K,$$

poniendo la constante bajo forma de logaritmo.

Resulta, pues,

$$\frac{\cos \omega}{R^2} = K$$

para ecuación de las líneas equipotenciales.

De aquí podemos deducir la potencial del sistema, determinando convenientemente la constante K. Por ejemplo, la potencial en D, siendo OD=1, será

$$\frac{m}{CD} - \frac{m}{C'D} = m\, \frac{C'D - CD}{CD \,.\, C'D};$$

y representando OD por R_0, CC′ por a, y ma por ϖ, tendremos próximamente:

$$\text{Potencial en } D = \frac{ma}{R_0^{\,2}} = \frac{\varpi}{R_0^{\,2}}.$$

La expresión $\frac{\cos \omega}{R^2}$ se convierte en el punto D en $\frac{1}{R_0^{\,2}}$:

de suerte que, poniendo la ecuación de las líneas equipotenciales bajo la forma,

$$\frac{\varpi \cos \omega}{R^2} = \varpi K = \text{constante},$$

la potencial en cualquier punto (R, ω) será

$$\frac{\varpi \cos \omega}{R^2},$$

y la ecuación de las líneas de nivel, será,

$$\frac{\varpi \cos \omega}{R^2} = \text{constante}.$$

Pudiéramos discutir dicha ecuación como hemos discutido la de las líneas de fuerza.

Nos contentaremos, sin embargo, con observar que las líneas que representa son semejantes, lo cual se demuestra por el hecho de que las tangentes en diferentes puntos de un radio son líneas paralelas, como perpendiculares que son á las tangentes á las líneas de fuerza que hemos visto que son paralelas á su vez.

Además directamente se comprueba esto mismo, pues las ecuaciones de dos líneas equipotenciales,

$$\frac{\varpi \cos \omega}{R^2} = K = \text{constante}.$$

$$\frac{\varpi \cos \omega'}{R'^2} = K',$$

para el mismo radio, definido por el valor ω, dan:

$$\frac{R'^2}{R^2} = \frac{K}{K'} \, \frac{\cos \omega}{\cos \omega} = \text{constante},$$

de donde,

$$\frac{R}{R'} = \text{constante}:$$

Una duda podría ocurrir sin embargo, que fácilmente se desvanece.

Parece á primera vista que la ecuación

$$\frac{\varpi \cos \omega}{R^2} = K,$$

da para valores de ω comprendidos entre $\frac{\pi}{2}$ y π valores imaginarios. En efecto, la expresión

$$R = \sqrt{\frac{\varpi \cos \omega}{K}},$$

puesto que $\cos \omega$ es negativo, se presenta bajo forma imaginaria.

Pero ha de advertirse que en el ángulo yOx de las x é y positivas, las potenciales son positivas también, porque todos los puntos están más próximos á $+m$ que á $-m$, de suerte que la constante K será positiva. En cambio, en el segundo ángulo de las x negativas é y positivas, por estar todos los puntos más próximos á $-m$ que á $+m$ las potenciales serán negativas y negativa será la constante K, de modo que la expresión $\frac{\varpi \cos \omega}{K}$ resulta positiva.

Las líneas de igual potencial son curvas cerradas que

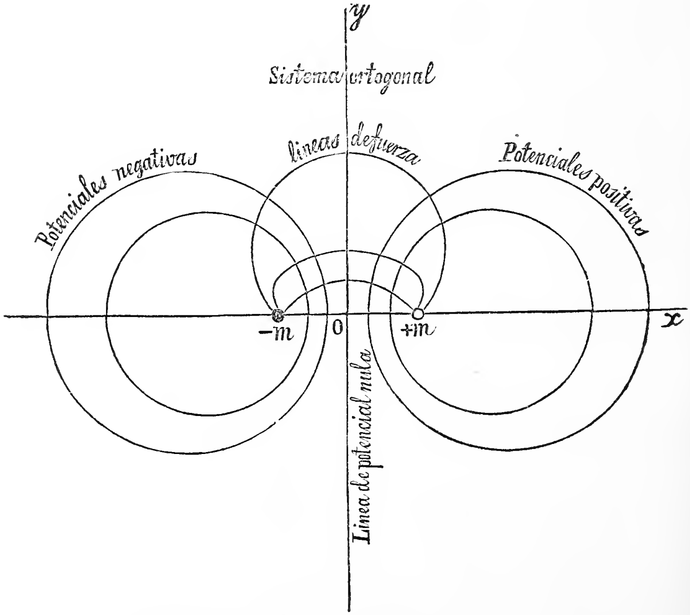


Fig. 42.

envuelven por la derecha al punto $+m$ y corresponden á potenciales positivas, y por la izquierda envuelven al punto $-m$ y son negativas: véase la *figura* 42.

El eje de las y es una línea de igual potencial nula, y representa el paso de unas á otras.

Como nuestro objeto no es profundizar este género de problemas, sino dar una idea suficientemente clara y exacta de su índole especial, basta con lo expuesto para que el lector comprenda cuanto nos resta por explicar, sin que entremos en más amplios desarrollos.

(*Se continuará.*)

JOSÉ ECHEGARAY.

LANZ Y BETANCOURT

BOSQUEJO BIBLIO-BIOGRÁFICO

Hora es ya de ir desenterrando del olvido los hombres de nuestro país, consagrados en épocas anteriores á las ciencias físico-matemáticas. Vamos á dibujar el perfil de dos de estos, más conocidos allende que aquende los Pirineos, precisamente por haber publicado en francés una obra muy notable, y aun por haberse dedicado á otros trabajos en el Centro y Norte de Europa.

Nos referimos á D. José María Lanz y á D. Agustín de Betancourt, autores de un famoso libro sobre la «Composición de las Máquinas», que ha servido de texto durante muchos años en la Escuela Politécnica de París y en otros centros de enseñanza.

Para proceder con método en lo que sobre el asunto hemos podido averiguar, se divide este trabajo en tres partes: una dedicada al examen del libro citado, otra al concepto que mereció á sus coetáneos y sucesores, y la tercera á una reseña biográfica de los autores, terminándolo todo con algunas brevísimas consideraciones sobre las vicisitudes de los hombres consagrados á las ciencias físico-matemáticas en España á los comienzos de este siglo.

I

La primera edición de la obra de los Sres. Lanz y Betancourt, llevaba esta portada, literalmente traducida: «Escuela imperial Politécnica. Programa del Curso elemental de Máquinas, para el año de 1808, por el Sr. Hachette.—Ensayo sobre la Composición de las Máquinas, por los Sres. Lanz y Betancourt. (Armas imperiales.) En París, imprenta imperial, 1808.»

En la página 8.ª de la introducción, se dice lo siguiente, que traducimos también:

«Tal es el sistema según el cual el Sr. Hachette había comenzado el cuadro anejo de las máquinas elementales, cuando supo que los Sres. Lanz y Betancourt habían ejecutado, conforme al mismo plan, un cuadro parecido. El Consejo de Instrucción, con arreglo al informe de los Sres. Monge y Hachette, ha propuesto al Sr. Gobernador hacer imprimir, á cargo de la Escuela, el resultado del trabajo de los Sres. Lanz y Betancourt, comisionados por el Gobierno español. Esta obra, cedida por los autores á la Escuela Politécnica, es la que ve la luz actualmente bajo el título de *Ensayo sobre la Composición de las Máquinas.*»

En la página 1.ª del libro hay una nota que dice así: «El texto de este ensayo sobre las máquinas, de los Sres. Lanz y Betancourt, ha sido revisado por el Sr. Hachette: las figuras se han dibujado en la Escuela Politécnica, bajo su dirección. Esta obra va precedida de un índice de las lecciones de este profesor en la Escuela Politécnica sobre los motores, sobre las máquinas en general, y sobre las que se emplean particularmente en las artes de construcción.»

Esta primera edición era un tomo en folio con 15 páginas de introducción, 120 de texto y 12 grandes láminas grabadas en acero: la primera de éstas es el cuadro de clasificación de las transformaciones de movimiento (con los títulos y figuras esquemáticas), hecho por Hachette: la segunda es otro cuadro parecido, pero más completo y mejor, debido á Lanz y Betancourt, y base de la obra. Las láminas, propiamente tales, son diez por lo tanto.

El objeto de este libro es estudiar las transformaciones de movimientos, realizadas por medio de órganos artificiales. Comprende no solo la parte que hoy se profesa en todas las escuelas con el nombre de *Cinemática industrial*, ó sea la transformación de los movimientos, sino también los aparatos que aprovechan algunos agentes naturales: así, por ejemplo, incluye la rueda hidráulica como una transformación del movimiento rectilíneo del agua de un caz en el circular del aparato.

Fuera de éste y otros defectos propios del atraso de la Mecánica industrial, puede asegurarse, y así lo confiesan todos los tratadistas, que el libro de los Sres. Lanz y Betancourt fué un gran adelanto científico, y creó un estudio nuevo, al que siguieron por muchos años todos los profesores en la enseñanza, y del que se valieron muchos ingenieros en la práctica. No solo se expusieron en él racionalmente las transformaciones teóricas de movimientos, sino también los ejemplos más característicos de cada clase. Cítanse las fuentes de que se toman estos ejemplos, y á la verdad no son muchas las españolas: entre estas vemos alguna transformación ideada por Bartolomé Sureda (del cual se hablará más adelante), designándole como «mecánico muy hábil».

***

La segunda edición de la obra de Lanz y Betancourt es de 1819. Ya no figura para nada en ella ni la Escuela Politécnica, ni Hachette. Se titula así, traducida literalmente: «Ensayo sobre la Composición de las Máquinas, por los señores Lanz y Betancourt. Segunda edición, revisada, corregida y considerablemente aumentada.»

Carece de la introducción de la anterior, y tiene 184 páginas y 12 láminas bien grabadas, además del cuadro general: éste se parece mucho al que constaba en la edición anterior, como debido á los dos autores españoles, pero con mayor número de figuras esquemáticas que aquel.

En el texto hay correcciones y ampliaciones; citaremos entre estas las siguientes: en la página 73 se dice que Betancourt ha hecho una aplicación de cierto mecanismo á una máquina destinada á limpiar los puertos, que ha construido en San Petersburgo; se habla de algún otro invento del mismo ingeniero; y en la página 199 se explica un estudio de velocidades y movimientos de un aparato ideado por Bartolomé Sureda: en otro lado se cita á un José Sureda. Háblase también de un telégrafo ideado por Breguet y Betancourt.

Todo esto parece indicar que la revisión se hizo por Betancourt, aunque por lo que vamos á indicar se prueba que lo fué por Lanz, y que éste, modesto y teórico, se limitó á citar los trabajos ajenos, sin indicar las combinaciones que pudiera hacer pasar por algún tanto originales.

Con efecto, en la página 25 de la 4.ª edición (1828) (1), de la obra de Hachette *Traité elémentaire des machines*, se dice lo siguiente, que traducimos: «Se hallará al principio del segundo capítulo la explicación de las máquinas construidas en las diez séries de cuadros. Los que deseen nociones más extensas sobre cada máquina, pueden consultar la obra que el Sr. Lanz y yo hemos publicado en 1808..... Una segunda edición, que ha visto la luz en 1819, contiene varias adiciones importantes, pero se han suprimido: 1.º las quince primeras páginas de la antigua, que constituían el programa del curso de máquinas que yo había presentado en 1808 al Consejo de perfeccionamiento, y que fué adoptado para la enseñanza de dicho año; 2.º la nota siguiente, aprobada por el Sr. Lanz, de la página 1.ª»

Dicha nota es la que queda copiada en otro sitio. Pero lo notable es que Hachette omite el nombre de Betancourt, y, prescindiendo del amor propio del autor francés, parece indicar que Lanz era el que más parte tomó en la edición primera y el que arregló la segunda.

Esto último se confirma con un catálogo de las publicaciones de la casa editorial de esta segunda edición, que era la famosa de Bachelier (antecesora de la actual de MM. Gau-

---

(1) La 1.ª es de 1811, y ya en ella se refiere á la obra de Lanz y Betancourt.

hier-Villars et fils), del cual poseemos un ejemplar, correspondiente á Diciembre de 1818, y que dice así, después de copiar el título: «La primera edición fué impresa en 1808, por informe del Consejo de instrucción de la Escuela Politécnica, y á expensas de ésta; y, hallándose agotada, se ha encargado el Sr. Lanz de revisar la segunda, y de hacer en ella muchas adiciones y correcciones, tanto en el texto como en las láminas.»

Después de esto, indica que tendrá mejor éxito esta edición que la anterior, como superior á ella en todo, y que sigue enseñándose por el libro en la Escuela Politécnica.

Esta segunda edición constituye, por lo tanto, el punto culminante de la obra, emancipada ya de la tutela del profesor de la Escuela Politécnica, Hachette, y de la protección del eminente Monge. Con arreglo á ella hay que examinarla, y el juicio de los contemporáneos y sucesores ha sido unánime en su favor, según pronto indicaremos.

***

Se publicó en 1840 la tercera edición; pero esta no difiere de la anterior sino en la forma. Muertos ya sus autores, se limita esta á un mero negocio del editor, por haberse agotado los ejemplares. El texto y el atlas de las láminas van separados: aquel es de menor tamaño de impresión en cada plana, por lo cual llega á tener 208 páginas. El atlas es la colección de láminas de la edición 2.ª, pues sin duda guardó el editor las planchas (empleando la voz técnica, aunque gálica): el cuadro de clasificación es también exactamente el mismo.

***

En medio del caos que existía, en punto á las máquinas, fué un progreso notable establecer principios generales, que hoy se formulan en uno solo: el trabajo mecánico de la potencia es igual al de la resistencia útil, más el de las resistencias pasivas. Conocido ya en los tiempos de Lanz y Betancourt, al menos en su parte fundamental, quedaba una cuestión, que era la transformación geométrica de los movimientos, prescindiendo de los trabajos, esto es, de la acción de las fuerzas; ó sea el problema que hoy se denomina de Cinemática industrial. Este fué el realizado por los dos sabios españoles en su obra.

Establecieron en ella una clasificación racional de los movimientos, atendiendo á sus direcciones y velocidades, y redujeron á pocos todos los mecanismos hasta entonces conocidos, realizando con ello la verdadera obra de toda ciencia, que es someter á leyes generales y sencillas los múltiples, aparentemente discordes y á veces hasta contradictorios hechos, suministrados por un conjunto de fenómenos. Además de esto hay la copiosa erudición de reunir tantos ejemplos y modelos de máquinas y aparatos (1).

¡Loor á los exclarecidos ingenios que dieron á conocer en el corazón de Europa el nombre español en un linaje de estudios en que ciertamente hemos brillado poco, relativamente á otros destellos del espíritu!

---

(1) Para comprender cuál era el estado de los conocimientos, respecto á constitución de las máquinas, basta leer dos obras curiosas de fines de la pasada centuria.

Una es la «*Colección general de máquinas escogidas*..... entre todas las que hasta hoy se han dado á luz en Inglaterra, Francia, Italia y otros reinos, y en que se comprenden los utensilios y demás máquinas que se han inventado en ellos para facilitar las operaciones de las Artes y Oficios, según lo publica la Real Academia de las Ciencias de París. Tomo I, que contiene 48 máquinas. Traducido por Miguel Gerónimo Suárez y Núñez, archivero de la Junta general de Comercio.....» Madrid, 1773. El tomo 2.º es de 1784. Es una descripción empírica de bombas, molinos, grúas, faroles, etc., con láminas bien grabadas.

La otra es «*Tratados de Matemáticas*, necesarios á los artífices para la perfecta construcción de instrumentos astronómicos y físicos. Dispuestos para la instrucción teórica de los aprendices del taller del Real Observatorio de Madrid, por D. Joseph Radon. Tomo I, en que se comprenden los preliminares, Aritmética, Geometría y Dinámica, y la Astronomía. De orden superior. Madrid, en la imprenta Real, 1794». El tomo II, Mecánica, es de 1797. Esta voluminosa obra trata bien, y con arreglo á los conocimientos de la época, la composición de fuerzas, el estudio de la palanca, torno y cuñas, pero carece de toda noción respecto de la composición y de la construcción de las máquinas.

II

El juicio que mereció á sus contemporáneos la obra de Lanz y Betancourt, resulta manifiesto con lo indicado; pero el de sus sucesores, á partir de la edición segunda, que es la auténtica y coetánea á los adelantos de la época, es el que vamos á indicar sucintamente.

El célebre Poncelet, verdadero creador de la Mecánica industrial, y autoridad irrecusable, dice en la segunda edición de su obra sobre esta ciencia (1), que Monge fué quien inició el asunto de las transformaciones de movimiento, y añade: «Los señores Lanz y Betancourt ejecutaron en seguida esta clasificación en la obra titulada *Ensayo sobre la Composición de las Máquinas.* Desgraciadamente esta obra está hoy atrasada con respecto á los progresos que ha recibido la ciencia de las máquinas; hay muchas combinaciones excelentes, que no constan en ella, y gran número de las que tiene son defectuosas.» Esta misma crítica indica la autoridad de la obra, prescindiendo de la paternidad atribuida á Monge, disculpable por el gran concepto del creador de la Geometría Descriptiva, y hasta por cuestión nacional.

Laboulaye, el primer autor que, siguiendo la clasificación de las ciencias de Ampère, publicó un tratado de Cinemática industrial, dice en su *Diccionario de Artes y Manufacturas*, obra muy conocida, y en el artículo *Mecánica*, lo siguiente, que traducimos de la primera edición: «El único trabajo importante relativo á la Mecánica geométrica, considerada en su conjunto, que conocemos, es el ensayo sobre la Composición de las Máquinas, de los Sres. Lanz (2) y Betancourt. Este trabajo notable y que generalmente se han contentado con copiar las

---

(1) *Traité de Mécanique industrielle*, 2.ª edición. Liége, 1840, página 23 del tomo 3.º

(2) Laboulaye escribe siempre Lantz, quizás para afrancesar el apellido navarro. Sonnet, en su *Diccionario de Matemáticas aplicadas*, lo escribe también así.

obras que han visto después la luz, es, sin embargo, bastante incompleto, y presenta además dos defectos importantes. El primero es limitar la composición de las máquinas á la transformación de movimientos, lo que es una idea falsa é incompleta de la cuestión. Los embragues, el volante, los cartones de la Jacquart, etc., son, ciertamente, órganos de máquinas, sin ser por esto, ni órganos receptores, ni de transformación de movimiento, ni herramientas. El segundo es confundir el agente físico que da el movimiento, con la máquina.»

Aquí cita el ejemplo antes indicado de la rueda hidráulica; dice que además se ha quedado anticuado el libro de Lanz y Betancourt con los adelantos realizados durante treinta años en la construcción de máquinas.

Con el título (en francés) de *Tratado completo de Mecánica aplicada á las artes*, publicó en París el ingeniero Borgnis, desde 1818 á 1821, una obra en 9 tomos, casi en folio y voluminosos, de más erudición que crítica. En el I, titulado *Composición de las Máquinas*, cita en las páginas 80 y 81 los experimentos de Betancourt sobre la tensión del vapor de agua, y en la 130 se refiere á la obra de Lanz y Betancourt. En el tomo VII, titulado *Máquinas que sirven para fabricar las telas*, dice (página 113), que la obra de Lanz, en su segunda edición, inserta dos importantes observaciones de Bartolomé Sureda, que determinan la relación de las velocidades en la marcha del carro de la mull-jenny.

En el tomo IX, denominado *Teoría de la Mecánica usual*, y al tratar de la transmisión de movimiento por medio de la *unión quebrada* ó *articulación universal*, se cita también la segunda edición de la obra de Lanz y Betancourt.

***

Respecto de autores españoles, nos encontramos con Vallejo, notable por su amor al estudio y por su erudición bibliográfica, el cual dice en una de sus primeras obras, titulada *Compendio de Mecánica práctica* (1815), á la página 73, lo siguiente: «De manera que, averiguando cuántos son los movimientos conocidos, y haciendo todas las combinaciones necesarias, se tendrán todas las máquinas que se pueden inventar. Este es un trabajo ya hecho por nuestro amigo D. Agustín de Betancourt, Inspector general que fué de caminos y canales, y que ahora se halla en la corte de Rusia. Este sabio español me enseñó en Madrid un importantísimo trabajo, en el cual se compendian todas las máquinas», etc. Como nota, dice que ha visto el ejemplar impreso de la obra de Lanz y Betancourt. En otros libros posteriores de Vallejo se cita á ambos españoles.

Odriozola, en su *Mecánica aplicada á las máquinas operando*, publicada en Madrid (1839), dice en la introducción: «Sobre este ramo de la maquinaria, referente á las disposiciones oportunas de miembros y órganos mecánicos para modificar ó cambiar el movimiento, al comunicarse de un miembro á otro, no se puede recomendar libro mejor que el de nuestros sabios compatriotas Lanz y Betancourt. Baste decir que sirve de texto en la Escuela Politécnica de Francia.»

El Presidente actual de la Academia de Ciencias, señor Montesino, decía en 1853 desde su cátedra de la Escuela de Ingenieros industriales (1), lo siguiente: «Poco se ha escrito acerca de la mejor forma y disposición de los órganos que entran en la construcción de las máquinas, parte tan interesante de la Mecánica, y de eso poco debemos la gloria de que abriesen la marcha nuestros compatriotas Lanz y Betancourt con la publicación de su trabajo sobre la *Composición de las Máquinas*, trabajo de gran mérito para el tiempo en que vió la luz.....»

En cambio, otros autores ó traductores españoles, anteriores al últimamente citado, prescindieron de nombrar á los que son objeto de este bosquejo (2).

---

(1) *Resumen de las lecciones del curso de construcción de máquinas*, por D. C. S. Montesino, Profesor de dicha asignatura en el Real Instituto Industrial.—Autografiado.—Página 9.

(2) Solo ponemos aquí la obra, muy buena para su tiempo, del que más tarde llegó á ser Director del Real Instituto Industrial, D. Manuel María de Azofra, titulada *Curso Industrial ó Lecciones de Aritmética, Geometría y Mecánica aplicada á las Artes.*—Valen-

III

¿Qué parte tomaron Lanz y Betancourt en el movimiento científico, además del reflejo que nos mandaron con su libro? En otros términos: ¿qué datos biográficos se conocen de ellos, en lo referente á su intervención en la vida intelectual?

Pocos son, á la verdad, los que hemos podido procurarnos; y llegando á más los de Betancourt que los de Lanz, comenzaremos por el primero.

***

Según una biografía publicada por la *Ilustración de Canarias* (1), nació Betancourt en Orotava, isla de Tenerife, de ilustre familia, en 1.º de Febrero de 1758. Pasó á la Corte y comenzó sus estudios en el Real Colegio de San Isidro, en Enero de 1779, cursando además en la Real Academia de San Fernando; y cinco años después pasó á estudiar la maquinaria de las minas de Almadén, comisionado por el Gobierno, y escribió tres Memorias sobre este asunto, mereciendo por ellas que se le mandase á París para estudiar la Química y la Geología. Por Real órden de Febrero de 1786 se le confirió una pensión de 1.500 reales mensuales para estudiar la Hidráulica y la Maquinaria en dicha ciudad.

Desde esta época comienzan los trabajos más notables de D. Agustín de Betancourt y Molina (2). Activo é inteligente,

---

cia, 1838. Y la traducción de la *Mecánica Industrial* de Christian, publicada en 1848, por D. Francisco Arau, en Barcelona.

De los posteriores, citaremos el curioso «*Vocabulario Matemático-etimológico*, seguido de un breve índice de matemáticos célebres y de sus obras más notables, por D. Felipe Picatoste y Rodríguez.—Madrid, 1862», que tampoco incluye á Lanz ni á Betancourt.

(1) Números correspondientes á los días 15 y 30 de Julio de 1883.

(2) La *Ilustración* citada escribe Bethencourt, que es quizás la verdadera ortografía de tan ilustre nombre, de origen normando; pero nosotros adoptamos la que va en el texto, por ser la que consta en firma del autor, que hemos visto en alguno de sus manuscritos, que se citará más adelante y está en la Biblioteca del Palacio Real.

pudo dar á conocer en España industrias nuevas, é implantar algunas, como por ejemplo, la fabricación de cajas de concha. Ocupose con especialidad de las máquinas destinadas á obras públicas, y reunió una colección notable de modelos de aparatos, puentes y construcciones, que se enumeran en una de sus Memorias manuscritas, y que sirvieron más tarde para formar la notable colección que existía en el Palacio Real del Retiro (1). Constaba de 270 modelos, 358 planos y varios manuscritos.

Tuvo ocasión de examinar las máquinas de vapor en Inglaterra, donde eran una novedad, y escribió sobre ellas un trabajo que presentó á la Academia de Ciencias de París, y que ésta hizo imprimir en 1790, en su colección de Memorias de sabios extranjeros, siendo de gran autoridad en Francia por aquella época.

Después de su vuelta á España, en 1792, fué nombrado Inspector general de caminos: á propuesta suya creóse la Escuela del ramo, y en 1802 comenzaron los estudios, según consta del informe elevado al Secretario de Estado, D. Pedro Ceballos, en Abril de 1803 (2). En 1807 presentó á la Academia de Ciencias de París una Memoria sobre un nuevo sistema de navegación interior, que se mandó publicar en sus colecciones.

Betancourt era alférez de milicias de Canarias antes de venir á Madrid, y solo consta que llegó á capitán en el ejército, aunque á juzgar por lo que dejamos dicho, no debía tener mucha afición á las cosas de la milicia, en su parte guerrera cuando menos. Es lo cierto que poco después de comenzar nuestra heróica lucha llamada de la Independencia (aunque

---

(1) Existe en la Biblioteca del Palacio Real la Memoria, y se titula «*Catálogo de la Colección de Modelos, Planos y Manuscritos*, que de orden del primer Secretario de Estado ha recogido en Francia Don Agustín de Betancourt y Molina». Está firmado el manuscrito en Madrid á 1.° de Abril de 1792.

Hay también otro sobre las máquinas empleadas en la fábrica de cañones de Indrid.

(2) Véase la página 4 del folleto publicado en 1873 por la *Revista de Obras públicas*, titulado *Reseña histórica de la Escuela especial de Ingenieros de caminos, canales y puertos.*

algo antes había hecho gestiones con este objeto), pasó al servicio de la Rusia con el carácter de ingeniero civil, recibiendo la investidura militar que entonces, más aún que hoy, se daba á casi todas las profesiones en el país de los Czares. Obtuvo el grado equivalente al de Mariscal de Campo, y se estableció allí con su familia, que había formado pocos años antes casándose con una señorita inglesa.

Más tarde fué elevado á los honores de Teniente general, publicó trabajos (1), organizó las carreras de ingenieros, dirigió muchas obras, que fueron citadas como modelo durante bastantes años, entre ellas un picadero cuya cubierta adquirió dimensiones hasta entonces no conocidas, las de canalización del Neva y otras.

Murió lleno de consideraciones en la capital de su patria adoptiva, San Petersburgo, en Julio de 1824.

***

Poco hemos podido averiguar respecto de la vida científica y social de D. José María Lanz, y esto después de haber hecho registrar varios archivos. Vió la luz en la América, entonces española, en el puerto de Campeche, hijo de un comisario ordenador de aquella provincia del vireinato mejicano (2).

Debió nacer hácia 1762 á 1766, pues comenzó su carrera

---

(1) Entre ellos *Description de la salle d'exercice de Moscou.*—San Petersburgo, 1819.—Un volumen en folio con un Atlas.

(2) Entre los varios documentos relativos á D. José Lanz y á D. José María Lanz, que con ambos nombres se designa indudablemente á la misma persona, existentes en el Archivo central situado en Alcalá de Henares, y cuyo extracto debemos á la ilustrada inteligencia del Ayudante D. José Garreta, por intermedio de jefes del cuerpo de Archiveros bibliotecarios, hay en el legajo 5.302, correspondiente á 1818, y de que más adelante hablaremos, una carta de 5 de Agosto de dicho año, del embajador de España en París, Sr. Duque de Fernan-Nuñez, en la cual consta el dato del sitio de nacimiento de D. José Maria Lanz.

Registrado el libro bautismal de la iglesia del pueblo de Lanz (Navarra), á petición nuestra, no se ha encontrado rastro alguno de nuestro héroe, ni de su familia, desde 1760 en adelante.

de guardia-marina en 1781, ascendió á alférez de fragata el año siguiente, á alférez de navío en 1786, y á teniente de fragata el año inmediato (1), á teniente de navío en 1791, y fué separado del servicio en 1794, «por ignorado paradero» (2).

En 1789, mereció ir, como teniente de fragata, pensionado al extranjero por el Gobierno español, en unión del famoso astrónomo y marino Mendoza (3).

No hemos encontrado rastro alguno de sus trabajos en esta comisión, en la que quizás conoció á Betancourt, y mostró tal

---

(1) Así consta en el libro impreso en 1787 y titulado *Lista alfabética de los oficiales de Guerra de la Real Armada*, página 259; las fechas respectivas de los cuatro nombramientos, son: 13 de Octubre, 21 de Diciembre, 25 de Marzo y 28 de Abril; el nombre es José María Lanz, natural de Campeche.

(2) En un libro manuscrito que hay en el Ministerio de Marina y que es el registro de entrada en el Archivo, consta al folio 233 que Lanz ascendió á teniente de navío en 1.º de Marzo de 1791, y que en 11 de Febrero de 1794 fué «separado del servicio por ignorado paradero.»

Debemos la compulsa de ambos libros al ilustrado bibliotecario del Ministerio, D. José del Ojo.

No consta en dicho Archivo el expediente personal de Lanz, ni por tanto la fecha de su nacimiento.

(3) Así consta en el legajo 3.013 del Archivo central, según comunicación del 6 de Octubre de 1789, de D. Antonio Valdés al conde de Floridablanca, para que le recomendara, así como al capitán de fragata D. José Mendoza, á los representantes de España: consta también la minuta, de 11 del mismo mes, de haberse cumplido la recomendación.

Según el legajo 978 del mismo Archivo, D. José Lanz era, con otros oficiales, en 1788, de los dedicados á *estudios superiores*, á la órden del brigadier D. Vicente Tofiño, y propusieron un plan para formar astronómicamente la carta náutica de la América septentrional.

Más adelante se lee que habiendo solicitado D. José de Mendoza «permiso para viajar, con ánimo de completar su instrucción», se le previno que escogiese el oficial ó los oficiales que le podrían acompañar, y eligió á D. José Lanz. El viaje había de ser por «las costas de Francia, visitando los departamentos de Brest y Rochefort, y el nuevo de Cherbourg; París, Inglaterra, Baja Sajonia, Dinamarca, Suecia, Petersbourg, Cronstad y costas de Polonia, y visto Dantzik, por Alemania á Venecia, Nápoles, Tolón, Marsella y á España».

afición á seguir estudiando en el extranjero, que dejó perder su carrera de marino. Solo sabemos que á principios de 1808 mandó desde París una Memoria y los dibujos relativos á un telar de medias inventado por M. Fabreau (1).

Poco después de publicada la primera edición de la obra magna, debió volver Lanz á España, y fué nombrado jefe de división del Ministerio del interior (2). Fué también propuesto algo más tarde para Catedrático de Mecánica, según consta en uno de los papeles de la colección titulada *Revolución de España*, el cual es una relación del profesorado que se proyectó para una gran Universidad en Madrid, en tiempo de José Bonaparte. Se citan allí para Mecánica (3) á tres personas, por el orden siguiente: D. Josef María Lanz, y se pone como calificativo, *conocido en Europa;* en segundo lugar, á D. Bartolomé Sureda, del cual se dice, *inventor de máquinas muy útiles á las artes;* y en el tercero, á D. Antonio Gutiérrez, sin calificación alguna. Este Sureda es el ya citado al tratar del *Ensayo sobre la composición de las máquinas:* fué encargado en 1826 de regentar los talleres del naciente Conservatorio de Artes, y Director de la Real fábrica de loza de la Moncloa, establecida por Fernando VII.

En un artículo necrológico sobre el nombrado D. Antonio Gutiérrez, suscrito por persona de tanta autoridad como lo era D. Vicente Santiago Masarnau, publicado á la muerte de aquel en 1840 (4), se dice que fué discípulo de Mecánica del «benemérito profesor D. José Lanz», pero sin expresar si éste

---

(1) En el legajo 5.302 del citado Archivo, consta el oficio de Lanz, dirigido en 3 de Febrero al Ministro D. Pedro Cevallos: no están los planos ni las explicaciones.

(2) Así consta en la *Gaceta de Madrid* de 27 de Septiembre de 1809, diciendo que se le nombró por decreto de 6 del mismo mes.

(3) Lo ha dado á luz D. Manuel Danvila con el número 1383 de los documentos que acompañan á su obra titulada «*El poder civil en España*, Memoria premiada por la Real Academia de Ciencias morales». Va en el tomo VI. Por cierto que hay una errata diciendo Sanz en vez de Lanz.

(4) En el *Correo Nacional*, de esta Corte, el 21 de Agosto. Gutiérrez falleció en París el 3 de dicho mes y año.

dió sus lecciones con carácter oficial ó privado, ni si fué en París (donde estudió parte de su carrera Gutiérrez), ó en Madrid.

A la conclusión de la guerra de la Independencia, fué sin duda alguna Lanz á París, y pretendió pasar más tarde á la Habana como Profesor de Matemáticas y preceptor de uno de los hijos de Doña Teresa Ofarrill, lo cual le fué negado en 1818 por haber sido «jefe de división de la Secretaría del Ministerio del Interior, del Intruso, y Prefecto, en comisión, de Córdoba (1)».

En vista de esta negativa, debió emprender, á fines de dicho año, como queda dicho, la corrección y ampliación de su obra, en la segunda edición de la misma, viviendo probable mente del producto de ésta y de lecciones en los Colegios particulares de la capital de Francia.

Quizás fué profesor de la Escuela de Caminos, ó más probablemente de alguna de Artes, aneja al gabinete de máquinas del Retiro (2); pero no hemos visto dato alguno fehaciente. Respecto de la fecha de su muerte, tampoco tenemos documento auténtico, aunque D. José Rodríguez Mourelo la asigna en 1839 y dentro de París (3). Sin embargo, creemos que de-

---

(1) Así consta en el legajo número 5.302 del Archivo de Alcalá, á que antes nos referimos. Hay varias comunicaciones, y entre ellas un oficio de D. Juan Lozano de Torres, fecha 15 de Noviembre de 1818, en que se dice que S. M. no tuvo á bien conceder al señor Lanz el permiso que solicita, por lo que se expresa en el entrecomado del texto.

(2) El curioso librito titulado «*Breve historia de los gabinetes de Física y Química* del Instituto de San Isidro de Madrid, escrita por D. Mariano de Santistéban, Catedrático del mismo» (1875), dice, en su pág. 23: «las escuelas mecánicas de artes y de ingenieros civiles de Lanz y Betancourt, pretendieron y consiguieron, bajo los auspicios de D. Manuel Godoy, constituir centros de enseñanza independiente.»

(3) En las dos conferencias que dió en el Ateneo durante el año 1886 dicho erudito químico, en las que tan de relieve pone á varios sabios españoles contemporáneos de Lanz, y muy especialmente á D. José Rodríguez y González, se dice (en la página 415 del tomo que colecciona á éstas y á otras de diversa índole), que «Lanz falleció en París en casa de Breguet, habiendo recogido su último

bió fallecer hácia 1834, ya porque entonces pudieron regresar á España casi todos los emigrados, ya porque no le conocieron, sino por su fama, varios españoles que desde esa época fueron á estudiar carreras científicas á aquella ciudad (1), ya también por su avanzada edad.

Con toda seguridad sabemos que vivía en París hácia 1832, con referencia á D. Vicente Vázquez Queipo, el cual tuvo ocasión de tratarle en 1831, y le consta que vivía un año después, al abandonar la capital de Francia nuestro actual decano en la Academia de Ciencias. Representaba por entoncos Lanz de 68 á 70 años, y su situación no era ciertamente desahogada (2).

***

Es muy singular que Gil de Zárate, en su obra *De la Instrucción pública en España*, no cita una sola vez á Lanz ó á Betancourt, ni al ocuparse de la historia de las ciencias físico-matemáticas en el tomo 1.°, ni al tratar de las escuelas industriales en el 3.°, y habla con gran elogio, verdaderamente justo, de D. Antonio Gutiérrez.

Los números que hemos podido ver del *Mercurio de España*, de 1798 y 99, al dar cuenta de las publicaciones, con grabados, que se hacían de la «descripción de las máquinas de

---

suspiro D. Antonio Gutiérrez, quien murió en la misma capital un año después.» No indica cómo averiguó el dato relativo á dicho fallecimiento. Supone también que perteneció al cuerpo de ingenieros militares.

(1) Es dato que tenemos de D. Cipriano S. Montesino, Duque de la Victoria, Presidente de la Academia de Ciencias, el cual se halla en el caso citado.

(2) El Sr. Vázquez Queipo, que desempeñaba entonces una comisión científica en París, y era Catedrático por oposición, de Física y Química, en la Universidad de Valladolid, conoció á Lanz en casa del abate D. Juan Antonio Melón, el amigo íntimo de Moratín. Según nos ha manifestado, era Lanz algo corpulento, más bien bajo que alto: su fisonomía tenía impreso el sello de la bondad. Nos complacemos en dar aquí las gracias, por las noticias que nos ha facilitado, al respetable académico que conserva íntegras su inteligencia y su memoria, para bien de la ciencia, á pesar de su avanzada edad.

más general utilidad que hay en el Real gabinete de ellas,» establecido en el Buen Retiro, y de otros asuntos relativos á progresos industriales, no nombra tampoco á Lanz. Dicha *Descripción*, hecha por orden de S. M., según reza la portada, se debe á D. Juan López de Peñalver, Director que fué más adelante del Conservatorio de Artes, y en los cuadernos que hemos visto, se cita alguna vez á Betancourt, pero no á Lanz. Tradujo más tarde este mismo profesor la obra de Dupín sobre Geometría y Mecánica, y no nombra á los dos sabios españoles á que principalmente nos venimos refiriendo (1).

En el *Diccionario universal de Larousse*, se nombra en el artículo Betancourt, á Juan, el caballero normando conquistador de las Canarias, y á Agustín, como notable ingeniero español, autor de varias Memorias, que indica, y del *Ensayo sobre la composición de las máquinas:* nada hay relativo á Lanz en este, ni en el lugar correspondiente, según el orden alfabético del Diccionario francés, tan conocido (2).

Lanz fué, á lo que parece, un sujeto modesto y retraido; Betancourt tuvo mayores ambiciones, y era, á no dudarlo, hombre de mundo y bien relacionado. Ambos poseían notoria capacidad y gran amor al estudio.

El verdadero autor, digámoslo así, ó de otro modo, el que más parte tomó en la redacción y revisión del libro que ha hecho á ambos famosos, fué Lanz, ya por lo que queda dicho anteriormente, ya también porque figura en primer término en las portadas, á pesar de la mayor categoría oficial de Betancourt y de ser éste más conocido; pues ni aun por el órden alfabético de los apellidos, ni de los nombres, ni siquiera por la edad, le correspondería á Lanz esta preferencia (3).

---

(1) *Geometría y Mecánica de las Artes y Oficios, y de las Bellas Artes. Curso normal para el uso de los artistas y menestrales, y de los maestros y veedores de los talleres y fábricas.* Explicado en el Conservatorio Real de Artes y Oficios. Traducido al castellano de orden del Rey Nuestro Señor, por D. Juan López Peñalver de la Torre.—Madrid, 1830-1835: 2 tomos.

(2) El *Diccionario Universal*, dirigido por el Sr. Serrano, y que es casi una traducción del anterior, trae el pueblo de *Lanz*, pero nada dice del mecánico español.

(3) De Betancourt hay un retrato en la Escuela de Ingenieros de

IV

En otra ocasión lo hemos dicho, y no nos cansamos de repetirlo: la guerra de la Independencia, gloriosa bajo el aspecto patriótico, y la cruel reacción política que le siguió, mataron el renacimiento científico instaurado por Carlos III y continuado por Carlos IV. Desaparecieron los sabios marinos que aún quedaban, los Ciscar y los Mendoza, este último suicidado en Inglaterra, y antes había pagado su tributo á la tierra el más ilustre de todos, D. Jorge Juan; salió de España el ilustre geodesta D. José Rodríguez, conocido en Inglaterra por entonces con la denominación del *sabio español*, y vino á morir á su patria, perseguido por sus ideas políticas, en 1824; se borraron los nombres de Chaix y de Pedrayes; abandonaron á España para volver á Francia, su país, el químico Proust y el físico Chavanneau; D. Antonio Gutiérrez vivió oscurecido y perseguido.

Sirvan estos precedentes de disculpa, hasta donde quepa, al forzoso destierro de Lanz, y al hecho de haber adoptado Betancourt una nueva patria, aunque nadie tiene derecho para renegar de la suya, como á nadie le es dado escoger su madre, ni siquiera lícito rechazar la que le cupo en suerte.

G. Vicuña.

Caminos, y la Revista canaria antes citada publicó un grabado en que se le representa con el uniforme de general ruso. De Lanz hay en la cátedra grande del Conservatorio de Artes, que fué capilla del convento de la Trinidad, hoy Ministerio de Fomento, un busto pintado al temple en la pared. Lo hizo el artista D. Antonio García en 1848, por encargo del entonces Director del establecimiento, D. Joaquín Alfonso, al llevarse allí las cátedras desde la calle del Turco; no nos ha sido posible, por fallecimiento de ambas personas, averiguar si se hizo á capricho, como sospechamos, ó por datos fehacientes. Está en traje de paisano.

CIENCIAS NATURALES.

ALGUNAS NOTICIAS

SOBRE LA EXPEDICIÓN CIENTÍFICA HECHA AL PERÚ POR ORDEN DEL REY DE ESPAÑA CARLOS III.

Muchos años han transcurrido desde que leí con pena en la biografía del Médico y viajero naturalista Dombey, publicada en el tomo 61 del *Dictionn. des Scienc. Natur.* de F. Cuvier, pág. 130, París, 1845, lo siguiente:

«Après de nombreuses excursions dans le midi de la France, le Jura, les Alpes, la Suisse, il fut proposé, en 1776, par de Condorcet et de Jussieu au mìnistre Turgot, pour être envoyé dans le Perou, avec la mìssìon de rechercher les vegetaux de l'Amerique espagnole qui pouvaìent se naturaliser en France. Ce voyage exigeait l'assentiment du gouvernement espagnol. Celui-ci lui suscita mìlle embarras. D'abord, on lui adjoignit deux botanistes espagnols; on ne lui permit pas de se servir des dessins originaux qu'il faisait faire. A son retour, on retint pour le roi d'Espagne la moitié des collections qu'il rapportait; et comme les botanistes qui lui avaient eté donnés pour compagnie ne devaient revenir que dans quatre ans, on exigea de lui la promesse de ne rien publier avant cette epoque.

.....Ses observations ont eté utilisées par Lheritier, a qui il les avait confiées. Ruiz et Pavon, ses compagnons de voyage, ont, dans leur *Flore Peruviénne*, profité de ses travaux sans lui rendre justice.....»

Tenía ya casi olvidado el contenido de estos párrafos, no muy satisfactorio seguramente para el gobierno y los botánicos españoles, cuando la casualidad ha hecho que vengan á mi poder los manuscritos de D. Hipólito Ruiz, con los cuales se puede escribir una historia completa de la expedición científica al Perú, pues no solo comprenden el diario del viaje, todos los documentos oficiales y las cartas particulares dirigidas á dicho botánico, sino también los borradores de las correspondientes contestaciones que éste dió, y de cuyos originales se habrá seguramente perdido la mayor parte.

Examinando con interés dichos manuscritos, he podido convencerme de que no son expresión fiel de lo sucedido los párrafos antes copiados de la biografía de Dombey. Hay documentos y cartas de los cuales resulta evidentemente que á M. Dombey se le consideró y guardaron atenciones por parte de todos; que fué al Perú en las mismas condiciones que los botánicos españoles; que antes de su salida convino en dejar para España la mitad de lo por él recogido; que siempre tuvo una amistad verdadera con D. Hipólito Ruiz, jefe de la expedición, y á cuyas órdenes iban los demás botánicos y dibujantes; y que, á pesar de haber acordado entre sí la no publicación de trabajo alguno hasta que se hallaran reunidos en España é hicieran entre todos la Flora del Perú y de Chile, M. Dombey se retiró antes que los españoles, entregó sus manuscritos y herbario á L'Heritier, y, cuando llegaron á España Ruiz y Pavón, se encontraron ya publicadas por M. L'Heritier muchas de las plantas que los tres expedicionarios habían recolectado juntos en la América Meridional. Por otra parte, en el *Prodromo de la Flora Peruvianœ et Chilensis* Præfatio, pag. IX et XII, Madrid, 1794, citan los botánicos españoles á M. Dombey y recuerdan que á él deben ejemplares de plantas iguales á las que perdieron en dos siniestros casuales ocurridos durante la expedición.

Solo me falta demostrar la exactitud del juicio que he formado revisando los manuscritos de D. Hipólito Ruiz, y para ello nada mejor que transcribir textualmente algunos de los documentos, sin perjuicio de exhibir otro gran número, si éstos no bastasen, y hasta el diario del viaje, en que día por día se halla consignado todo lo hecho por dicho botánico.

D. Hipólito Ruiz, por lo que resulta del examen de sus manuscritos, de los tomos publicados de la *Flora del Perú,* y de los muchos que aun existen inéditos en el Jardín Botánico de Madrid (1), era hombre de gran valía, muy concienzudo y metódico en sus trabajos, y cumplió su misión con una fe y un entusiasmo de que desgraciadamente se han visto pocos ejemplos en épocas más modernas.

JOAQUÍN GONZÁLEZ HIDALGO.

DOCUMENTOS JUSTIFICATIVOS (2).

1.° *Nombramiento de D. Hipólito Ruiz como jefe de la Expedición científica al Perú.*

✝

EL REY.

Por quanto conviene a mi servicio, y bien de mis vasallos el examen y conocimiento methodico de las producciones Naturales de mis Dominios de América, no solo para promover los progresos de las ciencias Phisicas, sino tambien para desterrar las dudas, y adulteraciones que hai en la Medicina, Tintura, y otras Artes importantes, y para aumentar el Comercio, y que se formen Herbarios, y Colecciones de productos Naturales, descriviendo y deliniando las Plantas que se encuentren en aquellos mis fertiles Dominios para enriquecer mi Gavinete de Historia Natural, y Jardin Botanico de la Corte: he resuelto pasen al Reyno del Perú dos Botanicos Españoles acompañados de un Medico Naturalista, y Botanico Francés, y dos Dibujantes tambien Españoles, á quienes, y cada uno separadamente se les despachará su Cedula, ó Nombram.^{to}; y hallandome informado de las buenas circunstancias, y notoria practica en esta Profesion de D.^{n} Hipolito Ruiz, he venido en

(1) Colmeiro, *La Botánica y los botánicos*, etc., págs. 45, 46, 180 y 181.

(2) Copiados con su misma ortografía.

nombrarle por mi primer Botanico para esta Expedicion facultativa en el Reyno del Perú, en donde servirá bajo las Instrucciones facultativas que separadamente se le darán firmadas por mi Secret.º de Estado, y del Despacho universal de las Indias, y con las condiciones siguientes:............
.................................Por tanto mando a mi Virrey Govern.ᵒʳ y Capitan General de las Provincias del R.ⁿᵒ del Perú, a los Regentes......................
.....hayan y tengan al expresado D.ⁿ Hipolito Ruiz por mi primer Botanico en calidad de xefe, y pral. de los demás de esta Comision, guardandole, y haciendole guardar las honras, y preheminencias que le correspondan para el buen exito de ella...
..............................Dada en Aranjuez á ocho de Abril de mil setecientos setenta y siete.

YO EL REY.

JPH DE GALVEZ.

2.º—*Instruccion á que deberán arreglarse los sugetos destinados por S. M. para pasar a la America Meridional en compañia del Medico D.ⁿ Josef Dombey, a fin de reconocer las plantas, y yerbas, y de hacer Observaciones Botanicas en aquellos Países.*

1.º

Llegados los Profesores a Lima, se establecerán alli por algun tiempo, que emplearán en recoger, examinar y remitir las plantas, que observasen en todos los contornos, y en tomar las noticias, y disposiciones necesarias para determinar las salidas, y viages de mas consideracion a los parages donde sean mas ventajosos. En todo procederán con la aprobacion del Virrey, y de los respectivos Governadores; y para hacer sus propuestas, se acordarán entre si, firmando todos los Botanicos lo que resolviere la pluralidad, assi en esta como en todas las demas materias, que mereciesen deliberacion. En los principios herborizarán juntos, hasta que juzguen poder hacer por si observaciones nuestros Españoles, que en este caso podrán alternar en acompañar á M.ʳ Dombey; bien que siempre ha de ser en terminos, que al cabo de pocos dias buelvan a unirse, y conferenciar sobre sus descubrimientos.

2.º

Procurarán vivir en la mejor armonía, y buena correspondencia con el referido Medico D.ⁿ Josef Dombey, ganar su confianza y amistad, y aprovecharse de los conocimientos que tiene, assi en la Botanica, é Historia Natural, como en el arte, y methodo de ordenar, y conservar las plantas, y de formar los Herbarios.

3 º

Tendrán cuidado de preguntarle, y de recurrir a él en los casos en que crean tener necesidad, o serles util el valerse de sus luces, y experiencias; sin que por esto sean, ni puedan creerse dependientes de el, ni que el pueda tratarlos como tales en ningun caso, ni materia.

4.º

Comunicarán con D.ⁿ Josef Dombey los descubrimientos Botanicos, o de Historia natural, que hiciessen, no haciendole misterio de nada, a fin de empeñarlo con esta franqueza y buen proceder, a igual buena correspondencia en lo que el mismo descubriere.

5.º

Si la casualidad hiciese, que no se encuentre sino una sola planta, yerba, ó simple de alguna especie singular, no deberá haver disension, ni disputa sobre quien la deberá adquirir; si fuese el Medico Dombey quien primero la encuentra, y coge, deberá este conservarla para su Herbario, comunicando á sus compañeros una exacta descripcion de ella, y permitiendoles hacer sacar un dibujo puntual; y si buenamente fuere possible, sin detrimento de la planta, separar alguna parte de ella, deberia consentirlo el referido M.ʳ Dombey, para que puedan nuestros Botanicos colocar, á lo menos esta parte de la planta, en los libros, que formasen.

La misma disposicion, y buena correspondencia se observará de parte de nuestros Observadores para con M.r Dombey, si fuessen ellos los que primero viessen, y cogiessen alguna planta extraordinaria de que no huviese muchos exemplares; y para que la util emulacion que los aliente en los descubrimientos, que muchas veces ofrecerá la casualidad, no degenere contra toda esperanza en discordia, será bien que segun vayan encontrando generos ó especies nuevas, ó mal determinadas hasta aquí por los Botanicos, las apunten en sus respectivos diarios con el nombre del descubridor á continuación del que por entonces se haya impuesto a la planta; y en primera ocasion al tiempo de comunicarse recíprocamente sus hallazgos añadirán todos ellos sus firmas en cada diario para que conste quien tiene el primer derecho á poder publicarla.

6.º

Lo que acaba de decirse no se opone en nada á la obligacion en que se ha convenido M.r Dombey de presentar a su buelta a Europa dos exemplares de las observaciones, y Herbarios, que huviese echo para que los cotegen a su presencia, y la de sus Compañeros los Profesores de nuestro R.l Jardin Botanico, y se deje uno de ellos en España; bien entendido, que si por una extraña casualidad, dificil de suceder, huviese en ellos alguna planta unica, y sola, por no haver encontrado otra, se le permitirá la deje en el exemplar, que se llevase a Francia; pero con la condicion de que en el que dejase en España, deberá insertarse en el lugar correspondiente, la descripcion, y dibujo de la misma planta, con las observaciones, y notas de qualquiera genero, que huviesse echo sobre ella.

7.º

Los Botanicos Españoles deberán hacer independientemente de M.r Dombey (bien que consultandole y valiendose de sus luces, y conocimientos siempre que lo creyesen conveniente) la difinicion y descripcion de cada planta con arreglo á los principios, o reglas Botanicas de Linneo, y segun su methodo sexual adoptado ya generalmente, expresando el nombre que tiene en la lengua del pais, en Español, en latin, si lo tuviere, y el que dá a ellas en frances M.r Dombey, las especies y variedades de cada genero, y si es la misma que con distinto nombre se conoce en otras Provincias, ya sea de la misma America, de las Indias Orientales, ó de otros qualesquier paises.

. . . .

11.

Para la formacion material de los Herbarios deberán consultar, antes de partir, a sus Maestros, reconocer los que estos han formado para su uso, y pedir sus instrucciones al Medico Dombey, de quien se asegura tiene particular inteligencia en esta parte, y procurarán, que en los dichos Herbarios queden las yerbas, y plantas en la mejor forma, que sea adaptable para su conservacion en figura, colores, flores, y semillas......

19.

Los articulos que van referidos son concernientes á la calidad de Profesores, y al encargo que llevan como tales; pero hay algunas otras advertencias muy principales, que hacer á nuestros Botanicos (las quales se harán tambien saver expresamente a M.r Dombey.)

Estas se reducen a que con ningun motivo, ni pretexto, por sí, ni por otra alguna persona, se mezcle ninguno de ellos directa, ni indirectamente en asuntos de Comercio, en enviar a Europa, ni en recivir genero, ni mercaderia alguna de qualquiera especie, que sea, pues desde el instante que se sepa, o se sospeche fundadamente haverse mezclado en asuntos de esta naturaleza, o que tienen correspondencia con algun Mercader de Europa o de America, para este efecto, se tomarán las providencias convenientes, y aun si fuera necesario se les haria venir a España en partida de registro, y se les castigará severamente; sobre lo qual se prevendrá a las personas á quien correspondiese, velen con la mayor atencion, y den cuenta del menor exceso que pudiese haver en esta parte.

Quanto vá dicho se entiende no solo por lo que mira a generos ó mercaderias regulares de comercio; sino tambiena los mismos objetos de la Botanica é Historia natural de los quales tampoco podrán hacer envio alguno a la Europa, que no sea directamente al Secretario del Despacho de Indias para el Gavinete de Historia natural, y Real Jardin Botanico, ni traficarlos en la America con el fin de hacer algunas ganancias; pues siendo este viage, y Comission puramente literarios, no deberán salir, tanto los Professores Españoles, como M.r Dombey, y los que los acompañasen del estudio, y atencion a que deben limitarse.

. . . .

21.

Se dará a M.r Dombey una copia en Francés de esta instruccion, no solo para que vea la buena correspondencia, y union que se encarga a los Profesores Españoles, sino tambien para que esté informado de los articulos a que es la intencion del Rey se sugete el mismo Dombey, y para que no alegue excusa, ni ignorancia en caso de contravencion.

22.

Mr. Dombey no se negará a ayudar a los Profesores Españoles a quanto pueda contribuir al mejor desempeño de su Comision, sin excepcion de asunto, ni materia, y havrá de parte de estos la misma buena correspondencia, de manera, que cada uno por su parte contribuya al cumplimiento de los fines, y objetos, que se propone el Rey en este viage, de que se pueden sacar grandes ventajas para el adelantamiento de las Artes, y las Ciencias, y por consiguiente para el bien de la Humanidad, si los que se emplean en él proceden con el zelo, aplicacion y buena armonia, que se espera, y que se encarga muy particularmente. . . . .

Aranjuez y Abril 8 de 1777.

Jph de Galvez.

3.° — *Cartas de M.r Dombey á D. Hipolito Ruiz, y de este al primero.*

S.or D.n hypolyto Ruyz
amigo y Compañero Señor D.n hypolito Ruyz. he rencontrado a chinchin una planta mui digna d'attention por su celebridad, es el *gen zeng* de Los chinos, Le *ninsi* de Los japones, y el *Sium ninsi* de Linnæus. esta planta es una umbella de uno pies de altura. Las raices bifurcadas como muslos de hombre, por eso La llamaron *ninsi* u *gen-zeng*, que en Lingua de Los chinos y de Los japones significa muslos de hombre. ningunos autores alexeption de Kœmpfer hizo descripcion de esta planta n'y La dibujaron. Seré essential y mui necesario de La hacer dibujar con raices y semillas separadas, como tambien de La enluminar. esta planta quiere La humedad y Los Lugares umbrosos. y cresse siempre al norte commo l'observé á chinchin. Si Vmd. rencontre esta planta me hará el gusto de me llevar á Lima hasta 12 rayses y estimaré la finessa.
ninguna llegada..... &.
a mis compañeros y amigos Dn joseph brunete, don isidro galvez y dn joseph pavon muchas memorias.
acavo de dejar..... &.

B. L. m. De vm.
el mas afecto amigo y Servidor. joseph.
Lima agosto y 9 de 1779. DOMBEY

S.or D.n José Dombey y q.do compañero
Aunq.e la vispera de la salida de Vmd pase determinado a darle un estrechado abrazo de despedida, queriendo bolver á reiterarle despues de la comida, el sentim.to q.e spre en mi causa la separacion de un verdadero Amigo y tan amable como mi Mr. Dombey no me permitió el ponerlo en ejecucion.

Yo deseo haya Vmd tenido prospera y feliz navegacion, y entero restablecim.to de su salud hasta cuya favorable noticia no vivirá gustoso ni tranquilo mi animo.

Considero a Vmd. al recivo de esta bien preocupado en essa de Madrid, y lleno de satisfaccion entre los Amigos, quienes no dudo q.^{e} en cierto modo aliviarán a Vmd. los quebrantos y contratiempos.

Por otra parte le veo á Vmd. disponiendo su viage hacia su Itaca, de la q.^{e} espero, q.^{e} con maternal amor, haga el acogimiento á un hijo, q.^{e} en servicio de ella ha savido trocar los placeres y caricias por los trabajos: No dudo sean estos remunerados como mi querido Mr. Dombey merece.

Nro viage a Pozuzo..... &.

Lima y Mayo 4 de 1784.

Blm. de Vmd. su verdadero y reconocido compañ.^{o}

Hipolito Ruiz.

Cadix el 13 de Marzo de 1785.

Amigo y Compañero Señor D.^{n} hypolito Ruiz.

he recivido con mucho gusto La querida carta de Vmd en la qual estimo como debo las Expresiones de su cariño. mi separacion de un compañero de los talentos, y circonstancias de Vmd. me fué mi sensible. Vmd. puede disminuir mi pesadumbre dandome En Paris a menudo de sus noticias, de sus travajos, y descubrimientos que no serán menores. y yo agradeceré infinito si Vmd. se digna conservarme un Exemplar de cada planta con sus descripciones. de mi lado yo haré mis esfuerzos para corresponder con Vmd. v. g. puedo yo hacer una colleccion de los libros botanicos nuevos, y mandar los a madrid á su llegada. ya yo he visto En esta Ciudad la ovra de tunberg que estava destinada para Muttis, y la nuova flora hispaniola de quer publicada por ortega con notas.

La ovra de tunberg que tratan de las plantas Japonicas es mui buena con laminas de Los generos y especies nuevas, pero la obra de Vmds es mas dilatada, sera mas apreciable de todos modos, y las plantas son totalmente distintas,

Me escrive ortega que piense que los caxones que Vmd ha Embarcado en el S.^{n} pedro han sido perdidos, pero yo pienso que La sola perdida de Vmd haora sido de las macetas, y esto no quiere decir nada, con el motivo que dificultuosam.^{te} plantas de los tropicos pueden aguantar el hyvierno del cabo De horno.

yo Escrivo a D.^{n} Casimiro Ortego que llegando el caso que las plantas hayan perecidas que yo Soy prompto a entregar de nuevo algunos Exemplares, y ajudar en todo a minorar la perdida.

amigo si el S.^{n} pedro..... y llegamos en Cadix el 22 febrero de 1785.

tuve el gusto a mi llegada de rencontrar muchas cartas de mis amigos de paris, y en una de essas cartas la noticia de mi recivimiento en la real academia de paris en qualidad de Correspondiente con el privilegio de assistir a mi llegada en sus assembleas. yo soy deseado, pero el S.^{r} Ministro D.^{n} jph de galvez no ha dado toda via las ordenes para que se me entregan mis caxones que voy En essos dias hacer embarcar sobre un navio francés que me mandaron aproposito. despues yo me encaminaré para paris passando por madrid.

Yo tengo escrito varias veces al Ex.^{mo} Señor D.^{n} jph de galvez y muchas veces mas a ortega. Siempre yo me soi alabado de los cariños de Vmds con mi, pero principalm.^{te} de vuestros trabajos, buena correspondencia, harmonia y del Bueno y honroso manejo De todos. el mismo hice siempre de Lima y del Chile, y el mismo haré siempre de todas partes.

Suplico, y eso de veras, que Vmd, y mis Compañeros me perdonan mis faltas. mi genio vivo, pero que no es ni malo, ni rencoroso, nunca tuvo La menor volontad de enfaudar a Vmd. Siempre yo me acordare de Vmd Con el amistad que devo.

yo voi hoi a Comer con....: &.

Si Vmd ha tenido papeletadas a hacer, y arengas a tener, para Cobrar el sueldo doble, tener paciencia, yo he tenido en mi arrivada que a gastar 3000 p.^{s} y desde nuestra separacion hasta haora 6000^{lb} sin esperança ninguna de premios, si no de ellos que llevan directamente a L'hospital. mi deseo despues de haver Entregado mis caxones a el rey es de retirar me a vivir en una casa de hospital, renunciando a Sueldos y Empleos. quiero tener mi libertad que se pierde a la corte. en fin quiero ser libre, y de mi persona, y de mis ratos, sin tener que a pedir licencia para ir a bever muscatel en Caramanchel.

mis caxones han llegado bien acondicionados. ellos fueron depositados en un Buen aposento del Consulado. pero el mar se Cerca y la dilatacion pueden moxar las plantas y Echar las a perder. Con todo yo vivo contento con el motivo que La avaria no dependiendo de mi Si no del Lugar, dilatation, he cumplido con mi obligacion. La culpa no puede caer sobre mí.

Deseo a Vmd. una perfecta Salud, muchos descubrimientos, algunas cartas de su carino, y despues Con que passar los ultimos dias con descanso. Dios gue a Vmd. m^s^. a^s^.
a todos los Compañeros m^s^. m.^s^

B. L. m De Vmd su
amigo y compañero
JPH DOMBEY

Señor D.^n^ hypolito Ruiz, primer Botanico de S. m. C. de La r.^l^ acad.^a^ matritense &.

Huanuco y N.^e^ 12 de 1785.

Amigo y Comp.^o^ S.^or^ D.^n^ José Dombey

El gozo que ha tenido mi corazon con la estimada de Vmd. de 13 de Marzo fha. en Cadiz, no me es posible explicar con la pluma; permitame Vmd. lo deje al silencio; hagame el favor de creer q.^to^ le digo; y viva en la confianza que mi epistolar correspondencia le hará manifiestar esta verdad. Asi mismo creame que no tengo motivo para perdonarle ninguna ofensa, pues nunca la he recibido de mi querido Mr. Dombey, a quien no he sabido estimar como sus amables prendas merecen; pero esto no es culpa de mi fino afecto, sino de mi corto talento; y pues el de mi Amigo Mr. Dombey es tan claro, le suplico me embie amenudo continuados rasgos de sus luces para poder caminar sin tropiezo y minorar la pena q.^e^ me ha causado su ausencia.

Quedo impuesto y compadecido de sus navales trabajos; asi como tambien muy gustoso de las satisfacciones y obsequios de mis Amigos.

Con la fatal desgracia de haverseme quemado mis Libros de descripciones, Diarios, Prensas, Papel, Libros, Tiendas de campa.^a^, toda mi ropa, equipage y comestibles del compañero D.^n^ José Pavon y mios y todo lo trabajado en dos Meses en las

Montañas de Cuchero, a causa del Incendio de un Rozo, he estado enfermo un mes en terminos de perder la vida; hta a hora no he podido salir de casa por hallarme sumam.[te] debil.

Quando tuve el gusto de dar a D.[n] José Pavon las descripciones de las Dombeyas para que las pusiese en limpio y se las remitiese a Vmd. con los Dibujos, ya yo me hallaba enfermo, por lo q.[e] no he podido escribir a Vmd, y asi hagame el favor de suplir los defectos de ellas; y admitir ese corto obsequio en nre de los dos, q.[e] por ser elevadisimos y corpulentos Arboles y con nres. vulgar.[s] tuvimos la satisfaccion de ponerles el nre de Dombeyas. Corresponden a la clase de las Polygamias Monoecias antes del Genero Acer.

Si acaso fuese Genero conocido, ó bien no sea de su gusto, a mi llegada a Madrid le remitiré todos los nuevos G.[s] para que elija el de su agrado.

Estimo como debo la oferta que me hace de la coleccion de los nuevos libros Botanicos; y advierto a Vmd. que no necesita mi cariño nada de esto para saver destinarle un exemplar de cada Planta, con su descripcion, asi que llegue a Madrid y se abran los cajones.

Agradezco muy mucho el ofrecim,[to] q.[e] hizo Vmd á D.[n] Casimiro Ortega, de entregar un exemplar de cada Planta en el caso que se huviesen perdido los cajones q.[e] iban en el S.[n] Pedro. La perdida fué solo como Vmd pensó de las Plantas vivas y un cajon de diferentes cebollas. Tenemos noticia de q.[e] el S.[n] Pedro arribó al Rio Jeneyro.

Hta la presente se han dibujado mas de 300 Plantas nuevas: Yo tenia descriptas mas de 500 desde nra separacion; y corregidas 600 de las antiguas: me han quedado los Borradores antiguos y algunos de los modernos. He recuperado de las nuevas hta el dia unas doscientas, y espero reemplazar en el sig.[te] año las mas ó casi todas de las perdidas. Deseara hallarme con la cabeza libre para acordarme de algunos generos corregidos y remitir a Vmd una identica narracion de ellos; pero a mi regreso a Madrid lo haré con toda voluntad y en los siguientes correos iré oportunam.[te] dando a Vmd. noticia de las correcciones que me ocurran.

He celebrado q.[e] sus cajones de Vmd. hayan llegado sin averia: y he tenido suma complacencia de saber q.e se haya destinado un Barco para conducirlos a Francia, prueva evídente del aprecio que se hace del merito de su persona.

D. Pedro Compare nos comunica q.e en una Gazeta de Paris se inserta la noticia, del Buen acogim.to, franqueza, generosidad y liberalidad con q.e le han tratado a Vmd y el S.or de Cordoba el virrey del Geneiro, el Ex.mo S.or Ministro de Indias.

No esperaba yo otra cosa, conociendo el merito de Vmd. y lo acreedor que era a ello. Asi mismo nos dice q.e los Amigos le esperan en Paris para ponerle el cordon de S.n Mig.l Yo a mi mismo me doy la enhorabuena de todas estas satisffaciones y recompensas.

Igualmte q.e recivim.to en la R.l Academia de Paris en qualidad de correspondiente y con el Privilegio de asistir a sus asambleas: Espero q.e prosiguirán en adelante, asi el Soverano, como los Protectores, y Amigos en remunerar los trabajos y meritos de mi Amigo Mr. Dombey a q.n de todas veras doy el parabien de todo, pues tanto me intereso en ello.

Los compañeros quedan satisffechos de su fina voluntad, y yo muy reconocido a sus buenas ausencias, aquellos remiten cordialisimas m.s: y yo quedo con un lugar en mi corazon para tener colocado en el a mi comp.o Mr. Dombey.

Dios g. a. V. m.s a.s Huanuco y N.e 12 de 1785.

Blm. de Vmd. su Amigo y Comp.o

Ruiz

Señor D.n hypolito Ruiz

Lyon de 9 8.bre de 1786.

Amigo y Compañero Señor D.n hypolito Ruiz. he recivido con sumo gusto Las dos cartas de Vmd, la primera de huanuco, mayo 11 de 1785, a la qual contesté, y la secunda De huanuco de 12 9.bre 1785 en La qual veo todos Los Contratiempos de La infeliz intrenda en Las montañas del marañon. aora havrá savido Vmd. el naufragio del S.n pedro de Alcantara del qual solo se ha sacado el oro y la plata.

pero amigo es precizo De tener valor. no hay que a desmayarse. ya se save en toda la Europa todo el sucedido de nuestro viage, y no obstante Los contratiempos, los premios y el descanso esta esperando en madrid a Vmd.

me escriven Los amigos pavon, y galvez que La vuelta para su deseada patria deve efectuarse en 1787. Soi esperando con ansia esta noticia para dar Las enorasbuenas a mi amigo Ruiz, como de su llegada, y de Los premios bien merecidos para tantos afanes, penas, y sustos de mares, como de viajes tan dificultuosos. Save Vmd. que ninguna Corte premia como la de españa.

asi pues no tenga Vmd ninguno miedo. el Ex.mo Señor D.n jph de galvez, protector de Las Sciencias y de Los Scavios Sabrá premiar a Sus travajos, y todas sus penas como que Vmd. Lo merece.

espero que esta mia Carta, no Encontrará a Vmd. en el perú, y que Las primeras noticias de mi amigo Ruiz Las reciviré de Cadix o de madrid Colmado de premios, ya descansandose entre Los Suyos parientes y amigos.

Doi a Vmd. muchas gracias para el Genero nuevo de Dombeya que quiso Su amistad dedicarme. amigo no toma Vmd ninguna pena en mandar me plantas ni descriptiones, yo he decado el todo, entregando la media parte de mi colleccion a el rey de España y La otra media a el rey de francia. todo los demas papeles yo los quemé (1), y regalé mis curiosidades sin conservar nada. de este modo desnudo como quando veni en el mundo no tengo miedo de perder nada sino L'amistad de Vmd. y demas compañeros que Dios gue dilatados años.

B. L. m. de Vmd
Su mas apasionado
amigo y Servidor

JPH DOMBEY

m.s m.s a todos mis Comp.s que son mis amigos.

---

(1) M.r L'Heritier dice sin embargo en su carta que M.r Dombey le entregó sus manuscritos.

4.º—*Comunicacion de D.ⁿ José Galvez a D.ⁿ Hipolito Ruiz.*

Los dos tomos en Folio que Vmd. me dirigió con fha de 10 de Abril del mes proximo pasado en q.ᵉ se contienen las descripciones de las Plantas que ha observadᵒ en el curso de sus viages, los he pasado de orden del Rey al primer Catedra-dratico del Jardin Botanico D.ⁿ Casimiro] Gomez Ortega a fin de q. los tenga dispuestos para quando S. M. tenga abien q.ᵉ se comuniquen al publico los descubrimientos q.ᵉ se han hecho en esta expedicion.—Sin embargo de q.ᵉ por M.ʳ Dombey compañero en ella, y tambien por la Corte de Francia se havia pretendido que se le entregasen los 73 Cajones de producciones naturales q.ᵉ este Botanico havia dirigido desde Lima; ha resuelto S. M. q.ᵉ con instruccion q.ᵉ debe formar el referido Ortega pase desde luego uno de sus discipulos del Jardin Botanico a entregarse en Cadiz de todo lo q.ᵉ Dombey traiga duplicado, y de la mitad de lo demas que conduzca sin esta circunstancia. A cuyo fin se han dado las oportunas disposiciones, como igualmente para dejar asegurado q.ᵉ dho Profesor nò publique cosa alguna perteneciente á la citada expedicion hasta la venida de Vmd, y demas empleados en ella, por ser muy correspondiente que las observaciones y trabajos salgan unidos, y no se defraude en nada á la gloria, q.ᵉ a nuestra nacion le pertenece..... Aranjuez, 8 de Abril de 1785.

José Galvez

S.ʳ D.ⁿ Hipolito Ruiz.

5.º—*Cartas de l'Heritier á D. Hipólito Ruiz y contestación de éste.*

1.ª Carta de Mr. L'Heritier.

Paris ce 9 Mars 1786.

Messieurs

Vous ne vous douteriez pas qu'a un si grand eloignement de vous je sois pour ainsi dire devenu le compagnon de vos travaux. M. Dombey votre camarade et ami dont la santé delabrée exige la retraite et le repos vient de me remettre les manuscrits et son herbier pour les publier. Nous intitulerons l'ouvrage sous votre bon plaisir Flore du Perou et du Chili, ou pour mieux dire *Flora* (car il sera en latin), et je n'en serai que l'Editeur chose qui me flatte infiniment. Les plantes deja connues seront seulement rappellées. Toutes les plantes nouvelles seront decrites completement et gravées. C'est une besogne de longue haleine. Car en supposant mille plantes nouvelles, ce que j'ignore encore, il faudroit plus de 10 années pour les faire graver, parcequ'il n'est pas possible d'en faire graver cent par an. Au reste les gravures seront du même format que l'ouvrage que je vous envoie.

J'espere, Messieurs, que vous voudrez bien concourir pour donner a cet ouvrage toute l'exactitude possible. Si vous daignez nous faire part de vos decouvertures futures pendant le cours de l'entreprise, cette flore sera d'autant plus complete. Combien n'y auroit-il pas encore a ajouter pour que cette flore devint complete! Palmiers, mousses, lichens, champignons, plantes marines, plantes grasses. De toute maniere je ne laisserai point ignorer au public combien vous avez eu de part a l'ouvrage que je lui presenterai.

Je vous prie, Messieurs, d'accepter un exemplaire de mon prope ouvrage. Comme le volume en est un peu gros, je n'aî pu vous en expedier pour cette fois que les deux premiers Cahiers. Je vous enverrai la suite a de prochaines occasions. Vous y reconnoitrez deja quelques unes de vos plantes. Il y a un genre que j'ai cru devoir offrir a M. Dombey comme tres saillant et tres beau. Ne voulant point souscrire a la convention que vous aviez faite avec M. Dombey de ne point vous offrir mutuellement de genres, vous voudrez bien permettre que j'en nomme quelqu'un parmi vos plantes. Je vous prie meme de choisir la plante que vous desiderez qui porte le nom de chacun de vous. Toute preference vous est due sur votre prope bien.

M. Dombey n'a rapporté presqu'aucun fruit du Perou et cela nous mettra souvent en defaut pour les descriptions et figures. Si vous pouvez y suppleer, cela nous obligeroit infiniment. Pour le Chili, il me paroit bien complet en fruits.

J'ay l'honneur avec la consideration la plus distinguée Messieurs.

Votre trés humble et trés
obeissant serviteur
Lheritier
Conseiller á la Cour des Aides
rue Quincampoix
a Paris.

Si vous avez bessoin de livres ou de quelqu'autre chose dans ce pays cy je suis entierement a vos ordres.

M. M. Pavon et Ruiz Professeurs de Botanique.

2.ª Carta de Mr. L'Heritier.

Paris ce 20 avril 1786.

Messieurs:

Je vous expedie avec la presente letre le troisieme Cayer de mon ouvrage. Vous y trouverez quelque Plantes du Perou qui sont fruit de vos travaux communs avec Mr. Dombey. Puissiez vous Messieurs etre satisfaitte de la maniere dont elles sont executées entout pour la description que pour le Graveur.

Quant aux Plantes de L'herbier qui m'a remis Mr. Dombey Lorqu'il y en aura un certain nombre de gravées nous avons proposers D oubrir unne souscription, me permettrez vous alors Messieurs de vous adresser des prospetives pour les repandre. Car ce devoit etre, au Perou, meme qu'ils se trouvat le plus grand nombre de souscristeurs pour la fleur du Perou et du Chili. Si vous pouvez d'ailleur nous fournir quelques materiaux pour cet ouvrage, vous pouvais compter sur notre reconnaissance, ainsi sur celles de nos Lecteurs.

Je vous ay donné un plus grands details sur L'oubrage de Mr. Dombey dans ma letre du 9 de Mars dernier alaquelles je me refere antierement.

J'ay l'honneur avec la consideration distinguée

Messieurs.

Votre trés humble
et trés obeissant serviteur
L heritier
Conseiller a la Cour des Aides
rue Quincampoix a Paris.

Observación. La primera carta de L'Heritier es auténtica, tiene su firma y está escrita en un papel azulado, en el cual se distingue al trasluz una flor de lis que lleva en la parte surior una corona. La segunda carta, ó fué dictada por L'Heritier á un escribiente, ó es copia hecha en España de la original del botánico francés, pues son diferentes el papel y su marca, la letra, la ortografía y falta el rasgo de la firma á continuación del nombre. Pero el texto de ella está completamente de acuerdo con el de la primera.

Respuesta de D. Hipólito Ruíz á Mr. L'Heritier según borrador escrito de su mano.

M.[d] y Noviembre 5 de 1798.

A Mr. L'heritier:

Con el motivo de habernos entregado el S.[or] D.[n] Eugenio Izquierdo de parte de Vm. pocos dias hace los dos primeros Fasciculos de sus Nuevas plantas, que desde Paris nos dirigia al Perú con una carta fha. a 9 de Marzo de 1786, le escribimos esta para darle las gracias por su apreciable fineza y ofrecernos con la mas sincera voluntad á su obediencia.

Hemos sentido que la carta de Vm. haya estado detenida tantos años y que no la huviesemos recibido en el Perú á tiempo oportuno de poder satisfacer de algun modo los deseos y fines que Vm. se proponia en ella; pero respecto á que ahora estamos mas cerca de Vm. puede contar con nro. buen afecto y deseos de complacerle.

Entre las varias plantas que de nros. descubrimientos hemos hallado en dichos dos Fasciculos se encuentra primorosam.[te] dibuxada y grabada la *Dombeja lappacea* cuyo nre. hemos conservado por razones poderosas que nos han obligado á ello. Asi las Estampas de estos Fasciculos como las de los tres siguientes y las del *Sertum Anglicum* nos han parecido no solo primorosas y magnificas, sino dignas del universal aprecio á que igualmente es acrehedor el Autor de tan sumptuosa obra.

A nro. arribo del Perú á España tuvimos la noticia de que los Manuscritos y Herbarios de nro. amable compañero Mr. Dombey havian pasado á manos de Vm. para su publicacion, sin embargo de lo pactado con Mr. Dombey para no pasar á ello hasta nro. regreso. Despues se han trastornado y desquiciado de tal modo las cosas que quedó interrumpida la correspondencia de Dombey con nosotros hasta su muerte; por lo que emprendimos solos la publicacion de nra. *Flora Peruviana* y *Chilense*, cuyo Prodromo ó *Nova plantarum Genera Peruvianarum et Chilensium* imprimimos en 1793. Despues varios inopinados incidentes nos la dilataron hasta el año 1797 que á fuerza de recursos conseguimos del Ministerio la continuacion de ella, y tal vez contribuirian no poco los elogios que ese Directorio hizo al tiempo de dar las gracias por los exemplares que nro. Gefe le remitió del Prodromo. En ocho meses dimos concluido el primer Tomo de la Flora, que comprehende 266 descripciones de otros tantos vegetales de las quatro primeras clases de Linneo y 219 figuras en 106 Estampas grabadas á una linea por diferentes Profesores con el posible cuidado y esmero. Este tomo se remitió ya al Directorio, donde es muy regular que Vm. le haya visto.

Actualmente estamos iluminando cierto numero de Exemplares de este primer Tomo y el iluminador va sacando las Estampas con aquella naturalidad y hermosura que podemos desear; es verdad que los Diseños originales vinieron del Perú con sus propios colores; por lo que esperamos sea apreciada la Obra de los Botánicos, Naturalistas, curiosos y Aficionados á las Ciencias.

Para el 2.º Tomo de la Flora tenemos grabadas ya 60 laminas y continuamos con los trabajos diarios á fin de darle al público (si no ocurren embarazos que lo impidan y que son de temer en las circunstancias actuales) á principios del prox.º año.

En la semana prox.ª pasada concluimos la impresion del primer Tomo del *Systema vegetabilium Floræ* Peruvianæ et Chilensis; cuya primera parte contiene las diferencias de las Especies de los Generos comprehendidos en el Prodromo con los caracteres diferenciales de estos; el habito de aquellos que constan de dos ó mas Especies. Anunciamos tambien si las plantas son arboles, arbustos, matas ó yerbas; los paises y terrenos donde se crian; el tiempo en que florecen; los nombres vernaculos y las virtudes y usos que hacen de ellas los Americanos con varias notas y observaciones. En la 2.ª parte (la qual en este primer tomo no pasa de la quarta Clase, pero que seguirá hasta la última) van las Especies nuevas de los Generos conocidos y algunos Generos nuevos con sus Especies, observando el mismo metodo que en la primera.

Este systema le hemos dispuesto con el fin de que aquellos que no puedan costear la obra grande, logren con equidad un completo Compendio de la Materia que en ella se trata.

Es muy regular que los 2 mil Dibuxos originales que tenemos de plantas nuevas grandiosas y particularisimas se repartan en siete tomos mas, por el mismo orden que se ha publicado el primero siguiendo en todo el Sistema sexual de Linneo como el mas universalm.te adoptado.

En las 37 Estampas del Prodromo se colocaron 149 fructificaciones de otros tantos Generos nuevos, entre los cuales van unos 13 ya conocidos, pero que hemos procurado reformar sus caracteres genericos. Esta obra la reimprimió en Roma el Abate D.n Gaspar Xuarez en 4.º mayor. Es muy regular que Vm. la haya conseguido de una ú otra parte, y quando no deseamos que Vm. nos comunique los medios de dirigir á sus manos un exemplar y entre tanto nos repetimos á su obediencia.

NOTA.—Todas las cartas y documentos que se trascriben en este artículo se conservan en el Archivo de la *Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid*, á la cual pertenecen, por adquisición reciente.

NOTA

SOBRE LA APARICIÓN DE LA ESPECIE ASIÁTICA **Syrrhaptes Paradoxus, Licht.,** EN LA ALBUFERA DE VALENCIA, EN JUNIO DE 1888.

(Publicada por la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid.)

Hace algún tiempo que la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales dió publicidad á una comunicación del Comité Internacional ornitológico de Viena, en la cual se llamaba la atención de los naturalistas acerca de la probable aparición en Europa, á fines de la pasada primavera ó principios del verano actual, de la preciosa ave asiática denominada *Syrrhaptes paradoxus*. Mis aficiones á los estudios ornitológicos, sobre todo en lo que tienen relación con la fauna española, hicieron que leyera con interés el aviso del Comité, y más aún por tratarse de una especie desconocida hasta ahora en España, cuyas apariciones en algunas naciones del centro y del mediodía de Europa eran consideradas como raras y accidentales, y de la cual solo había yo podido ver algún ejemplar en las colecciones de la Academia Imperial de Ciencias de San Petersburgo.

Estimulado por estas circunstancias, procuré tomar cuantas precauciones pudieran conducirme á observar el hecho anunciado por el Comité de Viena; habiendo tenido la suerte de comprobarlo el día 10 de Junio último, gracias á la actividad y celo de D. José María Benedito, Ayudante del Gabinete de Historia Natural, cuya dirección me está confiada en esta Universidad.

Dicho funcionario recibió, procedente de la Albufera, un ejemplar, que por su forma, color y otros caracteres, recordaba la *perdiz cenicienta*, las *gangas*, y algunas *tetraónidas*, circunstancias que llamaron su atención; así fué que inmediatamente me dió cuenta de ellas y puso á mi disposición el ejemplar;

siendo grande mi satisfacción al reconocer en él un macho adulto de la especie á que se refiere esta *Nota*.

No quedándome duda alguna acerca de la determinación de la especie, procedí á hacer la descripción siguiente, conservando como comprobantes la fotografía y dibujos necesarios:

Syrrhaptes paradoxus. Licht. —Macho adulto.

(Familia Pteroclidæ.—Subfamilia Syrrhaptinæ.)

Pico pequeño, convexo, con la mandíbula superior encorvada y algo más larga que la inferior. Aberturas nasales ocultas completamente por plumitas finas que nacen en la membrana que cubre á aquellas.

Alas largas, estrechas y puntiagudas: la primera rémige es muy larga, y su parte terminal tiene barbillas flojas que disminuyen gradualmente en tamaño y número hasta que solo queda de dicha remera el raquis filiforme.

Cola cónica, de diez y seis timoneras agudas y estrechas: el par central se prolonga y modifica de un modo análogo á la primera rémige, excediendo en tamaño á las restantes $0^{m},112$. Cobertoras inferiores de la cola agudas y casi tan largas como las timoneras laterales.

Tarsos y dedos gruesos, cortos y cubiertos de plumas algodonosas hasta las uñas. Tres dedos: el medio es bastante mayor que los laterales: éstos se hallan reunidos á aquél por membranas: pulgar nulo. Parte plantar de los dedos, gruesa, con numerosos tubérculos callosos redondos. Uñas gruesas, lomas y encorvadas.

Coloración general isabela, con tonos agrisados en la careza y pecho, y rojizos en la cara, espalda y cobertoras de las ba s y de la cola: el abdomen y las subcaudales blanquecino-ocráceos.

La frente, cara, cejas, garganta y lados del cuello tienen un color rojizo-ocráceo muy vivo, que se interrumpe en las partes superior y posterior de la cabeza por un casquete agrisado, que desciende hasta el principio de la espalda, y á los lados del cuello por una banda, también agrisada, que baja desde el oido hasta terminar en el pecho.

Sobre el color leonado de las escapulares, dorsales, cobertoras de las alas y ventrales, se destacan fajas negras, más ó menos estrechas, que producen ondulaciones transversas paralelas, de este último color la mayor parte, y algunas negro-rojizas. Esta disposición es aun más marcada en la región ventral, donde delante de las piernas se extiende de un lado á otro una faja ancha formada por bandas negras que alternan con el color general leonado claro: dicha faja sube por los costados hasta perderse debajo de las alas, y queda limitada anteriormente por el color leonado del vientre y posteriormente por el blanquecino-ocráceo de la región anal.

Desde el encuentro de un ala hasta el de la otra corre por debajo del pecho una banda estrecha, formada por ondulaciones finas negras, la cual separa perfectamente el pecho del abdomen, y, continuándose superiormente, se confunde con las bandas onduladas negras que sirven de límite entre la espalda y el cuello.

En las cobertoras de la cola y en algunas de las alas, así como en las plumas que ocupan las regiones lumbar y sacra, las fajas negras, que alternan con el color general, son irregulares, quedando reducidas á manchas sueltas.

Remeras primarias grises, excepto las barbas externas de la primera y el raquis de todas ellas, que son negros.

Timoneras grises, con grandes manchas amarillo-ocráceas, que forman una especie de festón en las barbas internas y que se corre algo en las externas hacia el extremo de las plumas.

Pico y uñas negros. Iris pardo negruzco.

Longitud total del ejemplar, desde la punta del pico hasta el extremo del par central de las timoneras, $0,^{m}403$.

Longitud del ala, desde la articulación de la mano hasta el extremo de la primera rémige, $0,^{m}265$.

El ejemplar descrito formaba parte de un pequeño bando de 5 ó 6 individuos, que se presentó en la mañana del 9 de Junio en la playa arenosa que se extiende entre los dos desagües de la Albufera en el mar, denominados Perelló y Perellonet, y que fué cazado aquel mismo día. El macho adulto de que me ocupo llegó todavía vivo á manos del Sr. Benedito, aunque con el cúbito y el rádio del ala izquierda fracturados. Su estómago contenía semillas de crucíferas espontáneas y brotes tiernos de plantas herbáceas, mejor dicho, puntas de hojas de gramíneas y cyperáceas, que crecen en la Dehesa de la Albufera y en los terrenos que rodean el lago.

Los demás ejemplares fueron destrozados por los perros y la munición, al decir de los cazadores, afirmando éstos que la carne era exquisita, y que una hembra contenía gran número de huevos.

Como las apariciones en Europa de la especie en cuestión parece que sean debidas á grandes trastornos atmosféricos en las estepas del Asia central, he tratado de investigar algunos datos que pudieran servir de guía para la explicación del caso presente. Por los periódicos y revistas que suelo recibir de Rusia, atención que debo á la galantería de algunos amigos que dejé en aquel país, y en particular al Excmo. Sr. D. Pablo Gloukhovskoy, Chambelán del Emperador, ha llegado á mi conocimiento: 1.°, que ya la primavera última ha sido muy lluviosa en la extensa región de Bukharia; 2.°, que en los primeros días de Junio las tempestades y las grandes lluvias eran persistentes en el Cáucaso; y 3.°, que en los mismos días la temperatura media era inferior á la normal en la Siberia y en la Rusia central.

Estas circunstancias permiten, hasta cierto punto, explicar la presencia de la especie en nuestra Península; pues, tratándose de un ave organizada para la vida terrestre, la persistencia de las lluvias en las estepas del Asia había de colocarla en condiciones desfavorables de existencia; y si á esto se añade que había de verse amenazada por la influencia de la baja temperatura de las regiones árticas, é imposibilitada de correrse al Oeste por igual motivo, y también por las tempestades hacia el Cáucaso, no es extraño que se viera obligada á emigrar al S. O., á donde no alcanzaran las perturbaciones climatológicas de su patria.

Valencia 8 de Julio de 1888.

Dr. J. Arévalo y Baca.

VARIEDADES.

Universidad Georgia Augusta de Gottingen.—Tema para el premio de Filosofía de Benecke.—La Facultad de Filosofía de la Universidad de Gottingen propone para el año 1891 el siguiente tema:

Se ha ido poniendo de relieve cada vez más en los últimos diez años la importancia fundamental de la Ley de Entropía para todos los fenómenos físicos y químicos relacionados con producción ó absorción de calor. En particular los trabajos sobre la Ley de Energía, promovidos por el premio de Benecke para 1884, han evidenciado que dicha ley necesita de la Ley de Entropia como de una adición esencial.

Han progresado igualmente mucho en los tiempos modernos los trabajos cuyo objeto es el establecimiento de la Ley de Entropía por medio de los principios generales de la Mecánica. Es, pues, de gran interés una exposición de todas las cuestiones relacionadas con la Ley de Entropía.

Tal exposición comprenderá el desarrollo de la prueba empírica de la Ley de Entropía, adicionada de una breve reproducción y apreciación de los trabajos de Carnot: en ella se enumerarán las investigaciones sobre la relación de la Ley de Entropía con los principios generales de la Mecánica, no solo histórica sino también críticamente considerados; debiendo contener, además, una revisión de todas las aplicaciones encontradas hasta hoy de la Ley de Entropía á los procesos físicos y químicos.

Los trabajos optando al premio se dirigirán hasta el día 31 de Agosto de 1890, escritos en alemán, latín, francés ó inglés, y acompañados de una carta cerrada con sello que contenga el nombre y señas del autor, é igual lema que el escrito, á la Facultad de Filosofía de Gottingen.

Se dará conocimiento del resultado del certamen en el día 11 de Marzo de 1891, aniversario del fundador, en sesión pública de la Facultad de Filosofía.

El primer premio es de 1700 marcos (8500 rs.); y el segundo de 680 marcos (3400 rs.)

Los trabajos premiados quedan propiedad del autor. Se acompañarán los trabajos de las señas á donde se hayan de enviar, si no se juzgasen dignos de premio.

Doble Trasportador y Círculo Logarítmico.—El Sr. Ruiz Amado, Inspector general del Cuerpo de Ingenieros de Montes, y persona ya de antiguo ventajosamente conocida por sus trabajos y publicaciones científicas, ha inventado recientemente dos ingeniosos aparatos, que denomina con los nombres expresos, destinados á facilitar en gran manera la construcción exacta y rápida de los planos acotados ó con curvas de nivel, y la resolución de las fórmulas topográficas. A estos aparatos, de muy módico precio, construídos en Barcelona en la fábrica de Instrumentos Científicos de precisión de la Señora Viuda de D. José Rosell, acompaña una detallada instrucción descriptiva, compuesta por el mismo Sr. Amado, suficiente para penetrarse bien de su objeto, apreciar debidamente su importancia, y aprender en breve tiempo y sin esfuerzo mental á manejarlos y utilizarlos. El *índice de la instrucción* dice, en prueba de ello, como sigue:

OBJETO.

Diferencia esencial entre el *procedimiento taquimétrico* y los ordinarios topográficos: condiciones recomendables del primero.

Cuándo se deben determinar las tres coordenadas ortogonales de todos los puntos característicos del terreno, y cuándo sólo las de las estaciones, fijando con el *trasportador* los detalles.

Fórmula para determinar las distancias horizontales.

Id. íd. calcular las diferencias de nivel.

Id. íd. íd. las abscisas y ordenadas.

Id. íd. íd. los puntos de cruce de las curvas horizontales sobre el plano.

Fórmula para calcular la superficie de un polígono, determinado por radiación.

Fórmula para calcular la superficie de un polígono en función de las coordenadas de sus vértices.

Ventajas del CÍRCULO LOGARÍTMICO SOBRE LA REGLA.

SEGUNDO OBJETO propuesto al combinar los dos *trasportadores centesimal y sexagesimal.*

TERCER OBJETO al incluir separadamente con el aparato los *dos trasportadores*, *la regla graduada, y las series de números,* para conseguir 10 escalas diferentes con aquélla.

MEDIOS DE CONSEGUIR LOS OBJETOS PROPUESTOS.

DESCRIPCIÓN DEL CÍRCULO LOGARÍTMICO.

Observaciones generales.

USOS DEL CÍRCULO LOGARÍTMICO.

Conversión de los ángulos de la graduación sexagesimal á la centesimal y al contrario.

Determinación de los logaritmos numéricos de los números, senos cuadrados, senos y cotangentes.

Resolución de las fórmulas. Observación general.
Resolución de la fórmula para determinar las distancias horizontales.
Id. íd. íd. íd. calcular las cotas de nivel.
Id. íd. íd. íd. determinar las abscisas y ordenadas.
Id. íd. íd. íd. encontrar los puntos de cruce de las curvas horizontales.
Resolución de la fórmula para calcular la superficie de un polígono determinado por radiación.
Resolución de la fórmula para calcular la de otro en que se conocen las coordenadas de sus vértices á un origen común.
Multiplicaciones y divisiones.
DOBLE TRASPORTADOR.
Descripción sumaria del mismo, de la regla graduada, y de las series de números que se acompañan para conseguir 10 escalas diferentes.
Usos del doble trasportador.
EJERCICIOS CON EL CÍRCULO LOGARÍTMICO.
Observación general.
Comprobaciones y correcciones del Círculo.
EJERCICIO 1.º Conversión de los ángulos de la graduación sexagesimal á la centesimal y al contrario.
EJERCICIO 2.º Determinación de los logaritmos de los números, senos y cotangentes.
EJERCICIO 3.º Multiplicaciones y divisiones de los números.
ID. 4.º Determinación de las distancias horizontales.
ID. 5.º Cálculo de las diferencias de nivel.
ID. 6.º Cálculo de las abscisas y ordenadas.
ID. 7.º Determinación de los puntos de cruce de las curvas horizontales.
EJERCICIO 8.º Cálculo de la superficie de un polígono determinado por radiación.
EJERCICIO 9.º Cálculo de la superficie de un polígono cuando se conocen las abscisas y ordenadas de sus vértices á un orígen común.
TABLA DE DESCUENTOS Ó DIFERENCIAS para determinar rápida y exactamente las distancias horizontales: explicación.
Tabla centesimal.
Id. sexagesimal.
Explicación de la lámina.
Conclusión.
Lámina del Círculo y trasportador.

INDICE

DE LAS MATERIAS CONTENIDAS EN ESTE NÚMERO.

CIENCIAS EXACTAS.

Estudios sobre electro-estática y electro-dinámica (*Continuación*)......... 317
Lanz y Betancourt.. 334

CIENCIAS NATURALES.

Algunas noticias sobre la expedición cientifica hecha al Perú por orden del Rey de España Carlos III.. 352
Nota sobre la aparición de la especie asiática *Syrrhaptes Paradoxus*, *Licht.*, en la Albufera de Valencia, en Junio de 1888........................ 373

VARIEDADES.

Universidad Georgia Augusta de Gottingen.—Tema para el premiode Filosofía de Benecke.. 377
Doble Trasportador y Círculo Logarítmico.................................... 378

Se suscribe en la portería de la Academia de Ciencias, plaza de la Villa, núm. 2, piso principal.

Cada tomo de la Revista constará de nueve números.

REVISTA

DE LOS

PROGRESOS DE LAS CIENCIAS

EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES.

TOMO 22.—N.° 7.°

No more published

MADRID.

IMPRENTA DE D. LUIS AGUADO.—PONTEJOS, 8.

1889.

CIENCIAS EXACTAS.

ESTUDIOS SOBRE ELECTRO-ESTÁTICA Y ELECTRO-DINÁMICA.

(Continuación.)

2.º *Equilibrio de cuerpos conductores con masas eléctricas ó sin ellas sobre su superficie.*—Este problema es en extremo difícil, al menos bajo el punto de vista analítico, aun para los casos más sencillos al parecer: por ejemplo, para el de dos esferas, las soluciones son grandemente complicadas y en él se han ejercitado, no siempre con gran éxito bajo el punto de vista de la sencillez, los más eminentes matemáticos de Francia, Inglaterra y Alemania.

Y con decir esto, queda dicho que sólo podemos dar aquí una idea muy elemental de esta clase de cuestiones.

Procuremos, sin embargo, fijar claramente las condiciones del problema é indicar cómo puede plantearse en términos precisos: las dificultades que no puedan vencerse no serán las del problema mecánico sino las del problema analítico.

Supongamos:

1.º Una serie de cuerpos aislados y en estado neutro, A, A', A''...

2.º Otra serie de cuerpos también aislados, B, B', B''... y con cargas eléctricas positivas ó negativas, M, M', M''...

3.º Una tercera serie de cuerpos, C, C', C''... con potenciales determinadas y fijas, V, V', V''... varias de las cuales podrán ser *cero*.

4.º Y una serie de masas eléctricas fijas, N, N', N''...

Se trata de determinar el estado de equilibrio del conjunto de estos varios sistemas, actuando unos sobre otros en el mismo campo eléctrico.

Es decir, que es preciso determinar la distribución de la electricidad en todos ellos.

Conocida esta, claro es que la determinación de las potenciales en cualquier punto, la de las líneas de fuerza, y la de las superficies de nivel, será cosa fácil, aplicando el problema anterior; porque podemos suponer, para este fin, fijas y conocidas todas las masas eléctricas ya determinadas.

Pero la primera parte del problema es enormemente difícil, bajo el punto de vista analítico: porque la distribución de la electricidad depende de la distribución de las potenciales, y esta, á su vez, es una consecuencia de aquella. Son, por decirlo así, incógnitas que se mezclan y reaccionan unas sobre otras.

Mrs. Mascart y Joubert, en su excelente obra, dicen, que el problema consiste en determinar una función V de x, y, z, que es la potencial en cualquier punto, que cumpla con las siguientes condiciones:

1.ª *Que sea nula* en el infinito.

2.ª *Que* para los conductores de la serie C, C′, C″... dé las potenciales fijas V, V′, V″..., así en la superficie como en el interior.

3.ª Que para los conductores de la serie B, B′, B″... dé las cargas conocidas M, M′, M″..., para lo cual se determinará la densidad en cada punto por la fórmula conocida,

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi}\frac{dV}{dn}:$$

siendo n la normal, y verificándose las ecuaciones,

$$M = \int \sigma dS = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{dV}{dn} dS...$$

en las que S representa el área de cada conductor B, B′, B″...

4.ª Y, ante todo, que V satisfaga á la ecuación en diferenciales parciales,

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 0, \quad \text{ó} \quad \Delta V = 0;$$

para todo el dieléctrico y para el interior de los conductores.

Dichas condiciones son necesarias y además son suficientes, porque está demostrado que para el equilibrio eléctrico no hay más que una solución. Más aún: si se conociera la integral más general de $\Delta V = 0$, todo quedaba reducido á determinar sus funciones y constantes arbitrarias de modo que V satisficiese á las condiciones restantes, que son, por decirlo así, las *condiciones de los límites;* pero el problema de cálculo integral en que el problema eléctrico se funda es extraordinariamente difícil.

Además, á *primera vista* no parece que la utilidad de integrar $\Delta V = 0$ sea grande; porque es lo cierto que, sea cual fuere la distribución eléctrica sobre las superficies de A... B... C..., dichas masas y dicha distribución satisfarán siempre á la ecuación diferencial $\Delta V = 0$. En efecto, hemos demostrado que todo sistema de masas eléctricas satisface á $\Delta V = 0$ para puntos exteriores á las mismas. La dificultad, la verdadera dificultad, reside pues en las condiciones restantes.

Y, sin embargo, en principio, el problema parece sencillo y aun se reduce á la resolución de ecuaciones de primer grado.

Supongamos para fijar las ideas dos cuerpos aislados, A, A', en presencia uno de otro y conteniendo las cargas eléctricas M, M'. Lo que digamos de este caso pudiera generalizarse sin dificultad para el caso general.

Dividamos (*fig.* 43) cada cuerpo, por dos sistemas de líneas,

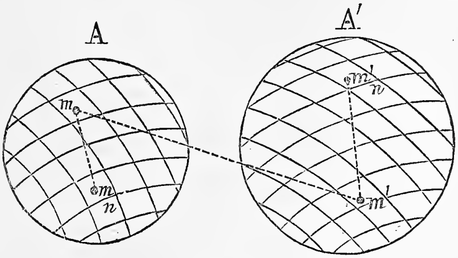


Fig. 43.

en cuadriláteros infinitamente pequeños, ó si se quiere suficientemente pequeños: por ejemplo, cada superficie, en *1000* cuadriláteros; y propongámonos determinar en cada uno de ellos una masa eléctrica

$$m,\ m_1,\ m_2 \ldots\quad m_{999} \text{ para A,}$$
$$m',\ m'_1,\ m'_2 \ldots\quad m'_{999} \text{ para A}',$$

de tal modo que las potenciales en todos los puntos de la primera superficie A sean iguales á una constante desconocida V_0; y que en todos los puntos de la segunda superficie A′ sean iguales asimismo á otra constante, desconocida también, V'_0.

Llamando en general $r_{m,m'}$ la distancia entre dos masas m, m' de ambos cuerpos, y r_{m,m_n} la de los puntos ó masas m, m_n del primero, tendremos que la primera condición, es decir, la constancia de la potencial en toda primera superficie se expresará por la ecuación de primer grado:

$$\frac{m'}{r_{m,m'}} + \frac{m'_1}{r_{m,m'_1}} + \frac{m'_2}{r_{m,m'_2}} + \ldots$$

$$+ \frac{m_1}{r_{m,m_1}} + \frac{m_2}{r_{m,m_2}} + \frac{m_3}{r_{m,m_3}} + \ldots = V_0;$$

ó, como las distancias r son conocidas, representando los coeficientes por A_0, A_1, A_2 ...

$$A_0 m' + A_1 m'_1 + A_2 m'_2 + \ldots + B_1 m_1 + B_2 m_2 + B_3 m_3 + \ldots = V_0. \quad (1)$$

Esta ecuación es, como hemos dicho, de primer grado respecto á las incógnitas m.

Lo mismo tendremos para los demás puntos de (A); y otro tanto puede repetirse para todos los cuadriláteros del cuerpo (A′).

El número de ecuaciones (1) para los puntos de (A) será 1000: tantas como puntos.

El número de ecuaciones análogas para los puntos de (A′) será asimismo 1000.

Pero además tenemos, puesto que las cargas en A y A′ son dadas,

$$m + m_1 + m_2 + \ldots = M,$$

$$m' + m'_1 + m'_2 + \ldots = M'.$$

Es decir, que en conjunto tenemos 2002 ecuaciones con 2002 incógnitas, á saber: m, m_1, m_2... m', m'_1 m'_2... tantas como cuadriláteros, y además las dos potenciales V_0 y V'_0 que también son desconocidas.

El problema, bajo el punto de vista analítico, es perfectamente determinado, y aun se comprende que, á no ser tan grande el número de ecuaciones, podría emplearse como método práctico de resolución.

Mas aún: el valor de una masa cualquiera, m, puede representarse en forma de cociente de dos determinantes de las cantidades conocidas

$$A_0, A_1 \ldots B_1, B_2 \ldots A'_0, A'_1 \ldots B'_1, B'_2 \ldots M, M',$$

que son todas, menos las dos últimas, cantidades de la forma $\frac{1}{r}$; pero esta clase de cocientes, cuando el número de incógnitas es infinito, se presenta bajo formas indeterminadas.

Sería preciso, para obtener algún resultado útil, estudiar préviamente el límite de la relación de dos determinantes de *matrices* infinitas, problema que no tenemos noticia que se haya resuelto todavía.

Entiéndase, por lo demás, que la ley de ambas matrices es perfectamente conocida, puesto que sus términos son las relaciones inversas de r, variando por la ley de continuidad.

Como estos problemas son incidentales para nuestro objeto, nos limitaremos á las indicaciones sumarias que preceden, sin profundizar la cuestión propuesta, que, según parece, ha de ofrecer una dificultad extraordinaria.

Sin embargo, ya que no para resolver el problema que nos ocupa, para demostrar ciertos teoremas, puede sacarse partido de las ideas que preceden.

Por ejemplo: se demuestran inmediatamente estos dos teoremas.

1.^{er} Teorema. Dada una masa eléctrica, M, sobre un cuerpo aislado y conductor, A, el problema del equilibrio eléctrico es *único*: es decir, sólo de una manera puede distribuirse dicha masa, de suerte que el sistema esté en equilibrio.

2.^{o} Teorema. Dado un sistema cualquiera de cuerpos en las varias condiciones indicadas, sólo hay una solución de equilibrio y siempre hay una.

Esto se prueba inmediatamente, puesto que se trata de ecuaciones de primer grado, que sólo tienen un sistema de valores para las incógnitas.

Prescindimos, por lo demás, para no extendernos demasiado, de las soluciones infinitas y del problema de *las puntas.*

Todavía, para desvanecer una última duda, haremos dos observaciones.

1.ª *Observación.* Al determinar la potencial en el punto m, por ejemplo, hemos prescindido de la influencia de la propia masa m sobre sí misma: el término correspondiente parece ser infinito, porque la r del denominador es *nula,* con lo cual las ecuaciones toman una forma inaceptable.

La dificultad es de la misma clase que la que se presenta en los teoremas de Laplace y Poisson.

Hemos supuesto que en cada cuadrilátero elemental toda la masa eléctrica estaba concentrada en un punto: hipótesis legítima mientras se trata de expresar la influencia de dos puntos colocados á distancia finita, pero que no es aceptable para el interior de cada cuadrilátero. En el estudio de este caso excepcional hay que restituir al éter su continuidad superficial.

Supongamos (*fig.* 44) que ABCD es el cuadrilátero elemental de que se trata y O el punto en él elegido para condensar

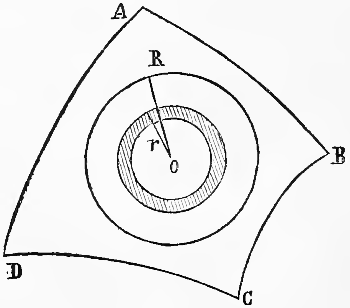


Fig. 44.

el éter. Trazando alrededor de O como centro un círculo de radio R, todos los puntos exteriores están comprendidos en el caso general, es decir, á distancias finitas de O y sólo tenemos que fijarnos en la potencial de dicho círculo.

Descomponiéndolo en coronas circulares, de radios r y $r+dr$, la potencial de una de estas coronas respecto á O será el producto de la densidad δ (que puede suponerse constante en la región considerada, y que, aun siendo desconocida, admitimos que es finita, porque excluimos casos singulares) por el área de la corona, dividido este producto por r.

Tendremos, pues, para su potencial respecto á O:

$$\frac{2\pi r \,.\, dr \,.\, \delta}{r} = 2\pi\delta dr:$$

é integrando entre 0 y R resultará

$$2\pi\delta R.$$

Pero, á medida que R tiende á cero, tiende á cero la expresión anterior: luego en el límite su influencia es nula en las ecuaciones generales establecidas anteriormente, y en todo caso sólo entrarán en ellas elementos finitos y lineales respecto á la densidad.

2.ª *Observación.* La ecuación (1) y sus análogas resuelven (al menos en principio) el problema propuesto, es decir: distribuir las masas M y M′ sobre A y A′ de modo que las potenciales sean constantes en cada una de ambas superficies.

Pero ¿quedarán de este modo satisfechas las demás condiciones del equilibrio eléctrico?

La contestación es, sin duda alguna, afirmativa.

1.º La potencial es evidentemente nula en el infinito, porque lo es la de masas finitas y situadas en el espacio finito, toda vez que resultan divididas por r, que es infinita.

2.º Las potenciales en ambas superficies son constantes, puesto que con esta condición hemos determinado las masas m... m'...

3.º Por último, las potenciales de dichas masas m... m'... satisfarán á la ecuacion diferencial $\Delta V = 0$ para el dialéctrico y en el interior de ambos cuerpos, toda vez que cualquier sistema de masas eléctricas cumple con esta indicación para puntos exteriores á ellas.

Pero queda un punto dudoso: ¿será constante la potencial en el interior de los dos cuerpos A y A′?

Desde luego se observa que, siendo constante la potencial en la superficie, debe serlo en el interior: si no lo fuese y encontrásemos un valor H mayor ó menor que V_0 (tomando por ejemplo el cuerpo A), para pasar de este valor H á V_0, la potencial, que no puede ser infinita en el interior (porque las masas y las distancias son finitas), tendría que pasar por un *máximo* ó por un *mínimo*; y esto es imposible, porque no hay ni máximo ni mínimo de potencial donde no hay masas eléctricas.

Las condiciones todas del equilibrio eléctrico quedan satisfechas resolviendo las ecuaciones (1) y determinando las masas eléctricas por medio de dichas ecuaciones.

Continuemos, pues, el estudio del problema general, aclarados ya los puntos precedentes. Aunque las ecuaciones (1) no sirven prácticamente para la solución del problema, pueden servir para presentar éste en forma distinta de aquella bajo la cual lo plantean por lo general los autores.

Todo está reducido á reemplazar las sumas por integrales, conservando por lo demás el mismo punto de vista, á saber: distribuir las masas M, M′ sobre los cuerpos A, A′ (*fig.* 45) de modo que la potencial sea constante en cada superficie.

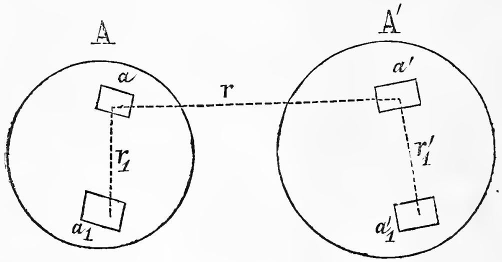


Fig. 45.

Sean: a y a_1 dos puntos de A;

a' y a'_1 otros dos puntos de A′;

r la distancia aa';

r_1 la distancia aa_1; y r'_1 la distancia $a'a'_1$;

ω el área del elemento en a, y δ la densidad desconocida del éter en dicho punto;

ω' el área del elemento a', y δ' la densidad en el mismo, desconocida también;

ω_1 el área en otro punto a_1 de A, y δ_1 la densidad correspondiente;

y por último ω'_1 y δ'_1 el área y la densidad en otro punto a'_1 del segundo cuerpo.

La potencial de todas las masas eléctricas $\omega'\delta'$ de A' en a será:

$$\int_{(A')} \frac{\omega'\delta'}{r}$$

cuya integral se extenderá á toda la superficie de A' según indica el subíndice (A').

Del mismo modo la potencial de todas las masas de A en el punto a vendrá dada por la integral

$$\int_{(A)} \frac{\omega_1\,\delta_1}{r_1},$$

en la cual el subíndice (A) expresa que se refiere la integración á toda la superficie A, incluyendo el mismo punto a, pues hemos visto que en el límite el elemento $\dfrac{\omega\,\delta}{r}$ es nulo.

Representando por V_0 la potencial desconocida, pero constante de la superficie A, la condición del equilibrio eléctrico en A estará dada por la ecuación,

$$\int_{(A')} \frac{\omega'\,\delta'}{r} + \int_{(A)} \frac{\omega_1\,\delta_1}{r_1} = V_0 \qquad (2).$$

Y análogamente el equilibrio eléctrico en la superficie A' estará expresada por esta otra ecuación,

$$\int_{(A)} \frac{\omega\,\delta}{r} + \int_{(A')} \frac{\omega'_1\,\delta'_1}{r'_1} = V'_0 \qquad (3).$$

Tomando un sistema cualquiera de coordenadas, por ejemplo, las coordenadas polares ρ, φ, ψ, y recordando que ρ es función de φ, ψ, y está dada para cada superficie por la ecuación de la misma, tendremos que:

1.° Cada elemento ω de A será una función, perfectamente conocida por los métodos del cálculo diferencial, de φ, ψ: así podremos escribir en general:

$$\omega = f(\varphi, \psi)\, d\varphi \,.\, d\psi,$$

siendo f, como acabamos de decir, una función conocida.

2.º Cada elemento superficial ω' de A′ será asimismo una función dada f' de φ', ψ'; representando φ', ψ' las coordenadas de cualquier punto de A′, y por lo tanto

$$\omega' = f'(\varphi', \psi')\, d\varphi',\, d\psi'.$$

3.º La distancia r entre dos puntos, uno de la superficie A y otro de la A′, será función conocida también de $\varphi, \psi, \varphi', \psi'$, de modo que llamando *función* r á esta distancia, podremos escribir:

$$r = r(\varphi, \psi, \varphi', \psi').$$

4.º Las distancias entre dos puntos de la superficie A, ó dos puntos de la A′, serán asímismo:

$$r_1 = r_1(\varphi, \psi, \psi_1, \varphi_1),$$
$$r'_1 = r'_1(\varphi', \psi', \varphi'_1, \psi'_1).$$

5.º Por último, las densidades δ y δ' son *funciones desconocidas*, de φ, ψ la primera; de φ', ψ' la segunda; y podremos escribirlas de este modo:

$$\delta = \delta(\varphi, \psi),$$
$$\delta' = \delta'(\varphi', \psi').$$

Las ecuaciones (2) y (3) se convertirán, expresando explícitamente las variables de que dependen las diversas cantidades en ellas contenidas, en estas dos:

$$\int_{(A')} \frac{f'(\varphi', \psi') \times \delta'(\varphi', \psi') \times d\varphi'\, d\psi'}{r(\varphi, \psi, \varphi', \psi')}$$
$$+ \int_{(A)} \frac{f(\varphi_1, \psi_1) \times \delta(\varphi_1, \psi_1)\, d\varphi_1\, d\psi_1}{r_1(\varphi, \psi, \varphi_1, \psi_1)} = V_0; \qquad (4),$$

$$\int_{(A)} \frac{f(\varphi, \psi) \times \delta(\varphi, \psi) \times d\varphi\, d\psi}{r(\varphi, \psi, \varphi', \psi')}$$
$$+ \int_{(A')} \frac{f'(\varphi'_1, \psi'_1) \times \delta'(\varphi'_1, \psi'_1)\, d\varphi'_1\, d\psi'_1}{r'_1(\varphi', \psi', \varphi'_1, \psi'_1)} = V'_0 \qquad (5).$$

Como f, f', r, r_1, r'_1 son funciones cuya forma es perfectamente conocida en valores de $\varphi, \psi, \varphi', \psi'$, porque las dos primeras son los coeficientes por los que hay que multiplicar $d\varphi\, d\psi$ y $d\varphi'\, d\psi'$ para hallar las diferenciales de las áreas en las superficies A y A'; y las tres últimas son las distancias de puntos cuyas coordenadas son $\psi, \varphi, \varphi', \psi'$; resulta que la forma de sus cocientes será conocida también, y podremos, para abreviar, escribir:

$$\frac{f'}{r} = \mathrm{P}; \quad \frac{f}{r_1} = \mathrm{Q}; \quad \frac{f}{r} = \mathrm{R}; \quad \frac{f'}{r'_1} = \mathrm{S}.$$

Las dos ecuaciones fundamentales se convertirán, pues, en las siguientes:

$$\left.\begin{aligned}\int_{(A')} \mathrm{P}(\varphi,\psi,\varphi',\psi')\,\delta'(\varphi',\psi')\,d\varphi'\,d\psi' + \int_{(A)} \mathrm{Q}(\varphi,\psi,\varphi_1,\psi_1)\,\delta(\varphi_1,\psi_1)\,d\varphi_1\,d\psi_1 = \mathrm{V}_0\\ \int_{(A)} \mathrm{R}(\varphi',\psi',\varphi,\psi)\,\delta(\varphi,\psi)\,d\varphi\,d\psi + \int_{(A')} \mathrm{S}(\varphi',\psi',\varphi'_1,\psi'_1)\,\delta'(\varphi'_1,\psi'_1)\,d\varphi'_1\,d\varphi'_1 = \mathrm{V}'_0\end{aligned}\right\}\ 6.$$

Consideremos la primera de estas ecuaciones: lo que de ella digamos podrá repetirse de la segunda.

Si conociésemos las formas de δ y δ', podríamos efectuar ambas integraciones dobles: las variables φ', ψ' desaparecerían de la primera integral doble: las φ_1, ψ_1 desaparecerían de la segunda, y el primer miembro se convertiría en una función de φ, ψ, es decir, de las coordenadas del punto *a (fig.* 45); pero como la potencial ha de ser constante para todos los puntos de A, claro es que φ y ψ deben desaparecer por sí mismas, convirtiéndose el primer miembro en una constante igual á V_0.

Es decir, que debemos determinar la forma de δ y δ', ó de las densidades eléctricas, de modo que satisfagan á las dos ecuaciones (6). Es algo análogo á la resolución de dos ecuaciones con dos incógnitas; sólo que las incógnitas son, en este caso, no cantidades constantes, sino *funciones*, y hay que hallar su forma analítica.

Además, estas funciones no solo han de ser tales que φ y ψ desaparezcan espontaneamente, por decirlo así, al efectuar las integraciones, sino que deben contener dos constantes indeterminadas que satisfagan á las dos nuevas ecuaciones:

$$\int_{(A)} \delta\omega = M; \qquad \int_{(A')} \delta'\omega' = M'. \qquad (7).$$

Estas últimas condiciones son evidentes, puesto que las sumas de todas las masas eléctricas, $\delta\omega$ en A, y $\delta'\omega'$ en A', deben ser M y M' respectivamente.

En resumen: las ecuaciones (6) sirven para determinar las formas de $\delta(\varphi, \psi)$, $\delta'(\varphi', \psi')$; y las ecuaciones (7) para determinar las dos constantes, toda vez que, conocidas las formas de δ y δ', pueden efectuarse las integraciones del sistema (7), y tendremos dos ecuaciones ordinarias con las dos constantes desconocidas ó incógnitas, que podrán despejarse por los métodos ordinarios.

El problema del equilibrio eléctrico queda, pues, reducido al problema de análisis indicado, y para comprender su naturaleza especial presentaremos un ejemplo sencillísimo.

Supongamos que se da la siguiente integral definida:

$$\int_0^1 (x + x')^2 \varphi(x)\, dx = 6;$$

en la cual ha de determinarse la forma de $\varphi(x)$ de modo que la ecuación quede satisfecha independientemente de x': es decir, que x' ha de desaparecer por sí, y el primer miembro ha de tomar el valor 6.

El problema es tan sencillo, que puede resolverse sin dificultad alguna por el método de las series, que en este caso se reducen á polinomios finitos.

$\varphi(x)$ es desconocida, pero supongamos que pudiera desarrollarse en serie convergente,

$$\varphi(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \dots;$$

y propongámonos determinar los coeficientes $a, b, c, d\dots$ de modo, que la ecuación dada quede satisfecha, es decir, que x' desaparezca por la integración:

Tendremos evidentemente:

$$\int_0^1 (x'^2 + 2x\,x' + x^2)(a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \dots)\,dx = 6;$$

y desarrollando:

$$\int^1 \left[\begin{array}{r|r|r|r|l} ax'^2 + 2ax' & x + a & x^2 + b & x^3 + c & x^4 + \dots \\ bx'^2 & + 2bx' & + 2cx' & + 2dx' & \\ & + cx'^2 & + dx'^2 & + ex'^2 & \end{array}\right] dx = 6;$$

é integrando ahora,

$$ax'^2 + \frac{1}{2}(2ax' + bx'^2) + \frac{1}{3}(a + 2bx' + cx'^2)$$
$$+ \frac{1}{4}(b + 2cx' + dx'^2) + \frac{1}{5}(c + 2dx' + ex'^2) + \dots = 6,$$

y ordenando respecto á x',

$$\left(\frac{1}{3}a + \frac{1}{4}b + \frac{1}{5}c + \frac{1}{6}e + \dots\right)$$
$$+ \left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{4}c + \frac{1}{5}d + \dots\right)2x'$$
$$+ \left(a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{3}c + \frac{1}{4}d + \dots\right)x'^2 = 6.$$

Para que esta ecuación quede satisfecha independientemente de x', ó lo que es igual para que x' desaparezca por la integración, debemos tener:

$$\frac{a}{3}+\frac{b}{4}+\frac{c}{5}+\frac{d}{6}+\ldots=6,$$

$$\frac{a}{2}+\frac{b}{3}+\frac{c}{4}+\frac{d}{5}+\ldots=0,$$

$$\frac{a}{1}+\frac{b}{2}+\frac{c}{3}+\frac{d}{4}+\ldots=0.$$

Las incógnitas a, b, c, d... son en número infinito, y todas, menos tres, son arbitrarias; por eso decimos, que en este caso sencillísimo la serie

$$\varphi(x)=a+bx+cx^2+\ldots$$

se convertía en un polinomio finito.

Haciendo $d=0$, $e=0$ etc., tendremos estas tres ecuaciones de condición entre las tres incógnitas a, b, c:

$$\frac{a}{3}+\frac{b}{4}+\frac{c}{5}=6,$$

$$\frac{a}{2}+\frac{b}{3}+\frac{c}{4}=0,$$

$$\frac{a}{1}+\frac{b}{2}+\frac{c}{3}=0.$$

De donde deduciremos:

$$a=180;\quad b=-1080;\quad c=1080.$$

Es decir, que dando á $\varphi(x)$ la forma

$$180-1080x+1080x^2,$$

la integración arrojará un resultado independiente de x' é igual á 6.

Lo mismo sería si el segundo miembro fuera una función conocida de x'; por ejemplo:

$$\mathrm{A}+\mathrm{B}x'+\mathrm{C}x'^2,$$

en cuyo caso las ecuaciones de condición serían:

$$\frac{a}{3} + \frac{b}{4} + \frac{c}{5} = A,$$

$$\frac{a}{2} + \frac{b}{3} + \frac{c}{4} = B,$$

$$\frac{a}{1} + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} = C.$$

Tal es la índole especial del problema analítico de que depende el equilibrio eléctrico de un sistema, según el método que dejamos expuesto.

La marcha pudiera ser la misma en el caso general: desarrollar P, Q, R, S en serie convergente, según potencias de φ, ψ, ó según funciones convenientes de estas variables; suponer δ y δ' desarrolladas en series convergentes (ó que se supone convergentes) de coeficientes desconocidos; efectuar las integraciones; y expresar la identidad de ambas ecuaciones para cualquier sistema de valores de φ y ψ. Por último, determinar los coeficientes de los desarrollos de δ y δ' en las ecuaciones que resultasen.

Pero esto que en cuatro líneas hemos dicho, tropieza con grandes dificultades, que proceden de este hecho: que en cada ecuación de condición entran los infinitos coeficientes de δ y δ'.

No sucede, pues, lo que en la mayor parte de los casos en que se aplica el método de los coeficientes indeterminados, á saber: que la primera condición contiene solo una incógnita; la segunda, dos; tres la tercera, etc., en cuyo caso se van determinando sucesivamente las incógnitas.

Aquí, en cada ecuación entran las infinitas incógnitas del problema, y aparece, por lo tanto, al expresar el valor de cada incógnita, un problema análogo á otro que ya indicamos, á saber: *relación de determinantes cuyas matrices contienen un número infinito de términos sujetos á cierta ley*.

Ó quizá este otro problema: resolución de ecuaciones formadas por series que de antemano se sabe, ó se supone, que han de ser convergentes, para los valores de las incógnitas; valores que, por otra parte, no son todavía conocidos.

Para completar estas ideas generales, daremos en un apéndice los métodos de Poisson para el equilibrio eléctrico de dos esferas; el estudio de la función de Green; las armónicas esféricas, por los procedimientos de los autores alemanes é ingleses; algunos teoremas generales; y, en fin, ciertas aclaraciones y ampliaciones á la teoría precedentemente expuesta, pues algo hay que decir respecto á la siguiente circunstancia: que los primeros miembros de las ecuaciones no han de ser independientes de φ, ψ para todos los valores de estas variables, sino para los comprendidos en ciertos límites.

Por el pronto, y á fin de llegar con toda la rapidez posible al objeto de este trabajo, nos limitaremos al estudio de un caso particular, sencillísimo, que es el único en que hemos de apoyarnos para la demostración directa de la fórmula de Ampère.

Caso particular del equilibrio de una esfera neutra en un campo uniforme. Supongamos un campo eléctrico uniforme; es decir, un campo tal, que en un punto cualquiera la fuerza eléctrica de las masas actuantes tenga un valor único F y una misma dirección: la fuerza eléctrica es, pues, constante en valor y en dirección para todo el campo eléctrico. No definimos las masas capaces de producir el campo eléctrico en cuestión, pero las suponemos tales, que no puedan ser modificadas sensiblemente por la presencia de las cargas eléctricas, que determinen en los cuerpos conductores sujetos á su influencia. No hay, pues, que ocuparse de las modificaciones que estas nuevas cargas introduzcan en aquellas masas fundamentales: el efecto no reobra sobre la causa y la modifica, y esto simplifica la cuestión. En el campo así definido colocamos una esfera en estado neutro, y el problema que hemos de resolver es este: determinar en cada punto de la esfera conductriz la densidad de la capa eléctrica, de modo que se halle en equilibrio bajo su propia acción y bajo la influencia de la fuerza F.

Sea O (*fig.* 46) la esfera conductriz en estado neutro y de radio R, y F la intensidad y dirección de la fuerza eléctrica del campo. Supongamos que, en el *estado natural ó neutro,* dos esferas eléctricas, una positiva y otra negativa, iguales en magnitud á la dada, coinciden con ésta.

Admitimos, pues, para más sencillez, la hipótesis antigua de los dos fluidos, que ya sabemos que coincide para el cálculo con la de un fluido, según explicamos al comenzar esta Memoria.

Supongamos ahora, que la esfera positiva desliza paralelamente á sí misma y á la fuerza F, una longitud OO′ suficientemente pequeña, cuyo valor determinaremos más adelante.

Establecido esto, puede demostrarse que, determinando convenientemente el valor OO′ del deslizamiento, el sistema

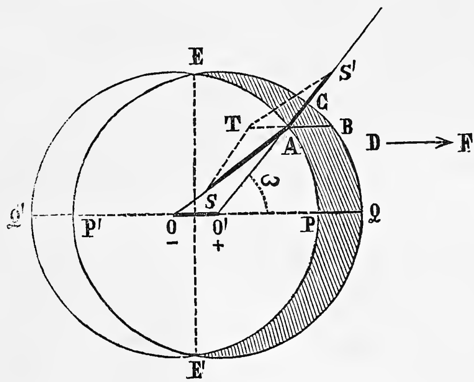


Fig. 46.

se hallará en equilibrio eléctrico bajo su propia influencia y la de las fuerzas F.

Por lo pronto, el espacio EP′E′P, es decir, el interior de la esfera conductriz, se hallará en estado neutro, puesto que en él se superponen las dos esferas positiva y negativa O, O′.

Tenemos, pues, una esfera conductriz con una capa eléctrica en su superficie: la lúnula rayada de la derecha, de electricidad positiva; y la lúnula de la izquierda, de electricidad negativa.

Esta carga superficial EQ′E′P′, EQE′P será la del equilibrio, determinando convenientemente la longitud $OO' = PQ = P'Q'$.

En efecto: en el infinito dará dicha capa una potencial nula, puesto que los denominadores r (es decir, las distancias) serán infinitos.

En todos los puntos del espacio exterior, satisfacen ambas masas ó capas EPE′, EP′E′ á la ecuación $\Delta V = 0$, puesto que son puntos exteriores á dichas masas.

En las masas fundamentales que engendran y determinan las fuerzas F, la influencia de ambas lúnulas es nula por hipótesis.

Solo nos resta por estudiar el equilibrio eléctrico en la superficie de la esfera y en el interior de la misma.

Consideremos un punto A de la superficie. Este punto, ó por mejor decir, la masa eléctrica μ en él situada, estará sometido á tres fuerzas: acción de la esfera O′; acción de la esfera O, y acción de la fuerza eléctrica F, que será la misma en A, que en D, que en cualquier punto, por la uniformidad del campo.

Decimos que actuarán ambas esferas, en vez de decir que actúan ambas lúnulas ó capas, porque esto equivale á suponer en el espacio común EP′E′P dos masas superpuestas, iguales y de signo contrario, lo cual no altera el equilibrio del sistema, y porque además el cálculo es mucho más sencillo con este artificio natural y espontáneo.

La acción de una esfera homogénea de radio R y de densidad δ es por unidad de masa eléctrica, según hemos visto (página 57), para cualquier punto exterior, llamando r á la distancia de dicho punto al centro,

$$\frac{M}{d^2} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \delta}{d^2};$$

y, si este punto se halla sobre la misma superficie, d será igual á R, y tendremos para la acción de la esfera O sobre el punto A, y sobre una masa μ en él situada:

$$\frac{4}{3}\pi\delta\mu\frac{R^3}{R^2},$$

ó sea

$$\frac{4}{3}\pi\delta\mu R.$$

Tomemos en la dirección OA la longitud

$$\frac{4}{3}\pi\delta\mu R = AS$$

(suponiendo μ positiva y la esfera O negativa).

Del mismo modo, la acción de la esfera O′ sobre μ, situada en A, será una fuerza

$$\frac{4}{3}\pi\delta\mu\, R',$$

llamando R′ á la distancia O′A.

En efecto, el punto A es interior á la esfera O′, y la acción eficaz, como ya hemos visto (pág. 58), es la de una esfera de radio O′A; su valor será

$$\frac{4}{3}\pi\delta\mu\frac{R'^3}{R'^2}=\frac{4}{3}\pi\delta\mu\, R'.$$

Tomando

$$AS'=\frac{4}{3}\pi\delta\mu\, R',$$

tendremos los esfuerzos de las esferas O, O′ sobre μ; y formando el paralelógramo ASTS′, la resultante AT de ambas fuerzas, será la acción de las dos esferas ó de las dos capas eléctricas EP′E′, EPE′.

Fácilmente se demuestra que AT es paralela á OO′: basta para ello observar que los triángulos OO′A, TAS′ son semejantes, puesto que, *ángulo* OAO′ = *ángulo* TS′A, y además

$$\frac{TS'}{AS'}=\frac{\frac{4}{3}\pi\delta\mu\, R}{\frac{4}{3}\pi\delta\mu\, R'}=\frac{R}{R'}.$$

De aquí se deduce que la fuerza μF y la resultante AT tienen la misma dirección: luego si tuviesen la misma intensidad y obrasen en sentido contrario, el punto μ estaría en equilibrio y se verificaría éste en toda la superficie de la esfera conductriz.

En cuanto á la dirección, basta efectuar el deslizamiento de la esfera O′ hacia la derecha ó hacia la izquierda, según el sentido de F. Y en cuanto á la magnitud no hay más que determinar la de OO′, ó sea la del deslizamiento, de modo que tengamos $AT=\mu F$.

Para expresar AT en función de OO′, que para abreviar llamaremos a, basta comparar los mismos triángulos de antes, OAO′, TAS′, y tendremos

$$\frac{OO'}{OA} = \frac{TA}{TS'};$$

ó bien

$$\frac{a}{R} = \frac{\mu F}{\frac{4}{3}\pi\delta\mu R}$$

de donde se deduce

$$a = \frac{F}{\frac{4}{3}\pi\delta}.$$

Solo nos queda por comprobar el equilibrio en el interior de la esfera.

Repitamos (*fig.* 47) cuanto hemos dicho para un punto de

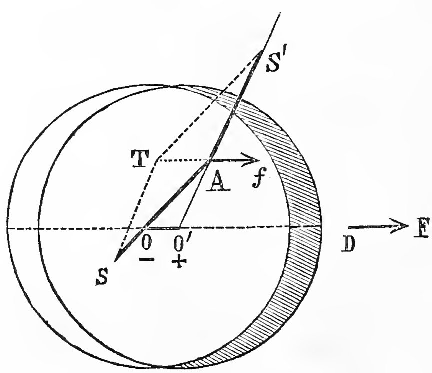


Fig. 47.

a superficie, para otro del interior: A, por ejemplo. Este se hallará sometido á tres fuerzas ó acciones.

Acción de la esfera O′ sobre una masa cualquiera μ, situada en A, de la que solo será eficaz la esfera de radio O′A, pues la acción de la corona exterior á A es nula.

Acción de la esfera O, cuya parte eficaz será la de radio OA.
Y, por último, fuerza Fμ paralela á OO'.
Llamando r, r' á los radios OA y O'A tendremos:

Acción de la esfera O'....... $\frac{4}{3}\pi\delta\mu\, r'$, en la dirección AS';

acción de la esfera O......... $\frac{4}{3}\pi\delta\mu\, r$, en la dirección AS,

y acción del campo.. .... Fμ, en la dirección Af.

Las dos primeras, que son entre sí como r' es r, dan una resultante paralela á OO', y su valor se determinará por la proporción

$$\frac{\mathrm{TA}}{\mathrm{OO'}} = \frac{\mathrm{TS'}}{\mathrm{OA}};$$

ó bien

$$\frac{\mathrm{TA}}{\mathrm{OO'}} = \frac{\frac{4}{3}\pi\delta\mu\, r}{r}$$

de donde

$$\mathrm{TA} = a \times \frac{4}{3}\pi\delta\mu;$$

y poniendo el valor precedente de a, tendremos:

$$\mathrm{TA} = \frac{\mathrm{F}}{\frac{4}{3}\pi\delta} \times \frac{4}{3}\pi\delta\mu = \mathrm{F}\mu.$$

Es decir, que la fuerza TA es igual y contraria á Af = Fμ: hay, pues, equilibrio en el interior de la esfera.

En resumen: dada una esfera conductriz de radio R en un campo eléctrico uniforme, definido por la fuerza eléctrica F, para obtener la capa de equilibrio basta suponer una esfera de deslizamiento, determinando éste por la fórmula:

$$a = \frac{\mathrm{F}}{\frac{4}{3}\pi\delta}.$$

Verdad es, que al parecer hay dos incógnitas: a y δ, pero en rigor sólo hay una, $a\delta$, porque tendremos:

$$a\delta = \frac{F}{\frac{4}{3}\pi}:$$

y designando esta por δ_0, resultará:

$$\delta_0 = \frac{F}{\frac{4}{3}\pi}.$$

$a\delta$ no es otra cosa que la densidad superficial según PQ, porque es el producto de su espesor a por la densidad δ.

El problema queda resuelto con lo dicho en todas sus partes.

Por ejemplo: el espesor eléctrico en cualquier punto A, (*figura* 46) será,

$$AC = AB \times \cos S'AB,$$

ó bien

$$AC = a \cos \omega.$$

Y si se quiere la densidad eléctrica superficial en el mismo punto, tendremos

$$AC \times \delta = a\delta \cos \omega = \delta_0 \cos \omega.$$

Asimismo, conocidas las capas eléctricas EPE′ y EP′E′, se puede conocer la potencial de la esfera en cualquier punto del espacio; se puede conocer además su fuerza eléctrica, que combinada con la F dará la fuerza eléctrica total; y, por fin, sus líneas de fuerza, sus superficies de nivel y cuantos particulares constituyen el problema general del equilibrio eléctrico.

Pero aun es más sencillo el caso de lo que á primera vista parece, porque ya de antemano está resuelto.

La influencia de ambas capas eléctricas EPE′ y EP′E′ es la misma que la de las esferas O, O′, y la de estas viene dada por la de sus centros, en que se supongan condensadas las masas de ambas; de modo que la cuestión se reduce á estudiar dos masas iguales y de signo contrario $\frac{4}{3}\pi R^3\delta$ en O y O′ á una distancia muy pequeña

$$a = \frac{F}{\frac{4}{3}\pi\delta};$$

es decir, que se trata de un problema estudiado precedentemente y en que el momento eléctrico es

$$\frac{4}{3}\pi R^3\delta \times \frac{F}{\frac{4}{3}\pi\delta} = FR^3.$$

La cuestión que acabamos de estudiar es para nuestro objeto importantísima, porque es precisamente, en nuestro concepto al menos, la que se presenta en toda corriente eléctrica.

Nosotros, más adelante, supondremos en la superficie del conductor una capa eléctrica capaz de engendrar en el interior de dicho conductor una fuerza constante.

Supondremos todas las moléculas de éste, consideradas como pequeñas esferas, polarizadas bajo la acción de esta fuerza, de igual modo que lo ha sido la esfera del ejemplo precedente.

Reduciremos cada esferilla á dos masas eléctricas iguales y de signos contrarios.

Estudiaremos las modificaciones que en el dieléctrico determinan todos estos sistemas ($+m$, $-m$).

Y de estos antecedentes podremos deducir la presión en cualquier punto, la atracción ó repulsión de los conductores y todas las leyes de la electro-dinámica.

He aquí porque hemos tratado con algún detenimiento este caso particular, al menos en la parte que inmediatamente puede interesarnos.

(Se continuará.)

José Echegaray.

CIENCIAS NATURALES.

CEFALÓPODOS MONSTRUOSOS.

Desde tiempos muy remotos se viene hablando por naturalistas y viajeros de la existencia en los mares de moluscos gigantescos, pertenecientes al orden de los Cefalópodos; y es tal la magnitud que se ha dado á las gibias, calamares y pulpos, vistos por algunos, que los han comparado con ballenas y hasta con islotes, según puede leerse en muchos libros antiguos y modernos: tal, entre otros, «*Le Monde de la Mer*» de Alfredo Fredol, publicado en 1866.

Plinio dió la noticia que tuvo de Trebio Negro, Lugarteniente de Lelio Lúcullo, en la España Bética, referente á la historia del monstruo que todas las noches merodeaba, en las cercanías de Carteya, las salazones de atún, que ya entonces se hacían en las costas de España. Dicho monstruo era un pulpo colosal, del tamaño de un tonel de capacidad de quince ánforas: los tentáculos, ó brazos, eran tan gruesos en su base, que un hombre adulto no podía abarcarlos, y tenían cerca de 10 metros de largo; y «los restos que del animal se guardaron para milagrosa memoria pesaron más de 350 kilogramos».

Olaüs Magno (1) habla de un cefalópodo colosal que medía una milla de largo, y que más parecía una isla que un animal:

(1) Fué Arzobispo de Upsal y publicó entre otros libros el que lleva por título *Tabula terrarum septentrionalium et rerum mirabilium in eis ac in Oceano vicino*. Venecia, 1639, en donde se da la noticia que copiamos.

«*Similiorem insulæ quam bestiæ*»: cosa que está en consonancia con lo que L. Duteus dice haber oido á los pescadores ingleses, los cuales aseguran haber encontrado en alta mar calamares como islas (1).

Bartholin nos cuenta que el Obispo de Nidaros (2) tomó uno de estos moluscos por un islote y, haciendo levantar encima un altar, celebró ¡misa!!

Más modernamente Linneo, admitiendo la existencia de semejante monstruo marino, lo denominó *Sepia microcosmos;* pero algo más tarde lo borró de su catálogo de animales.

Sonini, en sus *Suites á Buffon*, ha figurado un gigantesco molusco, agarrado á un buque de alto bordo, que intenta sumergir; y de igual tentativa nos habla Pernetti, refiriendo que el molusco consiguió al fin echar á pique el barco.

Considerando como exageraciones fantásticas tales relaciones, que muchos naturalistas modernos califican de fabulosas, es lo cierto que, sin admitir por completo los relatos de los escritores citados, hoy día no puede negarse que se encuentran en los mares cefalópodos enormes, que pueden calificarse de gigantes en la clase de los moluscos.

Aristóteles habla de un calamar de cinco codos de largo (2 metros próximamente). Mr. Verany cita otro que tenía $1^{m},655$ de largo y pesó 12 kilogramos; y no hace mucho que uno de estos moluscos, de $1^{m},820$, fué pescado cerca de Cette y existe en el gabinete de la Facultad de Ciencias de Montpellier.

Perón cuenta haber encontrado cerca de la tierra de Van Diemen una gibia de la magnitud de un gran tonel; y Penant da la medida de otra, cuyo cuerpo tenía 12 piés ingleses de diámetro ($3^{m},66$).

Estas observaciones, con otras muchas parecidas que podrían citarse, prueban hasta la evidencia que, si no gibias, ni calamares y pulpos de la magnitud de islas, existen cefalópodos cuya talla excede á la de todos los invertebrados conocidos, conforme Edwards asegura.

---

(1) *Mémoires d'un voyageur qui se repose*, 1806.

(2) La ciudad de Nidaros, se llama hoy Drontheim por los noruegos, á cuyo reino pertenece.

Según Berthelot, que tanto ha explorado nuestras islas Canarias, no son raros tales moluscos en las aguas del mar que las circuye; pues dice suelen verlos aquellos pescadores, y no osan capturarlos por temor de salir mal parados en la lucha indispensable para apoderarse de ellos.

En confirmación de esta noticia, dada por un naturalista de tanta reputación científica, viene el relato del diario oficial de Mr. Boyer, Teniente de Navío y Comandante del aviso de vapor *Alecton*, que navegando para ir á Cayena, á 40 leguas N. E. de Tenerife, el 30 de Noviembre de 1861, entre las islas Canarias y la de Madera, descubrió un cefalópodo monstruoso que nadaba á flor de agua. Medía de cinco á seis metros de largo, sin contar la extensión de sus ocho brazos formidables, cubiertos de ventosas, que, como es sabido, coronan los tentáculos de tales moluscos. Refiere el observador que los ojos eran muy grandes, de color verde mar y de mirada espantosa. La boca, que en semejantes animales tiene un pico córneo como el de los loros y aves de presa, medía 50 centimetros de abertura. El cuerpo, fusiforme y bastante ensanchado hacía la mitad, constituía una masa, cuyo peso podía estimarse en 2.000 kilogramos. Las aletas colocadas en la extremidad posterior del cuerpo eran redondeadas, formando dos lóbulos carnosos de considerable magnitud.

Serían las dos de la tarde cuando la tripulación del *Alecton* avistó el enorme cefalópodo, gritando el vigía: «*Comandante! despojos flotantes por delante á babor: son hierbas: es una barrica: es un animal, pues se le ven las patas!*».

El *Alecton* se acercó al gigantesco molusco rápidamente, refrenando la marcha al acercarse á él, y, á pesar de las grandes dimensiones del animal, se maniobró convenientemente para apresarle. Una ola enorme cogió de costado al *Alecton*, desconcertando sus operaciones; y á su vez el molusco, aunque siempre á flote, se apartó como si quisiera evitar el encuentro del barco.

A bordo se prepararon fusiles aceleradamente, así como arpones y lazos corredizos; pero, á los primeros balazos que recibió, el monstruo se sumergió, pasándose por debajo de la embarcación al lado opuesto, no tardando mucho en reaparecer; y, atacado con los arpones y herido por nuevas descargas, desapareció varias veces, para volver á salir agitando sus extensos brazos en todas direcciones, siguiéndole en tanto el barco ó deteniéndose cuando era preciso, cuya maniobra duró más de tres horas.

Aunque deseoso á toda costa de concluir la lucha, el Comandante del *Alecton* procuró, no obstante, evitar desgracias probables en sus marineros, si como querían se hubiesen embarcado en botes, que de seguro hubieran zozobrado, si el cefalópodo los hubiera alcanzado con sus formidables tentáculos. Los arpones se hundían en las carnes del molusco sin dificultad ni resultado alguno. Tampoco parecía que le molestaban los muchos balazos que había recibido, y solo uno, por fin, llegó á trastornarle, pues dió lugar á un derrame de cuantiosa espuma y humores, de los que se desprendía fuerte olor de almizcle.

Aprovechando este incidente, pudo sujetarse al animal con un arpón y un lazo corredizo, que resbaló hasta detenerse en las dilataciones laterales producidas por las aletas, intentando entonces la tripulación izarle á bordo. Cuando estaba ya fuera del agua la mayor parte del molusco, se desprendió el arpón, y el enorme peso que gravitaba sobre el lazo corredizo hizo penetrar la soga en las carnes, dividiendo en dos partes el cuerpo del monstruo que, cayendo en la mar, desapareció para no verlo más. Un trozo recogido pesaba más de 20 kilogramos, y fué llevado á Santa Cruz de Tenerife.

No hay datos suficientes para determinar si el molusco de esta relación era un calamar nuevo ú otro cefalópodo; pero se han inclinado á lo primero dos sabios malacólogos, los señores Crosse y Ficher, quienes, por el dibujo que hizo durante la lucha un oficial del *Alecton*, propusieron nombrar al animal *Loligo Boyeri*.

Llegando á mi objeto, después de relatar historias de otros, voy á consignar observaciones propias que he recogido en mis expediciones marinas por nuestro literal oceánico.

Ya Yañez Reguart habló del calamar llamado *Pota* por nuestros pescadores, diciendo ser tan grande el crecimiento que adquiere, que llega á pesar tres arrobas; y, en su *Historia* *general de Guipúzcoa*, Soraluze y Zubizarreta consignan los hay que llegan á pesar treinta. Y, si esto es verdad, como así parece, ya no se creerían tan exajerados los relatos de los historiadores antiguos; y digo *como así parece*, porque si no los he visto de tan crecida magnitud y peso, lo he oido afirmar á pescadores viejos del mar Cantábrico, y aun á alguno joven, testigo también de mis excursiones marinas, al malogrado Simón Villa, que, al verme admirar la magnitud de algunas *potas* y sentir no poderlas llevar al Museo de Pesca del Ministerio de Marina, exclamaba: «¡Ah! de poco se admira mi jefe, pues este ejemplar es un niño de teta al lado de aquellos que algunas veces hemos sacado de tres y cuatro quintales».

Las *Potas* que yo he visto en el mar Cantábrico, llamadas *Calamares voladores* en el Puerto de Santa María, y *Lulas* en Galicia, creo sean el *Loligo Sagitta* var. a. de Lamarck (*Corpore oblongo, crassissimo, brachiis pedumculatis prælongis: Loliginis species maxima.* Seba Muss. 3, t. 4, f. 1, 2), que bien pudiera ser constituyera una especie distinta del *Loligo Sagitta*, pues el mismo Lamarck dice: «La var. (a) est remarquable par sa taille gigantesque, l'épaisseur de son corps, et les griffes de ses suçoirs».

Considerando las diferencias tan extraordinarias de tamaño que hemos apuntado, nos ocurre preguntar: ¿es posible que individuos tan desemejantes pertenezcan á la misma especie?

Esta duda se apoya en que no conocemos variaciones tan grandes para los individuos de ninguna otra especie animal, cuyos gigantes solo exceden al tipo ordinario en proporciones parecidas á las de decrecimiento de sus ejemplares liliputienses; resultando de esta consideración que es muy probable que entre los grandes cefalópodos no solo haya varias especies distintas, como Crosse y Ficher así lo entendieron, al denominar *Loligo de Boyeri* al descomunal molusco del encuentro con el aviso *Alecton;* sino que al fin puedan determinarse diversos géneros, cuando la Malacogia moderna llegue á estudiar dichos mónstruos, que aún, de cuando en cuando, aparecen en el piélago como en tiempos remotos; pues ahora mismo, el 18 de Noviembre último, han cogido uno los pescadores de Laredo, según me han escrito, el cual tenía más de cinco metros de largo, sin contar los *clines*, como llaman aquellos marineros á los tentáculos, brazos ó patas, de los que los mayores medían seis brazas y media. El diámetro del cuerpo pasaba de un metro, y su peso de 46 kilogramos, habiendo tenido carnada bastante para surtir de cebo á los 700 pescadores de merluza que forman el gremio. Estas noticias son fidedignas por proceder de una Sociedad de Pesca muy respetable, y yo las trasmito á la Sección de Ciencias Naturales de nuestra Real Academia, siquiera sea para entretener á los curiosos que leen su Revista, y llamar la atención de nuestros malacólogos hacia un asunto científico que bien merece lo ilustren con observaciones propias, para desvanecer las dudas de los incrédulos sobre lo maravilloso, disipando al mismo tiempo nebulosidades científicas que conviene se aclaren.

Madrid 12 *de Diciembre de* 1888.

Mariano de la Paz Graells.

VARIEDADES.

Bólido notable, observado en Astúrias el 28 de Septiembre de 1888.

I

Según atenta carta suscrita por el Sr. D. José Barcala, en Trubia, y otra más extensa y detallada de D. Benjamín del Riego, en Muros de Pravia, recibidas ambas en el Observatorio de Madrid, á las cinco horas y pocos minutos de la tarde del 28 de Septiembre último, hallándose el cielo completamente despejado, tranquilo el ambiente, y el sol bastante elevado y esplendoroso sobre el horizonte, percibióse en buena parte de Asturias, y muy principalmente hacia la desembocadura del río Nalón, extraño resplandor aéreo, que en breve se tornó en densa y por algunos segundos persistente ráfaga ó estela de humo, inmediatamente seguido de dos ó tres detonaciones distintas y espantosas, como de formidables descargas de artillería. En Somao, cerca y al S. de Muros, vieron algunas gentes, ocupadas en las faenas del campo, descender del cielo una ráfaga chispeante y rumorosa, como de fuego, que infundió en ellas justificado espanto y las puso en atropellada fuga; y en Muros y otras localidades, al sonar los estampidos, trepidó la tierra y se conmovieron y vibraron también los cristales de los edificios.

La caída de algún aerolito parece, según esto, muy probable, segura casi, en aquellos momentos; pero el lugar donde el descenso se verificó y yace la masa meteórica no ha podido averiguarse todavía. Quién le supone inmediato á Somao; quién, por el S., cerca de Grado; y quién, por el N., hacia la parte de Cudillero.

Los pueblos donde las detonaciones se oyeron con mayor intensidad fueron el citado Muros de Pravia, Somao, Rivera, Pravia y Grado, inmediatos todos al Nalón; Cudillero, y Soto y San Martín de Luiña, por el NO. y cerca de la costa; y también en Oviedo y en Trubia, muy lejos de los anteriores, por el SE. En Muros la trayectoría del meteoro pareció dirigirse del E. hacia el NO., y como del S. al O. desde Trubia.

(Nota publicada en la *Gaceta* del 7 de Octubre).

II

La precedente demasiado sucinta nota, publicada en la *Gaceta* del 7 de Octubre, sin más objeto que el de dejar consignado el extraño fenómeno meteórico á que se refiere, llamando de paso la atención de las personas ilustradas, en aptitud y condiciones de depurarle, pide algunas aclaraciones de importancia.

En su primera carta, del 3 de Octubre, el Sr. Riego establece, como hechos, en lo posible para él, bien comprobados, ó dignos de crédito, los siguientes:

1.º El de haber sido dos, por lo menos, los estampidos, productores de grande alarma en los pueblos mencionados de Muros, Cudillero, Pravia, Soto del Barco, Riveras, Soto y San Martín de Luiña, San Esteban, y Somao, situados todos en las márgenes y desembocadura del Nalón, y en la marina inmediata, por la parte de Occidente.

2.º El de haber precedido á los estampidos la aparición, y como descenso de un bólido, especie de «nube de fuego y humo», ó meteoro luminoso, de trayectoría muy enhiesta sobre el horizonte, ó levemente inclinado, en sentido vagamente definido por los observadores, como de N. á S., por regla general.

3.º El de haber dejado el bólido, después de su rápida extinción, larguísima estela de humo que, al decir de los espectadores del fenómeno, simulaba «una columna que llegaba hasta el cielo».

4.º El de haberse oído el primer estampido algunos momentos *después* de tocar, en la apariencia por lo menos, el bólido en la tierra.

5.º Y el de haberse conmovido el suelo, en Muros y sus cercanías, al estallar con estrépito aterrador el meteoro: tanto que algunas personas llegaron á sospechar, aunque sin fundamento racional para ello, si aquel tan inesperado conflicto era indicio de verdadero terremoto.

Y como rumores, exagerados tal vez de lo en realidad sucedido, bastantes para dar idea de la importancia del caso, consigna también el Sr. Riego los siguientes:

1.º El de haber caído en Soto de Luiña «una piedra muy grande, que, en un prado de suelo blando, penetró más de dos varas en el terreno»!

2.º El de haber visto dos mujeres de Somao, á las cuales sorprendió el suceso en despoblado, descender de lo alto, «muy de prisa, echando chispas, y despidiendo mucho resplandor y humo», una piedra grande, que cayó cerca de ellas, pero «al otro lado del monte», «estallando luego en el suelo con gran ruido y rodando con estrépito hacia un barranco».

3.º Y el de haber caído también, al decir de las gentes, otra *piedra grande* hacia Cudillero, y otra, se sospecha, en las cercanías de Grado.

En una segunda carta, fechada en Muros el 11 de Octubre, después de efectuadas activas investigaciones para poner en claro la verdad de lo ocurrido en la tarde del 28 de Septiembre, el mismo Sr. Riego refiere:

1.º Que el bólido pareció penetrar en la atmósfera por el NO. de Muros, dirigiéndose hacia el S.; pero que, por efecto de la gran inclinación de la trayectoría, tocó en tierra muy pronto, como si descendiese por la vertical al fin: circunstancia comprobada por la columna de humo ó gases que dejó tras sí, perceptible desde Muros durante *algunos minutos*.

2.º Que todos los pueblos ribereños del Nalón (San Esteban, Ramón, la Arena, Castillo, Soto del Barco, Riberas, etc., etc.), afirman, sin la menor discrepancia, que vieron la caída del bólido «hacia Muros ó Somao».

3.º Que las trepidaciones del suelo, como consecuencia inmediata de los estallidos del bólido, solamente en estos y otros pueblos, cercanos al Nalón, y en otros inmediatos á la costa del mar, fueron advertidas. En San Martín de Luiña, por ejemplo, hallábase el templo en aquellos momentos lleno de fieles; y tales fueron allí las detonaciones, y tan manifiesto y alarmante el estremecimiento de la iglesia, que instintivamente se llevaron todos las manos á la cabeza, y quedaron como aterrados «creyendo que el edificio se derrumbaba». Más todavía: D. Francisco Zaragoza, capitán del bergantín-goleta *San José*, fondeado luego en el Nalón, y por entonces procedente de Ibiza, que se hallaba en el momento del suceso á bordo, por los 43º40′ de latitud, y 0º8′ de longitud al O. de San Fernando, oyó una fuerte detonación á la parte de tierra, y advirtió trepidación consiguiente en su barco.

Y 4.º Que la hora de la aparición y explosión consecutiva del bólido debió ser la de las 4 $^{1}/_{2}$ de la tarde y no la de las 5, sin que el Sr. Riego, por estupor y sorpresa que la producción del fenómeno le causó, pueda con demasiada nimiedad precisarla.

El mismo Sr. Riego insiste en creer que en las cercanías de Somao debió caer algún aerolito, por más que en aquel territorio y en esta época del año considere difícil cerciorarse del hecho, sin dejar asomo de duda. Y no niega, ni aun pone siquiera en duda, la posibilidad de que los aerolitos hayan sido varios, y descendido, simultáneamente casi, en lugares unos de otros muy distantes. Lo cual, hasta cierto punto, y no sin que todavía queden anomalías y contradicciones por explicar en términos plenamente satisfactorios, serviría para concertar las varias y muy distintas descripciones del fenómeno, dadas por observadores dignos todos de crédito, y al parecer, no obstante, unas con otras incompatibles. En prueba de esto, vease lo que sobre el particular escribía, con fecha 10 de Octubre, ampliando sus primeras noticias del 29 de Septiembre, el Sr. Barcala, desde Trubia.

III

«Varios vecinos del pueblo de Sama de Grado, situado al NO. de Trubia y como á los 10 kilómetros de distancia, me dicen que por allí se presenció, *pocos momentos antes de oirse el estampido*, la caída de una *centella* sobre la sierra del *Avieso* y punto denominado el *Espadañal*, de donde estuvo saliendo humo toda la tarde del 28. Y que los trabajadores del campo, y especialmente mujeres y niños, huyeron despavoridos, al ver en día tan sereno aquella, á su parecer, cosa sobrenatural»..... Y más adelante añade: «He hablado con un peón de campo, que en el día 28 se hallaba en despoblado, entregado á sus faenas habituales, y me asegura que por sus propios ojos vió caer *una cosa extraña* sobre la mencionada sierra, que estuvo dando humo por espacio de un cuarto de hora, *como si se quemara una casa*.»—De manera que, para concertar este relato de lo sucedido en los alrededores de Trubia con el procedente de la parte de Muros, á muchas leguas de distancia, habría que suponer que fueron dos, por lo menos, los desprendimientos meteóricos ocurridos en aquella tarde, no es fácil precisar, por falta de datos fehacientes, si á la misma hora, ó en momentos notablemente distintos.

Y á dificultar la acertada solución del problema contribuyen no poco los siguientes relatos del suceso, publicados por diversos periódicos asturianos, y muy dignos todos de tenerse en cuenta: *El Carbayón*, de Oviedo; *La Avispa*, de Cudillero: *La Crónica*, de Luarca. y *El Moscón*, de Grado. A los cuales hay que agregar el dado por *La Correspondencia de España* del 15 de Octubre, en carta muy interesante del 10, procedente de Cangas de Tineo. Basta, después de leídos, fijar la vista en un mapa de la provincia de Oviedo, para persuadirse de que el fenómeno fué perceptible, casi con iguales caracteres de sorprendente y aterradora apariencia, en muy extensa región del occidente de Asturias; y que, si no fueron varios los fragmentos del bólido desprendidos sobre la tierra, nadie, con probabilidades de acierto, puede asegurar que cayera cerca de la localidad por él ocupada. En territorio tan quebrantado y montuoso como el de Asturias, la ilusión de los sentidos, en casos como este y otros análogos, se concibe perfectamente, y puede ser causa de que se afirme como cierto, palpable casi, lo que dista mucho de la realidad. Si el bólido hubiese estallado en el aire antes de tocar en tierra, la probabilidad de la dispersión y caída de sus fragmentos, á considerables distancias unos de otros, nada tendría de inverosímil; pero del conjunto de noticias no es esto lo que más naturalmente se infiere. La aparición luminosa , por el contrario, fué única en todas partes, y anterior en todas también al estallido. ¿Cómo pudo éste verificarse después de tocar el bólido en la tierra? No se nos alcanza. Y hasta nos inclinamos á creer que el meteoro pasó á grande altura por encima de la extensa comarca donde fué observado; que su contacto con el suelo antes del estallido fué ilusorio; que reventó realmente en el aire; y que sus fragmentos en, hasta ahora, misterioso ó desconocido estado de aglomeración ó diseminación molecular, cayeron, ó aparentaron caer, en muy diversos y apartados lugares. De la caída real de un aerolito, ó de varios, grandes ó pequeños, no puede responderse mientras no se ponga materialmente la mano en ellos. Sea como quiera, y á título de documentos preciosos para poner en claro la verdad, ó vislumbrarla siquiera, á continuación se insertan los artículos ó noticias de los periódicos antes mencionados.

El Carbayón, 3 de Octubre:

«Corias de Pravia, 29 de Septiembre.

Sr. Director.

Mi querido amigo: No sé si habrá tenido ocasión de ser observado por el público un fenómeno que yo pude presenciar.

El viernes 28 de éste, viniendo de Pravia por Forcinas, á las *cinco en punto* (?) de la tarde, me llamó la atención un mozo que conmigo estaba, del mismo Forcinas, con ademanes de admiración, diciéndome: ¡Mire V.! ¡mire V.!, y dirigiendo el brazo al punto de la ocurrencia.

¿Y qué vimos por un instante?

Una chispa de fuego (no atino á darle otro nombre), que bajó del cielo en forma de *culebrón*, pero de cabeza desproporcionada: esto es, más grande que el cuerpo respectivamente, pues parecía tener el tamaño de una *caldera* grande.

La columna de humo que dejó se vió bien por espacio de seis minutos, debido á la falta de movimiento de aire, aunque más ó menos se conocía que marchaba hacia Poniente.

El fuego no le vimos llegar á tierra, debido á la interposición de un cerro; pero sí me atrevo á asegurar que cayó en términos del mismo Forcinas.

Para mí lo admirable del caso está en que en la dirección perpendicular de esta chispa no había en el cielo ni el más pequeño vestigio de nublado, ni cosa parecida; antes, por el contrario, se hallaba completamente despejado, debiendo advertir, sin embargo, que á grandes distancias cruzaban algunos celajes sueltos.

Suyo affmo.—*M. del C. A.* »

Miudes (El Franco), 29 de Septiembre:

«Sr. Director.

Muy señor mío de toda mi consideración: El viernes, día 28 de los corrientes, á las *cuatro y media* de su tarde, se vió caminar por la atmósfera, desde varios puntos de esta marina, en dirección de Norte á Sur, una masa de forma cónica y de color plomizo, situada sin duda sobre este valle de Miudes, llamado poco más há de un siglo *Val de Miudes*, en el concejo de El Franco, y llevaba en su carrera la altura paralela al horizonte (?).

Al ponerse en movimiento, se inflamó, despidiendo unas sustancias de escasa gravedad, que se dejaron sentir como lluvia de cortísima duración en las parras y ramas de la huerta del párroco, é inundando el fondo del valle de humo, que irradiaba un débil olor de azufre que no molestaba.

Hubo, al desprendimiento de estos gases luminosos, un momento de terror para las aves libres y de corral, y aun le conservaban al salir recelosas de sus escondrijos; y no ha sido pequeño el que experimentaron los que han visto bien y comprendido el peligro que les podía acarrear un desprendimiento pesado y voluminoso.

Después de la inflamación, siguió la misma ruta hasta perderse *detrás de las colinas que cierran el valle por el Sur*, y que sirven de estribadura al Veiral, sintiéndose al poco tiempo una detonación fuerte, lejana, y de poca duración.

Al verificarse la explosión, se dividió en pedazos, habiendo caído uno de ellos sobre el techo de la casa de José Gayol, labriego del barrio de Fresnedo, en la parroquia misma de Miudes, sin consecuencias ni vestigios; el otro cayó, á las *dos leguas* hacia el Oriente, en una pinar, y á la vista de la apiñada muchedumbre que poblaba en romería el campo de la capilla de Villaoril, en el concejo de Navia. De los demás nada supe hasta ahora.

La falta de vestigios prueba suficientemente que ni sólidos ni líquidos contenía el meteoro.

Después de todo, quedó sobre este valle un cono de Sur á Norte, formando con el horizonte su base un ángulo agudo hacia este punto, obtuso hacia aquél, y que era como el seno atmosférico en que se había engendrado el meteoro. Se ha ido borrando poco á poco por la dilatación de sus perfiles, habiéndose reducido dentro de media hora á nube gris de pequeña extensión.—*El Corresponsal.*»

—*La Avispa*, de Cudillero, 1.º de Octubre:

«El día 28 del pasado presenciaron muchas personas de este pueblo un fenómeno curioso.

A eso de las *cuatro y media* de la tarde, y en dirección de NO. á SE., cruzó el espacio un bólido muy brillante, dejando á su paso un rastro al parecer gaseoso y humeante.

Se sospecha con este motivo que su caída se haya efectuado en algún punto cercano.»

—*La Crónica*, de Luarca, 30 de Septiembre:

«El viernes, serian las *cuatro y media* de la tarde, observaron muchas personas que por la parte del E. se formaba una pequeña nube blanquecina, de la cual se desprendió una ráfaga muy luminosa, que recorrió el espacio en dirección al SO., dejando tras de sí una estela de vivísimo brillo, y oyéndose á los pocos momentos una extraña detonación. Bastantes personas, que solo oyeron el extraño estampido, creyeron que fuera producido por un barreno cargado con dinamita; otras lo atribuyeron á un cañonazo de algún buque que pedía auxilio; y otras á la fortísima y seca detonación de un trueno, que no se explicaban bien, porque la atmósfera estaba descargada y limpia casi de nubes y con azul purísimo. Lo cierto fué que el fenómeno produjo algunos sustos, y dió ocasión á que muchísimas personas hiciesen célebres comentarios y dieran interpretaciones originales al suceso, acomodándolas á sus conocimientos y gustos.

El fenómeno fué producido por la caída de un aerolito, que, según se nos dijo, ocurrió en la inmediata parroquia de Otur, que dista de esta villa unos seis kilómetros. Así nos lo aseguró persona que, refiriéndose á un hermano suyo, aseguraba que el bólido había hecho un agujero en la tierra.»

—*El Moscón*, de Grado, 5 de Octubre:

«Eran las 4 y 45 minutos de la tarde del 28 de Septiembre último. Hacía calor, y el cielo estaba hermosísimo: ninguna nube lo empañaba. Las calles de Grado se encontraban casi desiertas, con motivo de hallarse la mayor parte de sus habitantes en la romería del Fresno.....

Me hallaba sentado con mi pequeño Raul en uno de los bancos de madera que hay en el hermoso campo de San Antonio. Detrás de mí, y á seis ú ocho metros de distancia, se hallaban en otro banco D. Francisco Patallo y D. José Flores. D. Antonio, me gritó Patallo: ¡un aerolito, un aerolito! Precipitadamente me levanté del asiento y dirigí mis miradas al cielo; y, efectivamente, á una *distancia inmensa* vi cruzar de N. á SO. un meteoro luminoso, que dejaba un rastro de fuego, semejante, aunque mucho mayor y más brillante, al que produce por la noche un volador, al atravesar el espacio, antes de que estalle el trueno. Instantáneamente desapeció el rastro de fuego, convirtiéndose en corriente de humo, como el que sale de la chimenea de una locomotora: el humo, subiendo, se fué extendiendo hasta tomar la forma de una nube plomiza, que tardó más de un cuarto de hora en disiparse. A observar el fenómeno se unieron á nosotros D. Manuel González Plantín, D. Rafael Romero, y otras personas más que había en aquellas inmediaciones. Estábamos haciendo comentarios y no habían pasado seis ú ocho minutos (*¿segun-*

dos, tal vez?) de nuestra primera visión, cuando oimos dos espantosas detonaciones, más grandes que las que producen las descargas de las piezas de artillería del más grueso calibre, ó las ¡de la explosión de una mina. Por el grande estruendo de las detonaciones creímos que el meteoro había estallado en el monte Xorro; pero de igual modo que nosotros lo observaron en diferentes puntos del Concejo y á distancias de cuatro ó seis leguas de esta Villa.......—*Antonio Estrada.*»

—*La Correspondencia de España*, del 15 de Octubre;

«Cangas de Tineo, 10.

En el número de su apreciable periódico, correspondiente al 8 del actual, he leído una nota del Observatorio Astronómico de Madrid, en la que se daba cuenta de un fenómeno observado en Muros de Pravia, Trubia, Grado y otros varios pueblos de esta provincia, pero todos distantes de éste por lo menos 10 ó 12 leguas, que consistió en un meteoro que cruzó la atmósfera, acompañado de gran ruido, y dejando por algunos instantes, en el sitio por donde pasó, una especie de estela de humo blanquecino.

Como los que suscriben la carta que dió origen á la dicha nota del Observatorio, suponían que el bólido (porque eso debió ser) cayó en los alrededores de Pravia ó Cudillero, es decir, cerca de la costa, he de desvanecer este error; pues el mismo día 28 del mes de Septiembre próximo pasado tuve ocasión de observarlo, en compañía de los Sres. D. Natalio Rodríguez y D. José Azpeitia, yendo de caza, en las inmediaciones de Cangas de Tineo, y desde lo alto de la montaña, por lo que pudimos apreciarlo con toda claridad y precisión.

Serían próximamente las cinco de la tarde y estaba el cielo completamente despejado, excepto unas ligeras nubecillas que había sobre nosotros, cuando hirió nuestra vista una claridad muy viva, que nos sorprendió sobremanera, porque no podíamos en modo alguno atribuirla á un relámpago, dada la densidad de la atmósfera. Levantamos la cabeza, dirigiendo hacia el cielo nuestras miradas, y vimos cruzar rápidamente y en dirección del N. á SO., un como globo encendido, cuya forma no pudimos distinguir con precisión, pero que nos pareció ser la cónica, el cual despedía una luz muy brillante, á pesar de la claridad del día y de la luz del sol, en casi toda su fuerza en aquel sitio elevado. Atravesó con velocidad el espacio y fué á perderse tras una montaña.

No habíamos salido de nuestro asombro, cuando á los tres minutos, ?, próximamente, oimos un ruido semejante al que produciría la detonación de algunas piezas de artillería: ruido que percutieron con estruendo las montañas que nos rodeaban.

En el cielo pudimos observar una espe ce de estela blanquecina en el sitio por donde había pasado el meteoro, pero más baja que las nubecillas que teníamos sobre nosotros, por lo que creo que pasó á una distancia bastante próxima.

El punto donde cayó no he podido averiguarlo; pero creo que no diste mucho del lugar en donde nos encontrábamos nosotros: creencia que me parece fundada, pues unos aldeanos del pueblo de Villarmental, situado á una legua y media del sitio donde nos hallábamos, y en la dirección que llevaba el meteoro, me dicen que cayó en las inmediaciones del pueblo una piedra negra y grande, que dicen ellos que bajó del cielo.

Pienso dirigirme á dicho punto y comprobar la veracidad de este aserto, pues no tendría nada de extraño fuese efectivamente el aerolito que cruzó gran parte de la provincia.»

*
* *

Después de escrito lo anterior, me dicen que en Grandas de Salime han visto pasar el aerolito, acompañado de las mismas circunstancias que cuando pasó por aquí, ignorando donde habrá caído. Grandas de Salime está á nueve leguas de aquí, y por lo tanto, no pudo haber caído en el inmediato pueblo de Villarmental como yo creía; pero bien pudo suceder que se desprendiese una parte de él, porque los aldeanos insisten en su afirmación de que en este pueblo cayó una piedra negra con manchas rojas, que se desprendió del cielo al pasar el rayo, como ellos dicen.—V.»

IV

Escrito ú ordenado cuanto precede en la mañana del 17 de Octubre, recibimos nueva carta del Sr. Barcala, fechada en Trubia el 15, de la cual, en corroboración de nuestras sospechas ó conjeturas, extractamos los párrafos siguientes:

«Apesadumbrado y desfallecido, regreso en estos momentos de mi correría en busca del aerolito, por Sama de Grado y sus alrededores. Bien apurado el asunto sobre el terreno, y á pesar de las noticias que del descenso del meteoro en aquellos lugares se me habían comunicado en Trubia, he adquirido la convicción de que por allí no ha caído en realidad fragmento alguno de piedra meteórica. Lo que sucedió fué que las gentes vieron con asombro pasar el bólido por cima, y muy cerca, al parecer, del lugar ó lugares donde se encontraban, dejando rastro bien perceptible y duradero, como de humo; que le vieron trasponer por los cerros inmediatos del O.; y que, á corto rato, 18 ó 20 segundos después de la desaparición, percibieron el estrépito aterrador de su estallido. Todo lo cual, juntamente con el desprendimiento de un rayo sobre añoso roble, durante la furiosa tempestad que descargó sobre la comarca el día 29, les hizo dar cuerpo y realidad á las, en estos casos, motivadas exageraciones de la fantasía. En Sama, repito, tengo por averiguado que no cayó aerolito ninguno, ni tampoco en el caserío de San Adriano y escarpadas sierras inmediatas, que he recorrido y registrado con vivo deseo de poner en claro la verdad. Las personas con quienes he conferenciado por allí están todas acordes en señalar las próximas montañas del O. como lugar probable del descenso del meteoro, cuya trayectoría, lo mismo allí que en Trubia (aunque por error de pluma dije en mi primera carta de S. á O.), se extendía de Oriente á Poniente. De haber podido continuar mis pesquisas, quizá, torciendo poco más adelante hacia el N., hubiera llegado, de estación en estación, guiado por ilusorios indicios del paradero del meteoro, á los pueblos ribereños del Nalón, donde el estampido que produjo se oyó con mayor intensidad. Alejándose, en efecto, todavía más de Trubia por el O., parece que el estrépito de la explosión fué menos formidable y aterrador que en las cercanías de Sama. De Proaza, por lo menos, me dicen que el fenómeno luminoso fué también allí muy esplendoroso, pero que la detonación les pareció, por el contrario, muy lejana.»

De todo lo cual infiere el Sr. Barcala, no sin vacilación ó temor de equivocarse, ó inferimos nosotros, apropiándonos y extremando su sospecha, que el bólido pudo ó debió estallar en las altas regiones de la atmósfera, en contacto aparente no más con las montañas, y después de recorrer amplia, y hasta la fecha, no demasiado bien definida trayectoría, perceptible desde muy apartados lugares por el Occidente de Asturias. Si los estallidos hubieran sido múltiples, y se hubieran oído por aquellos lugares en momentos físicos distintos, también podría suponerse que no se trataba de un sólo bólido, sino de varios, procedentes, con alguna antelación, de un foco común, dispersos luego por el espacio, y que en el territorio mencionado cayeron y se extinguieron, simultáneamente casi, con explosiones también de diversa intensidad, y en áreas, ó corros de extensión limitada, únicamente perceptibles. Pero la falta de datos precisos y fidedignos, concernientes á la dirección y amplitud de la trayectoría del meteoro en cada lugar donde se observó, y á la hora de su aparición y estallido, por todo extremo dificultan el conocimiento ó deducción de la verdad en tan misterioso asunto.

V

Con nueva carta, confirmando y ampliando en algún punto lo contenido en las anteriores, volvió á favorecernos desde Muros, el 19 de Octubre, el Sr. Riego. De ella resulta:

1.º Que, vista desde Muros, la trayectoría aparente del meteoro, muy elevada sobre el horizonte, ó casi vertical, pasó entre los caseríos de Azafil y Reigada, por detrás de Somao, quedando allí señalada por densa columna de humo, de color gris azulado.

2.° Que desde San Esteban de Pravia, cerca de la desembocadura y sobre la márgen izquierda del Nalón, creyeron las gentes, expeetadoras de tan inesperado y asombroso fenómeno, que «en medio de la plaza de Muros había caído un rayo». En San Esteban fueron también aterradoras las detonaciones, y trepidó el suelo de un modo sensible.

3.° Que los observadores de Cudillero (por el NO. de Muros) aseguran que el meteoro apareció por el NO. y se dirigió hacia el SE.

4.° Que los de Riveras (por el SE.), dicen que el *rayo* cayó hacia Muros, ó en el mar: en aparente contradicción con los de Cudillero, á no haber descendido el meteoro, en sentido aproximadamente vertical, sobre Muros ó en sus alrededores.

5.° Que el estallido del meteoro fué posterior, sin duda ninguna, á su descenso, real ó aparente, sobre la tierra: no siendo posible precisar, sin error de cuantía, el intervalo de tiempo transcurrido entre ambos sucesos.

6.° Que nadie, en Muros, asegura haber visto *globo alguno de fuego;* sino, á lo sumo, una ráfaga ó «estela luminosa, envuelta en humo». El Sr. Riego, á quien los estampidos sorprendieron dentro de un jardín, poblado de frondosos árboles, ni siquiera la ráfaga luminosa percibió.

Y 7.° Que la penosa exploración del terreno, por los alrededores de Somao, en busca del presunto aerolito, ó de algún fragmento meteórico, producto de las violentas descargas de la tarde del 28 de Septiembre, le ha resultado infructuosa hasta la fecha. Lo cual, teniendo en cuenta la dificultad de la empresa en aquel tan áspero y quebrantado territorio, y más para un solitario investigador, se concibe perfectamente, aun cuando el misterioso objeto buscado exista en realidad. Poseído de loable entusiasmo, y deseoso de poner en claro la verdad, el Sr. Riego ha señalado precio, de su pobre peculio, al hallazgo del aerolito. Pero, ó éste no se ha presentado todavía á la vista del codicioso labriego astur, ó alguien, si ha dado con él, le guarda cuidadosamente, como prenda de grande estima ó hallazgo de cuantioso valor. Todo cabe en lo posible; pero lo casi seguro es lo primero.

Tratando de explicar la aparición del bólido en lugares del Occidente de Asturias, muy distantes unos de otros, y la ilusión que en muchos observadores produjo su descenso y estallido en aquellos lugares, aproximadamente á la misma hora, el Sr. Riego se inclina á creer: 1.° que fueron, ó pudieron ser, varios los bólidos, procedentes del estallido de uno solo en las altas regiones de la atmósfera: estallido inadvertido desde la tierra por la gran distancia á que se produjo, y muy considerable enrarecimiento del aire en aquella región; 2.° que los bólidos secundarios, emanados del mismo foco, se dispersaron por el Occidente de Asturias, en trayectorías algún tanto divergentes, y revistiendo formas ó apariencias también algún tanto distintas; y 3.º que todos ellos estallaron, finalmente, en el suelo, por contracción y enfriamiento muy desiguales de sus masas, ó, pudo añadir, por fractura mecánica de las mismas, encandecimiento sumo, consiguiente á la conversión en calor de su fuerza viva, instantáneamente como aniquilada, y expansión súbita, irresistible, de sus elementos gaseosos componentes.—Pero todo esto, ó casi todo, es conjetural; y, para que la hipótesis revistiera caracteres de certidumbre ó verosimilitud, sería menester que desde algún sitio ó lugar de observación se hubiera descubierto más de un bólido en vertiginoso movimiento descendente; y, además, que de la comparación de horas en que se oyeron los estampidos pudiera deducirse su falta de simultaneidad física, ó la realidad de su producción independiente. Y, por desgracia, si las trayectorías observadas no pueden definirse con extremada delicadeza ó precisión, respecto á las horas á que los estampidos corresponden no puede ser la vaguedad ó incertidumbre más completa.

A su carta del 19 agrega el Sr. Riego, como aclaratorias de la historia del meteoro de que se trata, otras seis, suscritas por personas de respetabilidad y confianza, y procedentes de diversos lugares de Asturias. De su lectura resulta:

1.º Que en Gijón, y en Luanco y en Avilés, también se percibieron el resplandor y estampido del meteoro; pero con intensidad mucho menor que en los lugares situados al Occidente de la provincia, hasta el punto de que las gentes apenas dieron importancia por allí á tan extraño fenómeno, ni se cuidaron de investigar la causa ú origen de su procedencia.

2.º Que, tierra adentro, lejos todavía y al E. de Oviedo, en Pola de Siero, «se oyó una detonación ó trueno seco, con trepidación instantánea del suelo, y se vió al mismo tiempo descender un globo de fuego, que, como á los cien metros de altura, se dividió en otros varios, y cayó á tierra en punto que no puede precisarse,....» «produciendo el bólido al deshacerse, añaden los observadores, cierto chasquido, y dejando un rastro de humo que indicaba la línea recta que seguía».—Todo ello muy vago ó misterioso, y de difícil concierto con las noticias procedentes de otros lugares.

3.º Que en Corias de Pravia, sobre la márgen izquierda del Narcea, afluente del Nalón, se tiene por cierto que cayó, por lo menos, un aerolito: unos observadores suponen que en Forcinas; los más en la sierra de Sandamias; y otros en distintos puntos de la comarca, sin que pueda nadie precisar el sitio ó lugar del descenso del meteoro.

4.º Que en Salas se oyó también, á las cuatro y media de la tarde, tremendo estampido, con trepidación del terreno y temblor de los edificios, no como de trueno, sino como de explosión de barreno inmediato con carga de dinamita. Y que, muy poco antes de percibirse tan pavoroso estrépito, «vieron muchas personas, que estaban en las calles y en los campos, desprenderse una grande chispa, que desde el Occidente, hacia la caída del sol, se dirigió, primero hacia el Norte, dejando en pos de sí larga cola, como la de un cometa, y después, retrocediendo, desde el Norte al Mediodía, formándose *allí* (?) un voluminoso globo de fuego, que se dirigió hacia la tierra, dejando entonces una columna de humo muy negro». En el mismo Salas tiénese por cierto que la detonación del meteoro fué todavía más intensa que allí hacia la parte de Luarca, Tineo y Cangas, y, sobre todo, en Pola de Allande: poblaciones distantes unas de otras, y próximamente orientadas de N. á S., por el Occidente, y también lejos de la primera.

Y 5.º Que ni en Villaoril, ni en Miudes, todavía más al Occidente de la provincia, donde el meteoro revistió caracteres de imponente magnificencia, según refiere *El Carbayón*, de Oviedo, cayó propiamente ningún aerolito, susceptible de ser recogido y conservado, como prueba material fehaciente del supuesto y muy probable desprendimiento meteórico. El párroco de Miudes, Sr. Infanzón, asegura, por el contrario, que, ni sobre las parras de su huerta, ni sobre la casa de D. José Gayol, en Fresnedo, cayó cuerpo alguno, sólido ni líquido, sino á modo de «una lluvia de gases, ó de materia líquida inflamada, como las candelillas de un cohete, que se apagó en la tierra al verificarse el contacto»; que de la misma especie debió ser la materia desprendida cerca de la capilla de Villaoril, en el concejo de Navia; y que ni en Otur, ni en Castropol, ni en ningún otro lugar de aquella comarca, tiene él noticia de que se haya recogido fragmento alguno de materia ó masa meteórica.

Brevemente y con la mayor fidelidad que nos ha sido posible resumidos, tales son los hechos culminantes ó más notables que hasta la fecha han llegado á nuestra noticia, relacionados con la aparición y estallido del bólido, ó de los bólidos, en extensa región de Asturias, ya bastante adelantada la tarde del 28 de Septiembre de 1888. Su interpretación satisfactoria, como también, sin advertirlo casi, hemos manifestado al consignarlos, no nos parece demasiado fácil. Pero, aun cuando el origen del fenómeno, supra ó extra telúrico sin duda, sea de difícil apreciación en los detalles, por los caracteres de grandiosidad que en varios conceptos revistió, merece, á nuestro entender, puesto preferente entre los más sorprendentes fenómenos naturales de su especie. A conservar vivo por algún tiempo su recuerdo, se hallan exclusivamente consagrados estos renglones.

Madrid 24 de Octubre de 1888.

MIGUEL MERINO.

Integración de algunas expresiones diferenciales notables.—En el número de los «Nuevos Anales de Matemática» (*Nouvelles Annales de Mathématiques*), correspondiente al mes de Abril último, el Sr. Pomey propone el siguiente muy sencillo procedimiento de integración de varias expresiones diferenciales, consideradas por Hermite como de tratamiento analítico, relativamente, complcado ó difícil. Las expresiones de que se trata son las siguientes:

$$A = \int \frac{x^2\,dx}{u^2},$$

$$B = \int \frac{x^2\,dx}{v^2},$$

$$C = \int \frac{bx^2\,dx}{(au + bv)^2}, \quad \text{y}$$

$$D = \int \frac{a dx}{[a + (ax + b)\operatorname{tg} x]^2}:$$

en las cuales

$$u = x \operatorname{sen} x + \cos x, \quad \text{y}$$
$$v = \operatorname{sen} x - x \cos x.$$

1. De la ecuación

$$u = x \operatorname{sen} x + \cos x,$$

se deduce inmediatamente, por diferenciación, esta otra:

$$du = x \cos x \,.\, dx.$$

Y, por lo tanto:

$$A = \int \frac{x^2\,dx}{u^2} = \int \frac{x}{\cos x} \cdot \frac{du}{u^2} = \int \frac{x}{\cos x} \cdot d\left(\frac{1}{u}\right) =$$
$$\frac{-x}{u \cos x} + \int \frac{1}{u} \cdot d\left(\frac{x}{\cos x}\right).$$

Pero

$$d\left(\frac{x}{\cos x}\right) = \frac{(\cos x + x \operatorname{sen} x)\,dx}{\cos^2 x} = \frac{u}{\cos^2 x}\,dx.$$

Luego, prescindiendo de la constante arbitraria, complemento de la integración,

$$A = \frac{-x}{u \cos x} + \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{-x}{u \cos x} + \operatorname{tg} x = \frac{-x + u \operatorname{sen} x}{u \cos x} =$$
$$\frac{\operatorname{sen} x - x \cos x}{x \operatorname{sen} x + \cos x} = \frac{v}{u}.$$

2. De análogo modo, por ser $dv = x \operatorname{sen} x \,.\, dx$, resulta que

$$B = \int \frac{x^2\,dx}{v^2} = -\int \frac{x}{\operatorname{sen} x} \,.\, d\left(\frac{1}{v}\right) = \frac{-x}{v \operatorname{sen} x} + \int \frac{1}{v} \,.\, d\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) =$$

$$\frac{-x}{v \operatorname{sen} x} + \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{-x}{v \operatorname{sen} x} - \cot x = -\frac{u}{v}.$$

3. Para hallar el valor de C, comiéncese por suponer que

$$au + bv = t,$$

y resultará que

$$adu + bdv = x\,(a \cos x + b \operatorname{sen} x)\,dx = dt.$$

De donde se desprende que

$$C = \int \frac{bx^2\,dx}{t^2} = \int \frac{bx}{a \cos x + b \operatorname{sen} x} \cdot \frac{dt}{t^2} = -\int \frac{bx}{a \cos x + b \operatorname{sen} x} \cdot d\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

O, integrando *por partes*, como en los demas casos aquí considerados

$$C = \frac{-bx}{(a \cos x + b \operatorname{sen} x)\,t} + \int \frac{1}{t} \,.\, d\left(\frac{bx}{a \cos x + b \operatorname{sen} x}\right).$$

Pero

$$d\left(\frac{bx}{a \cos x + b \operatorname{sen} x}\right) = \frac{a\,(\cos x + x \operatorname{sen} x) + b\,(\operatorname{sen} x - x \cos x)}{(a \cos x + b \operatorname{sen} x)^2} \,.\, bdx =$$

$$\frac{t \times bdx}{(a \cos x + b \operatorname{sen} x)^2}.$$

Luego

$$C = \frac{-bx}{(a \cos x + b \operatorname{sen} x)\,t} + \int \frac{bdx}{(a \cos x + b \operatorname{sen} x)^2}.$$

A su vez:

$$\int \frac{bdx}{(a \cos x + b \operatorname{sen} x)^2} = \int \frac{b \times \dfrac{dx}{\cos^2 x}}{(a + b \operatorname{tg} x)^2} = \frac{-1}{a + b \operatorname{tg} x}.$$

Luego, finalmente:

$$C = \frac{-bx}{(a \cos x + b \operatorname{sen} x)\,t} - \frac{\cos x}{a \cos x + b \operatorname{sen} x} = \frac{-bx + t \cos x}{(a \cos x + b \operatorname{sen} x)\,t} =$$

$$-\frac{(a \cos x + b \operatorname{sen} x)\,(x \operatorname{sen} x + \cos x)}{(a \cos x + b \operatorname{sen} x)\,t} = -\frac{u}{t} = -\frac{u}{au + bv}.$$

Y del propio modo se concluiría que

$$\int \frac{ax^2\, dx}{(au + bv)^2} = \frac{v}{au + bv}.$$

4. La integral D, escrita como sigue,

$$\mathrm{D} = \int \frac{a \cos^2 x \,.\, dx}{[a \cos x + (ax + b) \operatorname{sen} x]^2},$$

suponiendo que

$$z = a \cos x + (ax + b) \operatorname{sen} x,$$

y, en consecuencia, que

$$dz = (ax + b) \cos x\, dx,$$

se convierte en esta otra, equivalente:

$$\mathrm{D} = \int \frac{a \cos x}{ax + b} \cdot \frac{dz}{z^2} = -\int \frac{a \cos x}{ax + b} \,.\, d\left(\frac{1}{z}\right) =$$
$$\frac{-a \cos x}{(ax + b)\, z} + \int \frac{1}{z} \,.\, d\left(\frac{a \cos x}{ax + b}\right).$$

Pero

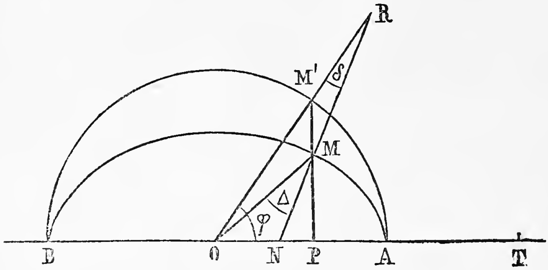
$$\int \frac{1}{z} \,.\, d\left(\frac{a \cos x}{ax + b}\right) = \int \frac{1}{z} \times \frac{-a\,[\cos x + (ax + b) \operatorname{sen} x]}{(ax + b)^2} \,.\, dx =$$
$$-\int \frac{a dx}{(ax + b)^2} = \frac{1}{ax + b}.$$

Luego, en conclusión:

$$\mathrm{D} = \frac{-a \cos x}{(ax + b)\, z} + \frac{1}{ax + b} = \frac{(ax + b) \operatorname{sen} x}{(ax + b)\,[a \cos x + (ax + b) \operatorname{sen} x]} =$$
$$\frac{\operatorname{tg} x}{a + (ax + b) \operatorname{tg} x}.$$

M. M.

Propiedades curiosas de la elipse.—En el número de los *Nuevos Anales de Matemáticas*, correspondiente al último mes de Junio, Mr. M. d'Ocagne, Ingeniero de Puentes y Caminos, ha publicado un estudio interesante sobre la elipse, comparada con su *círculo principal*, ó concéntrico con ella y descrito con el semieje mayor como radio, conforme la figura adjunta representa.



Entre otras consecuencias importantes de aquel estudio, las siguientes, de carácter elemental y de muy fácil deducción, merecen fijar la atención de nuestros lectores.

En el círculo principal, el punto M' queda determinado por el conocimiento del ángulo M'OA, igual á φ. Y el correspondiente, M, en la elipse, por la intersección con esta curva de la ordenada M'P. En M' y en M son, respectivamente, *normales* al círculo y á la elipse las líneas M'O y MN, que, prolongadas, se encuentran en R, formando un ángulo δ, igual al que formarían las tangentes, también en M' y en M, emanadas del punto T, en la prolongación de OA, y á la distancia del O igual á $\frac{OA^2}{OP}, = \frac{a^2}{x}$, representando por a el semieje mayor de la elipse, y por x la abscisa de los puntos M ó M', contada desde el centro O. Este ángulo δ expresa la *desviación tangencial* de la elipse con respecto al círculo, en un punto cualquiera M: desviación que depende del ángulo φ, en cierto modo independiente, y que en cada cuadrante de la elipse pasa por un valor máximo, comprendido entre los dos mínimos de los vértices, fácil de determinar.

Y la normal MN forma en M con el semidiámetro MO otro ángulo, Δ, que también puede expresarse en función de φ, y que asímismo adquiere un valor máximo en cada cuadrante de la elipse, de no más complicada determinación que el máximo de δ. Este ángulo Δ, como el δ, relacionado estrechamente con los valores a y b de los semiejes de la elipse, ó con la forma peculiar de esta línea, le denomina d'Ocagne *desviación* (écart) *normal*.

Para determinar los valores de δ y Δ en función de φ puede seguirse, entre otros, el siguiente procedimiento:

Por de pronto, según la figura indica,

$$\mathrm{MNP} = \varphi + \delta, \quad \text{ó} \quad \delta = \mathrm{MNP} - \varphi.$$

Pero

$$\text{tg}\,\mathrm{MNP} = \frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{NP}} = \frac{y}{\mathrm{S}_n} = \frac{a^2}{b^2} \times \frac{y}{x} = \frac{a}{b}\,\text{tg}\,\varphi:$$

pues la subnormal

$$\mathrm{NP} = \mathrm{S}_n = \frac{b^2 x}{a^2};$$

y, representando por x é y las coordenadas de M, en la elipse, casi evidentemente,

$$x = a \cos \varphi \quad \text{é} \quad y = b\,\text{sen}\,\varphi.$$

Luego

$$\text{tg}\,\delta = \text{tg}\,(\mathrm{MNP} - \varphi) = \frac{(a - b)\,\text{tg}\,\varphi}{b + a\,\text{tg}^2\varphi} = \frac{{}^1/_2\,(a - b\,\text{sen}\,2\,\varphi}{b + (a - b)\,\text{sen}^2\,\varphi}.$$

De donde sin dificultad alguna se deduce que el máximo valor de δ corresponde á este valor de φ;

$$\text{tg}\,\varphi_1 = \sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{\sqrt{ab}}{a},$$

de construcción geométrica elemental sencillísima.

Más fácil todavía que la deducción del valor de δ es la del que á Δ corresponde, en función de φ.

En efecto:

$$\mathrm{MNP} = \mathrm{MOP} + \Delta, \quad \text{ó} \quad \Delta = \mathrm{MNP} - \mathrm{MOP}.$$

Pero

$$\text{tg}\,\mathrm{MNP} = \frac{a}{b}\,\text{tg}\,\varphi, \quad \text{y} \quad \text{tg}\,\mathrm{MOP} = \frac{y}{x} = \frac{b}{a}\,\text{tg}\,\varphi.$$

Luego:

$$\text{tg}\,\Delta = \text{tg}\,(\mathrm{MNP} - \mathrm{MOP}) = \frac{a^2 - b^2}{2ab}\,\text{sen}\,2\varphi.$$

Y de suyo es evidente en este caso que el máximo valor de Δ corresponde al de φ, igual á $\frac{\pi}{4}$, ó al de $\mathrm{MOP} = \frac{b}{a}$.

Las dos ángulos δ y Δ, nulos en A, aumentan progresivamente en el primer cuadrante de la elipse hasta adquirir valores máximos, distintos uno de otro, antes el δ que el Δ. La coincidencia de situación de los puntos máximos solo puede verificarse cuando $a = b$, ó cuando la elipse coincide con su círculo principal, en cuyo caso δ y Δ son siempre iguales á cero.

Los tangentes en los puntos M y M', correspondientes á la misma ordenada en el círculo y la elipse, se encuentran, hemos ya recordado, en un punto de la línea OA, indefinidamente prolongada: de manera que esta línea representa el *lugar geométrico* de las intersecciones de las tangentes así definidas. ¿Cuál es el lugar geométrico de las intersecciones, R, de las normales á la elipse y al círculo en M y en M'?

Designando por x é y las coordenadas del punto M, y por X é Y las de los demás puntos de la normal, la ecuación de esta línea podrá escribirse como sigue:

$$\mathrm{Y} - y = \frac{a^2 y}{b^2 x}(\mathrm{X} - x).$$

O, recordando que $y = b \operatorname{sen} \varphi$ y $x = a \cos \varphi$,

$$b \cos \varphi \times \mathrm{Y} - a \operatorname{sen} \varphi \times \mathrm{X} = (b^2 - a^2) \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi.$$

Mas también, por referencia á la normal al círculo, OR,

$$\mathrm{Y} \cos \varphi = \mathrm{X} \operatorname{sen} \varphi.$$

Luego el ángulo φ, correspondiente al punto R, de intersección de las dos normales, se hallará definido por estas dos ecuaciones:

$$\operatorname{sen} \varphi = \frac{\mathrm{Y}}{a+b}, \quad \cos \varphi = \frac{\mathrm{X}}{a+b}.$$

Y, eliminando el valor de φ, entre las coordenadas X é Y de todos los puntos de intersección, se obtendrá la relación siguiente:

$$\mathrm{Y}^2 + \mathrm{X}^2 = (a+b)^2.$$

Según la cual el lugar geométrico buscado es un círculo concéntri-
á la elipse, de radio igual á la suma de sus semiejes. Propiedad con gran ventaja utilizable para el trazado de la normal en el punto M, sin previo conocimiento de la dirección de la tangente.

M. M.

ÍNDICE

DE LAS MATERIAS CONTENIDAS EN ESTE NÚMERO.

CIENCIAS EXACTAS.

Estudios sobre electro-estática y electro-dinámica (*Continuación*)......... 381

CIENCIAS NATURALES.

Cefalópodos monstruosos.. 404

VARIEDADES.

Bólido notable, observado en Astúrias el 23 de Septiembre de 1888....... 410
Integración de algunas expresiones diferenciales notables............... 423
Propiedades curiosas de la elipse.. 426

Se suscribe en la portería de la Academia de Ciencias, plaza de la Villa, núm. 2, piso principal.

Cada tomo de la Revista constará de nueve números.