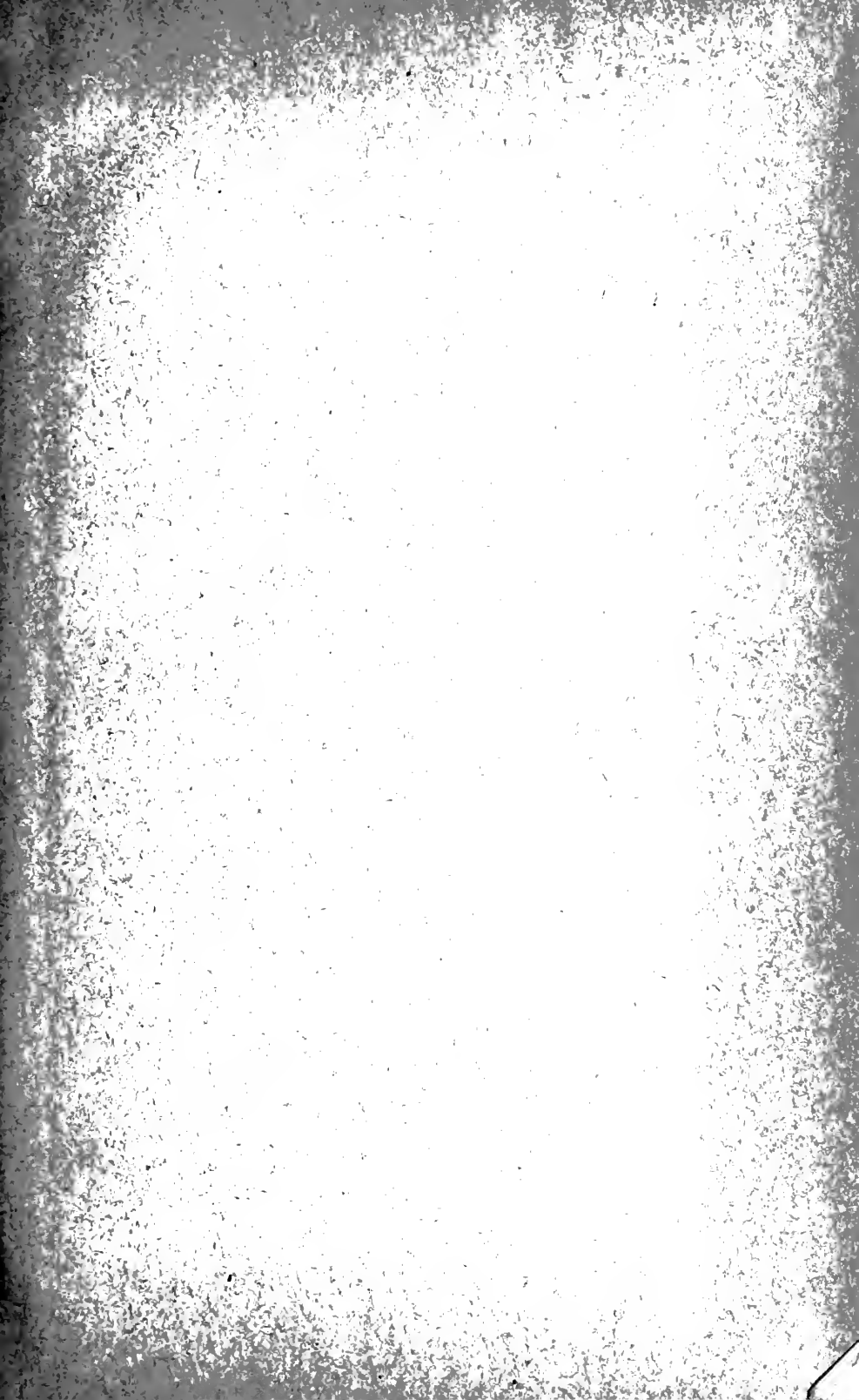


FOR THE PEOPLE
FOR EDUCATION
FOR SCIENCE

LIBRARY
OF
THE AMERICAN MUSEUM
OF
NATURAL HISTORY

Bound at
A. M. N. H.
1924









Sitzungsberichte

der 5,06(43.36) M 1

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

Jahrgang 1912

München 1912

Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

2H-7472-1.12.8

Inhaltsübersicht.

I. Sitzungsberichte.		Seite
13. Januar: Finsterwalder, Günther		1*
3. Februar: Burmester, Pressel, Burkhardt, Rothpletz		2*
2. März: Günther, Pringsheim, Muthmann		5*
4. Mai: Föppl, M. Schmidt, Gehrcke, Müntz, Bender, v. Hartwig, Haupt, Lagally, Liebmann, Rothpletz		7*
8. Juni: Sommerfeld, Szasz		12*
6. Juli: Burmester, Frank, Laue, R. Seeliger, Röntgen, Ranke, v. Dyck		13*
2. November: Ebert, Günther, v. Seeliger		15*
7. Dezember: Stäckel, v. Seeliger, Endrös, Liebmann, Voigt, Glungler, v. Dyck		16*
Verzeichnis der im Jahre 1912 eingelaufenen Druckschriften		21*
II. Abhandlungen.		
H. Burkhardt: Die Untersuchungen von Cauchy und Poisson über Wasserwellen		97
H. Ebert: Protokoll der Sitzungen der luftelektrischen Kommission der kartellierten Deutschen Akademien zu München am 24. und 25. Mai 1912 samt den wissenschaftlichen Beilagen von H. Benndorf, J. Elster, H. Ebert, Th. Simon und K. E. F. Schmidt, als Berichte Nr. 1—5 (mit 1 Tafel)		391
A. Endrös: Vibrationsbeobachtungen in den oberbayerischen Seen und analoge Erscheinungen in den Meeren (mit 2 Tafeln)		515
S. Finsterwalder: Beobachtungen über die Art der Gletscher- bewegung		1
A. Föppl: Die Biegung einer kreisförmigen Platte		155
W. Friedrich, P. Knipping und M. Laue: Interferenz-Erschei- nungen bei Röntgenstrahlen (mit 5 Tafeln)		303
E. Gehrcke: Über den Sinn der absoluten Bewegung von Körpern		209
S. Günther und F. Adami: Ein merkwürdiger Fall von Lokal- magnetismus an der bayerisch-sächsischen Grenze		121

	Seite
O. Haupt: Über die Entwicklung einer willkürlichen Funktion nach den Eigenfunktionen des Turbulenzproblems	289
M. Lagally: Über eine dem Lambertischen Problem der acht Punkte verwandte Aufgabe	261
M. Laue: Eine quantitative Prüfung der Theorie für die Interferenz-Erscheinungen bei Röntgenstrahlen	363
H. Liebmann: Das Pentagramma mirificum und die nichteuklidischen Parallelen	273
H. Liebmann: Berührungstransformationen der geodätischen Linien	579
Ch. Müntz: Aufbau der gesamten Geometrie auf Grund der projektiven Axiome allein	223
K. Pressel: Zwei experimentelle Methoden zur Bestimmung der Form und Lage der Isothermflächen unterhalb der Erdoberfläche	93
A. Pringsheim: Über einige funktionentheoretische Anwendungen der Eulerschen Reihen-Transformation	11
A. Pringsheim: Über den Taylorschen Lehrsatz für Funktionen einer reellen Veränderlichen	137
J. Ranke: Die somatisch-anthropologische Abteilung der anthropologisch-prähistorischen Sammlung des Staates	389
W. C. Röntgen: Bestimmungen des thermischen linearen Ausdehnungskoeffizienten von Cuprit und Diamant	381
M. Schmidt: Neuberechnung des Anschlusses der südbayerischen Dreieckskette an die österreichische Triangulierung bei Salzburg und scheinbare Verschiebung der Hauptdreieckspunkte Watzmann und Rettenstein (mit 3 Tafeln)	191
R. Seeliger: Bemerkungen über den Energieverlust von Elektronen beim Zusammenstoß mit Gasmolekülen	375
H. Seeliger: Über die räumliche und scheinbare Verteilung der Sterne	451
P. Stäckel: Über die singulären Lösungen einer Differentialgleichung erster Ordnung mit zwei Veränderlichen, die zugleich partikuläre Integrale sind	511
O. Szász: Über gewisse unendliche Kettenbruch-Determinanten und Kettenbrüche mit komplexen Elementen	323
W. Voigt: Über das Gesetz der Intensitätsverteilung innerhalb der Linien eines Gasspektrums	603

Ordentliche und ausserordentliche Mitglieder

der Kgl. Bayer. Akademie der Wissenschaften

im Februar 1912.

I. Philosophisch-philologische Klasse.

a) Ordentliche Mitglieder.

- Dr. v. Amira Karl, Großh. Bad. Hofrat, o. Univ.-Prof., Möhlstr. 37/o.
„ Crusius Otto, Großh. Bad. Geh. Hofrat, o. Univ.-Prof., Widenmayerstraße 10/III.
„ Frhr. v. Hertling Georg Fr., Exz., Staatsminister des K. Hauses und des Äußern, Promenadeplatz 22.
„ Kuhn Ernst, K. Geh. Rat, o. Univ.-Prof., Heßstr. 5/I.
„ Lipps Theodor, o. Univ.-Prof., Pienzenauerstr. 14/I.
„ Meiser Karl, K. Gymnasialrektor a. D., Kaulbachstr. 94/III 1.
„ v. Müller Iwan, K. Geh. Rat, o. Univ.-Prof., Siegfriedstr. 21/I.
„ Muncker Franz, o. Univ.-Prof., Liebigstr. 39/I 2. Aufg.
„ Paul Hermann, K. Geh. Hofrat, o. Univ.-Prof., Kaulbachstr. 62 a/II.
„ Streitberg Wilhelm, o. Univ.-Prof., Isabellastr. 31/II.
„ Vollmer Friedrich, o. Univ.-Prof., Königinstr. 69/IV.
„ Wecklein Nikolaus, K. Oberstudienrat, Gymnasialrektor, Ludwigstraße 14/I 3. Eing.
„ Wolters Paul, o. Univ.-Prof., Thorwaldsenstr. 11.

b) Ausserordentliche Mitglieder.

- Dr. Berneker Erich, o. Univ.-Prof., Mauerkircherstr. 16/II.
„ Frhr. v. Bissing Friedrich Wilhelm, o. Univ.-Prof., Georgenstr. 10/o.
„ Heisenberg August, o. Univ.-Prof., Hohenzollernstr. 110/III.
„ Ohlenschlager Friedrich, K. Oberstudienrat, Gymnasialrektor a. D., Luisenstr. 54/III.
„ Petzet Erich, Bibliothekar an der K. Hof- und Staatsbibliothek, Kaiserstr. 33/II.
„ Sandberger Adolf, o. Univ.-Prof., Prinzregentenstr. 48/I.

II. Mathematisch-physikalische Klasse.

a) Ordentliche Mitglieder.

- Dr. v. Baeyer Adolf, Exz., K. Geh. Rat, o. Univ.-Prof., Arcisstr. 1.
„ Burmester Ludwig, o. Prof. d. Techn. Hochsch., Kaulbachstr. 83/II.
„ v. Dyck Walther, K. Geh. Rat, o. Prof. d. Techn. Hochsch., Hildesgardstraße 5/III.
„ Ebert Hermann, o. Prof. d. Techn. Hochsch., Karl Theodorstr. 12a.
„ Finsterwalder Sebastian, o. Prof. d. Techn. Hochsch., Flüggenstr. 4.
„ Föppl August, o. Prof. d. Techn. Hochsch., Heßstr. 10/II.
„ v. Goebel Karl, K. Geh. Hofrat, o. Univ.-Prof., Kemnatenstr. 55.
„ v. Groth Paul, K. Geh. Hofrat, o. Univ.-Prof., Kaulbachstr. 62 Hochp.
„ v. Gruber Max, K. Obermedizinalrat, o. Univ.-Prof., Prinzenstr. 10.
„ Günther Siegmund, K. Geh. Hofrat, o. Prof. d. Techn. Hochsch., Nikolaistraße 1/II.
„ v. Hertwig Richard, K. Geh. Rat, o. Univ.-Prof., Schackstr. 2/III.
„ v. Linde Karl, K. Geh. Hofrat, o. Prof. d. Techn. Hochsch., Prinz Ludwigs-
höhe, Heilmannstraße 17.

- Dr. **Lindemann** Ferdinand, K. Geh. Hofrat. o. Univ.-Prof., Franz Josephstraße 9/1.
- **Mollier** Siegfried, o. Univ.-Prof., Vilshofenerstr. 10.
 - **Muthmann** Wilhelm, o. Prof. d. Techn. Hochsch., Schellingstr. 116/1.
 - **Pringsheim** Alfred, o. Univ.-Prof., Arcisstr. 12 1.
 - **Radlkofer** Ludwig, K. Geh. Hofrat. o. Univ.-Prof., Sonnenstr. 7/1.
 - **Ranke** Johannes, K. Geh. Hofrat, o. Univ.-Prof., Briennerstr. 25/III.
 - **Röntgen** Wilhelm Konrad, Exz., K. Geh. Rat. o. Univ.-Prof., Äußere Prinzregentenstraße 1/1.
 - **Rothpletz** August, o. Univ.-Prof., Giselastr. 6/1.
 - **Rückert** Johannes, o. Univ.-Prof., Nußbaumstr. 10/1.
 - **v. Seeliger** Hugo, K. Geh. Rat, o. Univ.-Prof., K. Sternwarte (Bogenhausen).
 - **Sommerfeld** Arnold, o. Univ.-Prof., Leopoldstr. 87/III.
 - **Voit** Erwin, Rektor d. Tierärztl. Hochsch., Augustenstr. 3/III.
 - **Voss** Aurel, K. Geh. Hofrat. o. Univ.-Prof., Habsburgerstr. 1/II.

b) Ausserordentliche Mitglieder.

- Dr. **Burkhardt** Heinrich, o. Prof. d. Techn. Hochsch., Prinzenstr. 13/1.
- **v. Drygalski** Erich, o. Univ.-Prof., Gaußstr. 6/1 (Bogenhausen).
 - **Frank** Otto, o. Univ.-Prof., Haydnstr. 5/II.
 - **Schmidt** Max, o. Prof. d. Techn. Hochsch., Franz Josephstr. 13/III.

III. Historische Klasse.

a) Ordentliche Mitglieder.

- Dr. **v. Baumann** Franz Ludwig, K. Geh. Rat, Reichsarchivdirektor, Theresienstr. 14/II.
- **Brentano** Lujo, K. Sächs. Geh. Hofrat, o. Univ.-Prof., Mandlstr. 5/1.
 - **Friedrich** Johann, o. Univ.-Prof., von der Tannstr. 17/II.
 - **Grauert** Hermann, K. Geh. Hofrat, o. Univ.-Prof., Isabellastr. 25/1.
 - **v. Heigel** Karl Theodor, Exz., Präsident der Akad. d. Wiss., K. Geh. Rat, o. Univ.-Prof., Theresienstr. 76/1.
 - **v. Pöhlmann** Robert, K. Geh. Hofrat, o. Univ.-Prof., Hohenzollernstr. 6.
 - **Prutz** Hans, K. Preuß. Geh. Reg.-Rat, Univ.-Prof., Galeriestr. 23/1.
 - **v. Reber** Franz, K. Geh. Rat, Honorarprofessor an der Universität, Kaulbachstr. 31/o 1.
 - **v. Riezler** Sigmund, K. Geh. Rat, o. Univ.-Prof., K. Maximilianeum.
 - **v. Rockinger** Ludwig, K. Geh. Rat, Reichsarchivdirektor a. D., Odeonsplatz 12/II.
 - **Simonsfeld** Henry, a. o. Univ.-Prof., Schellingstr. 89/III.

b) Ausserordentliche Mitglieder.

- Dr. **Doeberl** Michael, K. Oberregierungsrat, Honorarprofessor an der Universität, Schönfeldstr. 6/III.
- **Habich** Georg, Direktor des K. Münzkabinetts, Schönfeldstr. 20/II.
 - **Hager** Georg, K. Generalkonservator der Kunstdenkmale n. Altertümer Bayerns, Kochstr. 18/II.
 - **Leidinger** Georg, Oberbibliothekar an der K. Hof- und Staatsbibliothek, Kaulbachstr. 40/o.
 - **Mayr** Karl, Syndikus der K. Akademie der Wissenschaften, Honorarprofessor an der Universität, Galeriestr. 19/III.
 - **Quidde** Ludwig, Professor, Gedonstr. 4/1.

Sitzungsberichte

der mathematisch-physikalischen Klasse
der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
1912.

Sitzung am 13. Januar.

1. Herr Seb. Finsterwalder teilt mit

Beobachtungen über die Art der Gletscherbewegung.

Der ungewöhnlich warme Sommer 1911 bot Gelegenheit eisfrei gewordenen Gelände zu studieren, das noch vor ganz kurzer Zeit mächtige Eismassen bedeckten und zwar sowohl am Rande der Gletscher als auch im Innern früherer Firnfelder, in welchen neue Felsinseln mitten aus dem Eise auftauchten. Es zeigte sich, daß in unmittelbarer zeitlicher und örtlicher Nachbarschaft abwechselnd das Eis mit seinem Schutthalt den Boden schrammt und von Hervorragungen des Bodens geschrammt wird. An den einzelnen Druckstellen zwischen Eis und Boden besteht das mit feinem Sand durchsetzte Eis aus ganz dünnen, auf äußerst verwickelte Art wiederholt gefalteten Schichten. Beobachtungen auf einem Gletscher, dessen wohlausgesprochene Bänderung mit jüngerem Firn überdeckt war, ließen erkennen, daß die Gletscherbewegung wenigstens zum Teil durch Gleiten längs Rutschflächen, die der Bänderung parallel laufen, erfolgt. Es setzen sich nämlich diese Rutschflächen in die darüberliegende, an sich strukturlose Firndecke fort und prägen ihrer Oberfläche eine sehr vergängliche Scheinstruktur auf, die in zarten, schwarzen Linien die Zeichnung der Bänderung des darunterliegenden Eises wiederholt.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

2. Herr S. GÜNTHER legte für die „Sitzungsberichte“ eine Mitteilung vor, betitelt:

Ein merkwürdiger Fall von Lokalmagnetismus
an der bayerisch-sächsischen Grenze.

Mitgearbeitet hat an dieser Studie auch Studienrat F. Adami (Hof). Etwa eine Stunde nördlich von dem Dorfe Trogen bei Hof steht auf größerer Fläche eruptiver Paläopikrit an, und in dessen Nähe weisen sowohl die Deklination wie auch die Inklination so gewaltige Störungen ihres normalen Verhaltens auf, daß die meisten der aus der Literatur bekannten ähnlichen Fälle in keinem Vergleich mit diesem Verhalten gebracht werden können. Die Ursachen der Anomalie werden zu erklären gesucht.

Sitzung am 3. Februar.

1. Herr LUDWIG BURMESTER sprach über

Die Zirkularprojektion.

Bei den Propellern und insbesondere bei den Schaufeln der Turbinen wird eine theoretisch noch nicht behandelte, neue zeichnerische Darstellungs-Methode angewendet, die er Zirkularprojektion nennt. Ist in der Projektionsebene als Zeichnungsebene eine Gerade angenommen, die z. B. die Drehachse einer Turbine darstellt, und ein Punkt im Raum gegeben; wird dann der senkrechte Abstand dieses Punktes von der Drehachse um sie etwa rechtsseitig in die Projektionsebene gedreht, so beschreibt der gedrehte Endpunkt dieses Abstandes einen Kreisbogen, der in der Projektionsebene die Zirkularprojektion des im Raum gegebenen Punktes bestimmt. Demnach wird dieser Punkt durch diesen Kreisbogen auf die Projektionsebene zirkular projiziert. Jeder zur Drehachse windschiefen schrägen Geraden entspricht als Zirkularprojektion ein rechtsseitiger Ast einer Hyperbel, deren Nebenachse in der Drehachse liegt und deren halbe Hauptachse gleich dem kür-

zesten Abstand zwischen der Geraden und der Drehachse ist. Einem Geradenbündel entsprechen die rechtsseitigen Äste eines Systems von Hyperbeln, die durch zwei zur Drehachse symmetrisch liegenden Punkte gehen und deren Nebenachsen sich in der Drehachse befinden.

Die Zirkularprojektion gewährt dadurch manche konstruktive Vereinfachung, daß jeder in einer axialen Ebene liegende Kurve, also auch ihrer Schnittkurve mit einer Schaufelfläche einer Turbine, eine kongruente Kurve als Zirkularprojektion entspricht.

2. Herr H. EBERT legt eine Arbeit von Dr. KONRAD PRESSEL, Professor an der Technischen Hochschule, München, vor:

Zwei experimentelle Methoden zur Bestimmung der Form und Lage der Isothermflächen unterhalb der Erdoberfläche.

Bei der Projektierung großer Tunnelbauten ist es von höchster Wichtigkeit über die in dem Gebirgsmassive voraussichtlich anzutreffenden Temperaturen ein Urteil zu gewinnen. Seither war man auf Schätzungen angewiesen, oder die theoretischen Vorausberechnungen mußten so viele vereinfachende Annahmen, namentlich bezüglich der Oberflächengestaltung einführen, daß das Endresultat immer mehr oder weniger unsicher blieb. PRESSEL bildet die Oberfläche im verkleinerten Maßstabe nach, macht sie elektrisch leitend, stellt ihr eine ebene Fläche, die auf hohes elektrisches Potential geladen ist, gegenüber, und tastet das elektrische Feld mittels eines Ausgleichers (nach Ebert und Lütz) ab; den Flächen gleichen Potentials im Modelle entsprechen beim (stationären) Wärmeleitungsproblem in der Natur Flächen gleicher Temperatur; kennt man aus Messungen in einem einzigen relativ nur wenig tiefen Bohrloche am Berge den Temperaturgradienten der einem bestimmten Potentialgradienten im Modelle entspricht, so ist die Temperaturverteilung im ganzen zu durchtunnelnden Gebirgsstocke bekannt. Der Verschiedenheit der mittleren Jahrestemperatur

an den einzelnen Oberflächengebieten, sowie der Wärmeleitfähigkeit der Gesteine kann hierbei ebenfalls Rechnung getragen werden.

Bei einer anderen Methode wird innerhalb der in eine Kühlflüssigkeit gesetzten Hohlform, welche die Oroplastik des Gebirges getreu nachahmt, eine Flüssigkeit zum schichtweisen Erstarren gebracht, die einzelnen Erstarrungsflächen zeigen den Verlauf der Flächen gleicher Temperatur an.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

3. Herr BURKHARDT macht einige Mitteilungen über

Die Untersuchungen von Cauchy und Poisson zur Theorie der Wasserwellen.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

4. Herr A. ROTHPLETZ berichtet, daß Professor W. KATTWINKEL von seiner Reise in das Innere unserer ostafrikanischen Kolonien eine Anzahl fossiler Knochen und Zähne mitgebracht und sie der palaeontologischen Staatssammlung übergeben hat. Es ist dies ein sehr wertvolles Geschenk, weil durch diese Fossilien der Nachweis erbracht werden kann, daß die unterpliocäne Hipparionfauna Eurasiens sich südlich bis über den Aequator hinaus ausgebreitet hat. Nach den Bestimmungen von Professor Schlosser sind darunter vertreten: Hipparion, wahrscheinlich Equus, das giraffenartige Helladotherium, Dinotherium, sowie andere Proboscidier, darunter sogar Stegodon, mehrere Rhinoceroten und was besonders merkwürdig ist, auch Hippopotamus, das in Afrika aus so alten Schichten noch nicht bekannt war. Dieser Fundplatz, den Professor Kattwinkel noch weiter auszubeuten plant, verspricht für unsere Anschauungen über die Entfaltung und Verbreitung der jungtertiären Säugetierfauna von großer Bedeutung zu werden.

Sitzung am 2. März.

1. Herr S. GÜNTHER macht eine Mitteilung über die Herausgabe von J. WERNERS „Meteoroscopium“, welche nach A. A. Björnbo (Kopenhagen) Tode durch die Herren Professor Dr. E. Wiedemann und Privatdozent Dr. Würschmidt in Erlangen, mit Unterstützung der Akademie, erfolgen soll. Die Klasse schließt sich dem Antrage an, daß nicht bloß der von Herrn Björnbo vorbereitete lateinische Text, sondern auch eine deutsche Paraphrase veröffentlicht werden soll.

2. Herr ALFRED PRINGSHEIM legt vor eine Abhandlung:

Über den Taylorschen Satz für Funktionen einer reellen Veränderlichen.

Der Verfasser hat in einer vor längerer Zeit publizierten Abhandlung die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Gültigkeit der Taylorschen Entwicklung bei ausschließlicher Beschränkung auf reelle Veränderliche hergeleitet. Es ist ihm neuerdings gelungen, den wesentlichsten Teil seiner Deduktion, nämlich den Beweis für die Notwendigkeit gewisser Bedingungen, ganz erheblich zu vereinfachen. Zugleich gibt er aber auch für deren hinreichenden Charakter einen neuen und äußerst einfachen Beweis, welcher im Gegensatze zu den bisherigen Beweisen nicht auf dem Mittelwertsatze der Differentialrechnung beruht, vielmehr den unabhängig von dem letzteren leicht zu begründenden Satz von der Konstanz jeder Funktion mit dem vollständigen Differentialquotienten Null zur Grundlage hat.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

3. Herr W. MUTHMANN berichtet über eine im chemischen Laboratorium der Technischen Hochschule ausgeführte Untersuchung

über das Natriumamid.

Diese chemisch wichtige Substanz wird vom Sauerstoff der Luft allmählich zu Nitrit oxydiert und bildet mit diesem sehr explosive Mischungen, die unter Umständen scheinbar ohne äußere Ursache zur Detonation kommen. Die Reaktionsgeschwindigkeit zwischen Sauerstoff und Amid wurde bei verschiedenen Temperaturen gemessen.

Des weiteren wurden untersucht die Reaktionen von Natriumamid mit Alkohol, Chloroform, Cyaniden und Cyanamiden, ferner mit einigen Nitraten. Ammonnitrat gab beim Zusammenschmelzen mit Natriumamid Acid in guter Ausbeute.

Sitzung am 4. Mai.

1. Herr FÖPPL hält einen Vortrag:

Die Biegung einer kreisförmigen Platte.

Für eine kreisförmige Platte, die eine beliebig gegebene Einzellast trägt, kann man die Differentialgleichung der Plattenbiegung, wie schon von CLEBSCH gezeigt wurde, mit Hilfe einer Fourierschen Reihenentwicklung streng integrieren. Die von Clebsch gegebenen Formeln beschreiben die Gestalt der elastischen Fläche für eine am Umfang eingespannte Platte. Der Verfasser hat die Formeln von CLEBSCH auf anderem Wege neu abgeleitet, sie dabei berichtigt und sie auf eine am Umfange frei aufliegende Platte übertragen. Hiermit ist aber die Aufgabe erst zum Teil gelöst, da die auf die Differentialgleichung der Plattenbiegung gestützte Theorie zur Berechnung der Biegungsspannungen nicht brauchbar ist. Dies liegt daran, daß die Differentialgleichung für die nähere Umgebung der belasteten Stelle überhaupt nicht zutrifft. Um diesem Mangel abzuhelpen, wird ein neuer Ansatz für die Gleichung der elastischen Fläche gewählt, der in größeren Abständen von der Lastangriffsstelle eine Näherungslösung der Differentialgleichung bildet, bei dieser Stelle selbst aber die der strengen Lösung anhaftenden Mängel vermeidet. Die Rechnungen sind bis zur zahlenmäßigen Auswertung hin durchgeführt.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

2. Herr M. SCHMIDT spricht über

Neuberechnung des Anschlusses der südbayerischen Dreieckskette an die österreichische Triangulierung bei Salzburg.

In der Sitzung der mathematisch-physikalischen Klasse vom 4. Mai berichtete Professor Dr. M. SCHMIDT über eine Ergänzung einer früheren Arbeit, welche eine im Jahre 1903 in

Südbayern gemessene Dreieckskette erster Ordnung zum Gegenstand hatte. Diese Dreieckskette verläuft am Nordrand der bayerischen Alpen von der württembergischen Grenze bis in die Gegend von Salzburg und bildet das Schlußglied einer Längengradmessung auf dem 48. Breitenparallel, die in Brest am Atlantischen Ozean beginnt und in Astrachan am Kaspischen Meere endet und eine Ausdehnung von 53 Längengraden oder rund 4000 km besitzt.

Die ersten Anfänge dieses großen Unternehmens reichen bis 1761, d. i. bis in die Zeit der Gründung der churfürstlich bayerischen Akademie zurück, als der Direktor der Pariser Sternwarte, Cassini de Thury, der auch Ehrenmitglied der Münchener Akademie war, im Auftrag der Pariser Akademie zur Untersuchung der Krümmungsverhältnisse des Erdsphäroids auf dem Parallelkreis von Paris zwischen Straßburg und Wien die ersten genauen Dreiecksmessungen ausführte.

Neuerdings ist diese Arbeit in Verbindung mit der europäischen Gradmessung wieder aufgenommen worden und geht jetzt ihrer Vollendung entgegen.

Die südbayerische Dreieckskette bildet den Schlußstein der erwähnten Triangulierung. Ihr Anschluß an die österreichische Gradmessungstriangulierung hat neuerdings durch einige vom K. u. K. Militärgeographischen Institut in Wien im Jahre 1906 ausgeführte Ergänzungsmessungen eine kleine Änderung erfahren, die sich auf optisch-meteorologische Vorgänge bei den Winkelmessungen zurückführen lassen, die in der vorgelegten Abhandlung eingehender behandelt werden.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

3. Herr v. SEELIGER legt vor eine Abhandlung von E. GEHRCKE

Über den Sinn der absoluten Bewegung.

Es wird erläutert, daß der Begriff der „absoluten“ Bewegung eines Körpers einen doppelten Sinn hat, je nachdem man die in Deutschland oder in England übliche Auffassung zu Grunde legt. Aus der Verschiedenheit dieses Sinnes erklärt

sich die Meinungsverschiedenheit verschiedener Forscher über die absolute Bewegung. Im Anschluß hieran ergibt sich ein Standpunkt für die Beurteilung der Relativität von Bewegungen in der Mechanik und Physik.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

4. Herr A. Voss legt vor eine Abhandlung von Dr. H. MÜRTZ:

Aufbau der gesamten Geometrie auf Grund der projektiven Axiome allein.

Die Arbeit gibt, neben einer äußersten Einschränkung der geometrischen Axiomatik, die Zurückführung des Parallelenproblems auf seine letzten Elemente, ferner eine rein synthetische Begründung der Metrik. Es erweist sich, daß es insgesamt 9 reguläre Geometrien in der Ebene, 27 im Raume gibt. Unter ihnen nimmt die klassische euklidische Geometrie eine besonders ausgezeichnete Stellung ein.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

5. Herr RÜCKERT legt eine Abhandlung des Dr. BENDER vor:

Über die Entwicklung des Visceralbogens bei *Testudo graeca*. I. Die Entwicklung des Kiefer- und des Zungenbeinbogens (*Columella cruris*) und der Paukenhöhle.

Von den Resultaten dieser im Münchener Anatomischen Institut ausgeführten Untersuchung ist von allgemeinem Interesse die Feststellung, daß die *Columella* (das Gehörknöchelchen der Reptilien) bei den Schildkröten aus dem oberen Ende des zweiten Visceralbogens (Zungenbeinbogens) entsteht und von seinem ersten Auftreten an vollkommen unabhängig von der Gehörkapsel ist. Ferner, daß die Paukenhöhle aus einer Verschmelzung der dorsalen (oberen) Abschnitte der ersten und zweiten Visceralspalte, die *Tuba Eustachii* dagegen aus dem unteren Abschnitt der zweiten Spalte ihren Ursprung nimmt.

(Erscheint in den Abhandlungen.)

6. Herr v. HERTWIG bespricht die Resultate der von Herrn L. MÜLLER mit Unterstützung der Königsstiftung nach Brasilien ausgeführten Reise und legt für die Abhandlungen zwei auf Grund des gesammelten Materiales ausgeführte Untersuchungen vor.

Bis jetzt liegen vor: Allgemeine Bemerkungen über Fauna und Flora des bereisten Gebietes von L. MÜLLER und die Bearbeitung der Vogelausbeute durch C. E. HELLMAYR.

In den allgemeinen Bemerkungen wird der Einfluß, den die durch die Regenzeit und die Flut hervorgerufenen periodischen Überschwemmungen auf Flora und Fauna ausüben, wie die klimatischen und geographischen Verhältnisse des bereisten Gebietes geschildert und durch Beispiele erläutert. Ferner werden die Flora und Fauna der vier Hauptstationen der Reise eingehend besprochen und die wichtigsten biologischen Beobachtungen mitgeteilt.

Im speziellen Teil wird das ornithologische Material einer genauen Untersuchung unterzogen, wobei den einschlägigen zoogeographischen Fragen besondere Beachtung geschenkt ist. Den Schluß bildet eine Zusammenstellung der bisher für das Pará-Gebiet und die Insel Mexiana nachgewiesenen Vögel. Aus ihr ergibt sich, daß für den größten Teil der Vogelwelt, besonders die sperlingsartigen Vögel, die mächtigen Ströme Guayará und Amazonas, besonders der letztere, eine wichtige geographische Scheide bilden. (Erscheint in den Abhandlungen.)

7. Herr A. SOMMERFELD legt eine Abhandlung von Dr. OTTO HAUPT vor:

Über die Entwicklung einer willkürlichen Funktion nach den Eigenfunktionen des Turbulenzproblemcs.

Der Nachweis für die Möglichkeit der Entwicklung wird nach einer von Professor HILB ausgebildeten, an CAUCHY anschließenden Methode erbracht. Da neuerdings der stabile Charakter der Eigenfunktionen des Turbulenzproblemcs von

mehreren Seiten bewiesen ist, folgt aus dem Ergebnis der vorliegenden Abhandlung, daß auch eine beliebige Störung stabil abläuft. Die hydrodynamische Erklärung der Turbulenzercheinungen im Sinne der Methode der kleinen Schwingungen scheint hiernach unmöglich. (Erscheint in den Sitzungsberichten.)

8. Herr F_{IN}STERWALDER legt für die Sitzungsberichte zwei Abhandlungen vor. Eine von M_{AX} LAGALLY:

Über eine dem Lambertschen Problem der acht Punkte verwandte Aufgabe.

Diese neuerdings für die Photogrammetrie bedeutungsvoll gewordene Aufgabe hat 16 Lösungen, welche in 8 Gruppen zerfallen und mittels Zirkel und Lineal konstruiert werden können.

Die andere von H_{EINRICH} LIEBMAN:

Das Pentagramma mirificum und die nicht-euklidischen Parallelen.

Es wird gezeigt, daß das Gaußsche Pentagramma mirificum die Quelle vieler Sätze und Konstruktionen der nicht-euklidischen Geometrie ist und auch zur elementaren Ableitung einer von S_{TUDY} herrührenden Abbildung der Cliffordschen Parallelen des elliptischen Raumes benützt werden kann.

9. Herr A. ROTHPLETZ legte den neuen Führer durch die seit Ostern der Öffentlichkeit wieder zugängliche, neu aufgestellte Abteilung fossiler Säugetiere der palaeontologischen Staatssammlung vor, der von Professor SCHLOSSER verfaßt ist. Er soll dazu dienen, den Besucher in die systematische Anordnung dieser ungewöhnlich reichen Sammlung einzuführen und auf die besonders wichtigen oder seltenen Stücke aufmerksam zu machen. Er wird allen denen, die, ohne Spezialisten in diesem Fache zu sein, doch an der so merkwürdigen Entwicklungsreihe der Säugetiere von der Tertiärzeit an bis in die Gegenwart ein besonderes Interesse nehmen, ein sehr bequemer und lehrreicher Leitfaden sein. Wenn dieser Führer (für 25 Pfg.

erhältlich) Anklang beim Publikum finden wird, ist beabsichtigt, einen ähnlichen Führer auch für die Reptilien- und Fische säle herauszugeben, welche voraussichtlich in ihrer neuen Form im Herbst geöffnet werden können.

Sitzung am 8. Juni.

1. Herr A. SOMMERFELD legt eine Arbeit vor:

Interferenzerscheinungen mit Röntgenstrahlen
beim Durchgang durch Kristalle

VON W. FRIEDRICH, P. KNIPPING UND M. LAUE und erläutert die Bedeutung dieser Versuche für die Klärung unserer Auffassung von der Natur der X-Strahlen sowie für die Erforschung der Kristallstruktur. Die Versuche sind im Institut für theoretische Physik von den Herren Friedrich und Knipping gemacht; die Anregung zu diesen Versuchen und ihre Theorie ist von Herrn Laue gegeben. (Erscheint in den Sitzungsberichten.)

2. Herr A. PRINGSHEIM legt für die Sitzungsberichte vor eine Abhandlung von OTTO SZASZ:

Über gewisse unendliche Kettenbruch-Determinanten und Kettenbrüche mit komplexen Elementen.

Der Grenzwert eines unendlichen Kettenbruches mit den Teilennern 1 und Teilzählern von der Form $a_n z^2$ läßt sich, wenn die Reihe der beliebig komplex zu denkenden Zahlen a_n absolut konvergiert, als Quotient zweier unendlicher konvergenter Determinanten darstellen, deren jede eine ganze transzendente Funktion von z definiert. Der Kettenbruch konvergiert alsdann in denjenigen Gebieten, in welchen die Nenner-Determinante nicht verschwindet. Die Bestimmung solcher Gebiete erzielt der Verfasser durch Anwendung dreier von ihm aufgestellter Abschätzungsformeln auf das unendliche lineare Gleichungssystem für die Näherungsbruch-Nenner des Ketten-

bruches und gelangt sodann insbesondere durch Spezialisierung von z zu einer Anzahl neuer Konvergenzkriterien für Kettenbrüche mit konstanten komplexen Gliedern, deren eines eine merkliche Verallgemeinerung eines von Herrn Helge von Koch herrührenden, sehr speziellen Kriteriums liefert.

Sitzung am 6. Juli.

1. Herr LUDWIG BURMESTER sprach über einen

Beitrag zur Theorie der geometrisch-optischen
Gestalttäuschungen.

Ein rechteckiges Kartonblatt, das längs seiner kurzen Mittellinie so geknickt ist, daß die beiden Hälften etwa einen rechten Winkel bilden, sei vor den Beobachter mit der Hohlseite nach ihm gewendet ohne einfallenden Schatten vertikal auf einen Tisch gestellt. Wird dann von dem Beobachter mit einem Auge die auf dem Tisch befindliche Hohllecke des geknickten Blattes dauernd fixiert, so erscheint ein erhabenes geknicktes Truggebilde in der Gestalt eines schräg gestellten, verzerrten Daches, das nur mit den beiden vorderen Ecken auf dem Tisch gestützt ist. Wenn nun nach dem Erscheinen des Truggebildes der Beobachter während des steten einäugigen Fixierens jener Hohllecke sich langsam hin und her, auf und nieder bewegt, dann erscheint das Truggebilde in seltsamen Bewegungen und gestaltlichen Veränderungen, wobei es beständig mit jenen beiden vorderen Ecken in festen Punkten auf dem Tisch gestützt bleibt. Diese Erscheinung wird durch eine Ergänzung zu der „Theorie der geometrisch-optischen Gestalttäuschungen“ erklärt, die der Vortragende in der Zeitschrift für Psychologie, Bd. 41 und 50 veröffentlicht hat.

2. Herr O. FRANK berichtet über seine gemeinschaftlich mit A. ARGIRIS ausgeführten Untersuchungen, nach denen die Monoglyceride der höheren Fettsäuren nicht unverändert im Darm resorbiert, sondern vollständig gespalten und in der Darmwand zu Neutralfett synthetisiert werden.

3. Herr SOMMERFELD legt als Nachtrag zu den in der vorangehenden Sitzung vorgeführten Interferenzerscheinungen mit Röntgenstrahlen eine Abhandlung von M. LAUE vor:

Über die quantitative Prüfung der dort gegebenen Theorie an den Photogrammen mit Zinkblende, sowie eine Mitteilung von R. SEELIGER:

Bemerkung über den Energieverlust von Elektronen beim Zusammenstoß mit Gasmolekülen.

(Erscheinen in den Sitzungsberichten.)

4. Herr RÖNTGEN trägt über eine im physikalischen Institut von Fr. A. DEMBOWSKA in den letzten zwei Jahren ausgeführte

Untersuchung über den thermischen linearen Ausdehnungskoeffizienten von Cuprit und Diamant vor. Es hat sich ergeben, daß der Cuprit einer früher von Fireau ausgesprochenen Vermutung entsprechend in der Nähe von 0° ein Dichtigkeitsmaximum aufweist, daß aber der Diamant sich nicht so verhält, wie Fireau meinte; er zieht sich, wenigstens bis in den Temperaturbereich der flüssigen Luft, bei abnehmender Temperatur stets mehr und mehr zusammen, aber in der Weise, daß dabei der Ausdehnungskoeffizient immer kleiner und schließlich kaum mehr meßbar wird. Dieses Verhalten des Diamants wird in Beziehung gebracht u. a. zu dem Mernitschen Wärmetheorem.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

5. Herr J. RANKE berichtet über die Neueinrichtung der somatisch-anthropologischen Abteilung der anthropologisch-prähistorischen Sammlung des Staates und lädt zum Besuche ein.

6. Herr v. DYCK legt der Akademie die in nächster Zeit der Öffentlichkeit zu übergebende Biographie von

Georg von Reichenbach,

des berühmten Mitgliedes ihrer mathematisch-physikalischen Klasse, vor, die er im Auftrag des Deutschen Museums verfaßt hat.

Sitzung am 2. November.

1. Herr EBERT legt das Protokoll der luftelektrischen Kommission der kartellierten Deutschen Akademien samt den wissenschaftlichen Beilagen dazu vor; unter den letzteren befindet sich das ausführliche Referat über die Niederschlags Elektrizität, welches Herr Professor BENNDORF aus Graz bei der diesjährigen Tagung der Kommission hier in München (vor Pfingsten) erstattete.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

2. Herr S. GÜNTHER legt die mit Kommentar und Wörterbuch versehene Bearbeitung von JOHANNES WERNER'S (aus Nürnberg) Schrift „De Meteoroscopiis“ vor und erhält den Auftrag, sich wegen der Veröffentlichung dieses Werkes mit der Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner in Leipzig in Verbindung zu setzen.

3. Herr v. SEELIGER überreicht der Klasse das Werk des kürzlich verstorbenen Dr. S. RIEFLER: „Tabellen der Luftgewichte, der Druckäquivalente und der Gravitation“ und knüpft daran eine Würdigung der hervorragenden Verdienste des Verfassers namentlich auf dem Gebiete der Mechanik sowie seiner uneigennütigen Gesinnung, die er u. a. auch durch die Schenkung sehr wertvoller Uhren an die K. Sternwarte betätigt hat.

Sitzung am 7. Dezember.

1. Herr v. DYCK legt vor und bespricht eine kleine Arbeit von Herrn P. STÄCKEL in Karlsruhe:

Über die singulären Lösungen einer Differentialgleichung erster Ordnung mit zwei Veränderlichen, die zugleich partikuläre Integrale sind. (Erscheint in den Sitzungsberichten.)

2. Herr v. SEELIGER legt eine für die Sitzungsberichte bestimmte Abhandlung vor:

Über die räumliche und scheinbare Verteilung der Sterne.

Diese bildet eine Fortsetzung seiner seit vielen Jahren geführten Untersuchungen über die Konstitution des Fixsternsystems, dem wir zugehören. Neben einer kritischen Beleuchtung der verschiedenen Annahmen, von denen man in Ermangelung eines unbegrenzt großen statistischen Materials ausgehen kann, wird die schon früher vom Vortragenden weiter verfolgte Annahme, daß nämlich die Leuchtkraft der Weltkörper einen endlichen Grenzwert tatsächlich nicht überschreitet, rechnerisch verwertet und zwar mit Hilfe eines zum Teil neu bearbeiteten Beobachtungsmaterials. Dann lassen sich sowohl die räumliche Verteilung der Sterne als auch die endliche Begrenzung des ganzen Fixsternsystems angeben, wenn auch begreiflicherweise nur in ganz rohen Umrissen. Danach erfüllt die Hauptmasse der Fixsterne einen Raum, der ähnlich einer flachen Scheibe begrenzt ist. Das Sonnensystem steht nicht gar weit von der Mitte der Scheibe. Die Grenzen liegen in der Milchstraße in einer Entfernung, zu deren Durchquerung das Licht etwa 25 000 Jahre braucht, während in darauf senkrechter Richtung die Grenzen nur in dem fünften Teil der Entfernung liegen.

3. Herr EBERT legt vor eine Abhandlung von Gymnasialprofessor Dr. ENDRÖS in Freising:

Vibrationsbeobachtungen in den oberbayerischen Seen und analoge Erscheinungen in den Meeren.

An der Hand des durch registrierende Pegelapparate an einer großen Zahl oberbayerischer Seen erhaltenen Beobachtungsmateriales und neuer Untersuchungen am Ammersee werden jene kurzperiodischen Wasserstandsschwankungen untersucht, welche die Seichesschwingungen überlagern und vom Winde, wie auch von den im See verkehrenden Dampfschiffen ausgelöst werden. Diese von FOREL Vibrationen genannten Schwankungen erweisen sich gewöhnlich als Wasserwellen großer Länge, welche unabhängig von den Oberflächenwellen im See fortschreiten und an den einzelnen Uferstellen lokale Resonanzschwingungen auslösen, wobei sich zeigte, daß eine bestimmte Wassermasse am Ufer auch ohne die Begrenzung einer Bucht zu einem schwingungsfähigen Gebilde werden kann. Die Ergebnisse in den Seen beleuchten die analogen Schwankungen in den Meeren, die an bestimmten Küstenpunkten enorme Höhen erreichen können.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

4. Herr FINSTERWALDER legt vor und bespricht eine Abhandlung von H. LIEBMANN:

Berührungstransformationen der geodätischen Linien.

Jede umfangstreue Berührungstransformation auf einer beliebigen Fläche transformiert geodätische Linien wieder in geodätische Linien und man kann ihr flächentreue Punkttransformationen auf einer ganzen Klasse von anderen Flächen zuordnen. Handelt es sich um solche Berührungstransformationen auf einer nichteuklidischen Ebene, so ist unter den Flächen mit zugeordneten flächentreuen Punkttransformationen wieder eine auf einer nichteuklidischen Ebene abwickelbare Fläche,

wodurch die umfangstreuen Berührungstransformationen und die flächentreuen Punkttransformationen der nichteuklidischen Ebene in enge Beziehung zueinander gebracht werden.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

5. Herr SOMMERFELD legt vor und bespricht eine Abhandlung von Herrn WOLDEMAR VOGT, korrespondierendem Mitglied der Klasse:

Über das Gesetz der Intensitätsverteilung innerhalb der Linien eines Gasspektrums.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

6. Herr VON GROTH legt als Fortsetzung der Veröffentlichungen aus den wissenschaftlichen Ergebnissen der Merzbacherschen Tian-Schan-Expedition eine petrographische Studie des Pfarrers GLUNGLER über die Bogdo-Ola-Gruppe vor.

Dieses Gebirgsglied bildet sowohl in orographischer wie petrographischer Beziehung innerhalb des Gebirgs ganzen einen gut charakterisierten besonderen Teil. Im Gegensatz zu den übrigen Gebieten sind hier die Tiefengesteine noch nicht bloßgelegt und geben ihr Dasein im Untergrund nur durch die metamorphosierenden Wirkungen auf die Oberflächengesteine kund. Die Hauptgesteinsmasse ist aus Sedimenten zusammengesetzt, welche zu den Kategorien der Sand-, Ton- und Kalksteine gehören. Durchbrochen und zum Teil überlagert werden diese von Erguß- und Ganggesteinen, deren saurer und basischer Pol durch verschiedene vermittelnde Zwischenglieder verbunden sind. Bei der weitgehenden Gesteinsumbildung haben offenbar Kontakt- und Dynamometamorphose zusammengewirkt. Die Sedimente gehören mit hoher Wahrscheinlichkeit dem Oberkarbon oder etwas höheren Horizonten an. Die Bildungsperioden der Sedimente und Eruptivgesteine müssen teilweise nahe beieinander liegen. Unter den letzteren gehört der Kordierit-Liparit zu den jüngsten Bildungen.

(Erscheint in den Abhandlungen.)

7. Herr v. Dyck berichtet über seine weiteren Studien über noch unveröffentlichte Schriften und Briefe von Johannes Kepler, die in Fortsetzung der Veröffentlichungen im 26. Bande der Akademischen Abhandlungen im Zusammenhange zum Abdruck gelangen sollen.

Es handelt sich zunächst um eine vom Leiter der Studienbibliothek in Linz, Professor Dr. K. SCHIFFMANN unlängst aufgefundene und in dankenswerter Weise zur Verfügung gestellte Druckschrift:

„Joannis Kepleri Funera domestica duo luctuosissima“ vom Jahre 1616, die der Trauer um den Tod der ersten Gattin und eines Sohnes Ausdruck gibt.

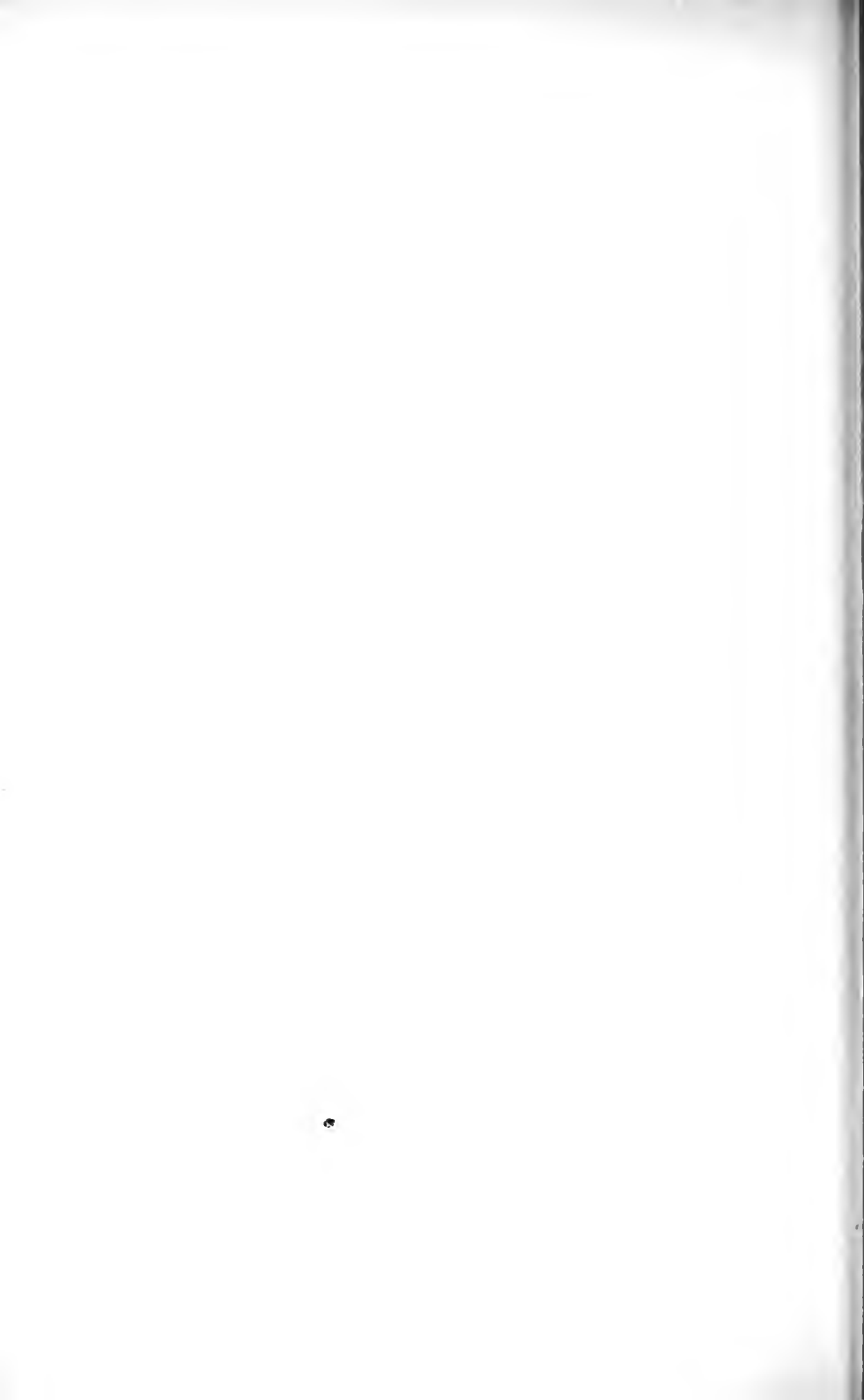
Sodann um ein Gedicht auf den Tod Kaiser Rudolfs II und auf den Regierungsantritt des Kaisers Matthias, eine „Abend- und Morgenfeier“ „*Νυχθημερον* augustale“, vom Jahre 1612;

sowie um ein Hochzeitsgedicht Keplers auf Kaspar Dornavius von 1608 —

beide Drucke sind im Besitze von Professor M. Ludendorff des astro-physikalischen Instituts in Potsdam, der sie in entgegenkommendster Weise zur Veröffentlichung überlassen hat.

Weiter hat der Berichterstatter in London im Britischen Museum einen Brief Keplers an Edmund Bruce aus dem Jahre 1603 aufgefunden, dessen Inhalt durch seine Bezugnahme auf Galilei's Vorträge in Padua spezielles Interesse bietet und der eine Lücke zwischen drei bekannten Briefen von Bruce an Kepler enthält.

Im K. Staatsarchiv in Stuttgart endlich fand Geheimer Archivrat Dr. KRAUS einen Brief Keplers, vermutlich aus dem Jahre 1629, in welchem er den Landgrafen Philipp von Hessen um Unterstützung der Herausgabe der *Observationes* des Tycho Brahe ersucht. Auch dieser historisch interessante Brief wurde in dankenswertester Weise von seiten der Leitung des Archivs für die Veröffentlichung zur Verfügung gestellt.



Verzeichnis der im Jahre 1912 eingelaufenen Druckschriften.

Die verehrlichen Gesellschaften und Institute, mit welchen unsere Akademie in Tauschverkehr steht, werden gebeten, nachstehendes Verzeichnis als Empfangsbestätigung zu betrachten.

Aachen. Geschichtsverein:

— — Zeitschrift, Bd. 33, Heft 1—4, 1911.

Aarau. Historische Gesellschaft des Kantons Aargau:

— — Mitteilungen, Heft 12 (Festschrift).

Abbeville. Société d'Émulation:

— — Bulletin trimestriel 1911, No. 3, 4; 1912, No. 1, 2.

— — Mémoires, tom. 7, part 1, 8^o.

Adelaide. Royal Society of South-Australia:

— — Transactions, Proceedings and Report, vol. XXXV, 1911.

— Observatory:

— — Meteorological Observations 1906 und 1907.

Acireale. Accademia:

— — Rendiconti e Memorie, Classe di Lettere, vol. 7, 1909—11.

Agram. Südslavische Akademie der Wissenschaften:

— — Codex diplomat. regni Croatiae, Dalmatiae et Slavoniae, vol. IX.

— — Ljetopis 26, 1912.

— — Rad, Kniga 188—192.

— — Zbornik, Kniga XVII, 1.

— — Rječnik 30.

— — Starine, vol 33.

— — Opera Acad. scient. et artium Slav. merid., vol. 19—21.

— K. Kroat.-slavon.-dalmatinisches Landesarchiv:

— — Vjestnik, Bd. XIV, Heft 1, 2.

— Kroat. Naturwissenschaftl. Gesellschaft:

— — Glasnik, Bd. 22, No. 1, 2; Bd. 23, No. 1—4; Bd. 24, No. 1—3.

Sitzungsb. d. math.-phys. Kl. Jahrg. 1912.

d

Aix. Société d'études Provençales:

- — Annales de Provence. 8^e année, No. 3, 4; 9^e année, No. 1, 2.
- Bibliothèque de l'Université:
- — Annales de la faculté des lettres, tom. 4. No. 3, 4; tom. 5. No. 1, 2.
- — " " " " " de droit, tom. 4, No. 3, 4.
- — Séance publique 91, 1911.

Albi. Société des sciences, arts etc. du Tarn:

- — Revue du département du Tarn, année 36. No. 3-6; 37. No. 1, 2.

Albuquerque. University of New Mexico:

- — Bulletin. Whole No. 62, 63, 67.

Alençon. Société historique et archéologique de l'Orne:

- — Bulletin, tom. 30, No. 1-4; tom. 31, No. 1-4.

Allegheny. Observatory:

- — Publications, vol. II, No. 14-18.

Altenburg. Geschichts- und altertumsforschender Verein des Osterlandes:

- — Mitteilungen, N. F., Bd. 15.

Amani. Biologisch-landwirtschaftliches Institut:

- — Der Pflanze, Bd. 8, No. 1-4 und Beilage, No. 5-11.

Amiens. Académie:

- — Mémoires, tom. 57, 1910; tom. 58, 1911.
- Société des Antiquaires de Picardie:
- — Bulletin trimestriel, année 1911, trim. 1-4; 1912, trim. 1.
- — La Picardie, tom. 4, No. 3.
- — Durand: Chants royaux 1911.

Amsterdam. K. Academie van Wetenschappen:

- — Verhandelingen, afd. Natuurkunde, II. sectie, XVII, 1; I. sectie, XI, 3, 4.
- — Verslagen en vergaderingen, deel 20, No. 1, 2.
- — Verhandelingen, afd. Letterkunde, Nieuwe Reeks, deel XII, No. 2, 3; deel XIII, No. 1.
- — Jaarboek 1911.
- — Prijsvers, 1912, 1 Stück.
- K. N. aardrijkskundig genootschap:
- — Tijdschrift, deel 29, No. 1-6.
- Wiskundig genootschap (Société de mathémat.):
- — Nieuw archief, 2. Reeks, deel 10, stuk 1, 2.
- — Wiskundige opgaven; Register zu deel 11, stuk 1-3.
- — Revue des publications mathém., tom. 20, partie 1, 2.

Ansbach. Historischer Verein:

- — 59. Jahresbericht, 1912.

Antwerpen. Société d'Astronomie d'Anvers:

- — Gazette astronomique, No. 49-62.
- — Rapport 1911.

- Arpino.** Museo Civico:
 — — Arpinum, Bollettino, anno 1, No. 1.
- Arras.** Académie des sciences, lettres et arts:
 — — Mémoires, 2^e série, tom 35—42 (1904 - 1911).
- Aschaffenburg.** K. Humanistisches Gymnasium:
 — — Jahresbericht 1911/12.
 — — Programm von Steinheimer.
- Athen.** École Française:
 — — Bulletin du Correspond. Hellénique, année 36, No. 1—4, 1912.
 — — Wissenschaftliche Gesellschaft:
 — — Athena, tom. 23, Heft 3, 4; tom. 24. Heft 3.
 — — American school of classical studies at Athens:
 — — Seager, Rich. B.: Explorations in the Island of Mochlos, Boston 1911.
 — — Universität:
 — — Ἐπιστημονική ἐπετροίς 8, 1.
 — — Τὰ κατὰ τὴν πορνείαν, 1908/09.
- Augsburg.** Historischer Verein:
 — — Zeitschrift, 37. Jahrg., 1911; 38. Jahrg., 1912.
- Aurillac.** Société des lettres, sciences et arts:
 — — Revue de la Haute-Auvergne, 13^e année, 1911, fasc. 4; 14^e année, 1912, fasc. 1—3.
- Bagnères-de-Bigorre.** Société Ramond:
 — — Explorations Pyrénéennes, Bulletin, No. 46, 1—4.
 — — Folklore Pyrenéen:
 — — Bulletin trimestr., année 1911, No. 1.
 — — Petit manuel de l'arbre et de l'eau.
- Baltimore.** Peabody Institute:
 — — 45th Annual Report, 1912.
 — — Johns Hopkins University:
 — — Circulars 1911, No. 5—10; 1912, No. 1, 2.
 — — American Journal of Mathematics. vol. 33, No. 3, 4; vol. 34, No. 1.
 — — American Journal of Philology, vol. 32, No. 2—4.
 — — Bulletin of the Johns Hopkins Hospital, No. 252—262.
 — — Studies in historical and political Science, vol. 28, No. 1—4; vol. 29, No. 1—3; vol. 30, No. 1.
 — — Chemical Society:
 — — American Chemical Journal, vol. 45, No. 5, 6; vol. 46, No. 1—6; vol. 47, No. 1, 2.
 — — Maryland Geological Survey:
 — — Maryland Geological Survey, vol. 9, 1910.

Bamberg. K. Bibliothek:

- — Katalog der Bibliothek des Frhr. Marschalk Ostheim, Abt. 1—3, 1911.
- — Handschriften, Bd. 3, Schluß, 1912.
- K. Altes Gymnasium:
- — Jahresbericht 1911/12 mit Programm von Bürner.
- K. Neues Gymnasium:
- — Jahresbericht 1911/12 mit Programm von Mair.
- K. Lyzeum:
- — Jahresbericht 1911/12.
- Historischer Verein:
- — Jahresbericht 69, 1911.

Barbados. Imp. Commissioner of agriculture:

- — Agricultural News, No. 253—278.
- — Bulletin 1912, XII, No. 1, 2.

Barcelona. R. Academia de Ciencias y Artes:

- — Memorias, vol. 9, No. 1; vol. 10, No. 3—12.
- — Nomina del personal 1911/12.
- Club Montanyenc:
- — Bulletti, any 1, No. 1—7.
- Institut d'Estudis Catalans:
- — Anuari 1909/10.
- — Arxivs I, 1.
- — Les Monedes Catalanes, vol. 2, 1909.
- — Obres d'Auzias March I.

Bar-le-Duc. Société des lettres, sciences et arts:

- — Mémoires, IV. sér., tom. 8, 1910; tom. 9, 1911.

Basel. Historisch-antiquarische Gesellschaft:

- — Basler Zeitschrift für Geschichte und Altertumskunde, Bd. XI, Heft 1, 2; Bd. XII, Heft 1.
- Naturforschende Gesellschaft:
- — Verhandlungen, Bd. 22.
- Universität:
- — Schriften der Universität aus dem Jahre 1911/12 in 4^o und 8^o.
- — Jahresverzeichnis der Schweizer Universitätsschriften 1911/12.

Bastia. Société des sciences historiques et naturelles:

- — Bulletin, fasc. 328—330, 334—342.

Batavia. Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen:

- — Tijdschrift voor Indische Taal-, Land- en Volkenkunde, deel 54, afl. 1—4.
- — Notulen van de vergaderingen, deel 49, afl. 3, 4.
- — Verhandelingen, deel 59, afl. 3.

Batavia. Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen:

- — Rapporten van de commissië in Nederlandsch-Indie 1909—1911.
- — Commissië in Nederlandsch Indie von oudheidkundig ondetzock 1912, 1, 2.
- — Rinkes: Javaansche Couranten.
- R. Magnetical and Meteorological Observatory:
- — Observations, vol. 31, 1908; vol. 32, 1909.
- — Seismological Bulletin 1912, No. 1, 2, 4.
- — Verhandelingen 1, 2.

Bayreuth. K. Humanistisches Gymnasium:

- — Jahresbericht 1911/12 mit Programm von Gottanka.
- Historischer Verein:
- — Archiv für Geschichte und Altertumskunde von Oberfranken, Bd. 25, Heft 1.

Belgrad. K. Serbische Akademie der Wissenschaften:

- — Glas, vol. 85, 88.
- — Godišnjak, vol. 24, 1910.

Bergen (Norwegen). Museum:

- — Aarsberetning for 1911.
- — Aarbog 1911, Heft 3; 1912, Heft 2.
- — Skrifter, N. R., Bd. II, No. 1.

Bergzabern. K. Progymnasium:

- — Jahresbericht 1911/12.

Berkeley. University of California:

- — Bulletin, third Serie, vol. V, No. 3—11.
- — Chronicle, vol. 13, No. 4; vol. 14, No. 1, 2.
- — Publications, Botany, vol. 4, No. 12—14; American Archaeology etc., vol. 10, No. 2, 3; Geology, vol. 6, No. 12—19; vol. 7, No. 1, 2; Class. Philology, vol. 2, No. 8, 9; Modern Philology, vol. 2, No. 3—5; Semitic Philology, vol. 2, No. 3; Physiology, vol. 4, No. 8—15; Mathematic, vol. 1, No. 1; Pathology, vol. 2, No. 4—7; Zoology, vol. 7, No. 9, 10; vol. 8, No. 1, 8, 9; vol. 9, No. 1—5; vol. 10, No. 1—8; History, vol. 1, No. 1.
- — Academy of Pacific Coast history, vol. 2, No. 5.
- College of Agriculture:
- — Bulletin 215—221, 227, 228.

Berlin. K. Preuß. Akademie der Wissenschaften:

- — Abhandlungen } Philos.-histor. Klasse, 1911, 4^o.
- — Abhandlungen } Physikal.-math. Klasse, 1911, 4^o.
- — Sitzungsberichte 1911, No. 39—53; 1912, No. 1—28.
- — Politische Korrespondenz Friedrich des Großen, Bd. 35.
- — Inscriptiones Graecae, vol. XI, fasc. 2 = Insc. Deli.

Berlin. Archiv der Mathematik und Physik:

- — Archiv, Bd. 19, 1—4; Bd. 20. 1—3.
- K. Bibliothek:
- — Jahresbericht für 1911/12.
- Deutsche Chemische Gesellschaft:
- — Berichte. Jahrg. 45, No. 1—17 und Mitgliederverzeichnis 1912.
- Deutsche Geologische Gesellschaft:
- — Abhandlungen, Bd. 63, Heft 4; Bd. 64, Heft 1—3.
- — Monatsberichte 1911, No. 11, 12; 1912, No. 1—6.
- Medizinische Gesellschaft:
- — Verhandlungen, Bd. 42, 1912.
- Deutsche Physikalische Gesellschaft:
- — Die Fortschritte der Physik. 67. Jahrg., 1911, 1—3.
- — Verhandlungen, Jahrg. 14, No. 1—24.
- Physiologische Gesellschaft:
- — Zentralblatt für Physiologie, Bd. 25, No. 22—26, 26a; Bd. 26, No. 1—19.
- — Bibliographia physiologica, III. Serie, Bd. 7, No. 3, 4; Bd. 8, No. 1.
- K. Technische Hochschule:
- — Rede von Scheffers, 1912.
- Redaktion des „Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik“:
- — Jahrbuch, Bd. 40, Heft 2, 3; Bd. 41 Heft 1, 2.
- Kais. Deutsches Archäologisches Institut (röm. Abteilung s. unter Rom):
- — Jahrbuch, Bd. 26, Heft 4; Bd. 27, Heft 1, 2.
- K. Preuß. Meteorologisches Institut:
- — Veröffentlichungen, No. 241—244. 246—254.
- Preuß. Geologische Landesanstalt:
- — Jahrbuch 1908 II; 1911 II 1, 2.
- — Beiträge zur geologischen Erforschung der deutschen Schutzgebiete, Heft 3.
- Lehranstalt für die Wissenschaft des Judentums:
- — 30. Bericht, 1912.
- — Schriften, Bd. 2, Heft 1—4.
- Astronomisches Recheninstitut:
- — Berliner Astronomisches Jahrbuch für 1914.
- — Veröffentlichungen, No. 41.
- Verein zur Beförderung des Gartenbaues in den preuß. Staaten:
- — Gartenflora, Jahrg. 1912, No. 1—24; 1913, No. 1.
- — Mitgliederverzeichnis 1912.

- Berlin.** Verein für Geschichte der Mark Brandenburg:
 — — Forschungen zur brandenburgischen und preußischen Geschichte,
 Bd. 24, 2. Hälfte; Bd. 25, 1. Hälfte.
 — Verein für die Geschichte Berlins:
 — — Schriften, Heft 46, 1912.
 — — Mitteilungen 1912, No. 1—12.
 — — Mitgliederverzeichnis, No. 36.
 — Zeitschrift für Instrumentenkunde:
 — — Zeitschrift, 32. Jahrg., No. 1—12.
- Bern.** Schweizerische Naturforschende Gesellschaft:
 — — Actes de la 94. Session, tom. 1, 2.
 — — Neue Denkschriften, Bd. 46, 1911.
 — Allgemeine Geschichtsforschende Gesellschaft der
 Schweiz:
 — — Jahrbuch, Bd. 37.
 — Historischer Verein:
 — — Archiv, Bd. 21, 1912.
 — — Glasgemälde von Sumiswald 1912.
 — Universitätskanzlei:
 — — Schriften der Universität, 1911/12.
- Besançon.** Société d'Emulation du Doubs:
 — — Mémoires, sér. VIII, vol. 5, 1910.
- Beyrut.** Université Saint Joseph:
 — — Mélanges de la Faculté Orientale, tom. V, 2.
- Béziers.** Société archéol., scientif. et littéraire:
 — — Bulletin, 3. sér., tom. 9, livr. 1.
- Bologna.** R. Accademia delle Scienze dell' Istituto:
 — — Classe di scienze morali: a) Sezione di scienze storico-filologiche,
 Memorie, ser. I, tom. 5, fasc. 1; tom. 6, 1911/12; b) Sezione di
 scienze giuridiche, Memorie, ser. I, vol. V, 1 und VI, 1911/12.
 Classe di scienze fisiche: Memorie VIII, 1911/12.
 — — Rendiconto, Classe di scienze morali, vol. 4, 1910—11; vol. 5,
 1911—12.
 — — Rendiconto, Classe di scienze fisiche, N. Ser., vol. 15, 1910—11.
 — Biblioteca comunale:
 — — L' Archiginnasio, anno VII, No. 1/2.
 — R. Deputazione di storia patria per le Provincie di Romagna:
 — — Atti e Memorie, ser. IV, vol. 1, 1910/11; vol. 2, fasc. 1—3.
 — Osservatorio astronomico e meteorologico:
 — — Osservazioni dell' annata 1910.
- Bombay.** Government:
 — — Rainfall, vol. 1, 1910.
 — Meteorol. department siehe Simla.

Bonn. Universitätsbibliothek:

- — Schriften aus dem Jahre 1911/12.
- Verein von Altertumsfreunden im Rheinlande:
- — Bonner Jahrbücher, Heft 120. 1—3 und Bericht der Kommission für Denkmalpflege 1909/10.
- Naturhistorischer Verein der preußischen Rheinlande:
- — Verhandlungen, 68. Jahrg., 1. und 2. Hälfte.
- — Sitzungsberichte 1911, 1. und 2. Hälfte.

Bordeaux. Commission météorologique:

- — Bulletin, année 1910.
- Société des sciences physiques et naturelles:
- — Procès-verbaux 1910/11.
- Société de géographie commerciale:
- — Bulletin 1912, année 38, No. 1—7.
- Société Linnéenne:
- — Actes, vol. 64, 1910; vol. 65, 1911.

Boston. American Academy of Arts and Sciences:

- — Proceedings, vol. 47, No. 8—21; vol. 48, No. 1—7, 9, 10.
- American Urological Association:
- — Transactions, vol. 5, 1911; vol. 6, 1912.
- Museum of Fine Arts:
- — Bulletin, No. 55—60.
- — Annual Report 36, 1911.
- Society of Natural History:
- — Memoirs, vol. 7, 1912.
- — Proceedings, vol. 34, No. 9—12.

Bourg. Société d'émulation:

- — Annales 44, 1911, Janv., Juin, Juillet—Déc.

Brasso. Historische Kommission:

- — Quellen zur Geschichte der Stadt Brasso, Bd. 5, 1909.

Braunschweig. Archiv der Stadt:

- — Urkundenbuch, Bd. IV, 1—3.
- — Bericht über Archiv und Bibliothek 1906—1911.

Bremen. Meteorologisches Observatorium:

- — Deutsches meteorologisches Jahrbuch, Jahrg. 22, 1911.
- Naturwissenschaftlicher Verein:
- — Abhandlungen, Bd. XXI, 1.

Breslau. Schlesische Gesellschaft für vaterländische Kultur:

- — Jahresbericht, 88, I, II, 1910; 89, I, II, 1911.

Bromberg. Stadtbibliothek (Deutsche Gesellschaft für Kunst und Wissenschaft):

- — Jahresbericht 10.
- — Jahresbericht (Abt. Literatur) 9.

Bromberg. Stadtbibliothek (Deutsche Gesellschaft für Kunst und Wissenschaft):

- — Veröffentlichungen 4 und 5.
- Kaiser Wilhelms-Institut für Landwirtschaft:
- — Mitteilungen, Bd. 4, Heft 2—5; Bd. 5, Heft 1, 2.

Brünn. Mährisches Landesmuseum:

- — Zeitschrift, Bd. XII, Heft 1, 2.
- — Zprava (Bericht über die Tätigkeit der Mähr. Museungesellschaft) für das Jahr 1911.
- — Libri citationum et sententiarum, tom. VII, 1490 - 1503.
- Verein für die Geschichte Mährens und Schlesiens:
- — Zeitschrift, 16. Jahrg., Heft 1—4.
- Naturforschender Verein:
- — Verhandlungen, Bd. 49, 1910.

Brüssel. Académie Royale de médecine:

- — Bulletin, IV^e sér., tom. 25, No. 10. 11; tom. 26, No. 1—9.
- Académie Royale des sciences:
- — Annuaire 1912.
- — Bulletin: a) Classe des lettres, 1911, No. 12; 1912, No. 1—11;
- b) Classe des sciences, 1911, No. 12; 1912, No. 1—11.
- — Mémoires, Classe des sciences, Collection in 8^o, II^e sér., tom. 3, fasc. 5.
- — Mémoires, Classe des lettres, Collection in 8^o, tom. 8, fasc. 1; tom. 9, fasc. 1.
- — Mémoires, Classe des sciences, Collection in 4^o, II^e sér., tom. 3, fasc. 8.
- — Programme des concours, Classe des lettres, 1910—12, 1913.
- — " " " " " " sciences, 1912, 1913.
- — Commission Royale d'Histoire: Buffin. Revolution 1830/31, 1. 2. Bruxelles 1912.
- — Cartes et diplômes impr. tom. 11, 1912.
- — Cuvelier: Les dénombrements de foyers en Brabant 1912.
- Ministère des Colonies:
- — Annales du Musée du Congo Belge: Zoologie, sér. I, tom. 2, fasc. 3.
- — Musée R. d'Histoire naturelle de Belgique 1911, mem. 4 (Stübel); 1911, mem. 4 (Hind).
- Observatoire Royal siehe Uccle.
- Société d'archéologie:
- — Annales 1911, No. 2—4; 1912, No. 1. 2.
- — Annuaire, tom. 23, 1912.
- Société des Bollandistes:
- — Analecta Bollandiana, tom. 31, fasc. 1—4.

Brüssel. Société botanique de Belgique:

- — Bulletin, tom. 48, fasc. 1—4, 1911.
- — Société chimique:
- — Bulletin, 26^e année, No. 1—12.
- — Société entomologique de Belgique:
- — Annales, tom. 55, 1911.
- — Mémoires, tom. 19 und 20, 1912.
- — Société Belge de géologie, de paléontologie et d'hydrologie:
- — Bulletin: a) Mémoires, tom. 25, fasc. 3, 4; tom. 26, fasc. 1, 2;
b) Procès-verbaux, tom. 25, No 8—10; tom. 26, fasc. 1—8.
- — Société Royal zoologique et malacologique:
- — Annales, tom. 46, 1911.

Bryn Mawr (V. St.). College:

- — Monograph Series, vol. 8—10.

Budapest. K. Ungarische Akademie der Wissenschaften:

- — Almanach 1912.
- — Rapparten 1911.
- — Nyelvtudományi (Sprachwissenschaft), Bd. 3, fasc. 4; Bd. 4, fasc. 1.
- — Értekezések, Nyelvtudományi (sprachwissenschaftliche Abhandlungen), Bd. 21, No. 10; Bd. 22, No. 1—3.
- — Értesítő, Mathemat., Bd. 29, No. 4, 5; Bd. 30, No. 1, 2.
- — Értekezések, Történettudományi (geschichtswissenschaftliche Abhandlungen), Bd. 23, No. 2, 3.
- — Közlemények, Nyelvtudományi (sprachwissenschaftliche Mitteilungen), Bd. 40, No. 4; Bd. 41, No. 1, 2.
- — Ungarische Rundschau, Jahrg. 1, Heft 1—3.
- — Association internationale de sismologie:
- — Comptes rendu, 4^e réunion, Manchester 1911.
- — Statistisches Bureau:
- — Publikationen, No. 42, 46—48.
- — Ungarische Ethnographische Gesellschaft:
- — Ethnographia, Jahrg. 22, Heft 6; Jahrg. 23, Heft 1—5; Titel und Register zu Jahrg. 22.
- — K. Ungarische Geographische Gesellschaft:
- — Mitteilungen, vol. 40, livr. 1—8.
- — K. Ungarische Gesellschaft für Naturwissenschaften:
- — Botanikai Közlemények 1910, Bd. 9, No. 1—6; 1911, Bd. 10, No. 1—6.
- — Allatani Közlemények 1910, Bd. 9, No. 1—4; 1911, Bd. 10, No. 1—4.
- — Schmidt: A Kristálytan története 1911.

- Budapest.** Ungarische volkswirtschaftliche Gesellschaft:
 — — Közgazdasági Szemle, Bd. 45, Heft 3—6; Bd. 46, Heft 6; Bd. 47, Heft 4—6; Bd. 48, Heft 1—6.
 — — Bibliographia 1911, Januar—April; Juli—September; November und Dezember; 1912, Januar—September.
 — Landesrabbinerschule:
 — — Jahresbericht 35, 1911/12.
 — Ungarisches Nationalmuseum:
 — — Ertesítője, XIII. Jahrg., No. 1. 2.
 — K. Ungarische Geologische Reichsanstalt:
 — — Földtani Közlöny, Bd. 41, Heft 9—12; Bd. 42, Heft 1—8.
 — — Jahrbuch, Bd. 17, No. 1; Bd. 19, No. 5. 6; Bd. 20, No. 1.
 — — Mitteilungen aus dem Jahrbuch, Bd. 18, Heft 3. 4; Bd. 19, Heft 2—5; Bd. 20, Heft 1.
 — — Jahresbericht 1909.
 — K. Ungarische Ornithologische Zentrale:
 — — Aquila 18, 1911.
- Buenos Aires.** Archivo Publico Nacional:
 — — Publicaciones, vol. 2—11.
 — Museo nacional publico:
 — — Anales, ser. III. tom. 15, 1912.
 — Oficina meteorológica Argentina:
 — — Boletín, No. 1.
 — Sociedad científica:
 — — Anales, tom. 72, No. 3—6; tom. 73, No. 1—5.
- Buitenzorg (Java).** Departement van landbouw:
 — — Bulletin, No. 47, 4^o.
 — — Mededeelingen van het agricultur chemisch laboratorium, No. 1. 2.
 — — Mededeelingen van het proefstation voor Tabak, No. 1—3.
 — — Bulletin du jardin botanique, II. sér., No. 3—8.
- Bukarest.** Academia Română:
 — — Livius, tom. IV, 1.
 — Société des Sciences:
 — — Bulletin, anul 20, No. 6; anul 21, No. 1—5.
- Bulawayo.** Rhodesia Museum:
 — — Annual Report 7—9.
- Burghausen.** K. Humanistisches Gymnasium:
 — — Jahresbericht 1911/12 mit Programm von Scharold.
- Caen.** Société Linnéenne de Normandie:
 — — Bulletin, sér. VI, vol. 3, 1908/09, fasc. 2.
 — — Mémoires, vol. 24, fasc. 1.

Cairo. Institut Égyptien:

- — Bulletin, sér. V, tom. 5, fasc. 1. 2.
- — Mémoires, tom. 6, fasc. 3. 4; tom. 7, fasc. 1.

Calcutta. Indian Association for the Cultivation of Science:

- — Bulletin No. 6.
- Board of Scientific Advice for India:
- — Annual Report 1910/11.
- Imp. Department of agriculture:
- — Report on the progress of agricultura in India 1910/11.
- Meteorological Department of the Government of India
siehe Simla.
- Indian Museum:
- — Records, vol. 6, No. 4. 5.
- Royal Asiatic Society of Bengal:
- — Bibliotheca Indica. N. Ser., No. 1231—1234, 1237, 1238, 1240—1244,
1245, 1246, 1248—1258, 1260—1262, 1264—1266.
- — Journal and Proceedings, vol. 6, No. 7—11; vol. 7, No. 1—3.
- — Memoirs, vol. 3, No. 2—4; vol. 4, No. 1.
- Botanical Survey of India:
- — Records, vol. 1, No. 7. 9. 10. 12. 13; vol. 2, No. 1—6; vol. 3,
No. 1—5; vol. 4, No. 1—6; vol. 5, No. 2—3.
- — Annual Report 1909/10, 1910/11.
- Geological Survey of India:
- — Records, vol. 42, part 2.

Cambrai. Société d'émulation:

- — Memoirs, tom. 65 und 66.

Cambridge (Engl.). Antiquarian Society:

- — Proceedings, No. 61 = 16. 1.
- Philosophical Society:
- — Proceedings, vol. 16, part 5—8.
- — Transactions, vol. XXI, No. 17, 18; vol. XXII, No. 1.
- — List of fellows 1912.

Cambridge (Mass.). Tufts College:

- — Studies, vol. 3, No. 2.
- Museum of comparative Zoology at Harvard College:
- — Bulletin, vol. 54, No. 10—14; vol. 55, No. 1; vol. 56, No. 1; vol. 57,
Nr. 1.
- — Memoirs, vol. 27, No. 4; vol. 34, No. 4; vol. 35, No. 3. 4; vol. 38,
No. 2; vol. 40, No. 4.
- — Annual Report 1911/12.
- Mark Anniversary Volume 1903.

Cambridge (Mass.). Astronomical Observatory of Harvard University:

- — 66th Annual Report 1911, 1911/12.
- — Annals, vol. 56, part 6. 7; vol. 59, part 9. 10; vol. 61, part 3; vol. 63, part 1; vol. 67 part 11; vol. 72, part 1—3.
- — Contents of Annals.
- — Circular, No. 169—174, 4^o.

Capetown. South African Association of Science:

- — Journal, vol. 8, No. 1—12; vol. 9, No. 1—4.
- — Report of the 8th and 9th meeting 1910 and 1911.
- Geological Commission:
- — 15th Annual Report 1910.
- — Geological Map of Cape of Good Hope Sheet 19. 26.
- R. Society of South Africa:
- — Transactions, vol. 1, part 1. 2; vol. 2, part 1—5.

Catania. Accademia Gioenia di scienze naturali:

- — Atti, ser. V, vol. 4, Anno 88.
- — Bollettino, ser. II, fasc. 19—23.
- Società degli spettroscopisti:
- — Memorie, vol. 40, disp. 12; ser. II, vol. 1, disp. 1—12.
- Società di storia patria per la Sicilia Orientale:
- — Archivio, anno IX, 1—3.

Chalons s. S. Société d'histoire et d'archéologie:

- — Mémoires, 2^e sér., tom. 4, partie 1 = vol. 12.

Charkow. Société mathématique:

- — Communications, tom. 12, No. 2—6.
- Université Impériale:
- — Sapiski 1911, No. 4; 1912, No. 1—3.

Charlottenburg. Physikalisch-technische Reichsanstalt:

- — Die Tätigkeit der physikal.-techn. Reichsanstalt im Jahre 1911.

Cherbourg. Société des sciences naturelles:

- — Mémoires, tom. 37, 1908—10; tom. 38, 1911—12.

Chicago. John Crerar Library:

- — 17th Annual Report for 1911.
- Field Museum of Natural History:
- — Publications, No. 152—158. 160.
- University of Chicago Library:
- — The astrophysical Journal, vol. 35, No. 1—5; vol. 38, No. 1—5, 1912.

Christiania. Norske geografiska Selskab:

- — Aarbok 22, 1910/11.

Christiania. Videnskabselskabet:

- — Forhandlinge, Aar 1911.
- — Skrifter, 1911, I. II, 1. 2.
- — Universitets-Bibliothek:
- — Meridianbeobachtungen, Bd. 2, 1912.

Chur. Naturforschende Gesellschaft:

- — Jahresbericht, N. F., Bd. 53, 1910/11 und 1911/12.

Cincinnati. Lloyd Library:

- — Bulletin, No. 19, 20.
- — Bibliographical contributions, No. 5-8.
- — University:
- — Record, ser. I, vol. 8, No. 2.
- — University Studies, vol. 7, No. 3, 4.

Claremont. Pomona College:

- — Journal of entomology, vol. 4, No. 1-3.

Clermont. Académie des Sciences, Belles Lettres et Arts:

- — Mémoires, sér. II, fasc. 23, 1911.
- — Bulletin historique et scientifique de l'Auvergne, sér. II, 1911.
- — Société des amis de l'Université:
- — Revue d'Auvergne et Bulletin de l'Université, année 28, 1911.

Cleveland. Archaeol. Inst. of America:

- — American Journal of Archaeology, vol. 16, No. 1-3.
- — Bulletin, vol. 3, No. 2, 3.

Coimbra. Sociedade Broteriana:

- — Boletim, vol. 26, 1911.

Colmar. Naturhistorische Gesellschaft:

- — Mitteilungen, N. F., Bd. 10, 1909 und 1910; Bd. 11, 1911 und 1912.
- — Katalog der Bibliothek, 3. Ausgabe, 1911.

Colombo. Department of agriculture:

- — Bulletin, No. 1.
- — Museum:
- — Spolia Zeylonica, part 29-31.
- — Marine biological reports, part 6.

Columbia. Laws Observatory:

- — Bulletin, vol. 1, No. 1-16.

Como. Società storica:

- — Periodico, fasc. 77, 78.
- — Raccolta Storica, vol. 6, disp. 7-9.

Concarneau. Laboratoire maritime:

- — Travaux scientifiques, tom. 3, fasc. 1-7; tom. 4, fasc. 1, 2.

Czernowitz. K. K. Franz Josephs-Universität:

- — Verzeichnis der Vorlesungen, W.-S. 1911/12, S.-S. 1912.
- — Personalstand 1911/12
- — Inauguration des Rektors 1911/12.

- Danzig.** Westpreußischer Geschichtsverein:
 — — Mitteilungen, Jahrg. 11, No. 1—4.
 — — Zeitschrift, Heft 54.
 — — Quellen und Darstellungen, Bd. 8, 1912.
 — Naturforschende Gesellschaft:
 — — Schriften, Bd. XII, Heft 3, 1909; Heft 4, 1910.
 — — Katalog der Bibliothek, 2. Heft, 1908.
 — Technische Hochschule:
 — — Personalverzeichnis S.-S. 1912, W.-S. 1912/13.
 — — Programm 1912/13.
 — Verein für Herstellung der Marienburg:
 — — Geschäftsbericht 1903—11.
 — — Nachrichten 1909—11.
- Darmstadt.** Historischer Verein für das Großherzogtum Hessen:
 — — Quartalblätter, 4. Bd., No. 20; 5. Bd., No. 1—4.
- Davos.** Meteorologische Station:
 — — Wetterkarten 1911, Dezember; 1912, Januar—Dezember.
 — — Jahresübersicht der Beobachtungen 1911.
- Delft.** Technische Hoogeschool:
 — — 5 Dissertationen, 1911/12.
- Denver** (Colorado). Colorado Scientific Society:
 — — Proceedings, vol. VIII, pag. 55—70; vol. X, pag. 39—54; pag. 75—164.
- Des Moines** (Jowa). Geological Survey:
 — — Annual Report, 1908, vol. 19; 1909, vol. 20.
- Dessau.** Verein für Anhaltische Geschichte:
 — — Mitteilungen, Bd. 11, Heft 4, 5.
- Dijon.** Société Bourguignonne de géographie et d'histoire:
 — — Mémoires, tom. 24, 1908; tom. 25, 1909; tom. 26, 1910.
- Disko.** Danske arktiske station:
 — — Nr. 1—5.
- Dillingen.** Historischer Verein:
 — — Archiv für die Geschichte des Hochstifts Augsburg, Bd. 4, Lief. 1/2.
- Douai.** Société d'agriculture, sciences et arts:
 — — Mémoires, 3^e sér., tom. 12, 1909/10 und Tables zu tom. 1—12.
 — Union géographique du Nord de la France:
 — — Bulletin, année 32, trim. 3, 4; année 33, trim. 1, 2.
- Draguignan.** Société d'études scient. et archéolog.:
 — — Bulletin, tom. 19—28 (1892—1911).
- Dresden.** K. Sächsischer Altertumsverein:
 — — Neues Archiv für sächsische Geschichte, Bd. 33, 1912.
 — — Jahresbericht 1911.

Dresden. K. Sächsische Landes-Wetterwarte:

- — Deutsches meteorologisches Jahrbuch für 1908, 2. Hälfte; 1909, 1. Hälfte.
- — Dekaden-Monatsberichte. 13. Jahrg., 1910.
- — Ergebnisse der Erdbodentemperatur-Messungen 1902/10.
- Flora. K. Sächsische Gesellschaft für Botanik und Gartenbau:
- — Sitzungsberichte und Abhandlungen, Jahrg. 16, 1911/12.
- Redaktion des Journals für praktische Chemie:
- — Journal 1911, No. 16, 17, 23, 24; 1912, No. 1—7, 9—24; 1913, No. 1, 2.
- Verein für Erdkunde:
- — Mitteilungen, Bd. II, Heft 2—4.
- Verein für die Geschichte Dresdens:
- — Dresdener Geschichtsblätter, Bd. 20, 1911, 1—4.
- — Mitteilungen, Heft 22, 1912.
- — Bruck, Sophienkirche Dresdens 1912.
- — Bruck, Die alten Rathäuser Dresdens 1910.

Dronthelm. Norske Videnskabens-Selskab:

- — Skrifter 1910 und 1911.
- — Festskrift 1897.
- — Fortegnelse over skrifter 1760—1910.
- — Schning, H., Reise af Norge 1773—75, 2 Bde., 1910.

Dublin. Royal Irish Academy:

- — Proceedings, vol. 29, sect. A, No. 5; sect. B, No. 7—9; sect. C, No. 9; vol. 30, sect. A, No. 1—4; sect. B, No. 1, 2; sect. C, Nr. 5 bis 11; vol. 31, No. 11—13, 15—20, 23, 26—31, 40, 41, 43, 44, 46, 57—60, 63.
- Royal Dublin Society:
- — The Economic Proceedings, vol. 2, No. 5.
- — The Scientific Proceedings, vol. 13, No. 12—22, 24—26.

Dünkirchen. Société Dunkerquoise:

- — Mémoires, tom. 51—54, 1910—1912.

Dürkheim. Progymnasium:

- — Jahresbericht 1911/12.

Easton (Pa.). American Chemical Society:

- — The Journal, vol. 34, No. 2.

Edinburgh. R. Botanic Garden:

- — Notes, No. 22—25, 31—33.
- Botanical Society:
- — Transactions and Proceedings, vol. 21, No. 2, 3.

Edinburgh. Royal Society:

- — Proceedings, vol. 31, part 5; vol. 32, part 1—4; vol. 48, part 1, 2.
- Geological Society:
- — Transactions, vol. 10, part 1.
- Mathematical Society:
- — Proceedings, vol. 30, 1911/12.
- — Mathematical Notes, No. 8—10.
- Scottish Microscopical Society:
- — Proceedings, vol. 6, 1909—12.
- Royal Physical Society:
- — Proceedings, vol. 18, No. 4.

Eichstätt. K. Humanistisches Gymnasium:

- — Jahresbericht 1911/12 mit Programm von Hamp.

Einbeck. Verein für Geschichte und Altertümer:

- — Jahresbericht 1911.
- — Feise. Münzen von Einbeck, Einbeck 1911.

Eisenach. Karl Friedrich-Gymnasium:

- — Jahresbericht für 1911/12.

Eisenberg. Geschichts- und altertumsforschender Verein:

- — Mitteilungen, Heft 28 und 29.

Eisleben. Verein für Geschichte und Altertümer der Grafschaft Mansfeld:

- — Mansfelder Blätter, Jahrg. 25 und 26, 1911/12.

Emden. Naturforschende Gesellschaft:

- — Jahresbericht 95, 1910.
- — Upstalsboom-Blätter, Jahrg. 1, No. 1—5.

Erfurt. K. Akademie gemeinnütziger Wissenschaften:

- — Jahrbücher, N. F., Heft 37.

Erlangen. K. Humanistisches Gymnasium:

- — Jahresbericht 1911/12.

Evreux. Société libre d'agriculture, sciences et arts:

- — Recueil des travaux, sér. VI, tom. 8, 1910; tom. 9, 1911.

Fiume. Deputazione Fiumana di storia patria:

- — Bulletino, vol. 1, 1910; vol. 2, 1912, Suppl.

Florenz. Reale Accademia dei Georgofili:

- — Atti, ser. V, vol. 9, disp. 1—4.
- Biblioteca Nazionale Centrale:
- — Bollettino delle Pubblicazioni Italiane, No. 133—144.
- Società Asiatica Italiana:
- — Giornale, vol. 24, 1911.

Frankfurt a. M. Senckenbergische Naturforschende Gesellschaft:

- — Abhandlungen, Bd. 29, 4; Bd. 33, 4; Bd. 34, 1, 2.
- — 42. Bericht, Heft 1-4.
- Physikalischer Verein:
- — Jahresbericht 1910/11.

Freiburg i. Br. Breisgau-Verein „Schau ins Land“:

- — „Schau ins Land“, 39. Jahrlauf, 1. und 2. Hälfte.
- Kirchengeschichtlicher Verein:
- — Freiburger Diözesanarchiv, Bd. 39 und 40, 1911/12.

Freiburg i. S. Universitätsbibliothek:

- — Collectanea Friburgensia, N. Ser., fasc. 14.

Friedrichshafen. Verein zur Geschichte des Bodensees:

- — Schriften, Heft 40, 1911.

Fürth. K. Humanistisches Gymnasium:

- — Jahresbericht 1911/12 mit Programm von Helmreich.

Geestemünde. Männer vom Morgenstern:

- — Jahresbericht 1-11, 1908/09; 13, 1910/11.

Geneva. U. St. Agricultural Experimental Station:

- — Bulletin, No. 342-348.
- — Technical Bulletin, No. 19.

Genf. Redaktion des „Journal de chimie physique“:

- — Journal, tom. 10, No. 1-3.
- Société de physique et d'histoire naturelle:
- — Mémoires, vol. 37, fasc. 3.
- — Compte rendu des séances 28, 1911.

Genf. Vlaamsche Academie van tal- en letterkunde:

- — Verslagen, Dezember 1911; No. 1-10 von 1912.
- — Jaarboek 1912.
- — Sagenboek, deel 3, 1912.
- — Jacobs, Klauck- end vormler I.
- — Bruyker, Statist. Methode in de plantkunde 1910.
- — Bosmans, Zontoplossingen.
- Het Vlaamsch Natuur- en geneeskindig Congres:
- — Handelingen van het 15. Congres 1911.
- — Groot Kanonplaats 6.
- — Kruidkundig Genootschap „Dodonaea“:
- — Botan. Jaarboek 1910, 1-3; 1911.

Giessen. Oberhessischer Geschichtsverein:

- — Mitteilungen, N. F., Bd. 19.

- Giessen.** Gesellschaft für Natur- und Heilkunde:
 — — Bericht, N. F., medizinische Abteilung, Bd. 6, 1910; N. F., naturwissenschaftliche Abteilung, Bd. 4, 1910/11.
 — Universität:
 — — Schriften aus dem Jahre 1911/12 in 4^o und 8^o.
- Görlitz.** Oberlausitzische Gesellschaft der Wissenschaften:
 — — Codex diplomaticus Lusatie superioris, Bd. 4, Heft 1.
 — — Neues Lausitzisches Magazin, Bd. 87 und 88.
- Göttingen.** K. Gesellschaft der Wissenschaften:
 — — Göttingische Gelehrte Anzeigen 1911, No. 10—12; 1912, No. 1—10.
 — — Abhandlungen, N. F., a) Philol.-hist. Klasse, Bd. 13, No. 3; Bd. 14, No. 1, 2; b) Math.-phys. Klasse, Bd. 8, No. 4; Bd. 9, No. 3.
 — — Nachrichten, a) Philol.-hist. Klasse 1911, Heft 4; 1912, Heft 1, 2; b) Math.-phys. Klasse 1911, Heft 5; 1912, Heft 1—6 und Beiheft; c) Geschäftliche Mitteilungen 1912, Heft 1.
- Göthenburg.** K. Gesellschaft der Wissenschaften:
 — — Handlingar, Bd. 13, 1910.
 — Högscola:
 — — Årskrift, Bd. 16 und 17, 1910/11.
- Granville (Ohio).** Scientific Association of Denison University:
 — — Bulletin, vol. 17, articles 1—4.
- Graz.** Universität:
 — — Verzeichnis der Vorlesungen im S.-S. 1912, W.-S. 1912/13.
 — — Verzeichnis der akademischen Behörden etc., 1912/13.
 — — Bericht über die Studienjahre 1896/97—1898/99.
 — — Inauguration des Rektors 1902/03.
 — Historischer Verein für Steiermark:
 — — Zeitschrift, Jahrg. 9, Heft 1—4.
 — Naturwissenschaftlicher Verein für Steiermark:
 — — Mitteilungen, Bd. 48.
- Greifswald.** Rügisch-Pommerscher Geschichtsverein:
 — — Pommersche Jahrbücher, Bd. 12, 1911.
- Greiz.** Verein der Naturfreunde:
 — — Abhandlungen und Berichte, Heft 6, 1911.
- Grenoble.** Académie Delphinale:
 — — Bulletin, V. sér., tom. IV, 1910.
 — Université:
 — — Annales, tom. 23, 1911, trim. 2, 3; tom. 24, 1912, trim. 1, 2 mit Suppl.
- Grimma.** Fürsten- und Landesschule:
 — — Jahresbericht 1911/12, 4^o.
- Guéret.** Société des sciences naturelles et archéologique:
 — — Mémoires, tom. 17, part 2; tom. 18, part 1.

Gunzenhausen. K. Realschule:

— — Jahresbericht 19, 1911/12.

Haag. Gesellschaft zur Verteidigung der christlichen Religion:

— — Programm für das Jahr 1912.

— — K. Instituut voor de Taal-, Land- en Volkenkunde van Nederlandsch-Indie:

— — Bijdragen. VII. Reeks, deel 66, afl. 4; deel 67, afl. 1—3.

— — Catalogus der Koloniale Bibl., 4. opgave.

— — Naamlijst der leden, 1. August 1912.

Haarlem. Hollandsche Maatschappij der Wetenschappen:

— — Archives néerlandaises des sciences exactes et naturelles, sér. III A, tom. 1, livr. 3, 4; tom. 2; sér. III B, tom. 1, livr. 3, 4.

— — Oeuvres de Huygens, vol. 12, 1910.

— Musée Teyler:

— — Archives, sér. III, vol. 1.

— — Theologisch Tijdschrift, Jahrg. 1—7, 1903—09.

— — Verhandelingen rakende den naturl. en geopenbaarden godsdienst, N. Ser., deel 18, 1912.

Habana. Sociedad economica de Amigos del Pais:

— — Revista bimestre Cubana, vol. 6, No. 5, 6; vol. 7, No. 1—4.

Halifax. Nova Scotian Institute of Science:

— — Proceedings and Transactions, vol. 12, part 3; vol. 13, part. 1, 2.

Hall. K. K. Franz Joseph-Gymnasium:

— — Programm 1911/12.

Halle. K. Leopoldinisch-Karolinische Deutsche Akademie der Naturforscher:

— — Leopoldina, Bd. 44, No. 1—12; hiezu Titel und Register.

— — Nova Acta, Bd. 94—97, 4^o.

— Deutsche Morgenländische Gesellschaft:

— — Zeitschrift, Bd. 65, Heft 4; Bd. 66, Heft 1—3.

— Naturforschende Gesellschaft:

— — Abhandlungen, N. F., No. 1.

— — Mitteilungen, Bd. 1, 1911.

— Universität:

— — Schriften aus dem Jahre 1911/12 in 4^o und 8^o.

— — Verzeichnis der Vorlesungen, S.-S. 1912, W.-S. 1912/13.

— — Amtliches Verzeichnis des Personals etc. für S.-S. 1912.

— — Rektoratsrede 1911 und 1912.

— — Chronik 1911/12.

— Thüringisch-Sächsischer Verein für Erforschung des vaterländischen Altertums:

— — Jahresbericht für 1892/93; 1911/12.

— — Zeitschrift für Geschichte und Kunst, Bd. 1, Heft 2; Bd. 2, Heft 1.

Hamburg. Stadtbibliothek:

- — Jahrbuch der wissenschaftlichen Anstalten Hamburgs. Jahrg. 28, 1910 und Beiheft 1—7.
- — Jahresbericht der Verwaltungsbehörden 1910, 4^o.
- — Staatshaushaltsberechnung 1910, 4^o.
- — Entwurf des hamburgischen Staatsbudgets für 1912, 4^o.
- — Verhandlungen zwischen Senat und Bürgerschaft 1911, und Register zu 1901—10, 4^o.
- Deutsche Seewarte:
- — Aus dem Archiv, Bd. 34, No. 4, 5.
- — 34. Jahresbericht für das Jahr 1911, 4^o.
- — Annalen der Hydrographie, Jahrg. 40 (1912), No. 2—12; Jahrg. 41 (1913), No. 1.
- — Dekadenberichte 1911, No. 35, 36; 1912, No. 1—8, 10—31.
- — Deutsche überseeische meteorologische Beobachtungen, Heft 20.
- — Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen, Jahrg. 33, 1906 bis 1910.
- Verein für Hamburgische Geschichte:
- — Mitteilungen, 31. Jahrg., 1911.
- — Zeitschrift, Bd. XVI, 2.

Hannover. Verein für Geschichte der Stadt Hannover:

- — Hannoverische Geschichtsblätter, 15. Jahrg., Heft 1—4.
- — Bericht über das Kestner-Museum 1908—11.
- Historischer Verein für Niedersachsen:
- — Zeitschrift, Jahrg. 1911, Heft 1—4.

Hanoi. École Française d'Extrême Orient:

- — Bulletin, tom. 11, No. 3, 4; tom. 12, No. 1, 2, 4.

Hartford. Geological and Natural History Survey:

- — Bulletin, No. 18, 19.

Heidelberg. Akademie der Wissenschaften:

- — Sitzungsberichte, a) philol.-histor. Klasse, 1911, Abh. 8, 9; 1912, Abh. 1—13; b) math.-naturw. Klasse, 1911, Abh. 25—38; A 1912, Abh. 1—16; B 1912, Abh. 1—7.
- — Jahreshaft 1910/11.
- Reichslimeskommission:
- — Der obergermanisch-rätische Limes des Römerreiches, Lief. 36, 1912; Lief. 37, 1912.
- Sternwarte:
- — Veröffentlichungen des Astronomischen Instituts, Bd. 6, No. 3—6.
- Universität:
- — Schubert, Reich und Reformation.
- — Duhn, Gräberforschung.

Heidelberg. Universität:

- — Lilienthal, Streit um die Strafrechtsreform.
- Historisch-philosophischer Verein:
- — Neue Heidelberger Jahrbücher. Jahrg. 17, 1.

Helgoland. Biologische Anstalt:

- — Meeresuntersuchungen, N. F., Bd. 5, Abt. Helgoland, Heft 3;
Bd. 14, Abt. Kiel.

Helsingfors. Finnische Altertumsgesellschaft:

- — Suomen Museo XVIII, 1911.
- — Tidskrift 25, 1911.
- Finnländische Gesellschaft der Wissenschaften:
- — Acta. tom. 40, 5—8; tom. 41, 1—7 mit Titel und Register; tom. 42;
Tables générales 1838—1910.
- Institut météorologique central:
- — Meteorologisches Jahrbuch für Finnland. Bd. 5, 1905; Bd. 6, 1906;
Bd. 10, Teil 2, 1911; Beilage zu Jahrg. 2, 4 und 5.
- — Erdmagnetische Untersuchungen, Bd. 1, Teil 1.
- Svenska litteratursällskapet i Finland:
- — Skrifter, vol. 108 und 109, 1912.
- Suomen Historiallinen Seura:
- — Arkisto 23, 1.
- — Biandet, Le Saint-Siège et la Suède 1, 1909.
- — Soikkeli, K., Nylands silfverskatt, Stockholm 1912.
- Societas pro fauna et flora Fennica:
- — Acta 33—35.
- — Meddelanden, 36, 1909/10; 37, 1910/11.
- Universität:
- — Schriften aus dem Jahre 1911/12 in 4^o und 8^o.

Hendaye. Observatoire d'Abbadia:

- — Observations, tom. 10, 1911.
- — Procès-verbaux de l'Académie des Sciences, tom. 1 (1795—99).

Hermannstadt. Verein für siebenbürgische Landeskunde:

- — Archiv, N. F., Bd. 28, Heft 1, 2, 1911.
- — Jahresbericht 1910 und 1911.

Hildburghausen. Verein für Sachsen-Meiningische Geschichte:

- — Schriften, Heft 64 und 65.

Hobart Town. R. Society of Tasmania:

- — Papers and proceedings 1911.
- — Annual Report 1911.

Hohenleuben. Voigtländ. altertumsforschender Verein:

- — Reussische Forschungen, Festschrift für Berthold Schmidt.

Homburg i. Pf. K. Progymnasium:

- — Jahresbericht 1911/12.

- Igló.** Ungarischer Karpathen-Verein:
 — — Jahrbuch, 39. Jahrg., 1912.
- Ingolstadt.** Historischer Verein:
 — — Sammelblatt, Heft 33, 1911.
- Irkutsk.** Geographische Gesellschaft:
 — — Izvēstija, tom. 42, 1911.
 — — Otschet 1905—09.
 — — Trudy, No. 5, 1911; No. 7, 1912.
- Ithaca.** Journal of Physical Chemistry:
 — — The Journal, vol. 16, No. 1—9, gr. 8^o.
- Jassy.** Societatea de stinti:
 — — Annales scientifiques, tom. 7, fasc. 2, 3.
 — Société des médecins et naturalistes:
 — — Bulletin, année 26, 1—8.
- Jekaterinburg.** Oural.-Société d'amateurs des sciences naturelles:
 — — Bulletin, tom. 30 und Index zu tom. 1—30; tom. 31, 1, 2.
- Jena.** Geographische Gesellschaft:
 — — Mitteilungen, Bd. 1, 1882; Bd. 28—30, 1910—12.
 — Medizinisch-naturwissenschaftliche Gesellschaft:
 — — Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft, Bd. 47, Heft 4; Bd. 48, Heft 1—3.
 — — Denkschriften, Bd. 17, 4, Lief. 5; 5, Lief. 1.
 — Verein für Thüringische Geschichte und Altertumskunde:
 — — Zeitschrift, Suppl.-Heft 1—4.
 — Verlag der Naturwissenschaftlichen Wochenschrift:
 — — Wochenschrift 1912, No. 1—52; 1913, No. 1, 2.
- Johannesburg.** Union Observatory:
 — — Circular of Transvaal Observatory 1912, No. 1—13.
 — Union of South Africa:
 — — Circular, No. 1.
 — Geological Society of South Africa:
 — — Transactions, vol. 14, 2; 15, 1 and Proceedings to 14 and 15, 1912.
- Jurjew (Dorpat).** Gelehrte Esthnische Gesellschaft:
 — — Sitzungsberichte 1911.
 — Naturforschende Gesellschaft bei der Universität:
 — — Sitzungsberichte, vol. 20, No. 3, 4.

Karlsruhe. Technische Hochschule:

- — Schriften 1911/12.
- Badische Historische Kommission:
- — Zeitschrift für die Geschichte des Oberrheins, N. F., Bd. 27, Heft 1—4; Ergänzungsheft 1.
- — Neujahrsblätter 1913, Heidelberg.
- — Bericht über die 30. und 31. Plenarversammlung 1911/12.
- Zentralbureau für Meteorologie und Hydrographie:
- — Jahresbericht für das Jahr 1911.
- Naturwissenschaftlicher Verein:
- — Verhandlungen, Bd. 24, 1910/11.

Kasan. Physikalisch-mathematische Gesellschaft:

- — Bulletin. II^e sér., tom. 17, No. 2—4; tom. 18, No. 1, 2.
- Gesellschaft der Naturforscher:
- — Trudy, tom. 42, 4—6; tom. 43, 1—6; tom. 44.
- — Protokoly 1909/10 und 1910/11.
- Universität:
- — Učenija Zapiski. Bd. 79, Heft 1—6, 8, 10, 11.
- — Schriften des Jahres 1912 (3 Stck.).

Kassel. Verein für hessische Geschichte und Landeskunde:

- — Zeitschrift, Bd. 46, 1912; Register zu Bd. 1—45; Suppl.-Bd. 15, 1906; 16, 1910.
- — Mitteilungen 1907/08—1911/12.
- Verein für Naturkunde:
- — Festschrift 1911.

Kaufbeuren. K. Progymnasium:

- — Jahresbericht 1911/12.
- Verein „Heimat“:
- — Deutsche Gaue, Heft 241/42—259/60; Sonderheft 81 und 87.

Kempten. K. Humanistisches Gymnasium:

- — Jahresbericht 1911/12 und Programm von Simbeck.

Kew bei London. R. Botanical Garden:

- — Bulletin 1912, 1—4, 6—10.
- — Appendix 1912, 2—5; 1913, 1.

Kiel. Gesellschaft für schleswig-holsteinische Geschichte:

- — Zeitschrift, Bd. 42, Leipzig 1912.
- Naturwissenschaftlicher Verein für Schleswig-Holstein:
- — Schriften, Bd. 15, Heft 1.

Kiew. Gesellschaft der Naturforscher:

- — Zapiski, tom. 22, No. 1—4.
- Polytechnisches Institut Kaiser Alexander II.:
- — Chemisch-agronomische Abteilung, année 12, livr. 2, 3.

- Kiew.** Polytechnisches Institut Kaiser Alexander II.:
 — — Ingenieur-mechanische Abteilung, année 10, 1—4; année 11, 1—4; année 12, 1—3.
 — — Ukrainische Gesellschaft der Wissenschaften:
 — — Zapiski, vol. 9, 1911.
 — — Universität:
 — — Izvēstija, Bd. 51, No. 9—12; Bd. 52, No. 1—10.
- Kischineff.** Naturforschende Gesellschaft:
 — — Trudy, tom. II, No. 1, 2.
- Klagenfurt.** Landesmuseum:
 — — Archiv für vaterländische Geschichte und Topographie, Jahrg. 20 und 21.
 — — Carinthia I, 101. Jahrg., No. 1—6; 102. Jahrg., No. 1—6; Register zu 1811—1910.
 — — Carinthia II, 1911, No. 5, 6; 1912, No. 1—3.
 — — Jahresbericht des Historischen Museums 1910 und 1911.
- Klausenburg.** Fontes rerum Transylvanicarum:
 — — Erdelyi történelmi értesítő, Bd. 1, Heft 1/2.
 — — Siebenbürgische Museums-Gesellschaft:
 — — Erdélyi Múzeum, Bd. 28, Heft 1—5.
 — — Asványtárának értesítője, Bd. 1, No. 1.
- Köln.** Historisches Archiv der Stadt Köln:
 — — Mitteilungen aus dem Stadtarchiv, Heft 34.
 — — Gesellschaft für rheinische Geschichtskunde:
 — — 31. Jahresbericht, 1911.
- Königsberg i. Pr.** Physikalisch-ökonomische Gesellschaft:
 — — Schriften, Bd. 52, 1911 und Register zu Bd. 26—50.
 — — Universität:
 — — Schriften aus dem Jahre 1911/12.
- Konstantinopel.** Institut d'histoire Ottomane:
 — — Revue historique 1910, No. 11—16.
- Kopenhagen.** K. Akademie der Wissenschaften:
 — — Oversigt 1911, No. 6; 1912, No. 1—3.
 — — Botanisk Haves Bibliothek:
 — — Arbejder, No. 65—70.
 — — Carlsberg-Laboratorium:
 — — Comptes rendus des travaux, vol. 9, livr. 3; vol. 10, livr. 1.
 — — Smith, Seren Hjorth.
 — — Conseil permanent international pour l'exploration de la mer:
 — — Bulletin hydrographique 1809/10.
 — — Bulletin trimestriel des résultats . . . p. 2, 1911.
 — — Publications de circonstance, No. 61.

Kopenhagen. Gesellschaft für nordische Altertumskunde:

- — Aarbøger, III. Række, Bd. 1.
- — Mémoires, N. Sér., 1911/12.
- Kommissionen for Havundersøgelser:
- — Meddelelser, Serie Fiskeri, Bd. IV, 1.
- Observatorium:
- — Publikationer og mindre meddelelser, No. 6—11.

Krakau. Akademie der Wissenschaften:

- — Anzeiger (Bulletin international). 1. Classe de philologie, 1910, No. 6, 7, 8; 1911, No. 6—10; 1912, No. 1—6; 2. Classe des sciences mathématiques. 1911, A, No. 10; B, No. 2, 9, 10; 1912, A, No. 1—8; B, No. 1—7.
- — Materiały antropol., tom. 11, 1911.
- — „ „ i prace . . . , tom. 4.
- — Rocznik 1911.
- — Sprawozdania komisji fizyograficznej, tom. 45, 1911.
- — Rozprawy, philolog.-philozoph. Kl., ser. II, tom. 29; ser. III, tom. 3, 47, 48.
- — Rozprawy, mathem. Abh., tom. 11, A.
- — Biblioteka pisarzy-polskich, No. 60.
- — Scriptorum rerum Polonicarum 21.
- Historische Gesellschaft:
- — Biblioteka, No. 42—44.
- — Kraków 1911.
- — Rocznik, tom. 13.
- Numismatische Gesellschaft:
- — Wiadomości 1912, No. 1—12; 1913, No. 1.
- Universität:
- — Kronika 1907/08—1910/11.

Kyoto. Imperial University:

- — Memoirs of the College of Science and engineering, vol. 3, No. 7, 9—12.
- — Calendar 1909/10.

Laibach. Musealverein für Krain:

- — Carniola, Bd. 1, No. 1—4; Bd. 2, No. 1—4; Bd. 3, No. 1—4.

Landau (Pfalz). K. Humanistisches Gymnasium:

- — Jahresbericht 1911/12 mit Programm von Wildenrother.

Landsberg a. L. K. Realschule:

- — 34. Jahresbericht 1911/12.

Landshut. Historischer Verein:

- — Verhandlungen, Bd. 48, 1912.

- Langres.** Société historique et archéologique:
— — Bulletin, No. 85. 86.
- Lausanne.** Société Vaudoise des sciences naturelles:
— — Bulletin, No. 175, 176.
- Laval.** Commission historique et archéologique:
— — Bulletin, 2^e sér., tom. 26, No. 88; tom. 27, No. 89—92; tom. 28, No. 94, 94^{bis}.
- Lawrence.** University of Kansas:
— — Science Bulletin, Vol. 5, No. 12—21; vol. 6, No. 1.
- Le Havre.** Société Havraise d'études diverses:
— — Recueil des publications, 77^e année, 1910, trim. 1—4.
— — L'Abbeille Havraise 1912.
- Leiden.** Maatschappij der Nederlandsche Letterkunde:
— — Tijdschrift, deel 31, afl. 1—4.
— — Handelingen en Mededeelingen 1911/12.
— — Levensberichten 1911/12.
— Redaktion des „Museum“:
— — Museum, maandblad voor philologie en geschiedenis, Jaarg. 19, No. 5—12; Jaarg. 20, No. 1—4.
— — Mnemosyne, N. S., Bd. 40, pars 1—3.
- Leipzig.** Redaktion der Beiblätter zu den Annalen der Physik:
— — Beiblätter 1911, Bd. 35, No. 24; 1912, Bd. 36, No. 1—23.
— — K. Gesellschaft der Wissenschaften:
— — Abhandlungen der philol.-hist. Klasse, Bd. 29, No. 5—7, gr. 8^o.
— — „ „ math.-phys. „ Bd. 32, No. 5, 6.
— — Berichte über die Verhandlungen der philol.-hist. Klasse, Bd. 63, No. 6—10; Bd. 64, No. 1—3.
— — Berichte über die Verhandlungen der math.-phys. Klasse, Bd. 63, No. 7—9; Bd. 64, No. 1—4.
— Gesellschaft für Erdkunde:
— — Mitteilungen für das Jahr 1911.
— Fürstlich Jablonowskische Gesellschaft:
— — Preisschriften, Bd. 41, 42, 1912.
— — Jahresbericht 1911 und 1912.
- Leisnig.** Geschichts- und Altertumsverein:
— — Mitteilungen 14, 1912.
- Le Mans.** Académie de géographie botanique:
— — Bulletin, tom. 21, 1912, No. 267—277.
- Lemberg.** Sevčenko-Gesellschaft:
— — Mitteilungen 104—110.
— — Sammelschriften der math.-naturw.-med. Sektion, T. 15, 1.
— — Sammlung, ethnographische, T. 30.
— — Studien auf dem Gebiete der Sozialwissenschaften, Bd. 3, 1912.

Lemberg. Sevčenko-Gesellschaft:

- — Archiw ukraińsko-russkie, T. 7.
- — Chronik 47—50.
- — Beiträge zur ukrainischen Bibliographie, No. 3.
- — Monumenta linguae, T. 7.
- Towarzystwo dla popierania nauki polskiej:
- — Archiwum naukowe, Abt. I, tom. 5, No. 1.
- — Bulletin, Bd. 11, 1911.
- — Études sur l'histoire du droit polonais, Bd. 5, No. 1, 2.
- K. K. Franzens-Universität:
- — Programm der Vorlesungen 1912/13.
- — Skład 1912/13.
- Verein für Volkskunde:
- — Lud, tom. 17, No. 1—4.

Lille. Société géologique du Nord:

- — Annales, vol. 40, 1911.
- Bibliothèque Universitaire:
- — Travaux et mémoires. Trois lettres, vol. 1, 1902 bis vol. 7, 1910.
- — Médecine-Sciences, vol. 1, 1903.
- — Atlas. No. 4, 5.

Lima. Cuerpo de ingenieros de minas del Peru:

- — Boletín, No. 77.
- Sociedad geográfica:
- — Boletín, anno 19, tom. 25; anno 20, tom. 26.

Lincoln. University of Nebraska library:

- — Bulletin of agr. Experim. Station, No. 123—130.
- — Press Bulletin, No. 36, 37.
- — University studies, vol. 10, No. 2, 3.

Lindenberg. K. Preuß. Aëronautisches Observatorium:

- — Ergebnisse der Arbeiten, Bd. 7, 1912, 4^o.

Linz. Museum Francisco-Carolinum:

- — 70. Jahresbericht 1912.

Lissabon. Comissão do serviço geologico:

- — Comunicações, tom. 3—6.
- Comité international permanent de literature:
- — Archer de Lima, 9 Werke.
- Sociedade de geographia:
- — Boletim 29, No. 9—12; 30, No. 1—10.
- Société Portugaise des sciences naturelles:
- — Archivos, vol. 3, fasc. 3.
- — Bulletin, vol. 4, 1910, No. 1—3; vol. 5, 1911, No. 1.

Liverpool. School of Tropical Medicine:

- — Bulletin of Yellow Fever Bureau, No. 9—12; vol. 2, No. 1, 2.

- Liverpool.** Literary and philosophical Society:
 — — Proceedings, No. 72. sess. 100—101 and Centenary Index vol.
- Loewen.** Université Catholique:
 — — Annuaire 1912.
 — — Programme des cours 1911/12.
 — Redaction von „La Cellule“:
 — — Cellule, tom. 27, fasc. 1.
 — Société scientifique de Bruxelles:
 — — Annales 36, fasc. 1—4.
- Lohr.** K. Humanistisches Gymnasium:
 — — Jahresbericht 1911/12 mit Programm von Höhn.
- London.** British Academy:
 — — Proceedings and transactions 1907/08: 1909 10.
 — — Supplementary Papers 1.
 — — The Schweich Lectures 1908; 1909.
 — British Astronomical Association:
 — — Journal XXII, No. 3—10; XIII, No. 1, 2.
 — — Memoirs, vol. 18; vol. 19, 1.
 — — List of members, Sept. 1912.
 — Redaktion der Zeitschrift: Illuminating Engineer:
 — — Illuminating Engineer 1912 (= vol. 5), No. 1—12; 1913 (= vol. 6), No. 1.
 — R. Institution of Great Britain:
 — — Proceedings, vol. 19, 3 = 104.
 — Redaktion der Zeitschrift „Nature“:
 — — Nature, No. 2201—2254.
 — India Office:
 — — District Gazetteers, 238 Bde.
 — Royal Society:
 — — Proceedings, ser. A, 584—599; ser. B, 574—584.
 — — Philosophical Transactions, ser. A, vol. 211; ser. B, vol. 202.
 — — Year-Book 1912.
 — — Bulletin of sleeping sickness Bureau. No. 33—40.
 — — The Record 3^d edition 1912.
 — — The Signatures in the first Journal book and the charter-book 1912.
 — R. Society of Arts:
 — — Journal, No. 3087—3138.
 — R. Astronomical Society:
 — — Monthly Notices, vol. 72, No. 1—9; vol. 73, No. 1.
 — Chemical Society:
 — — Journal 1911. No. 591—601; Index zu 1911.
 — — Proceedings, vol. 28, No. 395—407.

London. Farady Society:

- — Transactions, vol. 8, part 1, 2.
- Geological Society:
- — Quarterly Journal, vol. 67, 4 (= No. 268); vol. 68, 1-3 (= No. 269 bis 271).
- — List of members 1912.
- Society of Chemical Industry:
- — Journal, vol. 31, No. 1-24.
- — List of members 1912.
- Linnean Society:
- — Proceedings 1911/12.
- — The Journal, a) Botany, vol. 39, No. 276-281; b) Zoology, vol. 32, No. 213, 214.
- — Transactions, a) Botany, vol. 7, part 3, No. 16-18; b) Zoology, vol. 14, part 2-4; vol. 15, part 1.
- — List of members 1912/13.
- Mathematical Society:
- — Proceedings, ser. II, vol. 1, 1903/04; vol. 10, 1911/12; vol. 11, part 1-6.
- Royal Microscopical Society:
- — Journal 1912, part 1-6.
- Zoological Society:
- — Proceedings 1912, part 1, 2, 4; Index zu 1901-10.
- — Transactions, vol. 20, part 1-3.
- — List of fellows 1912.

Ludwigshafen a. Rh. K. Oberrealschule:

- — Jahresbericht 1911/12 mit Programm von Rudel.

Lübeck. Naturhistorisches Museum:

- — Mitteilungen. 2. Reihe, Heft 25.
- — Das Museum zu Lübeck 1910.

Lüneburg. Museumsverein:

- — Museumsblätter, Bd. II, Heft 5-8, 1912.

Lüttich. Institut archéologique Liégeois:

- — Bulletin, tom. 41, 1, 2, 1911.
- Société géologique de Belgique:
- — Annales, tom. 38, livr. 4; tom. 39, livr. 1-3; Annexes, fasc. 1, 2.
- — Mémoires, année 1911/12, fasc. 1, 2.
- Société de littérature wallonne:
- — Annuaire, No. 25, 1912.
- — Bulletin, tom. 48; 52, 2: 54.
- — Bulletin du dictionnaire général 1911, No. 3, 4; 1912, No. 1, 2.
- — Bibliographie de la littérature wallone 1, 1905/06.
- Société Royal des sciences:
- — Mémoires, sér. III, tom. 2, 1900; tom. 9, 1912.

Lund. Redaktion von „Botaniska Notiser“:

- — Notiser, 1912, No. 1—6.
- Universität:
- — Acta Universitatis Lundensis, N. Ser., afd. I, 7, 1911; afd. II, 7, 1911.
- — Kyrkohistorisk Arskrift 12, 1911.

Luxemburg. Institut Grand-Ducal:

- — Publications (section historique), vol. 52, 2, 1911; vol. 58, 1910.
- Société des naturalistes Luxembourgeois:
- — Bulletin, N. F., Jahrg. 4 = 1910; Jahrg. 5 = 1911.

Luzern. Naturforschende Gesellschaft:

- — Mitteilungen, Heft 6, 1911.
- Historischer Verein der fünf Orte:
- — Geschichtsfreund, 67. Bd. 1912.

Lyon. Académie des sciences, belles lettres et arts:

- — Mémoires, sér. III, tom. 12, 1912.
- Comité du Bulletin historique:
- — Bulletin historique, année 12, No. 72—77.
- Société d'agriculture, sciences et industrie:
- — Annales 1910 et 1911, gr. 8^o.
- Société Linnéenne:
- — Annales, tom. 58, 1911.
- Société littéraire, historique et archéologique:
- — Bulletin 1911, Janvier—décembre; 1912, Janvier—juin.
- Université:
- — Annales, I. Sciences, Médecine, fasc. 31.
- — „ „ II. Droit, lettres, fasc. 23.

Mâcon. Académie de Mâcon:

- — Annales, tom. XV, partie 1.

Madison. Wisconsin Geological and Natural History Survey:

- — Bulletin, No. 23 = econ. series 14; No. 24 = soil. series 1; No. 25 = scient. series 8.

Madras. Kodaikanal and Madras Observatories:

- — Annual Report for 1911.
- — Bulletin, No. 25, 26, 4^o.

Madrid. R. Academia de ciencias exactas:

- — Revista, vol. 10, No. 1—12.
- — Anuario 1912.
- R. Academia de la historia:
- — Boletín, tom. 59, 5, 6; tom. 60, 1—6; tom. 61, 1—6.
- Sociedad española de física y química:
- — Annales, anno 9, 1911 (No. 89—98).

Magdeburg. Museum für Natur- und Heimatkunde:

— — Abhandlungen, Bd. 2. Heft 3.

Mailand. Archivio storico civico:

— — Raccolta Vinciana, No. 7. 1911.

— R. Istituto Lombardo di scienze:

— — Rendiconti, ser. II, vol. 44, fasc. 15-20; vol. 45, fasc. 1-15.

— — Memorie, Classe di lettere, vol. 22, fasc. 7, 8.

— R. Osservatorio di Brera:

— — Pubblicazioni, No. 49. 1912.

— Società Lombarda di scienze mediche e biologiche:

— — Atti, vol. I, fasc. 1-3.

— Società Italiana di scienze naturali:

— — Atti, vol. 50, fasc. 4; vol. 51, fasc. 1, 2.

— Società Storica Lombarda:

— — Archivio Storico Lombardo, ser. IV, anno 38, fasc. 32; anno 39, fasc. 33-35.

Manchester. Literary and philosophical Society:

— — Memoirs and Proceedings, vol. 56, part 1-3.

— Victoria University-Library:

— — Publications, English series, No. 3.

— — „ Historical series, No. 12-15.

— — „ Educational series, No. 6.

— — „ Physical series, No. 2.

— — Manchester University Lectures, No. 13, 14.

— — Journal of the Manchester Oriental Society 1911.

— — Slater, Poetry of Catullus 1912.

Mannheim. Altertumsverein:

— — Mannheimer Geschichtsblätter, Jahrg. 1912, No. 1-12; 1913, No. 1, 4^o.

Mantua. R. Accademia Virgiliana:

— — Atti memorie, N. Ser., vol. 4, parte 1, 2.

Marbach. Schwäbischer Schillerverein:

— — Rechenschaftsbericht 16, 1911/12.

Marburg. Gesellschaft zur Beförderung der gesamten Naturwissenschaft:

— — Sitzungsberichte 1911.

— Universität:

— — Schriften aus dem Jahre 1911/12 in 4^o und 8^o.

Maredsous. Abbaye:

— — Revue Bénédictine, année 29, No. 1-4.

Marnheim (Pfalz). Realanstalt am Donnersberg:

— — Jahresbericht 1911/12.

Marseille. Faculté des sciences:

— — Annales, vol. 18, 1909; vol. 20, 1911, hiezu Suppl.

- Meiningen.** Hennebergischer altertumsforschender Verein:
 — — Neue Beiträge zur Geschichte des Altertums, Lief. 25, 1912.
- Meissen.** Naturwissenschaftliche Gesellschaft Isis:
 — — Zusammenstellung der Wetterwarte, 1911.
 — Fürsten- und Landesschule St. Afra:
 — — Jahresbericht für das Jahr 1911/12, 4^o.
- Melbourne.** Nationalmuseum:
 — — Memoirs, No. 4.
 — Royal Society of Victoria:
 — — Proceedings, N. Ser., vol. 24, part 2; vol. 25, part 1.
- Metten.** K. Gymnasium:
 — — Jahresbericht 1911/12 mit Programm von Rauch.
- Metz.** Gesellschaft für lothringische Geschichte:
 — — Jahrbuch, 22. Jahrg., 1910; 23. Jahrg., 1911.
 — Verein für Erdkunde:
 — — Jahresbericht 25, 1905/06; 26. 3-9, 11, 14-16; 27, 18-24, 26.
- Mexiko.** Instituto geológico:
 — — Parergones, tom. 3, No. 9, 10.
 — Museo Nacional:
 — — Anales, tom. III, No. 6-8 (und Extra-No.); tom. IV, No. 1-4.
 — — Boletín 1911, Nov., Dez.; 1912, Januar bis Sept.
 — Museo Nacional de historia natural:
 — — La Naturaleza, III. ser., tom. 1, No. 3, 4.
 — Observatorio astronomico nacional:
 — — Boletín, No. 1.
 — Observatorio meteorológico-magnético central:
 — — Boletín mensual 1911, Aug. bis Dez.; 1912, Jan. bis April.
 — Sociedad científica „Antonio Alzate“:
 — — Memorias y revista, tom. 29, No. 7-12; tom. 30, No. 1-6.
 — Sociedad geológico Mexicano:
 — — Boletín, tom. VII, 2.
- Milwaukee.** Public Museum:
 — — Bulletin of Wisconsin Natural History Society, vol. 9, No. 4;
 vol. 10, No. 1, 2.
 — — Annual Report 27, 1908/09; 58, 1909/10.
- Missoula.** University Library of Montana:
 — — Bulletin, Biological series, No. 3, 7, 10, 16-19, 22, 26, 30, 34,
 35, 37, 41, 46, 50, 53.
- Mitau.** Kurländische Gesellschaft für Litteratur und Kunst:
 — — Sitzungsberichte 1909 und 1910.
- Modena.** R. Accademia di scienze, lettere ed arti:
 — — Memorie, ser. III, vol. 10, 1912, parte 1.
- Sitzungs- u. d. math.-phys. Kl. Jahrg. 1912.

- Modena.** Società dei Naturalisti:
— — Atti, IV. ser., vol. 13, 1911 = 44.
- Monaco.** Musée et Institut océanographique:
— — Bulletin, No. 220—252.
— — Resultats des camp. scient., fasc. 35—37.
- Montbéliard.** Société d'émulation:
— — Mémoires, vol. 40, 1911; vol. 41, 1912.
- Montevideo.** Dirección de estadística de Uruguay:
— — Anuario estadístico, años 1907—08, tom. 2, parte 2.
- Montpellier.** Académie de sciences et lettres:
— — Annuaire 1911/12.
— — Mémoires, sect. des sciences, 2. sér., tom. IV. No. 3.
— — Bulletin mensuel 1912, No. 1—12.
— — Société archéologique:
— — Mémoires, II. sér., tom. 4, fasc. 3.
- Montreal.** Numismatic and Antiquarian Society:
— — The Canadian Antiquarian and Numismatic Journal, ser. III, vol. 8, No. 4; vol. 9, No. 1, 2.
- Moskau.** Historisch-antiquarische Gesellschaft:
— — Čtenija 236—241.
— — Mathematische Gesellschaft:
— — Matematičeskij Sbornik, Bd. 23, Heft 2, 3.
— — Öffentliches und Rumjancev'sches Museum:
— — Otčet, Jahrg. 1911.
— — Société Impériale des Naturalistes:
— — Bulletin, année 1911, No. 1—3.
— — Meteorologisches Observatorium der Universität:
— — Beobachtungen 1910 und 1911.
— — Universitätsbibliothek:
— — Učenyja Zapiski, mediz. Abteilung, Bd. 19.
— — „ „ „ naturwiss. Abteilung, Bd. 29—32.
— — „ „ „ historisch-philolog. Abteilung, Bd. 41, 42.
- Mount Hamilton (California).** Lick Observatory:
— — Bulletin, vol. VI, No. 206—210; vol. VII, No. 211—222; Titel und Register zu vol. VI.
- Mülhausen i. E.** Historisches Museum:
— — Bulletin 35. année 1911.
- München.** Statistisches Amt:
— — Einzelschriften, No. 10.
— — Arbeitslosenzählung 1912.
— — Bevölkerung Münchens 1910.
— — Wohnungsmarkt.

München. Hydrotechnisches Bureau:

- — Jahrbuch 1911, Heft 1.
- — Hochwasser im südlichen Donaugebiet II.
- Flurbereinigungs-Kommission:
- — 3. Geschäftsbericht 1912.
- Ornithologische Gesellschaft:
- — Verhandlungen 1910, Bd. XI, 1.
- K. Ludwigs-Gymnasium:
- — Jahresbericht 1911/12 mit Programm von Wolf II.
- K. Luitpold-Gymnasium:
- — Jahresbericht 1911/12 mit Programm von Egenolf.
- K. Maximilians-Gymnasium:
- — Jahresbericht 1911/12 mit Programm von Lindmeyr.
- K. Theresien-Gymnasium:
- — Jahresbericht 1911/12 mit Programm von K. Schmitt.
- K. Wilhelms-Gymnasium:
- — Jahresbericht 1911/12 mit Programm von Engelhardt.
- K. Wittelsbacher Gymnasium:
- — Jahresbericht 1911/12.
- K. Realgymnasium:
- — Jahresbericht 1911/12.
- K. Technische Hochschule:
- — Programm für das Studienjahr 1912/13.
- — Personalstand im S.-S. 1912; W.-S. 1912/13.
- K. Hof- und Staatsbibliothek:
- — Catalogus cod. M.S.S., tom. 1, pars VI.
- Lehr- und Versuchsanstalt für Photographie:
- — Jahrbuch 1912.
- Metropolitan-Kapitel München-Freising:
- — Schematismus der Geistlichkeit für das Jahr 1912.
- — Amtsblatt der Erzdiözese München und Freising 1912 mit Register.
- Deutsches Museum von Meisterwerken der Technik etc.:
- — 8. und 9. Verwaltungsbericht 1910—12.
- Oberbergamt:
- — Geognostische Jahreshefte, 24. Jahrg., 1911.
- K. Luitpold-Kreisoberrealschule:
- — 5. Jahresbericht 1911/12 und Programm (Bericht über physikalische Schülerübungen).
- Gisela-Kreisrealschule:
- — 8. Jahresbericht 1911/12.
- K. Maria Theresia Kreisrealschule:
- — 13. Jahresbericht. 1911/12.

München. Universität:

- — Personalstand, S.-S. 1912, W.-S. 1912/13.
- — Schriften aus dem Jahre 1911/12 in 4^o und 8^o.
- — Verzeichnis der Vorlesungen, S.-S. 1912, W.-S. 1912/13.
- Ärztlicher Verein:
- — Sitzungsberichte. Bd. 21, 1911.
- Historischer Verein von Oberbayern in München:
- — Oberbayerisches Archiv, Bd. 53, Heft 4; Bd. 56.
- — Altbayerische Monatschrift, Jahrg. 10, No. 5, 6; Jahrg. 11, No. 1, 2.
- Meteorologische Zentralstation:
- — Übersicht über die Witterungsverhältnisse im Königreich Bayern während der Monate Dez. 1911, Jan. bis Nov. 1912.
- — Veröffentlichungen: Deutsches meteorol. Jahrbuch (Bayern) für 1911.

Münster. Westfäl. Provinzialverein für Wissenschaft u. Kunst:

- — Jahresbericht 1910/11.
- Verein für Geschichte und Altertumskunde Westfalens:
- — Zeitschrift für vaterländische Geschichte, Bd. 69, 1911.

Nancy. Académie de Stanislas:

- — Mémoires, année 161, VI. sér., tom. 8.
- Société d'archéologique Lorraine et du Musée Historique Lorrain:
- — Bulletin 1912, No. 1—12.
- — Mémoires, tom. 61, 1911.
- Société des sciences:
- — Bulletin, tom. 7—11; tom. 12, fasc. 1—4; tom. 13, fasc. 1.

Nantes. Société des sciences naturelles de l'Ouest de la France:

- — Bulletin, sér. III, tom. 1, 1911, No. 1—4.

Narbonne. Commission archéologique:

- — Bulletin 1911, sem. 2; 1912, sem. 1, 2.

Neapel. Biblioteca ed ufficio di statistica:

- Annuario storico, parte 1, 1912.
- R. Istituto d'incoraggiamento:
- — Atti 63, 1911.
- Società Reale di Napoli:
- — Accademia delle scienze morali e politiche
- — Atti, vol. 41.
- — Rendiconto, vol. 49. 50.
- — Accademia delle scienze fisiche e matematiche:
- — Rendiconto, vol. 17, fasc. 7—12; vol. 18, fasc. 1—9.
- Stazione zoologica:
- — Mitteilungen, Bd. 20, Heft 3.

- Neuchâtel.** Société des sciences naturelles:
 — — Bulletin, tom. 38, 1910/11.
- New Castle** (upon-Tyne). Institute of mining and mechanical engineers:
 — — Transactions, vol. 58, part 9; vol. 61, part 8; vol. 62, part 1—7.
- Neumarkt i. O.** Historischer Verein:
 — — Jahresbericht, 7. und 8. Jahrg., 1910 und 1911.
- New Haven.** American Oriental Society:
 — — Journal, vol. 32, part 2—4.
 — — Connecticut Academy of arts and sciences:
 — — Transactions, vol. 17, part 1—139, 141—211.
 — — Yale Observatory:
 — — Transactions, vol. 2, part 1, 3, 4.
 — — Yale University:
 — — Yale Review, N. Ser., vol. 1, No. 3, 4; vol. 2, No. 1, 2.
 — — American Journal of Science, No. 194—204.
 — — Report of the librarian 1910/11.
- New-York.** Academy of Sciences:
 — — Annals, vol. 21, p. 87—175, 177—263; vol. 22, p. 1—160.
 — — American Museum of Natural History:
 — — Annual Report 43, 1911.
 — — Anthropological Papers, vol. 7, part 1; vol. 8, 9, part 1; vol. 12, part 1.
 — — Journal, vol. 12, No. 1—7.
 — — Bulletin, vol. 30, 1911.
 — — Guide Leaflet, No. 34, 35.
 — — Ethnographical Album I, 1900.
 — — Botanical garden Library:
 — — Bulletin, vol. 7, No. 27; vol. 8, No. 28.
 — — American Geographical Society:
 — — Bulletin, vol. 44, No. 1—11.
 — — Geological Society of America:
 — — Bulletin, vol. 22, No. 4; vol. 23, No. 1—3.
 — — American Mathematical Society:
 — — Bulletin, vol. 18, No. 204—213.
 — — Transactions, vol. 13, No. 1—4.
 — — Annual Register 1912.
 — — Zoological Society:
 — — Zoologica, vol. 1, No. 9, 10.
- Nijmegen.** Nederl. botan. Vereeniging:
 — — Recueil des travaux botan. Néerlandais, vol. 8, No. 1—4, 1911;
 Titel und Register.
 — — Archief, Nederl. kruidkundig 1907; 1908; 1911.

Nimes. Académie:

- — Mémoires, tom. 33, année 1910.
- — Grange, Sommaires des lettres pontificales, partie 1, 1911.

Nizza. Observatoire de Nice:

- — Annales, tom. 11, 1908; tom. 13, 1, 1908; tom. 14, 1911.

Nürnberg. Naturhistorische Gesellschaft:

- — Abhandlungen, Bd. 18, 2; Bd. 19, 1—3.
- — Mitteilungen 1908, 2. Jahrg., No. 2, 3, 5; 3. Jahrg., No. 1.
- K. Neues Gymnasium:
- — Jahresbericht 1911/12 mit Programm von Ullrich.
- Germanisches Nationalmuseum:
- — Mitteilungen 1911.
- Verein für Geschichte der Stadt:
- — 34. Jahresbericht, 1911.

Oberlin (Ohio). Oberlin College Library:

- — The Wilson Bulletin, vol. 23, No. 3—5; vol. 24, No. 2.

Odessa. K. Gesellschaft für Geschichte und Altertümer:

- — Zapiski 30, 1912.
- Neurussische Gesellschaft der Naturforscher:
- — Zapiski 34, 1909; 35, 1910; 36, 1911; Index zu 1—30.

Offenbach. Verein für Naturkunde:

- — Bericht 51—53, 1909/12.

Orenburg (Rußland). K. Russische Geographische Gesellschaft:

- — Izvěstija, Heft 23, 1912.

Orléans. Société archéologique de l'Orléanais:

- — Bulletin, tom. XV, No. 198—201; Titel und Register zu No. 180—198.
- — Mémoires, tom. 33, 1911.

Osnabrück. Verein für Geschichte und Landeskunde:

- — Mitteilungen, Bd. 36, 1911.

Ottawa. Department of Interior:

- — Atlas of Canada, No. 4, 5.
- Department of Mines (Geological Survey Branch):
- — Summary Report 1911.
- — Memoir, No. 8, 12—14, 21, 24E, 27, 28.
- — Map, No. 1133, 1134.
- Department of Mines (Mines branch):
- — Bulletin, No. 2, 3, 6, 7.
- — Publication, No. 83, 104, 118, 154.
- — Annual Report 1910.
- — Summary Report 1911.

- Ottawa.** Royal Society of Canada:
 — — Proceedings and Transactions, ser. III, vol. 5.
- Oxford.** English Historical Review:
 — — Review, vol. 27, No. 105—108.
 — Radclyffe Observatory:
 — — Observations 1906—10, vol. 1.
- Paderborn.** Verein für Geschichte und Altertumskunde Westfalens:
 — — Zeitschrift, Bd. 69, 2.
- Padua.** R. Accademia di scienze, lettere ed arti:
 — — Atti e memorie, anno 370 = 27.
 — Accademia Veneto-Trentina Istriana:
 — — Atti, Classi riunite, terza ser., anno 4, 1911. fasc. 1, 2; anno 5, 1912. fasc. 1, 2.
- Palermo.** R. Accademia di scienze, lettere e belle arti:
 — — Atti, ser. III, vol. 8, 1904—07; vol. 9, 1908—11.
 — — Bullettino 1907—10.
 — Circolo matematico:
 — — Annuario 1912.
 — — Rendiconti, tom. 33, fasc. 1—3; tom. 34, fasc. 1—3.
 Supplemento, vol. 7, No. 1—4.
 — Società di scienze naturali ed economiche:
 — — Giornale, vol. 29, 1912.
 — Società Siciliana di scienze naturali:
 — — Il Naturalista Siciliano, vol. 21, No. 11/12.
- Parenzo.** Società Istriana di archeologia e storia patria:
 — — Atti e memorie, vol. 27.
- Paris.** Académie de médecine:
 — — Bulletin 1912, No. 1—44.
 — — Rapport sur les vaccinations et revaccinations 1910.
 — Académie des Sciences:
 — — Annuaire 1912.
 — — Comptes rendus, tom. 154, No. 3—12, 14—26; tom. 155, No. 1—27.
 — — Oeuvres de Cauchy, I. sér., vol. 3, 1911; 1903, 1.
 — Bibliothèque Nationale:
 — — Cordier, Catalogue du fonds Tibétain, 2^e partie. 1909.
 — Comité international des poids et mesures:
 — — Procès-verbaux des séances, Session de 1911.
 — Rédaction „Cosmos“:
 — — Cosmos, No. 1408—1459.
 — École d'anthropologie:
 — — Revue anthropologique, année 21, No. 2.

Paris. École polytechnique:

- — Journal, II. sér., cahier 16.
- Institut général psychologique:
- — Bulletin, année 11, No. 5, 6; année 12, No. 1—4.
- Ministère de l'instruction publ. et des beaux-arts:
- — Bulletin de la commission archéologique de l'Indochine, année 1911, livr. 1, 2.
- — Bulletin archéologique du comité des travaux historiques et scientifiques, année 1910, livr. 3; année 1911, livr. 1—3.
- Moniteur Scientifique:
- — Moniteur, No. 842—853, 4^o.
- Muséum d'histoire naturelle:
- — Bulletin, Titel und Register zu année 1909.
- Revue des études d'histoire:
- — Revue, année 77, No. 76—78; année 78, No. 79—84.
- Revue historique:
- — Revue, année 37, tom. 109, No. 2; tom. 110, No. 1, 2; tom. 111, No. 1, 2; année 38, tom. 112, No. 1; Table 1906—10.
- Revue des questions historiques:
- — Revue, No. 182—184.
- Société d'anthropologie:
- — Bulletins et mémoires 1911, No. 1—6.
- Société astronomique de France:
- — Bulletin 1912, No. 2—12; 1913, No. 1.
- Société de géographie:
- — La Géographie, année 23, No. 5, 6; année 24, No. 1—6; année 25, No. 1—6; année 26, No. 1.
- Société mathématique de France:
- — Bulletin, tom. 39, fasc. 4; tom. 40, fasc. 1—4.
- — Comptes rendus des séances de l'année 1912.
- Société de philosophie:
- — Bulletin, année 11, No. 7, 8; année 12, No. 1—6.
- Société zoologique de France:
- — Bulletin, tom. 35, 1910; tom. 36, 1911.
- — Mémoires, année 23, 1910; année 24, 1911.

Parma. R. Deputazione di storia patria:

- — Archivio storico, N. Ser., vol. 11, 1911.

Pasing. K. Prgymnasium:

- — Jahresbericht 1910/11 mit Programm von Ludw. Kuhn.

Passau. K. Lyzeum:

- — Jahresbericht 1911/12.

Pavia. Società Pavese di storia patria:

- — Bollettino, anno XI, fasc. 3, 4; anno XII, fasc. 1.

Peradeniya. R. Botanic gardens:

- — Annals, vol. V, part 1—4.
- — Circulars, vol. 5, No. 15—22; vol. 6, No. 1—3, 6—9.

Perth. Western Australian Geological Survey:

- — Annual Report for 1911.

Peshawar (India). Arch. Survey of India:

- — Annual Report 1911/12.

St. Petersburg. Académie Impériale des sciences:

- — Bulletin 1911, No. 9—18; 1912, No. 1—18.
- — Mémoires, Classe physico-mathémat., vol. 25, No. 9, 10; vol. 26, No. 1, 2; vol. 27, No. 1, 2; vol. 28, No. 1, 2; vol. 29, No. 1—3, 5; vol. 30, No. 1—8.
- — Mémoires, Classe historico-philol., vol. 8, No. 15; vol. 10, No. 2, 3; vol. 11, No. 1.
- — Byzantina Chronika, Bd. XV, No. 4; Bd. XVII und Beilage zu XVII, 1.
- — Izvěstija, tom 16, No. 3, 4; tom 17, No. 1, 2.
- — Travaux du Musée botanique, vol. 5, No. 8, 9.
- — Schedae ad herbarium florum Rossicae, No. 7.
- — Travaux du Musée géologique, tom 5, No. 2—4; tom 6, No. 1—3.
- — Annuaire du Musée zoologique, tom 15, No. 4; tom 16, No. 1—3.
- — Missions scientif. pour la mesure d'un arc de méridien au Spitzberg, T. 1; B 2, C 1.
- — Faune de la Russie, a) Poissons, vol. 1; b) Oiseaux, vol. 1, 1; c) Hydres, vol. 1.
- — Fürst Galitzin, Vorlesungen über Seismometrie.
- — Hirth-Rockhill, Chan Ju-kua.
- **Berginstitut:**
- — Annales de l'Institut des Mines, vol. 1, No. 1—5, 1907/08; vol. 2, No. 1—5, 1909/10; vol. 3, No. 1—5, 1910/11.
- **Comité géologique:**
- — Bulletins 1911, vol. 30, No. 1—10; 1912, vol. 31, No. 1, 2.
- — Mémoires, N. Sér., No. 58, 61, 63—65, 67, 69, 71, 73, 75, 78, 81.
- — Explorations scientifiques dans les régions de la Sibirie, a) Jénisseï, livr. 9—12 und carte géolog. 2, 8, 9; b) Léna, livr. 6—8 und carte géolog. V, 1, 2; c) Amour, livr. 10—12 und carte géolog.; d) Donetz VI, 21 mit Text.
- **Commission sismique permanente:**
- — Comptes rendus des séances, tom 3, livr. 2; tom 4, livr. 1—3; tom 5, livr. 1; mit Nachtrag: Seismometrische Tabellen 1911.
- — Bulletin 1907, Oct.—Déc.; 1908, Janv.—Sept.
- **Botanischer Garten:**
- — Acta horti Petropolitani, vol. 28, fasc. 4.

St. Petersburg. Kais. Russische Archäologische Gesellschaft:

- — Zapiski, Orientalische Abteilung, tom 19, No. 4; tom 20, No. 1—4; tom 21, No. 1.
- — „ Numismatische Abteilung, tom 1, No. 4; tom 2, No. 1, 2.
- — Kais. Russische Geographische Gesellschaft:
- — Izvēstija, tom 47, 1911, No. 7—10; tom 48, 1912, No. 1—5.
- — Kais. Mineralogische Gesellschaft:
- — Verhandlungen, II. Ser., Bd. 48, 1912.
- — Materialien zur Geologie Rußlands, Bd. 25.
- — Physikalisch-chemische Gesellschaft an der Kais. Universität:
- — Žurnal, Physikalische Abteilung, tom 43, Heft 9; tom 44, Heft 1—7.
- — „ Chemische Abteilung, tom 43, Heft 9; tom 44, Heft 1—8.
- — Société Impériale des Naturalistes:
- — Trudy: Section de zoologie et de physiologie, vol. 22, 2; 26, 4; 27, 4; 28, 4.
- — „ „ géologie et mineralogie, vol. 24; 25; 26, 5; 28, 5; 33, 5.
- — Physikalisches Zentralobservatorium:
- — Annales 1908, part 1, 2, fasc. 1, 2.

Philadelphia. Academy of natural Sciences:

- — Proceedings, vol. 63, part 3; vol. 64, part 1, 2.
- — Journal, ser. II, vol. 14, part 4.
- — College of pharmacy:
- — American journal of pharmacy, vol. 84, No. 1—6, 8—12.
- — Franklin Institute:
- — Journal, vol. 173, 174.
- — Pennsylvania Museum and School of industrial art:
- — Bulletin, No. 37—40.
- — Report 36, 1912.
- — Historical Society of Pennsylvania:
- — The Pennsylvania Magazine of History, vol. 36, No. 142, 143.
- — H. Ch. Lea 1912.
- — American Philosophical Society:
- — Proceedings, No. 202—206; Titel und Register zu vol. 1—50.
- — Transactions, vol. 22, p. 2.
- — List 1912.
- — University:
- — Root, Kerr.
- — Schriften (Dissertationen) von 1911—12.

Pirmasens. K. Gymnasium:

- — Jahresbericht 1911/12 mit Programm von Erb.

- Pisa.** R. Scuola Normale Superiore:
 — — Annali, Filos. e Filologia, vol. 23, 1912.
 — — „ Fis. e Mat., vol. 12, 1912.
 — Società Toscana di scienze naturali:
 — — Atti, Processi verbali, vol. 20, No. 4, 5; vol. 21, No. 1, 2.
 — — Memorie, vol. 26, 1910; vol. 27, 1911.
 — Società Italiana di fisica:
 — — Il nuovo Cimento, ser. VI, vol. 3, fasc. 1—12.
 — Università:
 — — Annali delle Università Toscana, vol. 14—30.
 — — Annuario 1911/12.
- Pistoia.** R. Deputazione di storia patria:
 — — Bulletino, anno XIII, 1—4; XIV, 1—3.
- Plauen.** Altertumsverein:
 — — Mitteilungen, 22. Jahresschrift, 1912.
 — Gymnasium:
 — — 23. Jahresbericht, 1911/12.
- Plymouth.** Marine Biological Association:
 — — Journal, N. Ser., vol. 9, No. 3.
- Poitiers.** Société académ. d'agriculture, belles-lettres, sciences et arts:
 — — Bulletin, No. 370 (Janvier—Mars), 1911.
- Pola.** Hydrographisches Amt der K. K. Kriegsmarine:
 — — Veröffentlichungen, No. 32.
- Portici.** Laboratorio di zoologia:
 — — Annali, ser. II, vol. 8, 1908; vol. 9, 1910.
- Porto** (Portugal). Academia polytechnica:
 — — Annaes scientificos, vol. VI, No. 4; vol. VII, No. 1—3.
- Posen.** Historische Gesellschaft:
 — — Zeitschrift, 26. Jahrg., Heft 1 und 2.
 — — Historische Monatsblätter, 12. Jahrg., No. 1—12.
- Potsdam.** Geodätisches Institut:
 — — Veröffentlichungen, N. F., No. 53—55.
 — — Veröffentlichungen des Zentralbureaus der internationalen Erdmessung, No. 23, 1912.
 — — Verhandlungen der Konferenz für internationale Erdmessung 1909 in London und Cambridge, tom. 2, 3.
- Prag.** Böhmisches Kaiser Franz Joseph-Akademie:
 — — Sběrka pramenů, Skupina 2, číslo 16, 1911.
 — — Věstník, Ročník 20, 1911.
 — — Bulletin international, Classe des sciences mathématiques, année 16, 1911.
 — — Almanach, Ročník 22, 1912.

Prag. Böhmisches Kaiser Franz Joseph-Akademie:

- — Rozpravy, Třída I, číslo 44, 1911; 45, 1912; Třída II, Ročník 20, 1911; Třída III, číslo 36, 1911.
- — Historický Archiv, číslo 37.
- — Bibliografie České Historie, díl V, svazek 1, 2.
- — Khol: Haenke 1912.
- — Tille, V. Roncesvalles 1912.
- Lese- und Redehalle der deutschen Studenten:
- — 63. Bericht, 1911.
- Deutscher naturwissenschaftlich-medizinischer Verein für Böhmen „Lotos“:
- — Lotos, Naturwissenschaftliche Zeitschrift, Bd. 59, No. 1—10.
- Museum im Königreich Böhmen:
- — Časopis musea království českého, Bd. 86, No. 1—4.
- — Památky archaeologické a místopisné, díl 24, No. 7, 8.
- — Bericht für 1911.
- Českoslovisches Museum:
- — Narodpisný Věstník Československý, Bd. 7, No. 1—4, 7 10.
- K. K. Sternwarte:
- — Magnetische und meteorologische Beobachtungen, Jahrg. 72, 1911.
- — Astronomische Beobachtung in den Jahren 1905—09.
- Verein für Geschichte der Deutschen in Böhmen:
- — Mitteilungen, Jahrg. 50, No. 1—4.
- — Bretholz, Geschichte Böhmens und Mährens 1912.
- Deutsche Karl Ferdinands-Universität:
- — Die feierliche Inauguration des Rektors für das Jahr 1911/12; 1912/13.
- — Ordnung der Vorlesungen, S.-S. 1912, W.-S. 1912/13.
- — Personalstand 1912 13.

Princeton (N. J.). University Observatory:

- — Contributions, No. 2. 1912.

Pulkowa. Nikolai-Hauptsternwarte:

- — Publications, vol. 18, fasc. 5; vol. 19.

Pusa (Bengal). Agricultural Research Institute:

- — Annual Report of the Department of agriculture 1910/11.

Ravenna. Bolletino storico Romagnolo:

- — Felix Ravenna, No. 4—6.

Regensburg. Botanische Gesellschaft:

- — Denkschriften, XI. Bd. = N. F., Bd. V.
- K. Neues Gymnasium:
- — Jahresbericht für 1911/12 und Programm von Vermeulen.

Regensburg. Historischer Verein:

- — Verhandlungen, Bd. 62, 1911; Bd. 63, 1912.
- Naturwissenschaftlicher Verein:
- — Berichte, Heft 13, 1910/11.
- — Beilage zu Bericht 12, Ammon.

Reims. Académie:

- — Travaux, année 1906—11 = vol. 121—130.

Riga. Naturforscherverein:

- — Korrespondenzblatt 55, 1912.

Rio de Janeiro. Biblioteca nacional:

- — Delgado, Brésil.
- — Regulamento.
- Museu nacional:
- — Archivos 14; 15.
- Observatorio:
- — Anuario 28, 1912.
- — Boletim mensal 1909.

Rochefort. Société de géographie:

- — Bulletin, tom. 33, 1911, No. 2—4; tom. 34, 1912, No. 1, 2.

Rom. Reale Accademia dei Lincei:

- — Anuario 1912.
- — Atti, ser. V, Notizie degli scavi di antichità, vol. 8, fasc. 7—12, Suppl.; vol. 9, fasc. 1—4.
- — Atti, Rendiconto dell'adunanza solenne 1912, vol. 2.
- — Atti, ser. V, Rendiconti, Classe di scienze fisiche, vol. 21, sem. 1, No. 1—12; vol. 21, sem. 2, No. 1—10.
- — Atti, Rendiconti, Classe di scienze morali, ser. V, vol. 20, fasc. 7—12; vol. 21, fasc. 1—6.
- — Memorie, Classe di scienze fisiche, ser. V, vol. 8, fasc. 18—24; vol. 9, fasc. 1—6.
- — Cinquanta anni di storia Italiana, vol. 3, 1912.
- — Annali dell' Islam, vol. 1.
- Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei:
- — Atti, anno 65, sessione 1—7.
- — Memorie, vol. 29, 1911.
- Biblioteca Apostolica Vaticana:
- — Codices Urbinates Latini, tom. 2, No. 501—1000.
- R. Comitato geologico d'Italia:
- — Bollettino, anno 1911, No. 3, 4; 1912, No. 1.
- Kais. Deutsches Archäologisches Institut:
- — Mitteilungen, Bd. 27, No. 3, 4.
- — Jahresbericht für 1911.

- Rom.** Società italiana per il Progresso delle Scienze:
 — — Atti, Riunione 5, 1911.
 — Società Italiana delle Scienze:
 — — Memorie di matematica e di fisica. ser. III, tom. 27, 1912.
 — R. Società Romana di storia patria:
 — — Archivio, tom. 34, fasc. 3, 4; tom. 35, fasc. 1, 2.
 — Specola Vaticana:
 — — Specola Astronomica Vaticana, No. 3.
 — R. Ufficio centrale meteorologico italiano:
 — — Annali, ser. II, vol. 19, 2; 20, 2; 21, 3; 22, 1, 3; 31, 1.
 — — Elenco delle pubblicazioni 1860--1910.
- Rosenheim.** Gymnasium:
 — — Jahresberichte für 1911/12 mit Programm von Hoppichler.
- Rostock.** Naturforschende Gesellschaft:
 — — Sitzungsberichte und Abhandlungen, N. F., Bd. 3, 1911.
 — Universität:
 — — Schriften aus dem Jahre 1911/12 in 4^o und 8^o.
- Rotterdam.** Bataafsche genootschap der proefondervuidelijke
 Wijsbegeerte:
 — — Verslag d. alg. vergadering 21. IX. 1912.
- Rouen.** Académie de sciences et lettres:
 — — Précis analytique des travaux 1909/10.
- Rovereto.** R. Accademia di scienze degli Agiati:
 — — Atti, ser. III, vol. 17, fasc. 3, 4; vol. 18, fasc. 1, 2.
- Saarbrücken.** Historischer Verein für die Saargegend:
 — — Heft 12, 1912.
- Saargemünd.** Gymnasium mit Realabteilung:
 — — 41. Jahresbericht, 1911/12.
- Saint-Dié.** Société philomatique:
 — — Bulletin, année 36, 1910/11.
- St. Etienne.** Société d'agriculture, sciences etc.:
 — — Annales, tom. 30, livr. 4; tom. 31, livr. 1-4; tom. 32, livr. 2.
- Saint Louis.** Missouri Botanical Garden:
 — — Report 22, 1911.
 — Missouri historical Society:
 — — Collections, vol. 3, No. 1-4; vol. 4, No. 1.
- Salzburg.** K. K. Staatsgymnasium:
 — — Programm für das Jahr 1911/12.
 — Gesellschaft für Salzburgerische Landeskunde:
 — — Mitteilungen 52, 1912.

- Salzwedel.** Altmärkischer Verein für vaterländische Geschichte:
 — — Jahresbericht 38, 1912.
 — — Visitationsabschiede, Bd. 2, Heft 2.
- St. Gallen.** Naturwissenschaftliche Gesellschaft:
 — — Jahrbuch für das Jahr 1911.
 — Historischer Verein:
 — — Neujaarsblätter 1910; 1911; 1912.
- San Fernando.** Instituto y Observatorio de marina:
 — — Anales, Sec. 2a, Observ. meteorologie 1910.
- San Francisco.** California Academy of Sciences:
 — — Proceedings, ser. IV, vol. 1, pag. 289—430; vol. 3, pag. 57—186.
- Santiago de Chile.** Observatorio astronomico:
 — — Publicaciones, No. 2.
- São Paulo.** Sociedade scientifica:
 — — Revista, vol. 6, Oct.
- Sarajevo.** Bosnisch-Herzegowinische Landesregierung:
 — — Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen im Jahre 1910.
 — Landesmuseum:
 — — Glasnik 23, No. 4; 24, No. 1—3.
 — — Wissenschaftliche Mitteilungen aus Bosnien 12, 1912.
- Schweinfurt.** K. Realschule:
 — — Jahresbericht 1911/12.
- Schwerin.** Verein für mecklenburgische Geschichte:
 — — Jahrbücher und Jahresberichte, Jahrg. 77, 1912.
- Sendai.** Kais. Universitäts-Bibliothek:
 — — The Tôhoku Mathematical Journal, vol. 1, No. 3, 4; vol. 2, No. 1—4.
 — — The Science Reports, vol. 1, No. 1—3; II. series (= Geology).
 vol. I, No. 1.
- Shanghai.** Nord China Branch of the Asiatic Society:
 — — Journal, vol. 43, 1912.
- Siena.** R. Accademia dei fisiocritici:
 — — Atti, ser. V, vol. 3, No. 1—10.
 — Deputazione de la Storia patria:
 — — Bulletino Senese di storia patria, anno XVIII, fasc. 3; anno XIX,
 fasc. 1, 2.
- Simla.** Indian meteorological department:
 — — India meteorolog. Memoirs, vol. 21, part 3, 4.
 — — India Weather Review 1910.
 — — Monthly Weather Review 1911, Sept.—Dez.; 1912, Jan.—Juni.
 — — Report of the administration 1911/12.
 — — Rainfall data of India 22, 1910.

Sofia. Académie des Sciences:

- — Spisanie Periodičesko, kniga 2—71. 1882—1910.
- — „ na bulgarskata akademiya, kniga 1—3.
- — Letopis 1—11, 1899—1910.
- Société archéologique Bulgare:
- — Bulletin 2, fasc. 2; 3, fasc. 1.

Sousse. Société archéologique:

- — Bulletin, No. 14.

Spalato. K. K. Archäologisches Museum:

- — Bulletino di archaeologia e storia Dalmata 33, 1910, No. 1—12.

Stade. Verein für Geschichte und Altertümer etc.:

- — Stadtarchiv. N. F., Heft 2. 1912.

Stavanger. Museum:

- — Aarshefte for 1911.

Stettin. Gesellschaft für Pommersche Geschichte und Altertumskunde:

- — Baltische Studien, N. F., No. 15, 1911.
- — Monatsblätter 1911, No. 1—12.

Stockholm. K. Akademie der Wissenschaften:

- — Les prix Nobel en 1911.
- — Handlingar. Bd. 47, No. 1—11; Bd. 48, No. 1, 2, 4—7.
- — Arkiv för Zoologi, Bd. VII, 2, 3.
- — Arkiv för Kemi, Bd. IV, 3.
- — Arkiv för Botanik, Bd. XI, 1—4; Bd. XII, 1, 2.
- — Arkiv för Matematik, Bd. VII, 3, 4; Bd. VIII, 1, 2.
- — Meddelanden från Nobel-Institut, Bd. 2, No. 2.
- — Arsbök for år 1912.
- — Meteorologiska Jakttagelser i Sverige, vol. 53.
- — Astronomiska Jakttagelser i Sverige, vol. 9. No. 5, 6.
- — Lefnadsteckningar IV, 4, 5.
- — Swedenborg Opera, vol. 1—3.
- — Berzelius Bref 1, 1, 2.
- K. Vitterhets Historie och Antikvitets Akademie:
- — Fornvännen, Årgangen 6, 1911.
- — Eckhoff, St. Clemens kyrka 1, 1912.
- — Ambrosiani, kyrkoinventarier.
- — Montelius. Das Museum der Altertümer in Stockholm 1912.
- K. Landtbruks-Akademien:
- — Handlingar och tidskrift, Bd. 51, 1912, No. 1—6.
- K. Bibliothek:
- — Akzessionskatalog 26, 1911 und Autorenregister 1896—1905, A—K.
- Geologiska Förening:
- — Förhandlingar, Bd. 33, No. 7; Bd. 34, No. 1—6.

Stockholm. Nationalekonomiska föreningen:

- — Förhandlingar 1911.
- — Schwedische Gesellschaft für Anthropologie und Geographie:
- — Ymer, Jahrg. 31, Heft 3, 4; Jahrg. 32, Heft 1—3.
- Svenska Literatursällskapet:
- — Skrifter, No. 1, 32; No. 17, 14; No. 21, 4; No. 23.
- Nordiska Museet:
- — Fataburen 1911, Heft 1—4.
- Reichsarchiv:
- — Meddelanden, N. F. I, No. 28—30; II, 1—3; IV, 1.
- — Svenska Riksrådets protokoll, Bd. 13 (1649).
- Sveriges geologiska Undersökning:
- — Årsbok 4, 1910.

Stonyhurst. College Observatory:

- — Results of Meteorological and Magnetical Observations 1911.

Strassburg. K. Hauptstation für Erdbebenforschung:

- — Seismometrische Aufzeichnungen 1911, No. 49—52; 1912, No. 1—28.
- — Monatliche Übersicht 1911, No. 2—8.
- Wissenschaftliche Gesellschaft:
- — Schriften, No. 10, 12—16.
- — Internationale Kommission für wissenschaftliche Luftschiffahrt, Heft 1—8.
- Kais. Universitäts-Sternwarte:
- — Annalen, 4. Bd., No. 1, 1911; No. 2, 1912.

Straubing. Gymnasium:

- — Jahresbericht 1911/12 mit Programm von Lederer III.
- Historischer Verein:
- — Jahresbericht 14, 1911.

Stuttgart. Württemberg. Kommission für Landesgeschichte:

- — Vierteljahreshefte für Landesgeschichte, N. F., Jahrg. 20, 1911, Heft 2—4; Jahrg. 21, 1912, Heft 1—4; Jahrg. 22, 1913, Heft 1.
- — Württemberger Geschichtsquellen, Bd. 12.
- K. Württembergisches Statistisches Landesamt:
- — Statistisches Handbuch, Jahrg. 1910 und 1911.
- — Württembergische Jahrbücher für Statistik und Landeskunde 1911, Heft 1, 2.
- — Beschreibung des Oberamts Münsingen, 2. Bearbeitung.

Sunderland. West Hendon House Observatory:

- — Backhouse Star-Catalogue 1912.

Sydney. Australian Museum:

- — Records, vol. 8, No. 3; vol. 9, No. 1.

Sydney. Linnean Society of New South Wales:

- — Proceedings, vol. 36, part 2—4; vol. 37, pars 1.
- R. Society of New South Wales:
- — Journal and Proceedings, vol. 45, part 2, 3.
- Geological Survey of New South Wales:
- — Annual Report for 1911.
- — Mineral resources of the Western Coalfield, Maps and sections, No. 14—16.

Taihoku. Government of Formosa:

- — Icones plantarum Formosanarum, fasc. 1, 1911.

Teddington. National Physical Laboratory:

- — Collected Researches, vol. 2—5; vol. 7, 8.
- — Report for the year 1911.

Thorn. Copernikus-Verein für Wissenschaft und Kunst:

- — Mitteilungen, Heft 19, 20.

Tokyo. Imp. Earthquake Investigation Committee:

- — Bulletin, vol. 4, No. 3; vol. 6, No. 1; Titel und Register zu vol. 4.
- Deutsche Gesellschaft für Natur- und Völkerkunde Ostasiens:
- — Mitteilungen, Bd. 14, Teil 1.
- Geographical Society:
- — Journal, vol. 22, No. 271—275; Special-Number, 277—282.
- Kriegsministerium:
- — 10 geologische Karten von Japan.
- Mathematico-Physical Society:
- — Proceedings, 2^d ser., vol. 6, No. 10—20.
- Imp. Geological Survey of Japan:
- — Bulletin, vol. 22, No. 1.
- Kais. Universität:
- — Calendar 1911/12.
- — The Journal of the College of Science, vol. 29, No. 2; vol. 30, No. 2; vol. 31; vol. 32, No. 1—7.
- — The Journal of the College of Agriculture, vol. 1, No. 3; vol. 2, No. 5—7; vol. 3, No. 2; vol. 4, No. 1—3; vol. 5, No. 1.
- — Mitteilungen aus der medizinischen Fakultät, Bd. 10, No. 1, 2.
- — Neurologia, Bd. 3, 1911.

Toronto. Canadian Institute:

- — Transactions, vol. 9, part 2.
- R. Astronomical Society of Canada:
- — Journal, vol. 5, No. 6; vol. 6, No. 1—5.
- — Observers Handbook for 1912.

Toronto. University:

- — Studies, Review of Historical publications, vol. 16, 1911.
- — Biological Series, No. 10, 11.
- — Papers from Chemical laboratories, No. 94.
- — Papers from Physical laboratories, No. 37—39.

Toulouse. Université:

- — Annales de la faculté des sciences, tom. 2, 1910, fasc. 1—4.
- — Annales du Midi, No. 88—95.
- — Bibliothèque méridionale. sér. II, tom. 15.
- Société de géographie:
- — Bulletin, année 30, 1911, No. 1—4; année 31, 1912, No. 1. 2.

Tournai. Société historique et archéologique:

- — Annales, N. S., tom. 14.
- — Catalogue de l'exposition 1911.

Tours. Société archéologique de Touraine:

- — Bulletin trimestr., tom. 18, trim. 1—4.
- — Mémoires, tom. 49, 1910.

Trient. Biblioteca e Museo comunale:

- — Archivio Trentino, anno 26, fasc. 2—4; anno 27, fasc. 1, 2.

Triest. K. K. Maritimes Observatorium:

- — Rapporto annuale, vol. 25, 1912.
- Società Adriatica di Scienze naturali:
- — Bolletino, vol. 19—25, 1899—1911.

Tromsø. Museum:

- — Aarshefter 33, 1910.
- — Aarsberetning for 1910.

Troppau. Kaiser Franz Joseph-Museum für Kunst und Gewerbe:

- — Zeitschrift für Geschichte und Kulturgeschichte Österreichisch-Schlesiens, Jahrg. 6, Heft 3, 4.

Tunis. Institut de Carthage:

- — Revue Tunisienne, No. 91, 93—96.

Turin. R. Accademia delle scienze:

- — Atti, vol. 47, No. 1—15.
- — Memorie, ser. II, tom. 62, 1912.
- — Osservazioni meteorol. nell' anno 1911.
- Accademia d' agricoltura:
- — Annali, vol. 54, 1911.
- Museo di zoologia ed Anatomia comparata:
- — Bolletino, vol. 26, 1911 = No. 634—644.

Uccle. Observatoire:

- — Annuaire astronomique 1913.
- — Carte photographique du Ciel, No. 1—20.

- Uccle.** La Revue Congolaise:
 — — Revue, année 2, No. 3, 4; année 3, No. 1—3.
- Ulm.** Verein für Kunst und Altertum:
 — — Mitteilungen, Heft 17, 1911.
 — Verein für Mathematik und Naturwissenschaften:
 — — Mitteilungen, Heft 15, 1912.
- Upsala.** Human. Vetenskaps Samfunder:
 — — Skrifter, Bd. 10, 1, 2; Bd. 13.
 — K. Universiät:
 — — Schriften aus dem Jahre 1911/12 in 4^o und 8^o.
 — — Årskrift 1911.
 — — Linné, vol. I. 6.
 — — Eranos, Acta philol. Suecana, vol. 11, fasc. 3, 4; vol. 12, fasc. 1, 2.
- Urbana.** Illinois State Laboratory of Natural History:
 — — Bulletin, vol. 9, art. 5.
- Utrecht.** Historisch Genootschap:
 — — Bijdragen en Mededeelingen, deel 33.
 — — Werken, ser. III, No. 28.
 — Institut Royal Météorologique des Pays-Bas:
 — — Annuaire 1910, A, B.
 — — Mededeelingen en Verhandelingen. No. 12, 13 a—c. 14.
 — — Overzicht, Jahrg. 8, 1911, No. 12; Jahrg. 9, 1912, No. 1—11.
 — — Onweders 1909, deel 30.
 — — Publication, No. 104.
 — Physiologisch Laboratorium der Hoogeschool:
 — — Onderzoekingen, Reeks V, No. 13.
 — Astronomisches Laboratorium:
 — — Recherches astronomiques 4, 5, 1911.
 — — Nijland, De Kometen 1911. C, F und G.
- Vaduz.** Historischer Verein für das Fürstentum Lichtenstein:
 — — Jahrbuch, Bd. 9, 11, 12.
- Veglia.** Altslavische Akademie:
 — — Glagolitica 1912.
- Vendôme.** Société archéologique scientifique et littéraire:
 — — Bulletin, tom. 50, 1911.
- Venedig.** Comitato talassografico Italiano:
 — — Bolletino trimestrale. No. 13—16.
- Verona.** Museo civico:
 — — Madonna Verona, fasc. 20—23.
- Vicenza.** Accademia Olimpica:
 — — Atti, N. S., vol. 1, 1907—08; vol. 2, 1909—10.

Warschau. Prace matematyczno-fizyczne:

- — Prace, tom. 22, 1911.
- Towarzystwo Naukowe [Wissenschaftliche Gesellschaft]:
- — Sprawozdania [Sitzungsberichte], Jahrg. 4, Heft 8, 9; Jahrg. 5, Heft 1, 2.

Washington. Bureau of American Ethnologie:

- — Bulletin, No. 47, 52.
- U. S. Department of Agriculture:
- — Yearbook 1911.
- Carnegie Institution:
- — List of Publications, 4. Dec. 1912.
- Bureau of Education:
- — Report of the commissioner 1910/11, vol. 1, 2.
- Smithsonian Institution:
- — Annual Report 1910.
- — Miscellaneous Collections, No. 1987, 2051, 2060, 2064, 2066—83, 2085—88, 2090—94, 2133, 2134, 2136, 2137, 2139, 2141—43.
- — List of Smithsonian publications 1912.
- U. S. National Museum:
- — Contributions to the U. S. National Herbarium, vol. 16, part 1—3.
- — Bulletin, vol. 77.
- — Report for the year 1910/11.
- U. S. Naval Observatory:
- — Synopsis of the Report for 1910/11.
- U. S. Coast and Geodetic Survey Office:
- — Report of the Superintendent 1910/11.
- — Spec.-publications, No. 10—12.
- U. S. Geological Survey:
- — Annual Report 32, 1910/11.
- — Professional Paper, No. 73—75, 4^o.
- — Water Supply Paper, No. 271, 278—80, 282, 285—88.
- — Bulletin, No. 474, 478, 483—496, 498—500, 504—509, 511, 512, 516, 517.
- — Mineral Resources 1910, Bd. 1, 2.
- — Publications, April 1912.

Weihenstephan. K. Akademie für Landwirtschaft und Brauerei:

- — Bericht 1911/12.

Weimar. Thüringischer Botanischer Verein:

- — Mitteilungen, N. F., Heft 29.

Wernigerode. Harzverein für Geschichte:

- — Zeitschrift, Jahrg. 44, Heft 4; Jahrg. 45, Heft 1—3.

Wien. Kais. Akademie der Wissenschaften:

- — Sitzungsberichte, a) der philos.-histor. Klasse, zu Bd. 162—165, 167 Titel und Register; Bd. 166, Abh. 3, 5, 7; Bd. 167, Abh. 3; Bd. 168, Abh. 3, 5—7; Bd. 169, Abh. 3—5; Bd. 170, Abh. 3, 8, 9; b) der math.-naturwiss. Klasse, Abt. I, Bd. 120, Heft 7—10; Bd. 121, Heft 1—5; Register zu Bd. 111—120; Abt. II^a, Bd. 120, Heft 8—10; Bd. 121, Heft 1—5; Abt. II^b, Bd. 120, Heft 7—10; Bd. 121, Heft 1—4; Abt. III, Bd. 120, Heft 4—10; Bd. 121, Heft 1—3.
- — Denkschriften der philos.-histor. Klasse, Bd. 55, 1; Bd. 56, 1; math.-naturwiss. Klasse, Bd. 87.
- — Anzeiger (math.-naturwiss. Klasse) 1912, No. 1—26.
- — Mitteilungen der Erdbebenkommission, No. 40—44.
- — Archiv für österreichische Geschichte, Bd. 99, 2; Register zu Bd. 1—100 und Register zu Bd. 1—9 des Notizenblattes.
- — Fontes rerum Austriacarum, II. Abt. (Diplom. et Acta) Bd. 64, 65.
- K. K. Gesellschaft der Ärzte:
- — Wiener Klinische Wochenschrift 1912, No. 1—52, 4^o.
- Zoologisch-botanische Gesellschaft:
- — Verhandlungen, Bd. 61, No. 9, 10; Bd. 62, No. 1—7.
- K. K. Naturhistorisches Hofmuseum:
- — Annalen, Bd. 25, No. 3, 4; Bd. 26, No. 1, 2.
- Israelitisch-theologische Lehranstalt:
- — Jahresbericht 19.
- Mechitharisten-Kongregation:
- — Handes Amsoreay 1912, No. 1—12.
- — Festschrift 1811—1911.
- — Erläuterungen, No. 12, 66, 70, 88, 91, 112, 196.
- K. K. Geologische Reichsanstalt:
- — Geologische Karte, Lief. 10, 1911: 11, 1912.
- — Verhandlungen 1911, No. 12—18; 1912, No. 1—9.
- — Jahrbuch, Bd. 61, Heft 3, 4; Bd. 62, Heft 1—3.
- K. K. Sternwarte:
- — Annalen, Bd. 21 und 22.
- Verein zur Verbreitung naturwissenschaftlicher Kenntnisse:
- — Schriften, Bd. 52, 1911/12.
- — Jubiläum 1860—1910.
- K. K. Universität:
- — Inauguration des Rektors 1912/13.
- — Verwaltungsbericht der K. K. Univ.-Bibliothek 5, 1910/11.
- — Übersicht der Behörden 1912/13.
- — Vorlesungen, S.-S. 1912, W.-S. 1912/13.
- — Bericht über volkstümliche Universitäts-Vorträge 1911/12.

- Wien.** Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik:
 — — Jahrbücher 46, 1911; 47, 1912 und Anhang.
- Wiesbaden.** Verein für Nassauische Altertumskunde:
 — — Annalen, Bd. 41, 1, 2, 1910/12.
 — — Mitteilungen, Jahrg. 14, No. 1—4; 15, No. 1—4.
 — Verein für Naturkunde:
 — — Jahrbücher, 65. Jahrg.
- Wilhelmshafen.** Kais. Observatorium:
 — — Tätigkeit des Instituts für Erdmagnetismus 1911. Bl. 4; 1912, Bl. 5.
- Winterthur.** Naturforschende Gesellschaft:
 — — Mitteilungen, Heft 9, 1911 und 1912.
- Wladiwostok.** Orientalisches Institut:
 — — Izvēstja, tom. 41, 1911/12.
 — — Otschet 1909/10.
- Wolfenbüttel.** Geschichtsverein für das Herzogtum Braunschweig:
 — — Jahrbuch, 10. Jahrg., 1911.
 — — Braunschweigisches Magazin, Bd. 17, 1911, 4^o.
- Würzburg.** Physikalisch-medizinische Gesellschaft:
 — — Verhandlungen, N. F., Bd. 41, Heft 8—10; Bd. 42, Heft 1, 2.
 — — Sitzungsberichte 1911, Heft 7 9.
 — K. Altes Gymnasium:
 — — Jahresbericht 1911/12 mit Programm von Metzner.
 — K. Neues Gymnasium:
 — — Jahresbericht 1911/12.
 — K. Universität:
 — — Verzeichnis der Vorlesungen, S.-S. 1912, W.-S. 1912/13.
 — — Personalstand 1912.
 — Historischer Verein:
 — — Archiv, Bd. 52.
- Wunsiedel.** K. Realschule:
 — — Jahresbericht 1911/12.
- Zerbst.** Naturwissenschaftlicher Verein:
 — — Festschrift zur Feier des fünfzigjährigen Bestehens 1912.
- Zürich.** Concilium bibliographicum:
 — — Annotationes, vol. 1—6, 1905—10.
 — Antiquarische Gesellschaft:
 — — Mitteilungen, Bd. 26, Heft 8, 4^o.
 — Naturforschende Gesellschaft:
 — — Neujahrsblatt 114.
 — — Vierteljahresschrift, Jahrg. 56, Heft 1—4; 57, Heft 1, 2.

Zürich. Physikalische Gesellschaft:

- — Mitteilungen, No. 1–6.
- Schweizerische Geodätische Kommission:
- — Astronomisch-geodätische Arbeiten, Bd. 13, 1911.
- Schweizerische Geologische Kommission:
- — Beiträge zur geologischen Karte der Schweiz, N. F., Lief. 25, 29, 31, 32, 38.
- — Erläuterungen, No. 11.
- — Geologische Spezialkarten, No. 55, 59, 65, 68, 64 mit 3 Tafeln.
- — Geologische Karte der Schweiz mit Erläuterung 1911.
- — Spezialkarte von Baden 144 = Stühlingen.
- Schweizerisches Landesmuseum:
- — Anzeiger für Schweizerische Altertumskunde, N. F., Bd. 13, No. 2–4; Bd. 14, No. 1, 2.
- — Jahresbericht 20, 1911.
- Bibliothek des Eidgenössischen Polytechnikums:
- — Dissertationen 1912 (23 Stück).
- — Programm 1911/12–1912/13.
- Universität:
- — Schriften aus dem Jahre 1911/12 in 4^o und 8^o.
- — Annalen 1911, 47. Jahrg.

Zweibrücken. K. Humanistisches Gymnasium:

- — Jahresbericht 1911/12 mit Programm von Tillmann.

Von Privatpersonen, Geschäftsfirmen und Redaktionen gingen ein:**Arctowski, Henryk, New-York:**

- Studies on Climate and Crops, New York 1910.

Balch, Thomas Willnig, Philadelphia:

- La baie d'Hudson, Bruxelles 1911.

Baratsch, W.:

- Kosmologische Gedanken, Leipzig 1912.

Bervaldi, Gius, Fiume:

- Osservazioni ai due ultimi opuscoli de Kaer, Fiume 1910.

Bezold, Karl, Heidelberg:

- Zeitschrift für Assyriologie, Bd. 26 und 27, 28, 1.

Böhlau, H. Nachf., Weimar:

- Zeitschrift der Savignystiftung, Bd. 33 (1912), 3 Teile.

Brandstetter, Renw., Luzern:

- Monographien zur indonesischen Sprachforschung, Heft 9 und 10, 1912.

Breslau, Universität:

- Bericht über die Jahrhundertfeier, Breslau 1911.

Brüssel, Union des associations internationales:

- Le régime juridique des assoc. internat., Brüssel 1912.

Church, J. E., London:

- The Progress of Mount Rose Observatory 1906—1912.

Eumenios, Bischof von Kreta:

- Creta christiana, Jahrg. 1, Heft 1/2, Athen 1912.

Exner, Franz, Wien:

- Die Spektren der Elemente bei normalem Druck, 3 Bde., L. 1912.

Fischer, Herm., Tübingen:

- Schwäbisches Wörterbuch, Lief. 37—42.

Frankenburger, Max, München:

- Die Altmünchener Goldschmiede, München 1912.

Grünwedel, Albert, Charlottenburg:

- Altbuddhistische Kultstätten in Chinesisch-Turkestan, Berlin 1912.

Heisenberg, August, München:

- Byzantinische Zeitschrift, Bd. 21, Heft 3 und 4.

Herbig, Gustav, München:

- Corpus inscriptionum Etruscarum, vol. II, 2, 1, L. 1912.

Heß, Wilhelm, Bamberg:

- Die Einblockdrucke des 15.—18. Jahrhunderts, Rektoratsrede, Bamberg 1913.

Houtsma, Th. und Schade, A., Utrecht:

- Enzyklopädie des Islam, Lief. 12—16.

Johnston-Lavis, H. J., London:

- List of books, London 1912.

Keller, K., München:

- Gustav Adolf Hirn. Sein Leben und seine Werke. Berlin 1912.

Keune, J. B., Metz:

- Metz 1912.

Kisch, Guido, Prag:

- Einlager im älteren Schuldrechte Mährens I, Prag 1912.

Kuhn, Ernst, München:

- Mythologische Studien von Adalbert Kuhn, II. Bd., Güterloh 1912.

Kull, F. V., München:

- Wahl- und Sinnsprüche der Hohenzollern in Franken 1911 (S.-A.).
Münzvereinigungen Süddeutschlands 1911 (S.-A.).

Lampros, Spyridon, Athen:

- *Νεός Έλληνομνημωρ*, vol. 9, Heft 1 und 2.

Lea, Arthur H., Philadelphia:

- Henry Charles Lea, Philadelphia 1912.

Levy, Josef, Grussenheim:

- Die Heiligkreuz-Wallfahrten im Elsaß, Müllhausen 1912.
Das Schloß von Weier im Tal, Zabern 1911.
Die Wallfahrten der lb. Muttergottes im Elsaß, Rixheim 1909.

Leyst, Ernst, Moskau:

- Luftdruck und Sonnenflecken 1912.

Liebermann, Felix, Berlin:

- Die Gesetze der Angelsachsen, Bd. 2, Hälfte 1 und 2, Halle 1906
und 1912.

London, Royal Society:

- The Record of the R. S. of London, third edition, London 1912.
The Signatures in the first Journal-book and the Charter-book of
the R. S., London 1912.

Lynch, Ricardo, Buenos Aires:

- Rapport prés. au Mr. Ramos Meija 1911.

Merek, E., Darmstadt:

- Jahresberichte, Jahrg. 25, 1912.

Milani, L. A., Rom:

- La fibula Corsini, Roma 1912.

Mitscherlich, Alfr., Königsberg:

- 8 S.-A. 1912.

Nielsen, Niels, Kopenhagen:

- Beretning om den anden Skandinaviske Matematiker-Kongress,
Kjøbenhavn 1912.

Nijland, A. A., Utrecht:

- Het nut der sterrekunde, Utrecht 1911.

Noreen, Ad., Upsala:

- Vårt språk, Bd. 5, 1–6.

Due d'Orléans, Brüssel:

- Résultats de la Campagne arctique de 1907. 4 Hefte, 1912.

Petersburg. Versicherungsgesellschaft Rossia:

- Katalog 1912.

Renz, B. Kl., Breslau:

- Das Kind in Brauch und Sitte der Völker, L. 1911 und 1912.

Riefler, S., München:

- Tabellen der Luftgewichte $\gamma \frac{b}{t}$, München 1912.

Römer, Ad., Erlangen:

- Aristarch und Homerkritik, L. 1912.

Rough:

- Stone Monuments and their builders.

Schaff, Joseph, Wiebersdorf:

- Geschichte der Physik an der Universität Ingolstadt 1472–1800, Erlangen 1912.

Schlesinger, Günther, Wien:

- Studien über die Stammesgeschichte der Proboscidier, Wien 1912.

Schröder, Alfr., Dillingen:

- Archiv für die Geschichte des Hochstifts Augsburg, Bd. 3, Lief. 1 und 2, Augsburg 1912.

Schuster, Jos., München:

- J. A. Edl. v. Wolter und seine Zeit, München 1912.

Schwarz, H. A., Berlin:

- Gesamte mathematische Abhandlungen, Bd. 1 und 2, Berlin 1890.

Schwarzschild, K.:

- Aktinometrie, Berlin 1912.

Schweinfurth, G., Berlin:

- Arabische Pflanzennamen, Berlin 1912.

Siemens-Schuckert, Berlin:

- Nachrichten, Jahrg. 1910.

Stangl, Thomas, Würzburg:

- Ciceronis orationum, vol. II, L. 1912.

Stempler, Eduard, München:

- Das Plagiat in der griechischen Litteratur, Leipzig 1912.

Straßburg, Erdbebenstation:

- Loris, Erdbeben des Kaiserstuhls, L. 1912 (S.-A.).
- Sieberg, Das mitteleuropäische Erdbeben vom 16. November 1911, L. 1912 (S.-A.).

Teubner, B. G., Leipzig:

- Encyclopédie des sciences mathématiques, vol. II, 1, 2; II, 5, 1; III, 3, 1; IV, 2, 1; IV, 5, 1.
- Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, vol. I, 2, 2; II, 2, 6; V, 1, 5; VI, 1B, 3; VI, 2, 5.

Teubner, B. G., Leipzig:

Thesaurus linguae latinae, vol. V, fasc. 1 und 2; vol. III, fasc. 6 und 7; Suppl., fasc. 2 und 3.

Prym-Rost, Theorie der Prymschen Funktionen, L. 1911.

Thomopoulos, I., Athen:

— Pelasgica, Athen 1912.

Ullrich, August, Werdenstein:

— Zweck und Erfolg der römischen Ausgrabungen bei Kempten 1912.

Washington, Congress of applied chemistry:

— 11. internat. Congress. Announcement 4. Sept. 1912.

Wecklein, Nikolaus, München:

— Ausführlicher Kommentar zu Sophokles Philoktet, München 1913.

Weiler, August, Karlsruhe:

— Probleme der 3 Körper No. 5, 1911.

Woitsch, L., Peking:

— Contributions à la connaissance du langage de Pékin, Peking 1912.

Wolter, Franz, München:

— Jakob Kaschauer (S.-A.) 1911.

Woods, Fred. Adams, Brookline:

— Historiometry as an exact science, Boston 1912.

Zeumer, Karl, Berlin:

— Nachruf auf Holder-Egger, Berlin 1912.

Beobachtungen über die Art der Gletscherbewegung.

Von **Sebastian Finsterwalder.**

Vorgetragen in der Sitzung am 13. Januar 1912.

Bei früheren Untersuchungen über die Gletscherbewegung, die ich gemeinsam mit Herrn Adolf Blümcke anstellte,¹⁾ handelte es sich um das Ausmaß dieser Bewegung und dessen Änderung nach Ort und Zeit. Hier sollen Beobachtungen mitgeteilt werden, die sich auf die Art der Gletscherbewegung beziehen und die ich zumeist bei meinem vorjährigen Besuch des Vernagtferners im Ötztal (Ende August 1911) anzustellen Gelegenheit hatte. Das vergangene Jahr war infolge seiner sommerlichen Wärme und Trockenheit für derartige Beobachtungen besonders günstig. Infolge der vermehrten Abschmelzung, die in 3000 m Höhe an 50 cm in der Woche erreichte, ist einesteils Gletschergrund, der vor kurzem noch mit einer ansehnlich dicken Eismasse bedeckt war, zum Vorschein gekommen, ohne daß er durch stärkere Regengüsse dabei ausgewaschen worden wäre, andernteils sind auch Teile der Gletscheroberfläche, die sonst stets verfirnt bleiben, schneefrei geworden und haben ihre Struktur, die im engen Zusammenhang mit der Bewegungsform steht, enthüllt. Es sind besonders zwei Stellen für derlei Beobachtungen sehr ergiebig gewesen, nämlich der untere ca. 2850 m hoch gelegene Rand des Klein-

¹⁾ A. Blümcke und S. Finsterwalder, Zeitliche Änderungen in der Geschwindigkeit der Gletscherbewegung. Diese Berichte, Bd. 35, 1905, S. 109; von denselben: Die Gletscherbewegung mit Berücksichtigung ihres senkrechten Anteils. Zeitschrift für Gletscherkunde, 1. Bd., 1906/07, S. 4.

guslarferners,¹⁾ welcher dem rechtsseitigen Zufluß des Vernagtferners, dem eigentlichen Guslarferner, unmittelbar benachbart ist, und in den letzten Jahren 5 ha eisfreien schuttbedeckten Geländes von schwacher Neigung geliefert hat; sodann eine Stelle im Vernagtfirn zwischen Hochvernagtwand und Hinterguslarspitze, wo zur selben Zeit mitten im nun weit hinauf ausgeaperten Gletscherbecken, an der Grenze der früheren Firnbedeckung eine Felsinsel (80 m lang, 20 m breit in 2980 m Höhe) auftauchte, die an einer steilen nach Süden gewandten Abdachung der Gletscherfläche eine Art Fenster im Eise darstellt, durch welches der felsige Gletschergrund zum Vorschein kommt. Die Beobachtungen beziehen sich einesteils auf das Verhalten des Gletschers zum Untergrund, andernteils auf die Rolle, welche die Gletscherstruktur bei der Bewegung spielt.

I. Verhalten des Gletschers gegenüber weichem Untergrund.

Unmittelbar nach der Ausaperung von moränenbedecktem Gletschergrund zeigt sich der Boden an solchen Stellen, die infolge ihrer geringen Neigung und der Abwesenheit von Schmelzwässern vor Abrutschung und Verschwemmung bewahrt sind, parallel gefurcht und zwar in der Richtung der Eisbewegung unabhängig von der zufälligen Bodenform. Die Furchung geht wie bei einem gepflügten Felde über Berg und Tal hinweg; sie erinnert auch in Bezug auf Tiefe und Breite der Furchen an einen abgeernteten, jahrelang brach gelegenen Acker. Sie unterscheidet sich jedoch von der Ackerfurchung dadurch, daß die Kämme und Furchen nicht durchlaufen, sondern häufig gegeneinander versetzt sind. Die Furchung steht im Zusammenhang mit größeren Blöcken der Grundmoräne aber auf zweierlei Art. Manchmal hat ein im Eise festsitzender Block den Schuttboden gepflügt und findet sich dann am unteren Ende der entstandenen Furche ausgeapert. Ein andermal ist ein Block

¹⁾ Vgl. hiezu meine Karte des Vernagtferners in 1:10000 im 1. Bd., 1. Heft, 1897 der wissenschaftlichen Ergänzungshefte zur Zeitschr. des D. u. Ö. Alpenvereins.

im Boden stecken geblieben und hat das darüber hinwegziehende Eis geschrammt, wobei die hinter dem Block entstandene Höhlung zwischen Eis und Boden durch kleineres Geröll ausgefüllt wurde und nach dem Abschmelzen des Eises ein an die Leeseite des Blockes sich anschließender Rücken verblieb. Nicht selten findet man dann einen im Schuttboden festsitzenden Block, von dem an der Stoßseite eine Furche an der Leeseite ein Schuttrücken ausgeht und der so den Beweis liefert, daß eine abwechselnde Schrammung von Gletscher und Boden stattgefunden hat. Diese Furchung habe ich schon im Jahre 1887 am Ende des Gepatschferners auf einer flachen Insel zwischen zwei Gletscherabflüssen bemerkt, aber wegen der Zwispältigkeit der Erscheinung nicht recht zu erklären vermocht. In der Regel wird die Furchung noch besonders hervorgehoben und gewissermaßen unterstrichen durch Blockreihen und Steintrümpfen, die durch Ausschmelzung gescharter Innenmoränen des Gletschers entstanden sind und ebenfalls die Richtung der Eisbewegung einhalten. Daneben finden sich aber auch ausgeschmolzene Quermoränen, die früher die Gletscherstirn bandartig umsäumten und ihre Entstehung Verschiebungsklüften verdankten, längs welchen sich stärker bewegte Eismassen über darunter befindliche, am Boden festgekeilte Eislager hinwegschoben, wobei Untermoränenmaterial ins Innere des Gletschers verschleppt wurde.¹⁾ Nach dem Rückzug des Gletschers bilden diese früheren Innen- und Quermoränen ein gitterartiges Relief auf dem alten Gletscherboden.

2. Verhalten des Gletschers gegenüber Felsgrund.

Die neuerdings ausgeaperte Insel im Sammelbecken des Vernagtferners zeigt uns Felsgrund, der seit langem keinen anderen Wirkungen als jenen die von der Eisbedeckung herühren, ausgesetzt und insbesondere jeder davon unabhängigen Wasser- oder Verwitterungswirkung entzogen war. Dennoch

¹⁾ S. Finsterwalder, Der Vernagtferner. Wiss. Ergänzungshefte zur Zeitschr. des D. u. Ö. Alpenvereins, 1. Bd., 1. Heft, 1907, S. 57, Fig. 23.

fehlt dort eine glatte zusammenhängende Schlißfläche. Von unten gesehen macht die Insel eher den Eindruck einer steilen Blockhalde. An der linken gletscheraufwärts gelegenen Hälfte ist der bankförmig sich absondernde Schiefer treppenartig gestuft und mit großen Blöcken aus anstehendem Gestein bedeckt. An der rechten Seite herrscht weicher, dünnschiefriger Fels vor, dessen Schichtköpfe geknickt und verbogen sind. Betrachtet man aber die Felsinsel von oben, so erkennt man alsbald die Schlißwirkung des Eises auf der obersten Treppenstufe, die sich mit geringer Neigung unter den Gletscher hinein erstreckt. Man bemerkt auch, daß die den Treppenstufen aufgelagerten Blöcke meist auf der Oberseite geschliffen und sonst kantengerundet sind, sowie daß sie durch Frostwirkung aus ihrem einstigen Zusammenhang mit dem Mutterfels losgelöst und von dem Gletscher weitergeschoben wurden. Alle Stadien dieses Loslösungsvorganges sind vertreten, von kaum sichtbaren Klüftungsrissen bis zur Verschiebung von Blöcken von 0,5 cbm Größe, die durch Rückwärtsbewegung um einige Dezimeter glatt in ihr ursprüngliches Lager eingefügt werden könnten, wobei die Schrammen der Blockoberseite die genaue Fortsetzung jener der Schlißfläche des noch anstehenden Felsens bilden würden. Kein Zweifel, daß hier die splitternde Erosion des Gletschers die schleifende um vieles übertrifft.

Merkwürdige Erscheinungen fanden sich am oberen Eisrand der Insel. Während dieser an manchen Stellen mit schmutzdurchsetzten Schichten fest am Boden aufruhte, war an anderen ungefähr gleich ausgedehnten Teilen die Eisdecke etwa 0,5 m weit vom Boden getrennt und zeigte Furchen von mehreren Metern Länge, an deren oberen Ende Steine oder Felsköpfe, über die sich der Gletscher eben hinwegschob, ins Eis ragten. Der Felsboden unter der Eisdecke war mit klarem Wassereis bedeckt. Die Schichten, mit welchen der Gletscher auf dem Fels aufruhte, waren in der seltsamsten Weise geknetet. Sie bestanden in unmittelbarer Bodennähe aus ganz dünnen, 1 bis 5 mm starken Eisblättern, die durch feinste Lagen von Verwitterungsstaub, wie er durch Frostwirkung am Gestein erzeugt

wird, getrennt waren. Diese Eisblätter zeigten sich wiederholt gefaltet und gefältelt, gerollt und verdrückt, insbesondere in der Umgebung größerer im Eise eingebackener Steine. Der Querschnitt solcher Schichten, wie er bei sorgfältiger Bearbeitung mit dem Eispickel zutage trat, ergab eine Zeichnung von verwirrendem Formenreichtum. Es ist wohl nicht anzunehmen, daß diese dünnen gefalteten Eisblätter von der ursprünglichen Firnschichtung abzuleiten sind.¹⁾ Ihr Auftreten an dieser Stelle weist vielmehr darauf hin, daß Bewegungsvorgänge im Eise unabhängig von der Firnschichtung eine blättrige Struktur zu erzeugen vermögen. Die eben geschilderten Verhältnisse lehren, daß bei der Gletscherbewegung in der Nähe des Grundes sehr verschiedene Drucke vorkommen, was einesteiis das Auftreten höherer Drucke, als sie der durchschnittlichen Eismächtigkeit entsprechen, begünstigt, anderntheils auch einen zeitlichen Wechsel des Druckes am gleichen Orte bedingt. Beides steigert die Frostwirkung²⁾ des Eises auf dem Gletscherboden und begünstigt die splitternde Glazialerosion, deren Wirkung auf der Felsinsel des Vernagtferners klar zutage tritt.

1) Vgl. Hans Crammer, Zur Entstehung der Gletscherstruktur aus der Firnschichtung. Zeitschr. f. Gletscherkunde, 2. Bd., 1907/08, S. 198. Hier wird die mit der Tiefe zunehmende Faltung der Firnschichten sehr anschaulich dargelegt. Die oben im Text beschriebene Kleinfaltung ist meiner Meinung nach unabhängig von der Firnschichtung.

2) A. Blümcke und S. Finsterwalder, Zur Frage der Gletschererosion. Diese Berichte, 20. Bd., 1890, S. 435; ferner: Wilh. Salomon, Können Gletscher in anstehendem Fels, Kare, Seebecken und Täler erodieren. Neues Jahrb. f. Min., Geol. u. Paläont., Jahrgang 1900, Bd. 2, S. 117, sowie A. Penck, Gletscherstudien im Sonnblickgebiete. Zeitschr. d. D. u. Ö. Alpenvereins, 28. Bd., 1897, S. 68, worin die Verschleppung einseitig geschliffener Platten durch den kleinen Fleißgletscher in der Goldberggruppe erwähnt wird. Herr A. Penck hat mir 1903 ähnliche Verhältnisse am Hochjochferner im Ötztal gezeigt. D. Verf.

3. Zusammenhang der Bänderung mit der Gletscherbewegung.

Die als Bänderung (Blätterung) bezeichnete Gletscherstruktur nimmt an solchen Stellen, an denen erfahrungsgemäß starke örtliche Geschwindigkeitsänderungen der Gletscherbewegung vorkommen, also an den Rändern der Zunge oder hinter dem Zusammenfluß zweier Eisströme die sogenannte Wagenleisform an. Die Oberfläche des Eises ist mit langgezogenen, zur Gletscherachse parallelen Linien bedeckt, die abwechselnd blaue und weiße Bänder von 1—10 cm Breite begrenzen. Diese Linien sind bekanntlich das Ausgehende von annähernd senkrecht gestellten Schichtflächen, welche den Eiskörper in Blätter zerteilen, innerhalb deren die Gletscherkörner regellos verteilt, aber eng aneinandergefügt liegen, ohne daß je ein Korn durch die Schichtfläche hindurch in das Nachbarblatt hinüberreicht. Diese Art der Bänderung war am Vernagtferner in der Nähe und besonders unterhalb des neuaufgetauchten Felsenfensters wohl entwickelt, ganz in Übereinstimmung mit dem Umstande, daß die Böschung der Eisfläche, in welcher jenes Auftauchen erfolgte, gewissermaßen das linke allerdings noch mit zuströmenden Eis bedeckte Ufer der am Fuße jener Böschung hинziehenden Gletscherzunge darstellt. Die Oberfläche des Eises war infolge der starken Sonnenstrahlung sehr zerfressen und rauh zu begehen. In der einspringenden Kante unterhalb der Felsinsel findet nun eine ungewöhnliche Anhäufung von Winterschnee statt, die auch in den wärmsten Sommern nicht aufgezehrt wird, und somit einen abgesonderten Firnfleck innerhalb des sonst schneefreien Gletscherteiles darstellt. Dieser Firnfleck wird durch die Gletscherbewegung nach abwärts gezogen, erneuert sich aber am Fuße des Fensters infolge der orographischen Begünstigung an dieser Stelle immer wieder und gibt dadurch Veranlassung zu einer Art Schmarotzergletscher mit einem kleinen Nährgebiet in unmittelbarer Nähe des Fensters und daran anschließendem Zehrgebiet, das in der Richtung der Gletscherbewegung so weit in die Länge gezogen wird, bis es zur Vernichtung der im Nährgebiet aufgehäuften

Schneemassen ausreicht. Eigene Bewegung hat dieser Schmarotzergletscher infolge seiner geringen Mächtigkeit von einigen Metern nicht; er wird vielmehr vom Hauptgletscher mitgeschleppt. Er zeigt, da er überhaupt nur wenige Jahre altes Material enthält, keine eigentliche Eisstruktur, sondern nur Schichten verschiedenaltigen Schnees, von denen sich die unteren firnartigen durch ihre graue Färbung von den oberen weißen Schichten abheben. Die unteren Schichten haben ganz kleines Korn und keinerlei Bänderung; sie sind um die Mittagszeit von sammetartiger Weiche der Oberfläche und weit bequemer zu begehen als das rauhe Gletschereis. Eine Besonderheit hat dieser Schmarotzergletscher mit einem wirklichen Gletscher gemeinsam, nämlich deutliche Seitenmoränen aus einzelnen reihenartig angeordneten Steinen bestehend, die zumeist aus der Untermoräne stammen, welche zu beiden Seiten des Fensters auf die Gletscherfläche austritt, wo sie aber vom Schneefleck alsbald eingefirnt wird.

Beim Hinabwandern über den grauen Teil des Schmarotzergletschers fiel mir alsbald auf, daß dessen Oberfläche von feinen, schwarzen, parallelen Linien durchzogen war, welche auf das genaueste die Zeichnung der Bänderung auf dem darunterliegenden Gletscher zu wiederholen schienen. Diese Linien erwiesen sich bei näherem Zusehen als feine lotrechte Sprünge in der strukturlosen Firnschicht. Auch Querspalten des Gletschers waren durch ähnliche zu den anderen unter rechtem Winkel verlaufende Linien abgebildet und man konnte deutlich die Verwerfung der parallelen Linien an den Bildern der Querspalten verfolgen, wie man es von der wirklichen Bänderung an den Querspalten selbst gewohnt ist. Die Erscheinung war auf einem Streifen von etwa 100 m Länge und bis zu 10 m Breite zu verfolgen. Nach unten wurde sie in dem Maße undeutlicher, als die Dicke der Firnschicht abnahm und glich schließlich jener verwandten Erscheinung, die sich in einer in Auflösung begriffenen Neuschneedecke einstellt, auf welcher die Sonnenstrahlung die rohen Umrisse der darunterliegenden Eisstruktur abzeichnet.

Man kann die beschriebene Scheinstruktur wohl kaum anders erklären, als daß man annimmt, sie sei durch Gleitbewegung des darunterliegenden Gletschers längs der Blattgrenzen der Wagengeleisbänderung entstanden, wobei die festaufgelagerte Firnschicht durchrissen beziehungsweise abgesichert wurde. Sicherlich ist die Erscheinung sehr vergänglich, denn als am übernächsten Tage Herr Otto Gruber, der sich damals mit Triangulationsarbeiten am Vernagtferner beschäftigte, auf meine Veranlassung die Stelle wieder aufsuchte, um photographische Aufnahmen zu machen, war alles bis auf undeutliche Spuren von Spaltennarben verschwunden. Dieser Umstand macht es auch wahrscheinlich, daß die zahlreichen, parallelen Gleitrisse gleichzeitig und in Verbindung mit den Spaltenrissen entstanden sind, woraus wieder zu schließen ist, daß die dabei ausgelöste Gletscherbewegung ruckweise vor sich ging. Man darf hiernach annehmen, daß ein nicht unbeträchtlicher Teil der Gletscherbewegung und insbesondere der Differentialbewegung an den Gletscherrändern ruckweise im Verein mit dem Reißen der Spalten erfolgt. Diese Ansicht ist gewiß nicht neu; sie wird durch die erdbebenartigen Bewegungen der Gletscheroberfläche beim Springen von Spalten nahegelegt. Es sind denn auch Gleitbewegungen längs der Strukturflächen aus theoretischen Gründen wiederholt angenommen worden, so zuletzt von Herrn Axel Hamberg.¹⁾ Es erscheint aber von Bedeutung, solche Gleitbewegungen durch unmittelbare Beobachtungen sicher zu stellen.

Die Ergebnisse der im vorhergehenden niedergelegten Beobachtungen und Folgerungen lassen sich kurz folgendermaßen zusammenfassen:

Die Bewegung der bodennahen Gletscherschichten erfolgt ruckweise, wobei das Eis vor Hindernissen stark gestaucht wird und hohen Druck erfährt, während es hinter denselben entlastet wird und Hohl-

¹⁾ Axel Hamberg, Über die Parallelstruktur des Gletschereises. 9. Congrès intern. de Géographie. Genève 1908. Compte rendu, t. II.

räume bildet. Beim Weichen der Hindernisse entstehen zeitliche Druckschwankungen, die starke Frostwirkungen erzeugen und insbesondere die splitternde Erosion begünstigen. Große örtliche Geschwindigkeitsunterschiede des Eises verraten sich durch ausgeprägte blättrige Struktur und werden durch ruckweises Gleiten längs der Blattgrenzen und Spaltflächen aufrecht erhalten.



Über einige funktionentheoretische Anwendungen der Eulerschen Reihen-Transformation.

Von Alfred Pringsheim.

Vorgetragen in der Sitzung vom 2. Dezember 1911.

Bekanntlich hat Euler in dem „De transformatione serierum“ überschriebenen Kapitel seiner Differentialrechnung¹⁾ sich der Transformation $x = \frac{y}{1+y}$ bedient, um eine Potenzreihe $\Sigma a_n x^n$ insbesondere auch für Divergenz-Stellen x zu „summieren“, präziser gesagt, in eine andere Reihe zu transformieren, welche nach heutiger Ausdrucksweise die analytische Fortsetzung der ursprünglichen darstellt²⁾. In der Tat erweist sich die fragliche Transformation in einer Anzahl zwar verhältnismäßig spezieller, jedoch besonders wichtiger und markanter Fälle als ein überaus einfaches und wirksames Hilfsmittel, um die analytische Fortsetzung einer Potenzreihe zu studieren, zumal wenn man statt der oben angegebenen die (im folgenden ebenfalls schlechthin als „Eulersche“ Transformation bezeichnete) etwas allgemeinere Form $x = \frac{sy}{1+y}$ zu Grunde legt, unter s eine beliebige Konstante bzw. einen veränderlichen Parameter verstanden. Auf den Nutzen dieser Methode habe ich bereits vor einer längeren Reihe von Jahren aufmerksam gemacht³⁾, veröffentlichte jedoch damals lediglich aus einer ganz bestimmten Veranlassung ein auf diese letztere

1) Institutiones calculi differentialis. Pars posterior, Caput I. (In der Petersburger Ausgabe von 1755. p. 281 ff.)

2) Die Eulerschen Schlüsse lassen sich, auch bei Beschränkung von x auf das reelle Gebiet und ohne Benützung des Begriffes der analytischen Fortsetzung, durch Herstellung eines passenden Restgliedes legitimieren; s. Poncelet, Journ. f. Math. 13 (1835), p. 1 ff.

3) Math. Ann. 50 (1898), p. 458.

bezügliches Einzelergebnis, während ich von der vollständigen Durchführung und Publikation der im Anschlusse hieran bereits angekündigten allgemeineren Untersuchungen Abstand nahm, da ungefähr um dieselbe Zeit die Herren Fabry¹⁾ und Lindelöf²⁾, völlig unabhängig von mir und wohl auch voneinander, auf die Benützung desselben Grundgedankens verfallen waren. Erst aus Anlaß der von der Deutschen Mathematiker-Vereinigung im Jahre 1907 veranstalteten Euler-Festsitzung kamen mir diese Untersuchungen wieder in Erinnerung, und eine kurze Darstellung ihrer wesentlichsten Ergebnisse bildete den Inhalt eines bei dieser Gelegenheit von mir gehaltenen Vortrages. Die betreffenden Resultate sind nun freilich in der Zwischenzeit, seit ich die genannten Untersuchungen begonnen, zumeist auch auf anderen Wegen gewonnen, zum Teil sogar durch allgemeinere überholt worden. Dagegen scheint mir die fragliche Methode bisher noch niemals genügend ausgenützt, andererseits allerdings in Bezug auf ihre Tragweite gelegentlich auch überschätzt worden zu sein. Aus diesem Grunde hielt ich es für zweckmäßig, einmal ihre wichtigsten Anwendungen in ausführlicher und systematischer Darstellung zusammenzufassen. Geschah dies zunächst auch nur für die Zwecke einer im laufenden Semester von mir abgehaltenen Vorlesung, so hoffe ich immerhin, daß diese Darstellung auch für weitere Kreise einiges Interesse bieten dürfte, als ein modernisiertes Kapitel „De transformatione serierum“, in welchem eine Reihe bemerkenswerter und für die Funktionenlehre charakteristischer Sätze, mögen dieselben im wesentlichen auch schon mit verschiedenartigen anderen, meist komplizierteren Hilfsmitteln gefunden worden sein, aus einem völlig einheitlichen Prinzip in möglichst elementarer Weise hergeleitet werden.

Zu einer vorläufigen Orientierung über den Gang und die Ziele dieser Abhandlung diene im übrigen die folgende Inhalts-Übersicht.

¹⁾ Par. C. R. 125 (1897), p. 1086. — Journ. de Math. (5), 4 (1898), p. 317 ff.

²⁾ Par. C. R. 126 (1898), p. 632. — Acta Soc. Fennicae 24 (1898), Nr. 7, p. 6 ff.

Inhalts-Übersicht.

§ 1. Der Konvergenzbereich der Eulerschen Transformation.

1. Die Form der Koeffizienten.
2. Die verschiedenen Möglichkeiten für die Gestaltung des Konvergenzbereichs.
3. Allgemeine Bemerkungen über die Tragweite der Eulerschen Transformation.

§ 2. Eindeutige Funktionen mit einer einzigen Singularität bzw. einer endlichen Anzahl singulärer Stellen.

1. Reihen von der Form $\sum r^{\alpha} \cdot x^{\nu}$ ($\alpha = 0, 1, 2, \dots$).
2. Reihen von der Form $\sum g(\nu) \cdot x^{\nu}$, wo $g(\nu)$ eine ganze rationale Funktion.
3. Digression über die Herstellung ganzer transzendenter Funktionen mit vorgeschriebenen Werten.
4. Fortsetzung.
5. Ein Hilfssatz aus der Theorie der ganzen transzendenten Funktionen.
6. Reihen von der Form $\sum g(\nu) \cdot x^{\nu}$, wo $g(\nu)$ eine höchstens dem Minimaltypus der 1^{ten} Ordnung angehörige ganze transzendente Funktion bedeutet.
7. Reihen von der Form $\sum g(\nu) \cdot x^{\nu}$, wo $g(\nu)$ einem Typus $\gamma > 0$ der 1^{ten} Ordnung angehört.
8. Besonderer Fall eines Hadamardschen Satzes über die Singularitäten einer Reihe von der Form $\sum a_{\nu} b_{\nu} x^{\nu}$.

§ 3. Funktionen, welche in der Ebene mit dem geradlinigen Schnitte $(1 \dots + \infty)$ regulär sind.

1. Koeffizienten-Bedingung für das reguläre Verhalten einer analytischen Funktion in der längs $(1 \dots + \infty)$ zerschnittenen Ebene.
2. Reihen von der Form $\sum (r - a)^{-\alpha} \cdot x^{\nu}$ ($\alpha = 1, 2, 3, \dots$).
3. Reihen von der Form $\sum \mathfrak{F} \left(\frac{1}{\nu - a} \right) \cdot x^{\nu}$.
4. Reihen von der Form $\sum \int_0^1 \psi(t) \cdot t^{\nu+a} \cdot dt \cdot x^{\nu}$.
5. Anderer Beweis für die Fundamental-Eigenschaften der in Nr. 4 betrachteten Reihen.

§ 4. **Über den Zusammenhang der analytischen Funktionen mit den Anfangs-Elementen $\sum a_r b_r x^r$ und $\sum a_r x^r$, $\sum b_r x^r$.**

1. Andere Auffassung der Eulerschen Transformation.
2. Verallgemeinerung der Eulerschen Transformation zur Darstellung von Reihen der Form $\sum a_r b_r x^r$.
3. Der Satz über die Zusammensetzung der Singularitäten für den besonderen Fall, daß a_r eine höchstens dem Minimaltypus der 1^{ten} Ordnung angehörige ganze Funktion ist.
4. Über die Unmöglichkeit, den Satz in seiner Allgemeinheit lediglich mit Hilfe der in Nr. 2 angegebenen Transformation zu beweisen.
5. Behandlung eines weiteren besonderen Falles des fraglichen Satzes.

§ 5. **Potenzreihen, welche den Einheitskreis zur natürlichen Grenze haben.**

1. Herstellung einer zweckmäßigen hinreichenden Bedingung für den singulären Charakter einer beliebigen Stelle des Konvergenzkreises.
 2. Fortsetzung.
 3. Reihen von der Form $\sum a_{m_r} x^{m_r}$, wo $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{m_{r+1} - m_r}{m_r} > 0$.
 4. Reihen von der Form $\sum a_{m_r} x^{m_r}$, wo $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{m_r}{r} = \infty$.
-

§ 1.

Der Konvergenzbereich der Eulerschen Transformation.

1. Es besitze die Potenzreihe

$$(1) \quad f(x) = \sum_0^{\infty} a_v x^v$$

einen endlichen Konvergenzradius, welcher ja dann ohne wesentliche Beschränkung $= 1$ angenommen werden kann. Ferner werde mit s eine von 0 verschiedene, im übrigen ganz beliebig zu denkende komplexe Zahl bezeichnet und eine neue Variable z durch die Substitution eingeführt:

$$(2) \quad x = \frac{s z}{1 + z}, \quad \text{also: } z = \frac{x}{s - x},$$

so daß also aus (1) resultiert:

$$(3) \quad f(x) = \sum_0^{\infty} a_v \left(\frac{s z}{1 + z} \right)^v = (1 + z) \cdot \sum_0^{\infty} a_v s^v z^v \left(\frac{1}{1 + z} \right)^{v+1}.$$

Diese Reihe konvergiert in der vorliegenden Anordnung dann und nur dann, wenn¹⁾:

$$(4) \quad \left| \frac{s z}{1 + z} \right| < 1, \quad \text{also: } \left| \frac{1}{z} + 1 \right| > |s|,$$

und die letztere Beziehung ist offenbar a fortiori erfüllt, wenn:

$$(5) \quad \left| \frac{1}{z} \right| - 1 > |s|, \quad \text{d. h. } |z| < \frac{1}{1 + |s|},$$

also für alle z im Innern eines Kreises um $z = 0$ mit dem

¹⁾ Hätte die Reihe (1) statt des Konvergenzradius 1 den Konvergenzradius R , so würden an die Stelle der Ungleichungen (4) und (5) die folgenden treten:

$$\left| \frac{x}{R} \right| = \left| \frac{s}{R} \cdot z \right| = \left| \frac{s z}{R + R z} \right| < 1, \quad |z| < \frac{R}{R + |s|},$$

und alle weiteren Schlüsse bleiben bis auf die hieraus erwachsende Modifikation unverändert.

Radius $\varrho_0 = \frac{1}{1+|s|}$. Da für den auf der Peripherie dieses Kreises liegenden Punkt $z = -\frac{1}{1+|s|}$ sich ergibt:

$$x = \left| \frac{-s}{(1+|s|) \left(1 - \frac{1}{1+|s|}\right)} \right| = \left| \frac{-s}{s} \right| = 1,$$

so ist unter allen möglichen Kreisen um den Punkt $z = 0$, welche ganz in den durch Ungleichung (4) definierten wahren Konvergenzbereich der Reihe (3) fallen, der durch Ungleichung (5) definierte der größte.

Entwickelt man die Glieder der Reihe (3) nach Potenzen von z , so wird zunächst:

$$\left(\frac{1}{1+z}\right)^{r+1} = \sum_0^{\infty} \lambda^i (-1)^i \cdot (r+\lambda)_i \cdot z^i = \sum_0^{\infty} \lambda^i (-1)^i (r+\lambda)_i \cdot z^i,$$

wo:

$$(r+\lambda)_i = \frac{(r+\lambda)!}{\lambda! r!} = (r+\lambda)_i,$$

und daher:

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+z) \cdot \sum_0^{\infty} r a_r s^r \sum_0^{\infty} \lambda^i (-1)^i (\lambda+r)_i \cdot z^{\lambda+i} \\ (6) \quad &= (1+z) \cdot \sum_0^{\infty} r a_r s^r \cdot \sum_r^{\infty} \lambda^i (-1)^{\lambda+r} (\lambda)_i \cdot z^{\lambda}. \end{aligned}$$

Da die Reihe (3), also auch (6), für $|z| < \varrho' < \frac{1}{1+|s|}$ gleichmäßig konvergiert, so gestattet der Weierstraßsche Doppelreihen-Satz, die Reihe (6) nach Potenzen von z zu ordnen, etwa:

$$f(x) = (1+z) \cdot \sum_0^{\infty} A_{\lambda}(s) \cdot z^{\lambda} \quad \left(\text{für: } |z| < \frac{1}{1+|s|}\right),$$

also, nach Rücksubstitution von x :

$$(7) \quad f(x) = \frac{s}{s-x} \cdot \sum_0^{\infty} A_{\lambda}(s) \cdot \left(\frac{x}{s-x}\right)^{\lambda} \quad \left(\text{für: } \left|\frac{x}{s-x}\right| < \frac{1}{1+|s|}\right)$$

Für die Bestimmung des Koeffizienten $A_\lambda(s)$ von z^λ ist maßgebend, daß nur diejenigen Glieder der Reihe (6) einen Beitrag mit dem Faktor z^λ liefern, für welche $\lambda > \nu$, also $\nu < \lambda$, so daß sich ergibt:

$$(8) \quad A_\lambda(s) = \sum_0^\lambda (-1)^{\lambda-\nu} (\lambda)_\nu a_\nu s^\nu = \sum_0^\lambda (-1)^\nu (\lambda)_\nu a_{\lambda-\nu} s^{\lambda-\nu}$$

für $\lambda = 0, 1, 2, \dots$ (also insbesondere $A_0(s) = a_0$).

Der vorläufige Konvergenz- und Gültigkeitsbereich der Entwicklung (7) ist durch die Beziehung

$$(9) \quad \left| \frac{x}{s-x} \right| < \frac{1}{1+|s|}$$

gegeben. Der wahre Konvergenzradius ϱ resultiert andererseits aus der Gleichung:

$$(10) \quad \frac{1}{\varrho} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sqrt[\lambda]{|A_\lambda(s)|},$$

so daß also unter allen Umständen die Relation besteht:

$$(11) \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sqrt[\lambda]{|A_\lambda(s)|} < 1 + |s|.$$

2. Um die Gestalt eines durch eine Beziehung von der Form

$$\left| \frac{x}{s-x} \right| < \varrho$$

charakterisierten Bereiches zu erkennen, gewinnt man durch die Substitution:

$$x = \xi + \eta i \quad s = \sigma + \tau i,$$

je nachdem $\varrho \lesseqgtr 1$, eine der folgenden drei Beziehungen:

$$(12a) \quad \left(\xi + \frac{\varrho^2 \sigma}{1-\varrho^2} \right)^2 + \left(\eta + \frac{\varrho^2 \tau}{1-\varrho^2} \right)^2 < \left(\frac{\varrho \cdot |s|}{1-\varrho^2} \right)^2, \quad \text{wenn: } \varrho < 1,$$

$$(12b) \quad \sigma \xi + \tau \eta < \frac{|s|^2}{2}, \quad \text{, } \varrho = 1,$$

$$(12c) \quad \left(\xi - \frac{\varrho^2 \sigma}{\varrho^2-1} \right)^2 + \left(\eta - \frac{\varrho^2 \tau}{\varrho^2-1} \right)^2 > \left(\frac{\varrho \cdot |s|}{\varrho^2-1} \right)^2, \quad \text{, } \varrho > 1.$$

Für den speziellen Fall: $q = \frac{1}{1-s}$ nimmt zunächst Ungleichung (12a) die Form an:

$$\left(\xi + \frac{\sigma}{s \cdot (2+s)}\right)^2 + \left(\eta + \frac{\tau}{s \cdot (2+s)}\right)^2 < \left(\frac{1+s}{2+s}\right)^2,$$

somit ist der durch Ungleichung (9) definierte Minimal-Konvergenzbereich der Reihe (7) das Innere eines Kreises mit dem Mittelpunkt:

$$c = \frac{1}{2+s} \cdot \frac{-s}{s}$$

und mit dem Radius:

$$r = \frac{1+s}{2+s}.$$

Da c den absoluten Betrag $\frac{1}{2+s} < r$ und den Richtungskoeffizienten $\frac{-s}{s}$ besitzt, so liegt einerseits der Punkt $x = 0$ im Innern des Kreises, andererseits der Mittelpunkt c auf der rückwärtigen Verlängerung des Strahles $\overline{0s}$. Da ferner:

$$c + r = 1,$$

so berührt der betreffende Kreis, den wir kurz als den Kreis (c, r) bezeichnen wollen, den Kreis $x = 1$ im Punkte $x = \frac{-s}{s}$ von innen und schneidet den Strahl $\overline{0s}$ noch in einem Punkte b , dessen Entfernung vom Nullpunkte durch die Beziehung

$$b = r - |c| = \frac{s}{2+s} < s$$

gegeben ist. Der Punkt s liegt also außerhalb des Kreises.

Jener Kreis (c, r) ist aber offenbar dann der wahre Konvergenzbereich der Reihe (7), falls die Stelle $\frac{-s}{s}$ eine singuläre für $f(x) = \sum a_n x^n$ ist. Aber auch nur in diesem Falle. Ist nämlich $f(x)$ regulär im Punkte $x = \frac{-s}{s}$, so gilt offen-

bar das gleiche für $f\left(\frac{sz}{1+z}\right)$ als Funktion von z in dem entsprechenden Punkte:

$$z = \left(\frac{x}{s-x}\right)_{x=\frac{-s}{s}} \quad \text{d. h. } z = -\frac{1}{1+s}.$$

Dann muß aber der wahre Konvergenzbereich der Reihe $\sum A_k(s) \cdot z^k$, der sich ja bis zu einem Grenzpunkte des Regularitätsbereiches von $f\left(\frac{sz}{1+z}\right)$ zu erstrecken hätte, einen Radius besitzen, der größer als $\frac{1}{1+s}$ ist.

Hieraus gewinnt man mit Rücksicht auf die Beziehung (10) unmittelbar das folgende wichtige Ergebnis:

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß der Punkt $x = \frac{-s}{s}$ ein singulärer für $\sum a_v x^v$ ist, lautet:

$$(13) \quad \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{A_k(s)} = 1 + s.$$

Und, wenn man speziell $s = -e^{\eta i}$ setzt:

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß der Punkt $x = e^{\eta i}$ ein singulärer für $\sum a_v x^v$ ist, besteht in der Beziehung:

$$(14) \quad \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{A_k(-e^{\eta i})} = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sum_{v=0}^k a_v e^{\eta v i} = 2.$$

Ist nun $\varrho > \frac{1}{1+|s|}$, aber immerhin noch $\varrho < 1$, so tritt an die Stelle des Kreises (e, r) ein Kreis (e', r') mit den Bestimmungsstücken:

$$(15) \quad e' = -\frac{\varrho^2}{1-\varrho^2} \cdot s \quad r' = \frac{\varrho}{1-\varrho^2} \cdot s$$

und der oben mit b bezeichnete Schnittpunkt rückt auf dem Strahle $\overline{0s}$ nach derjenigen Stelle b' , welche bestimmt wird durch die Beziehung:

$$(16) \quad b' = r' - |c'| = \frac{\varrho}{1 + \varrho} \cdot s < \frac{1}{2} s,$$

Zugleich muß aber

$$|b'| < 1$$

sein, da anderfalls der Einheitskreis ganz in das Innere des Kreises (c', r') fiel, somit nicht der wahre Konvergenzbereich von $\sum a_n x^n$ wäre. Darnach muß also stets sein:

$$\frac{\varrho}{1 + \varrho} \cdot s < 1,$$

d. h.

$$(17) \quad \frac{1}{\varrho} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sqrt[\lambda]{|A_\lambda(s)|} > |s| - 1.$$

Diese Beziehung gibt somit im Falle $|s| > 1$ eine obere Schranke für den Konvergenzradius ϱ (so daß in diesem Falle

$$\left. \frac{1}{|s| + 1} < \varrho \leq \frac{1}{|s| - 1} \right).$$

Im Falle $|s| < 1$ findet eine analoge Beschränkung nicht statt, da ja dann ohne weiteres

$$b' = \frac{\varrho}{1 + \varrho} \cdot s < 1$$

ausfällt.

Läßt man in Gleichung (15) ϱ gegen 1 konvergieren, so wird $r' = \infty$, während gleichzeitig der Mittelpunkt c' auf der rückwärtigen Verlängerung von $\overline{0s}$ ins Unendliche rückt und (s. Gl. (16)) $b' = \frac{1}{2} s$ wird. Der Kreis artet also in diesem Falle in eine Gerade aus, welche auf $\overline{0s}$ im Halbierungspunkte senkrecht steht. Als Konvergenzbereich der Reihe (7) erscheint dann diejenige von der genannten Geraden begrenzte Halbebene, welche den Punkt $x = 0$ enthält.

Genau dasselbe Resultat würde sich offenbar aus der auf den Fall $\varrho = 1$ bezüglichen Gleichung (12b) ergeben.

Als notwendige und hinreichende Bedingung für das Eintreten des Falles $\varrho = 1$, also für die Konvergenz der Entwicklung (7) in einer den Punkt $x = 0$ enthaltenden Halbebene ergibt sich sodann nach Gleichung (10) die Beziehung:

$$(18) \quad \overline{\lim}_{\lambda=\infty} \sqrt[\lambda]{|A_\lambda(s)|} = 1,$$

welche offenbar insbesondere stets dann befriedigt wird, wenn die $|A_\lambda(s)|$ unter einer endlichen Schranke bleiben.

In dem noch übrig bleibenden Falle $\varrho > 1$ konvergiert nach Gleichung (12 c) die Reihe (7) für alle x außerhalb des Kreises (c' , r') mit den Bestimmungsstücken:

$$(19) \quad c' = \frac{\varrho^2}{\varrho^2 - 1} \cdot s \quad r' = \frac{\varrho}{\varrho^2 - 1} \cdot |s|.$$

Der Mittelpunkt c' liegt jetzt also auf der (direkten) Verlängerung des Strahles $\overline{0s}$ und zwar um so entfernter, je weniger ϱ die Einheit übersteigt. Das Konvergenzgebiet enthält (wegen: $|c'| = \varrho \cdot r' > r'$) den Nullpunkt, zugleich aber auch den Punkt $x = \infty$, während der Punkt s wieder außerhalb liegt (nämlich, wegen:

$$|c'| - r' = \frac{\varrho}{\varrho + 1} \cdot |s| < |s|,$$

in das Innere des Kreises (c' , r') fällt).

Wächst ϱ ins Unendliche, so konvergiert c' nach s , während r' unendlich klein wird. Der Konvergenzbereich der Reihe (7) besteht also in diesem offenbar durch die Beziehung

$$(20) \quad \overline{\lim}_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{|A_\nu(s)|} = 0$$

charakterisierten Falle aus der gesamten x -Ebene mit einzigem Ausschluß der Stelle s , welche ja eo ipso für die Reihe

$$\sum A_\lambda(s) \cdot \left(\frac{x}{s-x}\right)^\lambda$$

eine singuläre sein muß. Da aber schon auf dem Einheitskreise, als dem wahren Konvergenzbereiche der Reihe $\sum a_r x^r$, mindestens eine singuläre Stelle liegen muß, so ist das Eintreten dieses Falles nur möglich, wenn s selbst der Peripherie des Einheitskreises angehört: mit anderen Worten, die Beziehung (20) kann, wenn überhaupt, nur dann zustande kommen, falls $s = e^{i\theta}$ ist. Weiter unten wird gezeigt werden, daß sie bei ganz bestimmter Beschaffenheit der a_r auch wirklich stattfindet.

3. Als Hauptresultat der vorstehenden Betrachtung ergibt sich also, daß die aus der Reihe $\sum_0^\infty a_r x^r$ durch eine Eulersche Transformation hervorgehende Reihe

$$f(x) = \frac{s}{s-x} \sum_0^\infty A_\lambda(s) \cdot \left(\frac{x}{s-x} \right)^\lambda$$

einen durch die Beziehung

$$\frac{x}{s-x} < \varrho = \left(\lim_{\lambda \rightarrow \infty} |A_\lambda(s)| \right)^{-1}$$

charakterisierten, stets also den Punkt $x = 0$ im Innern enthaltenden Konvergenzbereich besitzt, der durch einen — in gewissen Grenzfällen (s. Gl. (18), (20)) in eine unbegrenzte Gerade bzw. einen Punkt ausartenden — Kreis begrenzt wird und der, sofern nur jene Zahl ϱ das ihr zustehende Minimum

$\frac{1}{1+s}$ überschreitet, über den ursprünglichen Konvergenzkreis $x = 1$ der Reihe $\sum a_r x^r$ allemal hinausragt, für $\varrho \geq 1$ sich sogar ins Unendliche erstreckt. Da die betreffende Reihe in jedem innerhalb ihres Konvergenzbereiches liegenden abgeschlossenen Bereiche ihrer Natur nach stets gleichmäßig konvergiert, so liefert sie also eine analytische Fortsetzung von $\sum a_r x^r$, gerade so, wie die Transformation von $\sum a_r x^r$ in eine „abgeleitete“ Potenzreihe (Taylorsche Formel), von welcher die vorliegende Methode unter geeigneten Umständen merkliche Vorteile bietet: einmal, weil jeder der Koeffi-

zienten $A_\lambda(s)$ nur eine endliche Anzahl von Koeffizienten a_ν enthält (nämlich $\lambda + 1$) und infolgedessen einer Abschätzung des infinitären Verhaltens weniger Schwierigkeiten bereitet, als die stets alle a_ν enthaltenden Koeffizienten der Taylorsche Reihe; sodanu aber, weil sich das Konvergenzgebiet eventuell ins Unendliche erstreckt (was ja bei der Transformation durch die Taylorsche Formel niemals eintreten kann). Selbstverständlich wird es immerhin nur bei besonderer Verteilung der singulären Stellen möglich sein, durch geeignete Wahl bzw. Variation des Parameters s Entwicklungen zu gewinnen, deren Konvergenzbereich ein unendliches oder auch nur einigermaßen ansehnliches Gebiet der Ebene umfaßt. Und es bedarf wohl kaum der Bemerkung (welche ich lediglich im Hinblick auf eine später [§ 4] zu machende Anwendung nicht unterdrücken möchte), daß es im allgemeinen nicht möglich ist, durch irgend eine Wahl des Parameters s eine beliebig angenommene Stelle x_0 dem Innern oder auch nur der Grenze des Konvergenzbereiches einzuverleiben. Man überzeugt sich leicht, daß es schon in Fällen äußerst einfacher Art (z. B. wenn der Einheitskreis drei oder mehr ungefähr äquidistante singuläre Stellen enthält) ausgeschlossen erscheint, eine Eulersche Transformation herzustellen, deren (ja allemal die Stelle $x = 0$ im Innern enthaltender) Konvergenzkreis auch nur so weit reicht, wie derjenige einer passend gewählten Taylorsche Entwicklung. Dagegen wird sich der Nutzen der Eulerschen Transformation insbesondere dann bewähren, wenn die Singularitäten der Reihe $\sum a_\nu x^\nu$ und ihrer analytischen Fortsetzung durchweg in einer den Punkt $x = 0$ ausschließenden Halbebene liegen. Hierhin gehören die in den beiden folgenden Paragraphen behandelten, besonders einfachen und prägnanten Fälle.

§ 2.

Eindeutige Funktionen mit einer einzigen Singularität bzw. einer endlichen Anzahl singulärer Stellen.

1. Eine Potenzreihe von der Form

$$(21) \quad f_z(x) = \sum_1^{\infty} r^z \cdot x^r \quad (z = 0, 1, 2, \dots)$$

besitzt den Konvergenzradius $|x| = 1$ und definiert, wie leicht erkannt wird, eine rationale Funktion mit dem Nenner $(1 - x)^{z+1}$. Denn man hat zunächst:

$$f_0(x) = \frac{x}{1 - x}$$

und sodann:

$$f_1(x) = x \cdot Df_0(x), \quad f_2(x) = x \cdot Df_1(x) \text{ usw.},$$

so daß also $f_z(x)$ durch z -malige Anwendung der Operation $x \cdot D_x$ aus $f_0(x)$ entsteht, woraus sofort die Richtigkeit der obigen Behauptung hervorgeht.

Für unsere weiteren Schlüsse erscheint es indessen erforderlich, die Form der rationalen Funktion $f_z(x)$ genauer festzustellen, was sich mit Hilfe der Eulerschen Transformation leicht bewerkstelligen läßt. Dabei erscheint es auf Grund der zuvor gemachten Bemerkung über den Charakter von $f_z(x)$ von vornherein angezeigt, den Parameter $s = 1$ zu wählen.

Setzt man die vorgelegte Potenzreihe in die Form:

$$f_z(x) = x \cdot \sum_1^{\infty} r^z \cdot x^{r-1} = x \cdot \sum_0^{\infty} (r+1)^z \cdot x^r,$$

so findet man durch Anwendung der Formeln (7) und (8) (p. 16, 17) auf die Reihe $\sum_0^{\infty} (r+1)^z \cdot x^r$:

$$(22) \quad f_z(x) = \sum_0^{\infty} A_{\lambda}^{(z)} \left(\frac{x}{1-x} \right)^{\lambda+1},$$

wo:

$$(23) \quad A_{\lambda}^{(z)} = A_{\lambda}^{(z)}(1) = \sum_0^{\lambda} (-1)^{\nu} \cdot (\lambda)_{\nu} \cdot (\nu+1)^z \quad (\text{speziell: } A_0^{(z)} = 1).$$

Um die Natur der Koeffizienten $A_{\lambda}^{(\kappa)}$ näher zu bestimmen, bemerke man, daß für $\nu > 1$, $\kappa > 1$:

$$\nu^{\kappa} = (D^{\kappa} e^{\nu t})_{t=0}$$

und daher:

$$(24) \quad A_{\lambda}^{(\kappa)} = D^{\kappa} \left(\sum_0^{\lambda} (-1)^{\nu} (\lambda)_{\nu} e^{(\nu+1)t} \right)_{t=0} = D^{\kappa} \{e^t (e^t - 1)^{\lambda}\}_{t=0}.$$

Die Formel gilt übrigens, wegen:

$$f_0(x) = \frac{x}{1-x} = \sum_0^{\infty} A_{\lambda}^{(0)} \binom{x}{1-x}^{\lambda+1}$$

auch noch für $\kappa = 0$ (bei $\lambda > 1$), wenn man dem Symbol $D^{(0)} y$ die Bedeutung von y beilegt.

Hiernach ist aber offenbar $A_{\lambda}^{(\kappa)}$ identisch mit dem Koeffizienten von $\frac{t^{\kappa}}{\kappa!}$ in der Mac Laurinschen Entwicklung von $e^t (e^t - 1)^{\lambda}$, so daß also:

$$(25) \quad e^t (e^t - 1)^{\lambda} = \sum_0^{\infty} \frac{1}{\kappa!} A_{\lambda}^{(\kappa)} \cdot t^{\kappa}.$$

Da aber andererseits:

$$e^t (e^t - 1)^{\lambda} = \left(1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots \right) \cdot t^{\lambda} \cdot \left(1 + \frac{t}{2!} + \frac{t^2}{3^2} + \dots \right)^{\lambda},$$

so folgt, daß die betreffende Entwicklung als niedrigste Potenz von t das Glied t^{λ} (mit dem Koeffizienten 1) enthält und daß die Koeffizienten aller höheren Potenzen reelle positive Zahlen sind. Man findet somit:

$$(26) \quad \begin{cases} A_{\lambda}^{(\kappa)} = 0, & \text{wenn } \kappa < \lambda, \\ \frac{1}{\lambda!} A_{\lambda}^{(\lambda)} = 1, & A_{\lambda}^{(\kappa)} \text{ reell positiv, wenn } \kappa > \lambda, \end{cases}$$

so daß also:

$$(27) \quad e^t (e^t - 1)^{\lambda} = \sum_{\lambda}^{\infty} \frac{1}{\kappa!} A_{\lambda}^{(\kappa)} \cdot t^{\kappa}.$$

Infolgedessen reduziert sich aber die Entwicklung (22) (wegen: $A_{\lambda}^{(\kappa)} = 0$ für $\lambda > \kappa$) auf die folgende:

$$(28) \quad f_{\kappa}(x) = \sum_0^{\kappa} A_{\lambda}^{(\kappa)} \left(\frac{x}{1-x} \right)^{\lambda+1},$$

also auf eine ganze Funktion $(z + 1)^{\text{ten}}$ Grades von $\frac{x}{1-x}$ mit reellen positiven Koeffizienten $A_{\lambda}^{(z)}$. Die letzteren genügen überdies für jedes einzelne $\lambda = 1, 2, 3, \dots$ bei veränderlichem $z > \lambda$ der Relation (27), aus welcher sich noch ergibt, daß:

$$(29) \quad 0 < A_{\lambda}^{(z)} < z! e(e-1)^{\lambda}.$$

2. Die vorstehende Betrachtung läßt sich ohne weiteres auf Potenzreihen $\sum_1^{\infty} a_r x^r$ übertragen, bei denen jeder Koeffizient a_r ein und dieselbe rationale ganze Funktion von r ist, etwa:

$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_r = g(r) \quad (r = 1, 2, 3, \dots), \\ \text{wo: } g(y) = \sum_0^m c_z y^z. \end{array} \right.$$

Alsdann wird zunächst:

$$\sum_1^{\infty} a_r x^r = \sum_1^{\infty} \left(\sum_0^m c_z r^z \right) \cdot x^r = \sum_0^m c_z \left(\sum_1^{\infty} r^z x^r \right),$$

so daß mit Benützung von Gleichung (28) resultiert:

$$(31) \quad \sum_1^{\infty} a_r x^r = \sum_0^m c_z \sum_0^z A_{\lambda}^{(z)} \left(\frac{x}{1-x} \right)^{\lambda+1} = \sum_0^m \sum_{\lambda}^z c_z A_{\lambda}^{(z)} \left(\frac{x}{1-x} \right)^{\lambda+1}.$$

Man erkennt leicht, daß dieses Resultat auch umkehrbar ist, d. h.: Entwickelt man eine ganze Funktion $(m + 1)^{\text{ten}}$ Grades von $\frac{x}{1-x}$ nach positiven Potenzen von x , so lassen sich die Koeffizienten dieser Entwicklung stets in die Form $g(r)$ setzen, wo $g(y)$ eine ganze rationale Funktion m^{ten} Grades von y .

Es handelt sich nun darum, das vorstehende Resultat auch auf den Fall auszudehnen, daß an die Stelle der rationalen ganzen Funktion $g(y)$ eine transzendente tritt, so daß also:

$a_r = g(r)$, wo jetzt $g(y) = \sum_0^{\infty} c_z y^z$ eine beständig konvergierende Reihe bedeutet. Hierzu ist vor allem zu bemerken, daß die bloße Aussage, die Koeffizienten a_r sollen in der Form einer

ganzen transzendenten Funktion $g(v)$ darstellbar sein, völlig bedeutungslos ist, da es stets (unendlich viele) ganze transzendenten Funktionen $g(y)$ gibt, welche an unendlich vielen, beliebig vorgeschriebenen Stellen y_v mit der einzigen Häufungsstelle ∞ beliebig vorgeschriebene Werte Y_v , insbesondere also an den Stellen 1, 2, 3, . . . die als völlig willkürlich zu denkenden Werte a_1, a_2, a_3, \dots annehmen, so daß also in der Tat $a_v = g(v)$ wird.

Ich möchte zunächst diese Gelegenheit benützen, um über die Herstellung einer solchen ganzen transzendenten Funktion $g(y)$ (wo: $g(y_v) = Y_v$) die folgenden Bemerkungen zu machen. Die Lösung dieser Aufgabe läßt sich ja ganz unmittelbar mit Hilfe des (älteren) Mittag-Lefflerschen Theorems (über Darstellung eindeutiger Funktionen mit vorgeschriebenen Singularitäten) bewerkstelligen und wird auch gewöhnlich in dieser Weise ausgeführt¹⁾. Es dürfte indessen logisch natürlicher und methodisch einfacher erscheinen, bei der Behandlung der fraglichen Aufgabe, deren Ziel ja doch lediglich eine Übertragung der Lagrangeschen Interpolationsformel auf ganze transzendenten Funktionen ist, die Analogie mit dieser letzteren in den Vordergrund zu stellen und demgemäß die Lösung direkt an den Weierstraßschen Produkt-Darstellungssatz anzuknüpfen, statt den Umweg über den merklich komplizierteren Mittag-Lefflerschen Satz zu nehmen²⁾, um so mehr als von diesem letzteren hier nur ein ganz spezieller Fall (nämlich Darstellung einer Funktion mit lauter einfachen Polen) ge-

¹⁾ S. z. B. Guichard, Ann. Éc. Norm. (3), 11 (1884), p. 427. — Ph. E. B. Jourdain, Journ. f. Math. 128 (1905), p. 209. — Einen nach meinem Dafürhalten recht wenig glücklichen Versuch, die fragliche Aufgabe unabhängig von dem Mittag-Lefflerschen Theorem zu erledigen, machte P. Cazzaniga, Ann. di Mat. (2), 10 (1880—82), p. 279.

²⁾ Bei F. W. Osgood (Lehrbuch der Funktionentheorie I, 1907, p. 480) wird das fragliche Resultat aus einem sogar noch komplizierteren Satze hergeleitet, der a. a. O. als „Mittag-Lefflerscher Anschmiegungssatz“ bezeichnet wird. Es ist das derjenige Satz, welcher in der betreffenden Mittag-Lefflerschen Abhandlung (Acta Math. 4, 1884, p. 43) als Theorem B erscheint.

braucht wird. Und während die Herleitung jenes speziellen (übrigens für die gewöhnlichen Anwendungen besonders wichtigen) Falles aus dem allgemeinen Mittag-Lefflerschen Satze eine verhältnismäßig umständliche Rechnung erfordert, so erscheint er umgekehrt in dem vorliegenden Zusammenhange als eine ganz unmittelbare Folgerung aus jener verallgemeinerten Lagrangeschen Interpolationsformel.

3. Die Ausführung der vorstehend angedeuteten Methode beruht auf einer naheliegenden Verallgemeinerung eines bekannten, für die Produkt-Darstellung der ganzen transzendenten Funktionen grundlegenden Weierstraßschen¹⁾ Satzes, nämlich:

Versteht man unter y_r ($r = 1, 2, 3, \dots$) eine unbegrenzte Folge von 0 verschiedener Zahlen mit der einzigen Häufungsstelle ∞ , unter p_r ($r = 1, 2, 3, \dots$) eine Folge ganz beliebiger positiver Zahlen²⁾, so lassen sich stets (unendlich viele) Folgen von natürlichen Zahlen m_r so bestimmen, daß die Reihe

$$\sum_1^{\infty} p_r \cdot \frac{y^{m_r+1}}{y_r^{m_r+1}}$$

in jedem endlichen Bereiche (und dann eo ipso gleichmäßig) konvergiert.

¹⁾ Weierstraß. Zur Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen. Abh. aus der Funktionenlehre (1856), p. 16 = Werke, 2, p. 92. (NB. In dem ersten Abdrucke dieser Abhandlung [Abh. der Berliner Akademie, 1876] wird der fragliche Satz nicht bewiesen, sondern nur ausgesprochen und durch das Beispiel $m_r = r - 1$ verifiziert.)

²⁾ Die p_r können insbesondere mit r ins Unendliche wachsen (was bei der hier beabsichtigten Anwendung des Satzes geradezu als Regel anzusehen ist). Bleiben die p_r unter einer endlichen Schranke p , so fällt offenbar der im Texte ausgesprochene Satz mit dem gewöhnlichen Weierstraßschen zusammen (wegen: $\sum_1^{\infty} p_r \frac{y^{m_r+1}}{y_r^{m_r+1}} < p \cdot \sum_1^{\infty} \frac{y^{m_r+1}}{y_r^{m_r+1}}$).

Dagegen wäre es schon notwendig, auf die im Texte gegebene allgemeinere Form des Satzes zu rekurrieren, wenn man bei der Produkt-Darstellung einer ganzen Funktion jede mehrfache Wurzel durch eine entsprechende Potenz des zugehörigen Linearfaktors, statt wie bei

Beweis. Ist für irgend ein bestimmtes $m > 0$ die Reihe

$$\sum_1^{\infty} p_v \cdot \frac{1}{y_v} \Big|^{m+1}$$

konvergent, so gilt bei jedem endlichen Werte von y das gleiche für die Reihe:

$$\sum_1^{\infty} p_v \cdot \frac{y}{y_v} \Big|^{m+1},$$

so daß die Annahme $m_v > m$ der gemachten Aussage genügt.

Ist die obige Voraussetzung nicht erfüllt, so läßt sich, wegen $\lim_{v=\infty} y_v = \infty$, zu jedem noch so großen $r > 0$ eine natürliche Zahl n so fixieren, daß:

$$(32) \quad \frac{y}{y_v} < \frac{1}{e} \quad \text{für: } y < r, v > n.$$

Bedeutet dann $\sum C_v^{-1}$ irgend eine konvergente Reihe mit positiven Gliedern, so folgt aus den vorstehenden Ungleichungen, daß die fragliche Reihe für $|y| < r$ (gleichmäßig) konvergiert, wenn die m_v so bestimmt werden, daß:

$$p_v \cdot \left(\frac{1}{e}\right)^{m_v+1} < C_v^{-1},$$

d. h.

$$(33) \quad m_v + 1 > \lg C_v + \lg p_v.$$

Hiermit wäre der Existenzbeweis von Zahlen m_v der verlangten Art in einer für den hier vorliegenden Zweck vollständig ausreichenden Weise geliefert. Doch möchte ich, sofern es sich um eine wirkliche Bestimmung solcher Zahlen m_v handeln sollte, noch folgendes hinzufügen.

Weierstraß durch eine entsprechende Anzahl verschieden bezeichneter, aber gleichgeltender einfacher Linearfaktoren in Rechnung stellen will. Denn es liegt ja keinerlei Grund vor, den Fall auszuschließen, daß die Multiplizität der Nullstellen mit dem Index über alle Grenzen wächst. (Dies ist zuweilen übersehen worden — s. z. B. Biermann, Theorie der analytischen Funktionen [1877], p. 309.)

Es ist ohne weiteres klar, daß man durch sukzessive Heranziehung immer schwächer konvergierender Reihen $\sum C_v^{-1}$ (etwa: $C_v = e^v$, v^{1+e} , $v \cdot (\lg v)^{1+e}$ usw.) die untere Schranke für die m_v beständig herabsetzen kann. Immerhin wird man bei diesem Verfahren, wie langsam auch die gewählte Vergleichsreihe $\sum C_v^{-1}$ konvergieren möge, stets eine wesentlich höhere Schranke erhalten, als in Wahrheit erforderlich ist, da ja bei der oben angewendeten (dem entsprechenden Weierstraßschen Verfahren genau nachgebildeten) Schlußweise die Voraussetzung $\lim_{v=\infty} |y_v| = \infty$ in höchst unvollständiger Weise (nämlich ausschließlich in Form von Ungleichung (32)) ausgenützt wird, ganz ohne Rücksicht darauf, daß die besondere Art des Anwachsens der $|y_v|$ auf die Konvergenz-Chancen der Reihe und somit auch auf die passende Normierung der m_v einen maßgebenden Einfluß ausüben muß¹⁾. Selbstverständlich kann es sich bei einer in dem eben angedeuteten Sinne vorzunehmenden Vervollkommnung der Formel (33) nicht etwa um die Gewinnung eines wirklichen Minimums für die m_v handeln (da die Existenz eines solchen nach Lage der Sache ausgeschlossen erscheint, sofern nicht ein konstantes $m_v > 0$ schon das erforderliche leistet). Vielmehr wird es bei der Aufstellung einer „möglichst vorteilhaften“ Formel zur Bestimmung der m_v lediglich darauf ankommen, den Einfluß des Anwachsens der $|y_v|$ insoweit zur Geltung zu bringen und die Auswahl der C_v in der Weise zu treffen, daß eine gewisse formale Einfachheit des Endresultates nicht auf Kosten möglicher Verschärfung verloren geht.

Es bedeute nun q einen übrigens beliebig klein anzunehmenden, positiven echten Bruch, k_v ($v = 1, 2, 3, \dots$) eine Folge positiver Zahlen, welche nur den beiden Bedingungen zu genügen haben:

¹⁾ Man würde infolgedessen aus der Formel (33) niemals entnehmen können, daß bei hinlänglich starkem Anwachsen der $|y_v|$ schon die Wahl eines passend gewählten konstanten $m_v > 0$ für den beabsichtigten Zweck ausreichend erscheint.

$$(34) \quad k_r \begin{cases} < p_r \\ < (\lg r)^k \end{cases}$$

(unter k eine beliebig große positive Zahl verstanden). Wird dann $r > 0$ beliebig groß angenommen, so ist die Reihe

$$\sum p_r \cdot \left| \frac{y}{r} \right|^{m_r+1}$$

für $|y| < r$ offenbar konvergent, wenn die m_r so bestimmt werden, daß zum mindesten von irgend einem bestimmten r ab die Beziehung besteht:

$$p_r \cdot \left| \frac{r}{y_r} \right|^{m_r+1} < \frac{k_r}{r^{1+\varrho}},$$

anders geschrieben:

$$\left| \frac{y_r}{r} \right|^{m_r+1} > r^{1+\varrho} \cdot \frac{p_r}{k_r},$$

und diese Beziehung wird (wegen $\frac{p_r}{k_r} > 1$, also $\left(\frac{p_r}{k_r}\right)^{1+\varrho} > \frac{p_r}{k_r}$) a fortiori erfüllt sein, wenn:

$$\left| \frac{y_r}{r} \right|^{m_r+1} > \left(r \cdot \frac{p_r}{k_r} \right)^{1+\varrho},$$

d. h.

$$(35) \quad \begin{aligned} m_r + 1 &> (1 + \varrho) \cdot \frac{\lg r + \lg \frac{p_r}{k_r}}{\lg \frac{y_r}{r} - \lg r} \\ &= (1 + \varrho) \cdot \frac{\lg r + \lg \frac{p_r}{k_r}}{\lg \left| \frac{y_r}{r} \right|} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\lg r}{\lg \left| \frac{y_r}{r} \right|}}. \end{aligned}$$

Wie groß man auch r angenommen haben möge, so muß sich, wegen:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\lg r}{\lg \left| \frac{y_r}{r} \right|} = 0,$$

ein m so fixieren lassen, daß für $r > m$:

$$\frac{\lg r}{\lg y_r} < q^2. \quad \text{also: } \frac{1}{1 - \frac{\lg r}{\lg y_r}} < \frac{1}{1 - q^2}.$$

Die für die fragliche Konvergenz ausreichende Bedingung (35) ist daher wieder a fortiori erfüllt, wenn irgend ein $n > m$ existiert, derart, daß für $r > n$:

$$m_r + 1 > (1 + q) \cdot \frac{\lg r + \lg \frac{p_r}{k_r}}{\lg y_r} \cdot \frac{1}{1 - q^2} = \frac{1}{1 - q} \cdot \frac{\lg r + \lg \frac{p_r}{k_r}}{\lg y_r}$$

oder auch, wenn man noch

$$\frac{1}{1 - q} = 1 + \frac{q}{1 - q} = 1 + \varepsilon$$

setzt, wo also ε einzig und allein der Beschränkung unterliegt, positiv zu sein, schließlich:

$$(36) \quad m_r + 1 > (1 + \varepsilon) \cdot \frac{\lg r + \lg \frac{p_r}{k_r}}{\lg y_r}.$$

Will man hieraus noch einen möglichst kleinen ganzzahligen Wert als untere Schranke für m_r ableiten, so ergibt sich, wenn man den (im vorliegenden Zusammenhange eigentlich kaum noch in Betracht kommenden) Fall ausschließt, daß der Ausdruck auf der rechten Seite von (36) unter einer endlichen Schranke bleibt, mit Rücksicht auf die Willkürlichkeit von ε :

$$(37) \quad m_r + 1 > \left[(1 + \varepsilon) \cdot \frac{\lg r + \lg \frac{p_r}{k_r}}{\lg y_r} \right]$$

(wo das Symbol $[x]$ die größte in x enthaltene ganze Zahl bezeichnet¹⁾).

¹⁾ In dem oben ausgeschlossenen Falle hätte man den auf der rechten Seite von (36) stehenden Ausdruck durch eine ihm gleiche oder darüber liegende ganze Zahl zu ersetzen, so daß sich also ergeben würde:

Dabei steht es nach Ungleichung (34) noch frei, $k_v = p_v$ zu setzen, falls die p_v endlich bleiben (wie insbesondere im Weierstraßschen Falle) oder höchstens so ins Unendliche wachsen, wie $(\lg v)^k$, so daß dann die Formel (37) die einfachere Gestalt annimmt:

$$(38') \quad m_v + 1 \geq \left[(1 + \varepsilon) \cdot \frac{\lg v}{\lg y_v} \right].$$

4. Um jetzt eine ganz transzendente Funktion $G(x)$ herzustellen, welche an den Stellen y_v (wobei der Fall, daß die 0 unter den y_v vorkommt, vorläufig ausgeschlossen werden mag) die Werte Y_v annimmt, bilde man zunächst (ganz analog, wie bei der Herleitung der Lagrangeschen Interpolationsformel) eine ganze Funktion $P(y)$, welche die Stellen y_v zu einfachen Nullstellen hat (die überdies, was für die Praxis zuweilen nützlich ist, noch beliebig viele andere Nullstellen haben darf). Man hat sodann:

$$\left(\frac{P(y)}{y - y_n} \right)_{y=y_n} = P'(y_n),$$

wo $P'(y_n)$ von Null verschieden und daher:

$$\frac{Y_n}{P'(y_n)} \cdot \frac{P(y)}{y - y_n} \begin{cases} = Y_n & \text{für } y = y_n \\ = 0 & \text{für } y = y_v \text{ und } v \leq n. \end{cases}$$

Hieraus würde sich für die gesuchte Funktion $G(x)$ sofort der Ausdruck ergeben:

$$m_v > \left[(1 + \varepsilon) \cdot \frac{\lg v + \lg \frac{p_v}{k_v}}{\lg y_v} \right].$$

Nimmt man etwa speziell: $y_v = v^{\frac{1}{m}}$ und setzt (siehe im Texte): $k_v = p_v$, so wird darnach:

$$m_v > [(1 + \varepsilon) \cdot m],$$

d. h. schließlich, das es freisteht, $\varepsilon < \frac{1}{m}$ anzunehmen: $m_v > m$, so daß also unsere Formel hier wirklich den kleinsten für m_v zulässigen Wert liefert.

$$(39) \quad G(y) = \sum_1^{\infty} \frac{Y_v}{P'(y_v)} \cdot \frac{P(y)}{y - y_v},$$

falls diese Reihe in jedem endlichen Bereiche gleichmäßig konvergierte, was

$$\left(\text{wegen: } \frac{1}{y - y_v} = \frac{1}{y_v} \cdot \frac{1}{1 - \frac{y}{y_v}} \quad \text{und} \quad \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{y}{y_v} = 0 \right)$$

nur dann der Fall wäre, wenn die Reihe

$$\sum_1^{\infty} \left| \frac{Y_v}{P'(y_v)} \cdot \frac{1}{y_v} \right|$$

konvergent ist. Ist nun aber diese sehr spezielle¹⁾ Bedingung nicht erfüllt, so läßt sich die Konvergenz der Reihe durch passende Zusatz-Funktionen herbeiführen, welche im übrigen offenbar nur den beiden Bedingungen zu genügen haben, im Endlichen durchweg regulär zu sein und den Wert der Reihensumme an den Stellen y_v nicht zu alterieren. Man erkennt aber ohne weiteres, daß dieser Zweck in denkbar einfachster Weise erreicht wird, wenn man jedem Reihengliede (nicht, wie beim Mittag-Lefflerschen Satze einen Zusatz-Summanden, sondern) einen Faktor von der Form $\left(\frac{y}{y_v}\right)^{m_v}$ hinzufügt,²⁾ nachdem man auf Grund des zuvor bewiesenen Hilfssatzes die Zahlen m_v so bestimmt hat, daß die Reihe

$$1) \text{ Selbst wenn die } y_v \text{ so beschaffen sein sollten, daß } \sum \left| \frac{1}{y_v} \right|$$

konvergiert, so können ja die Y_v und die reziproken Werte der $P'(y_v)$ sämtlich oder teilweise mit v ins Unendliche wachsen.

2) Mit Hilfe eines solchen Konvergenz-Faktors lassen sich die Weierstraßschen Funktionen $\zeta(u)$, $p(u)$ in überaus einfacher Weise einführen, ohne das Mittag-Lefflersche Theorem zu benutzen oder, wie zuweilen in der gleichen Absicht geschieht, von der Partialbruchreihe für $p'(u)$ ausgehend, durch Integration zu $p(u)$, $\zeta(u)$ zu gelangen.

Setzt man, wie üblich:

$$2u\omega + 2r\omega' = \omega_{\mu\nu},$$

$$\sum_1^{\infty} \left| \frac{Y_v}{P'(y_v)} \right| \cdot \left| \frac{y}{y_v} \right|^{m_v+1}, \text{ also auch: } \sum_1^{\infty} \left| \frac{Y_v}{P'(y_v)} \right| \cdot \frac{1}{y_v} \cdot \left| \frac{y}{y_v} \right|^{m_v}$$

beständig konvergiert. Durch Multiplikation der letzten Reihe mit dem in jedem endlichen Bereiche endlich bleibenden Faktor

$$\left| \frac{P(y)}{1 - \frac{y}{y_v}} \right|$$

ergibt sich sodann, daß die Reihe

$$(40) \quad G(y) = \sum_1^{\infty} \frac{Y_v}{P'(y_v)} \cdot \frac{P(y)}{y - y_v} \cdot \left(\frac{y}{y_v} \right)^{m_v}$$

in jedem endlichen Bereiche absolut und gleichmäßig konvergiert und demgemäß eine ganze transzendente Funktion darstellt, die überdies für $y = y_v$ ($v = 1, 2, 3, \dots$) den jedesmal vorgeschriebenen Wert Y_v annimmt. Die Gleichung (40) liefert also die gesuchte Verallgemeinerung der Lagrangeschen Interpolationsformel. Für den Fall, daß zu den mit y_v bezeichneten Stellen noch die bisher ausgeschlossene Stelle $y_0 = 0$ mit der Vorschrift $G(0) = Y_0$ hinzukommt, hat man der Reihe (40) offenbar nur noch das Anfangsglied

$$\frac{Y_0}{P'(0)} \cdot \frac{P(y)}{y}$$

hinzuzufügen.

so hat man wegen der absoluten Konvergenz der Reihe $\sum'_{\mu, v} \left(\frac{1}{\omega_{\mu v}} \right)^3$ nach der im Texte gegebenen Vorschrift zur Erzielung der erforderlichen Konvergenz der Reihe $\sum'_{\mu, v} \frac{1}{u - \omega_{\mu v}}$, bei gleichzeitiger Erhaltung des Residuums 1, jedem Gliede nur den Faktor $\left(\frac{u}{\omega_{\mu v}} \right)^2$ hinzuzufügen.

Setzt man sodann:

$$\zeta(u) = \frac{1}{u} + \sum'_{\mu, v} \frac{1}{u - \omega_{\mu v}} \cdot \left(\frac{u}{\omega_{\mu v}} \right)^2 = \frac{1}{u} + \sum'_{\mu, v} \left(\frac{1}{u - \omega_{\mu v}} + \frac{u}{\omega_{\mu v}^2} + \frac{1}{\omega_{\mu v}} \right),$$

so folgt durch Differentiation:

$$-\zeta'(u) = \frac{1}{u^2} + \sum'_{\mu, v} \left(\frac{1}{(u - \omega_{\mu v})^2} - \frac{1}{\omega_{\mu v}^2} \right) = p(u).$$

Ferner ist evident, daß man aus Gleichung (40) durch Division mit dem Faktor $P(y)$ (welcher in diesem Falle so zu wählen ist, daß er ausschließlich die (einfachen) Nullstellen y_r hat) den obenbezeichneten einfachsten Fall des Mittag-Lefflerschen Satzes erhält.

In demjenigen besonderen Falle, welcher den Ausgangspunkt dieser ganzen letzten Betrachtung bildet, nämlich: Herstellung einer ganzen transzendenten Funktion $g(y)$, welche für $y = r$ ($r = 1, 2, 3, \dots$) beliebig vorgeschriebene Werte a_r annimmt (s. p. 27), hätte man als ganze Funktion $P(y)$ eine solche mit den Nullstellen $y = 1, 2, 3, \dots$ zu konstruieren. Dieser Forderung würde zunächst durch die Annahme

$$P(y) = \frac{1}{y} Fc(-y) = \frac{1}{y \Gamma(-y)}$$

genügt. Offenbar trägt es aber sehr wesentlich zur Vereinfachung des Endresultates bei, wenn man, im Anschlusse an eine zu Anfang dieser Nummer gemachte Bemerkung, der Funktion $P(y)$ noch die Nullstellen $0, -1, -2, \dots$ hinzufügt, so daß also

$$P(y) = \sin \pi y \quad P(y_r) = \pi \cos r\pi = (-1)^r \pi$$

resultiert und daher die gesuchte, der Bedingung $g(r) = a_r$ genügende ganze Funktion die Form annimmt:

$$(41) \quad g(y) = \frac{1}{\pi} \sin \pi y \sum_1^{\infty} r (-1)^r \cdot \frac{a_r}{y-r} \cdot \left(\frac{y}{r}\right)^{m_r}.$$

Dabei sind die m_r so zu wählen, daß die Reihe

$$\sum a_r \cdot \left(\frac{y}{r}\right)^{m_r+1}$$

beständig konvergiert: man hätte also speziell $m_r = 0$, wenn schon die Reihe $\sum \frac{a_r}{r}$ konvergieren sollte¹⁾.

¹⁾ Dieser besondere Fall der Formel (41) findet sich schon bei E. Borel, Par. C. R. 127 (1898), p. 1001; s. auch J. Hadamard, La serie de Taylor et son prolongement analytique, p. 27.

5. Aus den vorstehenden Ausführungen erwächst nun die Frage: Welchen Beschränkungen hat man die ganze transzendente Funktion $g(y)$ zu unterwerfen, damit die Reihe $\sum_1^{\infty} g(y) \cdot x^n$, welche ja im Falle eines rationalen $g(y)$ eine rationale ganze Funktion von $\frac{x}{1-x}$ erzeugte, eine transzendente ganze Funktion definiert?

Zur Beantwortung dieser Frage ist es notwendig, auf einen Hilfssatz aus der Theorie der ganzen transzendenten Funktionen zu rekurrieren, wobei ich mich der von mir in einer Arbeit über diesen Gegenstand¹⁾ benützten Terminologie bedienen will.

Ich sage²⁾, eine ganze transzendente Funktion $g(y)$ sei vom Typus γ der Ordnung ϱ (unter γ und ϱ positive Zahlen verstanden), wenn bei beliebig kleinem $\varepsilon > 0$:

$$(42) \quad |g(y)| \begin{cases} < e^{(\gamma+\varepsilon) \cdot y^{\varrho}} & \text{für alle hinlänglich großen } y, \\ > e^{(\gamma-\varepsilon) \cdot y^{\varrho}} & \text{für gewisse beliebig große } y. \end{cases}$$

Steht nur die Existenz der ersten dieser beiden Ungleichungen fest, so sage ich, es sei $g(y)$ höchstens vom Typus γ : und, falls an die Stelle eines positiven γ die Null tritt, falls also:

$$(43) \quad |g(y)| < e^{\varepsilon \cdot y^{\varrho}} \text{ für alle hinlänglich großen } y,$$

es gehöre $g(y)$ höchstens dem Minimaltypus der Ordnung ϱ an. Insbesondere wird also die letzte Bedingung allemal dann erfüllt sein, wenn $g(y)$ einer niedrigeren Ordnung als der der Ordnung ϱ angehört.

Ist nun $g(y) = \sum_0^{\infty} c_n y^n$, so finden bekanntlich sehr einfache Beziehungen statt zwischen dem infinitären Verhalten der Koeffizienten c_n und dem Ordnungstypus von $g(y)$ ³⁾. Da es sich in dem vorliegenden Zusammenhange nur um den besonderen Fall $\varrho = 1$ und um eine einzige der fraglichen

¹⁾ Math. Ann. 58 (1904).

²⁾ A. a. O., p. 264.

³⁾ S. z. B. a. a. O., p. 266 ff., p. 337 ff.

Beziehungen handelt, so will ich zur Bequemlichkeit des Lesers deren für den genannten Spezialfall besonders einfach sich gestaltende Herleitung hier angeben. Es handelt sich dabei um den Beweis des folgenden Satzes:

Ist $g(y) = \sum_0^{\infty} c_n y^n$ höchstens vom Typus γ der Ordnung 1, so hat man:

$$(44) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n! |c_n|} < \gamma^1).$$

Dieses Resultat gilt auch noch für $\gamma = 0$, in welchem Falle man offenbar den oberen Limes durch den Limes schlechthin ersetzen kann und nur das Gleichheitszeichen Geltung hat. Es wird also:

$$(45) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n! |c_n|} = 0,$$

wenn $g(y)$ höchstens dem Minimaltypus der Ordnung 1 angehört²⁾.

Beweis. Die Voraussetzung besagt, daß zu beliebig kleinem $\varepsilon > 0$ eine positive Zahl R_ε existiert, derart daß:

$$\sum_0^{\infty} c_n y^n < e^{(\gamma+\varepsilon) \cdot y} \quad \text{für: } y > R_\varepsilon.$$

¹⁾ Wie aus dem Gange des Beweises unmittelbar ersichtlich ist, tritt an die Stelle dieser Beziehung die präzisere:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n! |c_n|} = \gamma,$$

wenn $g(y)$ wirklich dem Typus γ angehört und demgemäß auch der zweiten Ungleichung (42) genügt.

²⁾ Der letzte Teil des Satzes wurde mit wesentlich komplizierteren Hilfsmitteln zuerst von Herrn Poincaré bewiesen (Bull. Soc. Math. de France 11 [1883], p. 133. Die dort gegebene unvollkommenere, insbesondere für den hier vorliegenden Zweck nicht genügende Formulierung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n! c_n = 0$$

läßt sich ohne weiteres durch die Formel (45) des Textes ersetzen).

Infolgedessen hat man nach dem Cauchyschen Koeffizientensatze:

$$c_n y^n < e^{(\gamma + \varepsilon) \cdot y} \quad \text{für: } y > R_\varepsilon.$$

Nimmt man jetzt:

$$z > (\gamma + \varepsilon) \cdot R_\varepsilon, \text{ also } \frac{z}{\gamma + \varepsilon} > R_\varepsilon,$$

so steht es frei, in der letzten Ungleichung $y = \frac{z}{\gamma + \varepsilon}$ zu setzen, so daß sich also ergibt:

$$c_n \cdot \left(\frac{z}{\gamma + \varepsilon} \right)^n < e^z \quad (\text{für: } z > (\gamma + \varepsilon) \cdot R_\varepsilon)$$

und sodann:

$$\frac{z}{e} \cdot \sqrt[n]{c_n} < \gamma + \varepsilon,$$

somit schließlich:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z}{e} \sqrt[n]{c_n} \leq \gamma.$$

Da aber nach einer bekannten Formel¹⁾:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e}{z} \cdot \sqrt[n]{z!} = 1,$$

so ergibt sich, wie behauptet:

¹⁾ Dieselbe folgt unmittelbar aus der Stirlingschen Näherungsformel, kann aber auch ohne dieses Hilfsmittel in verschiedener Weise ganz elementar abgeleitet werden; s. z. B. a. a. O., p. 267; auch: diese Berichte 32 (1902), p. 169, p. 297. Noch einfacher mit Hilfe des bekannten Cauchyschen Grenzwertsatzes, wonach:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{p_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{n+1}}{p_n},$$

falls der rechts stehende Grenzwert existiert. Man hat nur zu setzen:

$$p_n = \frac{z!}{z^n},$$

also:

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{z^n}{(z+1)^n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{z}\right)^n}.$$

$$(44) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n! \cdot c_n} \leq \gamma.$$

Die angewendete Schlußweise bleibt aber bestehen, wenn $\gamma = 0$ gesetzt wird. Man findet dann genau, wie oben:

$$\frac{n}{e} \cdot \sqrt[n]{c_n} < \varepsilon \quad \text{für: } n > \varepsilon \cdot R_\varepsilon,$$

also:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{e} \sqrt[n]{c_n} = 0,$$

und schließlich mit Benützung der angeführten Hilfsformel:

$$(45) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n! \cdot c_n} = 0.$$

6. Dies vorausgeschickt können wir jetzt die zu Anfang von Nr. 5 aufgestellte Frage durch den folgenden Satz beantworten:

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Reihe $\sum_1^{\infty} a_n x^n$ eine ganz transzendente Funktion von $\frac{x}{1-x}$ definiert¹⁾, besteht darin, daß die a_n sich in der Form $g(n)$ darstellen lassen, wo $g(y)$ eine höchstens dem Minimaltypus der Ordnung 1 angehörende ganze transzendente Funktion bedeutet²⁾.

¹⁾ Anders ausgesprochen: eine eindeutige Funktion von x mit der einzigen und zwar wesentlich singulären Stelle $x = 1$. Eine solche ist zunächst in eine beständig konvergierende Reihe nach Potenzen von $\frac{1}{1-x}$, also auch nach Potenzen von

$$\left(\frac{1}{1-x} - 1 \right) = \frac{x}{1-x},$$

und zwar, wegen

$$\left(\sum_1^{\infty} a_n x^n \right)_{x=0} = 0,$$

ohne konstantes Glied entwickelbar.

²⁾ Der betreffende Satz rührt im wesentlichen von Herrn G. Faber her. Vor ihm hat Herr L. Leau nur gezeigt, daß die Reihe $\sum_1^{\infty} g(n) \cdot x^n$,

Beweis. Wir beweisen zunächst die Notwendigkeit der fraglichen Bedingung. Sei also

$$(46) \quad G(x) = \sum_0^{\infty} \lambda b_{\lambda} \left(\frac{x}{1-x} \right)^{\lambda+1}$$

eine beständig (d. h. mit Ausschluß von $x = 1$) konvergierende Reihe, $\sum_1^{\infty} a_v x^v$ ihre Entwicklung in der Umgebung von $x = 0$, so ist also zu zeigen, daß eine dem Minimaltypus der Ordnung 1 angehörende ganze Funktion $g(y)$ existiert, derart daß $g(v) = a_v$.

Entwickelt man, um zunächst die Form der Koeffizienten a_v zu bestimmen, jedes Glied von $G(x)$ nach Potenzen von x , so ergibt sich (vgl. mutatis mutandis Gleichung (6), p. 16):

$$(47) \quad \begin{aligned} G(x) &= \sum_0^{\infty} \lambda b_{\lambda} \sum_0^{\infty} \binom{\lambda}{r} \cdot x^{r+\lambda+1} = \sum_0^{\infty} \lambda b_{\lambda} \sum_{\lambda}^{\infty} \binom{\lambda}{r} \cdot x^{r+1} \\ &= \sum_1^{\infty} a_v x^v, \end{aligned}$$

falls $g(y)$ von niederer Ordnung als der ersten, auf dem Einheitskreise lediglich die singuläre Stelle $x = 1$ besitzt (Journ. de Math. (5), 5 [1899], p. 388). Herr Faber hat diese Aussage dahin präzisiert, daß die durch jene Reihe definierte analytische Funktion überhaupt nur die (sc. wesentlich) singuläre Stelle $x = 1$ besitzt (Math. Ann. 57 [1903], p. 374) und hat insbesondere auch die Umkehrbarkeit des betreffenden Satzes nachgewiesen (a. a. O.) p. 378). Mit diesem letzteren Beweise stimmt der im Texte gegebene für die Notwendigkeit der in Frage kommenden Bedingung im wesentlichen überein. Immerhin darf vielleicht hervorgehoben werden, daß der betreffende Beweisansatz, der bei Herrn Faber mehr wie ein sehr sinnreicher und glücklicher Kunstgriff erscheint, in dem vorliegenden Zusammenhange sich mit einer gewissen logischen Notwendigkeit ganz von selbst ergibt. Andererseits dürfte der im Texte gegebene Beweis für den hinreichenden Charakter der fraglichen Bedingung noch etwas einfacher sein, als der entsprechende Fabersche und besitzt außerdem den Vorzug, daß er zugleich einen expliziten Ausdruck für die ganze transzendente Funktion von $\frac{x}{1-x}$ mit dem Anfangs-Element $\sum g(v) \cdot x^v$ liefert.

wo:

$$\begin{aligned}
 a_r &= \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} \cdot b_i \\
 (48) \quad &= b_0 + b_1 \cdot \frac{r}{1} + b_2 \cdot \frac{r \cdot (r-1)}{1 \cdot 2} + \dots + b_r \cdot \frac{r \cdot (r-1) \dots 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \dots (r-1) \cdot r}.
 \end{aligned}$$

Bezeichnet man jetzt mit $g(x)$ zunächst rein formal die folgende Reihe:

$$(49) \quad g(y) \equiv b_0 + b_1 \frac{y}{1} + b_2 \frac{y \cdot (y-1)}{1 \cdot 2} + \dots + b_r \frac{y \cdot (y-1) \dots (y-r+1)}{1 \cdot 2 \dots r} + \dots,$$

so besteht zunächst die Identität:

$$g(r) = a_r,$$

und es bleibt zum Beweise der ausgesprochenen Behauptung nur zu zeigen, daß die Reihe (49) beständig konvergiert und ihre sodann unter $g(y)$ zu verstehende Summe für alle hinlänglich großen y einer Beziehung von der Form

$$g(y) < e^{c \cdot y}$$

genügt.

Wird nun eine positive Zahl r beliebig groß angenommen, so hat man für $y < r$:

$$\begin{aligned}
 \frac{y \cdot (y-1) \dots (y-r+1)}{1 \cdot 2 \dots r} &< \frac{r \cdot (r-1) \dots (r-r+1)}{1 \cdot 2 \dots r} \\
 &= r \left(1 + \frac{r-1}{2}\right) \dots \left(1 + \frac{r-1}{r}\right) < r^r
 \end{aligned}$$

(sofern nur: $1 + \frac{r-1}{2} < r$, d. h. $r > 1$), woraus unmittelbar hervorgeht, daß die Reihe (49) beständig und in jedem endlichen Bereiche gleichmäßig konvergiert, folglich eine ganze transzendente Funktion $g(y)$ zur Summe hat. Setzt man sodann:

$$g(y) = g_m(y) + \sum_{m+1}^{\infty} b_r \frac{y \cdot (y-1) \dots (y-r+1)}{1 \cdot 2 \dots r},$$

wo also $g_m(y)$ eine ganze Funktion m^{ten} Grades bedeutet, so folgt zunächst:

$$g(y) \leq g_m(y) + \sum_{m+1}^{\infty} \frac{y \cdot (y+1) \dots (y+r-1)}{1 \cdot 2 \dots r} \cdot b_r.$$

Da die b_r als Koeffizienten der beständig konvergierenden Reihe (46) der Grenzbedingung $\lim_{v=\infty} \prod_{r=1}^v b_r = 0$ genügen, so läßt sich zu beliebig kleinem $\varepsilon > 0$ die Zahl m so fixieren, daß:

$$\prod_{r=1}^v b_r < \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \quad \text{für: } v > m.$$

und daher:

$$\begin{aligned} g(y) &< g_m(y) + \sum_{m+1}^{\infty} \frac{y \cdot (y+1) \dots (y+r-1)}{1 \cdot 2 \dots r} \cdot \left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^r \\ &< g_m(y) + \left(\frac{1}{1-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}}\right)^y = g_m(y) + (1+\varepsilon)^y \\ (50) \quad &= e^{\varepsilon \cdot y} \left\{ \frac{g_m(y)}{e^{\varepsilon \cdot y}} + \left(\frac{1+\varepsilon}{e^{\varepsilon}}\right)^y \right\}. \end{aligned}$$

Da $\frac{1+\varepsilon}{e^{\varepsilon}} < 1$, also: $\lim_{y=\infty} \left(\frac{1+\varepsilon}{e^{\varepsilon}}\right)^y = 0$, ebenso auch

$$\lim_{y=\infty} \frac{g_m(y)}{e^{\varepsilon \cdot y}} = 0,$$

so läßt sich R so fixieren, daß die Klammergröße des letzten Ausdruckes (50) für $y > R$ die Einheit nicht übersteigt und somit, wie zu beweisen war,

$$(51) \quad g(y) < e^{\varepsilon \cdot y} \quad \text{für: } y > R$$

sich ergibt. Darnach erscheint also diese Beziehung in der Tat als eine notwendige Bedingung dafür, daß die Reihe $\sum_1^{\infty} g(r) \cdot x^r$ eine ganze transzendente Funktion von $\frac{x}{1-x}$ definiert.

Um jetzt nachzuweisen, daß diese Bedingung auch eine hinreichende ist, wenden wir auf die fragliche Reihe

$$(52) \quad f(x) = \sum_1^{\infty} r g(r) \cdot x^r = x \cdot \sum_0^{\infty} r g(r+1) \cdot x^r, \quad \text{wo: } g(y) = \sum_0^{\infty} c_z y^z,$$

die Eulersche Transformation (mit dem Parameter $s = 1$) an, so daß sich (nach p. 16, 17. Gleichung (7) und (8)) ergibt:

$$(53) \quad f(x) = \sum_0^{\infty} A_\lambda \cdot \left(\frac{x}{1-x} \right)^{\lambda+1},$$

wo:

$$\begin{aligned} A_\lambda &= A_\lambda(1) = \sum_0^{\lambda} r (-1)^r \cdot (\lambda)_r \cdot g(r+1) \\ &= \sum_0^{\lambda} r (-1)^r \cdot (\lambda)_r \cdot \sum_0^{\infty} c_z (r+1)^z \\ &= \sum_0^{\infty} c_z \sum_0^{\lambda} r (-1)^r \cdot (\lambda)_r \cdot (r+1)^z, \end{aligned}$$

also mit Berücksichtigung von Gleichung (23), p. 24:

$$A_\lambda = \sum_0^{\infty} c_z \cdot A_\lambda^{(z)},$$

wo die $A_\lambda^{(z)}$ a. a. O. diskutierten Eigenschaften besitzen. Darnach ist aber (s. p. 25, Gleichung (26)):

$$A_\lambda^{(z)} = 0 \quad \text{für: } z < \lambda,$$

so daß sich schließlich ergibt:

$$(54) \quad A_\lambda = \sum_{\lambda}^{\infty} c_z \cdot A_\lambda^{(z)}.$$

Da $g(y)$ nach Voraussetzung höchstens dem Minimaltypus der Ordnung 1 angehört und infolgedessen auf Grund des Hilfssatzes der vorigen Nummer (p. 18, Gleichung (45)):

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \sqrt[z]{c_z} = 0,$$

so läßt sich eine untere Schranke für λ so fixieren, daß für $z > \lambda$:

$$\sqrt[z]{c_z} < \epsilon, \quad \text{also: } c_z < \epsilon^z$$

und daher nach Gleichung (27), p. 25¹⁾:

$$|A_\lambda| < \sum_{\lambda}^{\infty} \frac{1}{\lambda!} A_\lambda^{(z)} \cdot \varepsilon^\lambda = e^\varepsilon (e^\varepsilon - 1)^\lambda,$$

also zunächst:

$$\overline{\lim}_{\lambda=\infty} \sqrt[\lambda]{|A_\lambda|} < e^\varepsilon - 1$$

und, da es freisteht ε unbegrenzt zu verkleinern, schließlich:

$$(55) \quad \lim_{\lambda=\infty} \sqrt[\lambda]{|A_\lambda|} = 0.$$

Somit ist die durch die Eulersche Transformation aus $\sum_1^{\infty} g(\nu) \cdot x^\nu$ hervorgegangene Reihe $\sum_1^{\infty} A_\lambda \cdot \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\lambda+1}$ eine ganze transzendente Funktion von $\frac{x}{1-x}$, womit der ausgesprochene Satz nunmehr bewiesen ist.

7. Auch wenn die Koeffizienten der Reihe $\sum g(\nu) \cdot x^\nu$ nicht höchstens dem Minimaltypus, sondern einem Typus $\gamma > 0$ der ersten Ordnung angehören, lassen sich gewisse Aussagen über die Singularitäten der durch jene Reihe definierten analytischen Funktion machen. Dabei mag noch vorausgesetzt werden, daß die Beziehung $\overline{\lim}_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{g(\nu)} = 1$ stattfindet, also die Reihe $\sum g(\nu) \cdot x^\nu$ wieder den Konvergenzradius 1 besitzt. (NB. Das letztere würde nämlich aus der bloßen Zugehörigkeit von $g(y)$ zum Typus γ der ersten Ordnung noch nicht folgen: denn aus $|g(\nu)| < e^{(\gamma+\varepsilon) \cdot \nu}$ ließe sich nur schließen, daß $\overline{\lim}_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{|g(\nu)|} < e^\varepsilon$. Andererseits kann sehr wohl $\overline{\lim}_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{|g(\nu)|} = 1$ sein, ohne daß

1) Man könnte auch statt (27) die Ungleichung (29), p. 26 benützen. Dann ergibt sich:

$$|A_\lambda| < e(e-1)^\lambda \cdot \sum_{\lambda}^{\infty} \varepsilon^\lambda = \frac{e}{1-\varepsilon} ((e-1)\varepsilon)^\lambda \quad \text{usw.}$$

bei Berücksichtigung ganz beliebiger Werte von y eine andere Beschränkung, als die durch die Ungleichung $|g(y)| < e^{(\gamma+\varepsilon) \cdot |y|}$ gegebene besteht. Man setze z. B. $g(y) = e^{\gamma y}$, so wird für alle positiven y , insbesondere also auch für $y = r$, $|g(y)| = 1$ und daher $\lim_{r \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} |g(r)| = 1$; dagegen für negativ-imaginäre y , also $y = -i \cdot y$, ergibt sich: $g(-i \cdot y) = e^{\gamma \cdot y}$, so daß $g(y)$ wirklich dem Typus γ der ersten Ordnung angehört.)

Es besteht nun der folgende Satz:

Ist $\lim_{r \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} |g(r)| = 1$, außerdem $g(y) \equiv \sum_0^{\infty} c_n y^n$ vom Typus $\gamma = \lg \left(1 + \frac{1}{\varrho}\right)$ der ersten Ordnung, so ist $f(x) \equiv \sum_1^{\infty} \gamma g(r) \cdot x^r$ eindeutig und regulär fortsetzbar über die Halbebene links von der Vertikalen durch den Punkt $x = \frac{1}{2}$, wenn $\varrho = 1$; ebenso über das ganze Gebiet außerhalb des Kreises mit dem Mittelpunkt $\frac{\varrho^2}{\varrho^2 - 1}$ und dem Radius $\frac{\varrho}{\varrho^2 - 1}$, wenn $\varrho > 1$.

Auf Grund der vorausgesetzten Zugehörigkeit von $g(y)$ zum Typus γ der ersten Ordnung und des Hilfssatzes p. 36 (s. die Fußnote zu Gleichung (44)) hat man nämlich:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{z \rightarrow \infty} |z! c_n| = \gamma$$

und somit, bei Annahme einer hinlänglich großen unteren Schranke für λ , sobald $z > \lambda$:

$$c_n = \frac{1}{z!} (\gamma + \varepsilon_n)^z \quad (\text{wo: } \lim_{z \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0).$$

Wird dann wiederum $\sum_1^{\infty} \gamma g(r) \cdot x^r$ mittelst der Eulerschen Methode in $\sum_0^{\infty} A_i \left(\frac{x}{1-x}\right)^{i+1}$ übergeführt, so hat man, wie in der vorigen Nummer (s. Gleichung (54)):

$$|A_\lambda| = \left| \sum_{\lambda}^{\infty} c_\lambda \cdot A_\lambda^{(x)} \right| \\ = \sum_{\lambda}^{\infty} \frac{1}{\lambda!} A_\lambda^{(x)} \cdot (\gamma + \varepsilon_\lambda)^\lambda = e^{\gamma + \varepsilon_\lambda} (e^{\gamma + \varepsilon_\lambda} - 1)^\lambda \quad (\text{s. p. 25, Gl. (27)})$$

und daher:

$$(56) \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sqrt[\lambda]{|A_\lambda|} < e^\gamma - 1 = \frac{1}{Q}.$$

Alles Weitere ergibt sich dann aber unmittelbar aus den Betrachtungen des § 1, insbesondere aus Gleichung (18) und (19), p. 21.

8. Der Satz der vorletzten Nummer gestattet gewisse schon von Herrn Faber¹⁾ bemerkte Verallgemeinerungen, die ich hier nur anführe, um daran noch eine bemerkenswerte Folgerung zu knüpfen.

Hat die Funktion $f(x)$ mit dem Anfangs-Element $\sum_1^{\infty} a_\nu x^\nu$ statt $x = 1$ die einzige singuläre Stelle $x = a$, also $\sum_1^{\infty} a_\nu a^\nu z^\nu$ wieder die einzige singuläre Stelle $z = 1$, so hat man:

$$a_\nu a^\nu = g(\nu), \quad \text{also: } a_\nu = \left(\frac{1}{a}\right)^\nu \cdot g(\nu),$$

wo $g(y)$ eine ganze Funktion, und zwar eine rationale vom Grade m , wenn a ein Pol $(m + 1)$ ter Ordnung von $f(x)$, eine höchstens dem Minimaltypus der Ordnung 1 angehörende transzendente, wenn a eine wesentlich singuläre Stelle — und umgekehrt.

Ist nun $f_a(x)$ eine eindeutige Funktion, welche im Endlichen nur eine endliche Anzahl von singulären Stellen a_z ($z = 1, 2, \dots, p$) hat, so läßt sich mit Hilfe des Laurentschen Satzes jeder der Stellen a_z eine ganze (rationale oder transzendente) Funktion $G_z \left(\frac{1}{x - a_z} \right)$ zuordnen, derart daß

¹⁾ A. a. O., p. 377, 380.

$f(x) = \sum_1^p G_\alpha \left(\frac{1}{x - \alpha} \right)$ im Endlichen durchweg regulär und somit eine ganze Funktion $G(x)$ (eventuell eine Konstante) ist, d. h. man hat:

$$f(x) = \sum_1^p G_\alpha \left(\frac{1}{x - \alpha} \right) + G(x).$$

Da sodann $G_\alpha \left(\frac{1}{x - \alpha} \right)$ in der Umgebung von $x = 0$ eine Entwicklung von der Form $\sum \left(\frac{1}{\alpha} \right)^r \cdot g_\alpha(r) \cdot x^r$, $G(x)$ eine solche von der Form

$$\sum a'_r x^r \quad \left(\text{wo } \lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt[r]{|a'_r|} = 0 \right)$$

besitzt, so ergibt sich, daß die Koeffizienten der Entwicklung $f(x) = \sum_1^{\infty} a_r x^r$ die Form haben:

$$(57a) \quad a_r = \sum_1^p \left(\frac{1}{\alpha} \right)^r \cdot g_\alpha(r) + a'_r.$$

Umgekehrt definiert eine Potenzreihe $\sum_1^{\infty} a_r x^r$, deren Koeffizienten sich in diese Form setzen lassen²⁾, eine in der ganzen Ebene eindeutige und bis auf die p singulären Stellen $x = \alpha_\alpha$ ($\alpha = 1, 2, \dots, p$) und eventuell³⁾ $x = \infty$ reguläre Funktion.

Ist nun $f_b(x)$ eine Funktion derselben Art mit den singulären Stellen β_λ ($\lambda = 1, 2, \dots, q$), zu denen eventuell noch $x = \infty$ hinzutreten kann, so hat man, wenn gesetzt wird: $f_b(x) = \sum_1^{\infty} b_r x^r$, analog:

$$(57b) \quad b_r = \sum_1^q \left(\frac{1}{\beta} \right)^r \cdot h_\lambda(r) + b'_r \quad \left(\text{wo: } \lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt[r]{|b'_r|} = 0 \right),$$

1) Es ist offenbar keine Beschränkung der Allgemeinheit, wenn wir $f_a(0) = 0$ annehmen.

2) Dabei ist natürlich unter $g_\alpha(y)$ allemal eine rationale oder höchstens dem Minimaltypus der Ordnung 1 angehörende transzendente ganze Funktion zu verstehen.

3) D. h. wenn die a'_r nicht sämtlich Null sind.

unter $h_i(y)$ ganze Funktionen derselben Art, wie die $g_\kappa(y)$ verstanden.

Alsdann lassen sich aber auch über den Charakter und die Singularitäten derjenigen Funktion $F(x)$, welche definiert ist durch das Funktions-Element:

$$(58) \quad F(x) = \sum_1^{\infty} a_r b_r x^r,$$

ganz bestimmte Aussagen machen. Man hat zunächst:

$$(59) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_r b_r = \sum_1^q \sum_1^p \left(\frac{1}{\alpha_\kappa \beta_\lambda} \right)^r \cdot g_\kappa(r) \cdot h_\lambda(r) + c'_r \\ c'_r = b'_r \sum_1^p \left(\frac{1}{\alpha_\kappa} \right)^r \cdot g_\kappa(r) + a'_r \sum_1^q \left(\frac{1}{\beta_\lambda} \right)^r \cdot h_\lambda(r) + a'_r b'_r. \end{array} \right.$$

Da nun jedes der Produkte $g_\kappa(r) \cdot h_\lambda(r)$ wieder eine ganze Funktion ist, und zwar eine rationale vom Grade $m_\kappa + n_\lambda$, wenn $g_\kappa(y)$ eine solche vom Grade m_κ , $h_\lambda(y)$ vom Grade n_λ , dagegen in jedem anderen Falle eine transzendente, die höchstens dem Minimaltypus der Ordnung 1 angehört; da ferner c'_r offen-

bar der Relation $\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt[r]{|c'_r|} = 0$ genügt, so folgt, daß $F(x)$

eine eindeutige Funktion ist, welche im Endlichen keine andere singulären Stellen besitzen kann, als solche von der Form $x = \alpha_\kappa \beta_\lambda$. Und zwar wird irgend eine bestimmte dieser Stellen, z. B. $\alpha_1 \beta_1$, allemal wirklich eine singuläre sein, wenn für keine andere der Stellen $\alpha_\kappa \beta_\lambda$ die Gleichung $\alpha_\kappa \beta_\lambda = \alpha_1 \beta_1$ erfüllt ist. Sollte dies nämlich der Fall sein, so ist es möglich (aber keineswegs notwendig), daß die von den Bestandteilen

$$\sum_1^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha_1 \beta_1} \right)^r \cdot g_1(r) \cdot h_1(r) \cdot x^r \quad \text{und} \quad \sum_1^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha_\kappa \beta_\lambda} \right)^r \cdot g_\kappa(r) \cdot h_\lambda(r) \cdot x^r$$

der Reihe $\sum_1^{\infty} a_r b_r x^r$ herrührenden Singularitäten sich gegenseitig

aufheben. Zugleich erkennt man, daß die Stelle $\alpha_1 \beta_1$ ein Pol von der Ordnung $m + n + 1$, wenn α_1 und β_1 Pole von

der m^{ten} bzw. n^{ten} Ordnung sind¹⁾: daß dagegen $\alpha_1\beta_1$ eine wesentlich singuläre Stelle, wenn mindestens eine der Stellen α_1, β_1 diesen Charakter besitzt.

Man findet auf diese Weise den folgenden besonderen Fall eines weiter unten (s. § 4) noch unter allgemeineren Voraussetzungen zu erörternden Hadamardschen Satzes:

Werden durch die Funktions-Elemente $\sum a_\nu x^\nu$, $\sum b_\lambda x^\lambda$ zwei eindeutige Funktionen definiert, deren jede im Endlichen nur eine endliche Anzahl singulärer Stellen α_ν bzw. β_λ besitzt, so definiert auch die Potenzreihe $\sum a_\nu b_\lambda x^\nu$ eine eindeutige Funktion, deren singuläre Stellen ausschließlich von der Form $\alpha_\nu\beta_\lambda$ sind. Dabei ist $\alpha_\nu\beta_\lambda$ ein Pol, wenn beide Stellen α_ν und β_λ Pole sind, andernfalls eine wesentlich singuläre Stelle; kann jedoch eine Stelle regulären Verhaltens sein, wenn für irgend ein Wertepaar ν', λ' die Beziehung stattfindet: $\alpha_{\nu'}\beta_{\lambda'} = \alpha_\nu\beta_\lambda$.

§ 3.

Funktionen, welche in der Ebene mit dem geradlinigen Schnitte $(1 \dots + \infty)$ regulär sind.

1. Definiert die Reihe $\sum a_\nu x^\nu$ eine analytische Funktion $f(x)$, welche in der längs $(1 \dots + \infty)$ zerschnittenen Ebene regulär ist, so folgt aus den Betrachtungen des § 1, daß $f(x)$ in jeder den Nullpunkt enthaltenden Halbebene, welche von einer durch den Punkt 1 gehenden Geraden begrenzt wird, mit Hilfe der Eulerschen Transformation dargestellt werden kann. Wir fanden nun früher die Beziehung (Gl. (18), p. 21)

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int^{\lambda} \overline{A_\lambda(s)} = 1$$

¹⁾ Eine Annullierung des Poles $\alpha_1\beta_1$ ist natürlich nur dann möglich, wenn für irgend ein anderes Wertepaar ν, λ außer der Beziehung $\alpha_\nu\beta_\lambda = \alpha_1\beta_1$ auch noch feststeht, daß $\alpha_\nu, \beta_\lambda$ gleichfalls Pole, und daß überdies: $m_\nu + n_\lambda = m + n$, wenn $m_\nu + 1$ und $n_\lambda + 1$ deren Ordnungszahlen bezeichnen.

als notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß $\sum a_v x^v$ regulär fortsetzbar ist über eine den Nullpunkt enthaltende Halbebene, deren Begrenzung eine auf der Strecke $\overline{0s}$ im Mittelpunkte senkrechte Gerade bildet. Diese letztere muß andererseits den Einheitskreis schneiden, im äußersten Falle ihn berühren, da ja keinesfalls der Einheitskreis als wahrer Konvergenzbereich der Reihe $\sum a_v x^v$ ganz in das Innere jener Halbebene fallen kann. Soll die Grenzgerade durch den Punkt 1 gehen, also $\overline{0s}$ durch eine vom Punkte 1 aus gefällte Senkrechte bzw., wenn s reell, im Punkte 1 halbiert werden, so hat man offenbar $|s - 1| = 1$, also:

$$(60) \quad s = 1 + e^{\vartheta i} = 2 \cos \frac{\vartheta}{2} \cdot e^{\frac{\vartheta}{2} i}.$$

Ist sodann die oben angeführte Bedingung erfüllt für alle ϑ des Intervalls $-\pi < \vartheta < +\pi$, so daß also jede durch den Punkt 1 gehende Gerade als Grenzlinie dienen kann (abgesehen von der reellen Achse, da ja die Wahl $\vartheta = \pm \pi$, also $s = 0$, bei der Eulerschen Transformation ausgeschlossen erscheint), so folgt, daß $\sum a_v x^v$ regulär fortsetzbar ist über die ganze Ebene mit Ausnahme der Strecke $(1 \dots +\infty)$. Da im übrigen $A_\lambda(s)$ für den ausgeschlossenen Wert $s = 0$ sich auf das einzige Glied a_0 reduziert und demgemäß die Bedingung

$$\lim_{\lambda=\infty} \sqrt[\lambda]{|A_\lambda(s)|} = 1$$

in diesem Falle an und für sich erfüllt ist, so kann man das Resultat der vorstehenden Betrachtung in folgender Weise aussprechen:

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß $\sum_0^\infty a_v x^v$ regulär fortsetzbar ist über die ganze Ebene mit Ausnahme des geradlinigen Schnittes $(1 \dots +\infty)$, besteht in der Beziehung:

$$(61) \quad \lim_{\lambda=\infty} \sqrt[\lambda]{\sum_0^\lambda (-1)^v \cdot (\lambda)_v \cdot 2^v e^{v \frac{\vartheta}{2} i} \left(\cos \frac{\vartheta}{2} \right)^v \cdot a_v} = 1$$

für $-\pi < \vartheta < +\pi$.

2. Dieses Resultat soll zunächst angewendet werden auf Reihen von der Form $\sum (r-a)^{-z} \cdot x^r$, wo z eine natürliche, a eine beliebige komplexe Zahl einschließlich der Null, jedoch mit Ausschluß der ganzen positiven bedeutet. Da nach Annahme einer beliebigen natürlichen Zahl p die Beziehung besteht:

$$\sum_1^r (r-a)^{-z} \cdot x^r = \sum_1^{p-1} (r-a)^{-z} \cdot x^r + x^p \cdot \sum_0^{\infty} (p+r-a)^{-z} \cdot x^r,$$

so steht es offenbar frei, für die weitere Betrachtung die Reihenform $\sum_0^{\infty} (p+r-a)^{-z} \cdot x^r$ zu Grunde zu legen, wobei p mindestens so groß angenommen werden mag, daß der reelle Teil von $p-a$ positiv ausfällt. Durch Anwendung der Eulerschen Transformation ergibt sich sodann:

$$(62) \quad \sum_0^{\infty} (p+r-a)^{-z} \cdot x^r = \frac{s}{s-x} \sum_0^{\infty} A_k^{(z)}(s) \cdot \left(\frac{x}{s-x}\right)^k,$$

wo:

$$(63) \quad A_k^{(z)}(s) = \sum_0^k (-1)^{k-r} (\lambda)_r \cdot (p+r-a)^{-z} \cdot s^r.$$

Nun ist:

$$(n-a)^{-1} \cdot e^{-(n-a) \cdot t} = \int_t^{\infty} e^{-(n-a) \cdot t} \cdot dt$$

$$(n-a)^{-2} \cdot e^{-(n-a) \cdot t} = \int_t^{\infty} dt \int_t^{\infty} e^{-(n-a) \cdot t} \cdot dt \text{ usf.,}$$

sofern nur n so groß angenommen wird, daß der reelle Teil von $n-a$ positiv ausfällt.

Führt man die Bezeichnungen ein:

$$\int_t^{\infty} y_1(t) \cdot dt = \int_t^{\infty} y_1^{(1)}(t) \cdot dt$$

$$\int_t^{\infty} dt \int_t^{\infty} y_1(t) \cdot dt = \int_t^{\infty} y_1^{(2)}(t) \cdot dt$$

und definiert allgemein:

$$\int_t^{\infty} y_1^{(z)}(t) \cdot dt = \int_t^{\infty} dt \int_t^{\infty} y_1^{(z-1)}(t) \cdot dt.$$

so ergibt sich also:

$$(n - a)^{-z} \cdot e^{-(n-a) \cdot t} = \int_t^{\infty} e^{-(n-a) \cdot t} \cdot dt$$

und daher schließlich:

$$(64) \quad (n - a)^{-z} = \left(\int_t^{\infty} e^{-(n-a) \cdot t} \cdot dt \right)_{t=0}.$$

Mit Benützung dieser Formel geht nun der Ausdruck (63) in den folgenden über:

$$(65) \quad \begin{aligned} A_{\lambda}^{(z)}(s) &= \left(\int_t^{\infty} \sum_0^{\lambda} (-1)^{i-r} \cdot (\lambda)_r \cdot e^{-(p+r-a) \cdot t} \cdot s^r \cdot dt \right)_{t=0} \\ &= \left(\int_t^{\infty} (-1)^i \cdot e^{-(p-a) \cdot t} \cdot (1 - s e^{-t})^i \cdot dt \right)_{t=0}. \end{aligned}$$

Wird jetzt gemäß Gleichung (60) $s = 1 + e^{\theta i}$ angenommen, so hat man bei reellem u :

$$\begin{aligned} 1 - s u^2 &= (1 - u - u \cos \vartheta)^2 + u^2 \sin^2 \vartheta \\ &= 1 + 2u^2 + 2u^2 \cos \vartheta - 2u(1 + \cos \vartheta) \\ &= 1 - 4u(1 - u) \cdot \cos^2 \frac{\vartheta}{2}, \end{aligned}$$

und daher:

$$(66) \quad 1 - s u < 1, \quad \text{wenn: } 0 < u \leq 1,$$

insbesondere also für $u = e^{-t}$ und $0 < t < +\infty$.

Somit findet man für $s = 1 + e^{\theta i}$ aus Gleichung (65) mit Benützung von Gleichung (64):

$$(67) \quad |A_{\lambda}^{(z)}(1 + e^{\theta i})| < \left(\int_t^{\infty} e^{-(p-a) \cdot t} \cdot dt \right)_{t=0} = (p - a)^{-z}.$$

Die $A_{\lambda}^{(z)}(1 + e^{\theta i})$ bleiben also unter einer von λ und ϑ unabhängigen Schranke, mithin wird durch das Funktions-Element $\sum_0^{\infty} (p + r - a)^{-z} \cdot x^r$ (also schließlich auch durch $\sum_1^{\infty} (r - a)^{-z} \cdot x^r$) eine analytische Funktion definiert, welche nach Einführung des geradlinigen Schnittes $(1 \dots + \infty)$ durchweg regulär ist und bei $s = 1 + e^{\theta i}$ in jeder durch Wahl von ϑ zu fixierenden Halbebene durch die Reihe (62) dargestellt wird.

Im übrigen wurde das vorstehende Resultat in der Hauptsache nur deshalb mit Hilfe der eben benützten Methode hergeleitet, um daran (insbesondere an die Ungleichung (67)) eine wesentliche Verallgemeinerung zu knüpfen. Hätte es sich nur um die Aussage gehandelt, daß die betreffende Funktion in der längs $(1 \dots + \infty)$ zerschnittenen Ebene regulär ist, so ließe sich diese kürzer auf dem folgenden Wege begründen, welcher zugleich erkennen läßt, daß jener Schnitt ein „künstlicher“ ist, d. h. nur dazu dient, die Eindeutigkeit der Funktion herzustellen, während nur die Punkte 1 und ∞ wirklich singuläre sind.

Es werde gesetzt:

$$(68) \quad f_{\alpha}(x) = \sum_1^{\infty} (r - a)^{-\alpha} \cdot x^r \quad (\alpha = 0, 1, 2, \dots)$$

und mit $f_{\alpha}(x)$ zugleich die analytische Fortsetzung dieser Potenzreihe bezeichnet. Alsdann hat man:

$$x \cdot f'_{\alpha}(x) = \sum_1^{\infty} r (r - a)^{-\alpha} \cdot x^r$$

und daher:

$$(69) \quad x \cdot f'_{\alpha}(x) - a f_{\alpha}(x) = \sum_1^{\infty} r (r - a)^{-(\alpha-1)} = f_{\alpha-1}(x).$$

Macht man die Substitution:

$$(70) \quad f'_{\alpha}(x) = e^{a \cdot 1/g \cdot x} \cdot q_{\alpha}(x),$$

so wird:

$$f'_{\alpha}(x) = e^{a \cdot 1/g \cdot x} \left(q'_{\alpha}(x) + \frac{a}{x} q_{\alpha}(x) \right),$$

und es geht daher die Gleichung (69) in die folgende über:

$$(71) \quad q'_{\alpha}(x) = \frac{1}{x} \cdot e^{-a \cdot 1/g \cdot x} \cdot f_{\alpha-1}(x).$$

Da $e^{-a \cdot 1/g \cdot x}$ nur die singulären Stellen 0 und ∞ hat, so folgt aus Gleichung (71), daß $q'_{\alpha}(x)$, also auch $q_{\alpha}(x)$ und schließlich $f_{\alpha}(x) \equiv e^{a \cdot 1/g \cdot x} \cdot q_{\alpha}(x)$ keine anderen singulären Stellen haben kann, wie $f_{\alpha-1}(x)$ nebst den Stellen 0 und ∞ .

Da aber $f_0(x) \equiv \frac{1}{1-x}$ nur die singuläre Stelle $x = 1$ besitzt, so erkennt man, daß $f_z(x)$ keine anderen Singularitäten haben kann, als die Stellen $0, 1, \infty$. Von diesen scheidet die Stelle $x = 0$ zunächst aus, sobald man $f_z(x)$ lediglich in der längs $(1 \dots + \infty)$ zerschnittenen Ebene betrachtet und kommt erst als singuläre Stelle zum Vorschein, wenn man $f_z(x)$ über den Schnitt fortsetzt¹⁾.

3. Das zuletzt entwickelte Resultat läßt sich ohne weiteres auf den Fall übertragen, daß an die Stelle der Koeffizienten $(v-a)^{-z}$ Polynome von der Form $\sum_0^m c_z (v-a)^{-z}$ treten. Zur Ausdehnung auf den noch allgemeineren Fall, daß jene Koeffizienten Potenzreihen von der Form $\sum_0^\infty c_z (v-a)^z$ sind, müßten offenbar noch andere Hilfsmittel herangezogen werden. Dagegen läßt sich mit Hilfe der Eulerschen Transformation leicht zeigen, daß auch unter der ebengenannten allgemeineren Voraussetzung eine Funktion erzeugt wird, die in der längs $(1 \dots + \infty)$ zerschnittenen Ebene regulär ist.

Angenommen, es sei die Potenzreihe

$$(72) \quad \mathfrak{F}(y) \equiv \sum_1^\infty c_z y^z$$

konvergent für $|y| < r$, und es bedeute wiederum a eine ganz beliebige Zahl mit Ausschluß der ganzen positiven, p eine natürliche Zahl von der Beschaffenheit, daß $\left| \frac{1}{v-a} \right| < r$ für $v \geq p$, so daß also

¹⁾ Dies gilt, sobald a von Null verschieden, schon für $f_1(v)$. Für $a = 0$ hat man, wenn das Zeichen $\overline{\lg}$ den Fundamentalwert des Logarithmus bedeutet:

$$f_1(v) = \overline{\lg} \frac{1}{1-x} \pm 2n\pi i,$$

so daß $f_1(x)$ nur die singulären Stellen 1 und ∞ besitzt; während $f_2(x)$, wegen $f_2'(x) = \frac{1}{x} \cdot f_1(x)$, auch die singuläre Stelle $x = 0$ hat, was dann offenbar auch für $f_z(x)$ bei $z > 2$ der Fall ist.

$$\mathfrak{P}\left(\frac{1}{p-a}\right) = \sum_1^{\infty} c_n (p-a)^{-n}$$

noch absolut konvergiert.

Ist sodann, zum mindesten für $r > p$:

$$a_r = \mathfrak{P}\left(\frac{1}{r-a}\right),$$

so hat man:

$$\begin{aligned} \sum_0^{\infty} a_r x^r &= \sum_0^{p-1} a_r x^r + \sum_p^{\infty} \mathfrak{P}\left(\frac{1}{r-a}\right) \cdot x^r \\ (73) \quad &= \sum_0^{p-1} a_r x^r + x^p \sum_0^{\infty} \mathfrak{P}\left(\frac{1}{p+r-a}\right) \cdot x^r, \end{aligned}$$

so daß also die analytische Fortsetzung $f(x)$ von $\sum_0^{\infty} a_r x^r$ im wesentlichen nur abhängt von derjenigen der Funktion $q(x)$, welche zunächst definiert ist durch:

$$(74) \quad q(x) = \sum_0^{\infty} \mathfrak{P}\left(\frac{1}{p+r-a}\right) \cdot x^r = \sum_0^{\infty} \left(\sum_0^{\infty} c_n (p+r-a)^{-n} \right) \cdot x^r.$$

Die Anwendung der Eulerschen Transformation ergibt sodann:

$$(75) \quad q(x) = \frac{s}{s-x} \cdot \sum_0^{\infty} A_\lambda(s) \cdot \left(\frac{x}{s-x}\right)^\lambda,$$

wo:

$$\begin{aligned} A_\lambda(s) &= \sum_0^\lambda (-1)^{\lambda-r} \cdot (\lambda)_r \cdot \mathfrak{P}\left(\frac{1}{p+r-a}\right) \cdot s^r \\ (76) \quad &= \sum_0^\lambda c_n \sum_0^\lambda (-1)^{\lambda-r} (\lambda)_r \cdot (p+r-a)^{-n} \cdot s^r \\ &= \sum_1^\infty c_n \cdot A_\lambda^{(n)}(s) \quad (\text{s. Gleichung (63), p. 52}). \end{aligned}$$

Da aber nach Ungleichung (67) für $s = 1 + e^{\theta i}$ sich ergibt:

$$(77) \quad A_\lambda(s) < \sum_1^\infty c_n \cdot \frac{1}{p-a}^n,$$

so bleiben die $|A_\lambda(s)|$ unter einer von λ und ϑ unabhängigen endlichen Schranke, mithin ist $\varphi(x)$, also auch die Fortsetzung von $\sum_0^\infty a_r x^r$ regulär in der längs $(1 \dots + \infty)$ zerschnittenen Ebene ¹⁾.

(Beispiel: $a_r = \lg \left(1 + \frac{1}{r}\right)$. Da sodann:

$$\begin{aligned} \sum_1^\infty \lg \left(1 + \frac{1}{r}\right) \cdot x^r &= \sum_1^\infty \lg(r+1) \cdot x^r - \sum_2^\infty \lg r \cdot x^r \\ &= \left(\frac{1}{x} - 1\right) \cdot \sum_2^\infty \lg r \cdot x^r, \end{aligned}$$

so folgt, daß auch die Reihe $\sum_2^\infty \lg r \cdot x^r$ über die längs $(1 \dots + \infty)$ zerschnittene Ebene regulär fortsetzbar ist.)

4. Die Form der Koeffizienten $A_\lambda(s) = \sum_0^\lambda (-1)^r \cdot (\lambda)_r a_r \cdot s^r$

legt es nahe, besonders solche Fälle in Betracht zu ziehen, in denen die Koeffizienten a_r sich durch distributive Operationen an einer r^{ten} Potenz

$$\left(\text{wie } r^\alpha = (D^{(\alpha)} e^{rt})_{t=0}, \quad r^{-\alpha} = \left(\int_t^{(\infty)} e^{-rt} \cdot dt \right)_{t=0} \right)$$

darstellen lassen, welche letztere dann, ohne die Komplikation merklich zu erhöhen, noch mit einem zwar von der distri-

¹⁾ Für den besonderen Fall $\alpha = 0$ wurde der betreffende Satz auch von Herrn Faber (Math. Ann. 57 [1903], p. 371) bewiesen, nachdem Herr Leau (Journ. de Math. (5), 5 [1899], p. 387) nur gezeigt hatte, daß die Reihe $\sum \mathfrak{P} \left(\frac{1}{r}\right) \cdot x^r$ auf dem Einheitskreise die einzige singuläre Stelle 1 besitzt. Soviel ich übersehen kann, lassen sich die von den Herren Faber und Leau benützten, unter sich völlig verschiedenen Methoden nicht ohne weiteres auf den hier behandelten allgemeineren Fall übertragen. Dagegen gelang es Herrn Faber mit Hilfe seiner auf der Benützung komplexer Integration beruhenden Methode, das Resultat dahin zu präzisieren, daß der Schnitt $(1 \dots + \infty)$ wieder nur ein „künstlicher“ ist und daß nur die Stellen 1 und ∞ wirklich singuläre sind.

butiven Operation, nicht aber von ν abhängigen Faktor multipliziert sein könnte. Diese Bemerkung führt nun aber unmittelbar zur Formulierung und zum Beweise der folgenden Aussage, welche einen besonderen Fall eines von Herrn Hadamard¹⁾ mit weniger elementaren Hilfsmitteln bewiesenen Satzes darstellt:

Bedeutet $\psi(t)$ eine Funktion der reellen Veränderlichen t , von der nur so viel feststeht, daß, für irgend ein $p \geq 0$, $\psi(t) \cdot t^p$ im Intervall $0 < t \leq 1$ schlechthin und absolut integabel ist, und wird sodann gesetzt:

$$(78) \quad a_\nu = \int_0^1 \psi(t) \cdot t^{\nu+p} \cdot dt \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots),$$

so ist $\sum_0^\infty a_\nu x^\nu$ regulär fortsetzbar über die längs $(1 \dots + \infty)$ zerschnittene Ebene²⁾.

Die Anwendung der Eulerschen Transformation

$$\sum_0^\infty a_\nu x^\nu = \frac{s}{s-x} \sum_0^\infty A_\nu(s) \cdot \left(\frac{x}{s-x} \right)^\nu$$

liefert nämlich für die Koeffizienten $A_\nu(s)$ den folgenden Ausdruck:

¹⁾ Journ. de Math. (4), 8 (1892), p. 158.

²⁾ Einen Teil dieses Resultats, nämlich die reguläre Fortsetzbarkeit von $\sum a_\nu x^\nu$ über diejenige linke Halbebene, welche von der Vertikalen durch den Punkt 1 begrenzt wird, habe ich bei früherer Gelegenheit mit Hilfe der spezielleren Eulerschen Transformation $s = 2$ bewiesen (Math. Ann. 50 [1898], p. 459). Herr Faber hat dann in seiner Dissertation („Über Reihenentwickelungen analytischer Funktionen“, München 1903) dieses Ergebnis zu der im Text gegebenen Form erweitert (a. a. O., p. 23). An die Stelle seines sehr sinnreichen, aber etwas umständlichen Beweisverfahrens tritt hier die bloße Verallgemeinerung der Eulerschen Transformation (d. h. die Wahl $s = 1 + e^{\theta i}$). — Übrigens läßt sich die im Texte gemachte Voraussetzung der absoluten Konvergenz des Integrals $\int_0^1 \psi(t) \cdot t^\nu \cdot dt$ durch die der einfachen Konvergenz ersetzen, wie Herr Faber a. a. O. mit Hilfe des zweiten Mittelwertsatzes gezeigt hat.

$$\begin{aligned} A_i(s) &= \int_0^1 \psi(t) \cdot t^\nu \sum_0^i (-1)^{i-r} (i)_r s^r t^r \cdot dt \\ &= (-1)^i \int_0^1 \psi(t) \cdot t^\nu (1-st)^i \cdot dt. \end{aligned}$$

Wird wiederum $s = 1 + e^{\nu i}$ angenommen, so hat man (s. p. 53, Gleichung (66)):

$$1 - st \leq 1 \quad \text{für: } 0 < t < 1$$

und daher:

$$(79) \quad A_i(s) < \int_0^1 \psi(t) \cdot t^\nu \cdot dt.$$

also unter einer von i und ν unabhängigen Schranke bleibend, woraus dann wieder die Richtigkeit der ausgesprochenen Behauptung unmittelbar hervorgeht. Zugleich besteht für jede den Schnitt $(1 \dots + \infty)$ nicht enthaltende Halbebene eine die betreffende Funktion darstellende Reihenentwicklung nach positiven ganzen Potenzen von $\frac{x}{s-x}$.

Beispiel 1. Der vorstehende Satz gestattet zunächst die folgende Verallgemeinerung des in Nr. 2 und 3 dieses Paragraphen abgeleiteten Resultats. Bedeutet β und γ beliebige positive oder auch komplexe Zahlen mit wesentlich positivem reellen Teil, so hat man bekanntlich:

$$\frac{1}{\gamma^\beta} = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \cdot \int_0^\infty u^{\beta-1} \cdot e^{-\gamma u} \cdot du = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \cdot \int_0^1 \left(\lg \frac{1}{t}\right)^{\beta-1} \cdot t^{\gamma-1} \cdot dt,$$

wenn für die verschiedenen in dieser Relation auftretenden Potenzen durchweg die Hauptwerte gelten. Wird jetzt wiederum a beliebig komplex, p positiv ganzzahlig (eventuell auch $= 0$) und mindestens so groß angenommen, daß der reelle Teil von $p - a$ positiv ausfällt, so folgt:

$$(80) \quad \frac{1}{(p + \nu - a)^\beta} = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \cdot \int_0^1 \left(\lg \frac{1}{t}\right)^{\beta-1} \cdot t^{p+\nu-a-1} \cdot dt.$$

Das rechtsstehende Integral hat dann offenbar die für die Gültigkeit des eben bewiesenen Satzes erforderliche Form (s. Gleichung (78)). Man hat nämlich im vorliegenden Falle:

$$\psi(t) \cdot t^p = \left(\lg \frac{1}{t}\right)^{\beta-1} \cdot t^{p-a-1},$$

und diese Funktion wird zwar, wenn der als positiv vorausgesetzte reelle Teil von $p - a$ kleiner als 1 sein sollte, für $t = 0$ unendlich groß, jedoch von niederer, als der ersten Ordnung, ist also daselbst absolut integrabel. Das nämliche gilt für $t = 1$, falls der gleichfalls als positiv vorausgesetzte reelle Teil von β kleiner als 1 sein sollte.

Somit ergibt sich, daß die Reihe $\sum \frac{1}{(p+r-a)^\beta} \cdot x^r$, sofern nur β der Bedingung $\Re(\beta) > 0$ genügt¹⁾, über die ganze längs $(1 \dots + \infty)$ zerschnittene Ebene regulär fortsetzbar ist.

Setzt man ferner für $z = 1, 2, 3 \dots$

$$a_r^{(z)} = \frac{1}{(p+r-a)^{z\beta}} = \frac{1}{\Gamma(z\beta)} \int_0^1 \left(\lg \frac{1}{t}\right)^{z\beta-1} \cdot t^{p+r-a-1} \cdot dt,$$

so liefert Ungleichung (79) mit Berücksichtigung von Gleichung (80) für die Koeffizienten $A_\lambda^{(z)}(s)$ bei $s = 1 + e^{\theta i}$ die Beziehung:

$$A_\lambda^{(z)}(s) < \frac{1}{\Gamma(z\beta)} \int_0^1 \left(\lg \frac{1}{t}\right)^{\Re(z\beta)-1} \cdot t^{\Re(p-a)-1} \cdot dt = \left(\frac{1}{\Re(p-a)}\right)^{\Re(z\beta)}.$$

Die Vergleichung mit den Formeln (67), (77) zeigt dann, daß die auf die Koeffizientenform $a_r = \mathfrak{P}\left(\frac{1}{r-a}\right)$ angewendete Schlußweise sich auch unmittelbar auf $a_r = \mathfrak{P}\left(\frac{1}{(r-a)^\beta}\right)$ anwenden läßt.

¹⁾ $\Re(\beta)$ bezeichnet den reellen Teil von β .

Beispiel 2. Es bedeute γ eine beliebige komplexe Zahl mit Ausschluß der ganzen negativen, und es werde m als ganze positive Zahl, eventuell auch als Null, so angenommen, daß $\Re(\gamma + m) > 0$. Alsdann genügt das folgende Integral (Eulersches Integral erster Gattung)

$$\int_0^1 (1-t)^{\gamma+m-1} \cdot t^{r-1} \cdot dt \quad (r = 1, 2, 3, \dots)$$

wiederum der Vorschrift von Gleichung (78) (nur ist hier $r-1$ statt r geschrieben, was offenbar erlaubt ist, da ja ausdrücklich $r > 1$ angenommen wurde). Mit Hilfe $(r-1)$ maliger partieller Integration ergibt sich aber:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (1-t)^{\gamma+m-1} \cdot t^{r-1} \cdot dt \\ &= \frac{(r-1)(r-2) \dots 1}{(\gamma+m)(\gamma+m+1) \dots (\gamma+m+r-2)} \cdot \int_0^1 (1-t)^{\gamma+m+r-2} \cdot dt \\ &= \frac{(r-1)!}{(\gamma+m)(\gamma+m+1) \dots (\gamma+m+r-1)}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt zunächst, daß die Reihe

$$\varphi(x) = \sum_1^{\infty} \frac{(r-1)!}{(\gamma+m)(\gamma+m+1) \dots (\gamma+m+r-1)} \cdot x^r$$

wieder über die ganze längs $(1 \dots + \infty)$ zerschnittene Ebene regulär fortsetzbar ist. Das gleiche gilt dann aber auch von den Reihen:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= x^2 \cdot \varphi'(x) \\ \varphi_2(x) &= x^2 \cdot \varphi_1'(x) \\ &\dots \dots \dots \\ \varphi_m(x) &= x^2 \cdot \varphi_{m-1}'(x) \end{aligned}$$

und schließlich von:

$$\varphi_{m+1}(x) = x \cdot \varphi_m'(x).$$

Dabei wird:

$$\varphi_{m+1}(x) = \sum_1^{\infty} \frac{(m+r)!}{(\gamma+m)(\gamma+m+1) \dots (\gamma+m+r-1)} x^{m+r}.$$

Multipliziert man die Glieder dieser Reihe mit dem Faktor

$$\frac{1}{\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+m-1)}$$

und fügt noch die entsprechenden Glieder mit den Potenzen x, x^2, \dots, x^m hinzu, so erscheint

$$(S1) \quad f(x) = \sum_1^{\infty} \frac{1 \cdot 2 \dots r}{\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+r-1)} \cdot x^r$$

als eine Reihe, welche eine in der ganzen längs $(1 \dots + \infty)$ zerschnittenen Ebene reguläre Fortsetzung besitzt.

5. Übrigens läßt sich der Satz der vorigen Nummer auch in einer mehr dem Hadamardschen Beweisverfahren nachgebildeten Weise und zwar, ohne den diesem letzteren zu Grunde liegenden Cauchyschen Funktions-Begriff zu benützen, sehr einfach begründen.

Aus

$$a_r = \int_0^1 \psi'(t) \cdot t^{r+\gamma} \cdot dt$$

folgt zunächst für $x < 1$:

$$(S2) \quad \sum_0^{\infty} a_r x^r = \int_0^1 \psi'(t) \cdot t^{\gamma} \cdot \frac{1}{1-tx} \cdot dt.$$

Wir zeigen nun, daß für alle x , welche nicht gerade die Gleichung $tx = 1$ befriedigen, d. h., wegen $0 < t \leq 1$, für alle nicht der Strecke $(1 \dots + \infty)$ angehörigen Stellen x , das obige Integral eine analytische Funktion regulären Verhaltens darstellt. Zunächst ist unmittelbar ersichtlich, daß für alle solchen x jenes Integral einen bestimmten endlichen Wert besitzt. Ferner ergibt sich:

$$1 - t(x+h) = \frac{1}{1-tx} \cdot \frac{1}{1 - \frac{th}{1-tx}} = \sum_0^{\infty} \frac{t^k}{(1-tx)^{k+1}} \cdot h^k,$$

falls: $\frac{th}{1-tx} < 1$, also, wegen $0 < t < 1$, um so mehr, wenn:

$$h < 1 - tx.$$

Für jedes nicht der Strecke $(1 \dots + \infty)$ angehörige x besitzt $|1 - tx|$ für alle t des Intervalls $0 < t < 1$ ein bestimmtes von 0 verschiedenes Minimum ϱ_x^1 , und es existiert somit zu jedem solchen x eine bestimmte Umgebung $|h| < \varrho_x$, für welche eine Reihenentwicklung von der angegebenen Form besteht. Daraus folgt aber weiter, daß für $|h| < \varrho_x$:

$$\int_0^1 \psi(t) \cdot t^p \cdot \frac{dt}{1 - t(x + h)} = \sum_0^\infty \int_0^1 \psi(t) \cdot \frac{t^{\lambda+p} \cdot dt}{(1 - tx)^{\lambda+1}} \cdot h^\lambda,$$

es stellt mithin das Integral $\int_0^1 \psi(t) \cdot \frac{t^p \cdot dt}{1 - tx}$ eine in dem behaupteten Umfange reguläre analytische Funktion vor, welche infolge der für $|x| < 1$ bestehenden Beziehung (82) die analytische Fortsetzung von $\sum_0^\infty a_n x^n$ liefert.

Zugleich ist bei dieser Beweismethode ersichtlich, daß man den geradlinigen Schnitt $(1 \dots + \infty)$ eliminieren kann, wenn man $\psi(t)$ noch der Beschränkung unterwirft, zum mindesten für eine gewisse Nachbarschaft der Strecke $(1 \dots + \infty)$ eine analytische Funktion von t zu sein, und wenn man sodann das betreffende Integral über einen komplexen Weg (der im übrigen nur beliebig wenig von der geradlinigen Strecke $(0 \dots 1)$ abzuweichen braucht) von 0 bis 1 erstreckt²⁾. Daraus folgt dann, daß in Wahrheit nur die Punkte 1 und ∞ singuläre sind.

1) Ist x nicht reell, so ist offenbar ϱ_x nichts anderes, als der senkrechte Abstand des Strahles $0x$ vom Punkte 1. Ist x reell und zwar $x < 0$, so hat man $\varrho_x = 1$, dagegen $\varrho_x = 1 - x$, wenn $0 < x < 1$.

2) Vgl. Hadamard, a. a. O., p. 160.

§ 4.

Über den Zusammenhang der analytischen Funktionen mit den Anfangs-Elementen $\sum a_r b_r x^r$ und $\sum a_r x^r$, $\sum b_r x^r$.

1. Es werde wiederum auf die Reihe $\sum_0^{\infty} a_r x^r$, deren Konvergenzradius wir jetzt als beliebig, etwa $= r_a$, voraussetzen wollen, die Eulersche Transformation angewendet, so hat man:

$$(83) \quad \sum_0^{\infty} a_r x^r = \frac{s}{s-x} \cdot \sum_0^{\infty} A_\lambda(s) \cdot \left(\frac{x}{s-x}\right)^\lambda = \sum_0^{\infty} A_\lambda(s) \cdot \left(\frac{x}{s}\right)^\lambda \cdot \left(\frac{1}{1-\frac{x}{s}}\right)^{\lambda+1},$$

wo:

$$A_\lambda(s) = \sum_0^{\lambda} (-1)^{\lambda-z} \cdot (\lambda)_z a_z s^z.$$

Die transformierte Reihe konvergiert, wie in § 1, Nr. 1 gezeigt wurde, für eine gewisse Umgebung des Punktes $x=0$ (absolut und) gleichmäßig, kann also, wenn man die einzelnen Glieder nach Potenzen von x entwickelt, auf Grund des Weierstraßschen Doppelreihensatzes auch wieder in eine Reihe nach Potenzen von x zurücktransformiert werden, welche dann mit der ursprünglichen identisch sein muß und somit durch Koeffizienten-Vergleichung eine Darstellung der a_r durch die $A_\lambda(s)$ liefert. Da nun:

$$(84) \quad \left(\frac{1}{1-\frac{x}{s}}\right)^{\lambda+1} = \frac{1}{\lambda!} D_x^\lambda \left(\frac{1}{1-\frac{x}{s}}\right) = \sum_z^{\infty} (r)_\lambda \cdot \left(\frac{x}{s}\right)^{r-\lambda},$$

so folgt:

$$\begin{aligned} \sum_0^{\infty} a_r x^r &= \sum_0^{\infty} A_\lambda(s) \cdot \sum_z^{\infty} (r)_\lambda \cdot \left(\frac{x}{s}\right)^r \\ &= \sum_0^{\infty} \left(\sum_0^r (r)_\lambda \cdot A_\lambda(s)\right) \cdot \left(\frac{x}{s}\right)^r \end{aligned}$$

und daher:

$$(85) \quad a_r = \sum_0^r (r)_\lambda \cdot A_\lambda(s) \cdot \left(\frac{1}{s}\right)^r.$$

Mit Hilfe dieser Identität kann man nun zu demselben Ergebnis, wie durch die Eulersche Transformation offenbar auch auf dem folgenden Wege gelangen. Durch Einführung der Darstellungsform (85) für die Koeffizienten a_r gewinnt man zunächst die Identität:

$$(86) \quad \sum_0^{\infty} a_r x^r = \sum_0^{\infty} \left(\sum_0^r \lambda(r)_i \cdot A_i(s) \right) \cdot \left(\frac{x}{s} \right)^r$$

und hieraus durch Vertauschung der Summationsfolge:

$$(87) \quad \sum_0^{\infty} a_r x^r = \sum_0^{\infty} \lambda A_i(s) \cdot \sum_i^{\infty} r(r)_i \cdot \left(\frac{x}{s} \right)^r.$$

Ersetzt man hier die innere, nur für $\left| \frac{x}{s} \right| < 1$ konvergierende Reihe durch den für $\left| \frac{x}{s} \right| < 1$ damit übereinstimmenden, im übrigen die analytische Fortsetzung jener Reihe bildenden Ausdruck (s. Gleichung (84)):

$$\left(\frac{x}{s} \right)^i \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{x}{s}} \right)^{i+1}, \text{ anders geschrieben: } \frac{1}{i!} \left(\frac{x}{s} \right)^i D_x^i \frac{1}{1 - \frac{x}{s}},$$

so ergibt sich:

$$(88) \quad \sum_0^{\infty} a_r x^r = \sum_0^{\infty} \lambda A_i(s) \cdot \left(\frac{x}{s} \right)^i \cdot \frac{1}{i!} D_x^i \frac{1}{1 - \frac{x}{s}},$$

also genau dieselbe Beziehung, wie durch die Eulersche Transformation (s. Gleichung (83)). Zugleich stellt dann die rechte Seite dieser Gleichung offenbar die analytische Fortsetzung der linken dar, soweit sie gleichmäßig konvergiert.

2. Es sei nun $\sum_0^{\infty} b_r x^r$ eine zweite, etwa für $|x| < r_b$ konvergierende Potenzreihe, und es werde mit $f_b(x)$ sowohl deren Summe, als auch ihre analytische Fortsetzung bezeichnet.

Man hat alsdann, wenn man für die a_r zunächst wieder die identische Umformung (85) einführt:

$$\sum_0^{\infty} a_r b_r x^r = \sum_0^{\infty} \left(\sum_0^r \lambda(r)_\lambda \cdot A_\lambda(s) \right) \cdot b_r \left(\frac{x}{s} \right)^r,$$

und die Vertauschung der Summationsfolge liefert die (unmittelbar aus Gleichung (87) durch Substitution von $b_r x^r$ an Stelle von x^r hervorgehende) Beziehung:

$$\begin{aligned} \sum_0^{\infty} a_r b_r x^r &= \sum_0^{\infty} \lambda A_\lambda(s) \cdot \sum_\lambda^{\infty} (r)_\lambda \cdot b_r \left(\frac{x}{s} \right)^r \\ (89) \qquad &= \sum_0^{\infty} \lambda A_\lambda(s) \cdot \frac{1}{\lambda!} \left(\frac{x}{s} \right)^\lambda \cdot D_x^\lambda \sum_0^{\infty} b_r \left(\frac{x}{s} \right)^r. \end{aligned}$$

Ersetzt man hier wieder die zuletzt auftretende Reihe durch das eventuell auch deren analytische Fortsetzung darstellende Zeichen $f_b \left(\frac{x}{s} \right)$, so ergibt sich ¹⁾:

$$(90) \qquad \sum_0^{\infty} a_r b_r x^r = \sum_0^{\infty} \lambda A_\lambda(s) \cdot \frac{1}{\lambda!} f_b^{(\lambda)} \left(\frac{x}{s} \right) \cdot \left(\frac{x}{s} \right)^\lambda,$$

und die Reihe auf der rechten Seite dieser Gleichung stellt dann offenbar die analytische Fortsetzung der links stehenden dar, soweit sie in einem über deren Konvergenzkreis hinausragenden zusammenhängenden Bereiche gleichmäßig konvergiert.

¹⁾ Diese Formel kann als eine Verallgemeinerung der sogenannten Bernoullischen Reihenentwicklung angesehen werden, in welche sie unmittelbar übergeht, wenn man speziell

$$s = 1, \quad A_\lambda(1) = (-1)^{\lambda-1}$$

setzt. Alsdann wird nämlich (nach Gleichung (7), p. 16):

$$\sum_0^{\infty} a_r x^r = \frac{1}{1-x} \cdot \sum_0^{\infty} \lambda (-1)^{\lambda-1} \left(\frac{x}{1-x} \right)^\lambda = -1,$$

also:

$$\sum_0^{\infty} a_r b_r x^r = -b_0 = -f_b(0),$$

und schließlich, wie behauptet:

$$f_b(x) - f_b(0) = \sum_1^{\infty} (-1)^{\lambda-1} \frac{1}{\lambda!} f_b^{(\lambda)}(c) \cdot x^\lambda.$$

3. Wir betrachten zunächst einen Fall, welcher in besonders einfacher Weise gestattet, den Bereich gleichmäßiger Konvergenz für die transformierte Reihe auf der rechten Seite von Gleichung (90) festzustellen.

Angenommen nämlich, die analytische Funktion $f_a(x)$ mit dem Anfangs-Element $\sum_0^{\infty} a_\nu x^\nu$ habe die einzige singuläre Stelle $x = 1$. Nach den Ergebnissen von § 2, Nr. 2 (p. 24) und Nr. 6 (p. 40) ist alsdann $a_\nu = g(\nu)$, wo $g(y)$ eine ganze rationale oder höchstens dem Minimaltypus der ersten Ordnung angehörige ganze transzendente Funktion bezeichnet. Zugleich hat man:

$$\sum_0^{\infty} g(\nu) x^\nu = \sum_0^{m+1} A_\lambda(1) \cdot \frac{x^\lambda}{(1-x)^{\lambda+1}} \quad \text{bzw.} \quad = \sum_0^{\infty} A_\lambda(1) \cdot \frac{x^\lambda}{(1-x)^{\lambda+1}},$$

je nachdem $f_a(x)$ im Punkte $x = 1$ einen Pol $(m+1)^{\text{ter}}$ Ordnung oder eine wesentlich singuläre Stelle besitzt. Im ersten dieser beiden Fälle reduziert sich die Beziehung (90) auf die folgende:

$$(91) \quad \sum_0^{\infty} g(\nu) \cdot b_\nu x^\nu = \sum_0^{m+1} A_\lambda(1) \frac{1}{\lambda!} f_b^{(\lambda)}(x) \cdot x^\lambda,$$

welche sofort erkennen läßt, daß die analytische Funktion mit den Anfangs-Element $\sum g(\nu) \cdot b_\nu x^\nu$ in jedem dem Existenzbereiche von $f_b(x)$ angehörigen endlichen Bereiche durch die rechts stehende Entwicklung dargestellt wird und daß sie im Endlichen die nämlichen Singularitäten besitzt, wie $f_b(x)$. Auch ist sie für $x = \infty$ noch regulär, wenn $f_b(x)$ daselbst regulär ist. In diesem Falle wird nämlich $(x^\lambda \cdot f_b^{(\lambda)}(x))_{x=\infty} = 0$ für $\lambda = 1, 2, 3 \dots$. Somit erstreckt sich die analytische Fortsetzung von $\sum g(\nu) \cdot b_\nu x^\nu$ über den ganzen Existenzbereich von $f_b(x)$ und sie besitzt überhaupt keine anderen Singularitäten wie $f_b(x)$.

Im zweiten Falle, wenn also $x = 1$ eine wesentlich singuläre Stelle für $f_a(x)$, nimmt die Relation (90) die Form an:

$$(92) \quad \sum_0^{\infty} g(\nu) \cdot b_\nu x^\nu = \sum_0^{\infty} A_\lambda(1) \frac{1}{\lambda!} f_b^{(\lambda)}(x) \cdot x^\lambda,$$

wobei die $A_\lambda(1)$ als Koeffizienten einer beständig konvergierenden Reihe der Beziehung

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sqrt[\lambda]{A_\lambda(1)} = 0$$

genügen. Daraus folgt aber, daß die Reihe auf der rechten Seite von Gleichung (92) absolut und gleichmäßig konvergiert in jedem endlichen Bereiche, für welchen

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sqrt[\lambda]{\frac{1}{\lambda!} f_b^{(\lambda)}(x)}$$

unter einer endlichen Schranke bleibt. Ist nun x irgend eine Stelle, für welche $f_b(x)$ sich regulär verhält, so hat man für eine gewisse Umgebung, etwa für $h < \rho_x$:

$$f_b(x + h) = \sum_0^{\infty} \frac{1}{\lambda!} f_b^{(\lambda)}(x) \cdot h^\lambda$$

und daher:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sqrt[\lambda]{\frac{1}{\lambda!} f_b^{(\lambda)}(x)} = \frac{1}{\rho_x}.$$

Für jeden abgeschlossenen Bereich solcher Stellen x besitzt dann ρ_x ein von Null verschiedenes Minimum, so daß also die fragliche Reihe daselbst gleichmäßig konvergiert. Da im übrigen auch bezüglich des etwaigen Verhaltens an der Stelle $x = \infty$ das nämliche gilt, wie in dem zuvor betrachteten Falle, so gewinnt man schließlich das folgende Resultat:

Ist $g(y)$ eine ganze rationale oder höchstens dem Minimaltypus der ersten Ordnung angehörige ganze transzendente Funktion, so ist die analytische Funktion mit dem Anfangs-Elemente $\sum_0^{\infty} g(r) \cdot b_r \cdot x^r$ in demselben Umfange regulär, wie die analytische Funktion $f_b(x)$ mit dem Anfangs-Elemente $\sum_0^{\infty} b_r \cdot x^r$ und überdies durch eine Entwicklung von der Form (91) bzw. (92) darstellbar. Sie besitzt also keine anderen singulären Stellen, wie $f_b(x)$.

Hat $\sum_0^{\infty} a_r x^r$ die einzige singuläre Stelle a , so daß also

(s. § 2, Nr. 8. p. 47) $a_r = \left(\frac{1}{a}\right)^r \cdot g(r)$, und bezeichnet man die singulären Stellen von $f_b(x)$ generell mit β , so hat offenbar die analytische Funktion mit dem Anfangs-Elemente $\sum_0^{\infty} a_r b_r x^r$

keine anderen singulären Stellen, als solche von der Form $\frac{x}{a} = \beta$, also $x = a\beta$. Dieses Resultat läßt sich in ganz analoger

Weise, wie in § 2, Nr. 8 geschehen (s. p. 49), auf den allgemeineren Fall übertragen, in welchem vorausgesetzt wird,

daß das Anfangs-Element $\sum_0^{\infty} a_r x^r$ eine eindeutige Funktion

mit einer endlichen Anzahl von singulären Stellen $a_z (z=1, 2, \dots, p)$,

eventuell noch mit der singulären Stelle $x = \infty$, definiert.

Werden alsdann die singulären Stellen von $f_b(x)$ wieder generell mit β bezeichnet, so besitzt die analytische Funktion

mit dem Anfangs-Element $\sum_0^{\infty} a_r b_r x^r$ keine anderen singulären

Stellen, als solche von der Form $a_z \beta$. Dabei können spezielle

Stellen $a_z \beta'$ wieder ihren singulären Charakter verlieren, falls eine Relation von der Form $a_z \beta' = a_z \beta''$ besteht (vgl. p. 49).

4. Das Ergebnis der vorigen Nummer legt die Vermutung nahe, daß es möglich sein könnte, mit Hilfe der Darstellungsformel (s. p. 66)

$$(90) \quad \sum_0^{\infty} a_r b_r x^r = \sum_0^{\infty} A_z(s) \cdot \frac{1}{z!} f_b^{(z)}\left(\frac{x}{s}\right) \cdot \left(\frac{x}{s}\right)^z$$

auch den allgemeinen Hadamardschen Satz¹⁾ über den

Zusammenhang der Singularitäten von $\sum_0^{\infty} a_r b_r x^r$ und $\sum_0^{\infty} a_r x^r$,

$\sum_0^{\infty} b_r x^r$ herzuleiten. In der Tat ist dieser Versuch auch von

¹⁾ Théorème sur les séries entières. Par. C. R. 124 (1897), p. 492; Acta math. 22 (1898), p. 55.

Herrn Pincherle¹⁾ gemacht worden, indessen nach meinem Dafürhalten nicht nur in der vorliegenden Form mißlungen, sondern (abgesehen von speziellen Fällen, wie dem in der vorigen Nummer behandelten) völlig aussichtslos, sofern nicht etwa noch andere Hilfsmittel herangezogen werden. Da der von Herrn Pincherle immerhin noch mit einer gewissen Vorsicht²⁾ ausgesprochene Beweis ohne irgendwelchen Vorbehalt in die vortreffliche Schrift des Herrn Hadamard über die Taylor'sche Reihe³⁾, sowie in das Vivanti-Gutzmersche Lehrbuch der Funktionen-Theorie⁴⁾ übergegangen ist, so dürfte es kaum überflüssig erscheinen, wenn ich im folgenden versuche, die Grenzen der fraglichen Beweis-Methode genauer festzustellen, wobei sich dann ergeben wird, daß es a priori ausgeschlossen erscheint, auf diesem Wege zu einem auch nur einigermaßen vollständigen Beweise des Hadamardschen Satzes zu gelangen.

Hierzu ist zunächst erforderlich, die Schlußweise des Herrn Pincherle in Kürze zu rekapitulieren. Den eigentlichen Kern derselben bildet die Feststellung des Bereiches gleichmäßiger Konvergenz für die Reihenentwicklung (90) (welche übrigens Herr Pincherle nicht im Anschluß an die Eulersche Transformation, sondern mit Hilfe seines „Calcul distributif“ gewinnt). Jene Reihe konvergiert nun aber absolut und gleichmäßig, sobald:

1) A proposito di un recente teorema del Sig. Hadamard. Rend. Accad. Bologna, Nuova Serie 3 (1898/99), p. 67.

2) Auf p. 68 der zitierten Note heißt es: „La presenta nota è diretta ... a mostrare come ... si possa, in molti casi, ottenere il teorema di Hadamard senza che occorra il sussidio degli integrali curvilinei.“ Wodurch diese „vielen Fälle“ aber charakterisiert sind, wird in keiner Weise angedeutet, vielmehr auf p. 72 das Ergebnis der betreffenden Deduktion so ausgesprochen, als ob der fragliche Satz nunmehr ohne jede Einschränkung bewiesen sei. Die von Herrn Pincherle sodann angeführten Beispiele sind allerdings einwandfrei, aber nur, weil sie sich sämtlich unter den in Nr. 2 des Textes behandelten Spezialfall subsumieren lassen.

3) La série de Taylor et son prolongement analytique. Paris 1901, p. 78.

4) G. Vivanti. Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen. Deutsch von A. Gutzmer. Leipzig 1906, p. 385.

$$(93) \quad \overline{\lim}_{\lambda=\infty} \sqrt[\lambda]{A_\lambda(s) \cdot \frac{1}{\lambda!} f_b^{(\lambda)}\left(\frac{x}{s}\right)} \cdot \frac{x}{s} < \vartheta < 1.$$

Zur näheren Bestimmung des vorliegenden Grenzwertes hat man zunächst:

$$(94) \quad \overline{\lim}_{\lambda=\infty} \sqrt[\lambda]{A_\lambda(s) \cdot \frac{1}{\lambda!} f_a^{(\lambda)}\left(\frac{x}{s}\right)} \cdot \frac{x}{s} \\ < \lim_{\lambda=\infty} \sqrt[\lambda]{A_\lambda(s)} \cdot \lim_{\lambda=\infty} \sqrt[\lambda]{\frac{1}{\lambda!} f_b^{(\lambda)}\left(\frac{x}{s}\right)} \cdot \frac{x}{s}.$$

Nun ist (s. p. 17, Gleichung (10)):

$$\lim_{\lambda=\infty} \sqrt[\lambda]{A_\lambda(s)} = \frac{1}{\varrho},$$

wenn die Beziehung $\left| \frac{x}{s-x} \right| = \varrho$ die Konvergenzgrenze der Reihe $\sum_0^\infty A_\lambda(s) \left(\frac{x}{s-x} \right)^\lambda$ definiert. Ist dann a eine auf dieser Konvergenzgrenze gelegene singuläre Stelle der Funktion $f_a(x)$ (d. h. derjenigen mit dem Anfangs-Element $\sum_0^\infty a_\nu x^\nu$), so hat man:

$$\varrho = \frac{a}{s-a}$$

und daher:

$$(95) \quad \overline{\lim}_{\lambda=\infty} \sqrt[\lambda]{A_\lambda(s)} = \frac{s-a}{a}.$$

Bezeichnet andererseits y eine Stelle regulären Verhaltens von $f_b(x)$, so besteht für eine gewisse Umgebung $y+k$ eine Entwicklung von der Form:

$$f_b(y+k) = \sum_0^\infty \frac{1}{\lambda!} f_b^{(\lambda)}(y) \cdot k^\lambda,$$

also, wenn $y = \frac{x}{s}$, $k = \frac{h}{s}$ gesetzt wird:

$$f_b\left(\frac{x+h}{s}\right) = \sum_0^{\infty} \frac{1}{\lambda!} f_b^{(\lambda)}\left(\frac{x}{s}\right) \cdot \left(\frac{h}{s}\right)^\lambda.$$

Ist sodann $y+h = \beta$ die (bzw. eine) dem betrachteten Punkte y am nächsten gelegene singuläre Stelle für $f_b(y+h)$, so ist $x+h = s\beta$ die entsprechende singuläre Stelle für $f_b\left(\frac{x+h}{s}\right)$. Daraus würde aber folgen, daß die Konvergenzgrenze der Reihenentwicklung (96) durch die Gleichung

$$|h| = |s\beta - x|$$

bestimmt wird, und man findet somit:

$$(97) \quad \overline{\lim}_{\lambda \rightarrow \infty} \sqrt[\lambda]{\frac{1}{\lambda!} f_b^{(\lambda)}\left(\frac{x}{s}\right)} \cdot \left|\frac{1}{s}\right| = \left|\frac{1}{s\beta - x}\right|.$$

Mit Benützung von (95) und (97) geht jetzt die Beziehung (94) in die folgende über:

$$(98) \quad \overline{\lim}_{\lambda \rightarrow \infty} \sqrt[\lambda]{A_\lambda(s) \cdot \frac{1}{\lambda!} f_b^{(\lambda)}\left(\frac{x}{s}\right)} \cdot \frac{x}{s} \leq \frac{s-a}{a} \cdot \left|\frac{x}{s\beta - x}\right|.$$

Wird jetzt vorausgesetzt, daß in der vorstehenden Relation das Gleichheitszeichen Geltung hat¹⁾, so nimmt die Konvergenzbedingung (93) die Form an:

$$\frac{s-a}{a} \cdot \left|\frac{x}{s\beta - x}\right| \leq \vartheta < 1,$$

anders geschrieben:

$$(99) \quad \left|\frac{x}{s\beta - x}\right| < \vartheta \cdot \frac{a}{s-a} < \frac{a}{s-a} \left(= \left|\frac{a\beta}{s\beta - a\beta}\right| \right).$$

¹⁾ Läßt man diese Annahme fallen, so würde nach der im Texte angegebenen Schlußweise die Stelle $a\beta$ noch dem Innern des Konvergenzbereiches angehören, also keine singuläre Stelle sein, was ja, wie die bisher (s. § 2, Nr. 8, p. 49 und Nr. 3 dieses Paragraphen, p. 69) betrachteten besonderen Fälle schon gezeigt haben, tatsächlich der Fall sein kann.

Bis hierher erscheint alles einwandfrei. Nun wird aber in folgender Weise weiter geschlossen. Die Beziehung (99) definiert (sc. für jedes einzelne s) den Konvergenzbereich der Reihe $\sum_0^{\infty} A_i(s) \cdot \frac{1}{i!} f_{\beta}^{(i)}\left(\frac{x}{s}\right) \cdot \left(\frac{x}{s}\right)^i$ und läßt erkennen, daß die Stelle $x = \alpha\beta$ auf dieses Bereiches Grenze liegt, welche offenbar (vgl. § 1, Nr. 3, p. 20) stets ein (allenfalls in eine unbegrenzte Gerade ausartender)¹⁾ Kreis ist²⁾. Läßt man jetzt s innerhalb einer hinlänglich klein gewählten Umgebung des ursprünglich angenommenen Wertes stetig variieren, so wird auch jene Konvergenzgrenze eine durch die Relation (99) bestimmte Änderung erleiden, immer aber den Punkt $\alpha\beta$ erhalten. Dieser Punkt $\alpha\beta$ und im allgemeinen offenbar nur dieser eine Punkt ist allen auf die angegebene Art zum Vorschein kommenden Konvergenzkreisen (eventuell Konvergenzgeraden) gemeinsam, er tritt also niemals in das Innere eines Konvergenzbereiches, ist somit eine singuläre Stelle für die betreffende Funktion. Die singulären Stellen der letzteren sind daher ausschließlich (?) in der Form $\alpha\beta$ enthalten.

Soll nun diese Schlußweise wirklich bindend erscheinen, so müßte doch daraus zu ersehen sein, daß jede dem Existenzbereiche der betreffenden Funktion angehörige und von allen möglichen $\alpha\beta$ verschiedene Stelle x bei passender Wahl von s auch allemal in einen der Konvergenzbereiche, wie sie durch die Beziehung (99) definiert werden, hineinfällt. Das ist aber im vorstehenden weder bewiesen noch auch (abgesehen von dem in der vorigen Nummer behandelten Spezialfalle) auf diesem Wege³⁾ beweisbar, wie schon aus der folgenden Bemerkung

1) Nämlich, wenn:

$$\frac{\alpha}{s - \alpha} = 1.$$

2) Den Konvergenzbereich bildet dann allemal derjenige Teil der Ebene, welcher den Punkt $x=0$ enthält, dagegen den Punkt $x = s\beta$ ausschließt.

3) D. h. natürlich auch ohne Zuhilfenahme des oben benützten Auskunftsmittels, die Funktion $f_a^{(s)}$ von vornherein in eine Summe von Funktionen mit je einer einzigen Singularität zu zerlegen.

hervorgeht. Bedeutet α' irgend eine bestimmte unter den singulären Stellen von $f_s(x)$, so steht es auf Grund des obigen Beweisverfahrens doch nur dann frei, dem in Ungleichung (99) auftretenden Zeichen α die Bedeutung α' beizulegen, wenn für irgend ein bestimmtes s die Beziehung besteht (s. Gleichung 95):

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{A_s(s)} = \frac{s - \alpha'}{\alpha'}$$

wenn also vermittelt der durch jenes s bestimmten Eulerschen Transformation der Reihe $\sum_r a_r x^r$ die Stelle α' erreichbar ist, d. h. auf der Konvergenzgrenze der betreffenden transformierten Reihe liegt. Nur in diesem Falle läßt sich überhaupt eine bestimmte Aussage über den Charakter der Stellen α', β und ihrer Umgebung an die Transformationsformel (90) und die Konvergenz-Relation (99) knüpfen. Da es aber im allgemeinen, ja schon in Fällen allereinfachster Art¹⁾, unmöglich ist, alle singulären Stellen α von $f_s(x)$ vermittelt der Eulerschen Transformation auch bei ganz beliebiger Variation des Parameters zu erreichen, so erkennt man schon hieraus, daß die oben auseinander gesetzte Schlußweise im allgemeinen nicht ausreicht, um das in Frage stehende Resultat zu begründen. Dies ist aber selbst dann nicht einmal vollständig der Fall, wenn alle α durch die Eulersche Transformation erreichbar sind, wie durch das folgende Beispiel erläutert werden möge.

5. Es möge $f_s(x)$ nur die singulären Stellen 1 und ∞ besitzen, also in der längs $(1 \dots + \infty)$ zerschnittenen Ebene regulär sein; $f_s(x)$ habe die singuläre Stelle β , und es stehe im übrigen nur so viel fest, daß $f_s(x)$ sich regulär verhält, sobald man in der Richtung der Verbindungslinie $\overline{0\beta}$ vom Punkte β aus einen Schnitt ins Unendliche zieht, der im fol-

¹⁾ Z. B. wenn $f_s(x)$ drei mit dem Nullpunkt in einer Geraden oder vier nicht auf einem Kreise (bzw. einer Geraden) liegende singuläre Stellen besitzt.

genden zur Abkürzung schlechthin als Schnitt $(, \beta \dots \beta \cdot \infty)$ bezeichnet werden möge.

Wird $s = 1 + e^{\theta i}$ ($-\pi < \theta < +\pi$) angenommen, so hat man (s. § 3, Nr. 1, p. 50):

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \sqrt[v]{A_v(s)} = 1.$$

so daß also die Konvergenzbedingung (99) für die aus $\sum a_v b_v x^v$ durch die Transformation (90) hervorgehende Reihe die einfache Form erhält:

$$(100) \quad \frac{x}{s\beta - x} < \theta < 1.$$

Der Konvergenzbereich ist also eine den Nullpunkt enthaltende Halbebene, deren Grenzgerade durch den Punkt β geht¹⁾. Läßt man s alle Werte $1 + e^{\theta i}$ ($-\pi < \theta < +\pi$) durchlaufen, so fällt jene Trennungslinie sukzessive mit jeder durch den Punkt β gehenden Geraden zusammen, mit einziger Ausnahme derjenigen, welche zugleich durch den Nullpunkt geht. Da bei jeder anderen Wahl von s lediglich ein kleinerer Konvergenzbereich resultiert (nämlich eine den Punkt β ausschließende Halbebene oder sogar nur ein den Nullpunkt enthaltender, den Punkt β ausschließender Kreis), so folgt, daß man auf diesem Wege keinerlei Anhaltspunkt dafür gewinnt,

¹⁾ Sollten auf dem vom Punkte β ausgehenden Schnitte noch andere singuläre Stellen β' der Funktion $f_b(x)$ liegen, so brauchen diese bei der Bestimmung des fraglichen Konvergenzbereiches gar nicht weiter berücksichtigt zu werden. Denn diejenigen Punkte x , welche näher an $s\beta'$ liegen, als an $s\beta$ und die auf Grund der Konvergenzbedingung (99) aus dem Konvergenzbereiche auszuschließen sind, sobald:

$$\frac{x}{s\beta' - 1} > 1,$$

genügen ja a fortiori der Ungleichung:

$$\frac{x}{s\beta - 1} > 1.$$

liegen also schon eo ipso außerhalb des durch Ungleichung (100) definierten Bereiches.

wie die Funktion mit dem Anfangs-Element $\sum a_v b_v x^v$ auf dem Schnitte $(\beta \dots \beta \cdot \infty)$ beschaffen ist. Es läßt sich also insbesondere gar nichts darüber aussagen, ob jene Funktion sich daselbst regulär verhält bzw. noch weitere singuläre Stellen β' besitzt, falls die entsprechende Voraussetzung für $f_b(x)$ gemacht wird. Im übrigen ist evident, daß dieses Resultat unverändert bestehen bleibt, wenn auch in Bezug auf die Funktion $f_a(x)$ nur feststeht, daß sie in der längs $(1 \dots + \infty)$ zerschnittenen Ebene regulär ist. Somit ergibt sich in dem vorliegenden Zusammenhange nur folgendes:

Sind $f_a(x)$ und $f_b(x)$ regulär in der längs $(1 \dots + \infty)$ bzw. $(\beta \dots \beta \cdot \infty)$ zerschnittenen Ebene, so gilt das gleiche für die Funktion mit dem Anfangs-Element $\sum a_v b_v x^v$ in der längs $(\beta \dots \beta \cdot \infty)$ zerschnittenen Ebene.

Nimmt man z. B.

$$a_v = \frac{a \cdot (a+1) \dots (a+r-1)}{1 \cdot 2 \dots v}, \quad b_v = \frac{\beta(\beta+1) \dots (\beta+r-1)}{1 \cdot 2 \dots v},$$

also $f_a(x) = (1-x)^{-a}$, $f_b(x) = (1-x)^{-\beta}$, so haben diese beiden Funktionen in der längs $(1 \dots + \infty)$ zerschnittenen Ebene nur die singulären Stellen 1 und ∞ . Über die Funktion, welche definiert wird durch die Reihe

$$\sum \frac{a(a+1) \dots (a+r-1) \cdot \beta(\beta+1) \dots (\beta+r-1)}{1 \cdot 2 \dots v \cdot 1 \cdot 2 \dots v} x^v,$$

läßt sich auf Grund des oben gewonnenen Resultates nur so viel aussagen, daß sie innerhalb der längs $(1 \dots + \infty)$ zerschnittenen Ebene regulär ist. Kombiniert man dieses Resultat mit dem früher (s. p. 62, Gleichung (81)) bezüglich der Reihe

$$\sum \frac{1 \cdot 2 \dots v}{\gamma(\gamma+1) \dots (\gamma+r-1)}$$

gefundenen, so ergibt sich, daß auch die hypergeometrische Reihe

$$\sum \frac{a(a+1) \dots (a+r-1) \cdot \beta(\beta+1) \dots (\beta+r-1)}{\gamma(\gamma+1) \dots (\gamma+r-1) \cdot 1 \cdot 2 \dots v} x^v$$

eine Funktion definiert, welche in der längs $(1 \dots + \infty)$ zerschnittenen Ebene sich regulär verhält. (Mehr läßt sich bei Beschränkung auf die hier verwendeten Hilfsmittel nicht aussagen.)

Im übrigen gibt der den letzten Beispielen zu Grunde liegende Fall noch zu folgender Bemerkung Anlaß. Man könnte — immer unter der Voraussetzung, daß $f_a(x)$ im Endlichen nur die singuläre Stelle 1 besitzt — nach Analogie des unmittelbar zuvor gefundenen Ergebnisses vermuten, daß auf dem entsprechenden Wege wenigstens festgestellt werden könnte, die Funktion mit dem Anfangs-Elemente $\sum a_v b_v x^v$ verhalte sich regulär im Innern desjenigen „Zentralsterns“, welcher entsteht, wenn man von allen möglichen singulären Stellen β der Funktion $f_b(x)$ in der Richtung der Verbindungslinien $\overline{0\beta}$ Strahlen ins Unendliche zieht. Dieses Resultat läßt sich indessen nur dann in analoger Weise, wie in dem zuvor betrachteten Falle eines einzigen β , gewinnen, wenn die singulären Stellen $\beta, \beta', \beta'', \dots$ sämtlich einer Halbebene angehören, die von einer durch den Nullpunkt gehenden Geraden begrenzt wird. Dagegen versagt das betreffende Beweisverfahren, sobald $f_b(x)$ auch nur drei nicht in einer solchen Halbebene liegende singuläre Stellen aufweist, da alsdann der gesamte Konvergenzbereich der Entwicklung (90) bei beliebig variierendem s stets ein endlicher ist, so daß also für das ganze unendliche Gebiet außerhalb desselben keinerlei Aussage bezüglich des Verhaltens der fraglichen Funktion gemacht werden kann. Es bedeute z. B. β eine beliebige komplexe Zahl, η eine komplexe dritte Einheitswurzel und es besitze $f_b(x)$ nur die drei singulären Stellen $\beta, \eta\beta, \eta^2\beta$. Setzt man dann, wie oben, $s = 1 + e^{\vartheta i}$, wo ϑ alle Werte innerhalb der Grenzen $-\pi$ und $+\pi$ durchläuft (eine Annahme, die wiederum für die Feststellung des Resultates vollständig genügt, da die Konvergenzbereiche für jede andere Wahl von s kleiner ausfallen), so erscheinen als Konvergenzbereiche alle möglichen gleichseitigen Dreiecke, welche durch die drei Punkte $\beta, \eta\beta, \eta^2\beta$ gehen, und der auf diese Weise resultierende gesamte Gültigkeitsbereich aller mög-

lichen Entwicklungen (90) besteht dann aus demjenigen Gebiete, welches von drei durch den Nullpunkt und paarweise durch je zwei der drei Punkte β , $\eta\beta$, $\eta^2\beta$ gehenden Kreisen überdeckt wird, ist also ein endlicher, sogar relativ sehr beschränkter.

Somit versagt das fragliche Beweisverfahren selbst dann, wenn $f_a(x)$ nur eine einzige im Endlichen gelegene singuläre Stelle besitzt, sofern nicht die singulären Stellen von $f_b(x)$ auch noch sehr speziellen Bedingungen genügen.

§ 5.

Potenzreihen, welche den Einheitskreis zur natürlichen Grenze haben.

1. Als notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Reihe $\sum a_r x^r$, wo: $\overline{\lim}_{r=\infty} \sqrt[r]{|a_r|} = 1$, die singuläre Stelle $x = e^{\eta i}$ besitzt, ergab sich (s. p. 19, Gl. (14)) die Beziehung:

$$(101) \quad \overline{\lim}_{\lambda=\infty} \frac{1}{2} \sqrt[\lambda]{|A_\lambda(-e^{\eta i})|} = 1,$$

wenn gesetzt wird:

$$A_\lambda(-e^{\eta i}) = (-1)^\lambda \cdot \sum_0^\lambda (\lambda)_r a_r e^{\eta r i}.$$

Um hieraus eine etwas bequemer zu handhabende Form einer hinreichenden Bedingung dafür zu gewinnen, daß jede Stelle $e^{\eta i}$ ($-\pi < \eta < +\pi$) eine singuläre ist, erscheint es zweckmäßig λ als gerade Zahl anzunehmen, also etwa durch 2λ zu ersetzen und sodann $A_{2\lambda}$ in folgender Weise umzuformen. Man hat zunächst:

$$A_{2\lambda}(-e^{\eta i}) = \sum_0^{\lambda-1} (2\lambda)_r a_r e^{\eta r i} + (2\lambda)_\lambda a_\lambda e^{2\lambda \eta i} + \sum_{\lambda+1}^{2\lambda} (2\lambda)_r a_r e^{\eta r i}.$$

Ersetzt man r in der ersten Summe durch $\lambda - r$, in der letzten durch $\lambda + r$ und berücksichtigt, daß $(2\lambda)_{\lambda+r} = (2\lambda)_{\lambda-r}$, so wird:

$$\begin{aligned}
(102) \quad & A_{2\lambda}(-e^{q i}) \\
&= (2\lambda)_\lambda a_\lambda e^{\lambda q i} + \sum_1^\lambda (2\lambda)_{\lambda-r} (a_{\lambda-r} e^{(\lambda-r)q i} + a_{\lambda+r} e^{(\lambda+r)q i}) \\
&= (2\lambda)_\lambda \cdot e^{\lambda q i} \left\{ a_\lambda + \sum_1^\infty \frac{\lambda! \lambda!}{(\lambda-r)! (\lambda+r)!} (a_{\lambda-r} e^{-r q i} + a_{\lambda+r} e^{r q i}) \right\}.
\end{aligned}$$

Nun ist (s. p. 39):

$$(103) \quad \lim_{\lambda=\infty} \frac{e}{\lambda} \cdot (\lambda!)^{\frac{1}{\lambda}} = 1,$$

anders geschrieben:

$$\lim_{\lambda=\infty} \frac{e}{\lambda} (\lambda! \lambda!)^{\frac{1}{2\lambda}} = 1$$

und, wenn man in der ursprünglichen Gleichung λ durch 2λ ersetzt:

$$\lim_{\lambda=\infty} \frac{e}{\lambda} (2\lambda!)^{\frac{1}{2\lambda}} = 2,$$

so daß sich durch Division ergibt:

$$\lim_{\lambda=\infty} (2\lambda)_\lambda^{\frac{1}{2\lambda}} = \lim_{\lambda=\infty} \left(\frac{(2\lambda)!}{\lambda! \lambda!} \right)^{\frac{1}{2\lambda}} = 2.$$

Infolgedessen findet man zunächst:

$$\begin{aligned}
(104) \quad & \lim_{\lambda=\infty} \frac{1}{2} \sqrt[2\lambda]{A_{2\lambda}(-e^{q i})} \\
&= \lim_{\lambda=\infty} \left| a_\lambda + \sum_1^\lambda \frac{\lambda! \lambda!}{(\lambda-r)! (\lambda+r)!} (a_{\lambda-r} e^{-r q i} + a_{\lambda+r} e^{r q i}) \right|
\end{aligned}$$

und es ist somit eine hinreichende Bedingung¹⁾ für den singulären Charakter der Stelle $x = e^{q i}$, wenn dieser Grenzwert = 1 ausfällt.

1) Dieselbe ist keine notwendige mehr. Denn wenn auch jener Grenzwert < 1 ausfiele, so könnte immerhin der entsprechende für einen ungeraden Index $2\lambda + 1$ noch = 1 sein, was für den singulären Charakter von $x = e^{q i}$ gleichfalls ausreichend wäre.

Die Zahlenkoeffizienten $\frac{\lambda! \lambda!}{(\lambda - r)! (\lambda + r)!}$ nehmen mit wachsendem r beständig ab und zwar, wie sogleich gezeigt werden soll, so stark, daß alle diejenigen Glieder, deren Index r eine passend gewählte, mit λ ins Unendliche wachsende Schranke übersteigt, auf den fraglichen Grenzwert keinen Einfluß üben und somit ohne weiteres weggelassen werden dürfen. Es beruht dies auf dem folgenden Hilfssatz:

Ist:

$$\lim_{\lambda=\infty} \sqrt[\lambda]{P_\lambda} = P \quad \lim_{\lambda=\infty} \sqrt[\lambda]{p_\lambda} = p < P,$$

so ist auch:

$$\lim_{\lambda=\infty} \sqrt[\lambda]{P_\lambda + p_\lambda} = P.$$

Um dies einzusehen, nehme man $\varepsilon > 0$ beliebig klein, jedenfalls aber so an:

$$\varepsilon < \frac{P - p}{P + p}, \text{ also: } \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} < \frac{P}{p}.$$

Auf Grund der Voraussetzung hat man sodann für alle hinlänglich großen λ , etwa für $\lambda > l$:

$$P_\lambda < (1 + \varepsilon)^{\lambda} \cdot P^{\lambda} \quad p_\lambda < (1 + \varepsilon)^{\lambda} \cdot p^{\lambda},$$

außerdem für unendlich viele $\lambda > l$:

$$P_\lambda > (1 - \varepsilon)^{\lambda} \cdot P^{\lambda}.$$

Somit ist für alle $\lambda > l$:

$$P_\lambda + p_\lambda < P_\lambda + p_\lambda < (1 + \varepsilon)^{\lambda} \cdot \left(1 + \left(\frac{p}{P}\right)^{\lambda}\right) \cdot P^{\lambda}$$

und für unendlich viele $\lambda > l$:

$$P_\lambda + p_\lambda > P_\lambda - p_\lambda > (1 - \varepsilon)^{\lambda} \cdot \left(1 - \left(\frac{(1 + \varepsilon)p}{(1 - \varepsilon)P}\right)^{\lambda}\right) \cdot P^{\lambda},$$

so daß sich in der Tat ergibt:

$$\lim_{\lambda=\infty} \sqrt[\lambda]{P_\lambda + p_\lambda} = P.$$

2. Um dieses Resultat auf den Grenzwert (104) anzuwenden, hat man zunächst, wenn man, nach Annahme eines echten Bruches ϑ , in Gleichung (103) λ durch $(1-\vartheta)\lambda$ ersetzt¹⁾:

$$\lim_{\lambda=\infty} \frac{e}{(1-\vartheta)^\lambda} ((\lambda-\vartheta\lambda)!)^{\frac{1}{(1-\vartheta)\lambda}} = 1,$$

also durch Erhebung in die Potenz $\frac{1}{2}(1-\vartheta)$ und Multiplikation mit $(1-\vartheta)^{\frac{1}{2}(1-\vartheta)}$:

$$\lim_{\lambda=\infty} \left(\frac{e}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}(1-\vartheta)} \cdot ((\lambda-\vartheta\lambda)!)^{\frac{1}{2\lambda}} = (1-\vartheta)^{\frac{1}{2}(1-\vartheta)}.$$

Vertauscht man hier $-\vartheta$ mit $+\vartheta$, so folgt durch Multiplikation der resultierenden Gleichung mit der vorstehenden:

$$\lim_{\lambda=\infty} \frac{e}{\lambda} ((\lambda-\vartheta\lambda)! (\lambda+\vartheta\lambda)!)^{\frac{1}{2\lambda}} = (1-\vartheta)^{\frac{1}{2}(1-\vartheta)} \cdot (1+\vartheta)^{\frac{1}{2}(1+\vartheta)}$$

und somit schließlich, wenn man Gleichung (103) durch die letzte Gleichung dividiert:

$$(105) \lim_{\lambda=\infty} \left(\frac{\lambda! \lambda!}{(\lambda-\vartheta\lambda)! (\lambda+\vartheta\lambda)!} \right)^{\frac{1}{2\lambda}} = \left(\frac{1}{(1-\vartheta)^{1-\vartheta} (1+\vartheta)^{1+\vartheta}} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Um zu zeigen, daß dieser Wert stets unter der Einheit liegt, setze man:

$$\vartheta = \frac{1}{t}, \quad \text{wo also: } t > 1,$$

und daher:

$$(1-\vartheta)^{1-\vartheta} \cdot (1+\vartheta)^{1+\vartheta} = \left(\left(1-\frac{1}{t}\right)^{t-1} \cdot \left(1+\frac{1}{t}\right)^{t+1} \right)^{\frac{1}{t}}.$$

Nun ist bekanntlich:

$$\left(1+\frac{1}{t}\right)^t > \left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1} = \left(1-\frac{1}{t}\right)^{-(t-1)},$$

¹⁾ Da es sich in der vorliegenden Betrachtung schließlich nur um die Bestimmung eines oberen Limes und zwar um einen Wert handelt, der überhaupt nicht überschritten werden kann (s. p. 17, Ungleichung (11)), so steht es, um Weitläufigkeiten zu vermeiden, frei, λ auf solche Zahlenwerte zu beschränken, für welche $\vartheta\lambda$ ganzzahlig ist.

woraus durch Multiplikation mit $\left(1 + \frac{1}{t}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{t}\right)^{t-1}$ sich ergibt:

$$\left(1 - \frac{1}{t}\right)^{t-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{t+1} > 1 + \frac{1}{t},$$

also, wenn man noch in die Potenz $\frac{1}{t}$ erhebt und wieder $\vartheta = \frac{1}{t}$ einführt:

$$(1 - \vartheta)^{t-\vartheta} \cdot (1 + \vartheta)^{t+\vartheta} > (1 + \vartheta)^\vartheta.$$

Mithin findet man schließlich aus Gleichung (105):

$$(106) \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left(\frac{\lambda! \lambda!}{(\lambda - \vartheta \lambda)! (\lambda + \vartheta \lambda)!} \right)^{\frac{1}{2\lambda}} < \left(\frac{1}{1 + \vartheta} \right)^{\frac{\vartheta}{2}} < 1.$$

Bezeichnet man jetzt mit g_λ das Maximum von $|a_{\lambda+r}|$ für $r = \vartheta \lambda + 1, \vartheta \lambda + 2, \dots, \lambda$, so hat man:

$$\left| \sum_{\vartheta \lambda + 1}^{\lambda} \frac{\lambda! \lambda!}{(\lambda - r)! (\lambda + r)!} (a_{\lambda-r} e^{-r \vartheta} + a_{\lambda+r} e^{r \vartheta}) \right| < 2(1 - \vartheta) \lambda \frac{\lambda! \lambda!}{(\lambda - \vartheta \lambda)! (\lambda + \vartheta \lambda)!} \cdot g_\lambda$$

und daher:

$$(107) \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sum_{\vartheta \lambda + 1}^{\lambda} \frac{\lambda! \lambda!}{(\lambda - r)! (\lambda + r)!} (a_{\lambda-r} e^{-r \vartheta} + a_{\lambda+r} e^{r \vartheta}) < \left(\frac{1}{1 + \vartheta} \right)^{\frac{1}{2}} < 1.$$

Aus dem zuvor bewiesenen Hilfssatze folgt dann, daß man den vorstehenden Bestandteil der in Gleichung (104) auftretenden Summe bei dem fraglichen Grenzübergange von vornherein unterdrücken kann, so daß also die hinreichende Bedingung für den singulären Charakter der Stelle $x = e^\vartheta$ nunmehr die Form annimmt¹⁾:

$$(108) \quad \overline{\lim}_{\lambda \rightarrow \infty} a_\lambda + \sum_1^{\vartheta \lambda} \frac{\lambda! \lambda!}{(\lambda - r)! (\lambda + r)!} (a_{\lambda-r} e^{-r \vartheta} + a_{\lambda+r} e^{r \vartheta}) = 1,$$

wo: $0 < \vartheta < 1$.

¹⁾ Vgl. Fabry, Ann. Éc. Norm. (3), 13 (1896), p. 371. — Faber, Dissert. (1903), p. 19.

3. Die vorstehende Beziehung ist nun für jeden Wert von φ erfüllt, der Einheitskreis also eine singuläre Linie, wenn eine hinlänglich große Anzahl der Reihenkoeffizienten sich auf Null reduziert. Schreibt man die Reihe etwa in der Form an: $\sum_1^{\infty} a_{m_\nu} x^{m_\nu}$, wo $m_1, m_2, \dots, m_\nu, \dots$ eine unbegrenzte Folge wachsender natürlicher Zahlen bedeutet, so tritt, wie leicht zu sehen, der ebenbezeichnete Fall insbesondere dann ein, wenn die m_ν so schnell wachsen, daß

$$(109) \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{m_{\nu+1} - m_\nu}{m_\nu} > \alpha,$$

unter α eine beliebige positive Zahl verstanden.

Alsdann bestehen nämlich zum mindesten von einer bestimmten Stelle $z > k$ ab die Ungleichungen:

$$m_z - m_{z-1} > \alpha \cdot m_{z-1}, \quad \text{also: } \frac{1}{1 + \alpha} \cdot m_z > m_{z-1}$$

$$m_{z+1} - m_z > \alpha \cdot m_z, \quad \text{also: } (1 + \alpha) \cdot m_z < m_{z+1}.$$

Setzt man jetzt in dem Ausdrucke (108) $\lambda = m_z$, so wird

$$a_\lambda = a_{m_z},$$

während im übrigen als kleinster und größter Koeffizienten-Index die Zahlen

$$(1 - \vartheta) \cdot m_z \quad \text{und} \quad (1 + \vartheta) \cdot m_z$$

auftreten. Wird nun ϑ so gewählt, daß

$$1 - \vartheta \geq \frac{1}{1 + \alpha} \quad \left(\text{d. h. } \vartheta \leq \frac{\alpha}{1 + \alpha} \right),$$

so hat man um so mehr:

$$1 + \vartheta < 1 + \alpha$$

und daher:

$$(1 - \vartheta) m_z > m_{z-1} \quad (1 + \vartheta) m_z < m_{z+1}.$$

Somit enthält in diesem Falle der Ausdruck (108) außer a_{m_z} überhaupt keinen weiteren von Null verschiedenen Reihenkoeffizienten, und der betreffende Grenzwert nimmt die Form an:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \sqrt[2m_z]{a_{m_z}} = \left(\lim_{z \rightarrow \infty} \sqrt[m_z]{a_{m_z}} \right)^{\frac{1}{2}} = 1,$$

ohne daß q irgendwelcher Beschränkung unterworfen zu werden braucht. Somit hat jede der Bedingung (109) genügende Reihe $\sum_1^{\infty} a_{m_r} x^{m_r}$ den Einheitskreis zur natürlichen Grenze¹⁾.

4. Das Ergebnis der vorigen Nummer soll nun zum Beweise des folgenden, wesentlich allgemeineren Satzes dienen:

Ist

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt[m_r]{a_{m_r}} = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{m_r}{r} = \infty,$$

so hat die Reihe $\sum_1^{\infty} a_{m_r} x^{m_r}$ den Einheitskreis zur natürlichen Grenze²⁾.

¹⁾ Zuerst von Herrn Hadamard bewiesen. Journ. de Math. (4), 8, p. 116.

²⁾ In sehr viel komplizierterer, jedoch dem Umfange nach im wesentlichen übereinstimmender Formulierung zuerst von Herrn Fabry bewiesen. Ann. Éc. Norm. (3), 13 (1896), p. 382; Acta math. 22 (1898), p. 86. — Herr Faber (Sitz.-Ber. 34 [1904]) hat dafür einen merklich einfacheren Beweis gegeben und schließlich den Satz in folgender Weise formuliert (Sitz.-Ber. 36 [1906], p. 581): „Bezeichnet man mit $n(r)$ die Anzahl der nicht verschwindenden Koeffizienten, die zu Potenzen mit Exponenten $\leq r$ gehören, so ist die Beziehung $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r)}{r} = 0$ eine hinreichende Bedingung für die Nichtfortsetzbarkeit der Reihe.“ Dieser Satz erweist sich in der Tat als vollkommen gleichwertig mit demjenigen des Textes, wenn man beachtet, daß $n(r)$ die inverse Funktion zu der im Texte mit m_r bezeichneten darstellt und daß daher die Beziehungen

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r)}{r} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{m_r}{r} = \infty$$

äquivalent sind. Die von Herrn Faber für seinen Beweis benützte Einführung eines (nach Art eines sogenannten Diskontinuitäts-Faktors wirkenden) Faktors von der Form $g(r)$ wird auch bei dem von mir gegebenen Beweise verwendet, welcher im übrigen immerhin eine merkliche Ver-

Beweis. Aus der Reihe der Zahlen $m_1, m_2, \dots, m_r, \dots$ werde eine Folge von Zahlen $p_1, p_2, \dots, p_r, \dots$ so herausgehoben, daß

$$(110) \quad \lim_{r=\infty} \sqrt[p_r]{|a_{p_r}|} = 1, \quad \lim_{r=\infty} \frac{p_{r+1} - p_r}{p_r} > a > 0.$$

Die alsdann übrig bleibende Folge der Zahlen m_r werde mit $q_1, q_2, \dots, q_r, \dots$ bezeichnet.

Da zum mindesten (von einer bestimmten Stelle an) stets $q_r > m_r$, so folgt aus der Voraussetzung, daß auch

$$\lim_{r=\infty} \frac{q_r}{r} = \infty.$$

Infolgedessen ist die Reihe $\sum_1^{\infty} \frac{1}{q_r}$ konvergent und das unendliche Produkt

$$(111) \quad g(y) = \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{y^2}{q_r^2}\right)$$

stellt eine ganze transzendente Funktion dar, welche offenbar die Nullstellen $y = \pm q_r$ ($r = 1, 2, 3, \dots$) und nur diese besitzt.

Wir werden nun zeigen, daß dieselbe dem Minimaltypus der Ordnung 1 angehört, daß sie also bei beliebig klein vorgeschriebenem $\varepsilon > 0$ einer Relation von der Form

$$(112) \quad |g(y)| < e^{\varepsilon \cdot |y|} \quad \text{etwa für: } |y| > R_\varepsilon$$

genügt, und daß andererseits für alle hinlänglich großen Werte von r :

$$(113) \quad |g(p_r)| > e^{-\varepsilon \cdot |p_r|}.$$

Sobald die Richtigkeit dieser beiden Ungleichungen erwiesen ist, lassen sich nämlich daran sofort die folgenden Schlüsse knüpfen. Setzt man in der ersten dieser Unglei-

—
 einführung des Faberschen Beweises darstellen dürfte. Auch scheint mir die hier gegebene Fassung des Satzes begrifflich etwas einfacher und schon aus dem Grunde vorzuziehen, weil sie unmittelbar gestattet, die fragliche Reihe explizite (nämlich als $\sum a_{m_r} x^{m_r}$) anzuschreiben.

chungen $y = p_v$ und $p_v > R_v$, so ergibt sich durch Kombination mit der zweiten Ungleichung, daß für alle hinlänglich großen Werte von v :

$$e^{-t} < \sqrt[p_v]{g(p_v)} < e^t$$

und somit:

$$\lim_{v=\infty} \sqrt[p_v]{g(p_v)} = 1,$$

also auch:

$$\lim_{v=\infty} \sqrt[p_v]{g(p_v) \cdot a_{p_v}} = 1.$$

Da die p_v der Ungleichung (110) genügen, so folgt aus dem Satze der vorigen Nummer, daß die Reihe

$$\sum_1^{\infty} g(p_v) \cdot a_{p_v} x^{p_v}$$

den Einheitskreis zur natürlichen Grenze hat.

Nun ist nach (111): $g(q_v) = 0$, und es besteht daher die Identität:

$$\begin{aligned} \sum_1^{\infty} g(p_v) \cdot a_{p_v} x^{p_v} &= \sum_1^{\infty} g(p_v) \cdot a_{p_v} x^{p_v} + \sum_1^{\infty} g(q_v) \cdot a_{q_v} x^{q_v} \\ &= \sum_1^{\infty} g(m_v) \cdot a_{m_v} x^{m_v}, \end{aligned}$$

so daß also auch gesagt werden kann, die letzte Reihe habe den Einheitskreis zur natürlichen Grenze.

Andererseits hat aber die Reihe $\sum_1^{\infty} g(v) \cdot x^v$ einschließlich ihrer analytischen Fortsetzung (die Richtigkeit der Ungleichungen (112), (113) vorausgesetzt), nach dem Satze von p. 40, Nr. 6, die einzige singuläre Stelle $x = 1$. Zugleich folgt dann aus dem p. 68 bewiesenen besonderen Falle des Hadamardschen Satzes, daß die Reihe

$$\sum_1^{\infty} g(v) \cdot a_v x^v \equiv \sum_1^{\infty} g(m_v) \cdot a_{m_v} x^{m_v}$$

keine anderen Singularitäten haben kann, wie $\sum_1^{\infty} a_{m_v} x^{m_v}$.

Da sie aber, wie zuvor bemerkt, die singuläre Linie $x_1 = 1$ hat, so muß offenbar das gleiche schon für $\sum_1^{\infty} a_{m_r} x^{m_r}$ gelten.

Hiernach hängt der Beweis des ausgesprochenen Satzes nur noch einzig und allein von demjenigen der beiden Ungleichungen (112) und (113) ab. Die erste derselben ließe sich leicht aus einer schon vor nahezu 30 Jahren von Herrn Poincaré gemachten Bemerkung¹⁾ folgern, die im übrigen nur einen speziellen Fall eines von Herrn P. Boutroux bewiesenen Satzes²⁾ aus der Theorie der ganzen transzendenten Funktionen darstellt. Da indessen die Herleitung nur wenige Zeilen erfordert, so erscheint es mir zweckmäßig, sie hier gleich anzugeben. Man hat zunächst:

$$(114) \quad |g(y)| \leq \prod_1^n \left(1 + \frac{|y|^2}{q_r^2}\right) \cdot \prod_{n+1}^{\infty} \left(1 + \frac{|y|^2}{q_r^2}\right) \\ < e^{n \cdot \lg\left(1 + \frac{|y|^2}{q_1^2}\right)} \cdot \prod_{n+1}^{\infty} \left(1 + \frac{|y|^2}{q_r^2}\right).$$

Wird $\varepsilon > 0$ beliebig klein vorgeschrieben, so läßt sich, wegen $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r}{q_r} = 0$, n so fixieren, daß

$$\frac{1}{q_r} < \frac{\varepsilon}{2 \pi r} \quad \text{für: } r > n,$$

also:

$$(115) \quad \prod_{n+1}^{\infty} \left(1 + \frac{|y|^2}{q_r^2}\right) < \prod_1^{\infty} \left(1 + \left(\frac{\varepsilon}{2 \pi} \frac{|y|}{r}\right)^2\right) = \frac{2}{\varepsilon |y|} \cdot \sin i \cdot \frac{\varepsilon}{2} |y| \\ < e^{\frac{\varepsilon}{2}} |y|$$

(wenn $|y|$ nur von vornherein so groß angenommen wird, daß $\varepsilon \cdot |y| \geq 1$). Andererseits läßt sich eine untere Schranke R , für $|y|$ so fixieren, daß

¹⁾ Bull. Soc. Math. de France 11 (1883). p. 142.

²⁾ Par. C. R. 134 (1902), p. 83. Vgl. auch Math. Ann. 58 (1904), p. 311, Fußnote und p. 313.

$$(116) \quad \frac{n}{y} \lg \left(1 + \frac{y^2}{q_1^2} \right) < \frac{\varepsilon}{2},$$

so daß sich schließlich, wie behauptet (s. Ungleichung (112)), ergibt:

$$g(y) < e^{\varepsilon \cdot y} \quad \text{für: } y > R_\varepsilon.$$

Bezüglich der zweiten noch zu beweisenden Ungleichung (s. Ungleichung (113)) sei bemerkt, daß die Ergebnisse der Untersuchungen über ganze transzendente Funktionen, soweit sie mir bekannt, zu ihrer Herleitung nicht ausreichen¹⁾. Dagegen läßt sich ihre Richtigkeit folgendermaßen begründen.

Bedeutet z eine beliebige natürliche Zahl, so existiert dazu stets eine und nur eine natürliche Zahl n , für welche die Beziehung besteht:

$$(117) \quad q_n < 2p_z \leq q_{n+1}.$$

Nun werde gesetzt:

$$(118) \quad g(p_z) = \prod_1^\infty \frac{q_v^2 - p_z^2}{q_v^2} = \gamma_n(p_z) \cdot \gamma(p_z),$$

wo:

$$(119) \quad \gamma_n(p_z) = \prod_1^n \frac{q_v^2 - p_z^2}{q_v^2} \quad \gamma(p_z) = \prod_{n+1}^\infty \frac{q_v^2 - p_z^2}{q_v^2}.$$

¹⁾ Die älteren Methoden (s. E. Lindelöf, Acta Soc. scient. Fennicae 31 [1902], p. 8 und meine Abhandlung, Math. Ann. 58 [1904], p. 320) würden statt der Bedingung $\lim_{v \rightarrow \infty} v \cdot \frac{1}{q_v} = 0$ geradezu die Konvergenz von $\sum \frac{1}{q_v}$ als Voraussetzung erfordern. Ein neuere Arbeit des Herrn

Lindelöf (Rend. Circ. Mat. di Palermo 25 [1908], p. 231) erstreckt sich zwar auch auf die hier lediglich zur Verfügung stehenden Voraussetzungen, gestattet jedoch nur, nachzuweisen, daß überhaupt auf unendlich vielen, auch beliebig großen Kreisen eine Beziehung von der Form

$$g(y) > e^{-\varepsilon \cdot y}$$

besteht, während es doch hier wesentlich darauf ankommt, zu zeigen, daß dies gerade für $y = p_z$ bei hinlänglich großem z der Fall ist.

Man hat sodann:

$$(120) \quad |\gamma_n(p_n)| = \prod_1^n r \frac{q_r + p_n}{q_r} \cdot \frac{|q_r - p_n|}{q_r} > \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \prod_1^n |q_r - p_n|.$$

Bedeutet ferner m diejenige ganze Zahl, welche eindeutig bestimmt ist durch die Beziehung:

$$(121) \quad q_m < p_n < q_{m+1},$$

so wird zunächst:

$$\prod_1^n |q_r - p_n| = \prod_1^m (p_n - q_r) \cdot \prod_{m+1}^n (q_r - p_n)^4).$$

Da aber:

$$\begin{aligned} p_n - q_1 &> p_n - q_2 > \cdots > p_n - q_m > 1 \\ q_n - p_n &> q_{n-1} - p_n > \cdots > q_{m+1} - p_n > 1, \end{aligned}$$

so ergibt sich weiter:

$$(122) \quad \prod_1^n |q_r - p_n| > m!(n-m)! \begin{cases} > \left(\frac{n}{2}\right)! \left(\frac{n}{2}\right)!, & \text{wenn } n \text{ gerade.} \\ > \left(\frac{n-1}{2}\right)! \left(\frac{n+1}{2}\right)!, & \text{wenn } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Nun ist:

$$e^r > \frac{r^r}{r!}, \quad \text{also: } r! > \left(\frac{r}{e}\right)^r.$$

und daher, bei geradem n :

$$\left(\frac{n}{2}\right)! \left(\frac{n}{2}\right)! > \left(\frac{n}{2e}\right)^n.$$

¹⁾ Sollte $m = n$ sein, was mit Rücksicht auf die Ungleichung (117) zwar wenig wahrscheinlich, aber immerhin denkbar wäre, so würde das zweite dieser Produkte in Wegfall kommen, und man hätte sodann:

$$\prod_1^n |q_r - p_n| > n!,$$

so daß alle weiteren Schlüsse a fortiori bestehen bleiben.

Bei ungeradem n hat man:

$$\left(\frac{n-1}{2}\right)! \left(\frac{n+1}{2}\right)! > \left(\frac{n-1}{2e}\right)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \left(\frac{n+1}{2e}\right)^{\frac{n+1}{2}} = \frac{((n-1)^{n-1} (n+1)^{n+1})^{\frac{1}{2}}}{(2e)^n}$$

und wegen:

$$(n-1)^{n-1} \cdot (n+1)^{n+1} = n^{2n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > n^{2n} \text{ (s.p. 82)}$$

schließlich analog wie oben:

$$(123) \quad \left(\frac{n-1}{2}\right)! \left(\frac{n+1}{2}\right)! > \left(\frac{n}{2e}\right)^n.$$

Hiernach wird:

$$\gamma_n(p_n)! > \left(\frac{n}{2e q_n}\right)^n$$

und:

$$(124) \quad \gamma_n(p_n)^{-1} < e^{n \cdot \lg \frac{2e q_n}{n}} = e^{q_n \cdot q_n} < e^{2p_n \cdot q_n},$$

wenn gesetzt wird:

$$(125) \quad Q_n = \frac{\lg \frac{2e q_n}{n}}{\frac{q_n}{n}}$$

Andererseits hat man:

$$\begin{aligned} \gamma(p_n)^{-1} &= \prod_{n+1}^{\infty} q_r^2 - p_n^2 = \prod_{n+1}^{\infty} \left(1 + \frac{p_n^2}{q_r^2 - p_n^2}\right) \\ &= \prod_{n+1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{1 - \left(\frac{p_n}{q_r}\right)^2} \cdot \frac{p_n^2}{q_r^2}\right) \end{aligned}$$

und daher, wegen:

$$\left(\frac{p_n}{q_r}\right)^2 < \left(\frac{p_n}{q_{n+1}}\right)^2 \leq \frac{1}{4} \text{ (s. Ungleichung (117)):$$

$$(126) \quad \gamma(p_n)^{-1} < \prod_{n+1}^{\infty} \left(1 + \frac{4}{3} \cdot \frac{p_n^2}{q_r^2}\right).$$

Da $\lim_{r=\infty} \frac{q_r}{r} = \infty$, also $\lim_{r=\infty} \frac{r}{q_r} = 0$, so läßt sich n durch entsprechende Vergrößerung von z so fixieren, daß die beiden Beziehungen bestehen:

$$(122) \quad Q_n \equiv \frac{\lg \frac{2e q_n}{n}}{q_n} < \frac{\varepsilon}{4}, \quad \frac{1}{q_r} < \frac{\sqrt[3]{3} \cdot \varepsilon}{4\pi r} \quad \text{für: } r > n.$$

Alsdann gehen aber die Ungleichungen (124) und (126) in die folgenden über:

$$\begin{aligned} |\gamma_n(p_z)|^{-1} &< e^{\frac{1}{2}\varepsilon p_z} \\ |\gamma(p_z)|^{-1} &< \prod_{n=1}^{\infty} r \left(1 + \frac{(\frac{1}{2}\varepsilon p_z)^2}{\pi^2 r^2} \right) < \frac{2}{\varepsilon p_z} \cdot \left| \sin i \frac{\varepsilon}{2} p_z \right| \\ &< e^{\frac{1}{2}\varepsilon p_z}. \end{aligned}$$

Durch Einführung dieser beiden Ungleichungen in Gleichung (118) ergibt sich somit schließlich, wie behauptet (siehe Ungleichung (113)):

$$|g(p_z)| > e^{-\varepsilon p_z}$$

(für alle hinlänglich großen z), womit der ausgesprochene Satz jetzt vollständig bewiesen ist.

Da das vorstehende Resultat im wesentlichen nur auf einer bestimmten Eigenschaft der Exponenten m_r beruht, während die Koeffizienten a_{m_r} einzig und allein der Bedingung

$$\overline{\lim}_{r=\infty} \sqrt[m_r]{|a_{m_r}|} = 1$$

zu genügen haben¹⁾, so erscheint dasselbe besonders geeignet, um Beispiele solcher Funktionen herzustellen, welche auf dem Einheitskreise noch Derivierte jeder beliebigen Ordnung besitzen und dennoch über denselben hinaus nicht fortsetzbar

¹⁾ Man könnte offenbar diese Bedingung noch dahin verallgemeinern, daß man nur eine Beziehung von der Form

$$\overline{\lim}_{r=\infty} \sqrt[m_r]{|a_{m_r}|} = a > 0$$

verlangt. An die Stelle des Einheitskreises tritt dann der Kreis um den Nullpunkt mit dem Radius $\frac{1}{a}$ als singuläre Linie.

sind. Man hat hierzu die a_{m_v} nur so auszuwählen, daß sie außer der eben genannten Bedingung noch der folgenden:

$$\lim_{v=\infty} m_v^p \cdot a_{m_v} = 0 \quad \text{für jedes endliche } p > 0$$

genügen, was sich auf unendlich viele Arten erzielen läßt¹⁾.

(Beispiele: $m_v = v^m$, $a_{m_v} = a^v$, wo m eine ganze Zahl ≥ 2 , a ein ächter Bruch: $m_v = m^v$, wo wieder m eine ganze Zahl > 2 , $a_{m_v} = \frac{1}{v^v}$ oder $a_{m_v} = \frac{1}{v!}$).

Transformiert man $f(x) \equiv \sum_{v=0}^{\infty} a_{m_v} x^{m_v}$ mit Hilfe der Substitution $x = e^{ti}$ (wo also t reell, wenn $x = 1$) so entspricht jeder auf dem Einheitskreise gelegenen singulären Stelle x' von $f(x)$ eine reelle singuläre Stelle t' (bzw. deren unendlich viele, nach dem Modul 2π kongruente) von $f(e^{ti})$ als Funktion der reellen Veränderlichen t , während zugleich deren unbeschränkte Differenzierbarkeit erhalten bleibt. Da $f(x^{-1})$ bzw. $f(e^{-ti})$ offenbar die analogen Eigenschaften besitzt und, wie leicht zu sehen, die singulären Stellen von $f(x)$ und $f(x^{-1})$ durch Bildung von $f(x) \pm f(x^{-1})$ sich nicht gegenseitig annullieren können, so existieren die Reihensummen

$$\sum_{v=0}^{\infty} a_{m_v} (x^{m_v} \pm x^{-m_v})$$

mit Derivierten jeder Ordnung nur auf dem Einheitskreise und es definieren demnach die Reihen

$$\sum_{v=0}^{\infty} a_{m_v} \cos m_v t, \quad \sum_{v=0}^{\infty} a_{m_v} \sin m_v t$$

Funktionen der reellen Veränderlichen t , welche durchweg unbeschränkt differenzierbar, aber nirgends nach der Taylorsche Reihen entwickelbar sind³⁾.

¹⁾ Vgl. Math. Ann. 44 (1894), p. 43.

²⁾ Vgl. die in der vorigen Fußnote zitierte Arbeit, p. 45.

³⁾ Ein besonders lehrreiches Beispiel dieser Art liefert die Reihe $\sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{v!} \sin 3^v t$, deren Taylorsche Entwicklung für unendlich viele überall dicht liegende Stellen zwar beständig divergente, für andere ebenfalls überall dicht liegende beständig konvergente Reihen liefert. Vgl. Math. Ann. 42 (1893), p. 179.

Zwei experimentelle Methoden zur Bestimmung der Form und Lage der Isothermflächen unterhalb der Erdoberfläche.

Von **Konrad Pressel.**

Vorgelegt von H. Ebert in der Sitzung am 3. Februar 1912.

Das Problem der Vorausbestimmung der Gesteinstemperatur unter der Erdoberfläche spielt bekanntlich besonders bei Tunnelbauten eine wichtige Rolle. Die großen Alpendurchstiche des Mt. Cenis, St. Gotthard und Simplon, bei deren Durchführung reicher Beobachtungsstoff gesammelt worden ist, haben, namentlich im Hinblick auf geplante, noch bedeutendere derartige Bauten (Splügen, Greina, großer Kaukasustunnel u. a.) neue Anregung gegeben, sich mit diesem Problem zu beschäftigen, und es sind in jüngster Zeit theoretische Lösungen desselben gegeben worden, welche gegenüber den unvollkommenen Schätzungen, wie sie noch vor der Erbohrung des Simplontunnels angestellt worden waren, einen großen Fortschritt bedeuten (insbesondere durch E. Thoma und J. Königsberger).

Diese Arbeiten zeigen jedoch, daß der theoretische Weg zu großen Vereinfachungen der Rechnungsgrundlagen zwingt und auch dann noch zu sehr verwickelten Formeln und Rechnungen führt. Der die Wärmeverhältnisse im Erdinnern wohl weitaus am meisten beeinflussende Faktor, die Gestalt der Erdoberfläche in der betrachteten Gegend, kann bei diesen Methoden nur unvollkommen in Rechnung gezogen werden.

Im folgenden werden nun zwei experimentelle Methoden vorgeschlagen, welche gestatten, gerade diesen wichtigsten

Faktor, die Gestaltung der Erdoberfläche, ohne Schwierigkeit mit jedem beliebigen Grad der Genauigkeit zu berücksichtigen. Außerdem kann man bei beiden Methoden der Verschiedenheit der Erdtemperatur in der obersten Schicht an den verschiedenen Stellen des zu untersuchenden Gebietes leicht Rechnung tragen. Endlich gewährt die 1. Methode auch noch die Möglichkeit, die Unterschiede der Leitfähigkeit des Gesteins in den verschiedenen Teilen des zu untersuchenden Gebietes zu berücksichtigen.

1. Elektrische Methode.

Die Methode beruht darauf, daß die Isothermflächen der stationären Wärmeströmung durch dieselbe Differentialgleichung bestimmt sind wie die äquipotentiellen Flächen eines elektrischen Feldes. Man kann also den Temperaturzustand eines der stationären Wärmeströmung unterworfenen Körpers konform abbilden durch den Zustand eines künstlichen elektrischen Feldes und die Bestimmung der Temperatur an irgendeinem Punkt des Körpers zurückführen auf die Ermittlung des elektrischen Potentials in dem entsprechenden Punkt des künstlichen elektrischen Feldes durch Abtasten mittels irgendeines Ausgleichers in der von H. Ebert und C. W. Lutz¹⁾ angegebenen Weise.

Man verfertigt aus elektrisch leitendem Material ein Modell der Gebirgsoberfläche als Hohlform. Dieser Fläche gegenüber stellt man eine ebene Metallfläche in solcher Entfernung, daß sie der Lage der ersten, bereits als eben anzusehenden Isothermfläche unter der Erdoberfläche entspricht. Die eine der beiden Flächen, etwa die ebene, wird auf ein beliebiges elektrisches Potential geladen, die andere wird zur Erde abgeleitet. Zur Bestimmung der Temperatur an beliebiger Stelle zwischen den beiden Grenzflächen ist dann außer der Kenntnis der mittleren Jahrestemperatur der obersten Erdkruste noch die Kenntnis der

¹⁾ Vgl. die Abhandlung „Der Freiballon im elektrischen Felde der Erde“ von H. Ebert und C. W. Lutz in: Beiträge zur Physik der freien Atmosphäre, Bd. II Heft 5.

Temperatur an einem Punkt in größerer Tiefe im Innern des Gebirges erforderlich, zu welchem Zweck ein Bohrloch oder ein Schacht abgeteuft oder ein Stollen vorgetrieben werden muß.

Will man die Unterschiede der Erdtemperatur an der Oberfläche berücksichtigen, so kann man die Modellfläche in verschiedene, gegeneinander elektrisch isolierte Teile trennen und diese Teile auf entsprechende verschiedene Spannungen laden.

Wollte man auch noch die Unterschiede der Wärmeleitfähigkeit in den verschiedenen Teilen des fraglichen Gebirges berücksichtigen, so könnte man offenbar dem dadurch Rechnung tragen, daß man den Raum zwischen Modellfläche und ebener Gegenfläche mit dielektrisch sich entsprechend verhaltenden Stoffen ausfüllt.

2. Kalorische Methode.

Der Boden eines Gefäßes wird aus Blech als Hohlmodell der Oberfläche des zu untersuchenden Gebirges hergestellt. Die Wandungen bestehen aus möglichst schlechten Wärmeleitern. Das Gefäß wird mit irgendeiner bei passender Temperatur gefrierenden Flüssigkeit gefüllt und in ein größeres Gefäß eingehängt, in welchem eine Flüssigkeit zirkuliert, welche auf einer etwas unterhalb des Gefrierpunktes der Füllflüssigkeit liegenden konstanten Temperatur gehalten wird.

Die Flüssigkeit im Modellgefäß erstarrt allmählich von außen nach innen, wobei in jedem Augenblick die Oberfläche des erstarrten Teiles eine Isothermfläche bildet. Von Zeit zu Zeit wird die Oberfläche des erstarrten Teiles mit Hilfe von senkrechten, in einem Rost geführten Sonden abgetastet und festgestellt.

Die Gewichts- also auch Volumenzunahmen des erstarrten Teiles sind den Temperaturunterschieden der Isothermflächen proportional.

Zur Bestimmung des Temperaturwertes der ermittelten Isothermflächen genügt die Kenntnis der mittleren Temperatur der obersten Erdkruste und der Temperatur eines im Gebirg-

innern gelegenen Punktes. Will man genauer verfahren, so kann man die Erdoberfläche in eine Anzahl Zonen teilen, die mittlere Erdtemperatur an der Oberfläche dieser Zonen ermitteln und die entsprechenden Zonen des Modells aus entsprechend dickeren Blech herstellen oder mit passenden Isolierstoffen so belegen, daß die Wärmetransmission in entsprechender Weise geändert wird.

München, den 29. Januar 1912.

Die Untersuchungen von Cauchy und Poisson über Wasserwellen.

Von **H. Burkhardt.**

Vorgetragen in der Sitzung am 3. Februar 1912.

Die Untersuchungen der in der Überschrift genannten Mathematiker über die Wellen, die in einer Flüssigkeit von unbegrenzter Tiefe durch eine lokalisierte (unendlich kleine) Anfangsstörung erzeugt werden, finden sich zwar oft in der Literatur erwähnt, sind aber doch ziemlich wenig bekannt, und es ist kaum auf ihnen weiter gebaut worden. Es liegt das zum Teil an äußeren Ursachen: die beiden Gelehrten sind über einige übrigens nebensächliche Punkte in eine kleine Polemik geraten, in der Partei zu ergreifen der nächsten Generation vielleicht nicht angemessen erscheinen mochte. Später hat dann der Umstand das Studium erschwert, daß die mathematische Ausdrucks- und Bezeichnungsweise, auch wohl die Auffassung von der Zulässigkeit der oder jener Schlußweise sich inzwischen geändert hatte. Es sind aber auch innere, sachliche Schwierigkeiten vorhanden: die beiden Autoren mußten sich ihr mathematisches Rüstzeug erst selbst schaffen; die Folge davon ist, daß der eigentliche Gedankengang häufig durch längere mathematische Entwicklungen unterbrochen ist, die zum Teil jetzt allgemein geläufige Dinge, wie die Darstellung sogenannter willkürlicher Funktionen durch trigonometrische Integrale, behandeln, zum Teil aber auch sehr eigentümliche und uns, die wir mit anderen Hilfsmitteln zu arbeiten gewohnt sind, fremdartig anmutende Entwicklungen darbieten. Auch ist die Darstellung unübersichtlich, namentlich bei Cauchy; aber auch bei Poisson ist nicht immer deutlich zu erkennen,

was durch einzelne im Laufe der Untersuchung eingeführte einschränkende Voraussetzungen bedingt ist und was nicht.

Die Resultate der ursprünglichen Untersuchung von Cauchy, die 1815 der Pariser Akademie zur Preisbewerbung eingereicht, aber infolge äußerer Hindernisse erst zwölf Jahre später¹⁾ veröffentlicht worden ist, sind von H. Lamb in seinem Antrittsvortrag zur Übernahme des Vorsitzes in der Londoner mathematischen Gesellschaft dargestellt worden²⁾, und diese Darstellung hat dann auch in sein Lehrbuch der Hydrodynamik Aufnahme gefunden³⁾. Dagegen verhält sich Lamb gegenüber den gleichzeitigen Untersuchungen von Poisson, soweit sie über die von Cauchy hinausgehen, sowie gegenüber den daran anschließenden späteren Untersuchungen Cauchys (in den der Preisschrift erst bei der Veröffentlichung zugefügten Noten, namentlich XVI und XVIII) ziemlich ablehnend. Es scheint mir aber doch, nicht nur daß die Resultate dieser Untersuchungen, wenn sie auch inzwischen zum Teil auf anderem Wege wiedergefunden sind, an und für sich ein gewisses Interesse darbieten, sondern auch daß die in ihnen benutzte eigentümliche Approximationsmethode sich vielleicht bei anderen Problemen der mathematischen Physik noch nützlich erweisen kann. Vielleicht lohnt es daher der Mühe, wenn ich im folgenden versuche, die entscheidenden Gedankenschritte aus dem Meer von Formeln herauszupräparieren; dabei wird es sich des Zusammenhanges wegen nicht vermeiden lassen, daß ich auch auf die von Lamb bereits besprochenen Teile noch einmal zurückkomme. Es sei dabei zur Vereinfachung der ohnedies umständlichen Formeln gestattet, über die Einheiten der Länge und der Zeit Verfügung zu treffen, und zwar so, daß als Einheit der Länge der (größte) Halbmesser des Bereichs der Anfangsstörung und als Einheit der Beschleunigung die Be-

¹⁾ Paris mém. prés. 1, 1827; jetzt *œuvres* (I) 1.

²⁾ Lond. math. proc. (2) 2, 1904, p. 371; mit Tabellen der numerischen Werte der auftretenden Transzendenten und Figuren, die ihren Verlauf veranschaulichen.

³⁾ Vgl. § 236–238 der deutschen Übersetzung, Leipzig 1907.

schleunigung der Schwere genommen wird. Wenn also im folgenden eine Länge als groß vorausgesetzt wird, so heißt das: sie soll groß sein gegen die Dimensionen des Bereichs der Anfangsstörung; und wenn ein Zeitraum als lang vorausgesetzt wird, so soll das heißen: er soll lang sein gegen diejenige Zeit, die ein fallender Körper brauchen würde, um eine jenem Halbmesser gleiche Strecke zu durchfallen.

Statt der verschiedenen und nicht konsequent beibehaltenen Bezeichnungen der beiden Autoren, durch die eine Vergleichung ihrer Resultate unnötig erschwert wird, benutze ich eine einheitliche, wobei ich mich möglichst dem jetzt herrschenden Gebrauch anschließe.

I. Die mathematischen Hilfsmittel der Untersuchung.

§ 1. Die Art der Behandlung der trigonometrischen Integrale bei den beiden Autoren.

Poisson macht von Beginn seiner Untersuchung an ¹⁾ von der für alle reellen Werte von x geltenden Integralformel

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\xi x - \xi a) f(a) da d\xi \quad (1)$$

Gebrauch, die er aus den beiden von Fourier gegebenen, nur für positive Werte von x geltenden

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \cos \xi x \cos \xi a f(a) da d\xi \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \sin \xi x \sin \xi a f(a) da d\xi \quad (3)$$

abgeleitet hatte²⁾.

¹⁾ Paris mém. 1, 1816 [18], p. 85.

²⁾ So gibt Poisson selbst *théorie de la chaleur*, Paris 1835, p. 205 zu verstehen; vorher hatte er die Formeln immer ohne Angabe eines

Cauchy dagegen scheint zu Beginn seiner Untersuchungen diese allgemeinen Integralsätze nicht gekannt zu haben; er hat vielmehr ursprünglich, wie er später selbst mitteilt¹⁾, ein anderes Verfahren benutzt, das sich ungefähr folgendermaßen darstellen läßt: Einer linearen homogenen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten und den beiden unabhängigen Variablen x, t kann durch eine „Elementarlösung“²⁾ der Form

$$E(\xi, t) \cos \xi x$$

genügt werden; die Funktion E von t bestimmt sich dabei durch eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten, läßt sich also durch eine Summe von Exponentialfunktionen reellen oder komplexen Arguments ausdrücken. Die Summe beliebig vieler, mit beliebigen Konstanten multiplizierter solcher Elementarlösungen ist dann selbst eine Lösung; also auch das nach dem Parameter genommene, über ein beliebiges Intervall erstreckte Integral der mit einer willkürlichen Funktion des Parameters multiplizierten Elementarlösung:

$$u = \int_0^{\infty} q(\xi) E(\xi, t) \cos \xi x \, d\xi. \quad (4)$$

Soll diese Lösung so bestimmt werden, daß sie sich für $t = 0$ — wo $E(\xi, t) = 1$ werden soll — auf eine gegebene Funktion $f(x)$ reduziert, daß also

Autors benutzt. In der Tat steht die Formel (1) noch nicht in Fouriers Preisschrift von 1811 (Paris mém. 4, 1819/20 [24]), sondern erst in der *théorie de la chaleur*. Paris 1822, no. 354 = *œuvres* 1, p. 402.

¹⁾ Paris mém. pres. 1, 1827 = *œuvres* (1) 1. p. 295 (von 1827); vgl. auch p. 152 (von 1815).

²⁾ Ich entnehme diesen Terminus, wie auch weiter unten „Hauptlösung“ den Vorlesungen von F. Klein; vgl. A. Sommerfeld, *Math. Ann.* 45, 1894, p. 263. Eine „Elementarlösung“ ist noch keine „ausgezeichnete Lösung“; dazu wird sie erst durch spezielle, den etwaigen Randbedingungen angepaßte Wahl des Parameters ξ . — Die Terminologie von Boussinesq, der „ausgezeichneten Lösungen“ und „Hauptlösungen“, beide als „solutions simples naturelles“ bezeichnet, scheint mir weniger zweckmäßig.

$$\int_0^x \varphi(\xi) \cos x \xi d\xi = f(x) \quad (x > 0) \quad (5)$$

wird, so verfährt Cauchy folgendermaßen¹⁾: Er drückt zunächst die Funktion $E(\xi, t)$ durch ein bestimmtes Integral aus — in dem hier zu besprechenden Falle der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (6)$$

vermittelst der Relation

$$\cos(tV\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \cos\left(\mu^2 + \frac{t^2\xi}{4\mu^2} - \frac{\pi}{4}\right) d\mu \quad (7)$$

— und nimmt dann folgende Umformungen vor:

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \int_0^\infty \left[\cos\left(\mu^2 + \frac{t^2\xi}{4\mu^2} - \frac{\pi}{4} + x\xi\right) + \cos\left(\mu^2 + \frac{t^2\xi}{4\mu^2} - \frac{\pi}{4} - x\xi\right) \right] \varphi(\xi) d\xi d\mu \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \cos\left(\mu^2 - \frac{\pi}{4}\right) \int_0^\infty \left[\cos\left(x\xi + \frac{t^2\xi}{4\mu^2}\right) + \cos\left(x\xi - \frac{t^2\xi}{4\mu^2}\right) \right] \varphi(\xi) d\xi d\mu \\ &\quad - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \sin\left(\mu^2 - \frac{\pi}{4}\right) \int_0^\infty \cos x\xi \sin \frac{t^2\xi}{4\mu^2} \varphi(\xi) d\xi d\mu. \end{aligned}$$

Die erste Zeile ist wegen der vorausgesetzten Gleichung (5) gleich²⁾

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \cos\left(\mu^2 - \frac{\pi}{4}\right) \left[f\left(x + \frac{t^2}{4\mu^2}\right) + f\left(x - \frac{t^2}{4\mu^2}\right) \right] d\mu;$$

1) Paris mém. prés. 1827 = œuvres (1) 1, p. 295. Er gibt hier und ann. de math. 17, 1827, p. 110 an, daß das der ursprünglich von ihm eingeschlagene Weg gewesen sei; in der Preisschrift selbst bedient er sich der trigonometrischen Integrale.

2) Cauchy übersieht hier, daß in dem zweiten Summanden der absolute Betrag des Arguments zu nehmen ist; das gleicht sich weiter unten (vgl. Note 1, p. 103) durch ein zweites Versehen wieder aus.

um die zweite in entsprechender Weise umformen zu können, zieht Cauchy¹⁾ noch die weitere Relation

$$\sin^{-1} a = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos v a \, dv}{1-v^2} \quad (8)$$

heran, in der das Integral als Hauptwert zu verstehen ist; so erhält er für diesen zweiten Bestandteil:

$$\begin{aligned} & -\frac{4}{\pi} \int_{\pi}^{\infty} \sin\left(\mu^2 - \frac{\pi}{4}\right) \int_0^x \eta(\xi) \cos x \xi \int_0^{\infty} \cos \frac{v \xi t^2}{4 \mu^2} \frac{dv}{1-v^2} d\xi d\mu \\ & = -\frac{2}{\pi} \int_{\pi}^{\infty} \sin\left(\mu^2 - \frac{\pi}{4}\right) \int_0^{\infty} \left[f\left(x + \frac{v t^2}{4 \mu^2}\right) + f\left(x - \frac{v t^2}{4 \mu^2}\right) \right] \frac{dv}{1-v^2} d\mu. \end{aligned}$$

Um diese beiden Bestandteile zusammenziehen zu können, macht er im ersten von der Gleichung

$$\cos\left(\mu^2 - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \sin\left(\mu^2 v^2 - \frac{\pi}{4}\right) \frac{dv}{1-v^4} \quad (9)$$

Gebrauch, die sich durch Integration der Funktion

$$\frac{\exp(\mu^2 z^2 i)}{1-z^2}$$

um den ersten Quadranten der z -Ebene ergibt²⁾; im zweiten ersetzt er μ durch μv und v durch v^2 ; das gibt:

$$u = -\frac{4}{\pi} \int_{\pi}^{\infty} \int_0^{\infty} \sin\left(\mu^2 v^2 - \frac{\pi}{4}\right) \left[f\left(x + \frac{t^2}{4 \mu^2}\right) + f\left(x - \frac{t^2}{4 \mu^2}\right) \right] \frac{dv}{1-v^2} d\mu$$

oder wenn noch von der Umformung

¹⁾ Cauchy nimmt diese Umformung erst nach der Einführung der neuen Variablen a (p. 103) vor; das ist etwas umständlicher.

²⁾ Auch hier ist unter dem Integral der Hauptwert zu verstehen.

$$\int_0^x \sin\left(\mu^2 r^2 - \frac{\pi}{4}\right) \frac{dr}{1-r^2} = \frac{-2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \int_0^\infty \sin \omega^2 \cos 2\mu r \omega d\omega \frac{dr}{1-r^2}$$

$$= -\sqrt{\pi} \int_0^x \sin \omega^2 \sin 2\mu \omega d\omega \quad (10)$$

Gebrauch gemacht wird:

$$u = \frac{4}{\pi} \int_0^x \int_0^\infty \left[f\left(x + \frac{t^2}{4\mu^2}\right) + f\left(x - \frac{t^2}{4\mu^2}\right) \right] \sin \omega^2 \sin 2\mu \omega d\omega d\mu.$$

Werden hier die verschiedenen Bestandteile durch je eine der Substitutionen

$$x + \frac{t^2}{4\mu^2} = a, \quad (\mu=0, \quad a=\infty; \quad \mu=\infty, \quad a=x), \quad d\mu = -\frac{t}{4} \frac{da}{(a-x)^{\frac{3}{2}}}$$

$$-x + \frac{t^2}{4\mu^2} = a, \quad \left(\mu=0, \quad a=\infty; \quad \mu = \frac{t}{2\sqrt{x}}, \quad a=0\right), \quad d\mu = -\frac{t}{4} \frac{da}{(x+a)^{\frac{3}{2}}}$$

$$x - \frac{t^2}{4\mu^2} = a, \quad \left(\mu = \frac{t}{2\sqrt{x}}, \quad a=0; \quad \mu=\infty, \quad a=x\right), \quad d\mu = \frac{t}{4} \frac{da}{(x-a)^{\frac{3}{2}}}$$

umgeformt¹⁾, so wird erhalten:

$$u = \frac{t}{\pi} \int_0^\infty \sin \omega^2 \int_0^\infty f(a) \left[\frac{1}{\sqrt{(x+a)^3}} \sin \frac{t\omega}{\sqrt{x+a}} + \frac{1}{\sqrt{x-a}^3} \sin \frac{t\omega}{\sqrt{x-a}} \right] da d\omega,$$

also:

$$\int u dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sin \omega^2 \int_0^\infty f(a) \left[\cos \frac{t\omega}{\sqrt{x+a}} + \frac{x-a}{|x-a|} \cos \frac{t\omega}{\sqrt{x-a}} \right] da \frac{d\omega}{\omega}$$

und wenn hier endlich noch

$$\omega = \sqrt{x \pm a} \sqrt{\xi}, \quad \frac{d\omega}{\omega} = \frac{1}{2} \frac{d\xi}{\xi}$$

1) Cauchy läßt die Glieder mit $f\left(x + \frac{t^2}{4\mu^2}\right)$, als für seine späteren Zwecke entbehrlich, hier schon weg und bestimmt die auf die neue Integrationsvariable sich beziehenden Grenzen falsch; das gleicht sich dann gerade mit dem in Note 2, p. 101 erwähnten Versehen aus.

substituiert wird

$$\int u dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(a) [\sin \xi(x+a) + \sin \xi(x-a)] \cos(tV\xi) \frac{d\xi}{\xi} da \quad (11)$$

$$u = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(a) [\cos(\xi x + \xi a) + \cos(\xi x - \xi a)] \cos(tV\xi) d\xi da,$$

wie es die Anwendung der Fourierschen Integralsätze direkt geben würde. Von da aus scheint dann Cauchy auch seinerseits zu diesen allgemeinen Sätzen gelangt zu sein¹⁾.

§ 2. Die Verwendung der Integration um die Begrenzung eines sich ins Unendliche erstreckenden Bereiches zur Verwandlung von Integralen über oscillierende in solche über abklingende Funktionen.

Führt man in ein Integral einer oscillierenden Funktion einer reellen Variablen an deren Stelle eine rein imaginäre ein, so erhält man ein Integral einer abklingenden Funktion, das zu Abschätzungen sich besser eignet.²⁾ Die Bedingungen für

¹⁾ Ob Cauchy dabei ganz unabhängig von Fourier war, läßt sich nicht mehr feststellen. Bull. philomat. 1818, p. 179 und Paris mém. prés. 1. 1827 = œuvres (I) 1, p. 300 berichtet er: zur Zeit der Abfassung seines bull. philomat. 1817, p. 121 erschienenen Artikels über reziproke Funktionen habe er keine andere Abhandlung [auch keine mündliche Mitteilung?] gekannt, in der die Formeln vorkämen, als seine eigenen und die Poissons über die Wasserwellen; seitdem habe ihm Fourier von seinen Untersuchungen aus den Jahren 1807 und 1811 Kenntnis gegeben und er habe in diesen dieselben Formeln erkannt. — Später nennt er die Formeln stets nach Fourier.

²⁾ Diese Auffassung solcher Umformungen ist von Cauchy selbst in einer späteren Abhandlung ausgesprochen, mém. sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires, Paris 1825, p. 30. Ob Cauchys Untersuchungen über „les équations qui autorisent le passage du réel à l'imaginaire“ erst durch die Bedürfnisse seiner Wellenuntersuchung veranlaßt sind oder ob sie einen Teil der nach dem Bericht von C. A. Valson, la vie et les travaux du baron Cauchy, 1. Paris 1868, p. 29, um 1810 von ihm unternommenen Durchmusterung der Mathematik bilden, wird sich nicht mehr ausmachen lassen.

die Zulässigkeit einer solchen Umformung sind freilich, sofern es sich um Integrale über ein unendliches Intervall handelt, von Cauchy in seinen früheren Abhandlungen nur ungenügend angegeben worden: und die später von ihm angegebenen sind in seinen Beispielen nicht immer erfüllt. Die für uns in Betracht kommende Relation ist in der Preisarbeit nur verifiziert, nicht abgeleitet; dagegen gibt er in einer späteren Abhandlung¹⁾ eine Ableitung, die jedenfalls als seine ursprüngliche anzusehen ist. Man kann ihren wesentlichen Inhalt folgendermaßen darstellen:

1. Wird der Integralsatz auf die Funktion

$$f(z) = \exp (i x z + t \sqrt{z}),$$

in der x und t positive Parameter bedeuten sollen und der Quadratwurzel ihr Hauptwert beizulegen ist, und die Halbebene der z mit positiv imaginärem Bestandteil angewendet, so wird erhalten:

$$\int_0^{\infty} e^{i(x\xi + t\sqrt{\xi})} d\xi = - \int_0^{\infty} e^{-i x \xi - t \sqrt{\xi}} d\xi$$

oder nach Trennung des reellen und imaginären Bestandteils:

$$\int_0^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} \cos \\ \sin \end{array} \right\} (x \xi + t \sqrt{\xi}) d\xi = \mp \int_0^{\infty} e^{-t \sqrt{\xi}} \left\{ \begin{array}{l} \cos \\ \sin \end{array} \right\} x \xi d\xi. \quad (12)$$

2. Anwendung des Integralsatzes auf den ersten Quadranten gibt, wenn den vorkommenden Quadratwurzeln ihre Hauptwerte beigelegt werden:

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{i x \xi}}{\sqrt{\xi}} d\xi = \sqrt{i} \int_0^{\infty} \frac{e^{-x \eta}}{\sqrt{\eta}} d\eta = \sqrt{i} \sqrt{\frac{\pi}{x}}.$$

¹⁾ Mémoire sur les intégrales définies, prises entre des limites imaginaires, Paris 1825, p. 59. Daß hier in der Tat Cauchys ursprüngliche Ableitung vorliegt, dafür scheint mir auch der Umstand zu sprechen, daß die Rechnung weit hinter den sonst um diese Zeit von Cauchy an sich selbst gestellten Anforderungen an Strenge zurückbleibt.

Statt dessen kann man schreiben¹⁾:

$$\int \frac{e^{ix\xi}}{\sqrt{\xi}} d\xi = 2\sqrt{x} \sqrt{\frac{\pi}{x}},$$

wenn das Integral von $+\infty$ in negativem Sinne um den Nullpunkt herum nach $+\infty$ zurück genommen wird und dabei auf dem ersten Teil des Weges der Quadratwurzel aus ξ der negative, auf dem zweiten der positive Wert beigelegt wird.

Wird hier $\sqrt{\xi}$ durch $\sqrt{\xi} + \frac{t}{2x}$ ersetzt, so wird erhalten:

$$\int \exp i(x\xi + t\sqrt{\xi}) \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}} = 2\sqrt{x} \sqrt{\frac{\pi}{x}} \exp\left(-\frac{it^2}{4x}\right);$$

das Integral ist jetzt von $+\infty$ um $\frac{-t}{2x}$ in negativem Sinne

herum nach $+\infty$ zurück zu nehmen, der Integrationsweg kann aber bis auf den Nullpunkt zusammengezogen werden. Wird er dann wieder in zwei Teile zerlegt und beachtet, daß für den zweiten Teil die Quadratwurzel auch im Exponenten mit dem umgekehrten Zeichen zu nehmen ist, so wird erhalten:

$$\int_0^{\infty} \exp ix\xi \cos(t\sqrt{\xi}) \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}} = -i\sqrt{x} \sqrt{\frac{\pi}{x}} \exp\left(-\frac{it^2}{4x}\right)$$

und durch Differentiation nach t :

$$\int_0^{\infty} \exp ix\xi \sin(t\sqrt{\xi}) d\xi = \frac{1}{2}\sqrt{x} \sqrt{\frac{\pi}{x^3}} \cdot t \cdot \exp\left(-\frac{it^2}{4x}\right)$$

¹⁾ Die von Cauchy benutzte Integrationsvariable ist nicht die hier gewählte, sondern ihre Quadratwurzel; ich sehe nicht, wie man für die so entstehenden Funktionen die Zulässigkeit der Schlüsse beweisen kann, ohne eben die hier gewählte Integrationsvariable einzuführen. Aber auch bei dieser Wahl der Integrationsvariablen sind die von Cauchy selbst angegebenen Bedingungen nicht erfüllt, nicht einmal die weitesten (exerc. de math. 2, 1827 = œuvres (2) 7, p. 302); man muß eine erst von C. Jordan (cours d'analyse 2, Paris 1883, p. 290; vgl. auch W. F. Osgood, Lehrbuch der Funktionentheorie, Leipzig 1907, p. 246) angegebene Schlußweise benutzen.

oder nach Trennung von Reellem und Imaginärem:

$$\int_0^x \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} x \xi \sin(tV\xi) d\xi = \pm \frac{t}{2} \sqrt{\frac{\pi}{x^3}} \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} \left(\frac{t^2}{4x} - \frac{\pi}{4} \right). \quad (13)$$

3. Verbindung von (12) und (13) gibt die gewünschte Relation:

$$\begin{aligned} H(x, t) &= \int_0^{\infty} \cos x \xi \cos(tV\xi) d\xi \\ &= - \int_0^{\infty} e^{-tV\xi} \cos x \xi d\xi - \frac{t}{2} \sqrt{\frac{\pi}{x^3}} \sin \left(\frac{t^2}{4x} - \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Poisson kommt zu entsprechenden Resultaten auf anderem Wege¹⁾. Er leitet zunächst für die Funktion

$$\bar{H} = \int_0^{\infty} e^{ix\xi} \cos(tV\xi) \frac{d\xi}{V\xi} \quad (15)$$

durch partielle Integration die lineare Differentialgleichung mit zweitem Glied ab:

$$\frac{d\bar{H}}{dt} + \frac{t}{2ix} \bar{H} = \frac{1}{2ix}. \quad (16)$$

Unter Berücksichtigung der Nebenbedingung

$$H = 0 \text{ für } t = 0 \text{ (außer wenn zugleich } x = 0)$$

ergibt sich daraus:

$$\bar{H} = \frac{t^2}{2ix} \int_0^1 \exp \frac{it^2(1-v^2)}{4x} dv. \quad (17)$$

¹⁾ Paris mém. 1, p. 94. Poisson hat hier, da er nicht nur die Bewegung an der Oberfläche, sondern auch die in der Tiefe betrachtet, an Stelle der rein imaginären Größe ix eine komplexe mit negativ reellem Bestandteil; infolgedessen unterliegt bei ihm die Differentiation unter dem Zeichen keinem Bedenken. Aber auch für den im Text allein genannten Fall läßt sie sich rechtfertigen. Tritt an Stelle von ix eine reelle Größe (Fortpflanzung der Bewegung in die Tiefe senkrecht unter dem Störungszentrum), so erscheint \bar{H} als eine Krampsche Transzendente (error-function) (Poisson, p. 127).

Wird dieses Integral als Differenz der entsprechenden von 0 bis ∞ und von 1 bis ∞ genommenen Integrale angesehen, so gibt der Minuend die in Cauchys Formel (14) vom Integralzeichen freien Glieder¹⁾; für den Subtrahenden erhält Poisson durch partielle Integrationen (die bei 0 als unterer Grenze nicht möglich sein würden) eine [asymptotische] Entwicklung nach fallenden Potenzen von $\frac{t^2}{x}$.

§ 3. Zurückführung der Hauptlösung des zweidimensionalen Problems auf die des eindimensionalen.

Eine Hauptlösung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (18)$$

erscheint zunächst in der Form

$$H(x, y, t) = \int_0^\infty \int_0^\infty \cos(t\sqrt{\xi^2 + \eta^2}) \cos x\xi \cos y\eta d\xi d\eta, \quad (19)$$

die nicht unmittelbar erkennen läßt, daß sie eine Funktion von t und

$$r_0 = \sqrt{x^2 + y^2}$$

allein ist, wie doch physikalisch evident ist. Cauchy²⁾ ersetzt in ihr den als Funktion von $\xi^2 + \eta^2$ betrachteten Faktor

$$\cos(t\sqrt{\xi^2 + \eta^2})$$

durch seine Fouriersche Integraldarstellung:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \cos m(\xi^2 + \eta^2) \cos mn \cos(t\sqrt{n}) dm dn;$$

¹⁾ Poisson führt statt ∞ einen willkürlichen Hilfspunkt $t = a$ ein; daß man zweckmäßigerweise $a = \infty$ nimmt, bemerkt G. Plana, Torino mem. 25, 1820, p. 128.

²⁾ Paris mém. prés. 1, 1827 = œuvres (1) 1, p. 160 (von 1815).

dann lassen sich die Integrationen nach ξ und η ausführen und es bleibt:

$$\frac{1}{2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \cos mn \cos(t\sqrt{m^2+n^2}) \sin \frac{r_0^2}{4mn} dm dn$$

oder wenn hier

$$\text{einmal } m = \frac{r_0}{2\mu}, \quad n = \mu r, \quad \text{dann } m = \frac{r_0}{2\nu}, \quad n = \mu r$$

gesetzt wird und die beiden so erhaltenen Resultate addirt werden:

$$-\frac{1}{2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \cos(t\sqrt{\mu^2+r^2}) \sin \left(\frac{\mu+r}{2}\right) r_0 d\mu dr. \quad (20)$$

Hier entwickelt Cauchy unter dem Integralzeichen nach Potenzen von t und integriert gliedweise, indem er die Integrale durch Einführung eines Exponentialfaktors konvergent macht; die Vergleichung der so entstehenden Entwicklung mit der entsprechenden Entwicklung von (14) gibt¹⁾:

$$H(x, y, t) = -\frac{1}{4} \frac{d^2}{dt^2} \int_0^{2\pi} H(r_0 \cos \psi, t) d\psi. \quad (21)$$

Poisson gelangt zu diesem Resultat einfacher, indem er Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} \xi &= \rho \cos \psi, & \eta &= \rho \sin \psi \\ x &= r_0 \cos \varphi, & y &= r_0 \sin \varphi \end{aligned} \quad (22)$$

einführt²⁾.

Um von dieser Form aus zu einem brauchbaren asymptotischen Ausdruck vorzudringen, benutzt Poisson³⁾ den asym-

¹⁾ Bei Cauchy (œuvres (1) 1, p. 126), bei dem sie übrigens etwas anders formuliert ist, erscheint diese Gleichung als Spezialfall eines allgemeineren Satzes, der bei Anwendung derselben Rechnung auf irgend eine Funktion $f(t \sqrt{\xi})$ statt auf die Funktion $\cos(t \sqrt{\xi})$ sich ergibt.

²⁾ Paris mém. 1, p. 139, 148. ³⁾ p. 157.

ptotischen Ausdruck (14) der Funktion H und führt durch die Gleichung

$$\cos \varphi' = \frac{1}{1 + w^2}$$

eine neue Integrationsvariable ein; dabei wird

$$\frac{d\varphi'}{(\cos \varphi')^{\frac{3}{2}}} = (1 \sqrt{2} + w W) dw,$$

wo W die an beiden Integrationsgrenzen $w = 0$ und $w = \infty$ verschwindende Funktion

$$W = \frac{2w}{(2\sqrt{1+w^2} + \sqrt{2}\sqrt{2+w^2})\sqrt{2+w^2}}$$

bedeutet. Infolgedessen wird durch partielle Integration erhalten:

$$-\frac{d^2}{dt^2} \frac{\pi \sqrt{2}}{2r_0} \cos \frac{t^2}{4r_0} \oslash \frac{\pi t^2 \sqrt{2}}{8r_0^3} \cos \frac{t^2}{4r_0} \quad (23)$$

+ Glieder höherer Ordnung¹⁾. Cauchy dagegen führt²⁾

$$\mu = \frac{1}{4} \frac{t^2}{r_0} (1 - \cos \theta)$$

als neue Integrationsvariable ein und setzt zur Abkürzung

$$\frac{t^2}{4r_0} = s, \quad [\sin(s - \mu) + \cos(s - \mu)] \frac{\left(1 - \frac{\mu}{s}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(1 - \frac{1}{2} \frac{\mu}{s}\right)^{\frac{1}{2}}} = f(\mu);$$

damit erhält er zunächst:

$$\frac{1}{\sqrt{2} s} \int_0^s \mu^{-\frac{1}{2}} f(\mu) d\mu.$$

¹⁾ Poisson entwickelt dieses Glied durch weitere partielle Integrationen, unter jedesmaliger Einführung einer neuen Integrationsvariablen, noch in eine asymptotische Reihe nach fallenden Potenzen von $\frac{t^2}{r_0}$; doch macht er von dieser Entwicklung keinen weiteren Gebrauch.

²⁾ Oeuvres (I), 1, p. 213 (von 1827).

Hier schaltet er \sqrt{s} als Zwischengrenze ein: zwischen 0 und \sqrt{s} ist der zweite Faktor von $f(\mu)$ nahezu gleich 1, also das Integral nahezu:

$$\int_0^s \mu^{-\frac{1}{2}} [\sin(s - \mu) + \cos(s - \mu)] d\mu = \sqrt{2} \pi \sin s;$$

das Integral von $\sqrt{s} + \pi$ bis s ist nahezu entgegengesetzt gleich dem von \sqrt{s} bis $s - \pi$, das von $s - \pi$ bis s nahezu gleich Null, das von \sqrt{s} bis $\sqrt{s} + \pi$ ist von der Ordnung s^{-1} , also kann das Integral von \sqrt{s} bis s vernachlässigt werden, und es bleibt

$$\frac{2\sqrt{2}\pi r^{\frac{3}{2}}}{\pi t^3} \int H(t) dt = \sqrt{\frac{\pi}{s}} \sin s$$

und mit demselben Grad der Annäherung

$$H \propto \frac{\pi t^2 \sqrt{2}}{8 r_0^3} \cos \frac{t^2}{4 r_0}$$

übereinstimmend mit dem Resultat von Poisson.

II. Die Approximation der allgemeinen Lösung durch die Hauptlösung.

§ 4. Erste Annäherung.

Die den Anfangsbedingungen

$$u = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad \text{für } x = 0 \quad (24)$$

genügende Lösung des eindimensionalen Problems läßt sich vermittelst der zugehörigen Hauptlösung durch ein einfaches bestimmtes Integral darstellen:

$$u = \int_{-\infty}^{+\infty} f(a) H(x - a, t) da. \quad (25)$$

Ist die Funktion $f(x)$ nur im Intervall von -1 bis $+1$ von Null verschieden, so braucht die Integration auch nur

über dieses Intervall erstreckt zu werden; für große Werte von x kann dann in H das a neben dem x vernachlässigt werden, so daß man einfach erhält:

$$u = H(x, t) \int_{-1}^{+1} f(a) da, \quad (26)$$

d. h. die diesen Bedingungen genügende Lösung unterscheidet sich von der Hauptlösung nur durch einen von Ort und Zeit unabhängigen Faktor, der auch nur von dem Gesamtbetrag der Anfangsstörung (dem Volumen der zu Anfang verdrängten Flüssigkeit), nicht von ihrer Verteilung abhängt. Ersetzt man noch die Hauptlösung durch ihren asymptotischen Ausdruck (14), so erkennt man, daß unter den genannten Bedingungen Wellen auftreten, die mit konstanter Beschleunigung $1/2$ fortschreiten und deren Amplitude in aus der Formel ersichtlicher Weise von Ort und Zeit abhängt.

Für das zweidimensionale Problem gilt entsprechendes.

Diese Resultate haben Cauchy¹⁾ und Poisson²⁾ übereinstimmend erhalten.

§ 5. Zweite Annäherung für das eindimensionale Problem.

Darüber hinaus hat Poisson noch Fälle untersucht, in welchen diese erste Annäherung nicht mehr ausreicht. Wenn nämlich $\frac{t^2}{x}$ groß ist³⁾, kann man zwar noch außerhalb der Zeichen der trigonometrischen Funktionen für große x

1) Œuvres (I) 1, p. 61.

2) Paris mém. 1, p. 97.

3) Hier liegt noch eine weder von Cauchy noch von Poisson besprochene Schwierigkeit vor. Wie aus den im Text wiedergegebenen Überlegungen hervorgeht, kann die allgemeine Lösung für lokalisierte Anfangsstörung nur dann in hinlänglicher Entfernung von der Störungsstelle durch die noch mit einer Konstanten multiplizierte Hauptlösung ersetzt werden, wenn t nicht zu groß ist; andererseits kann die Hauptlösung nur dann durch ihren asymptotischen Wert ersetzt werden, wenn t nicht zu klein ist. Es fehlt der Beweis, daß es überhaupt Werte von t gibt, die beiden Bedingungen zugleich genügen. Man kann sich die

$$\frac{t^2}{4(x-a)} \quad \text{durch} \quad \frac{t^2}{4x} \quad (27)$$

ersetzen, da der Quotient dieser beiden Größen wenig von 1 verschieden ist; aber unter den Zeichen der trigonometrischen Funktionen ist das nur so lange erlaubt, als die Differenz dieser beiden Größen, also

$$\frac{t^2}{4(x-a)} - \frac{t^2}{4x} = \frac{t^2}{4x} \cdot \frac{a}{x-a} \quad (28)$$

klein gegen π ist. Das ist aber nicht mehr der Fall, wenn $\frac{t^2}{x}$ von derselben Größenordnung ist, wie x selbst. Poisson¹⁾ ersetzt in diesem Falle die Größe (27) unter den Zeichen der trigonometrischen Funktionen in zweiter Annäherung durch

$$\frac{t^2}{4x} + \frac{t^2}{4x} \cdot \frac{a}{x} = \frac{t^2}{4x} + va, \quad v = \frac{t^2}{4x^2}, \quad (29)$$

während er außerhalb dieser Zeichen nach wie vor a gegenüber x vernachlässigt. Indem er dann die Hauptlösung durch ihren aus (14) sich ergebenden asymptotischen Wert ersetzt, erhält er zunächst:

$$u \propto \frac{t}{4} \sqrt{\frac{\pi}{x^3}} \left[\cos \left(\frac{t^2}{4x} - \frac{\pi}{4} \right) \int_{-1}^{+1} f(a) \cos va \, da \right. \\ \left. - \sin \left(\frac{t^2}{4x} - \frac{\pi}{4} \right) \int_{-1}^{+1} f(a) \sin va \, da \right]. \quad (30)$$

Er meint²⁾, da es sich doch nur um kleine Schwingungen

Sache wohl so plausibel machen: eine Exponentialfunktion von t kann man schon vernachlässigen, wenn man das Produkt einer Potenz von t mit einer kleinen Größe noch vernachlässigen kann; indessen wäre doch eine genauere Untersuchung erwünscht.

¹⁾ Paris mém. 1, p. 117.

²⁾ Paris mém. 1, p. 103. Poisson führt diese Annahme gleich zu Beginn seiner Untersuchungen ein, so daß man bei ihm den Eindruck erhalten kann, als ob schon die hier in § 2–4 besprochenen Resultate von ihr abhängig seien, was nicht der Fall ist.

handeln könne, genüge es die Kurve der Anfangsstörung, die er als symmetrisch gegen ihre Mittellinie voraussetzt, durch ihre oskulierende Parabel zu ersetzen, also

$$f(a) = 1 - a^2 \quad (31)$$

zu nehmen: dann lassen sich die Integrationen ausführen und man erhält:

$$u \propto \frac{2^6}{t^5} \int_0^x \frac{x^3 \pi}{t^2} (\sin v - v \cos v) \cos \left(\frac{t^2}{4x} - \frac{\pi}{4} \right). \quad (32)$$

Der erste Faktor allein würde Wellen geben, die mit der gleichförmigen Geschwindigkeit $1/2$ fortschreiten und deren Wellenlänge durch die Gleichung

$$\frac{t^2}{4x^2} - \frac{t^2}{4(x+\lambda)^2} \propto 2\pi,$$

also

$$\lambda \propto \frac{4x^3 \pi}{t^2} \quad (33)$$

bestimmt ist; sie werden von beiden Autoren als „ondes“ bezeichnet. Der zweite Faktor allein würde Wellen von der Art geben, wie sie bei der Hauptlösung allein auftreten; die also mit der Beschleunigung $1/2$ über die ersteren weggehen und deren Wellenlänge durch

$$\frac{t^2}{4x} - \frac{t^2}{4(x+\lambda)} = 2\pi,$$

also

$$\lambda \propto \frac{4x^2 \pi^2}{t^2} \quad (34)$$

bestimmt ist. Diese Wellen werden von Poisson als „dents“, von Cauchy als „sillons“ bezeichnet. Die beiden Wellensysteme sind nun multiplikativ, nicht etwa additiv superponiert; man darf sich also, worauf Lamb¹⁾ mit Recht hinweist, nicht etwa durch die erwähnte Ausdrucksweise zu der Vorstellung

¹⁾ Lond. math. proc. (2) 2, p. 382.

verleiten lassen, als handle es sich um gezähnelte Wellen der Art, wie sie auftreten, wenn Kapillarwellen über Gravitationswellen gelagert sind. Vielmehr ähnelt die Erscheinung in jedem Augenblick der graphischen Darstellung einer Schwebung.

Cauchy hat dann in den Nachträgen zu seiner Abhandlung die Untersuchung von Poisson noch in der Richtung ergänzt, daß er auch andere Annahmen über die Gestalt der Anfangsstörung in Betracht gezogen hat¹⁾. Man erhält auch dann, wenn man den asymptotischen Ausdruck der Hauptlösung benutzt, eine Gleichung der Form

$$u \propto \frac{t}{4} \sqrt{\frac{\pi}{x^3}} \left[\varphi(v) \cos\left(\frac{t^2}{4x} - \frac{\pi}{4}\right) + \psi(v) \sin\left(\frac{t^2}{4x} - \frac{\pi}{4}\right) \right];$$

aber die Funktionen φ und ψ hängen wesentlich von der Natur der Funktion f ab, und zwar erhält man ganz andere Näherungswerte für die Wellenlängen, wenn man von der Parabel merklich abweichende Gestalten der Anfangsstörung einführt²⁾. Poisson hat dem zwar entgegengehalten³⁾, daß für derartige Annahmen die ganzen physikalischen Voraussetzungen der Untersuchung nicht mehr erfüllt seien, und wird damit für das Wellenproblem wohl physikalisch recht haben; immerhin wird Cauchys Bemerkung für etwaige Verwendung der Resultate bei Untersuchungen anderer Art im Auge zu behalten sein.

Was die von Cauchy bei dieser Untersuchung angewendeten Hilfsmittel betrifft, so gibt Entwicklung der Funktion f nach Potenzen von a bzw. von $|a|$ [asymptotische] Entwicklungen von φ und ψ nach fallenden Potenzen von v^4); solche Entwick-

1) Œuvres (1) 1, p. 191 (erst beim Druck 1827 hinzugefügt). Cauchy bemerkt, er habe derartige Formeln schon während der Ausarbeitung der Preisschrift erhalten, sie aber aus Zeitmangel und in der Annahme, die durch sie dargestellten Bewegungen seien unmerklich, nicht weiter verfolgt.

2) Wie bereits Fourier bemerkt hatte, bull. philomat. 1818, p. 133 = Œuvres 2, p. 262. Auch Paris mém. 8, 1829, p. 620 = Œuvres 2, p. 179 hält Fourier diese Auffassung gegen Poisson aufrecht.

3) Paris mém. 8, 1829, p. 573.

4) Œuvres (1) 1, p. 200, 203.

lungen werden auch erhalten, wenn man wiederholt partiell integriert und dabei vor jeder partiellen Integration den wenig von 1 verschiedenen Faktor

$$\frac{x^2}{(x-a)^2}$$

unter dem Integralzeichen hinzufügt¹⁾; am bequemsten, wenn man dabei

$$x - a - \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{x-1} + \frac{x^2}{x+1} \right)$$

als neue Integrationsvariable einführt²⁾. Im Falle

$$f(a) = e^{v(1-a)} - 1$$

ergibt sich eine konvergente Reihe, die sich elementar summieren läßt³⁾. Für den Fall, daß die Funktion f oder ihre Ableitungen an der Grenze des Intervalls nicht mehr endlich bleiben, ersetzt Cauchy die Integration von -1 nach $+1$ durch eine solche von -1 nach $-1 + i\infty$ und von $+1$ nach $+i\infty$ ⁴⁾; d. h. er gewinnt die asymptotischen Entwicklungen mit Hilfe der Umformung:

$$\int_{-1}^{+1} f(a) e^{ra} da = \frac{1}{vi} \int_0^\infty \left[e^{vi} f\left(1 + \frac{\mu i}{v}\right) - e^{-vi} f\left(-1 + \frac{\mu i}{v}\right) \right] e^{-\mu} d\mu. \quad (3)$$

§ 6. Zweite Annäherung für das zweidimensionale Problem.

Analog kann man nun auch im Falle des zweidimensionalen Problems verfahren. Wird auch hier die Hauptlösung durch ihren asymptotischen Wert (23) ersetzt und werden durch die Gleichungen (22) Polarkoordinaten eingeführt, so wird erhalten⁵⁾:

$$\frac{\pi t^2}{8 r_0^3} \iint \cos \frac{t^2}{4r} f(\varrho \cos \psi, \varrho \sin \psi) \varrho d\varrho d\psi, \quad (36)$$

wo

$$r^2 = (x-a)^2 + (y-\beta)^2$$

und

1) p. 231.

2) p. 232.

3) p. 218.

4) p. 236.

5) p. 251.

$$r \approx \frac{1}{r_0} + \frac{\varrho \cos(\psi - \theta)}{r_0^2}. \quad (37)$$

Sind die Funktion f und die Grenzen für ϱ von ψ unabhängig, so wird der Wert des Integrals von φ unabhängig; und wenn f sich nach Potenzen von ϱ entwickeln läßt, lassen sich die Integrationen an den einzelnen Gliedern dieser Entwicklung ausführen und man erhält eine [asymptotische] Entwicklung nach fallenden Potenzen von v . Unter Umständen läßt sich diese Entwicklung bequemer erhalten, wenn man die folgende Darstellung benutzt¹⁾:

$$\int_0^1 \cos v \beta \int_0^{\sqrt{1-\beta^2}} f(\sqrt{a^2 + \beta^2}) da d\beta, \quad v = \frac{t^2}{4r_0^2} \quad (38)$$

oder wenn man analog wie durch die Gleichung (35) den Integrationsweg ins Komplexe verlegt²⁾.

Analoge Resultate hatte vorher³⁾ Poisson für den von ihm allein behandelten Fall

$$f(a, \beta) = 1 - \frac{a^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2} \quad (39)$$

erhalten, indem er an Stelle der Gleichungen (22) die folgenden benutzte:

$$a = a_0 \cos \psi, \quad \beta = b_0 \sin \psi. \quad (40)$$

Werden dann die auftretenden Integrale in der Form geschrieben:

$$\iint \left\{ \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \right\} \left(v_0 \left\{ \begin{matrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{matrix} \right\} \right) (1 - \varrho^2) \varrho d\varrho d\psi, \quad (41)$$

so läßt sich die eine Intergration ausführen; für das dann noch übrig bleibende Integral begnügt sich Poisson damit, zu zeigen, daß es mit wachsendem t nicht über alle Grenzen wächst.

Cauchy behandelt von Fällen ohne Rotationssymmetrie nur den der Scheibe mit rechteckiger Basis:

¹⁾ p. 256, 266.

²⁾ p. 269.

³⁾ Paris mém. 1, p. 161.

$$f(a, \beta) = \begin{cases} 1 & \text{für } a < a \text{ und } \beta < b, \\ 0 & \text{für } a > a \text{ oder } \beta > b; \end{cases} \quad (42)$$

die Integrationen lassen sich dann ausführen und es kommt¹⁾:

$$\frac{1}{v^2} \frac{\sin(av \cos \varphi)}{\cos \varphi} \frac{\sin(bv \sin \varphi)}{\sin \varphi}. \quad (43)$$

§ 7. Ansatz zu einer dritten Annäherung.

In den beiden letzten Paragraphen war vorausgesetzt, daß die mit v bezeichnete, durch die Gleichungen (29) bzw. (38) definierte Größe endlich sei. Ist sie auch groß, so reicht, wie Cauchy²⁾ bemerkt, die bisher benutzte Annäherung nicht mehr aus: man muß dann noch ein weiteres Glied in der Entwicklung von (27) nach Potenzen von $\frac{a}{x}$ mitnehmen. Dann geben zu den Integralen (30) nur die Umgebungen der Endpunkte -1 und $+1$ merkliche Beiträge, für die dazwischenliegende Strecke ist die zu integrierende Funktion abwechselnd positiv und negativ, und zwar so, daß die entsprechenden Teile des Integrals sich größtenteils gegeneinander wegheben. Damit ist eine Abschätzung ermöglicht, auf Grund deren Cauchy zu dem Schluß kommt, die hierher gehörenden Wellen seien sehr schwach, im Falle $f(-1) = f(1) = 0$ sogar „tout-à-fait insensibles“.

§ 8. Anhang: Über einen Abschnitt von Fouriers Théorie de la Chaleur.

Wird für die Integration der Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

die Hauptlösung

$$H(x, t) = \int_0^{\infty} e^{-\xi^2 t} \cos \xi x d\xi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)$$

¹⁾ Oeuvres (1) I, p. 284.

²⁾ p. 231.

benutzt, so erscheint das allgemeine Integral in der von Laplace auf anderem Wege abgeleiteten Form

$$u = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{4t}\right) f(a) da.$$

Poisson¹⁾ hat bemerkt, daß man, wenn $f(a)$ nur im Intervall $(-1 \dots +1)$ von Null verschieden ist, für große x im Exponenten a gegen x vernachlässigen und schreiben könne:

$$u = H(x, t) \int_{-1}^{+1} f(a) da.$$

Später²⁾ fügt er ergänzend bei, daß dieser Schluß nur für große Werte von t zulässig ist, indem es im Exponenten von e nicht darauf ankommt, ob ein Bestandteil gegen den anderen klein ist, sondern nur darauf, ob er an und für sich klein ist. Das ist dann von Fourier in einem derjenigen Abschnitte seiner *Théorie de la chaleur*³⁾ des breiteren ausgeführt worden, die erst in dieser gegenüber der Preisschrift von 1811 neu hinzugekommen sind. Fourier hat aber zu Anfang übersehen, ausdrücklich zu sagen, daß die ganze Überlegung nur für große Werte von x gelten soll; und das allein ist die Ursache dafür, daß der Herausgeber der *œuvres*, G. Darboux, die betreffende Stelle⁴⁾ für unverständlich erklären konnte. Es ist aber, wenn man nur diese Bedingung — die übrigens im weiteren Verlauf der Untersuchung von Fourier festgehalten wird — nicht wegläßt, alles in Ordnung; und man könnte auch auf

1) Bull. philomat. 1815, p. 87.

2) Ib. 1816, p. 12.

3) Chap. IX, sect. 2 = *œuvres* 1, p. 427—448.

4) p. 437. Auch in der Übersetzung von Weinstein, Berlin 1884, p. 358 (die übrigens gerade in diesem Abschnitt mit Fouriers Text ziemlich frei umgeht, auch ihn durch numerische Beispiele ergänzt) ist die Darstellung unzureichend: wenn $\frac{x^2}{4t}$ endlich und $\frac{ax}{2t}$ klein sein soll, muß $\frac{2a}{x}$ klein sein.

demselben Weg wie bei den Untersuchungen über die Differentialgleichung der Wasserwellen zu einer zweiten Annäherung gelangen, da sich die Integrale

$$\int \exp\left(-\frac{\alpha x}{2t}\right) a^n d\alpha$$

ja elementar auswerten lassen¹⁾.

¹⁾ Das von Darboux vorgeschlagene Näherungsverfahren gilt nur für kleine Werte von $\frac{x^2}{t}$.

Ein merkwürdiger Fall von Lokalmagnetismus an der bayerisch-sächsischen Grenze.

Von **Siegmond Günther** und **Franz Adami**.

Vorgetragen in der Sitzung vom 13. Januar 1912.

Der sogenannte Gesteinsmagnetismus, dessen Auftreten als erster nach Hellmann¹⁾ der Portugiese De Castro an der vorderindischen Küste feststellte, ist seitdem an recht vielen Orten nachgewiesen worden und zog vor etwa einem Jahrhundert die Aufmerksamkeit einer großen Anzahl von Gelehrten mächtig auf sich, wogegen späterhin dieses Interesse bedeutend nachließ. Und doch bergen diese Erscheinungen noch jetzt gar manches Rätsel in sich; man ist von einer klaren Erkenntnis der Kräfte, auf die es im Einzelfalle ankommt, noch ziemlich weit entfernt. Deswegen möge es gestattet sein, im unmittelbaren Anschlusse an die Schilderung eines Phänomens von ganz besonders entschiedenem Charakter eine Darstellung des Problemes selbst und der für dasselbe in Betracht kommenden Lösungsversuche zu geben.

Etwa 5 km nordöstlich von Hof, an der Staatsstraße nach Plauen²⁾, stößt man auf eine niedrige Erhebung, die von der Landbevölkerung „Schafhübel“ benannt wird, auf W. v. Gümbels geologischer Karte aber und ebenso auf

1) G. Hellmann, Die Anfänge der magnetischen Beobachtungen, Berlin 1897, S. 26.

2) Am leichtesten findet man auf einer Spezialkarte die kritische Stelle, wenn man den Schnittpunkt der Straße Hof-Plauen mit dem Ortsverbindungswege Gumpertsreuth-Trogen aufsucht.

der Generalstabskarte die Bezeichnung „Landsknecht“ führt. Das Gestein, aus welchem der Hügel sich wesentlich zusammensetzt, ist Paläopikrit, dessen Bestandteile beträchtlichen Metamorphosen unterlagen. Der Pikrit an sich, dem die sein Alter kennzeichnende Charakteristik beigelegt wird, um anzuzeigen, daß diese Eruptivmasse im Paläozoikum, also in geologisch sehr alten Zeiten, an die Oberfläche hervorgezogen ist, gehört zu den sogenannten Olivingesteinen¹⁾; Olivin und Augit wiegen der Menge nach vor, während in kleineren Quantitäten auch Magnetit und Titaneisen, in sehr geringen noch Biotit (brauner Glimmer), Hornblende und Apatit vorkommen. Olivin und Augit haben sich aber nach und nach größtenteils in serpentin- und chloritartige Substanzen verwandelt. An vielen Stellen ist die alte Lava durch Kulturen und Pflanzenwuchs verdeckt, so daß nur im Bereiche einer Fläche von etwa $\frac{2}{3}$ ha mächtige Felsen anstehen. Diese Örtlichkeit, etwa eine kleine Stunde von dem bayerischen Grenzort Trogen entfernt, ist als „Schwarzenstein“ bekannt²⁾, und sie ist es, welche sich durch lokalmagnetische Eigenschaften der denkbar schärfsten Ausprägung bemerklich macht. Während die frei hervortretenden Felsbildungen des Schafhübels im allgemeinen zwar auch auf die Magnetnadel ablenkend einwirken, so daß auch etwa an zwanzig Punkten dort abgeschlagene Handstücke als polarmagnetisch mit nachweisbarem Nord- und Südpole zu betrachten sind, ist der Schwarzenstein allenthalben magnetisch, und zwar macht sich die magnetische Richtkraft auch da geltend, wo Humus das Gestein bedeckt. Man muß demzufolge schließen, daß der

1) Vgl. H. v. Credner, Elemente der Geologie (7. Auflage), Leipzig 1891, S. 88 ff. Olivin oder Peridot ist ein Mineral, welches in magmatischen Erstarrungsprodukten sehr häufig auftritt und namentlich im Gabbro, Diabas, Melaphyr und Basalt, also in den vulkanischen Gesteinen aller Zeitalter, ja sogar nicht selten in Meteoriten zu finden ist.

2) Eine kurze Beschreibung des Schwarzensteins und seiner petrographischen Beschaffenheit ist unlängst schon von Adami gegeben worden (Die Elektrizität, I, Bücher der Naturwissenschaft, 9. Band, Leipzig s. a., S. 103).

ganze Felshügel als ein großes Kraftmagazin zu gelten hat, und dieser Umstand unterscheidet ihn nicht unwesentlich von anderen Orten, auf welche wir im Verlaufe dieser unserer Darlegungen noch zu sprechen kommen werden. Sehr charakteristisch ist auch der Umstand, daß Deklination und Inklination gleichmäßig betroffen werden. Bei einer Begehung des ganzen Gebietes¹⁾ wurden Mißweisungen in allen Beträgen $< 180^\circ$ angetroffen, und die Neigungsnadel stellte sich mehrfach senkrecht, ohne daß beide Male in der Verteilung der Unregelmäßigkeiten irgend eine Gesetzmäßigkeit hätte bemerkt werden können. Würde eine Karte der Gegend mit Eintragung der geomagnetischen Linien in sehr großem Maßstabe angefertigt werden, so müßten sich für Isogonen sowohl wie für Isoklinen die sonderbarsten gestaltlichen Verhältnisse ergeben.

Ehe der Frage, wie diese Störungen zu erklären sind, näher getreten werden kann, wird es sich empfehlen, das Verhalten des Schwarzensteins mit demjenigen anderer Orte von verwandtem Typus zu vergleichen. An anderen Stellen²⁾ ist eine Übersicht über die einschlägige Literatur zu geben versucht worden; außerdem hat auch Reich sich die Mühe gegeben³⁾, viele schwer zugängliche Nachrichten aufzusuchen

¹⁾ Der Schwarzenstein befindet sich auf dem Gebiete des Herrn Kammerherrn A. v. Feilitzsch, der in Gemeinschaft mit seinem auf Besuch anwesenden Bruder, dem Herrn General F. v. Feilitzsch (verstorben im Oktober 1911), die beiden Verfasser auf ihrer Wanderung begleitete und sie auf manch bemerkenswerten Punkt hinwies. General v. Feilitzsch hob hervor, daß solches Terrain einem kroquierenden, lediglich auf seinen Kompaß angewiesenen Offizier die allergrößten Schwierigkeiten bereiten und zur Entstehung ganz fehlerhafter Karten führen müsse.

²⁾ Zirkel, Lehrbuch der Petrographie, 1. Band, Bonn 1866, S. 428 ff.; S. Günther, Handbuch der Geophysik, 1. Band, Stuttgart 1897, S. 571 ff.; Fournet, Aperçu sur le magnétisme des minerais et des roches, Annales de la société d'agriculture, histoire naturelle et arts utiles de Lyon, 1848.

³⁾ F. Reich, Beobachtungen über die magnetische Polarität des Pöhlberges bei Annaberg, Annalen der Physik und Chemie (3), 17. Band, S. 32 ff.

und zusammenzustellen. Als der erste neuere Forscher, der einer Beeinflussung der Magnetnadel durch umhergestreute Lava-
blöcke inne ward, scheint Bouguer¹⁾ anzusprechen zu sein; bald nachher folgt ihm Gmelin²⁾ mit Beobachtungen an sibi-
rischen Basalten. Nächst dem zogen einige Felsgruppen im
Harz, die Hohneklippen und Schnarcher, die Aufmerk-
samkeit mehrerer Fachmänner aus verschiedenen Lagern auf
sich, indem v. Trebra, Wächter, Hausmann, Jordan,
v. Zach, Freiesleben und Lasius ihre Ansichten darüber
austauschten³⁾. Und gleichzeitig machten Humboldts Mit-
teilungen⁴⁾ über den „Haideberg bei Zelle“ — Haidberg
beim Marktflecken Zell im nördlichen Fichtelgebirge — sehr
viel von sich reden. Dort zeigte sich auch polarer Magnetismus,
so daß auch geschlagene Handstücke einen ausgesprochenen
Nord- und Südpol erkennen ließen. Vom Serpentin des Haid-
berges sprechend, warf Humboldt die Frage auf: „Ist Magnet-
stein eingesprengt, oder welchem seiner Bestandteile adhärirt
die magnetische Kraft?“ Gewiß war ersteres der Fall; Hardt
hatte da, wo der Serpentin in Chloritschiefer überging, okta-

1) La figure de la Terre, déterminée par les observations de MM. De la Condamine et Bouguer, Paris 1749, S. LXXXIII.

2) J. G. Gmelin, Reisen durch Sibirien von 1733 bis 1743, 4. Band, Göttingen 1752, S. 344 ff.

3) Eine kurze Darstellung des Inhaltes dieser Arbeiten, welche sich in 5., 16., 26., 28. und 44. Bande von Gilberts „Annalen der Physik“ abgedruckt finden und wesentlich eingesprengten Magneteisenstein als Ursache der Ablenkungen ansprechen, gab Muncke (Gehlers Pysikalisches Wörterbuch, Neue Auflage, 6. Band, 2. Abteilung, Leipzig 1836, S. 644 ff.).

4) A. F. v. Humboldt, Anzeige für Physiker und Geognosten, Intelligenzblatt zur Jenaer Literaturzeitung, 1796, Nr. 169; Erklärung, ebenda, 1797, Nr. 38; Neue Entdeckungen, ebenda, 1797, Nr. 68 und 87. Seinen Zweck, „eine Bombe unter die Menschen zu werfen“, um sie zur Arbeit anzutreiben, hat der große, damals noch sehr jugendliche Naturforscher jedenfalls erreicht, denn die Angelegenheit gab den Anlaß zu zahlreichen Erörterungen. Der Jahrgang 1797 der genannten Literaturzeitung enthält gleich einen darauf bezüglichen Beitrag von Beyer, der auch anderweitige Wahrnehmungen dieser Art gemacht hatte.

edrisch kristallisierten Magnet Eisenstein erkannt. Daß in diesen minimalen Kriställchen jedoch nicht der wahre Grund erblickt werden könne, schien Humboldt außer Zweifel zu stehen, denn beim Vergleichen von zwei Stücken Serpentin, von denen jedes derartige Einschlüsse barg, stellte sich heraus, daß das eine polare Eigenschaften betätigte, das andere dagegen nicht. Er bezog sich auf die zu einem gleichen Resultate führenden Versuche von Lichtenberg und Voigt und erklärte es für wahrscheinlicher, daß eine andere Deutung des Sachverhaltes gesucht werden müsse. „Wie wenn der große Magnetberg“, meint er, „seine polarisierende Eigenschaft einer Erderschütterung verdankte?“ Zumal das Vorhandensein einer ganzen Anzahl paralleler Achsen schien ihm gegen die zuerst erwähnte Annahme zu sprechen ¹⁾).

Auch das Serpentinvorkommen bei dem oberpfälzischen Orte Erbdorf, der zur weiteren Umgebung des Fichtelgebirges

¹⁾ Neuerdings hat Albert Schmidt, einer der besten Kenner des Fichtelgebirges, die geschichtlichen Hergänge, deren hier gedacht ward, zum Gegenstande einer besonderen Studie gemacht (Humboldt und die magnetischen Eigenschaften au Haidberg im Fichtelgebirge, (Haacks) Geographischer Anzeiger, September und Oktober 1909). Auch in seiner vortrefflichen Beschreibung des Berglandes hat er die Besprechung des alten Problemes nicht vergessen (Führer durch das Fichtelgebirge, fünfte Auflage, Wunsiedel 1910, S. 167). Er ist indessen, im Gegensatz zu Humboldt und Reiner, doch geneigt, in dem starken Eisengehalte des den Haidberg zusammensetzenden Massengesteines den eigentlich maßgebenden Faktor zu erkennen. Seit drei Jahren ist man mit einem ähnlichen Vorkommnis auf der nicht weit abliegenden Förbauer Heide (nächst Schwarzenbach a. S.) vertraut geworden; der dortige Hügel „Burgstall“ weist an fünf Stellen Serpentin auf, der ablenkend wirkt, während sein Massiv sonst ganz neutral sich verhält. Nach Schmidt wurden gleichfalls Horizontaldeviationen bis zu 180° konstatiert, während die normal 65° betragende Inklination auf 80° bis 90° anstieg. Allein seinem ganzen Wesen zufolge wird man den Burgstall weit eher mit dem Schwarzenstein als mit dem Haidberg zusammenhalten können, weil beiden Kuppen jene regelmäßige Orientierung der magnetischen Achsen fehlt, die Humboldt als ein so bezeichnendes Moment gedeutet hatte. In beiden Fällen scheint die Regellosigkeit der polaren Wirkungen tonangebend zu sein.

gerechnet werden darf¹⁾, wurde anlässlich der Humboldtschen Entdeckung in den Kreis der Untersuchung einbezogen. Der bekannte bayerische Montanist Flurl ließ durch den ihm untergebenen Bergbeamten Reiner in jenem Gebiete nach Analogien spüren, und dieser kam auch der ihm gestellten Aufgabe nach²⁾, zog aber aus dem, was er gesehen, die ganz zu den von seinem Bayreuther Kollegen erhaltenen Tatsachen stimmende Folgerung: „Magneteisenstein ist auf dem ganzen Zuge keine Seltenheit, aber so häufig, daß man ihn als die einzige und wahre Ursache dieser Erscheinung ansehen könnte, ist er nicht anzutreffen.“ Etwas später nahm sich der bekannte Geophysiker Bischof der Frage sehr lebhaft an³⁾ und suchte ihr einige allgemeiner interessierende Seiten abzugewinnen. Er unterschied bei den anstehenden und geschlagenen Serpentinblöcken vier Möglichkeiten; sie können „polarisch“, „retraktorisch“, „polarisch-retraktorisch“ und „unmagnetisch“ sein. Die zweite Gattung wäre somit dadurch gekennzeichnet, daß sich durch einen ihr vorgehaltenen Magnetstab jederzeit Eisensplitter entziehen lassen⁴⁾, und in der dritten Gruppe sind polare Richtwirkungen mit attraktiven vereinigt. Aus zahlreichen Messungen abstrahierte Bischof „ein trigonometrisches Gesetz“ des folgenden Inhaltes: Die Entfernungen der Magnetnadel vom Gesteine verhalten sich wie die Quadratwurzeln aus den Kotangenten der Ablenkungswinkel⁵⁾. Eine Bestätigung dieses vermeintlichen Erfahrungssatzes scheint von keiner Seite erbracht worden zu sein.

¹⁾ A. Schmidt, Führer usw., S. 208.

²⁾ Das „Münchener Taschenbuch“ für 1798 enthält den bezüglichen Briefwechsel von Flurl und Reiner.

³⁾ C. G. C. Bischof, Beobachtungen über die magnetischen Eigenschaften einiger Gebirgsarten des Fichtelgebirges, (Schweiggers) Journ. d. Chem. u. Phys., 18. Band, S. 297 ff.

⁴⁾ Vgl. J. A. Streng, Beitrag zur Kenntnis des Magnetkieses, 21. Bericht der oberhessischen Gesellschaft für Natur- und Heilkunde, Gießen 1882, S. 15 ff.

⁵⁾ Bischof, a. a. O., S. 310. Vgl. auch des Herausgebers J. Schweigger Nachschrift (a. a. O., S. 318 ff.).

Auf einige andere Fälle soll nur kurz eingegangen werden. Die genaueste Prüfung der obengenannten „Schnarcher“ lieferte Vieth¹⁾, durch den ermittelt ward, daß dortselbst die magnetischen Phänomene wieder in etwas anderer Art hervortreten, als wir es bei den bisher geschiedenen zwei Klassen gefunden haben. Es zeigte sich nämlich ein ganzer Längsstreifen des Granitblockes mit magnetischer Direktionskraft begabt, so daß die zuerst von Freiesleben²⁾ angedeutete Vermutung, man möge es mit einer Beeinflussung des Felsens durch Blitzschlag zu tun haben, eine gewisse Stütze erhielt. Humboldt ließ bei seiner amerikanischen Reise die Störung seiner Horizontalnadel durch lokalmagnetisches Gestein niemals aus den Augen und schilderte³⁾ solche Geschehnisse vom Pik von Tenerife, vom Antisana und vom (venezolanischen) Impossible. Ob das ausgesprochen polarmagnetische Verhalten des Schloßberges von Frankenstein (in Hessen) mehr auf Serpentin oder Diorit zurückzuführen sei, bildete das Objekt einer Polemik zwischen Zimmermann⁴⁾ und Foerstemann⁵⁾. Der Schotte Galbraith⁶⁾ wußte aus den Hochlanden eine hierher gehörige Erscheinung nachzuweisen, nicht minder sein Landsmann

1) G. U. A. Vieth, Über die Schnarcher am Harz, (v. Zachs) Monatliche Korrespondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde, 18. Band, S. 305 ff.

2) J. K. Freiesleben, Bergmännisch-mineralogische Beschreibung des größten Teiles des Harzes, 2. Band, Leipzig 1795, S. 46. Blitze übten stets eine „polarisierende“ Wirkung aus.

3) Näheres hierüber gibt bekannt H. W. Dove in seinem Beitrage zu: K. Bruhns, Alexander v. Humboldt, eine wissenschaftliche Biographie, 3. Band, Leipzig 1872, S. 68 ff.

4) J. Zimmermann, Über eine neue magnetische Gebirgsart, Ann. d. Phys. u. Chem. (3), 28. Band, S. 483 ff.

5) W. A. Foerstemann, Über das magnetische Verhalten der Basalte und Laven der Eifel, Verhandl. d. Naturwissensch. Vereins d. preuß. Rheinlande, 1. Band, S. 4 ff.

6) W. Galbraith, On the Magnetic Properties of the Rock on the Summit of Arthurs Seat, (Jamesons) New Edinburgh Philosophical Journal, 11. Band, S. 287 ff.

Anderson¹⁾. Auf magnetischen Basalt machten in größerem Umfange Foerstemann (s. o.), Zeune²⁾ und in späterer Zeit, mit spezieller Hervorhebung der Eifel-Laven, Zaddach³⁾ aufmerksam. Die Basaltsäulen von Nyrburg stehen insofern ganz isoliert da, als jedes beliebige Handstück mit einer ausgesprochenen Achse ausgestattet ist. Sabine⁴⁾ zeigte, daß Trappgänge eine Veränderung des Inklinationswinkels bis zu 5° bewirken können. Ob hingegen die von Cook, La Peyrouse, Borda, Löwenörn und Parry notierten Ablenkungen der Kompaßnadel in der Nähe von Meeresküsten ebenfalls hier mit einzubegreifen sind, wird nicht so ohne weiteres für selbstverständlich zu erachten sein, wie dies von Reich⁵⁾ angenommen wird. Desgleichen darf ein solches Bedenken gegenüber gewissen Äußerungen über die magnetische Deviation im Hochgebirge ausgesprochen werden, weil hier, wie im ersterwähnten Falle, möglicherweise auch noch ganz andere Momente zur Geltung kommen können. Hierher gehört z. B. eine Beobachtung, welche Saussure bei Courmayeur, am Südfuße des Montblanc, gemacht hat⁶⁾.

Gerade Reich, dessen umfassende Literaturkenntnis für alle mit lokalmagnetischen Vorkommnissen Beschäftigten wegweisend sein muß, hat auch als der erste auf eine gewisse grundsätzliche Verschiedenheit aufmerksam gemacht, welche bei diesen Unregelmäßigkeiten hervortreten kann. Er wirft nämlich die Frage auf⁷⁾, ob nicht außer dem bekannten und leicht festzustellenden Gesteinsmagnetismus vielleicht auch noch ein besonderer Gebirgsmagnetismus zu unterscheiden

1) Hierüber berichtet Muncke (a. a. O., S. 646).

2) A. Zeune, Über Basaltpolarität, Berlin 1809.

3) E. G. Zaddach, Beobachtungen über die magnetische Polarität des Basaltes und der trachytischen Gesteine, Bonn 1851.

4) Report on the sixth Meeting of the British Association for the Advancement of Science, 5. Band, S. 97.

5) Reich, a. a. O., S. 36 ff.

6) H. Th. de Saussure, Voyage dans les Alpes, 4. Band, Genf 1786, S. 107 ff.

7) Reich, a. a. O., S. 35.

wäre, den er allerdings selbst als „problematisch“ bezeichnet. Immerhin denkt er bei diesem Worte einstweilen nur an isolierte, durch und durch magnetische Gebirgstteile und läßt es unentschieden, ob es solche auch wirklich gäbe. Der Pöhlberg im Erzgebirge zum Beispiel, den man als ein ausgezeichnetes Beispiel dieser Art stark im Verdachte gehabt habe, könne auf Grund einer genauen Messungsreihe kaum noch als Träger eines selbständigen, in seinen Basaltmassen aufgespeicherten Magnetismus betrachtet werden. Reich ist demzufolge geneigt, die von ihm selbst hypothetisch zugelassene Existenz gebirgsmagnetischer Kräfte wieder als zweifelhaft hinzustellen.

Andere aber haben auf dem von ihm gelegten Grunde fortgearbeitet¹⁾. Der bekannte österreichische Geophysiker Kreil sprach in dem nämlichen Jahre, in dem Reich sein „non liquet“ formuliert hatte, den viel zu wenig beachteten Satz aus²⁾, die Abhängigkeit der geomagnetischen Kraftäußerungen von der Örtlichkeit sei im Gebirge eine andere als in der Ebene. Unabhängig von ihm gelangten die Gebrüder Schlagintweit³⁾ zu einer analogen Auffassung des von der Himalayakette geübten Einflusses. Hier setzte später E. Naumann ein, der bei Gelegenheit der magnetischen Landesaufnahme in Japan eine ganze Anzahl von Irregularitäten auffand, die nur mit dem tektonischen Gefüge der Landschaft in ursächliche

¹⁾ Von nun an schließen wir uns vielfach E. Naumanns Monographie an (Die Erscheinungen des Erdmagnetismus in ihrer Abhängigkeit vom Bau der Erdrinde, Stuttgart 1887).

²⁾ K. Kreil, Magnetische und geographische Ortsbestimmungen in südöstlichen Europa und einigen Küstenpunkten Asiens, Wien 1862. Es ist bezeichnend, daß der erste damals lebende Geomagnetiker, J. v. Lamont, den Kreilschen Erfahrungssatz als mit seinen eigenen Wahrnehmungen völlig übereinstimmend erklärt hat (Astronomie und Erdmagnetismus, Stuttgart 1851, S. 258).

³⁾ A., H., R. Schlagintweit, Astronomical Determinations of Latitudes and Longitudes, and Magnetical Observations, Leipzig-London 1861 (S. 5 der Magnetic Results). Auffallen muß, daß die Autoren der Ansicht sind, den Alpen fehle eine solche Beeinflussung der magnetischen Kraftverteilung, während Kreil doch eben diese ermittelt hatte.

Verbindung gebracht werden zu können schienen. Je nach Umständen erleiden die drei Gattungen magnetischer Ortskurven eigenartige gestaltliche Veränderungen, die nur ausnahmsweise, und auch dann vielleicht nicht ohne Schwierigkeit, auf den natürlichen Magneteisengehalt vulkanischer Bildungen zurückgeführt werden können¹⁾. Jedenfalls gibt es auch Erdgegenden, denen gegenüber diese Deutung des Sachverhaltes vollkommen versagt. Dahin gehört beispielsweise ein sehr charakteristisches Störungsgebiet, welches Schaper²⁾ in Holstein aufgedeckt hat. Innerhalb desselben hört die sonst in der ganzen Provinz bemerkbare Zunahme des Deklinationswinkels in der Richtung gegen West plötzlich auf, und während andererseits die Inklination sich normal verhält, erreicht die horizontale Komponente der Intensität einen viel höheren Wert, als sie ihn ringsum besitzt. Hier also, wo weit und breit Effusiv- oder Intrusivmassen fehlen, wird notwendig an eine tektonische Ursache zu denken sein.

Minder klar ausgesprochen, aber doch auch nicht völlig von der Hand zu weisen ist eine solche in anderen Fällen. Zumal dann, wenn sich Schwereanomalien mit den magnetischen Unregelmäßigkeiten örtlich vereinigen. Daß dergleichen vorkommt, ist durch Lamont³⁾ und Messer-

¹⁾ Gemeint sind hier insbesondere die umfänglichen Untersuchungen von Thorpe und Rücker (Note on the Irregularities in Magnetic Inclination on the West Coast of Scotland, Proceedings of the Royal Society, 1883, S. 5 ff.). Sie beziehen sich auf das Küstengebiet Westschottlands und insbesondere auf die Insel Mull (Innere Hebriden), wo sich in der Tat gewaltige Lavaströme aus Basalt, Dolerit, Gabbro und ähnlichen Gesteinen vorfinden.

²⁾ W. Schaper, Das magnetische Störungsgebiet in Holstein, Sitzungsber. d. Naturwissensch. Ver. f. Schleswig-Holstein, 15. Band, S. 307; ders., Untersuchungen über das Verhalten der magnetischen Deklination im niederrheinisch-westfälischen Bergbaudistrikte, Meteorolog. Zeitschr., 9. Band, S. 358 ff.

³⁾ J. v. Lamont, Astronomische Bestimmung der Lage des bayerischen Dreiecksnetzes auf dem Erdsphäroide, Sitzungsber. d. Bayer. Akad. d. Wissensch., Math.-phys. Kl., 1865, S. 31 ff.

schmitt¹⁾ unzweideutig erwiesen worden; auch der schon von Schweizer²⁾ als Sitz eines gewaltigen Massendefektes in der Erdkrinde erkannte Störungsbezirk von Moskau muß nach Fritsche³⁾ in diese Kategorie eingerechnet werden. Wahrscheinlich hängt damit auch die Angabe Creaks⁴⁾ zusammen, daß Hochseeinseln häufig in magnetischer Beziehung sich eigentümlich verhalten. Vielleicht dürfen auch die von Hammer⁵⁾ festgestellten Ausbuchtungen der Isogonen im Schwäbischen Jura nicht bloß mit den vorkommenden Quellsuppen selber, sondern auch mit den für die dortigen Vulkanausbrüche maßgebend gewesenen Strukturstörungen in ursächliche Beziehung gebracht werden. Das Auftreten mächtiger magnetischer Zentren, wie es Paulsen⁶⁾ auf Bornholm, Arvidsson und v. Carlsheim-Gyllenskiöld⁷⁾ im mittleren Schweden, R. Lenz⁸⁾ auf einer kleinen baltischen Insel, Tigerstedt⁹⁾ in einem unvulkanischen Distrikte Finnlands, Moureaux¹⁰⁾ im Pariser

1) J. B. Messerschmitt, Die wichtigsten Beziehungen zwischen der Geodäsie und der Geologie, Jahrb. d. preuß. Geolog. Landesanstalt, 6. Band, S. 15 ff.

2) G. Schweizer, Untersuchungen über eine in der Nähe Moskaus stattfindende Lokalattraktion, Moskau 1864.

3) H. Fritsche, Die magnetischen Lokalabweichungen bei Moskau und ihre Beziehungen zur dortigen Lokalattraktion, Moskau 1893.

4) E. W. Creak, On Local Magnetic Disturbance in Islands far from a Continent, Proceed. of the Royal Society, 12. Band, S. 83 ff.

5) E. Hammer, Über den Verlauf der Isogonen im mittleren Württemberg, Stuttgart 1886.

6) A. Paulsen, Régime magnétique de l'île de Bornholm, Kopenhagen 1896.

7) v. Carlsheim-Gyllenskiöld, Observations faites par Th. Arvidsson sur les côtes de la Suède, 1860—1861, Stockholm 1895.

8) R. Lenz, Untersuchung einer unregelmäßigen Verteilung des Erdmagnetismus im nördlichen Teile des Finnischen Meerbusens, Mém. de l'Acad. de St. Pétersbourg (7), 5. Band, Nr. 3.

9) Tigerstedt, Eine eigentümliche Abweichung der Magnetnadel, beobachtet im Rapakivgebiete bei Wiborg, Fennia, 5. Band, Nr. 5.

10) C. Th. Moureaux, Sur l'anomalie magnétique du bassin de Paris, Annales du Bureau Central Météorologique de France, 1890, S. 95 ff.

Eozänbecken, Chistoni und Palazzo¹⁾ auf Sardinien ermittelt haben, dürfte auch auf intrakrustale Faktoren hinweisen. Die mannigfaltigen hinterindischen Abweichungen vom Normalverlaufe der Kurven legt van Rijckevorsel²⁾ allerdings den dort so zahlreichen Vulkanen zur Last, allein immer wieder muß darauf aufmerksam gemacht werden, daß Eruptionen und alte Narben der Erdkruste kausal zusammengehören.

Wenn wir uns die bisher gewonnenen Ergebnisse gegenwärtig halten, so können wir offenbar das Motiv der magnetischen Störungen entweder in der von Hause aus polaren Eigenschaft der vulkanischen Gesteine oder auch in den für deren Auftreten indirekt verantwortlichen Brüchen der äußeren Erdschichten suchen. Erlaubt wäre es natürlich auch, an das Vorhandensein unterirdischer Lagerstätten von Eisenerz zu denken, so daß alsdann die Eruptivfelsen selbst nicht den wahren Grund der Abweichungen darstellen würden. In dem konkreten Falle, der dieser Abhandlung zu Grunde liegt, dünkt uns diese Aushilfshypothese nicht sehr plausibel, weil Eisenerzgänge zwar dem zentralen Fichtelgebirge keineswegs fehlen³⁾, in der Nähe jener entlegenen Ausläufer, mit denen

1) P. Tacchini, *Sulle carte magnetiche d'Italia eseguite da Ciro Chistoni e Luigi Palazzo*, Genua 1892 (Estratto dagli Atti del primo Congresso Italiano Geografico). Schon M. Melloni (*Sulla polarità delle lave e roccie affini*, Neapel 1856) hatte mit diesen Studien den Anfang gemacht. Ihm folgten F. Keller (*Sulle roccie magnetiche di Rocca di Papa*, Atti etc., 1885, S. 428 ff.; *Sull' intensità orizzontale del magnetismo terrestre nei pressi di Roma*, Rom 1896), sodann A. Cancani (*Intorno ad alcune pietre memorabili delle vicinanze di Rocca di Papa*, Atti etc., 1892, S. 390 ff.) und Folgheraiter (*Intensità orizzontale del magnetismo terrestre lungo il parallelo di Roma*, *Revue Scientifique*, 31. Band, II, S. 294). Am eingehendsten suchten den Gebirgsmagnetismus E. Oddone und S. Franchi zu erforschen (*Sul magnetismo dei monti*, Rom 1893); der Erstgenannte hat darüber auch in Gemeinschaft mit V. Sella zusammenhängende Studien angestellt (*Contribuzione allo studio delle roccie magnetiche nelle Alpi Centrali*, *Rendiconti etc.* (7), I, S. 188 ff.).

2) E. van Rijckevorsel, *Report on the Magnetic Survey of the Indian Archipelago, made in the years 1874—1877*, Amsterdam 1889.

3) A. Schmidt, a. a. O., S. 21.

wir es hier zu tun haben, jedoch keine größere Rolle spielen. Daß es gleichwohl wünschenswert sein würde, auf die möglicherweise doch denkbare Auffindung solcher Erzlager in größerer Tiefe einige Mühe zu verwenden, soll nicht bestritten werden. Es sind schon wiederholt Ideen in diesem Sinne ausgesprochen worden¹⁾; der Amerikaner Smock²⁾ und die beiden schwedischen Mathematiker Thalén³⁾ und Daug⁴⁾ haben dieses Problem unter sehr abweichenden Gesichtspunkten behandelt. Später hat dann Naumann⁵⁾ in einem vor der Münchener Geologenversammlung (1899) gehaltenen Vortrage sich eingehend mit dem ganzen Zyklus von Fragen beschäftigt. Allein was man bisher von den Beziehungen zwischen diesen subterranen Eisenerzmassen und den an der Erdoberfläche verlaufenden Linien eruiert hat, spricht gerade nicht zu Gunsten einer sehr augenfälligen Beeinflussung der letzteren durch erstere. Schon bei den berühmten, enorm reichhaltigen Bergwerken von Eisenerz (in Steiermark) mit ihrem gewaltigen Tagbau war

1) Auf die phantastischen, leider in unseren Tagen wieder zu neuem Leben erwachten Spekulationen einer längst vergangenen Zeit, die durch Wünschelrute, Schwefelkiesependel u. dgl. verborgenen Erzgängen auf die Spur zu kommen gedachte, kann nicht eingegangen werden (vgl. L. W. Gilberts polemische Schrift vom Jahre 1808, die zu Halle a. S. erschien). Minder haltlos, aber praktisch wohl auch undurchführbar ist ein Vorschlag von Maggi (Sopra un' uso geognostico del filo Voltaico, Verona 1850).

2) Smock, The Use of the Magnetic Needle in Searching for Magnetic Iron Ore, Transact. of the Amer. Institute of Mining Engineers, 4. Band.

3) Thalén, Om de isodynamiska ytorna kring en vertical magnetstang, Stockholm 1874 (Berg- und Hüttenmännische Zeitung, 1875, S. 160 ff.).

4) Daug, Redogörelse för formen hos de isodynamiska ytorna kring en vertical magnetstang, Öfversigt of K. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, 1874, Nr. 5.

5) E. Naumann, Anwendung erdmagnetischer Beobachtungen zur Beurteilung von Eisenerzlagerstätten, Verhandl. d. D. Geol. Gesellsch., Zeitschr. d. Gesellsch., 51. Band, S. 114.

Kreil¹⁾ keine erhebliche Veränderung in den magnetischen Elementen zu erkennen in stande, und ganz besonders augenfällig tritt das bei dem Erzreichen Ural zutage, der seinen Namen wahrlich nicht mit Unrecht führt. Von ihm sagt Naumann²⁾: „Mit Sicherheit darf jede irgend nennenswerte Beeinflussung der magnetischen Kurvensysteme durch die Kette Katschanar-Blagodat-Wissokaja Gora in Abrede gestellt werden.“ Und so gelangte auch Lamont³⁾ zu dem Schlusse, „daß die Erdkruste keine magnetischen Stoffe von ausgedehntem Wirkungskreise enthält“.

Zu den drei Möglichkeiten, die den Gegenstand der bisherigen Besprechung bildeten, tritt nun aber noch eine vierte hinzu, die eine besonders nachdrückliche Berücksichtigung erheischt, und es ist seltsam, daß gerade sie bei uns noch so wenig in Betracht gezogen wird. Denn die Anregung stammt aus Deutschland, während allerdings die Fortführung der damit erschlossenen Arbeit hauptsächlich auf italienischem Boden gediehen ist. Es war der deutsche Physiker Pöckels, der sich⁴⁾ davon überzeugte, daß eine direkt-magnetische Induktion Gesteine im Felde der erdmagnetischen Kraft selbst magnetisch machen kann. Damals, als die Laven sich noch in feurig-flüssigem Zustande befanden, konnte diese Einwirkung natürlich am kräftigsten sich offenbaren, und so blieb den erkalteten Massen auch ein gewisser permanenter Magnetismus erhalten. Folgheraiter in Rom suchte den Beweis, daß es sich so verhalten haben könne, durch das Experiment unmittel-

¹⁾ Kreil, Über den Einfluß der Alpen auf die Äußerungen der magnetischen Erdkraft, Sitzungsber. d. Akad. d. Wissensch. zu Wien, Math.-naturw. Kl., II, 1849, S. 278.

²⁾ E. Naumann, Die Erscheinungen des Erdmagnetismus, S. 68. Und gerade der Blagodat ist durch seinen mächtigen Erzgehalt ausgezeichnet.

³⁾ J. v. Lamont, Magnetische Ortsbestimmungen, ausgeführt an verschiedenen Punkten des Königreiches Bayern, 2. Teil, München 1856, S. 3.

⁴⁾ F. Pöckels, Über den Gesteinsmagnetismus und dessen wahrscheinliche Ursache, Neues Journ. f. Mineral., Geol. u. Paläontol. (5), 1894, S. 171 ff.

bar zu führen¹⁾. Er erhitzte vulkanische Felsstücke bis zu einer Temperatur, welche derjenigen frisch ausgeworfener Lava — beim Ätna ungefähr 1000° — nahe kam und konstatierte, daß durch diesen Prozeß alle Spuren von Eigenmagnetismus, welche sich vorher gezeigt hatten, zum Verschwinden gebracht worden waren. Nunmehr ließ er seine Gesteinsproben — Basaltbrocken und verfestigte Tuffe verschiedener Herkunft — sich wieder abkühlen und bemerkte, daß nun, einerlei ob der Vorgang rasch oder langsam sich vollzog, unter dem Einflusse der Erdinduktion sich von neuem polar-magnetische Kräfte wiederum einstellten. Eine Abweichung zwischen den einzelnen untersuchten Objekten ergab sich nur insofern, als die Basalte und manche Tuffe stark und dauernd, Peperine dagegen nur schwächer und vorübergehend magnetisch geworden waren; letztere erinnerten mehr an das Verhalten weichen Eisens. Es verdient vermerkt zu werden, daß Folgheraiter²⁾ den Versuch gemacht hat, aus Töpferwaren vergangener Perioden einen Schluß auf die Größe der magnetischen Neigung zu der Zeit der Bereitung jener Gefäße zu ziehen. Dieselben besitzen teilweise noch einen ganz stattlichen Rest magnetischer Kraft, so daß man mit einiger Annäherung eine Achse von ihnen feststellen kann. Etruskische Vasen z. B. gewähren einen gewissen Grad der Wahrscheinlichkeit dafür, daß damals, als sie gebrannt wurden, die magnetische Inklination im mittleren Italien nur einen sehr kleinen Wert hatte.

Wenn wir unsere bisherigen Resultate zusammenfassen, so erübrigt uns nur, vier Möglichkeiten für die Erklärung solch hervorragend lokalmagnetischer Erscheinungen, wie sie der Schwarzenstein darbietet, nebeneinander zu stellen:

I. Maßgebend kann der Umstand sein, daß die vulkanischen Gebilde eine ungezählte Menge winziger Magnetstäbe in sich schließen, deren jeder seine typischen Pole aufweist.

1) G. Folgheraiter, L'induzione terrestre ed il magnetismo delle rocce volcaniche, Atti della R. Accademia dei Lincei (5), 4. Band, S. 203 ff.

2) Ders., Ricerche sull' inclinazione magnetica all' epoca Etrusca, Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 18. Oktober 1896.

II. Es können Lager von Magneteisenerz in geringer Tiefe unter der Erde vorhanden sein, so daß mithin die Störungen des normalen Erdmagnetismus nicht sowohl auf jene Paläopikritfelsen selbst, sondern auf eine unseren Augen einstweilen noch verschlossene Ursache zurückzuführen wären.

III. Tektonische Umgestaltungen, welche das Empordringen der Laven begünstigten oder auch erst ermöglichten, haben — im Sinne Naumanns (s. S. 129) — eine Umlagerung der Isogonen und Isoklinen bewirkt

IV. Die geomagnetische Induktion hat die an der Oberfläche erkaltenden Effusivmassen selbst magnetisch gemacht.

Die Auswahl zwischen diesen vier Erklärungen kann mit Sicherheit noch nicht getroffen werden. Manche Erwägungen scheinen dafür zu sprechen, daß eine Kombination von III und IV der Wahrheit am nächsten käme.

In der tektonische Störungen vielfach bekundenden Gegend genaue Schweremessungen anzustellen und das Gebiet ebenfalls exakt gegen die Nachbarbezirke von normalem magnetischen Verhalten abzugrenzen, wird als ein dringendes Bedürfnis zu bezeichnen sein.

Über den Taylorschen Lehrsatz für Funktionen einer reellen Veränderlichen.

Von **Alfred Pringsheim**.

Vorgetragen in der Sitzung am 2. März 1912.

In mehreren vor nahezu zwanzig Jahren von mir publizierten Arbeiten¹⁾ habe ich versucht, die Theorie der Taylorschen Reihe für Funktionen einer reellen Veränderlichen zu einem gewissen Abschlusse zu bringen, einmal durch Aufstellung einwandfreier und möglichst durchsichtig gearteter Beispiele von unbeschränkt differenzierbaren Funktionen, deren Taylorsche Entwicklung an vereinzelt oder auch an überall dicht liegenden Stellen entweder beständig divergent ausfällt oder aber konvergiert, ohne die erzeugende Funktion darzustellen; sodann, indem ich die bis dahin ausschließlich als hinreichend bekannten Gültigkeitsbedingungen des Taylorschen Satzes zu notwendigen und hinreichenden ergänzte.

¹⁾ 1. Zur Theorie der Taylorschen Reihe und der analytischen Funktionen mit beschränktem Existenzbereich. Math. Ann. 42 (1893), p. 153. — 2. Über Funktionen, welche in gewissen Punkten endliche Differentialquotienten jeder endlichen Ordnung, aber keine Taylorsche Reihenentwicklung besitzen. Math. Ann. 44 (1894), p. 41. — 3. Über die notwendigen und hinreichenden Bedingungen des Taylorschen Lehrsatzes für Funktionen einer reellen Variablen. Ebendas., p. 57. — 4. Über die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Entwickelbarkeit von Funktionen einer reellen Variablen nach der Taylorschen Reihe und über nichtentwickelbare Funktionen mit durchweg endlichen Differentialquotienten. Chicago Congress (1893), Math. Papers, p. 288.

Obschon ich das letztere, bei dem damaligen Stande der Frage immerhin einigermaßen überraschende Resultat¹⁾ mit verhältnismäßig einfachen (damals glaubte ich sogar mit den „denkbar einfachsten“) Hilfsmitteln gewonnen hatte, so ist es mir neuerdings gelungen, den wesentlichsten Teil der betreffenden Deduktion, nämlich den Beweis für die Notwendigkeit einer gewissen Bedingung so erheblich zu vereinfachen²⁾, daß er in seiner jetzigen Gestalt in jeder Elementar-Vorlesung über Differentialrechnung Platz finden könnte. Dieser vereinfachte Beweis bildet den Inhalt des ersten Paragraphen der folgenden Mitteilung. In § 2 gebe ich dann auch für den hinreichenden Charakter der fraglichen Bedingung einen nach meinem Dafürhalten durchaus neuen und zugleich äußerst einfachen Beweis, welcher, im Gegensatz zu dem hisherigen, nicht auf der Taylorschen Formel mit einem Restgliede, also schließlich auf dem Mittelwertsatze der Differentialrechnung, vielmehr auf dem Satze beruht, daß eine Funktion mit verschwindendem vollständigen Differentialquotienten eine Konstante sein muß. Nun pflegt man zwar gewöhnlich diesen letzteren Satz als Folgerung aus dem erwähnten Mittelwertsatze herzuleiten. Indessen läßt er sich, wie hier ausdrücklich hervorgehoben werden möge, auch unabhängig davon und zwar merklich einfacher, als der Mittelwertsatz begründen, zu dessen strenger Herleitung ja der Weierstraßsche Satz über die Existenz eines größten bzw. kleinsten Wertes jeder in einem Intervalle stetigen Funktion oder ein diesen Satz umgekehrtes, immerhin einigermaßen künstliches Verfahren³⁾ erforderlich ist.

¹⁾ Vgl. die in der vorigen Fußnote unter Nr. 3 angeführte Abhandlung p. 61. (NB. Auf die ebengenannte Abhandlung beziehen sich auch die folgenden Zitate.)

²⁾ Bei dem früheren Beweise benützte ich insbesondere einen für Anfänger wohl ziemlich schwierigen Satz über gleichmäßige Konvergenz von Reihen, die nach Funktionen zweier Variablen fortschreiten. Vgl. a. a. O., p. 65, 80.

³⁾ Vgl. G. Kowalewski, Grundzüge der Differential- und Integralrechnung (Leipzig 1909), p. 69 ff.

Besitzt nämlich $f(x)$ für $x_0 < x < X$ einen vollständigen, bei $x = x_0$ bzw. $x = X$ wenigstens einen rechten bzw. linken¹⁾, beständig verschwindenden Differentialquotienten, so läßt sich nach Annahme eines beliebig kleinen $\varepsilon > 0$ eine Folge wachsender, mit x_0 beginnender Zahlen x_r ($r = 0, 1, 2, \dots$) so auswählen, daß für $r = 1, 2, 3, \dots$ beständig:

$$\frac{f(x_r) - f(x_{r-1})}{x_r - x_{r-1}} < \varepsilon,$$

also schließlich:

$$f(x_r) - f(x_0) < \varepsilon \cdot x_r - x_0.$$

Bedeutet also x eine ganz beliebige, von x_0 verschiedene Stelle des betreffenden Intervalls, so hätte man analog:

$$f(x) - f(x_0) < \varepsilon \cdot x - x_0 < \varepsilon \cdot X - x_0.$$

d. h. schließlich:

$$f(x) = f(x_0).$$

falls es allemal möglich ist, das Intervall (x_0, x) durch Einschaltung einer endlichen Anzahl von Zwischenwerten x_r ($r = 1, 2, \dots, n$) in Teil-Intervalle (x_{r-1}, x_r) bzw. (x_n, x) zu zerlegen, derart daß für jedes derselben eine Ungleichung von der oben angegebenen Form besteht. Die Annahme des Gegenteils erweist sich aber auf Grund einer bekannten Schlußweise²⁾

¹⁾ Es würde offenbar auch genügen, bei $x = x_0$ bzw. $x = X$ die bloße Stetigkeit nach rechts bzw. links für $f'(x)$ vorauszusetzen.

²⁾ Es ist das diejenige Schlußweise, welche Heine (Journ. f. Math. 74 [1872], p. 188) zum Beweise der gleichmäßigen Stetigkeit einer punktweise stetigen Funktion angewendet hat und deren Resultat in etwas verallgemeinerter Form neuerdings als Heine-Borelsches Theorem bezeichnet zu werden pflegt. Im übrigen verdient bemerkt zu werden, daß der Beweis für die gleichmäßige Stetigkeit im wesentlichen schon ganz in derselben Form bei Dirichlet vorkommt, sofern die von G. Arendt herausgegebenen Vorlesungen über bestimmte Integrale (gehalten im Sommer 1854) als authentisch gelten dürfen (siehe a. a. O., p. 4—6). Dabei bezieht sich der von mir soeben gemachte beschränkende Zusatz: „im wesentlichen“ lediglich darauf, daß Dirichlet, statt mit Ungleichungen von der Form $f(x_r) - f(x_{r-1}) < \varepsilon$, mit Gleichungen: $f(x_r) - f(x_{r-1}) = \pm \varepsilon$ operiert, so daß er also unnötigerweise

als unmöglich, sobald man in entsprechende Erwägung zieht, daß für jede innere Stelle des Intervalls auch ein rückwärts genommener, verschwindender Differentialquotient existiert.

Im übrigen möchte ich zur Vermeidung jedes Mißverständnisses bemerken, daß ich den von mir in § 2 gegebenen Beweis für die Entwickelbarkeit nach der Taylorschen Reihe nicht etwa als einen förmlichen Ersatz für den auf dem Mittelwertsatze beruhenden angesehen wissen will, da ja dieser letztere Satz zu den unentbehrlichsten Hilfsmitteln der Differentialrechnung gehört und zweifellos die natürlichste Grundlage für die Herleitung des Taylorschen Satzes bildet. Immerhin scheint mir der fragliche Beweis wegen seiner prinzipiellen Einfachheit ein gewisses ästhetisches Interesse zu besitzen.

Die auch schon in meiner früheren Arbeit und zwar dort¹⁾ mit Benützung des Lagrangeschen Restausdruckes erwiesene Möglichkeit, die in § 2 als notwendig und hinreichend erkannte Hauptbedingung noch in gewisser Weise zu reduzieren, wird in § 3 ohne diese Hilfsmittel, lediglich mit Verwendung bekannter Potenzreihen-Eigenschaften begründet. Der Vollständigkeit halber wird dann schließlich in § 4 die Beziehung der Cauchyschen und Lagrangeschen Restausdrücke zu der fraglichen Hauptbedingung in einer gegenüber der früher²⁾ gegebenen Darstellung noch etwas vereinfachter Form erörtert.

die Gültigkeit des sogenannten Zwischenwertsatzes für stetige Funktionen voraussetzt. Selbstverständlich bleibt dadurch die bemerkenswerte Tatsache unberührt, daß das fragliche Beweisprinzip (samt dem fundamentalen Begriffe der gleichmäßigen Stetigkeit) schon in der genannten Dirichletschen Vorlesung sich findet.

¹⁾ A. a. O., p. 77.

²⁾ A. a. O., p. 73–76.

§ 1.

Eine Koeffizienten-Eigenschaft konvergenter Potenzreihen, welche eine notwendige Bedingung für die Gültigkeit der Taylorschen Reihenentwicklung liefert.

Hilfssatz. Bedeutet x_0 eine beliebige reelle Zahl einschließlich der Null, x eine reelle Veränderliche und

$$(1) \quad S(x) \equiv \sum_0^{\infty} c_v (x - x_0)^v$$

eine für $0 < x - x_0 < R$ konvergierende Potenzreihe, so hat man bei beliebig angenommenem positiven $r < R$:

$$(2) \quad \lim_{n=\infty} \frac{1}{n!} S^{(n)}(x_0 \pm h) \cdot (r - h)^n = 0$$

und zwar gleichmäßig für:

$$0 < h < r.$$

Beweis. Nach Annahme von $r < R$ läßt sich $\delta > 0$ immer noch so fixieren, daß auch $r + \delta < R$ ausfällt, also $\sum_0^{\infty} c_v \cdot (r + \delta)^v$ noch (absolut) konvergiert. Infolgedessen bleiben die Zahlen $|c_v| \cdot (r + \delta)^v$ durchweg unter einer endlichen Schranke, etwa:

$$(3) \quad c_v \cdot (r + \delta)^v < g \quad (v = 0, 1, 2, \dots).$$

Setzt man sodann $x = x_0 \pm h$, wo $0 < h < r$, so wird:

$$S(x_0 \pm h) = \sum_0^{\infty} c_v (\pm h)^v$$

und daher:

$$S^{(n)}(x_0 \pm h) = \sum_n^{\infty} (\pm 1)^v \cdot v(v-1) \dots (v-n+1) \cdot c_v h^{v-n}.$$

Daraus folgt weiter:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n!} S^{(n)}(x_0 \pm h) &< \sum_0^{\infty} \frac{(n+v)!}{n! \cdot v!} c_{n+v} \cdot h^v \\ &= \sum_0^{\infty} \frac{(n+v)!}{n! \cdot v!} c_{n+v} \cdot (r+\delta)^{n+v} \cdot \left(\frac{h}{r+\delta}\right)^v \cdot \frac{1}{(r+\delta)^n} \end{aligned}$$

und mit Berücksichtigung von Ungleichung (3):

$$\begin{aligned} \frac{1}{n!} S^{(n)}(x_0 \pm h) &< \frac{g}{(r+\delta)^n} \cdot \sum_0^{\infty} \frac{(n+r)!}{n! r!} \cdot \left(\frac{h}{r+\delta}\right)^r \\ &= \frac{g}{(r+\delta)^n} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{h}{r+\delta}\right)^{n+1}}. \end{aligned}$$

Multipliziert man diese Ungleichung mit der Gleichung

$$(r-h)^n = r^n \left(1 - \frac{h}{r}\right)^n,$$

so ergibt sich schließlich:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n!} S^{(n)}(x_0 \pm h) \cdot (r-h)^n &< \frac{g}{1 - \frac{h}{r+\delta}} \cdot \left(\frac{r}{r+\delta}\right)^n \cdot \left(\frac{1 - \frac{h}{r}}{1 - \frac{h}{r+\delta}}\right)^n \\ &< \frac{g}{1 - \frac{h}{r+\delta}} \cdot \left(\frac{r}{r+\delta}\right)^n. \end{aligned}$$

Da der letzte Ausdruck durch Wahl einer passenden unteren Schranke für n und zwar unabhängig von der Wahl des h beliebig klein wird, so folgt, wie behauptet:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} S^{(n)}(x_0 \pm h) \cdot (r-h)^n = 0$$

und zwar gleichmäßig für $0 < h < r$.

Zusatz. Genügt irgend eine Funktion $f(x)$ einer Relation von der Form (2), d. h. hat man bei beliebigem $r < R$:

$$(4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0 \pm h) \cdot (r-h)^n = 0$$

und zwar gleichmäßig für $0 < h < r$, so gilt in demselben Umfange auch die Beziehung:

$$(5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n-1)!} f^{(n)}(x_0 \pm h) \cdot (r-h)^{n-1} = 0.$$

Wird nämlich nach Annahme von $r < R$ eine Zahl $\delta > 0$ wieder so fixiert, daß auch noch $r + \delta < R$, so hat man zunächst:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(n-1)!} |f^{(n)}(x_0 \pm h)| (r-h)^{n-1} &= \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0 \pm h) \cdot (r+\delta-h)^n \cdot \left(\frac{r-h}{r+\delta-h}\right)^{n-1} \cdot \frac{n}{r+\delta-h} \\ &< \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0 \pm h) \cdot (r+\delta-h)^n \cdot \left(\frac{r}{r+\delta}\right)^{n-1} \cdot \frac{n}{\delta}. \end{aligned}$$

Auf Grund der Voraussetzung (4) läßt sich aber durch Wahl einer passenden unteren Schranke für n erzielen, daß

$$\frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0 \pm h) \cdot (r + \delta - h)^n < \varepsilon$$

und sodann (nötigenfalls durch entsprechende Erhöhung dieser unteren Schranke) zugleich

$$\left(\frac{r}{r+\delta}\right)^{n-1} \cdot \frac{n}{\delta} \leq 1$$

wird. Hieraus resultiert aber unmittelbar die Richtigkeit der Beziehung (5) in dem behaupteten Umfange.

Zugleich ist ohne weiteres ersichtlich, daß umgekehrt stets die Gültigkeit von Gleichung (4) aus der Voraussetzung (5) folgen würde.

§ 2.

Bedingungen, welche für die Gültigkeit der Taylorschen Reihenentwicklung notwendig und hinreichend sind.

Hauptsatz. Für die Darstellbarkeit der im Intervall $0 < h < R$ eindeutig definierten Funktion $f(x_0 + h)$ durch die Taylorsche Reihe

$$(6) \quad f(x_0 + h) = \sum_0^{\infty} \frac{1}{r!} f^{(r)}(x_0) \cdot h^r$$

ist notwendig und hinreichend:

(A) daß $f(x)$ für jedes einzelne x des Intervalls $x_0 < x < x_0 + R$ endlich sei und für $x = x_0$ rechtsseitige, für $x_0 < x < x_0 + R$ vollständige Differentialquotienten jeder endlichen Ordnung besitze;

(B) daß bei beliebig angenommenem $r < R$ die Beziehung bestehe:

$$(7) \quad \lim_{n=\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0 + h) \cdot (r - h)^n = 0$$

und zwar gleichmäßig für $0 < h < r$.

Beweis. Die Notwendigkeit der Bedingungen (A) folgt unmittelbar aus den bekannten Grundeigenschaften jeder Potenzreihe, insbesondere also der Potenzreihe (6); diejenige der Bedingung (B) aus dem in § 1 bewiesenen Hilfssatze.

Um zu zeigen, daß die obigen Bedingungen sich auch als hinreichend erweisen, werde nach Annahme von $r < R$ wieder $\delta > 0$ so fixiert, daß auch noch $r + \delta < R$, so daß also infolge der Voraussetzung (7) die Beziehung besteht:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0 + h) \cdot (r + \delta - h)^n = 0$$

und zwar gleichmäßig für $0 < h < r + \delta$. Somit bleibt

$$\frac{1}{r!} f^{(r)}(x_0 + h) (r + \delta - h)^r$$

in dem ebenbezeichneten Umfange für alle möglichen r unter einer endlichen Schranke g , und man findet daher für $0 < h < r$:

$$\begin{aligned} \sum_n^{\infty} \frac{1}{r!} f^{(r)}(x_0 + h) \cdot (r - h)^r &= \sum_n^{\infty} \frac{1}{r!} f^{(r)}(x_0 + h) \cdot (r + \delta - h)^r \cdot \left(\frac{r - h}{r + \delta - h} \right)^r \\ &< g \cdot \left(\frac{r - h}{r + \delta - h} \right)^n \cdot \frac{1}{1 - \frac{r - h}{r + \delta - h}} \\ &< g \cdot \left(\frac{r}{r + \delta} \right)^{n+1} \cdot \frac{r}{\delta}. \end{aligned}$$

d. h. beliebig klein durch Wahl einer passenden unteren Schranke für n . Daraus folgt aber, daß die Reihe

$$\sum_0^{\infty} \frac{1}{r!} f^{(r)}(x_0 + h) \cdot (r - h)^r$$

absolut und gleichmäßig konvergiert¹⁾ für alle h des Intervalls $0 < h < r$, und das nämliche gilt offenbar a fortiori für die Reihe

$$(8) \quad \sum_0^{\infty} \frac{1}{r!} f^{(r)}(x_0 + h) \cdot (q - h)^r,$$

wenn q dem Intervall $0 < q \leq r$ entnommen und h auf das Intervall $0 < h < q$ eingeschränkt wird²⁾.

Die Summe dieser Reihe, für jedes einzelne q als Funktion von h betrachtet, besitzt also einen bestimmten Differentialquotienten, und dieser kann durch gliedweise Differentiation nach h ermittelt werden, sobald sich zeigen läßt, daß die auf diese Weise entstehende Reihe in demselben Umfange gleichmäßig konvergiert, wie die erzeugende. Man findet nun:

$$\begin{aligned} & \sum_n^{n+p} \frac{d}{dh} \left(\frac{1}{r!} f^{(r)}(x_0 + h) \cdot (q - h)^r \right) \\ = & \sum_n^{n+p} \left\{ \frac{1}{r!} f^{(r+1)}(x_0 + h) \cdot (q - h)^r - \frac{1}{(r-1)!} f^{(r)}(x_0 + h) \cdot (q - h)^{r-1} \right\} \\ = & - \frac{1}{(n-1)!} f^{(n)}(x_0 + h) \cdot (q - h)^{n-1} + \frac{1}{(n+p)!} f^{(n+p+1)}(x_0 + h) \cdot (q - h)^{n+p} \end{aligned}$$

¹⁾ Man könnte offenbar auch diese Forderung, als völlig gleichwertig mit der Voraussetzung (B), von vornherein an deren Stelle einführen.

²⁾ Man kann sogar aus dem im Text Gesagten entnehmen, daß die Reihe (8) in Bezug auf die beiden Veränderlichen h und q gleichmäßig konvergiert für das Gebiet $0 < h < q < r$. Ich möchte aber ausdrücklich hervorheben, daß bei der im Texte gegebenen Deduktion, die Summe der Reihe (8) lediglich als Funktion der einzigen (stetigen) Veränderlichen h erscheint, während q die Rolle eines Parameters spielt und das Verhalten der fraglichen Reihensumme als Funktion von h nur für jeden einzelnen, dem Intervalle $0 < q < r$ angehörigen Parameterwert q in Betracht kommt.

und für $\lim \rho = +\infty$, mit Rücksicht auf den Zusatz des vorigen Paragraphen:

$$\sum_n \frac{d}{dh} \left(\frac{1}{r!} f^{(n)}(x_0+h) \cdot (\varrho-h)^r \right) = \frac{1}{(n-1)!} f^{(n)}(x_0+h) \cdot (\varrho-h)^{n-1},$$

so daß, wieder mit Rücksicht auf den ebenerwähnten Zusatz, dieser Reihenrest für $0 < h < \varrho$ durch Wahl einer passenden unteren Schranke für n beliebig klein wird, die fragliche Reihe also in dem erforderlichen Umfange gleichmäßig konvergiert. Infolgedessen ergibt sich:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dh} \sum_0^{\infty} \frac{1}{r!} f^{(r)}(x_0+h) \cdot (\varrho-h)^r \\ &= \sum_0^{\infty} \frac{1}{r!} f^{(r+1)}(x_0+h) \cdot (\varrho-h)^r - \sum_1^{\infty} \frac{1}{(r-1)!} f^{(r)}(x_0+h) \cdot (\varrho-h)^{r-1} = 0 \end{aligned}$$

und zwar für jedes einzelne positive $\varrho < r$ und alle h des Intervalls $0 < h < \varrho$. Daraus folgt aber, daß die Reihensumme

$$(8) \quad \sum_0^{\infty} \frac{1}{r!} f^{(r)}(x_0+h) \cdot (\varrho-h)^r$$

in dem eben genannten Umfange einen von h unabhängigen Wert hat, der also insbesondere zum Vorschein kommen muß, wenn man einmal $h = \varrho$, das andere Mal $h = 0$ setzt, d. h. man findet:

$$(9) \quad f(x_0 + \varrho) = \sum_0^{\infty} \frac{1}{r!} f^{(r)}(x_0) \cdot \varrho^r,$$

und da diese zunächst unter der Annahme $0 < \varrho < r$ abgeleitete Gleichung offenbar auch noch für $\varrho = 0$ gültig bleibt, so ergibt sich, wenn man schließlich noch h statt ϱ schreibt, wie behauptet:

$$(6) \quad f(x_0 + h) = \sum_0^{\infty} \frac{1}{r!} f^{(r)}(x_0) \cdot h^r \quad \text{für: } 0 < h < r < R.$$

Zusatz I. Da der Wert der Reihensumme (8) auch für jedes beliebige positive $h < \varrho$ ermittelt werden kann, indem man speziell $h = \varrho$ setzt, so gewinnt man neben der Gleichung (9) noch die allgemeinere:

$$f(x_0 + \varrho) = \sum_0^{\infty} \frac{1}{r!} f^{(r)}(x_0 + h) \cdot (\varrho - h)^r \quad \text{für: } 0 \leq h \leq \varrho < R,$$

oder auch, wenn man $\varrho = h + k$ setzt:

$$(10) \quad f(x_0 + h + k) = \sum_0^{\infty} \frac{1}{r!} f^{(r)}(x_0 + h) \cdot k^r \quad \text{für: } 0 \leq h < h + k < R.$$

Da andererseits aus (6) folgt:

$$f(x_0 + h + k) = \sum_0^{\infty} \frac{1}{r!} f^{(r)}(x_0) \cdot (h + k)^r \quad \text{für: } 0 < h < h + k < R,$$

so ergibt sich auf diese Weise ohne jede Rechnung für die letzte nach Potenzen von $h + k$ fortschreitende Reihe die daraus „abgeleitete“, nach Potenzen von k fortschreitende.

Zusatz II. Der oben bewiesene Hauptsatz läßt sich offenbar in ganz analoger Weise für ein links von der Stelle x_0 gelegenes Intervall $x_0 - h$, wo wieder $0 < h < R$, begründen. Bei dem zuvor abgeleiteten Hilfssatze wurden von vornherein die beiden Intervalle $0 < h < R$ und $0 > -h > -R$ in Betracht gezogen, da es sich hier um gewisse Eigenschaften der Summe einer Potenzreihe handelte, in welchem Falle durch das Verhalten in dem einen jener beiden Intervalle das entsprechende Verhalten in dem anderen von vornherein vollständig bestimmt ist. Anders liegt die Sache, wenn es, wie bei dem Hauptsatze, auf die Darstellbarkeit einer irgendwie definierten Funktion durch eine Potenzreihe ankommt, da ja die erstere auf den beiden verschiedenen Seiten der Stelle x_0 ganz verschiedene Eigenschaften besitzen kann und durch die Gültigkeit der Taylorschen Entwicklung auf der einen Seite, z. B.

$$f(x_0 + h) = \sum_0^{\infty} \frac{1}{r!} f^{(r)}(x_0) \cdot h^r \quad \text{für: } 0 \leq h < R$$

zwar die Konvergenz von $\sum_0^{\infty} \frac{1}{r!} f^{(r)}(x_0) \cdot (-h)^r$, dagegen in keiner Weise die Gültigkeit der entsprechenden Entwicklung für $f(x_0 - h)$ präjudiziert wird. Es lassen sich sogar unbe-

schränkt differenzierbare analytische Ausdrücke $f(x)$ herstellen¹⁾, die nur auf einer Seite einer bestimmten Stelle x_0 durch die Taylorsche Reihe darstellbar sind.

Hiernach erscheint es aber angezeigt, die notwendigen Bedingungen für die Entwickelbarkeit nach der Taylorschen Reihe zunächst so zu formulieren, daß dabei nur auf einer Seite der betrachteten Stelle x_0 gewisse Eigenschaften verlangt werden. Die Übertragung des Resultates auf die andere Seite bzw. auf die zweiseitige Umgebung bietet dann keinerlei Schwierigkeit.

§ 3.

Herabsetzung der im vorigen Paragraphen als notwendig und hinreichend erkannten Bedingung (B).

Die im vorigen Paragraphen (in Verbindung mit der Eindeutigkeit, Endlichkeit und unbeschränkten Differenzierbarkeit) als notwendig und hinreichend erkannte Bedingung (B) gestattet noch eine gewisse Herabminderung in dem Sinne, daß es nicht erforderlich ist, sie in ihrem ganzen Umfange in die Voraussetzung aufzunehmen, um die Gültigkeit der Taylorschen Entwicklung nachweisen zu können. Mit anderen Worten, die fragliche Bedingung ist zwar zweifellos insofern eine notwendige, als die Gültigkeit der Taylorschen Entwicklung definitiv ausgeschlossen erscheint, sobald feststeht, daß irgendein Teil jener Bedingung nicht erfüllt ist. Dagegen reicht andererseits ein sogleich anzugebender Teil derselben schon aus, um ihre Existenz in dem ganzen (unter (B) angegebenen) Umfange zu sichern. Es soll nämlich jetzt gezeigt werden:

Ist $f(x)$ im Intervall $x_0 < x < x_0 + R$ eindeutig, endlich und (in dem § 2 unter (A) angegebenen Sinne) unbeschränkt differenzierbar, so gilt die Entwicklung:

$$f(x_0 + h) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(x_0) \cdot h^{\nu} \quad \text{für: } 0 < h < R,$$

¹⁾ Siehe Math. Ann. 44 (1893), p. 54.

wenn für jedes $r < R$ die Beziehung besteht:

$$(a) \quad \lim_{n=\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) \cdot r^n = 0$$

und wenn, nach Annahme von $r < R$, für jedes $\varrho < R - r$

$$(b) \quad \lim_{n=\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0 + h) \cdot \varrho^n = 0$$

wird und zwar gleichmäßig für $0 \leq h < \varrho$.

(Mit anderen Worten: wenn die früher als notwendig erkannte Bedingung (B) nur für den Anfangswert $h = 0$ vollständig erfüllt ist, so genügt es, wenn sie für die Zwischenwerte $0 < h < r$ in dem wesentlich beschränkteren Umfange (b) gesichert ist.)

Beweis. Die Bedingung (a) ist offenbar gleichwertig mit der Aussage, daß die Reihe

$$\sum_0^{\infty} \frac{1}{r!} f^{(r)}(x_0) \cdot h^r$$

für jedes positive $h < R$ (absolut) konvergiert (da es ja wiederum freisteht in der Beziehung (a) jedes beliebige $r < R$ noch durch $r + \delta$ zu ersetzen, wo $r < r + \delta < R$).

Wird sodann nach Annahme von $r < R$ ein positives $\varrho < R - r$ fixiert und h vorläufig auf das Intervall $0 < h < \varrho$ beschränkt, so besteht infolge der Voraussetzung (b) a fortiori die Relation:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0 + h) \cdot (\varrho - h)^n = 0 \quad \text{für: } 0 \leq h < \varrho,$$

und daraus folgt auf Grund des im vorigen Paragraphen gegebenen Beweises die Gültigkeit der Beziehung

$$(11) \quad f(x_0 + h) = \sum_0^{\infty} \frac{1}{r!} f^{(r)}(x_0) \cdot h^r \quad \text{zunächst für: } 0 \leq h < \varrho,$$

während andererseits die (absolute) Konvergenz dieser Reihe bereits für $0 \leq h < r$ feststeht.

Nun werde eine positive ganze Zahl m so groß angenommen, daß:

$$\frac{r}{m+1} < \varrho$$

und daher:

$$(12) \quad \varrho' - \frac{r - \varrho}{m} < \varrho.$$

Schreibt man jetzt in Gleichung (11) $\varrho' + h$ statt h , so gilt die Entwicklung

$$(13) \quad f(x_0 + \varrho' + h) = \sum_0^{\infty} \frac{1}{r!} f^{(r)}(x_0) \cdot (\varrho' + h)^r \quad \text{für: } 0 \leq h \leq \varrho - \varrho',$$

während wiederum die betreffende Reihe für $0 \leq \varrho' + h < R$, also insbesondere für $0 \leq h < R - \varrho'$ absolut konvergiert und daher in demselben Umfange nach dem gewöhnlichen („Cauchy-schen“) Doppelreihensatze in eine absolut konvergierende Reihe nach Potenzen von h , etwa $\sum_0^{\infty} c_r h^r$ umgeformt werden kann, so daß also

$$(14) \quad f(x_0 + \varrho' + h) = \sum_0^{\infty} c_r h^r \quad \text{für: } 0 < h \leq \varrho - \varrho'$$

wird.

Andererseits ergibt sich aber, wenn man von der Stelle $x_0 + \varrho'$ ausgeht, durch dieselbe Schlußweise, welche oben die Beziehung (11) lieferte, die Entwicklung:

$$(15) \quad f(x_0 + \varrho' + h) = \sum_0^{\infty} \frac{1}{r!} f^{(r)}(x_0 + \varrho') \cdot h^r \quad \text{für: } 0 < h \leq \varrho,$$

und die Vergleichung mit Gleichung (14) zeigt dann, daß die dort mit $\sum_0^{\infty} c_r h^r$ bezeichnete Reihe mit der letztgenannten identisch sein muß, daß sich demnach der Gültigkeitsbereich der Beziehung (14) auf das erweiterte Intervall $0 < h \leq \varrho$ erstreckt. Da aber die Konvergenz¹⁾ der Reihe (13), sowie

¹⁾ Hierauf liegt der Nachdruck. Denn man könnte aus der bloßen Erweiterung des Konvergenzbereiches der Reihe $\sum_0^{\infty} c_r h^r$ (Gleichung)(14),

ihre Gleichwertigkeit mit der Reihe auf der rechten Seite von Gleichung (14) auch für diesen erweiterten Bereich bereits feststeht, so erstreckt sich nunmehr auch die Gültigkeit der Relation (13) auf jenes Intervall $0 < h < \varrho$ und man findet daher, wenn man auf die ursprüngliche Entwicklungsform (11) zurückgeht:

$$f(x_0 + h) = \sum_0^{\infty} \frac{1}{r!} f^{(r)}(x_0) \cdot h^r \quad \text{für: } 0 < h < \varrho + \varrho'.$$

Schreibt man hier, analog wie oben, $2\varrho' + h$ statt h , so gilt zunächst:

$$(16) \quad \left. \begin{aligned} f(x_0 + 2\varrho' + h) &= \sum_0^{\infty} \frac{1}{r!} f^{(r)}(x_0) \cdot (2\varrho' + h)^r \\ &= \sum_0^{\infty} c_r' h^r \end{aligned} \right\} \text{für: } 0 < h < \varrho - \varrho'.$$

während die Vergleichung mit der für $0 < h < \varrho$ geltenden Entwicklung

$$(17) \quad f(x_0 + 2\varrho' + h) = \sum_0^{\infty} \frac{1}{r!} f^{(r)}(x_0 + 2\varrho') \cdot h^r$$

wiederum die Gültigkeit der Beziehung (16) für dieses weitere Intervall $0 < h < \varrho$ liefert und somit der Gültigkeitsbereich der Beziehung (11) sich jetzt auf das Intervall $0 < h < \varrho + 2\varrho'$ erstreckt. Durch m malige Anwendung dieser Schlußweise gelingt es also, jenen Gültigkeitsbereich auf das Intervall $0 < h < \varrho + m\varrho' = r$ auszudehnen, womit der ausgesprochene Satz bewiesen ist.

Zusatz. Die Bedingung (b) läßt sich auch durch die folgende ersetzen: Es muß, nach Annahme von $r < R$,

$$\frac{1}{n!} \cdot f^{(n)}(x_0 + h) \cdot \varrho_0^n$$

welche sich ja auch ohne jede sonstige Voraussetzung (d. h. insbesondere ohne die Voraussetzung (a)) aus der erweislichen Identität mit der Reihe (15) ergeben würde, keinen Schluß auf eine entsprechende Erweiterung für den Konvergenzbereich der Reihe (13) ziehen.

für ein gewisses $\varrho_0 < R - r$ und $0 < h < \varrho_0$ unter einer endlichen Schranke bleiben, etwa:

$$(c) \quad \frac{1}{n!} \cdot f^{(n)}(x_0 + h) \cdot \varrho_0^n < g.$$

Denn offenbar folgt (c) für $\varrho_0 < \varrho$ ohne weiteres aus (b). Nimmt man andererseits $\varrho < \varrho_0$, so folgt auch umgekehrt (b) aus (c).

§ 4.

Das Cauchysche und das Lagrangesche Restglied.

Nach Gleichung (5) (p. 142) kann man der als notwendig für die Gültigkeit der Taylorschen Entwicklung von $f(x_0 + h)$ erkannten Bedingung die Form geben:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n-1)!} f^{(n)}(x_0 + h) \cdot (r-h)^{n-1} = 0 \quad (\text{gleichmäßig für: } 0 \leq h < r).$$

Setzt man hier:

$$h = \vartheta r, \quad \text{wo also: } 0 < \vartheta < 1. \quad r < R,$$

so geht sie, wenn man noch den offenbar irrelevanten Faktor r hinzufügt, in die folgende über:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n-1)!} f^{(n)}(x_0 + \vartheta r) \cdot (1 - \vartheta)^{n-1} \cdot r^n = 0$$

oder, wenn man schließlich noch h statt r schreibt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n-1)!} f^{(n)}(x_0 + \vartheta h) \cdot (1 - \vartheta)^{n-1} \cdot h^n = 0$$

und zwar gleichmäßig für jedes einzelne positive $h < R$ und alle dem Intervall $0 < \vartheta < 1$ angehörigen ϑ .

Die linke Seite dieser Gleichung stellt aber den Grenzwert des bekannten Cauchyschen Restgliedes vor, dessen Verschwinden in dem bezeichneten Umfange also eine notwendige Bedingung für die Gültigkeit des Taylorschen Satzes bildet (die dann, in Verbindung mit der Endlichkeit

und unbeschränkten Differenzierbarkeit von $f(x)$ für $x_0 < x < R$, mit Hilfe des Mittelwertsatzes leicht auch als hinreichend erkannt wird ¹⁾.

Etwas analoges findet für das Lagrangesche Restglied

$$\frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0 + \vartheta h) \cdot h^n$$

nicht statt. Hier ist die Beziehung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0 + \vartheta h) \cdot h^n = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{für: } 0 < h < R \\ \text{und gleichmäßig für: } 0 < \vartheta < 1 \end{array} \right.$$

zwar hinreichend, aber in dem bezeichneten Umfange nicht notwendig.

Setzt man nämlich die als notwendig erkannte Bedingung (B) (p. 144, Gleichung (7)) in die Form

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0 + h) \cdot k^n = 0 \quad (\text{gleichmäßig für: } 0 < h < h + k < r)$$

und versteht wieder unter ϑ jede Zahl des Intervalls $0 < \vartheta < 1$, so folgt zunächst, daß die Bedingung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0 + \vartheta h) \cdot h^n = 0$$

jedenfalls erfüllt sein muß für $0 < 2h < r$, d. h. schließlich für $0 < h < \frac{R}{2}$ und zwar gleichmäßig für $0 < \vartheta < 1$.

Somit liefert das Verschwinden des Lagrangeschen Restgliedes eine notwendige Bedingung, solange $0 < h < \frac{R}{2}$.

Daß dies aber schon nicht mehr zutrifft, falls $h = \frac{R}{2}$ (und um so mehr für $h > \frac{R}{2}$), zeigt ein Blick auf das einfache Beispiel:

¹⁾ Vgl. a. a. O., p. 73.

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \quad \left(\text{also: } f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} \right).$$

In diesem Falle wird für $x_0 = 0$ (also $R = 1$) und für $\theta = 1$:

$$\frac{1}{n!} f^{(n)}\left(\frac{R}{2}\right) \cdot \left(\frac{R}{2}\right)^n = 2$$

bei beliebigem n , somit auch für $\lim n = \infty$ von Null verschieden. Für $h > \frac{R}{2}$ (d. h. $h > \frac{1}{2}$) wird der entsprechende Grenzwert sogar unendlich groß.

Die Biegung einer kreisförmigen Platte.

Von A. Föppl.

Vorgetragen in der Sitzung am 4. Mai 1912.

Vor 50 Jahren hat Clebsch in seinem Buche „Theorie der Elastizität fester Körper“ (Leipzig, bei Teubner, 1862) die Biegung untersucht, die eine am Rande unterstützte kreisförmige Platte durch Lasten erfährt, die senkrecht zur Plattenebene gerichtet sind. Für eine am Rande eingespannte Platte wurde von ihm eine strenge Lösung der Differentialgleichung der gebogenen Platte abgeleitet. Diese Lösung liefert die Ordinaten der elastischen Fläche, zu der die Mittelebene der Platte verbogen wird. Die Lasten können beliebig über die Fläche verteilt sein; vollständig ausgerechnet sind aber die Formeln von Clebsch nur für den Fall, daß die Platte eine Einzellast trägt, die an beliebiger Stelle angreifen kann.

Dieser Belastungsfall ist in der Tat besonders wichtig; nicht nur weil er bei den praktischen Anwendungen, die man von der Theorie zu machen wünscht, häufig vorkommt, sondern auch weil sich die Lösung für jeden anderen Belastungsfall aus ihm auf Grund des Superpositionsgesetzes ohne weiteres ableiten läßt. Aus diesem Grunde werde ich mich hier ebenfalls auf die Behandlung der durch eine Einzellast von beliebiger Angriffsstelle hervorgerufenen Biegung beschränken.

In den Formeln von Clebsch steckt ein an sich zwar unerheblicher Rechenfehler, der bei der Ausrechnung unterlaufen sein muß, der aber natürlich genügt, die zahlenmäßigen Ergebnisse der Formeln zu fälschen. Dies scheint bisher nicht

bemerkt worden zu sein. Auch in die französische Übersetzung, die de Saint-Venant von dem Buche von Clebsch herausgegeben hat (Paris, bei Dunod, 1881), und die wegen der zahlreichen und wichtigen Zusätze des Übersetzers noch berühmter geworden ist, als das ursprüngliche Werk, ist der Rechenfehler unbemerkt übergegangen.

Zu praktischen Anwendungen sind die Formeln von Clebsch wenigstens in ihrer allgemeineren Gestalt bisher kaum benützt worden. In der Technischen Mechanik, die sich mit solchen Anwendungen berufsmäßig zu beschäftigen hätte, hat man sich bisher stets damit begnügt, nur die beiden symmetrischen Belastungsfälle zu behandeln, bei denen die Platte entweder eine in Kreismittelpunkte angreifende Einzellast oder eine gleichmäßig über die ganze Fläche nach Art eines Flüssigkeitsdrucks verteilte Belastung zu tragen hat. Diese Fälle sind viel einfacher zu behandeln, als die Biegung durch eine exzentrisch angreifende Einzellast. Auf die von Clebsch aufgestellte Theorie brauchte daher in den Darstellungen der Plattenbiegung, die sich in den Lehrbüchern der Technischen Mechanik finden, nicht zurückgegriffen zu werden. Immerhin wird das Ergebnis dieser Betrachtungen mit den Formeln von Clebsch, namentlich in früheren Jahren, als der Gegenstand noch den Reiz der Neuheit hatte, öfters verglichen worden sein. Man hätte daher den bei Clebsch vorgekommenen Rechenfehler jedenfalls schon längst bemerkt, wenn nicht die mit dem Fehler behafteten Glieder für den Fall der zentrischen Belastung herausfielen. In diesem Falle stimmen die Formeln von Clebsch inhaltlich mit den in der Technischen Mechanik abgeleiteten vollständig überein.

Immerhin kann es als auffällig bezeichnet werden, daß der Rechenfehler nicht schon früher bemerkt wurde, da die beiden Formeln, in die er eingetreten ist, infolge davon gar nicht homogen in den Dimensionen ausgefallen sind, so daß sie für eine verschiedene Wahl der Längeneinheit zu ganz von einander abweichenden Schlußergebnissen führen müßten. Bei dem ersten Versuche, den ich vornahm, die Formeln zu einer

Anwendung zu benützen, fiel mir sofort auf, daß sie wegen des Mangels gleicher Benennung aller durch Plus-, Minus- oder Gleichheitszeichen mit einander verbundenen Glieder unmöglich richtig sein können. Jedem anderen, der eine Anwendung versuchen wollte, die sich auf den allgemeineren Fall der exzentrischen Belastung bezog, hätte sich dieselbe Bemerkung auch aufdrängen müssen und man muß daher wohl annehmen, daß die Formeln niemals, weder von Clebsch selbst noch von seinem Übersetzer oder einem Leser seines Buches zu einer zahlenmäßigen Berechnung für einen Fall der exzentrischen Belastung benützt worden sind.

In der Technik hat die Theorie der Plattenbiegung neuerdings eine erhöhte Bedeutung gewonnen. Nach der jetzt überall eingeführten Bauweise in Eisenbeton werden vielfach Decken und Wände hergestellt, die in guter Annäherung den Voraussetzungen entsprechen, von denen man in der Elastizitätstheorie bei der Ableitung der Gleichungen für die Plattenbiegung ausgeht. Allen sich darauf beziehenden theoretischen Entwicklungen steht daher, sofern sie mit der Erfahrung hinreichend übereinstimmen, ein weites und wichtiges Anwendungsgebiet offen.

Zunächst bezieht sich dies zwar auf rechteckige Platten, die in Bauwerken viel häufiger vorkommen, als die kreisförmigen. Mit der Theorie der rechteckigen Platten haben sich daher die Ingenieure in den letzten Jahren eingehender zu beschäftigen begonnen, wie aus verschiedenen Veröffentlichungen hervorgeht, von denen die in Buchform erschienene Abhandlung meines hiesigen Kollegen, Herrn Professor Hager „Berechnung rechteckiger Platten“ (München, bei Oldenbourg, 1911) die umfanglichste und wichtigste ist.

Auf die Biegung der rechteckigen Platte werde ich an dieser Stelle nicht eingehen. Nur den einen Hinweis möchte ich nicht unterdrücken, daß bereits de Saint-Venant in der schon erwähnten Übersetzung des Buches von Clebsch in einer umfangreichen Anmerkung, die eine Abhandlung für sich bildet, eine sehr ausführliche und nach mancher Richtung hin unüber-

treffliche Theorie der rechteckigen Platte, die an allen vier Seiten frei aufliegt, gegeben hat. Im Übrigen behalte ich mir vor, später an anderer Stelle auch auf die rechteckige Platte noch näher einzugehen.

Hier beschränke ich mich dagegen auf die Theorie der kreisförmigen Platte, die für den allgemeineren Fall der exzentrischen Belastung schwieriger in der Durchführung ist, als die der rechteckigen Platte und für die aus diesem Grunde unmittelbar gebrauchsfertige Formeln bisher überhaupt nicht zu Gebote standen, da die Lösung von Clebsch aus dem schon erwähnten, an sich zwar geringfügigen Mangel nicht verwendbar war. Nachdem sich das Bedürfnis nach einer genaueren Berechnung der Plattenbiegung in der Technik bei den rechteckigen Platten schon sehr nachdrücklich geltend gemacht hat, darf man erwarten, daß kreisförmige Platten immerhin auch nicht selten vorkommen, daß die Formeln, die ich für diese hier mitzuteilen beabsichtige, auch nicht lange auf eine Verwendung zu warten brauchen.

Ich beginne damit, für die am Rande eingespannte Platte die Formeln von Clebsch von neuem abzuleiten und sie richtig zu stellen. Dabei bediene ich mich einer Ableitung, von der ich annehmen zu dürfen glaube, daß man sie für einfacher und leichter verständlich halten wird, als die von Clebsch benutzte. Dasselbe Rechnungsverfahren wird dann auch dazu verwendet, um die entsprechenden Formeln für die am Rande frei aufliegende Platte aufzustellen.

Die Formeln für beide Fälle bilden strenge Lösungen der Differentialgleichung der gebogenen Platte, die den gewählten Grenzbedingungen genau angepaßt sind. Aber darum sind sie noch keineswegs als in jeder Hinsicht brauchbare Lösungen der ursprünglichen Aufgabe anzusehen. Denn diese Aufgabe besteht darin, den Formänderungs- und Spannungszustand zu finden, der durch eine vorgeschriebene Belastung in der Platte hervorgebracht wird und sie erschöpft sich keineswegs in der mathematischen Aufgabe, die Differentialgleichung der Platte für gegebene Randbedingungen zu integrieren. Beides ist

eben nicht genau dasselbe. Bei der Ableitung der Differentialgleichung für die gebogene Platte geht man nämlich von Annahmen aus, die nicht überall hinreichend erfüllt sind. Wenn auch sonst die Übereinstimmung ohne Zweifel nichts zu wünschen übrig läßt, so tritt doch an der Angriffsstelle der Belastung und in ihrer unmittelbaren Nachbarschaft augenscheinlich ein Spannungszustand von ganz anderer Art ein, als er bei der Aufstellung der Differentialgleichung als überall bestehend vorausgesetzt wird.

Da die Abweichung nur in einem eng begrenzten Bezirke stattfindet, ist freilich nicht anzunehmen, daß sich ihr Einfluß auf größere Entfernungen von der belasteten Stelle hin bemerklich machen könnte. Aller Voraussicht nach darf man daher eine gute Übereinstimmung der strengen Lösung der Differentialgleichung mit den tatsächlich eintretenden Durchbiegungen erwarten. Die Erfahrung scheint dies auch zu bestätigen. Über Versuche, die ich selbst hierüber angestellt habe und die ich noch viel weiter fortzusetzen beabsichtige, behalte ich mir vor, an anderer Stelle späterhin ausführlich zu berichten. Schon jetzt habe ich aber hinreichenden Grund für die Annahme, daß die aus Lösungen der Differentialgleichung abgeleiteten theoretischen Werte für die Durchbiegung mit den beim Versuche festzustellenden im allgemeinen recht gut übereinstimmen.

Ganz anders ist es aber mit den in der Platte auftretenden Biegungsspannungen. Nach diesen wird bei den Anwendungen, die man von der Theorie in der Technik zu machen wünscht, sogar in erster Linie gefragt und eine Theorie, die über sie keinen ausreichenden Aufschluß zu geben vermag, ist daher als unbrauchbar oder mindestens als unvollständig zu bezeichnen. Gerade hierin läßt es aber die auf die Lösung der Differentialgleichung gestützte Theorie fehlen: wenigstens für den hier zu behandelnden und praktisch besonders wichtigen Fall der Belastung mit einer Einzellast führt sie zu offenbar unrichtigen Ergebnissen. Das zeigt sich schon bei dem einfachen Falle der in der Mitte belasteten Platte; wie schon längst

allgemein bekannt ist, liefert hierfür die auf die Lösung der Differentialgleichung gestützte Theorie unendlich große Biegunsspannungen in der nächsten Umgebung der belasteten Stelle. Dieses Ergebnis steht nicht nur mit der Erfahrung im Widerspruch, sondern es lehrt auch, daß die Differentialgleichung keinen brauchbaren Ausgangspunkt für eine Theorie bildet, die zur Berechnung der Biegunsspannungen führen soll.

Für den Zweck der Festigkeitsberechnung muß man sich daher nach einer anderen Grundlage umsehen. Diese muß jedenfalls so gewählt werden, daß sie den soeben hervorgehobenen Fehler vermeidet, an der belasteten Stelle eine unendlich scharfe Krümmung der elastischen Fläche vorauszusagen, die mit unendlich großen Spannungen verbunden wäre. Da sich aber die auf die Differentialgleichung gestützte Theorie im übrigen, d. h. für die Berechnung der Durchbiegungen gut bewährt hat, wird man daran sonst so wenig als möglich zu ändern suchen.

Für die Lösung der hiermit gestellten Aufgabe bleibt der Willkür noch viel Spielraum übrig und erst die Prüfung, die von einer weiteren Ausdehnung der Beobachtungen zu erwarten ist, wird endgültig erkennen lassen, welcher der verschiedenen sich darbietenden Möglichkeiten der Vorzug einzuräumen ist. Der erste Schritt zu diesem Ziele kann aber nur darin bestehen, daß unter den zunächst möglich erscheinenden Ansätzen irgend einer ausgewählt wird, der einleuchtend genug erscheint und der auch zu verhältnismäßig einfachen Rechnungen führt. Für diesen Ansatz wird man die Theorie vollständig durchzuführen haben, um einen Vergleich ihrer Ergebnisse mit der Erfahrung zu ermöglichen. Erst wenn sich bei diesem Vergleiche erhebliche Widersprüche ergeben sollten, würde man zu einer Änderung des zuerst gewählten einfacheren Ansatzes zu schreiten haben. Die Art der Widersprüche würde dann voraussichtlich auch einen Fingerzeig dafür liefern, nach welcher Richtung hin eine Änderung notwendig erscheint.

Den ersten Schritt auf diesem Wege habe ich hier getan und, soweit mir dies zu beurteilen jetzt möglich erscheint, mit

ganz befriedigendem Erfolge; obschon man eine weitere Bewährung der erzielten Ergebnisse natürlich erst noch abzuwarten haben wird. Ehe ich mit den Rechnungen beginne, möchte ich das Verfahren, das ich dabei einschlage, im allgemeinen beschreiben.

Ich beginne damit, einen möglichst einfach gestalteten Ausdruck für die Durchbiegung der Platte aufzustellen, der nur den wichtigsten Anforderungen an die voraussichtlich ungefähr zu erwartende Gestalt der elastischen Fläche entspricht, der aber von vorneherein keinerlei Anspruch darauf erhebt, eine mehr oder weniger genaue oder angenäherte Lösung der Differentialgleichung zu bilden. Nachdem dieser im übrigen nur dem Gebot möglicher Einfachheit gehorchende analytische Ausdruck den vorgeschriebenen Grenzbedingungen angepaßt ist, kommen in ihm noch drei Konstanten vor, über die frei verfügt werden kann. Erst dann werden diese Konstanten der Forderung gemäß gewählt, daß sich die durch den analytischen Ausdruck beschriebene Gestalt der elastischen Fläche so wenig als es innerhalb des begrenzten Rahmens überhaupt noch möglich ist, von der wahren Gestalt der elastischen Fläche unterscheiden soll.

Den Entscheidungsgrund hierfür gibt das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten ab. Nach diesem Satze muß bei der wahren Gestalt der elastischen Fläche für jede virtuelle Formänderung, die wir mit ihr vornehmen mögen, die virtuelle Arbeit der Last gleich sein der virtuellen Änderung der in der Platte aufgespeicherten Formänderungsarbeit. Umgekehrt kann auch diese Bedingung nur bei der wahren Gleichgewichtsgestalt der gebogenen Platte und nicht bei einer Fläche erfüllt sein, die diese nur näherungsweise darstellt. Aber wir können unseren analytischen Ausdruck immerhin so wählen, daß die Gleichheit zwischen virtueller Arbeit der Last und virtueller Änderung der potentiellen Energie wenigstens bei allen virtuellen Verschiebungen erfüllt wird, die durch Änderungen der drei vorher willkürlich gebliebenen Konstanten hervorgebracht werden können. Diese Bedingung führt zur

Ermittlung der Werte der drei Konstanten. Hiermit erhalten wir aber den dreikonstantigen Ausdruck von der willkürlich gewählten, möglichst einfachen Bauart, der sich unter allen ihm sonst gleichen den Forderungen am meisten nähert, die an die wahre Gestalt der elastischen Fläche gestellt werden müssen.

Der hier beschriebene Gedankengang steht in ziemlich engem Zusammenhange mit einem von W. Ritz angegebenen Verfahren zur näherungsweise Integration von Differentialgleichungen, das in einer Abhandlung über die Transversal-schwingungen von Platten in den *Annalen der Physik*, 4, Bd. 28, S. 737, 1909 auseinandergesetzt ist. Die Absicht, die hier damit verfolgt wird, ist freilich eine ganz andere, als bei Ritz. Während Ritz eine sich der strengen Lösung der Differentialgleichung der Platte so genau als möglich anschließende Näherungslösung sucht, ist hier die strenge Lösung der Differentialgleichung vorher schon gefunden, aber als unzulänglich für die Berechnung der Spannungen erkannt. Wenn man will, kann man ja wohl auch den hier aufzustellenden analytischen Ausdruck als eine Näherungslösung der Differentialgleichung ansehen; aber er ist doch viel mehr als eine bloße Näherung, da er zugleich eine Verbesserung der „strengen Lösung“ zu sein beansprucht und sich jedenfalls mehr als diese für die Festigkeitsberechnung eignet. In der Tat lehrt ein zahlenmäßiger Vergleich, daß die „Näherungsformel“ ungefähr ebensogroße Durchbiegungen liefert, wie die „strenge“ Formel. Nur in der Nähe der belasteten Stelle führen beide zu erheblich verschiedenen Ergebnissen, insofern die durch die „Näherungsformel“ dargestellte Fläche im Gegensatze zur andern auch an dieser Stelle eine endliche Krümmung behält. Das war es aber gerade, worin eine Verbesserung nötig erschien. Es ist nun zum mindesten möglich und wohl auch wahrscheinlich, daß die Näherungsformel einen hinreichend genau mit der Wirklichkeit übereinstimmenden Wert für die größte vorkommende Biegungsspannung liefert, während die aus der strengen Lösung der Differentialgleichung abgeleitete Formel hierbei vollständig versagt.

Meiner Rechnung habe ich einen analytischen Ausdruck für die Ordinate der elastischen Fläche zu Grunde gelegt, der nach Erfüllung der Grenzbedingungen noch drei verfügbare Konstanten enthält. Das ist die Mindestzahl, die notwendig erscheint, um allzu große Verzerrungen gegenüber der wahren Gestalt der elastischen Fläche zu vermeiden. Natürlich könnte man aber auch den Ansatz so erweitern, daß vier oder auch noch mehr Konstanten für die Ermittlung nach dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten, also für die Anpassung an die wahre Gestalt der elastischen Fläche verfügbar blieben. Es läßt sich von vornherein erwarten und ich habe mich auch noch durch eine besondere Rechnung, die ich hier nicht wiedergeben will, davon überzeugt, daß sich ein vierkonstantiger Ausdruck noch viel genauer als der dreikonstantige an die wahre Gestalt der elastischen Fläche anschmiegt, so zwar, daß sonst kaum noch merkliche Unterschiede bestehen bleiben, während an der belasteten Stelle auch der vierkonstantige Ausdruck zu endlichen Krümmungen und hiermit zu endlichen Spannungen führt.

Ein Ausdruck mit mehr als drei Konstanten verursacht natürlich eine viel größere Rechenarbeit. Aber der Hauptgrund, der mich dazu bewogen hat, zum mindesten vorläufig bei dem einfachen dreigliedrigen Ausdruck stehen zu bleiben, war ein anderer. Ich habe es nämlich als recht zweifelhaft betrachtet, ob ein vierkonstantiger Ausdruck nach der Richtung hin, auf die es dabei allein ankommt, nämlich für die Berechnung der Biegungsspannungen, zu besser mit der Wirklichkeit übereinstimmenden Ergebnissen führen würde, als der einfache dreikonstantige Ausdruck. Eine allzugroße Annäherung an die strenge Lösung der Differentialgleichung darf nämlich hierbei keineswegs angestrebt werden. Denn wir wissen ja bereits, daß die strenge Lösung, die uns von vornherein zu Gebote steht, für die Spannungsberechnung unbrauchbar ist. Eine endgültige Entscheidung dieser Frage wird sich, wie schon bemerkt, erst herbeiführen lassen, wenn zahlreichere Versuchsergebnisse vorliegen, die sich zum Vergleiche mit den aus verschiedenen Annahmen abgeleiteten Folgerungen eignen.

Nummehr wende ich mich zur Durchführung der angekündigten Berechnungen. Dabei setze ich sowohl die Differentialgleichung der Plattenbiegung, als auch einige andere Gleichungen, die mit ihr in engem Zusammenhange stehen, als bereits bekannt voraus. Den Leser, bei dem diese Voraussetzung nicht zutrifft, erlaube ich mir auf Band V meiner „Vorlesungen über Technische Mechanik“ (Leipzig, bei Teubner, 1907) zu verweisen. Man kann dort in § 17 eine Ableitung der Differentialgleichung und der damit zusammenhängenden Gleichungen finden, in der auch die Voraussetzungen ausführlich besprochen sind, von denen man bei der Aufstellung dieser Gleichungen ausgehen muß.

Für rechtwinklige Koordinaten lautet die Differentialgleichung:

$$K \left(\frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \zeta}{\partial y^4} \right) = q \quad (1)$$

Die Koordinaten-Ebene der x und y fällt dabei mit der Mittelebene der Platte zusammen. Unter ζ ist die Ordinate der elastischen Fläche zu verstehen, also die Verschiebung, die ein Punkt der Mittelebene der Platte mit den Koordinaten x und y in der Richtung der z -Achse bei der elastischen Formänderung erfährt. Mit q ist hier die auf die Flächeneinheit der Platte bezogene Belastung bezeichnet, von der angenommen wird, daß sie mit der positiven z -Achse gleich gerichtet ist. Mit K ist zur Abkürzung der Ausdruck

$$K = \frac{m^2 E h^3}{12(m^2 - 1)} \quad (2)$$

bezeichnet, in dem m die Poissonsche Verhältniszahl bedeutet, die gewöhnlich ungefähr gleich 4 gesetzt werden kann, während unter E der Elastizitätsmodul und unter h die Dicke der Platte zu verstehen ist. Da h konstant vorausgesetzt wird, ist auch K eine Konstante, die als ein Maß für die Biegesteifigkeit der Platte anzusehen ist.

Für den hier zu behandelnden Fall, daß die Platte nur eine Einzellast trägt, nimmt übrigens q überall den Wert Null

an, mit Ausnahme der belasteten Stelle. An dieser selbst wäre q unendlich groß zu setzen, wenn man sich die Last buchstäblich genau in einem Punkt vereinigt denken wollte. Aber schon dann, wenn q nur von gleicher Größenordnung mit den in der Platte auftretenden Biegungsspannungen wird, sind an dieser Stelle die bei der Ableitung der Differentialgleichung (1) zu Grunde gelegten Voraussetzungen nicht mehr erfüllt. Jedenfalls darf daher Gl. (1) auf die Angriffsstelle der Last und ihre nächste Umgebung nicht unmittelbar angewendet werden.

Außer Gl. (1) muß ich mich in der Folge auch noch auf einige weitere Gleichungen stützen, die bei der Ableitung von Gl. (1) auftreten und die man ebenfalls an der genannten Stelle nachsehen kann. In einem Schnitt, der im Punkte $x y$ parallel zur YZ -Ebene durch die Platte gelegt wird, treten nämlich Normalspannungen σ_x auf, die sich nach dem Elastizitätsgesetze in der Formänderung, also in der Funktion ζ ausdrücken lassen, nämlich

$$\sigma_x = - \frac{m E}{m^2 - 1} z \left(m \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) \quad (3)$$

worin z den Abstand der betrachteten Stelle von der Mittelebene der Platte bedeutet. Es versteht sich von selbst, daß die Gleichung auch gültig bleibt, wenn man die Zeiger x und y mit einander vertauscht. Für die parallel zur Mittelebene gehenden Schubspannungen τ_{yx} erhält man (vgl. S. 103 a. a. O.)

$$\tau_{yx} = - 2 G z \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \quad (4)$$

wenn mit G der Schubelastizitätsmodul bezeichnet wird.

Endlich kann man noch einen Ausdruck für die Resultierende der Schubspannungen τ_{yz} angeben, die parallel zur Z -Achse in dem vorher schon durch die Platte geführten Schnitt übertragen werden. Bezeichnet man der Einfachheit halber die auf die Längeneinheit des Schnitts bezogene Resultierende dieser Spannungen mit V_{yz} , so hat man (S. 104 a. a. O.)

$$V_{yz} = - K \left(\frac{\partial^3 \zeta}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^2 \partial y} \right) \quad (5)$$

Für die Untersuchung der kreisförmigen Platte setzt man in allen diesen Formeln an Stelle der rechtwinkligen Koordinaten besser Polarkoordinaten r, φ ein. Die Abstände r sollen dabei vom Mittelpunkt der Platte aus gerechnet werden und der Winkel φ soll von jenem Radius aus zählen, der durch den Angriffspunkt der Last geführt werden kann. Die Koordinatentransformation kann leicht ausgeführt werden, wie ebenfalls auf S. 110 des genannten Buches nachgelesen werden kann. Damit geht die Differentialgleichung (1) über in

$$K \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right)^2 \zeta = q \quad (6)$$

Für die Spannungen σ_r und σ_t in radialer und tangentialer Richtung erhält man aus Gl. (3)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= - \frac{m E}{m^2 - 1} z \left(m \frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \varphi^2} \right) \\ \sigma_t &= - \frac{m E}{m^2 - 1} z \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} + m \frac{1}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial r} + m \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \varphi^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

und ebenso aus Gl. (4)

$$\tau_{rt} = - 2 G z \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial \varphi} \right) \quad (8)$$

sowie aus Gl. (5) für die resultierende Schubkraft in einem zum Radius senkrecht stehenden Schnitt

$$V_r = - K \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \varphi^2} \right) \quad (9)$$

Auf Grund der zuletzt angeschriebenen Formeln kennt man auch den Spannungszustand der Platte, sobald der durch die Funktion ζ beschriebene Formänderungszustand ermittelt ist. Von ζ wissen wir zunächst, daß es eine in φ periodische Funktion sein muß, da man an dieselbe Stelle der Platte zurückkommt, wenn man φ um 2π oder ein Vielfaches davon wachsen läßt. Ferner muß ζ auch eine gerade Funktion von φ sein, da die zu einer Einzellast gehörige elastische Fläche eine Symmetrieebene besitzt, die durch den zum Angriffspunkt

gezogenen Radius hindurchgeht, so daß sich ζ nicht ändern darf, wenn man $+\varphi$ durch $-\varphi$ ersetzt. Man kann daher ζ durch eine Fouriersche Reihe darstellen, in der nur Cosinus-Glieder in φ vorkommen. Wir setzen also

$$\zeta = R_0 + R_1 \cos \varphi + \dots + R_n \cos n \varphi + \dots \quad (10)$$

In dieser Entwicklung bedeuten die Koeffizienten R Funktionen von r , die erst noch näher zu bestimmen sind. Zu diesem Zwecke setzen wir den Ausdruck (10) in die Differentialgleichung der Platte ein. Mit Ausnahme der unmittelbaren Nachbarschaft der belasteten Stelle lautet diese Gleichung hier

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right)^2 \zeta = 0 \quad (11)$$

und durch Einsetzen des für ζ aufgestellten Ausdrucks geht sie über in

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^2 R_0 + \cos \varphi \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} \right)^2 R_1 + \dots \\ + \cos n \varphi \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2} \right)^2 R_n + \dots = 0 \end{aligned}$$

Die Gleichung muß bei gegebenem r für jeden Wert von φ erfüllt sein. Wir setzen daher jedes Glied für sich gleich Null, womit wir für jede der unbekanntenen Funktionen R eine gewöhnliche Differentialgleichung von der Form

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2} \right)^2 R_n = 0 \quad (12)$$

erhalten. Diese Gleichungen lassen sich leicht integrieren. Man muß dabei die Fälle $n = 0$ und $n = 1$ für sich behandeln, da sie zu Lösungen führen, die von der allgemeinen Form abweichen. Man erhält

$$\left. \begin{aligned} R_0 &= c_1 r^2 \lg r + c_2 r^2 + c_3 \lg r + c_4 \\ R_1 &= k_1 r + \frac{k_2}{r} + k_3 r^3 + k_4 r \lg r \\ R_n &= b_{1n} r^n + b_{2n} r^{-n} + b_{3n} r^{n+2} + b_{4n} r^{-n+2} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Von der Richtigkeit dieser Lösungen kann man sich durch Ausführung der Probe nachträglich leicht überzeugen. Dabei ist zu beachten, daß R_n nur für $n > 2$ verwendet werden darf. In jeder Funktion kommen vier willkürliche Integrationskonstanten vor, die mit c , k und b und angefügten Zeigern bezeichnet sind und durch deren Wahl die Lösung den vorgeschriebenen Grenzbedingungen angepaßt werden kann.

Durch passende Wahl der Integrationskonstanten läßt sich erreichen, daß die Gleichungen (10) und (13) den Formänderungszustand innerhalb irgend eines Stücks der Plattenfläche, das den Angriffspunkt der Last nicht mit umschließt, richtig beschreiben. Dagegen ist es nicht möglich, den Konstanten solche Werte zu erteilen, daß dieselbe Lösung für die ganze Platte gilt. Denn für jede Wahl, die man treffen könnte, wäre Gl. (11) über die ganze Platte ohne Ausnahme erfüllt und nach Gl. (6) müßte daher q überall gleich Null, also die Platte ganz frei von Lasten sein.

Wir sehen uns daher genötigt, die Platte in zwei Gebiete oder in zwei Schalen zu zerlegen und zwar so, daß der Angriffspunkt der Last auf der Grenzlinie zwischen beiden Gebieten liegt. Dadurch erreichen wir, daß jedes Gebiet für sich im Innern ganz frei von Kräften ist, so daß sich die vorher gefundene Lösung unmittelbar darauf anwenden läßt. Die Lösungen werden für beide Schalen freilich verschieden ausfallen müssen und wir haben dann darauf zu achten, daß sie sich in der Grenzlinie passend aneinanderschließen. Für die Durchführung der Rechnung ist es am bequemsten, als Grenzlinie zwischen beiden Schalen den Kreis zu wählen, der durch den Angriffspunkt der Last vom Plattenmittelpunkt als Kreismittelpunkt aus beschrieben werden kann.

Die Last sei in der Folge mit P und ihr Abstand von der Plattenmitte mit p bezeichnet. Der Halbmesser des Plattenumfangs sei a . Für das von $r = p$ bis $r = a$ reichende äußere Gebiet der Platte mögen die Konstanten c , k , b in der Gl. (13) so bezeichnet sein, wie es dort bereits geschehen ist. Im inneren Gebiet, von $r = 0$ bis $r = p$ gilt dann eine Lösung

von derselben Form, aber mit anderen Konstanten, die von den vorigen durch Beifügen eines oben angebrachten Striches unterschieden werden sollen. An die Seite der Gleichungen (13) treten daher die für die innere Schale gültigen Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} R'_0 &= c'_1 r^2 \lg r + c'_2 r^2 + c'_3 \lg r + c'_4 \\ R'_1 &= k'_1 r + \frac{k'_2}{r} + k'_3 r^3 + k'_4 r \lg r \\ R'_n &= b'_{1n} r^n + b'_{2n} r^{-n} + b'_{3n} r^{n+2} + b'_{4n} r^{-n+2} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Wir sehen uns jetzt nach den Grenzbedingungen um, die sich für die innere Schale aufstellen lassen. In der Plattenmitte, also für $r = 0$ darf ζ nicht unendlich groß werden und außerdem muß man auch immer zu demselben Werte von ζ an dieser Stelle geführt werden, wie man auch η wählen mag; für $r = 0$ müssen daher R'_1 und alle R'_n verschwinden. Daraus folgt zunächst, daß die Konstanten c'_3 k'_2 b'_{2n} b'_{4n} gleich Null zu setzen sind. Dann muß noch k'_4 gleich Null sein,

damit in der Plattenmitte $\frac{\partial \zeta}{\partial r}$ nicht unendlich groß wird und

das Gleiche gilt aus einem ähnlichen Grunde auch für c'_1 . Wäre nämlich c'_1 von Null verschieden, so würde in der Plattenmitte

der Differentialquotient $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2}$ und mit ihm die Krümmung der

Platte unendlich groß und außerdem würde auch die nach Gl. (9) berechnete Schubkraft V_r unendlich groß, was aber, da die Platte in der Mitte unbelastet sein soll, offenbar nicht möglich ist. Auf Grund der Bedingungen in der Plattenmitte gehen daher die Gleichungen (14) über in

$$\left. \begin{aligned} R'_0 &= c'_2 r^2 + c'_4 \\ R'_1 &= k'_1 r + k'_3 r^3 \\ R'_n &= b'_{1n} r^n + b'_{3n} r^{n+2} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Nun kommen die Bedingungen an der Grenze zwischen beiden Schalen. Zunächst muß man für jeden Punkt des Grenzkreises, also bei beliebig gewähltem η , zu denselben Werten

von ζ und von $\frac{\partial \zeta}{\partial r}$ gelangen, gleichgültig ob man den Punkt zur äußeren oder zur inneren Schale rechnet. Aber auch der zweite Differentialquotient von ζ kann bei $r = p$ keinen Sprung beim Übergang von der einen zur anderen Schale machen. Wäre er nämlich zu beiden Seiten der Grenzlinie verschieden groß, so erhielte man nach der ersten der Gleichungen (7) verschiedene Werte von σ_r . In dem Schnitte, der die Grenze zwischen beiden Gebieten bildet, muß man aber zu beiden Seiten nach dem Satze von Aktion und Reaktion gleiche Werte von σ_r erhalten.

Für die Stelle $r = p$ bei beliebigem φ bestehen daher die Grenzbedingungen zwischen beiden Schalen, wenn man zunächst nur auf die von φ freien Glieder achtet,

$$R_0 = R'_0; \quad \frac{d R_0}{d r} = \frac{d R'_0}{d r}; \quad \frac{d^2 R_0}{d r^2} = \frac{d^2 R'_0}{d r^2} \quad (16)$$

wofür man beim Einsetzen der Werte aus den Gleichungen (13) und (15) erhält

$$\left. \begin{aligned} c'_2 p^2 + c'_4 &= c_1 p^2 \lg p + c_2 p^2 + c_3 \lg p + c_4 \\ 2 c'_2 p &= 2 c_1 p \lg p + (c_1 + 2 c_2) p + \frac{c_3}{p} \\ 2 c'_2 &= 2 c_1 \lg p + (3 c_1 + 2 c_2) - \frac{c_3}{p^2} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

und entsprechende Gleichungen lassen sich ebenso für die in R_1, R'_1, R_n, R'_n vorkommenden Konstanten aufstellen.

Die Gleichungen (17) können zunächst dazu verwendet werden, die Konstanten c'_2 und c'_4 der inneren Schale zu berechnen, wenn die Konstanten c_1 bis c_4 der äußeren Schale als gegeben betrachtet werden. Überdies wird aber, da es sich um drei Gleichungen handelt, damit auch noch eine Bedingung zwischen den Konstanten der äußeren Schale ausgesprochen. Aus den beiden letzten Gleichungen findet man nämlich nach Elimination von c'_2

$$c_3 = c_1 p^2$$

Hiermit geht R_0 über in

$$R_0 = c_1 (r^2 + p^2) \lg r + c_2 r^2 + c_4 \quad (18)$$

Für die weitere Ermittlung von R_0 stehen noch die Grenzbedingungen am Rande der Platte zur Verfügung. Wenn die Platte, wie zunächst vorausgesetzt werden soll, am Rande eingespannt ist, bestehen bei $r = a$ und für jedes φ die Bedingungen

$$\zeta = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \zeta}{\partial r} = 0$$

so daß dort insbesondere auch

$$R_0 = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d R_0}{d r} = 0$$

werden muß. Durch Einsetzen des Wertes von R_0 aus Gl. (18) erhält man daraus

$$\begin{aligned} 0 &= c_1 (a^2 + p^2) \lg a + c_2 a^2 + c_4 \\ 0 &= c_1 \left(2 a \lg a + a + \frac{p^2}{a} \right) + 2 c_2 a \end{aligned}$$

Hiermit lassen sich alle Konstanten c und c' in einer, etwa in c_1 ausdrücken und man erhält durch Einsetzen der Werte in die Gleichungen (14) und (18)

$$\begin{aligned} R_0 &= c_1 \left((r^2 + p^2) \lg \frac{r}{a} + \frac{(a^2 + p^2)(a^2 - r^2)}{2 a^2} \right) \\ R_0' &= c_1 \left((r^2 + p^2) \lg \frac{p}{a} + \frac{(a^2 + r^2)(a^2 - p^2)}{2 a^2} \right) \end{aligned} \quad (19)$$

Die gleiche Rechnung, wie sie für R_0 ausführlich angeschrieben wurde, läßt sich ebenso auch für R_1 und R_n wiederholen. Man findet dann für R_1

$$\begin{aligned} R_1 &= k_2 \left(\frac{1}{r} + \frac{2 a^2 - 2 p^2}{a^2 p^2} r + \frac{p^2 - 2 a^2}{a^4 p^2} r^3 - \frac{4 r}{p^2} \lg \frac{a}{r} \right) \\ R_1' &= k_2 \left(\frac{2 a^2 - 2 p^2}{a^2 p^2} r + \frac{(a^2 - p^2)^2}{a^4 p^4} r^3 - \frac{4 r}{p^2} \lg \frac{a}{p} \right) \end{aligned}$$

indem es hier bequemer erschien, alle Konstanten k und k' in k_2 auszudrücken und ebenso

$$R_n = b_{1n} \left\{ \frac{r^n}{a^{2n}} \left((n-1)p^2 - n a^2 + (n-1)r^2 - \frac{n(n-1)p^2 r^2}{n+1 a^2} \right) + \frac{1}{r^n} \left(r^2 - \frac{n-1}{n+1} p^2 \right) \right\}$$

$$R'_n = b_{1n} \left\{ r^n \left((n-1)p^2 a^{-2n} - n a^{2-2n} + p^{2-2n} \right) + (n-1)r^{n+2} \left(a^{-2n} - \frac{n}{n+1} p^2 a^{-2n-2} - \frac{1}{n+1} p^{-2n} \right) \right\}$$

Es bleibt jetzt zur vollständigen Lösung nur noch die Ermittlung der Konstanten c_1 , k_2 und b_{1n} übrig. Hierzu verhilft uns eine weitere Bedingung am Grenzkreise zwischen der inneren und äußeren Schale, die sich auf die dort übertragene Schubkraft V_r bezieht.

Setzt man in Gl. (9) ζ aus Gl. (10) ein, so erhält man, wenn der Wert von V_r bei $r = p$ für die äußere Schale mit V_p und für die innere mit V'_p bezeichnet wird,

$$V_p = -K \left[\frac{d}{dr} \left(\frac{d^2 R_0}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR_0}{dr} \right) + \cos \varphi \frac{d}{dr} \left(\frac{d^2 R_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR_1}{dr} - \frac{1}{r^2} R_1 \right) + \dots + \cos n \varphi \frac{d}{dr} \left(\frac{d^2 R_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR_n}{dr} - \frac{n^2}{r^2} R_n \right) + \dots \right]_{r=p}$$

und für V'_p einen entsprechenden Ausdruck, bei dem nur jedem R oben ein Strich beizufügen ist. Bildet man die Differenz zwischen beiden und beachtet die in den Gleichungen (16) ausgesprochenen Beziehungen, so erhält man

$$V'_p - V_p = K \left[\frac{d^3 R_0}{dr^3} - \frac{d^3 R'_0}{dr^3} + \cos \varphi \left(\frac{d^3 R_1}{dr^3} - \frac{d^3 R'_1}{dr^3} \right) + \dots + \cos n \varphi \left(\frac{d^3 R_n}{dr^3} - \frac{d^3 R'_n}{dr^3} \right) + \dots \right]$$

Nach dem Satze von der Gleichheit zwischen Aktion und Reaktion muß die Differenz für alle Stellen des Grenzkreises gleich Null sein, die unbelastet sind, also überall mit Aus-

nahme der Nachbarschaft des Angriffspunktes der Last P . Da unbestimmt bleibt, wie weit sich diese Nachbarschaft erstreckt, wollen wir zunächst einmal annehmen, die Last P verteile sich nach irgendeinem unbekanntem Gesetze über den ganzen Grenzkreis hin und die davon an der durch den Winkel φ bezeichneten Stelle auf die Längeneinheit treffende Belastung sei II . Dabei ist aber jedenfalls II symmetrisch zu Ebene $\varphi = 0$ verteilt anzunehmen und wenn man über den Halbkreis von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \pi$ integriert, hat man nach der Bedeutung von II die Gleichung

$$\int_0^{\pi} II_p d\varphi = \frac{P}{2}$$

Diese Gleichung gilt für jedes Verteilungsgesetz von II . Je mehr sich aber II in der Nähe der Stelle $\varphi = 0$ anhäuft, also je mehr wir uns dem Falle einer an dieser Stelle zusammengedrängten Einzellast nähern, um so genauer gilt auch noch für jedes n die Gleichung

$$\int_0^{\pi} II_p \cos n\varphi d\varphi = \frac{P}{2}$$

da ja in der Tat der jetzt beigefügte Faktor $\cos n\varphi$ bei $\varphi = 0$ zu Eins wird und daher an dem vorigen Ergebnisse nichts ändert.

Eine längs des Grenzkreises verteilte Last II bewirkt an allen Stellen, an denen II von Null verschieden ist, einen Sprung in der Schubkraft V_p und zwar ist, wie aus der Betrachtung eines Plattenelements zu entnehmen ist, das längs des Grenzkreises von der ersten, senkrecht dazu von der zweiten Ordnung klein ist,

$$II = V'_p - V_p$$

zu setzen. Die Differenz der V_p hatten wir vorher schon gebildet. Es kam dabei auf die Unterschiede zwischen den dritten Differentialquotienten der R und R' an. Differentiiert man

die in den Gleichungen (19) und den folgenden festgestellten Werte der R und R' je dreimal nach r , bildet die Differenzen und setzt sie in die Differenz der V_p ein, so erhält man

$$H = K \left\{ c_1 \frac{4}{p} - k_2 \frac{16}{p^3} \cos \varphi + \dots + \frac{8n(n-1)}{p^{n+1}} b_{4n} \cos n\varphi + \dots \right\}$$

Multipliziert man diese Gleichung mit $p \cos n\varphi$ und integriert sie zwischen $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$, so erhält man b_{4n} und ähnlich die übrigen Konstanten, nämlich

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= \frac{P}{8 K \pi} \\ k_2 &= -\frac{P p^3}{16 K \pi} \\ b_{4n} &= \frac{P p^n}{8 n (n-1) K \pi} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Hiermit ist die Aufgabe vollständig gelöst, ζ als Funktion von r und φ darzustellen. Ich bemerke noch, daß die für R_0 , R'_0 , R_n und R'_n gefundenen Werte dem Inhalte nach vollständig mit den schon von Clebsch angegebenen übereinstimmen, während R_1 und R'_1 von den in dem Buche von Clebsch angegebenen Ausdrücken, die nicht homogen in den Dimensionen sind, abweichen.

Wir wollen die Formeln dazu benutzen, den sogenannten Biegungspfeil, den wir wie üblich mit dem Buchstaben f bezeichnen, auszurechnen. Man versteht darunter die Einsenkung ζ an der Lastangriffsstelle selbst. Dazu müssen wir in den vorhergehenden Formeln $\varphi = 0$ und $r = p$ setzen. Aus Gl. (10) wird dann

$$f = R_{0p} + R_{1p} + \dots + R_{np} + \dots$$

wenn durch Anhängen des Zeigers p angedeutet wird, daß $r = p$ gesetzt werden soll. Für die R findet man nach den Gleichungen (19) und den ihnen folgenden:

$$R_{0p} = \frac{P}{8 K \pi} \left(2 p^2 \lg \frac{p}{a} + \frac{a^4 - p^4}{2 a^2} \right)$$

$$R_{1p} = \frac{P}{16 K \pi} p^2 \left(4 \lg \frac{a}{p} + \frac{4 a^2 p^2 - 3 a^4 - p^4}{a^4} \right)$$

$$R_{2p} = \frac{P}{8n(n-1)K\pi} p^2 \left(2^{(n-1)} \left(\frac{p}{a}\right)^{2n} - \frac{n(n-1)}{n+1} \left(\frac{p}{a}\right)^{2n+2} - n \left(\frac{p}{a}\right)^{2n-2} + \frac{2}{n+1} \right)$$

Durch Einsetzen dieser Werte erhält man nach einer einfachen Umformung

$$f = \frac{P}{16 K \pi} p^2 \left\{ \frac{(a^2 - p^2)^3}{a^4 p^2} + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{4}{n} \left(\frac{p}{a}\right)^{2n} - \frac{2}{n+1} \left(\frac{p}{a}\right)^{2n+2} - \frac{2}{n-1} \left(\frac{p}{a}\right)^{2n-2} + \frac{4}{n(n^2-1)} \right) \right\}$$

Zur Bildung der Summe fassen wir zunächst alle Glieder zusammen, die dieselbe Potenz von $\frac{p}{a}$ enthalten, sagen wir die $2m^{\text{te}}$ Potenz, wobei m irgend eine ganze Zahl sein kann, die größer als 2 ist. Setzen wir $n = m$, so erhalten wir den Beitrag

$$\frac{4}{m} \left(\frac{p}{a}\right)^{2m}$$

Für $n = m - 1$ erhalten wir das Glied

$$- \frac{2}{m} \left(\frac{p}{a}\right)^{2m}$$

von der verlangten Potenz und ebenso für $n = m + 1$ das Glied

$$- \frac{2}{m} \left(\frac{p}{a}\right)^{2m}$$

so daß sich alle Glieder von der Potenz $2m$ gegen einander fortheben. Da m hierbei mindestens gleich 3 sein muß, so bleiben noch Glieder von der 2. und 4. Potenz übrig, die sich nicht fortheben. Damit vereinfacht sich der Ausdruck für f zu

$$f = \frac{P}{16 K \pi} p^2 \left\{ \frac{(a^2 - p^2)^3}{a^4 p^2} + \left(\frac{p}{a}\right)^4 - 2 \left(\frac{p}{a}\right)^2 + 4 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n^2-1)} \right\}$$

$$= \frac{P}{16 K \pi} p^2 \left\{ \frac{a^4 - 3a^2 p^2 + p^4}{a^2 p^2} + 4 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n^2-1)} \right\}$$

Die noch stehen gebliebene Summe konvergiert ziemlich schnell, so daß sie sich leicht annähernd berechnen läßt. Eine einfache Überlegung läßt aber auch den Grenzwert, dem sich die Reihe nähert, leicht angeben, nämlich

$$\sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{1}{n(n^2-1)} = \frac{1}{4}$$

Dies folgt sofort daraus, daß die vorhergehende Formel für f den Wert Null liefern muß, wenn man $p = a$ setzt. Damit erhält man schließlich die einfache Formel für den Biegungs-
pfeil

$$f = \frac{P}{16K\pi} \frac{(a^2 - p^2)^2}{a^2} \quad (21)$$

Setzt man den Wert für K aus Gl. (2) ein und nimmt endlich für die Konstante m den Wert 4 an, so geht die Formel über in

$$f = \frac{3(m^2 - 1)}{4\pi m^2} \cdot \frac{P}{Eh^3} \cdot \frac{(a^2 - p^2)^2}{a^2} = 0,246 \frac{P}{Eh^3} \frac{(a^2 - p^2)^2}{a^2} \quad (22)$$

Für $p = 0$ geht dies in den längst bekannten Wert des Biegungs-
pfeils für die zentrisch belastete Platte über, was zur Kontrolle der Rechnung dient.

Mehr als die Werte für den Biegungs-
pfeil und für die Durchsenkungen ζ überhaupt kann man von der hier vorge-
tragenen Theorie nicht verlangen. Wollte man versuchen, aus ζ mit Hilfe der Gleichungen (7) und (8) die Spannungen zu berechnen, so würde man finden, daß sie an der belasteten Stelle unendlich groß ausfallen, wie dies schon in der Ein-
leitung besprochen wurde.

Ich wende mich jetzt zur frei aufliegenden Platte, für die sich die vorige Rechnung mit geringen Änderungen wiederholen läßt. Bis zu Gl. (18) gilt die vorhergehende Ent-
wicklung ohne Änderungen auch für die frei aufliegende Platte. Dagegen ist die sich daran schließende Randbedingung $\frac{\partial \zeta}{\partial r} = 0$ jetzt durch die andere zu ersetzen, daß bei $r = a$ und für jedes beliebige φ die Spannung σ_r zu Null werden muß. Für

jede der Funktionen R muß daher jetzt mit Rücksicht auf Gl. (7) die Bedingung erfüllt sein

$$\left(m \frac{d^2 R_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR_n}{dr} - \frac{n^2}{r^2} R_n \right)_{r=a} = 0$$

Die Ausrechnung der in den R vorkommenden Konstanten wird etwas, aber nicht viel umständlicher als im vorhergehenden Falle. Ich begnüge mich damit, hier die Schlußergebnisse der Rechnung mitzuteilen. Man erhält

$$R_0 = \frac{Pa^2}{8K\pi} \left\{ \frac{3m+1-(m-1)\frac{p^2}{a^2}}{2(m+1)} \cdot \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) - \frac{r^2+p^2}{a^2} \lg \frac{a}{r} \right\}$$

$$R'_0 = \frac{Pa^2}{8K\pi} \left\{ \frac{3m+1-(m-1)\frac{r^2}{a^2}}{2(m+1)} \cdot \left(1 - \frac{p^2}{a^2} \right) - \frac{r^2+p^2}{a^2} \lg \frac{a}{p} \right\}$$

$$R_1 = \frac{Pa^2}{8K\pi} \left\{ \frac{m+1}{3m+1} \cdot \frac{rp}{a^2} \cdot \frac{r^2+p^2-a^2}{a^2} + \frac{m-1}{2(3m+1)} \cdot \frac{r^3 p^3}{a^6} - \frac{p^3}{2a^2 r} + \frac{2rp}{a^2} \lg \frac{a}{r} \right\}$$

$$R'_1 = \frac{Pa^2}{8K\pi} \left\{ \frac{m+1}{3m+1} \cdot \frac{rp}{a^2} \cdot \frac{r^2+p^2-a^2}{a^2} + \frac{m-1}{2(3m+1)} \cdot \frac{r^3 p^3}{a^6} - \frac{r^3}{2a^2 p} + \frac{2rp}{a^2} \lg \frac{a}{p} \right\}$$

$$R_n = \frac{Pa^2}{8K\pi} \cdot \frac{1}{n(n-1)} \left\{ \left(\frac{p}{r} \right)^n \left(\frac{r^2}{a^2} - \frac{n-1}{n+1} \frac{p^2}{a^2} \right) + \left(\frac{r}{a} \cdot \frac{p}{a} \right)^n \frac{(m+1)(n-1)\frac{p^2}{a^2} - (3m+1)n + (m+1)(n-1)\frac{r^2}{a^2} + (m-1)\frac{n(n-1)p^2 r^2}{n+1} \frac{1}{a^4}}{m(2n+1)+1} \right\}$$

$$R'_n = \frac{Pa^2}{8K\pi} \cdot \frac{1}{n(n-1)} \left\{ \left(\frac{r}{p} \right)^n \left(\frac{p^2}{a^2} - \frac{n-1}{n+1} \frac{r^2}{a^2} \right) + \left(\frac{r}{a} \cdot \frac{p}{a} \right)^n \frac{(m+1)(n-1)\frac{p^2}{a^2} - (3m+1)n + (m+1)(n-1)\frac{r^2}{a^2} + (m-1)\frac{n(n-1)p^2 r^2}{n+1} \frac{1}{a^4}}{m(2n+1)+1} \right\}$$

Die wichtigste Anwendung, die man von diesen Formeln

machen kann, besteht auch in diesem Falle in der Berechnung des Biegungspfeils f . Man hat dafür wieder

$$f = R_{0p} + R_{1p} + \dots + R_{np} + \dots$$

Ein geschlossener Ausdruck für den Biegungspfeil, wie bei der eingespannten Platte, läßt sich hier nicht aufstellen. Der Einfachheit wegen setze ich sofort $m = 4$ ein und erhalte

$$R_{0p} = \frac{Pa^2}{8K\pi} \left\{ \left(1,3 - 0,3 \frac{p^2}{a^2} \right) \left(1 - \frac{p^2}{a^2} \right) - 2 \frac{p^2}{a^2} \lg \frac{a}{p} \right\}$$

$$R_{1p} = \frac{Pa^2}{8K\pi} \left\{ \frac{10}{13} \left(\frac{p}{a} \right)^4 - \frac{23}{26} \frac{p^2}{a^2} + \frac{3}{26} \left(\frac{p}{a} \right)^6 + 2 \frac{p^2}{a^2} \lg \frac{a}{p} \right\}$$

$$R_{np} = \frac{Pa^2}{8K\pi} \left\{ \frac{2}{n(n^2-1)} \frac{p^2}{a^2} + \frac{3}{(n+1)(8n+5)} \left(\frac{p}{a} \right)^{2n+4} + \right. \\ \left. + \frac{10}{n(8n+5)} \left(\frac{p}{a} \right)^{2n+2} - \frac{13}{(n-1)(8n+5)} \left(\frac{p}{a} \right)^{2n} \right\}$$

Damit wird, unter Benützung eines vorher schon gefundenen Ergebnisses,

$$f = \frac{Pa^2}{8K\pi} \left\{ 1,3 - 1,985 \left(\frac{p}{a} \right)^2 + 1,069 \left(\frac{p}{a} \right)^4 + 0,115 \left(\frac{p}{a} \right)^6 + \right. \\ \left. + \sum \frac{1}{8n+5} \left[\frac{3}{n+1} \left(\frac{p}{a} \right)^{2n+4} + \frac{10}{n} \left(\frac{p}{a} \right)^{2n+2} - \frac{13}{n-1} \left(\frac{p}{a} \right)^{2n} \right] \right\}$$

Wenn p einen nicht zu großen Bruchteil von a ausmacht, konvergiert die Reihe schnell. Begnügt man sich damit, die Glieder bis zur sechsten Potenz auszurechnen, so erhält man

$$f = \frac{Pa^2}{8K\pi} \left\{ 1,3 - 1,985 \left(\frac{p}{a} \right)^2 + 0,450 \left(\frac{p}{a} \right)^4 + 0,129 \left(\frac{p}{a} \right)^6 \right\} \quad (23)$$

womit man in praktisch vorliegenden Fällen wohl stets ausreichen wird. Für den Fall der zentrischen Belastung wird, wie der Vergleich von (23) mit (21) lehrt, der Biegungspfeil bei der frei aufliegenden Platte 2,6 mal so groß wie bei der eingespannten, was übrigens schon lange bekannt war.

Hiermit bin ich am Schlusse des ersten Teils meiner Abhandlung angelangt und ich komme zum zweiten Teil meiner Aufgabe, eine Formel aufzufinden, die für die Festigkeits-

berechnung der kreisförmigen Platte geeignet erscheint. Wie ich dabei vorgehen werde, habe ich schon in der Einleitung dargelegt. Ich beginne damit, für ζ den Ausdruck

$$\zeta = R_0 + R_1 \cos \varphi + R_2 \cos 2 \varphi \quad (24)$$

aufzustellen, der im Gegensatze zu Gl. (10) mit 3 Gliedern abschließt. Die drei Funktionen R wähle ich als algebraische Funktionen von möglichst niederem Grade, die mit denselben Koeffizienten für die ganze Platte Gültigkeit haben sollen. Die Koeffizienten werden zunächst nur den Grenzbedingungen am Rande und in der Plattenmitte angepaßt. Dabei setze ich voraus, daß die Platte am Rande frei aufliegt, weil man bei der Festigkeitsberechnung auf eine etwaige Einspannung der Sicherheit wegen in der Regel ohnehin keine Rücksicht nehmen wird. Die diesen Bedingungen genügenden Funktionen möglichst einfacher Zusammensetzung lauten

$$\left. \begin{aligned} R_0 &= k_0 (r^3 - b_0 a r^2 + c_0 a^3) \\ R_1 &= k_1 (r^4 - b_1 a r^3 + c_1 a^3 r) \\ R_2 &= k_2 (r^4 - b_2 a r^3 + c_2 a^2 r^2) \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

mit dem Vorbehalte, daß den mit b und c bezeichneten Koeffizienten erst noch die ihnen zukommenden Werte zu erteilen sind.

Für R_0 hat man zunächst die Grenzbedingung, daß in der Plattenmitte $\frac{d R_0}{d r}$ verschwinden muß. Dies ist nötig, damit sich ein Radius von der Richtung φ an den in die Verlängerung fallenden Radius von der Richtung $\varphi + \pi$ in der Mitte ohne Knick anschließen kann, wozu gehört, daß $\frac{\partial \zeta}{\partial r}$ für φ und für $\varphi + \pi$ gleich groß und von entgegengesetztem Vorzeichen ist. Hiernach darf R_0 kein Glied ersten Grads in r enthalten, was bei dem Ansatz schon berücksichtigt ist. Dann muß R_0 am Rande zu Null werden, woraus die Bestimmungsgleichung für die Konstanten

$$1 - b_0 + c_0 = 0$$

folgt. Endlich muß am Rande σ_r verschwinden. Nach den Gleichungen (7) führt dies zur Bedingung

$$\left(m \frac{d^2 R_0}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d R_0}{dr} \right)_{r=a} = 0$$

oder, wenn man R_0 einsetzt, auf die Gleichung

$$m(6a - 2ab_0) + (3a - 2ab_0) = 0$$

Hiernach hat man zu setzen

$$b_0 = \frac{3(2m+1)}{2(m+1)}; \quad c_0 = \frac{4m+1}{2(m+1)} \quad (26)$$

während die Konstante k_0 von den Grenzbedingungen unabhängig ist und zur anderweitigen Bestimmung verfügbar bleibt.

Für R_1 und R_2 hat man in der Plattenmitte die Grenzbedingung, daß dort beide verschwinden müssen, damit ζ einen eindeutigen, von der Richtung φ unabhängigen Wert annimmt. Daher darf in beiden Ausdrücken kein von r unabhängiges Glied vorkommen, was bei dem gewählten Ansätze bereits berücksichtigt ist. Dann muß

$$\left(\frac{d R_2}{dr} \right)_{r=0} = 0$$

sein, wieder wie bei R_0 wegen des stetigen Anschlusses jedes Radius an den in die Verlängerung fallenden; R_2 darf daher kein Glied ersten Grads enthalten. Bei R_1 ist dies nicht nötig, weil sich in $R_1 \cos \varphi$ das Vorzeichen von selbst umkehrt, wenn man φ durch $\varphi + \pi$ ersetzt. Dagegen muß R_1 in der Mitte der Bedingung

$$\left(\frac{d^2 R_1}{dr^2} \right)_{r=0} = 0$$

genügen, damit sich die Krümmung am Anfang des einen Radius stetig an die des in die Verlängerung fallenden anschließen kann. In der Mitte muß also

$$\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} \right)_{\varphi, r=0} = \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} \right)_{\varphi + \pi, r=0}$$

sein und dies hat zur Folge, daß das mit $\cos \varphi$ behaftete Glied wegfallen muß, während das von φ freie Glied und das mit $\cos 2 \varphi$ behaftete der Bedingung von selbst genügen. Hieraus folgt, daß in R_1 kein Glied zweiten Grads in r vorkommen darf, was auch schon durch den Ansatz erfüllt ist.

Am Rande müssen sowohl R_1 als R_2 verschwinden; ebenso auch die Anteile, die beide zu σ_r liefern. Man hat also für die b und c die Bestimmungsgleichungen

$$\begin{aligned} 1 - b_1 + c_1 &= 0 \\ 1 - b_2 + c_2 &= 0 \\ \left(m \frac{d^2 R_1}{d r^2} + \frac{1}{r} \frac{d R_1}{d r} - \frac{1}{r^2} R_1 \right)_{r=a} &= 0 \\ \left(m \frac{d^2 R_2}{d r^2} + \frac{1}{r} \frac{d R_2}{d r} - \frac{4}{r^2} R_2 \right)_{r=a} &= 0 \end{aligned}$$

Hieraus erhält man für die Konstanten

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= \frac{3(4m+1)}{2(3m+1)}; & c_1 &= \frac{6m+1}{2(3m+1)} \\ b_2 &= \frac{2(5m+1)}{4m+1}; & c_2 &= \frac{6m+1}{4m+1} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

während k_1 und k_2 von den Grenzbedingungen, ebenso wie vorher k_0 , unberührt bleiben.

Nun bilde ich den Ausdruck für die Formänderungsarbeit, die in der Platte aufgespeichert ist, wenn sie die durch ζ in Gl. (24) beschriebene Verbiegung erfahren hat. Die auf die Volumen-Einheit bezogene Formänderungsarbeit beim zweiachsigen Spannungszustand kann bekanntlich

$$A = \frac{1}{2E} \left(\sigma_r^2 + \sigma_t^2 - \frac{2}{m} \sigma_r \sigma_t + \frac{2(m+1)}{m} \tau_{rt}^2 \right)$$

gesetzt werden, in der die σ_r u. s. f. die frühere Bedeutung haben. Setzt man ihre Werte aus den Gleichungen (7) und (8) ein, integriert hierauf über die Höhe, also von $z = -\frac{h}{2}$

bis $z = \frac{h}{2}$ und dann über die Fläche der Platte, so erhält man für die ganze in der Platte aufgespeicherte Arbeit

$$A = \frac{1}{2} K \int_0^a r dr \int_0^{2\pi} d\varphi \left[\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial r} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial \varphi} \right) \right)^2 + \frac{2}{m} \left\{ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial r} \right) - \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial \varphi} \right) \right)^2 \right\} \right] \quad (28)$$

Nun kommt eine ziemlich umfangreiche Ausrechnung von A , die zwar an sich ganz einfach ist und bei der man nur darauf bedacht sein muß, gewöhnliche Rechenfehler zu vermeiden. Der besseren Kontrolle wegen schreibe ich die Ergebnisse so an, wie man sie stufenweise erhält. Zuerst hat man nach Einsetzen von ζ aus (24) und der R aus (25)

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} \right)^2 = k_0^2 (6r - 2b_0 a)^2 \cdot 2\pi + k_1^2 (12r^2 - 6b_1 ar)^2 \pi + k_2^2 (12r^2 - 6b_2 ar + 2c_2 a^2)^2 \pi$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial r} \right)^2 = k_0^2 (3r - 2b_0 a)^2 \cdot 2\pi + k_1^2 (3r^2 - 2b_1 ar)^2 \pi + k_2^2 (b_2 ar - 2c_2 a^2)^2 \pi$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial \varphi} \right) \right)^2 = k_1^2 (3r^2 - 2b_1 ar)^2 \pi + 4k_2^2 (3r^2 - 2b_2 ar + c_2 a^2)^2 \pi$$

Nun bilde ich den ersten, von m freien Teil des in A vorkommenden Integrals und bezeichne ihn mit J_1 , nämlich

$$J_1 = \int_0^a r dr \int_0^{2\pi} d\varphi \left[\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial r} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial \varphi} \right) \right)^2 \right]$$

Durch Einsetzen der vorher schon festgestellten Werte geht dies über in

$$J_1 = k_0^2 \pi a^4 \left(\frac{45}{2} - 24 b_0 + 8 b_0^2 \right) + k_1^2 \pi a^6 \left(\frac{57}{2} - 36 b_1 + 12 b_1^2 \right) + k_2^2 \pi a^6 \left(36 - 48 b_2 + \frac{69}{4} b_2^2 + 24 c_2 - 20 b_2 c_2 + 8 c_2^2 \right)$$

In derselben Weise wird der zweite Bestandteil von A berechnet. Man hat zuerst

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial r} \right) = k_0^2 2\pi (6r - 2b_0 a)(3r - 2b_0 a) + k_1^2 \pi (12r^2 - 6b_1 ar)(3r^2 - 2b_1 ar) + k_2^2 \pi (12r^2 - 6b_2 ar + 2c_2 a^2)(b_2 ar - 2c_2 a^2)$$

Bezeichnet man mit J_2 den Ausdruck

$$J_2 = \int_0^a r dr \int_0^{2\pi} d\varphi \left\{ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial r} \right) - \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial \varphi} \right) \right)^2 \right\}$$

so erhält man jetzt nach Einsetzen der vorher schon festgestellten Integrale nach φ und durch Ausführung der Integration nach r

$$J_2 = k_0^2 \pi a^4 (9 - 12 b_0 + 4 b_0^2) + k_1^2 \pi a^6 \left(\frac{9}{2} - 6 b_1 + 2 b_1^2 \right) + k_2^2 \pi a^6 \left(-6 + 12 b_2 - \frac{11}{2} b_2^2 + 10 b_2 c_2 - 12 c_2 - 4 c_2^2 \right)$$

Im ganzen wird

$$A = \frac{1}{2} K \left(J_1 + \frac{2}{m} J_2 \right)$$

Führt man darin die vorher ermittelten Werte von J_1 und J_2 ein, setzt auch aus den Gleichungen (26) und (27) die Werte der b und c ein, zieht zusammen und vereinfacht den Ausdruck, so erhält man schließlich

$$A = \frac{1}{2} K \left(k_0^2 \pi a^4 \frac{9(5m+1)}{2(m+1)} + k_1^2 \pi a^6 \frac{3(9m+1)}{2(3m+1)} + k_2^2 \pi a^6 \frac{(9m+1)(5m+1)}{(4m+1)^2} \right) \quad (29)$$

Nachdem A berechnet ist, können wir die Koeffizienten k auf Grund des Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten bestimmen. Denken wir uns nämlich mit der gebogenen Platte irgendeine unendlich kleine virtuelle Formänderung vorgenommen, bei der sich auch der Biegungspfeil f um einen kleinen Betrag δf ändern kann, so muß die auf diesem Wege von der Kraft P geleistete Arbeit gleich der durch die virtuelle Formänderung bedingten Änderung im Betrage der potentiellen Energie A sein, also

$$P \delta f = \delta A \quad (30)$$

Diese Gleichung muß für jede virtuelle Verschiebung gelten, die wir aus der Anfangslage heraus vornehmen können, wenn diese Anfangslage die zur Belastung P gehörige Gleichgewichtsfigur bilden soll. Jetzt haben wir freilich von der elastischen Fläche willkürlich vorausgesetzt, daß sie mit hinreichender Genauigkeit durch die Gleichungen (24) und (25) wiedergegeben werden könne. Dann müssen wir aber verlangen, daß Gl. (30) wenigstens für alle virtuellen Verschiebungen erfüllt bleibt, die mit den Gleichungen (24) und (25) noch verträglich sind und die dadurch hervorgebracht werden, daß man mit den Konstanten k kleine Änderungen vornimmt.

Nach Gl. (24) ist der Biegungspfeil f

$$f = R_{0p} + R_{1p} + R_{2p}$$

zu setzen, wofür man mit Rücksicht auf die Gleichungen (25) auch

$$f = k_0 (p^3 - b_0 a p^2 + c_0 a^3) + k_1 (p^4 - b_1 a p^3 + c_1 a^3 p) + k_2 (p^4 - b_2 a p^3 + c_2 a^2 p^2) \quad (31)$$

schreiben kann. Hierdurch und durch Gl. (29) sind f und A als Funktionen der bisher als Konstanten betrachteten Größen k dargestellt, so daß neben ihnen in diesen Gleichungen nur noch gegebene konstante Koeffizienten vorkommen. Eine Veränderungsmöglichkeit von f und A ist nur durch die Variation der k gegeben, so lange wir an der hier zu Grunde gelegten Voraussetzung festhalten, daß es jedenfalls genügt, die elastische Fläche durch die Gleichungen (24) und (25) mit dem Vorbehalte einer

passenden Wahl der k darzustellen. Für die Variationen von f und A in Gl. (30) hat man daher

$$\begin{aligned}\delta f &= \frac{\partial f}{\partial k_0} \delta k_0 + \frac{\partial f}{\partial k_1} \delta k_1 + \frac{\partial f}{\partial k_2} \delta k_2 \\ \delta A &= \frac{\partial A}{\partial k_0} \delta k_0 + \frac{\partial A}{\partial k_1} \delta k_1 + \frac{\partial A}{\partial k_2} \delta k_2\end{aligned}$$

zu setzen, in denen die δk willkürlich gewählt werden können. Gl. (30) zerfällt daher in die folgenden drei Gleichungen

$$P \frac{\partial f}{\partial k_0} = \frac{\partial A}{\partial k_0}; \quad P \frac{\partial f}{\partial k_1} = \frac{\partial A}{\partial k_1}; \quad P \frac{\partial f}{\partial k_2} = \frac{\partial A}{\partial k_2}$$

die nun ohne weiteres zur Ermittlung der k führen. Setzt man die Werte aus den Gleichungen (29) und (31) ein, so lauten die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} P(p^3 - b_0 a p^2 + c_0 a^3) &= k_0 \cdot K \pi a^4 \frac{9(5m+1)}{2(m+1)} \\ P(p^4 - b_1 a p^3 + c_1 a^3 p) &= k_1 \cdot K \pi a^6 \frac{3(9m+1)}{2(3m+1)} \\ P(p^4 - b_2 a p^3 + c_2 a^2 p^2) &= k_2 \cdot K \pi a^6 \frac{(9m+1)(5m+1)}{(4m+1)^2} \end{aligned} \right\} (32)$$

Hiermit haben wir die gewünschte Näherungslösung für die elastische Fläche gefunden und es bleibt nur noch übrig, die Folgerungen abzuleiten, die man daraus gewinnen kann. Zu diesem Zwecke soll zunächst die in Gl. (31) bereits aufgestellte Formel für den Biegungspfeil weiter ausgerechnet werden, obschon dafür bereits ein besser begründeter und voraussichtlich mit der Wirklichkeit genauer übereinstimmender Ausdruck aus der strengen Lösung für die Differentialgleichung der Platte in Gl. (23) aufgestellt worden ist. Die nochmalige Berechnung hat nur den Zweck, einen Vergleich zu ermöglichen, wie weit sich die Näherungslösung von der genauen Lösung entfernt, wenn es sich um die Berechnung der Durchbiegungen handelt. Durch Einsetzen der Werte der k aus den Gleichungen (32) in Gleichung (31) erhält man nach einfacher Umformung

$$f = \frac{Pa^2}{8K\pi} \left\{ \frac{16(m+1)}{9(5m+1)} \left(\left(\frac{p}{a} \right)^3 - b_0 \left(\frac{p}{a} \right)^2 + c_0 \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{16(3m+1)}{3(9m+1)} \left(\left(\frac{p}{a} \right)^4 - b_1 \left(\frac{p}{a} \right)^3 + c_1 \frac{p}{a} \right)^2 + \frac{8(4m+1)^2}{(9m+1)(5m+1)} \left(\left(\frac{p}{a} \right)^4 - b_2 \left(\frac{p}{a} \right)^3 + c_2 \left(\frac{p}{a} \right)^2 \right)^2 \right\}$$

Zur weiteren Ausrechnung setzen wir $m = 4$, lösen die Klammern auf und ordnen nach Potenzen von p ; dann erhalten wir

$$f = \frac{Pa^2}{8K\pi} \left\{ 1,22 - 2,15 \left(\frac{p}{a} \right)^2 + 1,44 \left(\frac{p}{a} \right)^3 + 2,45 \left(\frac{p}{a} \right)^4 - 20,30 \left(\frac{p}{a} \right)^5 + \right. \\ \left. + 34,74 \left(\frac{p}{a} \right)^6 - 22,05 \left(\frac{p}{a} \right)^7 + 4,85 \left(\frac{p}{a} \right)^8 \right\} \quad (33)$$

Zur Kontrolle für die Richtigkeit der Rechnung kann hierbei die Bedingung dienen, daß f für $p = a$ zu Null werden muß: die Summe der positiven Koeffizienten in der Klammer sollte daher gleich der Summe der negativen sein. Ungefähr stimmt dies auch, so daß wenigstens ein größerer Fehler bei der Ausrechnung kaum vorgekommen sein kann.

Für Lasten, die nicht zu nahe beim Umfang der Platte angreifen, wird f nach der genaueren Theorie durch Gl. (23) angegeben. Der Vergleich lehrt, daß Gl. (33) für kleine Werte von p den Biegungsfuß etwas zu klein liefert. Für $p = 0$ macht der Fehler nahezu 7 Prozent des Wertes aus. Für größere Werte von p ist die Übereinstimmung besser. Jedenfalls sieht man aber, daß der für ζ gewählte dreikonstantige Ausdruck die Durchbiegung der ungefähren Größe nach richtig angibt; durch Wahl eines vierkonstantigen Ausdrucks ließe sich eine viel bessere Übereinstimmung erzielen, auf die es aber jetzt nicht ankommt. Die eigentliche Bedeutung der „Näherungslösung“ erblicke ich nur in der Aufstellung einer Formel für die größte vorkommende Spannung.

Hierbei darf von vornherein angenommen werden, daß die größte Beanspruchung der Platte an der belasteten Stelle eintritt. Ferner folgt aus den Symmetrieeigenschaften, daß an dieser Stelle die Spannungen σ_r und σ_t Hauptspannungen sind;

es genügt daher, diese beiden zu berechnen. Um anzudeuten, daß es sich um die Spannungen an der belasteten Stelle handelt, füge ich den Zeiger p unten bei; dabei wird $z = \pm \frac{h}{2}$ angenommen, um die größte vorkommende Spannung zu erhalten.

Nach den Gleichungen (7) hat man

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rp} &= \mp \frac{mEh}{2(m^2-1)} \left(m \frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} + \frac{1}{p} \frac{\partial \zeta}{\partial r} + \frac{1}{p^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \varphi^2} \right)_{r=p, \varphi=0} \\ \sigma_{\iota p} &= \mp \frac{mEh}{2(m^2-1)} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} + \frac{m}{p} \frac{\partial \zeta}{\partial r} + \frac{m}{p^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \varphi^2} \right)_{r=p, \varphi=0} \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Setzt man in diesen Gleichungen ζ aus Gl. (24), hierauf die R aus den Gleichungen (25) und die mit b und c bezeichneten Konstanten aus den Gleichungen (26) und (27) ein, so erhält man für σ_{rp} zunächst

$$\sigma_{rp} = \mp \frac{mEh}{2(m^2-1)} \left\{ k_0 3(2m+1)(p-a) + k_1 3(4m+1)p(p-a) + k_2 \left(12mp^2 - \frac{2(6m-1)(5m+1)}{4m+1} ap + \frac{2(m-1)(6m+1)}{4m+1} a^2 \right) \right\}$$

Man überzeugt sich leicht, daß sich auch in dem mit k_2 behafteten Gliede der Faktor $(p-a)$ herausheben läßt; dadurch erhält man

$$\sigma_{rp} = \pm (a-p) \frac{mEh}{2(m^2-1)} \left\{ 3(2m+1)k_0 + 3(4m+1)k_1 p + k_2 \left(12mp - \frac{2(m-1)(6m+1)}{4m+1} a \right) \right\}$$

Nun sind noch die Koeffizienten k aus den Gleichungen (32) einzuführen. Setzt man darin $m=4$, so hat man für sie

$$\begin{aligned} k_0 &= \frac{10}{189} \frac{P}{aK\pi} \left(\left(\frac{p}{a} \right)^3 - b_0 \left(\frac{p}{a} \right)^2 + c_0 \right) \\ k_1 &= \frac{26}{111} \frac{P}{a^2 K\pi} \left(\left(\frac{p}{a} \right)^4 - b_1 \left(\frac{p}{a} \right)^3 + c_1 \frac{p}{a} \right) \\ k_2 &= \frac{289}{777} \frac{P}{a^2 K\pi} \left(\left(\frac{p}{a} \right)^4 - b_2 \left(\frac{p}{a} \right)^3 + c_2 \left(\frac{p}{a} \right)^2 \right) \end{aligned}$$

Für K ist ferner der Wert aus Gl. (2) einzusetzen und außerdem hat man mit $m = 4$ für die Koeffizienten b und c

$$b_0 = \frac{27}{10}; c_0 = \frac{17}{10}; b_1 = \frac{51}{26}; c_1 = \frac{25}{26}; b_2 = \frac{42}{17}; c_2 = \frac{25}{17}$$

Hiermit geht der Ausdruck für σ_{rp} , wenn man weiterhin das doppelte Vorzeichen wegläßt, über in

$$\sigma_{rp} = \frac{3P}{\pi h^2} \cdot \frac{a-p}{a} \left\{ 1,21 + 1,40 \left(\frac{p}{a}\right)^2 + 17,90 \left(\frac{p}{a}\right)^3 - 35,41 \left(\frac{p}{a}\right)^4 + 14,90 \left(\frac{p}{a}\right)^5 \right\},$$

wofür man nach Ausmultiplizieren mit dem Faktor $a - p$ vor der Klammer auch

$$\sigma_{rp} = \frac{3P}{\pi h^2} \left\{ 1,21 - 1,21 \frac{p}{a} + 1,40 \left(\frac{p}{a}\right)^2 + 16,50 \left(\frac{p}{a}\right)^3 - 53,31 \left(\frac{p}{a}\right)^4 + 50,31 \left(\frac{p}{a}\right)^5 - 14,90 \left(\frac{p}{a}\right)^6 \right\} \quad (35)$$

schreiben kann. Nach einer zuerst von Bach vorgeschlagenen Abschätzung der Spannungen setzt man für die zentrisch belastete Platte gewöhnlich

$$\sigma_{rp} = \frac{3P}{\pi h^2}$$

wobei jedoch auf Grund der Ableitung dieser Formel von vornherein bekannt ist, daß sie jedenfalls etwas zu niedrige Werte liefern muß. Nach Gl. (35) ist diesem ersten Näherungswerte der Faktor 1,21 beizufügen, wenn die Platte in der Mitte belastet ist. Wenn p wächst, wird σ_{rp} kleiner. Führt man die Zahlenrechnung durch für $p = 0,3a$ und für $p = 0,6a$, so erhält man, wenn jetzt der Abstand p durch einen Zeiger ausgedrückt wird, für σ_{rp}

$$\sigma_0 = 1,21 \frac{3P}{\pi h^2}; \sigma_{0,3} = 1,10 \frac{3P}{\pi h^2}; \sigma_{0,6} = 0,86 \frac{3P}{\pi h^2}; \sigma_{1,0} = 0.$$

Um gleiche Biegungsspannungen σ_{rp} hervorzubringen, müssen sich daher Lasten in Abständen von $0,6a$ und $0,3a$ zu einer in der Mitte angreifenden Last erhalten wie 1,4 : 1,1 : 1,0.

Endlich habe ich in derselben Weise auch noch die Spannungen σ_{tp} auf Grund der zweiten der Gleichungen (34) berechnet. Ich begnüge mich damit, das Schlußergebnis dieser Rechnung mitzuteilen; es lautet:

$$\sigma_{tp} = \frac{3P}{\pi h^2} \left\{ 1,21 - 0,81 \frac{p}{a} + 3,58 \left(\frac{p}{a} \right)^2 - 3,40 \left(\frac{p}{a} \right)^3 - \right. \\ \left. - 10,70 \left(\frac{p}{a} \right)^4 + 15,16 \left(\frac{p}{a} \right)^5 - 5,04 \left(\frac{p}{a} \right)^6 \right\} \quad (36)$$

Der Vergleich mit Gl. (35) zeigt, daß für $p = 0$ die beiden Hauptspannungen σ_{rp} und σ_{tp} einander gleich sind, was von vornherein zu erwarten war. Für einen kleinen Abstand p wird σ_{tp} etwas größer als σ_{rp} . Für die Abstände $p = 0,3 a$ und $p = 0,6 a$ erhält man für σ_{tp}

$$1,14 \frac{3P}{\pi h^2} \quad \text{und} \quad 0,84 \cdot \frac{3P}{\pi h^2}$$

Im größeren Abstände von $0,6 a$ erhält man daher σ_{tp} etwas kleiner als σ_{rp} . Die Unterschiede zwischen beiden Hauptspannungen sind aber in allen Fällen unbedeutend.

Beide Hauptspannungen haben übrigens auch gleiches Spannungsvorzeichen. Wenn man von der Annahme ausgeht, daß die Bruchgefahr von der größten Dehnung abhängt, also durch die sogenannte „reduzierte“ Spannung gemessen werde, findet man diese kleiner als jede der beiden Hauptspannungen, nämlich ungefähr gleich drei Vierteln von einer von ihnen. Nach der von Mohr vertretenen Ansicht, die sich in den meisten Fällen besser mit den Erfahrungsergebnissen deckt, kommt es aber bei einem ebenen Spannungszustande mit zwei Hauptspannungen von gleichem Vorzeichen nur auf die größte der beiden Hauptspannungen an, ohne Rücksicht auf den Wert der anderen. Ich möchte daher empfehlen, den größeren der beiden aus den Gleichungen (35) und (36) erhaltenen Werte unmittelbar als Maß für die Beanspruchung des Materials zu benutzen.

Die hier abgeleiteten Formeln für die Biegungsspannungen

sind, wie ich nochmals betonen möchte, die einfachsten, die sich für die exzentrisch belastete Platte aufstellen lassen. Ich nehme an, daß man mit ihnen ausreichen wird, d. h. daß sie genügend genau mit der Wirklichkeit übereinstimmen werden. Sollte jedoch die Erfahrung späterhin lehren, daß sie sich nicht hinreichend bewähren, so würde man daran denken müssen, den hier gewählten dreikonstantigen Ausdruck für ζ durch einen vierkonstantigen zu ersetzen. Das wäre noch in verschiedener Art möglich: man könnte nämlich entweder ein Glied $R_3 \cos 3\varphi$ beifügen oder man könnte auch unter Beibehaltung von Gl. (24) für ζ das Glied R_0 vom vierten anstatt vom dritten Grade annehmen, womit ebenfalls eine weitere, von den Grenzbedingungen unabhängige Konstante gewonnen würde. Das letztere Vorgehen würde ich für das zweckmäßigere halten; ich habe es in der Tat auch selbst schon in Angriff genommen und mich davon überzeugt, daß man hiermit zu einem sehr engen Anschlusse der Näherungslösung an die strenge Lösung der Differentialgleichung gelangt. Aus den schon in der Einleitung besprochenen Gründen sehe ich aber davon ab, jetzt weiter darauf einzugehen.

München, im April 1912.

Neuberechnung des Anschlusses der südbayerischen Dreieckskette an die österreichische Triangulierung bei Salzburg und scheinbare Verschiebung der Hauptdreieckspunkte Watzmann und Rettenstein.

Von **M. Schmidt.**

Mit 3 Tafeln.

Vorgetragen in der Sitzung am 4. Mai 1912.

In dem der 15. Allgemeinen Konferenz der Internationalen Erdmessung in Budapest im Jahre 1906 vorgelegten Bericht über die Gradmessungsarbeiten des K. u. K. Militärgeographischen Instituts in Österreich-Ungarn (S. 180 des I. Teiles der Verhandlungen dieser Konferenz, Berlin 1908) wird erwähnt, daß die aus einer provisorischen Ausgleichung der in den Jahren 1903 und 1904 von österreichischer und bayerischer Seite an der Grenze von Salzburg, Oberösterreich und Nordtirol mit Oberbayern ausgeführten Dreiecksmessungen I. Ordnung berechneten Anschlußseiten Hochgern-Asten und Hochgern-Rettenstein eine gute Übereinstimmung zeigen, was auch in den Sitzungsberichten der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayer. Akademie der Wissenschaften, Bd. XXXVI, 1906, Heft I in der Abhandlung „Die Südbayerische Dreieckskette“ S. 143 rechnerisch näher nachgewiesen ist.

In dem Bericht über die in den Jahren 1906 bis 1908 ausgeführten Gradmessungsarbeiten desselben K. u. K. Instituts (S. 266 des I. Teiles der Verhandlungen der im Jahre 1909 in London abgehaltenen 16. Allgemeinen Konferenz der Internationalen Erdmessung, Berlin 1910) wird jedoch bemerkt, daß die Triangulierungen I. Ordnung in Salzburg, Kärnten und einem Teile von Tirol infolge dessen, daß auf vielen Beobachtungsstationen zu sehr verschiedenen und oft zeitlich weit auseinander liegenden Epochen beobachtet wurde, nicht durchaus befriedigende Resultate ergaben, und daß deshalb in den

genannten Landesteilen 1906 und 1908 Neutriangulierungen notwendig waren, deren Ergebnisse der definitiven Ausgleichung der vorerwähnten Dreiecksmessungen zu grunde gelegt wurden, die nun auch kleine Änderungen der bayerischen Anschlußseiten zur Folge hatten, da die auf den Dreieckspunkten Watzmann und Rettenstein im Jahre 1906 ausgeführten neuen Winkelmessungen gegen die Messungen vom Jahre 1903 merkliche Abweichungen ergaben. Auf den bayerischen Dreieckspunkten Wendelstein, Hochgern und Asten wurden im Jahre 1906 neue Winkelmessungen nicht vorgenommen, da hiefür keinerlei Anlaß bestand. Die auf Grund der Ergänzungsmessungen vom Jahre 1906 durch das K. u. K. Militärgeographische Institut durchgeführte definitive Netzausgleichung hat nun im allgemeinen besser befriedigende Ergebnisse geliefert. In den Anschlußdifferenzen mit den bayerischen Dreiecksseiten ist jedoch eine Vergrößerung eingetreten, die teilweise als eine Folge der in neuer Anordnung und mit anderen Anschlußbedingungen erfolgten Ausgleichung betrachtet werden kann, aber auch durch die nicht ganz geringfügigen Abweichungen der neuen Winkelmessungen veranlaßt erscheint.

In Tabelle I sind die den österreichischen Anschlußdreiecken nach der definitiven Netzausgleichung zukommenden Werte der Dreieckswinkel und Seitenlogarithmen angegeben, welche einer handschriftlichen Mitteilung des K. u. K. Militärgeographischen Instituts entnommen und in der gleichen Form, wie die entsprechenden Werte der provisorischen Ausgleichung Bd. XXXVI, 1906, Heft I, S. 148 der Sitzungsberichte zusammengestellt wurden.

Die im Punkt Watzmann zusammenstossenden Dreiecke sind durch Hinzufügung der Dreieckspunkte Reißrathkopf und Großwand zu einem geschlossenen Kranzsystem ergänzt, welches die nach allen Seiten gesicherte Lage des Punktes Watzmann erkennen läßt; für die neu hinzugekommenen Dreiecke Nr. 16, 17, 18 der Netzskizze (S. 194) mußte jedoch in Tabelle I die ziffermäßige Angabe der Bestimmungsstücke unterbleiben, da deren Zahlenwerte nicht zur Verfügung standen.

Tabelle I.

Zusammenstellung der definitiv ausgeglichenen Winkel und Seiten der österreichischen Anschlussdreiecke.

Dreieck Nr.	Station	Dreieckswinkel		Seitenlogarithm. a. d. öster. Seite Asten-Schafberg berechnet
		ausgeglichen	reduziert	
10	Hochgern	103° 00' 10"89	9"61	4.791 5474.0
	Asten	36 00 45.56	44.28	4.572 1751.3
	Watzmann	40 59 7.39	6.11	4.619 6404.7
	$E = 3"84$	180 00 3.84	0.00	
11	Asten	42° 11' 41"82	39"58	4.656 3523.9
	Schafberg	66 28 55.08	52.84	4.791 5474.0
	Watzmann	71 19 29.83	27.59	4.805 7199.5
	$E = 6"73$	180 00 6.73	0.01	
12	Hochgern	65° 27' 3"30	1"10	4.805 7199.5
	Asten	78 12 27.38	25.18	4.837 6038.3
	Schafberg	36 20 35.92	33.72	4.619 6404.7
	$E = 6"61$	180 00 6.60	0.00	
13	Hochgern	37° 33' 7"59	6"27	4.656 3523.9
	Schafberg	30 08 19.16	17.84	4.572 1751.3
	Watzmann	112 18 37.22	35.90	4.837 6038.3
	$E = 3"97$	180 00 3.97	0.01	
14	Rettenstein	42° 18' 25"22	23"72	4.572 1751.3
	Watzmann	62 48 27.93	26.43	4.693 2308.0
	Hochgern	74 53 11.36	9.86	4.728 8085.0
	$E = 4"51$	180 00 4.51	0.01	
15	Wendelstein	70° 35' 0"05	58"64	4.693 2308.0
	Hochgern	62 29 46.57	45.16	4.666 5747.7
	Rettenstein	46 55 17.61	16.20	4.582 2315.7
	$E = 4"23$	180 00 4.23	0.00	

Entnimmt man dieser Zusammenstellung die den Dreiecken 10 und 15 angehörenden Seitenlogarithmen Hg. Ast. und We. Hg. und vergleicht dieselben mit den entsprechenden, zuvor auf internationales Maß zurückgeführten Werten der südbayerischen Dreiecks-kette von S. 22 der Sitzungsberichte vom Jahre 1910, so erhält man

$$\begin{aligned} \text{Lg. We Hg} &= 4,582\ 2236,0 \text{ (bayer.)} & \text{Lg. Hg Ast} &= 4,619\ 6346,1 \text{ (bayer.)} \\ \text{Lg. We Hg} &= 4,582\ 2315,7 \text{ (österr.)} & \text{Lg. Hg Ast} &= 4,619\ 6404,7 \text{ (österr.)} \\ A_1 &= \text{Lg.}_b - \text{Lg.}_v = -79,7 \cdot 10^{-7} & A_2 &= \text{Lg.}_b - \text{Lg.}_v = -56,6 \cdot 10^{-7} \end{aligned}$$

und im Mittel $A_m = \frac{A_1 + A_2}{2} = -69,1 \cdot 10^{-7}$ oder $15,9 \pm 2,4$ mm pro km = 1 : 62900, während sich bei der vorläufigen Ausgleichung der zehnmal geringere Anschlußwiderspruch von $+6,65 \cdot 10^{-7}$ oder 1,5 mm pro km = 1 : 650 000 ergab.

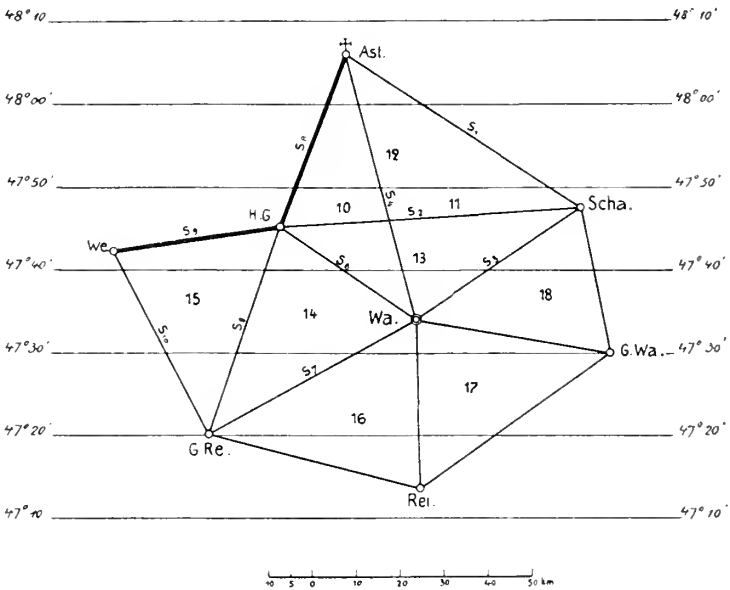


Fig. 1.

Die Seitenlängen der österreichischen Anschlußdreiecke sind ausschließlich aus der Grundlinie bei Josefstadt abgeleitet. Bei

der großen Zahl der Dreiecke, welche die Verbindung mit der genannten Grundlinie vermitteln, ist zu erwarten, daß durch die unvermeidlichen Fehler der Winkelmessung ein nicht unbeträchtlicher Längenübertragungsfehler entsteht, dessen Größe aus der Form der Verbindungsdreiecke und dem mittleren Triangulierungsfehler schätzungsweise bestimmt werden kann. Die durch das K. u. K. Militärgeographische Institut veröffentlichten Netzübersichtskarten und die von Tinter für die österreichische Gradmessungstriangulierung durchgeführte Genauigkeitsberechnung enthalten die für die erwähnte Fehlerberechnung erforderlichen Unterlagen und führen auf einen wahrscheinlichen Wert des Übertragungsfehlers vom ± 86 Einheiten der 7 Lg.-Stelle. Somit findet der oben angegebene Anschlußwiderspruch in den Seitenlogarithmen durch die unvermeidlichen Triangulierungsfehler eine ausreichende Erklärung.

Eine weitere Bestätigung hierfür ergeben die Werte der in den Mitteilungen des K. u. K. Militärgeographischen Instituts Bd. XX, S. 75 aufgeführten, und in Tabelle II wiedergegebenen Anschlußwidersprüche zwischen den aus der Josefstädter Grundlinie berechneten und den durch die direkte Messung erhaltenen Grundlinienlängen.

Tabelle II.

Nr.	Lage der Basis bei	Länge m	Widerspruch		Relativer Fehler
			in m	in mm pro km	
1	Budapest	4248	0.068	16.0	1: 62 470
2	Sarajevo	4061	0.050	12.4	1: 81 220
3	Scutari	3061	0.101	33.2	1: 30 310
4	Eger	4188	0.037	8.8	1: 113 200
5	Kleinmünchen	3163	0.002	0.8	1: 1 581 000
6	Versecz	4023	0.111	27.6	1: 36 240
7	Wiener Neustadt	9484	0.101	10.7	1: 93 900
8	Dubica	2949	0.086	29.1	1: 34 290
9	Kranichfeld	5697	0.040	7.0	1: 142 400
10	Sinj	2475	0.016	6.5	1: 154 700

Berechnet man die den Widersprüchen entsprechenden Kilometerfehler und faßt diese zu einem Durchschnittswerte zusammen, so erhält man, je nachdem der sehr kleine Widerspruchswert der Basis bei Kleinmünchen außer Betracht bleibt oder nicht, die Werte $16,8 \text{ mm/km} = 1 : 59500$ und $15,2 \text{ mm/km} = 1 : 65800$, während der Widerspruch mit den bayerischen Dreiecksseiten $15,9 \text{ mm/km} = 1 : 62900$ beträgt, wobei noch zu berücksichtigen ist, daß diese Dreiecksseiten durch den ihnen anhaftenden Längenübertragungsfehler ebenfalls ungünstig beeinflusst sind, weshalb für sie ein noch etwas größerer Anschlußwiderspruch erklärlich wäre.

Verschiebung der Hauptdreiecksnetzpunkte Watzmann und Rettenstein.

Vergleicht man die aus der vorläufigen und definitiven Ausgleichung hervorgegangenen Logarithmen der Seitenlängen der den Anschluß der südbayerischen Dreieckskette an die Triangulierung von Salzburg und Tirol vermittelnden Dreiecke, die aus den im Jahre 1903 ausgeführten und 1906 ergänzten Winkelmessungen berechnet und in Tabelle III nach den hand-

Tabelle III.

Seiten	Lg s (1906)	Lg s' (1903)	Lg s - Lg s' $E 10^{-7}$	Lg s'' = Lg s' + Δm	Lg s - Lg s'' $E 10^{-7}$	Δs cm	
s ₁	4.805 7199.5	4.805 7123.4	+ 76.1	4.805 7206.4	- 6.9	- 10.1	
s ₂	4.837 6038.3	4.837 5966.9	+ 71.4	4.837 6049.9	- 11.6	- 18.4	
s ₃	4.656 3523.9	4.656 3491.3	+ 32.6	4.656 3574.3	- 50.4	- 52.5	
s ₄	4.791 5474.0	4.791 5403.0	+ 71.0	4.791 5486.0	- 12.0	- 17.1	
s ₅	4.619 6404.7	4.619 6344.7	+ 60.0	4.619 6427.7	- 23.0	- 22.1	
s ₆	4.572 1751.3	4.572 1644.3	+ 107.0	4.572 1727.3	+ 24.0	+ 20.7	
s ₇	4.728 8085.0	4.728 7963.9	+ 121.1	4.728 8046.9	+ 38.1	+ 47.0	
s ₈	4.693 2308.0	4.693 2205.6	+ 102.4	4.693 2288.6	+ 19.4	+ 22.0	
s ₉	4.582 2315.7	4.582 2224.2	+ 91.5	4.582 2307.2	+ 8.5	+ 7.5	
s ₁₀	4.666 5747.7	4.666 5650.9	+ 96.8	4.666 5733.9	+ 13.8	+ 14.7	
			$\Delta m = + 83.0$				

schriftlichen Mitteilungen des K. u. K. Militärgeographischen Instituts zusammengestellt sind, so bemerkt man zwischen denselben nicht unbeträchtliche Unterschiede, welche einen systematischen Charakter zeigen und deshalb einer näheren Betrachtung unterzogen werden sollen.

Da die in Spalte 4 angeführten Unterschiede der Seitenlogarithmen durchaus gleiche Vorzeichen tragen, ist zunächst ihre mittlere Differenz Δ_m gebildet und diese zu den Seitenlogarithmen $Lg s'$ in Spalte 3 hinzugefügt worden. Dadurch werden zwar die neugebildeten Unterschiede $Lg s - Lg s''$ von dem einseitigen Fehler Δ_m befreit und geben nunmehr, wie scheinbare Fehler, die algebraische Summe Null, es bilden sich aber wieder zwei, in den Vorzeichen verschiedene Wertgruppen, in welchen die vom Dreieckspunkt Watzmann auslaufenden beiden Seiten s_3 und s_7 durch besonders große positive und negative Unterschiede hervortreten, während die mit diesen beiden Seiten zunächst verbundenen übrigen Seiten mit ihnen im Vorzeichen übereinstimmende Differenzen zeigen.

Die in Spalte 7 eingetragenen, den Unterschieden der Seitenlogarithmen entsprechenden linearen Differenzen Δ_s lassen ferner erkennen, daß die im Jahre 1906 ausgeführten Ergänzungsmessungen die Seitenlänge s_3 gegenüber dem früheren Werte um 52,5 cm kleiner, die Seitenlänge s_7 dagegen um 47,0 cm größer ergeben, so daß es scheinen könnte, der Dreieckspunkt Watzmann habe sich zwischen den Beobachtungen der Jahre 1903 und 1906 in der Richtung gegen den Punkt Schafberg um etwa 50 cm verschoben.

Eine solche Verschiebung kann auch rechnerisch aus den Unterschieden der auf der Station Watzmann in den beiden genannten Jahren ausgeführten Winkelmessungen nachgewiesen werden. Diese Messungen haben die in Tabelle IV eingetragenen wahrscheinlichen Richtungen und Richtungsunterschiede ergeben, welche in der üblichen Weise von dem Fehler der Nullrichtung befreit und in der Tabelle als reduzierte Richtungsunterschiede eingetragen sind.

Tabelle IV.
Stationstafel Watzmann.

Nr.	Zielpunkt	Wahrscheinliche Richtung		Unterschiede 1906—1903		Ge- näherter Direk- tions- winkel
		beob. 1906	beob. 1903	beob.	reduz.	
1	Reißbrachkopf	0° 0' 0"00	0° 0' 0"00	0"00	+2"05	266°55'
2	Rettenstein	64 26 20.87	64 26 24.74	- 3.87	- 1.82	331 21
3	Hochgern	127 14 48.90	127 14 51.26	- 2.36	- 0.31	34 10
4	Asten	168 13 55.99	168 13 57.98	- 1.99	+ 0.06	75 9
5	Schafberg	239 33 25.67	239 33 27.15	- 1.48	+ 0.57	146 28
6	Großwand	279 47 6.00	279 47 8.59	- 2.59	- 0.54	186 42
				Mittel	- 2.05	+ 2.68 - 2.67

Aus den angegebenen reduzierten Richtungsänderungen kann man nun nach dem Verfahren der Koordinatenausgleichung für Rückwärtseinschneiden die wahrscheinlichsten Werte der Koordinatenänderungen des Stationspunktes Watzmann ableiten und findet für das in der bayerischen Landesvermessung angewendete Koordinatensystem, wenn die Richtung Rettenstein, welche für die hier zu bestimmende Lageänderung des Punktes Watzmann nur geringes Gewicht besitzt, außer Betracht bleibt, die beiden Normalgleichungen

$$\begin{aligned} + 0,55 \, dy - 0,13 \, dx + 1,14 &= 0 \\ - 0,13 \, dy + 0,55 \, dx - 0,05 &= 0 \end{aligned}$$

und aus diesen die Koordinatenänderungen dy und dx nebst ihren mittleren Fehlern

$$\begin{aligned} dx &= - 0,425 \pm 1,32 \, dm \\ dy &= - 2,170 \pm 1,32 \, dm \end{aligned}$$

und den mittleren Richtungsfehler $m = \pm 0^{\circ}95$.

Der Direktionswinkel der Verschiebungsrichtung ergibt sich zu $189^{\circ}10'$ und der Betrag der Verschiebung wird $2,21 \, dm$; die $0,50 \, m$ betragende Änderung der Seitenlängen s_3 und s_7 ist somit nur zur Hälfte durch die berechnete Koordinaten-

änderung der Station Watzmann gedeckt und es entsteht die Frage, ob sich nicht auch für die beiden Punkte Rettenstein und Schafberg ähnliche Verschiebungen nachweisen lassen. Dieser Nachweis kann indessen nur für Rettenstein erbracht werden, da in Schafberg zwar im Jahre 1903, nicht aber auch 1906 Winkelmessungen vorgenommen worden sind. Die in Rettenstein beobachteten Richtungsunterschiede sind aus folgender Tabelle V zu entnehmen.

Tabelle V.
Stationstafel Rettenstein.

Nr.	Zielpunkt	Wahrscheinliche Richtung		Unterschiede 1906—1903		Ge- näherter Direk- tions- winkel
		beob. 1906	beob. 1903	beob.	reduz.	
1	Reißbrachkopf	0° 0' 0"00	0° 0' 0"00	0"00	+ 0"32	193° 35'
2	Großglockner	29 23 15.04	29 23 17.00	— 1.96	— 1.64	222 58
3	Hinterthalkogel	98 5 1.08	98 5 3.53	— 2.45	— 2.13	291 40
4	Rofan	186 6 31.63	186 6 31.86	— 0.23	+ 0.09	19 42
5	Wendelstein	228 32 7.54	228 32 6.35	+ 1.19	+ 1.51	62 7
6	Hochgern	275 27 24.25	275 27 23.80	+ 0.45	+ 0.77	109 2
7	Watzmann	317 45 50.92	317 45 50.19	+ 0.73	+ 1.05	151 21
				Mittel	— 0.32	+ 3.74
						— 3.77

Die mit diesen Richtungsunterschieden in gleicher Weise wie für den Punkt Watzmann und ohne Berücksichtigung der Richtung Watzmann durchgeführte Berechnung der Koordinatenänderungen für Rettenstein führt zu den Normalgleichungen

$$+ 1,58 dy + 0,19 dx - 3,66 = 0$$

$$+ 0,19 dy + 0,75 dx - 0,16 = 0$$

und ergibt als Werte der Koordinatenänderungen

$$dx = - 0,38 \pm 0,84 dm$$

$$dy = + 2,36 \pm 0,58 dm$$

und den mittleren Richtungsfehler $m = \pm 0,72$.

Der Direktionswinkel der Verschiebungsrichtung wird $350^{\circ} 50'$ und die Größe der Verschiebung in dieser Richtung $2,39 \text{ dm}$. Dieselbe ist somit annähernd entgegengesetzt gerichtet, wie jene des Punktes Watzmann. Durch beide Verschiebungen entsteht eine Vergrößerung der Seite s_7 im Gesamtbetrag von $1,75 + 2,25 = 4,00 \text{ dm}$, was der aus der Netzausgleichung hervorgegangenen Vergrößerung dieser Seite von 47 cm ungefähr gleichkommt.

Für die oben erwähnte Verkürzung der Seite Watzmann-Schafberg kann, da die erforderlichen Unterlagen für die Berechnung fehlen, eine ähnliche Kontrolle wie für die Dreiecksseite s_7 durch Ermittlung der Verschiebung ihres zweiten Endpunktes Schafberg nicht erbracht werden.

Ursachen der Verschiebung.

Beobachtete Lageänderungen trigonometrischer Punkte, die sich aus nach längerer Zwischenzeit wiederholten Winkelmessungen ergeben, lassen sich, wenn vermeidliche Beobachtungsfehler ausgeschlossen sind, auf tektonische oder meteorologisch-optische Vorgänge und Einflüsse zurückführen.

Die etwaige Annahme, daß im vorliegenden Falle Zentrierungsfehler an den beobachteten Richtungsunterschieden die Schuld tragen könnten, ist völlig von der Hand zu weisen, da Steinpfeiler zur Aufstellung des Theodolits dienten, deren zentrische Lage über dem unterirdisch festgelegten Dreieckspunkt durch wiederholte Einmessung von zahlreichen Nebenversicherungspunkten mehrfach geprüft worden ist. Besonders sorgfältig sind diese Anmessungen bei dem auf dem Watzmanngipfel Hoheck gelegenen Hauptdreieckspunkt ausgeführt, wie aus der in Fig. 2 nach einer Skizze von Anton Waltenberger wiedergegebenen Darstellung des Berggipfels, die sich bei den Akten des K. Katasterbureaus befindet, ersichtlich ist; dieselbe rührt aus dem Jahre 1880 her und ist durch nachträgliches Einzeichnen des im Jahre 1903 errichteten Steinpfeilers und des darüber erbauten Bocksignales ergänzt worden. In dem bei-

gefügten Lageplan sind die durch Stahlbandmessung bestimmten Abstände der zahlreichen Nebenversicherungspunkte eingetragen. Die eingeklammerten Messungszahlen rühren aus den Jahren

HAUPTDREIECKSPUNKT WATZMANN - HOHECK.

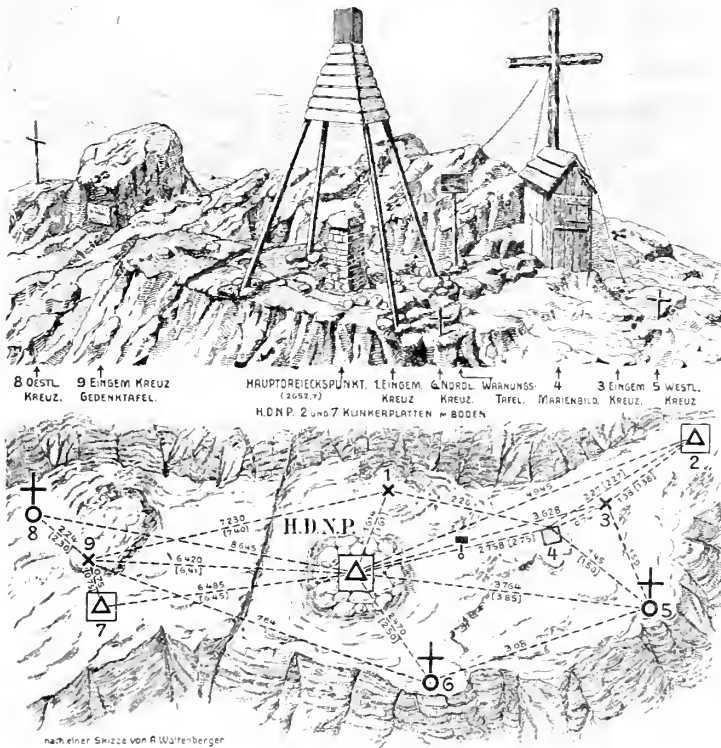


Fig. 2.

1880 und 1894 her, während die Zahlen ohne Klammern die in den Jahren 1907 und 1908, also nach Ausführung der Winkelbeobachtungen, wiederholten Messungen wiedergeben:

dieselben zeigen mit den vor dem Jahre 1903 ermittelten Maßen eine durchaus befriedigende Übereinstimmung, so daß eine merkliche Verschiebung des Hauptdreieckspunktes gegen die auf dem Gipfelplateau des Berges gelegenen Nebenversicherungspunkte nicht eingetreten sein kann. Eine Lageänderung des Hauptdreieckspunktes wäre sonach nur durch eine Bewegung des ganzen Berggipfels denkbar. Eine solche ist aber nicht sehr wahrscheinlich, wenn schon ihre Möglichkeit bei der orographischen Beschaffenheit des Berges nicht ganz ausgeschlossen sein dürfte, zumal mit dem Aufreißen neuer Spalten verbundene Bewegungen im Gipfelgestein in der in Betracht kommenden Zwischenzeit eingetreten sind, wie durch den die Versicherung des Hauptdreieckspunktes auf dem Watzmanngipfel im Herbst des Jahres 1907 kontrollierenden Katasterbeamten bekundet wurde. Derselbe machte hierüber in seinem Bericht vom 10. Oktober 1907 die Angabe, daß der ihn begleitende Bergführer sowohl, als auch der Hüttenwart des Watzmannhauses ihm mitteilten, im Jahre 1905 sei der Beobachtungspfeiler auf dem Hocheck und die darüber errichtete Pyramide durch einen Blitzstrahl zerstört worden, der auch den Felsen neben dem Signal, wie in der Skizze angegeben, spaltete und sogar die Unterstandshütte auf dem Gipfel verschoben habe. Gleichzeitig sei das Gipfelkreuz des jenseits des Wimbachtales gelegenen Hochkalter bei einem fürchterlichen Gewitter vom Blitze getroffen worden und mit einem Teil des Gipfels abgestürzt. Da die Aussicht vollkommen rein war, konnte am Hochkalter die Gipfelspaltung sowie ein riesiges Absturzfeld deutlich wahrgenommen werden. Wegen der sich noch öfter wiederholenden Felsabstürze sei vor der Besteigung gewarnt und die Jagd auf dieser Seite des Berges eingestellt worden.

Es dürfte indessen wohl nicht richtig sein, die vorstehend erwähnten Gipfelspaltungen und Felsabstürze als eine Folge von Blitzschlägen zu betrachten, dieselben sind vielmehr höchst wahrscheinlich durch Erdstöße verursacht worden, die in jener Gegend keine Seltenheit sind.

So berichtet beispielsweise Dr. Jos. Reindl in seinen Er-

gänzungen und Nachträgen zu v. Gümbels Erdbebenkatalog in diesen Sitzungsberichten Bd. XXXV, Jahrg. 1905 über Erdstöße, die am 10. März und 9. Dezember 1904 in der dortigen Gegend auftraten und von so heftigen Erschütterungen begleitet waren, daß sich in mehreren Häusern von Bischofshofen Risse bildeten und die auf den Kästen stehenden Gegenstände herabgeworfen wurden. Auch in Werfen, Berchtesgaden und Marquardstein wurden diese Erdstöße verspürt. Die in den Tafeln I, II und III angefügten photographischen Aufnahmen der drei Watzmann Gipfel lassen deutlich erkennen, daß der ganze Gebirgsstock von zahlreichen, klaffenden Spalten durchsetzt ist und insbesondere der den Dreieckspunkt tragende oberste Gipfel des Hochecks vom Rücken des Berges durch eine mächtige, tief eingreifende Kluft abgetrennt ist, welcher zahlreiche lose Gesteins-trümmer vorgelagert sind. Es erscheint daher wohl möglich, daß die obersten, steil einfallenden Gesteinsschichten des Berggipfels durch Erderschütterungen in Bewegung kommen und auf ihren Lagerflächen kleine Verschiebungen erleiden, welche auch eine Lageänderung des Hauptdreieckspunktes zur Folge haben.

Scheinbare Punktverschiebung durch Seitenrefraktion.

Wenn nach den vorstehenden Ausführungen eine wirkliche Verschiebung der Dreieckspunkte Watzmann und Rettenstein nicht nur möglich, sondern in gewissem Grade sogar wahrscheinlich erscheint, so ist ein stichhaltiger Beweis dafür im Bisherigen doch nicht erbracht. Es entsteht daher die Frage nach einer besseren Erklärung der auf beiden Punkten tatsächlich beobachteten Richtungsänderungen. Eine solche kann in der sogenannten Seitenrefraktion gefunden werden.

Das Vorkommen von Seitenrefraktion beim Messen von Horizontalwinkeln ist durch unmittelbare Beobachtungen vielfach nachgewiesen worden, wie unter anderen Prof. A. Fischer in der Publikation des K. Preuß. Geodätischen Instituts „Der Einfluß der Lateralrefraktion auf das Messen von Horizontalwinkeln, Berlin 1882“ näher ausgeführt hat. Aus den daselbst mit-

geteilten Beobachtungen geht hervor, daß die Größe der Seitenrefraktion durch die Geländebeschaffenheit und die meteorologischen Verhältnisse bedingt ist, besonders wenn die Ziellinien nur in geringer Höhe über dem Boden liegen und somit allen Schwankungen ausgesetzt sind, welche sich infolge der Bodenstrahlung in den unteren Luftschichten vollziehen, die nicht wie in der freien Atmosphäre durch konzentrische Niveauflächen begrenzt sind, sondern sich der Geländeform mehr oder weniger anschmiegen. In den Wärme- und Dichtigkeitsschwankungen dieser Luftschichten ist es nach Fischers Ansicht namentlich begründet, wenn zu verschiedenen Zeiten wiederholt gemessene Winkel Unterschiede zeigen, die außerhalb der Grenzen der reinen Beobachtungsfehler liegen.

Fischer führt hiefür eine ganze Reihe von Belegen aus den Beobachtungen im rheinischen Dreiecksnetz an und weist Richtungsänderungen nach, welche Beträge bis zu 6" erreichen. Auch bei den Winkelmessungen auf dem Stationspunkt „Änger“ der südbayerischen Dreieckskette ist ein ähnlicher Fall von Seitenrefraktion zu verzeichnen.

In der Veröffentlichung der K. Württembergischen Kommission für die Internationale Erdmessung, III. Heft „Triangulierung zur Verbindung des Rheinischen Dreiecksnetzes mit dem bayerischen Hauptdreiecksnetz von E. Hammer, Stuttgart 1892, sind in § 19 die Richtungsbeobachtungen auf der Station Änger und ihre Stationsausgleichung aufgeführt.

Die ungünstigen Witterungsverhältnisse während der Beobachtungen veranlaßten eine große Anzahl Verwerfungen von Messungen, hauptsächlich wegen schlechter Heliotropenlichter. In der Richtung nach Waldburg und Roggenburg wurden von 54 bzw. 52 Doppelbeobachtungen 18 bzw. 16 Nummern verworfen. Die Unterschiede zwischen den größten und kleinsten Richtungswerten betragen bei Waldburg 7,0, bei Bussen 6,3 und bei Roggenburg 5,5 bei Entfernungen von rund 34, 67 und 62 km. Der mittlere Fehler einer in beiden Fernrohrlagen mit je zwei Mikroskopablesungen beobachteten Richtung ergab

sich dabei zu $\pm 1,3$ und für das Hauptmittel aus 36 Beobachtungen zu $\pm 0,22$.

Der Winkel Waldburg-Roggenburg fand sich bei diesen im Jahr 1886 ausgeführten Messungen zu $86^{\circ} 38' 52,16 \pm 0,22$, während sich für denselben Winkel bei den auf dem gleichen Stationspfeiler im Jahre 1903 durch einen bayerischen Beobachter vorgenommenen Messungen der um $2,57$ kleinere Wert $86^{\circ} 38' 49,59 \pm 0,21$ ergab. Die 62 km lange Ziellinie Änger-Roggenburg verläuft zwischen dem in 1124 m Meereshöhe gelegenen Stationspfeiler Änger nach der 605 m hohen Spitze des Kirchturmes von Roggenburg zum größten Teil längs des die Täler der Günz und der Iller trennenden Höhenzuges. Sie liegt in 700 m Entfernung von Änger in geringer Höhe über dem flachen Rücken des Kreuzlesberges, wobei die Lichtkurve offenbar in den Einflußbereich der Bodenstrahlung fällt und im Jahr 1886 eine seitliche Ablenkung erfahren zu haben scheint, während bei den Messungen vom Jahr 1903 ein solcher Einfluß nicht nachweisbar ist; dafür zeugt der gute Horizontalabschluß der in diesem Jahre auf Änger beobachteten Winkel, welche zusammen mit den von Dr. Oertel im Jahre 1893 auf demselben Pfeiler ausgeführten Winkelmessungen, wie die Stationstafel VI ersehen läßt, nur einen Widerspruch von $0,59$ ergeben.

Tabelle VI.
Stationstafel Änger.

Nr.	Zielrichtung	Gemessene Winkel	Mittlere Fehler	Beobachter
1	Waldburg	$86^{\circ} 38' 49,59$	$\pm 0,21$	Wölfel 1903
2	Roggenburg	20 4 57.83	$\pm 0,23$	Wölfel 1903
3	Kirchheim	56 37 55.91	$\pm 0,50$	Oertel 1893
4	Peißenberg	64 49 14.30	$\pm 0,54$	Oertel 1893
5	Grüntten	131 49 2.96	$\pm 0,38$	Oertel 1893
6	Waldburg			
		360 00 0.59	$\pm 1,06$	

Da der vorerwähnte Winkel durch die 1886 ausgeführten Richtungsbeobachtungen um $2^{\circ}57'$ größer gefunden wurde als durch die Winkelmessungen vom Jahre 1903, so ergibt sich hieraus, wenn die Richtung nach Waldburg als unverändert angenommen wird, für den 62 km entfernten Punkt Roggenburg eine scheinbare Verschiebung in westöstlicher Richtung von 0,77 m.

Für die auch in anderen Fällen vielfach beobachtete seitliche Ablenkung der Lichtkurve, wenn diese auch nicht in unmittelbarer Bodennähe liegt, sondern tiefe Talsenkungen übersetzt oder in der Richtung der Rückenlinien von Bergzügen längs der Talwände verläuft, läßt sich folgende optisch-meteorologische Erklärung geben.

Die Theorie der atmosphärischen Strahlenbrechung nimmt an, daß die die Erdoberfläche umhüllende Luftmasse gegen die Erde hin an Dichtigkeit zunimmt und daß die Flächen gleicher Dichtigkeit und Temperatur Niveauflächen sind, welche parallel zum Meeresniveau verlaufen und die kugelförmig gedachte Erde in konzentrischen Kugelschalen umgeben.

Gewisse meteorologische Erscheinungen und in größeren Höhen über der Bodenfläche vorgenommene Temperaturmessungen, sowie das Auftreten scharf begrenzter Wolkenschichten lassen erkennen, daß sich in der Atmosphäre Schichtungsflächen bilden, welche sich bald mehr oder weniger der natürlichen Erdoberfläche anschmiegen. Diese Erscheinungen treten besonders bei ruhiger Luft an Bergabhängen und über Talsenkungen hervor, wobei sich die erwähnten Schichtungsflächen von den Kammlinien der Bergzüge oder den Talrändern aus gegen das Vorland und den Talboden hin senken. Aber auch bei bewegter Luft und insbesondere bei Föhnlage ist festgestellt worden, daß die über den Gebirgskamm in das Vorland abfließenden erwärmten Luftmassen die Bodenfläche erst in einem Abstand von 50 bis 60 km vom Gebirge erreichen, was sich dadurch bemerkbar macht, daß in dieser Entfernung warme Bodenwinde auftreten, während näher am Gebirge kalte Luftmassen lagern, welche nach oben durch geneigte Schich-

tungsf lächen begrenzt sind. Darüber befinden sich wärmere Luftschichten, deren Begrenzungsflächen im allgemeinen dieselbe Neigung aufweisen, wie die Begrenzungsflächen der über dem Boden lagernden kalten Luftmassen.

Durchdringt nun ein unter dem Winkel h gegen die Niveaufläche geneigter Lichtstrahl in einer parallel zur Kamm- linie eines Höhenzuges liegenden Zielrichtung diese Schicht- flächen, so steht seine Brechungsebene senkrecht zu dieser Fläche und bildet nach Fig. 3 mit der Normalen zur Niveaufläche den gleichen Winkel i , welchen die Falllinie der Schicht- fläche mit der Niveaufläche einschließt.

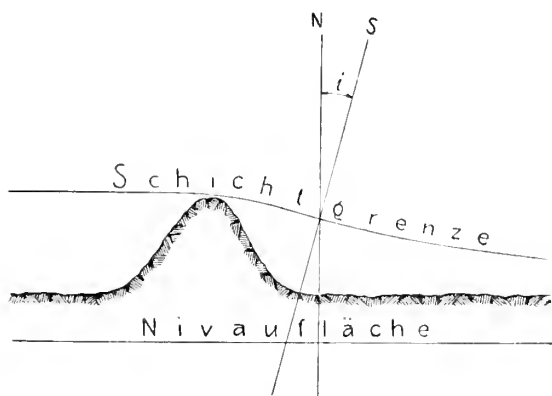


Fig. 3.

Wird nun die Richtung der Horizontalprojektion der geneigten Ziellinie, die nach einem in der Brechungsebene liegenden Zielpunkt läuft, durch Winkelmessung mit dem Theodolit bestimmt, so ergibt sich derselbe Richtungsfehler da , welchen man bei Richtungsbeobachtungen mit einem Theodolit erhält, dessen Kippachse den Neigungsfehler i und dessen Ziellinie die Neigung h besitzt. Dieser Fehler kann bekanntlich durch den Ausdruck bestimmt werden

$$\sin da = \operatorname{tg} i \cdot \operatorname{tg} h$$

oder für kleine Winkel i durch: $da = i \cdot \operatorname{tg} h$.

Bildet die Ziellinie mit der Streichrichtung der Schichtfläche den Winkel φ , so erhält man den entsprechenden Richtungsfehler der Ziellinie

$$da = i \cos \varphi \cdot \operatorname{tg} h.$$

welcher für $\varphi = 90^\circ$, d. h. in der Fallrichtung der Schichtfläche zu Null wird. Der ungünstigste Wert von $da = i \operatorname{tg} h$ findet sich für $\cos \varphi = 1$, wenn, wie in der Figur angenommen ist, die Zielrichtung parallel mit der Kammlinie des Höhenzuges verläuft.

Nimmt man die Neigung der Ziellinie, wie es bei Hauptdreiecksmessungen vorkommt, zu 1° , 2° bzw. 3° und setzt man $da = 1''$ bzw. $5''$, so erhält man aus der Gleichung $da = i \cdot \operatorname{tg} h$ für i die entsprechenden Werte

$$\begin{array}{rcc} i_1 = 57,3 & 28,6 & 19,1 \\ i_5 = 4,8 & 2,4 & 1,6 \end{array}$$

Abweichungen im Parallelismus zwischen Luftschichten gleicher Dichte und den Niveauflächen der Erde von dieser Größenordnung erscheinen aber durchaus möglich und werden im Falle ihres Vorkommens eine seitliche Ablenkung der Ziellinie von mehreren Bogensekunden verursachen können.

Die vielfach bei Winkelmessungen auftretenden kleinen Änderungen einzelner Zielrichtungen, die man als Seitenrefraktion bezeichnet, können daher durch meteorologisch-optische Vorgänge der erwähnten Art erklärt werden.

Über den Sinn der absoluten Bewegung von Körpern.

Von **E. Gehrcke.**

Vorgelegt von H. v. Seeliger in der Sitzung am 4. Mai 1912.

§ 1. Über die „absolute Bewegung“ eines Körpers sind in der Literatur die verschiedensten Ansichten geäußert worden. Während Streintz¹⁾ die Meinung Newtons von der Existenz einer absoluten Bewegung teilt, erklärt Mach²⁾, daß es für ihn nur relative Bewegung gebe. Johannesson³⁾ ist der Ansicht, daß die Meinungsverschiedenheit über die absolute und relative Bewegung auf einer Doppelsinnigkeit des Wortes Raum beruht. Seeliger⁴⁾ hält einerseits die Begriffe absoluter Raum, absolute Bewegung, absolute Ruhe für sinnlos, andererseits will er gegen diese Ausdrücke, sofern man sie wirklich faßbaren Begriffen zuordne, nichts einwenden. Seitdem man in die Physik ein neues Grundprinzip, das Prinzip der Relativität, einzuführen versucht hat, gewann auch die absolute Bewegung wieder erneutes Interesse. Nach Einstein⁵⁾ ist

¹⁾ H. Streintz, Die physikalischen Grundlagen der Mechanik. Leipzig 1883.

²⁾ E. Mach, Die Mechanik in ihrer Entwicklung. 5. Auflage. Leipzig 1904, S. 252.

³⁾ P. Johannesson, Das Beharrungsgesetz. Wissenschaftl. Beilage zum Jahresber. d. Sophien-Real-Gymnasiums in Berlin. Gaertners Verlag 1896, S. 13.

⁴⁾ H. Seeliger, Sitzungsber. d. K. Bayer. Akad. d. Wiss. München 36, 85–137. 1906.

⁵⁾ A. Einstein, Vierteljahrsschr. d. Naturforsch. Gesellsch. Zürich. 27. Nov. 1911, S. 1.

neuerdings das Relativitätsprinzip beschränkt auf genau geradlinig und gleichförmig bewegte Körper. Andererseits hat Maxwell¹⁾ hervorgehoben, daß alle translatorischen Bewegungen, auch die ungleichförmigen, relative seien, im Gegensatz zu den absoluten Rotationsbewegungen. Lotze²⁾ hielt sowohl absolute Translation wie Rotation für möglich.

Diese Aufzählung ließe sich weiter vervollständigen³⁾. Wenn alle die angeführten Urteile auf ein und denselben Gegenstand Bezug hätten, würden eine Reihe sich diametral gegenüberstehender Ansichten vorliegen. Im möchte nun im folgenden auseinandersetzen, wie die verschiedenen Meinungen über die absolute Bewegung zu verstehen sind, und insbesondere den sehr verschiedenen Sinn, der dem Wort „absolut“ beigelegt wird, näher erörtern. Dabei schließe ich mich dem Urteil Johannessons an, daß von den verschiedenen Autoren „die einen von Bewegungen sprechen, die nur im Denken zu erfassen sind, die andern von solchen, die zur Sinneswelt gehören“. Ich glaube, daß dieser Gesichtspunkt, wenn man ihn weiter verfolgt, aufklärt und manches Rätsel löst. Insbesondere möchte ich bei den weiteren Betrachtungen die Nationalität der Forscher in Rücksicht gezogen wissen: demgemäß unterscheide ich einen deutschen und einen englischen Begriff der absoluten Bewegung. Hierdurch wird meines Erachtens das Verständnis für die bei dem Ausdruck „absolute Bewegung“ in jedem ausgelösten, teils klaren, teils unklaren Gedanken und Vorstellungen erleichtert.

§ 2. Die deutsche Auffassung des Wortes „absolut“ bezeichnet etwas Ideales, Unbestimmtes, Transzendentes, dessen Inhalt sich nicht ganz leicht angeben läßt. Das „Absolute“ ist etwas Erhabenes, Letztes, hinter dem es nichts mehr gibt, etwas an sich Seiendes, oder wie man sonst noch sagen will.

1) Cl. Maxwell, Substanz und Bewegung. Deutsche Übersetz. von Fleischl, S. 29, 1881.

2) H. Lotze, Grundzüge der Naturphilosophie, S. 7. Leipzig 1882.

3) Vgl. z. B. A. Voss, Encyclopaedie der mathemat. Wiss. IV, 1. Leipzig 1901—1908. Teubners Verlag.

Eine absolute Bewegung stellt somit eine Bewegung an sich vor, ohne Bezugnahme auf etwas, was nicht mit dem Bewegten selbst identisch wäre, also z. B. die Bewegung eines einzelnen Körpers im vollständig leeren, mathematischen Raume.

Bei näherem Zusehen zerfließt aber die so definierte „absolute Bewegung“ in ein Nichts, denn wenn wir versuchen, sie präzise zu denken oder vorzustellen, so geraten wir in große Schwierigkeiten. Der erste, welcher dies erkannt hat, war wohl Euler¹⁾; dieser machte darauf aufmerksam, daß die Ausdrücke „Lage“ und „Bewegung“ die Bezugnahme auf ein äußeres Substrat verlangen. Hiernach ist eine absolute Bewegung eines Körpers unerkennbar, sie ist darum ein Begriff ohne vorstellbare Bedeutung. — Ich glaube nicht fehlzugehen, wenn ich annehme, daß es der soeben erörterte Sinn der Worte „absolute Bewegung“ ist, gegen den sich verschiedene Autoren wenden, die eine völlige Vermeidung dieses Ausdruckes für angezeigt halten.

Wenn man eingesehen hat, daß die Bewegung oder Ruhe eines Körpers ein äußeres Substrat erfordert, auf das der Bewegungszustand zu beziehen ist, daß also nur relative Bewegungen vorgestellt werden können, so wird man sich nach einem besonders geeigneten Substrat umsehen. Man kann z. B. die Bewegung eines Körpers auf einen beliebigen, außerdem noch vorhandenen Körper beziehen, relativ zu dem die Bewegung beschrieben werden kann. Euler verwarf diesen Ausweg und wandte sich zu einem andern Substrat. Diesem liegt eine eigenartige Raumauffassung, die bereits Newton gehabt hat, zu Grunde: es wird nämlich der gesamte Raum als Substrat für Bewegungen genommen. In der Tat läßt sich, ebenso wie jedes beliebige, geometrische Gebilde (Punkt, Linie, Körper) von endlicher oder unendlicher Ausdehnung, ja auch der gesamte Bereich aller Punkte des unendlichen Raumes, d. h. dieser selbst, als Bezugskörper für Bewegungen in Gedanken verwenden. Hiermit wird dann stillschweigend meist die Voraus-

¹⁾ Vgl. Streintz, l. c. S. 35.

setzung verknüpft, daß der unendliche Raum materielle Beschaffenheit hat. Zur Erkennung oder Angabe eines Bewegungszustandes bedarf man nun keiner besonderen Hilfskörper mehr, es ist eine Bezugnahme auf die unendlich vielen Punkte des materialisierten Raumes selbst möglich. Man kann nun auch wieder von absoluter Bewegung sprechen: eine absolute Bewegung ist in diesem Sinne also eine solche, die relativ zu dem materiell gedachten Raume vor sich geht.

Nach der bemerkenswerten Idee eines materialisierten Raumes hat jeder Punkt, jede Linie eine ganz bestimmte „Lage im Raum“. Da diese Auffassung eine weite Verbreitung in vielen mathematischen und physikalischen Schriften gefunden hat, so ist zu vermuten, daß ein bestimmter, einfacher Grund dafür da ist, welcher bewirkte, daß die höchst willkürliche Materialisierung des Raumes vielen sympathisch und plausibel erschienen ist. Man denkt hier wohl zunächst an eine Ätherhypothese, eine solche kommt indes, wie schon Seeliger¹⁾ hervorgehoben hat, nicht in Betracht. Ich habe mir folgende Erklärung gebildet: Bei der Verdeutlichung einer gedachten Bewegung, z. B. derjenigen eines Punktes, pflegt man auf Papier oder auf der Tafel eine Zeichnung zu entwerfen; relativ zu dieser Zeichnung denkt man sich die Bewegung vor sich gehen. Ebenso wie jeder Punkt und jede Linie eine ganz bestimmte Lage auf dem Material der Zeichnung (z. B. Schreibpapier) einnimmt, kann man sich räumlich etwas Ähnliches vorstellen. Man gelangt so zu dem materialisierten Raum, in welchem, wie auf einer Unterlage, allen Punkten und Linien ein ganz bestimmter Platz zugewiesen ist. Wer die Idee dieses materialisierten Raumes teilt, drückt damit nur aus, daß er die Abstraktion des reinen, mathematischen Raumes nicht streng vollzieht. Die absolute Bewegung eines Körpers im Sinne Eulers ist hiernach im Grunde nur die Bewegung relativ zu einem unendlich ausgedehnten, materiellen Gerüst, an welchem der Körper irgendwie haftend gedacht wird. Durch diese triviale

¹⁾ Seeliger, l. c. S. 91.

Erklärung, die ich so lange teilen möchte, bis eine bessere gefunden ist, wird wohl das Rätsel gelöst, welches Streintz¹⁾ darin erblickt, daß Euler in ein und demselben Werke „zwei sich geradezu bekämpfende Ansichten“, die beide „mit Nachdruck und Überzeugung verteidigt werden“, geäußert hat. Man sieht, daß Euler sich durchaus nicht widerspricht; seine Bezeichnungsweise „absolute Bewegung“ ist allerdings irreführend, sie dürfte aber einen oben charakterisierten, ganz bestimmten Sinn haben. Dieser selbe Sinn liegt, wie ich glaube, auch den Ausführungen mancher anderer Autoren, deren Interessen vorwiegend mathematische waren, zu Grunde (Lagrange, Laplace u. a., vgl. z. B. Seeliger, l. c. S. 91). Es mag übrigens bemerkt werden, daß die Vorstellung des materialisierten Raumes für jeden Geometer durchaus gefahrlos ist, da geometrische Fehler daraus nicht entspringen können.

Hiernach ergibt sich folgender Schluß: Ob wir die Vorstellung eines materialisierten Raumes annehmen oder nicht, es bleibt nur die Möglichkeit, jede Bewegung, die wir klar denken oder vorstellen wollen, phoronomisch als relative aufzufassen, nämlich relativ zu irgendwelchen beliebigen, geometrischen Gebilden oder deren Teilen, wie Punkt, Linie, Fläche oder Körper. Es ist dabei ohne Belang, ob wir uns ein solches Gebilde endlich begrenzt denken oder nicht, und ob wir ihm einen materiellen Inhalt zulegen. Eine absolute Bewegung eines einzelnen Punktes oder Körpers (oder sonst eines geometrischen Gebildes) bleibt phoronomisch eine leere Fiktion, wenn wir mit der Bezeichnung „absolut“ die Beziehungslosigkeit auf irgend ein Substrat ausdrücken wollen. Alles dies gilt ganz allgemein für jede Art von Bewegung, also für beliebige gleichförmige und ungleichförmige Translation und Rotation.

§ 3. Unsere Betrachtungen in § 2 waren rein phoronomische, abstrakte. Die Bewegungsvorgänge waren gedachte, im mathematischen Raume unserer Raumanschauung vor sich gehende, und nur beiläufig wurde eine materielle Reproduktion

¹⁾ L. c. S. 45.

einer Bewegung, z. B. durch eine Zeichnung, als Krücke zur Unterstützung der Vorstellung zugelassen. Wie es mit der Bewegung greifbarer Körper in der Natur bestellt ist, haben wir nicht erörtert. Jetzt wollen wir dies aber tun und von Erfahrungen und Beobachtungen an Naturkörpern ausgehen; die Bewegungsvorgänge, die wir jetzt betrachten, wollen wir also als im physikalischen Raume wirklich erfolgend voraussetzen. Wir nehmen dann den Standpunkt ein, von dem aus das englische Denken vornehmlich Bewegungsvorgänge betrachtet und wollen uns fragen, was man nunmehr unter einer „absoluten Bewegung“ zu verstehen hat.

Die Erfahrung lehrt, daß wir bei der Beurteilung von Bewegungsvorgängen in der Natur zuweilen nicht sicher anzugeben vermögen, welcher von zwei relativ zueinander bewegten Körpern ruht und welcher sich bewegt. Ruhe und Bewegung wird dabei in sehr vielen Fällen phoronomisch auf die Erde als Bezugsstandpunkt bezogen. Nun wissen wir aber, daß auch die Erde sich bewegt, nämlich einmal um sich selbst und sodann um die Sonne; auch die letztere bewegt sich wieder relativ zum Fixsternhimmel usw. Die Sache erscheint mithin äußerst kompliziert. Als absolute Bewegung werden wir jetzt eine solche bezeichnen, welche unabhängig von der willkürlichen Wahl irgend eines Bezugsstandpunktes unverkennbar die für eine Bewegung charakteristischen, physikalischen Merkmale aufweist. Die so definierte, absolute Bewegung bezeichnet also etwas ganz anderes als diejenige in § 2. Daher wäre eine besondere Bezeichnung angebracht, um keine Verwechslung hervorzurufen; man kann aber zweifelhaft sein, bei welcher Definition, ob bei der früheren in § 2 oder bei der soeben aufgestellten, das Kennwort „absolut“ mit größerem Recht beizubehalten ist. Aus diesem Grunde und da wohl kein Mißverständnis mehr möglich ist, wollen wir hier die Einführung einer besonderen Bezeichnung unterlassen.

Es ist nun klar, daß aus dem phoronomischen Verhalten der Naturkörper zueinander niemals auf eine bestimmte Bewegung, die unabhängig vom Bezugsstandpunkt ist, also auf

eine absolute Bewegung, geschlossen werden kann, denn nur eine phoronomisch relative Bewegung ist phoronomisch definierbar und erkennbar. Dies schließt aber nicht aus, daß ein Naturkörper zuweilen gewisse physikalische Merkmale aufweist, aus deren Vorhandensein indirekt auf Bewegung zu schließen ist. Hierzu bedarf es keiner phoronomischen Beziehung, insbesondere keines bestimmten Bezugsstandpunktes; es ist nicht einmal nötig, daß ein solcher als materieller Körper vorhanden ist.

Daß in dem zuletzt erörterten Sinne alle Rotationsbewegungen, in denen Zentrifugalkräfte auftreten, als absolute anzusehen sind, hat Newton erkannt. Die Darlegungen Newtons leiden meines Erachtens an keinem Widerspruch und an keiner Unklarheit, vielmehr kann man nur bewundern, bis zu welcher Tiefe Newton die mechanischen Vorgänge zu durchdringen vermochte. Wohl aber haben diejenigen Autoren, die einer absoluten Bewegung durchaus die in § 2 erörterte Bedeutung geben wollen, in Newtons Darlegungen Unklarheiten empfunden, und zwar, wie ich meine, infolge mißverständlicher Bedeutung des Wortes „absolut“. Hier ist wohl in erster Linie Mach¹⁾ zu zitieren, der ausdrücklich gegen Newton Stellung nimmt und keinen prinzipiellen Unterschied zwischen Translation und Rotation gelten lassen will. Ich erblicke den Grund für diese scheinbare Meinungsverschiedenheit darin, daß Mach die Rotation mehr vom phoronomischen, Newton mehr vom physikalischen Standpunkt aus ansieht. Ich habe dies auch schon bei früherer Gelegenheit angedeutet²⁾. — Es sei in diesem Zusammenhange noch erwähnt, daß Kant³⁾ die Darlegungen Newtons klar erfaßt hat; dies geht aus seiner Formulierung der absoluten Kreisbewegung hervor. — Wenn die Darlegungen Newtons manchen deutschen Physikern problematisch erschienen sind, so dürfte das daran liegen, daß diese letzteren sich zu sehr an die weniger physikalische als ab-

¹⁾ E. Mach, l. c.

²⁾ E. Gehreke, Verhandl. Deutsch. Physik. Gesellsch. **13**, 993, 1911.

³⁾ Vgl. Streintz, l. c. S. 18.

strakte, bis aufs äußerste idealisierte Idee der in § 2 erörterten, absoluten Bewegung angeklammert haben. Dem Engländer liegen physikalische Betrachtungen im allgemeinen näher als abstrakte, darum scheint Newton von englischen Physikern besser verstanden worden zu sein.

Nun ist es aber mit der Einsicht, daß alle rotatorischen Bewegungen und Bewegungskomponenten als absolute aufzufassen sind, noch nicht getan. Es entsteht die Frage, auf welche Weise ein Standpunkt konstruiert werden kann, dem man mit praktisch ausreichender Genauigkeit die Eigenschaft zusprechen darf, daß relativ zu ihm die absolute Bewegung eines rotierenden Körpers, und damit auch aller rotierenden Körper, vor sich geht. Es sind verschiedene Wege betreten worden, die zu einem solchen „absoluten“ Standpunkt hinführen. Am einfachsten ist es, sich diesen Standpunkt an Hand von Körpern zu konstruieren, die sehr weit entfernt sind und die wir trotzdem sehen können; dabei wird stillschweigend vorausgesetzt, daß diese Körper keine sehr großen Geschwindigkeitskomponenten relativ zu dem Körper haben, dessen Bewegung betrachtet wird. Hier bietet sich uns vor allem der Sternhimmel mit seinen Fixsternen dar. Ein relativ zu den Fixsternen ruhendes Koordinatensystem kann darum nach Newton als absolutes bezeichnet werden. So lange man von einer Eigenbewegung der Fixsterne nichts wusste, genügte dieses Koordinatensystem als Bezugsstandpunkt für alle astronomischen und irdischen Bewegungen; für physikalische und technische Zwecke genügt er auch heute noch mit ausreichender Genauigkeit.

Die Bezugnahme auf die Fixsterne ist nun aber, selbst wenn wir von einer Eigenbewegung derselben absehen, in gewisser Beziehung unbefriedigend, denn sie entspringt nicht aus der Natur der Sache heraus. Die Fixsterne sind jedenfalls etwas Zufälliges, und wir werden mit Neumann¹⁾ annehmen,

¹⁾ Carl Neumann, *Annalen der Physik*, Boltzmann-Festschrift, Leipzig 1904, S. 256–257.

daß es auch ohne Fixsterne absolute Bewegung in der Natur geben würde. Man empfindet deshalb den Wunsch, den Bezugsstandpunkt aus jeder Rotationsbewegung selbst heraus konstruieren zu können. In Anlehnung an Streintz könnte man etwa folgendermaßen verfahren: man denkt sich zu einem bestimmten Zeitmoment in allen Punkten eines rotierenden Körpers die Größe der Zentrifugalkräfte aus den Spannungen und Deformationen des Körpers festgestellt, wobei vorausgesetzt wird, daß äußere elastische, elektrische u. a. Kräfte hier nicht mit im Spiel sind. Man erlangt so eine Übersicht über die vorhandenen Zentrifugalkräfte und kann daraus die Lage der absoluten Rotationsaxe relativ zu dem rotierenden Körper, und ferner die Größe der absoluten Winkelgeschwindigkeit aus bekanten Formeln erschließen. An Hand dieser beiden Daten lassen sich dann beliebig viele ideale Standpunkte, die auf keinem materiellen Körper, wie Fixsternen u. dergl. festzuliegen brauchen, von dem rotierenden Körper aus errichten. Es ließe sich also zu jedem Zeitmoment auf diese Weise ein Standpunkt finden, relativ zu dem die absolute Rotationsbewegung vor sich geht. Die Beschreibung der Bewegung geschähe so zwar ohne Zuhülfenahme von fremden Himmelskörpern, dürfte aber nur von geringer Genauigkeit sein. Das auf den Fixsternen basierte System hat demgegenüber den Vorzug, für praktische Zwecke exakter und einfacher zu sein.

Ein noch anderes Konstruktionsverfahren eines Bezugsstandpunktes für absolute Bewegungen hat W. Thomson¹⁾ angegeben. Lange¹⁾ bezeichnet dieses Koordinatensystem, zu dem man unter Voraussetzung der Gültigkeit des Trägkeitsprinzips geführt wird und das in der Sache mit dem Newtonschen absoluten Koordinatensystem identisch ist, mit dem Namen „Inertialsystem“.

Endlich haben Anding und Seeliger²⁾ ein absolutes Koordinatensystem unabhängig von dem auf den Fixsternen basierten und unabhängig von den Zentrifugalkräften rotierender

1) Voss, l. c. S. 37 ff.

2) Seeliger, l. c.

Körper konstruiert. Dieses ist auf der sogenannten Laplace'schen Ebene des Planetensystems errichtet und hat die Voraussetzung, daß das Planetensystem nach außen hin isoliert ist. Seeliger kommt zu dem Schluß, daß das empirisch benutzte, auf den Fixsternen basierte System sich in einem Jahrhundert möglicherweise um einige Bogensekunden um dieses Inertialsystem drehen kann. Die Berücksichtigung einer solchen, wenn auch nur kleinen Differenz demonstriert auch dem Nichtastronomen klar, daß das Fixstern-Koordinatensystem zwar mit großer Annäherung, aber keineswegs ganz exakt ein absolutes Koordinatensystem darstellt. Es ist Sache der experimentellen Astronomie, festzustellen, welches auf materielle Systeme aufgebaute System am meisten dem Ideal des Inertialsystems nahe kommt.

Aus den obigen Betrachtungen ergibt sich folgender Schluß: Bei allen Drehbewegungen, welche physikalische Körper gegeneinander ausführen, treten Zentrifugalkräfte auf, deren Größe und Lage an einem Körper unabhängig von der Wahl des phoronomischen Bezugsstandpunktes ist, auf den die Bewegung bezogen werden kann. Da diese Zentrifugalkräfte sich durch eine bestimmte Rotationsbewegung relativ zu einem vor andern ausgezeichneten, auf verschiedene Weisen konstruierbaren Standpunkt erklären lassen, so ist zu schließen, daß jede Rotationsbewegung oder rotatorische Bewegungskomponente eines Körpers als solche, d. h. absolut, Existenz hat. Die absolute Rotationsbewegung muß phoronomisch genau so relativ wie jede andere Bewegung gedacht oder vorgestellt werden: der Bezugsstandpunkt derselben braucht materiell nicht zu existieren und kann auch nur mit gewisser Annäherung an Hand bestimmter, materieller Körper gefunden werden. — Was vor sich ginge, wenn wir einen im Vacuum rotierenden Körper vollständig isoliert im reinen, mathematischen Raum rotieren ließen (vorausgesetzt, daß dies möglich ist), können wir nicht wissen. Die absolute Rotationsbewegung hat daher nur für physikalische Körper im physikalischen Raume der Natur einen bestimmten, angebbaren Sinn.

Die Frage, inwieweit eine ohne Rotation erfolgende, geradlinige oder krummlinige Translation absolut aufgefaßt werden kann, sei hier nur kurz hinsichtlich der ersteren Bewegungsart diskutiert. Da eine im physikalischen Raume vor sich gehende, reine, geradlinige Translation von Naturkörpern keine sicher nachgewiesenen, den Zentrifugalkräften bei der Rotation an die Seite zu stellenden Wirkungen zur Folge hat, so ist zu schließen, daß eine absolute, geradlinige Translation eines Naturkörpers mit unsern heutigen Mitteln unerkennbar ist; ihre Existenz in der Natur kann mithin höchstens als Möglichkeit in Betracht gezogen werden¹⁾. Die Lorentzsche Kontraktionshypothese der Materie nimmt zwar gewisse Effekte, die durch absolute Translation hervorgerufen werden, an, der Nachweis der Richtigkeit dieser Hypothese steht indessen noch aus. Wir können also noch, wenngleich mit Vorbehalt, den Standpunkt Kants teilen, daß zwar absolute Rotationsbewegungen, aber keine absoluten, geradlinigen Translationsbewegungen „möglich“ (soll bedeuten angebbar und erkennbar) sind. Die offenbar schon von Newton geahnte Möglichkeit der physikalischen Erkennung absoluter Translation ist uns aber durch die Lorentzsche Hypothese näher gerückt als je zuvor.

§ 4. Die Möglichkeit absoluter Bewegung ist zuweilen in anderer Form, als oben in § 2 und 3, erörtert worden, indem man die Frage dahin formuliert hat, ob und in wiefern Bewegungen von Körpern relative sind. Man kann z. B. die Erkenntnis Eulers, daß jede translatorische und rotatorische Bewegung eines Körpers ein Substrat erfordert, in die Worte kleiden: alle Bewegungen sind phoronomisch relative. Andererseits folgt aus dem früheren, daß nur die reinen Translationen in bezug auf ihr mechanisches Verhalten als relative anzusehen sind.

Die Relativität der Bewegung ponderabler Körper als besonderer Grundsatz, genannt Relativitätsprinzip, wurde von Einstein²⁾ auf die Elektrodynamik und Optik übertragen, in-

¹⁾ Vgl. Lotze, l. c. S. 7.

²⁾ A. Einstein, Annalen der Physik (4) 17, 891, 1905.

dem er den Satz aufstellte, „daß für alle Koordinatensysteme, für welche die mechanischen Gleichungen gelten, auch die gleichen elektrodynamischen und optischen Gesetze gelten“. Dieses Prinzip würde man gern recht weit fassen, indem man es außer auf translatorische auch auf rotatorische Bewegungen anwendet. Denn gerade diese letzteren sind für die Wechselwirkungen zwischen Leitern und Magneten von großer Wichtigkeit, und es ist kein physikalischer Grund einzusehen, warum hier ein Unterschied zwischen Translation und Rotation gemacht wird; in der Elektrodynamik sind ja keine Wirkungen, die den Zentrifugalkräften der Mechanik entsprechen würden, bekannt. Trotzdem hat Herr Einstein¹⁾ neuerdings seine Theorie auf genau gleichförmige, geradlinige Translation von Körpern beschränkt. Die Gründe für diese Beschränkung sind keine physikalischen, sondern sie entspringen aus der eigentümlichen Zeitdefinition, die mit der Entwicklung der Theorie verbunden ist. Auch mit der Beschränkung ist aber die Theorie unhaltbar, da sie logisch inkonsequent

ist. Denn die Einsteinsche Zeitformel $t' = t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, in der t' die Zeit auf einem System bedeutet, das sich gegen ein anderes, auf dem die Zeit t gilt, gleichförmig und geradlinig bewegt, führt m. E. zu einer Bezugnahme auf absolute Translation²⁾; wird doch hiermit ein prinzipieller Unterschied zwischen Ruhe und Bewegung eingeführt. Diesen Unterschied kann man kurz so ausdrücken: die bewegte Uhr läuft langsamer als die ruhende Uhr. Hierdurch wird die Voraussetzung der Relativität zweier Bewegungen ausdrücklich in Hinsicht auf den zeitlichen Ablauf aufgehoben. Um den darin liegenden Widerspruch recht klar zu machen, sei der Fall gleichförmiger, geradliniger Translation zweier Uhren A und B gemäß der Einsteinschen Kinematik betrachtet. Wir wollen voraussetzen, daß die Uhren

1) A. Einstein. Vierteljahrsschr. d. Naturforsch. Gesellsch. Zürich 56. 1. 27. November 1911.

2) Eine Zeitformel $t' = t \cdot a^v$, wo a eine Konstante, wäre mit der Relativität der Bewegungen vereinbar, würde aber die Gleichwertigkeit der Richtungen im Raum ausschließen.

anfangs nebeneinander ruhen, darauf möge die eine von der andern wegbewegt und dann wieder ebenso zurückbewegt werden, sodaß schließlich beide Uhren relativ zueinander wieder ruhen. Diesen Vorgang wollen wir uns einmal so ausgeführt denken, daß wir A als ruhend und B relativ zu A in irgend einer Richtung bewegt auffassen, und das zweite Mal so, daß B ruht und A relativ zu B in entgegengesetzter Richtung, wie zuvor die Uhr A , bewegt gedacht wird. Diese beiden Vorgänge sind dann in relativer Hinsicht völlig gleich. Trotzdem muß gemäß der Einsteinschen Zeitformel im ersten Falle die Zeigerstellung der Uhr B hinter derjenigen von A , im zweiten Falle die Zeigerstellung der Uhr A hinter derjenigen von B zurück sein: zwei relativ zueinander identische Vorgänge führen also hier zu verschiedenen Endzuständen. Dies ist eine unvermeidliche Folgerung, welche besagt, daß die Einsteinsche Zeitdefinition und das Relativitätsprinzip miteinander unvereinbar sind¹⁾. Es mag nochmals betont werden, daß sich dieser Schluß auch bei Beschränkung der Theorie auf genau gleichförmige und geradlinige Translation ergibt. Ich hebe dies besonders hervor, weil nach der von Herrn Einstein vorgenommenen Beschränkung auf genau gleichförmige und geradlinige Translation, aus welcher eigentlich die physikalische Unhaltbarkeit der Theorie zur Genüge erhellt²⁾, vielfach die Ansicht vertreten wird, daß eine besondere, experimentelle Widerlegung der auf gleichförmige Translation beschränkten Theorie (z. B. durch das Dopplersche Prinzip³⁾) nötig wäre. — Ich möchte in diesem Zusammenhang

1) Diese Konsequenz scheint Herrn Einstein trotz seiner, den obigen sehr nahe kommenden Betrachtungen (z. B. Vierteljahrsschrift der Naturforsch. Gesellsch. Zürich, Heft 1 und 2 (ausgegeben am 27. November 1911), S. 12) entgangen zu sein. — In dem Buche von Laue, Das Relativitätsprinzip. Braunschweig 1911 (Vieweg u. Sohn) wird auf S. 40 geäußert, daß in der Einsteinschen Kinematik der Gang zweier relativ zueinander bewegten Uhren unabhängig davon sei, auf welche Uhr man „die Begriffe Ruhe und Bewegung bezieht“.

2) Verhandl. Deutsch. Physikal. Gesellsch. 14, 294, 1912.

3) Vgl. z. B. Einstein, Vierteljahrsschr. d. Naturforsch. Gesellsch. Zürich, S. 13. — M. Laue, l. c. S. 89.

noch kurz erwähnen, daß, falls man in Anlehnung an den oben genannten Einsteinschen Ansatz setzen wollte: $t' = f(v, t)$, wo $f(v, t)$ eine zunächst unbekannte Funktion sein mag, daraus notwendig $f(v, t) = t$ folgt, sobald man die Relativität der Bewegungen und die Gleichartigkeit aller Richtungen im Raume voraussetzt. Die Annahme des Relativitätsprinzips für gleichförmige Translationen schließt also allgemein die Annahme einer Zeit, die vom Bewegungszustand abhängig wäre, aus; in ihr steckt bereits die Voraussetzung, daß die Zeit eines Systems vom Bewegungszustand unabhängig ist.

§ 5. Eine besondere Frage ist die, ob sich ein allgemeines Prinzip der Relativität aufstellen läßt, welches für die Mechanik, Elektrodynamik, Optik usw. gilt und welches besagt, daß immer nur relative Lagen und Bewegungen irgendwelcher Naturkörper zueinander für die beobachtbaren, physikalischen Wirkungen in Betracht kommen. Ein solches allgemeines, physikalisches Prinzip ist zwar undurchführbar, wenn man sich im Anschluß an Herrn Einstein, der den Äther abschaffen wollte, auf ponderable Körper beschränkt, möglicherweise hat es aber Gültigkeit, wenn man sich zu den ponderablen noch geeignete, hypothetische, imponderable Körper (Äther) hinzudenkt. Dann müßten auch die Zentrifugalkräfte durch die phoronomische Bewegung der rotierenden Körper relativ zum Äther gegeben sein¹⁾. Den Gedanken eines derartigen, neuen Relativitätsprinzips finde ich bei Seeliger²⁾. — Im Zusammenhang hiermit sei erwähnt, daß Wiechert³⁾ versucht hat, die reale Existenz des Äthers aus „Relativitätsgesetzen“ zu folgern.

¹⁾ E. Gehrcke, Verh. D. Physik. Gesellsch. **13**, 667, Anm. 1, 1911.

²⁾ Seeliger, l. c. S. 91.

³⁾ E. Wiechert, Physikal. Zeitschr. **12**, 687, 737, 1911.

Aufbau der gesamten Geometrie auf Grund der projektiven Axiome allein.

Von **Ch. Müntz.**

Vorgelegt von A. Voss in der Sitzung am 4. Mai 1912.

Vorwort.

Wir geben im folgenden die Resultate ausgedehnter Untersuchungen wieder, deren volle Begründung einem ausführlichen besonderen Werke vorbehalten bleiben möge. Es handelt sich darum, den Aufbau der gesamten Geometrie auf die geringste Zahl von Voraussetzungen zurückzuführen, überall darin nicht nur hinreichende, sondern auch durchaus notwendige Elemente zu geben, und insbesondere keine Axiome zuzulassen, wo schon Definitionen ausreichen. Nach solchen vorwiegend logischen Prinzipien hat in einem berühmten Werke zuletzt Herr Prof. Hilbert („Grundlagen der Geometrie“) die Axiomatik behandelt; die Untersuchung der ebenen Verhältnisse allein, ohne Benutzung des dreidimensionalen Raumes — obwohl auch die Axiome des letzteren gegeben werden — spielt in diesem Werke die Hauptrolle, wodurch neben den projektiven Axiomen der Verknüpfung und Anordnung die Aufstellung einer Reihe von weiteren Axiomgruppen notwendig wird.

Es ist indes möglich, mit den projektiven Axiomen allein (Gruppen I, II bei Hilbert) auszukommen und auch dort einige Einschränkungen vorzunehmen. Durch die Benutzung sämtlicher projektiver Axiome und des Parallelenpostulats, des letzteren in wesentlich eingeschränkter Gestalt, lassen sich auf

Grund geeigneter Definitionen die übrigen Axiomgruppen (III bis V bei Hilbert) direkt ableiten und fallen daher als solche einfach fort.

Die Richtlinien des zugehörigen Programms hat, auf den klassischen Untersuchungen von v. Staudt fußend und wichtige Resultate von Cayley heranziehend, zuerst Herr Prof. Klein in einer grundlegenden Abhandlung (Mathem. Annalen Bd. 6) gegeben, und bedeutsame Untersuchungen in gleicher Richtung finden sich in den Werken von Herrn Prof. Pasch („Vorlesungen über neuere Geometrie“) und Herrn Prof. Lindemann („Vorlesungen über Geometrie“ Bd. II, 1).

Über diese Arbeiten hinaus, die übrigens den Hilbertschen Untersuchungen zeitlich vorangegangen sind und im wesentlichen eine ganz andere — nämlich die rein projektive — Richtung vertreten, geben die folgenden Ausführungen zunächst eine äußerste Einschränkung der Axiomatik¹⁾, alsdann eine Zurückführung des Parallelenproblems auf seine letzten Elemente, und zuletzt eine neue, rein synthetische Begründung der Metrik.

Neben den bislang betrachteten drei Grundformen des Raumes treten dabei durch das Parallelenproblem und seine dualen Erweiterungen auch andersgeartete Räume auf, die eine Vervollständigung und Verbindung jener Grundformen darstellen und die Gesamtheit der regulären Geometrien erschöpfen. Es gibt 9 ebene und 27 räumliche homogene Geometrien. Sie sind arithmetisch dadurch charakterisiert, daß in ihnen — abgesehen von Perioden — die Entfernungen und Winkel durch das gleiche ideale Gebilde analytisch eindeutig bestimmt sind; geometrisch — dadurch, daß in ihnen bei homogenem Verhalten der eigentlichen Elemente jedem projektiven Grundgebilde

¹⁾ Vereinfachungen der geometrischen Axiomatik sind in letzter Zeit häufig gegeben worden, so von den Herren Moore (Math. Trans. 1902), Veblen (ibid. 1904), Rosenthal (Math. Ann. 1910, 1912); insbesondere vertritt die Arbeit von Herrn Veblen auch in der Begründung der Euklidischen Lehre von den Kongruenzen projektive Gesichtspunkte.

Die im Texte befolgte Darstellung schließt sich am nächsten dem projektiven Teil der Axiomatik von Herrn Prof. F. Schur („Grundlagen der Geometrie“) an.

(Punktreihe, Strahlenbündel, Ebenenbüschel) eine einheitliche Art der Metrik (elliptisch, oder parabolisch, oder hyperbolisch) zukommt; gruppentheoretisch — dadurch, daß sie bei richtiger Auffassung sämtlich alle Bewegungen zulassen: ∞^3 in der Ebene, ∞^6 im Raume. Durch jede dieser Eigenschaften sind umgekehrt alle angegebenen Geometrien, und nur sie, definiert.

Zur Ergänzung der Untersuchung haben wir noch als letzte Erweiterung die von Hilbert aufgestellte Nicht-Archimedische Geometrie synthetisch in die Archimedische eingebaut.

Die vom mathematischen und philosophischen Standpunkte ausgezeichnete Stellung der Euklidischen Geometrie und der dadurch begründete Vorrang der klassischen Raumlehre bilden den Inhalt der abschließenden Betrachtungen.

I. Die projektiven Axiome.

Die Geometrie hat zu ihrem Gegenstand den Raum der menschlichen Anschauung und seine Teile. Bei Betrachtung oder Vorstellung von Teilen des Raumes läßt sich jede subjektiv gewählte feste Grenze der wirklichen Anschauung unterbieten; durch den Vorbehalt, eine solche Grenze bei erneuter Betrachtung kleiner gewählt zu denken, gelangt man zum Begriff des Punktes, als idealer Grenze räumlicher Vorstellung und Wahrnehmung.

Der Aufbau der Geometrie geschieht durch Axiome, Konstruktionen und Definitionen. Jedes geometrische Axiom ist eine Festsetzung, d. h. ein freier Willensakt des Denkens, dem keine absolute logische Notwendigkeit innewohnt. Das Kriterium für die Aufstellung von solchen Axiomen ist die Anpassung an die reine Anschauung des Raumes; in diesem Sinne kommt den geometrischen Axiomen eine psychologische Notwendigkeit zu, obwohl sie, nur logisch betrachtet, beliebig abgeändert werden und so zu neuen Geometrien Anlaß geben können.

Das Ziel der Axiomatik ist: mit geringsten Mitteln den Aufbau des Raumes der Anschauung zu ermöglichen und ihn

nach logischen Prinzipien zu ordnen, insbesondere dem Zahlbegriff zugänglich zu gestalten.

Axiom 1. Der Raum hat beliebig viele Punkte.

Axiom 2. Zwei Punkte bestimmen eindeutig eine Gesamtheit von Punkten: die Gerade.

Axiom 3. Die Gerade ist durch zwei beliebige ihrer Punkte eindeutig bestimmt.

Für die Anordnung der Punkte einer Geraden sind neue Axiome notwendig, die eine Beziehung zwischen beliebig (endlich) vielen Punkten und den natürlichen Zahlen eindeutig ermöglichen. Als Grundlage dieser Beziehung kann am zweckmäßigsten der aus der Zahlenreihe abstrahierte Begriff „zwischen“ dienen, für dessen Anwendbarkeit auf ein vorgelegtes System von Dingen (Vorstellungsinhalten) A , B , C usw. folgende Eigenschaften dieses Begriffes festgelegt werden mögen:

- a) von drei betrachteten Dingen liegt das eine (B), und nur dieses eine, zwischen den beiden anderen (A und C);
- b) liegt B zwischen A und C , so liegt es auch zwischen C und A ;
- c) liegt B zwischen A und C , und C zwischen B und D , so liegt C auch zwischen A und D .

Axiom 4. Die Anordnung beliebig vieler Punkte einer Geraden nach dem Begriffe „zwischen“ ist immer möglich¹⁾.

Axiom 5. Zu zwei Punkten A und C einer Geraden läßt sich (unter den bereits existent gedachten Punkten des Raumes) ein dritter B so angeben, daß B zwischen A und C , und

Axiom 6. ein vierter D so, daß C zwischen A und D zu liegen kommt.

Axiom 7. Durch die Punkte einer Geraden ist der Raum nicht erschöpft.

¹⁾ In der elliptischen Geometrie ist dabei irgend ein Punkt der Geraden auszuschließen.

Durch die Angabe eines Punktes außerhalb einer Geraden wird die Konstruktion von beliebig vielen weiteren Geraden möglich, die sich sämtlich dem Begriff der Ebene unterordnen. Für diesen Begriff legen wir folgende spezielle Konstruktion zugrunde, die in allen drei Grundformen der Geometrie¹⁾ ausführbar ist:

In einem Punkte O mögen sich zwei Gerade treffen; auf jeder Geraden wählen wir nach beiden Seiten von O je einen bestimmten Punkt und verbinden diese Punkte durch geradlinige Strecken untereinander, so ein Viereck als Basis gewinnend; nach jedem Punkte dieser Basis werde von O ein Halbstrahl gezogen; die Gesamtheit der so gewonnenen Punkte ergibt ein Gebilde, das wir Ebene nennen.

Für die Einordnung der übrigen Geraden, deren Konstruktion nun möglich wird, stellen wir ein Axiom auf, durch welches sie in der gewonnenen Ebene aufgehen:

Axiom 8. Liegen zwei Punkte einer Geraden in einer Ebene, so liegt die ganze Gerade in dieser Ebene.

Es läßt sich dann folgender Satz beweisen, der sonst, ohne die Angabe einer bestimmten Konstruktion für die Ebene, erst durch zwei besondere Axiome (Hilbert I 4, I 5) festgelegt werden müßte: eine Ebene ist durch drei beliebige nicht in gerader Linie liegende Punkte in ihr eindeutig bestimmt. Auf Grund der gegebenen Konstruktion der Ebene läßt sich²⁾ der Begriff der Halbebenen um eine Gerade definieren. Der einfache Zusammenhang der Ebene muß dann noch besonders festgelegt werden.

Axiom 9. Beim Schneiden zweier Geraden einer Ebene tritt die schneidende Gerade aus der einen, von der geschnittenen Geraden gebildeten Halbebene in die andere.

¹⁾ Wir verstehen darunter die Euklidische, die Gaußsche und die Riemannsche Geometrie.

²⁾ In der elliptischen Geometrie ist dabei irgend eine Gerade der Ebene von der Betrachtung auszuschließen.

Dieses Axiom vertritt dasjenige von Pasch (Hilbert II 4), welches in seiner Fassung zu weit ist.

Axiom 10. Durch die Punkte einer Ebene ist der Raum nicht erschöpft.

Wir können nun jedes weitere räumliche Axiom entbehren, wenn wir für den Raum eine bestimmte, in allen Geometrien ausführbare Konstruktion geben.

Neben einer Ebene sei ein Punkt C außerhalb ihr gegeben. Wir legen durch einen Punkt O dieser Ebene in früher gegebener Weise eine Basis fest und verbinden außerdem C mit O durch eine Gerade ($CO C'$); als Basis des Raumes läßt sich dann ein so bestimmtes räumliches Oktaëder nehmen.

Nach allen Punkten der Begrenzung dieses Oktaëders ziehe man von O aus Halbstrahlen; die Gesamtheit der so erhaltenen Punkte möge als Raum definiert werden — auf Grund dieser Konstruktion und der bisherigen Axiome, denen alle Elemente des gewonnenen Raumes unterworfen bleiben mögen, sind dann alle geometrischen Eigenschaften des Raumes gegeben.

Es läßt sich so wiederum als Satz beweisen, was sonst durch ein besonderes Axiom (Hilbert I 7) ausgesprochen werden müßte: wenn zwei Ebenen¹⁾ einen Punkt gemein haben, so haben sie eine Gerade gemein.

Der Satz von Desargues folgt daraus, und seine Gültigkeit in der Ausgangsebene ist²⁾, rein projektiv betrachtet, die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß sie als Teil eines Raumes von drei Dimensionen betrachtet werden dürfe.

2. Der projektive Raum.

Die zehn vorhin gegebenen projektiven Axiome erlauben, die ganze projektive Geometrie, einschließlich ihrer analytischen Darstellung, von einem im Endlichen abgegrenzten Teil des Raumes aus zu gewinnen.

¹⁾ Des gleichen dreidimensionalen Raumes — denn in höheren Dimensionen gilt der Satz nicht mehr.

²⁾ Vgl. Hilbert, l. c. p. 96.

Der Satz von der Eindeutigkeit des vierten harmonischen Elementes zu drei in bestimmter Folge in einem Grundgebilde erster Stufe gegebenen spielt dabei die entscheidende Rolle.

Unter Zugrundelegung eines Koordinatentetraeders lassen sich die Punkte des Raumes auf rein projektivem Wege mit Zahlenquadrupeln — homogenen projektiven Koordinaten — belegen; als Zahlen gelten dabei zunächst die gewöhnlichen rationalen Zahlen, nur die ihnen entsprechenden Punkte sind zunächst existent gedacht. Jede Ebene erhält dann zu ihrer analytischen Darstellung eine homogene lineare Gleichung.

Es können nun beliebige und allgemeinste Erweiterungen des vorläufig abgegrenzt gedachten dreidimensionalen Raumes dadurch vorgenommen werden, daß man zu zwei beliebigen Geraden einer Ebene, da sie eindeutig ein Bündel im Raume bestimmen und dieses Bündel in gleicher Weise durch zwei beliebige Strahlen in ihm bestimmt ist — eine ausführliche Darstellung findet man bei Pasch —, ein Zentrum ihres Bündels hinzunimmt, auch wenn man über dessen reale Existenz nichts aussagen kann. Die analytische projektive Geometrie läßt sich dann auf alle überhaupt möglichen Zahlenquadrupel ausdehnen, wobei nunmehr das Wort „Zahl“ im allgemeinsten Sinne verstanden werden kann. Jede homogene lineare Gleichung bestimmt in ihr eine Ebene; zwei Ebenen schneiden sich nun immer in einer Geraden, zwei Gerade einer Ebene und ebenso drei Ebenen des Raumes — immer in einem Punkte.

In dem so gewonnenen projektiven Raume wird das Gesetz der Dualität für räumliche und ebene Verhältnisse uneingeschränkt gültig. Alle überhaupt möglichen Raumformen fließen in einer einzigen Idealgeometrie zusammen, die wir absolute projektive Geometrie heißen können. Innerhalb dieser ist dann die weitere Trennung zwischen Realem und Idealem vorzunehmen.

Der gleiche absolute projektive Raum läßt sich aber auch aus noch wenigeren Voraussetzungen, als oben gegeben, aufbauen, sobald man neben idealen Punkten auf eigentlichen Geraden auch die dual entsprechende Möglichkeit idealer Ge-

raden durch eigentliche Punkte und idealer Ebenen durch eigentliche Gerade offen läßt. Es ist nicht schwer, die hierzu notwendigen Änderungen der Axiomatik anzugeben: wir wollen dann von einer absoluten projektiven Axiomatik sprechen.

Eine andere Einschränkung würde darin bestehen, daß man sich zunächst auf das Innere eines Tetraeders beschränkte und alle Axiome und Definitionen danach richtete: auch dies würde zur Gewinnung des gesamten projektiven Raumes genügen (vgl. F. Schur, l. c.).

3. Das Parallelenproblem.

Den hier folgenden Betrachtungen sei ein System von projektiven Axiomen zugrundegelegt, das für den Aufbau aller drei Grundformen der Geometrie hinreicht — etwa das von uns vorangestellte, oder z. B. das der Hilbertschen Gruppen I, II. Wenn dann ein einziges Mal zu einer gegebenen Geraden durch einen gegebenen äußeren Punkt in der dadurch bestimmten Ebene nur eine einzige wirkliche Nichtschneidende vorausgesetzt wird, so besteht gegenüber dieser Geraden das gleiche Verhalten in jedem Punkte des Raumes — der Beweis ist durch die Betrachtung des projektiv geordneten zugehörigen Büschels zu erbringen; es ist dann der ganze Raum durch ein Bündel ausgefüllt, dessen Zentrum ein bestimmter Idealpunkt — ein Euklidischer uneigentlicher Punkt — ist; zwei beliebige Gerade dieses Bündels sind im euklidischen Sinne einander parallel.

Wird ein ebensolches Verhalten für irgend eine zweite, jenem Bündel nicht angehörende Gerade angenommen, so entsteht ein zweites Bündel von gleicher Natur; alle beiden Bündeln angehörig Ebenen werden dann Euklidisch — wie die Betrachtung der zugehörigen Strahlenbüschel zeigt — und füllen den Raum durch ein Büschel mit uneigentlicher Axe aus; zwei beliebige Ebenen dieses Büschels sind im Euklidischen Sinne einander parallel¹⁾.

¹⁾ Mit diesem Satze hängt die Möglichkeit zusammen, eine Reihe elementarer Konstruktionen in der Euklidischen Ebene durch das Lineal

Wird nun das gleiche Verhalten noch für eine dritte, jenem Büschel nicht angehörende, Gerade vorausgesetzt, so wird dadurch der ganze Raum zu einem Euklidischen gestaltet¹⁾. Analytisch läßt sich dies in projektiven Koordinaten so ausdrücken, daß zur Gesamtheit der uneigentlichen Punkte des Raumes eine einzige uneigentliche (doppelt zu zählende) Ebene gehört. Innerhalb jeder Raumform läßt sich durch Benutzung der absoluten projektiven Geometrie eine solche Ebene willkürlich wählen und so eine Euklidische Gestaltung wenigstens formal einführen; aber auch jede andere Gestaltung des Raumes läßt sich formal nach Belieben in den projektiven Raum einbauen, wie auch die eigentliche Natur dieses Raumes gedacht wird.

Es werde nunmehr für eine bestimmte Gerade durch einen bestimmten äußeren Punkt in der dadurch definierten Ebene je eine erste Nichtschneidende nach jeder Seite vorausgesetzt, wobei die beiden Parallelen verschieden gedacht seien; so trifft das gleiche Verhalten gegenüber dieser Geraden in jedem Punkte des Raumes zu, es werden dadurch auf der Geraden und im Raume zwei ideale Grenzpunkte hyperbolischer Natur bestimmt, die Geraden nach jedem dieser Grenzpunkte sind zu je zweien untereinander im hyperbolischen Sinne parallel.

Schließlich kann einmal zu einer gegebenen Geraden durch einen gegebenen Punkt in der dadurch definierten Ebene überhaupt keine Nichtschneidende als wirklich angenommen werden; dann trifft das gleiche elliptische Verhalten gegenüber

allein auszuführen, sobald ein einziges Parallelogramm in ihr gezeichnet vorliegt: Parallelenziehen, Abtragen von Strecken auf Geraden gleicher Richtung, Halbieren von Strecken u. a. m.; ist die vorgelegte Figur insbesondere ein Quadrat, so wird noch das Fällen und Errichten von Loten, ebenso das Abtragen von Winkeln in gleicher Weise möglich; das Streckenabtragen nach verschiedenen Richtungen ist indes mit dem Lineal allein auch dann nicht allgemein durchführbar, da man so nur im rationalen Bereiche und bei speziellen Kollineationen desselben bleibt (vgl. u.).

¹⁾ Die ∞^7 Aussagen enthaltende gewöhnliche Fassung des Parallelenpostulats läßt sich also aus drei Aussagen gewinnen.

dieser Geraden für jeden Punkt des Raumes zu, die ganze Gerade muß als in sich geschlossen angesehen werden.

Wird dem Raume die Forderung der Homogenität bezüglich der Parallelen aufgezwungen, so können gemischte Raumformen nicht als zulässig angesehen werden; mathematisch steht jedoch ihre Möglichkeit offen.

Der Raum kann beispielsweise nach zwei verschiedenen Richtungen, und somit nach allen Richtungen eines uneigentlichen Ebenenbüschels, Euklidisch gedacht werden, und nach einer dritten, jenem Büschel nicht angehörenden Richtung und somit nach allen Richtungen dieser Art — hyperbolisch. Das absolute Gebilde dieser Raumform, d. h. die Gesamtheit ihrer Grenzpunkte, wird dann in projektiven Koordinaten durch ein reeles Ebenenpaar definiert.

Der Raum kann etwa auch nach einer einzigen Richtung als Euklidisch, nach allen anderen als hyperbolisch gedacht werden; man braucht nur für das absolute Gebilde in projektiven Koordinaten einen reellen Kegel zu nehmen, dessen Spitze dann den einzigen uneigentlichen Euklidischen Punkt des Raumes darstellt.

Wird als absolutes Gebilde ein Paar konjugiert komplexer Ebenen angenommen, so entspricht dies derjenigen Raumform, in welcher alle Richtungen eines Ebenenbüschels, durch Festsetzung Euklidischen Verhaltens nach zwei Richtungen desselben, Euklidisch ausfallen, während nach einer jenem Büschel nicht angehörenden dritten Richtung, und somit nach allen Richtungen dieser Art, elliptisches Verhalten postuliert wird. Die Axe des Euklidischen Büschels ist dann die Schnittlinie der beiden absoluten Ebenen.

In ähnlicher Weise entsteht der nur in einer einzigen Richtung Euklidische, nach allen anderen Richtungen elliptische Raum durch die Festsetzung eines imaginären Kegels mit reeller Spitze für das absolute Gebilde; die Spitze repräsentiert dann wieder den einzigen Euklidisch uneigentlichen Punkt.

Dagegen können im gleichen Raum nicht zugleich hyperbolische und elliptische Gerade vorkommen, solange man an

allen aufgestellten Axiomen festhält (bei richtiger Auffassung gilt dieser Satz übrigens in allen regulären Geometrien).

Es gibt so in bezug auf das Parallelenproblem drei homogene und vier inhomogene Formen des Raumes: ebenso drei homogene und zwei inhomogene Formen der Ebene, wobei in letzteren das absolute Gebilde bzw. durch ein reelles oder imaginäres Geradenpaar dargestellt ist.

Es gibt aber vom Standpunkte der absoluten projektiven Geometrie nur einen einzigen projektiven Raum, in dem durch Abgrenzung des Realen mit Hilfe projektiver Koordinaten und absoluter Gebilde in denselben jene verschiedenen (wie alle überhaupt möglichen) Formen des Raumes verwirklicht gedacht werden können.

4. Metrik der Geraden.

Auf Grund projektiver Koordinatenbestimmung und Hinzunahme aller Idealpunkte lassen sich alle Formen des Raumes in gleicher Weise behandeln. Jede Art der Metrik läßt sich nun mit Hilfe der zunächst rationalen projektiven Koordinaten auf dem Wege reiner Definition, ohne jede Benutzung von Bewegungsbegriffen oder — was auf das Gleiche hinaus käme — von besonderen Kongruenzaxiomen, vollständig durchführen. Es braucht daher die Metrik durchaus nicht derjenigen Form des Raumes zu entsprechen, die man gerade als die gegebene annimmt: vielmehr läßt sich beispielsweise in jeder beliebigen Raumform Euklidische Metrik durch Definitionen festlegen. Es wird jedoch zweckmäßig erscheinen, die Metrik jedesmal der gegebenen Raumform direkt anzupassen, und so die projektiv ausgezeichneten Elemente auch als metrisch ausgezeichnet zu erhalten.

Die Existenz einer einzigen Euklidischen Parallelen zu einer gegebenen Geraden liefert auf derselben einen projektiv eindeutig bestimmten uneigentlichen Punkt, den wir mit ∞ bezeichnen, und so zu einem beliebig gewählten eigentlichen Punktepaar, das wir $-1, +1$ nennen wollen, ihre parabolische

Mitte 0; umgekehrt vertreten dann die drei Punkte mit den projektiven Koordinaten $-1, 0, +1$ nicht nur in projektiver, sondern auch in metrischer Hinsicht die Angabe der Parallelen, da letztere in jedem Punkte aus ihnen wiedergewonnen werden kann. Nun besitzen drei beliebige Punkte der Geraden in Verbindung mit dem festen uneigentlichen Punkte ∞ eine gegenüber projektiven Transformationen des Raumes ausgezeichnete absolute Invariante — ihr Doppelverhältnis; und zwei Punkte allein bestimmen bis auf eine multiplikative Konstante gleichfalls eine einzige Invariante — ihre Entfernung, sobald man als mathematisches Kennzeichen der letzteren ihr additives Verhalten festsetzt. Die gesamte parabolische Metrik der Geraden ist so bestimmt. Die Formel der Entfernung vom Nullpunkt ist in diesem Falle

$$r = cx \left(= cm \cdot \frac{x}{m} \right).$$

Die projektiven Transformationen der Geraden in sich, welche bei gleicher Definition die Entfernungen unverändert lassen, sind gegeben durch

$$x' = x + a;$$

sie lassen formal den uneigentlichen Punkt der Geraden fest.

Es sei nun für eine gegebene Gerade in einem einzigen äußeren Punkte hyperbolisches Verhalten angenommen, so werden dadurch auf dieser Geraden zwei projektiv bestimmte uneigentliche Grenzpunkte festgelegt. Nunmehr bestimmen schon zwei beliebige Punkte der Geraden eine absolute Invariante — das Doppelverhältnis zu den festen uneigentlichen Grenzpunkten. Den Grenzen oder (nach Hilbertscher Bezeichnung) Enden der Geraden legen wir die festen projektiven Koordinaten $-m, +m$ bei und wählen einen willkürlichen Punkt der Geraden als 0; so ist die hyperbolische Metrik der Geraden notwendig definiert durch die Formel:

$$r = \frac{cm}{2} \log \frac{m+x}{m-x}.$$

Die Entfernungen bleiben unter gleicher Definition unverändert bei den projektiven Transformationen von der Form

$$x' = \frac{x + a}{1 + \frac{ax}{m^2}};$$

die Enden bleiben dadurch ebenfalls fest. Auch in diesem Falle genügt die Angabe der drei Punkte $-1, 0, +1$, wenn daneben die projektive Konstante m und die metrische c vorgeschrieben werden.

Zuletzt sei für eine Gerade elliptisches Verhalten angenommen. Die Metrik dieses Falles wird am einfachsten in dual entsprechenden Strahlenbüschel untersucht, wobei an Stelle von Punkten Strahlen einrücken, an Stelle von Entfernungen — Winkel. Hierbei ist zunächst kein Anhalt für die Auffindung der Punkte $-1, 0, +1$, d. h. einer halbierten Strecke bzw. eines halbierten Winkels gegeben; man kann sie willkürlich wählen und aus ihnen die weiteren Grössen auf projektiver Grundlage definieren. Für jeden weiteren Punkt ist dann nämlich wieder das Doppelverhältnis zu den drei gegebenen als einzige wesentliche Invariante gegeben, worauf sich die Definition der Entfernung treffen läßt. Die entsprechende Formel ist dann:

$$r = cm \cdot \operatorname{ar} \operatorname{tg} \frac{x}{m},$$

wobei m und c wieder Konstanten sind. Die Punkte $x = \pm m$ stellen mit dem Punkte 0 und dem dadurch bestimmten Punkte ∞ eine Vierteilung der elliptischen Geraden dar. Die elliptischen Entfernungen bleiben unter gleicher Definition unverändert bei den Transformationen von der Gestalt

$$x' = \frac{x + a}{1 - \frac{ax}{m^2}}.$$

Es ist beispielsweise zunächst kein Anhalt für die Konstruktion eines rechten Winkels gegeben; wird aber ein solcher

direkt hingelegt und halbiert, so braucht man nur die Schenkel des rechten Winkels als -1 und $+1$ zu betrachten, den halbierenden Strahl als 0 : der Winkel eines Strahles von der projektiven Koordinate τ gegen die Nullrichtung ist dann gegeben durch

$$\varphi = \operatorname{ar} \operatorname{tg} \tau.$$

In allen Fällen genügt die Festlegung einer halbierten Strecke ($-1, 0, +1$) auf der Geraden neben der Angabe der Konstanten m und c zur Erledigung der entsprechenden Metrik, die dann durch Betrachtungen im Endlichen allein gewonnen wird.

Durch die gegebenen Definitionen ist sowohl der Begriff der Kongruenz, wie der der Bewegung, für jedes projektive Grundgebilde erster Stufe erklärt.

5. Homogene Metrik der drei Grundformen der Ebene.

Für den Aufbau der gesamten Metrik wählen wir einen Weg, der 1. jedes neue Axiom vermeidet, indem er sich zunächst auf den eigentlichen (endlichen), reellen, rationalen, projektiven Raum bezieht, 2. den Begriff der freien Beweglichkeit des Raumes nicht heranzieht. Was letzteren anbetrifft, so enthält er eine höchst komplizierte Aussage in sich, deren Zulässigkeit erst aus der Theorie der quadratischen Formen einleuchtet, die so ohne Weiteres in die Geometrie hineininterpretiert wird; zudem erlaubt die Stellung der Geometrie innerhalb der Gesamtheit aller Wissenschaften nicht, daß ihr der Begriff der Bewegung in irgend einer Form zugrundegelegt werde: vielmehr hat umgekehrt die Bewegung erst aus rein geometrischen Begriffen erklärt zu werden.

Zum Prinzip, nach dem die sonst ganz willkürlich gestaltbare Durchführung der Metrik vor sich gehen soll, nehmen wir das der Homogenität; worunter nur verstanden werden mag, daß bei jeder elementaren metrischen Begriffsbildung unter allen zulässigen Definitionen einzig diejenige gewählt werden solle, bei der sich der eigentliche Raum in jeder Weise

gleichartig verhält — es zeigt sich, daß diese Forderung in jedem Falle in strenge mathematische Form gekleidet werden kann. Wir unterwerfen dadurch die gesamte Metrik dem Satz vom Grunde, worin die tiefere Bedeutung der getroffenen Festsetzung liegt. Daraufhin ist die Metrik im wesentlichen eindeutig bestimmt; jede anders geartete Metrik kann durch Änderung der Definitionen gebildet werden: sie ist dann aber entweder nicht an sich schon eindeutig (d. h. die Winkel sind nicht durch das gleiche absolute Gebilde definiert, wie die Strecken), oder nicht stetig, oder nicht analytisch¹⁾.

Die Allgemeingültigkeit der Kongruenz- und Bewegungsbegriffe wird so aus den notwendigsten Elementen gewonnen: die methodischen Verhältnisse liegen hier ganz analog wie beim Parallelenproblem, für welches ebenfalls die allgemeinen Aussagen aus wenigen Grundannahmen folgen.

Die freie Beweglichkeit des Raumes wird dann zu einem beweisbaren Satze, der bei richtiger Interpretation in allen regulären Geometrien gilt: auch in denjenigen, die bei der üblichen Auffassung unnötigerweise ausgeschlossen werden und so zum größten Teile, wie es scheint, nicht einmal bekannt sind.

Wir beschränken uns zunächst auf die drei fundamentalen, in bezug auf das Parallelenproblem homogenen Formen der Ebene.

Es sei durch zwei sich schneidende Gerade ein einziges Mal in der betreffenden Ebene ein rechter Winkel (d. h. die halbe Periode im elliptisch gemessenen Strahlenbüschel) als solcher festgesetzt und allen weiteren Definitionen zugrundegelegt; nach beiden Seiten von ihrem Schnittpunkte 0 lege man auf jeder der beiden Geraden, in Übereinstimmung mit der getroffenen Annahme, die Punkte -1 , $+1$ hin — so ist wieder ein einziges Mal die Gleichheit zweier Strecken verschiedener Richtungen als solche in der Ebene definiert; in der Nicht-Euklidischen Geometrie wird dabei zum ersten Male

¹⁾ Es kann daher auch an Stelle der Homogenität die analytische Eindeutigkeit der fundamentalen Definitionen und ihres Zusammenhangs (abgesehen von Perioden) als maßgebend der Metrik zugrundegelegt werden.

vom Prinzip der Homogenität Gebrauch gemacht, indem den Enden der hyperbolischen bzw. den Viertelungspunkten der elliptischen Geometrie auf beiden Axen die gleichen Koordinaten $\pm m$ zugewiesen werden.

Auf Grund einer solchen metrischen Basis der Ebene — rechtwinkeliges Axenkreuz vom Arme 1 — lassen sich alle übrigen Strecken und Winkel dieser Ebene projektiv (d. h. eigentlich durch Ziehen von Geraden allein) definieren¹⁾.

Die Punkte $-1, 0, +1$ bestimmen auf jeder Axe eine eindeutige projektive Anordnung aller rationalen Punkte, die wir zunächst allein betrachten wollen (wenn auch beliebige Erweiterungen später vorgenommen werden können). Nun lassen sich die beiden Böschel von Geraden

$$x = \text{const} = a, \quad y = \text{const} = b$$

ohne Mühe konstruieren; man braucht nur beispielsweise durch Verbindung je zweier Punkte $(a + b; 0)$ $(0; a + b)$ bzw. $(a - b; 0)$ $(0; b - a)$ die beiden Büschel $x + y = a + b$, $x - y = a - b$ herzustellen. Auf diese Weise erscheint die ganze Ebene durch ein Netz von speziellen projektiven Koordinaten — wir wollen sie kanonische Koordinaten nennen — eindeutig bedeckt, auf das sich alle weiteren Definitionen übertragen lassen.

Durch die zwei Geraden $x = 0, y = 0$ war der rechte Winkel einmal festgelegt worden; durch die dritte Gerade $x - y = 0$ und jede von jenen beiden mag am Nullpunkte der halbe rechte Winkel auf jeder Seite dieser Geraden definiert werden; eine andere Definition würde die metrische Homogenität der Ebene zerstören, die Winkel würden ohne jeden Grund nach der einen Seite größer ausfallen als nach der anderen, und dies wäre auf zweierlei Weise möglich. Die drei Strahlen $x = 0, x - y = 0, y = 0$ bestimmen nunmehr im Strahlenbüschel um den Nullpunkt in eindeutiger Weise eine

¹⁾ Im Falle der Euklidischen Ebene genügt daher ein vorgelegtes Quadrat zur Erledigung aller projektiven und metrischen Verhältnisse.

projektive Anordnung der Elemente und somit auch die elliptische Metrik derselben. Für die Neigung eines Strahls $y = c x$ gegen die X-Axe erhält man dann $\operatorname{tg} \tau = c$ oder auch $\operatorname{tg} \tau = \frac{y}{x}$.

Es gibt nun Kollineationen der Ebene, durch welche das erledigte Strahlenbüschel bei gleichen Definitionen mit unveränderten Größen der Winkel in sich selbst transformiert wird; sie sind gegeben durch die Gleichungen:

$$x' = \delta' (x \cos \delta - y \sin \delta), \quad y' = \delta' (x \sin \delta + y \cos \delta);$$

wir nennen darin δ den Drehwinkel, δ' den Streckungsfaktor. Die Umkehrung dieser Kollineationen

$$x = \frac{1}{\delta'} (x' \cos \delta + y' \sin \delta), \quad y = \frac{1}{\delta'} (-x' \sin \delta + y' \cos \delta)$$

kehrt das Vorzeichen des Drehwinkels und den Wert des Streckungsfaktors um; es sind daher diejenigen derartigen Kollineationen besonders ausgezeichnet, für welche der Streckungsfaktor gleich ± 1 ist. Den Fall $+1$ nennen wir einfach Drehung um den Winkel δ ; der Fall -1 entspricht dann der Drehung um $\pi + \delta$, ist also in dem vorigen enthalten.

Die verlangte Homogenität unserer Metrik läßt nur die einfachen Drehungen zur Definition der Entfernungen in den Strahlen des Büschels als erlaubt heranziehen, sonst würde die Metrik in dem einen Drehsinn der Ebene anders ausfallen als im anderen.

Die Drehung der Ebene um ihren Nullpunkt ist also bei der getroffenen Wahl der Koordinaten in allen homogenen Geometrien notwendig durch die kanonischen Formeln gegeben:

$$x' = x \cos \delta - y \sin \delta, \quad y' = x \sin \delta + y \cos \delta;$$

hier ist zunächst $\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta}$ durchaus als rational vorauszusetzen, worin auch die Unmöglichkeit der allgemeinen Streckenübertragung im Strahlenbüschel mit dem Lineal allein begründet ist.

Die Gleichung des Kreises um den Nullpunkt ist dann auch immer durch

$$x^2 + y^2 = l^2 = \text{const}$$

dargestellt; dadurch wird die Entfernung vom Nullpunkte zunächst für alle rationalen Werte von l erklärt; die Ausdehnung auf alle rationalen Punkte der Ebene überhaupt ist aber, wenn man will, ohne weiteres möglich, die gleiche Formel definiert dann alle zugehörigen Entfernungen.

Wir wollen nun dem Prinzip der Homogenität gemäß alle Geraden $y = \text{const}$ als auf der X -Axe senkrecht stehend definieren; in gleicher Weise sollen alle Geraden $x = \text{const}$ auf der Y -Axe senkrecht. Nun betrachten wir diejenigen Kollineationen, welche die X -Axe und ihre Entfernungen unverändert lassen, während sie gleichzeitig das System ihrer definierten Lote in sich überführen. Sie sind gegeben durch die entsprechenden Formeln:

1. für die parabolische Ebene

$$x' = x + a, \quad y' = a' y;$$

2. für die hyperbolische

$$x' = \frac{x + a}{1 + \frac{ax}{m^2}}, \quad y' = a' \cdot \frac{\sqrt{1 - \frac{a^2}{m^2}} \cdot y}{1 + \frac{ax}{m^2}};$$

3. für die elliptische

$$x' = \frac{x + a}{1 - \frac{ax}{m^2}}, \quad y' = a' \cdot \frac{\sqrt{1 + \frac{a^2}{m^2}} \cdot y}{1 - \frac{ax}{m^2}}.$$

Wir nennen hier a den Verschiebungsparameter, a' den Dehnungsfaktor. Die Umkehrungen dieser Kollineationen sind:

1. für die parabolische Ebene

$$x = x' - a, \quad y = \frac{1}{a'} \cdot y';$$

2. für die hyperbolische

$$x = \frac{x' - a}{1 - \frac{ax'}{m^2}}, \quad y = \frac{1}{a'} \cdot \frac{\sqrt{1 - \frac{a^2}{m^2}} \cdot y'}{1 - \frac{ax'}{m^2}};$$

3. für die elliptische

$$x = \frac{x' - a}{1 + \frac{\alpha x'}{m^2}}, \quad y = \frac{1}{\alpha'} \cdot \frac{\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{m^2}} \cdot y'}{1 + \frac{\alpha x'}{m^2}};$$

sie kehren jedesmal das Vorzeichen der Verschiebung und den Wert des Dehnungsfaktors um. Es sind daher diejenigen unter den betrachteten Kollineationen besonders ausgezeichnet, für welche der Dehnungsfaktor gleich ± 1 ist; den Fall $+1$ nennen wir einfach Verschiebung der Ebene längs der X -Axe um den Parameter α , den Fall -1 leiten wir aus jenem durch Spiegelung ab.

Die verlangte Homogenität unserer Metrik läßt nur die einfachen Verschiebungen, wobei die Quadratwurzeln zunächst als rational vorauszusetzen sind, zur Definition der Entfernungen und Winkel in allen Punkten der X -Axe als erlaubt heranziehen; sonst würde sich die Ebene in der einen Richtung der X -Axe anders verhalten, als in der anderen; die Entfernungen würden z. B. ohne jeden Grund nach der einen Seite größer, nach der anderen — kleiner ausfallen, und dies wäre wieder auf zwei Weisen möglich.

Ebenso definiert man die Verschiebung längs der Y -Axe durch analoge Formeln, in denen x mit y vertauscht und β für α gesetzt wird.

Nunmehr sind die Entfernungen auf allen betrachteten Loten zur einen, wie zur anderen Axe erklärt; die Ausdehnung auf alle rational definierten Lote überhaupt ist ebenfalls ohne weiteres möglich.

Durch die Kombination einer Verschiebung längs der einen Axe mit einer zweiten, längs der anderen, ist die Möglichkeit gegeben, jeden Punkt der Ebene als Nullpunkt zu wählen. Wir definieren nun — diese Definition ist nach unseren Festsetzungen wieder die einzig mögliche — die Strecken und Winkel in jedem Punkte durch die ihnen nach diesen Verschiebungen entsprechenden Strecken und Winkel am ur-

sprünglichen Nullpunkte. Dadurch ist dann die Metrik der ganzen rationalen Ebene erschöpft.

Alle Kongruenzen der Ebene sind so auf projektiver Grundlage erklärt, ebenso die Bewegungen der Ebene in sich: letztere lassen sich aus der Kombination der drei gegebenen fundamentalen Kollineationen definieren, sie ändern also weder die Entfernungen noch die Winkel. Alle metrischen Eigenschaften der Ebene werden zu beweisbaren Sätzen. Bei der gegebenen Darstellung sind die ebenen Bewegungen zunächst besondere rein projektive Transformationen, nicht etwa wirkliche mechanische Vorgänge; letztere werden so vielmehr erst als mathematisch möglich erwiesen und durch die ersten erklärt.

Da nun alle drei fundamentalen Transformationen in der Euklidischen Ebene eine elliptische uneigentliche Doppelgerade unverändert lassen, in den Nicht-Euklidischen Geometrien die entsprechende quadratische Beziehung

$$x^2 + y^2 - m^2 \leq 0 \quad \text{bzw.} \quad x^2 + y^2 + m^2 > 0$$

in sich selbst überführen, so läßt sich rein formal der gegebene Gedankengang dahin definieren, daß das entsprechende absolute Gebilde bei allen gegebenen Definitionen unverändert bleibt und umgekehrt ihnen zugrundegelegt werden kann; die spezielle orthogonale und normierte Form der Gleichung ist bedingt durch die spezielle Wahl der projektiven Koordinaten, die in allen Fällen aus zwei aufeinander senkrechten Axen und der Gesamtheit ihrer Lote gebildet sind. In der Euklidischen Geometrie ist diese spezielle Wahl mit der gewöhnlichen Cartesischen identisch, in den fertigen Nicht-Euklidischen Geometrien sind solche Koordinaten unter Anwendung aller Hilbertschen Kongruenzaxiome gegentlich von M. Dehn (Math. Annalen Bd. 53) benutzt worden.

In der hier gegebenen Darstellung sind diese Koordinaten nach je einmaliger Festlegung des rechten Winkels und der Streckenkongruenz auf seinen beiden Schenkeln, nach ihren beiden Richtungen, in rein projektiver Weise erschlossen; durch jene Festlegung sind die notwendigen und hinreichenden Ele-

mente für den Aufbau der gesamten Metrik der Ebene, sei's im Euklidischen, sei's im Nicht-Euklidischen Sinne gegeben. Es sei noch besonders bemerkt, daß der Übergang von der einen so gewählten metrischen Basis der Ebene zu irgend einer beliebigen ebensolchen anderen der allgemeinsten Kollineation dieser Ebene entspricht.

Es entsteht nun die Frage, was eine nichthomogene Metrik auch im regulärsten Falle nach sich zieht. Dies mag an dem Beispiel der Drehung illustriert werden. Man kann dort zunächst den Streckungsfaktor δ' als geeignete Funktion von δ definieren, nur wird $f(0) = 1$, $f(n\delta) = f(\delta)^n$ sein müssen; bei Beschränkung auf rationale Punkte führt dies auf eine unstetige Metrik; es entsteht eine Geometrie, auf die Hilbert (p. 150) gelegentlich hingewiesen hat; die Ebene verhält sich hier in ihren beiden Drehsinnen verschieden. Bei der üblichen Ausdehnung auf irrationale Elemente erhält man in $f(\delta) = C^\delta$ eine stetige Definition, die an Stelle der Kreise logarithmische Spiralen setzt (Helmholtz); die Metrik ist dann nicht mehr eindeutig. Zuletzt kann man noch Nicht-Archimedische Koordinaten zulassen (vgl. u.) und die Ebene im Endlichen homogen, im Aktual-unendlichkleinen nichthomogen gestalten (Hilbert, p. 14, nennt eine solche Geometrie Nicht-Pythagoräisch): dann ist die Metrik nicht mehr analytisch.

6. Allgemeine homogene Metrik der projektiven Ebene.

Nach dem gleichen synthetischen Verfahren, durch das vorhin die Metrik der drei Grundformen der Ebene durchgeführt wurde, läßt sich auch die Metrik in allen übrigen regulären Geometrien behandeln. In jedem Falle wird man dann formal auf ein quadratisches absolutes Gebilde geführt, das umgekehrt der gleichen Metrik zugrundegelegt werden kann. Wir ziehen es daher vor, die allgemeine Metrik der projektiven Ebene von vornherein auf ein solches Grundgebilde zu beziehen, wobei aber keine Möglichkeit ausgeschlossen werden soll.

Aus der Parallelentheorie ist uns zunächst eine parabolisch-

elliptische Ebene bekannt, deren absolutes Gebilde aus zwei konjugiert komplexen Geraden durch einen reellen Punkt besteht; offenbar ist dieser Fall dual zur Euklidischen Ebene, wo umgekehrt eine reelle Gerade mit zwei konjugiert komplexen Kreispunkten der Metrik zugrundegelegt werden kann. Man braucht daher nur die Sätze der klassischen ebenen Geometrie in die duale Sprache zu übersetzen, um die Verhältnisse in der betrachteten dualeuklidischen Ebene zu erhalten¹⁾: so ist hier z. B. die Summe der Seiten in jedem Dreieck konstant. Wie nun in der Euklidischen Ebene die reellen Punkte der uneigentlichen Geraden als unzugänglich betrachtet werden müssen und so keine Verschiebung eines eigentlichen Punktes dorthin möglich ist, so ist entsprechend keine Drehung eines elliptischen Strahls der dualen Ebene nach den ausgezeichneten Strahlen (des einzigen parabolischen Büschels) möglich; die richtige Auffassung ist hier daher die, daß diese besonderen Strahlen (Niveaulinien) als uneigentlich zu betrachten sind — die Redewendung von 180° wird also in dieser Geometrie ganz unsinnig, da für die Winkel nicht elliptische, sondern parabolische Metrik gilt. Es ist klar, daß bei solcher Auffassung die betrachtete Ebene ∞^3 Bewegungen in sich zuläßt. Es besteht in dieser Geometrie der Satz, daß alle Wege zwischen zwei Niveaulinien gleiche Länge haben.

Ganz analog liegen die Verhältnisse in der parabolisch-hyperbolischen Ebene, wo das absolute Gebilde durch zwei reelle Gerade gegeben ist, deren Schnittpunkt dem als ideal zu betrachtenden einzigen parabolischen Büschel der Ebene entspricht. Auch hier ist die Winkelmessung parabolisch, und es gilt wieder der Satz von den Niveaulinien; es gibt wieder ∞^3 Bewegungen, die nur natürlich keinen eigentlichen Strahl in einen uneigentlichen überführen können.

Es existiert nun selbstverständlich eine Ebene, die zur zuletzt betrachteten dual ist und deren absolutes Gebilde aus

¹⁾ In ganz anderem Zusammenhange findet sich eine spezielle ähnliche Übertragung auf den Raum in der Dissertation von Herrn Böhm: „Parabolische Metrik im hyperbolischen Raum“, München 1908.

einer ausgezeichneten Geraden mit zwei reellen Grundpunkten besteht, eine gewissermaßen pseudoeuklidische Ebene; von der Euklidischen unterscheidet sie sich dadurch, daß die Winkelmessung in ihr hyperbolisch ist. In jedem eigentlichen Punkte gibt es hier zwei ausgezeichnete Richtungen und nur die im eigentlichen Sinne zwischen ihnen liegenden Richtungen sind als real zu bezeichnen; um den Nullpunkt gilt für die Winkel bei passender Wahl der Axen die Gleichung $\operatorname{tgh} \delta = \frac{y}{x}$.

Es läßt sich auch parabolische Winkelmessung in der Euklidischen Ebene durchführen: man braucht nur eine einzige Richtung, etwa die der Y -Axe, als uneigentlich aufzufassen. Um den Nullpunkt gilt dann für die Winkel die Gleichung $\delta = \frac{y}{x}$; auch hier gilt der Satz von den Niveaulinien; die Seiten eines Dreiecks verhalten sich wie die Winkel. Das absolute Gebilde besteht hier aus der uneigentlichen Doppelgeraden mit einem einzigen ausgezeichneten Doppelpunkt.

Es läßt sich nun auch eine duale Geometrie zur hyperbolischen herstellen, wenn man die absolute projektive Axiomatik gelten läßt, wobei z. B. der Zusammenhang der Halbebenen untereinander anders ausfällt, als in allen bisherigen Formen. Man braucht sich nur im Äußeren einer Hyperbel ($x^2 - y^2 - m^2 \leq 0$) zu bewegen, und nur die nichtschneidenden Geraden für real zu halten. Im gleichen Gebiet existiert daneben eine zweite Geometrie, wenn nur die schneidenden Geraden als real gelten: hierbei werden sowohl die Winkel, wie die Längen hyperbolisch.

Die beiden letztgenannten Geometrien ergeben, in eine einzige vereinigt, eine besondere Geometrie, deren Existenz längst bekannt ist: aber gerade die von uns vorgenommene Trennung stellt ihren eigentlichen Sinn und ihre volle Bewegungsfreiheit wieder her. Es sind in ihnen übrigens beliebig viele parabolische Gerade verschiedener Richtungen — die Tangenten des absoluten Gebildes — vorhanden, die wegen der Ungültigkeit der üblichen Anordnungs- und Zusammenhangsätze die Ebene trotzdem nicht zu einer Euklidischen gestalten.

Auf solchen ausgezeichneten parabolischen Geraden sind alle Längen gleich Null zu setzen: ebenso wie in einem dualen Falle die Winkel der Strahlen gleicher Richtung in der Euklidischen Geometrie als Null betrachtet werden. Es läßt sich dann aber immer auch eine besondere parabolische Metrik mit unveränderlicher aktual-unendlichkleiner Einheit für solche ausgezeichneten Gebilde durchführen, die bei allen ∞^3 Bewegungen bestehen bleibt. Entsprechend ist auf der uneigentlichen Geraden bzw. im uneigentlichen Büschel, wo sie einzig sind, eine Metrik mit aktual-unendlichgroßer Einheit möglich. Diese uneigentliche Metrik kann sogar als hinreichende Grundlage der eigentlichen benutzt werden.

Wir stellen hier die neun möglichen regulären ebenen Geometrien, die durch eine homogene Metrik ihrer Winkel und Längen charakterisiert sind, in einer besonderen Tafel zusammen. Eine sie alle umfassende Dreiecksformel gibt der allgemeinste Kosinussatz:

$$\cos \frac{a}{M} = \cos \frac{b}{M} \cos \frac{c}{M} + \sin \frac{b}{M} \sin \frac{c}{M} \cos \frac{\alpha}{M},$$

wo die Konstanten M , M je nach elliptischer, parabolischer, oder hyperbolischer Metrik der Längen und Winkel bzw. reell, unendlich, oder rein imaginär zu nehmen sind.

a) Winkel elliptisch.

1. Längen elliptisch (Elliptische Ebene):
im reellen Inneren eines imaginären Kreises;
2. Längen parabolisch (Euklidische Ebene):
durch Ausschluß einer elliptischen Geraden mit zwei
konjugiert komplexen Kreispunkten;
3. Längen hyperbolisch (Hyperbolische Ebene):
im Inneren eines Kreises oder einer Hyperbel.

b) Winkel parabolisch.

1. Längen elliptisch (Dualeuklidische Ebene):
im reellen Inneren eines Winkelraumes zwischen zwei
konjugiert komplexen Geraden:

2. Längen parabolisch (Absolutparabolische Ebene):
durch Ausschluß einer parabolischen Geraden;
 3. Längen hyperbolisch (Dual-pseudoeuklidische Ebene):
im Inneren eines Winkelraumes zwischen zwei reellen Geraden.
- c) Winkel hyperbolisch.
1. Längen elliptisch (Dualhyperbolische Ebene):
im Äußeren eines Kreises oder einer Hyperbel, wenn nur die nichtschneidenden Geraden für real gelten;
 2. Längen parabolisch (Pseudoeuklidische Ebene):
durch Ausschluß einer hyperbolischen Geraden;
 3. Längen hyperbolisch (Absoluthyperbolische Ebene):
im Äußeren eines Kreises oder einer Hyperbel, wenn nur die schneidenden Geraden für real gelten.

7. Metrik des Raumes.

Wir lassen vorweg nur die drei homogenen Geometrien gelten, in denen alle Richtungen als zugänglich betrachtet werden und so für die Winkel im Strahlen- und Ebenenbüschel elliptische Metrik vorgeschrieben ist. Durch drei in einem Punkte zusammentreffende, nicht einer Ebene angehörende Gerade möge dreimal der rechte Winkel dargestellt und festgelegt werden; im Anschluß an die gewählte Annahme über die Natur des Raumes legen wir auf jeder Axe nach beiden Richtungen vom Nullpunkte die projektiven Koordinaten -1 , $+1$ hin, so dreimal kongruente Strecken im Raume definierend. Die so gewonnene metrische Basis erlaubt auf rein projektiver Grundlage die gesamte homogene Metrik des Raumes synthetisch zu erledigen; man hat nur den für die Ebene gewählten Weg zu verallgemeinern. Zunächst werden, was nur auf eine Weise geschehen kann, diejenigen Kollineationen des Raumes definiert, die man als Drehungen um die Axen bezeichnen kann und die in allen homogenen Geometrien bei der gegebenen speziellen Wahl der (kanonischen) projektiven Koordinaten durch die gleichen Formeln der Cartesischen analytischen Geo-

metrie dargestellt werden — hierin ist übrigens der Grund dafür zu suchen, daß die Formeln der sphärischen Trigonometrie in allen drei Grundformen des Raumes die gleichen sind. So überträgt man den Längen- und Winkelbegriff von den Axen auf alle Richtungen durch den Nullpunkt. Dann definiert man, was wieder nur auf eine Art möglich ist, diejenigen Kollineationen, die man als Verschiebungen längs der Axen bezeichnen kann, und überträgt so die Begriffe von Länge und Winkel auf alle Punkte und Richtungen des Raumes. Man überzeugt sich, daß die fraglichen Transformationen in der parabolischen Geometrie die Gleichung einer uneigentlichen Ebene, in den Nicht-Euklidischen Geometrien die Gleichung einer Idealfäche zweiten Grades $x^2 + y^2 + z^2 \pm m^2 = 0$ in sich überführen; diese kann umgekehrt nach Cayleys Vorgang zum Ausgangspunkt der Definitionen genommen werden. Der ganze Raum läßt sich also in seinen drei Grundformen von einer gegebenen metrischen Basis — in der Form eines rechtwinkligen Dreiaxenkantes vom Arme 1 — aus durch rein projektive Definitionen metrisch erschöpfen, sei's im Euklidischen, sei's im Nicht-Euklidischen Sinne.¹⁾ Der Übergang von einer bestimmten solchen Basis zu irgendeiner beliebigen anderen ist durch die allgemeinste Kollineation gegeben.

Es erübrigt sich noch, die sonstigen regulären Formen des dreidimensionalen projektiven Raumes anzugeben.

Für jedes der drei Grundgebilde erster Stufe ist jede der drei Arten der Metrik möglich. Es existieren daher insgesamt 27 homogene Geometrien des Raumes; sie lassen sämtlich ∞^6 Bewegungen zu, man darf nur nie das Verlangen stellen, daß dabei eigentliche Elemente in uneigentliche übergeführt werden, oder umgekehrt. Durch diese Geometrien wird der duale Charakter der Geometrie auch in metrischer Hinsicht voll-

¹⁾ Im Euklidischen Raume genügt daher ein vorgelegter Würfel zur Erledigung aller projektiven und metrischen Verhältnisse durch Ziehen von geraden Linien allein.

ständig. Nur in den angeführten Geometrien ist die Metrik an sich schon analytisch eindeutig; in jeder anderen ist eine solche Eindeutigkeit erst durch besondere Festsetzung zu erreichen, wodurch nicht mehr alle Bewegungen möglich bleiben.

Der Sinn z. B. einer von Hilbert (p. 30) aufgestellten Geometrie ist der, daß in der uneigentlichen Ebene zwei verschiedene imaginäre Ellipsen gleichzeitig vorgelegt werden: dadurch werden zwei verschiedene reguläre Geometrien im gleichen Euklidischen Raume vereinigt, von denen jede an sich schon analytisch eindeutig ist; nun werden aus der einen Geometrie die Längen, aus der anderen — die Winkel herübergenommen — die Kongruenzsätze gelten dann natürlich nicht mehr, auch bleiben so nur ∞^3 Bewegungen übrig. Eine andere Geometrie von Hilbert (p. 128) legt im Euklidischen Raume ein Tetraëder als absolutes Gebilde hin; auf jeder Geraden im Inneren des Tetraëders entstehen dann zwar nur zwei Grenzpunkte, analytisch hat aber jede Gerade tatsächlich vier ausgezeichnete Punkte und die Metrik ist so nicht an sich schon eindeutig; hier sind nur noch ∞^1 Bewegungen möglich.

Wir stellen nunmehr die 27 regulären Geometrien des Raumes in folgender Tafel zusammen.

A) Ebenenwinkel elliptisch.

I. Strahlenwinkel elliptisch.

1. Längen elliptisch (Elliptische Geometrie):
im reellen Inneren einer imaginären Kugel;
2. Längen parabolisch (Euklidische Geometrie):
durch Ausschluß einer elliptisch gedachten Ebene (α_1);
3. Längen hyperbolisch (Hyperbolische Geometrie):
im Inneren einer Kugel oder eines zweisch. Hypb-ids.

II. Strahlenwinkel parabolisch.

1. Längen elliptisch:
im reellen Inneren eines Winkelraumes zwischen zwei konjugiert komplexen Ebenen mit reeller elliptischer Schnittgeraden;

2. Längen parabolisch:
durch Ausschluß einer Euklidisch gedachten Ebene (a_2);
3. Längen hyperbolisch:
im Inneren eines reellen Ebenenpaares durch eine elliptische Gerade.

III. Strahlenwinkel hyperbolisch.

1. Längen elliptisch:
auf jeder Seite am einsch. Hypb-id, wenn nur die nichtschneidenden Geraden für real gelten;
2. Längen parabolisch:
durch Ausschluß einer hyperbolischen Ebene (a_3);
3. Längen hyperbolisch:
im Äußeren einer Kugel oder eines zweisch. Hypb-ids, wenn nur die schneidenden Geraden für real gelten.

B) Ebenenwinkel parabolisch.

I. Strahlenwinkel elliptisch.

1. Längen elliptisch:
im reellen Inneren eines imaginären Kreis- oder Hyperbelkegels mit reeller Spitze;
2. Längen parabolisch:
durch Ausschluß einer dualeuklidischen Ebene (b_1);
3. Längen hyperbolisch:
im Inneren eines reellen Kreis- oder Hyperbelkegels.

II. Strahlenwinkel parabolisch.

1. Längen elliptisch:
im reellen Inneren des Winkelraumes zwischen zwei konjugiert komplexen Ebenen mit reeller parabolischer Schnittgeraden;
2. Längen parabolisch:
durch Ausschluß einer absolutparabolischen Ebene (b_2);
3. Längen hyperbolisch:
im Inneren eines reellen Ebenenpaares mit einer parabolischen Schnittgeraden.

III. Strahlenwinkel hyperbolisch.

1. Längen elliptisch:

im Äußeren eines Kreis- oder Hyperbelkegels, wenn nur die nichtschneidenden Geraden als real gelten;

2. Längen parabolisch:

durch Ausschluß einer dual-pseudoeuklidischen Ebene (b_3);

3. Längen hyperbolisch:

im Äußeren eines Kreis- oder Hyperbelkegels, wenn nur die schneidenden Geraden als real gelten.

C) Ebenenwinkel hyperbolisch.

I. Strahlenwinkel elliptisch.

1. Längen elliptisch:

im Äußeren einer Kugel oder eines zweisch. Hyph-ids, wenn nur die nichtschneidenden Ebenen für real gelten;

2. Längen parabolisch:

durch Ausschluß einer dualhyperbolischen Ebene (c_1);

3. Längen hyperbolisch:

auf jeder Seite am einsch. Hyph-id, wenn nur die inneren Ebenenteile für real gelten.

II. Strahlenwinkel parabolisch.

1. Längen elliptisch:

im reellen Inneren eines Winkelraumes zwischen zwei konjugiert komplexen Ebenen mit reeller hyperbolischer Schnittgeraden;

2. Längen parabolisch:

durch Ausschluß einer pseudoeuklidischen Ebene (c_2);

3. Längen hyperbolisch:

im Inneren eines reellen Ebenenpaares mit hyperbolischer Schnittgeraden.

III. Strahlenwinkel hyperbolisch.

1. Längen elliptisch:

im Äußeren einer Kugel oder eines zweisch. Hyph-ids, wenn nur die schneidenden Ebenen und in ihnen die nichtschneidenden Geraden real sind;

2. Längen parabolisch:

durch Ausschluß einer absoluthyperbolischen Ebene (c_3);

3. Längen hyperbolisch:

auf jeder Seite am einsch. Hypb-id. wenn dur die
schneidenden Geraden der äußeren Ebenenteile für
real gelten.

8. Vollständige und Nicht-Archimedische Geometrie.

Der absolute projektive Raum mit seinen in allen Fällen von einem begrenzten Bereiche aus geometrisch wie analytisch eindeutig bestimmten vollzähligen Punkten, Geraden und Ebenen ist immer sich selbst gleich und immer einzig.

Die Trennung des Realen vom Idealen, des Rationalen vom Irrationalen, des Endlichen vom Unendlichgroßen und Unendlichkleinen läßt dann diesen absoluten Raum der projektiven Geometrie von verschiedenen Gesichtspunkten metrischer Natur aus betrachten.

Der von uns projektiv aufgebaute Raum ist vorläufig wesentlich rational; d. h. es sind in ihm nur diejenigen realen oder idealen Punkte berücksichtigt, die durch projektive Konstruktionen aus dem fundamentalen Dreiaxenkant entstehen¹⁾. Nichts aber schränkt die mathematische Erweiterung ein. Man kann nun mit Dedekind, G. Cantor, Klein u. A. m. durch ein besonderes Axiom festsetzen, daß nach Einführung der Irrationalen die Gesamtheit aller Punkte der Geraden genau erschöpft sei und erhält dann die übliche vollständige analytische Geometrie als volles Äquivalent des Raumes: man kann aber auch noch das aktuelle Unendlich im Großen wie im Kleinen zulassen, und so als letztmögliche reelle arithmetische Erweiterung die Nicht-Archimedische Geometrie erhalten. Indem wir uns beständig nur an diejenigen Punkte halten, die wir uns als wirklich konstruiert denken, und alle Möglichkeiten offen lassen, können wir jedes beson-

1) Es läßt sich sogar bei Beschränkung der Koordinaten auf ganze positive Zahlen allein (in begrenzter Anzahl) die gesamte Geometrie, einschließlich der Metrik, in gleicher Weise erledigen; sodaß die Geometrie aus endlich vielen Aussagen über endlich viele Elemente gewonnen werden kann.

dere Axiom in dieser Richtung vermeiden. In dem von uns bisher aufgebauten rationalen Raume ist seine eigene Art von Vollständigkeit von selbst erfüllt; durch die Art der Durchführung der Metrik ist auch das Archimedische Prinzip für die realen Elemente von selbst erfüllt; ebenso kann man für die Kongruenzen durch die gegebenen Definitionen jedes Axiom entbehrlich machen. So ist die gesamte Geometrie rein synthetisch auf Grund der projektiven Axiome allein aufgebaut; eine geringe Abänderung dieser Axiome in absolut projektivem Sinne erschließt sämtliche möglichen homogenen Geometrien des Raumes von beliebig vielen Dimensionen: es gibt offenbar immer einen einzigen absoluten projektiven Raum von n Dimensionen und in ihm 3^n Möglichkeiten eindeutiger Metrik, die jedesmal auf die allgemeinste reelle quadratische Gleichung des absoluten Grundgebildes führen, und je $\infty^{\frac{1}{2}n(n+1)}$ Bewegungen in sich zulassen.

Wir wollen nun zeigen, wie die Vervollständigung des Raumes durch irrationale und aktuale Punkte auf projektivem Wege möglich ist.

Es sei durch eine Zahl σ ein existent gedachter irrationaler Punkt auf der Geraden $(-1, 0, +1)$ festgelegt, d. h. dem zugehörigen Grenzprozeß entsprechend definiert. Wir konstruieren aus $-1, 0, +1$ zunächst den realen oder idealen Punkt ∞ ; aus $0, \sigma, \infty$ läßt sich nun bei rationalem x jedes $x\sigma$ projektiv konstruieren: aus $-1, +1, \sigma$ hat man sofort $\frac{1}{\sigma}$ und darauf jedes $\frac{x}{\sigma}$; durch weitere projektive Konstruktion

an den bereits gewonnenen Punkten läßt sich jeder gebrochenen rationalen Funktion von σ mit rationalen Koeffizienten eindeutig ein Punkt der Geraden zuweisen, da der vierte harmonische Punkt zu $(a, b), c$ gegeben ist durch $\frac{(a+b)c-2ab}{2c-(a+b)}$.

Auf diese Weise ist die Irrationalzahl σ dem rationalen Raume adjungiert; und so kann man beliebige weitere Irrationale nach Bedarf und Belieben dem Raume hinzufügen, worauf die Definition des gewöhnlich angenommenen vollständigen reellen

Raumes arithmetisch möglich wird. Es hat aber, wie wir glauben, keinen eigentlichen Sinn, diesen Raum dann durch ein ausdrückliches Axiom als den richtigen Raum schlechtweg anzunehmen, um so mehr, als noch Weiterbildungen möglich sind durch Heranziehung des aktualen Unendlich. Nehmen wir einen Punkt t als Repräsentanten des letzteren auf der Geraden an, so ist hier t durch den Grenzprozeß $1, 2, 3 \dots N \dots$ definiert und dennoch vom absoluten ∞ (d. h. dem vierten harmonischen Punkt zu $-1, 0, +1$) verschieden gedacht. Man kann dies mit Hilbert so ausdrücken, daß man t als beliebig groß zu nehmende positive Variable betrachtet. Halten wir uns an diese Auffassung, so ist durch Angabe einer solchen Einheit des aktualen Unendlich die Konstruktion jedes Punktes für eine rationale gebrochene Funktion von t mit rationalen Zahlenkoeffizienten ermöglicht, vor allem auch die Konstruktion des Repräsentanten des aktualen Unendlichkleinen $\frac{1}{t}$, der aus dem Grenzprozeß $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \dots \frac{1}{N} \dots$ entsteht, und doch von 0 verschieden gedacht wird. Das Gesamtgebiet des aktualen Unendlichgroßen ist auf der Geraden durch die Punkte $|x| > N$ für beliebige ganzzahlige N gegeben; das des aktualen Unendlichkleinen durch $|x| < \frac{1}{N}$; um jeden endlich rationalen Punkt s entsteht ein Gebiet des Aktual-Unendlichkleinen, gegeben durch die Bedingung $|x - s| < \frac{1}{N}$. Es ist nun leicht, diese Nicht-Archimedische Geometrie und ihre Metrik in die fertig gedachte Archimedische in jeder ihrer Gestalten einzubauen; die hinzukommenden rationalen aktual-unendlichkleinen und -großen Zahlen legen sich in die existent gedachten zugehörigen Punkte, die Metrik schließt sich im Endlichen ohne Änderung der Hauptsätze der ursprünglichen Archimedischen unmittelbar an.

Wir betrachten nun die drei homogenen Grundformen des Raumes, und erhalten so in einfacher Weise die Sätze von Dehn (l. c.) wieder. In der elliptischen Geometrie wird wieder

keine Nichtschneidende angenommen, in der Euklidischen — wieder eine einzige nach dem von vornherein projektiv bekannten Punkte des absoluten ∞ : die Metrik wird dadurch nicht geändert, die Summe der Winkel im Dreieck bleibt kleiner als zwei Rechte, bzw. ist sie ihnen gleich. Durch die Annahme der Existenz beliebig vieler wirklicher Nichtschneidenden wird jedoch nunmehr eine Trennung möglich. Eine besondere Geometrie dieser Art entsteht zunächst beim Ausschließen des Gesamtgebietes des aktualen Unendlichgroßen durch die Bedingung $x^2 + y^2 + z^2 < N^2$ für beliebiges ganzzahliges N ; im Restgebiet hat man einfach die Euklidische Geometrie, bereichert durch die Nicht-Archimedischen Punkte im Endlichen und um 0, vor sich; die Summe der Winkel ist so hier gleich zwei Rechten (Semi-Euklidische Geometrie).

Eine andere Geometrie entsteht durch die Annahme eines endlichen projektiven Gebietes für den realen Raum durch die Bedingung: $x^2 + y^2 + z^2 < m^2$ für ein festes endliches m . Dies ist einfach die hyperbolische Geometrie, durch die Nicht-Archimedischen Punkte im Endlichen und um 0 bereichert; die entsprechende Metrik ist die hyperbolische, die Winkelsumme im Dreieck — kleiner als zwei Rechte.

Eine letzte Möglichkeit verbleibt, indem man nur das Gebiet des aktualen Unendlichkleinen um irgend einen Punkt im Endlichen nimmt: etwa um 0, durch die Bedingung $x^2 + y^2 + z^2 < \frac{1}{N^2}$ für beliebiges ganzzahliges N .

Dieses Gebiet ist bei allen Arten der Metrik in sich abgeschlossen, keine Streckenabtragung führt aus ihm heraus und jeder Punkt in ihm ist erreichbar; so ist hier bei der Gültigkeit aller gewöhnlichen Kongruenzsätze jede Art der Längenmessung möglich — daher auch eine Geometrie, in welcher trotz des Vorhandenseins beliebig vieler Nichtschneidender die Winkelsumme im Dreieck mehr als zwei Rechte beträgt — (Nicht-Legendresche Geometrie).

Auf noch kompliziertere Nicht-Archimedische Raumbildungen gehen wir hier nicht ein.

9. Geometrie und Erfahrung.

Vom Standpunkt der absoluten projektiven Geometrie gibt es nur eine einzige Form des Raumes, in der dann jede Art der Metrik nach Vereinbarung durchgeführt werden kann. Innerhalb eines angebbaren willkürlich begrenzten Teiles des Raumes (z. B. eines Tetraäders) werden alle Konstruktionen oder, wenn man will, Wahrnehmungen (die sich übrigens nur auf Ziehen bzw. Betrachten von Geraden beschränken), als möglich und real gesetzt; die Punkte außerhalb des gewählten Raumbereiches erhalten so von selbst, und mögen sie auch als wirklich gedacht werden, den Charakter der Idealität; jeder solche Punkt kann nur durch Angabe zweier nach ihm gehender Strahlen angedeutet und definiert werden: was genau der Weg ist, auf dem die uneigentlichen Punkte der parabolischen und hyperbolischen Geometrie eingeführt werden. Indem wir nun von vornherein alle Richtungen des dreidimensionalen Raumes um einen realen Punkt als zugänglich betrachten und daher für alle zugehörigen Winkel elliptische Metrik vorschreiben, führen wir den ersten Schritt aus, das mathematisch Zulässige vom erkenntnistheoretisch Notwendigen zu trennen. Der Raum der menschlichen Anschauung läßt wenigstens bei Winkeln keine uneigentlichen Elemente zu; nur diejenigen Geometrien sind daher als wirklich gelten zu lassen, die diesem Umstande zuallererst Rechnung tragen. So ist es auch zu erklären, daß sich die Geometer mit den anderen Arten der Winkelmessung fast nie beschäftigt haben. Beschränkt man sich nun auf die drei fundamentalen Grundformen, was durch die Wahl unserer Axiome, wozu nur noch die Forderung der Homogenität¹⁾ hiuzutritt, ursprünglich geschehen ist, so liegen die Unterschiede der weiteren Behandlung nicht in der Natur des Raumes selbst, sondern in der Art und Weise, welche man dann für die Metrik vereinbart.

Innerhalb des als wirklich erreichbar abgegrenzten Teiles

¹⁾ Diese ist übrigens allgemein mit der der Gültigkeit aller Kongruenzsätze für die eigentlichen Elemente gleichbedeutend.

des Raumes mag dabei mögliche Übereinstimmung mit der Erfahrung als erwünscht betrachtet werden; auch läßt sie sich immer durch passende Wahl des fundamentalen metrischen Grundelementes erreichen. In der weiteren Ausdehnung des Raumes steht dagegen die Metrik frei, nur bei beliebig weit als tatsächlich erreichbar gesetzter Erweiterung könnten dann Abweichungen merklicher Natur entstehen, deren Prüfung indes durch keine Erfahrung ermöglicht werden kann. Eine Entscheidung durch die Erfahrung ist aber auch vom philosophischen Standpunkte nicht als möglich zu bezeichnen, da wir die räumlichen Verhältnisse erst der reinen inneren Anschauung entnehmen, und das sogenannte „Richtige“ bei wirklicher Ausführung in unserem Belieben steht, was sich auch in der Möglichkeit einer willkürlichen Festsetzung der metrischen Basis des Raumes kundgibt.

Der mathematischen Theorie steht die Wahl offen, jede beliebige Art der Metrik durchzuführen. Aus methodologischen Gründen ergibt sich der Aufbau der Euklidischen Geometrie als der weitaus geeignetste: es bedarf bei ihm keiner besonderen Annahme über die projektive Lage des absoluten Gebildes, aus welchem Anlaß in der Nicht-Euklidischen Geometrie endliche Strecken absoluten Charakters auftreten. So ist in letzterer nach Wahl eines Nullpunktes auf einer Geraden die Lage der besonderen Punkte geometrisch eindeutig; die feste Krümmung wird jedesmal durch eine geometrisch eindeutig bestimmte Strecke (als Krümmungsradius) gekennzeichnet; es gehört dann beim gleichseitigen Dreieck eine geometrisch absolut bestimmte Seite dazu, um etwa in der elliptischen Raumform eine Winkelsumme von 270° hervorzubringen, in der hyperbolischen — eine solche von 90° . Mathematisch äußert sich dieses Verhalten der Nicht-Euklidischen Raumformen in der Unmöglichkeit beliebiger ähnlicher Figuren innerhalb eines und desselben Raumes; während in der Euklidischen Geometrie unbeschränkte Ähnlichkeit im Großen und im Kleinen möglich ist. In der Euklidischen Geometrie gestaltet sich der Unterschied zwischen Groß und Klein nur relativ, die gleichen

Verhältnisse sind in beiden möglich: während in der Nicht-Euklidischen im Großen andere Verhältnisse entstehen, als im Kleinen: bei hinreichender Kleinheit ist bekanntlich beliebige Annäherung an parabolische Verhältnisse möglich, was nebenbei ebenfalls zur Folge hat, daß im erreichbaren Endlichen beliebige Übereinstimmung der metrischen Resultate mit der üblichen Erfahrung herbeigeführt werden kann, welche Art der Metrik auch angewandt wird. So ist der Euklidische Raum geometrisch immer sich selbst ähnlich und sich selbst kongruent; während die, verschiedenen Strecken als Krümmungsradien entsprechenden, hyperbolischen bzw. elliptischen Räume untereinander im Euklidischen Sinne ähnlich, aber nicht kongruent sind. So gibt es nur einen einzigen Euklidischen Raum, aber beliebig viele Nicht-Euklidische; und letztere sind erkenntnistheoretisch dadurch gekennzeichnet, daß in ihnen mit jeder bestimmten Größe (Strecke) absolut bestimmte geometrische Eigenschaften verbunden werden.

Schon Gauß war durch das Auftreten des räumlich Absoluten in der von ihm untersuchten hyperbolischen Geometrie zu der Meinung veranlaßt, dies sei ein Grund, solche Geometrien nicht zuzulassen; jedenfalls hinderte ihn dieser Umstand, seine dahingehenden Untersuchungen zu veröffentlichen (Briefe an Schumacher). Diese Ansicht ist jedoch nicht so zu verstehen, daß im Nicht-Euklidischen Raume eine geometrische Größe auftrete, die im Euklidischen Raume Null sei — die Krümmung; durch eine solche Interpretation wird die Aussage von Gauß eher entkräftet. Vielmehr ist die direkte Existenz einer jeder besonderen Strecke zukommenden absoluten Bedeutung, und dies hat Gauß auch zweifelsohne gemeint, das wesentlichste Charakteristikum der Nicht-Euklidischen Raumformen. So kommt dort z. B. jeder besonderen Strecke ein ganz bestimmter Wert des zugehörigen Winkels in dem aus ihr gebauten gleichseitigen Dreieck zu; ebenso erhält das Verhältnis des zugehörigen Kreisumfanges zu dieser Strecke als Durchmesser einen bestimmten Wert u. s. f.

Die dabei auftretenden Hindernisse sind, freilich, nicht mehr mathematischer Natur, da sie keinen logischen Widerspruch enthalten. Wohl aber darf man mit Gauß die Ansicht teilen, daß ein räumlich Absolutes nicht in die Geometrie hineingehöre, solange nicht anderweitige Anlässe etwa zur Annahme eines solchen Absoluten zwingen: geht doch — wie wir aus den gegebenen Gründen glauben, mit Unrecht — die Annahme vieler Gelehrten dahin, daß solche Anlässe durch den wirklichen Raum auf dem Wege der Erfahrung würden entstehen können.

Der Raum der Geometrie ist aber nicht der der Erfahrung, sondern der der reinen Anschauung. Und für diesen idealen Raum fehlt jeder erkenntnistheoretisch zwingende Grund, eine geometrisch eindeutig bestimmte Strecke als Krümmungsradius und so ein absolutes Maß für die Größe aller räumlichen Dinge als existent anzunehmen; es ist vielmehr nicht erlaubt, dem Raume ein solches aufzudrängen — da der ideale Raum der reinen Anschauung, als reine Form des menschlichen Denkens, notwendig immer der gleiche sein muß, was nur beim Euklidischen Raume möglich ist.

Bei den Winkeln ist dies ganz anders, da eben die Verhältnisse im Endlichen um einen Punkt herum als das einzige wirklich und vollständig Erreichbare der räumlichen Wahrnehmung und Vorstellung gegeben sind; dem entspringt auch die Notwendigkeit, bei der elliptischen Metrik von Winkeln das absolute Maß in Form des rechten Winkels wirklich anzugeben: einmal für die Ebene, dreimal für den Raum, $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$ -mal bei n Dimensionen: man braucht sich aber auch hier nicht an die Erfahrung zu halten und darf ein beliebiges Dreikant als rechtwinklig der Metrik — an die man sich dann auch halten muß — zugrundelegen. Nicht durch die Erfahrung wird die rein intuitive Anschauung des Raumes gebildet: vielmehr setzt jede Erfahrung eine solche bereits grundsätzlich voraus und wird durch sie erst möglich (so wird aller-

dings der Raum der reinen Anschauung auch jeder Erfahrung zugrundeliegen).

Aus diesen Gründen metaphysischer Natur muß auch die Euklidische Geometrie als die einzige Form des Raumes angesehen werden, der die Bedeutung höherer Realität zukommt. Diese Realität ist nun selbstverständlich nicht empirischer Natur und kann es schon aus mathematischen Gründen nie werden; sie ist transzendental und wächst aus der abstrakten Notwendigkeit hervor, keine fremden unbegreiflichen Elemente in der reinen Anschauung zuzulassen. Solche Elemente treten aber durch den absoluten Unterschied zwischen den Verhältnissen im Großen und im Kleinen und noch mehr durch die Möglichkeit absoluter Strecken innerhalb einer jeden Nicht-Euklidischen Raumform notwendig auf. Und dies ist ein Grund, der Nicht-Euklidischen Geometrien, und sollte sie auch gerade vermöge solcher Eigenschaften den Anforderungen der Erfahrung besser entsprechen, eine nur mathematische Bedeutung beizumessen, sie nicht als eigentliche Formen der reinen Anschauung zu betrachten; wie eine solche Bedeutung allein auch den ausgeschiedenen übrigen 24 regulären Raumformen zukommt, um so mehr, als alle diese Geometrien in den Euklidischen Raum abgebildet werden können.

Der ideale Raum der Anschauung ist Euklidisch und darf nicht anders als Euklidisch gedacht werden. Mit der Erfahrung hat dies, freilich, nichts zu tun, wie denn auch die Geometrie ein für allemal keine Erfahrungswissenschaft ist.

Diesen Tatsachen eine vollständige mathematische Begründung gegeben zu haben, scheint uns wesentliches Resultat der vorangegangenen Ausführungen zu sein.

Der Euklidischen Geometrie gebührt danach, zwar nicht aus mathematischen, wohl aber aus höheren erkenntnistheoretischen und metaphysischen Gründen, tatsächlich diejenige unbestrittene einzigartige Stellung als der allein gültigen Geometrie, die sie vor Zeiten annahm, und die sie allein einzunehmen auch berechtigt ist.

Über eine dem Lambertschen Problem der acht Punkte verwandte Aufgabe.

Von **Max Lagally**.

Vorgelegt von S. Finsterwalder in der Sitzung am 4. Mai 1912.

In drei Standpunkten Q_i ($i = 1, 2, 3$) werden die Winkel gemessen, welche die Visierlinien nach fünf Zielpunkten R_k ($k = 1, 2, 3, 4, 5$) miteinander bilden. Gesucht ist die gegenseitige Lage der acht Punkte Q_i und R_k ¹⁾.

¹⁾ Bei dem eigentlichen Lambertschen Problem der acht Punkte sind die Winkel bekannt, welche die Strahlen von vier Standpunkten nach vier Zielpunkten unter sich einschließen. Lambert hat die Aufgabe, hieraus die Figur der acht Punkte zu finden, analytisch durch Zurückführung auf eine Gleichung 2. Grades gelöst (J. H. Lambert, Beiträge zum Gebrauch der Mathematik und deren Anwendung, 1. Bd., Berlin 1765, § 270 u. f.). Etwas veränderte analytische Lösungen gaben später J. A. Grunert (Archiv für Mathematik und Physik, 1. Bd., 1841, p. 89) und W. Laska (Monatshefte für Mathematik und Physik, 12. Bd., 1901, p. 172). Der zuletzt genannte Autor hat wohl zuerst ausdrücklich auf das hier behandelte Problem aufmerksam gemacht, ohne indessen seine Lösung zu fördern. Neuerdings hat die Aufgabe in der Photogrammetrie Beachtung gefunden und wurde von Th. Scheimpflug (Wissenschaftliche Vorträge, gehalten auf der „Ha“ zu Frankfurt, herausgegeben von R. Wachsmuth, Berlin 1910, p. 190) und J. Tschamler (Mitteilungen der K. u. K. Geographischen Gesellschaft in Wien, Heft 8, 1911) durch graphische Näherung gelöst.

Das eigentliche Lambertsche Problem kann geometrisch in ganz ähnlicher Weise wie das hier behandelte gelöst werden. Legt man die Standpunkte auf vier Kreispaaire fest, so ergeben sich die Zielpunkte als Restschnitt je zweier Kurven 3. Ordnung mit sieben bekannten Schnittpunkten.

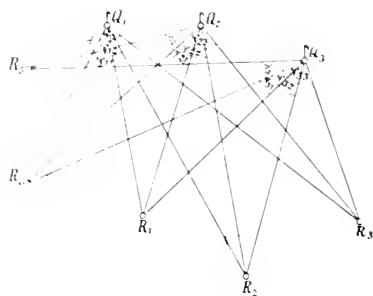


Fig. 1.

Die im folgenden festgehaltene Bezeichnung ist aus der Figur 1 ersichtlich. Alle Winkel werden von den Ziellinien nach R_4 aus gemessen; und zwar ist $R_4 Q_i R_5 = \lambda_i$ gesetzt; die Winkel, welche einen nach R_1 , R_2 oder R_3 gehenden Schenkel haben, also $R_4 Q_i R_k$ ($k = 1, 2, 3$) heißen φ_{ik} .

Da der Maßstab der ganzen Konfiguration, ebenso ihre Lage in der Ebene, unbestimmt und willkürlich ist, können zwei von den acht Punkten beliebig angenommen werden; und zwar sollen R_5 und R_4 auf der y -Achse im Abstand $\pm a$ vom Anfangspunkt des Koordinatensystems liegen.

Dann ist die Lage des Punktes Q_1 auf die beiden durch R_4 und R_5 gehenden Kreise beschränkt, in welchen über der Sehne $R_4 R_5$ der Peripheriewinkel λ_1 steht; ebenso ist der geometrische Ort für Q_2 und Q_3 von je zwei durch R_4 und R_5 gehenden Kreisen gebildet.

Für die weitere Behandlung der Aufgabe kann also als geometrischer Ort eines jeden der drei Punkte Q_1 , Q_2 und Q_3 wahlweise einer von zwei Kreisen angenommen werden; mithin zerfallen die sämtlichen Lösungen des Problems in acht gleich große Gruppen, entsprechend den acht Kombinationen von je dreien der Kreise [$K_1 K_2 K_3$, $K_1 K_2 K_3$, $K_1 K_2 K_3$, $K_1 K_2 K_3$, $K_1 K_2 K_3$, $K_1 K_2 K_3$, $K_1 K_2 K_3$, $K_1 K_2 K_3$].

Im Interesse einer exakten Vorstellung wird für die folgende Untersuchung eine beliebige, aber fest gewählte Gruppe herausgegriffen: Q_1 , Q_2 und Q_3 sollen auf denjenigen drei Kreisen angenommen werden, deren Mittelpunkte auf dem positiven Teil der x -Achse liegen.

Durchläuft einer dieser Punkte Q_i den ihm zugeordneten Kreis, so wird seine Verbindungslinie mit dem gesuchten Punkt R_k durch einen festen Punkt P_{ik} des Kreises gehen müssen,

da der gegebene Winkel $R_4 Q_i R_k = \varphi_{ik}$ als konstanter Peripheriewinkel auftritt und mithin über einer festen Sehne $R_i P_{ik}$ stehen muß (Fig. 2).

So ist zunächst auf jeder der fünfzehn Ziellinien $Q_i R_k$ ein Punkt P_{ik} bekannt, der leicht zu konstruieren ist.

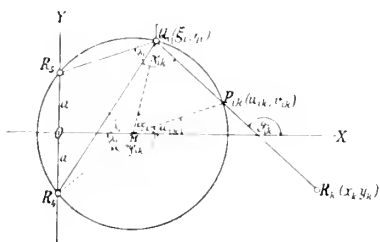


Fig. 2.

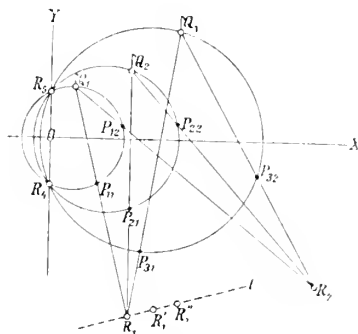


Fig. 3.

Es soll nun versucht werden, unter Benutzung der gegebenen Punkte R_4 und R_5 und der konstruierten Punkte P_{ik} zu einem beliebig angenommenen Punkt R_1 den Punkt R_2 zu konstruieren (Fig. 3).

Die Verbindungslinien $R_1 P_{11}, R_1 P_{21}, R_1 P_{31}$ liefern die Punkte Q_1, Q_2, Q_3 als zweite Schnittpunkte mit den drei Kreisen. Dann sind $Q_1 P_{12}, Q_2 P_{22}, Q_3 P_{32}$ die Ziellinien nach R_2 . Diese drei Ziellinien werden sich jedoch im allgemeinen nicht in einem Punkte schneiden. Es ist deshalb zu untersuchen, welcher Bedingung R_1 genügen muß, damit überhaupt ein zugehöriger Punkt R_2 existiert.

Wenn der Punkt R_1 eine beliebige Gerade l der Ebene durchläuft und dabei die Lagen R_1', R_1'' usw. annimmt, so entstehen drei perspektive Strahlenbüschel mit den Trägern P_{11}, P_{21}, P_{31} :

$$P_{11}(R_1' R_1'' R_1''' \dots) \wedge P_{21}(R_1' R_1'' R_1''' \dots) \wedge P_{31}(R_1' R_1'' R_1''' \dots).$$

Wenn hiebei Q_1 die Lagen Q_1', Q_1'' usw. annimmt, so sind die Büschel $P_{11}(Q_1' Q_1'' Q_1''' \dots)$ und $P_{12}(Q_1' Q_1'' Q_1''' \dots)$ kongruent und also projektiv.

Analoges gilt für die beiden anderen Kreise. Folglich sind folgende drei Strahlenbüschel zueinander projektiv:

$$P_{12}(Q_1 Q'_1 Q''_1 \dots) \wedge P_{22}(Q_2 Q'_2 Q''_2 \dots) \wedge P_{32}(Q_3 Q'_3 Q''_3 \dots).$$

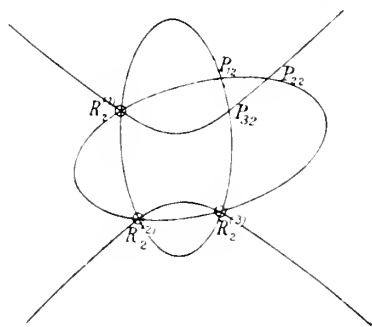


Fig. 4.

Da zwei projektive Strahlenbüschel als Ort der Schnittpunkte entsprechender Strahlen einen Kegelschnitt erzeugen, auf dem auch die beiden Träger der Büschel liegen, ergeben sich für R_2 drei geometrische Örter, nämlich drei Kegelschnitte, von denen jeder durch zwei von den drei Punkten P_{12} , P_{22} , P_{32} geht (Fig. 4). Weil sich in jedem

weiteren Schnittpunkt zweier dieser Kegelschnitte entsprechende Strahlen aller drei Büschel schneiden, geht auch der dritte Kegelschnitt durch ihn hindurch. (Für die Punkte P_{i2} gilt dieser Schluß nicht.) Weil endlich je zwei der drei Kegelschnitte einen der Punkte P_{i2} gemeinsam haben, schneiden sie sich noch in weiteren drei Punkten $R_2^{(1)}$, $R_2^{(2)}$, $R_2^{(3)}$, welche die gemeinsamen Schnittpunkte aller drei Kegelschnitte sind.

Es gibt also drei Punkte $R_1^{(1)}$, $R_1^{(2)}$, $R_1^{(3)}$ der Geraden l , welchen überhaupt ein Punkt R_2 entspricht. Weil das für jede Gerade der Ebene gilt, liegen alle Punkte R_1 , zu denen ein entsprechender Punkt R_2 existiert, auf einer Kurve 3. Ordnung.

Der Verlauf dieser Kurve 3. Ordnung muß nun studiert werden.

Wenn der Punkt R_1 in einen der Schnittpunkte der drei Kreise fällt (Fig. 3), etwa nach R_1 , so fallen auch die Punkte Q_1 , Q_2 und Q_3 nach R_1 . Die drei Zielstrahlen nach R_2 , nämlich $Q_1 P_{12}$, $Q_2 P_{22}$, $Q_3 P_{32}$, schneiden sich dann ebenfalls in R_1 .

Zu einem Punkt R_1 , der in einen Schnittpunkt der drei Kreise des Büschels fällt, existiert also ein zugehöriger Punkt R_2 , und zwar fällt er mit R_1 zusammen in denselben Schnittpunkt.

Folglich sind die vier Schnittpunkte des Kreisbüschels, nämlich R_4 , R_5 und die beiden unendlich fernen imaginären Kreispunkte U_1 , U_2 Punkte der Kurve 3. Ordnung.

Fällt ferner R_1 in den Punkt P_{11} , so ist die Gerade $R_1 P_{11}$ unbestimmt; Q_1 kann ein beliebiger Punkt des ersten Kreises sein je nach der Richtung, in welcher R_1 nach P_{11} rückt; Q_2 und Q_3 dagegen sind bestimmte Punkte des zweiten und dritten Kreises. $Q_2 P_{22}$ und $Q_3 P_{32}$ schneiden sich in einem Punkt R_2 , der, wie sogleich gezeigt wird, dem Punkt P_{11} entspricht. Denn verbindet man R_2 mit P_{12} , so erhält man den bisher unbestimmten Punkt Q_1 ; und dessen Verbindung mit P_{11} gibt die Richtung, in welcher R_1 nach P_{11} rücken muß, damit ein zugehöriger Punkt R_2 existiert.

P_{11} ist also ein Punkt der Kurve 3. Ordnung und ihre Tangente in ihm ist bekannt. Gleiches gilt für die Punkte P_{21} und P_{31} .

Mithin sind von der Kurve 3. Ordnung sieben Punkte R_4 , R_5 , U_1 , U_2 , P_{11} , P_{21} , P_{31} bekannt und in dreien von ihnen, nämlich P_{11} , P_{21} , P_{31} , auch die Tangenten an die Kurve. Das entspricht einer Kenntnis von zehn Punkten der Kurve, die folglich mehr als genügend bestimmt ist; und die auch dann hinreichend bestimmt ist, wenn zufällig neun von den Punkten in der speziellen Lage wären, in welcher sie die Schnittpunkte eines Kurvenbüschels sind. Das umständliche Ermitteln weiterer Punkte auf konstruktivem Weg ist keinesfalls notwendig.

Damit ist die Frage nach der Lage derjenigen Punkte R_1 , zu welchen ein entsprechender Punkt R_2 existiert, erledigt. Soll nun ebenso einem Punkt R_1 ein Punkt R_3 entsprechen, in welchem sich die drei Strahlen $Q_1 P_{13}$, $Q_2 P_{23}$, $Q_3 P_{33}$ schneiden, so muß in vollständiger Analogie mit dem vorausgehenden R_1 auf einer zweiten Kurve 3. Ordnung liegen, welche, wenn auch mit anderen Tangentenrichtungen, durch dieselben sieben Punkte R_4 , R_5 , U_1 , U_2 , P_{11} , P_{21} , P_{31} geht. Die noch fehlenden zwei Schnittpunkte der beiden Kurven 3. Ordnung sind Lösungen des Problems, da ihnen sowohl ein Punkt R_2 als ein Punkt R_3 zugehört. Ihre Konstruktion führt auf eine Aufgabe 2. Grades

und wird mittels der Steinerschen Konstruktion der gemeinsamen Elemente von zwei projektiven Gebilden erledigt.

Ist ein Punkt R_1 eine Lösung der Aufgabe, so erfordert die Konstruktion der Punkte R_2, R_3, Q_1, Q_2, Q_3 nur lineare Operationen. Im ganzen hat das Problem acht Gruppen von je zwei Lösungen, also sechzehn Lösungen, die mit Zirkel und Lineal gefunden werden können¹⁾.

Weil im vorliegenden Fall die beiden Kurven 3. Ordnung durch die unendlich fernen Kreispunkte gehen, vereinfacht sich die Konstruktion der noch fehlenden zwei Schnittpunkte. Legt man durch die vier Schnittpunkte R_4, R_5, P_{11}, P_{21} der beiden Kurven 3. Ordnung ein Kegelschnittbüschel, so schneidet jeder Kegelschnitt dieses Büschels jede der beiden Kurven 3. Ordnung in noch zwei weiteren Punkten. Die Verbindungslinien dieser Punkte bilden zwei Strahlenbüschel, deren Träger S und S' je auf einer der Kurven 3. Ordnung liegen und die zu dem Kegelschnittbüschel und also auch untereinander projektiv sind. Ihr Erzeugnis ist also ein Kegelschnitt, auf welchem die Punkte S und S' liegen und welcher durch die noch übrigen fünf Schnittpunkte der beiden Kurven 3. Ordnung, nämlich P_{31}, U_1, U_2 und die beiden gesuchten Schnittpunkte hindurchgeht: dieser Kegelschnitt ist, weil er durch die unendlich fernen Kreispunkte U_1, U_2 geht, der durch S, S' und P_{31} gehende Kreis.

Die zu dieser Konstruktion notwendigen Punkte S und S' lassen sich mittels zweier zerfallender Kegelschnitte des Büschels, nämlich der Geradenpaare R_4P_{11}, R_5P_{21} und R_4P_{21}, R_5P_{11} erhalten. Diese schneiden jede der Kurven 3. Ordnung in zwei Punktepaaren, deren Verbindungslinien S bzw. S' zum Schnittpunkt haben. Um den dritten Schnittpunkt einer dieser Geraden, etwa von R_4P_{11} mit einer der Kurven 3. Ordnung zu finden, hat man auf die Untersuchung der Punkte R_1 einer Geraden l zurückzugreifen, welchen überhaupt ein Punkt R_2 entspricht. Da für alle Punkte von R_4P_{11} (mit Ausnahme von P_{11}) der Punkt Q_1 nach R_4 fällt, tritt die Gerade R_4P_{12}

¹⁾ Hierin sind auch die Nebenlösungen eingeschlossen, bei welchen an Stelle einzelner Winkel λ_i ihre Supplemente treten.

an die Stelle des ersten der drei bei dieser Frage auftretenden projektiven Strahlenbüschel mit den Trägern P_{12} , P_{22} , P_{32} , und nur die beiden letzten bestimmen einen Kegelschnitt, der durch R_4 geht. Dem zweiten Schnittpunkt dieses Kegelschnitts mit der Geraden $R_4 P_{12}$ entspricht als zugehöriger Punkt R_1 der dritte Schnittpunkt von $R_4 P_{11}$ mit der Kurve 3. Ordnung.

Legt man nun ein zweites Kegelschnittbüschel durch die vier Schnittpunkte $R_4 R_5 P_{11} P_{31}$, so liefert dieselbe Konstruktion einen zweiten Kreis, der den ersten in den zwei gesuchten noch fehlenden Schnittpunkten der beiden Kurven 3. Ordnung schneidet.

Im folgenden gebe ich einen analytischen Ansatz der Aufgabe, dessen vollständige Durchführung mir wegen rechnerischer Schwierigkeiten nicht gelungen ist, der aber immerhin gestattet, das Problem auf die Lösung einer Gleichung zurückzuführen.

Es sollen die Koordinaten von Q_i mit ξ_i , η_i , die von R_k mit x_k , y_k , die von P_{ik} mit u_{ik} , v_{ik} bezeichnet, außerdem die Richtungswinkel der nach Q_i und P_{ik} führenden Radien α_i bzw. μ_{ik} genannt werden (Fig. 2).

ϑ_{ik} sei der Richtungswinkel der Geraden $Q_i R_k$.

Nach dem Satz vom Peripheriewinkel ist

$$\sphericalangle R_i M P_{ik} = 2 \varphi_{ik};$$

also

$$\begin{aligned} \lambda_i + 2 \varphi_{ik} &= 180^\circ + \mu_{ik} \\ \mu_{ik} &= \lambda_i + 2 \varphi_{ik} - 180^\circ. \end{aligned}$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} \sphericalangle M Q_i P_{ik} &= \sphericalangle M P_{ik} Q_i = \mu_{ik} + 180^\circ - \vartheta_{ik} \\ \sphericalangle Q_i M P_{ik} &= \alpha_i - \mu_{ik}. \end{aligned}$$

Also ist die Winkelsumme im Dreieck $M Q_i P_{ik}$

$$\begin{aligned} 2(\mu_{ik} + 180^\circ - \vartheta_{ik}) + \alpha_i - \mu_{ik} &= 180^\circ \\ \mu_{ik} + 180^\circ - 2 \vartheta_{ik} + \alpha_i &= 0 \\ \vartheta_{ik} &= \frac{1}{2}(\mu_{ik} + \alpha_i + 180^\circ) \end{aligned}$$

oder mit Benützung des obigen Ausdrucks für μ_{ik} :

$$\vartheta_{ik} = \frac{\alpha_i + \lambda_i}{2} + \varphi_{ik}.$$

Da der Radius des durch Q_i gehenden Kreises $r_i = \frac{a}{\sin \lambda_i}$ und die Abszisse seines Mittelpunktes $a \cotg \lambda_i$ bekannt sind, lassen sich jetzt die Koordinaten von Q_i und P_{ik} angeben:

$$\xi_i = a \cotg \lambda_i + \frac{a}{\sin \lambda_i} \cos \alpha_i$$

$$\eta_i = \frac{a}{\sin \lambda_i} \sin \alpha_i$$

$$u_{ik} = a \cotg \lambda_i + \frac{a}{\sin \lambda_i} \cos u_{ik} = \frac{a}{\sin \lambda_i} (\cos \lambda_i - \cos (\lambda_i + 2 \varphi_{ik}))$$

$$v_{ik} = \frac{a}{\sin \lambda_i} \sin u_{ik} = \frac{-a}{\sin \lambda_i} \sin (\lambda_i + 2 \varphi_{ik}).$$

Die Koordinaten von Q_i sind damit durch die Veränderliche α_i ausgedrückt; P_{ik} ist ein fester Punkt.

Es soll nun die Gleichung der Geraden $Q_i R_k$ aufgestellt, dabei aber nicht α_i selbst, sondern $\operatorname{tg} \frac{\alpha_i + \lambda_i}{2} = \tau_i$ als veränderlicher Parameter eingeführt werden.

$$\frac{y_k - v_{ik}}{x_k - u_{ik}} = \operatorname{tg} \vartheta_{ik} = \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha_i + \lambda_i}{2} + \varphi_{ik} \right) = \frac{\tau_i + \operatorname{tg} \varphi_{ik}}{1 - \tau_i \operatorname{tg} \varphi_{ik}}$$

$$y_k(1 - \tau_i \operatorname{tg} \varphi_{ik}) - x_k(\tau_i + \operatorname{tg} \varphi_{ik}) = v_{ik}(1 - \tau_i \operatorname{tg} \varphi_{ik}) - u_{ik}(\tau_i + \operatorname{tg} \varphi_{ik}).$$

Durch Einsetzen von u_{ik} und v_{ik} und eine Reihe von trigonometrischen Umformungen der rechten Seite ergibt sich

$$1) (y_k - a)(1 - \tau_i \operatorname{tg} \varphi_{ik}) - x_k(\tau_i + \operatorname{tg} \varphi_{ik}) + 2a(1 + \cotg \lambda_i \operatorname{tg} \varphi_{ik}) = 0.$$

Für die neun Geraden $Q_i R_k$ ergeben sich neun Gleichungen dieser Form mit den neun Unbekannten $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, \tau_1, \tau_2, \tau_3$. Um dieses Gleichungssystem zu reduzieren und aufzulösen, lassen sich zwei Wege beschreiten. Man kann zunächst dem Gedankengang der geometrischen Lösung folgen und in zwei Schritten zuerst die drei Veränderlichen τ_1, τ_2, τ_3 , dann die vier Veränderlichen x_2, x_3, y_2, y_3 eliminieren. Hie-

durch erhält man mit Leichtigkeit in Determinantenform die Gleichungen der zwei Kurven 3. Ordnung, welche als geometrische Örter für den Punkt R_1 bereits bekannt sind. Jedoch die Aufstellung der Resultante 9. Grades dieser zwei kubischen Gleichungen, der Nachweis, daß sie reduzibel ist, und die Abspaltung der sieben Wurzelfaktoren, die den geometrisch bereits bekannten Schnittpunkten der beiden Kurven 3. Ordnung entsprechen, scheint äußerst umständlich zu werden.

Hier soll ein anderer Weg eingeschlagen werden. Bemerkte man, daß die zwei Veränderlichen x_k und y_k (für jeden bestimmten Wert von k) nur in drei Gleichungen und immer mitsammen vorkommen, so erhält man durch Elimination dieser drei Größenpaare drei Gleichungen zwischen τ_1 , τ_2 und τ_3 von der folgenden Form:

$$2) \begin{cases} 1 - \tau_1 \operatorname{tg} \varphi_{1k} & \tau_1 + \operatorname{tg} \varphi_{1k} & 1 + \operatorname{cotg} \lambda_1 \operatorname{tg} \varphi_{1k} \\ 1 - \tau_2 \operatorname{tg} \varphi_{2k} & \tau_2 + \operatorname{tg} \varphi_{2k} & 1 + \operatorname{cotg} \lambda_2 \operatorname{tg} \varphi_{2k} \\ 1 - \tau_3 \operatorname{tg} \varphi_{3k} & \tau_3 + \operatorname{tg} \varphi_{3k} & 1 + \operatorname{cotg} \lambda_3 \operatorname{tg} \varphi_{3k} \end{cases} = 0 \quad (k = 1, 2, 3).$$

Durch Entwickeln nach Elementen der letzten Reihe ergibt sich:

$$2') \quad \sum (1 + \operatorname{cotg} \lambda_1 \operatorname{tg} \varphi_{1k}) [(\tau_3 - \tau_2)(1 + \operatorname{tg} \varphi_{2k} \operatorname{tg} \varphi_{3k}) + (1 + \tau_2 \tau_3)(\operatorname{tg} \varphi_{3k} - \operatorname{tg} \varphi_{2k})] = 0$$

wobei die Summation nach zyklischen Vertauschungen der Indices 1, 2, 3 auszuführen ist.

Löst man diese drei Gleichungen (2') nach $1 + \tau_2 \tau_3$, $1 + \tau_3 \tau_1$, $1 + \tau_1 \tau_2$ auf, so erhält man ein Gleichungssystem von folgender Form:

$$3) \quad \begin{aligned} 1 + \tau_2 \tau_3 &= a_1 (\tau_2 - \tau_3) + a_2 (\tau_3 - \tau_1) + a_3 (\tau_1 - \tau_2) \\ 1 + \tau_3 \tau_1 &= b_1 (\tau_2 - \tau_3) + b_2 (\tau_3 - \tau_1) + b_3 (\tau_1 - \tau_2) \\ 1 + \tau_1 \tau_2 &= c_1 (\tau_2 - \tau_3) + c_2 (\tau_3 - \tau_1) + c_3 (\tau_1 - \tau_2). \end{aligned}$$

Diese Auflösung ist möglich, da, wie man sich leicht überzeugt, in der dabei auftretenden Nennerdeterminante z. B. der Koeffizient von $\operatorname{cotg} \lambda_1$ nicht verschwindet.

Die Einführung allgemeiner Koeffizienten a, b, c hat den Zweck, die umständliche Auflösung des Gleichungssystems (2') zu vermeiden; sie bringt jedoch den Übelstand mit sich, daß etwa vorhandene Relationen zwischen den Koeffizienten des aufgelösten Gleichungssystems und mithin auch zwischen den Wurzeln verloren werden können und auch tatsächlich verloren werden.

In jeder der Gleichungen (3) ist die Summe der Koeffizienten von τ_1, τ_2 und τ_3 Null; man kann also die Bezeichnung in folgender Weise ändern:

$$\begin{aligned}
 & 1 + \tau_2 \tau_3 = (a_2 + a_3) \tau_1 - a_2 \tau_2 - a_3 \tau_3 \\
 3') \quad & 1 + \tau_3 \tau_1 = -\beta_1 \tau_1 + (\beta_1 + \beta_3) \tau_2 - \beta_3 \tau_3 \\
 & 1 + \tau_1 \tau_2 = -\gamma_1 \tau_1 - \gamma_2 \tau_2 + (\gamma_1 + \gamma_2) \tau_3
 \end{aligned}$$

oder auch

$$\begin{aligned}
 & a) \quad 1 + \tau_2 \tau_3 = a_2 (\tau_1 - \tau_2) + a_3 (\tau_1 - \tau_3) \\
 3'') \quad & b) \quad 1 + \tau_3 \tau_1 = \beta_1 (\tau_2 - \tau_1) + \beta_3 (\tau_2 - \tau_3) \\
 & c) \quad 1 + \tau_1 \tau_2 = \gamma_1 (\tau_3 - \tau_1) + \gamma_2 (\tau_3 - \tau_2).
 \end{aligned}$$

Durch Subtraktion der Gleichung (b) von (a) ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 \tau_3 (\tau_2 - \tau_1) &= (-\beta_1 - a_2) (\tau_2 - \tau_1) + a_3 (\tau_1 - \tau_3) - \beta_3 (\tau_2 - \tau_3) \\
 &= (-\beta_1 - \beta_3 - a_2) (\tau_2 - \tau_1) + (\beta_3 - a_3) (\tau_3 - \tau_1) \\
 \tau_3 &= -(\beta_1 + \beta_3 + a_2) + (\beta_3 - a_3) \frac{\tau_3 - \tau_1}{\tau_2 - \tau_1}.
 \end{aligned}$$

Ebenso ergibt sich durch Subtraktion der Gleichung (c) von (a):

$$\tau_2 = -(\gamma_1 + \gamma_2 + a_3) + (\gamma_2 - a_2) \frac{\tau_2 - \tau_1}{\tau_3 - \tau_1}.$$

Durch Elimination von $\frac{\tau_3 - \tau_1}{\tau_2 - \tau_1}$ erhält man:

$$[\tau_2 + (\gamma_1 + \gamma_2 + a_3)] [\tau_3 + (\beta_1 + \beta_3 + a_2)] = (\beta_3 - a_2) (\gamma_2 - a_2)$$

oder

$$\tau_2 \tau_3 + \tau_2 (\beta_1 + \beta_3 + a_2) + \tau_3 (\gamma_1 + \gamma_2 + a_3) + A = 0,$$

wo zur Abkürzung

$A = a_2\beta_3 + \beta_3\gamma_1 + \gamma_1a_2 + a_3\beta_1 + \beta_1\gamma_2 + \gamma_2a_3 + \beta_1\gamma_1 + \gamma_2a_2 + a_3\beta_3$
gesetzt ist.

Vergleicht man diese Gleichung mit der ersten des Systems (3'), so ergibt sich:

$$4) \quad \tau_1(a_2 + a_3) + \tau_2(\beta_1 + \beta_3) + \tau_3(\gamma_1 + \gamma_2) + A - 1 = 0.$$

Mittels dieser linearen Gleichung können die Gleichungen (3') so umgeformt werden, daß jede nur zwei Veränderliche enthält:

$$\begin{aligned} & \tau_2\tau_3 + (a_2 + \beta_1 + \beta_3)\tau_2 + (a_3 + \gamma_1 + \gamma_2)\tau_3 + A = 0 \\ 5) \quad & \tau_3\tau_1 + (\beta_1 + a_2 + a_3)\tau_1 + (\beta_3 + \gamma_1 + \gamma_2)\tau_3 + A = 0 \\ & \tau_1\tau_2 + (\gamma_1 + a_2 + a_3)\tau_1 + (\gamma_2 + \beta_1 + \beta_3)\tau_2 + A = 0. \end{aligned}$$

Diese drei Gleichungen sind nicht unabhängig voneinander; eliminiert man nämlich aus zweien von ihnen die beiden gemeinsame Veränderliche, so erhält man die dritte Gleichung. Erst mit der linearen Gleichung (4) zusammen ergeben zwei beliebige von ihnen wieder ein Gleichungssystem, das den Gleichungen (3') äquivalent ist.

Nach diesen Umformungen kann man zur Elimination von zwei Veränderlichen τ_2 und τ_3 schreiten und eine Resultante in τ_1 aufstellen. Aus den beiden letzten Gleichungen (5) erhält man:

$$\begin{aligned} \tau_2 &= -\frac{(\gamma_1 + a_2 + a_3)\tau_1 + A}{\tau_1 + (\gamma_2 + \beta_1 + \beta_3)} \\ \tau_3 &= -\frac{(\beta_1 + a_2 + a_3)\tau_1 + A}{\tau_1 + (\beta_3 + \gamma_1 + \gamma_2)}. \end{aligned}$$

Setzt man diese beiden Ausdrücke in (4) ein, so erhält man folgende Resultante in τ_1 :

$$6) \quad \begin{aligned} & \tau_1(a_2 + a_3) - \frac{(\gamma_1 + a_2 + a_3)\tau_1 + A}{\tau_1 + (\gamma_2 + \beta_1 + \beta_3)}(\beta_1 + \beta_3) \\ & - \frac{(\beta_1 + a_2 + a_3)\tau_1 + A}{\tau_1 + (\beta_3 + \gamma_1 + \gamma_2)}(\gamma_1 + \gamma_2) + A - 1 = 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist vom 3. Grade und ergibt drei Lösungen der Aufgabe, indem sich zu jeder Wurzel der Gleichung (6) zunächst τ_2 und τ_3 und dann die übrigen sechs Unbekannten des Gleichungssystems (1) linear und eindeutig berechnen lassen.

Der Widerspruch mit der geometrischen Lösung, nach welcher die Resultante eine quadratische Gleichung sein müßte, ist bereits oben begründet worden; durch Einführung der allgemeinen Koeffizienten in (3) oder (3') ist das Problem verallgemeinert worden. Die hier gegebene analytische Lösung würde erst voll befriedigen, wenn es gelänge, die rechnerischen Schwierigkeiten zu überwinden und die Resultante auf den 2. Grad zu reduzieren.

Das Pentagramma mirificum und die nichteuklidischen Parallelen.

Von **Heinrich Liebmann.**

Vorgelegt von S. Finsterwalder in der Sitzung am 4. Mai 1912.

Im Laufe meiner Untersuchungen über die nichteuklidische Geometrie bin ich zu der Überzeugung gelangt, daß sowohl in der hyperbolischen wie auch in der elliptisch-sphärischen Geometrie als prinzipiell einfache und zugleich für die verschiedensten Aufgaben verwendbare Grundlage eine gewisse, für beide Geometrien scheinbar völlig verschiedene Zuordnung von rechtwinkligen Dreiecken gewählt werden kann.

Diese Zuordnung wird in der elliptisch-sphärischen Geometrie aus dem „Pentagramma mirificum“ von Gauß abgeleitet¹⁾, in der hyperbolischen auf einem ganz anderen Weg²⁾. Beidesmal besteht ihre Tragweite darin, daß mit ihrer Hilfe gewisse Konstruktionsaufgaben sich lösen lassen, z. B. die Konstruktion des Dreiecks aus den drei Winkeln³⁾, daß sie zur Ableitung der Metrik (Trigonometrie) verwendet werden können⁴⁾ und endlich, daß mit ihrer Hilfe auf der einen Seite die Eigenschaften der hyperbolischen (Lobatschefskijschen), auf der anderen die der elliptischen (Cliffordschen) Parallelen ohne

¹⁾ Gauß' Werke III, S. 481.

²⁾ Liebmann, Nichteuklidische Geometrie, 2. Aufl., Leipzig 1912 (i. F. zitiert mit N. E. G.), S. 37—41.

³⁾ N. E. G., S. 42 und S. 156.

⁴⁾ N. E. G., S. 73 und S. 163.

jede trigonometrische oder analytisch-geometrische Entwicklung erkannt werden können¹⁾).

Ich möchte nunmehr zeigen, daß diese Zuordnungen in beiden Geometrien im engsten Zusammenhang stehen (§ 1), außerdem aber, daß der grundlegende Satz von Study in seiner Theorie der Abbildung der orientierten Geraden (Speere) des elliptischen Raumes auf die Punktepaare einer Kugel ebenfalls hier eingeordnet werden kann; auch dieser Satz, auf den wir später zurückkommen, ergibt sich durch eine einfache Konstruktion, die durch das Pentagramma mirificum nahegelegt wird (§ 2).

§ 1.

Das Pentagramma mirificum und die Zuordnung rechtwinkliger Dreiecke.

Wir gehen, an eine elementare Konstruktion anknüpfend, von der elliptisch-sphärischen Geometrie aus und werden sodann, indem wir die Klein-Cayleysche Maßbestimmung einführen, leicht den Übergang finden zur hyperbolischen Geometrie, wobei es wohl nicht überflüssig ist, für diesen zweiten Fall nochmals auf alle Einzelheiten der Zuordnung einzugehen.

I. Das Pentagramma mirificum.

Wir betrachten auf der Kugel vom Radius Eins ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit den Katheten $BC = a$, $CA = b$ der Hypotenuse c und den Winkeln

$$\sphericalangle CBA = \mu, \quad \sphericalangle BAC = \lambda.$$

Der Kürze halber bezeichnen wir allgemein mit s' die zu s komplementäre Strecke und mit φ' den Komplementwinkel von φ . Verlängert man jetzt BA um c' bis D und BC um a' bis E , so ist im Viereck $ACED$:

$$\sphericalangle ACE = \sphericalangle CED = \sphericalangle EDA = \frac{\pi}{2}, \quad \sphericalangle DAC = \pi - \lambda$$

$$AC = b, \quad CE = a', \quad ED = \mu, \quad DA = c'.$$

¹⁾ N. E. G., S. 40 und S. 164–166.

Dieses Viereck mit drei rechten Winkeln (dreieckrechtwinkliges Viereck) nennen wir dem rechtwinkligen Dreieck zugeordnet.

Verlängert man jetzt CA und ED bis zum Schnittpunkt F , so entsteht ein zweites, dem ersten zugeordnetes rechtwinkliges Dreieck mit den Bestimmungsstücken

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \sphericalangle FAD = \lambda, & \mu_1 &= \sphericalangle AFD = \mu' \\ a_1 &= FD = \mu', & b_1 &= AD = c', & c_1 &= AF = b'. \end{aligned}$$

Setzt man diese Konstruktion fort, so ergibt sich eine geschlossene Kette von fünf rechtwinkligen Dreiecken, die ein „Pentagramm“ bilden, d. h. die Figur der Diagonalen eines Fünfecks¹⁾. Sie veranschaulicht sämtliche aus dem einen Dreieck ableitbaren Dreiecke und dreieckrechtwinkligen Vierecke.

Wie schon bemerkt worden ist, kann hier auf die Theorie der Cliffordschen Parallelen begründet werden (N. E. G. § 30, 1), aus der wir hier nur die für den folgenden Paragraphen notwendigen Sätze anführen wollen, die a. a. O. bewiesen sind:

Man erhält im elliptischen Raum die beiden Cliffordschen Parallelen zu g durch P , indem man von P das Lot PF auf g fällt und durch P die Ebene E' senkrecht zu PF legt und mit der Ebene E (Ebene durch P und g) zum Schnitt bringt (g_1). Die beiden Geraden durch P in E' , welche mit g_1 den Winkel l einschließen, der der Strecke PF gleich ist, sind die gesuchten Parallelen.

Orientiert man mit Study g in bestimmtem Sinn, so wird man die beiden Parallelen, je nachdem sie durch Linksschraubung oder Rechtsschreibung längs der Achse FP aus g hervorgehen, als orientierte Links- und Rechts-Parallele zum Speer g bezeichnen.

Ferner führen wir noch den Satz an²⁾:

Sind zwei Speere einem und demselben dritten rechtsparell (linksparell), so sind sie zueinander rechtsparell (linksparell).

1) Gauß' Werke III, S. 481. — Hessenberg, Trigonometrie (Sammlung Göschen), S. 115.

2) N. E. G., S. 188. — Vogt, Synthetische Theorie der Cliffordschen Parallelen, Leipzig 1909, S. 13.

2. Übergang zur Cayley-Kleinschen Massbestimmung.

Das Gerüst des Pentagramma mirificum ist für die Kugel ein Oktant: BE , EF und FB sind drei Quadranten von Hauptkreisen der Kugel, und es wird F mit einem Punkt C von BE , B mit einem Punkt D von EF verbunden; BD und FC schneiden einander in A , und damit haben wir unmittelbar zwei zugeordnete Dreiecke BCA und FAD sowie ein zugeordnetes Viereck $ACDE$.

Führen wir jetzt in der Ebene elliptische Maßbestimmung ein, wobei ein nullteiliger Kegelschnitt zu Grunde zu legen ist, so wird BEF ein Polardreieck dieses Kegelschnitts.

Zeichnen wir ein Polardreieck für einen reellen Fundamentalkegelschnitt K , gehen wir also zur hyperbolischen Geometrie über, und liegt dabei B im reellen Gebiet der hyperbolischen Maßbestimmung (innerhalb von K), so liegen E und F außerhalb, also im imaginären Gebiet der Maßbestimmung.

Verbinden wir F mit einem reellen Punkt C von BE , B mit einem Punkt D von EF , so wird zwar das Dreieck BAU reell, das zugeordnete Viereck $CAED$ aber hat zwei imaginäre Ecken.

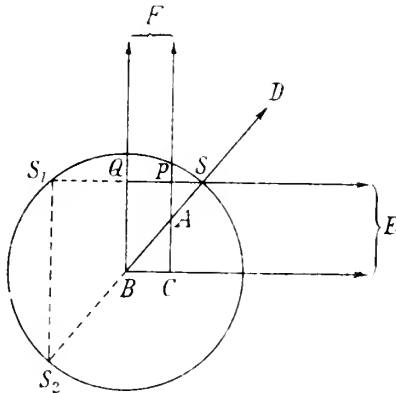


Fig. 1.

Es genügt aber eine einzige Hilfslinie, um wieder ein reelles Viereck zu erhalten: Wir verbinden E mit dem unendlich fernen Punkt S von BA , d. h. mit dem Schnittpunkt der Verlängerung von BA mit dem Fundamentalkegelschnitt, und schneiden ES mit $BF(Q)$ und $CF(P)$.

Dieses Viereck $BCPQ$ nennen wir „dem rechtwinkligen Dreieck ABC zugeordnet“.

In Fig. 1 ist zum Fundamentalkegelschnitt ein Kreis gewählt und B als Mittelpunkt des Kreises angenommen, wodurch die Konstruktion sehr vereinfacht wird.

Man erkennt aus der Figur auch sofort, daß (QP) im hyperbolischen Maß gemessen gleich (AB) ist, denn das Doppelverhältnis $(S_1 QPS)$ ist gleich dem Doppelverhältnis $(S_2 BAS)$; und hieraus folgt die bekannte Konstruktion der hyperbolischen Parallelen BS zu QS^1 .

3. Berechnung aller Bestimmungsstücke der zugeordneten Figuren.

Ist die Gleichung des reellen Fundamentalkegelschnitts in rechtwinkligen cartesischen Koordinaten gegeben durch

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

so wird die hyperbolische Entfernung

$$s = (P_1 P_2)$$

zweier Punkte $P_1(x_1, y_1)$ und $P_2(x_2, y_2)$ gegeben durch

$$1) \quad \mathfrak{C} \circ \mathfrak{f} s = \frac{1 - x_1 x_2 - y_1 y_2}{\sqrt{1 - x_1^2 - y_1^2} \sqrt{1 - x_2^2 - y_2^2}},$$

wobei $\mathfrak{C} \circ \mathfrak{f} s$ den hyperbolischen Cosinus bedeutet:

$$\mathfrak{C} \circ \mathfrak{f} s = \frac{e^s + e^{-s}}{2}.$$

Die Formel ergibt sich leicht aus der bekannten Definition des hyperbolischen Entfernungsmaßes $(P_1 P_2)$ als halber Lo-

1) F. Schur, Grundlagen der Geometrie. Leipzig, 1906, S. 101.

garithmus des Doppelverhältnisses, das P_1 und P_2 mit den Punkten bilden, in denen ihre Verbindungslinie den Fundamentalkegelschnitt trifft.

Der (hyperbolische) Winkel (S) zweier orientierten¹⁾ Geraden g_1 und g_2 , die in cartesischen Koordinaten gegeben sind, durch die Gleichungen

$$x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 - p_1 = 0$$

$$x \cos \alpha_2 + y \sin \alpha_2 - p_2 = 0$$

ist dann bestimmt durch

$$\cos \varphi = \frac{\cos(\alpha_2 - \alpha_1) - p_1 p_2}{\sqrt{1 - p_1^2} \sqrt{1 - p_2^2}}.$$

Diese Formel folgt aus der Definition des hyperbolischen Winkelmaßes als der durch $2i$ dividierte Logarithmus des Doppelverhältnisses, das die beiden orientierten Geraden mit den durch ihren Schnittpunkt an den Fundamentalkegelschnitt gelegten Tangenten bilden.

Für den Koordinatenanfang fällt euklidische und hyperbolische Winkelbestimmung zusammen, ferner stehen zwei Gerade, von denen die eine durch den Koordinatenanfang geht und zur anderen im Sinne der euklidischen Maßbestimmung senkrecht steht, auch im Sinn der hyperbolischen Maßbestimmung aufeinander senkrecht. Man erkennt dies sofort, wenn man einmal $p_1 - p_2 = 0$ setzt, und dann $p_1 = 0$, $\alpha_2 - \alpha_1 = \frac{\pi}{2}$.

Wir nehmen jetzt zur x -Achse die Gerade BE , zur y -Achse die Gerade BD , ferner sei

$$BC = u, \quad CA = v,$$

dann bekommen wir für die cartesischen Koordinaten die Tabelle

¹⁾ W. Blaschke, Über einige unendliche Gruppen von orientierten Berührungstransformationen der Ebene. Math. Annalen 69 (1910), S. 205.

	x	y
A	u	v
B	o	o
C	u	o
P	u	$\frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}$
Q	o	$\frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}$

Für die hyperbolischen Entfernungen

$$(BC) = a, \quad (CA) = b, \quad (BA) = c, \quad (QP) \text{ und } (BQ)$$

finden wir hiernach:

$$\mathfrak{C} o \int a = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}, \quad \text{also } u = \mathfrak{T} \text{ang } a = \frac{e^a - e^{-a}}{e^a + e^{-a}},$$

$$\mathfrak{C} o \int b = \frac{\sqrt{1-u^2}}{\sqrt{1-u^2-v^2}}, \quad \text{also } v = \frac{\mathfrak{T} \text{ang } b}{\mathfrak{C} o \int a},$$

$$\mathfrak{C} o \int c = \frac{1}{\sqrt{1-u^2-v^2}} = \mathfrak{C} o \int a \mathfrak{C} o \int b;$$

die Grundformel für das rechtwinklige Dreieck.

Endlich folgt noch

$$\mathfrak{C} o \int (CP) = \frac{\sqrt{1-u^2} \sqrt{u^2+v^2}}{u \sqrt{1-u^2-v^2}}$$

$$\mathfrak{C} o \int (BQ) = \frac{\sqrt{u^2+v^2}}{u} = \frac{1}{\cos \mu} = \frac{1}{\sin \left(\frac{\pi}{2} - \mu \right)}$$

und

$$\mathfrak{C} o \int (QP) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2-v^2}} = \mathfrak{C} o \int c.$$

Die letzte Formel zeigt wieder, daß $(QP) = (BA)$ ist, wie schon oben (S. 277) gezeigt wurde, die vorletzte gibt die Beziehung zwischen einer Strecke (BQ) und dem zu ihr als

Lot gehörigen Parallelwinkel $\frac{\pi}{2} - \mu$ an. d. h. dem Winkel $\sphericalangle QBS$, den die Parallele BS zu der auf BQ in Q errichteten Senkrechten QS mit BQ einschließt.

Bezeichnen wir eine Strecke und den zugehörigen Parallelwinkel immer durch die entsprechenden lateinischen und griechischen Buchstaben, ferner die zu einer Strecke $a, b, m \dots$ komplementäre, d. h. diejenige, zu der als Parallelwinkel das Komplement von $a, \beta, \mu \dots$ gehört, und $a', b', m' \dots$, so ist in unserer Figur

$$(BQ) = m'$$

und wir haben die allgemeine Beziehung zwischen Lot (a) und Parallelwinkel (a):

$$3) \quad \cos a = \frac{1}{\sin a'}$$

Um jetzt noch die fehlenden Winkel

$$i = \sphericalangle BAC \text{ und } \sphericalangle QPC$$

zu berechnen, brauchen wir die Gleichungen der drei orientierten Geraden BA, CP und QP ; die jedesmal angegebenen Punkte geben den Sinn der Orientierung an, und man erhält die Gleichungen

$$\begin{aligned} x \sin \mu - y \cos \mu &= 0 \\ x - u &= 0 \\ -y + \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} &= 0. \end{aligned}$$

Die Formel 2) ergibt dann

$$\begin{aligned} \cos \sphericalangle QPC &= \frac{v}{\sqrt{1 - u^2}}, \text{ also} \\ \sin \sphericalangle QPC &= \sqrt{\frac{1 - u^2 - v^2}{1 - u^2}} = \frac{1}{\cos a'} \end{aligned}$$

d. h. nach 3)

$$\sphericalangle QPC = \beta.$$

Schließlich wird noch

$$\cos \lambda = \cos \sphericalangle BAC = \frac{\sin \mu}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2} \sqrt{1-u^2}},$$

also

$$\sin \lambda = \frac{u \sqrt{1-u^2-v^2}}{\sqrt{u^2+v^2} \sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{\cos \sphericalangle (CP)},$$

d. h. $(CP) = l$.

Damit sind alle Stücke des Dreiecks ABC und des Vierecks $BCPQ$ wirklich berechnet.

4. Zusammenstellung.

Durch Übertragung des Gerüsts, das zum Pentagramma mirificum führt, nämlich eines Polardreiecks des Fundamentalkegelschnitts haben wir somit gefunden:

Zu jedem rechtwinkligen Dreieck der hyperbolischen Geometrie mit den Katheten a , b , der Hypotenuse c und den Winkeln λ und μ gehört ein Viereck mit drei rechten Winkeln, mit den Seiten

$$(BC) = a, (CP) = l, (PQ) = c, (CB) = m'$$

und dem spitzen Winkel

$$\sphericalangle CPQ = \beta.$$

(Die Beziehung zwischen l und λ , b und β , m' und m ist oben angegeben.)

Aus diesem Viereck ist dann ein zweites rechtwinkliges Dreieck abzuleiten usw., sodaß wir gewissermaßen ein hyperbolisches „Pentagramma mirificum“ erhalten, als Gegenstück zu dem von Gauß.

Es sei hier noch eine beiläufige Bemerkung gestattet: Wir haben mit den Formeln der Cayley-Kleinschen Maßbestimmung gerechnet und nur die eine Beziehung

$$(QP) = (BA)$$

ohne Rechnung gefunden, freilich doch mit metrischen Hilfsmitteln und durch spezielle Wahl der Lage.

Daneben müßte aber die Zuordnung von rechtwinkligem Dreieck und dreieckigem Viereck in diesem Zusammenhang ohne jede Rechnung verfolgt werden (wie N. E. G. S. 37—41). Die Hilfsmittel dazu liegen vor, denn die Gleichheit zweier Strecken (AB) und $(A'B')$ ist ja auch ohne Formel definierbar: (AB) ist gleich $(A'B')$, wenn es eine hyperbolische Bewegung, d. h. eine projektive Transformation der Ebene gibt, bei der der Fundamentalkegelschnitt in sich übergeht und zugleich das Punktepaar A, B in A', B' . Ebenso ist $\sphericalangle(g_1, g_2)$ gleich dem Winkel $\sphericalangle(g'_1, g'_2)$, wenn es eine hyperbolische Bewegung gibt, bei der g_1 und g_2 in g'_1 und g'_2 übergehen. Endlich ist die Beziehung zwischen komplementären Strecken auch durch Konstruktionen aus der Geometrie der Lage definierbar.

Es handelt sich darum, die hierbei zu verwendenden Sätze festzustellen, worauf aber an dieser Stelle wegen des so einfachen in der N. E. G. wiedergegebenen elementargeometrischen Beweises wohl verzichtet werden kann.

§ 2.

Study's Abbildung der Speere des elliptischen Raumes.

In Nr. 1 des ersten Paragraphen haben wir die Bedeutung des Pentagramma mirificum und der damit verknüpften Zuordnung des rechtwinkligen Dreiecks zum Viereck mit drei rechten Winkeln für die elliptisch-sphärische Geometrie gezeigt, wir wollen diese Zuordnung jetzt noch weiter in der Liniengeometrie des elliptischen Raumes anwenden.

1. Der Study'sche Satz.

Study hat den folgenden Satz bewiesen, aus dem für die darin erwähnte Abbildung der Speere des elliptischen Raumes sich eine Reihe weiterer, zu inhaltreichen und eleganten geometrischen Untersuchungen führender Sätze ergeben¹⁾:

¹⁾ E. Study, Beiträge zur nichteuclidischen Liniengeometrie. Am. J. of Math. XXIX, 2 (1907), S. 130.

Bildet man die Speere (g) des elliptischen Raumes in der Weise auf die Punktepaare R, L einer Kugel ab, daß man durch den Mittelpunkt O der Kugel die orientierte Rechtsparallele (r) und Linksparallele (l) zu g zieht und mit der Kugel zum Schnitt bringt (R, L), so gelten für die sphärischen Abstände

$$(R_1 R_2) = \sphericalangle R_1 O R_2$$

und $(L_1 L_2) = \sphericalangle L_1 O L_2$

der Bilder zweier Speere g_1 und g_2 die Beziehungen

$$(R_1 R_2) = \psi - q$$

$$(L_1 L_2) = \psi + q.$$

Dabei ist q das eine gemeinsame Lot der beiden Speere, ψ der Winkel $g_1 g_2$.

Zur Erläuterung fügen wir hinzu, daß zwei Speere, wenn sie nicht parallel sind (also lauter gemeinsame Lote haben), zwei gemeinsame Lote besitzen: Ist $F_1' F_2' = q$ das eine gemeinsame Lot, ψ der Winkel, durch den man g_1 um $F_1' F_2'$ als Achse drehen muß, damit es mit g_2 in einer Ebene liegt, so sind die Fußpunkte $F_1'' F_2''$ des zweiten gemeinsamen Lots dadurch bestimmt, daß

$$F_1' F_1'' = F_2' F_2'' = \frac{\pi}{2}$$

ist. Ferner ist dann $F_1'' F_2'' = \psi$ und der Winkel der Drehung bzw. Schraubung um die Achse $F_1'' F_2''$, welche g_1 in g_2 überführt, ist gleich ψ^2).

2. Beweis des Studyschen Satzes.

Nach dem Satz in § 1, 1 sind zwei einem dritten rechts- oder linksparallele Speere zueinander rechts- oder linksparallel. Demnach ist der Bildpunkt L für alle zueinander linksparallelen Speere derselbe.

1) N. E. G., S. 187. — W. Vogt, a. a. O., S. 5.

Hiervon wollen wir bei der Studyschen Abbildung Gebrauch machen. Wir fällen zunächst vom Mittelpunkt O der Bildkugel das Lot OF auf das gemeinsame Lot F_1F_2 der beiden Speere g_1 und g_2 , die abgebildet werden sollen, und führen die Bezeichnungen ein:

$$OF = u, \quad FF_1 = q_1, \quad FF_2 = q_2 = q_1 - q.$$

Sodann legen wir durch F die zu g_1 und g_2 linksparallelen Speere h_1 und h_2 ; sie stehen auf dem Lot F_1F_2 in F senkrecht und schließen mit der Verlängerung von OF die Winkel ein

$$\psi_1 + q_1 \quad \text{und} \quad \psi_2 + q_2,$$

wobei ψ_1 und ψ_2 die Winkel der Speere g_1 und g_2 mit ihren senkrechten Projektionen auf die Ebene OFF_1F_2 sind, und

$$\psi_1 - \psi_2 = \varphi$$

der Winkel von g_1 und g_2 ist.

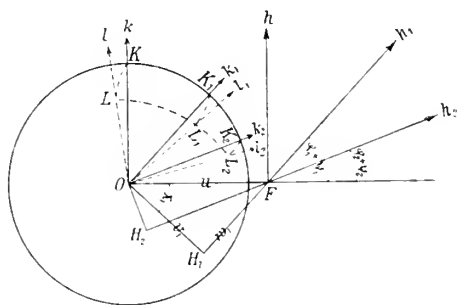


Fig. 2.

Wir betrachten jetzt zuerst den Speer h_1 und führen als Hilfslinie den Speer h ein (s. Fig. 2), der von F ausgeht und mit OF und h die Winkel $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2} - q_1 - \psi_1$ einschließt, er liegt mit OF , h_1 und h_2 in einer Ebene. Es sei ferner $OH_1 = v_1$ das Lot von O auf h_1 , außerdem seien k und k_1 die zu OF und H_1O senkrechten, in der Ebene OFH_1 gelegenen von O

ausgehende Speere, K und K_1 die Punkte, in denen sie die Bildkugel treffen, L und L_1 die Schnittpunkte der orientierten Linksp parallelen durch O zu h und h_1 (also auch h und g_1) mit der Bildkugel.

Wir betrachten jetzt das sphärische Viereck KK_1LL_1 , in dem nach der Definition der Linksp parallelen

$$\sphericalangle LKK_1 = \sphericalangle KK_1L_1 = \frac{\pi}{2}$$

ist, und die sphärischen Abstände $(KL) = \sphericalangle KOL$ und $K_1L_1 = \sphericalangle K_1OL_1$ die Werte haben¹⁾:

$$(KL) = OF = u$$

$$(K_1L_1) = OH_1 = v_1;$$

außerdem ist

$$(KK_1) = \sphericalangle (k, k_1) = \sphericalangle FOH_1 = \chi_1.$$

Jetzt ist das Pentagramma mirificum anzuwenden. Zu dem rechtwinkligen Dreieck OH_1F mit den Bestimmungsstücken

$$a = H_1F = w_1, \quad b = OH_1 = v_1, \quad c = OF = u$$

$$\mu = \sphericalangle OFH_1 = \varphi_1 + \psi_1, \quad \lambda = \sphericalangle H_1OF_1 = \chi_1$$

gibt es ein zugeordnetes rechtwinkliges Dreieck mit den Stücken

$$a_1 = c' = \frac{\pi}{2} - u, \quad b_1 = \mu' = \frac{\pi}{2} - \varphi_1 - \psi_1, \quad c_1 = b' = \frac{\pi}{2} - v_1$$

$$\lambda_1 = a' = \frac{\pi}{2} - w_1, \quad \mu_1 = \lambda = \chi_1$$

und, diesem zugeordnet, ein Viereck mit drei rechten Winkeln und den Seiten

$$u, \chi_1, v_1, \frac{\pi}{2} - \varphi_1 - \psi_1,$$

von denen die beiden letzten den Winkel $\frac{\pi}{2} + w_1$ einschließen.

¹⁾ Wir messen also den sphärischen Abstand zweier Punkte auf der Kugel durch den Winkel, den die vom Mittelpunkt nach den Punkten gezogenen Radien miteinander einschließen.

Dieses Viereck stimmt also mit LKK_1L_1 überein in den drei Stücken

$$(LK) = u, \quad (KK_1) = z_1, \quad (K_1L_1) = v_1,$$

außerdem sind in beiden Vierecken die Winkel zwischen u und z_1 , z_1 und v_1 rechte, und hieraus folgt dann die Übereinstimmung in den noch übrigen Stücken, d. h. es ist

$$\sphericalangle LOL_1 = \sphericalangle (l, l_1) = \frac{\pi}{2} - q_1 - \psi_1, \quad \sphericalangle KLL_1 = \frac{\pi}{2},$$

und endlich

$$\sphericalangle LL_1K_1 = \frac{\pi}{2} + \alpha_1.$$

Man sieht, daß der Winkel LOL_1 von u unabhängig ist, der Hauptkreis aber, auf dem L_1 liegt, von q_1 und ψ_1 unabhängig.

Bilden wir jetzt in derselben Weise h_2 ab, so liegt der Bildpunkt L_2 auf LL_1 , und zwar ist

$$(LL_2) = \frac{\pi}{2} - q_2 - \psi_2,$$

daher ist:

$$\begin{aligned} 4) \quad (L_1L_2) &= \frac{\pi}{2} - q_2 - \psi_2 - \left(\frac{\pi}{2} - q_1 - \psi_1 \right) \\ &= q_1 - q_2 + \psi_1 - \psi_2 = q + \psi. \end{aligned}$$

Für die orientierten Rechtsparallelen und ihre Bilder R_1 und R_2 finden wir, wenn wir als Hilfslinien Rechtsparallelen zu g_1 und g_2 durch F benützen und mit R den Durchdringungspunkt des zum Speer h rechtsparallelen Speeres durch O mit der Kugel bezeichnen:

$$(RR_1) = \frac{\pi}{2} - (\psi_1 - q_1)$$

$$(RR_2) = \frac{\pi}{2} - (\psi_2 - q_2)$$

und endlich

$$5) \quad (R_1R_2) = \psi_1 - \psi_2 - (q_1 - q_2) = \psi - q.$$

Mit den Formeln 4) und 5) ist der Satz von Study bewiesen, und die hier gegebene Ableitung, welche ohne trigonometrische¹⁾ oder analytisch-geometrische Entwicklungen zu verwenden, allein der ganz elementaren, durch das „Pentagramma mirificum“ gegebenen Grundlage bedarf, gewährt durch die dabei gebrauchten Konstruktionen zugleich einen Einblick in die Entstehung der Studyschen Abbildung.

¹⁾ An anderer Stelle (N. E. G., S. 189–191) hatte ich noch trigonometrische Formeln benützt zur Ableitung der Beziehungen (4) und (5).



Über die Entwicklung einer willkürlichen Funktion nach den Eigenfunktionen des Turbulenzproblems.

Von **O. Haupt.**

Vorgelegt von A. Sommerfeld in der Sitzung am 4. Mai 1912.

Vorbemerkung.

Gegeben sei ein stetiger Kern $K(s, t)$. Die Möglichkeit, eine stetige Funktion

$$f(s) = \int_a^b K(s, t)g(t) dt,$$

wo auch $g(t)$ stetig sein möge, nach den Eigenfunktionen q_j von $K(s, t)$, — q_j gehöre zum Eigenwerte λ_j —, zu entwickeln, ist gewährleistet, sobald

1. die „Partialbruchzerlegung“ der lösenden Funktion $K(\lambda; s, t)$ des Kernes $K(s, t)$ gleichmäßig für alle in Betracht kommenden Wertesysteme s, t konvergiert, solange nur λ kein Eigenwert ist;

2. die lösende Funktion $K(\lambda; s, t)$ durch eben diese Partialbruchzerlegung dargestellt wird.

Beide Bedingungen sind beispielsweise erfüllt für die reellen symmetrischen Kerne, wie sie sich bei den sogenannten Greenschen Randbedingungen für homogene lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung ergeben. Die Eigenwerte sind sämtlich reell und es bleibt $\lambda \cdot K(\lambda; s, t)$ in der komplexen λ -Ebene, abgesehen von einer bestimmten Nachbarschaft der Eigenwerte,

unterhalb einer vorgegebenen Größe¹⁾. Infolgedessen konvergiert das Cauchysche Integral von $K(\lambda; s, t)$, erstreckt über die Begrenzung eines Rechteckes R_k in der komplexen λ -Ebene, gleichmäßig gegen Null für alle s, t , wenn die Rechtecke R_k ins Unendliche wachsen und ihre Begrenzungen keine Punkte der erwähnten Umgebung der Eigenwerte enthalten. $K(\lambda; s, t)$ besitzt nur einfache Pole; mithin ist, wenn λ_0 kein Eigenwert,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{R_k} \frac{K(\lambda; s, t)}{\lambda - \lambda_0} d\lambda = K(\lambda_0; s, t) + \sum \frac{q_j(s) q_j(t)}{\lambda_j - \lambda_0} = 0,$$

die Summe rechterhand erstreckt über sämtliche Eigenwerte.

Nach dieser, auf Cauchy zurückgehenden Methode²⁾, lassen sich nicht nur die Entwicklungssätze für beliebige (stetige) reelle, symmetrische Kerne²⁾ sondern auch für eine Reihe von unsymmetrischen und komplexen Kernen gewinnen.

Poincaré³⁾ hat die Methode auf Kerne angewandt, die in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen auftreten.

Ferner hat auf ähnlichem Wege Birkhoff⁴⁾ Entwicklungssätze bei linearen homogenen Randbedingungen und linearen homogenen Differentialgleichungen hergeleitet. Hilb⁵⁾ hat die Methode bei inhomogenen Differentialgleichungen und inhomogenen Randbedingungen verwandt und sie zur Gewinnung von Integraldarstellungen⁶⁾ herangezogen.

Im folgenden soll die genannte Methode auf den Ansatz der Turbulenzprobleme angewandt werden, wie er von Sommerfeld⁷⁾ gegeben worden ist; in der Tat gelingt es mit ihrer

1) Für beliebige reelle, symmetrische Kerne vgl. Hilb, Erlanger Berichte, 49, 1908 (S. 84).

2) Vgl. Hellinger, Crelles Journal, Bd. 136 (S. 266 ff.).

3) Vgl. Poincaré, Rendie. del Circolo Math. di Palermo, 25. März 1894.

4) Birkhoff, Transactions of the American Math. soc., Vol. 9, No. 4, (S. 373—395).

5) Hilb, Math. Annalen, Bd. 71, 1911, (S. 76 ff.) und Crelles Journal, Bd. 140, 1911, (S. 205 ff.).

6) Hilb, Berichte der Phys.-Med. Societ. in Erlangen 1911, (S. 68).

7) Sommerfeld, Atti del IV. congr. intern. dei Mathematici, Rom 1908, (S. 116).

Hilfe nachzuweisen, daß eine, gewissen in der Natur der Sache liegenden Randbedingungen und Stetigkeitsforderungen unterworfen, aber sonst willkürliche Funktion sich nach den schon von Sommerfeld angegebenen „Eigenfunktionen“ des Problems entwickeln läßt.

Herrn Professor Hilb bin ich für die Anregung und seinen Rat bei der Bearbeitung vorliegender Frage zu Danke verpflichtet, ebenso Herrn Professor Sommerfeld für Erläuterungen über die hydrodynamische Seite des Problems.

1. Formulierung des Problems. Aufstellung der Greenschen Funktion.

Die Randwertaufgabe ist folgende.
Gegeben sind die Differentialgleichungen:

$$(1) \quad L(q) \equiv \frac{d^2 q}{d\eta^2} + \lambda^2 q - l(\eta; a)q = 0,$$

$$(2) \quad M(q) \equiv \frac{d^2 f}{d\eta^2} - a^2 f - q = 0.$$

Dabei ist $l(\eta; a)$ eine ganze rationale Funktion von η und a ; a ist eine vorgegebene Größe.

Gesucht werden Lösungen $f(\eta)$ von (2), welche die Randbedingungen

$$(II) \quad f(0) = 0, \quad \left(\frac{df}{d\eta}\right)_{\eta=0} = 0; \quad f(1) = 0, \quad \left(\frac{df}{d\eta}\right)_{\eta=1} = 0$$

erfüllen.

Wegen

$$f = c_1 e^{a\eta} + c_2 e^{-a\eta} + \frac{1}{2a} \int_0^\eta [e^{-a(\zeta-\eta)} - e^{+a(\zeta-\eta)}] q(\zeta) d\zeta, \quad a \neq 0,$$

erhält man $c_1 = c_2 = 0$ und mithin als Randbedingung für q

$$(I) \quad J_1(q) = \int_0^1 q(\zeta) e^{-a\zeta} d\zeta = 0, \quad J_2(q) = \int_0^1 q(\zeta) e^{a\zeta} d\zeta = 0^1).$$

¹⁾ Vgl. Sommerfeld, l. c.; R. von Mises, Beitrag zum Oszillationsproblem (Weberfestschrift, Leipzig 1912, S. 252–282; S. 275).

Zusatz: Für den Sommerfeldschen Ansatz hat man speziell

$$\lambda^2 = -i R \beta, \quad l(\eta; a) = a^2 - i R a \eta;$$

a und R sind reelle Konstante¹⁾.

Diejenigen Parameterwerte λ^2 , für welche Lösungen q der gewünschten Art existieren, heißen die Eigenwerte, die zugehörigen Lösungen q die Eigenfunktionen unseres Problems (1). (I). Für alle Werte λ^2 , die nicht Eigenwerte sind, gibt es eine Lösung von (1): $G(\eta, \xi; \lambda^2)$, die eine stetige Funktion von η ist, außerdem noch von dem (reellen) Parameter ξ abhängt und den Bedingungen (I) genügt, während die 1. Ableitung nach η an der Stelle $\eta = \xi$ den Sprung $+1$ erleidet.

Zur Bildung der „Greenschen Funktion $G(\eta, \xi; \lambda^2)$ “ dienen die beiden in folgender Weise normierten Partikulärlösungen q_1 und q_2 von (1):

$$q_1(0) = 0, \quad \left(\frac{dq_1}{d\eta}\right)_0 = 1; \quad q_2(0) = 1, \quad \left(\frac{dq_2}{d\eta}\right)_0 = 0;$$

q_1 und q_2 sind ganze transzendente Funktionen von λ^2 .

Setzt man

$$\begin{aligned} \varphi_3(\eta; \xi) &= q_1(\eta)q_2(\xi) - q_2(\eta)q_1(\xi) = -\varphi_3(\xi; \eta) \\ \Phi_3(\eta; \xi) &= \varphi_3(\eta; \xi), \quad \eta < \xi \\ \Phi_3(\eta; \xi) &= 0, \quad \eta > \xi. \end{aligned}$$

so kommt

$$G(\eta, \xi; \lambda^2) = A(\xi)q_1(\eta) + B(\xi)q_2(\eta) - \Phi_3(\eta; \xi),$$

und es sind hierbei A und B bestimmt durch

$$\begin{aligned} A \cdot A(\xi) &= J_1(\Phi_3)J_2(q_2) - J_2(\Phi_3)J_1(q_2) \\ A \cdot B(\xi) &= J_2(\Phi_3)J_1(q_1) - J_1(\Phi_3)J_2(q_1) \\ A &= J_1(q_1)J_2(q_2) - J_1(q_2)J_2(q_1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{1,2}(\Phi_3) &= \left(\int_0^\xi q_1(\zeta) e^{+\mu\zeta} d\zeta \right) q_2(\xi) - \left(\int_0^\xi q_2(\zeta) e^{+\mu\zeta} d\zeta \right) q_1(\xi) \\ &= J_{1,2}(q_1)q_2(\xi) - J_{1,2}(q_2)q_1(\xi) \\ &= J_{1,2}(q_3(\zeta; \xi)^2). \end{aligned}$$

¹⁾ S. Note auf S. 291. ²⁾ ζ bedeutet stets die Integrationsvariable.

Demzufolge ist $G(\eta, \xi; \lambda^2)$ eindeutig bestimmt, solange λ^2 kein Eigenwert ist; die Eigenwerte sind identisch mit den Nullstellen von $\Delta(\lambda^2)$. Sie sind Pole der in λ^2 meromorphen Funktion $G(\eta, \xi; \lambda^2)^1$. Verschwindet also Δ nicht identisch in λ^2 , so können die Eigenwerte sich nur im Unendlichen häufen.

Zu einem Eigenwerte gibt es entweder eine einzige Eigenfunktion (abgesehen von einem konstanten Faktor) oder es genügen sämtliche Lösungen der Differentialgleichung (1) unseren Bedingungen (I).

Ist der betrachtete Eigenwert λ_j^2 ein Pol 1. Ordnung von $G(\eta, \xi; \lambda^2)$, so stellt sich das Residuum $G(\lambda^2)$ als Produkt zweier Funktionen $\varphi_j(\eta)$ und $\eta_j(\xi)$ dar; $\varphi_j(\eta)$ enthält nur η , $\eta_j(\xi)$ nur ξ und beide sind 2 mal stetig differenzierbare Funktionen ihrer Argumente. $\varphi_j(\eta)$ ist die bzw. eine zu λ_j^2 gehörige (normierte) Eigenfunktion unseres Problems. Für Pole von höherer als der 1. Ordnung gilt Entsprechendes.

Die Bedeutung von $\eta_j(\xi)$ ergibt sich, wenn man G als Funktion von ξ betrachtet und η festhält. Solange λ^2 kein Eigenwert, ist

1. $G(\eta, \xi; \lambda^2)$ eine stetige Funktion von ξ ($0 < \xi < 1$) für alle η ($0 < \eta < 1$);

2.
$$\left[\frac{\partial G(\eta, \xi; \lambda^2)}{\partial \xi} \right]_{\xi=\eta+0} - \left[\frac{\partial G(\eta, \xi; \lambda^2)}{\partial \xi} \right]_{\xi=\eta-0} = 1;$$

3.
$$L(\Delta \cdot G(\eta, \xi)) + \{e^{\alpha \xi} J_1(q_3(\zeta, \eta)) - e^{-\alpha \xi} J_2(q_3(\zeta, \eta))\} = 0. \quad (3)$$

4.
$$G(\eta; \xi = 0; \lambda^2) = 0, \quad \left(\frac{\partial G}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} = 0, \quad 0 < \eta < 1;$$

- (I)
$$G(\eta; \xi = 1; \lambda^2) = 0, \quad \left(\frac{\partial G}{\partial \xi} \right)_{\xi=1} = 0, \quad 0 < \eta < 1^2).$$

1) Ist λ_0 kein Eigenwert, so läßt sich zeigen, daß $G(\eta, \xi; \lambda^2)$ die zum Kerne $G(\eta, \xi; \lambda_0^2)$ gehörige lösende Funktion ist.

2) Ist $\eta = 0$, so ist in (I): $\left(\frac{\partial G}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} = 1$, ist hingegen $\eta = 1$, so gilt: $\left(\frac{\partial G}{\partial \xi} \right)_{\xi=1} = -1$; alles übrige bleibt ungeändert.

Auch die $q_j(\xi)$ genügen offenbar den Randbedingungen (\bar{I}) und befriedigen diejenige Differentialgleichung (1), die sich aus (3) für $\lambda^2 = \lambda_j^2$ ergibt. $G(\eta, \xi; \lambda^2)$ kann demnach — als Funktion von ξ betrachtet — als Greensche Funktion des zu (1), (I) „adjungierten“ Randwertproblems (1), (I) angesehen werden, welches die nämlichen Eigenwerte besitzt.

2. Asymptotische Darstellung der Greenschen Funktion.

Zur Gewinnung der Partialbruchzerlegung von $G(\eta, \xi; \lambda^2)$ hat man nun das Verhalten von $G(\eta, \xi; \lambda^2)$ für sehr große λ^2 zu untersuchen.

Wir betrachten zunächst $A(\lambda^2)$, welches sich in der Gestalt schreiben läßt

$$A(\lambda^2) = - \int_0^1 \int_0^1 e^{\lambda(\zeta - \tau)} q_3(\zeta, \tau) d\zeta d\tau.$$

Da $q_3(\zeta, \xi) = 0$, $\left(\frac{d q_3(\eta; \xi)}{d \eta}\right)_{\eta=\xi} = 1$ und $q_3(\eta; \xi)$, als Funktion von η (wie auch von ξ), der Differentialgleichung (1) genügt, so erhalten wir $q_3(\eta; \xi)$ aus $q_1(\eta)$, indem wir in q_1 den Ausdruck $\eta - \xi$ an Stelle von η substituieren. Eine Darstellung von $q_3(\eta; \xi)$ für große Werte von $|\lambda^2|$ ergibt sich nach Liouville auf Grund der Formel

$$(5) \quad q_1(\eta) = \frac{1}{2i\lambda} \{e^{i\lambda\eta} - e^{-i\lambda\eta}\} - \frac{1}{\lambda} \int_0^\eta \sin \lambda(\eta - \zeta_1) l(\zeta_1) q_1(\zeta_1) d\zeta_1.$$

wobei zur Abkürzung

$$\sin \lambda(\eta - \zeta_1) \text{ für } \frac{1}{2i} \{e^{i\lambda(\eta - \zeta_1)} - e^{-i\lambda(\eta - \zeta_1)}\}$$

geschrieben wird.

Bezeichnet man den reellen Bestandteil von λ mit $\Re(\lambda)$ und setzt

$$\lambda = \Re(\lambda) + i \Im(\lambda),$$

so ist

$$2i\lambda q_1(\eta) = e^{i\lambda\eta} - e^{-i\lambda\eta} + \frac{1}{\lambda} R(\eta) e^{(\Re(\lambda) + i\Im(\lambda))\eta},$$

wobei im Restgliede das + oder - Zeichen steht, je nachdem $\Im(\lambda) \leq 0$ ist¹⁾ und

$$|R(\eta)| < 4 \int_0^1 l(\zeta) d\zeta \text{ für jedes } |\lambda| > 2 \int_0^1 l(\zeta) d\zeta \text{ und jedes } 0 < \eta < 1^2).$$

Man hat also

$$\varphi_3(\eta; \xi) = \frac{1}{2i\lambda} (e^{i\lambda(\eta-\xi)} - e^{-i\lambda(\eta-\xi)}) + \frac{1}{\lambda} R(\eta - \xi) e^{(+i\lambda)(\eta-\xi)},$$

$$0 < \xi < 1, \quad 0 < \eta < 1, \quad \Im(\lambda) \leq 0.$$

Nun wird

$$A = -\frac{1}{2i\lambda} \int_0^1 \int_0^1 [e^{i\lambda(a)(\zeta-\tau)} - e^{-i\lambda(a)(\zeta-\tau)} + \frac{1}{\lambda} R(\zeta-\tau) e^{(+i\lambda)(\zeta-\tau)}] d\zeta d\tau.$$

Die Ausführung der Integrationen ergibt

$$A = -\frac{1}{2i\lambda} \left\{ e^{i\lambda} \left[\frac{e^a}{(i\lambda + a)^2} - \frac{e^{-a}}{(i\lambda - a)^2} \right] + \right.$$

$$\left. e^{-i\lambda} \left[-\frac{e^a}{(i\lambda - a)^2} + \frac{e^{-a}}{(i\lambda + a)^2} \right] + \frac{e^{(+i\lambda)} i\lambda}{(i\lambda)^3} [\cdot \cdot \cdot] \right\},$$

weil die von der Integration des in φ_3 auftretenden Restgliedes herrührenden Glieder mindestens mit $\frac{1}{(i\lambda)^3}$ behaftet sind. Die dritte eckige Klammer rechter Hand ist eine Funktion von λ allein, die für alle λ , die oberhalb einer bestimmten Größe liegen, absolut genommen stets unterhalb einer endlichen, von λ unabhängigen Größe bleibt. Man bemerke, daß das mit der niedersten Potenz von $(i\lambda)^{-1}$ behaftete Glied in A

$$\frac{4}{(2i\lambda)^3} (e^a - e^{-a}) (e^{i\lambda} - e^{-i\lambda})$$

ist, wobei $|\lambda|$ so groß sein soll, daß man $1 : (i\lambda \pm a)^2$ nach $\frac{i\lambda}{a}$ entwickeln kann.

¹⁾ In gleicher Weise ist die Bezeichnung $e^{(+i\lambda)} i\lambda$ in allen weiterhin auftretenden Restgliedern zu verstehen.

²⁾ Vgl. Hilb, Math. Annalen, Bd. 71, 1911, (S. 82).

Der gefundenen Darstellung von A zufolge gibt es zunächst in der komplexen λ -Ebene zu jedem $|\Im(\lambda')|$ eine reelle Zahl $m' > 0$ derart, daß Werte λ , für welche $|\Im(\lambda')| < \Im(\lambda)$ ist und $|\lambda| > m'$ wird, niemals Eigenwerte sind. Die Nullstellen von $A(\lambda^2)$ werden, wie leicht zu ersehen¹⁾, asymptotisch dargestellt durch die Quadrate der Nullstellen von $\sin(\lambda)$ und nur durch sie allein. Die Nullstellen von $A(\lambda^2)$, nach wachsenden absoluten Beträgen geordnet, sind von einer bestimmten an stets einfach.

Das Verhalten des Zählers für sehr große $|\lambda|$ erkennt man folgendermaßen. Es war

$$\begin{aligned} A(\lambda^2)G(\eta, \xi; \lambda^2) &= \{J_1(q_3(\zeta, \xi))J_2(q_2) - \bar{J}_2(q_3(\zeta; \xi))J_1(q_2)\}q_1(\eta) \\ &\quad + \{J_2(q_3(\zeta, \xi))J_1(q_1) - \bar{J}_1(q_3(\zeta, \xi))J_2(q_1)\}q_2(\eta) \\ &= J_2(q_3(\zeta, \xi))J_1(q_3(\zeta; \eta)) - \bar{J}_1(q_3(\zeta, \xi))J_2(q_3(\zeta, \eta)) \\ &= \left[\int_0^{\xi} e^{-\alpha\zeta} q_3(\zeta; \xi) d\zeta \right] \left[\int_0^{\xi} e^{-\alpha\tau} q_3(\tau; \eta) d\tau + \int_{\xi}^1 e^{-\alpha\tau} q_3(\tau; \eta) d\tau \right] \\ &\quad - \left[\int_0^{\xi} e^{-\alpha\zeta} q_3(\zeta; \xi) d\zeta \right] \left[\int_0^{\xi} e^{-\alpha\tau} q_3(\tau; \eta) d\tau + \int_{\xi}^1 e^{-\alpha\tau} q_3(\tau; \eta) d\tau \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A(\lambda^2)G(\eta, \xi; \lambda^2) &= \int_0^{\xi} \int_0^{\xi} e^{-\alpha(\zeta-\tau)} [q_3(\zeta; \xi)q_3(\tau; \eta) - q_3(\tau; \xi)q_3(\zeta; \eta)] d\zeta d\tau \\ &\quad + \int_{\xi}^1 \int_{\xi}^1 [e^{-\alpha(\zeta-\tau)} - e^{-\alpha(\tau-\zeta)}] q_3(\zeta; \xi) q_3(\tau; \eta) d\tau d\zeta. \end{aligned}$$

Es ist aber

$$q_3(\zeta; \xi)q_3(\tau; \eta) - q_3(\tau; \xi)q_3(\zeta; \eta) = q_3(\xi; \eta)q_3(\zeta; \tau).$$

Mithin ist das Doppelintegral an erster Stelle

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2i\lambda} q_3(\xi; \eta) \int_0^{\xi} \int_0^{\xi} [e^{i\lambda(\zeta-\tau)} - e^{-i\lambda(\zeta-\tau)}] d\zeta d\tau \\ &\quad + \frac{1}{\lambda} R(\zeta - \tau) e^{(+i\lambda + \alpha)(\zeta-\tau)} d\zeta d\tau \end{aligned}$$

oder

¹⁾ Vgl. Hilb, l. c., S. 81.

$$\frac{1}{(2i\lambda)^2} \left[e^{i\lambda(z-\eta)} - e^{-i\lambda(z-\eta)} + \frac{1}{\lambda} R(\xi - \eta) e^{(+i\lambda(z-\eta))} \right] \times$$

$$\left[e^{i\lambda z} \left\{ \frac{e^{\alpha z}}{(i\lambda + \alpha)^2} - \frac{e^{-\alpha z}}{(-i\lambda + \alpha)^2} \right\} + e^{-i\lambda z} \left\{ \frac{e^{-\alpha z}}{(i\lambda + \alpha)^2} - \frac{e^{\alpha z}}{(-i\lambda + \alpha)^2} \right\} + \frac{e^{(+i\lambda z)}}{(i\lambda)^3} \{ \dots \} \right].$$

Wie in den Ausdrücken für $A(\lambda^2)$ bleibt hier das in der letzten eckigen Klammer nur angedeutete Glied, für hinreichend großes $|\lambda|$, absolut genommen unterhalb einer festen Größe.

Die Ausführung des Produktes führt nur zu solchen Exponentialfunktionen, in deren Argument der Faktor von $\pm i\lambda$ absolut genommen niemals den Betrag 1 überschreitet; denn es war ja $\eta > \xi$ vorausgesetzt.

Zum gleichen Ergebnisse führt die Auswertung des 2. Doppelintegrals. Die sämtlichen in $A \cdot G(\eta, \xi)$ auftretenden Glieder besitzen mindestens den Faktor $\frac{1}{(i\lambda)^4}$.

Die Untersuchung beschränkte sich bisher auf die Annahme $\eta > \xi$. Die gewonnenen Ergebnisse sind aber auch richtig für den Fall $\eta < \xi$, wie man unter Benutzung der Eindeutigkeit der Greenschen Funktion leicht beweist.

3. Partialbruchzerlegung der Greenschen Funktion.

Man konstruiert nun in der komplexen λ -Ebene eine abzählbare Reihe von Quadraten Q_ν , $\nu = 1, 2, \dots$, deren Seiten bzw. den Koordinatenachsen parallel sind, deren Mittelpunkt etwa der Nullpunkt ist und von denen jedes Q_ν alle vorangehenden, also $Q_{\nu-1}, Q_{\nu-2}, \dots$, umschließt. Die Seite von Q_ν möge die Länge $\frac{2(\nu + n) + 1}{2} \pi$ besitzen, unter ν und n natürliche Zahlen verstanden: n ist dabei so groß zu wählen, daß $\frac{2n + 1}{2} \pi$ nicht Nullstelle von $A(\lambda^2)$ ist. Unsern Ergebnissen zufolge kann n stets so gewählt werden, daß dann überhaupt

auf der Begrenzung keines der Quadrate Q_1, Q_2, \dots eine Nullstelle von $\Delta(\lambda^2)$ liegt.

Die Darstellung von Zähler und Nenner der Greenschen Funktion für sehr große λ lehrt ferner, daß sich n , im Rahmen der ihm bereits auferlegten Bedingung, so wählen läßt, daß für alle $0 < \eta < 1$, $0 < \xi < 1$ auf der Begrenzung eines jeden der Quadrate Q_r

$$G(\lambda^2; \eta, \xi) < \frac{m_0}{\lambda}$$

bleibt, wobei m_0 eine feste, von λ , η und ξ unabhängige Konstante bedeutet.

Bezeichnet λ_0 einen im Innern von Q_1 gelegenen Punkt, welcher nicht Eigenwert ist, so liefert für den Fall nur einfacher Pole von $G(\lambda^2; \eta, \xi)$ die Anwendung des Cauchyschen Satzes

$$2\pi i \int_{Q_r} \frac{G(\lambda^2; \eta, \xi)}{\lambda - \lambda_0} d\lambda = G(\lambda_0^2; \eta, \xi) + \sum_j \frac{1}{2\lambda_j} \left(\frac{q_j(\eta) \psi_j(\xi)}{(\lambda_j - \lambda_0)} - \frac{q_j(\eta) \psi_j(\xi)}{(-\lambda_j - \lambda_0)} \right).$$

Die Summe rechter Hand ist über alle im Innern von Q_r gelegenen Pole von $G(\lambda^2; \eta, \xi)$ zu erstrecken; $q_j(\eta) \psi_j(\xi)$ stellt das Residuum von $G(\lambda^2)$ an dem betreffenden Pole dar.

Die oben getroffene Anordnung der Quadrate Q_r bewirkt nun, daß das Integral linker Hand mit beständig wachsendem r gegen Null konvergiert und zwar gleichmäßig für alle $0 < \eta < 1$, $0 < \xi < 1$. Es gilt also

$$(III) \quad G(\lambda_0^2; \eta, \xi) = \sum_j \frac{q_j(\eta) \psi_j(\xi)}{\lambda_0^2 - \lambda_j^2}.$$

Die zu Grunde gelegte Voraussetzung, daß die Pole sämtlich einfache seien, kann nur für eine endliche Anzahl von Eigenwerten nicht erfüllt sein. Für diese letzteren modifiziert die Partialbruchzerlegung sich entsprechend, während alle übrigen Tatsachen in Richtigkeit bleiben.

4. Die Entwicklung einer willkürlichen Funktion nach den Eigenfunktionen.

Auf Grund des gewonnenen Resultates erhält man nun in bekannter Weise die Entwicklung einer „willkürlichen“ Funktion nach den q_j bzw. q'_j .

Gestattet die zu entwickelnde Funktion $q(\eta)$ die Darstellung

$$(6) \quad q(\eta) = \int_0^1 G(\lambda_0^2; \eta, \xi) g(\xi) d\xi,$$

so ergibt sich wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Partialbruchzerlegung

$$(IV) \quad q(\eta) = \sum c_j q_j(\eta), \quad c_j = \frac{1}{\lambda_0^2 - \lambda_j^2} \int_0^1 g(\xi) q_j(\xi) d\xi; \quad 0 < \eta < 1.$$

Die Bedingung (6) ist beispielsweise immer erfüllt, wenn q eine zweimalstetig differenzierbare Funktion ist, die den Randbedingungen (I) Genüge leistet. Der Green'sche Satz ergibt nämlich¹⁾

$$\begin{aligned} & \int_0^1 [L(q(\xi)) \cdot G(\lambda_0^2; \eta, \xi) - L(G(\xi)) \cdot q(\xi)] d\xi \\ &= \lim_{\epsilon=0} \left\{ \left[G(\eta, \xi) \frac{d q}{d \xi} - \frac{d G(\eta; \xi)}{d \xi} q(\xi) \right]_{\xi=0}^{\xi=\eta-\epsilon} \right. \\ & \left. + \left[G(\eta; \xi) \frac{d q}{d \xi} - \frac{d G(\eta; \xi)}{d \xi} q(\xi) \right]_{\xi=\eta+\epsilon}^{\xi=1} \right\}. \end{aligned}$$

Wegen (I) bekommt man

$$\begin{aligned} & \int_0^1 G(\lambda_0^2; \eta, \xi) \cdot L(q(\xi)) d\xi \\ & - \int_0^1 \{ e^{a\xi} q(\xi) \cdot J_1(q_3(\zeta, \eta)) - e^{-a\xi} q(\xi) \cdot J_2(q_3(\zeta, \eta)) \} d\xi = q(\eta), \end{aligned}$$

also zufolge (3)

$$\int_0^1 G(\lambda_0^2; \eta, \xi) L(q) d\xi = q(\eta).$$

¹⁾ Vgl. Fußnote S. 293.

Bezeichnet f_j die zu q_j gehörige, den Randbedingungen (II) genügende Lösung von (2), so kann man eine Funktion $f(\eta)$ nach den f_j entwickeln, sobald f etwa zweimalstetig differenzierbar ist und

$$\frac{d^2 f}{d\eta^2} - \alpha^2 f = \bar{q}(\eta)$$

die Darstellung (6) zuläßt¹⁾. Dann hat man

$$(V) \quad f(\eta) = \sum_j c_j f_j(\eta), \quad c_j = \frac{1}{\lambda_j^2 - \lambda_{j_0}^2} \int_0^1 \bar{q}(\xi) \psi_j(\xi) d\xi, \quad 0 < \eta < 1,$$

vorausgesetzt, daß f die Randbedingungen (II) erfüllt.

Die Entwicklungen (IV) und (V) konvergieren gleichmäßig für alle $0 < \eta < 1$.

5. Schlussbemerkungen.

Zum Schlusse soll auf die physikalische Bedeutung der gewonnenen Ergebnisse hingewiesen werden.

Aus der asymptotischen Verteilung der Eigenwerte folgt wegen

$$\lambda^2 = -i R \beta,$$

daß sich stets eine natürliche Zahl j_0 angeben läßt, sodaß für jedes $j > j_0$

$$i \beta_j = -\frac{1}{R} \lambda_j^2$$

einen negativ reellen Teil besitzt.

Die Funktionen

$$(7) \quad e^{i \beta_j t - i \alpha z} q_j(\eta), \quad j > j_0.$$

deren reellen Teil man als Stromfunktionen gewisser, der Hauptbewegung überlagerter (unendlich kleiner) Störungen von dem speziellen Anfangszustande $\Re(q_j(\eta))$ auffassen möge²⁾, führen also zu stabilen Bewegungen.

¹⁾ Dies ist der Fall, wenn f 4 mal stetig differenzierbar ist.

²⁾ Vgl. A. Sommerfeld l. c., S. 119.

Aus solchen speziellen Störungen läßt sich aber dem gewonnenen Ergebnisse zufolge die allgemeinste Störung $q(\eta)$ zusammensetzen, wenn $q(\eta)$ außer den genannten Stetigkeitsforderungen noch den in der Natur der Sache liegenden Randbedingungen (I) genügt. Dementsprechend erhält man den zeitlichen Ablauf dieser Störung $q(\eta)$ als Summe von Termen der Form (7)¹⁾ und schließt auf den stabilen Charakter der Hauptbewegung unter der folgenden Voraussetzung: 1. daß die oben gemachte Aussage über das Vorzeichen des reellen Teiles von $i\beta_j$ nicht nur für $j > j_0$, sondern allgemein, für alle $j > 0$ Geltung besitzt²⁾; 2. daß auch für beliebige Abhängigkeit in der ξ -Richtung die Stabilität erhalten bleibt.

¹⁾ Auf die Untersuchung, ob

$$\lim_{t \rightarrow 0} \sum_j e^{i\beta_j t - i\alpha z} q_j(\eta) = \sum_j e^{-i\alpha z} q_j(\eta)$$

ist, soll hier nicht eingegangen werden.

²⁾ Vgl. hierzu die Resultate der Vorträge von Hopf und v. Mises auf der Versammlung der Naturforschergesellschaft 1911; ferner Hamel, Gött. Nachr. 1911.



Interferenz-Erscheinungen bei Röntgenstrahlen.

Von **W. Friedrich, P. Knipping** und **M. Laue**.

Vorgelegt von A. Sommerfeld in der Sitzung am 8. Juni 1912.

Theoretischer Teil

von **M. Laue**.

Einleitung. Barklas¹⁾ Untersuchungen in den letzten Jahren haben gezeigt, daß die Röntgenstrahlen in der Materie eine Zerstreung erfahren, ganz entsprechend der Zerstreung des Lichtes in trüben Medien, daß sie aber noch daneben im allgemeinen die Atome des Körpers zur Aussendung einer spektral homogenen Eigenstrahlung (Fluoreszenzstrahlung) anregen, welche ausschließlich für den Körper charakteristisch ist.

Andererseits ist schon seit 1850 durch Bravais in die Kristallographie die Theorie eingeführt, daß die Atome in den Kristallen nach Raumgittern angeordnet sind. Wenn die Röntgenstrahlen wirklich in elektromagnetischen Wellen bestehen, so war zu vermuten, daß die Raumgitterstruktur bei einer Anregung der Atome zu freien oder erzwungenen Schwingungen zu Interferenzerscheinungen Anlaß gibt; und zwar zu Interferenzerscheinungen derselben Natur wie die in der Optik bekannten Gitterspektren. Die Konstanten dieser Gitter lassen sich aus dem Molekulargewicht der kristallisierten Verbindung, ihrer Dichte und der Zahl der Moleküle pro Grammmolekül,

¹⁾ C. G. Barkla, Phil. Mag., z. B. 22, 396, 1911.

sowie den kristallographischen Daten leicht berechnen. Man findet für sie stets die Größenordnung 10^{-8} cm, während die Wellenlänge der Röntgenstrahlen nach den Beugungsversuchen von Walter und Pohl¹⁾ und nach den Arbeiten von Sommerfeld und Koch²⁾ von der Größenordnung 10^{-9} cm sind. Eine erhebliche Komplikation freilich bedeutet es, daß bei den Raumgittern eine dreifache Periodizität vorliegt, während man bei den optischen Gittern nur in einer Richtung, höchstens (bei den Kreuzgittern) in zwei Richtungen periodische Wiederholungen hat.

Die Herren Friedrich und Knipping haben auf meine Anregung diese Vermutung experimentell geprüft. Über die Versuche und ihr Ergebnis berichten sie selbst im zweiten Teil der Veröffentlichung.

Die Theorie und ihr qualitativer Vergleich mit der Erfahrung. Wir wollen den oben angedeuteten Gedanken mathematisch zu fassen suchen. Den Ort der Mittelpunkte der Atome bestimmen wir durch die rechtwinkligen Koordinaten x, y, z , deren Achsenkreuz seinen Ursprung im Mittelpunkt eines beliebigen Atoms im durchstrahlten Teil des Kristalles hat. Das Raumgitter gehöre dem allgemeinsten, d. h. dem triklinen Typus an; die Kanten seiner Elementarparallelepiped mögen also beliebige Längen haben und beliebige Winkel miteinander einschließen. Durch spezielle Wahl dieser Längen und Winkel kann man immer zu Raumgittern anderer Typen übergehen. Stellen wir diese Kanten nach Länge und Richtung durch die Vektoren $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ dar, so liegen die Mittelpunkte eines Atoms an einem Ort

$$\begin{aligned}
 x &= m \alpha_{1x} + n \alpha_{2x} + p \alpha_{3x} \\
 1) \quad y &= m \alpha_{1y} + n \alpha_{2y} + p \alpha_{3y} \\
 z &= m \alpha_{1z} + n \alpha_{2z} + p \alpha_{3z} ,
 \end{aligned}$$

1) B. Walter und R. Pohl. Ann. d. Phys. 25, 715, 1908; 29, 331, 1908.

2) A. Sommerfeld. Ann. d. Phys. 38, 473, 1912; P. P. Koch, Ann. d. Phys. 38, 507, 1912.

wobei m, n, p positive oder negative, das Atom numerierende ganze Zahlen (einschließlich der Null) sind.

Für die Schwingung eines einzelnen Atoms wollen wir zunächst einmal die Annahme machen, daß sie rein sinusförmig verläuft. Dies kann hier natürlich ebensowenig wie in der Optik streng richtig sein. Aber ebenso wie in der Optik kann man spektral inhomogene Strahlung durch Fouriersche Zerlegung auf Sinusschwingungen zurückführen. Die von einem Atom ausgehende Welle können wir dann in großer Entfernung vom Atom darstellen durch den Ausdruck

$$2) \quad \Psi \frac{e^{-ikr}}{r},$$

wo r den Betrag des Radiusvektors vom Atom zum Aufpunkt bedeutet, Ψ eine Funktion seiner Richtung und $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ist, wo λ die Wellenlänge der später interferierenden Röntgenstrahlen darstellt. Wäre, wie man es in der Optik gewohnt ist, das Atom klein gegen die Wellenlänge, so wäre Ψ eine Konstante¹⁾. Hier aber muß man mit der Möglichkeit rechnen, und die Versuchsergebnisse legen die Vermutung nahe, daß infolge der mit der Wellenlänge vergleichbaren Abmessung des Atoms Richtungsunterschiede auftreten. Berücksichtigt man ferner noch, daß die anregende Schwingung in (als eben vorausgesetzten) Wellen mit Lichtgeschwindigkeit fortschreitet, so sieht man, daß man noch den Faktor $e^{-ik(x\alpha_0 + y\beta_0 + z\gamma_0)}$ hinzu-

¹⁾ Vgl. H. v. Helmholtz, Abh. 1, p. 331.

Gehen von beliebig vielen, in einem endlichen Bereich liegenden Strahlungsquellen Kugelwellen aus, so ist die Erregung in einem Punkte, für welchen der Radiusvektor vom Mittelpunkte des Bereiches den gegen dessen Abmessungen großen Betrag r und die Richtungskosinus α, β, γ hat:

$$\sum_n \frac{e^{-ik(r_n - a_n)}}{r_n} = \frac{e^{-ikr}}{r} \cdot \sum_n e^{ik(x_n \alpha + y_n \beta + z_n \gamma) - i a_n}.$$

Diese Summe ist im allgemeinen eine Funktion von α und β . Sind aber alle x_n, y_n, z_n klein gegen λ , so wird sie konstant.

fügen muß, wenn $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ die Richtungskosinus der einfallenden primären Röntgenstrahlen sind. Über Einzelheiten des Anregungsvorganges brauchen wir dabei keine weitere Voraussetzung zu machen, als daß er bei allen Atomen gleich erfolgt. Insbesondere ist es für den weiteren Verlauf des Vorganges vollkommen dasselbe, ob die Schwingungen im Atom durch Schwingungen gleicher Frequenz in der primären Strahlung erzwungen oder ob es durch die primäre Strahlung einmal angeregte, sonst aber freie Eigenschwingungen sind. Stets finden wir als Superpositionseffekt aller Elementarwellen

$$3) \quad \sum \Psi \frac{e^{-ik(r + x\alpha_0 + y\beta_0 + z\gamma_0)}}{r}.$$

Wir berechnen diese Summe nur für Aufpunkte, deren Abstand sehr groß ist gegen die Abmessungen des durchleuchteten Kristallstücks, und benutzen die auch sonst in der Gittertheorie übliche Näherung, d. h. wir setzen für das r im Nenner den Betrag R des Radiusvektors vom Nullpunkt des Achsenkreuzes zum Aufpunkt und geben der Richtungsfunktion Ψ den Wert, welcher dessen Richtung (α, β, γ) entspricht. Für das r im Exponenten setzen wir aber den Näherungswert:

$$r = R - (x\alpha + y\beta + z\gamma).$$

Unter Berücksichtigung von (1) geht somit die Summe (3) über in:

$$4) \quad \Psi(\alpha, \beta) \frac{e^{-ikR}}{R} \sum e^{ik[x(\alpha - \alpha_0) + y(\beta - \beta_0) + z(\gamma - \gamma_0)]}$$

$$= \Psi(\alpha, \beta) \frac{e^{-ikR}}{R} \sum_m \sum_n \sum_p e^{i(mA + nB + pC)},$$

wo zur Abkürzung

$$A = k[\alpha_{1x}(\alpha - \alpha_0) + \alpha_{1y}(\beta - \beta_0) + \alpha_{1z}(\gamma - \gamma_0)]$$

$$5) \quad B = k[\alpha_{2x}(\alpha - \alpha_0) + \alpha_{2y}(\beta - \beta_0) + \alpha_{2z}(\gamma - \gamma_0)]$$

$$C = k[\alpha_{3x}(\alpha - \alpha_0) + \alpha_{3y}(\beta - \beta_0) + \alpha_{3z}(\gamma - \gamma_0)]$$

gesetzt ist. Denken wir uns den durchstrahlten Teil von Ebenen begrenzt, welche zu den Seiten eines Elementarparallelepipedes parallel sind, so ist die Summation nach m von einer Zahl

— M bis zu $+ M$, nach n von $- N$ bis $+ N$, nach p von $- P$ bis $+ P$ auszuführen. Die Lage der Intensitätsmaxima ist von derartigen Annahmen nicht abhängig¹⁾. Die Intensität der Schwingung (4) wird dann:

$$6) \quad \frac{|\Psi(\alpha, \beta)|^2 \sin^2 MA}{h^2} \frac{\sin^2 NB}{\sin^2 \frac{1}{2} B} \frac{\sin^2 NC}{\sin^2 \frac{1}{2} C}.$$

Jeder dieser Sinusquotienten erreicht sein Maximum bekanntlich, wenn sein Nenner verschwindet. Die Bedingungen für die Maxima lauten also:

$$7) \quad \begin{aligned} A &= 2h_1\pi \text{ d. h. } \alpha_{1x}\alpha + \alpha_{1y}\beta + \alpha_{1z}\gamma = h_1\lambda + \alpha_{1x}\alpha_0 + \alpha_{1y}\beta_0 + \alpha_{1z}\gamma_0 \\ B &= 2h_2\pi \quad , \quad \alpha_{2x}\alpha + \alpha_{2y}\beta + \alpha_{2z}\gamma = h_2\lambda + \alpha_{2x}\alpha_0 + \alpha_{2y}\beta_0 + \alpha_{2z}\gamma_0 \\ C &= 2h_3\pi \quad , \quad \alpha_{3x}\alpha + \alpha_{3y}\beta + \alpha_{3z}\gamma = h_3\lambda + \alpha_{3x}\alpha_0 + \alpha_{3y}\beta_0 + \alpha_{3z}\gamma_0. \end{aligned}$$

Die links stehenden Summen sind gleich der Länge je einer Kante multipliziert mit dem Kosinus des Winkels zwischen ihr und der Richtung α, β, γ . Jede der Gleichungen (7) stellt somit eine Schar von Kreis Kegeln dar, deren Achse mit der Richtung einer der Kanten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ zusammenfällt²⁾. Nun wird es freilich nur in Ausnahmefällen vorkommen, daß eine Richtung allen drei Bedingungen gleichzeitig genügt. Darin liegt die Komplikation gegenüber dem einfachen oder dem Kreuzgitter. Dennoch ist ein sichtbares Intensitätsmaximum zu erwarten, wenn die Schnittlinie zweier Kegel der ersten beiden Scharen einem Kegel der dritten Schar nahe liegt. Wir wollen diese Verhältnisse etwas näher betrachten für den in Fig. 5, Tafel II abgebildeten Fall, in welchem ein regulärer Kristall in Richtung einer der Kanten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ durchstrahlt wird.

In diesem Falle erhalten die drei Kanten die gleiche Länge a und stehen senkrecht aufeinander, so daß wir in ihre Richtungen die Koordinatenachsen legen können. Da dann

¹⁾ Damit stimmt die Beobachtung überein. S. p. 318 letzter Absatz.

²⁾ Man macht sich, wie in der Gittertheorie, leicht an der elementaren geometrischen Konstruktion des Gangunterschiedes zwischen zwei parallelen, von benachbarten Teilchen ausgehenden Strahlen klar, daß dieser Gangunterschied auf den genannten Kegeln konstant ist.

$$a_{1y} = a_{1z} = a_{2x} = a_{2z} = a_{3x} = a_{3y} = 0, \quad a_{1x} = a_{2y} = a_{3z} = \alpha,$$

ferner

$$\alpha_0 = 0, \quad \beta_0 = 0, \quad \gamma_0 = 1$$

wird, so gehen die Gleichungen (7) über in:

$$8) \quad \alpha = h_1 \frac{\lambda}{a}, \quad \beta = h_2 \frac{\lambda}{a}, \quad 1 - \gamma = h_3 \frac{\lambda}{a}.$$

Auf einer zum einfallenden Strahl senkrechten photographischen Platte sind die Kurven $\alpha = \text{const.}$ und $\beta = \text{const.}$ Hyperbeln, deren Mittelpunkt im Durchstoßpunkt des primären Strahles liegt und deren Achsen aufeinander senkrecht stehen. Wären nur die beiden ersten Bedingungen in 8) zu erfüllen, so sähe man das bekannte Kreuzgitterspektrum, bei dem an jedem Schnittpunkte zweier Hyperbeln ein Intensitätsmaximum liegt. So aber wählen die Kreise $\gamma = \text{const.}$, deren Mittelpunkt ebenfalls im Durchstoßpunkt des primären Strahles liegt, aus diesen Kreuzgitterspektren diejenigen aus, welche einem von ihnen hinreichend nahe liegen, d. h. man wird auf der Platte diese Kreise nicht ganz, sondern nur in einzelnen Punkten vertreten sehen. Dies ist aber in der Tat der Eindruck, welchen die Figur macht. Die Kreise

$$9) \quad 1 - \gamma = h_3 \frac{\lambda}{a},$$

welche der Periodizität in der Strahlrichtung ihre Entstehung verdanken, haben in der Optik ein schon seit Newton bekanntes Analogon in den sogenannten Queteletschen Ringen¹⁾; diese treten bei Bestäubung einer ebenen, auf der Rückseite stark reflektierenden Glasplatte im Fraunhoferschen Beugungsbild auf. Es interferieren nämlich die von einem und demselben Staubteilchen aus dem einfallenden und aus dem gespiegelten Licht abgebeugten Wellen miteinander. Bei senkrechter Incidenz liegen die Maxima auf den durch Gleichung 9) angegebenen Kreisen, sind aber viel flacher als in unserem

¹⁾ Vgl. z. B. A. Winkelmann, Handbuch der Physik VI, Leipzig 1906, p. 1083.

Falle, weil nur zwei Wellen interferieren. Ließen sich die Staubteilchen zum regelmäßigen Kreuzgitter anordnen, so ließe sich die Analogie zu den obigen Interferenzen an Kristallen zweifellos noch weiter treiben.

Es muß beachtet werden, daß bei gegebenem Raumgitter die Einteilung in Elementarparallelepipede keine eindeutige ist, sondern auf unendlich viele Arten vorgenommen werden kann. Beim regulären Raumgitter z. B. kann man statt in Würfel in solche Parallelepipede zerlegen, deren eine Seite die Diagonale einer Würfelfläche ist und somit die Richtung einer zweizähligen Symmetrieachse hat. Die Intensitätsmaxima müssen sich nach dem obigen auch zu durchbrochenen Kegelschnitten um solche Achsen zusammenfassen lassen, wie überhaupt zu jeder derartigen Einteilung eine Art, die Maxima zusammenzufassen, gehört. In der Tat bestätigt Fig. 12, Tafel V, daß die Flecken sich zu Kreisen um eine zweizählige Achse anordnen, wenn man in Richtung dieser den regulären Kristall durchstrahlt und die photographische Platte dazu senkrecht stellt. Auch in den komplizierteren Figuren hat man stets den Eindruck, daß sich die Intensitätsmaxima zu durchbrochenen Kegelschnitten verbinden lassen. Soviel bisher zu sehen ist, läßt sich die Theorie unter der Annahme mehrerer Wellenlängen von $0,038.a$ bis $0,15.a$ gut der vierzählig symmetrischen Aufnahme (Fig. 5, Tafel II) anpassen. Da a für Zinksulfid gleich $3,38 \cdot 10^{-8}$ cm ist, würden sich daraus die Wellenlängen in dem Intervall von $1,3 \cdot 10^{-9}$ bis $5,2 \cdot 10^{-9}$ cm ergeben.

Trotz dieser Übereinstimmung darf nicht verschwiegen werden, daß unsere Theorie auf jeden Fall weitgehender Verbesserung bedarf. Die Wärmebewegung bei den Molekülen verrückt diese nämlich schon bei Zimmertemperatur um einen erheblichen Bruchteil der Gitterkonstanten und infolgedessen um ein Vielfaches der Wellenlänge, ein Umstand, der durchaus der Berücksichtigung bedarf. Deshalb wäre es auch voreilig, wenn man aus dem Ausdruck 6) Schlüsse auf die Schärfe der Interferenzmaxima schließen wollte.

Daß von allen bisher untersuchten Kristallen mit Ausnahme des Diamants die Intensitätsmaxima auf einen spitzen Winkel gegen die Richtung des primären Strahles beschränkt sind, statt nach allen Richtungen auszugehen, wie man zunächst nach Gleichung 6) erwarten könnte, wird man wohl auf die Richtungsfunktion Ψ zurückführen müssen; doch ist es auch denkbar, daß die Wärmebewegung zur Erklärung herangezogen werden muß.

Allgemeine Folgerungen. Diskutieren wir zum Schluß noch ohne allen Bezug auf die Formel die Frage, inwiefern diese Versuche für die Wellennatur der Röntgenstrahlen sprechen.

Daß die vom Kristall ausgehende Strahlung Wellencharakter trägt, ist wohl durch die Schärfe der Intensitätsmaxima bewiesen, welche als Interferenzphänomen leicht, auf Grund korpuskularer Vorstellungen aber wohl kaum verständlich ist; daneben auch durch ihre große Durchdringungsfähigkeit, welche von allen bekannten Korpuskularstrahlen nur die schnellsten β -Strahlen erreichen. Dennoch könnte man aber vielleicht die Wellennatur der primären Strahlen bezweifeln. Denken wir nun einmal, die Atome des Kristalls würden im Fall von Fig. 5, Tafel II durch eine Korpuskularstrahlung angeregt. (Die von manchen Forschern angenommene Lichtquantenstruktur der Röntgenstrahlen kann hier unter der Bezeichnung korpuskulare Strahlung mit einbegriffen werden.) Zu kohärenten Schwingungen könnten dabei nur solche Reihen von Atomen kommen, welche von demselben Korpuskel getroffen werden, d. h. Reihen, welche zur z -Richtung parallel sind. Atome, welche in der x - oder y -Richtung einen gewissen Abstand voneinander haben, würden von verschiedenen Korpuskeln angeregt; eine bestimmte Phasendifferenz zwischen ihren Schwingungen könnte nicht auftreten. Infolgedessen würde von dem Intensitätsausdruck 6) nur ein Sinusquotient übrig bleiben; wir erhielten nur eine Bedingung für ein Intensitätsmaximum und diese wäre, wie schon aus Symmetriegründen einleuchtet, auf Kreisen um den Durchstoßpunkt des

primären Strahles erfüllt. Die Durchbrechung dieser Kreise, die doch tatsächlich auftritt, wäre danach unverständlich. Zudem aber sind die primären und die vom Kristall ausgehenden Strahlen allem Anschein nach so gleichartig, daß man von der Wellennatur der letzteren wohl ziemlich sicher auf die Wellennatur der ersteren schließen kann. Ein Unterschied freilich bleibt bestehen: Die vom Kristalle ausgehende Strahlung hat sicher eine erhebliche spektrale Homogenität, d. h. eine gewisse Periodizität. Die primäre Strahlung hingegen wird man nach Sommerfelds Vorstellungen wohl, soweit sie „Bremsstrahlung“ ist, als aus durchaus unperiodischen Impulswellen bestehend annehmen müssen; die im folgenden mitgeteilten Versuche sind jedenfalls mit dieser Annahme verträglich. Unentschieden bleibe vorläufig, ob die periodische Strahlung erst im Kristall durch Fluoreszenz entsteht oder ob sie neben den Impulsen schon in der primären Strahlung vorhanden ist und durch den Kristall nur ausgesondert wird¹⁾. Doch scheint uns Hoffnung zu bestehen, daß weitere Versuche bald darüber Aufschluß geben werden.

Experimenteller Teil

von **W. Friedrich** und **P. Knipping**.

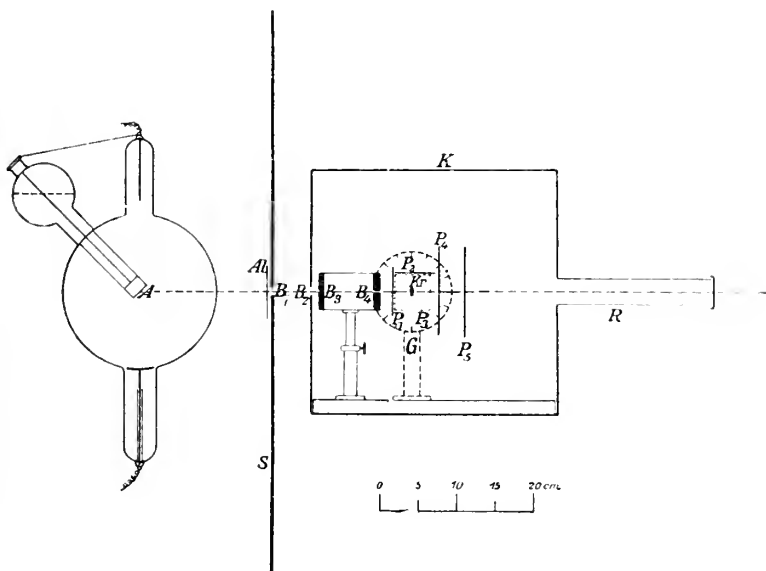
Zur experimentellen Prüfung der im vorhergehenden Teil beschriebenen Überlegungen wurde nach einigen Vorversuchen mit einem provisorischen Apparat folgende definitive Versuchsanordnung verwandt, die in Fig. 1 schematisch abgebildet ist. Von den von der Antikathode *A* einer Röntgenröhre ausgehenden Röntgenstrahlen wird ein schmales Bündel von ca. 1 mm Durchmesser durch die Blenden *B*₁ bis *B*₄ ausgeblendet. Dieses Bündel durchsetzt den Kristall *Kr*, der in einem Goniometer *G* aufgestellt ist. Um den Kristall waren in verschiedenen Richtungen und Abständen photographische Platten *P* angebracht,

¹⁾ Vgl. auch p. 322.

auf denen sich die Intensitätsverteilung der vom Kristall ausgehenden Sekundärstrahlen registrierte. Gegen nicht gewollte Strahlen war die Anordnung durch einen großen Bleischirm S sowie durch den Bleikasten K in genügender Weise geschützt. Die Größe der wichtigen Teile der Versuchsanordnung lassen sich aus der Fig. 1 entnehmen, die im Maßstab 1 : 10 gezeichnet ist.

Die Einstellung der gesamten Versuchsanordnung wurde auf optischem Wege bewerkstelligt. Ein Kathetometer, dessen Fernrohr mit einem Fadenkreuz versehen war, hatten wir ein für allemal unverrückbar aufgestellt. Der Reihe nach wurden Brennpunkt der Antikathode, Blenden und Goniometerachse in die optische Achse des Fernrohrs gebracht. Auf diese Weise konnten wir die recht umständliche Einstellung mit Röntgenstrahlen durch die viel bequemere optische ersetzen. Kontrollversuche mit Röntgenstrahlen selbst erwiesen auch, daß diese Justierung auf optischem Wege völlig ausreichend war. Die Blenden B_1 bis B_3 schirmten hauptsächlich die Sekundärstrahlen der Röhrenwände ab, während die eigentliche Begrenzung für das auf den Kristall auffallende Röntgenstrahlenbündel die Blende B_4 bildete. Diese hatte gewöhnlich 0,75 mm Durchmesser, war in eine 10 mm dicke Bleischeibe gebohrt und konnte vermitteltst dreier Stellschrauben (nicht gezeichnet) so justiert werden, daß die Achse des Loches genau mit der Fernrohrachse resp. Achse des Strahlenbündels zusammenfiel. Hierdurch wurde erreicht, daß ein Strahlenbündel von kreisrundem Querschnitt auf den Kristall fiel; ferner wurde hierdurch das Maß der von der Wand jener Blende B_4 ausgehenden Sekundärstrahlen auf ein Minimum reduziert, was nötig war, um den Plattenschleier möglichst zu unterdrücken. Um diese Einstellung auch während der Aufnahme kontrollieren zu können, photographierten wir das Primärbündel, nachdem es den Schutzkasten durch ein langes Ansatzrohr R verlassen hatte, zu welchem Zwecke eine eigene Kassette am Ende dieses Rohres angebracht war (nicht mitgezeichnet). Das Rohr R diente sonst dazu, die Sekundärstrahlen, die bei dem Auftreffen der Primärstrahlen auf die hintere Kastenwand entstehen würden, möglichst zu vermeiden.

Fig. 1.



Abstand	Antikathode-Kristall	350 mm
"	Kristall- P_1 resp. P_2 resp. P_3	25 "
"	Kristall- P_4	35 "
"	Kristall- P_5	70 "

Nach diesen Justierungen, deren Güte wir vor jeder Aufnahme kontrollierten, wurde die Goniometerachse auf dem üblichen Wege senkrecht zum Strahlengang gerichtet. In gleicher Weise waren die verschiedenen Plattenhalter so justiert, daß die Primärstrahlen die aufgestellten Films resp. Platten senkrecht durchsetzten resp. parallel zu ihnen verliefen. Wenn der Apparat soweit orientiert war, wurde der zu bestrahlende Kristall, der mit einer Spur Klebwachs am Goniometertisch befestigt war, eingestellt und zwar wieder mit Hilfe des schon genannten Fernrohres in der bekannten Weise unter Benutzung eines „Signales“. Diese — wie sich später zeigen wird — sehr wesentliche Justierung konnte von uns bis auf eine Minute genau vorgenommen werden. Als Aufnahmematerial benutzten wir, nachdem wir einige andere Sorten als nicht so

geeignet befunden hatten. Schleußner-Röntgen-Films, die mit Rodinal (1:15) entwickelt die besten Resultate lieferten.

Die Überschlagsrechnungen nach den bisherigen Erfahrungen über Sekundärstrahlen zeigten, daß recht beträchtliche Expositionszeiten notwendig waren. Die Belichtungszeiten bewegten sich bei 2—10 Milli-Ampère Belastung (je nach der 6—12 Wehnelt betragenden Härte der Röhre)¹⁾ zwischen 1—20 Stunden. Als Röntgenröhren kamen teils Intensivröhren von Gundelach, teils Rapidröhren mit Wasserkühlung von Müller zur Verwendung, die von einem 50 cm Klingelfuß-Induktor betrieben wurden. Als Unterbrecher gelangten teils ein Wehnelt-, teils ein mechanischer Unterbrecher zur Verwendung. Vor die Röntgenröhre wurden passende Ventilröhren zur Vermeidung von Schließungslicht geschaltet. Es wurde mit Pausen exponiert, um die Röhre nicht allzusehr zu erhitzen. Für die bisher ausgeführten Versuche erwies sich eine Härte von 8—10 Wehnelt als geeignet.

Vorversuche mit dem provisorischen Apparat²⁾.

Da wir anfangs glaubten, es mit einer Fluoreszenzstrahlung zu tun zu haben, mußte ein Kristall verwendet werden, der Metall von beträchtlichem Atomgewicht als Bestandteil enthielt, um möglichst intensive und zugleich homogene Sekundärstrahlen zu erhalten, die für die Versuche am geeignetsten zu sein schienen. Nach Barkla kamen in erster Linie die Metalle vom Atomgewicht 50—100 in Betracht. Da wir vorderhand keinen guten Kristall, der derartige Metalle enthielt, zur Verfügung hatten, benutzten wir zu den Vorversuchen einen leidlich ausgebildeten Kupfervitriolkristall. Dieser wurde ziemlich willkürlich in den Apparat eingesetzt, und zwar fielen die

¹⁾ Zwei Härtemesser waren uns in dankenswerter Weise von der Firma Reiniger, Gebbert & Schall zur Verfügung gestellt.

²⁾ Dieser war im Prinzip wie der spätere, nur einfacher gehalten und ohne genaue Einstellungsmöglichkeit. Die Blendöffnungen betragen hierbei 3 mm.

Röntgenstrahlen ungefähr senkrecht auf eine Pinakoidfläche 3. Art (110) auf. Im Abstand von 40 mm von ihm waren zwei photographische Platten — entsprechend P_2 und P_4 in Fig. 1 — aufgestellt. Nach der Exposition war die obere Platte schwach, aber gleichmäßig geschwärzt, P_4 wies außer dem Durchstoßungspunkt der Primärstrahlen eine Reihe von auscheinend geordneten Flecken auf (siehe Tafel I, Fig. 1).

Um sicher zu sein, daß diese Flecken durch die Kristallstruktur des Kupfervitriols bedingt waren, wurden Kupfervitriolkristalle grob pulverisiert, in ein kleines Papierschächtelchen eingeschlossen und der vorhergehende Versuch bei sonst gleichen Bedingungen wiederholt. Die Platte P_2 zeigte keine Änderung, dagegen waren die großen geordneten Flecken auf P_4 verschwunden; statt dessen erschien der Durchstoßungsfleck mit einem Saum von vielen kleinen, unregelmäßig angeordneten Pünktchen umgeben (siehe Tafel I, Fig. 2). Die Vermutung, daß bei ganz fein pulverisiertem Material der Rest der Flecken verschwinden würde, fand seine Bestätigung durch den nächsten Versuch. Ein weiterer Versuch mit herausgenommenem Kristall bei sonst identischen Bedingungen zeigte, wie wohl zu erwarten war, daß die Platten bis auf den Durchstoßungspunkt der Primärstrahlen ungeschwärzt blieben.

Es folgten noch zwei Aufnahmen mit dem zuerst genannten Kupfervitriolkristall. Bei der einen wurde bei gleicher Orientierung der Kristall parallel zu sich verschoben, so daß eine andere Stelle des Kristalles durchstrahlt wurde; bei der zweiten der Kristall um einige Grade gegen die Röhre geneigt. Jene Aufnahme ist identisch mit Fig. 1, Tafel I, die Erscheinung ist unabhängig vom Ort der Durchstrahlung. Die andere Aufnahme zeigt, daß die Lage der sekundären Flecken von der Orientierung des Kristalles gegen die Einfallrichtung der Primärstrahlen abhängig ist.

Da die eben beschriebenen Versuche erwiesen hatten, daß die obigen Überlegungen experimentell verifizierbar sind, ließen wir den vorhin beschriebenen besseren Apparat bauen, stellten aber inzwischen weitere Versuche mit Zinkblende, Steinsalz

und Bleiglanz (Spaltstücke) an. Diese ergaben ganz ähnliche Resultate wie bei Kupfervitriol. Wir werden jedoch von einer Beschreibung derselben Abstand nehmen, weil, wie sich zeigen wird, eine genaue Orientierung der Kristalle notwendig war, um einen tieferen Einblick in die Erscheinungen zu gewinnen.

Versuche mit genauer Orientierung des Kristalles zur Richtung der Primärstrahlen.

Mit dem definitiven Apparat wurde zunächst die auf Fig. 1, Tafel I abgebildete Aufnahme wiederholt, und zwar wurden sämtliche in Fig. 1 angegebenen Platten aufgestellt¹⁾. Die Orientierung des Kupfervitrioles war möglichst dieselbe wie vorher. P_2 und P_3 zeigten gleichmäßige Schwärzung; P_1 wies bloß den Durchstoßungspunkt der Primärstrahlen auf. Auf P_4 und P_5 war eine ähnliche Figur wie bei Aufnahme 1 zu sehen; indessen waren jetzt entsprechend der kleineren Blendenöffnung die sekundären Flecken zusammengeschrumpft (siehe Tafel I, Fig. 3 und 4). Bemerkenswert ist, daß sich die Abstände (Kristall — P_4) zu (Kristall — P_5) verhalten wie die Größe der Figuren auf P_4 resp. P_5 , wodurch erwiesen wurde, daß die Strahlung gradlinig vom Kristall ausgeht. Ferner ist zu beachten, daß die Größe der einzelnen Sekundärflecken trotz des größeren Abstandes der Platte P_5 vom Kristall dieselbe geblieben ist. Dies dürfte wohl ein Anzeichen dafür sein, daß die je einen Einzelfleck hervorrufenden Sekundärstrahlen als paralleles Bündel aus dem Kristall heraustreten.

Es ist zu erwarten, daß die Erscheinung bei Kristallen des regulären Systemes übersichtlicher und leichter verständlich wird wie bei dem triklinen Kupfervitriol, weil man wohl annehmen darf, daß das zugehörige Raumbgitter von der größtmöglichen Einfachheit ist. Als geeignet erschien uns die reguläre Zinkblende, mit der wir, wie schon erwähnt, Vorversuche gemacht und beträchtliche Intensität der Sekundärstrahlen erhalten hatten. Wir ließen von Steeg & Reuter in

¹⁾ Blendenöffnung B_4 bei diesem Versuch 1,5 mm.

Homburg eine planparallele Platte aus einem guten Kristall parallel zu einer Würfelfläche (100) (senkrecht zu einer kristallographischen Hauptachse) schleifen von 10×10 mm Größe und 0,5 mm Dicke. Diese Platte wurde in der oben beschriebenen Weise genau orientiert, so daß die Primärstrahlen den Kristall senkrecht zur Würfelfläche durchsetzten. Das Resultat eines solchen Versuches zeigt uns Fig. 5¹⁾, Taf. II. Die Lage der sekundären Flecke ist völlig symmetrisch geworden in Bezug auf den Durchstoßungspunkt. Man kann in die Figur zwei Paare zueinander senkrecht stehende Symmetrieebenen einzeichnen. Nimmt man irgendeinen der Flecken aus der Figur heraus und liegt dieser nicht auf einer der Symmetrieebene, so kann man ihn durch Spiegelung und Drehung um 90° mit noch 7 zugehörigen Punkten zur Deckung bringen. Fällt ein Fleck mit einer Symmetrieebene zusammen, so kann man diesen naturgemäß nur mit noch 3 entsprechenden zur Deckung bringen. Dies entspricht der holoedrischen Symmetrie des regulären Systems, trotzdem die Zinkblende in eine hemiedrische Klasse gehört. Diese Tatsache, daß eine völlige Vierzähligkeit auf der Platte vorhanden ist, ist wohl einer der schönsten Beweise für das Raumgitter der Kristalle, und daß keine andere Eigenschaft als allein das Raumgitter hier in Betracht kommt. Denn die Raumgitter zeigen stets die holoedrische Symmetrie; Translationen von Raumgittern verschiedener Natur gegen einander, wie sie zur Erklärung der Hemiedrien angenommen werden müssen, sind nach den Versuchen und unserer Theorie ohne Einfluß. Diese Anforderung der Symmetrie fand auch weiterhin ausnahmslos Bestätigung durch die Versuche. Einmal ließen wir die Primärstrahlen senkrecht auf eine Oktaederfläche (111), dann auf eine Rhombendodekaederfläche (110) auffallen. Fig. 7, Tafel III gibt die Dreizähligkeit wieder entsprechend der dreizähligen Achse, in der der Kristall bestrahlt

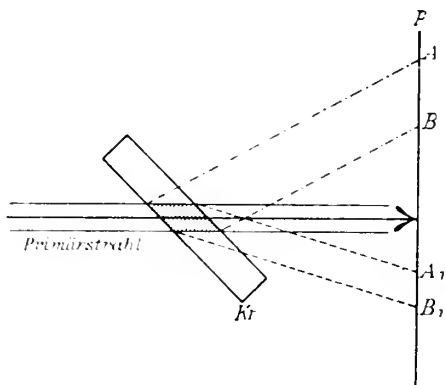
¹⁾ Die Aufnahme 9 Tafel IV wurde gemacht mit einem provisorisch aufgestellten Film in 10 mm Abstand vom Kristall. Bei Fig. 10, Tafel IV war der Film in doppeltem Abstand vom Kristall aufgestellt wie bei Fig. 5, Tafel II.

wurde: Fig. 12, Tafel V analog Zweizähligkeit, entsprechend der zweizähligen Achse. Über das Zustandekommen der letzteren vergleiche weiter unten.

Drehen wir den Kristall um den primären Strahl, so muß man aus dem Vorhergehenden schließen, daß sich das Bild auf der Platte mitdreht. In der Tat zeigten Versuche in dieser Richtung vollauf die Stichhaltigkeit dieses Schlusses.

Es war noch zu zeigen, eine wie genaue Orientierung des Kristalles erforderlich ist, um bei Wiederholung eines Versuches identische Bilder zu erhalten. Wir ließen den primären Strahl um 3° gegen eine vierzählige Achse geneigt, doch so, daß die Ebene durch Strahl und Achse eine Symmetrieebene war, durch den Kristall gehen. Das Resultat dieses Versuches gibt Fig. 11, Tafel V. Wie wir sehen, ist die Vierzähligkeit verschwunden, wenngleich man noch die Mehrzahl der Flecken in Fig. 5, Tafel II wiedererkennen kann. Die eine Symmetrieebene zeigt sich auch hier. Ebenso ist Fig. 8, Tafel III durch Neigung des Kristalles um 3° aus Fig. 7, Tafel III entstanden.

Fig. 2.



Drehen wir die senkrecht zur vierzähligen Achse geschliffene Platte so, daß der primäre Strahl sie parallel zu einer dreizähligen Achse durchsetzt, so ergab sich eine Figur,

die sich von Fig. 7, Tafel III nicht in der Lage der Flecke, sondern allein durch deren Größe unterschied. Auch nach der Symmetrie gleichberechtigte Flecken zeigten jetzt Größen unterschiede. Es beweist dies, daß die Begrenzung des durchstrahlten Kristallstückes ohne Einfluß auf die Lage der Intensitätsmaxima ist, während die Unterschiede in der Fleckengröße den Unterschieden der verschiedenen gerichteten Projektionen des durchsetzten Kristallstückes auf die photographische Platte entsprechen (siehe Fig. 2). Das schraffierte Gebiet stellt den durchleuchteten Teil des Kristalles Kr dar. AB und A_1B_1 sind die Projektionen dieses Teiles auf die Platte P und geben die Größe der Flecken an. Drehten wir dieselbe Kristallplatte so, daß der primäre Strahl sie jetzt in der Richtung einer zwei-zähligen Symmetrieachse durchsetzte, so entstand die Fig. 12, Tafel V, die sich nur die ungleiche Größe entsprechender Flecke von einer Aufnahme unterschied, die wir mit einem zur zwei-zähligen Achse senkrechten Spaltstück gemacht hatten.

Außer den eben beschriebenen Versuchen haben wir weitere mit Zinkblende, Kupferkristall, Steinsalz und einer Diamantplatte angestellt. (Die Diamantplatte ist ein höchst dankenswertes Geschenk der Firma Ginsberg in Hanau an das physikalische Institut der Universität.) Wir sehen jedoch von der Mitteilung der Photogramme ab, weil die Versuche noch nicht abgeschlossen sind, hoffen aber in Kürze darüber berichten zu können. Wir wollen indessen noch auf zwei Versuchsergebnisse aus dieser Serie hinweisen, die uns von Bedeutung erscheinen.

Erstens haben wir beim Steinsalz gefunden, daß die Intensität der sekundären Flecke von der Dicke der durchstrahlten Schicht abhängt; denn bei gleicher Expositionszeit, gleicher Härte der Röhre und sonst gleichen Bedingungen war die Schwärzung bei 15 mm durchstrahlter Schicht des Kristalles wesentlich größer als bei einer 10 mal dünneren Schicht. Wir wollen diese Versuche mit anderem Material weiter fortführen.

Zweitens wollen wir einem Versuch mit dem Diamanten ein paar Zeilen widmen. Kohlenstoff zeigt nach Barkla keinerlei bisher nachgewiesene Eigenstrahlung. Es war also zu er-

warten, daß selbst bei erheblichen Expositionen die Platten außer der durch die zerstreute Strahlung hervorgerufenen allgemeinen Schwärzung keine Flecken wie bei den anderen Kristallen zeigten, wenn diese auf Eigenstrahlung des Kristalles beruhten. Entgegen dieser Vermutung wiesen nicht nur die hinteren Platten P_4 und P_5 ähnliche Erscheinungen wie bei den früheren Aufnahmen auf, sondern sogar die Platten P_1 , P_2 und P_3 ließen deutliche Flecken erkennen¹⁾. Ob diese auffallende Tatsache zusammenhängt mit dem kleinen Atomvolumen im Vergleich zu dem der übrigen Kristalle oder mit dem anomalen Verhalten des Diamanten gegenüber den Wärmeschwingungen, welches sich an der spezifischen Wärme zeigt, wollen wir vorläufig dahingestellt sein lassen²⁾. Entscheidende Versuche hierüber sind ebenfalls in Vorbereitung.

Neben diesen bis jetzt beschriebenen Untersuchungen, die den Zusammenhang der Lage der Sekundärflecken und der Gitterstruktur erforschen sollen, haben wir den Charakter der die Flecken hervorbringenden Strahlen untersucht. Daß wir es in der Tat mit sekundären Röntgenstrahlen zu tun haben, macht der Umstand wahrscheinlich, daß die Strahlen durch beträchtliche Schichten von Metallen hindurchgehen, z. B. durch die Plattenhalter aus Stahlblech. Vorläufige Härtemessungen wurden mit dem Zinkblendekristall, der senkrecht zur vierzähligen Achse geschliffen war, auf folgende Weise angestellt. Da wir das Schwärzungsgesetz der Röntgenstrahlen nicht kennen, ist die Intensität der Strahlen proportional der durch sie hervorgerufenen Schwärzung gesetzt und diese mit einem Hartmannschen Mikrophotometer ausgemessen. Die Kristallsymmetrie bedingt, daß je acht einem Kreise zugeordneten Flecke dieselbe Schwärzung haben, was in der Tat der Fall ist. Wir brachten nun vor die Platte P_5 ein Aluminiumblech von 3 mm Dicke an, welches zwei gegen-

1) Auch bei tagelanger Exposition haben wir bei anderen Kristallen niemals auf den Platten P_1 , P_2 und P_3 etwas anderes als allgemeine Schwärzung erhalten.

2) Vgl. theor. Teil.

überliegende Viertel der Platte bedeckte, die anderen beiden freiließ. Das Primärbündel ging, um Sekundärstrahlen des Aluminiumblechs zu vermeiden, durch eine zentrale Öffnung hindurch. Die Schwärzungsmessungen, die in folgender Tabelle zusammengestellt sind, zeigen, daß der Absorptionskoeffizient der Strahlen ungefähr $3,84 \text{ cm}^{-1}$ für Aluminium ist. In Kolonne 1 stehen die Durchmesser der Kreise, auf dem die zueinander gehörenden Flecken liegen. In der zweiten die Schwärzung der Flecken ohne Aluminiumblech, während in der dritten Kolonne die Schwärzung nach dem Durchgang der Strahlen durch das Aluminiumblech verzeichnet ist. In der vorletzten Spalte sind die Werte der Schleierschwärzung der Platten eingetragen, während in die letzte die nach dem bekannten Absorptionsgesetz berechneten Absorptionskoeffizienten k für Al stehen. Das Absorptionsgesetz ist als exponentiell angenommen. Eine nach derselben Methode ausgeführte Härtemessung beim Diamanten ergab eine Härte der sekundären Strahlen von ungefähr derselben Größe. Die Härtemessungen nach der photographischen Methode sind jedoch nicht genau genug, um sichere Schlüsse hierüber ziehen zu lassen, da der gefundene Härteunterschied außerhalb der Meßgenauigkeit liegt. Mit einer elektrischen Methode, die wohl von den Zufälligkeiten der photographischen Methode, besonders den Plattenfehlern, verschieden harte Entwicklung etc. frei ist, werden diese Versuche wieder aufgenommen und es wird dann darüber berichtet werden.

ϕ	ohne Al	mit Al	Schleier	k
50 mm	1,78	0,88	0,45	$3,53 \text{ cm}^{-1}$
57,5 mm	2,02	0,79	0,45	$4,71 \text{ cm}^{-1}$
74 mm	0,69	0,53	0,45	$3,23 \text{ cm}^{-1}$
86 mm	0,84	0,55	0,45	$3,89 \text{ cm}^{-1}$

Barkla findet für die Durchdringungsfähigkeit der Eigenstrahlung des Zinks einen wesentlich kleineren (für k also einen wesentlich größeren) Wert. Den Schluß nun daraus zu ziehen, daß wir es hier überhaupt nicht mit einer Eigenstrahlung zu tun haben, halten wir jedoch vorderhand nicht für unbedingt notwendig. Die folgende Tatsache spricht eher für eine Fluoreszenzstrahlung, die aber möglicherweise schon in der Primärstrahlung enthalten ist; die gleiche Härte der Strahlen beim Zinksulfid und Diamant läßt dies letztere vermuten. Während der Expositionszeit schwankte nämlich die Härte der Primärstrahlen besonders bei älteren Röhren, die ziemlich aufgebraucht waren und daher oft regeneriert werden mußten, in beträchtlicher Weise (von 6—12 Wehnelt). Dennoch blieben, wie die Photogramme zeigten, die sekundären Flecken scharf begrenzt und unverrückt. Eine Vergleichung der Härte der auf verschiedenen Ringen liegenden Strahlen untereinander läßt vermuten, daß diese von verschiedenem Durchdringungsvermögen sind. Es wäre dies freilich auch dann nicht auffallend, wenn es sich um Eigenstrahlung des Kristalles handeln sollte: denn da ja der Kristall aus Zink- und aus Schwefelatomen aufgebaut ist, so können sowohl die Zinkatome wie die Schwefelatome Strahlungen aussenden, die nach den sonstigen Erfahrungen von verschiedener Härte sind. Stammt die Eigenstrahlung aus der Antikathode selbst, so sind nach Barkla bei Platin tatsächlich mehrere Strahlungen zu erwarten.

Zum Schluß wollen wir besonders Herrn Prof. A. Sommerfeld, in dessen Institut diese Arbeit ausgeführt ist, für die bereitwillige Beschaffung der Apparate sowie sein stetiges Interesse und seine fördernden Ratschläge unseren herzlichsten Dank aussprechen. Wir möchten bei dieser Gelegenheit auch nicht versäumen, Herrn Geheimrat Röntgen und Herrn Geheimrat v. Groth für Überlassung von wertvollen Kristallen und Apparaten, sowie ihr reges Interesse ebenfalls verbindlich zu danken.

München, Institut für theor. Physik der Universität.

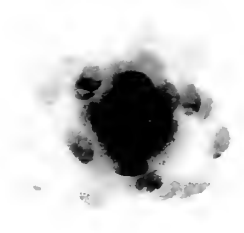


Fig. 1



Fig. 2



Fig. 3

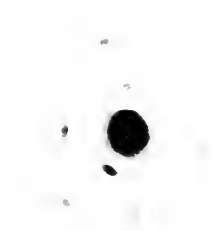


Fig. 4

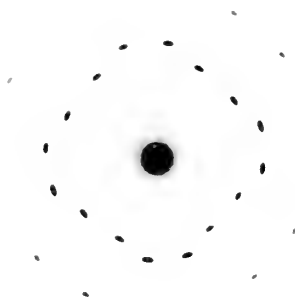


Fig. 5

- $\circ \lambda_{\alpha} = 0,0377$
 $\odot \lambda_{\alpha} = 0,0563$
 $\times \lambda_{\alpha} = 0,0663$
 $\bullet \lambda_{\alpha} = 0,1051$
 $+ \lambda_{\alpha} = 0,143$

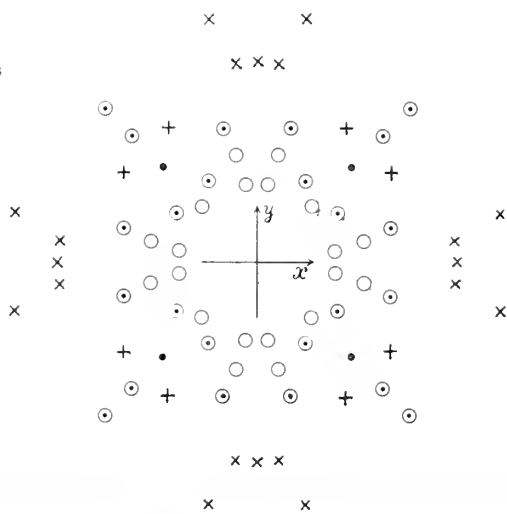


Fig. 6



Fig. 7



Fig. 8

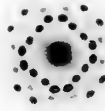


Fig. 9



Fig. 10



Fig. 11

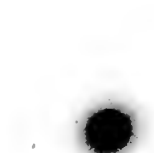


Fig. 12



Über gewisse unendliche Kettenbruch-Determinanten und Kettenbrüche mit komplexen Elementen.

Von **Otto Szász.**

Vorgelegt von A. Pringsheim in der Sitzung am 8. Juni 1912.

Die Konvergenz- und Divergenztheorie der unendlichen Kettenbrüche ist noch ziemlich lückenhaft; nur dann, wenn wir die Elemente eines Kettenbruches sehr einschränkenden Bedingungen unterwerfen, können wir bestimmte Aussagen über seine Konvergenz bzw. Divergenz machen. Der Grund dieser Tatsache liegt darin, daß der Kettenbruch eine sehr komplizierte Funktion seiner Elemente ist. Zumal über Kettenbrüche, deren Elemente nicht auf das reelle Gebiet beschränkt sind, gibt es erst seit neuerer Zeit einige eingehendere Untersuchungen¹⁾.

Im folgenden wird der Versuch gemacht zur Vervollständigung dieser Theorie einen Beitrag zu liefern. Das Hauptresultat besteht in einigen Konvergenzkriterien, die — meines Wissens — bis jetzt ganz unbekannt geblieben sind. Im Grunde sind dies Kriterien für das Nichtverschwinden gewisser unendlicher Determinanten²⁾. Genauer gesagt, gebe ich für Determinanten, die von einer komplexen Veränderlichen z ab-

¹⁾ Vgl. insbesondere die grundlegenden Arbeiten des Herrn Pringsheim. Diese Sitzungsberichte, Bd. 28 (1898), 30 (1900), 35 (1905), 40 (1910), 41 (1911); dort finden sich auch weitere Literaturnachweise.

²⁾ Ich hatte schon in meiner Inauguraldissertation (*A végtelen determinánsok elméletéhez*, Budapest 1911, p. 4 [ungarisch]) eine Anwendung der unendlichen Determinanten auf die Theorie der Kettenbrüche versprochen; in dieser Note führe ich dies aus.

hängen, Gebiete der z -Ebene an, in denen keine Nullstelle der Determinante liegt. Dabei treten zwei der Sätze in Beziehung zu zwei Ungleichungen von Herrn J. Schur, die sich auf die charakteristischen Wurzeln linearer Substitutionen beziehen¹⁾.

In § 1 diskutiere ich ein zuerst von Herrn Helge von Koch gegebenes²⁾ und von Herrn Alfred Pringsheim erweitertes³⁾ Konvergenzkriterium. In § 2 leite ich drei Hilfsätze in Form von Ungleichungen ab, die auch an sich von Interesse sind und die uns zu neuen Konvergenzkriterien führen. Zunächst leite ich mit Hilfe dieser Ungleichungen drei Paare von Sätzen über das Nichtverschwinden einer Determinante $A(x)$ ab (Sätze α_1 bis γ_2 in § 3). Diese Sätze kann man auch als Konvergenzkriterien für den Kettenbruch $\left[\frac{a_r z^2}{1} \right]_1^\infty$ aussprechen (Sätze A_1 bis I_2). Aus Satz A_1 folgt durch eine geeignete Umformung ein allgemeiner Konvergenzsatz für den Kettenbruch $\left[\frac{c_r}{1} \right]_1^\infty$, welcher den von Koch-Pringsheim'schen Satz als speziellen Fall enthält (Satz 1, § 4). Auf analogem Wege gelangt man zu den Sätzen 2_1 und 2_2 (§ 5), welche unendlich viele Parameter enthalten (ähnlich wie ein Pringsheim'scher Satz) und aus welchen durch Spezialisierung nochmals Satz 1 abgeleitet wird. Ebenso gewinnt man aus I_1 und I_2 die Sätze 3_1 und 3_2 (§ 6). Schließlich ergeben die Sätze 1 bis 3_2 , angewandt auf den Kettenbruch $\left[\frac{a_r z^2}{1} \right]_1^\infty$, Verallgemeinerungen der Sätze A_1 bis I_2 , was teilweise nur angedeutet wird (§ 7). Anwendungen (auf Zylinderfunktionen, die ich als unendliche Kettenbruchdeterminanten darstelle) und Erweiterungen dieser Untersuchung möchte ich in anderen Arbeiten veröffentlichen.

¹⁾ Vgl. Fußnote S. 336.

²⁾ Bull. Soc. math. de France, t. 23 (1895), p. 37.

³⁾ Diese Berichte, Bd. 35 (1905), p. 395 ff.

§ 1.

Der von Koch-Pringsheimsche Satz.

Gegeben sei allgemein der Kettenbruch

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} + \cdots = \left[\frac{a_r}{b_r} \right]_1, \quad (1)$$

wo die a_r, b_r beliebige, von Null verschiedene (reelle oder komplexe) Zahlen bedeuten; setzen wir

$$\frac{a_1}{b_1} = c_1, \quad \frac{a_2}{b_1 b_2} = c_2, \quad \dots, \quad \frac{a_r}{b_{r-1} b_r} = c_r, \quad \dots$$

so ist der Kettenbruch (1) dem folgenden äquivalent:

$$\frac{c_1}{1} + \frac{c_2}{1} + \frac{c_3}{1} + \cdots = \left[\frac{c_r}{1} \right]_1; \quad (2)$$

es ist also keine Einschränkung der Allgemeinheit, wenn wir bloß Kettenbrüche dieser Form betrachten.

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns ausschließlich mit solchen Kettenbrüchen, bei denen die Reihe

$$c_1 + c_2 + c_3 + \cdots = \sum_1^{\infty} c_r$$

absolut konvergiert.

Sei daher

$$|c_2| + |c_3| + |c_4| + \cdots = \sum_2^{\infty} |c_r| = s;$$

bereits Herr von Koch hat bewiesen, daß der Kettenbruch (2) konvergiert, falls $s < 1$; Herr Pringsheim hat dieses Kriterium auf elementarem Wege abgeleitet und auch auf den Fall $s = 1$ erweitert.

Es liegt nun die Frage nahe, ob der Kettenbruch (2) nicht auch für andere Werte von s notwendig konvergiert. Um dies zu untersuchen, teilen wir alle möglichen Werte von s in drei Klassen ein, je nachdem die zugehörigen Kettenbrüche (wir sagen kurz der Kettenbruch (2) gehöre zur Zahl s) bzw. folgende Eigenschaften besitzen:

1. alle Kettenbrüche, die zur Zahl s gehören, konvergieren;
2. es gibt unter diesen Kettenbrüchen sowohl konvergente wie auch divergente;
3. alle diese Kettenbrüche divergieren.

Eine vierte Klasse gibt es nicht.

Zunächst ist klar, daß in die Klasse 3 keine einzige Zahl gehört: denn wenn alle c_r reelle positive Zahlen sind, so konvergiert der Kettenbruch für jeden Wert von s . Ferner gehören gemäß dem von Herrn Pringsheim erweiterten von Kochschen Satze alle $s \leq 1$ in die Klasse 1. Ich zeige, daß alle übrigen s in die Klasse 2 gehören, d. h. daß es zu jedem $s > 1$ mindestens einen divergenten Kettenbruch gibt. Dessen Divergenz ist dann offenbar außerwesentlich. (Bezüglich dieser Ausdrucksweise vgl. Pringsheim, diese Berichte, Bd. 40, 6. Abh., p. 19–20.)

Aus der bekannten Eulerschen Formel (s. Enz. der Math., Bd. I, p. 134, Formel (104)) ergibt sich für $p_r = 1$ ($r \geq 1$), $x = 1$:

$$\sum_1^x \frac{(-1)^{r-1}}{q_1 q_2 \dots q_r y^r} = \frac{1}{q_1 y} + \frac{q_1 y}{q_2 y - 1} + \dots + \frac{q_{r-1} y}{q_r y - 1} + \dots;$$

dabei besteht zwischen der Reihe und dem Kettenbruch Äquivalenz, so daß beide nur gleichzeitig konvergieren oder divergieren können. Anders geschrieben wird dies:

$$\begin{aligned} \sum_1^x \frac{(-1)^{r-1} y^{-r}}{q_1 q_2 \dots q_r} &= \frac{1}{q_1 y} + \frac{1}{q_2 y - 1} + \frac{q_2 y}{(q_2 y - 1)(q_3 y - 1)} + \dots \\ &+ \frac{q_{r-1} y}{(q_{r-1} y - 1)(q_r y - 1)} + \dots \end{aligned}$$

und wenn man $-x$ statt y einsetzt, schließlich:

$$\begin{aligned} \sum_1^x \frac{x^{-r}}{q_1 q_2 \dots q_r} &= \frac{1}{q_1 x} - \frac{1}{q_2 x + 1} - \frac{q_2 x}{(q_2 x + 1)(q_3 x + 1)} - \dots \\ &- \frac{q_{r-1} x}{(q_{r-1} x + 1)(q_r x + 1)} - \dots \end{aligned}$$

Ist nun $\sum^r q_v$ konvergent, so divergiert die Potenzreihe, also auch der Kettenbruch für jeden Wert von x ; ist dann noch $q_v > 0$ und $x > 0$, so wird

$$s(x) = \frac{1}{q_2 x + 1} + \sum_3^\infty \frac{q_{v-1} x}{(q_{v-1} x + 1)(q_v x + 1)}$$

und bei passender Wahl des x und der q_v nimmt $s(x)$ jeden beliebigen, zwischen 1 und $+\infty$ liegenden Wert an. $s(x)$ ist nämlich eine stetige Funktion von x in jedem endlichen, auf der reellen positiven Halbachse liegenden Intervall; ferner ist $s(0) = 1$ und

$$s(1) = \frac{1}{q_2 + 1} + \sum_3^x \frac{q_{v-1}}{(q_{v-1} + 1)(q_v + 1)};$$

dieser Ausdruck wird aber bei entsprechender Wahl der q_v größer als irgend eine vorgegebene Zahl, da für $q_2 = 1, q_3 = 1, \dots, q_n = 1$

$$s(1) > \frac{n}{4}$$

wird.

Somit ist unsere Behauptung bewiesen.

Man kann auch allgemeinere Betrachtungen anstellen. Wenn wir die unendliche Menge aller Kettenbrüche betrachten, die zu einer Zahl $s (s \leq 1)$ gehören, d. h. alle Kettenbrüche $\left[\frac{a_v}{1} \right]_1^\infty$, für die $\sum_2^\infty |a_v|$ einen vorgegebenen Wert s hat ($s \leq 1$), so sind ja alle Kettenbrüche konvergent; es läßt sich aber noch mehr zeigen; ist die gegebene Zahl s kleiner als 1, so besitzt die Menge eine endliche obere und untere Schranke; aber für $s = 1$ ist dies nicht der Fall. Auch auf diesem Wege können wir zu unserem Satze gelangen.

Es ist also ersichtlich, daß durch bloße Betrachtung der Summe s der von Koch-Pringsheimsche Satz nicht verallgemeinert werden kann; in der im § 4 gegebenen Verallgemeinerung dieses Satzes spielen neben der Summe s noch die

Summen $\sum_2^{\infty} R(c_r)$, $\sum_2^{\infty} J(c_r)$ eine Rolle, wobei $R(c_r)$ den reellen Teil der Zahl c_r , $J(c_r)$ ihren von der imaginären Einheit befreiten imaginären Teil bedeutet.

§ 2.

Drei Hilfssätze.

Hilfssatz I. Es gilt für nichtnegative d_r und x_r und für jedes positive ganze n die Ungleichung

$$2 \sum_1^n d_r x_r x_{r+1} < \left(\sum_1^n d_r^2 \right)^{\frac{1}{2}} \sum_1^{n+1} x_r^2$$

und damit Gleichheit gelte, ist notwendig, daß $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, $x_6 = 0$, . . . , $x_{n+1} = 0$ sei, vorausgesetzt, daß $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$ und $\sum_1^n d_r^2 \neq 0$ ist.

Beweis. Ich beziehe mich auf die Ungleichung

$$\sum_1^n a_r b_r < \left(\sum_1^n a_r^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_1^n b_r^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

die leicht aus einer von Lagrange benützten Identität folgt und schon von Cauchy¹⁾ bewiesen wurde. Aus dieser Ungleichung wird für $a_r = d_r$, $b_r = x_r x_{r+1}$:

$$2 \sum_1^n d_r x_r x_{r+1} < 2 \left(\sum_1^n d_r^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_1^n x_r^2 x_{r+1}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

und es ist nur noch zu beweisen, daß

$$\left(\sum_1^{n+1} x_r^2 \right)^2 > 4 \sum_1^n x_r^2 x_{r+1}^2.$$

Dazu beweisen wir, daß

$$\left(\sum_1^{n+1} x_r^2 \right)^2 - 4 \sum_1^n x_r^2 x_{r+1}^2 > (x_1^2 - x_2^2 + \dots + (-1)^n x_{n+1}^2)^2;$$

¹⁾ Cours d'analyse de l'École royale polytechnique (Paris 1821), Note II, 16^e théorème, p. 455—456.

dies heißt nämlich:

$$\sum_1^{n+1} x_r^4 - 2 \sum_1^n x_r^2 x_{r+1}^2 + 2 \sum_{\mu > r \geq 2} x_r^2 x_\mu^2 > \sum_1^{n+1} x_r^4 - 2 \sum_{r, \mu} x_{2r-1}^2 x_{2\mu}^2 + 2 \sum_{\mu > r} x_{2r}^2 x_{2\mu}^2 + 2 \sum_{\mu > r} x_{2r-1}^2 x_{2\mu-1}^2$$

oder

$$\sum_{\mu > r \geq 2} x_r^2 x_\mu^2 + \sum_{r, \mu} x_{2r-1}^2 x_{2\mu}^2 > \sum_{\mu > r} x_{2r}^2 x_{2\mu}^2 + \sum_{\mu > r} x_{2r-1}^2 x_{2\mu-1}^2 + \sum_1^n x_r^2 x_{r+1}^2,$$

eine Relation, deren Richtigkeit unmittelbar ersichtlich ist. Dieselbe zeigt auch, daß für das Bestehen der Gleichheit die Beziehungen

$$x_4 = 0, x_5 = 0, x_6 = 0, \dots x_{n+1} = 0$$

notwendig sind, da auf der linken Seite die Glieder vorkommen:

$$x_1^2(x_4^2 + x_6^2 + \dots) + x_2^2(x_5^2 + x_7^2 + \dots),$$

die auf der rechten Seite überhaupt nicht auftreten, und laut Voraussetzung $x_1 \neq 0$ und $x_2 \neq 0$ sind, woraus unsere Behauptung erhellt.

Man kann den Hilfssatz I auch durch Bestimmung eines relativen Extremums leicht ableiten.

Hilfssatz II. Liegen die $\delta_r (r \geq 1)$ im Intervalle 0 bis 1 (die Grenzen inbegriffen), so gilt die Ungleichung

$$\sum_1^{n+1} x_r^2 > 2 \sum_1^n (1 - \delta_r)^{\frac{1}{2}} \delta_{r+1}^{\frac{1}{2}} x_r x_{r+1}$$

für jedes positive ganze n und für beliebige nicht-negative x_r ; es gilt sicher die Ungleichheit, wenn entweder

1. $\delta_1 x_1 \neq 0$ ist, oder wenn
2. wenigstens für einen Wert von r , $r = \alpha$, $\delta_\alpha = 1$ und $\delta_{\alpha+1} x_{\alpha+1} \neq 0$ ist.

Beweis. Offenbar ist

$$[(1 - \delta_r)^{\frac{1}{2}} x_r - \delta_{r+1}^{\frac{1}{2}} x_{r+1}]^2 \geq 0 \quad (r > 1)$$

oder durch Auswertung des Quadrates

$$(1 - \delta_r) x_r^2 + \delta_{r+1} x_{r+1}^2 - 2(1 - \delta_r)^{\frac{1}{2}} \delta_{r+1}^{\frac{1}{2}} x_r x_{r+1} \geq 0$$

und es gilt hier sicher die Ungleichheit für

$$\delta_r = 1, \quad \delta_{r+1} x_{r+1} \neq 0.$$

Durch Summierung über $r = 1, 2, \dots, n$ wird jetzt:

$$(1 - \delta_1) x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 + \delta_{n+1} x_{n+1}^2 - 2 \sum_{r=1}^n (1 - \delta_r)^{\frac{1}{2}} \delta_{r+1}^{\frac{1}{2}} x_r x_{r+1} > 0,$$

woraus unser Satz unmittelbar folgt.

Es wäre interessant zu entscheiden, ob folgende Umkehrung dieses Satzes gilt:

Ist für beliebige nichtnegative x_r

$$\sum_{r=1}^{n+1} x_r^2 \geq 2 \sum_{r=1}^n d_r x_r x_{r+1},$$

so kann man die d_r so bestimmen, daß

$$d_r^2 \leq (1 - \delta_r) \delta_{r+1} \quad (r = 1, 2, \dots, n).$$

Hilfsatz III. Es gilt für nichtnegative d_r und x_r und für jedes positive ganze n die Ungleichung

$$2 \sum_{r=1}^n d_r x_r x_{r+1} < d_1 x_1^2 + \sum_{r=1}^n (d_r + d_{r+1}) x_{r+1}^2.$$

Beweis. Es ist

$$2 d_r x_r x_{r+1} < d_r (x_r^2 + x_{r+1}^2) \quad (r > 1)$$

durch Summierung über $r = 1, 2, \dots, n$

$$2 \sum_{r=1}^n d_r x_r x_{r+1} < \sum_{r=1}^n d_r x_r^2 + \sum_{r=1}^n d_r x_{r+1}^2$$

oder

$$2 \sum_1^n d_r x_r x_{r+1} \leq d_1 x_1^2 + \sum_1^n d_{r+1} x_{r+1}^2 + \sum_1^n d_r x_{r+1}^2,$$

womit unser Satz bewiesen ist.

Bei entsprechenden Konvergenzbedingungen bleiben diese Sätze natürlich auch für $n = \infty$ gültig.

§ 3.

Über die Nullstellen gewisser Kettenbruchdeterminanten.

Wir setzen stets voraus, daß $\sum_1^\infty c_r$ konvergiert; es ist dann

$$\begin{bmatrix} c_r \\ 1 \end{bmatrix}_1^\infty = c_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 & \dots \\ -c_3 & 1 & 1 & \dots & -c_2 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & -c_4 & 1 & \dots & 0 & -c_3 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

oder kurz

$$\begin{bmatrix} c_r \\ 1 \end{bmatrix}_1^\infty = c_1 \frac{D_2}{D_1}$$

und die unendlichen Determinanten D_1, D_2 sind absolut konvergent¹⁾. Die beiden Determinanten können nicht gleichzeitig verschwinden. Um dies zu beweisen, setzen wir allgemein:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots \\ -c_{n+1} & 1 & 1 & \dots \\ 0 & -c_{n+2} & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Durch Entwicklung dieser Determinante nach den Elementen der ersten Kolonne wird

$$D_n = D_{n+1} + c_{n+1} D_{n+2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots);$$

¹⁾ Helge von Koch, Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences. Paris 1895, t. 120, p. 144—147.

wäre also $D_1 = 0$ und $D_2 = 0$, so müßte auch D_n für jeden Wert von n verschwinden; dies führt aber zu einem Widerspruch, denn es ist bekanntlich¹⁾

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_n = 1.$$

Also ist für $D_1 \neq 0$ der Kettenbruch (2) konvergent, für $D_1 = 0$ außerwesentlich divergent.

Wir suchen nun Bedingungen dafür, daß D_1 von Null verschieden sei. Zu diesem Ende wollen wir eine allgemeinere Untersuchung für gewisse Kettenbruchdeterminanten, die von einer komplexen Veränderlichen z abhängen, durchführen.

Gegeben sei die Kettenbruchdeterminante:

$$\Delta(z) = \begin{vmatrix} 1 & z & 0 & \dots \\ -a_2 z & 1 & z & \dots \\ 0 & -a_3 z & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix},$$

wofür wir auch schreiben können:

$$\Delta(z) = \begin{vmatrix} 1 & u_1 z & 0 & \dots \\ -\frac{a_2 z}{u_1} & 1 & u_2 z & \dots \\ 0 & -\frac{a_3 z}{u_2} & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix},$$

da die beiden Determinanten einander äquivalent, d. h. ihre n^{ten} Näherungswerte für jedes n einander gleich sind. Die u_r seien sämtlich von Null verschieden, sonst aber beliebige Zahlen.

Ist dann $\sum_2^{\infty} a_r$ konvergent, so stellt $\Delta(z)$ eine ganze transzendente Funktion von z dar¹⁾. Für das Folgende wird es sich am zweckmäßigsten erweisen die u_r so zu bestimmen, daß die Ausdrücke

¹⁾ Helge von Koch, Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences. Paris 1895, t. 120, p. 144–147.

$$A_r = \left| \bar{u}_r - \frac{a_{r+1}}{u_r} \right|^2 \quad (r > 1)$$

ihre kleinstmöglichen Werte annehmen¹⁾. Wir wollen die u_r schon jetzt dieser Forderung gemäß bestimmen und in $A(z)$ einsetzen. Es ist

$$A_r = u_r \bar{u}_r + \frac{a_{r+1} \bar{a}_{r+1}}{u_r \bar{u}_r} - a_{r+1} - \bar{a}_{r+1},$$

wobei $a_{r+1} + \bar{a}_{r+1}$ von u_r unabhängig ist; setzen wir kurz

$$u_r \bar{u}_r = x_r,$$

so ist die positive Zahl x_r so zu bestimmen, daß

$$x_r + \frac{a_{r+1} \bar{a}_{r+1}}{x_r}$$

möglichst klein wird. Dies wird offenbar erreicht für

$$x_r^2 = a_{r+1} \bar{a}_{r+1}$$

oder

$$u_r \bar{u}_r = |a_{r+1}| \quad (r > 1), \tag{3}$$

und es wird dann

$$A_r = 2 |a_{r+1}| - 2 R(a_{r+1}).$$

Sei

$$a_r = r e^{i\theta_r}$$

und setzen wir, im Einklang mit Gleichung (3):

$$u_r = r_{r+1}^{\frac{1}{2}} \quad (r > 1),$$

so wird

$$A(z) = \begin{vmatrix} 1 & r_2^{\frac{1}{2}} z & 0 & \dots \\ -r_2^{\frac{1}{2}} e^{i\theta_2} z & 1 & r_3^{\frac{1}{2}} z & \dots \\ 0 & -r_3^{\frac{1}{2}} e^{i\theta_3} z & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

¹⁾ \bar{u}_r bedeutet die zu der Zahl u_r konjugiert komplexe. Zu bemerken ist, daß dann auch die Ausdrücke $B_r = \left| \bar{u}_r + \frac{a_{r+1}}{u_r} \right|^2$ ihre kleinstmöglichen Werte annehmen.

Da $\sum_2^{\infty} r_\nu$ konvergiert, so wird $z = z_1$ dann und nur dann eine Wurzel der transzendenten Gleichung

$$A(z) = 0$$

sein, wenn das unendliche homogene lineare Gleichungssystem

$$\left. \begin{aligned} x_1 + r_2^{\frac{1}{2}} z_1 x_2 &= 0 \\ -r_2^{\frac{1}{2}} e^{i\theta_2} z_1 x_1 + x_2 + r_3^{\frac{1}{2}} z_1 x_3 &= 0 \\ -r_3^{\frac{1}{2}} e^{i\theta_3} z_1 x_2 + x_3 + r_4^{\frac{1}{2}} z_1 x_4 &= 0 \\ \dots &\dots \end{aligned} \right\} (4)$$

außer der trivialen Auflösung

$$x_\nu = 0 \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots)$$

eine Auflösung besitzt, die noch der Bedingung genügt, daß $\sum_1^{\infty} x_\nu^2$ konvergiert¹⁾. Aus diesem Gleichungssystem folgt leicht die Gleichung

$$\sum_1^{\infty} x_\nu \bar{x}_\nu + \sum_1^{\infty} r_{\nu+1}^{\frac{1}{2}} z_1 \bar{x}_\nu x_{\nu+1} - \sum_1^{\infty} r_{\nu+1}^{\frac{1}{2}} e^{i\theta_{\nu+1}} z_1 x_\nu \bar{x}_{\nu+1} = 0; \quad (5)$$

nun ist $A(0) = 1$, also z_1 , wenn es eine Nullstelle von $A(z)$ sein soll, sicher von Null verschieden; aus (5) folgt daher

$$\frac{z_1}{z_1 \bar{z}_1} \sum_1^{\infty} x_\nu \bar{x}_\nu + \sum_1^{\infty} x_\nu \bar{x}_{\nu+1} r_{\nu+1}^{\frac{1}{2}} - \sum_1^{\infty} x_\nu \bar{x}_{\nu+1} r_{\nu+1}^{\frac{1}{2}} e^{-i\theta_{\nu+1}} = 0.$$

Ersetzen wir hier alle Glieder durch ihre komplex konjugierten, so erhalten wir noch die Gleichung:

$$\frac{\bar{z}_1}{z_1 \bar{z}_1} \sum_1^{\infty} x_\nu \bar{x}_\nu + \sum_1^{\infty} x_\nu \bar{x}_{\nu+1} r_{\nu+1}^{\frac{1}{2}} - \sum_1^{\infty} x_\nu \bar{x}_{\nu+1} r_{\nu+1}^{\frac{1}{2}} e^{-i\theta_{\nu+1}} = 0.$$

Sei ferner

$$z_1 = \zeta_1 + i \zeta_2,$$

¹⁾ Vgl. Helge von Koch, Rendic. del circ. matem. di Palermo, t. XXVIII (1909), p. 261—263 und meine Dissertation (Fußnote 2), §§ 10, 13 und 14.

so folgen aus den letzten beiden Gleichungen durch Addition bzw. Subtraktion die Gleichungen:

$$\frac{2}{\zeta_1 + \zeta_2} \zeta_1 \sum_1^{\infty} r x_r \bar{x}_r + \sum_1^{\infty} r r_{r+1}^{\frac{1}{2}} (1 - e^{-i\theta_{r+1}}) x_r \bar{x}_{r+1} + \sum_1^{\infty} r r_{r+1}^{\frac{1}{2}} (1 + e^{i\theta_{r+1}}) \bar{x}_r x_{r+1} = 0$$

$$\frac{2}{\zeta_1 + \zeta_2} \zeta_2 i \sum_1^{\infty} r x_r \bar{x}_r - \sum_1^{\infty} r r_{r+1}^{\frac{1}{2}} (1 + e^{i\theta_{r+1}}) x_r \bar{x}_{r+1} + \sum_1^{\infty} r r_{r+1}^{\frac{1}{2}} (1 + e^{-i\theta_{r+1}}) \bar{x}_r x_{r+1} = 0,$$

aus denen man sofort die Ungleichungen gewinnt:

$$\frac{2}{\zeta_1 + \zeta_2} \zeta_1 \left| \sum_1^{\infty} r x_r \bar{x}_r \right| < \sum_1^{\infty} r r_{r+1}^{\frac{1}{2}} |x_r x_{r+1}| \{1 - e^{-i\theta_{r+1}} + 1 - e^{i\theta_{r+1}}\}$$

$$\frac{2}{\zeta_1 + \zeta_2} \zeta_2 \left| \sum_1^{\infty} r x_r \bar{x}_r \right| < \sum_1^{\infty} r r_{r+1}^{\frac{1}{2}} |x_r x_{r+1}| \{1 + e^{i\theta_{r+1}} + 1 + e^{-i\theta_{r+1}}\}.$$

Offenbar ist

$$1 - e^{-i\theta_{r+1}} = |1 - e^{i\theta_{r+1}}| = 2^{\frac{1}{2}} (1 - \cos \theta_{r+1})^{\frac{1}{2}}$$

$$|1 + e^{i\theta_{r+1}}| = 1 + e^{-i\theta_{r+1}} = 2^{\frac{1}{2}} (1 + \cos \theta_{r+1})^{\frac{1}{2}}$$

und daher können wir unsere Ungleichungen in die Form setzen:

$$\frac{\zeta_1}{\zeta_1 + \zeta_2} \sum_1^{\infty} r x_r \bar{x}_r < 2^{\frac{1}{2}} \sum_1^{\infty} r r_{r+1}^{\frac{1}{2}} (1 - \cos \theta_{r+1})^{\frac{1}{2}} |x_r x_{r+1}| \quad (6_1)$$

$$\frac{|\zeta_2|}{\zeta_1 + \zeta_2} \sum_1^{\infty} r x_r \bar{x}_r < 2^{\frac{1}{2}} \sum_1^{\infty} r r_{r+1}^{\frac{1}{2}} (1 + \cos \theta_{r+1})^{\frac{1}{2}} |x_r x_{r+1}|. \quad (6_2)$$

Nun ziehen wir die in § 2 gegebenen Hilfssätze heran. Die Anwendung eines jeden dieser Hilfssätze liefert zwei Ungleichungen für die Nullstellen von $\Delta(z)$. Wenden wir zunächst Hilfssatz I an. Wir bemerken vorerst, daß $x_1 \neq 0$ und $x_2 \neq 0$ sein muß und daß die x_r nicht von einem gewissen ν an alle verschwinden können, denn in diesem Falle müßten in Anbetracht des Gleichungssystems (4), alle x_r verschwinden,

was aber gegen unsere Voraussetzung ist. Jetzt folgt durch Anwendung der Ungleichung I auf (6₁) und (6₂):

$$\frac{2^{\frac{1}{2}}}{\zeta_1 + \zeta_2} \zeta_1 \sum_1^{\infty} r^{\nu} x_{\nu} \bar{x}_{\nu} < \left[\sum_1^{\infty} r^{\nu} r_{\nu+1} (1 - \cos \vartheta_{\nu+1}) \right]^{\frac{1}{2}} \sum_1^{\infty} r^{\nu} x_{\nu} \bar{x}_{\nu}$$

$$\frac{2^{\frac{1}{2}}}{\zeta_1 + \zeta_2} \zeta_2 \sum_1^{\infty} r^{\nu} x_{\nu} \bar{x}_{\nu} < \left[\sum_1^{\infty} r^{\nu} r_{\nu+1} (1 + \cos \vartheta_{\nu+1}) \right]^{\frac{1}{2}} \sum_1^{\infty} r^{\nu} x_{\nu} \bar{x}_{\nu}$$

oder

$$\frac{2}{(\zeta_1 + \zeta_2)^2} \zeta_1^2 < \sum_1^{\infty} r^{\nu} r_{\nu+1} (1 - \cos \vartheta_{\nu+1}) \quad (7_1)$$

$$\frac{2}{(\zeta_1 + \zeta_2)^2} \zeta_2^2 < \sum_1^{\infty} r^{\nu} r_{\nu+1} (1 + \cos \vartheta_{\nu+1}) \quad (7_2)$$

In Worten: ist $z_1 = \zeta_1 + i \zeta_2$ eine Wurzel der Gleichung $A(z) = 0$, so gelten für diese die Ungleichungen (7₁) und (7₂)¹⁾. Nur wenn eine der Summen verschwindet, wird auch jetzt Gleichheit gelten und es muß dann ζ_1 bzw. ζ_2 auch verschwinden.

¹⁾ Es sei hier an einen allgemeinen Satz von J. Schur erinnert (Über die charakteristischen Wurzeln einer linearen Substitution mit einer Anwendung auf die Theorie der Integralgleichungen. Mathem. Annalen, Bd. 66, 1909, p. 488–510): sei

$$A = (a_{\nu\lambda}) \quad (\nu, \lambda = 1, 2, \dots, n)$$

eine Matrix mit beliebigen Koeffizienten. Die charakteristischen Wurzeln von A , d. h. die Wurzeln der Gleichung

$$A - xE_n = 0$$

seien $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$; sei $\omega_{\nu} = \varrho_{\nu} + i \sigma_{\nu}$, dann gelten die Ungleichungen [l. c., p. 495]

$$4 \sum_{\nu} \varrho_{\nu}^2 < \sum_{\nu, \lambda} a_{\nu\lambda} + \bar{a}_{\lambda\nu}^2$$

$$4 \sum_{\nu} \sigma_{\nu}^2 < \sum_{\nu, \lambda} |a_{\nu\lambda} - \bar{a}_{\lambda\nu}|^2;$$

und es gilt dies a fortiori für jedes einzelne der ϱ_{ν} und σ_{ν} . Wenn es sich nur um dies letztere handelt, d. h. wenn ich bloß für die einzelnen Wurzeln Ungleichungen suche, so lassen sich, wie ich in einer anderen Arbeit zeigen will, die diesbezüglichen Resultate noch verschärfen und unmittelbar auf Integralgleichungen übertragen. Die Überlegung wird der obigen ähndlich sein.

Wir können unser Resultat in folgende zwei Sätze zusammenfassen:

Satz α_1 . Sei $x = \xi + i\eta$, $\xi \neq 0$, $a_r = r_r e^{i\vartheta_r}$; ist dann

$$\frac{2\xi^2}{(\xi^2 + \eta^2)^2} > \sum_2^{\infty} r_r (1 - \cos \vartheta_r), \quad (7_1)$$

so ist $\Delta(x) \neq 0$.

Satz α_2 . Ist $\eta \neq 0$ und

$$\frac{2\eta^2}{(\xi^2 + \eta^2)^2} > \sum_2^{\infty} r_r (1 + \cos \vartheta_r), \quad (7_2)$$

so ist $\Delta(x) \neq 0$.

Die Anwendung des Hilfssatzes II wird ebenfalls zwei Sätze liefern. Zunächst ergibt sich folgendes: gäbe es Werte δ_r ($r \geq 1$), die den Ungleichungen

$$\frac{2|\zeta_1|}{\zeta_1^2 + \zeta_2^2} (1 - \delta_r)^{\frac{1}{2}} \delta_{r+1}^{\frac{1}{2}} \geq 2^{\frac{1}{2}} r_{r+1}^{\frac{1}{2}} (1 - \cos \vartheta_{r+1})^{\frac{1}{2}} \quad (r \geq 1) \quad (8)$$

genügen, so wäre auch

$$\frac{|\zeta_1|}{\zeta_1^2 + \zeta_2^2} \sum_1^{\infty} r_r \bar{x}_r > 2^{\frac{1}{2}} \sum_1^{\infty} r_{r+1}^{\frac{1}{2}} (1 - \cos \vartheta_{r+1})^{\frac{1}{2}} x_r x_{r+1} \quad (9)$$

und es würde hier Ungleichheit in jedem der folgenden Fälle gelten:

1. $\delta_1 x_1 \neq 0$,
2. mindestens für einen Wert von r ist:

$$\frac{2|\zeta_1|}{\zeta_1^2 + \zeta_2^2} (1 - \delta_r)^{\frac{1}{2}} \delta_{r+1}^{\frac{1}{2}} x_r x_{r+1} > 2^{\frac{1}{2}} r_{r+1}^{\frac{1}{2}} (1 - \cos \vartheta_{r+1})^{\frac{1}{2}} x_r x_{r+1} .$$

3. für einen Wert von r ist:

$$\delta_r = 1 \quad \text{und} \quad \delta_{r+1} x_{r+1} \neq 0.$$

Nur wenn $\zeta_1 = 0$ und für jedes r $1 - \cos \vartheta_{r+1} = 0$ ist, wird in (9) jedenfalls Gleichheit bestehen.

Bemerken wir nun, daß x_1 nicht verschwinden kann und auch von drei aufeinanderfolgenden x_r nie zwei verschwinden

können: denn würde einer dieser beiden Fälle eintreten, so müßten, mit Rücksicht auf das Gleichungssystem (4), alle x_r verschwinden; dies ist aber gegen unsere Voraussetzung. Hieraus folgt noch, daß x_r, x_{r+1} und x_{r+1}, x_{r+2} nicht beide, und von acht aufeinanderfolgenden x_r, x_{r+1} höchstens drei verschwinden können. Wir dürfen daher die Bedingungen 1, 2, und 3 durch folgende ersetzen:

$$1'. \delta_1 \neq 0.$$

2'. in (8) gilt mindestens für zwei aufeinanderfolgende Werte von r Ungleichheit,

2''. es gibt mindestens einen Wert von r , so daß für vier der Werte $r, r+1, \dots, r+7$ Ungleichheit gilt,

$$3'. \delta_r = 1, \delta_{r+1} = 1, \delta_{r+2} \neq 0 \text{ für einen Wert von } r.$$

Würde nun aber in (9) Ungleichheit gelten, so wäre dies im Widerspruch zu (6₁), also sind für eine Wurzel z_1 die eben formulierten Bedingungen nicht erfüllbar, d. h. eine Zahl x , die diesen Bedingungen genügt, kann nicht Wurzel von $\Delta(z) = 0$ sein; wir haben somit den

Satz β_1 . Sei $x = \xi + i\eta$, $\xi \neq 0$; gibt es dann solche δ_r ($r \geq 1$), daß

$$\frac{2\xi^2}{(\xi^2 + \eta^2)^2} (1 - \delta_r) \delta_{r+1} \geq r_{r+1} (1 - \cos \theta_{r+1}) \quad (r \geq 1) \quad (10_1)$$

ist und daß gleichzeitig eine der Bedingungen erfüllt ist:

$$a) \delta_1 \neq 0.$$

b₁) in (10₁) gilt mindestens für zwei aufeinanderfolgende Werte von r Ungleichheit,

b₂) es gibt einen Wert von r , so daß für vier der Werte $r, r+1, \dots, r+7$ in (10₁) Ungleichheit gilt,

c) es ist $\delta_r = 1, \delta_{r+1} = 1, \delta_{r+2} \neq 0$ für irgend ein r , so ist $\Delta(x) \neq 0$.

Durch Anwendung des Hilfssatzes II auf (6₂) folgt der analoge Satz:

Satz β_2 . Gibt es solche δ_r , daß $\eta \neq 0$ und

$$\frac{\frac{2}{\xi^2} \eta^2}{\left(\xi^2 + \frac{\eta^2}{2}\right)^2} (1 - \delta_r) \delta_{r+1} \geq r_{r+1} (1 + \cos \vartheta_{r+1}) \quad (r > 1) \quad (10_2)$$

und daß gleichzeitig eine der Bedingungen erfüllt ist:

a') $\delta_1 \neq 0$,

b') in (10_2) gilt mindestens für zwei aufeinanderfolgende Werte von ν Ungleichheit,

b₂) es gibt einen Wert von ν , so daß für vier der Werte $\nu, \nu + 1, \dots, \nu + 7$ in (10_2) Ungleichheit gilt,

c') es ist $\delta_r = 1, \delta_{r+1} = 1, \delta_{r+2} \neq 0$ für irgend ein ν , so ist $\Delta(x) \neq 0$.

Natürlich ist für alle diese Sätze die Vorbedingung, daß $\sum_{\nu} r_{\nu}$ konvergiert.

Aus Hilfssatz III folgt die Ungleichung:

$$2^{\frac{1}{2}} \sum_1^{\infty} r_{\nu}^{\frac{1}{2}} r_{\nu+1}^{\frac{1}{2}} (1 - \cos \vartheta_{\nu+1})^{\frac{1}{2}} |x_{\nu} x_{\nu+1}| < \frac{r_2^{\frac{1}{2}} (1 - \cos \vartheta_2)^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}} |x_1|^2 \\ + \sum_2^{\infty} r_{\nu} \left[\frac{r_{\nu}^{\frac{1}{2}} (1 - \cos \vartheta_{\nu})^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}} + \frac{r_{\nu+1}^{\frac{1}{2}} (1 - \cos \vartheta_{\nu+1})^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}} \right] |x_{\nu}|^2;$$

wäre also

$$\frac{r_{\nu}^{\frac{1}{2}} (1 - \cos \vartheta_{\nu})^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}} + \frac{r_{\nu+1}^{\frac{1}{2}} (1 - \cos \vartheta_{\nu+1})^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}} < \frac{|\zeta_1|}{\zeta_1^2 + \zeta_2^2} \quad (\nu \geq 2) \quad (11)$$

und zwar so, daß wenigstens für zwei aufeinanderfolgende Werte von ν die Ungleichheit gilt, so wäre auch

$$2^{\frac{1}{2}} \sum_1^{\infty} r_{\nu}^{\frac{1}{2}} r_{\nu+1}^{\frac{1}{2}} (1 - \cos \vartheta_{\nu+1})^{\frac{1}{2}} |x_{\nu} x_{\nu+1}| < \frac{\zeta_1}{\zeta_1^2 + \zeta_2^2} \sum_1^{\infty} r_{\nu} |x_{\nu}|^2;$$

dies ist aber ein Widerspruch zu (6_1) . Nur wenn $\zeta_1 = 0$ ist und alle a_{ν} positiv und reell sind, findet überall Gleichheit statt. Ist aber $\zeta_1 \neq 0$, so gilt in (11) sicher für genügend große ν Ungleichheit (wegen der Konvergenz der Reihe $\sum_{\nu} r_{\nu}$). Dies gibt den Satz:

Satz γ_1 . Sei $x = \xi + i\eta$, $\xi \neq 0$; gelten dann die Ungleichungen:

$$r_r^{\frac{1}{2}}(1 - \cos \theta_r)^{\frac{1}{2}} + r_{r+1}^{\frac{1}{2}}(1 - \cos \theta_{r+1})^{\frac{1}{2}} < \frac{2^{\frac{1}{2}} \xi}{\xi^2 + \eta^2} \quad (r > 2), \quad (11_1)$$

so ist $\Delta(x) \neq 0$.

Ebenso gewinnt man den analogen Satz:

Satz γ_2 . Sei $x = \xi + i\eta$, $\eta \neq 0$; gelten dann die Ungleichungen:

$$r_r^{\frac{1}{2}}(1 + \cos \theta_r)^{\frac{1}{2}} + r_{r+1}^{\frac{1}{2}}(1 + \cos \theta_{r+1})^{\frac{1}{2}} < \frac{2^{\frac{1}{2}} \eta}{\xi^2 + \eta^2} \quad (r > 2), \quad (11_2)$$

so ist $\Delta(x) \neq 0$.

§ 4.

Verallgemeinerung des von Koch-Pringsheimschen Satzes.

Sei $\sum_r a_r$ konvergent; betrachten wir dann den Kettenbruch

$$\frac{a_1 z^2}{1} + \frac{a_2 z^2}{1} + \frac{a_3 z^2}{1} + \dots = \left[\frac{a_r z^2}{1} \right]_1, \quad (12)$$

so ist offenbar

$$a_1 z^2 \left[\frac{a_r z^2}{1} \right]_1 = \begin{array}{cccc} & 1 & z & 0 \dots & 1 & z & 0 \dots \\ & -a_3 z & 1 & z \dots & -a_2 z & 1 & z \dots \\ & 0 & -a_4 z & 1 \dots & 0 & -a_3 z & 1 \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

und der Nenner ist die eben betrachtete Funktion $\Delta(z)$. Die im vorigen Paragraphen abgeleiteten Sätze ergeben also unmittelbar Konvergenzkriterien für den Kettenbruch (12). Aus Satz α_1 folgt das Konvergenzkriterium:

Satz A_1 . Sei $z = \xi + i\eta$, $\xi \neq 0$, $a_r = r_r e^{i\theta_r}$, $\sum_r r_r$ konvergent; ist dann

$$\frac{2 \xi^2}{(\xi^2 + \eta^2)^2} > \sum_2^{\infty} r_r (1 - \cos \theta_r), \quad (7i)$$

so konvergiert der Kettenbruch (12).

Ebenso folgt aus a_2 das Konvergenzkriterium:

Satz A_2 . Sei $\eta \neq 0$, $\sum_r r_r$ konvergent; ist dann

$$\frac{2\eta^2}{(\xi^2 + \eta^2)^2} > \sum_2^\infty r_r (1 + \cos \vartheta_r), \quad (7_2)$$

so konvergiert der Kettenbruch (12).

Man sieht ohne weiteres, daß bei den gegebenen Bedingungen nicht bloß der Kettenbruch (12), sondern auch der Kettenbruch $\left[\frac{a_r z^2}{1} \right]_n^\infty$ für jedes positive ganze n konvergiert; also ist die Konvergenz eine unbedingte.

Setze ich für z spezielle Werte ein, so erhalte ich aus diesen Sätzen spezielle Konvergenzkriterien.

Für $z = 1$ folgt aus Satz A_1 der Satz:

Der Kettenbruch

$$\left[\begin{matrix} a_r \\ 1 \end{matrix} \right]_1^\infty = \left[\begin{matrix} r_r e^{i\vartheta_r} \\ 1 \end{matrix} \right]_1^\infty \quad (13)$$

konvergiert unbedingte, wenn $\sum_r r_r$ konvergiert und die Ungleichung erfüllt ist:

$$\sum_2^\infty r_r (1 - \cos \vartheta_r) < 2.$$

Dasselbe Resultat erhalte ich aus Satz A_2 für $z = i$.

In diesem Satze ist offenbar der von Herrn Pringsheim erweiterte von Kochsche Satz enthalten und dieses spezielle Konvergenzkriterium kann daher vermittelt unserer Methode leicht abgeleitet werden, da es im vorhergegangenen nicht benützt wurde.

Im Laufe dieser Untersuchung wird sich eine weitere Verallgemeinerung dieses Satzes ergeben.

Seien jetzt alle a_r reell und positiv, also $\vartheta_r = 0$ ($r > 2$), ferner $z = e^{\frac{1}{2}i\psi}$ und $\psi \neq \pi$ (wegen $\xi \neq 0$), so folgt aus Satz A_1 das (übrigens nicht neue) Konvergenzkriterium:

Der Kettenbruch

$$\left[\begin{matrix} r_r e^{i\psi} \\ 1 \end{matrix} \right]_1^\infty$$

konvergiert unbedingt, wenn $\sum r_v$ konvergiert, und $\psi \neq \pi$ ist. Die Teilzähler liegen jetzt auf einem beliebigen, vom Nullpunkt ausgehenden Halbstrahl, die reelle negative Halbachse ausgeschlossen. Daß der Satz für $\psi = \pi$ nicht gilt, ist klar, denn laut unserem in § 1 gegebenen Beispiel, gibt es dann zu jedem Wert von $\sum r_v$, der größer als 1 ist, divergente Kettenbrüche.

Dasselbe Resultat läßt sich auf ähnliche Weise aus Satz A_2 ableiten.

Wir leiten nun einen allgemeinen Satz ab, der alle Sätze enthalten wird, die man überhaupt durch Spezialisierung von z aus Satz A_1 bzw. A_2 gewinnen kann. Zu diesem Ende wollen wir folgende Frage beantworten: gegeben sei der Kettenbruch (2); welchen Bedingungen müssen die c_v genügen, damit eine Zerlegung

$$c_v = a_v z^2 \quad (v > 2) \quad (14)$$

möglich sei, für welche die in Satz A_1 geforderten Konvergenzbedingungen erfüllt sind? Sei

$$c_v = \gamma_v e^{i q_v}, \quad z = \zeta e^{i \psi} \quad (\zeta \neq 0),$$

also, gemäß (14):

$$a_v = \gamma_v \zeta^{-2} e^{i(q_v - \psi)}.$$

Die Konvergenzbedingung lautet: $\cos \frac{\psi'}{2} \neq 0$ und

$$2 \zeta^{-2} \cos^2 \frac{\psi'}{2} > \sum_2^{\infty} \gamma_v \zeta^{-2} [1 - \cos(q_v - \psi)]. \quad (15)$$

Statt Ungleichung (15) kann ich auch setzen:

$$2 \cos^2 \frac{\psi'}{2} > \sum_2^{\infty} \gamma_v [1 - \cos(q_v - \psi)]. \quad (15_1)$$

Die γ_v und q_v sind gegeben: die Frage ist: kann ich ψ' so bestimmen, daß diese Relation erfüllt ist? Ich kann die letzte Ungleichung auch in folgender Form schreiben:

$$1 + \cos \psi > \sum_2^{\infty} \gamma_r - \sum_2^{\infty} \gamma_r \cos q_r \cos \psi - \sum_2^{\infty} \gamma_r \sin q_r \sin \psi;$$

setzt man dann zur Abkürzung

$$\sum_2^{\infty} \gamma_r = s_1, \quad \sum_2^{\infty} \gamma_r \cos q_r = s_2, \quad \sum_2^{\infty} \gamma_r \sin q_r = s_3,$$

so erhält unsere Ungleichung die Form:

$$s_1 - (1 + s_2) \cos \psi - s_3 \sin \psi < 1 \quad (15')$$

oder kurz

$$F(\psi) < 1.$$

s_1, s_2, s_3 sind von ψ unabhängig; um zu entscheiden, ob es ein ψ gibt, welches diese Relation erfüllt, bestimmen wir den kleinstmöglichen Wert, den $F(\psi)$ annehmen kann. Dieser wird jedenfalls ein Minimum der Funktion $F(\psi)$ sein, da diese eine periodische Funktion von ψ ist.

Der gesuchte Wert von ψ ist also durch die Gleichung bestimmt:

$$(1 + s_2) \sin \psi = s_3 \cos \psi;$$

woraus, wenn wir beiderseits quadrieren,

$$(1 + s_2)^2 \sin^2 \psi = s_3^2 (1 - \sin^2 \psi)$$

oder auch

$$\{(1 + s_2)^2 + s_3^2\} \sin^2 \psi = s_3^2 \quad (16)$$

folgt.

Erster Fall: sei $(1 + s_2)^2 + s_3^2 = 0$, also $s_3 = 0, -s_2 = 1$; dann wird $F(\psi) \equiv s_1$, ψ kann beliebig gewählt werden, also ist die Konvergenzbedingung: $s_1 < 1$.

Zweiter Fall: sei $(1 + s_2)^2 + s_3^2 \neq 0$; jetzt resultiert aus (16):

$$\sin^2 \psi = \frac{s_3^2}{(1 + s_2)^2 + s_3^2}$$

und demnach

$$\cos^2 \psi = \frac{(1 + s_2)^2}{(1 + s_2)^2 + s_3^2};$$

$F(\psi)$ nimmt offenbar seinen kleinstmöglichen Wert für

$$\sin \psi' = \frac{s_3}{\{(1+s_2)^2 + s_3^2\}^{\frac{1}{2}}}, \quad \cos \psi' = \frac{1+s_2}{\{(1+s_2)^2 + s_3^2\}^{\frac{1}{2}}}$$

an und es wird

$$\begin{aligned} F_{\min.} &= s_1 - \frac{(1+s_2)^2}{\{(1+s_2)^2 + s_3^2\}^{\frac{1}{2}}} - \frac{s_3^2}{\{(1+s_2)^2 + s_3^2\}^{\frac{1}{2}}} \\ &= s_1 - \{(1+s_2)^2 + s_3^2\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Wir haben noch den Ausnahmefall zu untersuchen, in dem die Ungleichung (15₁) erfüllt ist, nicht aber die Bedingung $\cos \frac{\psi'}{2} \neq 0$: dies tritt ein, wenn die Gleichungen $\varphi_r - \psi' = 0$ für alle r und $\psi' = \pi$ bestehen.

Für

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \dots = \pi$$

wird aber $s_3 = 0$, $s_2 = -s_1$ und die Ungleichung (15₁) reduziert sich auf

$$1 + \cos \psi' > s_1(1 + \cos \psi'),$$

woraus für $\psi' \neq \pi$ das Konvergenzkriterium

$$s_1 < 1$$

folgt.

Wenn wir nun unsere Resultate zusammenfassen, erhalten wir den folgenden Satz:

Satz 1. Der Kettenbruch

$$\left[\begin{array}{c} c_r \\ 1 \end{array} \right]_1^{\infty} = \left[\begin{array}{c} \gamma_r e^{i\varphi_r} \\ 1 \end{array} \right]_1^{\infty} \quad (2)$$

konvergiert unbedingdt, wenn die Ungleichung besteht:

$$s_1 - 1 < \{(1+s_2)^2 + s_3^2\}^{\frac{1}{2}}; \quad (17)$$

nur wenn alle c_r reell und negativ sind, ist an Stelle der Ungleichung (17) die folgende zu setzen:

$$s_1 < 1.$$

(In diesem Ausnahmefalle kann der Kettenbruch — wie wir zeigten — für irgend ein $s_1 > 1$ schon divergieren.)

Dabei ist leicht nachzuweisen, daß stets die folgende Relation besteht:

$$s_1^2 > s_2^2 + s_3^2,$$

und die Gleichheit dann und nur dann gilt, wenn alle c_r auf einem vom 0-Punkt ausgehenden Halbstrahl liegen. Es ist nämlich

$$\left(\sum_2^{\infty} \gamma_r\right)^2 > \left|\sum_2^{\infty} \gamma_r \cos q_r + i \sum_2^{\infty} \gamma_r \sin q_r\right|^2,$$

und hieraus folgt unmittelbar die Ungleichung:

$$\left(\sum_2^{\infty} \gamma_r\right)^2 > \left(\sum_2^{\infty} \gamma_r \cos q_r\right)^2 + \left(\sum_2^{\infty} \gamma_r \sin q_r\right)^2,$$

und man sieht auch, daß die Gleichheit dann und nur dann gilt, wenn alle q_r untereinander gleich sind.

An Stelle der Ungleichung (17) kann man setzen

$$(s_1 - 1)^2 < (1 + s_2)^2 + s_3^2. \tag{18}$$

Ich zeige nämlich, daß die Ungleichungen (17) und (18) nur gleichzeitig bestehen können; ist $s_1 - 1 > 0$, so ist dies klar; ist $s_1 - 1 < 0$, so besteht a fortiori die Ungleichung (17), aber auch die Relation (18) ist noch gültig, da man sie ja in die Form setzen kann:

$$s_1^2 - 2s_1 < s_2^2 + 2s_2 + s_3^2 \tag{18'}$$

oder auch

$$s_1^2 - s_2^2 - 2(s_1 + s_2) < s_3^2$$

oder schließlich

$$(s_1 + s_2)(s_1 - s_2 - 2) < s_3^2; \tag{19}$$

da nun offenbar $s_1 + s_2 \geq 0$ und $s_1 - s_2 < 2$ ist, so ist damit die Gültigkeit der obigen Ungleichungen erwiesen.

Von Satz A_2 kommt man mittelst derselben Methode zunächst zu der Konvergenzbedingung:

Der Kettenbruch (2) konvergiert unbedingst, wenn es ein $\psi \neq 0$ gibt, für das die Ungleichung erfüllt ist:

$$2 \sin^2 \frac{\psi}{2} > \sum_2^{\infty} \gamma_r [1 + \cos (q_r - \psi)]. \tag{15_2}$$

Hieraus würde die günstigste Bestimmung von φ' wieder zu Satz 1 führen. Dies erklärt sich auch daraus, daß man Satz A_2 aus A_1 mit Hilfe der Substitution $z = it$ ableiten kann.

Aus Satz 1, wie auch aus den Ungleichungen (15₁) und (15₂) können Sätze einfacherer Form abgeleitet werden.

So folgt zunächst mit Rücksicht auf Ungleichung (17) der Satz:

Satz 1₁. Bezeichnet m die größere der Zahlen $|1 + s_2|$ und s_3 , so ist der Kettenbruch (2) unbedingt konvergent, wenn die Ungleichung gilt:

$$s_1 < 1 + m.$$

Nur wenn alle c_r reell und negativ sind, lautet die Bedingung: $s_1 < 1$.

In diesem Satze ist das am Anfange dieses Paragraphen abgeleitete erste Kriterium enthalten.

Ist $s_2 > 0$, so ist sicherlich $m > 1$; in diesem Falle ist also die Bedingung

$$s_1 < 2$$

a fortiori für die Konvergenz hinreichend.

Ferner sollen jetzt die c_r in einem vom Nullpunkt ausgehenden Sektor liegen, dessen Zentriwinkel $\omega < \pi$ sei und $e^{i\varphi'}$ soll nicht außerhalb des Sektors liegen; dann ist

$$\cos(\varphi'_r - \varphi') > \cos \omega \quad (r \geq 2),$$

also folgt aus der Ungleichung (15₁) der Satz:

Satz 1₂. Der Kettenbruch (2) konvergiert unbedingt, wenn die Bedingung besteht:

$$s_1 < \frac{1 + \cos \varphi'}{1 - \cos \omega}.$$

Es ist vorteilhaft φ' so zu wählen, daß $\cos \varphi'$ möglichst groß sei, also φ' möglichst klein zu nehmen.

In diesem Satze ist das am Anfange dieses Paragraphen gegebene zweite Konvergenzkriterium enthalten.

Sei jetzt 2ϵ der Zentriwinkel eines Sektors, in dem keines der c_r liegt; α sei der Winkel, den die Mittellinie des Sektors

mit der x -Achse bildet. Setzen wir $\psi = \alpha - \pi$, so ist $q_r - \psi = q_r - \alpha + \pi$, und in einem Sektor, dessen Zentriwinkel 2ε ist und der symmetrisch zur reellen negativen Halbachse liegt, befindet sich keines der $e^{i(q_r - \psi)}$; daher ist jetzt

$$\cos(q_r - \psi) > \cos(\pi - \varepsilon)$$

oder auch

$$1 - \cos(q_r - \psi) < 1 + \cos \varepsilon,$$

und aus der Ungleichung (15₁) folgt jetzt:

Satz 1₃. Der Kettenbruch (2) konvergiert unbedingt, wenn die Ungleichung gilt:

$$s_1 < \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \varepsilon}.$$

Aus Ungleichung (17) folgt leicht der Satz:

Satz 1₄. Seien alle c_r reell; konvergiert dann $\sum_r \gamma_r$ und ist die Summe der negativen Teilzähler ihrem absoluten Werte nach nicht größer als 1, so konvergiert der Kettenbruch (2) unbedingt.

Seien nun alle c_r rein imaginär; sei σ_1 die Summe der Teilzähler, die auf der oberen Halbachse liegen, absolut genommen; σ_2 sei die Summe der Teilzähler, die auf der unteren Halbachse liegen, absolut genommen. Dann ist

$$s_1 = \sigma_1 + \sigma_2, \quad s_2 = 0, \quad s_3 = \sigma_1 - \sigma_2,$$

und aus Ungleichung (19) wird jetzt die folgende:

$$(\sigma_1 + \sigma_2)(\sigma_1 + \sigma_2 - 2) < (\sigma_1 - \sigma_2)^2;$$

nach Ausführung der Multiplikation folgt hieraus:

$$2\sigma_1\sigma_2 \leq \sigma_1 + \sigma_2, \quad (20)$$

wir können daher den Satz aussprechen:

Satz 1₅. Sind alle c_r rein imaginär und ist die Bedingung (20) erfüllt, so konvergiert der Kettenbruch (2) unbedingt.

Die Bedingung (20) ist offenbar sicher erfüllt, wenn $\sigma_1\sigma_2 < 1$ ist.

Im folgenden Paragraphen gewinne ich nochmals den Satz 1 durch Spezialisierung eines allgemeineren Satzes.

Bemerkung. Ich möchte auf den besonderen Charakter des Satzes 1 hinweisen. Man kann ja den Begriff der absoluten Konvergenz einer unendlichen Reihe auch so formulieren: eine unendliche Reihe heißt absolut konvergent, wenn sie selbst und eine jede Reihe, die aus ihr durch Abänderung der Charakteristiken¹⁾ ihrer Glieder entsteht, konvergiert. Wir können nun diese Formulierung auf Kettenbrüche übertragen, indem wir sagen: der Kettenbruch (2) soll absolut konvergent heißen, wenn er selbst und jeder Kettenbruch, der aus (2) durch Abänderung der Charakteristiken der c_r entsteht, konvergiert. Der von Herrn Pringsheim erweiterte Helge von Kochsche Satz bezieht sich dann auf absolut konvergente Kettenbrüche, während die meinem Kriterium genügenden Kettenbrüche im allgemeinen nicht absolut konvergieren. Der von Herrn Pringsheim eingeführte Begriff der unbedingten Konvergenz eines Kettenbruches ist natürlich von diesem der absoluten Konvergenz durchaus verschieden.

§ 5.

Weitere Konvergenzkriterien.

Aus den Sätzen β_1 und β_2 (§ 3) folgen unmittelbar die Konvergenzkriterien:

Satz B_1 . Sei $\sum r_r$ konvergent, $z = \xi + i\eta$ und $\xi \neq 0$; gibt es dann solche δ_r , daß

$$\frac{2\xi^2}{(\xi^2 + \eta^2)^2} (1 - \delta_r) \delta_{r+1} > r_{r+1} (1 - \cos \vartheta_{r+1}) \quad (r > 1) \quad (10_1)$$

und daß gleichzeitig eine der Bedingungen erfüllt ist:

a) $\delta_1 \neq 0$,

b₁) in (10₁) gilt mindestens für zwei aufeinanderfolgende Werte von r Ungleichheit,

b₂) es gibt einen Wert von r , so daß für vier der Werte $r, r+1, \dots, r+7$ in (10₁) Ungleichheit gilt,

¹⁾ Nach Herrn Pringsheim ist $\frac{a}{a}$ die Charakteristik von a .

c) es ist $\delta_r = 1$, $\delta_{r+1} = 1$, $\delta_{r+2} \neq 0$ für irgend ein r :
so konvergiert der Kettenbruch (12).

Satz B_2 . Sei $\sum r_r$ konvergent und $\eta \neq 0$; gibt es dann solche δ_r , daß

$$\frac{2\eta^2}{(\xi^2 + \eta^2)^2} (1 - \delta_r) \delta_{r+1} > r_{r+1} (1 + \cos \vartheta_{r+1}) \quad (r > 1) \quad (10_2)$$

und daß gleichzeitig eine der Bedingungen erfüllt ist:

a') $\delta_1 \neq 0$,

b₁) in (10₂) gilt mindestens für zwei aufeinanderfolgende Werte von r Ungleichheit.

b₂) es gibt einen Wert von r , so daß für vier der Werte $r, r+1, \dots, r+7$ in (10₂) Ungleichheit gilt.

c') es ist $\delta_r = 1$, $\delta_{r+1} = 1$, $\delta_{r+2} \neq 0$ für irgend ein r :
so konvergiert der Kettenbruch (12).

Aus der Form der Bedingungen (10₁) und (10₂) ist ersichtlich, daß auch die Ungleichungen

$$0 < \delta_r \leq 1 \quad (r \geq 1)$$

bestehen müssen.

Ob der Kettenbruch (12) unter diesen Bedingungen auch immer unbedingt konvergiert, bleibt unentschieden. Ebenso bleibt die Frage offen, wie sich der Kettenbruch in dem Falle verhält, daß keine der Nebenbedingungen a bis c bzw. a' bis c' erfüllt ist. Ich bemerke nur, daß man leicht noch andere hinreichende Nebenbedingungen finden kann.

Für spezielle Werte von z erhalten wir aus den obigen Sätzen spezielle Konvergenzkriterien.

Ähnlich wie im vorigen Paragraphen bietet sich hier die Fragestellung: gegeben ist der Kettenbruch (2): gibt es dann eine Zerlegung (14), für welche die in Satz B_1 geforderten Bedingungen erfüllt sind? Diese Betrachtung führt sofort zu folgendem Konvergenzkriterium:

Satz 2₁. Gibt es ein $\psi \neq \pi$ und solche δ_r , daß die Ungleichungen bestehen:

$$(1 + \cos \psi)(1 - \delta_r) \delta_{r+1} > \gamma_{r+1} \{1 - \cos(\psi_{r+1} - \psi)\} \quad (r > 1) \quad (21_1)$$

und gleichzeitig eine der Bedingungen erfüllt ist:

a) $\delta_1 \neq 0$.

b₁) in (21₁) gilt mindestens für zwei aufeinanderfolgende Werte von r Ungleichheit.

b₂) es gibt einen Wert von r , so daß für vier der Werte $r, r+1, \dots, r+7$ in (21₁) Ungleichheit gilt,

c) es ist $\delta_r = 1, \delta_{r+1} = 1, \delta_{r+2} \neq 0$ für irgend ein r : so konvergiert der Kettenbruch (2).

Ebenso erhalten wir aus B_2 den

Satz 2₂. Gibt es ein $\psi \neq 0$ und solche δ_r , daß die Ungleichungen gelten:

$$(1 - \cos \psi)(1 - \delta_r) \delta_{r+1} > \gamma_{r+1} \{1 + \cos(\psi_{r+1} - \psi)\} \quad (r > 1) \quad (21_2)$$

und gleichzeitig mindestens eine der Bedingungen erfüllt ist:

a') $\delta_1 \neq 0$.

b₁) in (21₂) gilt mindestens für zwei aufeinanderfolgende Werte von r die Ungleichheit,

b₂) es gibt einen Wert von r , so daß für vier der Werte $r, r+1, \dots, r+7$ in (21₂) Ungleichheit gilt,

c') es ist $\delta_r = 1, \delta_{r+1} = 1, \delta_{r+2} \neq 0$ für irgend ein r : so konvergiert der Kettenbruch (2).

Hiebei ist $c_r = \gamma_r e^{i\psi_r}$. Freilich ist auch hier, wie überall, die Konvergenz von $\sum_r c_r$ vorausgesetzt.

Durch Einsetzen spezieller Werte für ψ erhält man wieder spezielle Konvergenzkriterien.

Wenn wir $1 - \frac{1}{p_r}$ an Stelle von δ_r einführen, so erinnern unsere beiden Sätze an einen Satz des Herrn Pringsheim¹⁾, es ist aber in unserem Falle für die p_r auch der Wert $+\infty$ zulässig. Zu beachten ist, daß der Satz des Herrn Pringsheim keineswegs in unseren Sätzen enthalten ist, da Herr

¹⁾ Diese Berichte, Bd. 35 (1905), p. 369.

Pringsheim über die Konvergenz der Reihe $\sum_r \gamma_r$ keine Voraussetzung macht.

Wir können die δ_r , ebenso wie es Herr Pringsheim für die p_r tut, spezialisieren, um einfachere Kriterien zu gewinnen. Wir führen dies für Satz 2₁ aus.

I. Setzt man

$$\delta_1 = 0, \quad \delta_{2r} = \frac{1}{2} \quad (r \geq 1),$$

so wird aus den Ungleichungen (21₁):

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2}(1 + \cos \psi) &> \gamma_2 \{1 - \cos(\varrho_2 - \psi)\} \\ \frac{1}{2}(1 + \cos \psi) \delta_{2r-1} &> \gamma_{2r-1} \{1 - \cos(\varrho_{2r-1} - \psi)\} \\ \frac{1}{2}(1 + \cos \psi)(1 - \delta_{2r-1}) &> \gamma_{2r} \{1 - \cos(\varrho_{2r} - \psi)\} \end{aligned} \right\} \quad (r > 2).$$

oder

$$\begin{aligned} \gamma_2 \{1 - \cos(\varrho_2 - \psi)\} &< \frac{1}{2}(1 + \cos \psi) \\ \gamma_{2r-1} \{1 - \cos(\varrho_{2r-1} - \psi)\} \\ + \gamma_{2r} \{1 - \cos(\varrho_{2r} - \psi)\} &\leq \frac{1}{2}(1 + \cos \psi) \quad (r \geq 2). \end{aligned}$$

Wir müssen uns noch überzeugen, ob mindestens eine der Nebenbedingungen erfüllt ist. Da $\sum_r \gamma_r$ konvergiert und $\psi \neq \pi$ ist, so ist von einem genügend großen r an die Ungleichheit entweder für ein ungerades oder für das darauffolgende gerade r immer erfüllt; dann ist aber auch die Nebenbedingung b_2 erfüllt.

Es ist klar, daß bei diesen Bedingungen auch die Kettenbrüche

$$\left[\begin{array}{c} c_r \\ 1 \end{array} \right]_{2n+1}^x$$

sämtlich konvergieren, denn für diese braucht nur ein Teil der obigen Bedingungen erfüllt zu sein (nämlich für $r > 2n + 2$); ob aber der Kettenbruch (2) unbedingt konvergiert, bleibt hier unentschieden.

II. Setzt man

$$\delta_1 = 0, \quad \delta_r = \frac{\delta}{1 + \delta} \quad (r \geq 2),$$

so nehmen die Bedingungen (21₁) die Form an:

$$\gamma_2 \{1 - \cos(q_2 - \psi)\} < \frac{\delta}{1 + \delta} (1 + \cos \psi)$$

$$\gamma_r \{1 - \cos(q_r - \psi)\} < \frac{\delta}{(1 + \delta)^2} (1 + \cos \psi) \quad (r > 3);$$

die Bedingung b_2 ist wiederum für genügend große r erfüllt; die Konvergenz ist jetzt offenbar eine unbedingte.

Für $\delta=1$ ergeben sich hieraus die Konvergenzbedingungen:

$$\gamma_2 \{1 - \cos(q_2 - \psi)\} \leq \frac{1}{2} (1 + \cos \psi)$$

$$\gamma_r \{1 - \cos(q_r - \psi)\} \leq \frac{1}{4} (1 + \cos \psi) \quad (r \geq 3).$$

III. Setzt man

$$\delta_r = \frac{r-1}{2^{r-1}} \quad (r \geq 1),$$

so liefern die Bedingungen (21₁) die Ungleichungen:

$$\gamma_{r+1} \{1 - \cos(q_{r+1} - \psi)\} < \frac{r^2}{4^{r^2-1}} (1 + \cos \psi) \quad (r \geq 1),$$

und die Bedingung b_1 ist für genügend große r auch erfüllt. Der Kettenbruch (2) ist unbedingt konvergent.

IV. Setzt man

$$\delta_{2r-1} = \frac{1}{1 + \varepsilon_r}, \quad \delta_{2r} = 1 - \frac{1}{\varepsilon_r} \quad (r > 1),$$

so ergeben sich aus (21₁) die Bedingungen:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{2r} \{1 - \cos(q_{2r} - \psi)\} &< \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 1} (1 + \cos \psi) \\ \gamma_{2r+1} \{1 - \cos(q_{2r+1} - \psi)\} &\leq \frac{1 + \cos \psi}{\varepsilon_r (\varepsilon_r + 1)} \end{aligned} \right\} \quad (r \geq 1);$$

die Bedingung b_2 ist offenbar erfüllt, ebenso wie im Falle I.

Für $\varepsilon_r = +\infty$ gelangen wir — wie sich leicht zeigen läßt — zu dem Fall, wo

$$\sum_1^n (1 - \delta_r) \delta_{r+1}$$

möglichst groß wird; die Bedingungen lauten jetzt:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{2r} \{1 - \cos(\varphi_{2r} - \psi)\} < 1 + \cos \psi \\ \varphi_{2r+1} = \psi \end{aligned} \right\} \quad (r > 1).$$

Setzt man umgekehrt

$$\delta_{2r-1} = 1 - \frac{1}{\varepsilon_r}, \quad \delta_{2r} = \frac{1}{1 + \varepsilon_r},$$

so folgen aus (21₁) die Bedingungen:

$$\begin{aligned} \gamma_{2r} \{1 - \cos(\varphi_{2r} - \psi)\} &< \frac{1 + \cos \psi}{\varepsilon_r(\varepsilon_r + 1)} \\ \gamma_{2r+1} \{1 - \cos(\varphi_{2r+1} - \psi)\} &< \frac{\varepsilon_{r+1} - 1}{\varepsilon_r + 1} (1 + \cos \psi). \end{aligned}$$

V. Setzt man

$$\delta_1 = 0, \quad \delta_{2r+1} = \frac{1}{2} \quad (r \geq 1),$$

so erhält man aus (21₁) die folgenden Bedingungen:

$$\begin{aligned} \gamma_2 \{1 - \cos(\varphi_2 - \psi)\} &< \delta_2 (1 + \cos \psi) \\ \gamma_3 \{1 - \cos(\varphi_3 - \psi)\} &< \frac{1}{2} (1 - \delta_2) (1 + \cos \psi) \\ \gamma_{2r} \{1 - \cos(\varphi_{2r} - \psi)\} &< \frac{1}{2} \delta_{2r} (1 + \cos \psi) \\ \gamma_{2r+1} \{1 - \cos(\varphi_{2r+1} - \psi)\} &< \frac{1}{2} (1 - \delta_{2r}) (1 + \cos \psi) \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \gamma_2 \{1 - \cos(\varphi_2 - \psi)\} < \delta_2 (1 + \cos \psi) \\ \gamma_3 \{1 - \cos(\varphi_3 - \psi)\} < \frac{1}{2} (1 - \delta_2) (1 + \cos \psi) \\ \gamma_{2r} \{1 - \cos(\varphi_{2r} - \psi)\} < \frac{1}{2} \delta_{2r} (1 + \cos \psi) \\ \gamma_{2r+1} \{1 - \cos(\varphi_{2r+1} - \psi)\} < \frac{1}{2} (1 - \delta_{2r}) (1 + \cos \psi) \end{aligned}} \right\} (r > 2),$$

oder auch

$$\begin{aligned} \gamma_2 \{1 - \cos(\varphi_2 - \psi)\} + 2 \gamma_3 \{1 - \cos(\varphi_3 - \psi)\} &< 1 + \cos \psi \\ &+ \gamma_{2r} \{1 - \cos(\varphi_{2r} - \psi)\} \\ + \gamma_{2r+1} \{1 - \cos(\varphi_{2r+1} - \psi)\} &\leq \frac{1}{2} (1 + \cos \psi) \quad (r > 2). \end{aligned}$$

Die Bedingung b_2 ist auch erfüllt.

In diesem und im vorhergegangenen Falle bleibt die Frage nach der unbedingten Konvergenz unerledigt.

VI. Es möge jetzt unter $\delta_r (r > 1)$ eine Folge mit r nicht-abnehmender Zahlen verstanden werden, wobei außerdem $\delta_1 = 0, \lim_{r \rightarrow \infty} \delta_r = 1$. Ist

$$(\delta_{r+1} - \delta_r)(1 + \cos \psi) \geq \gamma_{r+1} \{1 - \cos(\varphi_{r+1} - \psi)\} \quad (r > 1), \quad (22)$$

so ist die Bedingung (21₁) a fortiori erfüllt, und es gilt auch die Nebenbedingung b_1 , außer im Falle, daß

$$\delta_r = 0 \text{ für } r < k, \quad \delta_r = 1 \text{ für } r > k;$$

dann ist aber die Bedingung c erfüllt.

Nun läßt sich aber jede konvergente Reihe mit der Summe $\sum_1^{\infty} u_r = 1$ und $u_r > 0$ in die Form setzen¹⁾:

$$\sum_1^{\infty} (\delta_{r+1} - \delta_r) = \lim_{r=\infty} \delta_r = 1;$$

man hat nur

$$\delta_n = \sum_1^{n-1} u_r$$

zu setzen; da sodann

$$\delta_{n+1} = \sum_1^n u_r,$$

so folgt wie behauptet:

$$u_n = \delta_{n+1} - \delta_n.$$

Daher besagt die Bedingung (22) nichts anderes als daß

$$1 \geq \frac{1}{1 + \cos \varphi'} \sum_1^{\infty} \gamma_{r+1} \{1 - \cos(\varphi_{r+1} - \varphi')\}.$$

Dies ist aber die Bedingung (15₁), aus welcher Satz 1 folgt; also erhalten wir einen neuen Beweis dieses Satzes.

Wir können diesen Satz noch erweitern, wenn wir in (22) statt $\delta_{r+1} - \delta_r$ die höhere Schranke einführen:

$$\delta_{r+1} - \delta_r + \delta_r \left(\frac{1}{\delta_{r+1}} - 1 \right);$$

auch in den Pringsheimschen Untersuchungen²⁾ können wir

statt $\frac{p_{r+1} - p_r}{p_r p_{r+1}}$ die etwas höhere Schranke einführen:

$$\frac{p_{r+1} - p_r}{p_r p_{r+1}} + \frac{p_r - 1}{p_r (p_{r+1} - 1)}.$$

1) Vgl. Pringsheim, diese Berichte, Bd. 35 (1905), p. 374.

2) Vgl. diese Berichte, Bd. 35, p. 373.

VII. Setzt man

$$\delta_r = 1 - \gamma_{r+1} \quad (r \geq 1),$$

so muß vor allem

$$\gamma_{r+1} \leq 1 \quad (r > 1)$$

sein; aus (21₁) resultiert jetzt die Bedingung:

$$(1 + \cos \psi)(1 - \gamma_{r+1}) \geq 1 - \cos(\psi_r - \psi) \quad (r \geq 2),$$

oder auch

$$(1 + \cos \psi) \gamma_{r+1} < \cos \psi + \cos(\psi_r - \psi) \quad (r > 2),$$

und die Bedingung b_2 ist auch erfüllt, wenn nicht alle c_r reell und negativ sind.

Die Grundlage der Sätze 2₁ und 2₂ bildete der Umstand, daß der Ausdruck

$$(1 - \delta_r)x_r^2 - 2d_r x_r x_{r+1} + \delta_{r+1} x_{r+1}^2$$

semidefinit ist, wenn

$$d_r^2 < (1 - \delta_r) \delta_{r+1}.$$

Der nächste Schritt zur Verallgemeinerung dieser Methode wäre, zu bestimmen, unter welchen Bedingungen für d_r und d_{r+1} der Ausdruck

$$(1 - \delta_r)x_r^2 - 2d_r x_r x_{r+1} + x_{r+1}^2 - 2d_{r+1} x_{r+1} x_{r+2} + \delta_{r+1} x_{r+1}^2$$

semidefinit wird; usw. für mehr- und mehrgliedrige Ausdrücke. Die so resultierenden neuen Konvergenzkriterien werden immer komplizierter und können wahrscheinlich auch aus den Sätzen 2₁ und 2₂ durch entsprechende Spezialisierung der δ_r abgeleitet werden. Dazu müßte freilich die erwähnte Umkehrung des Hilfssatzes II bewiesen sein.

§ 6.

Die aus den Sätzen γ_1 und γ_2 folgenden Konvergenzkriterien.

Aus den Sätzen γ_1 und γ_2 (§ 3) erhalten wir unmittelbar die Konvergenzkriterien:

Satz I_1 . Sei $z = \xi + i\eta$, $\xi \neq 0$, $\sum r_v$ konvergent; gelten außerdem die Ungleichungen:

$$r_v^{\frac{1}{2}}(1 - \cos \theta_v)^{\frac{1}{2}} + r_{v+1}^{\frac{1}{2}}(1 - \cos \theta_{v+1})^{\frac{1}{2}} < \frac{2^{\frac{1}{2}} \xi}{\xi^2 + \eta^2} \quad (v \geq 2), \quad (11_1)$$

so ist der Kettenbruch (12) konvergent.

Satz I_2 . Ist $\eta \neq 0$ und gelten die Ungleichungen

$$r_v^{\frac{1}{2}}(1 + \cos \theta_v)^{\frac{1}{2}} + r_{v+1}^{\frac{1}{2}}(1 + \cos \theta_{v+1})^{\frac{1}{2}} < \frac{2^{\frac{1}{2}} \eta}{\xi^2 + \eta^2} \quad (v \geq 2), \quad (11_2)$$

so konvergiert der Kettenbruch (12).

Die Konvergenz ist offenbar eine unbedingte, da die Kettenbrüche

$$\left[\frac{a_r z^2}{1} \right]_n \quad (n \geq 1)$$

sämtlich infolge der obigen Bedingungen konvergieren.

Ähnlich wie früher ziehen wir die Umformung (14) heran. Die Bedingungen (11₁) nehmen dann die Form an:

$$r_v^{\frac{1}{2}} z^{-1} \{1 - \cos(q_v - \psi)\}^{\frac{1}{2}} + r_{v+1}^{\frac{1}{2}} z^{-1} \{1 - \cos(q_{v+1} - \psi)\}^{\frac{1}{2}} < 2^{\frac{1}{2}} \frac{\xi}{\xi^2} \left(\frac{1 + \cos \psi}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (v \geq 2),$$

und wir gewinnen so die folgenden Sätze:

Satz 3₁. Wenn es ein $\psi \neq \pi$ gibt, für das die Ungleichungen bestehen:

$$r_v^{\frac{1}{2}} \{1 - \cos(q_v - \psi)\}^{\frac{1}{2}} + r_{v+1}^{\frac{1}{2}} \{1 - \cos(q_{v+1} - \psi)\}^{\frac{1}{2}} < (1 + \cos \psi)^{\frac{1}{2}} \quad (v > 2), \quad (23_1)$$

so konvergiert der Kettenbruch (2) unbedingte.

Satz 3₂. Wenn es ein $\psi \neq 0$ gibt, für das die Bedingungen erfüllt sind:

$$\gamma_r^{\frac{1}{2}} \{1 + \cos(\psi_r - \psi)\}^{\frac{1}{2}} + \gamma_{r+1}^{\frac{1}{2}} \{1 + \cos(\psi_{r+1} - \psi)\}^{\frac{1}{2}} < (1 - \cos \psi)^{\frac{1}{2}} \quad (r > 2), \quad (23_2)$$

so konvergiert der Kettenbruch (2) unbedingt.

Natürlich ist die Konvergenz der Reihe $\sum \gamma_r$ auch vorausgesetzt.

Durch Spezialisierung erhalten wir wieder einfachere Kriterien.

Hat ω dieselbe Bedeutung wie in Satz 1₂, so folgt aus Satz 3₁ die hinreichende Konvergenzbedingung:

$$(\gamma_r^{\frac{1}{2}} + \gamma_{r+1}^{\frac{1}{2}})^2 < \frac{1 + \cos \psi}{1 - \cos \omega};$$

ist $\gamma > \gamma_r$ für alle r , so ist auch die folgende Bedingung hinreichend:

$$4\gamma < \frac{1 + \cos \psi}{1 - \cos \omega}.$$

Analog zu Satz 1₃ ergibt sich die Konvergenzbedingung:

$$4\gamma < \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \varepsilon}.$$

Setzen wir in Satz 3₁ $\psi = 0$ und ist

$$g \geq \gamma_r(1 - \cos \psi_r) \quad (r > 2),$$

so erhalten wir die hinreichende Konvergenzbedingung:

$$2g \leq 1.$$

§ 7.

Über gewisse Kettenbrüche, die von einer komplexen Veränderlichen abhängen.

Wir betrachten wiederum den Kettenbruch

$$K(z) = \left[\frac{a_r z^2}{1} \right]_1^{\infty} \quad (12)$$

unter der Voraussetzung, daß $\sum_r |a_r|$ konvergiert; es konvergieren dann sowohl die Näherungszähler wie auch die Näherungsnenner für sich gleichmäßig in jedem endlichen Bereiche der z -Ebene gegen zwei ganze transzendente Funktionen, die wir in Form gleichmäßig und absolut konvergenter unendlicher Determinanten anschreiben können¹⁾; wir setzen daher:

$$K(z) = \frac{D(z)}{J(z)}.$$

Der Nenner ist die in § 3 betrachtete Determinante. In einem Bereiche, in dem $J(z)$ nicht verschwindet (und somit auch $D(z)$ eine von Null verschiedene untere Schranke hat), konvergiert demnach der Kettenbruch $K(z)$ gleichmäßig. Solche Bereiche wurden in den Sätzen $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \dots, \gamma_2$ hergestellt, woraus unmittelbar die Konvergenzsätze A_1, A_2, \dots, I_2 folgten. Diese Sätze kann man jetzt verallgemeinern, indem man die Sätze 1 bis 3₂ auf den Kettenbruch $K(z)$ anwendet. Wir erreichen damit auch eine Verallgemeinerung der Sätze α_1 bis γ_2 .

Die Nullstellen von $J(z)$ und nur diese sind Stellen außerwesentlicher Divergenz für den Kettenbruch (12), sie sind die Pole der Funktion $K(z)$.

Wir wenden zunächst Satz 1 auf den Kettenbruch (12) an. Sei

$$z = x + iy = \rho e^{i\omega};$$

wir setzen zur Abkürzung:

$$\sum_2^{\infty} a_r = \sigma_1, \quad \sum_2^{\infty} R(a_r) = \sigma_2, \quad \sum_2^{\infty} J(a_r) = \sigma_3.$$

¹⁾ Vgl. Helge von Koch, l. c. (Fußnote 1, p. 331).

wobei $R(a_r)$ den reellen Teil, $J(a_r)$ den von der imaginären Einheit befreiten imaginären Teil von a_r bezeichnet. Aus Ungleichung (18') erhalten wir nun nach Auswertung der Quadrate und Zusammenziehen entsprechender Glieder für den Kettenbruch (12) den Konvergenzbereich:

$$(x^2 + y^2)^2 (\sigma_1^2 - \sigma_2^2 - \sigma_3^2) \leq 2 \{x^2 (\sigma_1 + \sigma_2) - 2xy\sigma_3 + y^2 (\sigma_1 - \sigma_2)\}. \quad (24)$$

Ist $s_3 = 0$, so ist die Begrenzung dieses Bereiches eine „Boothsche elliptische Lemniskate“¹⁾. Im allgemeinen können wir uns leichter über den Bereich (24) orientieren, wenn wir zu Polarkoordinaten übergehen. Aus Ungleichung (24) wird dann nach einer leichten Umformung:

$$\varrho^2 (\sigma_1^2 - \sigma_2^2 - \sigma_3^2) \leq 2 (\sigma_2 \cos 2\omega - \sigma_3 \sin 2\omega + \sigma_1).$$

Aus dieser Ungleichung ergibt sich sofort, daß ϱ^2 seinen kleinsten Wert für

$$\cos 2\omega = -\frac{\sigma_2}{(\sigma_2^2 + \sigma_3^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad \sin 2\omega = \frac{\sigma_3}{(\sigma_2^2 + \sigma_3^2)^{\frac{1}{2}}}$$

annimmt, und zwar ist

$$\varrho_{\min.}^2 = \frac{2}{\sigma_1 + (\sigma_2^2 + \sigma_3^2)^{\frac{1}{2}}};$$

ebenso erhält man

$$\varrho_{\max.}^2 = \frac{2}{\sigma_1 - (\sigma_2^2 + \sigma_3^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Dabei ist (vgl. p. 345):

$$\sigma_1^2 - \sigma_2^2 - \sigma_3^2 > 0. \quad (25)$$

Der um den Nullpunkt mit dem Radius

$$\left(\frac{2}{\sigma_1 + (\sigma_2^2 + \sigma_3^2)^{\frac{1}{2}}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

gezogene Kreis liegt also im Innern des Bereiches (21) und a fortiori der konzentrische Kreis mit dem Radius $\frac{1}{\sigma_1^{\frac{1}{2}}}$.

¹⁾ Über diese Kurven vgl. z. B. Heinrich Wieleitner, Spezielle ebene Kurven, § 3. (Sammlung Schubert, Bd. 56.)

Soll in (25) Gleichheit gelten, so müssen alle a_r auf einem Halbstrahl liegen; der Konvergenzbereich erstreckt sich dann über die ganze Ebene mit Ausnahme derjenigen durch den Nullpunkt gehenden Geraden, auf welcher $a_r z^2$ reell und negativ wird; jedoch findet auch auf dieser Geraden für die Punkte

$$(x^2 + y^2) \sigma_1 < 1$$

sicherlich Konvergenz statt. Dieser Extremfall ist schon in einem viel allgemeineren Stieltjesschen Satze enthalten¹⁾.

In dem Bereiche (24) sind natürlich die Bereiche (7₁') und (7₂') (vgl. die Sätze A_1 und A_2) auch enthalten.

Wenden wir nun auf den Kettenbruch (12) den Satz 2, an, so ergeben sich aus den Ungleichungen (21₁) jetzt die folgenden:

$$Q^2 r_{r+1} \{1 - \cos(\vartheta_{r+1} + 2\omega - \psi)\} < (1 + \cos \psi)(1 - \delta_r) \delta_{r+1} \quad (r > 1),$$

oder

$$Q^2 \sin^2 \left(\frac{\vartheta_{r+1} - \psi}{2} + \omega \right) < \frac{1 + \cos \psi}{2 r_{r+1}} (1 - \delta_r) \delta_{r+1} \quad (r > 1), \quad (26)$$

und dies kann man auch so schreiben:

$$\begin{aligned} Q^2 \left(\sin \frac{\vartheta_{r+1} - \psi}{2} \cos \omega + \cos \frac{\vartheta_{r+1} - \psi}{2} \sin \omega \right)^2 \\ < \frac{1 + \cos \psi}{2 r_{r+1}} (1 - \delta_r) \delta_{r+1} \quad (r > 1); \end{aligned}$$

schließlich in rechtwinkligen Koordinaten:

$$\left(x \sin \frac{\vartheta_{r+1} - \psi}{2} + y \cos \frac{\vartheta_{r+1} - \psi}{2} \right)^2 < \frac{1 + \cos \psi}{2 r_{r+1}} (1 - \delta_r) \delta_{r+1} \quad (r > 1).$$

Für ein einzelnes r gibt diese Ungleichung einen durch zwei parallele Geraden begrenzten Ebenenstreifen. Diese Streifen ändern im allgemeinen mit r ihre Breite und ihre Richtung. Bezeichnen wir mit B den gemeinsamen Bereich aller dieser

¹⁾ T. J. Stieltjes, Recherches sur les fractions continues. Annales de la Fac. des sc. de Toulouse pour les sc. math., t. 8, J, p. 1-122 (1894); t. 9, A, p. 1-47 (1895).

Streifen, so ist B ein Konvergenzbereich für den Kettenbruch (12). Im Innern dieses Bereiches ist der Kettenbruch sicher konvergent, denn es gelten in (26) die Ungleichheiten; damit er in einem Punkte der Begrenzung von B konvergiert, muß für diesen Punkt auch eine den Bedingungen a bis c hier entsprechende Nebenbedingung erfüllt sein.

Der Bereich B hängt von η' und den δ_r ab, wobei η' nur von π verschieden, sonst aber beliebig sein kann, und die δ_r beliebig (natürlich nicht außerhalb des Intervalles 0 bis 1) gewählt werden können.

Aus (26) ist ersichtlich, daß für die Begrenzung des r^{ten} Streifens

$$\varrho^2 > \frac{1 + \cos \eta'}{2 r_{r+1}} (1 - \delta_r) \delta_{r+1}$$

ist. Bezeichnet also τ^2 eine untere Schranke der Zahlen

$$\frac{1 + \cos \eta'}{2 r_{r+1}} (1 - \delta_r) \delta_{r+1} \quad (r = 1, 2, 3, \dots),$$

so ist der um den Nullpunkt mit dem Radius τ gezogene Kreis in dem Konvergenzbereich B enthalten.

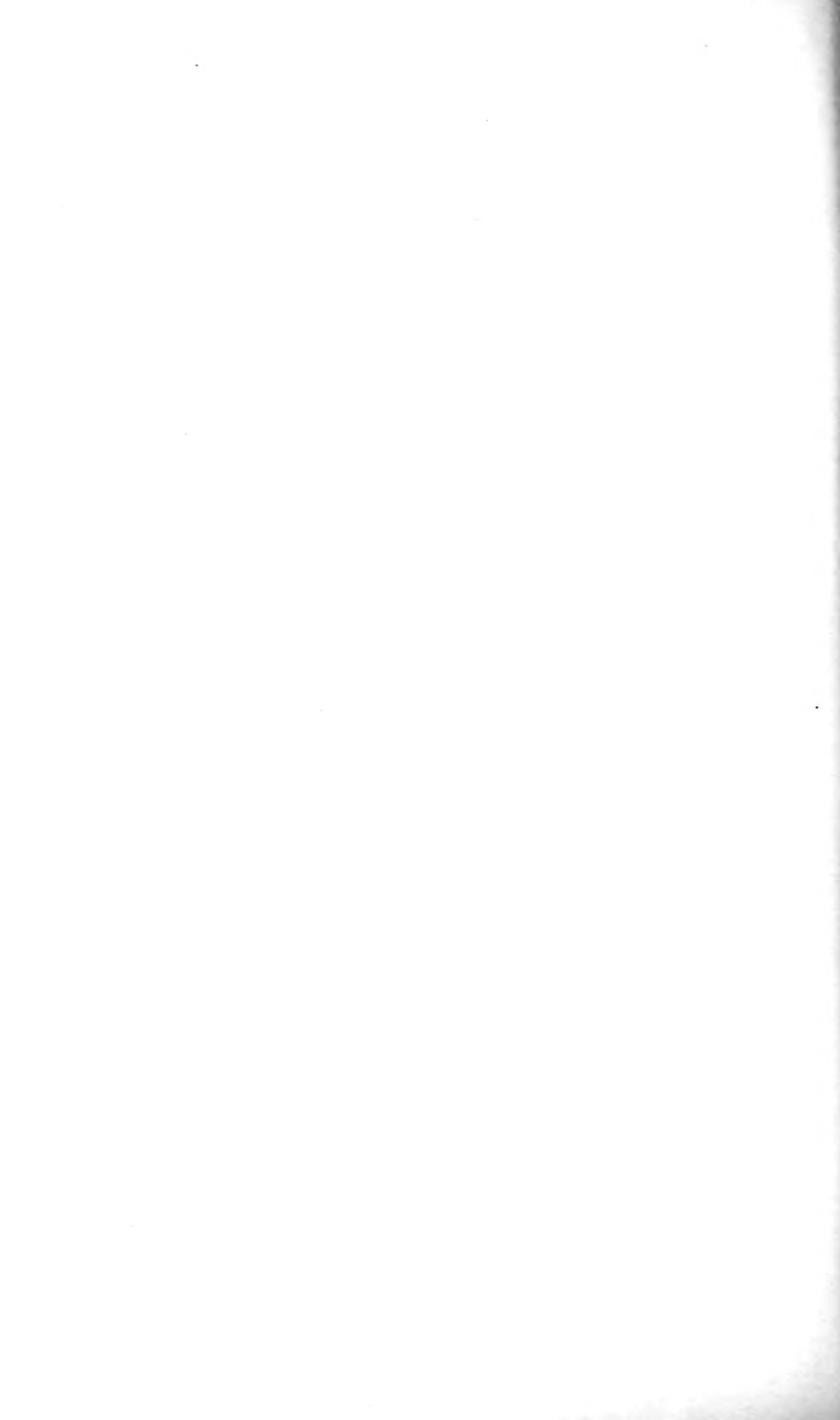
Auf analoge Weise kann man die Sätze 2_2 bis 3_2 auf den Kettenbruch (12) anwenden.

Eine Erweiterung dieser Untersuchungen auf Kettenbrüche, bei denen $\sum r_r$ nicht konvergieren muß, möchte ich in einer anderen Arbeit geben.

Berichtigung.

Auf Seite 331 ist in der ersten Gleichung von § 3 links e^r durch e_r zu ersetzen.

Auf Seite 334 ist in der dritten Gleichung von unten der Faktor $e^{-i\theta_{r+1}}$ durch $e^{i\theta_{r+1}}$ zu ersetzen.



Eine quantitative Prüfung der Theorie für die Interferenz-Erscheinungen bei Röntgenstrahlen.

Von **M. Laue.**

Vorgelegt von A. Sommerfeld in der Sitzung am 6. Juli 1912.

Vor kurzem veröffentlichten W. Friedrich, P. Knipping und der Verfasser¹⁾ an dieser Stelle Beobachtungen über Interferenzerscheinungen, die beim Durchgang von Röntgenstrahlen durch Kristalle entstehen, sowie eine Theorie dazu, welche sich qualitativ der Erfahrung anschloß. Jetzt soll diese Theorie einer ersten quantitativen Prüfung unterzogen werden. Mag es sein, daß es dabei nicht gelingt, zur vollen Wahrheit durchzudringen, daß besonders die Werte für die Wellenlängen der Röntgenstrahlen später ersetzt werden müssen durch andere, welche zu ihnen in einfachen, rationalen Verhältnissen stehen. Das eine geht wohl aus der weitgehenden Übereinstimmung mit der Erfahrung hervor: daß die Theorie auf dem rechten Wege ist. Zugleich mag das Folgende als Beispiel für das Verfahren nützlich sein, nach welchem Photogramme, wie die dort veröffentlichten, auszuwerten sind. Wir wählen dazu die Fig. 5 auf Tafel II, bei welcher das regulär kristallisierte Zinksulfid parallel einer vierzähligen Symmetrieachse durchstrahlt wird. Die Gitterkonstante a ergibt sich aus der Überlegung, daß jedem Elementarwürfel dieses Gitters ein Zink- und ein Schwefelatom entspricht. Bezeichnet also

¹⁾ W. Friedrich, P. Knipping und M. Laue, diese Verhandlungen 1912, p. 303. Die dortige Numerierung der Gleichungen und Figuren wird hier fortgesetzt.

$$N = 6,17 \cdot 10^{23}$$

die Zahl der Molekeln im Mol¹⁾,

$$m = 65,4 + 32 = 97,4$$

das Molekulargewicht und

$$\delta = 4,06$$

die Dichte²⁾, so muß

$$a^3 N = \frac{m}{\delta} \quad 10)$$

sein, weil beide Seiten der Gleichung das Volumen eines Mols darstellen. Daraus folgt:

$$a = 3,38 \cdot 10^{-8} \text{ cm.} \quad 11)$$

Wie schon erwähnt (p. 307), legt man zweckmäßig die Koordinatenachsen in die Richtungen der Würfelkanten. Die drei Sinusquotienten des Intensitätsausdruckes 6) haben dann nach 8) ihre Maxima auf den Kegelflächen

$$\alpha = h_1 \frac{\lambda}{a}, \quad \beta = h_2 \frac{\lambda}{a}, \quad 1 - \gamma = h_3 \frac{\lambda}{a}.$$

Die Schnitte der beiden ersteren Scharen mit der senkrecht zur z -Richtung stehenden photographischen Platte sind Hyperbeln, während die Gleichung $\gamma = \text{const.}$ konzentrische Kreise um den Durchstoßpunkt des primären Strahles ergibt; die Radien dieser Kreise sind proportional zur Tangente des Achsenwinkels

$$\varphi = \arccos \gamma$$

der zugehörigen Kreisegel.

Um das Photogramm theoretisch nachzukonstruieren, ersetzt man zweckmäßig die wirklichen Koordinaten

$$x = a \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad y = \beta \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

eines Punktes auf der Platte durch α und β als rechtwinklige Koordinaten. Dann bekommen die Kreise

¹⁾ M. Planck, Wärmestrahlung. Leipzig 1906, p. 162.

²⁾ Landolt-Börnstein, Tabellen. Berlin 1894, p. 62 p.

$$\gamma = \sqrt{1 - (\alpha^2 + \beta^2)} = \text{const.}$$

Radien gleich

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \sin \varphi.$$

In radialer Richtung ist also die Zeichnung gegen das Photogramm verzerrt. Erhalten dagegen bleiben alle Winkel, deren Spitze im Mittelpunkt liegt und damit die Winkelabstände der zu berechnenden Flecken, weil

$$\alpha : \beta = x : y$$

ist. Vor allem aber werden die Kurven $\alpha = \text{const.}$ und $\beta = \text{const.}$ jetzt zu den Koordinatenachsen parallele äquidistante Gerade; benutzt man bei der Zeichnung $\frac{\lambda}{a}$ als Längeneinheit, so findet man diese auf Koordinatenpapier unmittelbar vor. Jedem Schnittpunkt solcher Geraden entspricht ein Schnittpunkt von zwei Hyperbeln im Photogramm, d. h. ein mögliches Kreuzgitterspektrum. Es fragt sich nun, welche von diesen Punkten einem Kreise $1 - \gamma = h_3 \frac{\lambda}{a}$ naheliegen. Wie nahe sie daran liegen müssen, um wirklich sichtbar zu werden, entzieht sich vorläufig unserer Beurteilung. Wir rechnen im folgenden, als ob sie genau auf ihnen liegen müßten, d. h. als ob die Gleichungen 8) alle genau erfüllt wären. Jedem Interferenzpunkt sind dann drei ganze Zahlen h_1, h_2, h_3 , seine Ordnungszahlen, zugeordnet. Diese für spektral homogene Strahlung sicherlich nicht zutreffende Annahme hat auf die zu errechnende Lage der Interferenzpunkte keinen merklichen Einfluß. Auffälliger wird ihr Einfluß auf die zu berechnenden Werte der Wellenlänge, insofern sich diese auch dann ein wenig unterscheiden werden, wenn sie sich auf dieselbe Strahlung beziehen. So lassen sich die unten gefundenen, einige Prozente betragenden Differenzen dieser Art erklären. Wie weit dabei die tatsächliche Unbestimmtheit der Wellenlänge infolge der spektralen Inhomogenität eine Rolle spielt, bleibt eine offene Frage.

Haben wir nun für ein Intensitätsmaximum die drei Ordnungszahlen h gefunden, so bestimmt sich das Verhältnis $\frac{\lambda}{a}$ wegen der Gleichungen 8) und der Identität

$$a^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

zu

$$\frac{\lambda}{a} = \frac{2 h_3}{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}. \quad 13)$$

Die Richtungskosinus α , β , γ , d. h. die Lage eines Interferenzpunktes, bestimmt sich wegen 8) eindeutig aus den Ordnungszahlen h nach den Formeln:

$$\alpha = \frac{2 h_1 h_3}{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}, \quad \beta = \frac{2 h_2 h_3}{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}, \quad \gamma = \frac{h_1^2 + h_2^2 - h_3^2}{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}. \quad 13 a)$$

Die Koordinaten x , y eines Interferenzpunktes im Photogramm hängen natürlich außerdem noch vom Abstand z der Platte vom Kristall ab; für sie gelten die Formeln:

$$x = \frac{\alpha}{\gamma} z = \frac{2 h_1 h_3}{h_1^2 + h_2^2 - h_3^2} \cdot z, \quad y = \frac{\beta}{\gamma} z = \frac{2 h_2 h_3}{h_1^2 + h_2^2 - h_3^2} z. \quad 13 b)$$

Da die Zahlen h ganze Zahlen sind, so sind sie und damit der nach 13) bestimmte Wert $\frac{\lambda}{a}$ von kleinen Beobachtungsfehlern unabhängig.

In dem genannten Photogramm fassen wir zunächst den zweiten Ring von innen ins Auge, der einen sehr stark ausgeprägten, der Symmetrie wegen achtfachen Punkt trägt. Sein Radius, bestimmt aus dem Abstand einander gegenüberliegender Punkte, ist $r = 1,25$ cm. Da der Abstand der Platte vom Kristall $z = 3,56$ cm¹⁾ betrug, so folgt

¹⁾ Dieser Abstand z war experimentell nicht so genau bestimmt, wie er hier angegeben ist, schon weil der photographische Film nie ganz eben ist. Der Wert 3,56 cm ist so gewählt, daß die Radien der Ringe in der Berechnung möglichst genau mit den am Photogramm gemessenen stimmen. Somit enthält die Messung eines einzelnen Radius noch keine Prüfung der Theorie, sondern nur die Messung der Quotienten aus den Radien verschiedener Ringe.

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{r}{z} = 0,350, \quad \varphi = 19^\circ 20'$$

$$\cos \varphi = \gamma = 0,9436$$

$$1 - \gamma = 0,0564.$$

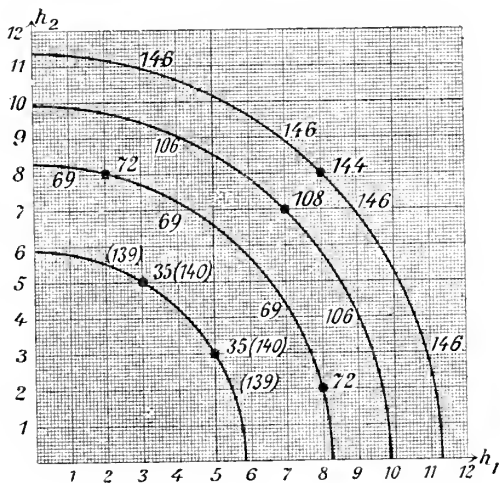
Ist der fragliche Ring von der 1. Ordnung, so muß nach der dritten der Gleichungen 8)

$$\frac{\lambda}{a} = 0,0564 \quad (14)$$

sein. Dann aber müssen wir wegen der Ganzzahligkeit der h nach 13) schließen:

$$\Sigma h^2 = h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 = 36.$$

Fig. 3.



Auf dem Koordinatenpapier (Fig. 3) findet man nun leicht die Punkte

$$h_1 = 3, \quad h_2 = 5$$

$$h_1 = 5, \quad h_2 = 3,$$

für welche, wenn $h_3 = 1$, $\Sigma h^2 = 35$ ist. Messen wir ihre

Winkelabstände gegeneinander und gegen die Achsen, so finden wir völlige Übereinstimmung mit der Lage jener acht Punkte im Photogramm. Somit werden wir dieser Wellenlänge den achtfachen Punkt

$$\begin{array}{cccccc} h_1 & h_2 & h_3 & \Sigma h^2 & \frac{\lambda}{a} & \text{nach 13)} \\ 3 & 5 & 1 & 35 & \frac{2}{35} & = 0,0571 \end{array}$$

zuschreiben. Die Differenz zwischen diesem Werte von $\frac{\lambda}{a}$ und dem in 14) gegebenen liegt völlig innerhalb der Fehlergrenze.

Könnte nun dieser Ring von der 2. Ordnung sein? Wohl kaum; denn sonst bekämen die betrachteten Punkte die Ordnungszahlen

$$6 \quad | \quad 10 \quad | \quad 2 \quad | \quad 140,$$

und die Figur zeigt, daß die Punkte

$$4 \quad 11 \quad 2 \quad 141^1)$$

dem durch sie führenden Kreis so nahe liegen, daß noch ein weiterer achtfacher Punkt zu erwarten wäre, der tatsächlich auf dem Photogramm nicht vorhanden ist.

Fragen wir weiter, ob es für die oben berechnete Wellenlänge einen Ring 2. Ordnung gibt. Dann muß nach 13) $\Sigma h^2 = 70$ sein. In Fig. 3 findet man nun den achtfachen Punkt

$$2 \quad 8 \quad 2 \quad | \quad 72 \quad | \quad \frac{4}{72} = 0,0555.$$

Der Radius dieses Ringes im Photogramm berechnet sich nach dem Schema:

$$1 - \gamma = 2 \frac{\lambda}{a} = 0,1111, \quad \gamma = 0,8889, \quad \varphi = 27^\circ 16'$$

$$\text{tg } \varphi = 0,5154, \quad r = z \text{ tg } \varphi = 3,56 \cdot 0,5154 = 1,84 \text{ cm.}$$

¹⁾ In Fig. 3 ist Ziffer 139 durch 141 und Ziffer 108 durch 107 zu ersetzen.

In der Tat finden sich in dem Photogramm acht Punkte, deren Abstand vom Mittelpunkt diesen Wert hat, und welche gegen die Achsen und gegeneinander dieselben Winkelabstände haben wie der angegebene Punkt und die sieben anderen, welche man durch Vertauschung von h_1 und h_2 , sowie durch Umkehrung der Vorzeichen dieser Zahlen daraus ableitet. Dagegen fehlen die Punkte

$$\begin{array}{cccccc} h_1 & h_2 & h_3 & \Sigma h^2 & \frac{\lambda}{a} & \text{nach 13)} \\ 4 & 8 & 2 & \left. \vphantom{\begin{array}{c} 4 \\ 8 \\ 2 \end{array}} \right\} 69 & \frac{4}{69} & = 0,0580, \\ 1 & 7 & 2 & \left. \vphantom{\begin{array}{c} 4 \\ 8 \\ 2 \end{array}} \right\} & & \end{array}$$

welche nach der Zeichnung dem Kreise auch noch recht nahe liegen.

Für einen Ring 3. Ordnung ($r = 2,26$ cm) findet sich nach Fig. 3 ein vierfacher Punkt

$$7 \quad 7 \quad 3 \quad 107 \quad \frac{6}{107} = 0,0561,$$

der im Photogramm tatsächlich zu sehen ist, während merkwürdigerweise der Punkt

$$4 \quad 9 \quad 3 \quad 106 \quad \frac{6}{106} = 0,0567$$

fehlt. Eine Erklärung dafür läßt sich zurzeit nicht geben.

Auf dem Ring 4. Ordnung ($r = 2,88$ cm) findet sich nach Fig. 3 ein auch im Photogramm vertretener vierfacher Punkt

$$8 \quad 8 \quad 4 \quad 144 \quad \frac{8}{144} = 0,0555,$$

während die Punkte

$$\begin{array}{cccc} 11 & 3 & 4 & \left. \vphantom{\begin{array}{c} 11 \\ 3 \\ 4 \end{array}} \right\} \\ 7 & 9 & 4 & \left. \vphantom{\begin{array}{c} 11 \\ 3 \\ 4 \end{array}} \right\} 146 \quad \frac{8}{146} = 0,0548 \end{array}$$

fehlen. Der Ring 5. Ordnung liefert nach der Zeichnung keinen Punkt. Er würde im Photogramm schon vollkommen außerhalb des Bereiches der Interferenzpunkte liegen.

Übersieht man diese Zusammenstellung, so erscheint ziemlich sicher, daß $\frac{\lambda}{a}$ zwischen 0,0555 und 0,0571, also etwa bei 0,0563 liegt, was nach 11) auf den Wert

$$\lambda = 1,90 \cdot 10^{-9} \text{ cm}$$

führt. Unaufgeklärt bleibt nur das Fehlen des einen Punktes im Ring 3. Ordnung. Daß für $\frac{\lambda}{a}$ nicht überall derselbe Wert herauskommt, liegt daran, daß die drei Beziehungen 8) nicht alle streng erfüllt sein können, wie in Gleichung 13) angenommen war. Ob die spektrale Breite der Strahlung so groß ist, daß alle Wellenlängen zwischen den angegebenen Grenzen vorkommen, muß noch dahingestellt bleiben. Hervorgehoben soll noch werden, daß die sechs stärksten Punkte in dem dreizählig symmetrischen Photogramm, Tafel III, Fig. 7 ebenfalls auf diese Wellenlänge hinweisen. Ihr entspricht zweifellos die stärkste von allen vom Zinksulfid ausgehenden Strahlungen.

Ganz analog findet man für den innersten schwachen Ring der vierzählig symmetrischen Aufnahme ($r = 1,01 \text{ cm}$) die Punkte:

$$\begin{array}{ccc|c|c} h_1 & h_2 & h_3 & \Sigma h^2 & \frac{\lambda}{a} \text{ nach 13) } \\ 1 & 7 & 1 & \left. \vphantom{\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & 1 \\ 5 & 5 & 1 \end{array}} \right\} 51 & \frac{2}{51} = 0,0392, \\ 5 & 5 & 1 & \end{array}$$

von denen der erste achtfach, der zweite vierfach vertreten ist. Dazu gehört als Ring 2. Ordnung der stark ausgebildete 3. Ring von innen ($r = 1,46 \text{ cm}$) mit dem achtfachen Punkt

$$2 \quad \left| \quad 10 \quad \right| \quad 2 \quad \left| \quad 108 \quad \right| \quad \frac{4}{108} = 0,0370.$$

Weitere Ringe fehlen, trotzdem auf ihnen nach der Konstruktion noch weitere Punkte liegen könnten. Es stimmt dies damit überein, daß nach außen die Intensitäten der Interferenzpunkte schnell abnehmen.

Das Verhältnis $\frac{\lambda}{a}$ dürfte somit für diese Gruppe von Interferenzpunkten zwischen 0,0392 und 0,0370 liegen, und zwar, da der innere Ring soviel schwächer als der äußere ist, näher an dem letzteren Wert. Nehmen wir $\frac{\lambda}{a} = 0,0377$ an, so wird nach 11)

$$\lambda = 1,27 \cdot 10^{-9} \text{ cm.}$$

Sehr auffällig sind in dem Photogramm die vier Gruppen von je drei eng benachbarten Flecken, welche im Abstand $r = 2,67$ cm vom Mittelpunkt auf den Koordinatenachsen liegen. Diese lassen sich ungezwungen durch einen Ring 3. Ordnung mit der Wellenlänge

$$\lambda = 0,0663 a = 2,24 \cdot 10^{-9} \text{ cm}$$

erklären, auf welchem nach der Zeichnung die Punkte

h_1	h_2	h_3	Σh^2	$\frac{\lambda}{a}$ nach 13)
0	9	3	90	$\frac{6}{90} = 0,0667$
1	9	3	91	$\frac{6}{91} = 0,0659$

liegen, von denen der erste ein vierfacher, der zweite ein achtfacher ist. Dieselbe Wellenlänge gehört zu einem Ring 4. Ordnung ($r = 3,31$ cm) mit den achtfachen Punkten

2	10	4	120	$\frac{8}{120} = 0,0667,$
---	----	---	-----	---------------------------

während der auch noch in Betracht kommende Punkt

1	10	4	117	$\frac{8}{117} = 0,0683$
---	----	---	-----	--------------------------

fehlt. Daß hier kein Ring 2. Ordnung auftritt, erklärt die Zeichnung damit, daß der einzige dafür in Betracht kommende Punkt

h_1	h_2	h_3	Σh^2	$\frac{\lambda}{a}$ nach 13)
3	7	2	62	$\frac{4}{62} = 0.0645$

schon zu wenig zu dieser Wellenlänge paßt. Unerklärt bleibt dagegen, weswegen kein Ring 1. Ordnung auftritt; der Punkt

2	5	1	30	$\frac{2}{30} = 0.0667$
---	---	---	----	-------------------------

würde vortrefflich zu den oben angegebenen stimmen.

Ferner finden wir noch einen Ring 1. Ordnung ($r = 1.78$ cm) für die nur schwach vertretene Wellenlänge

$$\lambda = 0,1051 a = 3,55 \cdot 10^{-9} \text{ cm}$$

mit dem vierfachen Punkt

3	3	1	19	$\frac{2}{19} = 0,1051.$
---	---	---	----	--------------------------

Ein Ring 2. Ordnung tritt nicht auf, obwohl der Punkt

3	5	2	38	$\frac{4}{38} = 0,1051$
---	---	---	----	-------------------------

gut zu den angegebenen paßte. Es erklärt sich dies wohl aus dem allgemeinen Abklingen der Intensität nach außen.

Die längste der bisher berechneten Wellenlängen ist aber

$$\lambda = 0,1428 a = 4,83 \cdot 10^{-9} \text{ cm},$$

welche mit dem achtfachen Punkt

2	3	1	14	$\frac{2}{14} = 0,1428$
---	---	---	----	-------------------------

einen Ring 1. Ordnung ($r = 2,12$ cm) bildet. Der zugehörige Ring 2. Ordnung würde schon außerhalb des Gesichtsfeldes liegen.

In Fig. 6. Tafel II ist, um den Vergleich mit der Erfahrung zu erleichtern, das Photogramm 5 auf Tafel II unmittelbar aus den hier angegebenen Zahlen h_1 , h_2 , h_3 nach den Gleichungen

13b) und unter der Annahme $z = 3,56$ cm nachkonstruiert worden. Der Leser mag sich selber durch Abgreifen mit dem Zirkel von der Übereinstimmung der Figur mit dem Photogramm überzeugen. Fortgelassen sind in der Zeichnung nur die beiden Punkte, deren Fehlen im Photogramm unerklärt blieb, und einige Punkte in den äußeren Teilen des Photogrammes, welche bisher noch nicht durchgerechnet sind. Abgesehen von den beiden mehrfach erwähnten Ausnahmen, erklärt also die Theorie, weshalb gerade die beobachteten Interferenzpunkte und nur diese auftreten; sie leistet dies unter Annahme von niedrigen Ordnungszahlen (< 10) und von Wellenlängen, welche von der erwarteten Größenordnung 10^{-9} cm sind.

An den obigen Angaben sind meiner Überzeugung nach sicher die Verhältnisse zwischen den Ordnungszahlen h_1, h_2, h_3 , von denen nach 13b) die Lage der Interferenzpunkte allein abhängt. Nicht ebenso sicher sind diese Zahlen selbst und damit auch nicht die angegebenen Werte der Wellenlängen. Immerhin sei bemerkt, daß ich mich für die angegebenen Werte erst nach Prüfung mancher anderer Möglichkeiten entschieden habe. Verdächtig ist z. B., daß die angegebenen Wellenlängen sich verhalten wie

$$1,27 : 1,90 : 2,24 : 3,55 : 4,83 = 4 : 6 : 7 : 11 : 15.$$

Wollte man aber alle errechneten Interferenzpunkte auf die Wellenlänge $\frac{1}{4} 1,27 \cdot 10^{-9} = 3,20 \cdot 10^{-10}$ cm zurückführen, so müßten, soweit ich sehe, noch viele andere Interferenzpunkte vorhanden sein, die tatsächlich nicht auftreten. Auch sonst sprechen mancherlei Umstände gegen die Annahme einer einzigen Strahlung, z. B. die Härtemessungen (p. 321). Wie dem aber auch sein mag, in der Übereinstimmung der Fig. 6 mit dem Photogramm 5 scheint mir eine weitgehende Bestätigung der Interferenztheorie dieser Erscheinungen zu liegen.

München, Institut für theoretische Physik, Juli 1912.



Bemerkung über den Energieverlust von Elektronen beim Zusammenstoß mit Gasmolekülen.

Von R. Seeliger.

Vorgelegt von A. Sommerfeld in der Sitzung am 6. Juli 1912.

Die Theorie der Energieelemente, die in ihrer ursprünglichen Form auf periodische Vorgänge beschränkt ist, hat Herr Sommerfeld¹⁾ bekanntlich in Form einer Theorie der „Wirkungselemente“ auf unperiodische Vorgänge (reine Molekularprozesse) erweitert und schon damals als Beispiel für diese neue und umfassende Anwendungsmöglichkeit zu einer Theorie des lichtelektrischen Effektes benutzt. Vor kurzem skizzierte nun Herr Sommerfeld in Brüssel als Ergänzung zu seiner Auffassung des lichtelektrischen Effektes und der Entstehung der Röntgenstrahlen auf derselben Grundlage eine Theorie der Ionisation durch Stoß. Wenn nun auch damit nur ein erster, und wie Sommerfeld selbst meint, in vielen Punkten noch unbefriedigender Versuch zu einer Deutung der Erscheinungen der Stoßionisation gegeben ist, so werden doch durch die von ihm vertretenen Anschauungen eine Reihe von Fragen angeregt, deren Diskussion vielleicht zu einer weiteren Klärung der Sachlage beitragen kann. Als minimale Energiemenge, die von dem stoßenden Elektron auf das gestoßene Molekül übertragen werden kann, findet Sommerfeld aus der maximalen Größe des Bremsweges $l = 2\sigma =$ Durchmesser des Moleküls den Betrag

¹⁾ Phys. Zeitschrift 12, p. 1057, 1911.

von $1,5 \cdot 10^{-11}$ Erg (entsprechend 9,3 Volt)¹⁾; hat ein Elektron eine kleinere kinetische Energie als diese, so könnte es überhaupt nicht gebremst werden: „Weder reicht die zur Verfügung stehende Zeit, die durch die Ausdehnung des Moleküls bestimmt ist. für die Energieübertragung aus noch die zur Verfügung stehende kinetische Energie zur Ionisierung.“

Im Zusammenhang damit dürfte nun vielleicht die Frage nicht ohne Interesse sein, wie groß die Energiemengen sind, die bei einem ionisierenden oder einem nichtionisierenden Zusammenstoß von einem Elektron auf ein Molekül übertragen werden bzw. ob überhaupt keine kleineren Energiemengen als $1,5 \cdot 10^{-11}$ Erg übertragen werden können. Ganz abgesehen davon, daß wir es bei einem solchen Stoß mit dem einzigen oder einem der wenigen Fälle zu tun haben, bei denen derartig kleine Energieübertragungen von einem System auf ein anderes stattfinden und die experimentell sich untersuchen lassen, kann man aus der Abhängigkeit der übertragenen Energiemengen von der Geschwindigkeit des Elektrons Schlüsse auf den Mechanismus eines solchen „Zusammenstoßes“ ziehen. Nach den vorliegenden experimentellen Untersuchungen über Absorption und Zerstreung von Kathodenstrahlen sind verschiedene Arten von Zusammenstößen zwischen Elektronen und Molekülen möglich, von solchen, die sich lediglich in einer Deflexion des Elektrons ohne Geschwindigkeitsverlust äußern bis zu solchen, die mit einer Ionisation des Moleküls und also mit einem Energieverlust des Elektrons $\geq 1,5 \cdot 10^{-11}$ Erg verbunden sind. Die Frage, ob ohne Stoßionisation eine Energieübertragung stattfinden kann, läßt sich also auch dahin formulieren, ob Energieübertragungen von kleineren Beträgen als etwa 10^{-11} Erg auftreten. Daß ein Elektron Energie in beliebig kleinen Mengen an ein Feld abgeben kann, daß es insbesondere z. B. durch ein gegengeschaltetes elektrisches Feld bis zur Geschwindigkeit Null kontinuierlich abgebremst werden kann, unterliegt wohl

1) Unter der vereinfachenden Annahme, daß das Molekül keine Affinität gegen das Elektron hat, und mit dem Werte σ für Helium.

keinem Zweifel. Weniger einfach liegen die Verhältnisse dagegen in Fällen wie den hier behandelten, wo es sich, wie schon erwähnt, um eine Energieübertragung zwischen einem Elektron und einem individuellen „elementaren“ System (Atom oder Molekül) handelt. Unter welchen Umständen dabei eine quantenhafte Energieübertragung stattfindet und auf welche Fälle die von Sommerfeld eingeführte Atomwirksamkeit und die Rolle des h zu beschränken ist, scheint mir noch durchaus ungeklärt zu sein. Es lassen sich diese Fälle bis jetzt vielleicht am besten dadurch charakterisieren, daß dabei das Atom „eine Klappe auf tut“, ein Ausdruck, den ich einer gütigen brieflichen Mitteilung von Herrn Sommerfeld verdanke.

Es liegen bisher leider nur ganz wenige experimentelle Daten vor, die zu einer Beantwortung der Frage heranzuziehen sind, ob Energiemengen $< 10^{-11}$ Erg von einem Elektron auf ein Molekül übertragen werden können; soweit ich sehe, kommen nur zwei in Betracht, die ich früher¹⁾ zu anderen Zwecken diskutiert habe. Ich versuchte dort die bremsende Kraft zu berechnen, die ein Elektron in einem Gas erleidet, und fand für langsame (ungefähr 10 Volt) Elektronen in Wasserstoff von 0,1 mm Hg für sie den Wert $1,4 \cdot 10^{-12}$ Dyn, für schnellere (900 Volt) in Luft von 0,01 mm Hg den Wert $3,1 \cdot 10^{-13}$ Dyn. Der erstere Wert ergibt für eine Strecke von 3,5 cm (auf welcher die Elektronen bis zur Ionisierungsgeschwindigkeit beschleunigt werden) einen Energieverlust von $5 \cdot 10^{-12}$ Erg. Da nun einerseits aus den benützten Beobachtungen für die Abhängigkeit des Schichtpotentials vom Druck die Existenz einer Reibungskraft mit einiger Notwendigkeit mir zu folgen scheint, andererseits die freie Weglänge eines Elektrons unter den genannten Bedingungen nur etwa $\leq 0,75$ cm ist, so liegt es nahe, den obigen Energieverlust durch die Zusammenstöße des Elektrons mit Molekülen zu erklären; dabei handelt es sich um Stöße ohne Stoßionisation, da die Energie des Elek-

¹⁾ Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft 13, p. 1094, 1911.

trons auf dem ganzen Weg noch nicht den zur Stoßionisation nötigen Schwellenwert erreicht hat. Wir hätten also hier Energieübertragungen, welche den Betrag von 10^{-11} Erg erheblich unterschreiten und zwischen einem Elektron von kleinerer als der Ionisierungsgeschwindigkeit und Molekülen stattfinden. Mit allerdings geringerer Wahrscheinlichkeit glaube ich auch aus dem zweiten loc. cit. zitierten Beispiel auf derartige Vorgänge schließen zu können. Es handelt sich um die spiralige Bahn von Elektronen in einem homogenen Magnetfeld, deren Länge 50 cm beträgt. Der Energieverlust längs dieser ganzen Bahn berechnet sich aus den loc. cit. gegebenen Formeln zu $50 \cdot 3 \cdot 10^{-13} = 1,5 \cdot 10^{-11}$ Erg. Bei einigen Elektronen ist der Energieverlust sicher einem einmaligen ionisierenden Zusammenstoß zuzuschreiben; zieht man jedoch die freie Weglänge, die unter den Versuchsbedingungen (0,01 mm Hg Luft) etwa 5 cm beträgt und für ionisierende Stöße etwa 5 mal so groß ist¹⁾, in Betracht, so ist man, wie ich glaube und wie sich z. B. aus dem scharfen Rand der spiraligen Strahlenbahn schließen läßt, auch hier zu dem Schluß berechtigt, daß Zusammenstöße mit Energieübertragungen von Beträgen $< 1,5 \cdot 10^{-11}$ Erg vorkommen. Bei gleichmäßiger Verteilung auf alle Stöße ergibt sich in guter Übereinstimmung mit dem Obigen ein Energieverlust von $1,5 \cdot 10^{-12}$ Erg für einen einzelnen Stoß, der dann natürlich nicht mehr mit Ionisation verbunden ist, obwohl die Elektronen erheblich größere (900 Volt) Geschwindigkeit besitzen als die Ionisierungsgeschwindigkeit. Man kann ferner jedenfalls mit einiger Bestimmtheit aus der gesamten Bremsung um $1,5 \cdot 10^{-11}$ Erg und aus dem scharfen Verlauf des Strahles den Schluß ziehen, daß bei einem mit Stoßionisation verbundenen Zusammenstoß das Elektron nicht wesentlich mehr als die Ionisierungsenergie abgibt, die gerade gleich dem obigen Betrag ist, daß also der Energieumsatz nicht in der zweiten nach Sommerfeld möglichen Weise vor sich geht, bei welcher das Elektron ein erheblich größeres Energiequantum

¹⁾ Vgl. R. Seeliger, Ann. Phys. 38, p. 764, 1912.

als 10^{-11} Erg verliert und ein Teil von diesem das neu erzeugte Elektron erhält.

Ähnliche kleine Bremsenergien wie für Gase sind nun auch beim Durchgang von Kathodenstrahlen durch dünne Metallschichten zu erwarten und es ist für einen direkten experimentellen Nachweis derselben durchaus nicht aussichtslos, Versuche an solchen anzustellen. Läßt man ein Bündel von homogenen Kathodenstrahlen durch eine dünne Metallfolie gehen, so ist es nach dem Durchgang inhomogen; nach den Versuchen von Leithäuser¹⁾ wird es durch ein Magnetfeld in ein kontinuierliches Spektrum auseinandergezogen. Wenn es nun für die bei jedem Zusammenstoß zwischen einem Elektron und einem Metallatom übertragene Energie einen Schwellenwert V_0 gibt, so muß das Spektrum nicht kontinuierlich, sondern diskontinuierlich sein in Abständen, die jeweils Geschwindigkeitsdifferenzen $\sqrt{V_0}$ entsprechen, da die Endgeschwindigkeit jedes Elektrons sich additiv zusammensetzt aus der Primärgeschwindigkeit und den Geschwindigkeitsverlusten bei den einzelnen Zusammenstößen. In den Leithäuserschen Resultaten kann sich eine derartige „Kannelierung“ des Spektrums wegen der zu geringen auflösenden Kraft seines Magnetfeldes nicht zeigen. Daß es (unter Anwendung der nötigen experimentellen Vorsichtsmaßregeln gegen diffuse Strahlung und dergleichen) jedoch durchaus möglich ist, das Vorhandensein oder Nichtvorhandensein einer unteren Grenze für die elementare Bremsenergie nachzuweisen, die etwa wie oben zu 9 Volt angenommen werde, zeigt eine leichte Überlegung. Primär homogene Strahlen von etwa 10000 Volt Geschwindigkeit herzustellen, deren Geschwindigkeit nur um einige Volt schwankt, ist durchaus möglich und ebenso würde bereits ein Feld von 1 cm Länge und etwa 10000 Gauß die nötige Dispersion besitzen, um zwei Strahlen mit einer Geschwindigkeit von 10^4 Volt und einer Geschwindigkeitsdifferenz von 9 Volt etwa $1/100$ mm zu trennen, eine Entfernung, die sich durch Schiefstellen der das

¹⁾ Ann. Phys. 15, p. 283, 1904.

Spektrum fixierenden photographischen Platte oder des Phosphoreszenzschirmes und durch Vergrößerung des Abstandes der Platte vom Magnetfeld leicht vergrößern läßt. Analoge Versuche für den Fall des Durchgangs langsamer Wehneltstrahlen durch ein Gas sind bereits im Gang.

Charlottenburg, Juni 1912.

Bestimmungen des thermischen linearen Ausdehnungskoeffizienten von Cuprit und Diamant.

Von W. C. Röntgen.

Vorgetragen in der Sitzung vom 6. Juli 1912.

Bei seinen bekannten, auf eine große Anzahl von Kristallen ausgedehnten Untersuchungen über die thermischen Ausdehnungskoeffizienten erhielt Fizeau u. a. das Resultat, daß diese Koeffizienten für Cuprit und Diamant innerhalb der gewählten Beobachtungstemperaturgrenzen von ca. 70° bis ca. 20° verhältnismäßig klein sind und in diesem Gebiet eine ziemlich rasche Abnahme mit abnehmender Temperatur aufweisen. Fizeau stellte das Resultat seiner Beobachtungen durch die empirischen Formeln

$$\frac{1}{l_0} \frac{dl}{dt} = \alpha = 60 \cdot 10^{-8} + 1.44 \cdot 10^{-8} t \quad \text{für Diamant}$$

und

$$\alpha = 9 \cdot 10^{-8} + 2.10 \cdot 10^{-8} t \quad \text{für Cuprit}$$

dar.

Aus diesen Ergebnissen zog er den Schluß, daß der Diamant bei $t = -41.7$ und der Cuprit bei $t = -4.3$ ein Dichtemaximum besitzen müsse. Dieses für Kristalle des regulären Systems merkwürdige Resultat war mir schon vor sehr langer Zeit aufgefallen, und ich hatte mir vorgenommen eine sich anbietende Gelegenheit zu benützen, um dasselbe einer direkten Prüfung zu unterwerfen. Die zu Fizeaus Zeiten noch bestehende Schwierigkeit, längere Zeit konstant bleibende tiefe Temperaturen herzustellen, ist heutzutage durch die Leichtigkeit der

Beschaffung von flüssigem Kohlendioxyd und von flüssiger Luft nicht mehr vorhanden.

Im Frühjahr 1910 fand ich in Fräulein A. Dembowska eine sehr geeignete Persönlichkeit, um die Untersuchung unter meiner Leitung in Angriff zu nehmen. Nicht geringe Schwierigkeiten stellten sich der Ausführung entgegen. Zunächst was die Beschaffung des Untersuchungsmaterials anbetrifft; erst nach manchen fruchtlosen Versuchen mit Kristallen verschiedener Herkunft gelang es durch das freundliche Entgegenkommen von Herrn Professor A. Nies in Mainz geeignete Cupritkristalle und durch die besondere Bereitwilligkeit der Firma Ginsberg in Hanau brauchbare Diamanten zu erhalten. Den genannten Herren spreche ich meinen verbindlichsten Dank aus. Dann zeigte es sich, daß es trotz der vorzüglichen Einrichtung des Fizeau-Abbéschen Dilatometers nicht leicht war, so geringe Beträge der Ausdehnung, wie sie die beiden genannten Körper in tieferen Temperaturen aufweisen, mit der erwünschten Sicherheit zu messen. Es mußten besondere Vorrichtungen, die an einem anderen Ort beschrieben werden sollen, ausgeführt werden. Infolge dieser Umstände verging eine ungewöhnlich lange Zeit, und es mußte ein großes Beobachtungsmaterial angesammelt und auch zum Teil wieder verworfen werden, bis die Arbeit als einigermaßen abgeschlossen betrachtet werden konnte. Ich gestatte mir im folgenden über die Ergebnisse der Arbeit kurz zu berichten.

Was zunächst das Verhalten des Cuprits anbetrifft, so ist zu erwähnen, daß, gegen meine Erwartung, die Vorhersage Fizeaus, dieser Kristall besitze bei nicht all zu tiefen Temperaturen ein Dichtemaximum, in der Tat sich als zutreffend erwies. Es gelang zwar noch nicht die Lage dieses Maximums genau festzustellen, da dasselbe ein sehr flaches ist; es konnte aber mit Sicherheit die sehr bemerkenswerte Tatsache konstatiert werden, daß der Cuprit sich bei Abkühlung von etwa 0° bis auf die Temperatur der flüssigen Luft zuerst nur wenig, dann aber sehr beträchtlich ausdehnt und zwar

niemals sprungweise, sondern durchwegs kontinuierlich. Ein auf eine Abkühlung folgende Erwärmung führt ihn wieder in seinen früheren Zustand zurück.

Der Diamant dagegen verhält sich nicht so, wie Fizeau meinte. Ich teile zunächst in folgender Tabelle die an 3.758 mm dicken, geschliffenen Diamanten gefundenen Beobachtungsergebnisse mit.

Tabelle 1.

Temperaturintervall	Längenänderung in μ		
	beobachtet	berechnet	Differenzen
84°8 (abs.) bis 194°1 (abs.)	0.075	0.073	+ 0.002
desgl. bis 273°2 (abs.)	0.247	0.248	- 0.001
desgl. bis 296°2 (abs.)	0.331	0.329	+ 0.002
desgl. bis 328°0 (abs.)	0.471	0.471	0.000
desgl. bis 351°1 (abs.)	0.597	0.598	- 0.001

Ausdrücklich wurde konstatiert, daß eine Ausdehnung des Diamanten in dem benutzten Temperaturintervall bei Abkühlung nicht eintrat. Wir berechneten deshalb aus der Tabelle 1 die mittleren Ausdehnungskoeffizienten für die verschiedenen Temperaturintervalle; sie sind in der Tabelle 2 enthalten.

Tabelle 2.

Temperaturintervall	Mittlerer linearer Ausdehnungskoeffizient	Bei der Temperatur
84°8 (abs.) bis 194°1 (abs.)	0.18×10^{-6}	139°5 (abs.)
194°1 (abs.) bis 273°2 (abs.)	0.58	233°7 (abs.)
273°2 (abs.) bis 296°2 (abs.)	0.97	284°7 (abs.)
296°2 (abs.) bis 328°0 (abs.)	1.17	312°1 (abs.)
328°0 (abs.) bis 351°1 (abs.)	1.45	339°6 (abs.)

Es ergeben sich somit aus unseren Versuchen mit Diamant unmittelbar folgende Resultate: 1. Das von Fizeau vermutete Maximum der Dichte zwischen den Temperaturen $t = 78^{\circ}$ und $t = -188^{\circ}$ existiert nicht. 2. Der mittlere Ausdehnungskoeffizient des Diamants wird in dem soeben angegebenen Temperaturintervall mit abnehmender Temperatur beträchtlich kleiner und erreicht eine ungewöhnliche kleine Größe.

Wir haben nun auch versucht aus den erhaltenen Daten Werte für den wahren Ausdehnungskoeffizienten $\alpha = \frac{1}{l_0} \frac{dl}{dt}$ zu erhalten. Das kann in diesem Fall nur dadurch geschehen, daß man eine passende Interpolationsformel wählt, die die Beobachtungen möglichst gut darstellt und dann aus ihr die Werte von α berechnet. Diesem Verfahren haftet selbstverständlich eine gewisse Unsicherheit an, die um so größer ist, je größer das Temperaturintervall ist, in dem keine Beobachtungen vorliegen, somit hier zwischen den Temperaturen $t = -79^0$ und $t = -188^0$.

Da sich nun ergab, daß die Thiesensche Formel

$$l_T - l_{T_0} = \gamma l_0 (T^{1+\epsilon} - T_0^{1+\epsilon})$$

(T bezeichnet die absolute Temperatur) mit den von uns berechneten Konstanten $\epsilon = 2.47$ und $\gamma = 2.35 \times 10^{-13}$ unsere Beobachtungen mit aller wünschenswerten Genauigkeit wiedergibt (vgl. Tabelle 1, Kolumne 2 und 3), so berechneten wir mit ihrer Hilfe die folgende Tabelle:

Tabelle 3.		
Absol. Temperatur	Celsius-Temperatur	Wahrer linearer Ausdehnungskoeffizient
353 ⁰	+ 80 ⁰	1.60 $\times 10^{-6}$
333 ⁰	+ 60 ⁰	1.39 "
323 ⁰	+ 50 ⁰	1.29 "
313 ⁰	+ 40 ⁰	1.19 "
303 ⁰	+ 30 ⁰	1.10 "
293 ⁰	+ 20 ⁰	1.01 "
273 ⁰	\pm 0 ⁰	0.85 "
253 ⁰	- 20 ⁰	0.70 "
233 ⁰	- 40 ⁰	0.57 "
213 ⁰	- 60 ⁰	0.46 "
173 ⁰	- 100 ⁰	0.27 "
133 ⁰	- 140 ⁰	0.14 "
93 ⁰	- 180 ⁰	0.06 "
83 ⁰	- 190 ⁰	0.04 ₅ "

Schenkt man der Thiesenschen Interpolationsformel das nötige Zutrauen, so wird man aus der obenstehenden Tabelle

noch besser als aus der Tabelle 2 auf eine besonders rasche Abnahme des ohnehin schon kleinen Ausdehnungskoeffizienten von Diamant in dem Temperaturintervall von $t = + 80^{\circ}$ bis $t = - 190^{\circ}$ schließen, und man wird der Ansicht Ausdruck geben können, daß das Verhalten des Diamants, im Vergleich zu dem der anderen Körper, bis jetzt am meisten geeignet ist, um die Wahrscheinlichkeit der von Herrn Planck aus dem Nernstschen Wärmetheorem gezogenen Folgerung, nach der der Ausdehnungskoeffizient jedes chemisch homogenen festen und flüssigen Körpers sich bei abnehmender Temperatur unbegrenzt dem Werte Null nähern muß, wenigstens für einen einzelnen Fall darzutun.

Von der Benützung noch tieferer Temperaturgebiete durch Anwendung von flüssigem Wasserstoff haben wir abgesehen. Denn die dort zu erwartenden Werte der Ausdehnung sind so klein, daß sie einer einigermaßen genauen Bestimmung nicht zugänglich sein dürften. Auch würde durch solche Versuche die Unsicherheit in der Frage, ob der Ausdehnungskoeffizient des Diamants beim absoluten Nullpunkt der Temperatur den Wert Null hat, nicht definitiv behoben, sondern höchstens auf ein noch tieferes Temperaturgebiet hinausgeschoben werden können.

Es ist nun noch von Interesse, die gewonnenen Resultate zu verwenden, um eine Beziehung zu prüfen, die vor einigen Jahren von Herrn Grüneisen ausgesprochen wurde, daß nämlich bei tieferen Temperaturen das Verhältnis von spezifischer Wärme und Ausdehnungskoeffizient fester Körper, bei gleichen Temperaturen gemessen, von der Temperatur unabhängig sein soll, das heißt, daß beide Größen durch dieselbe Temperaturfunktion dargestellt werden können. Es ist diese Prüfung um so mehr von Interesse, als bekanntermaßen durch Herrn Einstein mit Hilfe der Planckschen Quantentheorie die Grundlage für eine Theorie der spezifischen Wärme fester Körper gelegt worden ist.

Um am bequemsten zu einem Vergleiche des Temperaturverlaufes beider Größen zu gelangen, wurde folgendermaßen

verfahren. In der zweiten Kolonne der folgenden Tabelle 4 sind die von Herrn Nernst in seiner Abhandlung: Untersuchungen über die spezifische Wärme bei tiefen Temperaturen (Berl. Akad. der Wiss., 1911, p. 494) angeführten Werte der Atomwärmen des Diamants, wie sie im Temperaturintervall von $t = -70.7$ bis $t = 1058.9$ von H. F. Weber und bei tieferen Temperaturen von $t = -53^0$ bis $t = -241^0$ von Herrn Nernst beobachtet wurden, angegeben. Daneben in der dritten Kolonne stehen Werte des Produktes eines für den gewünschten Vergleich passend gewählten konstanten Faktors m und von dem Ausdehnungskoeffizienten α , wie er sich aus der Thiesenschen Formel mit $\epsilon = 2.47$ für das von uns gewählte Temperaturgebiet berechnet.

Tabelle 4.

Absol. Temperatur	Atomwärme	$m \times$ Ausdehnungskoeffizient
	A. W.	$m \times \alpha$
1169 ⁰	5.45	—
413 ⁰	2.66	—
353 ⁰	2.12	2.44
331 ⁰	1.84	2.01
306 ⁰	1.59	1.65
284 ⁰	1.35	1.37
262 ⁰	1.14	1.13
232 ⁰	0.86	0.83
221 ⁰	0.74	0.74
209 ⁰	0.66	0.65
205 ⁰	0.62	0.62
92 ⁰	0.03	0.08 ₅
88 ⁰	0.03	0.07 ₆
42 ⁰	0.09	—
30 ⁰	0.09	—

Aus dieser Tabelle wird man erkennen können, daß allerdings in dem Intervall von etwa $t = 0^0$ bis $t = -68^0$ die Grüneisensche Beziehung mit ziemlicher Genauigkeit zutrifft; auch wird man wohl zugeben wollen, daß sich dieses Gebiet der Übereinstimmung vielleicht als noch etwas weiter nach tieferen Temperaturen hin ausgedehnt ergeben würde, wenn dort Beobachtungen über spezifische Wärme vorlägen.

Oberhalb und unterhalb dieses Intervalles aber sind die Werte von $m \cdot a$ stets größer als die entsprechenden der Atomwärme. Vorläufig müssen wir also die Anwendbarkeit der Grüneisenschen Behiehung noch auf ein relativ nicht großes Temperaturintervall beschränken. — Zu den Werten von A. W. und von $m \cdot a$ bei den Temperaturen 92° (abs.) und 88° (abs.) ist aber zu bemerken, daß sowohl der erstere unsicher ist (nach Herrn Nernst's Angaben möglicherweise um einige Hundertel) als auch der zweite, weil dieser am Ende der durch die Thiesensche Formel dargestellten Gebiete liegt und zwar an dem Ende, wo das große Temperaturintervall von 85° (abs.) auf 194° (abs.) vorkommt, und weil auch unsere Beobachtungen bei den tieferen Temperaturen mit dem relativ größten Fehler behaftet sein können. Es erscheint deshalb nicht ganz unmöglich, daß spätere genauere Messungen auf beiden Gebieten ergeben werden, daß der Grüneisenschen Regel ein wesentlich größeres Gebiet der Anwendung zukommt, als hier gefunden wurde.

Zum Schluß sei noch erwähnt, daß versucht wurde unsere Beobachtungen durch die Einsteinsche Formel für die spezifische Wärme resp. durch die Einstein-Lindemannsche Formel darzustellen. Dabei ergab sich, daß die erstere (mit $\beta v = 1330$) gar nicht paßte und die zweite (mit $\beta v = 1940$) wohl wesentlich besser als die erstere, aber doch gar nicht in gleich befriedigender Weise wie die Thiesensche Formel. Es darf wohl der Vermutung Ausdruck gegeben werden, daß keine der drei genannten Gleichungen imstande ist, auf einem größeren Bereich den Temperaturverlauf des Ausdehnungskoeffizienten des Diamanten ohne systematische Abweichungen darzustellen.

München, Physikalisches Institut der Universität.



Die somatisch-anthropologische Abteilung der anthropologisch-prähistorischen Sammlung des Staates.

Von **Johannes Ranke.**

Vorgetragen in der Sitzung am 6. Juli 1912.

Die anthropologisch-prähistorische Sammlung hat im Jahre 1911 die für Sammlungszwecke geeigneten Räume im 3. Stock, welche vorher die zoologische Sammlung besessen hatte, soweit eingerichtet, daß sie als somatisch-anthropologische Abteilung in nächster Zeit dem Besuche geöffnet werden können. Es handelt sich dabei um den großen Saal und den davorliegenden kleineren Raum. Im großen Saal wurde das anthropologische Material an Schädeln und Skeletten aufgestellt, soweit es für die Beurteilung der modernen Rassen von Bedeutung ist. ferner die Sammlung von Affenschädeln (Orang-Utan, Gorilla, Schimpanse, Hylobates, Inuus etc.), welche im Laufe der Zeit durch die Herren Professoren Selenka und Haberer der Staatssammlung geschenkt worden sind. Den Hauptraum nehmen die Schädel aus bayerischen Gegenden ein, sie geben ein klares Bild von den in Bayern jetzt vorkommenden Schädelformen, daran schließen sich Beispiele sonstiger deutscher und europäischer Schädel (Württembergischer, Slaven, Ungarn, Tiroler und Pariser). Die eine Seite des langen Mittelschranks füllen die außereuropäischen Schädel. Von diesen sind besonders zu erwähnen die Sammlung von Peruanerschädeln, deren Grundstock von Ihrer Königlichen Hoheit Prinzessin Therese gesammelt und geschenkt worden ist. Die Skelette sind zum Teil montiert, zum größten Teil, zur leichteren wissenschaftlichen Bearbeitung, unmontiert in Liegekästen ausgelegt. Eine reiche Serie von Schädeln und Skeletten zeigt die Entwicklung des Skelettes vom Embryo bis ins Kindesalter. Ein Schrank ist für die Demonstration verschiedener abnormer Verhältnisse an Schädel und Skelett bestimmt. Die nicht aufstellungsfähigen

Skelettreste wurden im Speicher in Regalen so untergebracht, daß die einzelnen Skelette jederzeit leicht zugänglich sind.

Der Vorraum wurde für die Darstellung der paläolithischen Kulturen, der Geschichte der vorgeschichtlichen Schädeltypen Bayerns und für die Vorführung typischer vorgeschichtlicher Begräbnisarten bestimmt. Es kamen darin nach typologischen und topographischen Gesichtspunkten zur Aufstellung: alle im Laufe der letzten Jahre gesammelten und gekauften paläolithischen Funde aus Nordspanien und Frankreich (Sammlung de Maret, Obermaier und Birkner), ferner Repräsentanten der sogenannten tertiären und quartären Eolithen Belgiens und Frankreichs (Sammlung Obermaier, Rutot). Insbesondere ist auch die Steinzeit Ägyptens zur Darstellung gebracht durch Aufstellung der Sammlung Schweinfurth, Mook, von Stromer, Markgraf. Das Paläolithikum Bayerns ist bis jetzt vertreten durch die Ausgrabungsergebnisse von R. R. Schmidt in den Ofnethöhlen, durch die von Herrn Rentamtman Fraunholz erworbenen Funde aus der Kastlhänghöhle und durch die Ergebnisse der bisherigen Grabungen in dem Hohlenstein bei Nördlingen durch Professor Birkner und Dr. Frickhinger. In einem Schrank sind alle besser erhaltenen Schädel aus den vorgeschichtlichen Epochen Bayerns zusammengestellt. Nachdem auch die Gipsabgüsse der wichtigsten paläolithischen Skelettreste ausgestellt sind, ist in diesem Saal die Entwicklung der Schädelformen von der Eiszeit bis zur Völkerwanderungszeit zur Darstellung gebracht. Als Demonstration der verschiedenen Grabformen sind ausgestellt: die eigentümliche Teilbestattung in der Ofnet, eine Hockerbestattung der jüngeren Steinzeit, je ein Leichen- und ein Brandgrab der Bronzezeit und der Hallstattzeit, eine Leichenbestattung der La Tène-Zeit. Durch eine wertvolle Schenkung des Herrn Kommerzienrats Ludowici war es möglich, sechs verschiedene Arten der römischen Brandgräber und ein römisches Skelettgrab im Original zur Darstellung zu bringen. Diese Übersicht der vorgeschichtlichen Grabanlagen wird beschlossen durch ein Reihengrab aus der Völkerwanderungszeit und ein Steinkistengrab mit 3 Skeletten aus karolingischer Zeit.

Protokoll
 der Sitzungen der luftelektrischen Kommission der
 kartellierten Deutschen Akademien zu München
 am 24. und 25. Mai 1912.

Vorgelegt von H. Ebert in der Sitzung am 2. November 1912.

Erste Sitzung der Kommission

am 24. Mai 1912 vormittags 10 Uhr im Sitzungssaale der
 mathematisch-physikalischen Klasse der K. Bayer. Akademie
 der Wissenschaften.

Als Vertreter der Akademien waren anwesend die Herren:
 Exner (Wien); Riecke und Wiechert (Göttingen); Hall-
 wachs (Leipzig); Ebert (München).

Als sachverständige Mitglieder der Kommission die Herren:
 Börnstein, Lüdeling (Berlin); Elster, Geitel (Wolfen-
 büttel); Benndorf (Graz); von Schweidler (Innsbruck);
 Gockel (Freiburg i. d. Schweiz); Dember (Dresden).

Als Gäste die Herren: Dieckmann, Dauderer, Lutz,
 Hoffmann, Gleißner, Endrös, Jaufmann, K. Schmidt
 (Halle) und Ad. Schmidt (Potsdam).

Nachdem Herr Geheimrat von Seeliger im Namen der
 K. Bayerischen Akademie die Kommission begrüßt hatte, wurde
 Herr Riecke zum Vorsitzenden und Herr Dember zum Schrift-
 führer gewählt.

Herr Ebert machte die Kommission damit bekannt, daß
 die Bayerische Akademie Herrn Professor Gockel (Frei-
 burg) als sachverständiges Mitglied der Kommission zugezogen

hat, die Kommission erklärte sich damit einverstanden. Herr Riecke teilte mit, daß die Heidelberger Akademie ebenfalls Mitglied des Kartells der Deutschen Akademien geworden ist; da Heidelberg zur Tagung der diesjährigen Sitzung der luftelektrischen Kommission niemanden entsandt hat, beschließt die Kommission, an die Heidelberger Akademie ein Schreiben zu entsenden mit der Bitte, Delegierte für die Kommission zu ernennen.

I. Niederschlags Elektrizität.

Herr Benndorf erstattete ein ausführliches Referat der Forschungen über die Niederschlags Elektrizität. (Siehe Anhang Nr. 1 zu diesem Protokoll.)

Herr Geitel bemerkt zu dem Vortrag des Herrn Benndorf, daß die geschützten Zylinder einen Vorteil durch die Möglichkeit bieten, während eines Gewitters das Elektrometer eingeschaltet zu halten. Er weist weiter im Anschluß an ältere Veröffentlichungen von Elster und ihm darauf hin, daß die Erforschung der Beziehung zwischen Niederschlagsladungen und Potentialgefälle für die Probleme des Elektrizitätshaushaltes der Atmosphäre sehr wichtig ist.

Trotzdem die Niederschläge Ladungen zur Erde transportieren, können sie doch zur Erhöhung eines schon bestehenden Feldes beitragen: Ein Tropfen wird z. B. durch das normale elektrische Feld F über der Erdoberfläche so polarisiert, daß die Ladungsdichte am unteren Punkte $+\frac{3F}{4\pi}$ beträgt. In der Regenwolke gibt es nun kleine und große Tropfen, die mit verschiedener Geschwindigkeit fallen; außerdem erzeugen aufsteigende Luftströmungen eine Relativbewegung der Tropfen verschiedener Größe gegeneinander. Die kleineren, sich schneller bewegenden Tropfen können nun mit größeren Wassermengen zusammentreffen, ohne zusammenzuffließen. (Nach Lenard und Defant.) Lenard gibt an, daß nur bei 50 % der Zusammenstöße ein Zusammenfließen stattfindet. Nach eigenen Versuchen von Elster und Geitel tritt auch in dem Falle einer elektri-

schen Potentialdifferenz zwischen den Tropfen nicht immer Zusammenfließen ein. Wenn ein kleiner Tropfen nach oben geht und vom großen Tropfen positive Elektrizität, die wegen der negativen Erdladung unten sitzt, mitnimmt, so wird das Feld verstärkt. Die Energie wird bei diesem Vorgang aus der Fallbewegung der großen Tropfen gezogen. Das gleiche gilt für Schneefälle und Graupeln. Wie das normale Erdfeld können auch andere elektrische Potentialdifferenzen durch diesen Vorgang verstärkt werden.

Unter der Annahme eines kleinen Tropfens von $1 \cdot 10^{-3}$ cm Radius ergibt sich bei einem wirksamen Felde von $\frac{100 \text{ Volt}}{m}$ eine mit den Versuchen etwa übereinstimmende Ladung auf dem Tropfen von der Größe $\frac{\pi^2}{6} \cdot 10^{-8}$ elektrostatischen Einheiten. Eine Folgerung läßt sich aus dieser Anschauung ziehen: Bei positivem Potentialgefälle wird negative Ladung zur Erdoberfläche geführt, und mit dem Zeichenwechsel des Potentialgefälles resultiert auch ein Wechsel im Zeichen der transportierten Elektrizität. Herr Benndorf glaubt, daß diese Erklärung des Herrn Geitel eine große Lücke ausfüllt, da die Simpsonsche Theorie, besonders beim Hagel und Schnee, nicht ausreicht.

Herr Börnstein berichtet, daß er sich um die Frage bemüht hat, was einem Wassertropfen geschieht, der durch Luft fällt, die erstens ganz von Ionen befreit ist und zweitens ganz mit Ionen angefüllt ist.

Im Anschluß hieran erinnert Herr Ebert an die Arbeiten von Schmauß und Rud. Seeliger sowie zum ersten Punkt an die Ansichten Sohnckes, der an einen Reibungseffekt zwischen Eis und Wasser dachte.

Zur Frage der Niederschlagslektrizität, die neuerdings wieder in den Vordergrund der luftelektrischen Forschungen gerückt ist, werden von den Herren Börnstein, Ebert, Elster und Geitel weitere Untersuchungen in Aussicht gestellt.

Herr Lüdeling teilt mit, daß in Potsdam die Niederschlagselektrizität fortlaufend registriert wird, und daß Herr Schindelhauer eine Arbeit über Niederschlagselektrizität angefertigt hat, die demnächst veröffentlicht werden soll.

Um die Größe der Regentropfen zu bestimmen, diente bisher die Methode des Auffangens in Gips und auf Fließpapier, das mit Eosin getränkt ist. Nach der Absorptionsmethode erhielt Aug. Becker (1907) sehr zuverlässige Werte für die Tropfengröße.

Es hat sich, wie Herr Ebert bemerkt, fast bei allen Untersuchungen gezeigt, daß überwiegend positive Niederschläge auf den Erdboden gelangen. Es muß daher die Ursache, welche das normale Erdfeld aufrecht erhält, auch noch diese Ströme decken. Doch kann ein Leitungsstrom von der Größenordnung 10^{-16} Amp./cm² nicht durch die Niederschläge gedeckt werden.

Zweite und dritte Sitzung der Kommission

am 24. Mai nachmittags 3 Uhr und am 25. Mai vormittags 9 Uhr im physikalischen Institute der technischen Hochschule.

2. Potentialgefälle und Leitfähigkeitsmessungen.

Hierüber wurde bei den „Terminbeobachtungen“ referiert; siehe auch unter „Bodenatmung“.

3. Ultraviolette Strahlung.

Herr Elster gibt einen Bericht über die bisherigen Messungen, die mit dem Zinkkugelphotometer ausgeführt worden sind; er beschreibt dann die von ihm und Herrn Geitel konstruierte neue Apparatur, die es gestattet, den lichtelektrischen Effekt galvanometrisch zu beobachten. (Siehe Bericht Nr. 2.)

Herr Hallwachs teilt mit, daß ihm die K. Sächsische Gesellschaft der Wissenschaften Mittel zur Verfügung gestellt hat zur Untersuchung des Einflusses der ultravioletten Sonnenstrahlen. Herr Dember berichtet über die von ihm mit Hilfe dieser Mittel in der Schweiz in einer Höhe von 2000 und 3400 m

ausgeführten Parallelbeobachtungen zwischen ultravioletter Sonnenstrahlung und Leitfähigkeit. Die Beobachtungen haben ergeben, daß parallel mit der ultravioletten Sonnenstrahlung das Verhältnis $\frac{E_-}{E_+}$, der negativen zur positiven Raumladung, wächst und fällt. Aus den Versuchen läßt sich der Schluß ziehen, daß die ultraviolette Sonnenstrahlung eine Vermehrung der Ionisation in den oberen Schichten hervorruft.

4. Ionenstrom.

Hierüber wurde gleichfalls bei den „Terminbeobachtungen“ berichtet.

5. Bodenatmung.

Herr Börnstein teilt mit, daß er die Arbeiten, über welche er schon im vorigen Jahre berichtet hat, fortgesetzt hat. Und zwar hat er die Messungen des Luftdruckes jetzt in 1 und in 2 m Tiefe sowie 20 m über dem Boden ausgeführt. Ein klares Bild von der Bedeutung der Ergebnisse läßt sich vor der Hand noch nicht machen.

Als Ursache dieser Schwankungen kann die Bewegung des Grundwassers nicht angesehen werden, da diese für Berlin sehr gering ist. Wenn Ebbe und Flut des Grundwassers eine Rolle spielen würden, so müßten die Schwankungen zur Zeit des Neu- und Vollmondes am stärksten sein. Die Messungen zu solchen Zeiten zeigen jedoch, daß das Grundwasser oder Ebbe und Flut darin keine Rolle spielen kann. Herr Ebert bemerkt, daß bei Messungen, die er bei Icking ausgeführt hat, derartige Schwankungen sich nicht ergeben haben. Die von ihm angewandte Methode bestand darin, daß 1 m unter dem mit Gras bewachsenen Erdboden das offene Ende eines Eisenrohres in Kies endigte, während das andere Ende dicht über dem Erdboden zu einer Toeplerschen Drucklibelle führte. Durch Anwendung eines sehr stumpfen Winkels bei der Libelle lassen sich auf diese Weise schon außerordentlich geringe Druckschwankungen erkennen, doch konnten solche nicht be-

obachtet werden. Eine Schwankung von 0,1 mm Hg hätte schon einen Ausschlag von 20—100 mm geben müssen. Es ist aber noch die Möglichkeit vorhanden, daß bei den Münchener Messungen gerade die für den vorhandenen Boden geeigneten Tiefen bei den Versuchen in 1, 1,5 und 3 m Tiefe nicht getroffen worden sind. Die bisherigen Versuche sind daher nur als provisorische anzusehen und sollen fortgesetzt werden.

Herr Ad. Schmidt (Potsdam) äußert Bedenken, daß sich ein großer Druckgradient von $\frac{0,3 \text{ mm}}{1 \text{ m}}$ Hg überhaupt halten kann. Durch Rechnung ist er zu dem Schluß gekommen, daß dieser Wert mindestens hundertmal größer ist, als ihn die Theorie errechnen läßt.

Herr Börnstein bemerkt, daß die Ursache der Schwankungen nicht oberhalb des Bodens zu liegen braucht, sondern sich auch unterhalb der Bodenfläche befinden kann. Es hat sich auch ergeben, daß eine gewisse Verschiedenheit der Zeit des Auftretens der Maxima vorhanden ist und zwar findet die Schwankung in der Atmosphäre etwas früher statt als im Boden.

Herr Dember berichtet über eine Vorrichtung, die er am Ebertschen Ionenzähler angebracht hat. Sie besteht in der Einführung eines geeignet geformten Einsatzes in das Rosenmüllersche Anemometer, das zur Messung der angesaugten Luftmenge dient. Der Einsatz wirkt, ohne dem Luftstrom ein Hindernis zu bereiten, wie eine Düse, so daß die Umdrehungszahl des Wetterrädchens für eine bestimmte Luftmenge um etwa 10 % gesteigert wird und hiermit auch die Genauigkeit der Luftmengemessung. Es muß auch darauf geachtet werden, daß die Eichung der Anemometer im Ionenzähler selbst geschieht und nicht außerhalb desselben, weil durch die Krümmungen der Rohre des Ionenzählers die Luftströmung in bestimmter Weise beeinflusst wird.

Herr Exner teilt die Ergebnisse von Messungen in Wien während der Sonnenfinsternis mit. Es hat sich dabei eine Abnahme der Ionenzahlen mit fortschreitender Verfinsternung ge-

zeigt. Vermutlich ist diese Abnahme dadurch hervorgerufen worden, daß durch die Temperaturstörung eine Molisierung der Ionen eintritt und die Ionen so der Zählung entgehen.

Herr Ebert weist darauf hin, daß von Elster und Geitel und ihm ähnliches bei der letzten totalen Sonnenfinsternis beobachtet worden ist.

Herr Lüdeling gibt an, daß aus den Potsdamer Messungen während der Sonnenfinsternis nicht auf einen Einfluß der Sonnenstrahlung geschlossen werden kann. Ebenso hat Herr Gockel in Freiburg i. d. Schweiz während der Verfinsterung keine sichere Änderung konstatiert. Dagegen hat, wie Herr Geitel mitteilt, Herr Dr. Bergwitz in Braunschweig während der Verfinsterung eine Zunahme der Zerstreuung beobachtet, bei gleichzeitiger Abnahme der relativen Feuchtigkeit. Herr Dr. Bude hat auf dem Brocken ebenfalls eine auffällige Zunahme der Ionenzahlen während der Verfinsterung konstatiert.

6. Radioaktive Bestandteile der Atmosphäre und durchdringende Strahlung.

Herr Ebert hat gelegentlich einer Ballonfahrt eine Abnahme der durchdringenden Strahlung konstatiert. Wie Herr Exner mitteilt, hat Herr Heß (Wien) ebenfalls eine solche beobachtet, aber nur bis zu einer Höhe von 800 m, von da an eine Zunahme. Dies ist bei vier Fahrten konstatiert worden; die Untersuchungen sollen auf Hochfahrten fortgesetzt werden. Herr Lüdeling will im August dieses Jahres seine bisher noch nicht vollkommen gelungenen Versuche wieder intensiv aufnehmen.

Herr von Schweidler hat bei vergleichenden Messungen über Land und Wasser gefunden, daß die durchdringende Strahlung über Wasser etwas geringer ist. Weiter hat er Messungen ausgeführt mit zwei Wulfschen Instrumenten, von denen das eine nicht luftdicht, das andere ganz dicht war. Die Apparate zeigten verschiedenen Gang und das verwendete, 2 mm starke Kupferblech zeigte sich aktiv und zwar wurden

26 von 30 Ionen von Kupfer selbst erzeugt. Es ließ sich noch nicht entscheiden, ob der luftdichte Abschluß oder die Dicke der Gefäßwand einen größeren Einfluß hat. Vorläufig sind aber die Angaben der Apparate noch nicht eindeutig, sondern noch von der Konstruktion des Apparates abhängig.

Herr Ebert hält den vollkommen luftdichten Abschluß bei Vergleichen verschiedener Apparate für durchaus notwendig, und nach der Ansicht der Herren Geitel und Gockel ist Zink weit günstiger als Kupfer für die Ionisationskammern. Es hat sich auch gezeigt, daß bei Zink die von dem Metall hervorgerufene Schwankung der Ionisation kleiner ist als beim Kupfer. Herr Ebert erachtet diese Ergebnisse besonders darum für wichtig, weil sie bei der Konstruktion registrierender Instrumente beachtet werden müssen. Bei dünnwandigen Gefäßen können nach Gockel die Schwankungen des Luftdruckes durch ein angefügtes Hilfsgefäß kompensiert werden. Bei starkwandigen ist das unnötig.

7. Bericht über die Terminbeobachtungen.

Den Beschlüssen der Kommission (siehe Protokoll Göttingen 1911) folgend, sind am 10.—16. September 1911, 6.—8. Dezember 1911, 3.—5. Januar 1912, 11.—13. April 1912 Terminbeobachtungen ausgeführt worden. (Siehe Bericht Nr. 3: H. Ebert: Über die Resultate der von den kartellierten Deutschen Akademien organisierten luftelektrischen Terminbeobachtungen im Jahre 1911/12.)

Herr Ebert referiert über die Resultate, die in mühevoller Arbeit von den Herren Hoffmann und Gleißner auf vergleichbare Maße umgerechnet und dargestellt worden sind. Um diese Arbeit zu erleichtern und um eine einheitliche Art der Beobachtung festzulegen (z. B. Art der Stundenmittel), erklärt sich Herr Lüdeling bereit, für die Beobachtungen an den nächsten Termintagen den Beobachtungsstationen Formulare zuzuschicken. Die Kommission drückt den Wunsch aus, bis zum nächsten Versammlungstage die Messungen in der gleichen

Weise wie bisher fortzusetzen und sie bittet Herrn Lüdeling es möglich zu machen, daß Potsdam die Zentralstation bildet und die erforderlichen Arbeiten übernimmt.

8. Über die Reichweite funkentelegraphischer Verständigung.

Herr Riecke verliest der Kommission ein Schreiben des Herrn Professor H. Th. Simon in Göttingen, der leider verhindert ist, an der Sitzung teilzunehmen. Abgedruckt im Anhang als Nr. 4.

Herr Schmidt(Halle) empfiehlt die subjektive Beobachtung der ankommenden Energie mit dem Telephon und durch nebengeschaltete Widerstände zu verlassen und eine objektive Beobachtung vorzuziehen.

Herr Benndorf teilt mit, daß er gute Erfahrungen mit der Beobachtung der Zeichen gemacht, die von Paris aus gegeben werden; die Pariser Stationen besitzen eine große Sendenergie und die Zeichen sind in ihrer Energie viel konstanter als die von Norddeich gegebenen. Während der Sonnenfinsternis sind in Graz die von Paris kommenden Zeichen zu Messungen benutzt worden und es hat sich eine Steigerung der Empfangsstärke um circa 80% während der Verfinsterung ergeben. Herr Benndorf schlägt daher vor, neben Norddeich auch mit Paris als Sendestation zu arbeiten.

Herr Ebert teilt mit, daß folgende Stationen ihre Mitwirkung für funkentelegraphische Untersuchungen an den Terminagen zugesagt haben: Göttingen, Halle, Graz, Laibach, München, Darmstadt, Karlsruhe und Dresden. Herr Schmidt (Halle) schlägt vor, noch an eine Station jenseits der Alpen, z. B. Pola, heranzutreten, da die Wellen über den Firnfeldern ganz merkwürdige Eigenschaften besitzen. Auch wäre es sehr günstig, wenn die Messungen zweimal monatlich vorgenommen werden könnten, um Beziehungen zwischen den Jahreszeiten herauszubekommen. Herr Dieckmann beabsichtigt, an den Terminagen auch von Luftschiffen aus Messungen zu unternehmen.

Was die Ausrüstung der Stationen angeht, so hält es Herr Schmidt für notwendig, um vergleichbare Resultate zu er-

zielen, daß sämtliche Stationen mit möglichst gleichen Antennen arbeiten.

Um über die günstigste Art des Empfanges Aufschluß zu bekommen, drückt Herr Riecke den Wunsch der Kommission aus, Herr Schmidt möchte die verschiedenen Formen der vorhandenen, für quantitative Messungen geeigneten Empfangsvorrichtungen durchprobieren und der Kommission seine Ergebnisse mitteilen.

Herr Schmidt berichtet weiter über von ihm 1906 angestellte Vergleichsversuche zwischen Norddeich und Nauen (siehe Anhang Nr. 5). Dabei wurden die 3000 m langen Wellen mit einer auf 300 m abgestimmten Vorrichtung empfangen. Es waren häufig sehr intensive Geräusche zu vernehmen, die auf luftelektrische Erscheinungen zurückzuführen sind. Die Geräusche hatten deutlich eine tägliche Periode. Wenn die relative Feuchtigkeit ein Maximum hat, so ergab sich für die Geräusche ein Minimum. Eine Abhängigkeit vom Barometerstand hat sich nicht ergeben, bei Sturm traten nur kleine Geräusche auf. Zwischen 12 und 2 Uhr mittags und 12 und 2 Uhr nachts war es nicht möglich, deutliche Versuchskurven zu bekommen. Diese Erscheinung ging dann weg, als die Erde der Antenne durch ein Gegengewicht ersetzt wurde. Wird die Erdleitung durch einen Kondensator unterbrochen, so ergibt sich bei großer Kapazität eine starke Störung, bei kleiner Kapazität eine geringere. Sowohl Herr Schmidt wie Herr Exner sehen diese Störung an als herrührend vom Eintritt geladener Teilchen der Atmosphäre. Die Beobachtungen während der Sonnenfinsternis haben kein Resultat ergeben.

Herr Dieckmann bemerkt hierzu, daß solche Störungen auch von ihm beobachtet worden sind. Eine gewisse Art der Störung zeigte sich dann am stärksten, wenn das Potentialgefälle sehr unruhig war. Maxima der Störungen waren morgens und nachmittags vorhanden. Herr Exner macht noch darauf aufmerksam, daß die angegebenen Perioden im Auftreten der störenden Geräusche eine große Ähnlichkeit mit der täglichen Periode des Potentialgefälles besitzen.

Herr Gockel stellt der Kommission für die nächste Sitzung einen zusammenfassenden Bericht über die durchdringende Strahlung in Aussicht.

Am Nachmittage des 25. Mai folgte die Kommission einer Einladung der Herren Ebert und Dieckmann zur Besichtigung der luftelektrischen Station des Physikalischen Institutes der Technischen Hochschule, die sich in Gräfelfing befindet, und der ebensfalls dort befindlichen funkentelegraphischen Station des Herrn Dr. Dieckmann.

Durch die ausschließliche Verwendung der außerordentlich kompensiösen Saitenelektrometer und -Galvanometer ist die Aufgabe gelöst, fünf interessierende Elemente teils luftelektrischer Natur: Potentialgefälle und freie Raumladung (Mittelpunktpotential eines würfelförmigen Drahtkäfigs von 3 m Kantenlänge), teils meteorologischer Natur: Unterschied zwischen Luft- und Bodentemperatur, Helligkeit und Windgeschwindigkeit auf ein rotierendes, nur 30 cm breites Stück Bromsilberpapier gleichzeitig nebeneinander photographisch zu registrieren. Ferner wird hier fortlaufend die auf einer Schirmantenne von 30 m Höhe unter Wirkung des Erdfeldes in der Zeiteinheit landende Elektrizitätsmenge durch ein hochempfindliches Drehspulen-Galvanometer auf lichtempfindliches Papier aufgezeichnet. Ein Baro-, Thermo- und Hygrograph ergänzen die meteorologischen Daten der Station.

Schließlich sind auch noch die oben erwähnten Versuche im Gange, die Börnsteinschen Ergebnisse auch hier zu reproduzieren.

Die Beobachtungshütte ist vollständig aus Holz gezimmert und durch doppelte Wandungen gegen Temperaturschwankungen geschützt.

Die mit allen Hilfsmitteln ausgestattete funkentelegraphische Station des Herrn Dr. Dieckmann widmet sich in letzter Zeit besonders den Problemen, welche die Luftschiffahrt der Funkentelegraphie und der Luftelektrizität stellt.

Bericht Nr. 1.

Über die Beobachtungen der Niederschlags Elektrizität.

Von **H. Benndorf.**

Mit 1 Tafel.

I. Einleitung.

Auf Wunsch der luftelektrischen Kommission der kartellierten Akademien habe ich es unternommen in der Tagung zu Pfingsten 1912 eine Übersicht über das vorhandene Beobachtungsmaterial betreffend die Niederschlags Elektrizität zu geben. Im folgenden soll etwas ausführlicher, als es mir beim mündlichen Vortrag möglich war, über dieses Gebiet Bericht erstattet werden, wobei ich bestrebt bin, das in den verschiedenen Publikationen sehr ungleichmäßig behandelte Thema nach einheitlichen Gesichtspunkten zusammenzufassen und das Wesentliche herauszuheben.

Das Studium der Niederschlags Elektrizität ist nicht nur an sich von Interesse, sondern verspricht auch Aufschluß zu geben über gewisse Vorgänge bei der Gewitterbildung und ist von Wichtigkeit zur Entscheidung der Frage, ob der durch den Niederschlag zur Erde geführte Konvektionsstrom von Elektrizität instande ist zur Gänze oder wenigstens zum erheblichen Teile den Verlust der negativen Erdladung zu decken.

Bei der außerordentlichen Veränderlichkeit luftelektrischer Phänomene darf man über die letzte Frage nur aus einer großen Zahl von Messungen Aufschluß erwarten, wie sie in der Regel nur durch Registrierungen zu erhalten sind; dagegen wird das Studium der Entstehung der Niederschlags Elektrizität sowie das der eng damit zusammenhängenden Gewitterbildung ungleich mehr durch Einzelmessungen gefördert werden, da bei Registrierungen die notwendige Kritik störender Ursachen

nicht in dem Maße wird vorgenommen werden können. Die Richtigkeit dieser Behauptungen wird sich schon an dem spärlichen bisher vorliegenden Beobachtungsmateriale erhärten lassen.

Im folgenden soll zunächst eine Beschreibung der von den verschiedenen Beobachtern verwendeten Meßanordnungen gegeben werden, hieran schließt sich eine Besprechung der wichtigsten Störungen und Fehlerquellen, der vierte Abschnitt bringt eine Übersicht über die bisher erhaltenen Resultate, während der Schluß einer kurzen Besprechung der Fingerzeige gewidmet ist, die die bisherigen Ergebnisse für den weiteren Gang der Forschung bieten.

II. Beobachtungsmethoden.

Um die von den verschiedenen Beobachtern verwendeten Versuchsanordnungen richtig würdigen zu können, ist es wünschenswert eine anschauliche Vergleichung der Größe der von ihnen verwendeten Apparate sowie des Grades der elektrostatischen Abschätzung der Meßgefäße vornehmen zu können. Ich gebe deshalb in den Figuren 1—6 eine auf gleichen Maßstab reduzierte schematische Abbildung der Meßanordnungen, so gut das eben nach den vielfach ungenauen Angaben der Autoren möglich war. Zugleich gibt die Tabelle I eine nach Beobachtungsorten geordnete Übersicht der für die Beurteilung der erhaltenen Beobachtungsergebnisse wichtigsten Daten. Es erübrigt somit eine kurze Beschreibung der verschiedenen Apparate zu geben.

Zur Erläuterung von Tabelle I mögen noch folgende Bemerkungen dienen: Zur Charakterisierung der verschiedenen Meßanordnungen sind in den Reihen 8—14 noch folgende Daten aufgenommen: 8 gibt die Größe der Auffangfläche F' in cm^2 , 9 die Kapazität c der Auffangschale in cm , 10 die Kapazität eines Quadratcentimeters der Auffangschale $\frac{c}{F'}$ in cm^{-1} , 11 die kleinste meßbare Elektrizitätsmenge in Ces, wobei unter Ces die Einheit der Elektrizitätsmenge im elektro-

statischen Maßsystem verstanden ist: diese Zahlen gelten nur approximativ, weil die zu ihrer genauen Berechnung nötigen Daten vielfach fehlen. Das gleiche gilt von Rubrik 12, die die eben noch meßbaren Stromdichten des vertikalen Konvektionsstromes in Ampère pro cm^2 angibt. In Rubrik 13 sind die Zeiten angegeben, während welcher die Auffangschale für eine Messung dem Regen ausgesetzt war. 14 gibt die maximalen beobachteten Werte der Stromdichte.

1. Wolfenbüttel (J. Elster und H. Geitel).

Wenn man von einer mehr der grauen Vorzeit angehörigen Aufstellung eines Elektro-Pluviometers in Kew absieht, über die W. Thomson, Proc. Royal Soc., 1860, S. 277 kurz berichtet und über dessen Resultate nichts bekannt geworden ist, waren Elster und Geitel auch auf diesem Gebiete luftelektrischer Forschung die Ersten, indem sie nicht nur eine Versuchsanordnung ausarbeiteten, die im wesentlichen vorbildlich geblieben ist, sondern auch schon vor mehr als 20 Jahren auf die wichtigsten Fehlerquellen hinwiesen.

Ihre Beobachtungen umfassen zwei Serien, in den Jahren 1888—89 und 1890—93. Die aus Fig. 1 ersichtliche Auffangschale *A* war mit einem im Keller aufgestellten Quadrantenelektrometer verbunden, das von einem Beobachter abgelesen wurde. Während der Beobachtungen war die Schale durch einen darüber schiebbaren Deckel vor den Schwankungen des Erdfeldes vollkommen geschützt. Gleichzeitig nahm ein zweiter Beobachter in der ersten Beobachtungsserie mit einem Flammenkollektor und einem Bohnenbergerschen Elektroskop eine Vorzeichenbestimmung des Potentialgefälles vor; bei der zweiten Serie wurde das Potentialgefälle mit Wassertropfer und Exnerschen Elektroskop nach einer Shunt-Methode bestimmt.

Das Erdfeld in der Nähe der Auffangschale war durch ein Drahtnetz *D* wesentlich geschwächt. Der ganze Apparat stand etwa 6 m von der Hauswand entfernt. Eine Messung der Niederschlagsmenge wurde nicht gemacht. Beobachtungen wurden nur bei Windstille ausgeführt.

2. Göttingen (H. Gerdiens).

Die Beobachtungen Gerdiens fallen in das Jahr 1902 und sind leider nur ganz kurz beschrieben. Das Dach der Beobachtungshütte, 2,1 mal 2,1, Höhe 2 m, die in einer Waldlichtung beim Geophysikalischen Institut zu Göttingen errichtet war, wurde überragt von vier 1,7 m langen Stangen, die einen oben offenen Drahtnetzkäfig trugen. Die Auffangschale war auf einer photographisch registrierenden Federwage befestigt, um jederzeit die Menge des gefallenen Niederschlags messen zu können. Diese Schale war durch einen Widerstand von zirka 10^{12} Ohm zur Erde abgeleitet, und die Menge der mit dem Niederschlag transportierten Elektrizität wurde aus der Größe des Potentials ermittelt, zu dem die Auffangschale durch den Konvektionsstrom der Niederschlags Elektrizität aufgeladen wurde. Die Registrierung dieses Potentials geschah ebenfalls photographisch mittels eines Quadrantenelektrometers.

Die in der Zeiteinheit der Auffangschale zugeführte Elektrizitätsmenge $\frac{d\varepsilon}{dt}$ fließt teils als Ohmscher Strom von der Stärke $\frac{v}{w}$ durch den Widerstand w zur Erde teils bewirkt sie eine Aufladung der Auffangschale und des Elektroskopes im Betrage $C \frac{dv}{dt}$. Es ergibt sich somit

$$d\varepsilon = C dv + \frac{v}{w} dt$$

(in der Abhandlung Gerdiens ist die Formel durch einen sinnstörenden Druckfehler entstellt). Es läßt sich somit für ein Zeitintervall $t_1 - t_0$ die gefallene Elektrizitätsmenge berechnen nach der Gleichung

$$\varepsilon = C(v_1 - v_0) + \frac{v_m}{w}(t_1 - t_0),$$

wobei v_m den Mittelwert des Potentials zwischen den Zeiten t_0 und t_1 bezeichnet.

Tabelle I.

1	Autor	Elster u. Geitel		Gerdien	Weiß
2	Ort	Wolfenbüttel I II		Göttingen	Wien
3	Zeit	1888 II. bis 1889 VI.	1890 V. bis 1893 II.	1902	1906 I.—IV.
4	Zahl der Niederschläge	38 $\left\{ \begin{array}{l} 9 \times \\ 29 \odot \end{array} \right.$	18 $\left\{ \begin{array}{l} 2 \odot \\ 4 \times \\ 1 \text{ Boe} \\ 11 \Gamma \end{array} \right.$	unbekannt	16 $\left\{ \begin{array}{l} 8 \times \\ 5 \odot \\ 3 \text{ Boe} \end{array} \right.$
5	Methode	Einzelmessung Quad. El., abge- deckte Schalen		Schale durch $w = 10^{12}$ abge- leitet und deren Pot. mit phot. reg. Quad. El. gemessen	Einzelmessung mit Bürste un- Hankel El.
6	Potentialgefälle	Vor- zeichen Bestim- mung	Messung mit Tropfer und Elektro- skop	Phot. reg. Quad. El. Radiumbro- mid Elektr.	Größenordnung und Vorzeich- e mit Tropfer un- Elektroskop
7	Niederschlagsmenge	nicht gemessen		Gewicht des ge- messenen Nieder- schlags m. Feder- wage registriert 1 mm = $\frac{1}{36}$ mm Regen	geschätzt nach Wiesner Tropfengrößen
8	Auffangfläche F'	415 cm ²		200	133
9	Kapazität c	144 cm		84.2	23
10	Kapazität pro cm ² $\frac{c}{F'}$	0.35 cm ⁻¹		0.42	0.17
11	Kleinste meßbare El.-Menge	0.005 Ces		?	0.007
12	Kleinste meßbare Strom- dichte	$10^{-17} \frac{A}{\text{cm}^2}$? < 10^{-16}	0.7 10^{-16}
13	Expositionsintervall	2 ^{sec} — 5 ^{min}		—	30 ^{sec} — 3 ^{min} 5 ^{min} , 7 ^{min}
14	Maximum der beobachteten Stromdichte	$0.7 \cdot 10^{-12} \frac{A}{\text{cm}^2}$		$> 10^{-12} \frac{A}{\text{cm}^2}$	$1.5 \cdot 10^{-13} \frac{A}{\text{cm}^2}$

Kohlrausch	Simpson		Kähler	Benndorf		Baldit	
Puerto-Rico	Simla		Potsdam	Graz		Puy-en-Velay	
	I	II		I	II	I	II
1907 XI. bis 1908 III.	1908 IV.—IX.	1909 IV.—IX.	1908	1908 XI. bis 1909 VI.	1909 X. bis 1910 XII.	1910 V.—X.	1911 V.—XII.
23 { 22 \odot 1 \square	unbekannt		263 { 32 \times 118 \odot 84 Boe 29 \square	66	306	48 { 21 \odot 27 \square	58
Einzelmessung mit geschützter Bürste u. Wilson Elektroskop	Mech. reg. Quad. El.		Mech. reg. Quad. El.	Mech. reg. Quad. El. 2 Schalen, bei Messung ab- gedeckt		Einzelmessung Quad. El.	
nicht bestimmt	Mech. reg. Quad. El. Radium- Kollektor		Mech. Reg. Quad. El. Wassertropfer	Mech. reg. Quad. El. Polonium Kollektor		nicht bestimmt	
Ombrometer	registriert mit Wippe und Uhr- werk		registriert mit Regenmesser	direkt gewogen. später m. Horner- scher Wippe registriert		registriert Richard Regenmesser	
133	660		900	4940		200	
14.4	141		110	380		73	
0.11	0.21		0.12	0.08		0.36	
0.005	0.5		0.029	0.7		0.1	
10^{-16}	$2 \cdot 10^{-15}$		$0.9 \cdot 10^{-16}$	$0.8 \cdot 10^{-16}$		$0.5 \cdot 10^{-16}$	
$2^m n$	2^{min}		2^{min}	10^{min}		15^{sec}	
$3.10^{-14} \frac{A}{cm^2}$	$4.4 \cdot 10^{-13} \frac{A}{cm^2}$			$> 2.3 \cdot 10^{-14}$		10^{-12}	

Die Vorteile dieser Methode bestehen in einer kontinuierlichen Registrierung des elektrischen Konvektionsstroms, werden aber nach meiner Ansicht durch die Nachteile, über die im Abschnitt Fehlerquellen gesprochen werden wird, mehr als aufgewogen.

Das Potentialgefälle wurde mit Radiumbromidelektrode mit einer Halbwert-Aufladungszeit von 10 sec mittels eines Quadrantenelektrometers ebenfalls photographisch registriert. Es ist zu vermuten, daß durch die relativ geschützte Aufstellung in der Waldlichtung sich in Göttingen Windstörungen weniger geltend gemacht haben als an anderen Registrierorten.

3. Wien (E. Weiß).

Die Messungen von Weiß umfassen eine Reihe von Schnee- und Regenfällen im Frühjahr des Jahres 1906. Die Messungen wurden so ausgeführt, daß eine mit einem isolierten Handgriff versehene Bürste (mit den Borsten nach oben, um das Abspritzen der Tropfen zu vermeiden) durch eine gewisse Zeit dem Regen ausgesetzt, und die dadurch der Bürste mitgeteilte Ladung dann an einem Hankelschen Elektroskop im Zimmer gemessen wurde.

Vor und nach jeder Exposition der Bürste wurde die Größenordnung und das Vorzeichen des Potentialgefälles mit Wassertropfer und Elektrometer im relativen Maße bestimmt. Die Messungen geschahen auf der gegen Wind ziemlich geschützten Terrasse der Sternwarte in Wien. Gleichzeitig wurden Stichproben der Größe der fallenden Regentropfen nach der Wiesnerschen Methode vorgenommen, indem ein mit Eosin bestäubtes Filtrierpapier eine gewisse Zeit dem Regen ausgesetzt und aus der Größe der sich ergebenden farbigen Flüssigkeitskreise ein Rückschluß auf die Größe der Tropfen gezogen wurde.

4. Puerto-Rico (K. W. F. Kohlrausch).

Die Weißsche Methode leidet an dem Nachteil, daß die Aufladung der Bürste nicht nur durch die Regentropfen sondern auch durch den vertikalen Leitungsstrom erfolgt. Bei

starken Feldern läßt sich in der Tat eine Aufladung konstatieren, auch wenn kein Regen fällt. Kohlrausch hat daher die Methode von Weiß insofern verbessert, als er die Bürste *B* (Fig. 2) in einem Kasten, dessen durchlochtetes Dach mit einer Kokosmatte bedeckt war, vor dem Erdfelde schützte. Seine Messungen umfassen eine Reihe von Niederschlagstagen (Herbst 1907 und Frühjahr 1908). Die Aufladung der Bürste wurde mit einem eigens konstruierten Wilson-Elektrometer gemessen. Das Potentialgefälle wurde nicht bestimmt, die Regenmenge aus den Angaben eines in der Nähe des Beobachtungsortes aufgestellten Ombrometers entnommen.

5. Simla, Indien (G. C. Simpson).

Die Messungen Simpsons umfassen die Monate April bis September (Monsunperiode) der Jahre 1908 und 1909. Er war der erste, der ein mechanisch registrierendes Elektrometer zur Registrierung der Niederschlags Elektrizität verwandte. Seine Anordnung ist in Fig. 3 dargestellt.

Über dem Hüttendach ist wieder zur Abschwächung des Erdfeldes ein Drahtnetz *D* errichtet. Das mit ziemlich hohem Rande versehene Auffanggefäß war mit dem mechanisch registrierenden Elektrometer verbunden und wurde alle zwei Minuten automatisch zur Erde abgeleitet. Der Ausschlag des Elektrometers war somit ein ziemlich genaues Maß für die während dieser Zeit herabgelangten Elektrizitätsmenge. Gleichzeitig war die Auffangschale mit einem Ausflußrohr *R* versehen, durch das der gefallene Regen in eine Hornersche Wippe abtropfen konnte, wodurch es möglich war, die gefallene Regenmenge zu registrieren.

Das während eines Meßintervalles von zwei Minuten prädominierende Vorzeichen des Potentialgefälles wurde mittels eines Bambusstabes, der aus der Hütte in die Luft hinausragte und an seinem Ende eine Glasröhre mit einem Radium Salz trug und in Verbindung mit einem mechanisch registrierenden Elektrometer stand, bestimmt.

Außerdem war zur Registrierung von Blitzen ein Draht in die Luft gespannt und mit einem Kohärer verbunden. Der Kohärer war so unempfindlich gemacht, daß Entladungen auf größere Distanzen nicht registriert wurden.

6. Potsdam (K. Kähler).

Die Zeit der bisher publizierten Registrierungen umfaßt das Kalenderjahr 1908. Die Publikation der späteren Beobachtungsergebnisse soll in Vorbereitung sein. Die Auffangschale *A* (Fig. 4) steht in Verbindung mit einem mechanisch registrierenden Elektrometer, das auf eine weiter unten zu beschreibende Weise alle zwei Minuten zur Erde abgeleitet wurde. Über dem Dach des Beobachtungshauses befand sich wiederum ein Drahtkäfig *D*. Das Potentialgefälle wurde mit Wassertropfer und Elektrometer, die Niederschlagsmenge mittels eines außerhalb des Beobachtungshäuschens aufgestellten Regenmessers registriert.

Bei dem zur Niederschlagsregistrierung verwendeten Elektrometer waren einige Änderungen gegenüber der gebräuchlichen Form angebracht. Die Isolation zwischen Aufhängefaden und Elektrometernadel wurde entfernt und zwischen Nadel und Schwefelsäuredämpfung angebracht. Außerdem wurden die Aufhängefaden vom Gehäuse isoliert und zur Zuleitung verwendet. Auf diese Weise waren Elektrometernadel, Zuleitungsdraht und Zeiger des Instrumentes leitend miteinander verbunden und auf das zu messende Potential aufgeladen. Wenn dadurch auch erreicht war, daß durch die Niederdruckvorrichtung, die alle zwei Minuten in Tätigkeit versetzt wurde, die Auffangschale automatisch entladen wurde, so war doch damit der Nachteil verbunden, daß bei größeren Ausschlägen des Instrumentes elektrostatische Einwirkungen auf den Zeiger nicht ausgeschlossen waren und die Ausschläge in nicht genügend kontrollierbarer Weise beeinflusst wurden.

7. Graz (H. Benndorf).

Die Registrierungen der lufterlektrischen Station in Teichhof bei Graz reichen vom November 1908 mit einigen Unterbrechungen bis Dezember 1910. Die ausführliche Publikation der Registrierergebnisse erfolgt demnächst in den Sitzungsberichten der Wiener Akademie.

Um elektrostatische Beeinflussungen der Auffangschale mit vollkommener Sicherheit auszuschließen, waren zwei Auffangschalen A_1 und A_2 (Fig. 5) angebracht, von denen die eine während des Messungsintervalls von zehn Minuten dem Regen ausgesetzt, während die andere mit einem Deckel verschlossen war und während dieser Zeit mit einem mechanisch registrierenden Elektrometer in Verbindung stand. Durch einen automatisch fungierenden Mechanismus drehte sich der Deckel nach Verlauf von zehn Minuten um eine vertikale Achse, gab dem Regen den Weg zur bisher bedeckten Schale frei und bedeckte die andere. In dem Momente, wo sich der Drehmechanismus in Tätigkeit setzte, wurde die bedeckte Schale samt anhängenden Elektrometer zur Erde abgeleitet und das Elektrometer an die andere Schale angeschaltet. Dadurch daß das Elektrometer zehn Minuten lang mit der aufgeladenen Schale in Verbindung stand, war der Vorteil verbunden, daß aus dem Potentialabfall, den das Elektrometer während dieser zehn Minuten zeigte, die Güte der Isolation stets geprüft werden konnte.

Das Potentialgefälle wurde mit einem Polonium-Kollektor (eine Zeitlang auch mit einem Ionium-Kollektor) und zwei angeschalteten Quadrantenelektrometern registriert. Das eine dieser beiden Elektrometer war wesentlich unempfindlicher, so daß sein Meßbereich auch bei ziemlich starken Störungen noch ausreichte. Die beiden Auffangschalen waren mit Abtropfvorrichtungen verbunden, durch die der Regen einer Hornerschen Wippe zugeleitet und registriert werden konnte.

Um die Auffangschalen vor dem Erdfelde zu schützen, zur Vermeidung einer Aufladung durch den vertikalen Leitungsstrom, waren auf dem Dach der Beobachtungshütte zwei

zylindrische Blechtürme B_1 und B_2 angebracht. Ein Drahtnetz zum Schutze des oberen Randes dieser Blechtürme gegen influenzierte Ladungen war aus weiter unten anzugebenden Gründen nicht angebracht.

8. Puy-en-Velay (A. Baldit).

Die Beobachtungen umfassen zwei Serien; eine Mai bis Oktober 1910, die zweite Mai bis Dezember 1911. Die vom Verfasser angewandte Methode stellt gewissermaßen ein Mittelglied zwischen einer Registriermethode und Einzelmessungen dar, indem der Ausschlag eines Quadrantenelektrometers, auf das die Auffangschale (Fig. 6) direkt aufmontiert war, mittels Spiegel und Skala alle 15 Sekunden abgelesen wurde. Nach jeder Viertelminute wurden Quadrantenelektrometer und Schale geerdet. Ein drehbarer Deckel diente dazu, bei sehr starken Regenfällen die Schale nur während eines Bruchteiles des Beobachtungsintervalles dem Regen zu exponieren. Auf dem Dach der Hütte war ein Drahtnetz als elektrostatischer Schutz angebracht.

Der Verfasser hat während der Messungsperioden im ganzen circa 15000 einzelne Messungen angestellt. Das Potentialgefälle wurde nicht gemessen, die Niederschlagsmenge in einem außerhalb aufgestellten Regenschirm mit Richardschem Registrator bestimmt.

9. Messungen im Gang.

Soweit mir bekannt geworden ist, werden Messungen der Niederschlagselektrizität gegenwärtig angestellt in Argentinien (G. Berndt), in Davos (C. Dorno) und in Potsdam; Veröffentlichungen darüber sind noch nicht erschienen, nur Berndt erwähnt, daß auch bei seinen Messungen ein Überschuß positiver Elektrizität sich bereits ergeben habe.

III. Fehlerquellen.

Im folgenden sollen die wichtigsten Fehlerquellen, die bei den bis jetzt verwendeten Methoden zu befürchten sind, besprochen und gleichzeitig versucht werden, einen Überblick zu gewinnen, welche Rolle sie bei den verschiedenen, wirklich ausgeführten Messungen gespielt haben können.

1. Einfluß des Erdfeldes.

Wenn zur Zeit der Ableitung der Auffangschale die Intensität des ungestörten elektrischen Feldes \mathfrak{E}_0 und zur Zeit, wo das Potential der Auffangschale gemessen wird, \mathfrak{E}_0' ist, dann wird in diesem Moment durch das Erdfeld auf der Auffangschale eine Ladung influenziert, deren Größe proportional $\mathfrak{E}_0' - \mathfrak{E}_0$ ist und von der Größe der gemessenen Ladung subtrahiert werden muß, um die wahre vom Regen herabtransportierte Elektrizitätsmenge zu finden. Ob diese Influenzladung sich störend bemerkbar machen kann, hängt einerseits von dem Grade der elektrostatischen Geschützttheit der Auffangschale, andererseits von dem Grade der Empfindlichkeit der Meßanordnung ab, wie sie durch die Zahlen in Rubrik 11 der Tabelle I angegeben sind.

Fast alle Beobachter, die mit offener Auffangschale gearbeitet haben, geben an, daß sie selbst bei starken Feldstörungen keine Influenzladungen an ihren Apparaten konstatieren konnten. Indessen ist diese Methode der subjektiven Abschätzung zu einzelnen Zeitpunkten nicht ganz einwandfrei und es soll im letzten Abschnitt eine Methode angegeben werden, wie sich in exakter Weise die Größenordnung der möglichen influenzierten Ladung bestimmen läßt.

Vermieden ist diese Fehlerquelle vollkommen bei den Stationen Wolfenbüttel, Wien, Puerto-Rico, Graz, weil die Ableitung und Messung der Schale im vollkommen geschützten Felde geschah. Bei starken Gewittern mag in den übrigen Stationen sich ein kleiner Einfluß der Influenzladung bemerkbar gemacht haben.

2. Fehler durch abgespritzte Tropfen.

Gelangt ein Tropfen in die Auffangschale, der vorher mit einem hervorragenden Gegenstand (Dachkante, Schutznetz, Trichterrand) in Berührung gewesen ist, so bringt er eine Ladung in die Schale mit, deren Vorzeichen dem des elektrischen Feldes entgegengesetzt ist und deren Größe von der Feldstärke an der Stelle abhängt, wo er abgespritzt ist. Da sich das Abspritzen nicht vollkommen beseitigen läßt, muß Sorge getragen werden, daß jene Stellen, an denen vermutlich ein schädliches Abspritzen stattfinden kann, elektrostatisch abgeschützt sind.

Von Elster und Geitel angefangen bis zu Baldit haben alle Beobachter große Sorgfalt auf Vermeidung dieser Fehlerquelle verwendet, und es scheint in der Tat kein erheblicher Fehler bei ihren Messungen entstanden zu sein. Nur in Graz habe ich absichtlich die beiden, oben allerdings zugeschärften Blechtürme nicht abgeschützt, um den Einfluß dieser Fehlerquelle studieren zu können, worüber an angegebenen Orte berichtet werden soll. Da das Verhältnis Umfang des Trichterrandes zu Flächeninhalt der Auffangschale sich mit zunehmenden Dimensionen verkleinert, kann der Fehler bei der Größe der verwendeten Auffangschale in Graz nur mehr klein sein.

Fehler durch Herausspritzen von Tropfen aus der Auffangschale, wobei sie Ladung mitnehmen, könnten nur dort eintreten, wo die Auffangschale direkt dem Erdfelde ausgesetzt ist, wie z. B. bei Weiß. Dort wurden sie aber dadurch vermieden, daß durch Verwendung einer Bürste zum Auffangen das Abspritzen verhindert wurde.

3. Aufladung durch Leitung.

Da der vertikale Leitungsstrom in der Atmosphäre Beträge erreichen kann, die von derselben Größenordnung sind wie die des Konvektionsstromes der Niederschlags Elektrizität, können überall dort, wo das Erdfeld über der Auffangschale nicht stark geschwächt ist, Fehler entstehen, indem die Schale gleichnamig mit dem Potentialgefälle aufgeladen wird.

So konnten in der Tat sowohl von Kohlrausch in Puerto-Rico an einer frei gehaltenen Bürste als auch in Graz in der ersten Registrierperiode, wo die Auffangschalen während des Regens wenig abgeschützt waren, eine spontane Aufladung bei starkem Potentialgefälle konstatiert werden, ohne daß Regen fiel. Bei den meisten Beobachtungen kommt indessen diese Fehlerquelle nicht in Betracht, es können höchstens einige Messungen von Weiß und einige aus der ersten Registrierperiode in Graz dadurch gefälscht sein.

4. Lenard-Effekt.

Lenard hat nachgewiesen, daß ein Tropfen reinen Wassers, der an einem festen Hindernis zerspritzt, sich positiv aufladet, während die negative Ladung in der umgebenden Luft verbleibt. Mit Rücksicht auf den Umstand, daß die Messungen der Niederschlags Elektrizität ein Überwiegen der positiven Ladungen ergeben haben, wäre es von vornherein nicht unmöglich, daß sie vom Lenard-Effekt vorgetäuscht sind. Indessen zeigen die folgenden Versuche und Überlegungen, daß dieser Effekt keine nennenswerte Rolle spielt.

Baldit und Simpson verwendeten eben mit Rücksicht auf diese Fehlerquelle sehr tiefe Auffangschalen. Würde der Tropfen wirklich merklich positiv geladen, so sitzt doch die gleiche negative Ladung in der umgebenden Luft, wodurch bei einer tiefen Auffangschale kein Fehler bewirkt wird. Ferner haben Versuche in Graz, das Zerspritzen der Tropfen am Blech der Auffangschale durch ein darin aufgespanntes, leicht durchlässiges Tuch zu verhindern, keinen Unterschied in der Aufladung der Schale erkennen lassen.

Schließlich zeigen noch folgende Erwägungen, daß der Lenard-Effekt bei Regen nur sehr gering sein kann. Nach Messungen von Lenard beträgt die Ladung eines Tropfens von etwa 2 mm Durchmesser bei der großen Geschwindigkeit von 18 m/sec $0.6 \cdot 10^{-3}$ Ces. Ein cm^3 Wasser würde also eine Elektrizitätsmenge von 0.14 Ces erhalten. Diese Elektrizitätsmenge ist gegenüber der von 1 cm^3 Regen durchschnittlich herab-

gebrachten Elektrizitätsmenge schon klein und wird natürlich noch kleiner bei der viel kleineren Geschwindigkeit der Regentropfen. Es kann also mit ziemlicher Sicherheit angenommen werden, daß diese Fehlerquelle bei den bisherigen Beobachtungen nirgends eine Rolle spielt.

5. Fehler durch Elektrizitätsverluste der Auffangschale.

Sowohl durch mangelhafte Isolation als auch durch Luftleitung verliert die aufgeladene Schale fortwährend an Ladung. Bei subjektiver Beobachtung können und müssen natürlich öfters Isolationsprüfungen vorgenommen werden. Bei Registrierung können jedoch durch Isolationsfehler nicht unerhebliche Störungen entstehen und zwar sind es da, wie überhaupt bei luftelektrischen Messungen, nicht die ganz starken Isolationsfehler, die gefährlich sind, sondern jene, bei denen die Verluste noch so gering sind, daß eine wirkliche Aufladung der Schale eintreten kann. Bei der in Graz verwendeten Registriermethode, wo die geladene und abgedeckte Schale durch zehn Minuten hindurch in Verbindung mit dem Elektrometer blieb, konnten Korrekturen für Isolationsfehler jederzeit angebracht werden. Es zeigte sich aber auch, daß selbst bei guter Beschaffenheit der Isolationsstützen die Verluste durch Luftleitung einen recht respektablen Wert annehmen können.

In Potsdam ist die Aufstellung des Apparates durch Verwendung fortdauernden Gasheizens eine so günstige, daß Isolationsfehler kaum eingetreten sein werden. Indessen ist es nicht überall möglich, so günstige Aufstellungsbedingungen zu schaffen, weshalb Sorgfalt auf die Elimination dieser Fehlerquelle zu legen ist.

Fast mit Sicherheit kann man annehmen, daß sich Isolationsfehler sehr störend bei den Messungen in Göttingen bemerkbar gemacht haben müssen und das ist auch der Grund, weshalb ich große Bedenken gegen die von Gerdien verwendete Methode der Registrierung habe. Die Ladung der Schale Gerdiens, durch einen Widerstand von 10^{12} Ohm zur Erde

abgeleitet, würde erst in der Zeit von rund einer Minute auf den halben Wert sinken. Man sieht also, daß Isolationsfehler mittlerer Größe dieselbe Größenordnung haben wie die des verwendeten Widerstandes. Da nun die Isolationsfehler stark variabel sind, so darf wohl angenommen werden, daß die nach dieser Methode angestellten Beobachtungen außerordentlich stark mit unkontrollierbaren Fehlern behaftet sind.

6. Sonstige Fehlerquellen.

Es ist selbstverständlich, daß auch bei Niederschlagsmessungen jene Regeln zu beachten sind, die für lufterlektrische Messungen allgemein gelten. Insbesondere gilt das für jene Korrekturen, die an den Ablesungen der Instrumente anzubringen sind, um der Trägheit der verwendeten Elektrometer Rechnung zu tragen, auf die ich in meiner Arbeit¹⁾ ausführlich eingegangen bin. Insbesondere, wenn es sich um Vergleich zwischen Niederschlags Elektrizität und Potentialgefällsänderungen handelt, können durch Außerachtlassung dieser Regeln arge Fehler entstehen.

Schließlich sei noch eines Umstandes gedacht, der sich als äußerst starke Fehlerquelle, wenngleich in einem etwas anderen als dem obengenannten Sinne darstellt; es ist dies der Wind. Er bewirkt nicht nur, daß nur ein Teil des Niederschlages wirklich in die Auffangschale hineinkommt, er verringert also die pro Zentimeter gemessene Regen- und Elektrizitätsmenge, er kann auch bewirken, daß die Regentropfen im beträchtlichen Maße in Berührung mit den schützenden Drahtnetzen oder Schirmen kommen und auf diese Weise Fehler bewirken. Es ist dies eine Fehlerquelle, welche unter Umständen Fehler von 50 und mehr Prozent bewirken kann.

Vor Wind geschützte Aufstellungsorte (Wolfenbüttel, Göttingen) haben daher große Vorteile für sich. Noch mehr zeigt sich aber hier die Überlegenheit der subjektiven Beobachtung

¹⁾ Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektrizität XXXIII. Wiener Ber. CXVIII, Abt. IIa, 1909.

vor der Registrierung. Wenngleich nicht gelehnet werden soll, daß gewisse Daten nur durch Registrierung zu gewinnen sind, so wäre gerade hier noch mehr als auf anderen Gebieten luftelektrischer Forschung der subjektiven Einzelmessung das Wort zu reden.

Betrachtet man das vorliegende Beobachtungsmaterial, so muß man, wenn man die einzelnen Fehlerquellen Revue passieren läßt, zugestehen, daß der Genauigkeitsgrad der erhaltenen Beobachtungen kein sehr großer ist, seiner Natur nach aber auch nicht sein kann, und daß Fehlerquellen, welche die Resultate in systematischer Weise fälschen könnten, im allgemeinen nicht vorgekommen sind.

IV. Resultate.

Im folgenden sollen die wichtigsten Folgerungen gezogen werden, die sich aus den bisherigen Beobachtungsergebnissen ergeben. Im Interesse der Übersichtlichkeit und Kürze kann natürlich nicht auf Einzelheiten eingegangen werden, bezüglich deren auf die Originalarbeiten verwiesen werden muß. Trotzdem die Beobachtungen an Orten mit völlig verschiedenem Klima (Mitteleuropa, Argentinien, Indien) angestellt wurden, hat sich doch so viel Gemeinsames ergeben, daß es berechtigt erscheint, gewisse Gesetzmäßigkeiten als allgemein gültig anzusehen. Zunächst in die Augen springt

1. Überwiegen der positiven Ladung.

Alle Beobachtungen, die sich über längere Zeiträume erstrecken, haben ein deutliches Überwiegen der positiven Ladung ergeben. Man sieht es deutlich aus den Zeilen 1—4 der Tabelle II, in der die Werte der beobachteten Gesamtladung innerhalb des jeweiligen Beobachtungsintervalls in $\frac{\text{Ces}}{\text{cm}^2}$ ¹⁾ an-

¹⁾ Im folgenden soll stets für die elektrostatische Einheit der Elektrizitätsmenge die Abkürzung Ces, für die elektrostatische Einheit r Stromstärke die Abkürzung Aes gebraucht werden.

gegeben sind, und es ist auffallend, wie relativ konstant das Verhältnis der positiven zur negativen Ladung an den klimatisch so verschiedenen Orten ist.

Wie aus Zeile 5—7 der Tabelle II hervorgeht, in denen die absoluten Zeitdauern in Minuten und die relativen in Prozent angegeben sind, während deren positiv und negativ geladener Regen gefallen ist, ist das Überwiegen der positiven Ladungen hauptsächlich darauf zurückzuführen, daß positiver Regen häufiger fällt als negativer Regen. Der Unterschied zwischen den mittleren positiven und negativen Stromdichten in $\frac{Aes}{cm^2}$ gemessen, ist nicht sehr groß; sie zeigen in Indien ein Überwiegen der positiven, in Frankreich und Graz ein Überwiegen der negativen Stromdichten.

Die oben angeführten Zahlen sind Mittelwerte, die sich aus langen Serien von Beobachtungen ergeben. In kürzeren Zeiträumen sind diese Gesetzmäßigkeiten verwischt und es ist daher kein Widerspruch mit den oben angeführten, daß die Beobachtungen in Wolfenbüttel sowohl wie die von Gerdien in Göttingen ein Überwiegen der negativen Ladungen ergeben konnten.

Man kann es jetzt jedenfalls als sichergestellt betrachten, daß im Mittel vom Regen positive Ladung zur Erde gebracht wird, etwa von der Größenordnung einiger $\frac{Ces}{cm^2}$ pro Jahr, und es ist daher nicht länger angängig, den durch Leitungsstrom bedingten Verlust der negativen Erdladung durch den Konvektionsstrom der Niederschlags Elektrizität sich ersetzt zu denken. Um ein Bild von der Größenordnung dieses Verlustes zu gewinnen, sei angeführt, daß unter Annahme einer mittleren Vertikalleitungsstromdichte von $3.10^{-7} \frac{Aes}{cm^2} = 10^{-16} \frac{Amp}{cm^2}$ sich im Jahr ein Elektrizitätsverlust eines cm^2 von $9 Ces = 3.10^{-9}$ Coulomb ergibt.

Tabelle II.

	Simla		Puy-en-Velay		Potsdam	Graz
	1908	1909	1910	1911	1908	1910
1 Gesamtladung e_+ in $\frac{\text{Ces}}{\text{cm}^2}$	22.3 (75 0/0)	21.7 (78 0/0)		7.5 (57.6 0/0)		7.1 (72 0/0)
2 Gesamtladung e_- in $\frac{\text{Ces}}{\text{cm}^2}$	7.6 (25 0/0)	6.2 (22 0/0)		5.5 (42.4 0/0)		2.9 (28 0/0)
3 Überschuß $e_+ - e_-$ in $\frac{\text{Ces}}{\text{cm}^2}$	14.7	15.5		2.0	1.7	4.5
4 Verhältnis $q_e = \frac{e_+}{e_-}$	2.9	3.2		1.36		2.6
5 Zeit, in der positiver Regen fiel t_+ in min	2790 (70 0/0)	3000 (73 0/0)	526 (60 0/0)	2100 (74 0/0)		20870 (74.7 0/0)
6 Zeit, in der negativer Regen fiel t_- in min	1216 (30 0/0)	1226 (27 0/0)	347 (40 0/0)	734 (26 0/0)		7090 (25.3 0/0)
7 Verhältnis $q_t = \frac{t_+}{t_-}$	2.3	2.6	1.5	2.86		2.95
8 Mittlere Stromdichte des pos. Regens i_+ in Aes/cm ²	1.33.10 ⁻⁴	1.13.10 ⁻⁴		0.6.10 ⁻⁴		0.059.10 ⁻⁴
9 Mittlere Stromdichte des neg. Regens i_- in Aes/cm ²	1.05.10 ⁻⁴	0.84.10 ⁻⁴		1.24.10 ⁻⁴		0.068.10 ⁻⁴
10 Verhältnis in $q_t = \frac{i_+}{i_-}$	1.28	1.32		0.48		0.90

Tabelle III.

Stromdichte in $\frac{\text{Aes}}{\text{cm}^2}$	Simla			Puy-en-Velay		
	Relative Häufigkeit in Prozenten		$q_t = \frac{t_+}{t_-}$	Relative Häufigkeit in Prozenten		$q_t = \frac{t_+}{t_-}$
	pos.	neg.		pos.	neg.	
$< 150 \cdot 10^{-6}$	78.1 0/0	86.0 0/0	0.91	68.5 0/0	75.3 0/0	0.91
$150 \cdot 10^{-6} - 300 \cdot 10^{-6}$	12.2	9.5	1.28	15.6	12.2	1.28
$300 \cdot 10^{-6} - 600 \cdot 10^{-6}$	6.9	3.6	1.92	10.0	7.8	1.28
$> 600 \cdot 10^{-6}$	2.8	0.8	3.50	5.9	4.7	1.26

Tabelle IV.

Stromdichte in $\frac{\text{Aes}}{\text{cm}^2}$	Graz		
	Relative Häufigkeit in Prozenten		$q_t = \frac{t_+}{t_-}$
	pos.	neg.	
$< 1 \cdot 10^{-6}$	4.2 0/0	7.3 0/0	0.58
1 — $5 \cdot 10^{-6}$	53.8	40.4	1.33
5 — $10 \cdot 10^{-6}$	16.4	12.8	1.28
10 — $50 \cdot 10^{-6}$	17.9	21.6	0.83
50 — $70 \cdot 10^{-6}$	1.9	4.3	0.44
$> 70 \cdot 10^{-6}$	5.8	13.6	0.43

2. Relative Häufigkeit der verschiedenen Stromdichten.

In Tabelle II und IV ist nach den Beobachtungen von Simla, Puy-en-Velay und Graz die relative Häufigkeit der verschiedenen Stromdichten angegeben. Man sieht aus Tabelle III, daß die Stromdichtenhäufigkeit abnimmt mit der Intensität der Ströme, so zwar, daß $\frac{3}{4}$ aller Stromdichten kleiner sind als $150 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Aes}}{\text{cm}^2} = 50 \cdot 10^{-15} \frac{\text{Amp}}{\text{cm}^2}$. Bei diesen relativ schwachen Stromdichten überwiegen die negativen Ströme.

In Tabelle IV, die Beobachtungen von Graz umfassend, zeigt sich abgesehen davon, daß die Ströme geringer sind, im wesentlichen dieselbe Erscheinung, nur daß hier bei den ganz schwachen und bei den starken Strömen negative Stromdichten überwiegen. Daß die in Graz beobachteten Werte für die Stromdichten im allgemeinen kleiner sind als in Simla und Puy-en-Velay, dürfte seinen Grund hauptsächlich darin haben, daß das Beobachtungsintervall 5 resp. 40 mal größer war; ein Punkt, auf den weiter unten noch zurückzukommen ist.

3. Extreme Werte der Stromdichte.

Gerdien findet häufig Stromdichten, die $3000 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Aes}}{\text{cm}^2}$ ($1000 \cdot 10^{-15} \frac{\text{Amp}}{\text{cm}^2}$) überschreiten, Baldit 13 mal (8 positiv, 5 negativ) von $1500 - 3300 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Aes}}{\text{cm}^2}$ ($500 - 1100 \cdot 10^{-15} \frac{\text{Amp}}{\text{cm}^2}$), Kähler 21 mal Stromdichten größer als $210 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Aes}}{\text{cm}^2}$ ($70 \cdot 10^{-15} \frac{\text{Amp}}{\text{cm}^2}$), Simpson 1908, 33 mal (15 positiv, 18 negativ) von $900 - 3000 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Aes}}{\text{cm}^2}$ ($300 - 1000 \cdot 10^{-15} \frac{\text{Amp}}{\text{cm}^2}$), 1909, 24 mal ausschließlich positiv $900 - 1140 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Aes}}{\text{cm}^2}$ ($300 - 613 \cdot 10^{-15} \frac{\text{Amp}}{\text{cm}^2}$), in Graz 31 mal größer als $70 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Aes}}{\text{cm}^2}$ ($23 \cdot 10^{-15} \frac{\text{Amp}}{\text{cm}^2}$).

Aus diesen Zahlen sieht man zunächst, daß die beobachteten maximalen Stromdichten um so höher ausfallen, je kürzer das Beobachtungsintervall ist, was seine Erklärung darin findet, daß beim Fallen des Regens die positiven und negativen Ladungen sehr rasch wechseln. So führt Baldit als Beispiel folgenden Fall an:

Die beobachtete maximale Stromdichte ist $-281 \cdot 10^{-15} \frac{\text{Amp}}{\text{cm}^2}$.

Würde aber nicht alle $\frac{1}{4}$ Minute, sondern nur alle 2 Minuten

beobachtet worden sein, so würde hier nur der Mittelwert $-72 \cdot 10^{-15} \frac{\text{Amp}}{\text{cm}^2}$ sich ergeben, wie folgende Zusammenstellung zeigt.

Zeit	Stromdichte $\frac{\text{Amp}}{\text{cm}^2}$ $\times 10^{-15}$
18 ^{min} 30	- 211
45	- 134
19 ^{min} 00	+ 142
15	+ 187
30	+ 87
45	- 124
20 ^{min} 00	- 160
15	- 281
30	- 189
Mittel	- 7.2

Daß Simpson bei seinem 2 Minuten-Beobachtungsintervall wesentlich höhere Werte findet als z. B. Kähler, dürfte darauf zurückzuführen sein, daß es sich bei ihm um ungleich heftigere Gewitterbildung handelt, wie sie bei Monsun in Indien auftreten. Bemerkenswert ist vielleicht im Hinblick auf die von Simpson gegebene Theorie der Entstehung der Niederschlagslektrizität, daß im Jahre 1909 alle Extreme positiv waren und daß die 18 negativen Werte im Jahre 1908 fast ausschließlich (15) von einem ganz außergewöhnlichen Gewitter stammen. Im allgemeinen wird man etwa sagen können, daß die maximalen, beobachteten Stromdichten von der Größenordnung $10^{-12} \frac{\text{Amp}}{\text{cm}^2}$ sind.

4. Verhältnis der Ladung zur Regenmenge.

Die von einem Gramm Wasser heruntergebrachte Ladung variiert ziemlich stark. Aus Tabelle V kann nach den Beobachtungen von Simpson die relative Häufigkeit des Vorkommens bestimmter Ladungen pro Gramm entnommen werden

Tabelle V.

Simla 1908 und 1909				
Regenladung per Gramm in $\frac{\text{Ces}}{\text{gr}}$	Zahl der 2 Minuteninter- valle, während deren der Regen war		Zahl der pos. Intervalle	
	positiv	negativ	Zahl der neg. Intervalle	
< 0.1	911			
0.1 — 0.9	837	305	2.7	
1.0 — 1.9	148	56	2.6	
2.0 — 2.9	52	25	2.1	
3.0 — 3.9	39	6	6.5	
4.0 — 4.9	9	8	1.1	
5.0 — 5.9	9	3	3.0	
6.0 — 19.8	14	20	0.7	

Tabelle VI.

Approxima- tive Regen- intensität in mm pro 2 min	Regen ohne Ladung	Regen mit positiver Ladung		Regen mit negativer Ladung		Verhältnis der posi- tiven Zeit- intervalle zu den negativen	Verhältnis der posi- tiven La- dung pro gr zur ne- gativen Ladung pro gr
	Zahl der 2Minuten- intervalle	Zahl der 2Minuten- intervalle	Mittlere Ladung pro gr Wasser in Ces	Zahl der 2Minuten- intervalle	Mittlere Ladung pro gr Wasser in Ces		
< 0.16	—	386	1.52	293	1.92	1.3	0.8
0.16	1112	818	0.74	420	0.87	1.9	0.8
0.38	300	509	0.40	159	0.41	3.2	1.0
0.60	44	231	0.21	50	0.33	4.6	0.6
0.82	4	126	0.19	13	0.15	9.7	1.3
1.04	0	104	0.24	10	0.11	10.4	2.2
1.26	0	63	0.26	7	0.13	9.0	2.0
1.48	1	63	0.26	2	0.10	31.5	2.6
1.70	0	27	0.28	1	0.10	27.0	2.8
> 1.70	0	74	0.21	4	0.05	18.5	4.2

Tabelle VII.

Regenintensität in mm pro 2 min	Zahl der Viertelminuten- intervalle		Verhältnis der Zeit- intervalle
	pos.	neg.	
< 0.04	3436	1048	3.3
0.04 — 0.08	1968	536	3.7
0.08 — 0.12	1384	604	2.3
0.12 — 0.16	548	268	2.0
0.16 — 0.20	612	304	2.0
> 0.20	400	196	2.0

Es zeigt sich daraus, daß bei weitem am häufigsten Ladungen unter $1 \frac{\text{Ces}}{\text{gr}}$ vorkommen und zwar sind wieder die positiven

Ladungen häufiger. Ladungen von mehr als $6 \frac{\text{Ces}}{\text{gr}}$ sind selten. Ähnliches ergeben die Beobachtungen von Puy-en-Velay und Graz.

Ein und dieselbe Stromdichte kann entweder dadurch erzeugt werden, daß wenig Regen mit starker Ladung oder viel Regen mit schwacher Ladung fällt. Es ist daher von besonderem Interesse, die Beobachtungen nach der Regenintensität zu gruppieren, worüber Tabelle VI von Simpson und VII von Baldit Auskunft geben. Die stärksten Ladungen pro Granm zeigen die schwächsten Regen.

5. Die verschiedenen Arten der Niederschläge.

Es ist üblich geworden, die Regen in Landregen, Böen und Gewitterregen einzuteilen. Von allgemein gültigen Ergebnissen ist hier nur zu erwähnen, daß die bei Landregen beobachteten Stromdichten im allgemeinen viel niedriger sind, während sich Böen und Gewitter darin nicht wesentlich unterscheiden. Die ganz hohen Werte der Stromdichten sind sämtlich bei Gewittern beobachtet worden. Über Schneefälle liegen

noch zu wenig Beobachtungen vor, als daß mit Sicherheit charakteristische Unterschiede gegenüber Regen festgestellt werden könnten. Simpson findet auch bei Schnee die positive Ladung überwiegend und die Stromdichten größer als bei Regen; ebenso ist die spezifische Ladung größer. Andere Beobachter wieder finden beim Schnee das Verhältnis von positiver zu negativer Ladung geringer als beim Regen. Es bedarf jedenfalls noch längerer Untersuchungsreihen, um sich über diesen Punkt Sicherheit zu verschaffen.

6. Potentialgefälle und Regenladung.

Auch über den Zusammenhang zwischen Potentialgefälle und Regenladung ist noch wenig Sicheres bekannt. Hervorzuheben ist, was schon Elster und Geitel getan haben, was dann von Weiß bestätigt worden ist und sich auch in den Beobachtungen von Graz und Simla häufig wiederfindet, die Tatsache, daß die Kurven, die die Regenladung und das Potentialgefälle als Funktion der Zeit darstellen, häufig den Typus von Spiegelbildern aufweisen, so zwar, daß dort, wo die positive Regenladung ein Maximum aufweist, das negative Potentialgefälle ein Minimum hat und umgekehrt; ein Umstand, der zu Gunsten der von Elster und Geitel aufgestellten Anschauung über die Bildung der Niederschlagselektrizität spricht. Im allgemeinen herrscht negatives Potential während der Niederschläge vor und aus den Beobachtungen von Simpson ergibt sich bei ungeladenem Regen 70%, bei positiv geladenem 60%, und negativ geladenem 53% negatives Potentialgefälle.

V. Richtlinien für weitere Untersuchungen.

Wenn es mir gestattet ist, möchte ich hier zum Schlusse noch einige Punkte hervorheben, deren Untersuchung zunächst von besonderem Interesse ist. Da wäre zuerst eine Frage meßtechnischer Natur zu nennen.

1. Wäre es sehr wünschenswert, nach einer exakten Methode zu untersuchen, wie weit sich bei einer gegebenen

Messanordnung die Influenz durch Änderung des Erdfeldes bemerkbar machen kann. Da sich die Sache nicht theoretisch berechnen läßt, müßte man an einem verkleinertem Modell der Messanordnung im Laboratorium den Verlauf der Kraftlinien experimentell ermitteln und daraus das Verhältnis zwischen der mittleren Feldintensität am Boden der Auffangschale \mathcal{E} und der Feldintensität im ungestörten Felde \mathcal{E}_0 berechnen. $\eta = \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_0}$ würde dann ein Maß für den Grad des elektrostatischen Schutzes bieten.

Ist die Feldintensität im ungestörten Felde zur Zeit der Erdung und Messung \mathcal{E}'_0 und \mathcal{E}''_0 , so ist die induzierte Ladung, wenn F die Bodenfläche des Auffanggefäßes bedeutet, $4\pi\eta F(\mathcal{E}''_0 - \mathcal{E}'_0)$. Ist η einmal der Größenordnung nach bestimmt und die Empfindlichkeit der Messanordnung bekannt, so läßt sich in jedem Falle die Größenordnung der influenzierten Ladung leicht berechnen.

2. Wenngleich die Fortsetzung der Registrierung der Niederschläge an einzelnen Orten sicher wünschenswert ist, um die Variabilität der Mittelwerte in den einzelnen Jahren festzustellen, so wird man Aufschluß über die Fragen der Bildung der Niederschlags Elektrizität und damit zusammenhängend die Fragen der Gewitterbildung kaum durch sie wesentlich fördern können, und es werden hauptsächlich Einzelmessungen sein, die, von einem kritischen Beobachter angestellt, wichtiges Material liefern können. Insbesondere scheint es mir bei der Entwicklung der heutigen Meßtechnik nicht aussichtslos zu sein die Messung der Ladung einzelner Tropfen vorzunehmen und zu untersuchen, ob irgendwelche Beziehung zwischen Tropfengröße und Ladung besteht, ob gewisse Ladungen häufiger vorkommen als andere und ähnliche Fragen.

3. Von großem Interesse wäre es auch, an mehreren, sehr nahegelegenen Orten gleichzeitig Messungen der Niederschlags Elektrizität vorzunehmen, um zu sehen, ob auch in horizontaler Richtung die Verteilung der Niederschlags Elektrizität

regellos ist oder ob abwechslungsweise ganze Schichten negativ und positiv geladener Tröpfchen herunterkommen.

4. Ein besonderes Studium wäre auf den Zusammenhang des Potentialgefälles und der Niederschlags Elektrizität zu verwenden, und dabei die verschiedenen Phasen eines Gewitters eingehend zu studieren.

Bei den meisten dieser Untersuchungen lassen sich natürlich Registrierungen verwenden, nur muß während des Niederschlages immer ein Beobachter vorhanden sein, der mit Aufmerksamkeit alle meteorologischen Vorgänge verfolgt und notiert.

Es scheint mir sicher zu sein, daß die von Simpson auf den Lenard-Effekt basierte Erklärung der Entstehung der Niederschlags Elektrizität in vielen Fällen das Richtige trifft, daß sie aber allein nicht hinreicht, die beobachteten Phänomene zu erklären, und daß noch andere Ursachen mitspielen müssen. Es sind eben offenbar sehr komplizierte Phänomene, deren Aufklärung man von weiterer intensiver Untersuchung der Niederschlags Elektrizität erwarten darf.

VI. Literatur.

1. J. Elster und H. Geitel. Über eine Methode, die elektrische Natur der Niederschläge zu bestimmen. *Met. Zeitschr.* 5, 95—100, 1888.
- — Beobachtungen betreffend die elektrische Natur der atmosphärischen Niederschläge. *Wien. Ber.* 99, 421—450, 1890.
- — Beobachtungen über die Eigenelektrizität der atmosphärischen Niederschläge. *Terr. Magn.* 4, 15—32, 1899.
2. H. Gerdien, Registrierung der Niederschlags Elektrizität im Göttinger Geophysikalischen Institut. *Münch. Ber.* 33, 367—379, 1903. *Phys. Zeitschr.* 4, 837—842, 1903.
3. E. Weiß, Beobachtungen über Niederschlags Elektrizität. (Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektrizität XXVI.) *Wien. Ber.* 115, Abt. IIa, 1299—1334, 1906.
4. K. W. F. Kohlrausch, Luftpotelektrische Messungen auf hoher See und im subtropischen Klima. (Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektrizität XXX.) *Wien. Ber.* 118, Abt. IIa, 25—45, 1909.

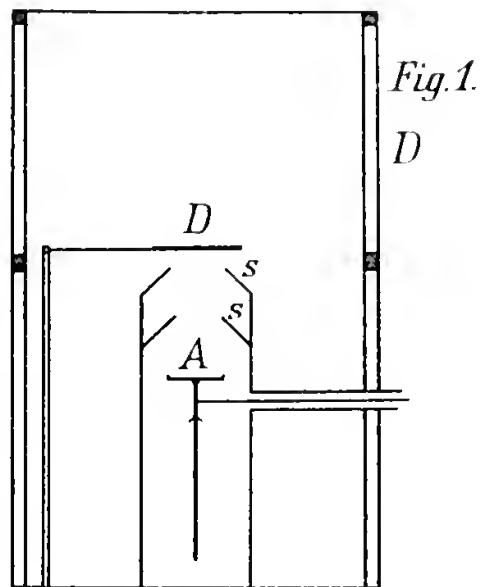


Fig. 1.
D



Fig. 2.
B

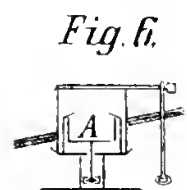


Fig. 6.
A

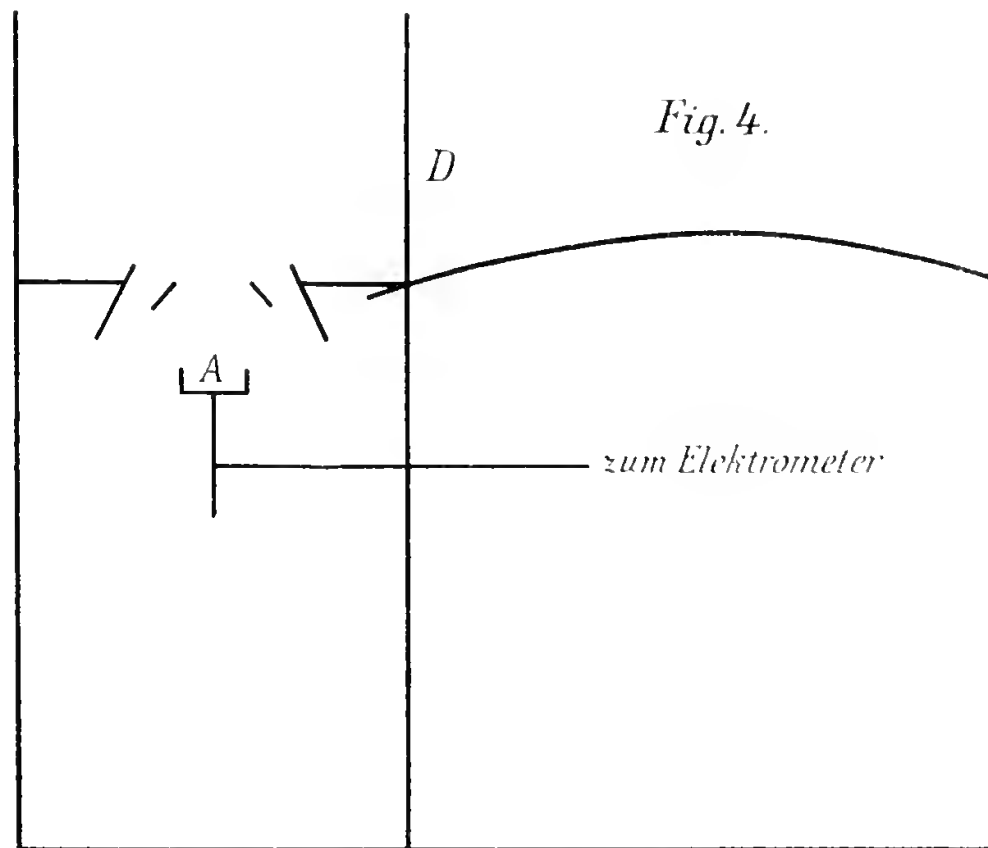


Fig. 4.

zum Elektrometer

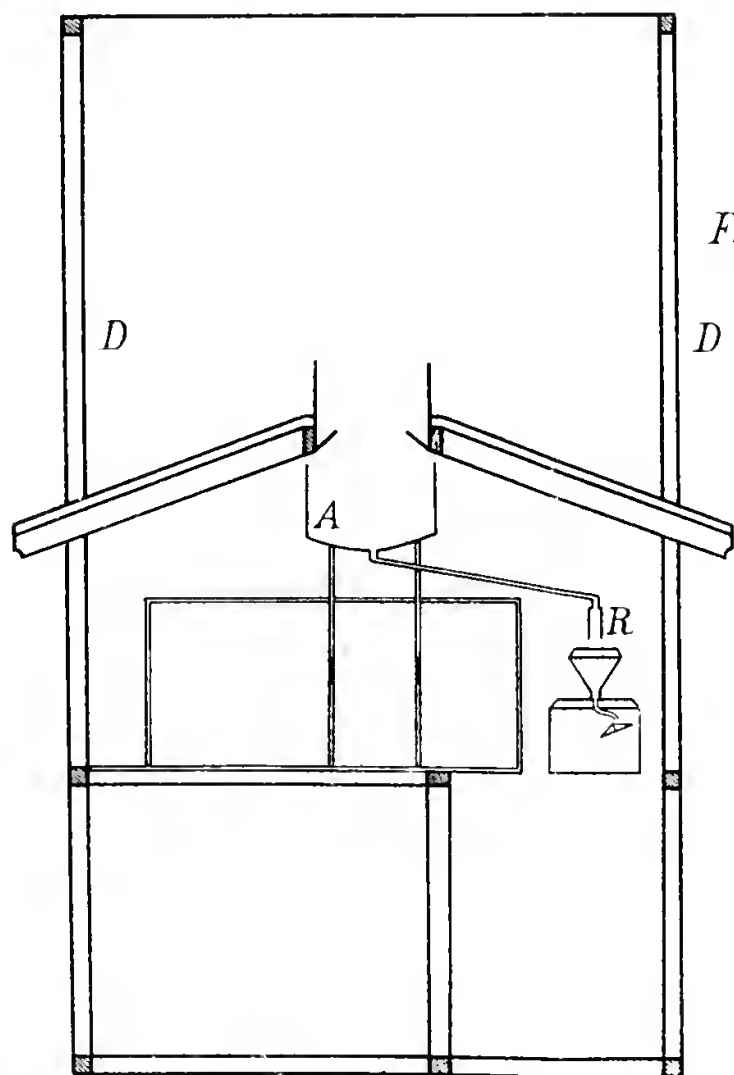
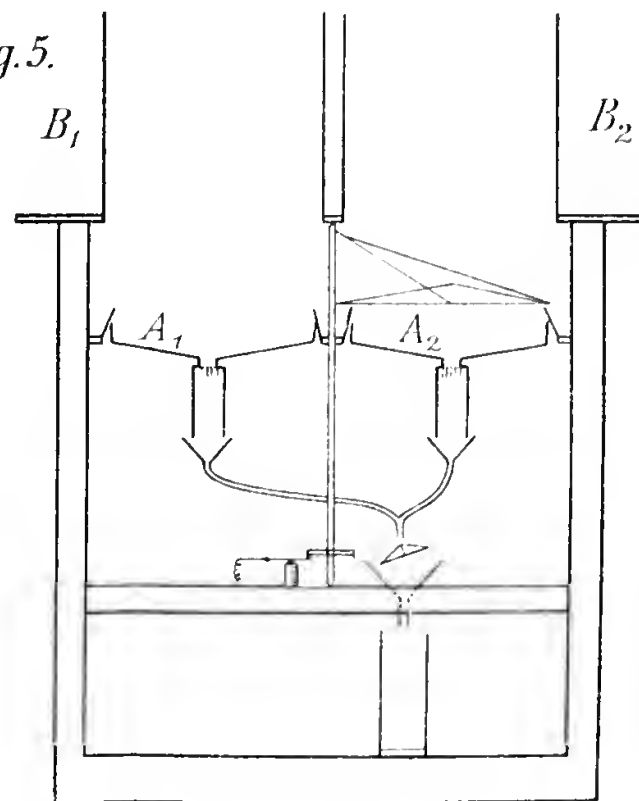


Fig. 3.

0 1 m

Fig. 5.



5. G. C. Simpson, On the electricity of rain and its origin in thunderstorms. Phil. Trans. Roy. Soc., Ser. A, 209, 379 - 413, 1909. (Das Material dazu in extenso publiziert in India Met. Mem., Vol. 20.)
 — — On the electricity of rain and snow. Proc. Roy. Soc., Ser. A, 83, 394 - 404, 1910.
6. K. Kähler, Registrierungen der Niederschlags Elektrizität mit dem Benndorf-Elektrometer. Phys. Zeitschr. 9, 258 - 260, 1908.
 — — Ergebnisse der Registrierungen der Niederschlags Elektrizität zu Potsdam im Jahre 1908. Veröff. d. K. Preuß. Met. Inst., Nr. 213, X - XXII, 1909.
7. H. Benndorf, Die Grazer luftelektrische Station. (Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektrizität XXXVII.) Wien. Ber. 119, 89 - 100, 1910. Die Beobachtungsergebnisse erscheinen demnächst in den Wien. Ber.
8. A. Baldit, Observations sur l'électricité de la pluie pendant l'été 1910 au Puy-en-Velay. Ann. soc. mét. de France 59, 105 - 116, 1911. (Auszugsweise mitgeteilt: C. R. 152, 807 - 809, 1911.)
 — — Sur les charges électriques de la pluie au Puy-en-Velay en 1911. C. R. 154, 731 - 733, 1912.
 — — Nouvelles observations sur les charges électriques de la pluie en 1911 au Puy-en-Velay. Le Radium 9, 92 - 101, 1912.
9. A. B. Chauveau, Sur quelques données actuelles relations à l'électricité de la pluie. (A propos des observations récentes de M. Baldit.) Le Radium 8, 153 - 156, 1911. (Enthält eine kritische Besprechung der Messungen Baldits.)
10. G. Berndt, Luftelektrische Beobachtungen in Argentinien. II Winter. Phys. Zeitschr. 13, 151 - 152, 1912.

Bericht Nr. 2.

Bericht über die Vervollkommnung der Methoden zur photoelektrischen Messung der Intensität der Sonnenstrahlung, speziell des kurzwelligeren Anteils desselben; von J. Elster und H. Geitel.

Mitgeteilt von J. Elster.

Die Frage, ob das kurzwellige Licht der Sonne die elektrischen Verhältnisse der Erdatmosphäre beeinflusst, ist zurzeit noch als eine offene zu bezeichnen.

Mit den vorhandenen experimentellen Hilfsmitteln läßt sich der ultraviolette Teil des Sonnenlichtes nach zwei Richtungen hin einer quantitativen Bestimmung unterwerfen.

Mit dem Zinkkugelphotometer kann seine Intensität gemessen werden, während der Quarzspektrograph die Grenze des Spektrums im ultravioletten Gebiet nach abnehmenden Wellenlängen zu festzulegen gestattet.

Mißt man die ultraviolette Strahlung mit dem Zinkkugelphotometer, so ordnen sich die beobachteten Intensitäten für Sonnenhöhen zwischen 10—50° in die Lambertsche Formel

$$J = J_0 a \frac{1}{\sin \vartheta}$$

in genügender Annäherung ein; für Sonnenhöhen $> 50^\circ$ ist dies nicht mehr der Fall, die beobachteten Werte liegen bis zu 20% höher als die berechneten. Dabei wird die Differenz zwischen Beobachtung und Berechnung um so größer, je größer die Erhebung des Beobachtungsortes über dem Meeresspiegel ist. Diese von Geitel und dem Berichterstatter¹⁾ zuerst auf dem Sonnblickobservatorium konstatierte Erscheinung ist durch

¹⁾ J. Elster und H. Geitel, Wien. Ber. 101, Abthl. II a, p. 703, 1892.

Dorno in Davos neuerdings bestätigt, desgleichen auch unser früheres Resultat, daß der Transparenzkoeffizient für ultraviolette Licht anscheinend um so kleiner wird, je höher man sich in die Atmosphäre erhebt.

Diese Ergebnisse lassen eine zwiefache Deutung zu: Die Abweichung vom Lambertschen Gesetze kann ihren Grund in der Inhomogenität der Strahlung haben und zwar in der Art, daß mit Erhebung in die Atmosphäre hinein nur eine Intensitätsverschiebung der Strahlung nach dem brechbaren Ende des Spektrums hin erfolgt, ohne daß dieses selbst mit wachsender Meereshöhe eine Verlängerung erfährt; es können aber auch bei großen Sonnenhöhen und bei hoher Lage des Beobachtungsortes über dem Meere neue Strahlengruppen hinzutreten, die in der Luft so stark absorbiert werden, daß sie die tiefsten Schichten der Atmosphäre überhaupt nicht erreichen.

Die letztere Auffassung würde bedingen, daß die Grenze des Sonnenspektrums sich um so mehr nach den kurzen Wellenlängen verschöbe, je geringer die Schichtdicke der durchstrahlten Luft ist.

Beide Auffassungen erklären die scheinbare Abnahme des Transparenzkoeffizienten der elektrisch wirksamen Strahlung mit zunehmender Meereshöhe. Für die zuletzt entwickelte sprechen die Messungen Cornus¹⁾ aus dem Jahre 1880, der als Grenze des Sonnenspektrums im Meeresniveau die Wellenlänge $292,2 \mu\mu$ fand und berechnete, daß für je $663,3$ m Erhebung das Spektrum sich um $1 \mu\mu$ verlängert.

Miethe und Lehmann²⁾ einerseits und Dorno³⁾ andererseits fanden dagegen kürzlich in Übereinstimmung mit der ersten Auffassung die Grenze des Spektrums unabhängig von der Meereshöhe bei $291,24 \mu\mu$ und neigen auf Grund ihrer Messungen der Ansicht zu, daß die Sonne Licht von kleinerer Wellenlänge als rund $291 \mu\mu$ überhaupt nicht aus-

¹⁾ Cornu C. R. 111, 941. 1880.

²⁾ Miethe-Lehmann. Sitzungsber. der K. Preuss. Akad. VIII, 1909.

³⁾ C. Dorno. Licht und Luft des Hochgebirges. Braunsch., Fried. Vieweg & Sohn, S. 33, 1911.

sende, oder, wenn der Sonnenball solches emittiere, so soll dies bereits in der Chromosphäre der Sonne durch Absorption verloren gehen.

Seit der letzten Tagung unserer Konferenz ist Dember¹⁾ bemüht gewesen, experimentell einen Zusammenhang zwischen Lichtabsorption und Ionisierung der Atmosphäre aufzufinden, während Lenard²⁾ auf dem Standpunkte Cornus stehend und fußend auf eigenen Versuchen mit Eisenfunkenlicht dem Sonnenlicht folgende Eigenschaften zuschreibt:

1. „Ozonbildung, tief herabgehend in die Atmosphäre, weil bereits durch Strahlen relativ großer Wellenlänge bedingt.“

2. „Fortdauernde Erregung von Nebelkernen durch Bildung von Ammoniumnitrit und -nitrat, wahrscheinlich auch von H_2O_2 aus Wasserdampf. Die Region für diese Wirkungen sind die oberen Dämmerungsschichten, welche ohne Lichtwirkung ungetrübt bleiben müßten.“

3. „Fortdauernde Erzeugung von Elektrizitätsträgern in den höchsten Schichten, welche aber meist dortselbst durch Rekombination verloren gehen ohne in beträchtlicher Anzahl in größere Tiefen herabdringen zu können.“

Man darf indes nicht verkennen, daß bislang für eine unmittelbare Beeinflussung der elektrischen Eigenschaften der Atmosphäre nur die Tatsache spricht, daß die Reichweite elektrischer Wellen bei Nacht und bei Tage verschieden ist und daß sie, wie auf Grund von Erfahrungen gelegentlich der Sonnenfinsternis am 17. April dieses Jahres mehrfach behauptet worden, Änderungen mit zunehmender Bedeckung der Sonnenscheibe durch den Mond erfahren soll. Ferner ist an sich nicht ausgeschlossen — doch fehlt hierfür noch der experimentelle Beweis —, daß die kurzwelligen Strahlen des Sonnenlichtes, welche entladend auf Zink und verwandte Metalle wirken, durch den Hallwachs Effekt eine positive

¹⁾ H. Dember. Phys. Zeitschrift 13, S. 207, 1912.

²⁾ P. Lenard und C. Ramsauer, Sitzungsber. der Heidelberger Akad., 24. Abh., S. 45, 1911.

Elektrisierung des atmosphärischen Staubes hervorrufen, unter gleichzeitiger Absprengung negativer Ionen.

Eine Klärung der hier angeregten Fragen kann nur dadurch herbeigeführt werden, daß erneut die Ausdehnung des Sonnenspektrums und die Intensitätsverteilung darin in verschiedenen Meereshöhen untersucht werden.

Wir waren deshalb bestrebt, die Methoden der Intensitätsmessungen zu vervollkommen und vor allem das Zinkkugelphotometer durch ein zuverlässigeres Instrument zu ersetzen und empfehlen nunmehr:

A. Für Stationsbeobachtungen.

In erster Linie ein Photometer*), dessen lichtempfindlicher Teil in einer sensibilisierten, mit verdünntem Argon gefüllten Kaliumzelle besteht. Die Sonnenhöhe ist direkt am Instrument abzulesen. Belastung der Zelle 20—40 Volt. Zum Messen des photoelektrischen Stromes genügt ein Drehspulgalvanometer von der Empfindlichkeit 10^{-7} bis 10^{-8} Ampère pro Skalenteil. Die Uviolglaszelle läßt Strahlen bis zu $250\mu\mu$ durch. Dem Apparate sind Strahlenfilter beigegeben, um den Stromanteil, der auf das Ultraviolett entfällt, von dem durch das sichtbare Licht bewirkten zu trennen.

In zweiter Linie, weil dies Photometer noch nicht in gleicher Weise wie das obengenannte durchgearbeitet werden konnte:

Ein Photometer gleicher Form, aber ohne alle Strahlenfilter. Die Kaliumzelle ist ersetzt durch eine solche aus Cadmium in Uviolglas, ebenfalls mit Argonfüllung. Als Meßinstrument dient ein stromanzeigendes Elektrometer mit Xylolwiderstand nach Campbell. Solch ein Widerstand, der genau dem Ohmschen Gesetze folgt, ist leider nicht unabhängig von der Temperatur und soll nach Campbell nur benutzt werden bei Temperaturen zwischen 15 bis 30° C. Dann ist:

$$R_t = R_{20}(t + 0,014(t - 20)).$$

*) Anmerkung bei der Korrektur: Eine Beschreibung des Instrumentes ist inzwischen in der Phys. Zeitschrift 13, S. 739, 1912, erschienen.

Die Werte von R_{20} liegen zweckmäßig zwischen 10^{10} bis $10^{12} \Omega$. Bei hoher Belastung der Zelle (300 bis 400 Volt) ist, soweit unsere Erfahrungen gehen, auch dem Sonnenlicht gegenüber ein Drehspulgalvanometer von der Empfindlichkeit 10^{-9} Ampère pro Skalenteil ausreichend. Eine Scheibe klaren dünnen Fensterglases, als Lichtfilter benutzt, reduziert den Photostrom auf 1 bis 2% seines Wertes. Mit einer derartigen Zelle mißt man also in der Tat unmittelbar nur die Intensität des kurzwelligsten Anteiles des Sonnenlichtes.

B. Für Messungen im Ballon.

Photometer mit sensibilisierter Kalium-Uviolglas-Zelle in lichtdichter Kapsel, ohne Stativ. Drehspulgalvanometer in Dosenform von der Empfindlichkeit 10^{-6} bis 10^{-7} Ampère pro Skalenteil. Trockenbatterie von 40 Volt Klemmenspannung. Die Sonnenhöhe ist durch ein gesondertes Instrument zu bestimmen. Bei einer von Dr. Bergwitz ausgeführten Ballonfahrt hat sich dies Instrumentarium durchaus bewährt.

Besonders interessant wäre die Verwendung einer Cadmiumzelle im Ballon. Bislang haben wir aber eine für derartige Messungen ausreichende Empfindlichkeit der Zelle nicht erzielen können. Das Ideal eines Photometers für Untersuchungen über das kurzwellige Sonnenlicht dürfte ein selbstregistrierendes Instrument sein, das im unbemannten Ballon in die größten bislang erreichten Höhen emporgeschickt werden könnte, ein Ziel, dessen Erreichung uns nicht außer dem Bereiche der Möglichkeit zu liegen scheint.

Wolfenbüttel, 21. Mai 1912.

Bericht Nr. 3.

Über die Resultate der von den kartellierten Deutschen Akademien organisierten luftelektrischen Terminbeobachtungen im Jahre 1911/12.

Von **H. Ebert.**

Bei Gelegenheit der Göttinger Tagung der luftelektrischen Kommission im Juni 1911 wurde der Beschluß gefaßt, luftelektrische Terminbeobachtungen anzustellen und zwar möglichst an den Tagen der internationalen Serienaufstiege, weil an diesen die gesamte über Europa statthabende Wetterlage am genauesten beurteilt werden kann; ins Auge wurden zunächst gefaßt Messungen des Potentialgefälles und der Leitfähigkeit, weil aus diesen beiden Elementen auch die Intensität des normalen vertikalen Leitungsstromes unmittelbar erhalten werden kann, und gerade dieses Element nach den Voruntersuchungen besonders interessante Vergleichspunkte zu geben verspricht.

Dem Wunsche nach solchen Terminbeobachtungen sind im verflossenen Jahre nachgekommen die

Registrierstationen: Braunschweig (Bergwitz), Davos (Dorno), Graz (Benndorf), München-Sternwarte (Lutz), Potsdam (Kähler).

Einzelbeobachtungen wurden angestellt in Bad Aibling (Dauderer), Dresden (Dember). München-Sternwarte (Gleißner-Hoffmann), Seeham bzw. Innsbruck (von Schweidler), Wolfenbüttel (Elster-Geitel).

Beobachtungen fanden statt im Jahre 1911 in der Zeit vom 10.—16. September und vom 6.—8. Dezember;

im Jahre 1912 vom 3.—5. Januar und vom 11.—13. April.

Beobachtet wurden das Potentialgefälle und die Leitfähigkeit teils in relativem, teils in absolutem Maße.

Die von den einzelnen Stationen nach München, als dem derzeitigen Vororte, eingeschickten Beobachtungsdaten wurden hier (von Hoffmann und Gleißner) in Tabellen und Kurven

11. September 1911	12	1 ^a	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Brannschweig *	99	133	112	142	137	72	0	281	335	353	236	193
Graz *	69	60	51	52	25	45	97	138	202	259	216	190
Potsdam *	284 1,98	269 2,87	205 2,32	174 1,99	174 2,08	205 2,41	221 2,28	336 5,40	307 2,25	266 2,01	219 1,95	269 1,73
München 2										110 1,28		110 1,31
Seeham $k \cdot \left\{ \right.$								30 0,66		32 0,96		40 0,88
Wolfenbüttel G									1,58			2,09

12. September 1911	12	1 ^a	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Braunschweig *	160	178	162	187	243	202	63	90	245	259	218	203
Graz *	130	116	107	98	86	92	118	139	173			143 3,58
München 1 *	74	64	52	66	72	74	97	125	128	155	160	147
Potsdam *	201 2,85	175 2,82	193 3,12	336 2,56	266 2,66	199 2,12	190 2,65	234 2,78	263 3,06	280 2,74	251 2,26	248 2,10
München 2										111 1,00		104 0,61
Seeham $k \cdot \left\{ \right.$								22 0,69		30 0,91		30 0,88
Wolfenbüttel G									1,89			1,93

einheitlich verarbeitet; insbesondere wurde aus dem Potentialgefälle und der Leitfähigkeit die Intensität des Vertikalstromes berechnet. Sodann wurden autographische Abdrücke dieser Zusammenstellungen den einzelnen Mitgliedern der luftelektrischen Kommission sowie den beteiligten Stationen zugesandt.

12	1P	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	Wetter
193	191	187	162	97	103	126	126	189	184	155	133	heiter Wind schwach
143	142	129	120			132	149	157	146	147	139	heiter
						2,40	2,30	2,89	2,90	2,99		
283	292	304	251	292	362	225	225	248	283	216	263	
2,07	1,94	1,69	1,56	1,63	1,69	0,87	1,22	1,73	2,07	2,54	3,12	
	110		104			398		62				heiter
	1,40		1,64			3,54		0,91				Wind mittel
			50					42		27		heiter
			1,21					1,26		0,88		Wind mittel
						2,20						

12	1P	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	Wetter
178	155	92	49	49	106	160	203	203	178	164	205	heiter, trocken Wind schwach
159	163	163	139		140	106	129	139	129	122	120	heiter
3,64	3,64	3,64	3,39		4,65							
126	121	125	110	97	85	71	137	154	137	130	127	
248	213	199	175	193	164	187	199	210	199	178	175	
2,32	2,20	2,17	1,80	2,10	2,32	2,74	2,98	2,73	2,48	2,58	2,80	
	92		88		72		50					heiter, trocken
	0,93		0,67		1,50		0,95					wenig Wind
			42				25		20			heiter, trocken
			1,31				0,73		0,66			wenig Wind
							1,82					

14. September 1911	12	1 ^a	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Braunschweig*	142	85	72	57	52	36	11	85	101	135	101	101
Graz*	82	80	84	69	73	90	110	186	201 4,62			
München 1*	96	85	85	77	85	97	121	130	263	176	227	235
Potsdam*	63 0,50	95 0,71	174 1,37	142 1,18	190	158 1,25	142 1,23	126 1,43	152 2,68	166 2,52	239 2,47	181 2,06
München 2		50 1,03								204 0,91		188 0,59
Seeham	$k \cdot \left\{ \right.$							10 0,49		26 1,19		20 0,71
Wolfenbüttel	G								5,47			2,71

Das Ganze muß als erster Versuch luftelektrischer Simultanbeobachtungen angesehen werden, namentlich weil nicht alle Termintage die Bedingungen eines ungestörten Feldes erfüllten. Von einer Veröffentlichung des gesamten Materiales (16 Tage) kann daher an dieser Stelle abgesehen werden; vielmehr soll nur das Beobachtungsmaterial dreier Tage, die den gestellten Anforderungen am besten genügten, als Beispiel wiedergegeben werden.

In den folgenden Tabellen sind nur die Stationen aufgeführt, welche für die links oben bezeichneten Termintage Material zu liefern imstande waren; die Registrierstationen sind durch * ausgezeichnet (München 1 = München-Sternwarte, Registrierstation; München 2 = München-Sternwarte, Wilson-Apparat).

Die erste, jeder Station zugeordnete Zeile gibt das daselbst registrierte bzw. beobachtete Potentialgefälle in Volt/m reduziert auf die Ebene. Bei Stationen, an denen diese Reduktion noch nicht vorgenommen werden konnte, ist dies dadurch angedeutet, daß ein später noch anzubringender Reduktionsfaktor vorläufig mit k bezeichnet wurde; bei diesen Stationen läßt sich

12	1P	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	Wetter
160	137	148	52	0	87	49	61	58	54	144	304	bedeckt Wind mäßig
175	134	127	105	94	105	122	151	161	140	119	129	heiter
		4,35	4,05	4,35	3,47	3,35	3,75	5,04	6,97	6,28	6,21	
190							216	140	75	90	61	
199	175	155	166	149	166	379	190	174	-97	47	63	
1,86	2,06	1,98	2,16	1,85	2,65	4,76	2,11	2,43				
	100		118		115		92					früh bedeckt
	0,43		1,46		1,13		0,91					heiter, Stille
			20				25		17			heiter
			0,85				0,56		0,82			Wind schwach

daher nach den mitgeteilten Zahlen zunächst nur der Gang nicht aber der Absolutwert des Gefälles zum Vergleiche mit den anderen Stationen heranziehen.

Bei den Stationen, welche außer den Potentialwerten auch die Leitfähigkeit λ in elektrostatischen Einheiten anzugeben imstande waren, wurde durch Multiplikation und entsprechende Reduktion die Intensität des normalen, vertikalen Leitungsstromes in Ampères pro $\text{cm}^2 \times 10^{16}$ berechnet; die entsprechenden Zahlen erfüllen die zweite Zeile jeder Station (aus ihnen können also durch Division durch die Gefällswerte und einfacher Umrechnung die Werte der Leitfähigkeit wieder erhalten werden); wo nur Werte für λ erhalten wurden, wird die Berechnung des Vertikalstromes durch Multiplikation mit dem unbestimmten Faktor G (Gefälle) herbeigeführt.

Den Gang der genannten Elemente übersieht man besser aus den nach den Tabellen gezeichneten drei Kurvenbeispielen Fig. 1, 2 und 3.

Übereinstimmung in den Zahlen war von vornherein nicht zu erwarten, dazu ist namentlich das Potentialgefälle ein zu

sehr von lokalen Einflüssen abhängiger Faktor; ein teilweiser Parallelismus der Kurven ist freilich nicht zu verkennen, doch könnte derselbe auch zufälliger Natur sein; die Kurven bringen jedenfalls den täglichen Gang der ins Auge gefaßten Elemente zum Ausdruck. Da die Leitfähigkeit zum Teil einen spiegelbildlichen Verlauf zum Potentialgefälle aufweist, zeigen die Kurven für den Leitungsstrom im allgemeinen einen ausgeglicheneren Gang. Was die Werte desselben betrifft, so ist zu beachten, daß bei Vertikalbewegungen der Atmosphäre ein Teil des Stromes konvektiven Charakter haben kann.

Nach den bisherigen Ergebnissen wäre es erwünscht, wenn das Beobachtungsnetz dichter gezogen, und die Zahl der Termintage wesentlich erhöht werden könnte.

Bericht Nr. 4.

An die luftelektrische Kommission der kartellierten Akademien,
München.

Von Th. Simon.

Zu dem Plane, die drahtlose Telegraphie in den Dienst der Erforschung der luftelektrischen Verhältnisse zu stellen, erlaube ich mir folgendes zu bemerken:

1. Prinzip und Methode der Messungen.

Es ist notwendig, daß eine große Station mit konstanter Energie Wellen aussendet, während ein Netz von Beobachtungsstationen in einem vergleichbaren Maße mißt. Die Methode dieser Messungen muß einfach und zuverlässig sein, so daß sie auch in relativ ungeübter Hand sichere Ergebnisse liefert. Die erforderliche Apparatur soll möglichst billig zu beschaffen sein.

Nach den Erfahrungen, die an der radioelektrischen Versuchsanstalt Göttingen gemacht worden sind, kommt als solche Methode in erster Linie die des Empfanges mit einem Duddell-Thermogalvanometer in Frage. (Konstruiert von der Cambridge Scientific Instrument Company.) Es hat sich bei unseren Untersuchungen als überaus zuverlässig und bequem erwiesen, läßt sich jederzeit eichen bzw. auf eine Normalempfindlichkeit einjustieren und kostet nur etwa 300 M. Die Beobachtung mit dem Barretter gestattet zwar noch eine höhere Empfindlichkeit zu erzielen, doch stellt dieser Apparat an die Geschicklichkeit des Beobachters so viel höhere Anforderungen, daß wir von seiner Benutzung für den vorliegenden Zweck abraten möchten. Vielleicht allerdings führen Untersuchungen, die zur Zeit im Institut für angewandte Elektrizität im Gange sind, dazu, auch

diese Beobachtungsmethode auf den gleichen Grad von Zuverlässigkeit und Einfachheit zu bringen, wie die mit dem Duddell-Galvanometer schon heute hat. Die von München aus in Vorschlag gebrachte Methode der Beobachtung mittels Saiten-Galvanometer, wobei über den angewandten Detektor nichts gesagt ist, halten wir nach unseren Erfahrungen für überaus schwierig und nicht geeignet, abgesehen davon, daß die Apparatur erheblich teurer ist. Nach unserer Meinung müßten also alle in Frage kommenden Beobachtungsstationen mit einer einfachen Empfangsapparatur und Duddell-Galvanometern ausgestattet werden, die vorher an einer Zentralstelle miteinander verglichen und geeicht worden wären. Jeder Station müßte ein Verfahren angegeben werden, wie sie bei jeder Terminbeobachtung die Eichung kontrollieren und eventuell auf den Normalwert zurückführen müßte.

Eine zweite Frage betrifft die Antenne. Da es sich kaum ermöglichen lassen wird, überall ganz gleichartige Empfangsantennen zu verwenden, was ja sonst das einwandfreieste Verfahren wäre, so muß der Strahlungswiderstand jeder Empfangsantenne ein für allemal oder auch jedesmal neu ermittelt werden, um mit seiner Hilfe die Messungen aller Stationen gewissermaßen auf eine einzige Normalantenne umzurechnen. Das muß nach den Gesichtspunkten geschehen, die kürzlich in der auf unserer radioelektrischen Versuchsanstalt durchgeführten Untersuchung von Dr. Reich niedergelegt sind (vgl. beiliegenden Sonderabdruck). Die theoretischen Gedanken dieser Arbeit sind ja inzwischen auch von Dr. Barkhausen (Jahrbuch für drahtlose Telegraphie) veröffentlicht worden. Als Senderstation kommt am besten entweder Norddeich oder Nauen in Frage. Denn diese Stationen verfügen über die weitaus größte Senderenergie. Sollten sie aber nicht für die Versuche zu gewinnen sein, so würde unsere Göttinger Versuchsstation zunächst in Frage kommen, die mit ihrer 80 m hohen Antenne immerhin eine erhebliche Strahlungsenergie entwickeln kann. Wir erklären uns für diesen Fall gern bereit, das Geben an den Termintagen zu besorgen. Um ein Urteil über die Leistungs-

fähigkeit dieses Betriebes zu geben, erlauben wir uns, folgende Überschlagsrechnung vorzulegen: Wenn Göttingen mit 2000 m Wellenlänge gibt, nach dem System der tönenden Funken, mit einer Antennenintensität von 12 Ampère, so würde eine Empfangsstation von 40 m Antennenhöhe mit einer Schirmantenne von der Kapazität 0,01 Mikروفarad, 0,08 Strahlungs-Dekrement und 27 Ohm Strahlungswiderstand in 400 km Abstand von Göttingen (z. B. in München) einen Skalenausschlag des Duddell-Galvanometers von 25 mm liefern, Skalenabstand 1 m. Dabei ist der Wattverbrauch des Duddell-Galvanometers für 100 mm Ausschlag $0,05 \cdot 10^{-4}$ eingesetzt. Diese Berechnung stützt sich auf die von uns durchgeführten zahlreichen Strahlungsmessungen.

2. Organisation des Dienstes.

Zunächst müßte versucht werden, die großen Stationen für das Geben heranzuziehen. Das müßte aber nicht durch direkten Verkehr mit den Stationen, sondern durch Verhandlungen mit den Zentralbehörden in Berlin eingeleitet werden, d. h. also mit dem Reichspostamt und dem Reichsmarineamt. Ich erkläre mich gern bereit, in dieser Richtung Verhandlungen zu führen. Ebenso würde ich vorschlagen, zu den Beobachtungen die Stationen der Marine- und Heeresverwaltung mit heranzuziehen, weil dadurch ein erheblich größeres Beobachtungsmaterial zusammengebracht werden könnte. Auch zu [den Verhandlungen in dieser Richtung erkläre ich mich bereit, da wir als offizielle Station für Marine und Heer ohnehin lebhaft Beziehungen zu den Militärbehörden unterhalten. Vorher müßte allerdings wohl die Beschaffung der erforderlichen Empfangseinrichtungen für eine genügende Anzahl von Stationen sichergestellt sein.

Bericht Nr. 5.

Verwendbarkeit des Barretters für Untersuchungen des
Einflusses der luftelektrischen Zustände auf die Strahlung
elektrischer Wellen.Von **K. E. F. Schmidt.**

Als ich vor sechs Jahren begann, mich mit der Einrichtung quantitativer Empfangsanordnungen für elektrische Wellen zu beschäftigen, stellte ich mir die Aufgabe, die Apparatur so empfindlich zu gestalten, daß auch bei sehr großen Abständen zwischen Sender und Empfänger in ganz lose gekoppelten Systemen auf Grundlage der von Bjerknes ausgearbeiteten Resonanzmethode einwandfreie Dämpfungskurven aufgenommen werden konnten. Als geeignete Instrumente kamen damals in Betracht:

1. der elektrolytische Detektor von Schlömilch,
2. das Thermoelement,
3. das Thermogalvanometer von Duddell,
4. der von Fessenden angegebene Barretter.

Der Detektor zeigte wohl hohe Empfindlichkeit; es gelang aber nicht, auch nur einigermaßen befriedigende Konstanz quantitativer Indikationen zu erzielen. Inzwischen ist durch die Kontaktdetektoren eine wesentliche Besserung erzielt, aber nach den vielen Versuchen, die auf meinen Versuchsstationen gemacht sind, zeigen auch diese Apparate im Laufe der Zeit eine sehr merkliche Abnahme in der Empfindlichkeit und sind daher ohne dauernde Kontrolle nicht genügend sicher.

Das Thermoelement war vor sechs Jahren noch nicht bis zum Maximum der erreichbaren Empfindlichkeit durch-

konstruiert; es ist in meinem Laboratorium soweit verfeinert, daß eine Verbindung mit einem Deprez d'Arsonval Galvanometer (2.5×10^{-8} Amp. Empfindlichkeit) noch Ströme von 0.089×10^{-3} Amp. anzeigt¹⁾. Für Empfangsmessungen erwies es sich aber als nicht genügend empfindlich.

Das von Duddell gebaute und von ihm zu Empfangsversuchen (auf 2—3 km Entfernung) benutzte Galvanometer hat an sich große Empfindlichkeit (100—200 Ohm-Instrumente $0.0012 \cdot 10^{-3}$ Amp.)²⁾. Da die Instrumente aber wegen ihrer Konstruktion nur einen sehr geringen Teil der Energie der ankommenden Wellen für die Anzeige verwenden, sind sie nie bis zum äußersten der zur Verfügung stehenden Energie auszunutzen; ich glaubte daher von ihrer Verwendung absehen zu sollen.

Ich habe mich dann bemüht, den von Fessenden angegebenen Barretter soweit wie irgend möglich zu vervollkommen.

Es ist mir durch eine über mehrere Jahre durchgeführte Arbeit gelungen, Barretterkombinationen auszuführen, welche einwandfrei gestatten, auf Grund der Bjerknæs-Methode Resonanzkurven aufzunehmen, wenn die Wellen viele hundert Kilometer (z. B. Norddeich — Halle 400 km) durchlaufen haben. Ich glaube mit Bestimmtheit, daß es mit solchen Barrettern möglich ist, noch sicher quantitativ zu arbeiten, wenn die Stationsabstände auf 1000—2000 km steigen. Wie bei solchen Entfernungen die Koppelungen zu machen sein werden, müssen entsprechende Versuche zeigen.

Daß diese hohen Empfindlichkeiten mit gewissen Unbequemlichkeiten in der ersten Aufstellung des Barretters verknüpft sind, ist nicht zu vermeiden. Besonders erfordert eine gute Nullpunkteinstellung besondere Schutzeinrichtungen gegen äußere Temperatureinflüsse. Durch entsprechende Packungen in Kieselguhr und wenn nötig in Kasten mit hinreichender

¹⁾ S. Otto Knopp, Mitteilungen der physikalischen Versuchsstation Halle-Crörlwitz, Nr. 15 (im weiteren kurz als Mitteilungen bezeichnet). K. E. F. Schmidt, Physikal. Zeitschr. X, p. 438.

²⁾ Zenneck, Leitfaden für drahtlose Telegraphie, p. 72.

Wärmeisolation durch Luftschichten¹⁾ gelingt es aber sicher, gute Nullpunkteinstellungen zu erzielen, wie sie für exaktes Arbeiten durchaus gefordert werden müssen.

Beifolgende graphische Darstellungen geben zwei Nullpunktserien, welche am 17. und 18. April 1912 mit meinem empfindlichsten Barrettersystem auf einer frei im Felde liegenden Station über die Zeit von einer bzw. zwei Stunden im Betrieb mit Norddeich bzw. Göttingen von mir beobachtet sind.

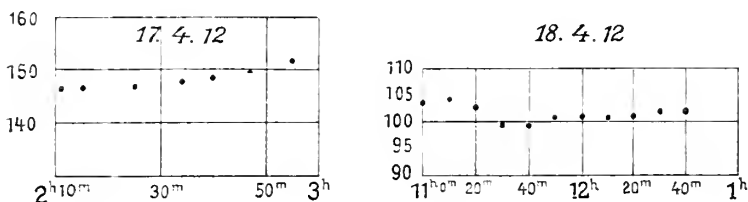


Fig. 1.

Nullpunktstellungen einer Barretterkombination sehr hoher Empfindlichkeit.

Ist das System einmal aufgestellt und verwendet man Akkumulatoren²⁾, welche den untergelegten Gleichstrom für den Barretter liefern, von guter Konstanz in der Spannung, so ermöglicht der Barretter ein sehr bequemes und sicheres Arbeiten.

Herstellung des Barretters³⁾. Die Barretter werden aus Wollastondrähten mit etwa 0.002—0.003 mm Platinseele hergestellt, indem man an dem haarnadelförmig umgebogenen Drähtchen von ca. 10 mm Länge einige Millimeter des Silbermantels fortätzt. Trotz vielfacher und über mehrere Jahre aus-

¹⁾ K. E. F. Schmidt, Ann. d. Phys. XXVI, p. 622, 1908.

²⁾ Die Akkumulatoren, welche auch durch Temperaturänderungen in ihren Schwankungen beeinflusst werden, stelle ich ebenfalls in das Innere des Kistenraumes, wo der Barretter Platz findet

³⁾ K. E. F. Schmidt, Phys. Zeitschr. VIII, 1907, p. 601. Rautenkrantz, ib. IX, 911, 1908; X, 93, 1909. Neuhaus und Kempe, Mitteilungen 14, 19. Zölllich, Phys. Zeitschr. X, p. 899, 1909.

gedehnter Bemühungen ist es mir nicht gelungen, die Gesichtspunkte völlig zu klären und die Herstellung so in die Hand zu bekommen, daß mit Gewißheit vorausgesagt werden kann, ob ein fertiggestellter Barretter das Maximum der erreichbaren Empfindlichkeit aufweist. Es ist das wohl verständlich, wenn man die Technik der Wollastondrähte und das Abätzverfahren ins Auge faßt und hinzunimmt, daß auch die Güte des Vakuums sehr merklichen Einfluß auf die Empfindlichkeit besitzt.

Aus einer Zahl von 15–20 Stück wird man aber immer einige Barretter mit sehr hoher Empfindlichkeit erzielen können.

Die Verwendbarkeit des Barretters für das Studium der Aufgabe, welche die Kommission für luftelektrische Forschung am meisten interessiert, mag aus folgenden Resultaten am besten ersehen werden.

Eine der ersten Beobachtungen, daß der elektrische Zustand der Atmosphäre von wesentlichem Einfluß ist, rührt von Marconi her, welcher 1902 auf einer Schiffsstation die Reichweiten seiner irischen Station bestimmte¹⁾. Er fand, daß bei Nacht die Wirkungen sehr viel stärker als am Tage waren. Zahlreiche, systematisch durchgeführte Beobachtungen, namentlich von der Gesellschaft für drahtlose Telegraphie veranlaßt, haben das Resultat durchaus bestätigt und eine große Reihe sehr bemerkenswerter Punkte zutage gefördert, welche zur weiteren Verfolgung der noch wenig geklärten Erscheinungen drängen.

Die sämtlichen Beobachtungen basieren auf Höreffekt, welcher von subjektiven Momenten naturgemäß stark beeinflusst ist. Daß hier große Vorsicht in der Verwendung des Beobachtungsmaterials nötig ist, haben hier ausgeführte Vergleichsmessungen mit dem Barretter ergeben. Daß aber die Barrettermethode außer der Zuverlässigkeit noch den Vorzug größerer Feinheit besitzt, haben Versuche auf der hiesigen Station gezeigt. Während nämlich die Unterschiede zwischen Nacht- und Tag-Empfangswirkung bei der Hörmethode erst

¹⁾ Literatur s. Zenneck, Leitfaden, p. 368.

bei 1000 km Entfernung sicher nachzuweisen sind, gibt der Barretter schon bei ca. 400 km Entfernung Unterschiede an, welche im Verhältnis 4:1 bzw. 3:1 stehen¹⁾.

Leider ist es mir bisher trotz vielfacher Bemühungen nicht möglich gewesen, systematische Versuche mit einer größeren Station durchzuführen, welche den Einfluß der verschiedenen Zustände der Atmosphäre auf die Übertragung der Wellen quantitativ feststellen würden, namentlich auch darüber Aufklärung gäben, in welcher Weise sich zeitlich die Zunahme der Wirkung nach Sonnenuntergang und die Verschlechterung vor Sonnenaufgang vollzieht.

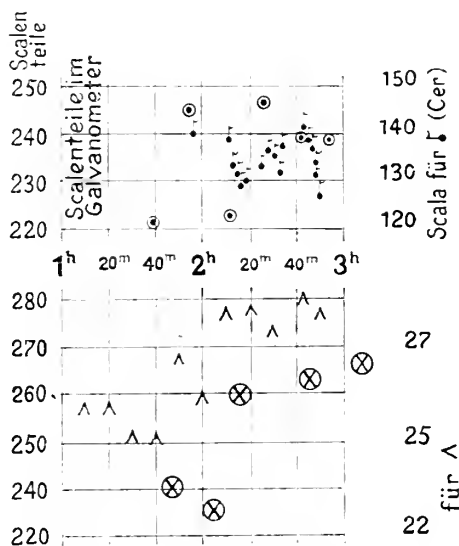


Fig. 2. Empfangs Intensitäten

- ⊙ Norddeich-Wallwitz (bei Halle)
- ⊗ Göttingen-Wallwitz
- △ Göttingen-Halle (S) (1)
- ⋄ Wirkungen des telegraphischen Signals Cer (in Morsezeichen — · — · — ·) 2

¹⁾ Jaskowski, Mitteilungen Nr. 33 (erscheint demnächst).

Das einzige, was ich Ihnen bis jetzt als positives Resultat vorlegen kann, sind Beobachtungen, welche ich mit Wellen von Norddeich und Göttingen (letztere gemeinsam mit Dr. Reich) am Tage der Sonnenfinsternis (17. April 1912) und am folgenden (Kontrollbeobachtungen) erhielt. In Norddeich und Göttingen wurde die Sendeenergie konstant gehalten und in Wallwitz und Halle¹⁾ die Empfangsintensitäten gemessen. Die Resultate gibt Fig. 2. In der Abszisse sind die Zeiten aufgetragen, zu denen beobachtet wurde. Da die Kontrollbeobachtungen am 18. April, welche in Gemeinschaft mit Göttingen gewonnen wurden, Schwankungen von gleicher Intensität wie am 17. April ergaben, so läßt sich aus den Beobachtungen nur der Schluß ziehen, daß auf den Strecken Göttingen—Halle und Norddeich—Halle ein Einfluß der Sonnenfinsternis auf die Strahlung elektrischer Wellen nicht nachzuweisen war.

Derartig starke Schwankungen sind auf der 8 km langen Strecke (Halle) Cröllwitz—Wallwitz nie beobachtet²⁾; an sechs Tagen im August 1909 sind 2^h—10^h nachmittags alle 15 Minuten Werte für das Verhältnis der $\frac{\text{Amplituden-Sendestation}}{\text{Amplituden-Empfangsstation}} = \eta$ festgestellt, welche in den Zeitperioden 2^h—5^h und 7^h—10^h Mittelwerte ergeben, gegen welche die maximalen Abweichungen selbst an Tagen mit Gewittern nur 5% betragen; an manchen Tagen treten nur Maximalabweichungen von 2% auf³⁾.

1) Die Versuche im physikalischen Institut Halle wurden von meinem Assistenten Herrn Dr. Lutze durchgeführt. Herr Lutze fand an beiden Tagen gegen 12^h 30^{min} einen starken Abfall der Empfangsintensität. Am 17. April stieg die Wirkung um 1^h wieder auf den Wert, der bis 12^h beobachtet war; am 18. April blieb die Intensität erheblich unter dem Frühwert. Das Material ist aber für Schlußfolgerungen nicht ausreichend.

2) Es muß das hier besonders betont werden, da von anderer Seite die oben mitgeteilten Schwankungen am 17./18. April 1912 auf Unsicherheiten in den Anzeigen des Barretters geschoben sind.

3) Näheres Guldennpfennig. Mitteilungen Nr. 25. p. 11 u. 12.

Nur an einem Tage, wo es fast 12^h ununterbrochen regnete, fiel die Größe η allmählich von 0.72 auf 0.09 in der Zeit von 12^h 45^m bis 6^h 30^m nachmittags.

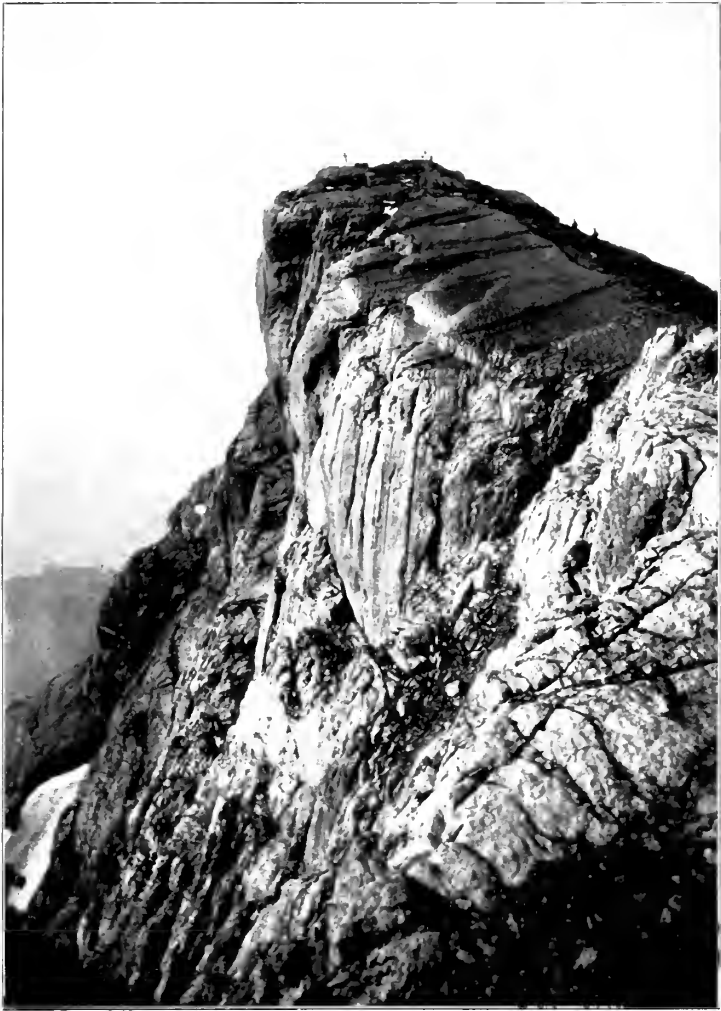
Weiter ist noch hervorzuheben, daß bei gutem Funken der hochempfindliche Barretter sich in etwa 40 sec einstellte und diese Stellung bis auf $\frac{1}{10}$ Skalenteil konstant beibehielt. Jede Unregelmäßigkeit des Funkens beantwortete er selbst auf Entfernungen von 400 km mit mehr oder weniger lebhaften Schwankungen im Ausschlag.

Ich führe die am 17. April beobachteten Differenzen zum Teil auf Schwankungen der Sendeenergie zurück; da beide Sendestationen ihre Energie mit Hitzdraht-Instrumenten in der Sendeantenne beobachten, so lassen sich infolge der Trägheit der Hitzdraht-Instrumente feinere Unterschiede nicht deutlich genug erkennen. Wie weit sich bei größeren Stationen die Sendeenergie — mit feineren Meßinstrumenten ermittelt — konstant erweisen wird, müssen erst besondere Versuche ergeben¹⁾.

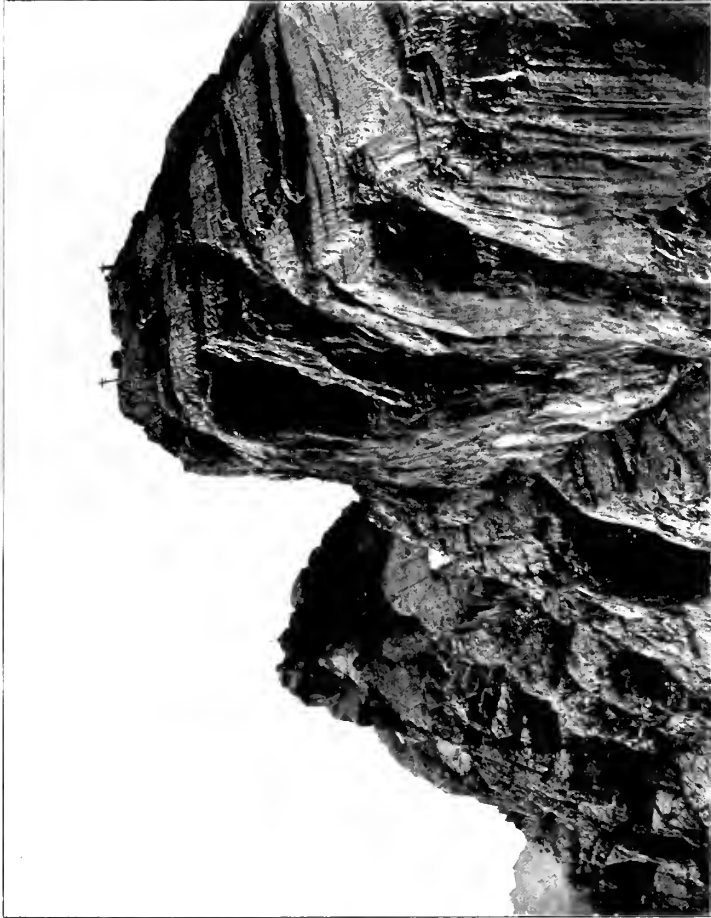
Nach den langjährigen Erfahrungen, welche hier durch eine außerordentlich große Zahl von Beobachtungen auf meinen Stationen gewonnen sind, kann ich den Barretter zum Studium des Einflusses der Atmosphärenteilchen auf die Strahlung elektrischer Wellen als ein zuverlässiges Instrument von hoher Empfindlichkeit empfehlen.

Halle (S), August 1912.

¹⁾ Norddeich gab noch das Wort Cer, damit verschiedene Stationen durch die Hörmethode den Einfluß der Sonnenfinsternis feststellten. Ich habe die Wirkungen dieser Zeichen mit dem Barretter aufgenommen. Die Wirkungen waren etwa 100 Skalenteile kleiner als die des Minutenstriches; im ganzen zeigen auch hier die Empfangswirkungen Schwankungen um ca. 10%. Nach E. T. Z. ergab in Berlin die Hörmethode ein positives Resultat.



Watzmann - Hoheck



Hodcheck
Watzmann
Mittelspitze





Watzmann - Mittelspitze

Über die räumliche und scheinbare Verteilung der Sterne.

Von **H. Seeliger.**

Vorgetragen in der Sitzung am 7. Dezember 1912.

Die vorliegende Arbeit gibt einen weiteren Beitrag zur Erkenntnis des Zusammenhanges zwischen der scheinbaren Verteilung der Sterne am Himmel und der Konstitution des Fixsternkomplexes, in dem wir uns befinden. Gegenwärtig muß man sich mit solchen Beiträgen begnügen, denn es zeigt sich, daß eine definitive Lösung der hier auftretenden Probleme ein viel mehr ausgebreitetes Beobachtungsmaterial erfordert, als jetzt zu Gebote steht. Das verfügbare statistische Material erstreckt sich nur in Ausnahmefällen auf schwächere Sterne, als von der 9. bis 10. Größe, aber gerade die Verteilung dieser schwächeren Sterne ist voraussichtlich von ausschlaggebender Wichtigkeit und wird zur Entscheidung von Vieldeutigkeiten, die dem Problem noch anhaften, beitragen. Das Studium der scheinbaren Verteilung schwacher Sterne am Himmel ist deshalb eine sehr wichtige Aufgabe, welche dem beobachtenden Astronomen zufällt. Selbstverständlich muß dabei eine sehr sorgfältige Helligkeitsbestimmung ausgeführt werden. Es ist aber ganz nebensächlich, ob die Sternhelligkeit physiologisch, photographisch oder irgendwie anders gemessen wird. Nur muß für die ganze Reihe der Sterne, von den hellsten bis zu den schwächsten, dieselbe Art der Energiebestimmung zur Anwendung kommen. Die absoluten Leuchtkräfte werden natürlich in den verschiedenen Fällen verschiedene Häufigkeitsfunktionen

aufweisen, die räumliche Dichtigkeit, welche durch die Zahl aller in der Volumeinheit enthaltenen Sterne definiert ist, kann hiervon aber nicht abhängen. Und so würde schließlich die Verwertung der Messungsergebnisse nach verschiedenen Methoden der Helligkeitsbestimmung wirksame Prüfungen für das Endergebnis abgeben. Die Art der Helligkeitsmessung hat nur die allerdings notwendige Bedingung zu erfüllen, daß die Schwächung der Intensität nach dem quadratischen Gesetz bei der freien räumlichen Ausdehnung der Lichtbewegung wiedergegeben wird.

So sind bei photometrischen Beobachtungen, wo direkt der Lichteindruck auf das Auge maßgebend ist, sehr gut verschiedene Skalen möglich, von denen jede in dem obigen Sinne homogen und infolgedessen durchaus brauchbar ist. Man kann also von verschiedenen photometrischen Systemen sprechen und es ist von Wichtigkeit, daß das verwendete System im obigen Sinne homogen ist. Strenge genommen werden also für verschiedene photometrische Systeme — die besseren zeigen übrigens keine großen Abweichungen voneinander — verschiedene Häufigkeitsfunktionen der Leuchtkräfte auftreten, die räumliche Dichtigkeit der Sternverteilung kann davon nicht berührt werden. Da zur Bildung der Häufigkeitsfunktion die Anordnung der Sterne nach ihrer Helligkeit in der Entfernung l ohne Rücksicht auf die Farbe der Sterne erfolgt, so werden gerade die verschiedenen Systeme darin verschieden sein, daß die Helligkeitsmessung von der Farbe nicht immer unabhängig ist. Wenn aber die Schwächung des Lichts gemäß des quadratischen Gesetzes wiedergegeben ist, dann ist ein schädlicher Einfluß der Sternfarbe auf die Sicherheit des Materials nicht vorhanden.

Man könnte nun, der eingangs gemachten Bemerkung gemäß, die Frage aufwerfen, ob man nicht die sehr nötige Vermehrung des statistischen Materials abwarten sollte, ehe man den Versuch macht, zu bestimmten Vorstellungen über unser Sternsystem vorzudringen. Diese Frage muß aber, wie ich glaube, entschieden verneint werden, und zwar schon des-

halb, weil gerade die weitere Verfolgung der Konsequenzen gewisser Annahmen, ohne die man gegenwärtig nicht auskommt, darauf hinweist, was man von dem tatsächlichen Materiale fordern muß und was es bisher noch nicht leistet. So hat sich z. B. ergeben, daß die zahlenmäßigen Nachweise über die scheinbare Verteilung der Sterne eine gewisse Genauigkeit haben müssen, wenn sie verwendbar sein sollen und daß es nicht angeht, ganz rohe Angaben den Betrachtungen zu Grunde zu legen. Weiterhin ergibt sich, daß das von mir als „schematisch“ bezeichnete Sternsystem, in dem von der Abhängigkeit der Sternverteilung von der Lage zur Milchstraße abgesehen wird, wohl zur ersten Orientierung dienen kann, daß es sich aber viel zu weit und in undefinierbarer Weise von den tatsächlichen Verhältnissen entfernt und demzufolge zu unrichtigen Schlüssen verleiten kann.

Man darf eben nicht die gewaltige Symmetrieebene der Milchstraße, die alle stellarastromischen Betrachtungen beeinflussen muß, einfach unberücksichtigt lassen. Schon aus diesem Grunde ist es geboten, die Betrachtungen, die dem schematischen Sternsystem bisher zuteil geworden sind, auf das „typische“ auszudehnen, in welchem überall auf eine Berücksichtigung der Abhängigkeit von der galaktischen Breite Bedacht genommen wird. Dieser Standpunkt ist übrigens bereits in meiner ersten Arbeit vom Jahre 1898 festgehalten worden.

Im folgenden werden nun Rechnungen angestellt, die zum weiteren Eindringen in die Verhältnisse im Sternsystem beitragen sollen. In Art. 1 betrachte ich, an eigene frühere und auch an fremde Arbeiten anschließend, noch einmal das schematische Sternsystem; und zwar unter der Voraussetzung, daß Sterne von beliebig großer Leuchtkraft vorkommen können. Wie zu erwarten, ergibt sich, daß dann das Problem, aus der Anzahl der Sterne verschiedener Helligkeit und aus den mittleren Parallaxen dieser Sterne, wie sie aus den Eigenbewegungen abgeleitet worden sind, die räumliche Verteilung der Sterne zu bestimmen, auch praktisch keine eindeutige Lösung hat,

wenn man dem Sternsystem verschiedene endliche Begrenzungen gibt, daß man vielmehr unendlich viele voneinander stark abweichende Lösungen finden kann, die den gegenwärtig verfügbaren Daten innerhalb zulässiger Genauigkeitsgrenzen genügen.

In Art. 2 wird der Versuch gemacht mit den in Art. 1 gebrauchten Ansätzen für ein unendlich ausgedehntes typisches Sternsystem die Rechnung durchzuführen. Es ergibt sich eine Abhängigkeit der mittleren Parallaxen von der galaktischen Breite in der Weise, daß diese für die schwächeren Sterne in der Milchstraße kleiner sind, wie in den von ihr entfernteren Regionen. Dabei treten aber beträchtliche unregelmäßige Schwankungen in den Parallaxen der helleren Sterne hervor. Ferner sind die systematischen Abweichungen nicht von der Art und Größe, wie man sie eigentlich erwarten durfte. Man wird daraus den Schluß ziehen können, vielleicht ziehen müssen, daß neben der Unsicherheit der statistischen Daten auch der Umstand mitgewirkt haben mag, die Form der gemachten Ansätze entspreche nicht der Natur des Problems. Indessen ergab, in Übereinstimmung mit dem Folgenden, auch diese Rechnung, daß bei Sternen, die schwächer als etwa von der 7. bis 8. Größe sind, die Angabe einer mittleren Parallaxe keinen rechten Sinn hat, wenn man nicht zugleich angibt, wie sich die betreffenden Sterne über die einzelnen zur Milchstraße orientierten Zonen verteilen.

In Art. 3 werden die von mir in einer Arbeit von 1911¹⁾ gemachten Ansätze auf das typische Sternsystem angewendet. Dieselben beruhen auf der Annahme einer endlichen Grenze H , welche die Leuchtkräfte der Sterne nicht überschreiten. Dann folgt die endliche Ausdehnung des Sternsystems von selbst und kann, wenn auch nur unsicher, bestimmt werden. Eine beiläufige Rechnung ergab für die Gesamtausdehnung des Systems in der zur Milchstraße senkrechten Richtung etwa 660 und in

¹⁾ Über die räumliche Verteilung der Sterne im schematischen Sternsystem. Münchener Sitzungsberichte 1911. Hier werden auch meine früheren Arbeiten in diesem Gebiete ihrer Tendenz nach zusammengefaßt.

der Richtung der Milchstraße 3500 Siriusweiten. (Eine Siriusweite entspricht einer Parallaxe $0.2''$.) Die Gestalt ist also der einer flachen Scheibe ähnlich, als welche ja auch im großen und ganzen in sehr viel kleinerem Maßstabe die Spiralnebel sich darzustellen scheinen. Die mittleren Parallaxen zeigen eine sehr bemerkbare Abhängigkeit von der Lage zur Milchstraße: die Sterne von derselben scheinbaren Helligkeit sind in der Milchstraße sehr beträchtlich (z. B. Sterne 8. Größe mehr als doppelt soweit) weiter von uns entfernt als in der Nähe der Pole der Milchstraße. Das zuletzt genannte Resultat habe ich vor kurzem an anderer Stelle¹⁾ besprochen, so daß ich in diesem Aufsätze nicht näher darauf eingehen werde. Zu bemerken ist ausdrücklich, daß bei allen Rechnungen auf eine etwaige Extinktion des Sternlichts keine Rücksicht genommen worden ist.

In den bisher erwähnten Artikeln wurde die scheinbare Verteilung der Sterne, deren Größe < 6.5 ist, gebraucht und zwar für die einzelnen Milchstraßenzonen. Diese Daten waren mit nachweisbarer Bestimmtheit früher nicht zu erlangen. Jetzt liegen aber vortreffliche photometrische Kataloge vor und es war eine Diskussion für die hellen Sterne in der angegebenen Richtung geboten und ausführbar. Die Resultate einer solchen Diskussion sind in Art. 4 enthalten.

1.

In meiner letzten Arbeit²⁾ über die räumliche Verteilung der Fixsterne, die ich im folgenden mit (III) bezeichnen und deren Inhalt ich als bekannt voraussetzen werde, habe ich einige Rechnungen über das schematische Sternsystem angestellt. Das dort benutzte System von Formeln und Zahlen ist auf der Annahme gegründet, daß die absoluten Leuchtkräfte i der Sterne einen gewissen endlichen Wert H nicht überschreiten. Aus dieser Annahme allein folgt dann die endliche Ausdehnung des Sternsystems von selbst und es gelingt sowohl die Darstel-

1) Astronomische Nachrichten, Nr. 4617.

2) Über die räumliche Verteilung der Sterne im schematischen Sternsystem. Sitzungsberichte der Münchener Akademie d. Wiss. 1911.

lung der festgestellten Zahlen A_m , das ist der Zahl der Sterne, von den hellsten bis zur Größe m als auch der als empirisch gegeben angesehenen mittleren Parallaxen π_m der Sterne von der Größe m . Die Voraussetzung des Bestehens einer solchen endlichen Größe H braucht selbstverständlich nicht streng erfüllt zu sein und sie sagt nur aus, daß die Häufigkeitsfunktion $\varphi(i)$ für $i > H$ praktisch unmerkliche Werte hat. Die Gründe, warum ich die genannte Voraussetzung beibehalten habe, trotzdem natürlich das Fallenlassen derselben die Ausgangsformeln sehr vereinfacht, habe ich ausführlich in (III) auseinandergesetzt. Nimmt man von vornherein $H = \infty$, so stellt sich die Notwendigkeit einer anderen Hypothese heraus: man muß nämlich über die Grenzentfernung r_1 , bis zu welcher sich das Sternsystem erstreckt, eine Annahme machen. In der Tat werde ich zeigen, daß man r_1 innerhalb eines Intervalls, das sich von einem ziemlich kleinen Wert bis zu $r_1 = \infty$ erstreckt, willkürlich wählen kann, ohne die Darstellung der Zahlen A_m und π_m , ihrer Sicherheit entsprechend, ernstlich zu gefährden. Auch wird sich der wahre Grund dieser Erscheinung klar darstellen, welche praktisch genommen einer Vieldeutigkeit der Aufgabe gleichkommt, aus den Zahlen A_m und π_m die räumliche Dichtigkeit Δ und die Häufigkeitsfunktion $\varphi(i)$ zu bestimmen. Daraus folgt die Erkenntnis, daß die Annahme $r_1 = \infty$ eine willkürliche ist. Sie dürfte auch an sich ernststen Bedenken allgemeiner Art ausgesetzt sein, wenn sie mehr als eine rechnerische Bedeutung haben soll. Man müßte sich denn das Universum so vorstellen, daß überall leuchtende Weltkörper vorhanden sind, die sich in gewissen Teilen, gewissermaßen in Knoten dichter zusammendrängen. Einer dieser Knoten würde dann unser Milchstraßensystem sein. Das letztere würde also nicht mehr als ein isoliertes System zu betrachten sein. Auf die Schwierigkeiten, die mit solchen oder ähnlichen Vorstellungen verknüpft sind, soll hier nicht eingegangen werden.

Infolge der den Zahlen A_m und π_m anhaftenden Unsicherheiten ist die Aufgabe, aus ihnen auf die Konstitution des Sternsystems zu schließen, eine nicht genügend bestimmte,

denn es hat sich, wie ich öfters betont habe, herausgestellt, daß verhältnismäßig geringe Änderungen in den genannten Daten zu sehr merklich verschiedenen Funktionswerten A und φ führen. Nun sind sicherlich die Parallaxenwerte π_m , vielleicht mit Ausnahme der für kleine m , bisher nicht so sicher bestimmt, daß man nicht sehr beträchtliche Korrekturen für möglich halten dürfte und was die A_m betrifft, so wissen wir über ihren Verlauf für $m > 10$ eigentlich sehr wenig und gerade hier ist eine Beschränkung der genannten Vieldeutigkeit zu wünschen. Die letztere Lücke wird voraussichtlich in nicht zu ferner Zeit wenn auch nicht ausgefüllt, so doch verkleinert werden können und dann werden manche Ansätze, die jetzt noch als zulässig angesehen werden müssen, als unzutreffend erkannt werden. In jedem Falle erscheint es als ein nützliches Unternehmen, die verschiedenen Möglichkeiten durchzurechnen, weil man nur so auf die Punkte aufmerksam werden kann, die auf die definitive Lösung des großen Problems, soweit man von einer solchen überhaupt sprechen kann, von wesentlichem Einfluß sein können.

Ich werde nun zuerst die Annahme $H = \infty$ weiter verfolgen. Aus den in (III) angeführten Hauptformeln folgt, wenn von einer Absorption abgesehen wird:

$$\frac{\partial A_m}{\partial h_m} = -c \cdot \int_0^{r_1} A(\varrho) \varrho^4 \varphi(h_m \varrho^2) d\varrho = -c J_4$$

$$\pi_m'' = 0.2 \frac{\int_0^{r_1} A(\varrho) \cdot \varrho^3 \varphi(h_m \varrho^2) d\varrho}{\int_0^{r_1} A(\varrho) \varrho^4 \varphi(h_m \varrho^2) d\varrho} = 0.2 \cdot \frac{J_3}{J_4}.$$

Für φ soll der in (III) benutzte Exponentialansatz zur Anwendung kommen, für $A(\varrho)$ die zweigliedrige Formel, welche Herr Schwarzschild benutzt hat, und die in der

Tat, sobald man $H = \infty$ annimmt, formale Vorteile darbietet. Es werde demnach gesetzt:

$$\varphi(i) = \Gamma \cdot e^{a \log i - b (\log i)^2}; \quad \Delta(\varrho) = \gamma \cdot e^{a \log \varrho - \beta (\log \varrho)^2}$$

wobei natürliche Logarithmen gemeint sind. Das Integral

$$J_\mu = \int_0^{r_1} \Delta(\varrho) \varrho^\mu \varphi(h_m \varrho^2) d\varrho$$

kann dann, nach einer ganz ähnlichen Rechnung wie in (III), S. 438, als Krampsches Integral dargestellt werden. Man führe ein:

$$p = \frac{0.4}{0.4343}; \quad P = \beta + 4b; \quad q = 4 + a + 2a \dots \quad (1)$$

$$R = -apm - bp^2 m^2 + \frac{(q + \mu - 3 + 4bpm)^2}{4P}$$

$$S = \sqrt{P} \left[\log r_1 - \frac{q + \mu - 3 + 4bpm}{2P} \right].$$

dann wird:

$$J_\mu = \frac{\gamma \Gamma}{\sqrt{P}} \cdot e^R \int_{-\infty}^S e^{-y^2} dy.$$

Setzt man noch

$$\sigma = \sqrt{P} \log r_1 - \frac{q}{2\sqrt{P}}$$

und beachtet, daß $dh_m = -p e^{-pm} dm$, so wird:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dA_m}{dm} &= \frac{\gamma c \Gamma'}{\sqrt{P}} e^{mp \left[\frac{2b}{P} (q+1) - 1 - a \right] - \frac{\beta b p^2}{P} m^2} \cdot \int_{-\infty}^{\sigma - \frac{1}{2\sqrt{P}} - \frac{2bp}{\sqrt{P}} m} e^{-y^2} dy \\ \pi_m^* \cdot \int_{-\infty}^{\sigma - \frac{1}{2\sqrt{P}} - \frac{2bp}{\sqrt{P}} m} e^{-y^2} dy &= 0.2 e^{-\left(\frac{1+2q}{4P}\right)} \cdot e^{-\frac{2mpb}{P}} \int_{-\infty}^{\sigma - \frac{2bp}{\sqrt{P}} m} e^{-y^2} dy \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

wo $\Gamma' = \Gamma \cdot p \cdot e^{\frac{(q+1)^2}{4P}}$.

Für das Folgende ist die Bemerkung von Wichtigkeit, daß sich solche Krampsche Integrale innerhalb gewisser Grenzen mit beschränkter Genauigkeit, d. h. bis auf wenige Einheiten der 3. Dezimale, durch sehr einfache Interpolationsformeln darstellen lassen. So kann man den gewöhnlichen Logarithmus von

$$\Phi(\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\xi}^{\infty} e^{-y^2} dy,$$

wenn ξ zwischen ± 0.8 liegt, ersetzen durch

$$\log \Phi(\xi) = + 0.5062 \xi - 0.2736 \xi^2,$$

wie aus der Tabelle folgt:

	log $\Phi(\xi)$		
	Formel	Strenge	Diff.
$\xi = + 1.0$	0.233	0.265	(- 32)
+ 0.8	0.230	0.241	- 11
+ 0.6	0.205	0.205	0
+ 0.4	0.159	0.155	+ 4
+ 0.2	0.090	0.087	+ 3
0	0	0	+ 0
- 0.2	- 0.112	0.109	- 3
- 0.4	- 0.246	- 0.243	- 3
- 0.6	- 0.402	- 0.402	0
- 0.8	- 0.580	- 0.589	+ 9
- 1.0	- 0.780	- 0.803	(+ 23)

In ähnlicher Weise kann man den gewöhnlichen Logarithmus von

$$\Psi(\xi) = e^{\xi^2} \int_{\xi}^{\infty} e^{-y^2} dy$$

zwischen den Grenzen $\xi = 3.0$ und $\xi = 7.0$, wenn es auf einige Einheiten der 3. Stelle nicht ankommt, ersetzen durch

$$\log \Psi(\xi) = - 1.0086 - 0.0855 (\xi - 5.0) + 0.0082 (\xi - 5.0)^2,$$

wie folgende Tabelle zeigt:

ξ	$\log \Psi(\xi)$		Diff.
	Formel	Strenge	
2.0	9.322-10	9.355	(- 33)
2.5	9.252	9.271	(- 19)
3.0	9.196	9.200	- 4
3.5	9.138	9.138	0
4.0	9.085	9.084	+ 1
4.5	9.036	9.036	0
5.0	8.991	8.992	- 1
5.5	8.951	8.952	- 1
6.0	8.914	8.915	- 1
6.5	8.882	8.881	+ 1
7.0	8.853	8.849	+ 4

Noch sei bemerkt, daß, wenn etwa

$$\frac{dA_m}{dm} = e^{\alpha_0 + \alpha_1 m + \alpha_2 m^2}$$

sein sollte, man erhält:

$$\begin{aligned} A_m &= \int_{-\infty}^m \frac{dA_m}{dm} dm = \frac{e^{\alpha_0 + p_1^2}}{\sqrt{\alpha_2}} \int_{p_1 - m\gamma}^{\infty} e^{-y^2} dy \\ &= \frac{e^{\alpha_0}}{\sqrt{\alpha_2}} \cdot e^{p_1^2 - (p_1 - m\gamma)^2} \Psi(p_1 - m\gamma) \end{aligned} \quad (2)$$

wobei zur Abkürzung gesetzt worden ist:

$$p_1 = \frac{\alpha_1}{2\sqrt{\alpha_2}}; \quad \sqrt{\alpha_2} = \gamma.$$

Wenn demnach die obere Grenze des Integrals in der ersten Formel (I) und die Größe $p_1 - m\gamma$ die oben angegebenen Grenzen nicht überschreiten, wird sowohl $\log\left(\frac{dA_m}{dm}\right)$ als auch $\log A_m$ durch eine quadratische Form in m näherungsweise dargestellt werden können. Was das schematische Sternsystem betrifft, so kann man in der Tat den eben bezeichneten Ausgangspunkt der Untersuchung wählen. Man muß aber doch die durch Abzählungen direkt gewonnenen Werte von $\log A_m$

zur Vergleichung heranziehen und nicht nach irgendwelchen Prinzipien gewonnene Ausgleichungsergebnisse. Man wird weiter, wie öfters betont worden ist, eine ziemlich nahe Darstellung der empirischen Werte $\log A_m$ fordern müssen, weil schon kleinere systematische Abweichungen sehr vergrößert in dem Verlauf von φ und A hervortreten. Die von mir für etwa $m < 10$ mit einiger Sorgfalt ermittelten Zahlen $\log A_m$ dürften schwerlich mehr als um 10 bis 20 Einheiten der 3. Dezimalstelle unrichtig sein, was von anderen Ermittlungen kaum gesagt werden kann. Ich werde demnach diese von mir erhaltenen Daten, die auch in (III) benutzt sind, zur Vergleichung heranziehen.

Herr Schwarzschild hat für den brig. Logarithmus von $\frac{dA_m}{dm}$ angesetzt:

$$\log \left(\frac{dA_m}{dm} \right) = 0.596 + 0.5612 m - 0.0055 m^2.$$

Wenn man mit dieser Formel das Integral (2) strenge berechnet, so erhält man die Werte R_1 in der folgenden Zusammenstellung, während unter B die von mir ermittelten $\log A_m$ stehen.

m	B	R_1	R_2	$R_1 - B$	$R_2 - B$
1.5	1.312	1.294	1.138	— 18	— 174
2.5	1.827	1.860	1.711	+ 33	— 116
3.5	2.326	2.405	2.274	+ 79	— 52
4.5	2.831	2.933	2.823	+ 102	— 8
5.5	3.368	3.446	3.362	+ 78	— 6
6.5	3.882	3.950	3.888	+ 68	+ 6
7.5	4.394	4.444	4.403	+ 50	+ 9
8.5	4.908	4.927	4.906	+ 19	— 2
9.5	5.422	5.400	5.397	— 22	— 25
10.5	—	5.861	5.874	—	—
11.16	6.222	6.157	6.181	— 65	— 41
11.5	—	6.311	6.390	—	—
12.5	—	6.749	6.794	—	—
13.54	—	7.178	7.237	—	—
13.90	7.433	7.345	7.409	— 88	— 24
14.5	—	7.597	7.668	—	—

Man sieht aus den Differenzen $R_1 - B$, daß die Übereinstimmung keineswegs genügend ist an den Stellen, wo die Zahlen B verhältnismäßig sicher bestimmt sind. Aber sie kann sehr leicht innerhalb erträgliche Grenzen gebracht werden. Ohne hier eine besonders akzeptable Darstellung erreichen zu wollen, habe ich durch wenige Versuche die Koeffizienten in $\log \left(\frac{d A_m}{d m} \right)$ verbessert und schließlich mit den Werten

$$\alpha_1 = 1.3573; \quad \alpha_2 = 0.01404, \quad \log e^{\alpha_0} = 0.211 \quad (2_a)$$

die Werte R_2 strengere berechnet, die sich den besser bestimmten B bei $m = 4.5$ bis 9.5 genügend anschließen. Die starken Abweichungen bei den sehr hellen Sternen sind nicht sehr verschieden von denen, welche in (III) gefunden worden sind. Bei der geringen Anzahl der ganz hellen Sterne sind sie um so weniger auffallend, als sie sich sehr bedeutend verringern, wenn die Abzählungen nicht nach der Harvard-Photometrie, sondern nach der Potsdamer Durchmusterung gemacht werden. Man könnte sie also eventuell einer Inhomogenität der Harvard-Skala zur Last legen.

Setzt man $r_1 = \infty$, so kann man nach (I) mit den gefundenen Koeffizienten α_1 und α_2 , falls π_m bekannt ist, die Koeffizienten a , β , a und b leicht bestimmen, da die Kapteynschen mittleren Parallaxen gemäß der Formel

$$\log \pi_m = \log \pi_0 - r \cdot m$$

verlaufen. Es sollen, wie in (II) geschehen, nach A. N. Nr. 3487 die Werte $\pi_0 = 0.106$ und $r = 0.1505$ zu Grunde gelegt werden. Die Rechnung ist sehr einfach, da nun die 2. Formel (I) wirklich dieselbe Gestalt hat wie die Kapteynsche Parallaxenformel.

Es ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} \varphi(i) &= \gamma_1 \cdot e^{-2.1162 (\log \text{nat } i) - 0.06671 (\log \text{nat } i)^2} \\ \log A(\varrho) &= \gamma_2 + 0.1826 \log \varrho - 0.2022 (\log \varrho)^2. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Ich habe in (III) für ein endliches Sternsystem, dessen $r_1 = 900$ Siriusweiten beträgt, gefunden, mit Weglassung konstanter Faktoren und eines zweiten Gliedes:

$$\varphi(i) = e^{-1.993 (\log \text{nat } i) - 0.0434 (\log \text{nat } i)^2}$$

$$A(\varrho) = \varrho^{-0.49} \{1 - [9.7600] \varrho^{-1}\}.$$

Die nach diesen Formeln berechneten $\log A(\varrho)$ sind in der folgenden kurzen Übersicht unter (III), die nach Formel (3) berechneten unter gleicher Ziffer aufgeführt. Da sich die Vergleichung nur auf den Gang der Funktionswerte beziehen soll, ist den Zahlen (3) die Konstante $+ 0.58$ hinzugefügt worden.

ϱ	(3)	(III)	(IV)	
2	0.62	0.79	0.60	}
10	0.56	0.58	0.49	}
50	0.31	0.29	0.32	}
100	0.14	0.16	0.23	}
200	9.93 - 10	0.01	0.14	}
500	9.60	9.83	9.99	}
900	9.36	9.72	9.91	}

(4)

Trotz der Verschiedenheit der Werte (3) und (III) ist doch zu konstatieren, daß der Verlauf der Zahlen große Ähnlichkeit zeigt.

Ich werde nun den oben ausgesprochenen Satz beweisen, daß man ganze Serien von mehr oder weniger zufriedenstellenden Darstellungen der A_m und π_m dadurch erhält, daß man die oben dargelegten Eigenschaften der Funktionen Φ und Ψ benutzt und zugleich das Sternsystem begrenzt ansieht, d. h. dem r_1 endliche Werte zuerteilt. Ich nehme zuerst $r_1 = 911$, also den in (III) erhaltenen Resultaten gemäß. Ich habe dann, ohne darauf zu achten, eine besonders gute Darstellung zu erhalten, nach wenigen Versuchen $\beta = 0.0200$ und $\log b = 8.4875 - 10$ gewählt. Dann findet sich $\log P = 9.1551 - 10$, $\sigma = 2.9969$ und eine sehr einfache Rechnung ergibt die mittleren Parallaxen π_m , denen die Kapteynschen Werte K im Sinne der vorhin gemachten Angaben gegenübergestellt sind.

m	π	K
0	0" 1070	0.1060
2	0.0493	0.0530
4	0.0233	0.0265
6	0.0114	0.0132
8	0.0059	0.0066
10	0.0033	0.0033

Das ist sicher eine mehr als genügende Übereinstimmung. Eine von der früher gewonnenen Darstellung des $\log A_m$ wenig verschiedene erreicht man, wenn man annimmt:

$$x = p \log e \left[\frac{2b}{P} (q+1) - 1 - a \right] = 0.5578; \quad a = -2.1016.$$

Mit diesen Zahlen ergibt sich:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(i) &= \gamma \cdot e^{-2.1016 \log \text{nat } i - 0.03073 (\log \text{nat } i)^2} \\ \log A(q) &= +0.65 - 0.1156 \log q - 0.0461 (\log q)^2. \end{aligned} \right\} \text{(IV)}$$

Hier ist wieder $+0.65$ zur besseren Vergleichung willkürlich hinzugefügt worden. Die Werte $\log A(q)$ sind in die Zusammenstellung (4) unter (IV) aufgenommen worden. Nach Formel (I) ergeben sich weiter für $\log \left(\frac{dA_m}{dm} \right)$ die Werte (IV):

m	IV	(2 _a)	Diff.
0	0.297	0.211	+ 86
2	1.398	1.366	+ 32
4	2.480	2.472	+ 8
6	3.527	3.529	- 2
8	4.537	4.537	0
10	5.498	5.496	+ 2
12	6.402	6.407	- 5
14	7.240	7.269	- 29

Die Zahlen (2_a) sind nach der Formel (2_a) berechnet und man sieht, daß im großen und ganzen eine annehmbare Übereinstimmung erzielt ist mit Ausschluß der ganz hellen Sterne.

Umgekehrt kann man bei Benutzung der gegebenen Näherungsformeln für Φ und Ψ und mit Berücksichtigung des Gebietes ihrer Gültigkeit leicht beliebig viele Darstellungen der $\log A_m$ und π_m gewinnen, wenn man z. B. β willkürlich wählt und danach r_1 . Nimmt man z. B. $\beta = 0$, so ist eine genügende Darstellung zu erwarten für $\log b = 8.4200$, $\sigma = 2.7400$. Die Darstellung der Parallaxen erfordert etwa: $\frac{1+2q}{16b} \log e = 0.1920$ und wenn weiter $a = -2.1186$, so findet man

folgende Gegenüberstellung, in welcher Δ die Differenzen der $\log\left(\frac{dA_m}{dm}\right)$ gegen die mit (2_a) berechneten sind.

m	π_m	K	$\log\left(\frac{dA_m}{dm}\right)$	Δ
0	0"135	0"106	0.288	+ 77
2	0.0556	0.0550	1.394	+ 28
4	0.0254	0.0265	2.477	+ 5
6	0.0121	0.0132	3.528	- 1
8	0.0063	0.0066	4.537	0
10	0.0037	0.0033	5.498	+ 2
12			6.403	- 4
14			7.246	- 23

Hier ist also, da $\alpha = -0.1698$ wird:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(i) &= \gamma \cdot e^{-2.1186(\log \text{nat } i) - 0.0263(\log \text{nat } i)^2} \\ \log \Delta(\varrho) &= i - 0.1698 \log \varrho. \end{aligned} \right\}$$

Auf diese Weise kann man eigentlich unendlich viele angängige Lösungen finden und zwar sind die Ansätze leicht zu beschaffen, indem man die Gültigkeitsgrenzen der Näherungsformeln für die Funktionen Φ und Ψ möglichst einzuhalten trachtet. Die Aufstellung der nötigen Gleichungen ist so einfach, daß nicht näher darauf einzugehen nötig ist. Ich möchte nur noch ein besonders auffallendes Beispiel erwähnen. Macht man nämlich die Annahme $\alpha = \beta = 0$, nimmt also eine gleichförmige Dichtigkeit und wählt weiter $\log b = 8.4195$, $\sigma = 2.3393$, schließlich $\frac{1+2q}{16b} \log e = 0.3290$, so erhält man folgende Zahlen:

m	π''	K	$\log\left(\frac{dA_m}{dm}\right)$	(2 _a)	Diff.
0	0"1080	0"106	0.224	0.211	+ 13
2	0.0492	0.0536	1.366	1.366	0
4	0.0242	0.0265	2.472	2.472	0
6	0.0130	0.0132	3.533	3.529	+ 4
8	0.0078	0.0066	4.543	4.537	+ 6
10	0.0051	0.0033	5.496	5.496	0
12			6.387	5.407	-- 20
14			7.214	7.269	- 55

Aus den benutzten Zahlen folgt $a = -2.1704$ und $r_1 = 269$.
Es ist also:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(i) &= \gamma e^{-2.1704 (\log \text{nat } i) - 0.0263 (\log \text{nat } i)^2} \\ A(\varrho) &= \text{Konst.} \end{aligned} \right\}$$

Die Sternanzahlen A_m werden offenbar bei $m = 12$ genügend dargestellt und gleiches gilt von den Parallaxen bis etwa $m = 7$.

Man sieht also, daß in der Tat die Annahme $H = \infty$ das Problem, aus den Zahlen A_m und π_m die räumliche Verteilung der Sterne und die Häufigkeitsfunktion φ zu bestimmen, praktisch zu einem unendlich vieldeutigen macht. Die φ zeigen, wenn man die Begrenzung des Sternsystems r_1 von etwa $r_1 = 270$ bis ∞ wählt, große Ähnlichkeit in ihrem Verlaufe. Die räumliche Dichtigkeit aber verändert sich sehr stark und im allgemeinen so, daß die Abnahme mit zunehmender Entfernung um so geringer ist, je kleiner r_1 angenommen wird. Wenn auch die Differenzen zwischen den empirisch festgestellten Werten von A_m und π_m und den berechneten für die einzelnen Annahmen verschiedenen Charakter zeigen, so läßt sich doch nicht mit Sicherheit eine Entscheidung zu Gunsten einer der unendlich vielen Annahmen treffen. Es muß erst die Aufstellung genügend sicherer Werte A_m und vielleicht auch von π_m für schwache und sehr schwache Sterne abgewartet werden, so daß das Gebiet der Gültigkeit der quadratischen Näherungsformeln für die Funktionen Φ und Ψ weit überschritten wird.

Andrerseits gestalten sich die Konsequenzen der Annahme eines endlichen H sehr viel einfacher und sicherer. Da die Bestimmung der Dichtigkeitsfunktion $A(\varrho)$ etwa für $m < 10$ nur in geringem Maße abhängt von φ , ist sie mit einiger Sicherheit zu bestimmen und dann ergibt sich von selbst nicht nur die Endlichkeit der Ausdehnung des Sternsystems sondern auch eine Bestimmung von r_1 . Wichtig ist hiebei natürlich auch die Feststellung von A_m für $m > 10$, die bisher erst in ganz rohen Anfängen vorliegt.

Indessen muß auf einen Umstand Rücksicht genommen werden, auf den ich schon früher ((III), S. 420) aufmerksam gemacht habe.

Das schematische Sternsystem rechnet mit Mittelwerten, die zum Teil keine einwandfreie Bedeutung haben. Namentlich dann, wenn das Sternsystem endlich und die Flächen gleicher Dichtigkeit weit von der Kugelform abweichen, kommt dem schematischen Sternsystem gar keine Realität zu. Will man sich also der Betrachtung der tatsächlichen Verhältnisse zuwenden, so bleibt nichts übrig als das „typische Sternsystem“ in Betracht zu ziehen. Wie ich neulich¹⁾ andeuten konnte, treten dann gewisse Unterschiede zutage, welche möglicherweise eine Entscheidung über die Zulässigkeit der einen oder anderen Annahme und somit eventuell über den relativen Wert der verschiedenen Systeme, durch welche man jetzt in formeller Weise die vorhandenen Werte A_m und τ_m darstellen kann, bringen können. Ich wende mich deshalb zu einer Betrachtung des typischen Sternsystems und zwar werde ich zuerst die von Herrn Schwarzschild gemachten Annahmen $H = \infty$, $r_1 = \infty$ verfolgen.

2.

Ich bemerke, daß die von mir gemachten Feststellungen der Zahlen A_m sich auf einzelne Milchstraßenzonen beziehen. Der ganze Himmel wurde in Zonen I bis IX geteilt, welche der Reihe nach die galaktische Nordpolardistanz 0° bis 20° , $20^\circ - 40^\circ$ etc. bis $160^\circ - 180^\circ$ enthalten. Um bessere Mittelwerte zu bekommen und der Definition des typischen Sternsystems zu entsprechen, wurde I und IX zur Zone A, II und VIII zur Zone B, u. s. f. vereinigt, so daß E diejenige Zone ist, welche die Milchstraße enthält. Die Ermittlung der Logarithmen der Anzahlen der Sterne von den hellsten bis zu denen von der Größe m , welche auf einem Quadrat stehen und die jetzt mit A_m bezeichnet werden mögen, hat bekanntlich Schwierigkeiten. Über ihre Ermittlung bis $m = 9.2$ berichte

¹⁾ Astronomische Nachrichten, Nr. 4617.

ich in Art. 4. Für schwächere Sterne liegt meiner Meinung nach ein genügend einwandfreies Material nicht vor und ich habe deshalb nur die Resultate aus den Herschelschen Sternreichungen benutzt für $m = 13.9$. Da meine Ermittlungen nur dann ein einigermaßen homogenes System bilden, wenn der nördliche Teil des Himmels allein in Betracht gezogen wird, ist es mehr als zweifelhaft, ob es richtig ist, hier die von J. Herschel am Kap allerdings mit großer Umsicht und nach festem Plane gemachten Zählungen allein zu verwerten. Ein Zweifel entsteht freilich nur für die Milchstraßenzone E , da hier die Zählungen von W. und J. Herschel beträchtlich abweichen. Ich werde indessen hier J. Herschel allein benutzen, um mit den Herren Kapteyn und Schwarzschild in Übereinstimmung zu bleiben.

In der folgenden Zusammenstellung folgen auf die Rubrik m , die aus den Abzählungen folgenden $\log A_m$, dann unter f der $\log A_m$ nach einer quadratischen Interpolationsformel, schließlich die Differenz beider Werte.

m	A			B		
	f			f		
3.5	7.565—10	7.551	— 14	7.598	7.594	— 4
4.5	7.890	8.108	+ 218	8.173	8.128	— 45
5.5	8.620	8.639	+ 19	8.647	8.642	— 5
6.5	9.156	9.143	— 13	9.137	9.137	0
7.5	9.646	9.620	— 26	9.599	9.613	+ 14
9.2	0.347	0.370	+ 23	0.383	0.378	— 5
13.9	2.045	2.043	— 2	2.208	2.205	— 3

C			D			E		
f			f			f		
7.719	7.569	— 150	7.623	7.615	— 8	7.839	7.783	— 56
8.191	8.133	— 58	8.255	8.208	— 47	8.308	8.346	+ 38
8.692	8.676	— 16	8.794	8.781	— 13	8.900	8.899	— 1
9.190	9.199	+ 9	9.318	9.333	+ 15	9.429	9.441	+ 12
9.676	9.701	+ 25	9.851	9.864	+ 13	9.965	9.974	+ 9
0.524	0.507	— 17	0.737	0.721	— 16	0.872	0.855	— 17
2.426	2.428	+ 2	2.777	2.780	+ 3	3.133	3.139	+ 6

Die Interpolationsformeln, nach denen die Zahlen f gerechnet wurden, sind aus den fünf letzten Werten für $m = 5.5$ bis 13.9 nach der Methode der kl. Q. gerechnet, um gleichmäßig vorzugehen, da die Zahlen für kleinere m offenbar viel unsicherer sind. (Die Zahl bei C , 6.5 wurde nachträglich korrigiert, so daß für C eine etwas bessere Darstellung möglich wurde.) Die Formeln lauten:

$$\left. \begin{aligned} \text{A)} \quad \log A_m &= -4.610 + 0.6640 m - 0.01334 m^2 \\ \text{B)} \quad &= -4.423 + 0.6099 m - 0.00957 m^2 \\ \text{C)} \quad &= -4.565 + 0.6457 m - 0.01025 m^2 \\ \text{D)} \quad &= -4.623 + 0.6753 m - 0.01027 m^2 \\ \text{E)} \quad &= -4.270 + 0.6041 m - 0.00512 m^2 \end{aligned} \right\}$$

$\log A_m$ hat also die Form: $C + a_1 m - a_2 m^2$. Macht man andererseits den Ansatz:

$$\frac{dA}{dm} = \gamma e^{a_1 m - a_2 m^2},$$

so folgt durch Integration nach (2):

$$A_m = \frac{\gamma}{\Gamma a_2} e^{p_1^2 - (p_1 - m\gamma)^2} \cdot \Psi(p_1 - m\gamma).$$

Bewegt man sich innerhalb des Geltungsbereichs der Näherungsformel für Ψ , so findet sich nun:

$$a_1 = 0.4261 a_1 + 0.1675 \sqrt{a_2}$$

$$a_2 = 0.4261 a_2$$

und hierauf durch Auflösung:

$$a_1 = [0.3705] a - [9.7798 - 10] \sqrt{a_2}$$

$$a_2 = [0.3705] a_2.$$

Die Anwendung der Näherungsformel wird wohl nur für $m > 10$ einige Ungenauigkeit verursachen.

Um indessen hiervon unabhängig zu sein, wird man die erhaltenen Werte von a_1 und a_2 nur als Näherungswerte betrachten. Diese sind so nahe richtig, daß eine Korrektur fast

augenblicklich erhalten werden kann. Man hat nämlich durch Differentiation der Formel

$$\log A_m = C + a_1 - m a_2 m^2$$

$$\log \frac{dA_m}{dm} = (C + a_1 m - a_2 m^2) + \log(a_1 - 2 a_2 m) - \log \log e.$$

In der obigen Zusammenstellung ist

$$C + a_1 m - a_2 m^2 = f$$

als bereits berechnet angegeben. Man hat also

$$\log \frac{dA}{dm} = f + \log(a_1 - 2 a_2 m) - \log \log e.$$

Andrerseits hat man:

$$\log \frac{dA_m}{dm} = (a_1 m - a_2 m^2) \log e + \log \gamma.$$

Bedeutet also C eine für jede Zone konstante Größe, so muß sein:

$$(a_1 m - a_2 m^2) \log e + C = f + \log(a_1 - 2 a_2 m).$$

Diese Gleichung läßt sich nun für alle Zonen und alle m , die in obiger Tabelle vorkommen, bis auf ganz wenige Einheiten in der 3. Stelle erfüllen, wenn man die Näherungswerte ein wenig korrigiert. So sind die Zahlen entstanden:

	a_1	a_2
A	1.5097	0.03315
B	1.3725	0.02271
C	1.4441	0.02378
D	1.5237	0.02425
E	1.3731	0.01207

die also den Interpolationsformeln für $\log A_m$ vollständig äquivalent sind.

Der Gang in diesen Zahlen von Zone zu Zone ist nicht so regelmäßig als wünschenswert wäre. Es ist das eine Folge der Ungenauigkeit in den angenommenen Zahlen $\log A_m$ und insbesondere der Daten für $m = 13.9$, vielleicht auch eine Folge der quadratischen Form für die Interpolationsformel.

Da aber bessere Daten nicht zu beschaffen sind, wenn man die von J. Herschel gegebenen Abzählungen allein beibehalten will, so bleibt nichts übrig als die offenkundigen Unregelmäßigkeiten nicht weiter zu beachten und für jede Zone die mittleren Parallaxen π_m nach Formel (I) zu berechnen. Für jede Zone hat man:

$$\left. \begin{aligned} p \left[\frac{2b}{P} (q+1) - 1 - a \right] &= a_1 \\ \beta \frac{bp^2}{P} &= a_2 \\ P &= 4b + \beta. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Man kann also nur zwei der unbekanntenen vier Konstanten a, β, a, b berechnen, da die π_m für die einzelnen Milchstraßenzonen bisher nicht abgeleitet worden sind. Die bekannten π_m beziehen sich auf gewisse mittlere Verhältnisse, die man aber nicht näher definieren kann. Indessen wird man vielleicht der Wahrheit am nächsten kommen, wenn man annimmt, daß die π_m den Mittelwerten aller Sterne der m . Größe entsprechen. Danach wird also π_m erhalten, wenn man die für die einzelnen Zonen A, B, \dots, E geltenden π_m mit Rücksicht auf die Anzahl der Sterne in jeder Zone in Mittel vereinigt. Gegeben sind dann die $\log A_m$ für alle fünf Zonen und die eben beschriebenen Mittelwerte π_m für verschiedene m . Das sind zwölf Gleichungen zwischen den zehn Unbekannten a, β und den zwei Unbekannten a, b . Denn es soll angenommen werden, daß dieselbe Häufigkeitsfunktion für alle Zonen, d. h. unabhängig von der galaktischen Breite Geltung behalte. In wieweit man hierzu berechtigt ist, habe ich an andrem Orte¹⁾ auseinandergesetzt. Hier sei nur bemerkt, daß, falls man diese Annahme nicht machen würde, nicht einzusehen ist, warum φ nicht die Entfernung ϱ explizite enthalten sollte, was doch die Grundlage der ganzen Theorie ist. Ein wirklich konsequentes System muß, meiner Meinung nach, wenigstens vorerst mit der Unabhängigkeit von $\varphi(i)$ von ϱ rechnen.

¹⁾ Astronomische Nachrichten, Nr. 4617.

Wird nun a und b zuerst als bekannt angesehen, so folgt aus (5)

$$\left. \begin{aligned} \frac{2}{P} b p &= \frac{p}{2} \left(1 - \frac{a_2}{b p^2} \right) \\ (q+1) \frac{p}{2} \left(1 - \frac{a_2}{b p^2} \right) - p(1+a) &= a_1. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Nach (I) ist weiter, da $r_1 = \infty$ sein soll:

$$\log \left(\frac{\tau_m}{0.2} \right) = - \frac{1+2q}{4P} \log e - \frac{2bp}{P} m \log e.$$

Man hätte nun den Mittelwert $M(\tau_m)$ der Parallaxe der Sterne von der Größe m als gegeben zu verwerthen, was nur durch sukzessive Annäherungen erreicht werden kann. Indessen wird man brauchbare Näherungswerte erhalten, wie durch die folgende Rechnung bestätigt wird, wenn man statt $\log M(\tau_m)$, $M(\log \tau_m)$ nimmt, was einigermaßen gerechtfertigt erscheint dadurch, daß die einzelnen τ_m nicht allzusehr verschieden sind. Danach erscheinen als bekannt die Mittelwerte:

$$\mathfrak{B}_1 = M \left(\frac{1+2q}{4P} \right) \quad \text{und} \quad \mathfrak{A}_1 = M \left(\frac{2bp}{P} \right).$$

Es ist also:

$$\mathfrak{A}_1 = \frac{p}{2} - \frac{1}{2bp} M(a_2), \quad \text{d. h.:} \quad b = \frac{M(a_2)}{p(p - 2\mathfrak{A}_1)}. \quad (7)$$

Die erste Gleichung (5) gibt weiter:

$$(1+a) = 4b \mathfrak{B}_1 + \frac{1}{2p} \mathfrak{A}_1 - \frac{1}{p} M(a_1). \quad (8)$$

Die beiden Formeln (7) und (8) bestimmen auf diese Weise die Unbekannten a und b . Umgekehrt ergibt sich für jede Zone aus den bekannten Werten von a und b , a und β :

$$\frac{2}{P} b p = \frac{p}{2} \left(1 - \frac{a_2}{b p^2} \right) = X;$$

$$P = \frac{2bp}{X}; \quad 1+2q = \frac{2}{X} [p(1+a) + a_1] - 1.$$

Was die Mittelbildung betrifft, so wird man jedenfalls genügend genau setzen dürfen:

$$M(\pi) = \frac{\sum \pi_z \cdot f_z}{\sum f_z}. \quad (9)$$

π_z ist der mittlere Wert der Parallaxen der Sterne von der Größe m in einer der Zonen A, B, \dots, E und f_z ist proportional der Anzahl der Sterne dieser Größe in derselben Zone, also $A_{m+\frac{1}{2}} - A_{m-\frac{1}{2}}$. Ich habe diese Faktoren f_z nach den obigen Interpolationsformeln für A_m beiläufig abgeleitet. Es ergab sich:

m	A	B	C	D	E	Summe
3.0	0.053	0.163	0.190	0.338	0.256	1.000
4.0	0.050	0.148	0.198	0.352	0.251	0.999
5.0	0.047	0.134	0.203	0.365	0.251	1.000
6.0	0.043	0.121	0.205	0.377	0.255	1.001
7.0	0.039	0.108	0.204	0.386	0.264	1.001
8.0	0.034	0.097	0.199	0.392	0.279	1.001
9.0	0.029	0.085	0.191	0.396	0.299	1.000
10.0	0.024	0.076	0.179	0.396	0.325	1.000
Mittel	0.040	0.117	0.196	0.375	0.273	1.001

Die Faktoren f_z sind also sowohl von der Zone als auch von m abhängig. Aber weil die Veränderlichkeit mit der Größe nur mäßig ist, wird man das oben erwähnte Verfahren angenähert zur Ausführung bringen, wenn man Mittelwerte der f_z für die einzelnen Zonen benutzt. Nun sind die mittleren Parallaxen π_m bisher nur bis etwa $m = 8$ abgeleitet worden. Ich habe demgemäß für die Mittelbildung (9) die Faktoren angesetzt:

f_z	
A	0.04
B	0.13
C	0.20
D	0.37
E	0.26

welche die einfachen Mittel der Werte für $m = 3.0$ bis 8.0 sind. Es ergab sich nun: $\log \mathfrak{A}_1 = 9.5397 - 10$; $\log \mathfrak{B}_1$

$= 9.8026 - 10$, $M(a_1) = 1.4483$, $M(a_2) = 0.02115$ und damit $\log b = 9.0029 - 10$, $a = -2.1288$. Es ist danach:

$$\varphi(i) = \gamma \cdot e^{-2.1288(\log \text{nat } i) - 0.1007(\log \text{nat } i)^2}.$$

Jetzt kann man für die einzelnen Zonen leicht berechnen:

	$\log X$	$\log P$	$\log(1 + 2q)$
<i>A</i>	9.4498-10	9.8184-10	0.3686
<i>B</i>	9.5289	9.7393	9.9864-10
<i>C</i>	9.5215	9.7467	0.1565
<i>D</i>	9.5181	9.7501	0.2870
<i>E</i>	9.5970	9.6712	9.8367-10

Daraus folgt für die Logarithmen der mittleren Parallaxen:

<i>A</i>	$\log \pi_m = 8.9155 - 10$	$-m \times 0.1223$
<i>B</i>	9.1092	0.1468
<i>C</i>	9.0220	0.1444
<i>D</i>	8.9280	0.1432
<i>E</i>	9.1380	0.1717

und für die π_m ergibt sich folgende Tabelle (10):

$m = 3.0$	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0
<i>A</i> 0"0354	0"0267	0"0201	0"0152	0"0115	0"0087	0"0065	0"0049
<i>B</i> 446	333	237	169	121	86	61	44
<i>C</i> 389	278	200	143	103	74	53	38
<i>D</i> 315	227	163	117	84	61	44	31
<i>E</i> 419	283	190	118	86	58	39	26
<i>M</i> 0"0372	0"0268	0"0189	0"0131	0"0094	0"0066	0"0046	0"0032
<i>K</i> 0.0375	0.0265	0.0187	0.0132	0.0094	0.0066	0.0047	0.0033

Die Mittelwerte M sind mit Benutzung aller einzelnen Faktoren f_z (S. 473) gebildet. K ist das Resultat der Kapteynschen Formel. Die Übereinstimmung von M und K ist vollkommen, so daß durch die ausgeführte Rechnung der gewünschte Erfolg ganz erzielt worden ist.

Ich habe oben darauf aufmerksam gemacht, daß die Herschelschen Eichungen, welche die A_m für $m = 13.9$ angeben, für die Milchstraße, d. i. für die Zone *E* ein zweifelhaftes Resultat ergeben, indem die Angaben von W. Herschel und J. Herschel hier beträchtlich voneinander abweichen. Um den Anschluß an

andere Arbeiten zu erhalten, habe ich nur die Angaben von J. Herschel gelten lassen. Um den Einfluß dieser sicher nicht einwandfreien Annahme kennen zu lernen, habe ich nun, wie ich auch im nächsten Artikel tun werde, das Mittel bei den Angaben für Zone *E* als richtig betrachtet und damit die dem Früheren analoge Rechnung durchgeführt. In der Tabelle (S. 468) ist jetzt die Zahlenreihe für *E* zu ersetzen durch:

		<i>f</i>		<i>C</i>
$m = 3.5$	7.839 -10	7.791	- 48	5.574
4.5	8.308	8.341	+ 33	72
5.5	8.900	8.888	- 12	73
6.5	9.429	9.430	+ 1	73
7.5	9.965	9.967	+ 2	72
9.2	0.872	0.871	- 1	72
13.9	3.306	3.305	- 1	73

f ist nach der Formel berechnet

$$\log A_m = -4.1705 + 0.5680 m - 0.00217 m^2.$$

Nach der S. 470 angegebenen Methode habe ich hierauf berechnet

$$a_1 = 1.3039; \quad a_2 = 0.00511.$$

Der Wert der Konstanten *C*, welche die Genauigkeit der Koeffizienten α_1 und α_2 angibt, steht in der letzten kleinen Tabelle. \mathfrak{A}_1 und \mathfrak{B}_1 haben dieselben Werte wie früher. Dagegen ist jetzt:

$$M(a_1) = 1.4303; \quad M(a_2) = 0.01934$$

und es wird jetzt $\log b = 8.9641 - 10$; $a = -2.1309$; also:

$$\varphi(i) = e^{-2.1309 (\log \text{nat } i) - 0.0921 (\log \text{nat } i)^2}.$$

Die früher gegebenen Zahlen werden nunmehr in folgende geändert:

	$\log X$	$\log P$	$\log(1 + 2q)$
<i>A</i>	9.4231 -10	9.8063 -10	0.4036
<i>B</i>	9.5140	9.7154	0.0134
<i>C</i>	9.5054	9.7240	0.1798
<i>D</i>	9.5017	9.7277	0.3088
<i>E</i>	9.6338	9.5966	9.3387 -10

<i>A</i>	$\log \pi_m = 8.8715 - 10 - m \times 0.1151$	
<i>B</i>	9.0854	0.1419
<i>C</i>	8.9909	0.1391
<i>D</i>	8.8872	0.1379
<i>E</i>	9.2409	0.1869

Die Tabelle für die mittleren Parallaxen π_m wird:

	<i>m</i> = 3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0
<i>A</i>	0 ^o 0336	0 ^o 0258	0 ^o 0198	0 ^o 0152	0 ^o 0116	0 ^o 0089	0 ^o 0069	0 ^o 0053
<i>B</i>	457	329	238	171	124	89	64	46
<i>C</i>	375	272	197	143	104	76	55	40
<i>D</i>	297	217	158	115	83	61	44	32
<i>E</i>	479	311	202	135	86	56	36	24
<i>M</i>	0 ^o 0387	0 ^o 0270	0 ^o 0190	0 ^o 0134	0 ^o 0094	0 ^o 0066	0 ^o 0046	0 ^o 0032
<i>K</i>	375	265	187	132	94	66	47	33

Es ergibt sich daraus, daß die veränderte Annahme für Zone *E* an dem charakteristischen Verlauf der π_m nichts Wesentliches geändert hat. Das Hin- und Herspringen der Werte ist unverändert geblieben und dafür ist, wie die angestellten Proben ergeben haben, nicht die Art der Rechnung verantwortlich zu machen. Das eine ist sicher, daß auch mit den benutzten Ansätzen sich das Resultat ergibt: bei den schwachen Sternen 9. und 10. Größe hat es keinen rechten Sinn, von mittleren Parallaxen zu reden, wenn man nicht angibt, auf welchen Teil des Himmels in seiner Lage zur Milchstraße sie sich beziehen, wie also diese Mittelwerte gemeint sind.

Was die unregelmäßigen Schwankungen der Einzelwerte betrifft, so zeigen sie sich schon bei der Beschaffung der zuerst berechneten Werte der Koeffizienten a_1 , a_2 , a_1 und a_2 . Sie können erklärt werden durch die Ungenauigkeit der zu Grunde liegenden Daten und durch die angenommene Form der quadratischen Interpolationsformeln. Ich glaube, daß der letztere Umstand der ausschlaggebende ist und daß man also durch die Anwendung dieser Formen dem Gedanken oder dem Vorhaben, das ganze Sternsystem als ein organisches Ganze aufzufassen, nicht ganz entsprochen hat. Wenn also die gefundenen mittleren Parallaxen auch nur geringen Wert haben, so haben sie doch

Verhältnisse aufgedeckt, welche nicht zu Gunsten der hierbei verfolgten Annahmen sprechen. Die Tabelle (10) zeigt quantitativ ein völlig anderes Bild für die Abhängigkeit der mittleren Parallaxen π_m von der galaktischen Breite, als die Konsequenzen aus den Annahmen, die ich in (III) verfolgt habe. Darüber habe ich vor kurzem an anderer Stelle¹⁾ berichtet. Aber immerhin zeigt die obige Tabelle für Sterne, deren m größer als etwa 7.0 ist, ebenfalls die Tatsache, daß π_m mit der Annäherung an die Milchstraße deutlich abnimmt. Für die helleren Sterne wird diese Erscheinung völlig durch die unregelmäßigen Schwankungen der Einzelwerte verdeckt. Die Abhängigkeit der π_m von der galaktischen Breite ist jedenfalls viel weniger ausgesprochen wie in den Astronomischen Nachrichten gefunden wurde, zum Teil kaum angedeutet. Ich habe a. a. O. bereits darauf aufmerksam gemacht. Bei der Unsicherheit der zu Grunde gelegten Annahmen und Ansätze, welche sich allen systematischen Zusammenhängen mitteilt, hat eine weitere Verfolgung der gefundenen Zahlenresultate keinen rechten Sinn. Ich begnüge mich deshalb anzuführen, daß die Kurven gleicher Dichtigkeit wegen des Hin- und Herspringens der Einzelwerte $\Delta(\varrho)$ kaum feststellbar sind. Die Eigenschaft aber, daß $\Delta(\varrho)$ um so langsamer abnimmt, je mehr man sich der Milchstraße nähert, kommt trotz aller Schwankungen deutlich zum Vorschein. Drückt man ϱ , wie immer, in Siriusweiten aus, so ist z. B.

$$\log \frac{\Delta(1000)}{\Delta(1)} = -2.51, \quad -2.31, \quad -1.45, \quad -1.16, \quad -1.07$$

$$\log \frac{\Delta(316)}{\Delta(3.16)} = -1.68, \quad -1.53, \quad -0.97, \quad -0.78, \quad -0.72$$

der Reihe nach für die Zonen *A*, *B*, *C*, *D* und *E*.

¹⁾ Astronomische Nachrichten, Nr. 4617.

3.

Ich werde nun analoge Rechnungen für ein endliches H durchführen und zwar mit ähnlichen Ansätzen, wie in (III) benutzt worden sind. Nennt man $\Phi(i, \varrho)$ die Häufigkeitsfurche der Leuchtkräfte, die also auch die Entfernung ϱ explizite enthalten kann, nimmt als innere Begrenzung des Sternsystems r_0 in der Richtung, in welcher der Himmelsteil ω liegt, so ist die Anzahl A_m der Sterne von den hellsten bis zu denen von der Größe m , welche auf ω stehen, nach Formel (II) in (III)

$$\left. \begin{aligned} A_m &= \omega \int_{r_0}^{\sqrt{\frac{H}{h_m}}} \Delta(\varrho) \cdot \varrho^2 d\varrho \int_{h_m \varrho^2}^H \Phi(y, \varrho) dy & m < n \\ A_m &= \omega \int_{r_0}^{\sqrt{\frac{H}{h_n}}} \Delta(\varrho) \cdot \varrho^2 d\varrho \int_{h_m \varrho^2}^H \Phi(y, \varrho) dy & m > n. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Diese Formeln gelten auch bei Berücksichtigung des Einflusses einer vorhandenen Absorption, wenn für H, H_1 gesetzt wird, wo H_1 durch H und die Absorption gegeben ist. n bedeutet die Sterngröße, welche die Sterne von der Leuchtkraft H an der äußeren Grenze des Systems annehmen. In (III) lag die Aufgabe vor, bei gegebenen Δ und Φ die angegebenen Doppelintegrale für A_m zu berechnen. Das ist in (III) auf etwas umständlichem Wege geschehen. Ein kürzerer Weg bietet sich dar, wenn man die Integrationsfolge in (11) umkehrt. Man kann die so entstehenden Formeln natürlich auch direkt ableiten, hier soll die erwähnte Umkehrung rein rechnerisch ausgeführt werden.

Setzt man für den Augenblick

$$\Delta(\varrho) \varrho^2 \Phi(y, \varrho) = \psi(y, \varrho); \quad \sqrt{\frac{H}{h_n}} = r_1,$$

so wird die 2. Formel (11):

$$\frac{1}{\omega} A_m = \int_{r_0}^{r_1} d\rho \int_{h_m \rho^2}^H \psi(y, \rho) dy.$$

Interpretiert man ρ und y als rechtwinklige Koordinaten und $\psi(y, \rho)$ als die von Punkt zu Punkt sich ändernde Massendichtigkeit, mit der die Ebene bedeckt ist, so bedeutet das Doppelintegral die Masse, welche auf einem Stück der Ebene enthalten ist, das begrenzt ist durch die beiden Geraden $\rho = r_0$ und $\rho = r_1$, ferner durch die Gerade $y = H$ und die Parabel $\rho^2 h_m = y$. Da nun $r_1 \leq \sqrt{\frac{H}{h_m}}$, so schneidet die Gerade $\rho = r_1$ die Parabel in einem Punkte, dessen y Koordinate $< H$ ist. Das ganze Ebenenstück zerlegt sich danach in zwei. Das erste wird von der Parabel, der Abszisse $y = r_1^2 h_m$ und der Ordinate $\rho = r_0$ begrenzt, das zweite ist ein Rechteck, das von den beiden zur y -Achse parallelen Geraden $\rho = r_0$ und $\rho = r_1$ und den beiden zur ρ -Achse Parallelen $y = r_1^2 h_m$ und $y = H$ begrenzt wird. Macht man also die Summation zuerst in Bezug auf ρ , dann in Bezug auf y , so wird:

$$\frac{1}{\omega} A_m = \int_{h_m r_0^2}^{h_m r_1^2} dy \int_{r_0}^{\sqrt{\frac{y}{h_m}}} \psi(y, \rho) d\rho + \int_{h_m r_1^2}^H dy \int_{r_0}^{r_1} d\rho \cdot \psi(y, \rho) \quad m > n.$$

Die erste Formel (11) ergibt sich hieraus, wenn man den Buchstaben n durch m ersetzt. Da nunmehr $h_n r_1^2 = h_m r_1^2 = H$ ist, verschwindet der zweite Term und es ergibt sich:

$$\frac{1}{\omega} A_m = \int_{h_m r_0^2}^H dy \int_{r_0}^{\sqrt{\frac{y}{h_m}}} \psi(y, \rho) d\rho \quad m < n.$$

Wird nun angenommen, daß $\Phi(y, r) = \varphi(y)$ die Entfernung ρ nicht explizit enthält, so wird schließlich:

$$I = \frac{1}{\omega} A_m = \int_{h_m r_0^2}^H q(y) dy \int_{r_0}^{\sqrt{\frac{y}{h_m}}} A(\varrho) \varrho^2 d\varrho \quad m < n$$

$$II = \frac{1}{\omega} A_m = \int_{h_m r_0^2}^{h_m r_1^2} q(y) dy \int_{r_0}^{\sqrt{\frac{y}{h_m}}} A(\varrho) \varrho^2 d\varrho + \int_{h_m r_1^2}^H q(y) dy \int_{r_0}^{r_1} A(\varrho) \varrho^2 d\varrho \quad m > n.$$

Wenn demnach $A(\varrho) \cdot \varrho^2$ eine Funktion ist, deren allgemeines Integral in geschlossener Form angebar ist, werden bei einer numerischen Rechnung diese neuen Formeln einen bedeutenden Vorteil vor den ursprünglichen darbieten. Ich habe in (III) den Ansatz gemacht:

$$A(\varrho) = \gamma \{ \varrho^{-\lambda} - \alpha \varrho^{-\lambda_1} \}$$

und r_0 so bestimmt, daß $A(\varrho)$ für $\varrho = r_0$ nahezu gleich Null wird, so daß $A(\varrho)$ überall positiv bleibt. Dieser Ansatz soll, da er sich im schematischen Sternsystem bewährt hat, jetzt beibehalten werden, um den Anschluß an die früher ausgeführten Rechnungen zu haben. Setzt man nunmehr:

$$J_\mu = \int_{r_0}^{\sqrt{\frac{H}{h_m}}} x^\mu \cdot \varphi(h_m x^2) dx,$$

so wird

$$I = \frac{1}{\omega} A_m = 2 h_m \gamma \left\{ \frac{1}{3-\lambda} J_{4-\lambda} - \frac{\alpha}{3-\lambda_1} J_{4-\lambda_1} - \left(\frac{r_0^{3-\lambda}}{3-\lambda} - \frac{\alpha}{3-\lambda_1} r_0^{3-\lambda_1} \right) J_1 \right\}.$$

Für die Häufigkeitsfunktion φ benutze ich denselben Ausdruck wie in (III) (S. 438), indem ich $\nu = c = 0$ setze, also

$$q(i) = \Gamma_1 \cdot \left\{ e^{-k^2 \left[\left(\log \frac{i}{H} \right)^2 + h \log \frac{i}{H} \right]} - \frac{i}{H} \right\}.$$

Dann kann die Formel für J_n direkt aus (III) S. 439 herübergenommen werden. Wenn man danach setzt

$$\sigma = \frac{2bk^2 - (\mu + 1)}{4k}; \quad a = -\sigma - k \log \frac{h_m r_0^2}{H},$$

so wird

$$J_n = \frac{\sqrt{\pi}}{4k} \left(\frac{H}{h_m}\right)^{\frac{\mu+1}{2}} \cdot \left\{ e^{\sigma^2} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\sigma}^a e^{-z^2} dz - \frac{4k}{(\mu+3)\sqrt{\pi}} \left[1 - \left(\frac{h_m r_0^2}{H}\right)^{\frac{\mu+3}{2}} \right] \right\}.$$

Zur wirklichen Ausrechnung hat man zu setzen:

$$\Psi_n = \frac{4k}{(\mu+3)\sqrt{\pi}} \left[1 - \left(\frac{h_m r_0^2}{H}\right)^{\frac{\mu+3}{2}} \right]$$

$$\Phi_n = e^{\sigma^2} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\sigma}^a e^{-z^2} dz - \Psi_n; \quad \beta = a \frac{3-\lambda}{3-\lambda_1}$$

$$\begin{aligned} \text{I} = \frac{1}{\omega} A_m &= \frac{2\gamma\sqrt{\pi}\Gamma_1}{4(3-\lambda)k} H \cdot \left(\frac{H}{h_m}\right)^{\frac{3-\lambda}{2}} \left\{ \Phi_{3-\lambda} - \beta \left(\frac{h_m}{H}\right)^{\frac{\lambda_1-\lambda}{2}} \Phi_{4-\lambda_1} \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{h_m r_0^2}{H}\right)^{\frac{3-\lambda}{2}} \Phi(1) (1 - \beta r_0^{\lambda_1-\lambda}) \right\}. \end{aligned}$$

Alle vorkommenden Logarithmen sollen natürliche sein.

Die Formel (II) kann man auf (I) zurückführen, denn es ist:

$$\text{II} = \text{I} - \int_{h_m r_1^2}^H \varphi(y) dy \int_{r_1}^{\sqrt{y}} A(\varrho) \varrho^2 d\varrho = \text{I} - C.$$

C aber ergibt sich, wenn in (I) r_0 durch r_1 ersetzt wird. Wendet man also die Reduktionsformel für (I) an, beachtet,

daß $r_1^2 = \frac{H}{h_n}$ und führt die Abkürzungen ein:

$$\chi_n = e^{\sigma^2} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\sigma + k \log \frac{h_m}{h_n}}^x e^{-z^2} dz - \frac{4k}{(\mu+3)\sqrt{\pi}} \left[1 - \left(\frac{h_m}{h_n}\right)^{\frac{\mu+3}{2}} \right].$$

so kann man schreiben:

$$C = \frac{2}{4k} \frac{\Gamma(\pi - \lambda)}{\Gamma(\lambda)} H \cdot \left(\frac{H}{h_m}\right)^{\frac{3-\lambda}{2}} \left\{ Z_{4-\lambda} - \beta \left(\frac{h_m}{H}\right)^{\frac{\lambda_1-\lambda}{2}} \cdot Z_{4-\lambda_1} - \left(\frac{h_m}{h_n}\right)^{\frac{3-\lambda}{2}} \left[1 - \beta \left(\frac{h_n}{H}\right)^{\frac{\lambda_1-\lambda}{2}} \right] \right\}.$$

Berechnet man also A_m auch für $m > n$ nach der Formel (I), so hat man von diesem A_m C in Abzug zu bringen, um das richtige A_m für $m > n$ zu erhalten.

Es sollen nun diese Formeln für verschiedene λ berechnet werden, indem im übrigen die Zahlen, die in (III) gewonnen worden sind, benutzt werden. Es wird also gesetzt:

$$r_0 = \frac{1}{3}, \quad \lambda_1 - \lambda = \frac{1}{2}, \quad 4k = \frac{5}{6}, \quad \frac{b}{2} = 26.938,$$

H entsprechend der Sterngröße -4.3 . Dann ergeben sich folgende Tabellen:

Für die Größe

$$z = - \left(\frac{h_m r_0''}{H}\right)^{\frac{3-\lambda}{2}} \Phi(1) (1 - \beta \sqrt{3})$$

findet sich

$\lambda = 0.89$	0.79	0.69	0.59	0.49	0.39	0.29
$m = 2.5 + 0.0380$	0.0234	0.0189	0.0120	0.0074	0.046	0.038
3.5	268	160	122	73	43	13
4.5	178	101	74	42	24	8
5.5	110	60	41	22	12	4
6.5	65	34	22	12	6	2
7.5	37	19	12	6	2	1
8.5	23	9	6	2		
9.5	10	4				
10.5	5	2				

Ferner kann man, da $m > 2.5$ ist, einfach annehmen:

$$\psi_u = \frac{4k}{(u+3)\sqrt{\pi}}.$$

Weiter ist

$$\sigma_{4-\lambda} = 5.6122 - \frac{b}{5} (5 - \lambda)$$

$$a = [9.6810] \{0.9542 + 0.4 (m + 4.3)\} - \sigma$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^a e^{-z^2} dz = (a)$$

$$\Phi_{4-\lambda} = e^{\sigma^2} [(a) + (\sigma)] - \Psi_{4-\lambda}$$

Nach diesen Formeln konnte leicht und sicher gerechnet werden. Beabsichtigt wurde, die 3. Dezimalstelle der folgenden Zahlen nahezu richtig zu erhalten. Sondert man noch einen gewissen Faktor ab, setzt also:

$$\frac{1}{\omega} A_m = \frac{2 \sqrt{\pi} \Gamma_{1/2} H}{4k(3-\lambda)} \cdot \mathfrak{A}'_m = \frac{2 \sqrt{\pi} \Gamma_{1/2} H}{4k} \cdot \mathfrak{A}_m = \Gamma \mathfrak{A}_m.$$

so erhält man für

		log \mathfrak{A}'_m						
		$\lambda = 0.89$	0.79	0.69	0.59	0.49	0.39	0.29
$n = 2.5$	2.967	3.043	3.124	3.204	3.285	3.370	3.457	
3.5	3 457 490	3.547 504	3.641 517	3.736 532	3.835 550	3.936 566	4.039 582	
4.5	3.933 476	4.038 491	4.146 505	4.257 521	4.373 538	4.491 555	4.612 573	
5.5	4.396 463	4.517 479	4.642 496	4.770 513	4.902 529	5.038 547	5.177 565	
6.5	4.851 455	4.988 471	5.130 488	5.275 505	5.426 524	5.580 542	5.737 560	
7.5	5.298 447	5.452 464	5.612 482	5.776 501	5.944 518	6.117 537	6.293 556	
8.5	5.740 442	5.912 460	6.089 477	6.272 496	6.459 515	6.650 533	6.846 553	
9.5	6.177 437	6.367 455	6.563 474	6.764 492	6.971 512	7.181 531	7.396 550	(A)
10.5	6.611 434	6.820 453	7.035 472	7.255 491	7.480 509	7.710 529	7.945 549	
11.5	7.042 431	7.270 450	7.504 469	7.744 489	7.988 508	8.238 528	8.492 547	
12.5	7.471 429	7.719 449	7.972 468	8.231 488	8.495 507	8.764 526	9.038 546	
13.5	7.899 428	8.166 447	8.439 467	8.717 486	9.001 506	9.290 526	9.584 546	
14.5	8.326 427	8.612 446	8.904 465	9.202 485	9.506 505	9.815 525	10.128 544	
$g(3-\lambda)$	0.324	0.344	0.364	0.382	0.400	0.417	0.433	

Nebenbei bemerkt, stimmen für $\lambda = 0.49$ diese Zahlen nach Anbringung eines konstanten Gliedes vollkommen mit den in (III) berechneten überein.

Die Berechnung der Größe C wird tabellarisch am besten

ausgeführt, wenn man nach dem Schema rechnet: zuerst wird $Z_{4-\lambda}$ und $Z_{4-\lambda_1}$ für Werte von $m = n$ — von dieser Differenz hängt Z allein ab — berechnet und dann

$$Z = Z_{4-\lambda} - \left(\frac{h_m}{h_n}\right)^{\frac{3-\lambda}{2}} Z(1) \quad Y = \frac{Z}{3-\lambda}$$

$$Z_1 = Z_{4-\lambda_1} - \left(\frac{h_m}{h_n}\right)^{\frac{3-\lambda_1}{2}} Z(1) \quad Y_1 = \frac{a Z_1}{3-\lambda_1}$$

Ist dann Γ dieselbe Konstante, wie in der für $m > n$ für A_m gegebenen Formel, so hat man

$$C = \Gamma \left(\frac{H}{h_m}\right)^{\frac{3-\lambda}{2}} \left\{ Y - Y_1 \left(\frac{h_m}{H}\right)^{\frac{\lambda_1-\lambda}{2}} \right\} = \Gamma C_1$$

und schließlich für $m > n$

$$\frac{1}{\omega} A_m = \Gamma [\mathfrak{A}_m - C_1].$$

$\log \mathfrak{A}_m$ kann der vorstehenden Tafel entnommen werden, wenn $\log(3-\lambda)$ von den einzelnen Werten subtrahiert wird. Ich gebe nun die auf 3 Dezimalen abgekürzten Werte von $\log Y$ und $\log Y_1$:

		log Y				
$m - n =$	1	2	3	4	5	
$\lambda = 0.29$	8.291-10	8.872-10	9.135-10	9.285-10	9.376-10	
0.39	8.305	8.898	9.172	9.332	9.431	
0.49	8.319	8.925	9.210	9.380	9.488	
0.59	8.333	8.951	9.248	9.428	9.546	
0.69	8.347	8.978	9.287	9.478	9.605	
0.79	8.361	9.005	9.326	9.528	9.666	
0.89	8.375	9.032	9.365	9.579	9.728	
		log Y ₁				
$m - n =$	1	2	3	4	5	
$\lambda = 0.29$	8.121-10	8.765-10	9.085-10	9.288-10	9.426-10	
0.39	8.135	8.793	9.125	9.340	9.488	
0.49	8.149	8.820	9.164	9.391	9.551	
0.59	8.163	8.847	9.205	9.444	9.616	
0.69	8.178	8.875	9.245	9.497	9.682	
0.79	8.193	8.903	9.286	9.551	9.749	
0.89	8.207	8.931	9.327	9.606	9.817	

(B)

Wählt man z. B. $\lambda = 0.49$ und $n = 10.5$, so erhält man bei passender Wahl der Konstanten I' Sternzahlen, die vollkommen mit den (III) S. 451 angegebenen und durch gänzlich andere Formeln berechneten übereinstimmen. Ich führe noch die speziellen Werte für $\log \frac{C}{\bar{I}}$ an, die sich für $m = 13.9$ sofort aus den mitgeteilten Tabellen ergeben:

$m - n =$	1	2	3	4	5
$\lambda = 0.29$	8.151	8.731	8.994	9.143	9.233
0.39	7.800	8.393	8.666	8.825	8.924
0.49	7.450	8.056	8.340	8.509	8.617
0.59	7.101	7.719	8.015	8.194	8.311
0.69	6.751	7.382	7.689	7.879	8.006
0.79	6.402	7.044	7.364	7.566	7.702
0.89	6.051	6.707	7.039	7.253	7.400

Mit diesen Tabellen ist es möglich für jedes λ und für jedes $m > n$ bei vorausgesetztem n die $\log A_m$ mit Leichtigkeit bis auf wenige Einheiten der 3. Dezimalstelle genau zu bestimmen. Man kann nun offenbar, innerhalb gewisser Grenzen λ so wählen, daß den festgestellten Sternzahlen A_m für $m < n$ genügend entsprochen wird und dann n so bestimmen, daß auch den Anzahlen A_m für $m > n$ genügt wird.

Während sich nun für die helleren Sterne, bei denen etwa $m < 10$, die A_m für die einzelnen Milchstraßenzonen, wenn auch nicht ganz mit der erwünschten, so doch mit ausreichender Genauigkeit feststellen lassen, ist dasselbe, wie schon oft bemerkt worden ist, für $m > 10$ gegenwärtig nicht zu erreichen. Ich wiederhole, daß eigentlich nur die Herschelschen Eichungen ein in gewissem Sinne weniger bezweifelbares Material liefern. Da es sich hier nur um einen ganz rohen Versuch handeln kann, auf Grund der gemachten Ansätze n und damit die Grenze des Sternsystems in den verschiedenen Milchstraßenzonen zu ermitteln, so wird man sich damit begnügen, eben die Resultate der Herschelschen Eichungen allein zu benutzen. Auch hier tritt eine Schwierigkeit bei der Zone E ein. In meiner Arbeit vom Jahre 1898 habe ich die Anzahl A

der Sterne im Gesichtsfeld des benutzten Fernrohrs (Durchmesser $15' 4''$) ermittelt und zwar getrennt für die einzelnen Zonen I—IX sowohl für W. Herschel als auch für J. Herschel.

	W. H.	J. H.
Zone I	5.3	—
II	7.7	7.0
III	14.0	13.7
IV	30.0	26.5
V	139.2	66.7
VI	38.9	30.9
VII	12.5	13.0
VIII	6.3	8.0
IX	4.2	6.0

Die Übereinstimmung ist in Anbetracht aller Umstände genügend, jedoch mit Ausnahme der Zone V, welche die Milchstraße enthält. Die Annahme, daß der südliche Himmel sich wirklich anders verhalten mag wie der nördliche, ist wohl nicht abzuweisen. Da nun meine Feststellungen der Zahlen A_m bis $m = 9.2$ sich mangels eines genügenden Reduktionsmaterials auf den nördlichen Himmel beschränkten, wäre es, wie schon oben bemerkt worden ist, das korrekteste, die Zahlen von W. Herschel allein zu benutzen. Aber es ist nicht unwahrscheinlich, daß W. Herschel mit einer gewissen Vorliebe die helleren Teile der Milchstraße bevorzugte, während bei J. Herschel insofern das Gegenteil stattgefunden haben kann, als er in den sternreichsten Gegenden die Sternanzahlen als „unzählbar“ bezeichnet. In Art. 2 habe ich zuerst die Zahlen von J. Herschel allein benutzt, dann aber für Zone V die Mittelwerte aus den beiderlei Abzählungen. Jetzt will ich aber die letztere Annahme als die plausiblere machen, da zu hoffen ist, daß sie der Wahrheit näher kommen wird, als die erste. Diese Mittelwerte sollen mit Rücksicht auf die abgezählten Felder gebildet werden. Dann ergibt sich für die Anzahl der Sterne δ auf einem Quadratgrad:

Zone	δ	$\log \delta$
A	111	2.0453
B	154	2.1875
C	266	2.4249
D	664	2.8222
E	2023	3.3060

Die Größe m , die diesen Zahlen zugeordnet werden soll, nehme ich nach Herrn Kapteyn zu 13.90 an.

Nach einigen Versuchen, deren Resultat sicherlich verbesserungsfähig ist, bin ich dazu gekommen, den einzelnen Zonen folgende Werte von λ und Γ zuzuordnen, damit die Abzählungsergebnisse bis $m = 9.2$ dargestellt werden:

A	$\lambda = 0.89$	$\log \Gamma = 4.626 - 10$
B	0.74	4.421
C	0.62	4.347
D	0.44	4.227
E	0.34	4.189

Der Vergleich mit den aus den Abzählungen hervorgegangenen δ ist mit Hilfe der Tabelle (A) (S. 483) sehr leicht auszuführen und ergibt, wenn f das Tabellenresultat ist:

A			B		C	
m	$\log \delta$	f	$\log \delta$	f	$\log \delta$	f
3.5	7.565 - 10	7.759	7.598	7.661	7.719	7.768
4.5	7.890	8.231	8.173	8.159	8.191	8.184
5.5	8.620	8.698	8.647	8.647	8.692	8.692
6.5	9.156	9.158	9.137	9.126	9.190	9.191
7.5	9.646	9.600	9.599	9.599	9.676	9.689
9.2	0.347	0.348	0.383	0.393	0.524	0.518

D		E	
$\log \delta$	f	$\log \delta$	f
7.623	7.704	7.839	7.752
8.255	8.251	8.308	8.315
8.794	8.789	8.900	8.872
9.318	9.322	9.429	9.423
9.851	9.849	9.965	9.969
0.737	0.738	0.872	0.891

Die Darstellung ist nur bei den Sternen von der Größe 3.5 und an einer Stelle in der Zone *A*, nämlich bei 4.5 minderwertig, was bei der ganzen Sachlage erklärlich ist; im übrigen ist sie vollkommen zufriedenstellend. Mit Hilfe der Tabellen (*B*) ist es weiter eine sehr einfache Rechnung, jene *n* aufzusuchen, die mit den eben für die einzelnen Zonen gefundenen λ und l' die Herschelschen δ genau darstellen. Es findet sich:

<i>A</i>	$n =$	$\overset{m}{8.3}$	$\log r_1 = 2.52$	$r_1 = 330$
<i>B</i>		8.6	2.58	380
<i>C</i>		8.8	2.62	402
<i>D</i>		9.0	2.66	457
<i>E</i>		11.9	3.24	1740

Die Korrekturen, die infolge der Werte $n < 9.2$ an die $n = 9.2$ entsprechenden Werte f anzubringen sind, betragen ganz wenige Einheiten der 3. Dezimalstelle. r_1 ist die Entfernung in Siriusweiten (0.2 Parallaxe). Danach müßte dem Sternsystem eine stark abgeplattete Gestalt zugeschrieben werden. Die Ausdehnung in der Milchstraße wäre fünfmal so groß wie senkrecht darauf.

Mir fällt es nicht ein, dem Resultat der angestellten Rechnung besondere Zuverlässigkeit zuzusprechen. Aber es ist doch nicht ganz ohne Wert, weil es auf genau präzisierten Annahmen aufgebaut ist. Die Zulässigkeit derselben ist durch die Übereinstimmung mit den gegenwärtig verfügbaren Daten bewiesen, aber es tut dringend not, diese Daten zu vermehren. Offenbar ist es von der größten Wichtigkeit, über die in den einzelnen Milchstraßenzonen vorkommende Sternfülle δ für Sterne von der 10.—15. Größe und wenn schwächere Sterne erreichbar sind, darüber hinaus einigermaßen zuverlässige Daten zu beschaffen und da für die helleren Sterne die photometrische Größe maßgebend war, wäre zu überlegen, ob nicht vielleicht eine Eichung nach Herschels Manier, mit großen Instrumenten ausgeführt, schneller und leichter zum Ziele führen würde, als die photographische Aufnahme.

Noch möchte ich darauf aufmerksam machen, daß ein Teil der zu Grunde gelegten Annahmen nur der Bequemlichkeit oder

Analogie wegen gemacht worden sind und sicherlich verbesserungsfähig sind. Vor allem ist es nicht nötig, für alle Zonen dieselben Werte von α und $\lambda_1 - \lambda$ anzusetzen und noch weniger dafür die Werte zu wählen, die sie im schematischen Sternsystem erhalten haben. Ebenso sind die in der Häufigkeitsfunktion φ enthaltenen Konstanten eventuell zu korrigieren, was nach den Betrachtungen in (2) auch in dem zuletzt benutzten System wahrscheinlich nötig ist. Schließlich lassen sich über die mittleren Parallaxen, die mit der galaktischen Breite veränderlich sind, gewisse Betrachtungen anstellen, wie ich dies in dem bereits zitierten Aufsatz (Astronomische Nachrichten, Nr. 4617) getan habe. Ein Nachweis der dort benutzten Daten wird auf den folgenden Seiten gegeben werden. Auf die genannten Betrachtungen, die dem ganzen Problem der Sternverteilung eine neue Seite, wie ich glaube, abgewinnen, hier zurückzukommen, dazu liegt keine Veranlassung vor.

4.

Die Ermittlung der Zahlen A_m für $m < 6.5$ und zwar für die einzelnen Milchstraßenzonen I—IX war, wie aus meinen früheren Untersuchungen¹⁾ hervorgeht, mit Hilfe der Bonner Durchmusterung kaum durchführbar. Es war dies eine Folge der Ungleichförmigkeiten in den Bonner Größenschätzungen der hellen Sterne, deren Zahl zudem zu gering ist, um eine Kompensation der Fehler erwarten zu können. Die Sachlage hat sich seitdem wesentlich geändert, da zwei photometrische Kataloge für die helleren Sterne entstanden sind, von denen man annehmen darf, daß sie alle helleren Sterne auf der nördlichen Halbkugel bis zur Größe 6.5 enthalten: 1. photometrische Durchmusterung von Pickering im 45. Bande der Annalen der Harvard-Sternwarte (im folgenden mit P_{45} bezeichnet); 2. die Potsdamer Durchmusterung (P. D.) im 19. Bande der Publikationen des Potsdamer Observatoriums. Meine früheren Er-

¹⁾ Zur Verteilung der Fixsterne am Himmel. Sitzungsberichte der Münchener Akademie 1899.

mittlungen der Zahlen A_m für $m = 6$ bis $m = 9.2$ mit Hilfe der Durchmusterung bezogen sich (eine andere Grundlage war damals nicht vorhanden und ist es auch gegenwärtig nicht) auf das System der Harvard-Revision (H. R.), welches, wie man weiß, weder mit dem von P_{45} noch von P. D. übereinstimmt. Die aus den Abzählungen aus den beiden photometrischen Katalogen abgeleiteten A_m erfordern demnach, um an die Reihe der schwächeren Sterne in genügender Weise angeschlossen zu werden, eine Reduktion auf H. R. Im folgenden sollen meine in beiden Richtungen ausgeführten Rechnungen mitgeteilt werden.

Abzählungen von Sternen nach ihrer Größe und nach Milchstraßenzonen sind eine mühsame und höchst eintönige Beschäftigung. Zur Erleichterung solcher Arbeiten und um sie mit der mäßigen Genauigkeit, die gegenwärtig den Resultaten stellarstatistischer Feststellungen gegeben werden können, in Einklang zu bringen, habe ich bereits im Jahre 1886 ein Hilfsmittel dargeboten, indem ich eine graphische Darstellung der Kreise publizierte, längs welcher die galaktische Poldistanz $0^\circ, 10^\circ, 20^\circ$ etc. bis 180° konstant bleibt. Aus solchen Diagrammen kann man mit einem Blick ablesen, in welcher dieser 10 Grad breiten Zonen jeder Stern liegt und man könnte natürlich die Genauigkeit verdoppeln, ohne das Format des Diagramms zu vergrößern. Selbst sehr ausführliche Tafeln können eine gleiche Leichtigkeit nicht gewähren und die damit etwa zu erreichende Genauigkeit ist zum Teil illusorisch, zum Teil in den meisten Fällen der Stellarastronomie ganz unnötig.

Trotz dieser auf der Hand liegenden Erwägungen ist das von mir gegebene Hilfsmittel nur selten in Anspruch genommen worden und so wurde oft eine große Menge ganz unnötiger Arbeit geleistet. Ich möchte konstatieren, daß S. Newcomb, wie auch sonst in vielen Fällen, hier eine Ausnahme bildete.

Für die hellen Sterne bis zur Größe 6.5 reicht aus offensichtlichen Gründen bei einer Abzählung die Angabe der Sternanzahlen in Trapezen von 30^m in Rektaszension und 5° in Deklination aus. Die Grenzlinien der einzelnen Zonen lösen

sich dann in gebrochene Linien auf und man wird vielleicht zur Vermehrung der Genauigkeit das eine tun können, daß man Trapeze, die durch die richtigen, d. h. also die stetig gekrümmten Grenzlinien nahezu halbiert werden, zur Hälfte der einen, zur anderen Hälfte der zweiten Zone zurechnet. Nur muß man bei diesem Verfahren, welches, wie gesagt, fast in allen Fällen vollkommen ausreichend ist, darauf achten, daß der Flächeninhalt aller der einen oder anderen Zone zugerechneten Trapeze richtig, z. B. in Quadratgraden angegeben wird. Wenn dann die scheinbare Sternfülle, z. B. durch die Anzahl der Sterne auf einem Quadratgrad angegeben wird, so können kleinere Ungenauigkeiten in dem Verlaufe der gebrochenen Grenzlinien keinen bemerkbaren Einfluß auf das Resultat haben, solange das statistische Material zu der beabsichtigten Untersuchung überhaupt tauglich ist. Ich gebe am Schlusse dieser Arbeit auf vier Seiten eine solche Verteilung der Trapeze von erwähntem Umfange auf die einzelnen Milchstraßenzonen I bis VIII für die nördliche Halbkugel. Aus ihr ist z. B. zu entnehmen, daß das Trapez $\alpha = 0^h 30^m - 1^h 0^m$ $\delta = 70^\circ - 75^\circ$ zur Hälfte der Zone IV zur anderen Hälfte der Zone V zuzuordnen ist.

Der Flächeninhalt der so abgegrenzten Zonen ist in Quadratgraden:

Zone		log	Zone		log
I	1207.5	3.0819	I	1207.5	3.0819
II	3138.0	3.4967	II + VIII	3622.6	3.5590
III	3487.1	3.5425	III + VII	5404.5	3.7328
IV	3822.5	3.5823	IV + VI	6792.4	3.8320
V	3599.8	3.5563	V	3599.8	3.5563
VI	2969.9	3.4727	Summe	20626.8	
VII	1917.4	3.2827			
VIII	484.6	2.6854			
Summe	20626.8				

Während für die wahren, also für die nicht durch gebrochene Linien begrenzten Zonen sich folgende Zahlen ergeben:

Zone		log	Zone		log
I	1242.9	3.0944	I	1242.9	3.0944
II	3065.9	3.4866	II + VIII	3582.6	3.5542
III	3539.6	3.5489	III + VII	5488.3	3.7394
IV	3773.5	3.5767	IV + VI	6730.4	3.8280
V	3582.5	3.5542	V	3582.5	3.5542
VI	2956.9	3.4708			
VII	1948.7	3.2897	Summe	20626.7	
VIII	516.7	2.7132			
Summe	20626.7				

Die Abzählungen der in P_{45} enthaltenen Sterne wurden von mir in folgender Zusammenfassung vorgenommen:

- 1) m bis 2.50 inkl.
- 2) von 2.51—3.50
- 3) „ 3.51—4.50
- 4) „ 4.51—5.50
- 5) „ 5.51—6.50

Für die einzelnen Zonen I, II etc. und Abteilungen 1, 2 etc. fand ich folgende Sternanzahlen:

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	Σ
1	1	8	3	6	10.5	4.5	2	0	35
2	3.5	6.5	19.5	8.5	16	11	5	0	70
3	5	34	39	46.5	51.5	52	19	6	253
4	41.5	94	127	156.5	226.5	160	63	13.5	882
5	124.5	296	393	587	726.5	454.5	202	41.5	2825
	175.5	438.5	581.5	804.5	103.1	682	291	61	4065

Daraus ergeben sich die Anzahlen A_m :

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	Σ
$A_{2.5}$	1	8	3	6	10.5	4.5	2	0	35
$A_{3.5}$	4.5	14.5	22.5	14.5	26.5	15.5	7	0	105
$A_{4.5}$	9.5	48.5	61.5	61	78	67.5	26	6	358
$A_{5.5}$	51	142.5	188.5	217.5	304.5	227.5	89	19.5	1240
$A_{6.5}$	175.5	438.5	581.5	804.5	103.1	682.0	291	61	4065

Die charakteristischen Logarithmen $\log \alpha_m = \frac{1}{2} (\log A_m - \log A_{m-1})$ sind:

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
$m = 3.5$	0.327	0.129	0.438	0.192	0.201	0.269	0.272	—
4.5	0.162	0.262	0.218	0.312	0.234	0.320	0.285	—
5.5	0.365	0.234	0.243	0.276	0.296	0.264	0.267	0.256
6.5	0.268	0.244	0.245	0.284	0.265	0.238	0.258	0.248
Mittel	0.285	0.240	0.246	0.283	0.269	0.249	0.263	0.250

Ein systematischer Gang in den untereinanderstehenden Zahlen dürfte nicht hervortreten, wohl aber sind die Schwankungen besonders stark, wo nur eine kleinere Anzahl von Sternen vereinigt sind. Es ist deshalb angezeigt, Mittelwerte zu bilden. Das ist so geschehen, daß jedem Einzelwerte von $\log a$ ein Gewicht gegeben worden ist gleich der Anzahl der mitwirkenden Sterne. Diese Gewichte wurden auf ganze Zahlen bzw. auf ganze Zehner abgerundet. In den so gebildeten Mitteln ist eine Vergrößerung der $\log a$ mit der Annäherung an die Milchstraße ziemlich deutlich angedeutet. Nimmt man nun, wie es das typische Sternsystem erfordert, die A_m für die fünf Regionen: $A = I$, $B = II + VIII$, $C = III + VII$, $D = IV + VI$, $E = V$ so ergibt sich:

	A	B	C	D	E	Σ
$A_{2.5}$	1	8	5	10.5	10.5	35
$A_{3.5}$	4.5	14.5	29.5	30	26.5	105
$A_{4.5}$	9.5	54.5	87.5	128.5	78	358
$A_{5.5}$	51	162	277.5	445	304.5	1240
$A_{6.5}$	175.5	499.5	872.5	1486.5	1031	4065

und wie früher die $\log a_m$:

	A	B	C	D	E
$m = 3.5$	0.327	0.129	0.385	0.228	0.201
4.5	162	287	236	316	234
5.5	365	237	251	270	296
6.5	268	245	249	262	265
Mittel	0.285	0.244	0.251	0.267	0.269

Die Zunahme der Mittelwerte mit der Annäherung an die Milchstraße ist sehr deutlich ausgesprochen, wenn man von Zone A absieht. Das ist aber in keiner Weise auffallend, da

Zone I nur ein engbegrenztes Gebiet umschließt, das selbstverständlich, wie überall am Himmel, von der durchschnittlichen Beschaffenheit erheblich abweichen kann. Die großen Schwankungen der $\log a_m$ für die ganz hellen Sterne dürften ebenfalls nichts Auffälliges darbieten. Die Anzahlen bis zu $m = 3.5$ sind so gering, daß statistische Merkmale nur sehr gestört hervortreten können.

Stellen wir die gefundenen Mittelwerte (*a*), die also aus den Sternen, die heller als von der Größe 6.5 sind, gegenüber den Werten, welche die Sterne von der Größe 6—9 in den beiden früheren Bearbeitungen (*b*) und (*c*)¹⁾ ergeben haben, so erhält man folgende Tabelle:

	(a)	(b)	(c)	$M_{7.0}$	$M_{6.5}$
A	0.285	0.218	0.237	0.268	0.268
B	0.244	0.228	243	0.232	0.234
C	0.251	0.251	248	0.243	0.240
D	0.267	0.264	260	0.257	0.256
E	0.269	0.272	275	0.263	0.258

Die beiden letzten Kolonnen werden später erklärt werden.

Bevor auf eine nähere Diskussion eingegangen wird, mögen ähnliche Zusammenstellungen wie für P_{45} , noch für P. D. gegeben werden. Die Herren Müller und Kempf haben in einem Aufsätze in *Astronomischen Nachrichten* Nr. 4312 Resultate von Abzählungen mitgeteilt, die sofort verwertet werden können. Zuerst mögen die durch einfache Addition zu erhaltenden A_m angegeben werden.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	Σ
$m = 3.99$	6	32	29	31	38	24	14	0	174
4.99	18	74	86	95	137	103	42	12	567
5.99	83	211	276	353	452	319	143	32	1869
6.99	263	619	826	1178	1516	972	431	100	5905

¹⁾ A. a. O., S. 391.

Daraus folgen die $\log a_m$:

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
$m = 4.99$	0.239	0.182	0.236	0.243	0.278	0.302	0.239	—
5.99	0.332	0.228	0.253	0.285	0.259	0.246	0.266	0.218
6.99	0.251	0.234	0.239	0.261	0.263	0.242	0.240	0.247
Mittel	0.268	0.228	0.236	0.265	0.263	0.246	0.243	0.241

und wenn wieder die Zonen A bis E eingeführt werden, ergeben sich die A_m :

	A	B	C	D	E	Σ
$m = 3.99$	6	32	43	55	38	174
4.99	18	86	128	198	137	567
5.99	83	243	419	672	452	1869
6.99	263	719	1257	2150	1516	5905

Die $\log a_m$ sind jetzt:

	A	B	C	D	E
$m = 4.99$	0.239	0.215	0.237	0.278	0.278
5.99	0.332	0.226	0.258	0.265	0.259
6.99	0.251	0.236	0.239	0.253	0.263
Mittel	0.268	0.232	0.243	0.257	0.267
einfache M.	0.274	0.226	0.245	0.265	0.267

Die ersten Mittelwerte sind in der obigen Zusammenstellung unter $M_{7,0}$ angegeben. Schließlich möchte ich noch eine andere Zusammenstellung mitteilen. Die Abzählungsergebnisse der Herren Müller und Kempf sind mir leider zu spät bekannt geworden. Inzwischen hatte ich selbst eine Abzählung nach der P. D. vorgenommen, welche für die Größen 2.5, 3.5 etc. angestellt wurde. Ich führe die Resultate an, weil sie direkt vergleichbar mit den aus P_{45} gewonnenen sind.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	Σ
$A_{2.50}$	0	6	3	4.5	9.5	5	1	0	29
$A_{3.50}$	4.5	13.5	19	13	25	12.5	6.5	0	94
$A_{4.50}$	9.5	45.5	54	46	70	53.5	24	4.5	307
$A_{5.50}$	43.5	123.5	164.5	191	267	186.5	75.5	18.5	1070
$A_{6.50}$	142	362.5	477	604.5	842	557.5	237	53.5	3276
Summe	199.5	551	717.5	859	1213.5	815	344	76.5	4776

	log a_m							
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
$m = 3.5$	—	0.176	0.401	0.230	0.240	0.199	0.403	—
4.5	0.162	0.264	0.227	0.274	0.224	0.316	0.284	—
5.5	0.330	0.217	0.242	0.309	0.296	0.271	0.249	0.307
6.5	0.257	0.234	0.231	0.250	0.249	0.238	0.248	0.231
Mittelw.	0.268	0.231	0.237	0.259	0.258	0.249	0.252	0.239

	A_m						
	A	B	C	D	E	Σ	
$m = 2.5$	0	6	4	9.5	9.5	29	
3.5	4.5	13.5	25.5	25.5	25	94	
4.5	9.5	50	78	99.5	70	307	
5.5	43.5	142	240	377.5	267	1070	
6.5	142	416	714	1162	842	3276	

	log a_m				
	A	B	C	D	E
$m = 3.5$	—	0.176	(0.402)	0.214	(0.240)
4.5	0.162	0.284	0.243	0.296	0.224
5.5	0.330	0.227	0.244	0.295	0.296
6.5	0.257	0.233	0.237	0.244	0.249
Mittelw.	0.268	0.234	0.240	0.256	0.258
einf. M.	0.250	0.230	0.241	0.262	0.252

Nach allen mitgeteilten Zahlen darf man schließen, daß mit Ausnahme der Zone A in allen übrigen Zonen die Tatsache hervortritt, daß die log a_m , ohne eine Abhängigkeit von m zu zeigen, mit der Annäherung an die Milchstraße zunehmen, daß sie aber für ganz helle Sterne durch unregelmäßige Schwankungen teilweise verdeckt wird. Diese Schwankungen sind durch die geringe Zahl der konkurrierenden Sterne zu erklären.

Die P. D.-Angaben beziehen sich auf die Größen 3.99, 4.99 etc. Um auf die vollen Größen zu reduzieren, hat man 0.005 im log A_m zu addieren. Vereintigt man diese log A_m für alle Zonen zusammen, so ergibt sich die folgende Gegenüberstellung:

m	$P.D$		$\log A_m$		$P_{45} - P.D$
	$P.D$	P_{45}	P_{45}	$P_{45} - P.D$	
2.5	1.462	255	1.544	237 ₅	+ 0.082
3.5	1.973	273	2.021		+ 0.048
4.0	2.246	241	—	266 ₅	
4.5	2.487	272	2.554		+ 0.067
5.0	2.759	270		269 ₅	
5.5	3.029	248	3.093		+ 0.064
6.0	3.277	238		257	
6.5	3.515	261	3.609		+ 0.094
7.0	3.776				

Die $\log a_m$ ergeben sich im Mittel für $P.D: 0.257_3$, für $P_{45}: 0.257_6$, also vollkommen übereinstimmend. Dagegen ist offenbar eine konstante Differenz zwischen den beiden Katalogen vorhanden, die im Mittel beträgt:

$$P_{45} - P.D = + 0.071.$$

Das entspricht einer Differenz in den Größenangaben im Sinne

$$P_{45} - P.D = + 0.14^m.$$

Diese Differenz stimmt sehr gut mit dem durch den direkten Vergleich beider Kataloge erhaltenen Wert 0.16^m . Im übrigen zeigen die $\log a_m$ weder bei $P.D$ noch bei P_{45} einen von m abhängigen systematischen Gang, vielmehr nur nicht bedeutende Schwankungen.

Es ist noch der Anschluß an die aus der Bonner Durchmusterung erhaltenen Resultate zu besprechen. Die mit der D. M. ausgeführten Abzählungen von $m = 6$ bis $m = 9.2$ ergaben nach eingehender Diskussion $\log A_{6.5} = 3.579$, während aus P_{45} folgt 3.609. Dabei ist aber zu bemerken, daß meine Angaben sich auf das System der Harvard-Revision beziehen und nach den Herren G. Müller und Kempf¹⁾ dieses System, abgesehen von seiner Inhomogenität, nicht übereinstimmt mit dem von P_{45} , vielmehr 6.50^m in $P_{45} = 6.56^m$ H. R. Will man

1) Potsdamer Publikationen XVII, S. XXV.

deshalb $\log A_{0.5}$, wie es aus $P_{4.5}$ folgt, auf H. R. beziehen, so muß man $0.5 \times 0.06 = 0.030$ in Abzug bringen. Man erhält so zufällig genau dasselbe Resultat, wie meine Reduktion der Resultate aus D. M. ergeben haben. Danach bedarf die schon früher von mir gefundene Differenz keiner weiteren Erklärung. Tatsächlich ist die von mir in meiner Arbeit vom Jahre 1909 gegebene Erklärung aus einer durch ein Versehen unrichtig ausgefallenen Formel entsprungen und muß als unzutreffend bezeichnet werden.

Indessen müssen doch noch einige Bemerkungen hinzugefügt werden. Die eben angegebene Differenz der Größen $P_{4.5} - P.D$ ist nur sehr unsicher bestimmt. Die Herren Müller und Kempf machen selbst darauf aufmerksam, daß gerade bei $m = 6.5$ die Kurve der Differenzen eine starke Veränderung zeigt, auch machen sich bedeutende regionale Einflüsse geltend, die wohl H. R. zuzuschreiben sind. Danach ist zu vermuten, daß auch für die einzelnen Milchstraßenzonen die Beziehungen der beiden Kataloge verschieden ausfallen werden. Da nun nicht nur der Anschluß für alle Sterne von der Größe 6.5 an die Resultate der D. M. von Interesse ist, sondern für jede Milchstraßenzone, ist es von Wichtigkeit, die Beziehungen der drei Kataloge $P_{4.5}$, H. R. und P. D. etwas näher zu untersuchen. Ich habe deshalb die langweilige Ausführung der Vergleichung von $P_{4.5}$ und H. R. nicht gescheut. Für ganz helle Sterne ist die Zahl der Vergleichungsobjekte, da die H. R. schwächere Sterne bevorzugt, viel zu gering, um etwas Bestimmtes aussagen zu können, auch sind hier, namentlich in H. R., große Schwankungen und Unsicherheiten vorhanden. Ich habe deshalb nur die Frage zu beantworten gesucht: welche Größe der auf der nördlichen Halbkugel gelegenen Sterne entspricht in der H. R. der Größe 6.50 in $P_{4.5}$? Hier handelt es sich um eine rein formale Beziehung, durch welche die Abzählungen, welche an einem der beiden Kataloge gemacht worden sind, auf die an dem anderen angestellten reduziert werden sollen. Es darf deshalb weder auf die Farbe der Sterne noch auf den Umstand Rücksicht genommen werden, daß $P_{4.5}$ bekannt-

lich kein einheitlicher, ganz homogener Katalog ist, vielmehr auch aus der H. R. herübergenommene Sterne enthält. Da es, wie schon erwähnt worden ist, wahrscheinlich ist, daß die Beziehungen der beiden Kataloge gerade bei $m = 6.5$ schnelleren Veränderungen unterworfen ist, habe ich das Intervall, in dem sich die zu vergleichenden Sterngrößen bewegen, möglichst eng um 6.50 herum gehalten. Aber es mußte andererseits nicht zu klein genommen werden, um eine genügende Zahl von Vergleichsobjekten zu erhalten. Die einmal festgesetzte Größe des Intervalls muß aber ausnahmslos festgehalten werden, wenn man Willkür vermeiden will. Wegen der Zunahme der Sternanzahlen mit m bildet 6.50 nicht die Mitte des Intervalls, vielmehr wurde für P_{45} angenommen für die Zonen I, II, III, VII und VIII: 6.04 bis 6.80, für die sternreichen Zonen IV, V und VI: 6.24 bis 6.70. So ergeben sich

	Anzahl	$P_{45} - H.R$	Mittlere Größe P_{45}
Zone I	50	-0.011	6.50
II	90	$+0.002$	6.46
III	164	-0.019	6.49
IV	167	-0.024	6.49
V	152	-0.052	6.50
VI	135	-0.066	6.49
VII	73	-0.074	6.52
VIII	12	-0.066	6.47

Dabei wurden alle Differenzen > 0.40 , als durch irgendwelche Versehen entstanden, ausgeschlossen. Indessen wurde dadurch das Resultat in keiner irgendwie erheblichen Weise geändert. Das Gesamtmittel mit Rücksicht auf die Zahl aller Sterne bei P_{45} ist -0.0382 . Die Reduktion von $\log A_{6.5}$ in P_{45} auf H. R. ist also 0.019, wozu noch die früher überschätzte Reduktion hinzutritt, so daß die oben konstatierte sich auf etwa 0.009 reduziert, was genügend sein dürfte.

Wenn als Reduktionsfaktor der mittlere Wert für eine Sterngröße $\frac{1}{2}$, was ausreichend ist, angenommen wird, erhält man folgende Tabelle:

Zone	P_{45}	Red.	<i>H.R.</i>	P_{45}	Red.	<i>H.R.</i>	f	$\log \delta$	<i>DM</i>
I	2.244	— 6	2.238	2.244	— 6	<i>A</i> 2.238	3.082	9.156	9.169
II	2.642	+ 1	2.643	2.699	— 3	<i>B</i> 2.696	3.559	9.137	9.151
III	2.765	— 10	2.755	2.941	— 19	<i>C</i> 2.922	3.733	9.189	9.171
IV	2.906	— 12	2.894	3.172	— 22	<i>D</i> 3.150	3.832	9.318	9.313
V	3.013	— 23	2.985	3.013	— 28	<i>E</i> 2.985	3.556	9.429	9.404
VI	2.834	— 33	2.801						
VII	2.464	— 37	2.427						
VIII	1.785	— 31	1.754						

Es ist hierin P_{45} der $\log A_{6.5}$, wie er direkt aus den Abzählungen aus P_{45} folgt; reduziert ist die Reduktion auf *H. R.*, den Vergleichen der beiderseitigen Sterngrößen entsprechend. *H. R.* der auf das System der Harvard-Revision bezogene $\log A_{6.5}$. Ferner bedeutet f den Logarithmus des betreffenden Areals in Quadratgraden und δ die Zahl der Sterne auf einem Quadratgrad. Unter *D. M.* steht das Resultat aus den früheren von mir bestimmten Sternanzahlen aus dem Material der Bonner Durchmusterung. Ich habe nämlich¹⁾ für die abgezählten $A_{6.5}$ etc. die in folgender Tabelle enthaltenen Zahlen gefunden:

Zone	$\log A_{6.5}$	$\log A_{7.5}$	$\log A_{9.2}$	$\log f$
I	2.315	2.792	3.493	3.146
II	2.609	3.048	3.818	3.439
III	2.760	3.269	4.089	3.563
IV	2.827	3.367	4.279	3.550
V	2.953	3.514	4.421	3.549
VI	2.829	3.323	4.224	3.479
VII	2.436	2.933	3.837	3.317
VIII	1.889	2.381	3.236	2.326

	$\log A_{6.5}$	$\log A_{7.5}$	$\log A_{9.2}$	$\log f$
<i>A</i>	2.315	2.792	3.493	3.146
<i>B</i>	2.685	3.133	3.919	3.531
<i>C</i>	2.929	3.434	4.282	3.758
<i>D</i>	3.129	3.647	4.553	3.816
<i>E</i>	2.953	3.514	4.421	3.549

¹⁾ Zur Verteilung der Sterne am Himmel. Sitzungsberichte der Münchener Akademie 1899, S. 390.

Daraus folgen der Wert $\log \delta$, wo δ die Anzahl Sterne auf einem Quadratgrad sind:

	$\log \delta$		
$m = 6.5$	7.5	9.2	
<i>A</i>	9.169	9.646	0.347
<i>B</i>	9.151	9.599	0.385
<i>C</i>	9.171	9.676	0.524
<i>D</i>	9.313	9.831	0.737
<i>E</i>	9.404	9.965	0.872

Die Übereinstimmung der Zahlen $\log \delta$ und D. M. für $m = 6.5$ zeigen immerhin eine erfreuliche Übereinstimmung, wenn man die komplizierten und nicht ganz sicheren Reduktionen berücksichtigt, die zu den D. M. geführt haben. Direkte Mittel P_{45} für $m < 6.5$ auf das System der H. R. zurückzuführen, gibt es nicht, da bekanntlich beide Kataloge verhältnismäßig wenige helle Sterne gemein haben. Bei dieser Sachlage und solange nicht etwa P_{45} oder P. D. bis zu den Sternen 10. Größe weitergeführt worden ist und dann eine Bezugnahme auf H. R. unnötig sein wird, bleibt nichts übrig, als anzunehmen, daß die hellen Sterne mit derselben Reduktion, wie die von der Größe 6.5 auf das System der H. R. zu reduzieren sind. Bringt man also diese Korrekturen an die aus den direkten Abzählungen aus P_{45} gewonnenen $\log A_m$ an und fügt gleich die aus D. M. erhaltenen Resultate hinzu, so erhält man folgendes Tableau für $\log \delta$:

Zone	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>
$m = 3.5$	7.565—10	7.599	7.719	7.623	7.839
4.5	7.890	8.174	8.191	8.255	8.308
5.5	8.620	8.648	8.692	8.794	8.900
6.5	9.156	9.137	9.189	9.318	9.429
7.5	9.646	9.599	9.676	9.831	9.965
9.2	10.346	10.383	10.524	10.737	0.872

Die Zahlen dieser Tabelle, welche ich als das beste Resultat ansehe, das ich mit den angewandten Reduktionsgrößen erhalten konnte, stimmen mit den beiden in den früheren Abschnitten dieser Arbeit benutzten Daten fast vollkommen überein.

Sie weichen nur an einer Stelle um mehr als eine Einheit der 3. Dezimale voneinander ab, d. i. für $m = 7.5$ und die Zone *D*, wo die genannten Rechnungen mit 9.851 ausgeführt wurden. Die Differenz rührt von einer provisorisch angebrachten Korrektur her, ehe die definitiven Werte hergestellt waren, die nicht gerechtfertigt ist. Im übrigen kommt sie wohl kaum in Betracht, da die angestellten Rechnungen nicht mehr als einen orientierenden Charakter haben können. Die mittlere Unsicherheit der einzelnen $\log \delta$ dürfte etwa $10 \pm$ Einheiten der 3. Stelle sein.

Noch muß das Verhältnis der Potsdamer Durchmusterung zu den Harvard-Katalogen besprochen werden. Es liegt selbstverständlich keine Unterschätzung der nach jeder Richtung ausgezeichneten P. D. vor, wenn bei den hier angestellten Rechnungen die Harvard-Resultate benutzt worden sind. Aber der Anschluß an die Resultate aus der D. M. schien mir für P_{45} etwas sicherer zu sein, weil die ersteren auf das System der H. R. bezogen worden sind (vgl. die Bemerkungen in der Einleitung).

Um die Anschlußstelle zwischen P_{45} und *DM* bei $m = 6.5$ auch für die P. D. zu diskutieren, muß eine Vergleichung P. D. und P_{45} für die einzelnen Milchstraßenzonen ausgeführt werden. Da mir bekannt war, daß am Potsdamer Observatorium das Material in einer zur Vergleichung viel geeigneteren Form vorhanden ist, als mir zu Gebote stand, habe ich Herrn G. Müller ersucht, die gewünschte Vergleichung vorzunehmen. Er und Herr Kempf sind diesem Wunsche in bereitwilligster Form entgegengekommen. Es wurden die Differenzen $P_{45} - PD$ für alle Sterne, welche bis P_{45} zwischen den Grenzen 6.00 und 6.99 liegen zusammengefaßt nach galaktischen Zonen und es ergab sich:

Zone	$P_{45} - PD$	Anzahl	$\log A_{6.5}$	$\log \alpha$	Red.	$P.D^*$		[P.D]
I	- 0.163	146	2.152	0.51	+ 0.083	2.235	- 5	2.230
II	- 0.173	327	2.559	0.47	81	2.640	+ 1	2.641
III	- 0.178	453	2.679	0.46	82	2.761	- 9	2.752
IV	- 0.180	739	2.781	0.50	90	2.871	- 12	2.859
V	- 0.192	971	2.925	0.49	94	2.019	- 25	2.994
VI	- 0.201	623	2.746	0.47	94	2.840	- 31	2.809
VII	- 0.196	227	2.375	0.49	96	2.471	- 36	2.435
VIII	- 0.158	50	1.728	0.46	73	1.801	- 30	1.771

In die vorstehende Tabelle sind gleich mit aufgenommen die $\log A_{6.5}$, wie ich sie aus der P. D. gewonnen habe unter der Rubrik $\log A_{6.5}$. In der 5. Kolumne stehen die $\log \alpha$, wie sie oben aus P. D. für 6.5 abgeleitet wurden, in der 6. Kolumne die Reduktion auf P_{45} , die das negative Produkt von (2) und (5) ist. PD^* ist die auf P_{45} reduzierte Angabe der P. D. Darauf folgt die Reduktion auf H. R. nach den obigen Annahmen schließlich [P. D.], d. i. die auf H. R. reduzierte Angabe von P. D. Daraus ergibt sich für die Zonen A, B etc.:

$\log A_{6.5}$	[P.D]	Diff.	$\log \delta$		
			P.D	P_{45}	DM
A 2.152	2.230	+ 78	9.147	9.156	9.169
B 2.619	2.696	+ 77	137	9.137	9.151
C 2.854	2.923	+ 69	190	9.189	9.171
D 3.065	3.136	+ 71	304	9.318	9.313
E 2.925	2.994	+ 69	438	9.429	9.404

Die Übereinstimmung der verschiedenen $\log \delta$ ist jedenfalls eine gute.

Die Reduktion für Größen $m < 6.5$ ist natürlich nicht mit Sicherheit zu ermitteln, da hier genügende und direkt verwertbare Vergleichenungen nicht vorliegen, vielleicht auch gar nicht ausführbar sind. Indessen scheint aus den Angaben der P. D. (Publikation des Potsdamer Observatoriums XVII, Seite XXIX folgendes hervorzugehen:

Die Vergleichenungen von C_{II} mit P_{45} sind zu wenig zahlreich, um berücksichtigt werden zu können, wie überhaupt für Sterne, deren $m < 4.5$ ist. Man findet nun für die Sterne 5.5 Differenz $C_I - P_{44}$, etwa + 0.11, während die Reduktion C_I auf den Hauptkatalog (S. XII) 0.00 beträgt. Also ist $PD - P_{44} = + 0.11$; da weiter $P_{44} - P_{45} = - 0.01$ (S. XXVII), so folgt $PD - P_{45} = + 0.10$ für $m = 5.5$. Aus den Beobachtungen am Photometer D folgt: $D - P_{45} = + 0.19$ und da $PD - D = - 0.09$, also genau dasselbe Resultat, wie aus C_I , nämlich $PD - P_{45} = + 0.10$. Um also $\log A_{6.5}$ nach PD auf P_{45} zu reduzieren, müßte man nicht wie bei $m = 6.5$,

die in der letzten Tabelle unter der Rubrik Diff. stehende Reduktion anbringen, sondern eine kleinere, etwa $+ 0.050$. Ob diese Korrektur für die Sterne $m < 5.5$ gilt, ist ebenfalls ganz zweifelhaft, aber es ist immerhin wahrscheinlich, daß sie mehr der Sachlage entspricht, als die für $m = 6.5$ gefundene, da sich öfter bei photometrischen Beobachtungen in der Nähe von $m = 5$ oder 6 Änderungen der Auffassung zeigen. Jedenfalls bleibt nichts anderes übrig, als so zu verfahren.

Um demnach P.D. auf H.R. zu reduzieren, müssen noch die Korrekturen angebracht werden, durch welche die $\log A_m$ nach P_{45} auf H. R. bezogen werden. Es sollen also, ohne das Problematische dieser Reduktion zu verkennen, die $\log \delta$, welche aus den direkten Abzählungen aus der P. D. hervorgegangen sind, für $m \leq 5.5$ auf das System der H. R. reduziert werden durch die Korrekturen für die einzelnen Zonen:

$A + 0.044$, $B + 0.047$, $C + 0.031$, $D + 0.028$, $E + 0.022$.

Man erhält so folgende Gegenüberstellung des auf H. R. reduzierten $\log \delta$ aus PD und P_{45} , wobei unter $(PD)_0$ die unkorrigierten Logarithmen stehen:

	A			B			C		
	$(PD)_0$	P.D.	P_{45}	$(PD)_0$	P.D.	P_{45}	$(PD)_0$	P.D.	P_{45}
$m = 3.5$	7.571	7.615	7.565	7.571	7.618	7.599	7.674	7.705	7.719
4.5	7.896	7.940	7.890	8.140	8.187	8.174	8.159	8.190	8.191
5.5	8.556	8.600	8.620	8.593	8.640	8.648	8.647	8.678	8.692
6.5	9.070	9.148	9.156	9.060	9.137	9.137	9.121	8.190	9.189

	D			E		
	$(PD)_0$	P.D.	P_{45}	$(PD)_0$	P.D.	P_{45}
$m = 3.5$	7.575	7.603	7.623	7.842	7.864	7.839
4.5	8.166	8.191	8.255	8.289	8.311	8.308
5.5	8.715	8.773	8.794	8.871	8.893	8.900
6.5	9.233	9.304	9.318	9.369	9.438	9.429

Die Übereinstimmung ist eine fast überraschend gute. Sie zeigt jedenfalls, daß die angewandten Korrekturen berechtigt sind, denn sie wurden keineswegs so gewählt, daß eine gute Übereinstimmung erzielt werden sollte, sondern sie wurden vor der Vergleichung festgesetzt.

Tabelle
für die Begrenzungen der
Milchstrassenzonen
(Vgl. S. 491.)

δ	0 ⁰ bis 5 ⁰	5 ⁰ bis 10 ⁰	10 ⁰ bis 15 ⁰	15 ⁰ bis 20 ⁰	20 ⁰ bis 25 ⁰	25 ⁰ bis 30 ⁰	30 ⁰ bis 35 ⁰
0h 0m—0h 30m	} VIII	} VIII	VII	} VII	} VII	} VII	VI
0h 30m—1h 0m			(VII, VIII)				(VI, VII)
1h 0m—1h 30m			(VII, VIII)				VI
1h 30m—2h 0m			VII				VI
2h 0m—2h 30m	VIII	} VII	} VII	VII	VII	VII	} VI
2h 30m—3h 0m	VII			VII	VII	VI	
3h 0m—3h 30m	VII			VII	VI	VI	
3h 30m—4h 0m	VII			VI	VI	VI	
4h 0m—4h 30m	VII	VI	VI	VI	VI	VI	VI
4h 30m—5h 0m	VI	VI	VI	VI	VI	VI	V
5h 0m—5h 30m	VI	VI	VI	VI	V	V	V
5h 30m—6h 00m	VI	(V, VI)	V	V	V	V	V
6h 0m—6h 30m	V	V	V	V	V	V	V
6h 30m—7h 0m	V	V	V	V	(IV, V)	IV	IV
7h 0m—7h 30m	V	(IV, V)	IV	IV	IV	IV	IV
7h 30m—8h 0m	IV	IV	IV	IV	IV	IV	IV
8h 0m—8h 30m	IV	IV	IV	IV	IV	IV	III
8h 30m—9h 0m	IV	(III, IV)	III	III	III	III	III
9h 0m—9h 30m	III	III	III	III	III	III	III
9h 30m—10h 0m	III	III	III	III	III	(II, III)	II
10h 0m—10h 30m	III	III	II	II	II	II	II
10h 30m—11h 0m	II	II	II	II	II	II	II
11h 0m—11h 30m	II	II	II	II	II	II	II
11h 30m—12h 0m	II	II	(I, II)	I	I	I	I

35° bis 40°	40° bis 45°	45° bis 50°	50° bis 55°	55° bis 60°	60° bis 65°	65° bis 70°	70° bis 75°	75° bis 80°	80° bis 85°	85° bis 90°
} VI	} VI	} VI	V (V, VI) V V	} V	} V	} V	(IV, V) (IV, V) (IV, V) IV	} IV	} IV	} IV
} VI	VI VI VI V	VI (V, VI) V V	} V	} V	} V	V V V IV	} IV	} IV	} IV	} IV
} V	} V	V V V (IV, V)	V V V IV	V V IV IV	V IV IV IV	} IV	} IV	} IV	} IV	} IV
} IV	} IV	} IV	} IV	IV IV IV (III, IV)	IV IV IV III	IV IV IV III	IV IV IV III	} IV	} IV	} IV
III III III II	III III III (II, III)	} III	} III	} III	} III	} III	} III	} III	IV III III III	} IV
II II II I	II II II (I, II)	} II	} II	III II II II	III III II II	} III	} III	} III	IV IV (III, IV) (III, IV)	

δ	0 ⁰ bis 5 ⁰	5 ⁰ bis 10 ⁰	10 ⁰ bis 15 ⁰	15 ⁰ bis 20 ⁰	20 ⁰ bis 25 ⁰	25 ⁰ bis 30 ⁰	30 ⁰ bis 35 ⁰
12 ^h 0 ^m – 12 ^h 30 ^m	} II	II	I	} I	} I	} I	} I
12 ^h 30 ^m – 13 ^h 0 ^m		(I, II)	I				
13 ^h 0 ^m – 13 ^h 30 ^m		II	I				
13 ^h 30 ^m – 14 ^h 0 ^m		II	(I, II)				
14 ^h 0 ^m – 14 ^h 30 ^m	II	II	II	II	(I, II)	(I, II)	I
14 ^h 30 ^m – 15 ^h 0 ^m	II	II	II	II	II	II	II
15 ^h 0 ^m – 15 ^h 30 ^m	III	(II, III)	II	II	II	II	II
15 ^h 39 ^m 16 ^h 0 ^m	III	III	III	III	II	II	II
16 ^h 0 ^m – 16 ^h 30 ^m	III	III	III	III	III	III	III
16 ^h 30 ^m – 17 ^h 0 ^m	IV	III	III	III	III	III	III
17 ^h 0 ^m – 17 ^h 30 ^m	IV	IV	IV	IV	(III, IV)	III	III
17 ^h 30 ^m – 18 ^h 0 ^m	IV	IV	IV	IV	IV	IV	IV
18 ^h 0 ^m – 18 ^h 30 ^m	V	IV	IV	IV	IV	IV	IV
18 ^h 30 ^m – 19 ^h 0 ^m	V	V	V	V	IV	IV	IV
19 ^h 0 ^m – 19 ^h 30 ^m	V	V	V	V	V	V	V
19 ^h 30 ^m – 20 ^h 0 ^m	VI	V	V	V	V	V	V
20 ^h 0 ^m – 20 ^h 30 ^m	VI	VI	VI	(V, VI)	V	V	V
20 ^h 30 ^m – 21 ^h 0 ^m	VI	VI	VI	VI	VI	(V, VI)	V
21 ^h 0 ^m – 21 ^h 30 ^m	VI	VI	VI	VI	VI	VI	VI
21 ^h 30 ^m – 22 ^h 0 ^m	VII	VII	(VI, VII)	VI	VI	VI	VI
22 ^h 0 ^m – 22 ^h 30 ^m	VII	VII	} VII	} VII	VI	VI	} VI
22 ^h 30 ^m – 23 ^h 0 ^m	VII	VII					
23 ^h 0 ^m – 23 ^h 30 ^m	VIII	VII			(VI, VII)		
23 ^h 30 ^m – 24 ^h 0 ^m	VIII	VIII			VII		

35° bis 40°	40° bis 45°	45° bis 50°	50° bis 55°	55° bis 60°	60° bis 65°	65° bis 70°	70° bis 75°	75° bis 80°	80° bis 85°	85° bis 90°
} I	} I	II (I, II) II II	} II	} II	} II	(II, III) (II, III) (II, III) III	} III	} III	} III	} (III, IV)
(I, II) II II II	} II	II II II (II, III)	II II II III	II II (II, III) III	II (II, III) III III	} III	} III	} III	} III	(III, IV) (III, IV) IV IV
III III III IV	III III III IV	} III	} III	} III	} III	} III	} III	} III	III III (III, IV) III	} IV
IV IV IV V	IV IV IV V	} IV	} IV	} IV	} IV	} IV	} IV	} IV	} IV	} IV
V V V VI	} V	} V	(IV, V) V V V	IV V V V	IV IV V V	} IV	} IV	} IV	} IV	} IV
} VI	} VI	V V VI VI	} V	} V	} V	} V	} IV	} IV	} IV	} IV



Über die singulären Lösungen einer Differentialgleichung erster Ordnung mit zwei Veränderlichen, die zugleich partikuläre Integrale sind.

Von Paul Stäckel.

Vorgelegt von W. v. Dyck in der Sitzung am 7. Dezember 1912.

W. v. Dyck hat in seiner Abhandlung: Über die singulären Lösungen einer Differentialgleichung erster Ordnung mit zwei Variabeln, insbesondere über diejenigen, welche zugleich partikuläre Integrale sind¹⁾, zum ersten Male der funktionentheoretischen Behandlung der singulären Lösungen eine geometrische Behandlung an die Seite gestellt. Er hat sich dabei von dem Gesichtspunkt leiten lassen, die auftretenden Möglichkeiten an einer größeren Zahl charakteristischer Beispiele anschaulich zu machen, diese Beispiele aber nicht beliebig herauszugreifen, sondern sie systematisch und jeweils so einfach wie möglich auszuwählen. Bei dem Fall, daß eine partikuläre Integralkurve von einer Gruppe von Zweigen weiterer partikulärer Integralkurven berührt wird, also zugleich eine eigentliche singuläre Lösung ist, hat v. Dyck das „klassische Beispiel“ untersucht und graphisch dargestellt, das Cauchy in seinen *Leçons sur le calcul différentiel et le calcul intégral* (Paris 1844) angegeben hatte, nämlich die Differentialgleichung dritten Grades

$$y'^3 - 4xy \cdot y' + 8y^2 = 0$$

mit dem allgemeinen Integral

$$y = C(x - C)^2,$$

das für $C = 0$ die zugleich singuläre und partikuläre Lösung

¹⁾ Abhandlungen der K. B. Akademie der Wissenschaften, math.-phys. Klasse, XXV. Bd., 4. Abh. München 1910.

$y = 0$ ergibt. Gewiß läßt dieses Beispiel an Einfachheit nichts zu wünschen übrig, allein es entsteht doch die systematische Frage, ob es nicht bereits unter den Differentialgleichungen zweiten Grades solche gibt, bei denen eine partikulär-singuläre Lösung der beschriebenen Art vorhanden ist. Im folgenden soll gezeigt werden, daß diese Frage zu verneinen ist.

An Stelle der Differentialgleichung zweiten Grades betrachte man die zugeordnete Schar der Integralkurven, die ein gewisses Gebiet der xy -Ebene zweifach überdecken und durch eine Gleichung

$$f(x, y)C^2 + g(x, y)C + h(x, y) = 0$$

dargestellt werden. Dann darf unbeschadet der Allgemeinheit angenommen werden, daß die Kurve K , die eine partikulär-singuläre Lösung liefert, dem Werte $C = 0$ entspricht. Diese Kurve muß also der Gleichung

$$h(x, y) = 0$$

genügen, das heißt, das reelle geometrische Gebilde, das durch diese Gleichung erklärt wird, und das mit H bezeichnet werden möge, muß die Kurve K als Bestandteil enthalten. Damit andererseits die Kurve K von einer Gruppe von Zweigen weiterer partikulärer Integralkurven berührt wird, muß in ihr die Diskriminante

$$4f(x, y) \cdot h(x, y) - g^2(x, y) = 0$$

sein, also, weil $h(x, y)$ bereits verschwindet, die Gleichung

$$g(x, y) = 0$$

bestehen, das heißt, das reelle geometrische Gebilde, das durch diese Gleichung erklärt wird und das mit G bezeichnet werden möge, muß ebenfalls die Kurve K als Bestandteil enthalten. Dagegen darf jetzt das reelle geometrische Gebilde F , das durch die Gleichung $f(x, y) = 0$ erklärt wird, nicht den Bestandteil K enthalten, weil K sonst eine „parasitische“ Kurve wäre, die mit der betrachteten Differentialgleichung gar nichts zu tun hat.

Die soeben abgeleitete Bedingung, daß die Gebilde G

und H die Kurve K gemeinsam haben müssen, ist notwendig. Untersuchen wir jetzt, ob sie hinreichend ist, betrachten wir also eine Kurvenschar

$$f(x, y) C^2 + g(x, y) C + h(x, y) = 0,$$

bei der den geometrischen Gebilden G und H , die durch die Gleichungen $g(x, y) = 0$ und $h(x, y) = 0$ dargestellt werden, ein Bestandteil K gemeinsam ist, während diese Kurve K dem durch die Gleichung $f(x, y) = 0$ dargestellten Gebilde nicht angehört. Es sei C' irgend ein von Null verschiedener Wert der willkürlichen Konstanten C . Auf der zugehörigen Integralkurve K' besteht die Gleichung

$$f(x, y) C'^2 + g(x, y) C' + h(x, y) = 0.$$

Mithin müssen die Punkte, die den Kurven K und K' gemeinsam sind, der Gleichung

$$f(x, y) C'^2 = 0$$

genügen, oder da C' von Null verschieden ist, der Gleichung

$$f(x, y) = 0.$$

Allein das durch diese Gleichung dargestellte reelle geometrische Gebilde F sollte die Kurve K nicht enthalten. Mithin liefern nur diejenigen Werte C' eine Kurve K' , die mit der Kurve K einen Punkt gemeinsam hat, bei welchem die Kurve K , durch einen Schnittpunkt der Kurve K mit dem Gebilde F hindurchgeht. Diese Schnittpunkte können aber, der Voraussetzung nach, keinen stetigen Teil von K erfüllen, und daher ist K keine Integralkurve der verlangten Art.

Damit ist der verlangte Beweis geliefert. Man wird jedoch, um das Verhalten der Differentialgleichungen zweiten Grades ganz zu verstehen, wissen wollen, welche Rolle der Integralcurve K in der Schar der Integralkurven zukommt. Die Untersuchungen W. v. Dycks geben hierüber willkommene Aufklärung. Nach der von ihm eingeführten Bezeichnungsweise ist die Kurve K eine Grenzkurve, das heißt eine Kurve, der sich eine Schar von Zweigen der partikulären Integralkurven von einer oder von zwei Seiten annähert, ohne sie (singuläre

Stellen ausgenommen) zu berühren oder zu durchsetzen; es ist dies der „Typus II“ der singulären Lösungen. Als einfachstes Beispiel für das Auftreten einer solchen Grenzkurve gibt v. Dyck (a. a. O., S. 32) die Differentialgleichung

$$m x^2 \cdot y'^2 + y(2 m x - n^2 y) \cdot y' + m y^2 = 0.$$

Legt man in ihr den Konstanten m und n die Werte bei:

$$m = -1, \quad n = +1,$$

so erhält man die Differentialgleichung

$$x^2 \cdot y'^2 + y(2x + y) \cdot y' + y^2 = 0,$$

der die Kurvenschar

$$C^2 - yC - xy = 0$$

genügt. An dieser Differentialgleichung lassen sich die vorhergehenden Betrachtungen in lehrreicher Weise erläutern. Die Gebilde G und H haben hier die Gerade $y = 0$, also die x -Achse, gemeinsam, und diese ist hier die Kurve K , die dem Werte $C = 0$ entspricht. Ist C von 0 verschieden, so erhält man lauter gleichseitige Hyperbeln, die zur gemeinsamen Asymptote die x -Achse haben, also die Kurve K nicht berühren. Vielmehr ist die x -Achse eine Grenzkurve, der sich die gleichseitigen Hyperbeln mit abnehmendem C unbeschränkt nähern ¹⁾.

¹⁾ Herr v. Dyck teilt mir hiezu die folgende geometrische Bemerkung mit:

Deutet man in bekannter Weise die Gleichung $F(x, y, z) = 0$ der Integralkurven als Fläche im Raum $x, y, z = C$, so ist Bedingung für eine zugleich partikuläre und eigentlich singuläre Lösung, daß die Projektion eines Zweiges der Umrißlinie der Fläche $F = 0$ auf die xy -Ebene mit der Projektion eines Zweiges einer Integralkurve $z = C_0$ zusammenfällt. Dann aber wird diese Fläche von den Erzeugenden des projizierenden Umrißzylinders nicht nur in jenen Umrißpunkten berührt, sondern auch noch in den Punkten jenes Zweiges von $z = C_0$ geschnitten, sie muß also mindestens vom dritten Grade in z sein.

Im Falle der „Grenzkurve“ (singuläre Lösung vom Typus II) fällt dagegen ein Zweig der Umrißlinie selbst mit einem Zweig der Kurve $z = C_0$ zusammen und damit ist die Möglichkeit gegeben, daß die Fläche $F = 0$ in z nur vom zweiten Grade ist, wie in dem oben herangezogenen Beispiel des Kegels $z^2 - zy - xy = 0$.

Vibrationsbeobachtungen in den oberbayerischen Seen und analoge Erscheinungen in den Meeren.

Von **A. Endrös.**

Mit 2 Tafeln.

Vorgelegt von H. Ebert in der Sitzung am 7. Dezember 1912.

Durch die Munifizienz der K. Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München wurde im Jahre 1900 die Anschaffung zweier Limnimeter Sarasinscher Konstruktion ermöglicht. Mit diesen registrierenden Pegelapparaten unternahm erstmalig Herr Hermann Ebert die Untersuchung eines bayerischen Sees, des Würmsees, auf jene eigentümlichen pendelartigen Schwingungen der gesamten Wassermasse eines Sees, die man nach dem Beispiele der am Genfersee beobachteten Seespiegelschwankungen „Seiches“ genannt hat. Unter seiner Leitung und weiterhin unterstützt durch die genannte Akademie wurden seitdem an den verschiedensten Punkten einer großen Reihe von Seen mit diesen Instrumenten Beobachtungen angestellt, wozu der Verfasser noch ein sehr empfindliches Zeigerlimnimeter und ein leicht transportables registrierendes Limnimeter konstruierte, so daß außer den Periodendauern der Schwingungen auch die Lage der Knotenlinien festgelegt werden konnten. In dieser Weise wurden untersucht: Der Würmsee von H. Ebert und Ph. Schnitzlein, der Chiemsee, Waginger-Tachingersee, Sinssee,¹⁾ Königsee¹⁾ und Tüttensee¹⁾ vom Verfasser, wozu noch kürzerdauernde Beobachtungen an 18 weiteren Seen¹⁾ kommen. Zur Zeit werden die gleichen Beob-

¹⁾ Die Ergebnisse sind noch nicht veröffentlicht.

achtungen am Ammersee weitergeführt, welche schon H. Ebert im Jahre 1904 begonnen hatte.

Durch diese Untersuchungen ist ein außerordentlich reiches Kurvenmaterial gewonnen worden. Schon das erste Studium desselben zeigte, daß außer den eigentlichen Grund- und Oberschwingungen, welche man als stehende Wellenbewegungen, also als eigentliche Seiches zu deuten hatte, noch zahlreiche Schwingungen kürzerer Dauer auftreten, welche das Limnogramm zackenförmig erscheinen lassen. Auf diese kurzperiodischen Wasserstandsschwankungen hat F. A. Forel, der Begründer der modernen Seenforschung, schon aufmerksam gemacht und sie zum Unterschiede von den Seiches Vibrationen genannt.¹⁾ Auf Grund seiner Beobachtungen in Morges am Genfersee glaubte er auch in ihnen Seiches, also stehende Schwingungen des ganzen Sees suchen zu müssen. Zugleich hat er schon damals auf die ganz analogen Erscheinungen an den Meeresküsten hingewiesen, welche die Flutkurven der Mareographen auszacken und schon lange unter dem Namen „sekundäre Gezeiten“, oder an manchen Küstenpunkten, wo sie unter Umständen mit enormen Amplituden auftreten können, unter lokalen Namen bekannt waren. Die diesbezüglichen Beobachtungen Forels am Genfersee hat G. H. Darwin²⁾ besonders beachtet und als die merkwürdigsten Forschungsergebnisse Forels bezeichnet. Zugleich erkannte er, daß die Vibrationen der Seen zu lokalem Charakter haben, als daß sie eigentliche Seiches sein können, daß darin vielmehr fortschreitende Wellen großer Länge zu suchen seien, wie sie durch einen einzigen Impuls gleichzeitig mit solcher kurzer Länge entstehen, was sich durch unsere Beobachtungen alles bestätigt. An der gleichen Stelle weist er auf dieses Forschungsgebiet mit den noch nicht geklärten Fragen als interessantes Arbeitsfeld für künftige Untersuchungen hin.

1) F. A. Forel, *Le Léman II*. Lausanne 1895, p. 213 ff.

2) G. H. Darwin, *Ebbe und Flut, sowie verwandte Erscheinungen im Sonnensystem*. Leipzig 1902, p. 36 ff. und Leipzig 1911, p. 38 ff.

Das Verdienst, die Untersuchungen der Vibrationen in neuester Zeit wieder angeregt zu haben, gebührt G. Chrystal,¹⁾ der am Schlusse seiner Seichesuntersuchungen in den schottischen Seen auch die Vibrationen mit seinem „Statolimnographen“ beobachtete und sie auf Grund der Ergebnisse nicht für stehende Schwingungen des ganzen Sees hielt, sondern für lokale, von der Uferbeschaffenheit abhängige Erscheinungen, die teils durch Stauwirkungen des Windes teils durch fortschreitende, wellenförmige Störungen verursacht werden.

Inzwischen waren die analogen Erscheinungen in den Meeren, zum Teil angeregt durch Forels Beobachtungen am Genfersee, von den Ozeanographen allseits untersucht worden, wobei sich übereinstimmend ergeben hatte, daß die sogenannten sekundären Gezeiten Resonanzschwingungen von Meeresbuchten sind, welche an der Mündung der Bucht einen Schwingungsknoten haben, und daß diese stehenden Schwingungen durch Wellen großer Länge ausgelöst werden, die vom offenen Meere kommen und teils atmosphärischen teils seismischen Ursprungs sein können.²⁾ Diesen Ergebnissen in den Seen und Meeren gegenüber wies Forel darauf hin, daß die Vibrationen nicht nur in abgeschlossenen Buchten sondern auch an der offenen Küste vorkommen, wo, wie er glaubte, keine Resonanz möglich sei. Er hielt deshalb an seiner Hypothese fest, daß in diesen Schwingungen auch Seiches zu suchen seien und zwar mehrknotige Seiches, die quer zur Uferstelle schwingen.³⁾

Aus dem an den bayerischen Seen gewonnenen Kurvenmateriale und demjenigen der Literatur, sowie durch neue Beobachtungen und Versuche an kleineren Wasserbecken und Weihern konnte ich dagegen nachweisen, daß ein Vorkommen von sechsknotigen Seiches schon sehr selten ist und daß an

1) G. Chrystal, An investigation of the seiches of loch Earn by the Shottish Lake Survey, Trans. R. Soc. Edinburgh 1908. Bd. 46. III. No. 20, p. 490.

2) O. Krümmel, Ozeanographic, Bd. II. Stuttgart 1911, p. 168 ff.

3) F. A. Forel, Vibrations de la mer et des lacs. Arch. de Gen. IV, 27, 1909, p. 161.

korrespondierenden Uferpunkten des nämlichen Sees gleichzeitig ganz andere periodische Schwankungen auftreten.¹⁾ Obwohl nun auch Querseiches im Sinne Forels an günstigen Punkten in Seen möglich sind, wie ich solche in einzelnen Fällen mit Sicherheit nachweisen konnte,²⁾ so war doch die Annahme solcher für die Mehrzahl der Stationen unmöglich, da sie bis 20 und mehr Knoten haben müßten.

Es legte vielmehr eine genaue Analyse dieser kurzperiodischen Schwingungen alsbald eine andere Vermutung nahe, nämlich daß man es bei den Vibrationen mit einer allgemeineren Erscheinung zu tun habe, wovon die Seiches nur einen speziellen Fall bilden, daß nämlich in diesen kurzperiodischen Schwankungen Wasserwellen von großer Länge zu suchen seien, die im See fortschreiten und an den Küsten reflektiert werden. Wenn nun so viele Wellen gleicher Periodendauer und Amplitude aufeinanderfolgen, daß sie die doppelte Seelänge oder Seebreite ausfüllen, so hat man die bekannte Interferenzerscheinung der stehenden Wellenbewegung, also eigentliche Seiches, im anderen Falle nur im See fortschreitende Wellen. Kommen ferner die Wellen an eine Bucht, so bringen sie dieselbe zur Resonanz, wenn die Periodendauern der Wellen den Eigenschwingungsdauern der Bucht nahekommen, wobei sich noch das weitere Phänomen zeigte, daß auch eine Wassermasse, die nicht so vollständig begrenzt ist wie das Buchtenwasser, zu einem schwingungsfähigen Gebilde von bestimmter Periodendauer werden kann.³⁾

Bei den besprochenen Untersuchungen waren aber zum größten Teile nur Beobachtungen benützt worden, welche zunächst zum Studium der langperiodischen Seichesschwingungen angestellt worden waren, wobei ein langsamer Streifengang verwendet wurde und die Beobachtungspunkte dem Zwecke

¹⁾ A. Endrös. Die Vibrationen der Seen. Programm des humanistischen Gymnasiums Freising, 1911, 52 S. und 13 Fig.

²⁾ A. Endrös, Vergleichende Zusammenstellung der Hauptseichensperioden. Pet. Mitt., 1908, Heft III, p. 63.

³⁾ Die Vibrationen etc., zit. unter 1), p. 38.

entsprechend ausgewählt waren. Dazu kommt, daß unsere Vibrationen zunächst nur bei windigem Wetter auftreten und wegen des Zusammenwirkens verschiedener Wasserstandsschwankungen eine äußerst komplizierte Erscheinung darstellen. Es haben nämlich Beobachtungen an kleinen Wasserflächen ergeben, daß jeder Windstoß solche lange Wellen auslöst;¹⁾ nun kann aber der Entstehungsort der Wellen auf großen Wasserflächen fern vom Beobachtungsorte liegen, dann werden stets mehrere Systeme solcher Wellen entstehen und im Limnogramme des Beobachtungspunktes sich überlagern, endlich treten bei windigem Wetter periodische und aperiodische Stauwirkungen des Wassers auf, schließlich kommen noch die stets vorhandenen Oberflächenwellen dazu, die bei großen Amplituden auch in den Schutzbehälter dringen und welche die weitere Erscheinung der sogenannten Kombinationswellen verursachen können. Als Beispiel eines solchen komplizierten Limnogrammes füge ich in Tafel II, Fig. 15 ein durch ein Sarasinsches Limnimeter aufgezeichnetes Kurvenbild an, das H. Ebert im Jahre 1904 bei starkem Weststurm in Breitbrunn am Ostufer des Ammersees (vgl. Tafel I, Nr. 12) erhalten hatte. Die Vibrationen weisen darin Amplituden bis 110 mm auf, wie sie die Seichesschwingungen am Ammersee bis jetzt nicht einmal erreicht haben und wie ich sie in keinem See angenähert so groß gefunden habe, und enthalten gleichzeitig alle erwähnten Schwankungen.

Da nun die früheren Ergebnisse speziell am Chiemsee gezeigt hatten, daß auch im See verkehrende Dampfschiffe nicht nur die gleichen Erscheinungen der kurz dauernden Schwankungen verursachen,²⁾ sondern daß diese geringen Mengen kinetischer Energie der fahrenden oder stoppenden Dampfer an dem nämlichen Orte auch dieselben Periodendauern auslösen, wie der Wind,³⁾ so bietet die Beobachtung dieser sogenannten

¹⁾ Die Vibrationen etc., zit. S. 518, p. 50.

²⁾ A. Endrös, Seeschwankungen (Seiches), beobachtet am Chiemsee. Traunstein 1903, p. 101.

³⁾ Die Vibrationen etc., zit. p. 44.

„Dampfervibrationen“ ein viel günstigeres Mittel, das interessante Phänomen der Vibrationen der Seen weiter zu verfolgen. Man kennt hierbei nämlich nicht nur den Entstehungsort, sondern auch die Zeit der Entstehung und sogar die angenäherte Größe des wellenerregenden Impulses, die sich aus dem Tonnengehalt und der Fahrgeschwindigkeit ergibt, außerdem eilen diese langen Wellen den Oberflächenwellen der Dampfer voraus und es gelangen letztere bei größerer Entfernung überhaupt nur ganz schwach zum Beobachtungspunkte.

Zu den neuen Untersuchungen wurde der Ammersee ausgewählt, an dem die Seichesbeobachtungen des Herrn H. Ebert fortgesetzt wurden. Das ungewöhnlich ruhige Wetter des Sommers 1911 begünstigte die Vibrationsbeobachtungen derart, daß innerhalb eines Monats von 15 verschiedenen Punkten zum Teil ganz reine und interessante Limnogramme von Dampferstörungen erhalten wurden, während im darauffolgenden Sommer 1912 nicht eine günstige Beobachtung bei dem unruhigen Wetter gelang. Die Windvibrationen nämlich, die sich schon bei geringer Windstärke zeigen, überlagern die vom Dampfer herrührenden Wellen und machen das Limnogramm unbrauchbar. Aus diesem Grunde sind diesbezügliche Beobachtungen, wie schon Forel¹⁾ erwähnt, nicht leicht zu erhalten.

Die Beobachtungspunkte sind in der beiliegenden Tiefenkarte des Sees (siehe Tafel I), welche der verdienstvollen Arbeit von Herrn W. Ule²⁾ entnommen ist, eingezeichnet. Die gestrichelten Linien in der Karte zeigen die Kurse der im See verkehrenden Dampfer. Es verkehren regelmäßig zwei Schiffe (im Texte mit „Andechs“ bezeichnet), von denen das eine von Diessen am Südwestende, das andere von Stegen am Nordende ausgeht. Beide sind 40 m lang, 11 m breit und haben eine Wasserverdrängung von 130 Tonnen und eine Fahrge-

¹⁾ Forel, Le Léman II, p. 219.

²⁾ W. Ule, Studien am Ammersee. Landeskundliche Forschungen, Heft 1. München 1906.

schwindigkeit von 21 km pro Stunde. Manchmal verkehrt ein drittes Schiff „Gisela“, das 53 m lang und 13 m breit ist, einen Tonnengehalt von 210 Tonnen und eine Stundengeschwindigkeit von 22 km hat.

Die Beobachtungsergebnisse an den einzelnen Punkten.

Als Beobachtungsinstrumente wurden ein selbstregistrierendes transportables Limnimeter¹⁾ und ein Zeigerlimnimeter²⁾ benützt. Von Wichtigkeit ist bei der Beobachtung von Schwankungen kurzer Dauer die passende Wahl des Zuflusses, da, wie G. Chrystal auch theoretisch gezeigt hat,³⁾ die Schwingungen durch denselben nicht nur gedämpft werden sondern auch Phasenänderungen erleiden. Vor allem mußten die Oberflächenwellen der Dampfer ganz abgehalten werden; dadurch wurden aber auch die Vibrationen unter 0.3 Min. Dauer ganz abgedämpft, was zur Vermeidung zu komplizierter Kurvenbilder geradezu notwendig ist. Als Streifenfang wurde gewöhnlich ein solcher von 3 mm pro Minute und bei Nacht von 1 mm pro Minute benützt. Das zu Vergleichsbeobachtungen verwendete Zeigerlimnimeter ließ die Amplituden in fünffacher Vergrößerung ablesen. Die Beobachtungen mit diesem Instrumente gelangen im Gegensatze zu den früheren⁴⁾ sämtliche sehr gut, nachdem durch passende Regulierung des Zuflusses die störenden Schwankungen kürzester Dauer abgehalten wurden. Die Ablesungen des Wasserstandes erfolgten alle 10 Sekunden. Die Eigenschwingungen des Behälters, der gleichsam eine Bucht bildet, welche mit dem See durch den Zufluß kommuniziert, hatten beim transportablen Limnimeter eine Dauer von 0,3 Min. und beim

1) Vgl. die Beschreibung desselben in der Zeitschrift für Instrumentenkunde. Berlin 1904, S. 180.

2) A. Endrös, Seeschwankungen, beobachtet am Chiemsee. Traunstein 1903, S. 5.

3) G. Chrystal, Trans. R. Soc. Edinburgh, 45, II, No. 14, p. 373.

4) A. Endrös, Die Vibrationen der Seen, zit. S. 518, p. 30.

Zeigerlimnimeter eine solche von 0,5 Min. bis 0,06 Min. je nach Wahl des Zuflusses. Die Dauer läßt sich bei ruhigem See durch taktmäßiges Heben und Senken des Behälters leicht bestimmen, wobei die Wasserstandsschwankungen im Behälter am größten werden, wenn man mit dem Intervall der Eigenschwingungsdauer nahe kommt.

Auf diesem Wege gelang es, an 15 verschiedenen Küstenpunkten die Störungen des landenden oder vorbeifahrenden Dampfers zu registrieren. Eine Auswahl der erhaltenen Kurven gibt die Tafel II in den Fig. 1—14. Eine Hauptaufgabe war nun, aus den Linnogrammen die darin enthaltenen Wellen nach Periodendauer, Amplitude und Beginn der einzelnen Schwingungen herauszuschälen. Die Schwierigkeit einer genauen Bestimmung der Periodendauern ist hier besonders groß, da die Periodendauern nur klein sind und einander oft nahe kommen, ferner da die Anzahl aufeinanderfolgender Schwingungen nur gering ist und die Perioden und Amplituden rasch wechseln. Es gelang mir daher auch öfters erst bei einer zweiten und dritten Durcharbeitung des Kurvenmaterials weniger hervortretende Schwingungen herauszufinden. Eine exakte Analyse der Linnogramme durch die Chrystalsche Restmethode¹⁾ war nämlich nur bei wenigen Kurvenbeispielen möglich und zwar nur bei solchen, die nach den Ablesungen mit dem Zeigerlimnimeter in vergrößertem Maßstab gezeichnet werden konnten und dazu keine raschen Änderungen der Amplituden enthielten. Unter den erwähnten Umständen war daher nur selten eine genauere Periodendauermessung als auf $\pm 0,1$ Min. zu erreichen.

Die Ergebnisse der Kurvenanalyse sind im folgenden ausführlich mitgeteilt, da auf Einzelheiten der Kurven und der einzelnen Schwingungen, wie Zeitpunkt der Entstehung, Periodendauer, Anzahl der aufeinanderfolgenden Schwingungen, Amplituden und Reihenfolge der ankommenden Wellen wiederholt in der Ausführung Bezug genommen werden muß. Zudem

¹⁾ G. Chrystal, An investigation of the seiches etc., zit. S. 517, 45. II. No. 14, p. 382.

liegt in der Literatur bis jetzt keine so eingehende Analyse der Limnogramme von Vibrationen vor. An der Hand der beigegebenen Kurven können außerdem die Ergebnisse der Vermessung von wichtigen Einzelheiten nachgeprüft werden.

I. Fischen.

In Fischen (1), der südöstlichsten Haltestelle des Dampfers am Ostufer des Sees, stand das transportable Limnimeter etwa 20 m südlich des Dampfersteiges vom 29. August 11²⁰ bis 30. August 9²². Der verwendete Streifengang betrug 1 mm pro Minute. In die Beobachtungszeit fällt eine dreimalige Landung des Dampfers, wovon ein Kurvenbeispiel (Tafel II, Fig. 1) mitgeteilt ist. Die Schiffe landen am Ende des 185 m langen Steges, wo die Wassertiefe nur 2 m beträgt. Die Tiefe nimmt rasch ab und beträgt in 100 m Uferabstand nur 0,5 m. Die Uferlinie ist gegen den See zu konkav, so daß sich eine flache Bucht dort befindet. Die Störung des Dampfers beginnt hier plötzlich mit einer Stoßwelle von 80 mm Doppelamplitude, von der das Limnimeter nur 50—60 mm verzeichnete und der mehrere Schwingungen verschiedener Periodendauer folgen, welche nach zwei Stunden unmerklich werden.

Die Messungen im einzelnen sind in folgender Tabelle enthalten, wobei unter „Schiff“ der Name desselben sowie die Fahrzeiten nach dem Kursbuche, unter „Beginn“ der Zeitpunkt des Beginnes der Schwingung, unter „*T*“ die gemessene Schwingungsdauer in Minuten, unter „*n*“ die Anzahl aufeinanderfolgender Schwingungen, unter „*a*“ die größte Amplitude in Millimeter, gemessen vom höchsten bis zum tiefsten Punkte, steht, wobei „+“ bedeutet, daß die Schwingung mit Steigen, und „—“, daß sie mit Fallen des Wasserstandes beginnt, ferner „±“, daß durch Steigen und verstärktes Fallen und „∓“ durch Fallen und darauffolgendes verstärktes Steigen die erste Welle beginnt.

Fischen (1).

Schiff	Be- ginn	T in Min.	"	a in mm	Bemerkungen
1. „Andechs“ 29. VIII.	2 ²⁰	2.0	9	+ 52	Die 2. Welle hat 14 mm Amplitude.
Diessen ab 2 ⁰⁵	2 ²⁰	3.0	6	- 10	Hierauf zeigt das Linnogramm ein aperi-
Fischen ab 2 ²⁰	2 ²⁰	1,5	4	14	odisches Fallen von
Wartaweil ab 2 ²⁷	2 ²⁵	0,75	4	5	8 Min. Dauer.
	2 ³¹	2.0	2	- 4	
	2 ³¹	1.0	6	4	
	2 ⁴⁰	1.0	6		
	2 ⁵²	3.0	25	3	Beginnt 32 Min. nach Abfahrt des Dampfers.
	2 ⁵⁸	1.5	2	1	
2. „Andechs“ 29. VIII.	6 ⁰⁴	2.0	4	+ 1	Vgl. Kurvenbeispiel
Wartaweil ab 6 ⁰⁰	6 ⁰³	2.5	1	+ 62	Tafel I, 1.
Fischen ab 6 ⁰⁸	6 ¹⁰	1,5	4		
Diessen an 6 ²²	6 ¹⁶	1.0	4		
	6 ²⁰	1.5	4	- 10	
	6 ²⁰	1.0	4		
	6 ³⁹	3.0	12	- 4	Beginnt wie oben 32 Min. nach Abfahrt.
3. „Andechs“ 30. VIII.					Dieselben Wellen wie in 1., wegen atmosphärischer Störung aber nicht zu messen.

2. Fischen-Nord.

Während das Linnimeter in Wartaweil (3) stand, machte ich mit dem Zeigerlinnimeter eine Vergleichsbeobachtung etwa 500 m nördlich Fischen (1), an dem Ufervorsprung, welcher die Bucht bei Fischen nach Norden begrenzt. Die Uferzone ist auch hier sehr seicht und bis 80 m Entfernung mit Schilf bewachsen. Das Schiff, von Diessen kommend, hatte eine Fahrtrichtung fast genau gegen den Beobachtungspunkt. Das Linnogramm zeigte aber keine Dampfervibrationen, sondern die Störungen beginnen erst zwei Minuten nach der Abfahrt von Fischen (vgl. Tafel II, Fig. 2). Nach leichtem Fallen des

Niveaus zeigt die Kurve eine aperiodische Stauwirkung von 10 mm Höhe, die nur von kleinen Wellen überlagert ist. Bei der Vorbeifahrt des Dampfers tritt eine plötzliche aperiodische Senkung von 50 mm von einer Dauer von $\frac{1}{2}$ Minute auf, erst hierauf zeigen sich Vibrationen, die allmählich eine Amplitude bis 6 mm aufweisen.

Fischen-Nord (2).

Schiff	Be- ginn	T in Min.	"	a in mm	Bemerkungen
Andechs 29. VIII.	8 ⁴²			— 8	Vgl. Fig. 2, Tafel I.
	8 ⁴³	9	1	+ 25	Vorausgehende leichte
	8 ⁴³	2,0	2	— 10	Undulationen von
	8 ⁴⁶	0,5	1	— 50	$\frac{1}{2}$ mm Amplitude.
	8 ⁴⁷	0,4	3	3	8 ⁵⁴ wurde die Beob-
	8 ⁵¹	1,0	4	6	achtung beendet.

3. Wartaweil.

Etwa 400 m nördlich der Haltestelle Wartaweil und 1600 m nördlich von Station 2 stand das Limnimeter vom 28. August 5⁰⁴ bis 29. August 10⁰³ und zwar zunächst, um die Knotenlinie einer Seichesschwungung aufzusuchen, weshalb ein langsamer Streifengang benützt wurde (20 mm = 1^h). Während der Vergleichsbeobachtung in Station 2 wurde ein rascher Streifengang eingeschaltet (1 mm = 1 Min.) und die in Fig. 3, Tafel II mitgeteilten Limnogramme von je einer Fahrt in beiden Richtungen erhalten. Die Uferlinie verläuft an der Beobachtungsstelle fast ganz geradlinig und die Uferzone ist nicht so seicht, wie an den meisten Beobachtungspunkten. Die Kurve hat hier und an der nächsten Station ein ganz anderes Aussehen, wie an anderen Punkten und läßt beim Vergleiche mit dem vorausgehenden Limnogramme schon erkennen, wie sehr die Störung von der Uferbeschaffenheit abhängt. Die Schwingungen nehmen nur allmählich an Amplitude ab und es treten regel-

mäßigere Schwingungen auf. Merkwürdig ist besonders, daß die Schwingungen längere Zeit nach Vorbeifahrt des Dampfers, etwa 12 Min. nachher, wieder an Amplitude zunehmen.

Wartaweil (3).

Schiff	Be- ginn	T in Min.	"	a in mm	Bemerkungen
1. „Andechs“ 29. VIII.	8 ³²	2,0	3	— 1	Vgl. Fig. 3a, Tafel II.
Diessen ab 8 ²⁵	8 ³²	1,0	3	+ 0,5	
Fischen ab 8 ³⁹	8 ⁴⁸	2,0	2	— 10	Vom Anhalten in Wartaweil.
Wartaweil ab 8 ⁴⁷	8 ⁵²	1,0	3	+ 35	Die „a“ nehmen zu 10, 20, 35.
Am Linnimeter 8 ⁵²	8 ⁵²	3,5	1	+ 10	
Herrsching an 9 ⁰⁵	8 ⁵⁴	1,5	9	25	
	9 ⁰⁵	1,0	4	1	
		1,5	8	3	a nimmt wieder zu.
2. „Andechs“ 29. VIII.	9 ²⁷	3,5	1	— 20	Vgl. Fig. 3b, Tafel II.
Herrsching ab 9 ¹¹		0,9	8	10	Langsam an Ampli- tude abnehmend.
Linnimeter 9 ²⁷	9 ³⁴	1,9	5	6	Von 3 mm auf 6 mm allmählich zuneh- mend.
Wartaweil ab 9 ²⁹	9 ⁴⁴	0,7	10	3	
Fischen ab 9 ³⁷		0,8	5	+ 8	
Diessen an 9 ⁵¹	9 ⁵⁰	1,5	4	+ 8	

Vom gleichen Schiffe und der gleichen Fahrtrichtung wie von 2 ist noch ein Linnogramm aufgezeichnet, aber bei lang-samerem Streifengange, weshalb sich die einzelnen Wellen nicht messen lassen. Doch ist deutlich zu ersehen, daß die nämlichen Perioden und gleichen Amplituden darin enthalten sind und in der gleichen Reihenfolge. Die ganze Störung des betreffenden Dampfers dauert 75 Min. und klingt in einer regelmäßigen Schwingung von 3,0 Min. Periodendauer in 13 aufeinander-folgenden Einzelschwingungen aus, also der gleichen Dauer, wie sie in Fischen (1) gefunden wurde und zwar zur selben Zeit, nur tags zuvor.

4. Wartaweil-Nord.

Zum Vergleiche mit dem in Herrsching (5) aufgestellten Linnimeter beobachtete ich am 26. August etwa 400 m nördlich Wartaweil (3) mit dem Zeigerlinnimeter. Das Ufer weist hier eine schwache Ausbuchtung auf. Die Tiefe ist am Ufer sehr gering, in 70 m Entfernung betrug sie erst 0,5 m. Die Störung des Dampfers, der in südnördlicher Richtung parallel zum Ufer etwa 150 m entfernt den Punkt passierte, gehört wegen der fast reinen Schwingungen zu den interessantesten Linnogrammen, die ich überhaupt gesehen habe (vgl. Fig. 4, Tafel II). Dem Dampfer voraus eilen 3 Wellen von rund 0,7 Min. Periodendauer und zwar kommt die letzte mit einer Amplitude von 20 mm zugleich mit dem Dampfer an. Gleichzeitig beginnt das Niveau zu fallen und fällt in 0,8 Min. um 15 mm, wodurch eine reine Schwingung von nahe 1,6 Min. Periodendauer entsteht, deren Amplitude die ungewöhnliche Höhe von 34 mm erreicht. Nahe 4 Min. nach Vorbeifahrt des Dampfers setzt eine neue Schwingung mit Fallen des Wasserstandes ein und verstärkt die Amplitude der ersten Schwingung auf 45 mm. Die neue Welle hat eine etwas größere Dauer von 1,9 Min. und bildet mit der ursprünglichen Schwingung eine schöne „Schwebung“, wobei auf sechs Perioden à 1,6 Min. fünf solche von 1,9 Min. kommen. Durch Anwendung der Chrystalschen Restmethode konnte ich noch eine verborgene Schwingung von 1,0 Min. Dauer finden in 12 aufeinanderfolgenden Schwingungen. Die Ergebnisse der Analyse seien in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

4. Wartaweil-Nord.

Schiff	Be- ginn	T in Min.	n	a in mm	Bemerkungen
„Andechs“ 26. VIII.	8 ⁵¹	0,7	3	4	Vgl. Fig. 4, Tafel II.
Wartaweil ab 8 ⁴⁷	8 ^{52,5}	1,6	12	— 34	Die einfachste bisjetzt erhaltene Kurve.
Linnimeter 8 ⁵³	8 ⁵⁷	1,9	8	— 20	
Herrsching an 9 ⁰⁵		1,0	12	6	

5. Mühlfeld.

Zum Vergleich mit den in Herrsching auftretenden Vibrationen wurde eine gleichzeitige Beobachtung mit dem Zeigerlimnimeter, etwa 150 m seewärts der Mühle und 700 m vom Limnimeter in Herrsching (7) entfernt, angestellt. Das Ufer hat hier eine leichte konvexe Krümmung gegen den See zu und die 5 Meter-Isobathe tritt nahe an das Ufer heran, so daß auch das Schiff dem Ufer sich bis 100 m nähern kann.

Die hier erhaltene Kurve, welche mit der gleichzeitig vom Limnimeter verzeichneten über der nämlichen Zeitabszisse in Fig. 5a mitgeteilt ist, hat eine sehr unregelmäßige Form; es folgen nämlich nur wenige Schwingungen der nämlichen Dauer aufeinander und die Dauern und Amplituden wechseln rasch in ihrer Größe. Unter den Schwingungen ist eine von größerer Periodendauer, von etwa 3,3 Min., verborgen — in der Kurve gestrichelt —, welche auch in Herrsching zu erkennen ist. Im zweiten Teile überlagern sich die Wellen zweier Dampfer, des abfahrenden Süddampfers und des ankommenden Norddampfers.

Mühlfeld (5).

Schiff	Be- ginn	T in Min.	"	a in mm	Bemerkungen
„Andechs“ 28. VIII.	8 ⁵⁵	0,8	4	2	
Wartaweil ab 9 ⁴⁷	9 ⁰⁰	1,0	2	± 30	Zuerst Steigen + 11, dann Fallen — 19.
Limnimeter 9 ⁰⁰	9 ⁰⁰	0,7	3	8	
Herrsching an 9 ⁰⁵	9 ⁰³			2	Fast ruhiges Niveau.
Herrsching ab 9 ⁰⁷	9 ⁰⁴	0,4	4	— 11	
„Diessen“	9 ⁰⁴	3,3	4	4	Von kürzer dauernden überlagert.
Utting ab 8 ³²	9 ⁰⁹	1,0	2	+ 15	
Herrsching an 9 ⁰⁹	9 ¹⁴	0,5	5	— 26	
		1,1	4	8	

6. Herrsching-Südecke.

Nachdem die Schwingungen in Herrsching (7) gefunden waren, war es von Interesse, die gleichzeitig in der 200 m davon entfernten Südostecke des Herrschinger Winkels auftretenden Wellen zu beobachten, besonders um die Breitenausdehnung der Vibrationen zu finden. Da aber dort sich Anschwemmungen befanden, welche durch die Oberflächenwellen des Dampfers aufgewühlt wurden und so in den Behälter drangen, füllte sich der untere Teil desselben so damit, daß der Schwimmer bei stärkerer Abwärtsbewegung aufstand. Aus der Kurve kann man aber dennoch die Periodendauern der Wellen größerer Dauer messen. Die Kurve ist über die gleiche Zeitabszisse der Herrschinger Beobachtung Nr. 7 gezeichnet. Vgl. Fig. 6 a.

Herrsching-Südecke (6).

Schiff	Be- ginn	T in Min.	"	a in mm	Bemerkungen
„Andechs“ 28. VIII.	7 ⁴⁰	3,0	1	(-) + 36	Ankunft der Oberflächenwellen 1,6 Min. nach der 1. Störung.
Riederau ab 7 ²⁴	7 ⁴³	1,1	8	+ 8	
Limnimeter 7 ⁴⁰	7 ⁴³	0,7	5	4	

7. Herrsching.

In Herrsching war der erste Aufstellungsort des Limnimeters 400 m südlich des Dampfersteges, wo es vom 26. August 6⁵³ bis 29. August 2¹⁰ über 20 Dampferstörungen verzeichnete. Leider sind die Kurven nur zum Teil für eine Diskussion geeignet, da dort jedesmal zwei Schiffe, der Nord- und Süddampfer, nahe gleichzeitig ankommen und nach 5 bis 10 Min. wieder abfahren. Wenn der Süddampfer vorher ankommt, sind die Limnogramme einfacher, da derselbe am Südufer der Bucht von Herrsching entlang fährt und etwa 250 m vom Ufer entfernt einen Bogen beschreibt, um parallel zum Ostufer an den Steg zu fahren. Die Wassertiefe nimmt hier rascher zu als

an dem vorausgehenden Punkte und beträgt in etwa 30 m Entfernung bereits 1 m. Die Dämpfung der Schwingungen erfolgt daher langsam, wie die beigegebenen Kurvenbeispiele zeigen (vgl. Fig. 5 b, 6 b und 7). Neun Linnogramme sind vermessen worden. Der Einfachheit halber ist hier in der Tabelle der Beginn einer Welle derart angegeben, daß die Zeit vor der Ankunft des Schiffes am Linnimeter mit „—“, die nach derselben mit „+“ ausgedrückt ist.

Herrsching (7).

Schiff	Be- ginn	T in Min.	n	a in mm	Bemerkungen
	Minuten				
1. „Andechs“ 26. VIII.	— 18	1,0	5	+ 1	
	— 9	1,6	4	+ 2	
von Holzhausen 5 ²⁹	0	0,8	7	± 10	
von Riederau 5 ³²	+ 7	0,8	8	± 18	
	+ 20	0,7	6	3	
		0,6	3	2	
	+ 36	1,5	4	5	
2. „Andechs“ 27. VIII.	0	0,5	6	4	
7 ³⁹ von Holzhausen		1,3	6	8	
	+ 4	0,8	3	+ 18	
	+ 8	0,7	13	12	
	+ 12	1,2	5	4	
3. „Andechs“ 9 ⁰²	— 25	0,8	3	+ 2	Fig. 7, Tafel II.
27. VIII. 12.	— 16	0,5	3	± 1	
von Wartaweil 9 ⁰⁴	— 13	0,9	13	— 2	
von Holzhausen 9 ⁰³	0	2,2	4	+ 10	
		0,8	4	5	
4. „Gisela“ 10 ¹⁰	+ 2	0,7	10	10	Am Sonntag verkehrt
von Holzhausen	— 15	1,6	3	+ 1	der große Dampfer
28. VIII.	— 6	1,5	4	— 5	„Gisela“.
	0	0,4	3	+ 4	Das Linnimeter wurde
	+ 2	0,7	6	— 12	an die Punkte 8, 9
					und 10 gebracht.
5. „Andechs“ 28. VIII.	— 17	2,0	6	∓ 3	5. Nach der Beobach-
von Holzhausen 6 ⁵⁹	0	1,0	4	+ 13	tung in 8, 9 und 10.
		0,7	4	10	Streifengang 1 mm =
	+ 6	1,0	10	1	1 Min.

Schiff	Be- ginn	T in Min.	n	a in mm	Bemerkungen	
6. „Gisele“ 28. VIII. von Riederau 8 ⁰⁹	Minuten					
	-- 32	1,6	7	+ 1		
	-- 20	1,5	10	+ 5		
	0	3,0	1	+ 31	Die übrigen Schwin- gungen sind bei dem Streifengang nicht zu messen.	
	0,7	12	12			
7. „Andechs“ 29. VIII. von Riederau 7 ⁴⁰	0	1,0	1	- 12	Vgl. die gleichzeitige Beobachtung in Sta- tion 6. Fig. 6 b, Tafel II.	
	+ 1	0,6	6	+ 15		
	+ 2	1,1	3	3		
	+ 8	0,6	3	+ 3		
8. „Andechs“ 29. VIII. von Wartaweil 9 ⁰²	+ 9	1,1	5	2		
	-- 12	1,0	2	- 1	Vgl. die gleichzeitige Beobachtung in Sta- tion 5.	
	-- 9	0,8	4	- 2		
	-- 4	0,7	2	+ 1	Fig. 5 b, Tafel II.	
	0	2,0	2	+ 11		
	0	0,7	3	- 3		
	+ 2	1,0	9	+ 12		
	+ 5	0,7	5	- 17		
	9. „Andechs“ von Holzhausen 11 ⁴⁰ von Riederau 11 ⁴⁴	+ 8	0,4	5	5	
			0,7	8	12	
		+ 15	1,5	4	- 5	
+ 16		0,7	3	+ 6		
+ 17		0,4	3	+ 4		
+ 27		0,8	5	- 1		
- 4		0,8	5	1		
0		1,0	4	11		
+ 4		0,6	9	17		
+ 14	0,6	3	12			
+ 16	0,8	4	20			

8. Herrsching-Nord.

Am 28. August, einem windstillen, klaren Tage, wurde das transportable Limnimeter an den folgenden drei Punkten nacheinander aufgestellt, um die Dampferstörungen an möglichst verschiedenen gelegenen Punkten zu erhalten. In Herrsching-Nord, das an der nordöstlichsten Stelle des Herrschinger Win-

kels liegt, wurde von 4^{27} bis 5^{49} beobachtet. Bei Beginn der Beobachtung zeigten sich nur ganz schwache Undulationen von $\frac{1}{4}$ bis $\frac{3}{4}$ mm Höhe, obwohl der Dampfer um 4^{00} erst von Herrsching nach Diessen abgefahren war. Erst als die beiden Dampfer, die um 5^{30} in Herrsching ankommen, in die Bucht einfuhren, zeigten sich deutliche Vibrationen von 3 mm Höhe, die sich etwa 5 Min. nach Landen des ersten Dampfers auf 10 mm steigerte. Die Schwingungen sind dabei regelmäßig und haben längere Zeit gleiche Amplitude (vgl. Fig. 10).

Herrsching-Nordostecke (8).

Schiff	Be- ginn	T in Min.	"	" in mm	Bemerkungen
„Andechs“					
1. 4^{00} ab Herrsching	4^{27}	2,3	3	0,5	Von 4^{27} bis 5^{19} nur leichte Undulationen, welche auch von lokalem Winde herrühren können.
4^{26} ab Diessen	4^{42}	0,7	3	0,5	
4^{39} ab Riederau	4^{44}	1,1	3	0,5	
4^{54} ab Utting	4^{47}	0,8	3	0,25	
2. 4^{53} ab Diessen	5^{02}	0,8	3	0,5	Vgl. Fig. 10, Taf. II. Vom heranfahrenden Dampfer.
5^{00} ab St. Alban	5^{19}	1,2	6	0,25	
5^{11} ab Riederau	5^{30}	0,5	3	1	
5^{32} an Herrsching		1,5	7	1	
3. 5^{01} ab Utting	5^{32}	0,7	3	1	
5^{08} ab Holzhausen	5^{34}	0,6	3	0,5	
5^{29} an Herrsching		0,8	5	2	
	5^{41}	0,5	3	4	
	5^{43}	1,0	2	10	
		0,8	6	8	

9. Lochschwab.

Unmittelbar vor der Beobachtung in Punkt 8 wurden die Vibrationen an dem Ufervorsprung bei Lochschwab beobachtet und zwar von 2^{19} bis 3^{37} . Der Beobachtungspunkt befindet sich 100 m seewärts von der dort befindlichen Badeanstalt. Das Ufer ist sehr seicht, so daß in 100 m Entfernung vom Ufer 40 cm Tiefe gemessen wurde. Dieser Punkt wurde

gewählt, weil sich an dem Ufervorsprung keine stehenden Wellen bilden konnten und deshalb die wirklichen Periodendauern der ankommenden Wellen sich bestimmen lassen mußten. Die erhaltene Kurve zeigt auch wirklich nur immer zwei bis drei bis vier aufeinanderfolgende Wellen der gleichen Periodendauer, welchen solche anderer Periode folgen. Wir werden darin im See fortschreitende Wellen erkennen, welche an dem Ufer reflektiert werden. Außerdem finden sich hier lange vor Ankunft eines Dampfers (31 Min.) deutliche Vibrationen (vgl. Fig. 8, Tafel II).

Lochschwab (9).

Schiff	Be- ginn	T in Min.	"	a in mm	Bemerkungen
„Andechs“					
1. 205 ab Diessen	219	1,1	4	2	
219 ab Fischen	236	0,7	3	+ 5	Vgl. Fig. 8, Tafel II.
227 ab Wartaweil	239	0,5	6	1	
	243	0,8	3	3	
245 an Herrsching	247	2,0	1	— 6	245 Passieren des
300 ab Herrsching	250	3,0	5	— 18	Dampfers.
321 ab Holzhausen		1,0	3	— 7	
329 an Utting		0,5	5	6	
2. 221 ab Utting	253	0,6	4	5	
229 ab Holzhausen	301	0,9	2	2	
		0,7	2	4	
250 an Herrsching	320	2,0	3	8	
300 ab Herrsching	327	3,0	2	3	
321 ab Riederau	335	0,5	4	1	
332 St. Alban					

10. Ried.

Vor der Beobachtung in Lochschwab war das Linnimeter in der leichten Seeausbuchtung bei Ried, etwa 1800 m nördlich Lochschwab, aufgestellt. Die Vermutung, daß die Uferstelle die Entstehung stehender Schwingungen begünstigt ähnlich Wartaweil-Nord, hat sich nicht bestätigt. Es zieht sich

nämlich ein unterseeischer Rücken vom Ufervorsprung von Lochschwab aus etwa 500 m weit in den See, der bei dem tiefen Sommerwasserstand stellenweise bis 20 cm unter Wasser sich erhebt. Hinter dem Rücken erreicht die Tiefe wieder 5 m. Die Bucht selbst ist sehr seicht, so daß mit dem Kahne nicht gelandet werden konnte. In dieser unregelmäßigen Gestaltung der Uferzone, die die Ulesche Karte auch ersehen läßt, ist jedenfalls der Grund zu suchen, daß die Wellen des Dampfers so schwach auftreten und nur in wenigen aufeinanderfolgenden Wellen am Ufer reflektiert werden, ohne stehende Schwingungen auszulösen (vgl. Fig. 9, Tafel II).

Ried (10).

Schiff	Be- ginn	<i>T</i> in Min.	"	<i>a</i> in mm	Bemerkungen
1. 11 ¹¹ ab Utting	11 ²¹	1,5	3	+ 2	Fig. 9.
11 ¹⁹ ab Holzhausen	11 ²⁵	0,5	5	+ 1	
11 ⁴⁰ an Herrsching	11 ²⁷	1,3	3	+ 1,5	
11 ⁵⁰ ab Herrsching	11 ⁴³	3,0	2	+ 3	
12 ¹¹ ab Riederau	11 ⁵⁵	1,1	3	+ 5	Dampfer von Holz- hausen.
2. 11 ¹² ab St. Alban		3,0	2	+ 4	Dampfer von Riederau.
11 ²³ ab Riederau	12 ⁰⁵	0,7	3	+ 5	
11 ⁴⁴ an Herrsching		0,7	3	+ 2	
11 ⁵² ab Herrsching		0,5	4	0,5	
12 ¹³ ab Holzhausen					

II. Utting.

Während das Linnimeter in Stegen (14) stand, beobachtete ich mit dem Zeigerlinnimeter in der Ausbuchtung südlich von Utting gleichzeitig den Wasserstand und zwar am 31. August 11¹⁰ bis 11⁴². Die Vibrationen, die der von Utting nach Holzhausen quer durch die 1½ km breite Ausbuchtung fahrende Dampfer auslöste, sind hier interessant wegen der regelmäßigen Schwingung von 2,5 Min. Dauer, die beim Vorübergang des Dampfers durch Fallen entsteht (vgl. Fig. 12 a).

Utting (II).

Schiff	Be- ginn	T in Min.	n	a in mm	Bemerkungen
„Andechs“	11 ¹³	0,5	1	+ 13	Um 11 ¹³ fährt der
11 ⁰⁷ an Utting	11 ¹⁴	2,5	6	— 6	Dampfer an der Be-
11 ¹¹ ab Utting		1,25	4	— 5	obachtungsstelle
11 ¹⁹ an Holzhausen		0,7	5	3	vorbei in einer Ent-
	11 ¹⁹	0,7	12	2	fernung von 250 m
	11 ²¹	0,5	10	1	und 30 Sek. nachher
					beginnt die Störung.

12. Breitbrunn.

Die Beobachtungen dieser Station sind den wertvollen Linnogrammen entnommen, welche Herr Professor Dr. H. Ebert mittels eines Sarasinschen Linnimeters im Herbst 1904 erhalten hatte und mir gütigst zur Verfügung gestellt hat. Das Linnimeter stand etwa 200 m nördlich vom Landungssteg. Der Streifengang betrug 1 mm pro Minute. Von besonderem Interesse ist hier einmal der große Unterschied der Störungen der Dampfer, welche von Schondorf kommen und derjenigen, welche von Utting ankommen (vgl. Fig. 12 a und b). Ferner sind die verschiedenen Störungen der Schiffe „Gisela“ und „Andechs“ sehr schön verzeichnet (vgl. Fig. 12 a und c). Endlich finden sich deutliche Wellen, welche dem Dampfer bis 45 Min. vorangehen und nach Abfahrt entstehen. Der Zeitpunkt der Entstehung der einzelnen Schwingungen ist von der Ankunft der ersten Stoßwelle aus angegeben, so daß die negativen Zahlen der folgenden Tabelle die Anzahl der Minuten vor, die positiven nach der Ankunft des Dampfers bedeuten.

Breitbrunn (12).

Schiff	Be- ginn	T in Min.	"	a in mm	Bemerkungen
„Andechs“					
1. 10 ¹⁰ ab Stegen	— 9	1,2	5	+ 1	1. X. 04. 10 ⁵⁵ .
10 ²⁵ ab Buch	0			+ 46	Kleinere Wellen.
10 ⁴⁰ ab Schondorf	+ 15	1,2	12	2	
11 ⁵⁵ ab Breitbrunn	+ 17	1,1	2	— 3	
11 ¹⁰ ab Utting					
11 ⁵⁵ an Herrsching					
2. 6 ³⁰ ab Stegen	— 18	1,2	6	+ 6	
6 ⁴⁵ ab Buch	— 7	1,0	4	13	
7 ⁰⁰ ab Schondorf					Durch auftretende
7 ¹⁵ ab Breitbrunn					Windwellen undeut-
7 ³⁰ ab Utting					lich.
3. (Wie 1.)	— 45	1,1	4	3	2. X. 04. 10 ⁵⁰ .
„Gisela“	— 32	1,2	5	— 0,5	Vgl. Fig. 12 c.
	— 24	1,0	1	+ 2	
	— 21	1,7	3	— 4	
		0,8	8	2	
	— 14	1,7	1	+ 8	
	— 13	1,2	1	8	
	— 10	0,75	4	8	
	— 8	1,7	2	2	
	0			+ 100	
	+ 1	1,2	5		
	+ 15	1,3	7	— 4	
	+ 23	1,1	5	— 3,5	
	+ 32	1,7	3	+ 3	11 ²⁵ ab Riederau.
	+ 51	1,5	4	+ 1,5	
4. „Gisela“	— 32	1,0	5	— 2	2. X. 04. 4 ⁵⁰ .
4 ⁰⁵ ab Stegen	— 23	1,7	6	— 5	
4 ²⁰ ab Buch	— 11	1,1	6	+ 10	
4 ³⁵ ab Schondorf	— 6	1,3	4	3	
4 ⁵⁰ ab Breitbrunn	— 0			+ 135	
5 ⁰⁵ ab Utting	+ 5	1,2	5	— 14	
5 ³⁰ an Herrsching	+ 12	0,75	4	— 6	
	+ 16	1,0	5	— 3	
	+ 22	1,2	5	+ 7	
	+ 35	1,7	10	— 3	

Schiff	Be- ginn	T in Min.	n	a in mm	Bemerkungen
5. „Andechs“ (wie 3)	— 13	0,8	3	+ 2	2. X. 04. 6 ¹⁶ .
	— 7	1,7	2	+ 1	Vgl. Fig. 12 a.
	0			+ 77	
	+ 2	0,8	4	15	
	+ 12	1,2	5	5	
	+ 21	1,4	10	+ 5	
		1,2	10		
	+ 35	1,0	4	+ 2	
	+ 41	1,5	5	2	
	+ 50	2,0	3	— 1	
6. (Wie 4.)	+ 17	0,8	5	— 1	11. X. 04. 4 ⁵⁵ .
	+ 17	1,2	6	+ 1	
7. Von Utting	0			+3: -5	
	+ 2	1,1	2	15	29. IX. 04. 6 ²⁵ .
	+ 4	0,6	2	7	
	+ 12	1,0	4	1	
	+ 15	1,2	2	1	
	+ 23	1,2	4	+ 2	
8. „ „	— 17	1,5	5	+ 2	1. X. 04. 9 ⁰⁰ .
	0			— 10	
	+ 12	1,2	5	2	
	+ 15	1,2	2	+ 2	
	+ 22	1,5	2	— 1	
9. „ „	— 12	1,2	5	1	2. X. 04. 12 ³⁰ .
	0			+2, -5	
	+ 15	1,4	6	+ 1	
	+ 40	0,6	4	1	
10. „Gisela“ „ „	— 5	1,0	5	1	2. X. 04. 9 ¹⁵ .
	0			— 17	
	0	0,8	6	— 9	
	+ 12	1,0	5	4	
	+ 14	1,4	10	+ 3	
	+ 46	1,0	3	+ 1	
11. „ „	0			— 10	3. X. 04. 6 ²⁵ .
	+ 17	0,9	6	2	
	+ 40	1,6	1	— 1	
12. „ „	0			± 16	4. X. 04. 9 ⁰⁰ .
	+ 14	1,2	3	+ 1	
	+ 22	1,4	3	— 2	

Schiff	Be- ginn	T in Min.	"	a in mm	Bemerkungen
13. Von Utting	0			- 8	4. X. 04. 6 ²⁵ .
	+ 15	1,1	2	+ 3	
	+ 16	1,6	2		
	+ 40	1,2		+	
14. " "	+ 0			- 14	10. X. 04. 6 ¹⁵ . Vgl. Fig. 12 b.
	+ 14	0,8	3		
	+ 16	1,4	4	+ 3	
	+ 17	0,8	10	- 2	
	+ 23	0,8	3	+	

13. Schondorf.

Unmittelbar vor der Beobachtung in Utting (11) von 8⁵² bis 9⁵⁷ wurde ungefähr 200 m nördlich des Landungssteiges von Schondorf mit dem Zeigerlimnimeter die Störung des von Utting über Schondorf nach Buch fahrenden Dampfers beobachtet, während das Linnimeter in Stegen aufgestellt war. Die Kurve weist die kleinste Amplitude sämtlicher Dampfer-vibrationen auf und eine deutliche Uferschwingung von größerer Dauer, welche mit der Abfahrt des Dampfers von Schondorf beginnt (vgl. Fig. 11 b, Tafel II).

Schondorf (13).

Schiff	Be- ginn	T in Min.	"	a in mm	Bemerkungen
9 ³² ab Utting	9 ⁴⁶	0,5	2	+ 1	Die Wellen von der Landungsstelle sind unmerklich.
9 ⁴⁶ ab Schondorf	9 ⁴⁷	0,5	5	+ 2	
9 ⁴⁷ ab Linnimeter	9 ⁴⁷ / ₂	2,2	3	- 4	
9 ⁵⁷ ab Buch		1,0	5	1	

14. Stegen.

Das transportable Linnimeter war in Stegen am Nordende des Sees etwa 50 m östlich des Landungssteiges vom 30. August bis 30. September 1911 zunächst zur Beobachtung der Seiches

aufgestellt. Es wurde daher gewöhnlich ein langsamer Streifengang von 1 mm = 3 Min. verwendet. Nur zur Registrierung der Dampfervibrationen wurde ein rascherer Streifengang von 1 mm = 1 Min. und 3 mm = 1 Min. eingeschaltet. Die Wassertiefe betrug an der Landungsstelle 2 m, nahm gegen den Aufstellungspunkt des Limnimeters rasch ab und war in 50 m Entfernung nur 30 cm. Wir haben hier die charakteristische Störung des landenden Dampfers, wie wir sie in Fischen schon erhalten haben. Mit dem Nahen des Dampfers kommt eine mächtige Stoßwelle an, welche stehende Uferschwingungen von jedesmal derselben Dauer auslöst. Da die Amplituden der Seiches am Nordende stets groß sind, so sind die vorauslaufenden Wellen selten zu erkennen. Die nachfolgenden Vibrationen werden durch die Abfahrt des Dampfers, welche gewöhnlich nach 10 bis 15 Min. erfolgt, gestört, wobei neue Vibrationen erzeugt werden. Bei der Abfahrt wendet der Dampfer in einer Entfernung von 200 m, wodurch abermals neue Schwingungen ausgelöst werden. (Vgl. Fig. 13 a, Fig. 14 a und b, Tafel II).

Stegen Limnimeter (14).

Schiff	Be- ginn	T in Min.	"	a in mm	Bemerkungen
1. „Andechs“ 31. VIII.	10 ⁰⁷	1,7	4	+ 56	
10 ⁰⁷ an Stegen	10 ¹⁴	1,5	4	5	Streifengang 1 mm =
10 ¹⁸ ab Stegen	10 ²⁰	1,6	5		1 Min. Fig. 14 a.
10 ²⁰ wendet		1,7	3	10	
	10 ⁴⁷	2,0	4	3	
	11 ¹⁰	2,0	6	2	
2. „Andechs“ 31. VIII.					
12 ⁴⁷ ab Schondorf	12 ²⁰	1,7	2	3	
12 ⁵⁸ ab Buch	12 ⁴⁰	1,5	4	2	
1 ⁰⁸ an Stegen	12 ⁵⁵	1,7	5	6	
1 ²⁵ ab Stegen	1 ⁰⁸	1,7	4	+ 60	
		2,0	3		
	1 ²⁷	1,0	3		
		1,1	7		
	1 ³⁰	1,7	3	12	

Schiff	Be- ginn	T in Min.	"	a in mm	Bemerkungen
3. <u>10⁰⁷</u> an Stegen	<u>10⁰⁷</u>	1,7	5	+ 60	9. IX. 11; Streifengang
<u>10¹⁸</u> ab Stegen	<u>10¹⁰</u>	0,7	3	4	3 mm = 1 Min.
	<u>10¹⁵</u>	2,3	3	5	S. gleichzeitig in 15.
	<u>10²³</u>	2,0	2	12	
4. <u>1⁰⁷</u> 2. IX.	<u>1⁰⁷</u>	5,5	6	10	Streifengang 3 Min. = 1 mm.
<u>4¹⁰</u> 2. IX.	<u>4⁰⁵</u>	5,4	6	10	Streifengang 3 Min. = 1 mm.
<u>9³⁸</u> 2. IX.	<u>9³⁸</u>	6,0	6	8	Die Wellen kürzerer
<u>9³⁸</u> 4. IX.	<u>9³⁸</u>	5,6	9	5	Periodendauer sind nicht zu messen.
<u>9³⁸</u> 10. IX.	<u>9³⁸</u>	5,5	3	5	Diese Schwingung ist bei dem langsamen
<u>9³⁸</u> 25. IX.	<u>9³⁸</u>	5,5	6		Streifengänge und deutlich nur beim
<u>9³⁸</u> 26. IX.	<u>9³⁸</u>	5,5	6		letzten Dampfer des Tages zu messen.

15. Stegen (Bucht).

Zwischen dem Aufstellungsorte des Linnimeters und dem Damme zum Dampfersteg befindet sich ein kleiner, wellengeschützter Hafen für die Fischerkähne. Diese abgeschlossene, viereckige Bucht ist rund 20 m lang und 60 m breit und durch einen 3 m breiten Eingang mit dem See verbunden. Außerhalb der Bucht ist die Einfahrt etwa 40 m weit in den See hinaus auf beiden Seiten durch Pfähle gegen Wellengang gesichert. Das Ganze bildet daher eine kleine Bucht, die durch die Einengung in zwei Teile abgeschnürt ist. An dieser Einschnürung fielen mir die periodischen Strömungen auf, welche auf Eigenschwingungen dieser Bucht schließen ließen. Ich beobachtete daher in derselben mit dem Zeigerlinnimeter und später einmal mit dem registrierenden Linnimeter die Dampferstörungen. Die erhaltenen Kurven ergaben ganz andere Schwingungen als sie gleichzeitig an dem nur 40 m entfernten Linnimeter aufgezeichnet wurden.

Stegen Bucht (15).

Schiff	Be- ginn	T in Min.	"	a in mm	Bemerkungen
„Andechs“					Zeigerlimnimeter. Fig. 13 a.
1. 10^{07} an Stegen	10^{07}	2.00	4	+ 100	9. IX. 11. Pegelstand
10 ¹⁸ ab Stegen	10^{09}	0.7	5	10	+ 26 cm.
	10^{09}	3,6	3	15	
		2,0	2	20	
2. 10^{08} an Stegen	10^{08}	2,0	2	+ 80	Transportables Limni-
„Andechs“		3,0	4	16	meter, 30. IX. 11,
		2,0	4	12	3 mm = 1 Min., Pegelstand + 33 cm.
					Gleichzeitig atmo- sphärische Störun- gen.

16. Stegener Pegel.

In Stegen befindet sich seit Juni 1911 ein selbstregistrierender Pegel, System Albrecht, des Hydrotechnischen Bureaus. Der Vorstand des Bureaus, Herr Ministerialrat Hensel, hat mich auf die Aufzeichnungen des Pegels aufmerksam gemacht und mir dieselben gütigst zur Verfügung gestellt, wofür ich auch an dieser Stelle ergebensten Dank sage. Diese enthalten schöne Seiches und zugleich ist jeder ankommende Dampfer mit seiner Stoßwelle aufgezeichnet. Da aber der Streifengang des Schreibpegels nur 2 mm pro Stunde beträgt, sind die Seichedauern nur schwer zu bestimmen, die Vibrationen daher nur in der Höhe der ersten Stoßwelle zu messen. Die Höhe schwankt zwischen 120 mm und 300 mm, je nachdem die Schiffe an der Ostseite des Steges in einer Entfernung von 30 m vom Pegel oder an der Westseite in einer Entfernung von 15 m anlegen. Die Störungen des Dampfers Andechs sind hierbei 120 mm und 240 mm und die des Dampfers Gisela 160 mm und 300 mm.

Die Periodendauern nach

Periodendauer in Min.	5.5	3.6	3.3	3.0	2.5	2.3	2.2	2.0	1.9	1.8	1.7	1.6												
n Anzahl der Schwingungen. r der Reihen	n	r	n	r	n	r	n	r	n	r	n	r												
1. Fischen				37	2			14	2															
2. Fischen-Nord								2	1															
3. Wartaweil				13	1			6	2	5	1													
4. Wartaweil-Nord										8	1	12												
5. Mühlfeld			3	1																				
6. Herrsching-Süd																								
7. Herrsching							4	1	8	2		10												
8. Herrsching-Nord						3	1																	
9. Lochschwab				7	2			4	2															
10. Ried				2	2																			
11. Utting						6	1																	
12. Breitbrunn											32	5												
13. Schondorf								3	1															
14. Stegen Bucht		3	1	4	1			12	4															
15. Stegen Limni- meter	27	6				6	1	15	4	8	2	18	5	9	2									
Summa	27	6	3	1	3	1	59	7	6	1	9	2	7	2	61	17	13	2	8	2	50	10	31	5
Anzahl der Sta- tionen	1		1	1	5	1	2	2	2	7	1	1	2	2										3
Anzahl der Reihen		6	1	1	7	1	2	2	7	17	2	2	10											5

Zusammenstellung der Periodendauern.

Das reichhaltige, komplizierte Beobachtungsmaterial, wie es die Kurvenanalyse ergeben hat, ordnen wir nach der Größe der gefundenen Periodendauern, wie ich es schon bei den Vibrationen der Seen¹⁾ getan habe, um einen Überblick über die Gesamtzahl der aufgetretenen Schwingungen und über die Anzahl von Schwingungen an den einzelnen Punkten zu be-

¹⁾ Die Vibrationen etc., zit. S. 518, p. 34 ff.

der Grösse geordnet.

1,5		1,4		1,3		1,2		1,1		1,0		0,9		0,8		0,7		0,6		0,5		0,4		Zahl der Perioden	Beobachtungen
n	r	n	r	n	r	n	r	n	r	n	r	n	r	n	r	n	r	n	r	n	r	n	r		
17	4									20	4					4	1							5	6
										4	1											3	1	3	1
25	3									10	3	8	1			10	1							6	2
										12	1					3	1							4	1
								5	1	4	2			4	1	3	1		5	1	4	1	7	2	
								5	1							5	1						2	1	
4	1			6	1	8	2	3	1	21	4	13	1	28	7	91	13	15	3	13	3	11	3	13	9
7	1					6	1	3	1	2	1			11	3	6	2		6	2			8	1	
						4	1	3	1					4	1	3	1	4	1	11	2		8	2	
				3	1			3	1							6	2		9	2		6	2		
				4	1											17	2		11	2		4	1		
19	4	10	1	7	2	106	15	22	5	32	7	13	3	23	4	10	2	3	1				11	12	
						5	1																3	1	
																5	1					4	2		
4	1							7	1	3	1					3	1						10	9	

79	15	10	1	20	5	125	20	52	12	111	25	34	5	70	16	166	29	22	5	62	15	18	5	
<u>7</u>		1	4		4	<u>8</u>		<u>10</u>		3	5			5		<u>13</u>		3		<u>7</u>		3		
	15	1	5		20		12		25		5		16				29		5		15		5	

kommen, ferner um das Vorkommen der nämlichen Schwingungen an den verschiedenen Stationen und die Häufigkeit des Auftretens an bestimmten Punkten vergleichen zu können. in der obigen Tabelle steht unter „n“ die Anzahl der an der nämlichen Station beobachteten Wellen der betreffenden Periodendauer und unter „r“, wie viele Reihen solcher Schwingungen gemessen werden konnten.

Im ganzen sind sonach 24 verschiedene Periodendauern gefunden worden, welche in etwa 200 Reihen mit im

ganzen 1000 Einzelschwingungen auftraten. Berücksichtigt man aber, daß die Messungen auf Zehntelminuten abgekürzt sind, daß also die Periodendauern in derselben Rubrik voneinander etwas verschieden sein können, so ist die Anzahl der Schwingungen eine sehr große. Dabei sind die Schwingungen unter 0,4 Min. ganz weggeblieben. Aus der unter der Tabelle bei jeder Periodendauer angefügten Zahl von Stationen, an denen die betreffende Schwingung beobachtet wurde, erkennt man, daß bestimmte Periodendauern, wie diejenige von 0,7 Min., von 1,1 bis 1,0 Min., 2,0 Min., 1,5 Min. und 0,5 Min., an mehr als der Hälfte der Beobachtungspunkte auftraten, dagegen andere Schwingungen, wie diejenige von 5,5 Min., 3,6 Min., 3,3 Min., 2,5 Min., 1,9 Min., 1,8 Min. und 1,4 Min., nur an einer einzigen Station gefunden wurden. Das ganz lokale Auftreten dieser Schwingungen muß daher in der Uferbeschaffenheit des betreffenden Beobachtungspunktes bei sonst gleichem Verhalten des Dampfers seine Ursache haben. Und in der Tat lassen sich diese isoliert auftretenden Wellen übereinstimmend als stehende Uferschwingungen deuten, wobei am Ufer selbst der Schwingungsbauch und parallel zum Ufer in bestimmter Entfernung, die von der Periodendauer abhängt, der Schwingungsknoten sich befindet. In den häufig beobachteten Schwingungen dagegen müssen wir fortschreitende Wellen großer Länge suchen, die vom Schiffe selbst oder von schwingenden Uferstellen ausgehen und im See hin- und herlaufen, wobei sie an den Ufern reflektiert werden.

Stehende Uferschwingungen.

Beim Studium der Vibrationen des Chiemsees konnte ich auch an freigelegenen Stationen bestimmte, kurzdauernde Schwankungen beobachten, welche mit einer Regelmäßigkeit und Häufigkeit auftraten, daß man an Seiches denken mußte.¹⁾ Eine solche Regelmäßigkeit hatten auch manchmal die Vibrationen in Morges am Genfersee, weshalb Forel die Vibrationen

¹⁾ Die Vibrationen, zit. S. 518, p. 38.

überhaupt für mehrknotige Seiches hielt. Wie nun aus der kurzen Dauer dieser Schwingungen geschlossen werden muß, hätten diese Seiches bis 20 Knoten und mehr. Ich konnte aber an anderer Stelle zeigen, daß schon mehr als sechsknotige Seiches in regelmäßigen Seen zu einer Seltenheit gehören, weil die Entwicklung so vieler aufeinanderfolgender Wellen von gleicher Periode, wie sie zur Bildung stehender Wellen des ganzen Beckens notwendig wären, ganz regelmäßige, periodische Impulse voraussetzt, wie sie in der Natur wohl kaum einmal vorkommen.¹⁾ Einzelne Störungen eines Wasserniveaus erzeugen nur wenige aufeinanderfolgende Wellen gleicher Periode. Bei diesbezüglichen Experimenten an einem Weiher bei Freising erhielt ich bei einmaligem Impulse 1 bis 4 aufeinanderfolgende Wellen, von denen die letzten häufig nicht mehr die gleiche Periodendauer hatten. Nur bei taktmäßigen Störungen waren Seiches von höherer Knotenzahl zu erzeugen. Gegen die Annahme von so vielknotigen Längs- und Querseiches sprechen auch die Beobachtungsergebnisse an korrespondierenden Punkten des nämlichen Sees, wo die nämlichen Vibrationen gleichzeitig nie auftraten, sondern immer andere lokale Schwingungen.

Die große Regelmäßigkeit, mit der diese Schwingungen zeitweise an offenen Küstenpunkten auftraten, und die langsame Abnahme der Amplituden aufeinanderfolgender Schwingungen wiesen mich schon bei den Vibrationsbeobachtungen am Chiemsee auf die Vermutung hin, daß wir in diesen Schwingungen stehende Wellenbewegungen suchen müssen, analog den Resonanzschwingungen von Buchten, wie ich sie an den Buchten des Chiemsees und im Experimentierbecken beobachten konnte.²⁾ Auch wenn einer Wassermasse die seitliche Begrenzung fehlt, wie sie das Wasser in einer Buclit hat, kann sie ihre Eigenschwingungen haben, deren Entstehung durch besondere lokale Konfigurationen, wie konkave Uferlinie, Vorhandensein einer

¹⁾ Die Vibrationen. zit. S. 518, p. 24.

²⁾ Ebenda, p. 36.

tiefere Rinne, plötzliche Änderung der Tiefe u. a. m., besonders begünstigt sein kann. Diese meine Vermutung findet nun durch die Beobachtungen der Dampfvibrationen am Ammersee eine Bestätigung, indem die obengenannten, nur lokal auftretenden Schwingungen sich übereinstimmend als solche Resonanzschwingungen ergeben.

Da aber bei solchen Uferschwingungen die Lage des Knotens nicht durch Vergleichsbeobachtungen aufgefunden werden kann, wie es bei den Seiches und den eigentlichen Buchtenschwingungen möglich ist, so ist man auf die theoretische Berechnung der Periodendauer für bestimmte Lagen der Knotenlinie angewiesen. Nun versagen aber hier alle bisher verwendeten Annäherungsformeln, in welchen die mittlere Tiefe der schwingenden Fläche vorkommt, da die Breitenausdehnung der beteiligten Wasserfläche nicht bekannt ist. In gleicher Weise kann auch die exakte Chrystalsche Theorie auf unsere Uferschwingungen nicht angewendet werden, da sich die sogenannte Normalkurve nicht konstruieren läßt, wie bei abgeschlossenen Seen und Buchten. Das ganze Auftreten dieser Schwingungen deutet vielmehr darauf hin, daß man die nämliche Wasserbewegung vor sich hat wie bei den vollständigen Querschwingungen in Seen, wo also die Schwingungsbewegungen der Wasserteilchen in derselben Querschnittsebene vor sich gehen. Man darf daher, wie dort, die Breite als konstant annehmen und die Berechnungen an dem Profil senkrecht zur Uferlinie des Beobachtungspunktes vornehmen. Falls dieser Schnitt sich an eine Parabel annähern läßt, wie das Profil des Golfes von Alaska (siehe Tafel I, Fig. 6), so darf man nur die Länge l in Meter, das ist der vermutliche Abstand des Knotens vom Ufer, und die Tiefe h an dieser Stelle messen und erhält dann die Dauer T in Sekunden nach der Chrystalschen Formel¹⁾ für ein symmetrisch parabolisches Becken:

¹⁾ G. Chrystal, On the hydrodynamical theory of seiches. Trans. R. Soc. Edinburgh 1905, 41, III, p. 622 und 638.

$$T = \frac{2\pi l}{\sqrt{2gh}} = 0,709 \frac{2l}{\sqrt{h}} \text{ (Sek.)} \quad \text{I}$$

und bei geradlinigem Talwege, wie beim Profil von Schondorf und Utting (siehe Tafel I, Fig. 2 und 3), ist:

$$T = \frac{4\pi l}{2,405 \sqrt{gh}} = 0,834 \frac{2l}{\sqrt{h}} \text{ (Sek.)} \quad \text{II}$$

Unsere Formel I gibt sehr gute Annäherungen für die Hauptschwingung stark konkaver Seen, besonders wenn der Knoten mit der breitesten und tiefsten Stelle des Sees zusammenfällt, wie ich an anderer Stelle gezeigt habe.¹⁾ In gleicher Weise erhält man sehr brauchbare Werte für die Dauern von Buchtenschwingungen, wenn die größte Breite und Tiefe an die Mündung der Bucht fällt, was bei der Mehrzahl der Buchten auch der Fall ist. So hat G. Platania²⁾ nach unserer Formel I für die Schwingung der Bucht von Mazzara an der Südwestküste Siziliens eine ebenso gute Annäherung erhalten, wie durch die mühsamen Berechnungen an der sogenannten Normalkurve nach der exakten Chrystalschen Theorie. Der Grund ist, daß das Uferprofil sich wirklich einer Parabel nähert, wie Fig. 5, Tafel I zeigt. Nach meinen Berechnungen paßt genannte Formel auch für die Mehrzahl der japanischen Buchten und gibt besonders auch raschen Aufschluß, ob eine bestimmte Lage des Knotens für eine beobachtete Dauer möglich ist, da verschiedene Lagen der Knoten bei manchen Buchten angenommen werden können. Endlich ist die parabolische Annäherung besonders geeignet zur Berechnung der Dauer der Querseiches, so daß sich in allen mir bekannten Fällen die berechnete Dauer vollständig mit der beobachteten deckt. Die gute Übereinstimmung ist, wie schon oben kurz erwähnt, theoretisch dadurch begründet, daß der Querschnitt der Seen gewöhnlich

¹⁾ Zusammenstellung der Hauptseichesperioden. Petermanns Mitteilungen 1908, Heft II, p. 45.

²⁾ G. Platania, Oscillazioni del mare nelle coste di Sicilia. Modena 1911, p. 46.

parabolische Form hat (vgl. den Querschnitt bei Schondorf, Tafel I, Fig. 2) und an einer Querschwingung eine Wassermasse von nahe überall konstanter Breite teilnimmt, also die Bewegung der Wasserteilchen nur in der Querschnittsebene vor sich geht. Auch bei unseren stehenden Uferschwingungen kann nur eine Wassermasse von bestimmter Breite teilnehmen, so dass die Querschnitte dieser schwingenden Wassermassen überall gleiche Breite und Tiefe haben, also der ideale Fall von Chrystals Theorie vorliegt, in dem der See konstante Breite und überall rechteckigen Querschnitt hat, ganz wie bei den Querseiches. Ist ein parallel laufendes Gegenufer vorhanden, so können unsere Uferschwingungen auch in Querseiches übergehen; in einem solchen speziellen Falle können die Vibrationen also Querseiches sein, wie Forels Hypothese annimmt. Während aber die ganzen Querschnitte von Seen sich sehr gut an eine Parabel annähern lassen und daher ihre uninodale Seichedauer sich nach Formel I berechnen läßt (vgl. Tafel I, Fig. 2), nähern sich die Querschnittskurven an den Ufern, den sogenannten Schelfen, erfahrungsgemäß mehr einer geneigten Geraden. Es muß daher die Formel II bessere Annäherungen für die Dauern solcher Uferschwingungen geben; bei größerer Entfernung des Knotens vom Ufer oder Vorhandensein einer Rinne nur wird die Dauer mehr dem Formelwert I entsprechen, sie wird somit gewöhnlich zwischen beiden Werten bleiben müssen. In Fällen, wo das Profil sich über die gerade Linie stark erhebt (vgl. Fig. 4, Tafel I), wird die Dauer auch nach Formel II zu klein werden.

Die im folgenden näher besprochenen Einzelbeobachtungen von Uferschwingungen am Ammersee tragen einmal die deutlichen Kennzeichen von stehenden Schwingungen an sich, nämlich es folgen mehrere Schwingungen gleicher Periode aufeinander und die Amplituden derselben nehmen regelmäßig ab. Außerdem konnte ich die Entstehung derselben persönlich beobachten und Lage und Entfernung des die Schwingungen auslösenden Dampfers bestimmen. Es ergibt sich übereinstimmend bei allen folgenden Uferschwingungen, daß der Knoten genau

in einer Entfernung vom Ufer zu suchen ist, in der das Schiff den Beobachtungspunkt passiert. Es entstehen sonach die Schwingungen dadurch, daß das Schiff eine horizontale Bewegung des Wassers senkrecht zum Ufer auslöst, ganz ähnlich, wie es sich aus den Versuchen im Experimentierbecken und im Weiher ergeben hatte, wo ein horizontaler Impuls an der Stelle eines Schwingungsknotens am leichtesten die betreffende Schwingung erzeugt.¹⁾

Am Ammersee waren folgende Uferschwingungen am deutlichsten zu beobachten:

1. Die 2,5 Minuten-Schwingung in Utting (11) (vgl. Tafel II, Fig. 11 a). Diese Schwingung beginnt 30 Sek. nachdem das Schiff den Beobachtungspunkt passiert hat, und klingt in sechs aufeinanderfolgenden Wellen aus. Der Dampfer ist nahe 250 m vom Ufer entfernt und die Tiefe an dieser Stelle beträgt nach der Uleschen Karte (Profil VII) nahe 7 m (vgl. Tafel I, Fig. 3), so daß für $l = 250$ m, $h = 7$ m die Formel I 2,2 Min. und die Formel II 2,6 Min. ergibt, also eine gute Annäherung nach Formel II. Die Entstehung einer Uferschwingung ist hier begünstigt durch die konkave Uferlinie zwischen Utting und Holzhausen. Da die Schwingung mit Fallen des Niveaus beginnt, wird das Wasser am Knoten zuerst ostwärts gegen den See zu bewegt, obwohl das Schiff fast parallel zum Ufer fährt.

2. Die 2,2 Minuten-Schwingung in Schondorf (13) (vgl. Tafel II, Fig. 11 b). Auch diese Schwingung beginnt etwa 30 Sek. nach Vorbeifahrt des Schiffes und mit Fallen des Niveaus und hat langsam abnehmende Amplitude. Das Schiff fuhr ziemlich steil vom Ufer weg und hatte am Beobachtungspunkte eine Entfernung von ungefähr 400 m, wo sich eine Tiefe von 25 m befindet. Es berechnet sich sonach für $l = 400$ m, $h = 25$ m $T_I = 1,9$ Min. und $T_{II} = 2,2$ Min. Das Querschnittsprofil läßt sich auch wirklich sehr nahe durch eine gerade Linie ersetzen, wie aus Fig. 2, Tafel I zu ersehen ist.

Da Ost- und Westufer hier fast parallel laufen, so kann

¹⁾ Die Vibrationen etc.. zit. S. 518, p. 23.

die obige Schwingung sich auch an das Gegenufer fortsetzen und nach der Reflexion die ganze Breite des Sees einnehmen. Die uninodale Querseiche an dieser Stelle berechnet sich aus dem Querprofil Fig. 2, Tafel I für $l = 2400$ m, $h = 50$ m nach I zu 4,0 Min. und ist an dieser Stelle auch wirklich zu 4,06 Min. beobachtet. Aus der parabolischen Form des Querschnittes berechnet sich nach Chrystal die binodale Querseiche zu 2,3 Min. Dauer, so daß die vom Dampfer ausgelöste Schwingung hier wirklich auch Querseiche im Sinne Forels sein kann.

3. Die 1,6 Minuten-Schwingung in Wartaweil-Nord (4). Die mit dem Vorübergang des Schiffes an der Beobachtungsstelle beginnende Schwingung von 1,6 Min. Periodendauer hat eine ungewöhnlich große Amplitude und tritt in 12 aufeinanderfolgenden Schwingungen auf mit regelmäßig abnehmender Amplitude (Tafel II, Fig. 4). Die rasche Abnahme der Amplitude in dem Linnogramm ist verursacht durch Überlagerung der 1,9 Minuten-Schwingung, welche mit ersterer eine sogenannte Schwebung bildet. Das Schiff fuhr in einer Entfernung von nahe 150 m an einer Tiefe von 5 bis 6 m parallel zum Ufer, in der Richtung von Süden nach Norden. Die parabolische Annäherung ergibt für $l = 150$ m, $h = 5,5$ m 1,50 Min. und die Formel II 1,70 Min., also die beobachtete Dauer. Die große Amplitude von 33 mm ist jedenfalls in der Nähe des Schiffes, der Seichtheit der Uferzone und vielleicht der guten Schwingungsfähigkeit derselben begründet, da dort eine deutliche, wenn auch flache Ausbuchtung sich befindet. Außerdem braucht das Schiff entsprechend seiner Fahrtgeschwindigkeit ungefähr die halbe Periodendauer, um an der Bucht entlang zu fahren und wenn die Zeit der Einwirkung der Störung der halben Periodendauer gleich ist, so ist die Amplitude am größten, wie G. Chrystal am Earnsee beobachtet und auch theoretisch begründet hat¹⁾ und ich selbst bei den Versuchen am Fischweiher bei der Erregung langer Wellen zeigen konnte.²⁾ Wie

¹⁾ G. Chrystal. An investigation of the seiches of loch Earn III, IV, V. Trans. R. Soc. Edinburgh 1908, S. 487 und S. 502.

²⁾ Die Vibrationen etc., zit. S. 518, p. 23.

in Utting beginnt auch hier die Schwingung mit Fallen des Seespiegels, jedoch im Gegensatz zu den Schwankungen in Utting und Schondorf schon 0,5 Min. bevor das Schiff den Ort passiert. Dieser Umstand spricht für die Vermutung, daß die ganze Bucht in dem Takte schwingt und die Amplitude erhöht wird durch das Vorbeifahren in 0,8 Min., der halben Periodendauer der Uferschwingung.

Erst vier Minuten nach Vorübergang des Dampfers beginnt die zweite Schwingung von 1,9 Min. Dauer ebenfalls mit Fallen des Seespiegels und bildet mit der vorhandenen eine schöne Schwebung (Fig. 4). Diese Schwingung ist auch stehende Uferschwingung, wie das regelmäßige Abnehmen der Amplitude schließen läßt. Doch ist die Lage der Knotenlinie nicht bekannt, auch läßt sich die nachträgliche Entstehung dieser Welle zu einer Zeit, wo das Schiff bereits in die Herrschinger Bucht eingebogen hat, schwer erklären. Am wahrscheinlichsten ist, daß die Uferschwingung in Wartaweil (3), welche dort die gleiche Periodendauer hat, nach Norden sich ausdehnt oder auch ans Westufer sich fortpflanzt und dort reflektiert nach dieser Zeit an unseren Punkt kommt.

4. Die 1,7 Minuten-Schwingung am Limnimeter in Stegen. Die häufigste und regelmäßigste Schwingung in Stegen (Limnimeter) hat eine Dauer von 1,7 Min. und regelmäßig abnehmende Amplitude (Fig. 14 a). Sie wird durch die Stoßwelle des Dampfers beim Landen ausgelöst. Ihre Dauer berechnet sich ebenfalls gut aus den obigen Formeln. Die Entfernung des heranziehenden Dampfers ist rund 100 m, die Tiefe dort 2 bis 3 m, so daß $T_I = 1,5$ Min. und $T_{II} = 1,70$ Min. sich berechnet.

5. Die Schwingungen der Bucht in Stegen (Fig. 13 b). Die künstlich geschaffene Bucht in Stegen bot die günstige Gelegenheit eigentliche Buchtenschwingungen zu beobachten, welche vom Dampfer ausgelöst werden. Schon der Umstand, daß an dem nur 40 m entfernten Aufstellungspunkt des Limnimeters die in der Bucht beobachteten Schwingungen nicht auftraten, zeigt, daß wir Eigenschwingungen der Bucht vor uns

haben. Die Schwingung von 3,7 Min. Dauer kann nur die uninodale Buchtenschwingung sein, mit einem Knoten an der Mündung der Bucht, das ist der Beginn der Zufahrt zu derselben. Die Länge l ist 70 m, die Tiefe war bei dem niedrigen Wasserstand nur 20 bis 30 cm, so daß sich für $l = 70$ m und $h = 0,25$ m $T = 3,4$ Min. berechnet. Die Abnahme der Dauer bei Zunahme des Wasserstandes um 7 cm auf 3,0 Min. entspricht auch gut den veränderten Dimensionen $l = 70$ m, $h = 0,32$ m, woraus sich $T = 2,9$ Min. berechnet.

Eine zweite Schwingung von 2,0 Min. Dauer wurde als Oberschwingung mit einem Knoten an der inneren Einengung aus der starken Strömung an dieser Stelle direkt beobachtet. Unsere Formel ist für diese Form der Buchten nicht brauchbar. Ich habe bei starker Einengung am Knoten Chrystals Formel für konvex parabolische Becken mit Erfolg benützt,¹⁾ welche lautet:

$$T = \frac{\pi l}{\sqrt{2,77 \cdot g \cdot h}} = \frac{2l}{\sqrt{h}} \cdot 0,603, \quad \text{III}$$

wobei l die Länge der Bucht in Metern und h die mittlere Tiefe des kleinsten Querschnittes an der Einengung bedeuten. Die Länge der Bucht ist 20 m, die mittlere Tiefe etwa 10 cm, woraus sich 1,5 Min. berechnet, ein Wert, der übereinstimmend mit den früheren Ergebnissen (für Plattensee, Chiemsee etc.) zu klein ist, besonders da die Tiefe von der Einengung bis gegen das Ende der Bucht nicht zunimmt, wie die Theorie verlangt. Diese Schwingung hatte bei dem um 7 cm höheren Wasserstand fast die gleiche Dauer.

Die dritte in der Bucht noch beobachtete Schwingung hat eine Dauer von 0,7 Min. Da die Welle durch die starke Einengung nicht als fortschreitende Welle in die Bucht dringen kann, so muß sie eine Eigenschwingung der inneren Bucht sein, welche sich aus $2l = 18$ m und $h = 0,10$ m nach der parabolischen Annäherung zu 0,67 Min. berechnet. Die beobachteten

¹⁾ Petermanns Mitteilungen 1908, Heft 2, S. 46.

Schwingungen der Bucht zeigten sich auch bei Wind, wie ich hier noch bemerken möchte.

6. Die 3,0 Minuten-Schwingung in Fischen (1). Der Dampfersteg ist in Fischen 185 m lang, die Tiefe an der Landungsstelle 2,0 m; hieraus berechnet sich die Dauer der Uferschwingung mit dem Knoten an der Störungsstelle zu 3,08 Min. An dieser Station tritt auch wirklich eine Schwingung von dieser Dauer (3,0 Min.), verursacht durch die Störung des Dampfers, auf und ist die regelmäßigste und am längsten anhaltende Schwingung, da 25 Wellen zu messen waren (Fig. 1). Zu beachten ist, daß auch hier eine flache Ausbuchtung des Sees ist, an deren Ende das Linnimeter stand. Solche Ausbuchtungen begünstigen nicht nur die Entstehung solcher Schwingungen, wie wir in Wartaweil-Nord und Utting gesehen haben, sondern machen die Schwingungen stabiler als an geradlinigen Uferstellen. Diese Schwingung tritt am nächsten Tage unmittelbar nach Landen des Dampfers in Fischen auch in Wartaweil auf, woraus vielleicht folgt, daß die 3,0-Schwingung nicht auf den Seeteil beschränkt bleibt, sondern sich einem größeren Teile des Sees mitteilt. Die Schwingungsunterteilung läßt sich aber nicht näher angeben.

7. Die 5,5 Minuten-Schwingung in Stegen (14) (vgl. Tafel II, Fig. 14 b). — Diese Schwingung ist aus sieben Kurvenbeispielen mit langsamem Streifengange deutlich zu messen und ist verursacht durch den dort landenden Dampfer. Während diese Schwingung aus den Störungen der während eines Tages fünf- bis achtmal ankommenden Dampfer nur zweimal zu messen ist und da nur bei ruhigem Wetter, findet sie sich fünfmal nach der Ankunft des letzten Dampfers um 9³⁸ abends. Die Schwingung scheint darnach durch den abfahrenden Dampfer wieder vernichtet zu werden. Jedenfalls ist es sehr merkwürdig, daß eine Schwingung von so großer Dauer von den Dampfern ausgelöst wird. Daß die Schwingung eine stehende Schwingung ist, sieht man aus der größeren Zahl (bis 9) aufeinanderfolgender Wellen mit regelmäßig abnehmender Amplitude (vgl. Fig. 14 b). Nach dem Vorausgehenden ist es auch

möglich, daß der von Buch kommende Dampfer beim Passieren der Knotenlinie dieser Schwingung dieselbe auslöst. Die Schwingung müßte aber dann vor Ankunft des Dampfers beginnen, was nicht der Fall ist. Eine zweite Möglichkeit ist, daß der Abfluß des Sees, die Amper, von der Landungsstelle bis zum Stauwehr in Schwingung versetzt wird. Dieser Teil, als Bucht betrachtet, gibt auch ungefähr bei der parabolischen Annäherung eine Periodendauer von 4 bis 6 Min., je nach Annahme des Knotens. Durch eine Vergleichsbeobachtung am Wehr selbst müßte sich die Frage entscheiden lassen.

8. Die übrigen regelmäßigen Schwingungen der einzelnen Stationen. Außer den im vorausgehenden Kapitel besprochenen Schwingungen tritt noch eine große Zahl Vibrationen an den einzelnen Beobachtungspunkten so regelmäßig und in längeren Reihen auf, daß man auch in diesen Wellen stehende Uferschwingungen suchen muß. Da aber in diesen Fällen die Lage des Knotens nicht angegeben werden kann, weil keine näheren Beobachtungen über den Zeitpunkt der Entstehung, die Entfernung des Schiffes und die genauen Tiefen der betreffenden Uferstellen vorliegen, können diese Schwingungen nicht näher diskutiert werden. Ich stelle die beobachteten Perioden nur in folgender Tabelle nach der Größe geordnet zusammen und füge unter jeder Beobachtung neben „ n “ die größte Anzahl aufeinanderfolgender Einzelwellen und unter $T_n : T_1$ das Verhältnis der Periodendauer zu derjenigen der größten dort beobachteten Dauer an. Die Periodendauern, welche in weniger als fünf aufeinanderfolgenden Wellen auftraten, sind weggeblieben, da wir sie gewöhnlich als fortschreitende Wellen betrachten müssen, wie wir im nächsten Kapitel sehen werden.

Die Verhältnisse der Schwingungsdauern zur Hauptschwingungsdauer in den beiden Stationen Herrsching und Breitbrunn, wo längere Beobachtungsreihen vorliegen, lassen erkennen, daß ein Ufer in den verschiedensten Periodendauern schwingen kann, daß also der Schwingungsknoten in jede beliebige Entfernung vom Ufer fallen kann. Doch

Regelmässige Schwingungen.

Fischen	$T =$	3,0	2,0	1,5	1,0				
	$n =$	25	9	5	12				
	$T_n : T_1$	1	0,67	0,5	0,33				
Wartaweil	$T =$	1,9	1,5	0,9	0,7				
	$n =$	5	8	8	10				
	$T_n : T_1$	1	0,8	0,5	0,37				
Wartaweil N.	$T =$	1,9	1,6	1,0					
	$n =$	8	12	12					
	$T_n : T_1$	1	0,84	0,53					
Herrsching	$T =$	2,0	1,6	1,5	1,3	1,0	0,9	0,7	
	$n =$	6	7	10	6	10	13	12	
	$T_n : T_1$	1	0,8	0,75	0,65	0,5	0,45	0,35	
Herrsching N.	$T =$	1,5	1,2	0,8					
	$n =$	7	6	6					
	$T_n : T_1$	1	0,8	0,53					
Utting	$T =$	2,5	1,3	0,7					
	$n =$	6	4	12					
	$T_n : T_1$	1	0,52	0,28					
Breitbrunn	$T =$	1,7	1,5	1,4	1,2	1,1	1,0	0,9	0,8
	$n =$	10	6	10	20	8	5	5	8
	$T_n : T_1$	1	0,88	0,82	0,7	0,64	0,6	0,53	0,47
Schondorf	$T =$	2,2	1,2						
	$n =$	3	5						
	$T_n : T_1$	1	0,55						
Stegen	$T =$	2,0	1,7	1,6	1,1				
	$n =$	6	5	5	7				
	$T_n : T_1$	1	0,85	0,8	0,55				
Stegen Bucht	$T =$	3,6	2,0	0,7					
	$n =$	3	4	5					
	$T_n : T_1$	1	0,56	0,2					

treten manche Schwingungen, wie aus der Tabelle S. 542 ersichtlich ist, an derselben Station viel häufiger auf, woraus sich ergibt, daß Uferstellen auf bestimmte Schwingungen gleichsam besser abgestimmt sind, was sich auch bei den Windvibrationen der Seen beobachten ließ.¹⁾ An Punkten, wo der Dampfer immer denselben Uferabstand hat, entstehen Kurvenbilder, die vollständig gleich sind, wie in Stock am Chiemsee.²⁾ Dagegen ändern sich die Linnogramme je nach der Entfernung des Schiffes vom Linnimeter, wie besonders in Herrsching bei den von Wartaweil, Riederau und Holzhausen kommenden Dampfern. Der auffallend große Unterschied der Dampferstörungen in Breitbrunn bei den von Schondorf und den von Utting ankommenden Schiffen, wobei durch letztere Wellen von sehr kurzer Periodendauer entstehen, erklärt sich daraus, daß in Breitbrunn das Schiff dem Ufer beim Landen am nächsten kommt, da der Landungssteg nur 50 m lang ist und daher nur Wellen kurzer Periodendauer entstehen, die sich bis zum Linnimeter fortpflanzen; dagegen hat das Schiff von Schondorf kommend eine Entfernung von etwa 200 m vom Linnimeter und löst daher Schwingungen längerer Periodendauer aus. Auch an den übrigen Stationen, an denen mehrere Kurvenbilder des nämlichen Dampfers vorliegen, sind dieselben nicht vollständig gleich, da je nach Windrichtung und Windstärke der Kurs der Schiffe etwas verschieden ist.

Die Frage, ob auch mehrknotige Uferschwingungen vorkommen, läßt sich aus unseren Beobachtungen nicht mit Sicherheit beantworten. Nach dem Verhältnisse der Periodendauern zu schließen, kann die 1,3 Minuten-Schwingung in Utting und diejenige von 1,2 Minuten in Schondorf erste Oberschwingung zur gleichzeitig auftretenden Hauptschwingung sein. Es muß bei dieser Oberschwingung ein Schwingungsbauch mit dem Knoten der Hauptschwingung zusammenfallen und der Knoten in weniger als der halben Entfernung vom Ufer liegen.

¹⁾ Die Vibrationen etc., zit. S. 518, p. 38.

²⁾ Seeschwankungen etc., zit. S. 519, p. 102.

Auch die 1.0 Minuten-Schwingung in Wartaweil-Nord kann erste Oberschwingung zu der 1,6 Minuten-Schwingung sein, da das Verhältnis $T_2 : T_1 = 0,63$ ist. Nach der Chrystalschen Theorie kann nämlich das Verhältnis variieren von 0,5 bei gleichmäßiger Tiefe bis 0,63 bei geradlinigem Profile, wenn wir von konvexen Profilen absehen. Größere Verhältnisse als 0,63 kommen in Seen vor, wenn der Knoten der Oberschwingung mit einer Einengung zusammenfällt, was auch bei Buchtenschwingungen vorkommen kann, ferner wenn das Uferprofil einer sogenannten Parabel vierten Grades sich nähert, wo dann die Oberschwingung gleiche Dauer wie die Grundschwingung haben kann, worauf ich bei dem Uferprofil von Catania zurückkommen möchte.

Da die drei genannten Schwingungen gleichzeitig mit ihrer Hauptschwingung auftreten, so ist die Annahme, daß in denselben erste Oberschwingungen beobachtet sind, nicht unmöglich. Doch kann der Nachweis hierfür durch Vergleichsbeobachtungen nicht erbracht werden. Es ist daher noch weniger möglich weitere Oberschwingungen zu diskutieren, obwohl auch Schwingungen vorkommen, deren Dauern im Verhältnis der trinodalen Oberschwingung stehen. Bemerket sei noch, daß eigentlich eine solche Schwingung nicht drei, sondern nur zwei Knoten besitzt und die erste Oberschwingung nur einen, da wir nur die Hälften von schwingenden Flächen vor uns haben.

Aus dem Vorausgehenden ist zu ersehen, daß die Periodendauern der stehenden Uferschwingungen gewöhnlich durch die Entfernung des Schiffes vom Ufer und die Konfiguration des Ufers bedingt werden. Es treten jedoch auch Resonanzschwingungen vor Ankunft des Schiffes und nach Passieren der Beobachtungsstelle auf. Diese werden durch ankommende Wellen, die fern von dem Punkte entstanden sind, ausgelöst und sind eigentlich Resonanzschwingungen, ähnlich denjenigen der Akustik. Auf diese Schwingungen werden wir bei den „fortschreitenden“ Wellen zurückkommen.

Vergleichsbeobachtungen an benachbarten Punkten.

Nachdem sich, wie wir im vorausgehenden gesehen haben, die Vibrationen eines jeden Punktes als ganz lokale Erscheinung erwiesen haben, ist es von Interesse zu untersuchen, wie groß die lokale Ausdehnung speziell der stehenden Uferschwingungen ist. Zu diesem Zwecke habe ich drei gleichzeitige Beobachtungen in benachbarten Punkten angestellt. Am nächsten liegen sich die beiden Beobachtungspunkte Stegen Linnimeter und Stegen Bucht; die Entfernung beträgt nur 40 m. Die gleichzeitigen Linnogramme sind in Fig. 13 a und 13 b auf Tafel II über die gleiche Zeitabszisse gezeichnet. Die Periodendauern der Schwingungen an beiden Punkten sind gleichzeitig ganz andere, worauf ich schon aufmerksam gemacht habe. Die Ursache ist hier das Vorhandensein einer Bucht, welche nur in ihren Eigenschwingungsdauern schwingen kann und Wellen anderer Periodendauer abhält. Merkwürdig ist nur, daß die Schwingung von 3,7 Min. Dauer, die ihren Knoten außerhalb der Bucht haben muß, sich am Linnimeter gar nicht zeigt. Eine weitere Vergleichsbeobachtung habe ich in Mühlfeld angestellt. einem Punkte, der noch im Herrschinger Winkel liegt, in einer Entfernung von 700 m von dem registrierenden Linnimeter. Die gleichzeitigen Kurven sind in Fig. 5 a und b, Tafel II über derselben Zeitabszisse mitgeteilt. An beiden Orten sind die zwei Schwingungen von 0,7 und 0,5 Min. vorhanden, aber nicht gleichzeitig; wir werden in diesen Schwingungen fortschreitende Wellen erkennen. Die übrigen Perioden sind verschieden. Dagegen scheint eine Schwingung längerer Dauer von etwa 3,3 Min. gleichzeitig an beiden Orten aufzutreten und am Linnimeter entgegengesetzte Phase zu haben. Da diese Schwingung so große Periodendauer hat, scheint sie sich über den ganzen Herrschinger Winkel auszubreiten und stehende Schwingung dieser ganzen Bucht zu sein. Doch läßt sich die Schwingungsunterteilung nicht näher angeben. Eine weitere Vergleichsbeobachtung zu dem Linnogramme in Herrsching habe ich in der nur 200 m entfernten Südecke dieses Winkels

angestellt (vgl. die beiden Linnogramme in Fig. 5, Tafel II); leider sind die Schwingungen kürzerer Dauer etwas gedämpft, da durch die Oberflächenwellen Anschwemmungen aufgewühlt wurden und in den Behälter drangen. Doch sind die Wellen noch gut zu messen. Darnach zeigt sich die regelmäßigste Schwingung dieser Ecke von 1,1 Min. auch am Linnimeter, hat aber dort entgegengesetzte Phase. Die regelmäßigste Schwingung am Linnimeter ist diejenige von 0,6 Min. Dauer, welche sich in der Ecke gleichzeitig nicht zeigt; dagegen tritt dort etwa $1\frac{1}{2}$ Min. später eine solche von etwas größerer Dauer von 0,7 Min. auf.

Soweit diese wenigen Beobachtungen eine Verallgemeinerung zulassen, breiten sich lokale Uferschwingungen auch über größere Flächen aus, wenn sie selbst größere Periodendauer haben und die Flächen abgegrenzt sind wie die Herrschinger Bucht. Es scheinen sich die Schwingungen auch dem Ufer entlang auszudehnen; es wäre dann darin der Grund zu erblicken, warum diese Schwingungen nicht so stabil sind, wie die Buchtenschwingungen, wo die Begrenzung eine seitliche Ausbreitung der Wellenbewegung unmöglich macht. Doch sind hier noch weitere Beobachtungen notwendig.

Fortschreitende Wellen.

Außer den regelmäßigen Schwingungen, die wir als stehende Schwingungen erkannt haben, finden sich an fast allen Beobachtungspunkten ganz unregelmäßige wellenförmige Störungen. Dieselben bestehen nur aus höchstens drei bis vier aufeinanderfolgenden Wellen, von denen selten die erste Schwingung die größte Amplitude hat, gewöhnlich die zweite und auch die letzte und deren Periodendauern manchmal nicht vollständig gleich sind, sondern in den letzten Wellen etwas kleiner werden. Die gleiche Beobachtung hatte ich an den Windvibrationen der freigelegenen Küstenpunkte der Seen gemacht und ich habe in diesen unregelmäßigen Wellen am Ufer aufstoßende und dort reflektierte Wellen großer Länge vermutet. Versuche an einer Wellenrinne und an einem Weiher bestä-

tigten, daß ein einzelner Impuls nur wenige aufeinanderfolgende Wellen erzeugt, die dann in dem Wasserbecken wiederholt hin- und herliefen, indem sie an den Enden und Seitenwänden reflektiert wurden.¹⁾ Auch der Umstand, daß diese unregelmäßigen Störungen in den Buchten der Seen fehlten und sich dort immer regelmäßige Schwingungen vorfanden, bestätigte die Annahme fortschreitender Wellen als Ursache dieser Störungen. In den Buchten lösen nämlich solche ankommende Störungen nur die Eigenschwingungen aus und werden selbst abgehalten in dieselben einzudringen, wenn sie nicht die gleichen Periodendauer wie die Eigenschwingungen haben, an freigelegene Uferpunkte jedoch können Wellen jeder Dauer gelangen, wo sie dann reflektiert werden. Da aber auch solche Uferstellen in stehende Schwingungen versetzt werden können und diese Schwingungen mit ihrer größeren Amplitude die fortschreitenden Wellen verdecken können, habe ich bei den Beobachtungen am Ammersee solche Uferpunkte ausgesucht, welche wegen der konvexen Form der Uferlinie keine Eigenschwingungen besitzen konnten, wo sich also die besprochenen Wellen deutlich zeigen mußten. Solche Punkte sind Lochschwab (9), Ried (10), Mühlfeld (5) und Fischen-Nord (2).

Das ganze Limnogramm in Lochschwab (Fig. 8, Tafel II) enthält nur solche unregelmäßige Wellen, bis auf eine Schwingung von 0,5 Min. Dauer, welche an dem seichten Uferstreifen noch stehende Uferschwingung sein kann, und eine verborgene Schwingung von größerer Dauer (3,0 Min.), die eine Seiche des ganzen Herrschinger Winkels sein dürfte. Am deutlichsten ist die Störung um $2^{\text{h}30}$, also 10 Min. vor Ankunft des Schiffes verzeichnet und hat das typische Aussehen solcher Wellengruppen. Die erste Welle beginnt mit Steigen und hat etwas kleinere Amplitude als die zweite Welle. Der dritten Welle, die zugleich die letzte dieser Gruppe ist, ist eine neu ankommende Welle von etwa 0,5 Min. Dauer aufgesetzt, die auch mit Steigen beginnt, aber in mehreren regelmäßigen

¹⁾ Die Vibrationen etc., zit. S. 518, p. 42, Fig. 10.

Schwingungen, wie es scheint, als stehende Schwingung ausklingt. Diese Wellen von 0,7 Min. und 0,5 Min. Dauer sind dabei zwei Wellen von größerer Periodendauer aufgesetzt, von etwa 2 Min. Periodendauer. So besteht das ganze Linnogramm aus lauter Gruppen von zwei bis drei, höchstens vier Wellen (siehe die Analyse auf S. 533), die sich zum Teil überlagern und eine komplizierte Interferenzkurve bilden. Im ganzen sind acht Wellen verschiedener Periodendauer sicher darin zu erkennen. Ferner sind im Linnogramme von Ried (10) (vgl. Fig. 9, Tafel II) zwei charakteristische Störungen der vorbeifahrenden Dampfer enthalten, auf welche nur schwache Undulationen folgen, so daß die eigentlichen Störungen so deutlich hervortreten. Zwei Wellen von nahe 3 Min. Dauer, wovon die zweite jedesmal größere Amplitude hat, werden von drei solchen kürzerer Dauer überlagert, welche das eine Mal 1,1 Min., das andere Mal 0,7 Min. Dauer haben. Ähnliche unregelmäßige Störungen finden sich noch deutlich im Linnogramme von Mühlfeld (Fig. 5, Tafel II) und demjenigen von Fischen-Nord (Fig. 2, Tafel II).

Wenn die an solchen konvexen, nicht schwingungsfähigen Uferstellen gefundenen Wellen nicht lokalen Ursprunges sind, sondern von im See fortschreitenden Wellen herrühren, dann müssen sich die dort gefundenen Periodendauern auch an anderen Uferpunkten zeigen. Und in der Tat finden sich die speziell in Lochschwab gemessenen Wellenperioden an den meisten anderen Uferpunkten, wie die Tabelle S. 542 ersehen läßt, und zwar die 0,7 Minuten-Schwingung an 13 von den 15 Beobachtungspunkten, die von 1,0 bis 1,1 Min. in 12 derselben, die von 2,0 und 0,5 Min. in 8 Stationen und die von 3,0 bis 0,8 Min. in 5 derselben. Die 0,7 Minuten-Welle ist überhaupt die am häufigsten beobachtete. An drei Stationen, nämlich in Wartaweil, Herrsching und Utting, finden wir sie zeitweise als stehende Uferschwingung in bis 12 aufeinanderfolgenden Wellen, an den übrigen Punkten aber nur in drei bis vier bis fünf Schwingungen. Diese Welle scheint unmittelbar vom fahrenden Dampfer auszugehen, wofür besonders noch die Beobachtung spricht, daß die Welle in

Wartaweil-Nord, Mühlfeld und Lochschwab etwa $\frac{1}{2}$ bis 1 Min. vor dem Dampfer ankommt. Ebenso scheint die Schwingung von 1,0 bis 1,1 Min. Dauer vom fahrenden Dampfer an jeder Seestelle auszugehen. An Punkten, wo das Ufer in dieser Periodendauer schwingen kann, bringen die ankommenden Wellen die betreffende Wassermasse zur Resonanz, das ist in Fischen, Wartaweil-Nord und Breitbrunn, an anderen Punkten löst die Welle die ihrer Periodendauer nahekommende Schwingung aus, wie in Schondorf eine solche von 1,2 Min. und in Utting von 1,3 Min., an den übrigen Punkten endlich kommt sie in wenigen aufeinanderfolgenden Schwingungen an das Ufer und wird dort reflektiert, wie in Fischen-Nord, Mühlfeld, Lochschwab und Ried. Die übrigen häufiger beobachteten Periodendauern, die auch als fortschreitende Wellen an konvexen Uferstellen gefunden wurden, werden sehr wahrscheinlich nur durch die Beckendimensionen an der Entstehungsstelle bestimmt und breiten sich von dort aus über den See aus. Besonders ist dies bei der großen Stoßwelle der Fall, die beim Landen der Dampfer an das Ufer geworfen wird. Die Periodendauer derselben konnten wir aus den Uferdimensionen in Stegen und Fischen berechnen. Da aber die darauffolgende zweite Welle bedeutend kleinere Amplitude hat, so muß die reflektierte Stoßwelle sich vom Ufer aus zum Teil auch ausbreiten und zwar als fortschreitende Welle. Die an einzelnen Punkten deutlich bestimmte Zeit vor und nach Ankunft des Dampfers auftretenden Wellen weisen auf die benachbarten Stationen als Entstehungsorte hin, von wo die Landungswellen sich bis zu der betreffenden Station ausbreiten, wie wir im folgenden sehen werden.

An freigelegenen Uferpunkten finden sich nämlich bis 45 Min. vor Ankunft des Schiffes deutliche ankommende Wellen, die in größerer Entfernung durch das Schiff erzeugt sein müssen. Forel hat bereits auf diese interessante Beobachtung aufmerksam gemacht und zwei schöne Kurvenbeispiele solcher „vibrations antedentes“ in seinem *Léman II* mitgeteilt.¹⁾

¹⁾ Forel, *Le Léman II*, p. 217.

Da nun das Ufer bei Morges mit den betreffenden Perioden schwingen kann und zur Resonanz kommt, bleiben die ankommenden Wellenperioden unter den stehenden Schwingungen verborgen.¹⁾ In unseren Kurvenbeispielen sieht man dagegen fast immer die neu ankommenden Wellen deutlich verzeichnet, wie in Lochschwab (Fig. 8), in Breitbrunn (Fig. 12 c), Herrsching-Nord (Fig. 10) und Herrsching (Fig. 7), und da die wenigen aufeinanderfolgenden Wellen am Ufer reflektiert werden, verläuft das Limnogramm nachher wieder ruhiger.

Sämtliche vorausgehende Wellen sind aus den Tabellen der Kurvenanalyse zu ersehen und zwar ist dort der Zeitpunkt der Ankunft, die Anzahl aufeinanderfolgender Wellen, die Periodendauer und Amplitude enthalten. Es wäre nun für die Hydrodynamik dieser langen Wasserwellen von Interesse, Ort und Zeit der Entstehung der einzelnen Wellengruppen genau zu wissen um die Geschwindigkeit der Fortpflanzung, das Verhalten bei der Wanderung usw. zu untersuchen. Da aber die Schiffe nicht die Fahrzeit so genau einhalten können und diesbezügliche Vergleichsbeobachtungen nicht angestellt wurden, so können nur die Wellen nach der Zeit ihrer Ankunft vor dem Schiffe geordnet werden. Ich habe das für die beiden Fahrrichtungen in Breitbrunn getan, wo die meisten Kurvenbeispiele vorliegen. Nach diesbezüglichen Zusammenstellungen finden sich zweimal in Breitbrunn 32 Min. vor Ankunft des Schiffes ankommende Wellen, das eine Mal solche von 1,2 Min. Periodendauer und 0,5 mm Amplitude, das andere Mal von 1,0 Min. und 2 mm und beginnen in Breitbrunn mit Fallen des Niveaus. Diese Wellen können nur in Stegen bei der Abfahrt etwa 38 Min. vor Eintreffen in Breitbrunn entstanden sein, so daß als Wanderungsdauer sich etwa 6 Min. ergeben. Viermal treten Wellen etwa 21 bis 24 Min. vor Ankunft des Schiffes auf, bei deren Entstehung das Schiff sich an der Landungsstelle Buch befand. Die 13 bis 14 Min. vorher auftretenden Schwingungen weisen auf eine Entstehung in Schondorf hin, wobei etwa 3 Min.

¹⁾ Forel, Le Léman II, p. 217.

Wanderungsdauer sich ergibt, und diejenigen, die 10 bis 6 Min. vorher ankommen, können nur vom fahrenden Schiffe selbst ausgegangen sein. In Herrsching ferner finden sich 15 bis 17 Min. vor Ankunft des Schiffes von Holzhausen deutlich vorausgehende Vibrationen, welche in Holzhausen entstanden sein dürften, wobei die Wellen in nahe 6 Min. den See überquert haben müssen. Endlich treten in Wartaweil zweimal genau 20 Min. vor Eintreffen des Dampfers von Diessen solche Störungen auf. Der Zeit nach zu schließen sind diese etwa 3 bis 4 Min. nach Abfahrt von Diessen vom Schiffe ausgegangen, zu welcher Zeit dasselbe um die Mündung des See-Zufusses, der Ammer, biegt.

Wie vor Ankunft des Schiffes, so kommen auch nach der Abfahrt desselben neue Störungen an und vergrößern die Amplituden der am Orte noch vorhandenen Schwingungen. So finden sich 15 bis 17 Min. nach Ankunft des Schiffes von Schonendorf in Breitbrunn fast jedesmal neue Wellen von 1,0 bis 1,3 Min. Periodendauer. Es kann nur die beim Landen in Utting entstandene Welle nach der Reflexion sich nach Breitbrunn fortgepflanzt haben. Diese sämtlichen Störungen beginnen im Limnogramme mit Fallen des Niveaus. Außerdem treten achtmal bei umgekehrter Fahrtrichtung in Breitbrunn nachfolgende Vibrationen auf und zwar 14 bis 16 Min. nach der größten Welle, wobei sämtliche Störungen mit Steigen beginnen und 1,1 bis 1,4 Min. Periodendauer haben. Sie können nur in Schonendorf entstanden sein.

Während die oben besprochenen Störungen durch den landenden Dampfer entstanden sein müssen, ist aus den Limnogrammen zu ersehen, daß an allen Stationen vor Vorübergang des Schiffes auch Störungen ankommen, die von dem in Fahrt befindlichen Schiffe ausgegangen sein müssen und dem Schiffe vorausgeeilt sind. So müssen die zwischen 6 bis 10 Min. vor den Dampfern in Breitbrunn auftretenden Wellen von dem von Schonendorf nach Breitbrunn fahrenden Schiffe ausgegangen sein, ferner rühren die in Herrsching-Nord (vgl. Fig. 10) ab 5³⁰ auftretenden Wellen von dem von Holzhausen nach Herrsching fahrenden Dampfer her, ebenso können die in Lochschwab

10 Min. vor Vorüberfahrt des Schiffes ankommenden Wellen nur vom fahrenden Dampfer erzeugt sein und ihm vorausgeeilt sein. Doch läßt sich in diesem Falle die Stelle nicht angeben, von der die Wellen ausgegangen sind, aus einigen Beobachtungen nur ergibt sich, daß diese Wellen nicht in der Kursrichtung vom Schiffe ausgehen, sondern schief zu derselben. Es traten nämlich in Fischen-Nord keine Vibrationen vor Ankunft des Dampfers auf, obwohl derselbe fast genau Kurs gegen den Beobachtungspunkt hatte, ebenso finden sich in Breitbrunn keine vorausgehenden Wellen, wenn das Schiff von Utting kommt, von wo es steil gegen die Station zufährt. Ist die Fahrtrichtung parallel zum Ufer und zwar in der Nähe des Ufers, wie in Utting und Wartaweil-Nord, so kommen nur wenige Minuten vor dem Schiffe Wellen an, da die auf der Uferseite des Schiffes erzeugten Wellen an das Ufer stoßen und gegen den See zu reflektiert werden. Mit der Vorbeifahrt des Schiffes aber beginnen die im vorausgehenden behandelten stehenden Uferschwingungen.

Was nun die Erzeugung dieser Schiffswellen großer Länge während der gleichmäßigen Fahrt betrifft, so haben unsere Beobachtungen ergeben, daß nicht eine ganze Schar von Wellen vom Schiffe ausgeht, wie bei den Oberflächenwellen, sondern nur zwei bis vier Wellen gleicher Periode. Durch Versuche am Fischweiher, wobei durch gleichmäßiges Entlangziehen eines schwimmenden Gegenstandes solche Wellen erregt wurden, konnte ich schon früher solche Vibrationen nachahmen und es entstanden dabei wirklich nur bis vier Wellen gleicher Periodendauer.¹⁾ Da aber bei der geringen Breite des Weihers die seitliche Ausbreitung der Wellen unmöglich war, sind die dort gewonnenen Ergebnisse im einzelnen nicht auf unseren Fall anwendbar. Angestellte vorläufige Versuche an einer Experimentierwanne von 90 cm Länge und 60 cm Breite ergaben für den Fall, daß die Schiffgeschwindigkeit kleiner ist als diejenige der Wellen, zu beiden Seiten des Vorderteiles des Fahr-

¹⁾ Die Vibrationen etc., zit. S. 518, p. 42.

zeuges senkrecht zur Schiffswand sich ausbreitende Wellen und zwar zwei bis vier an der Zahl, wobei ein Wellenberg vorausging. Die Wellenkämme waren bei gleichmässiger Tiefe geradlinig und liefen mit ihren Enden dem Schiffe voraus, so daß die Wellenkämme mit der Kursrichtung spitze Winkel bildeten. Beim raschen Anfahren und Anhalten dagegen gingen kreisförmig sich ausbreitende Wellen aus, die bedeutend größere Amplituden hatten, doch auch nur wenige Wellen gleicher Periode.

Es wäre von besonderem Werte exakte Beobachtungen über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit dieser langen Wasserwellen zu erhalten um die bis jetzt benützten Formeln zu prüfen. Da aber über den Ort und die genaue Zeit der Entstehung die erforderlichen Beobachtungen nicht gemacht wurden, was späteren Untersuchungen vorbehalten bleibt, so lassen sich die in Betracht kommenden Größen nur schätzen. Aus der Lagrange'schen Formel der Fortpflanzungsgeschwindigkeit v von langen Wasserwellen:

$$v = \sqrt{g \cdot h}, \quad \text{IV}$$

wobei g die Erdbeschleunigung und h die gleichmäßige Tiefe in Metern bedeuten, läßt sich die Wellenlänge der beobachteten Wellen ungefähr angeben und zwar berechnet sich für die tiefste Stelle von 80 m bei einer Periodendauer von 0,5 Min. $v = 25,2 \text{ m sec.}^{-1}$ und $\lambda = 800 \text{ m}$. Die Wellenlänge λ ist also bei der kleinsten Dauer noch zehnmal so groß als die Wassertiefe und an seichteren Stellen ist das Verhältnis noch größer, denn $\lambda : h = t \sqrt{g} : \sqrt{h}$. Wir haben also sogenannte „lange Wellen“ vor uns. Zur Bestimmung der Wanderungsdauer in einem See mit wechselnder Tiefe ist aber die Lagrange'sche Formel nicht brauchbar und auch die Einführung der mittleren Tiefe führt besonders bei großen Änderungen der Tiefe, wie sie in den Seen vorkommen, zu ganz unrichtigen Werten, wie auch in neuester Zeit O. Krümmel für die Meere gezeigt hat.¹⁾

1) O. Krümmel, Ozeanographie II, p. 152 ff.

Es paßt hier vielmehr die sogenannte P. du Boyssche Formel, wie sie zur Berechnung der Seichesdauern der Seen angewendet wurde, wobei mit derselben die Wanderungsdauer einer Welle berechnet wird beim Durchlaufen der doppelten Seelänge.¹⁾ Während nun diese Formel für die ein- und zweiknotigen Seiches stark konkaver und konvexer Seen ganz unrichtige Werte der Periodendauern ergibt, erhält man für die Schwingungen höherer Nodalität gute Annäherungen. Es nähert sich auch theoretisch das Produkt aus der Seichesdauer und der Knotenzahl ($n \times T_n$) der Wanderungsdauer nach P. du Boys und einige günstige Beobachtungen an regelmäßigeren Seen bestätigen dies, wo im See hin- und herlaufende Wellen zu beobachten waren.²⁾ Es läßt sich daher z. B. die Zeit, die eine Welle braucht, um den See zu überqueren, aus der Dauer einer Querschwingung rasch angenähert ermitteln, da man nach der Chrystalschen Theorie sofort das Produkt $n \cdot T_n$ je nach der Gestalt der Querprofile aus den Chrystalschen Formeln entnehmen kann. Auf diese und verwandte andere Fragen soll erst näher eingegangen werden, wenn exakte Beobachtungen über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Wellen vorliegen, welche zugleich mit der Untersuchung der Seicheschwingungen zur Zeit noch am Ammersee weitergeführt werden.

Analoge Erscheinungen in den Meeren.

F. A. Forel, der zuerst die kurz dauernden Schwankungen der Seen beobachtete, hat sofort auf die analogen Erscheinungen in den Meeren hingewiesen, wo diese Schwankungen an fast allen Punkten die Gezeitenkurve auszacken und unter dem Namen „sekundäre Gezeiten“ schon lange bekannt waren. Die von Forel dadurch angeregten diesbezüglichen Untersuchungen beschäftigten sich aber fast ausschließlich mit den Buchtenschwingungen, wobei speziell die systematischen Forschungen

¹⁾ Forel, Le Léman II, p. 83.

²⁾ Die Vibrationen etc., zit. S. 518, p. 12 und 29.

der Japaner¹⁾ ergaben, daß jede Bucht in stehende Schwingungen versetzt werden kann, welche an der Mündung einen Schwingungsknoten haben, daß also eine Bucht wie ein Resonator durch die von außen kommenden Wellen zum Mitschwingen gebracht wird. C. Börgen²⁾ hat sich zuerst mit den Schwankungen an solchen Küstenpunkten beschäftigt, welche an keiner abgeschlossenen Bucht liegen; nach seiner Ansicht können solche nicht von stehenden Schwingungen herrühren. Er hat vielmehr die Vermutung ausgesprochen, daß diese Schwankungen als eine Interferenzerscheinung zweier Systeme von Windwellen mit verschiedener Periodendauer aufgefaßt werden können, als sogenannte Kombinationswellen entsprechend den Helmholtz'schen Differenzwellen. Forel dagegen hat in seiner letzten Publikation über die Vibrationen³⁾ die Hypothese Börgens, der sich auch G. Chrystal zum Teil angeschlossen hatte, ganz abgelehnt, andererseits den Ergebnissen der Japaner gegenüber nochmals mit Nachdruck darauf hingewiesen, daß die Meeresvibrationen, wie diejenigen der Seen, nicht nur in Buchten, sondern ebenso häufig an offenen Küstenpunkten sich finden. Allerdings hat er dann diese Tatsache als Beweisgrund für seine Annahme benützt, daß diese Schwankungen mehrknotige stehende Schwingungen, also Seiches seien und nicht bloß Resonanzschwingungen. R. A. Harris allein hat in seinem Handbuche der Gezeiten⁴⁾ gelegentlich der Einteilung der periodischen Schwankungen, die er sämtliche mit Seiches bezeichnet wissen will, auf das Vorkommen solcher stehender Küstenschwingungen, wie wir sie am Ammersee gefunden haben, aufmerksam gemacht und dieselben mit Schelfseiches (shelving seiches) bezeichnet. Er führt auch Beispiele solcher Seiches

1) K. Honda, T. Terada, Y. Yoshida and D. Isitani, An investigation of the secondary undulations of oceanic tides. Journal of the College of Science, Bd. 24. Tokyo 1908.

2) C. Börgen, Annal. de Hydrogr., Januar 1890, p. 10.

3) Forel, Vibrations etc.. zit. S. 5, p. 3.

4) R. A. Harris, Manual of tides V. (U. S. Coast Survey Rep. 1907). Washington 1908. S. 472 u. ff.

an, von denen aber einzelne auch als fortschreitende und am Ufer aufstoßende Wellen angesehen werden können, weshalb O. Krümmel die reale Bedeutung derartiger Schwingungen noch nicht für sicher erwiesen hält.¹⁾

Harris erwähnt speziell als Schelfseiches die Schwankungen, welche durch die Seewogen des Krakatau-Ausbruches an vielen Küstenpunkten ausgelöst wurden. Von diesen dürften jedoch die im Bengalischen Busen speziell in Negapatan, Madras und Vizagapatan aufgezeichneten ersten drei bis vier Wellen dem von der Störungsstelle sich ausbreitenden Wellenzug fortschreitender Wellen angehören. Dafür spricht einmal die geringe Zahl aufeinanderfolgender Wellen gleicher Periodendauer, dann auch besonders der Umstand, daß diese Wellen an den drei genannten Stationen die nämliche Periodendauer von rund 110 Min. aufweisen, endlich noch die Beobachtung, dass auch in Batavia, der der Ausbruchstelle nächsten Station, die ersten vier Wellenzüge die gleiche Periodendauer haben, während die darauffolgenden Schwingungen, zehn an der Zahl, eine Dauer von im Mittel 128 Min. haben und deutlich den Typus lokaler stehender Schwingungen aufweisen. Als Schelfseiches dagegen muß die isoliert in Negapatan auftretende Schwingung von 55 Min. Dauer, die in zehn regelmäßigen Schwingungen ausklingt, und die in Madras regelmäßig verzeichnete Schwingung von 70 Min. Dauer in zehn aufeinanderfolgenden Wellen angesehen werden. Die in Port Elisabeth mit großer Amplitude beobachtete Schwingung von 71 Min. Dauer, welche in achtzehn Einzelschwingungen zu messen ist, dürfte mehr als Resonanzschwingung der Algoabucht zu betrachten sein, denn als Schelfseiche im Sinne Harris. Für $l = 25$ km und $h = 75$ m, wie ich sie aus Andrees Handatlas entnehme, gibt unsere Formel I wirklich als uninodale Periodendauer 71 Min.²⁾

1) O. Krümmel, Ozeanographie II, p. 168.

2) Obige Wellenperioden entnehme ich dem Kurvenmateriale des wertvollen Werkes der Japaner (K. Honda etc., zit. S. 568). Tafel 49, 51 und 52.

Zu den ausgesprochenen Schelfseiches zu rechnen ist eine in Catania, am Ostufer Siziliens besonders häufig beobachtete Schwingung von 15 bis 17 Min. Periodendauer, deren eingehende Untersuchung wir G. Platania verdanken.¹⁾ Die konkave Form der Uferlinie bei Catania begünstigt nach unseren Ergebnissen am Ammersee die Entstehung und das längere Fortschwingen von stehenden Uferschwingungen. Das häufige Auftreten einer bestimmten Schwingung muß in den besonderen Eigentümlichkeiten des Uferprofils begründet sein und in der Tat weicht dasselbe, wie die nach Andrees Handatlas in Fig. 4, Tafel II gezeichnete Figur ersehen läßt, merklich von den bisher betrachteten ab. Während sich dasselbe bei der Lage des Knotens in der Entfernung der 2000 Meter-Isobathe noch an eine gerade Linie annähern läßt und für $l = 25$ km und $h = 2000$ m aus Formel II $T = 15,6$ Min. ergibt, erhebt sich für alle Lagen des Knotens zwischen der 1000 und 100 Meter-Isobathe die Profillinie über eine gerade Linie, so daß die nach Formel II berechneten Werte $T_{1000} = 11,8$ Min., $T_{200} = 11,8$ Min., $T_{100} = 14,6$ Min. nach Chrystal'scher Theorie um 10 bis 20% zu klein werden, so daß also die Dauern etwa 14 Min., 14 Min. und 16,5 Min. sein dürften. Das Profil nähert sich nämlich sehr der Form einer Parabel vierten Grades und bei einer solchen Normalkurve nähern sich nach Chrystal die Dauern der Oberschwingungen derjenigen der Hauptschwingung.²⁾ Für die Lage des Knotens in der Entfernung der 50 Meter-Isobathe erhält man wirklich nahe dieselbe Dauer wie bei der Knotenannahme an der Tiefe von 2000 m. Hierin dürfte das vorwiegende Auftreten der genannten Schwingung seinen Grund haben, wobei der Knoten sich um große Entfernungen verschieben kann, ohne daß die Dauer sich um mehr als 2 Min. ändert.

Noch häufiger und regelmäßiger treten die Schelfseiches in Buchten auf, wo dann die einzelne Bucht die Entstehung

¹⁾ G. Platania, *Le Librazioni del mare con particolare riguardo al Golfo di Catania*. V. Congr. geogr. It. 1904.

²⁾ Chrystal, zit. S. 546, p. 642.

einer stehenden Uferschwingung begünstigt und noch stabiler macht, als sie an nur schwach konkaven, offenen Küstenpunkten sein würden. Hierfür liefern die Beobachtungen der Japaner ein reiches Material, wie die vielen verschiedenen Periodendauern in jeder Bucht erschen lassen.¹⁾ Von allen Schwingungen, welche eine größere Periodendauer haben als die Hauptschwingung, müssen die Knoten außerhalb der Bucht liegen und lassen sich mittels unserer Formeln I oder II aus dem Uferprofil angenähert bestimmen. Diese Schelfseiches haben aber gewöhnlich viel kleinere Amplituden als die Eigenschwingungen der Buchten und bleiben daher unter diesen verborgen, wie man aus jedem Diagramm des wertvollen Kurvenmaterials der Japaner erschen kann. Die große Veränderlichkeit der Periodendauern dieser Schwingungen ist aus dem leichten Wechsel der Knotenlage verständlich. Harris selbst gibt ein Beispiel solcher Schelfseiches in der im Hafen von Galle auf Ceylon anlässlich der Krakatauwogen auftretenden regelmäßigen Schwingung von 24 Min. Dauer, die ihren Knoten außerhalb der dort befindlichen kleinen Bucht haben muß.²⁾ Auch G. Platania findet in der Bucht von Mazzara außer der schon erwähnten Buchtenschwingung von im Mittel 14 Min. (vgl. S. 547) noch eine weitere häufiger auftretende Schwingung von 21 bis 26 Min. Dauer, welche ihren Knoten außerhalb der Bucht haben muß,³⁾ also Schelfseiche ist. Wie das auf Tafel I, Fig. 6 gezeichnete Profil erschen läßt, paßt hierfür die Annäherung an eine Parabel auch für eine Lage des Knotens außerhalb der Bucht, wo die Tiefe fast gleichmäßig 30 bis 35 m beträgt, und man erhält für $l = 6$ km und $h = 35$ m nach Formel I wirklich eine Dauer von 24 Min. In dem Mareogramm S. 27 der Schrift finden sich noch mehrere Schwingungen größerer Dauer, welche ebenfalls Schelfseiches sein dürften, wie eine solche von 40 Min. in zehn aufeinanderfolgenden Wellen und eine von 53 Min. in 9 Schwingungen.

1) K. Honda, An investigation etc., zit. S. 568, p. 17 u. ff.

2) R. A. Harris, Manual etc., zit. S. 568, p. 482.

3) G. Platania, Oscillationi etc., zit. S. 547, p. 32.

Wegen der großen Anzahl auftretender Schwingungen sind die Beobachtungen von Isthmia am Ostende des korinthischen Kanals von Interesse, welche G. Wegemann¹⁾ zuerst untersucht hat. Aus den Mareogrammen, die der genannte Forscher mir freundlichst überlassen hat,²⁾ finde ich durch zum Teil exakte Analyse folgende ausgeprägten 14 Schwingungen: von 4,0 — 9,6 — 10,0 — 13,0 bis 14,0 — 18 — 25 — 30 bis 35 — 46 — 75 bis 80 — 135 bis 138 — 165 — 180 — 260 und 320 Min. Periodendauer. Es ist dies meines Wissens die größte Anzahl Schwingungen, wie sie bis jetzt in einer Bucht gefunden wurden. Eine Berechnung der einzelnen Perioden aus den Beckendimensionen wäre wegen der komplizierten Form des Saronischen Meerbusen eine Arbeit für sich. Das in Betracht kommende Becken zerfällt nämlich in mehrere Teilbuchten und durch die vielen Inseln in Teilbecken, so daß in den gefundenen Schwingungen fast sämtliche Arten von Seiches, wie sie R. A. Harris³⁾ aufgestellt hat und zwar eigentliche Seiches (open lake-seiches), ein- und mehrknotige Buchtenschwingungen (cul de sac s.), Querseiches (parallel-wall s.) und Schelfseiches (shelving s.) vorkommen dürften, wovon die Schwingungen großer Dauer ihre Knoten außerhalb des Golfes haben, also Schelfseiches sein müssen.

Die angeführten Beispiele von Uferschwingungen an den Meeresküsten lassen erkennen, daß das Vorkommen dieser Art von stehenden Schwingungen ein ebenso häufiges ist, wie das der Resonanzschwingungen von Buchten. Doch ist hier nicht Raum auf weitere Beispiele einzugehen, welche sich in der

1) G. Wegemann, Beiträge zu den Gezeiten des Mittelländischen Meeres. Annalen d. Hydogr., August 1907.

2) Auch an dieser Stelle sei ihm nochmals dafür aufrichtig gedankt. Die Mareogramme sind von Admiral Makaroff sehr genau kopiert. Der Streifengang beträgt 2 cm pro h. Die Schreibtrommel machte eine Umdrehung pro Tag, weshalb der Schreibstift täglich verstellt werden mußte, um mehrere Tage auf einen Streifen zu bringen, was täglich zwischen 8 und 12 Uhr geschah.

3) R. A. Harris, Manual etc., zit. S. 568, p. 472.

Literatur so zahlreich finden lassen. Ich möchte vielmehr noch auf ein anderes Ergebnis unserer Beobachtungen am Ammersee zurückkommen, das zur Bestimmung der Entfernung eines Seebebenherdes in der Nähe einer Küste vielleicht von Vorteil sein könnte. Die größte Periodendauer der Uferschwingungen eines Punktes wurde nämlich durch den Abstand der Störungsstelle vom Ufer bestimmt, da an die betreffende Stelle der Knoten zu liegen kam. Es liegt daher nahe, auch aus der größten beobachteten Periodendauer bei Seebeben in der Nähe der Küste den Abstand des Herdes zu bestimmen, was in günstigen Fällen, wie ich glaube, möglich sein dürfte. Auf ein Beispiel nur möchte ich hinweisen, nämlich auf die größte Periodendauer des Seebebens von Sanriku östlich von Japan. In Choschi,¹⁾ einer freigelegenen Mareographenstation, wo sich keine Resonanzschwingungen bilden konnten, findet sich unter den ankommenden Wogen eine regelmäßige Schwingung von 65 Min. Dauer neben vielen anderen Schwingungen kürzerer Dauer. Die Japaner geben nun die Entfernung des Bebenherdes von der Küste zu 150 km an,²⁾ in welcher Entfernung sich eine Tiefe von 3000 m befindet, so daß wir nach unserer Formel I genau 65 Min. Periodendauer für eine Uferschwingung gegen die Küste Japans mit einem Knoten an der Störungsstelle erhalten. Ähnlich wird auch die größte Periodendauer der anlässlich des Krakatau-Ausbruches beobachteten Wellen von etwas über 2 Stunden als stehende Querschwingung der Sundastraße von den Japanern, von Harris u. a. gedeutet.

Wenn nun solche stehende Uferschwingungen durch einmaligen Impuls meteorologischer oder seismischer Störungen ausgelöst werden, so müssen periodisch wirkende Kräfte, wie es die Gezeitenkräfte sind, an jedem nur einigermaßen geeigneten Ufer stehende Schwingungen in ihrem Takte auslösen und besonders an konkaven Uferstellen. Dort müssen dann wenigstens nochmal so hohe Flutwellen auftreten, als

1) K. Honda, An investigation etc., zit. S. 568. Tafel 55, Fig. 2.

2) Ebenda, p. 90.

sonst zu erwarten wären und es müssen außerdem längs der betreffenden Küste gleiche Flutstunden sich zeigen. Ich möchte nur drei solche Uferstellen hier anführen, wo die genannten Bedingungen alle zutreffen,¹⁾ nämlich den Alaskagolf, dann die Südostküste Nordamerikas und die Nordwestküste Vorderindiens längs des Arabischen Meeres. Sämtliche Profile lassen sich an eine Parabel annähern (vgl. das Profil vom Alaskagolf Fig. 6, Tafel I), so daß bei einem Knotenabstande von 2500 km und einer Tiefe von 6000 m für die beiden ersten Uferschwingungen eine Periodendauer von 12,8 Stunden und bei der Uferschwingung im Arabischen Meere für $l = 2250$ km und eine Tiefe von 4800 m die gleiche Dauer der halbtägigen Gezeitenwelle sich ergibt. Diese Uferschwingungen hat Harris in seiner Einteilung der Ozeane in schwingende Flächen (oscillating area bzw. fractional area) bereits angenommen¹⁾ und die von ihm eingezeichneten Knotenlinien in Tafel 23 seines Handbuches fallen auch genau in die oben angenommenen Uferentfernungen. Solche stehende Uferschwingungen, die durch periodische Kräfte andauernd fortschwingen, müssen umgekehrt auch den Ozean in stehende Schwingungen versetzen und ihn also in schwingende Flächen abteilen, so daß man auf Grund obiger Ergebnisse zu der Annahme kommen muß, daß stehende Schwingungen den Charakter des Flutphänomens wesentlich mitbedingen, eine Annahme, welche schon Newton ausgesprochen, W. Ferrel weiter verfolgt und in neuester Zeit R. A. Harris in ganz selbständiger Weise zu einer eigenen neuen Gezeiten-theorie ausgearbeitet und in seinem mehrerwähnten großen Handbuche der Gezeitenkunde niedergelegt hat.

Bei den fortschreitenden Wellen haben die Beobachtungen am Ammersee ergeben, daß nur wenige Wellen gleicher Periodendauer aufeinanderfolgen. Ähnliche Beobachtungen sind auch von den Meeresküsten in der Literatur zu finden. So besteht die bekannte Erscheinung des Seebären nach dem ein-

¹⁾ R. A. Harris, Manual of tides IV A. Washington 1901. Auf Tafel 25 ist dies besonders deutlich zu ersehen.

gehenden Berichte von Br. Doss¹⁾ aus ein bis zwei, manchmal bis drei aufeinanderfolgenden Wellen und zwar nur an der offenen Küste, während an schwingungsfähigen Ufern Resonanzschwingungen auftreten. Wir dürfen daher nach obigen Ergebnissen schließen, daß ein einziger Impuls die Wellen auslöst und zwar muß derselbe nicht gerade seismischen Ursprungs sein, was schon S. Günther frühzeitig erkannt und ausgesprochen hat,²⁾ sondern dieselben Ursachen, welche in allseits geschlossenen Seebecken exzessive Seeschwankungen auslösen, werden auf großen Wasserflächen solche fortschreitende Wellen erzeugen. In gleicher Weise treten auch die durch seismische Störungen entstandenen Wogen nach dem Berichte der Japaner über die großen historischen Wogen³⁾ und der diesbezüglichen Zusammenstellung O. Krümmels⁴⁾ in ein bis drei aufeinanderfolgenden Wellen auf. Übrigens läßt sich auch aus den Amplituden von Buchtenschwingungen darauf schließen, daß die ankommenden Störungen nicht aus einer ganzen Schar von Wellen gleicher Periode bestanden haben, sonst müßten die Resonanzschwingungen regelmäßig nacheinander immer höhere Amplituden aufweisen oder wenn die Periodendauern der ankommenden Wellen verschieden sind von den Eigenschwingungsdauern, die Amplituden rasch zerstört und wieder neu erzeugt werden. Gewöhnlich zeigen aber die Buchtenschwingungen nach wenigen Störungen regelmäßig abnehmende Amplituden. Außerdem finden sich unter dem reichen Kurvenmateriale der Japaner Aufzeichnungen von freigelegenen Uferstellen, welche keine Resonanzschwingungen besitzen können und daher ganz ähnliche unregelmäßige Form aufweisen wie das Limnogramm in Lochschwab am Ammersee. So finde ich aus dem Mareogramme von Shionomisaki (Tafel 19.

¹⁾ Br. Doss, Über ostbaltische Seebären. Gerlands Beiträge zur Geophysik, Bd. VIII, H. 3/4.

²⁾ S. Günther, Von den rythmischen Schwankungen des Spiegels geschlossener Meeresbecken. Mitt. Geogr. Ges. Wien 31, 1888, p. 510.

³⁾ K. Honda, An investigation etc., zit. S. 568, p. 102.

⁴⁾ O. Krümmel, Ozeanographie II, p. 137.

Fig. 3) neun Schwingungen verschiedener Dauer, wovon acht nur in zwei bis drei aufeinanderfolgenden Wellen auftreten, worin also fortschreitende Wellen sich aufgezeichnet haben. Dasselbe Ergebnis erhalte ich aus einer Analyse der Kurven vom Kap Inuboye (Tafel 12, Fig. 3), Omaezaki (Tafel 18, Fig. 2) und anderen acht Punkten. Daraus ist ersichtlich, daß auch die langen Wellen im Meere gewöhnlich nicht in großen Scharen auftreten, wie häufig angenommen wurde, ferner daß sie gewöhnlich durch einen einzigen Impuls ausgelöst werden und selten nur durch periodische Kräfte, wie atmosphärische Luftwogen, welche letztere man früher als die eigentlichen Ursachen der Vibrationen in den Seen und Meeren anzusehen geneigt war.

Man wäre versucht, auf weitere Fragen der Dynamik langer Wasserwellen unsere Ergebnisse anzuwenden, wie die Frage, an welchen Stationen ein Wellenberg und an welchen ein Wellental vorausgeht, ferner wie sich die Wellen auf ihrer Wanderung verändern, endlich wie sich die Wandlungsdauer mittels der obenerwähnten Formeln berechnet. Da jedoch hierfür nur vorläufige Ergebnisse an den Seen vorliegen, soll durch weitere Untersuchungen auch diesen Fragen nachgegangen werden, worauf ich an anderer Stelle zurückkommen werde.

Ergebnisse.

Die Ergebnisse der bisherigen Vibrationsbeobachtungen lassen sich, wie folgt, zusammenstellen:

1. Die kurzperiodischen Wasserstandsschwankungen an den Küsten der Seen rühren gewöhnlich von im See fortschreitenden Wellen großer Länge her. Dieselben folgen aber nicht in großen Scharen gleichperiodischer Wellen, wie die Oberflächenwellen, aufeinander, sondern nur in ein bis vier Einzelwellen.

2. Diese Wellen erzeugen an den einzelnen Uferstellen ganz lokale periodische Schwankungen, indem sie eine bestimmte Wassermasse des Uferstreifens zur Resonanz bringen. Es erwiesen sich dabei nicht nur Buchten als schwingungsfähig,

sondern es genügt schon eine leicht konkave Uferlinie, um die Stelle zu einem schwingungsfähigen Gebilde zu machen.

3. Solche Uferstellen können nicht nur in bestimmten Periodendauern schwingen, wie nach drei Seiten begrenzte Buchten, sondern je nach dem Impulse einer ankommenden Störung kann eine größere oder kleinere Wassermasse in stehende Schwingung versetzt werden, deren Knoten parallel zum Ufer in eine der Periodendauer entsprechende Entfernung zu liegen kommen.

4. Die Periodendauern dieser Uferschwingungen lassen sich aus den Dimensionen des Uferprofils berechnen, indem man den Teil des Profils bis zum Knoten als Hälfte der sogenannten Chrystalschen Normalkurve betrachten darf. Für die meisten Ufer gibt die Berechnung nach Chrystals Formeln für ein symmetrisch geradliniges oder parabolisches Becken gute Annäherungen.

5. Ist das Gegenufer eines Sees parallel zu dem schwingenden Uferstreifen, so kann die Uferschwingung auch Querseiche im Sinne Forels werden, ebenso können abgegrenzte Seeteile ganz in schwingende Flächen abgeteilt werden.

6. Fortschreitende Wellen gehen sowohl vom fahrenden Dampfer aus als auch von Uferschwingungen, wenn sie große Amplituden erreichen. Die Höhe der Wellen nimmt mit der Entfernung rasch ab. Werden Wellen in der Nähe eines schwingungsfähigen Ufers erregt, so entsteht immer auch diejenige Schwingung, welche an der Störungsstelle ihren Knoten hat.

7. Die Ergebnisse am Ammersee bestätigen die Annahme von R. A. Harris, daß diese Uferschwingungen, von ihm Schelfseiches genannt, eine ganz allgemeine Erscheinung an den Meeresküsten sind. Speziell lassen sich bekannte periodische Schwankungen an bestimmten Küstenpunkten als Schelfseiches auffassen und deren Periodendauern aus den Uferdimensionen berechnen. Als Schelfseiches müssen auch die Schwingungen in Meeresbuchten angesehen werden, welche größere Periodendauer als die Hauptschwingung der betreffenden Bucht haben.

8. Wenn schon ein einzelner Impuls eines Windstoßes

oder eines fahrenden Dampfers mit geringer kinetischer Energie merkliche stehende Uferschwingungen auslöst, so müssen um so mehr periodisch auftretende Kräfte, wie es die Gezeitenkräfte sind, an allen nur einigermaßen schwingungsfähigen Ufern die Bildung stehender Schwingungen veranlassen und können so ganze Wasserflächen in schwingende Flächen abteilen. Insofern können die Ergebnisse am Ammersee als eine Bestätigung von Harris neuer Gezeitentheorie angesehen werden.

9. Auch in den Mareogrammen von nicht schwingungsfähigen Küstenpunkten der Meere finden sich gewöhnlich nur Gruppen von ein bis vier Einzelwellen, die als fortschreitende Wellen anzusehen sind, wozu besonders auch die Erscheinung des Seebären an der Küste der Ostsee gehört. Es müssen demnach auch diese Wellen durch einen einzigen Impuls, sei es meteorologischer, sei es seismischer Kräfte, erzeugt worden sein.

Freising, November 1912.

Am Schlusse dieser Schrift wollte ich Herrn Geheimrat Professor Dr. Hermann Ebert für die wertvolle Förderung der vorliegenden Arbeit danken, da kommt bei Beendigung der Drucklegung die Trauerkunde von dem Tode des Forschers und ich kann an dieser Stelle nur noch auf die Verdienste hinweisen, die H. Ebert besonders um die bayerische Seichesforschung sich erworben hat. Er hat den ersten bayerischen See, den Würmsee, auf seine Seiches untersucht und die weitere Erforschung bayerischer Seen nicht nur angeregt, sondern durch Überlassung der nötigen Apparate und Beschaffung der Mittel überhaupt ermöglicht, die Untersuchungen selbst geleitet und ständig durch wertvolle Anregungen gefördert. Sein Name muß daher in der Geschichte der bayerischen Seichesforschung immer an erster Stelle genannt werden.

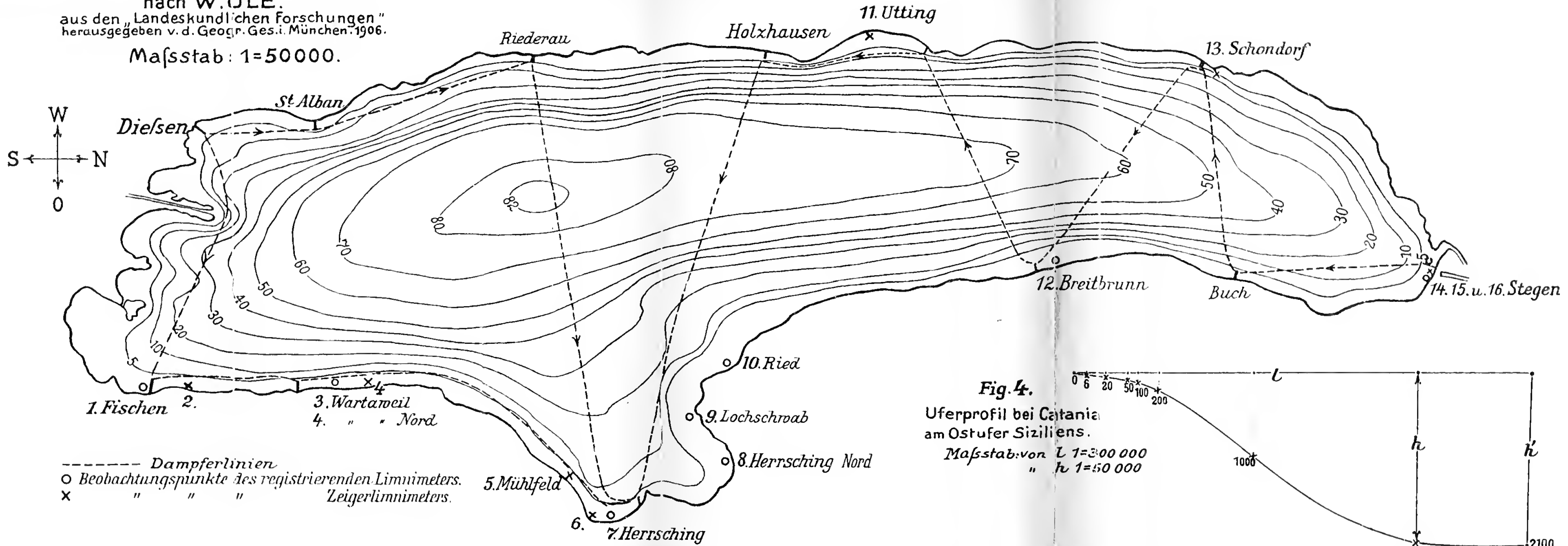
Der Verlust ist um so schwerer, als unser Forschungsgebiet seit kaum einem Jahre vier hervorragende Vertreter verloren hat, nämlich G. Chrystal, F. A. Forel, O. Krümmel und G. H. Darwin, Forscher, auf deren Arbeiten ich gerade in vorliegender Schrift besonders verweisen mußte und denen ich auch wertvolle persönliche Anregungen verdanke.

Fig. 1. AMMERSEE-TIEFENKARTE

nach W. ULE.

aus den „Landeskundlichen Forschungen“
herausgegeben v. d. Geogr. Ges. i. München. 1906.

Maßstab: 1=50000.



----- Dampferlinien
o Beobachtungspunkte des registrierenden Limnimeters.
x " " " " Zeigerlimnimeters.

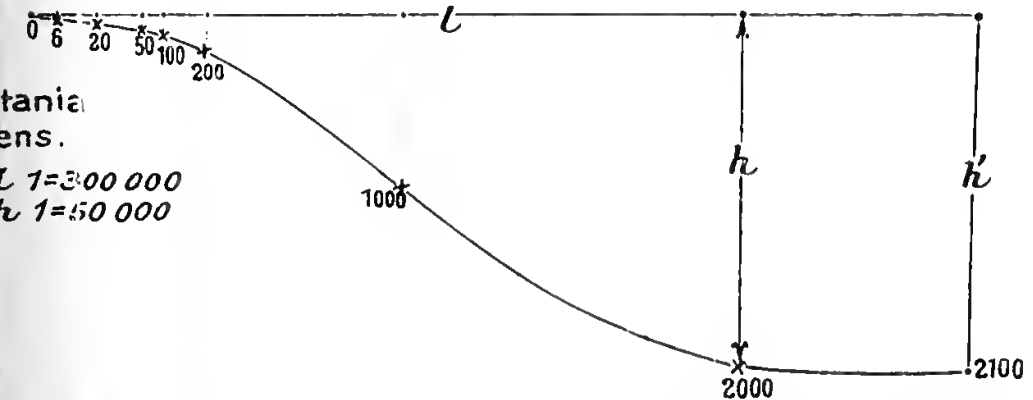
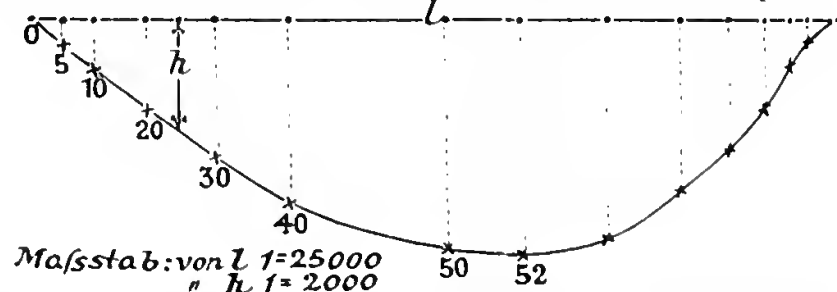


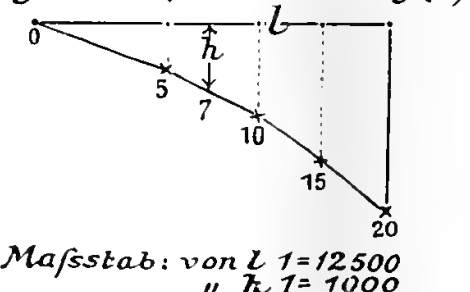
Fig. 4.
Uferprofil bei Catania
am Ostufer Siziliens.
Maßstab: von L 1=300 000
" h 1=50 000

Fig. 2. Querprofil des Ammersees bei Schondorf (13)



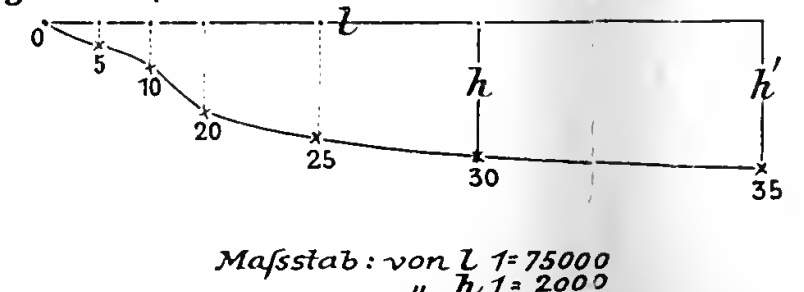
Maßstab: von L 1=25000
" h 1=2000

Fig. 3. Uferprofil bei Utting (11)



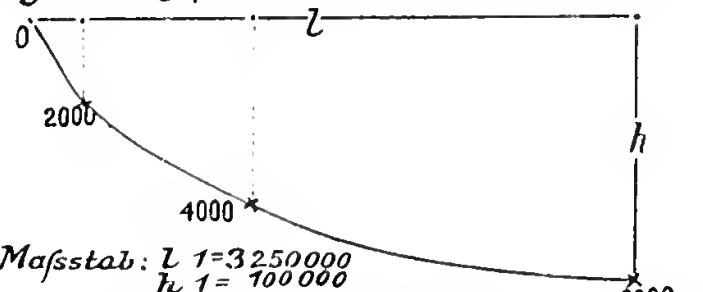
Maßstab: von L 1=12500
" h 1=1000

Fig. 5. Uferprofil von Mazzara a. d. Südwestküste Siziliens.

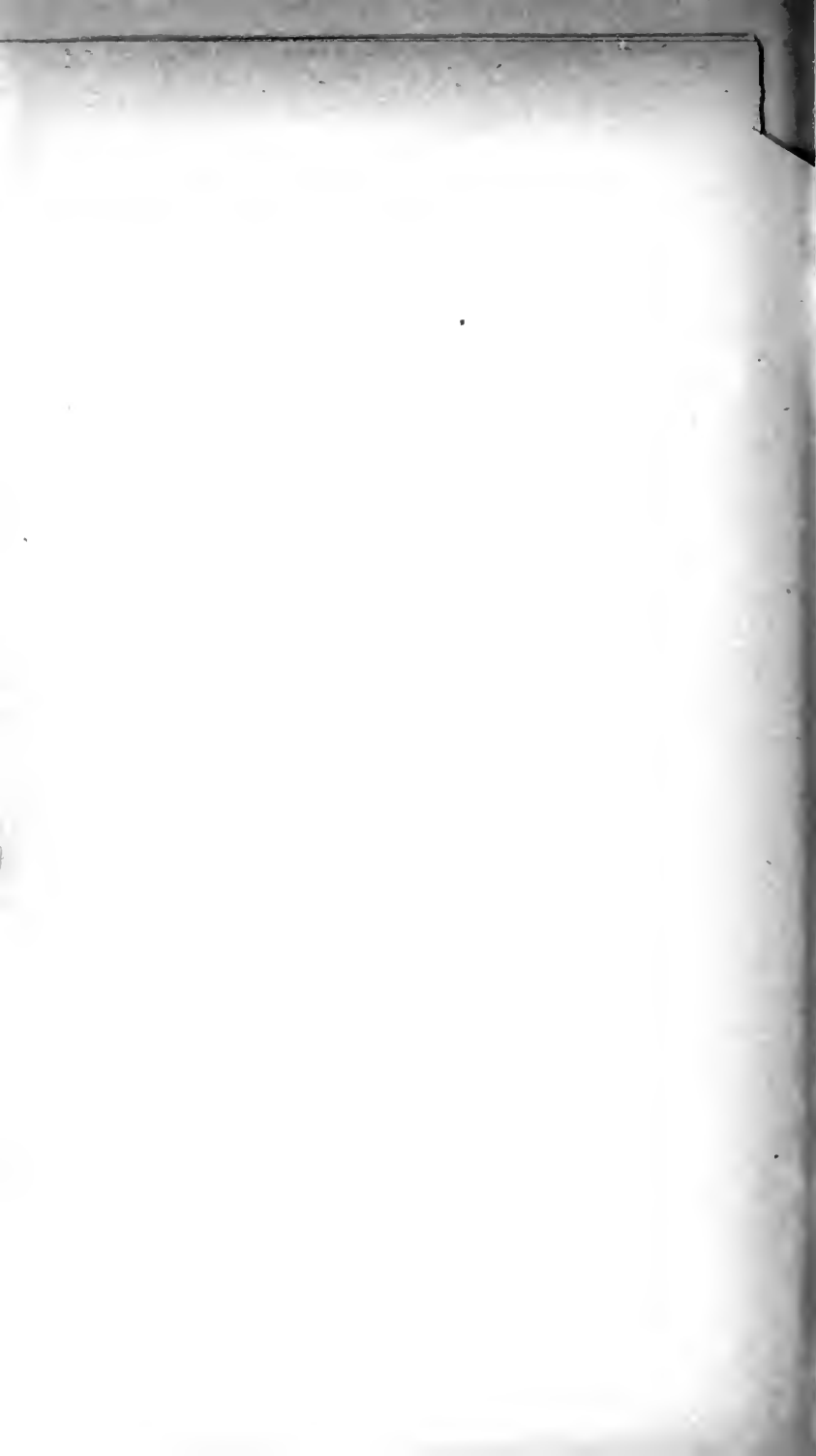


Maßstab: von L 1=75000
" h 1=2000

Fig. 6. Längsprofil des Golfes von Alaska.



Maßstab: L 1=325000
h 1=100000



Berührungstransformationen der geodätischen Linien.

Von **Heinrich Liebmann.**

Vorgelegt von S. Finsterwalder in der Sitzung am 7. Dezember 1912.

Die vorliegende Arbeit behandelt eine Reihe von Berührungstransformationen, zu deren Untersuchung der Verfasser durch die weiter unten genannten Arbeiten von Blaschke angeregt worden ist, der seinerseits an Study anknüpft.

In § 1 werden umfangstreue Berührungstransformationen auf beliebigen Flächen in Zusammenhang gebracht mit den flächentreuen Punkttransformationen und den Berührungstransformationen der Optik.

§ 2 und 3 befassen sich im besonderen mit der nicht-euklidischen Geometrie, und zwar mit der Abbildung der Speere der hyperbolischen Ebene auf die Punkte eines Zylinders, d. h. der aus lauter auf einer Ebene senkrecht stehenden Geraden gebildeten Fläche, welche diese Grundebene in den Punkten eines Kreises schneiden (§ 2) und einer besonders einfachen äquilateralen Speertransformation, welche Zyklen in Zyklen überführt und einer vom Verfasser früher untersuchten Kreisverwandtschaft genau entspricht (§ 3).

§ 1. Umfangstreue Berührungstransformationen.

Nach einem von Herrn W. Blaschke angegebenen Verfahren¹⁾ können die umfangstreuen Berührungstransformationen der euklidischen Ebene den flächentreuen Punkttransformationen auf dem euklidischen Kreiszyylinder zugeordnet werden.

¹⁾ Über einige unendliche Gruppen von orientierten Berührungstransformationen in der Ebene. Math. Ann. 69 (1909), S. 204—217.

Zu diesem Zweck muß jede Kurve durch ihre „magische Gleichung“ dargestellt werden, d. h. durch die Gleichung zwischen den Polarkoordinaten p und q , welche die Fußpunkt-kurve (F) der Kurve darstellt, den Ort der Fußpunkte der vom Koordinatenanfang O auf die Tangenten gefällten Lote. Dabei sind die Tangenten zu „orientieren“, d. h. mit einem Durchlaufungssinn zu versehen, und es unterscheiden sich zwei entgegengesetzt orientierte zusammenfallende Gerade dadurch, daß p in $-p$ und q in $q + \pi$ übergeht.

Durch Einführung dieser orientierten Linienkoordinaten (oder Speerkoordinaten) ergibt sich eine Zerlegung des Bogenelementes der umhüllten Kurve in

$$ds = (p + p'')d\varphi = p d\varphi + dp',$$

und da für eine geschlossene Kurve (K)

$$\int_K ds = \int_K p d\varphi + \int_K dp' = \int_K p d\varphi$$

ist, so kann der Umfang jeder geschlossenen Kurve durch die Abbildung der Speere (p, q) auf die Punkte des Zylinders

$$\xi^2 + \eta^2 = 1$$

sofort als Flächeninhalt gedeutet werden, wobei die Abbildung hergestellt wird durch die Gleichungen

$$\xi = \cos q, \quad \eta = \sin q, \quad \zeta = p.$$

Blaschke weist nach¹⁾, daß jede Berührungstransformation, welche „im weiteren Sinne umfangstreu“ ist, d. h. jede Kurve K^0 , deren Umlaufszahl λ , definiert durch das längs der geschlossenen Kurve zu erstreckende Integral

$$\lambda = \frac{1}{2\pi} \int d\varphi$$

den Wert Null hat, notwendig eine Transformation der Speere (p, q) sein muß. Dies gilt dann a fortiori auch für die im engeren Sinne umfangstreuen Berührungstransformationen,

¹⁾ A. a. O., S. 214.

welche den Umfang jeder geschlossenen Kurve ungeändert lassen. Außerdem ist der Beweis auf jede Fläche übertragbar, da er nur von der Eigenschaft der Geraden Gebrauch macht, kürzeste Linie zu sein; d. h. es gilt der Satz:

Jede umfangstreue Berührungstransformation auf einer Fläche muß eine Transformation der (orientierten) geodätischen Linien sein.

Dies vorausgesetzt, stellen wir die naheliegende Frage:

Können jeder Fläche andere Flächen zugeordnet werden, derart, daß den (im weiteren Sinne) umfangstreuen Berührungstransformationen der ersten Fläche flächentreue Punkttransformationen der zugeordneten Flächen entsprechen?

Die Berührungstransformationen müssen jedenfalls Transformationen der geodätischen Linien sein, und es wird sich wieder darum handeln, die zweifach unendlich vielen geodätischen Linien auf die Punkte der zugeordneten Fläche (wie z. B. oben des geraden Kreiszyinders) abzubilden.

Um eine geeignete Darstellung des Bogenelementes zu finden, führen wir auf der gegebenen Fläche geodätische Polarkoordinaten (p, φ) ein, in denen das Bogenelement gegeben ist durch

$$ds^2 = dp^2 + f^2(p, q) dq^2$$

und diese Koordinaten verwenden wir als Koordinaten der (orientierten) geodätischen Tangenten der Kurven, dem Gedankengang von Blaschke folgend: Ist $OF(OF_1)$

das von O auf die geodätische Tangente der umhüllten Kurve im Punkte $P(P_1)$ gefällte geodätische Lot, und bezeichnet man die Abschnitte vom Fußpunkt bis zum Berührungspunkt mit

$$q = FP, \quad q_1 = q + dq = F_1P_1,$$

trägt man endlich von F_1 aus auf der benachbarten Tangente noch die Strecke q ab,

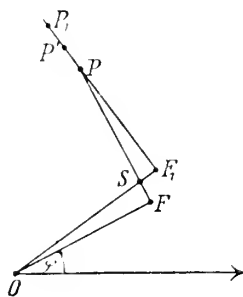


Fig. 1.

$$F_1 P' = q,$$

so ergibt sich für das Bogenelement PP_1 der umhüllten Kurve:

$$ds = PP_1 = PP' + P'P_1 = PP' + dq.$$

Ist ferner S der Schnittpunkt von OF_1 mit FP , so ist nach dem bekannten Satz von Gauß, demzufolge die Orthogonaltrajektorien der von einem Punkt (P) ausgehenden geodätischen Linien auf ihnen gleiche Stücke abschneiden, PS gleich PF_1 , und demnach

$$PP' = q - F_1 P = q - SP = FP - SP = FS = f(p, \varphi) d\varphi,$$

also

$$1) \quad ds = dq + f(p, \varphi) d\varphi.$$

Damit ist die für das Folgende maßgebende lineare Zerlegung des Bogenelementes — die Abspaltung eines vollständigen Differentials dq bewiesen.

Man kann diese wichtige Zerlegung auch als Spezialfall allgemeinerer Untersuchungen und ohne von dem Gaußschen Satze Gebrauch zu machen, in sehr einfacher Weise zeigen¹⁾: Ist eine Maßbestimmung gegeben mit dem Bogenelement

$$ds = \omega(x, y, y') dx,$$

so wird der Unterschied (PP') zweier von den Linienelementen x, y, y' und $x + dx, y + dy, y' + dy'$ ausgehenden geodätischen Linien bis zum Schnittpunkt

$$\omega(x, y, y') dx + (dy - y' dx) \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y'}.$$

In unserem Fall ist zu setzen

$$x = \varphi, \quad y = p, \quad \omega(x, y, y') = \sqrt{(p')^2 + f^2(p, \varphi)},$$

außerdem aber, weil die geodätische Linie FP auf OF senkrecht steht,

¹⁾ Vgl. F. Engel. Über Kurvenscharen, die zu einem gegebenen Differentialausdruck kovariant sind (D. M. V. XIX, 1910, S. 112—120). Ich verdanke den hier wiedergegebenen Beweis einer brieflichen Mitteilung des Verfassers.

$$p' = 0,$$

und hieraus folgt wieder:

$$PP' = \sqrt{(p')^2 + f^2} \cdot d\varphi + \frac{p'}{\sqrt{(p')^2 + f^2}} (dp - p' d\varphi) = f(p, \varphi) d\varphi.$$

Wir fahren jetzt in der allgemeinen Betrachtung fort. Für jede geschlossene Kurve K ist der Umfang

$$\int_K ds = \int_K dq + \int_K f(p, \varphi) d\varphi.$$

Das erste Integral ist gleich Null. Das zweite aber läßt sich schreiben:

$$\int_K f(p, \varphi) d\varphi = \int d\varphi \int_0^p \frac{\partial f(p, \varphi)}{\partial p} dp,$$

kann also auf jeder Fläche mit dem Bogenelement

$$ds_1^2 = e_1 dp^2 + 2f_1 dp d\varphi + g_1 d\varphi^2$$

als Flächeninhalt gedeutet werden, sobald die Beziehung besteht:

$$2) \quad \sqrt{e_1 g_1 - f_1^2} = \frac{\partial f}{\partial p}.$$

Dabei müssen natürlich für e_1 , f_1 und g_1 Funktionen von p und φ gewählt werden, die in φ periodisch sind mit der Periode 2π , und diese Periodizität muß auch den rechtwinkligen Koordinaten

$$3) \quad \begin{aligned} \xi &= \xi(p, \varphi), \\ \eta &= \eta(p, \varphi), \\ \zeta &= \zeta(p, \varphi) \end{aligned}$$

der Fläche auferlegt werden, welche der zugeordneten Klasse angehört. Dann aber folgt der Satz:

Jede flächentreue Punkttransformation

$$4) \quad \begin{aligned} p_1 &= P(p, \varphi) \\ \varphi_1 &= \Phi(p, \varphi) \end{aligned}$$

auf einer der durch die Forderungen 2 und 3 definierten Fläche (F) ergibt eine (im weiteren Sinne) umfangstreue Berührungstransformation auf der ersten Fläche und umgekehrt.

(Verlangt man, daß die Berührungstransformation auch im engeren Sinne, d. h. für geschlossene Kurven mit von Null verschiedener Umlaufszahl umfangstreu wird, so entspricht ihr nicht notwendig eine flächentreue Punkttransformation, es muß vielmehr die nur im weiteren Sinne umfangstreue Berührungstransformation erst noch durch eine Dilatation¹⁾ korrigiert werden, welche bewirkt, daß dem Punkt O bei der Aufeinanderfolge beider Transformationen eine Kurve mit dem Gesamtumfang Null entspricht.)

Syntaktische (optische) Berührungstransformationen. In den Untersuchungen Blaschkes bilden „syntaktische“ Berührungstransformationen den Ausgangspunkt, d. h. solche orientierte Berührungstransformationen, bei denen syntaktische Paare von Linienelementen — Paare gleich orientierter Elemente mit gemeinsamer Normale — in eben solche Paare übergehen, also jede Schar von Parallelkurven in eine eben solche Schar. Diese Transformationen sind mit den Berührungstransformationen der Optik identisch.

Wir wollen jetzt nachweisen, daß der von Blaschke²⁾ entwickelte Zusammenhang zwischen umfangstreuen (genauer gesagt, die Umfänge mit einem konstanten Faktor multiplizierenden) Berührungstransformationen und syntaktischen Transformationen keineswegs auf die euklidische Ebene beschränkt ist, eine Beziehung, deren allgemeine Gültigkeit doch noch einer besonderen Begründung bedarf.

Wir nennen zwei gleich orientierte Elemente syntaktisch, wenn die kürzeste Verbindungslinie ihrer Punkte auf allen beiden senkrecht steht. Eine syntaktische Berührungstransformation soll jedes syntaktische Paar in ein syntaktisches Paar

¹⁾ Vgl. Blaschke, a. a. O., S. 211.

²⁾ A. a. O., S. 208.

überführen, also jedes System von Orthogonaltrajektorien geodätischer Linien wieder in ein solches System. Ein Paar solcher geodätischer Parallelkurven wollen wir als geodätischen Parallelstreifen bezeichnen, und Breite q dieses Parallelstreifens möge der konstante Abschnitt heißen, den sie auf den orthogonalen geodätischen Linien ausschneiden.

Jedem Parallelstreifen von der Breite q entspricht dann ein Streifen von der Breite q' , wobei q' von q allein abhängen und von der Lage der syntaktischen Paare unabhängig sein muß, es ist also

$$q' = f(q).$$

Wir wollen zeigen, daß diese Funktion die Form haben muß

$$f(q) = kq.$$

Lassen wir nämlich aus einem syntaktischen Paare L_1, L_2 von Linienelementen, deren geodätischer Abstand $(L_1 L_2)$ gleich q ist, einen Parallelstreifen herauswachsen, der in seinem Verlauf die geodätische Linie $(A_1 A_2) = q_1 = nq$ gerade n -mal gleichsinnig durchsetzt, wobei $A_1 A_2$ wieder zwei syntaktische

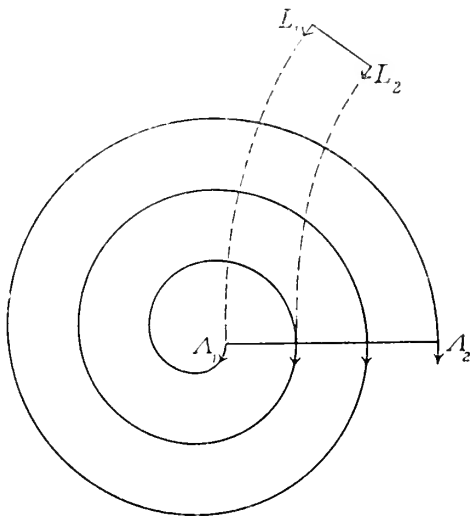


Fig. 2.

Elemente sind¹⁾, so entsprechen den Paaren $L_1 L_2$ und $A_1 A_2$ zwei Paare $L'_1 L'_2$ und $A'_1 A'_2$ und es ist offenbar auch

$$q'_1 = n q',$$

wie die Konstruktion zeigt, also

$$\frac{q'_1}{q_1} = \frac{q'}{q} = k.$$

Jeder solchen syntaktischen Berührungstransformation ist dann weiter eindeutig eine Berührungstransformation der geodätischen Evoluten, d. h. der Umhüllungskurven der geodätischen Normalen zugeordnet, welche Kurven vom Umfang u und der Umlaufzahl Null in Kurven vom Umfang ku und der Umlaufzahl Null transformiert. In der euklidischen Ebene kann die Konstante k nachträglich durch Hinzufügung einer Ähnlichkeitstransformation gleich Eins gemacht werden, für beliebige Flächen versagt dieser Weg selbstverständlich. Wir begnügen uns daher mit dem Ergebnis:

Jeder syntaktischen Berührungstransformation mit der Konstanten $k = 1$ ist eine Berührungstransformation der geodätischen Evoluten eindeutig zugeordnet, die den im weiteren Sinne umfangstreuen Berührungstransformationen zugehört.

Umgekehrt gehören zu jeder im weiteren Sinne umfangstreuen Berührungstransformationen α' syntaktische Transformationen ($k = 1$), und jede solche syntaktische Transformation ist eindeutig bestimmt, wenn man angibt, welches zur geodätischen Linie g'_0 (dem Bild einer beliebigen geodätischen Linie g_0 bei der umfangstreuen Transformation) senkrechte Linienelement L'_0 einem beliebig vorgeschriebenen zu g_0 senkrechten Element L_0 entsprechen soll.

¹⁾ In Fig. 2 ist der Parallelstreifen der Übersichtlichkeit halber spiralisch geführt.

§ 2. Die Speere der hyperbolischen Ebene.

Wir stellen uns jetzt die Aufgabe, die allgemein gehaltenen Betrachtungen im ersten Abschnitt des vorigen Paragraphen im besonderen für die hyperbolische Geometrie durchzubilden mit kurzem Ausblick auf die elliptische Geometrie. Beide Geometrien teilen mit der euklidischen Geometrie die Eigenschaft, daß sich unter den Flächen der Klasse F' (S. 584, Z. 2) mit Leichtigkeit solche ausfindig machen lassen, die auf die hyperbolische (elliptische) Ebene abwickelbar sind, und daß wir die Abbildung der Speere der Ebene auf die Punkte von F durch sehr einfache Konstruktion herstellen können.

Orientierte Linienelementkoordinaten der hyperbolischen Ebene¹⁾.

Führt man geodätische Polarkoordinaten ein, so wird

$$ds^2 = \Xi \sin^2 p \, d\varphi^2 + dp^2, \quad \text{d. h.} \quad f(p, \varphi) = \Xi \sin p.$$

Die Gleichung der Geraden ist

$$x_1 \text{Cof } p \cos \varphi + x_2 \text{Cof } p \sin \varphi - x_3 \Xi \sin p = 0,$$

wobei p und φ die Polarkoordinaten von F sind (Fig. 1).

Für die Weierstraßschen Koordinaten des Schnittpunkts P zweier unendlich benachbarten Speere $s(p, \varphi)$ und $s'(p + dp, \varphi + d\varphi)$ findet man hieraus leicht

$$\lambda x_1 = -p' \sin \varphi + \text{Cof } p \Xi \sin p \cos \varphi$$

$$\lambda x_2 = p' \cos \varphi + \text{Cof } p \Xi \sin p \sin \varphi$$

$$\lambda x_3 = \text{Cof}^2 p,$$

wobei wegen der Beziehung

$$x_3^2 - x_1^2 - x_2^2 = 1$$

zu setzen ist

$$\lambda = \sqrt{\text{Cof}^2 p - (p')^2}.$$

¹⁾ Die analytischen Hilfsmittel sind dargestellt in dem Buch des Verfassers: Nichteuklidische Geometrie, Sammlung Schubert 49, 2. Aufl., 1912.

Die Strecke q ist als Entfernung des Punktes F mit den Koordinaten

$$y_1 = \mathfrak{S}in p \cos \varphi, \quad y_2 = \mathfrak{S}in p \sin \varphi, \quad y_3 = \mathfrak{C}os p$$

von P leicht zu finden nach der Formel

$$\mathfrak{C}os q = x_3 y_3 - x_1 y_1 - x_2 y_2 = \frac{\mathfrak{C}os p}{\lambda},$$

und hieraus

$$\mathfrak{T}g q = \frac{p'}{\mathfrak{C}os p}$$

oder

$$dp \mathfrak{C}os q - d\varphi \mathfrak{S}in q \mathfrak{C}os p = 0.$$

Diese Formel drückt analytisch die Bedingung dafür aus, daß zwei unendlich benachbarte Linienelemente (φ, p, q) und $(\varphi + d\varphi, p + dp, q + dq)$ vereinigt liegen, und sie geht für kleine Werte von p und q natürlich in die von Blaschke für die euklidische Geometrie gegebene Formel¹⁾

$$dp - q d\varphi = 0$$

über.

Das Linienelement der umhüllten Kurve kann direkt berechnet werden, und man findet

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 - dx_3^2 = \left\{ \mathfrak{S}in p + \frac{p'' \mathfrak{C}os p - (p')^2 \mathfrak{S}in p}{\mathfrak{C}os^2 p - (p')^2} \right\}^2 d\varphi^2,$$

und daraus leicht die Zerlegung

$$ds = \mathfrak{S}in p d\varphi + \frac{1}{2} d \log \frac{\mathfrak{C}os p + p'}{\mathfrak{C}os p - p'}.$$

Der erste Teil gibt das Bogenelement des geodätischen Kreises, der zweite ist, wie man sofort bestätigen kann, das Differential von q — ganz im Einklang mit den allgemeinen Ergebnissen des ersten Paragraphen.

Sind die beiden unendlich benachbarten Speere parallel, so wird

¹⁾ Blaschke, a. a. O., S. 205.

$$q = \pm \infty, \quad \text{Tg } q = \pm 1, \quad (p')^2 - \text{Cos}^2 p = 0,$$

ist aber

$$(p')^2 > \text{Cos}^2 p,$$

so haben wir eine gemeinsame Senkrechte, deren Weierstraßsche Linienkoordinaten $u_1 u_2 u_3$ durch dieselben Formeln gegeben werden, wie oben die Koordinaten des Schnittpunktes, nur mit dem Unterschied, daß λ zu ersetzen ist durch

$$\mu = \sqrt{(p')^2 - \text{Cos}^2 p}.$$

Für den Abstand r des Schnittpunktes der gemeinsamen Senkrechten mit dem Speer (p, φ) vom Fußpunkt F findet man

$$\mu \text{Cos} r = -u_1 \sin \varphi + u_2 \cos \varphi = p',$$

daher

$$\text{Tg } r = \frac{\text{Cos} p}{p'}.$$

Wir führen in aller Kürze auch die Ergebnisse in der elliptischen Geometrie an. In Polarkoordinaten (p, φ) bekommt man für das Bogenelement

$$ds^2 = \sin^2 p d\varphi^2 + dp^2$$

und aus der Gleichung der Geraden

$$x_1 \cos p \cos \varphi + x_2 \cos p \sin \varphi - x_3 \sin p = 0$$

findet man leicht für das Bogenelement der umhüllten Kurve

$$\begin{aligned} ds &= \left(\sin p + \frac{p'' \cos p + (p')^2 \sin p}{(p')^2 + \cos^2 p} \right) d\varphi \\ &= \sin p d\varphi + d \arctg \frac{p'}{\cos p}, \end{aligned}$$

während andererseits für $q = FP$ (Fig. 1) hier leicht zu berechnen ist

$$\text{tang } q = \frac{p'}{\cos p}.$$

Die Gleichung

$$dp \cos q - d\varphi \cos p \sin q = 0$$

ist hier die Bedingung für die vereinigte Lage zweier Nachbar-elemente.

Der Ausdruck für die Strecke $q(FP)$ ist für die weitere Dartellung erforderlich, daher war auch eine an sich nicht notwendige Bestätigung der Formel (1) von § 1 angebracht. Als wichtigstes und selbstverständlich ohne die Berechnung von q bereits angebbares Resultat haben wir erhalten:

In allen drei Geometrien mit dreigliedriger Bewegungsgruppe kann der von

$$ds = dq + f d\varphi$$

$$f = p \text{ (euklidische Geometrie)}$$

$$f = \sin p \text{ (elliptische Geometrie)}$$

$$f = \text{Sin } p \text{ (hyperbolische Geometrie)}$$

sich abspaltende Teil $f d\varphi$ als Inhalt eines von der Abszissenachse $p=0$ zwei Ordinaten und einem Bogenelement begrenzten Streifens gedeutet werden in einer anderen Ebene mit der gleichen Maßbestimmung.

In der Tat sind ja

$$p d\varphi, \quad \sin p d\varphi, \quad \text{Sin } p d\varphi$$

die Maßzahlen für den Inhalt eines Streifens.

Die Abbildung auf dem Kreiszyylinder. Errichtet man in allen Punkten eines Kreises vom Radius a , dessen Mittelpunkt O ist, die Senkrechten zur Ebene der Speere, so erhält man einen Zylinder, und für den Flächenstreifen, der von einem Element des Grundkreises, zwei Mantellinien und einem Element einer auf dem Zylinder gelegenen Kurve begrenzt ist, die Werte

$$df = a p d\varphi, \quad df = \sin a \sin p d\varphi, \quad df = \text{Sin } a \text{ Sin } p d\varphi.$$

Hierdurch wird die (von Blaschke in etwas anderer Form¹⁾ für die euklidische Geometrie gegebene) Abbildung der Speere auf die Punkte des Zylinders nahegelegt, welche die umfangs-

¹⁾ Blaschke, a. a. O., S. 210.

treuen Berührungstransformationen in die flächentreuen Punkttransformationen verwandelt.

Man bringt die orientierte Normale des Speeres zum Schnitt mit dem Grundkreis des Zylinders. Dabei ist derjenige Schnittpunkt zu wählen, in dem die orientierte Normale den Grundkreis von innen nach außen durchdringt. Von diesem Punkt aus ist dann die mit Vorzeichen behaftete Strecke p auf der hindurchgehenden Mantellinie abzutragen.

Damit sind die Speere eindeutig abgebildet auf die Punkte des Zylinders, und zwei der Lage nach zusammenfallende Speere bilden sich auf zwei Punkten ab, deren Verbindungslinie durch den Koordinatenanfang geht.

Setzt man $\sin a = 1$, so artet der Zylinder einfach in eine elliptische Ebene aus (und die konformen Punkttransformationen werden, wie eine einfache Überlegung zeigt, direkt den äquivalenten Transformationen zugeordnet).

Eingehender verweilen wollen wir bei dieser Abbildung in der hyperbolischen Geometrie unter der Voraussetzung

$$\text{Sin } a = 1.$$

Der zur Strecke a als Parallelwinkel¹⁾ gehörige Winkel $\Pi(a)$ ist dann gleich $\frac{1}{4}\pi$. Wir werden sogleich sehen, daß die Abbildung der Speere auf die Punkte des Zylinders dann zu geometrisch leicht deutbaren Ergebnissen führt.

Einem Speer $s(p, \varphi)$ der Ebene entspricht der Punkt mit den Weierstraßschen Koordinaten

$$\begin{aligned} x_1 &= \text{Coj } p \cos \varphi, & x_2 &= \text{Coj } p \sin \varphi, & x_3 &= \text{Sin } p \\ x_4 &= \sqrt{1 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \text{Coj } p \cdot \sqrt{2} \end{aligned}$$

auf dem Zylinder

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0.$$

Das Bogenelement eines Parallelkreises ist gleich

$$\text{Coj } p \cdot d\varphi$$

¹⁾ Liebmann, Nichteuklidische Geometrie, S. 80.

und das Element einer erzeugenden Geraden gleich dp , der Neigungswinkel τ eines Linienelementes auf dem Zylinder gegen den Parallelkreis also gegeben durch

$$\operatorname{tang} \tau = \frac{dp}{\cos p dq} = \mathfrak{T}g q \quad (\text{S. 588}).$$

Man sieht, daß nur für $\operatorname{tang}^2 \tau < 1$ dem Linienelement auf dem Zylinder ein reelles Linienelement des Speeres entspricht, denn für reelle Werte von q ist stets

$$\mathfrak{T}g^2 q < 1.$$

Das Bild eines reellen Linienelementes des Speeres kann auch leicht konstruiert werden. Legt man im Bildpunkt S an den Parallelkreis die Tangente, trägt auf ihr von S aus die Strecke $ST = a$ ab und errichtet auf ST in T wieder die innerhalb der Tangentialebene gelegene Senkrechte von der Länge

$$TU = q,$$

so wird im rechtwinkligen Dreieck STU der Winkel bei S bestimmt durch

$$\operatorname{tang} \sphericalangle TSU = \frac{\mathfrak{T}g q}{\sin a} = \mathfrak{T}g q,$$

also ist

$$\sphericalangle TSU = \tau,$$

d. h. die Hypotenuse SU gibt im Punkt S die Richtung des Linienelementes an, das das Bild des Linienelementes (q, p, q) ist.

Bezeichnen wir als „Pseudowinkel“ zweier Linienelemente in S die Differenz

$$\Delta q = \Delta \operatorname{Arg} \mathfrak{T}g(\operatorname{tang} \tau),$$

so sehen wir, daß den äquivalenten Speertransformationen der hyperbolischen Ebene, denjenigen Berührungstransformationen also, welche den Abstand der Punkte je zweier Linienelemente desselben Speeres ungeändert lassen, die pseudokonformen Punkttransformationen unseres Zylinders entsprechen. Als Winkelmaß q dient dabei einfach die einem Winkel τ (vom

Parallelkreis und Bogenelement) gegenüberliegende Kathete des rechtwinkligen Dreiecks STU , dessen andere Kathete TU gleich q ist.

Den Linienelementen, für die

$$\text{tang}^2 \tau = 1$$

ist, entsprechen die unendlich fernen Linienelemente des Speeres.

Wird $\text{tang}^2 \tau > 1$, so entspricht dem Linienelement in S (auf dem Zylinder) kein reelles Linienelement des Speeres mehr, doch läßt sich die Konstruktion leicht so abändern, daß sie eine reelle Bedeutung behält, wir müssen nur an Stelle des rechtwinkligen Dreiecks das Viereck mit drei rechten Winkeln nehmen bei unserer in der Tangentialebene des Zylinders ausgeführten Konstruktion.

Auf der Tangente des Parallelkreises tragen wir wieder die Strecke

$$ST = a$$

ab, errichten dann in T auf ST die Senkrechte von der Länge $TR = r$, wobei

$$\text{Tg} r = \frac{\text{Cos } p}{p'} (< 1)$$

ist. In R errichten wir nochmals auf TR die Senkrechte und fällen auf sie vom Bildpunkt S das Lot SU . Die Bestimmungsstücke des Vierecks $STRU$, das nur bei S einen spitzen Winkel hat, sonst lauter rechte, sind dann

$$TR = r, \quad ST = a \quad (\text{Sin } a = 1),$$

und der spitze Winkel wird bestimmt durch

$$\text{tang} \sphericalangle TSU = \frac{\text{Sin } a}{\text{Tg } r} = \frac{p'}{\text{Cos } p} = \text{tang } \tau.$$

d. h. es ist wieder

$$\sphericalangle TSU = \tau.$$

r ist in diesem Fall gerade der Abstand des Fußpunktes F vom Schnittpunkt der gemeinsamen Senkrechten der einander jetzt nicht reell schneidenden Speere $s(p, \varphi)$ und $s'(p + dp)$.

$\varphi + d\varphi$), mit dem Speer s (S. 589, Z. 13) und damit hat das sich nicht reell abbildende Linienelement von SU in S seine reelle Deutung in der hyperbolischen Ebene gefunden.

Hiermit ist dann für jeden dem Speer $s(p, \varphi)$ unendlich benachbarten Speer $s'(p + dp, \varphi + d\varphi)$, möge er den ersten schneiden, zu ihm parallel sein oder ein gemeinsames Lot mit ihm haben, in der zylindrischen Abbildung der Speere dasjenige dem Bildpunkt S angehörige Linienelement durch eine sehr einfache Konstruktion gegeben, welches den Bildpunkt S' des unendlich benachbarten Speeres enthält¹⁾.

§ 3. Die komplementäre Speerinversion.

Wir verweilen noch bei den zuletzt besprochenen äquilongen Speertransformationen, und zwar bei denjenigen, welche Kreise in Kreise überführen. Während in der euklidischen Geometrie keine einfachen Beziehungen zwischen den äquilongen Berührungstransformationen und den (konformen) Punkttransformationen der Kreise bestehen, gilt für die nichteuklidische Geometrie die volle Dualität²⁾.

Ferner aber ist schon die Theorie der Punkttransformationen der Kreise in der hyperbolischen Ebene ebenso einfach wie in der euklidischen, wenigstens kann die „Transformation durch komplementäre Ordinaten“ in der hyperbolischen Geometrie durchaus der Transformation durch reziproke Radien an die Seite gestellt werden, und man bedarf zu der Ableitung ihrer Haupteigenschaften gar keiner metrischen Relationen³⁾.

Im folgenden wollen wir eine ebenso einfach äquilonge Speertransformation behandeln, einzig und allein auf der

¹⁾ Blaschke führt in seiner Abhandlung: Über die Laguerresche Geometrie orientierter Geraden (Archiv d. Math. u. Phys. III, 18, S. 132 ff.) die „Pseudowinkel“ und die „Pseudokonformität“ für gerade Zylinder des euklidischen Raumes ein.

²⁾ Beck, Am. Trans., Vol. XI, 4 (1910).

³⁾ Liebmann, a. a. O., S. 45 ff.

Grundlage, welche die so fundamentale Zuordnung zwischen dem rechtwinkligen Dreieck und dem Spitzzeck (Viereck mit drei rechten Winkeln) gibt, ein Ausgangspunkt, der sich bei allen der hyperbolischen Geometrie eigentümlichen Konstruktionen immer wieder bewährt¹⁾.

Diese einfachste äquilonge Speertransformation wollen wir als komplementäre Speerinversion bezeichnen.

Jedem Speer p, φ wird der Speer p_1, φ_1 zugeordnet, dessen Koordinaten gegeben sind durch

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \pi + \varphi \\ \Pi(p_1) &= \frac{\pi}{2} + \Pi(p)\end{aligned}$$

oder

$$p_1 = -p',$$

wenn man Strecken, deren Parallelwinkel sich zu einem rechten ergänzen, „Komplementärstrecken“, also durch Akzente, unterscheidet, außerdem aber die bereits von Lobatschepkij verwendete Festsetzung für den Parallelwinkel negativer Strecken gebraucht

$$\Pi(-p) = \pi - \Pi(p).$$

Wir haben zunächst zu zeigen, daß diese Linieninversion wirklich eine äquilonge Transformation ist. Aus der oben erwähnten Zuordnung folgt leicht, daß zu jedem rechtwinkligen Dreieck mit der Hypotenuse c den Katheten a und b und den Winkeln λ und μ (gegenüber a und b) ein zugeordnetes Spitzzeck mit dem Winkel

$$\frac{\pi}{2} - \lambda$$

gehört, dessen Seiten, vom Scheitel des spitzen Winkels aus gerechnet, der Reihe nach sind: m definiert durch

$$\Pi(m) = \mu$$

c', a und b' .

¹⁾ Vgl. die in diesem Jahrgang der Berichte, S. 273–287 veröffentlichte Arbeit.

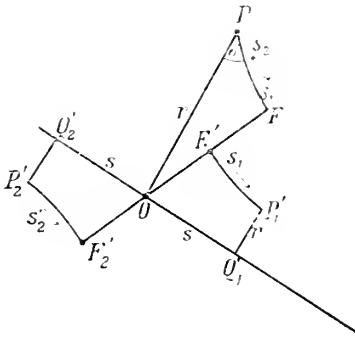


Fig. 3.

Bilden wir den (linksdrehenden) Speer s_1 ab (Fig. 3) und errichten auf OP in O die Senkrechte, so zeigt sich auf Grund der Zuordnung, daß das Bild s_2 des Speeres und diese Senkrechte ein gemeinsames Lot haben $P_1' Q_1'$. Im einzelnen findet man, wenn gesetzt wird

$$OF = p, \quad FP = q; \quad OP = r, \\ \sphericalangle OPF = \sigma,$$

für das Viereck $OQ_1'P_1'F'$ die Stücke

$$OF_1' = p', \quad F_1'P_1' = q, \quad Q_1'P_1' = r', \quad OQ_1' = s.$$

Hieraus folgt, daß den (linksdrehenden) Speeren durch P die (rechtsdrehenden) Speere s_2' entsprechen, welche die Abstandslinie

$$Q_1'P_1' = r' = \text{const}$$

berühren und dem Linienelement des Speeres s_1 in P das Linienelement des Speeres s_2' in P_1' . Die Transformation ist also wegen

$$q = FP = F_1'P_1'$$

eine äquivalente Speertransformation. Dem zu s_1 entgegengesetzt orientierten, mit ihm zusammenfallenden Speer s_2 entspricht dann s_2' (vgl. die Figur) und den Linienelementen eines Punktes $P (OP = r)$ die Linienelemente einer Abstandslinie, deren beide Äste konstanten Abstand $Q_1'P_1' = Q_2'P_2' = r'$ von derjenigen Geraden haben, die in O auf OP senkrecht steht. Diese Gerade nennen wir die Mittellinie der Abstandslinie.

Aus derselben Figur folgt, wenn wir s festhalten und r' variieren:

Den zu einer Geraden t senkrechten Linienelementen (d. h. den Linienelementen, deren Punktort t ist und die

auf t senkrecht sind) entsprechen wieder Linienelemente, deren Punktort eine Gerade ist (OP) und die mit dieser Geraden einen konstanten Winkel einschließen.

Die zweite Gerade geht durch O und ist senkrecht zu dem von O auf t gefällten Lot $OQ_i = s$, der Winkel, den die abgebildeten Linienelemente mit ihrem Punktort einschließen, ist $\sigma = II(s)$.

Betrachten wir jetzt alle orientierten Zyklen, die in O eine bestimmte Gerade berühren, also lauter orientierte Zyklen mit einem gemeinsamen Linienelement in O , so schneidet eine Gerade durch O alle diese Zyklen unter demselben Winkel. Aus der soeben festgestellten Abbildung folgt dann, daß die Bilder dieser Zyklen Orthogonaltrajektorien einer Geradenschar sind, und zwar besteht diese Schar aus der Gesamtheit aller Speere, welche parallel sind zu dem Speer durch den Punkt O , den man erhält, wenn man die gemeinsame orientierte Tangente der Zyklen um einen rechten Winkel dreht im Sinne des Uhrzeigers (nach rechts), d. h.:

Jedem orientierten Zykl durch O entspricht ein Grenzkreis und einem Berührungsbüschel mit gemeinsamer Tangente in O eine Schar konzentrischer (koaxialer) Grenzkreise.

Die folgende Betrachtung zeigt uns dann, welcher Art die Bilder von Zyklen sind, die zwei reelle Tangenten durch den Punkt O senden. Betrachtet man eine Schar konzentrischer Grenzkreise und auf jeder von ihnen den Punkt, der an einer bestimmten Achse einen gegebenen Abstand u hat, legt man ferner in diesen Punkten die Tangenten an die Grenzkreise, so werden sie, sobald er hinreichend groß ist $\left(II(u) < \frac{\pi}{4}\right)$, eine Abstandslinie umhüllen, d. h. sie müssen, weil sie ja alle denselben Winkel mit u einschließen, auch denselben kürzesten Abstand von jener bestimmten Achse haben, und es sind die Tangentenabschnitte von den Berührungspunkten mit dieser Abstandslinie bis zu den Berührungspunkten mit allen kon-

zentrischen Grenzkreisen gleichlang; die Mittellinie der Abstandslinie gehört selbst mit zu den Achsen dieser Schar von Grenzkreisen.

Diese Beziehung zwischen konzentrischen Grenzkreisen und den Abstandslinien, deren Mittellinie eine gemeinsame Achse der Grenzkreise ist, wenden wir an¹⁾.

Um das Bild eines Zyklus (k) zu finden, der einen Speer durch O in T berührt, beachten wir, daß der Zyklus außer OT mit jedem Zyklus des den Speer in O berührenden Büschels von Zyklen noch eine zweite gemeinsame Tangente hat, deren Länge ebenfalls gleich OT ist. Dem Berührungsbüschel entspricht ein Büschel koaxialer Grenzkreise, dem Zyklus (k) eine Kurve, deren Tangenten die Grenzkreise berühren, und die Abschnitte auf allen Tangenten zwischen den beiden Berührungspunkten müssen gleichlang sein. Aus dem zuvor Gesagten folgt dann, daß diese Kurve eine Abstandslinie sein muß und so findet man das Ergebnis:

Jedem Zyklus, der zwei reelle Tangenten durch O sendet, entspricht eine Abstandslinie. (Ihre Mittellinie ist die Verbindungslinie der unendlich fernen Punkte der Bilder derjenigen beiden Speere, welche auf den genannten Tangenten im Berührungspunkt senkrecht stehen, wobei die Orientierung zu beachten ist.)

Es bleibt noch der Nachweis zu erbringen, daß auch die Bilder von Zyklen, die keine reellen Tangenten durch O senden, wieder Zyklen sind; er ist mit den Hilfsmitteln der Geometrie der hyperbolischen Ebene nicht so einfach zu leisten wie die bisher betrachteten Fälle, weil auf noch mehr Einzelheiten eingegangen werden müßte.

Abbildung der komplementären Linieninversion auf den Raum. Auf einen Schlag erhalten wir alle Ergebnisse der Linieninversion, wenn wir genau wie bei der Trans-

¹⁾ Vgl. Nichteuklidische Geometrie, S. 48, wo die analoge Eigenschaft der Abstandslinien benützt wird, daß sie Isogonaltrajektorien konzentrischer Grenzkreise sind.

formation durch komplementäre Ordinaten den Raum als Hilfsmittel benützen¹⁾).

Errichtet man in P auf der Grundebene die Senkrechte PP_∞ und zieht durch O die Parallele OP_∞ , legt ferner durch O die zu OP_∞ senkrechte Ebene und sucht auf der Grundebene die Fußpunkte der Geraden, welche zur soeben konstruierten Ebene senkrecht stehen (das „Randbild“ auf der Grundebene), so erhält man genau die oben schon konstruierte Abstandslinie, welche dem Punkt P bei der Linieninversion zugeordnet ist, denn die Schnittgerade der beiden Ebenen steht auf OP in O senkrecht und der konstante Abstand des Randbilds von dieser Schnittgeraden wird gerade die zu OP komplementäre Strecke.

Hiermit ist eine Beziehung zwischen komplementärer Linieninversion auf der einen Seite und der Zuordnung der durch O gehenden Geraden OP_∞ zu den auf OP_∞ in O senkrechten Ebenen gegeben, die nur ausgebaut zu werden braucht, um in einfachster Weise die Bilder aller Zyklen bei der Transformation der Grundebene zu finden.

Wir konstruieren zu einem orientierten Zykl (z. B. einem Kreis k vom Radius r) zunächst die Ebene E_k , deren Randbild er ist, wir errichten also im Mittelpunkt des Kreises nach der Seite hin, von der aus gesehen der Drehungssinn positiv ist, die Senkrechte auf der Grundebene und tragen die Länge r' ab, durch den Endpunkt legen wir dann die zu r' senkrechte Ebene E_k . Sodann ist von O aus das Lot auf E_k zu fällen und der Rotationskegel (OE_k) zu konstruieren, dessen Erzeugende parallel sind zur Ebene E_k . Um das Bild des Kreises zu finden, hat man den Rotationskegel zu konstruieren, der von den zu den Erzeugenden des Kegels (O, E_k) senkrechten Ebenen durch O umhüllt wird, dann die Ebene $E_{k'}$ zu konstruieren, zu der jener Umhüllungskegel asymptotisch ist, und endlich das Randbild k' der Ebene $E_{k'}$ auf der Grundebene zu zeichnen. Durch die Reihenfolge (Zykl k , Ebene E_k , Ebene $E_{k'}$ und Randbild k') wird die Abbildung vermittelt. Die einge-

¹⁾ Nichteuklidische Geometrie, S. 62—64.

schalteten Rotationskegel sind nicht nötig, geben aber den Zusammenhang mit der polaren Abbildung der Strahlen durch O auf die zu ihnen senkrechten Ebenen durch O , von der wir ausgingen, deutlich an.

Noch durchsichtiger sind die komplementären Linieninversionen, wenn wir sie mit Hilfe der letzten Überlegung ausbauen zu einer komplementären Ebeneninversion. Bei dieser Transformation wird der Ebene des Raumes, deren Abstand von O gleich $OF = p$ ist, eine der beiden Ebenen zugeordnet, welche auf OF senkrecht stehen und auf dieser Geraden O von abgerechnet die Strecke p' abschneiden, welche zu p komplementär ist. Die Ebenen sind noch zu orientieren, d. h. mit einem Drehungssinn um F zu versehen; die Senkrechte OF orientieren wir so, daß sie die Ebene von der Seite her durchdringt, wo der Sinn der Drehung negativ (rechtsdrehend) erscheint, und bezeichnen mit α, β, γ die Winkel der so orientierten Normale mit drei zueinander senkrechten Achsen, mit p den mit Vorzeichen versehenen Abstand der Ebene von O . Dann sind α, β, γ, p orientierte Ebenenkoordinaten, und es entspricht einer Ebene $(\alpha, \beta, \gamma, p)$ die Ebene

$$\alpha_1 = \pi + \alpha, \quad \beta_1 = \pi + \beta, \quad \gamma_1 = \pi + \gamma, \quad p_1 = -p'.$$

Die Abbildung der orientierten Zyklen der Grundebene aufeinander bei der komplementären Linieninversion erhält man dann einfach, indem man vom orientierten Zykl zur orientierten Ebene E_k übergeht, deren Randbild der Zykl ist, dann zur Ebene $E_{k'}$, dem Bild von E_k bei der komplementären Inversion orientierter Ebenen und endlich von hier wieder zum Randbild k' in der Grundebene.

Je nachdem k ein Kreis, ein Grenzkreis oder eine Abstandslinie ist, wird E_k mit der Grundebene ein gemeinsames Lot haben, einen gemeinsamen unendlich fernen Punkt oder eine gemeinsame Sekante, das Bild $E_{k'}$ aber wird die Grundebene dann und nur dann schneiden, wenn sich von O aus zwei reelle Tangenten an k legen lassen, $E_{k'}$ wird mit der Grundebene einen gemeinsamen unendlich fernen Punkt haben („Zwischen-

ebene“ sein), wenn k durch O geht; und endlich wird $E_{k'}$ mit der Grundebene ein gemeinsames Lot haben, wenn sich von O aus an k keine reellen Tangenten legen lassen. Dies alles ergibt sich sehr leicht, wenn man die zur Konstruktion gebrauchten Hilfsebenen alle mit der Ebene schneidet, welche auf der Grundebene senkrecht steht und eine Symmetrieachse des abzubildenden Zyklus k enthält.

Die komplementäre Ebeneninversion ist ihrerseits eine äquivalente Speertransformation, welche Sphären (Kugeln, Grenzflächen, Abstandsflächen) des hyperbolischen Raumes wieder in Sphären überführt und kann selbstverständlich auch elementargeometrisch weiter untersucht werden wie die Linieninversion.



Über das Gesetz der Intensitätsverteilung innerhalb der Linien eines Gasspektrums.

Von **W. Voigt**, corresp. Mitglied.

Vorgelegt in der Sitzung am 7. Dezember 1912.

1. Die theoretische Behandlung der Gesetze der Intensitätsverteilung innerhalb einer Spektrallinie hat anfangs¹⁾ an den Emissionsvorgang angeknüpft und dabei die einzelnen Emissionszentren (Elektronen oder Moleküle) als unabhängig behandelt. Als für die Intensitätsverteilung bestimmend wurden dabei zwei verschiedene Umstände in Rechnung gesetzt, einmal die Translationsbewegungen der Emissionszentren infolge der Temperatur, die zu einem Dopplereffekt Veranlassung gibt, sodann die Zusammenstöße, welche eine rein periodische Schwingung in den Zentren durch plötzliche Phasenänderungen unmöglich machen. Die Wirkung einer eigentlichen Dämpfung (durch die Ausstrahlung selbst oder eine Art Reibungskraft) ist, wie es scheint, weniger in Betracht gezogen worden.

Dagegen spielte die Berücksichtigung eigentlicher dämpfender Kräfte in der Theorie der Absorption die Hauptrolle, und es ist auffallend, daß an der Verschiedenheit der Gesetze für die Intensitätsverteilung, die auf den beiden Wegen über Emission und Absorption resultierten, nicht allzuviel Anstoß genommen zu sein scheint. Nach dem von mir wiederholt

¹⁾ Literatur bei H. Kayser, *Spektroskopie*, Bd. II. Leipzig 1902, p. 316 und 342 u. f. Besonders wichtig sind die Arbeiten von Lord Rayleigh, *Phil. Mag.* (5), 34. 407, 1892, *Scient. Papers* III, 258 und A. A. Michelson, *Astrophys. Journ.* 2, 251, 1895. Neuestens auch O. Schönrock, *Ann. d. Phys.* 22, 209, 1907.

eingenommenen Standpunkt ist der letztere Weg an sich als der zuverlässigere zu betrachten, da in den emittierenden Körpern die Zentren sich einander bei ihren Schwingungen bis zu einem gewissen Grade gegenseitig anpassen müssen, und da diese Anpassung in den Absorptionsbetrachtungen von vornherein eingeführt wird.

Herr Lorentz¹⁾ hat in einer bedeutungsvollen Arbeit den einen der im Eingang genannten für die Intensitätsverhältnisse maßgebenden Umstand: die Wirkung der Zusammenstöße auf die Phasen in die Absorptionsgleichungen eingeführt. Er zeigt, daß diese Wirkung derjenigen einer mit der Geschwindigkeit proportionalen dämpfenden Kraft äquivalent ist, findet aber, daß in den Fällen der Absorption von Kohlensäure ($\lambda = 2,60 \mu$) und von Natriumdampf ($\lambda = 0,589 \mu$) die aus den Daten der kinetischen Theorie berechnete Stoßzahl viel zu gering ist, um die Beobachtungen zu erklären. Er folgert daraus, daß andere, wahrscheinlich innermolekulare Vorgänge von ungleich größerer Heftigkeit, als die der molekularen Stöße, existieren und u. U. optisch wirksam werden möchten.

Nun hat aber Herr Lorentz im Interesse der Einfachheit der Rechnung die Translationsbewegung der Emissions- resp. Absorptionszentren ignoriert. Da im hiesigen Institut von verschiedenen Seiten über die Intensitätsverteilung in Emissions- und Absorptionslinien gearbeitet ist, so schien es mir lohnend, eine Untersuchung darüber anzustellen, welchen Einfluß die Translationsbewegungen in Kombination mit den Zusammenstößen auf den Absorptionsvorgang haben. Eine solche Rechnung gebietet sich um so mehr, als man leicht überschlagen kann, daß unter häufig beim Experiment realisierten Bedingungen der Effekt der Translation denjenigen der Zusammenstöße weit übertrifft. Der Allgemeinheit halber ist bei den folgenden Entwicklungen neben diesen beiden Umständen zunächst auch noch eine dämpfende Reibungskraft (proportional mit der Geschwindigkeit der Oszillation) zugelassen; doch wird

1) H. A. Lorentz, Amsterd. Proc. 1906, p. 591.

bei den Anwendungen der allgemeinen Resultate zur Erklärung spezieller Tatsachen das Hauptgewicht auf die Frage gelegt werden, ob die Tatsachen sich ohne Heranziehung einer Reibungskraft erklären lassen.

2. Für die Behandlung der gleichzeitigen Einwirkung von Translationen und von Stößen lege ich die Vorstellung zu Grunde, daß die Elektronen je innerhalb einer homogenen, positiven Kugel beweglich sind, die ihrerseits im Molekül fest ist oder gar dasselbe direkt repräsentiert. Die Kugelzentra bewegen sich zwischen zwei Zusammenstößen geradlinig mit der Geschwindigkeit $V(u, v, w)$, die nach dem Maxwell'schen Gesetz auf die Moleküle verteilt sein mag. $E(X, Y, Z)$ und $H(A, B, C)$ sind die in der Lichtwelle schwingenden Feldstärken; m sei die träge Masse, ε die Ladung des Elektrons, x, y, z seien seine Koordinaten, a, b, c diejenigen des Zentrums der positiven Kugel. Es ist dann z. B.

$$a = a_0 + ut, \quad b = b_0 + vt, \quad c = c_0 + wt.$$

Nehmen wir die elektrische Schwingung in der Welle der X -Achse parallel an, so sind die bezüglichen Bewegungsgleichungen für das Elektron:

$$\begin{aligned} m x'' + h(x' - a') + k(x - a) &= \varepsilon X_0 \\ m y'' + h(y' - b') + k(y - b) &= 0 \\ m z'' + h(z' - c') + k(z - c) &= 0; \end{aligned} \quad 1)$$

dabei sind durch die Indizes ($'$) die ganzen zeitlichen Änderungen der Koordinaten x, y, z, a, b, c angedeutet; X_0 bezieht sich auf den Ort des Elektrons; da wir aber die Elongation aus dem Kugelzentrum als klein gegen die Wellenlänge betrachten, so können wir es auch auf den Ort des Kugelzentrums beziehen.

Schreitet eine ebene homogene Welle parallel zur Z -Achse fort, so ist allgemein

$$X = F e^{i x \left(t - \frac{z}{o} \right)}, \quad \frac{1}{o} = \frac{1 - i z}{\omega}. \quad 2)$$

In der ersten Formel (1) ist aber spezieller

$$\begin{aligned} X_0 &= F e^{i\nu \left(t - \frac{c}{o}\right)} = F e^{i\nu \left(t - \frac{c_0 + w t}{o}\right)} = F_1 e^{i\nu_1 t}, \\ F_1 &= F e^{-\frac{i\nu c_0}{o}}, \quad \nu_1 = \nu \left(1 - \frac{w}{o}\right) = \nu(1 - \beta\gamma), \end{aligned} \quad 3)$$

wobei $\frac{V}{o} = \beta$ und $\cos(V_1 z) = \cos \vartheta = \gamma$ gesetzt ist.

Wir haben also, wenn wir

$$\xi - a = \xi, \quad \eta - b = \eta, \quad \zeta - c = \zeta$$

setzen:

$$\begin{aligned} m \xi'' + h \xi' + k \xi &= \varepsilon F_1 e^{i\nu_1 t} \\ m \eta'' + h \eta' + k \eta &= 0 \\ m \zeta'' + h \zeta' + k \zeta &= 0. \end{aligned} \quad 4)$$

Diese Gleichungen werden integriert durch:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{\varepsilon F_1 e^{i\nu_1 t}}{m(q_1 - i\nu_1)(q_2 - i\nu_1)} + C_1 e^{q_1 t} + C_2 e^{q_2 t} \\ \eta &= C_1' e^{q_1 t} + C_2' e^{q_2 t} \\ \zeta &= C_1'' e^{q_1 t} + C_2'' e^{q_2 t}, \end{aligned} \quad 5)$$

wobei

$$q_1 = i \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{h^2}{4m^2}} - \frac{h}{2m}, \quad q_2 = -i \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{h^2}{4m^2}} - \frac{h}{2m}$$

ist, und die C_1, C_2 Konstanten sind, die sich aus dem Zustand bestimmen, in dem sich im Zeitpunkt $t = t_0$ unmittelbar nach dem letztvergangenen Stoß das Elektron befand. Da weiter die Summe über die Wirkung sehr vieler Elektronen genommen werden wird, und da positive und negative Elongationen und Geschwindigkeiten nach dem Stoß als gleich wahrscheinlich gelten dürfen, so kann man von vornherein (wie auch Herr Lorentz¹⁾ tut) so rechnen, als ob direkt nach dem Stoß $\xi, \eta, \zeta, \xi', \eta', \zeta'$ verschwänden. Hier resultiert, wenn $t - t_0 = T$ gesetzt wird:

1) H. A. Lorentz, l. c., p. 596.

$$\xi = \frac{\varepsilon F_1 e^{i v_1 t}}{m} \left\{ \frac{1}{(q_1 - i v_1)(q_2 - i v_1)} + \frac{e^{(q_1 - i v_1) T}}{(q_1 - i v_1)(q_1 - q_2)} - \frac{e^{(q_2 - i v_1) T}}{(q_2 - i v_1)(q_1 - q_2)} \right\}, \quad (6)$$

$\eta = 0, \quad \zeta = 0.$

Zu berechnen ist $\frac{\partial}{\partial t} \Sigma \varepsilon \xi$, die Summe Σ über alle Elektronen der Volumeneinheit erstreckt: wegen der Gleichwertigkeit der $+X$ - und der $-X$ -Richtung ist dabei $\frac{\partial}{\partial t} \Sigma \varepsilon \xi = \frac{\partial}{\partial t} \Sigma \varepsilon \xi$.

Bezeichnet N_v die Anzahl der Moleküle der Volumeneinheit mit Geschwindigkeiten zwischen V und $V + dV$, und τ deren mittlere freie Flugzeit, so ist die Anzahl derjenigen Moleküle, die zur Zeit t die Flugzeit T bis $T + dT$ hinter sich hat,

$$dN_v = N_v \frac{dT}{\tau} e^{-\frac{T}{\tau}}. \quad (7)$$

Von diesen dN_v -Molekülen hat eine Flugrichtung innerhalb eines Elementarkegels $\sin \vartheta d\vartheta d\varphi = -d\gamma d\varphi$ der Bruchteil

$$d'N_v = -dN_v \frac{d\gamma d\varphi}{4\pi} \quad (8)$$

gehabt; die Summe $\Sigma \varepsilon \xi$ bedeutet also in Wahrheit eine über T , über V , über γ , über φ .

Dabei ist zu bedenken, daß die Differentiation $\frac{\partial}{\partial t}$ eine komplizierte Bedeutung dadurch besitzt, daß ξ durch (6) gar nicht als Funktion von t und z ausgedrückt ist, daß aber $\frac{\partial}{\partial t}$ die Differentiation bei konstantem z bezeichnet.

Um $\frac{\partial}{\partial t}$ zu berechnen, hat man sich zu denken, daß in jedes Element einer Wellenebene z , wo sich zur Zeit t das Zentrum einer bestimmten positiven Kugel mit einem Elektron (a) befindet, zur Zeit $t + \delta t$ das Zentrum einer anderen Kugel mit einem anderen Elektron (b) kommt. Dann gilt

$$\frac{\Sigma e \xi_b - \Sigma e \xi_a}{\delta t} = \frac{\partial}{\partial t} \Sigma e \xi. \quad 9)$$

Nun muß das Zentrum einer positiven Kugel, das zur Zeit $t + \delta t$ die Koordinate c hat, falls es mit der Geschwindigkeit $w \parallel z$ bewegt wird, zur Zeit t die Koordinate $c - w \delta t$ gehabt haben. Demgemäß hat obige Formel die Bedeutung

$$\Sigma \frac{e}{\delta t} [\xi(t + \delta t, c - w \delta t)_b - \xi(t, c)_a] = \frac{\partial}{\partial t} \Sigma e \xi. \quad 10)$$

Dabei können wir in der Differenz jederzeit zwei Kugeln mit derselben Flugdauer T in der Ebene z , mit derselben Größe und Richtung der Translationsgeschwindigkeit zusammenfassen. Demgemäß läßt sich die Klammer auch schreiben, indem man das konstant gehaltene Argument durch einen Index andeutet:

$$\frac{\partial \xi}{\partial c} \delta t - \frac{\partial \xi}{\partial t} w \delta t.$$

Nun enthält aber ξ die Argumente t und c nur in der Verbindung $t - \frac{c}{o}$, es ist also

$$\frac{\partial \xi}{\partial c} = - \frac{1}{o} \frac{\partial \xi}{\partial t},$$

und wir erhalten schließlich aus (10)

$$\frac{\partial}{\partial t} \Sigma e \xi = \frac{\partial}{\partial t} \Sigma e \xi = \Sigma e \left(1 + \frac{w}{o} \right) \frac{\partial \xi}{\partial t} = i \nu \Sigma e (1 + \beta \gamma) \xi. \quad 11)$$

Das Auftreten des Faktors $1 + \frac{w}{o}$ verifiziert sich leicht, wenn man ein durchsichtiges Medium, also ein reelles $o = \omega$, und daneben eine Translationsgeschwindigkeit $w = -\omega$ voraussetzt. Solche Elektronen geben keinen Beitrag zu $\frac{\partial}{\partial t}$. In der Tat hat ein von z um $+\delta z$ abliegendes Elektron eine um $\frac{\delta z}{\omega}$ frühere Phase; wenn also $\frac{\delta z}{\delta t} = \omega$ ist, ändert sich seine Phase während des Fluges gerade so, daß sie in z mit der dort vor δt herrschenden übereinstimmt.

Der Ausdruck (11) ist nun an der Stelle $c = z$ zu nehmen, es ist somit nach (2) und (3) in dem Ausdruck (6) für ξ jetzt $F_1 e^{i r_1 t}$ mit X zu vertauschen.

Die Grenzen für die noch auszuführenden Summen sind

$$0 < T < \infty, \quad 0 < \varphi < 2\pi, \quad -1 < \gamma < +1, \quad 0 < V < \infty.$$

Die ersten beiden Integrationen sind leicht zu bilden; wir schreiben das Resultat

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum \varepsilon \xi = i r X J, \tag{12}$$

$$J = \frac{\varepsilon^2}{2m} \sum_v N_v \int_{-1}^{+1} \frac{(1 + \beta \gamma) d\gamma}{\left(q_1 - i r(1 - \beta \gamma) - \frac{1}{\tau}\right) \cdot \left(q_2 - i r(1 - \beta \gamma) - \frac{1}{\tau}\right)}.$$

4. Nach den allgemeinen Gleichungen der Elektronentheorie der Dispersion und Absorption haben wir für die betrachtete Welle die Beziehungen

$$\frac{\partial X}{\partial t} + 4\pi \frac{\partial \sum \varepsilon \xi}{\partial t} = -c \frac{\partial B}{\partial z}, \tag{13}$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = -c \frac{\partial X}{\partial z}.$$

somit also bei Einführung des komplexen Brechungsindex n

$$X(1 + 4\pi J) = nB, \quad B = nX$$

und

$$n^2 - 1 = 4\pi J. \tag{14}$$

Setzt man kurz

$$\frac{h}{m} = v_0^2, \quad \frac{h}{m} = v'^2, \quad \sqrt{v_0^2 - \frac{1}{4} v'^2} = r, \quad \frac{1}{2} v' + \frac{1}{\tau} = a, \tag{15}$$

so wird

$$J = \frac{\varepsilon^2}{4 i m r v'^2} \sum_v \frac{N_v}{\beta} \left\{ (i(2r - r) + a) \ln \frac{i(r - v(1 - \beta)) - a}{i(r - v(1 + \beta)) - a} \right. \\ \left. - (i(2v + r) + a) \ln \frac{i(r + v(1 - \beta)) + a}{i(r + v(1 + \beta)) + a} \right\}. \tag{16}$$

Ist $a = 0$, d. h., sieht man von Reibungskräften und von Zusammenstößen ab, so wird J reell; die Absorption ist dann auf die Gebiete beschränkt, wo (14) einen negativen Wert für n^2 liefert. Es ist bequem, diesen Grenzfall zu vermeiden.

Um die komplizierte Formel (16) für die Anwendung zu vereinfachen, wollen wir zunächst die Reibungskraft, also ν' , gleich Null setzen. Hierdurch wird

$$\nu = \nu_0, \quad \alpha = \frac{1}{\tau}, \quad (17)$$

und α erhält die Bedeutung der mittleren Stoßzahl des Moleküles von der Geschwindigkeit V pro Zeiteinheit. Ferner beschränken wir uns auf die nächste Umgebung der Eigenfrequenz ν_0 , setzen also

$$\nu = \nu_0 + \mu, \quad (18)$$

wobei μ klein neben ν_0 ist, und in mit α oder β multiplizierten Gliedern $\nu = \nu_0$.

Die Argumente der beiden Logarithmen werden hierdurch zu

$$\frac{i(\mu - \nu_0 \beta) + \alpha}{i(\mu + \nu_0 \beta) + \alpha} \quad \text{resp.} \quad \frac{i(2\nu_0 + \mu - \nu_0 \beta) + \alpha}{i(2\nu_0 + \mu + \nu_0 \beta) + \alpha};$$

dies zweite ergibt also (wegen des dominierenden $2\nu_0$) in der Umgebung der Eigenfrequenz ν_0 , d. h. für μ nahe $= 0$, kein singuläres Verhalten. Das ganze zweite Glied ist dort überdies klein neben dem ersten und kann somit fortbleiben.

So erhalten wir, indem noch der Faktor $i(2\nu - \nu) + \alpha$ mit $i\nu_0$ vertauscht und $\nu_0 \beta$ in β' abgekürzt wird, erheblich einfacher aus (16)

$$n^2 - 1 = 4\pi J = \frac{\pi \varepsilon^2}{m \nu_0} \sum_{\nu} \frac{N_{\nu}}{\beta'} \ln \frac{\mu - \beta' - i\alpha}{\mu + \beta' - i\alpha}. \quad (19)$$

Zu der Formel (19) ist zunächst zu bemerken, daß sie im Grunde nicht so einfach, wie es den Anschein hat, $n^2 - 1$ bestimmt, denn das rechts auftretende

$$\beta' = \nu_0 \beta = \nu_0 \frac{V}{c} = \nu_0 n \frac{V}{c} = \nu_0 n (1 - i\kappa) \frac{V}{c}$$

enthält selbst noch den komplexen Brechungsindex n in sich. Indessen hat dies praktisch geringe Bedeutung, da eine Vergleichung mit der Beobachtung in jedem Falle nur angenähert stattfinden kann. Es ist daher zulässig, in dem Ausdruck für β' das $i\kappa$ neben Eins zu vernachlässigen und auch n mit Eins zu vertauschen, so daß dadurch wird

$$\beta' = r_0 \frac{V}{c}. \quad (20)$$

Nun ist der negative imaginäre Teil von $n^2 - 1$ gleich $2in^2\kappa$, unter n den reellen Brechungsindex, unter κ den Absorptionsindex verstanden. Demgemäß ergibt sich

$$2n^2\kappa = \frac{\pi \varepsilon^2}{m r_0} \sum_v \frac{N_v}{\beta'} \arctg \frac{2a\beta'}{\mu^2 + a^2 - \beta'^2}. \quad (21)$$

$n\kappa$, der Absorptionskoeffizient, ist an sich Gegenstand der Beobachtung; überdies mißt auch das Produkt aus $n\kappa$ in das normale Emissionsvermögen ε der schwarzen Ebene in den leeren Raum (bezogen auf die Farbe und die Temperatur, für welche $n\kappa$ gilt) direkt die Emission einer dünnen Schicht des bez. Körpers in eine gleichartige Umgebung, — eine Größe, welche den Ausgangspunkt bildet für die Berechnung der Emission beliebig dicker Schichten¹⁾. Dabei ist für Dämpfe meist n mit Eins vertauschbar.

Man gelangt von der Formel (21) zu der älteren, bei einer bloßen Reibungskraft geltenden, indem man β' gegen Null konvergieren läßt und a mit $\frac{1}{2}r'$ vertauscht. Man sieht, daß die neue Formel sehr stark von der älteren abweicht. Der reelle Teil der Formel (19), welcher zu einem Ausdruck für $n^2(1 - \kappa^2) - 1$ führt, zeigt ähnliche Abweichungen. Seine Untersuchung fällt außerhalb der in dieser Mitteilung verfolgten Ziele und bleibt einer anderen Publikation vorbehalten.

5. Es bleibt nun noch, um die Formel (21) gebrauchsfertig zu machen, die Summation über V auszuführen, wobei für a und für N_v die bekannten Ausdrücke zu setzen sind. Wegen der

¹⁾ W. Voigt, Gött. Nachr. 1911, p. 71; Ann. d. Phys. 39, 1381, 1912.

großen Komplikation derselben wollen wir uns zunächst damit begnügen, statt der nach dem Maxwell'schen Gesetz variablen Geschwindigkeit V ihren Mittelwert \bar{V} zu benutzen. Dann wird N_v zu der Gesamtzahl N der Moleküle in der Volumeneinheit und a konstant, so daß resultiert

$$2 n^2 z = \frac{\pi \varepsilon^2 N}{m v_0 \beta'} \operatorname{arctg} \frac{2 a \beta'}{\mu^2 + a^2 - \beta'^2}. \quad (22)$$

Wenn β' klein gegen a ist, d. h. die Wirkung der Translation klein gegen diejenige der Stöße, so kommt diese Formel wesentlich auf die bei Vernachlässigung der Translation geltende

$$n^2 z = \frac{\pi \varepsilon^2 N a}{m v_0 (\mu^2 + a^2)} \quad (23)$$

heraus. Ist β' hingegen merklich neben a , so gibt Formel (22) eine beträchtliche Verbreiterung der Absorptionsstreifen gegenüber (23). Für $a = \beta'$ z. B. nach (22)

$$2 n^2 z = \frac{\pi \varepsilon^2 N}{m v_0 a} \operatorname{artg} \frac{2 a^2}{\mu^2}. \quad (24)$$

Während nach (23) $n^2 z$ auf die Hälfte sinkt, wenn μ von 0 bis $\mu_1 = a$ wächst, so sinkt es unter den gleichen Umständen nach (24) nur etwa auf den 0,7^{ten} Teil.

Der Gegensatz steigert sich, wenn a sogar klein ist gegen β' , wie dies bei verdünnten Gasen zutrifft. Ist z. B. auch nur $\beta' = 2a$, so resultiert unter den oben vorausgesetzten Umständen eine Abnahme auf den 0,9^{ten} Teil.

Für weitergehende numerische Verwertung der Formel (22) ist zu benutzen, daß, wenn nur eine Art von Molekülen vom Radius s vorhanden ist, a gegeben wird durch

$$a = \pi N s^2 \bar{V} \sqrt{2}. \quad (25)$$

Bei Kohlensäure¹⁾ ist bei 0° C $\bar{V} = 3,6 \cdot 10^4$, ferner bei Atmosphärendruck $\pi N s^2 = 1,08 \cdot 10^5$. Angewendet auf den

¹⁾ Die Zahlwerte sind entnommen aus O. E. Meyers Kinetischer Theorie der Gase. Breslau 1899.

von Ångström untersuchten und von Lorentz diskutierten Absorptionsstreifen bei $\lambda = 2,6 \cdot 10^{-4}$ ($\nu_0 = 7 \cdot 10^{14}$) wird dann hier

$$\alpha = 5,5 \cdot 10^9, \quad \beta' = 8,4 \cdot 10^8.$$

Ferner entspricht einem Zuwachs der Wellenlänge um $\delta\lambda$ ein μ , gegeben durch

$$7 \cdot 10^{14} \cdot \frac{\delta\lambda}{\lambda} = \mu.$$

Wenn also Ångström eine Abnahme der Absorption vom Maximum auf die Hälfte innerhalb der Breite $0,3 \cdot 10^{-4}$ beobachtet hat, so würde dies $\mu_1 = 0,8 \cdot 10^{14}$ verlangen. Die Rechnung ergibt, daß nach der Formel (22) $\mu_1 = 0,6 \cdot 10^{10}$, also viel kleiner werden würde. Der Einfluß der Translationsbewegung ist in diesem Falle ganz unbedeutend, denn zu einem ganz ähnlichen Verhältnisse gelangt Herr Lorentz bei deren Vernachlässigung.

Immerhin könnte man die Kraft dieses Widerspruches schwächen durch die Bemerkung, daß über die Konstitution des bez. Absorptionsstreifens gar nichts bekannt ist, daß derselbe z. B. die Anhäufung sehr vieler sehr schmaler Streifen darstellen könnte, wie man dergleichen in den Bandenspektren direkt nachweisen kann.

Solche Möglichkeiten werden nahegelegt durch die Tatsache, daß in anderen Fällen die Formel (22) sich mit der Erfahrung unschwierig in Einklang bringen zu lassen scheint.

6. Über die Konstitution einer durch einen Metaldampf gefärbten Flamme wird man sich nach der Gesamtheit der Erfahrungstatsachen die Vorstellung machen dürfen, daß einer sehr großen Anzahl von Molekülen der Verbrennungsprodukte des Gases eine relativ kleine Zahl von Metallatomen gegenübersteht, und daß unter diesen wieder nur ein Bruchteil — wahrscheinlich die mit den größten Geschwindigkeiten behafteten — sich in dem Zustand befindet, in dem sie emittieren und absorbieren. Wir können demgemäß in erster Annäherung die wechselseitigen Stöße zwischen den Metallatomen vernach-

lässigen und die Stoßzahl α nur auf die Stöße der Metallatome gegen die Moleküle der Verbrennungsprodukte deuten.

Als Verbrennungsprodukte der Bunsenflamme betrachten wir in erster Linie Kohlensäure und Wasserdampf, deren Molekulargewichte so wenig voneinander abweichen, daß wir das Mittel aus beiden benutzen können. Es ist dann für α die Formel heranzuziehen

$$\alpha = \pi s_1^2 N_1 \bar{V} \sqrt{\frac{M + M_1}{M_1}}, \quad (26)$$

wobei s_1 , N_1 , M_1 sich auf die Verbrennungsprodukte, \bar{V} und M aber auf das Metallatom beziehen.

$\pi N_1 s_1^2$ wird bei 0° C und Atmosphärendruck für ein Gemisch der genannten Dämpfe rund 10^5 zu setzen sein, bei der Temperatur von 1500° C der Bunsenflamme etwa $0,16 \cdot 10^5$. Wählen wir als die Flamme färbendes Metall Natrium in Atomen, so können wir

$$\frac{M}{M_1} = \frac{23}{31} = 0,74$$

setzen, dazu $\bar{V} = 1,2 \cdot 10^5$. Ferner ist für die D -Linien $\nu_0 = 3,2 \cdot 10^{15}$.

Hieraus folgt dann

$$\alpha = 0,25 \cdot 10^{10}, \quad \beta' = 1,3 \cdot 10^{10}.$$

Für $\mu = 0$ ergibt sich hieraus

$$\operatorname{arctg} \frac{2 \alpha \beta'}{\alpha^2 - \beta'^2} = 2,8,$$

und

$$\operatorname{arctg} \frac{2 \alpha \beta'}{\mu_1^2 + \alpha^2 - \beta'^2} = 1,4$$

liefert für die Halbwertsbreite $2\mu_1$ (die ich in meiner „Magnetoptik“ mit ν' bezeichne) den Wert $3,8 \cdot 10^{10}$.

Die Beobachtungen¹⁾ Herrn Iwanows mit Bunsenflammen und mit geringer Dampfdichte haben für $2\mu_1$ ($= \nu'$) Werte von

¹⁾ K. Iwanow. Phys. Zeitschr. 13, 000, 1912.

der Ordnung $11 \cdot 10^{10}$ geliefert. Man sieht also, daß man nur die mittlere Geschwindigkeit der emittierenden und absorbierenden Na-Atome gleich dem dreifachen des theoretischen Mittels für alle Atome zu setzen hätte, um eine Übereinstimmung zwischen Formel und Tatsachen herzustellen.

Es scheint übrigens, daß man zu einer solchen Annahme nicht einmal gezwungen ist. Herr Iwanow hat gefunden, daß auch bei der geringen Dampfdichte, welche ihm den Wert $2\mu_1 = 11 \cdot 10^{10}$ ergeben hat, noch nicht ein konstanter Grenzwert der Halbwertsbreite $2\mu_1$ erreicht war (was obige Betrachtung offenbar voraussetzt), vielmehr $2\mu_1$ mit wachsender Dampfdichte beträchtlich wuchs. Dies deutet darauf hin, daß unter den Umständen der Beobachtung die Zusammenstöße zwischen den Na-Atomen noch nicht (wie oben angenommen), gegenüber denen von Na-Atomen und anderen Molekülen vernachlässigt werden durften, vielmehr bei ihrer Berechnung zu einem Glied von der Form (26) für α noch ein weiteres von der Form (25) zu fügen ist, welches die Anzahl N der (wirksamen) Na-Atome im Faktor enthält. Möglicherweise ist der Grenzwert $2\mu_1$ für unendlich dünnen Na-Dampf beträchtlich kleiner als $11 \cdot 10^{10}$ und nicht gar weit von $3,8 \cdot 10^{10}$ entfernt.

Wenn letzteres nicht stattfinden sollte, so würde allerdings anzunehmen sein, daß die absorbierenden und emittierenden Na-Atome eine größere mittlere Geschwindigkeit besitzen, als ihrem Molekulargewicht entspricht. Das könnte sich entweder so erklären, daß überhaupt nur die schnelleren Atome in dem bez. Zustand sind, oder aber, daß für die Na-Atome in der Flamme das thermodynamische Gleichgewicht mit den Molekülen der Verbrennungsgase nicht völlig hergestellt ist, sondern infolge spezieller chemischer Vorgänge ihre mittlere Geschwindigkeit etwas größer ist als die thermodynamisch berechnete.

Für ein hochverdünntes Gas wird α sehr klein gegen β , sein, sonach für $\mu = 0$ merklich gelten

$$\operatorname{arctg} \frac{2\alpha\beta'}{\alpha^2 - \beta'^2} = \pi = 3,14.$$

Die halbe Halbwertsbreite μ_1 ist dann genügend genau durch β' gegeben. Für Wasserstoff erhält man so

$$2 \mu_1 = 3.4 \cdot 10^{10} \sqrt{\frac{\vartheta}{\vartheta_0}},$$

wobei ϑ die Temperatur des emittierenden Gases und $\vartheta_0 = 273$ ist. Bei Beobachtungen mit Geißler-Röhren sind bei der roten *H*-Linie Halbwertsbreiten in der Größenordnung von 0,1 A. E. gefunden worden¹⁾. Dem würde $2 \mu_1 = 4,6 \cdot 10^{10}$ entsprechen; man braucht also den emittierenden *H*-Atomen gar keine hohen Temperaturen beizulegen, um Übereinstimmung zu erhalten.

7. Um die Verschiedenheit der Geschwindigkeiten V der verschiedenen Moleküle zu berücksichtigen, ist in die Formel (20) zunächst das Maxwellsche Verteilungsgesetz einzuführen, d. h.

$$N_e = \frac{4 N}{\sqrt{\pi} W^3} V^2 dV e^{-\frac{V^2}{W^2}} \quad (27)$$

zu setzen, wobei W , die wahrscheinlichste Geschwindigkeit, gegeben ist durch

$$\bar{V} = \frac{2 W}{\sqrt{\pi}}, \quad W^2 = \frac{\pi}{4} \bar{V}^2. \quad (28)$$

Ferner ist für die Stoßzahl bei Annahme nur einer Molekül-gattung zu setzen

$$a = \frac{1}{\pi} N s^2 \left\{ W e^{-\frac{V^2}{W^2}} + \frac{2 V^2 + W^2}{V} \int_0^{\frac{r}{w}} dx e^{-x^2} \right\}, \quad (29)$$

oder in einer guten Annäherung auch

$$a = \pi N s^2 \sqrt{V^2 + W^2}, \quad (30)$$

in einer geringeren

$$a = \pi N s^2 \sqrt{V^2 + W^2}; \quad (31)$$

¹⁾ H. Brothorus, Phys. Zeitschr. 12, 193, 1911. Andere Beobachtungen bei H. Buisson und Ch. Fabry, Journ. de Phys. (5) 2, 442, 1912.

ferner bleibt gültig

$$\beta' = r_0 \frac{V}{c}. \quad (32)$$

Der auf diese Weise entstehende Ausdruck für $2n^2\kappa$ ist höchst kompliziert und wohl nur auf graphischem Wege zu berechnen. Für die Einführung einer Annäherung setzen wir

$$\frac{V}{W} = y, \quad a = a\sqrt{1+y^2} \quad \beta' = by \quad (33)$$

und erhalten so:

$$n^2\kappa = \frac{2\sqrt{\pi}\epsilon^2 N}{m r_0 b} \int_0^{\infty} y e^{-y^2} dy \operatorname{arctg} \left(\frac{2aby\sqrt{1+y^2}}{\mu^2 + a^2 - (b^2 - a^2)y^2} \right). \quad (34)$$

Wir wollen nur den Fall eines neben b sehr kleinen a näher verfolgen, der bei verdünnten Gasen realisiert ist. Es kann dann a^2 neben b^2 vernachlässigt werden, und wenn

$$\mu^2 + a^2 = b^2 z^2 \quad (35)$$

gesetzt wird, so haben wir

$$n^2\kappa = \frac{\sqrt{\pi}\epsilon^2 N}{m r_0 b} \int_0^{\infty} 2y e^{-y^2} dy \operatorname{arctg} \left(\frac{2ay\sqrt{1+y^2}}{b(z^2 - y^2)} \right). \quad (36)$$

Im Grenzfall eines unendlich kleinen $\frac{a}{b}$ hat für $y < z$ der arctg den Wert Null, für $y > z$ den Wert π und die Integration liefert hier sehr einfach:

$$n^2\kappa = \frac{\sqrt{\pi^3}\epsilon^2 N}{m r_0 b} e^{-z^2}, \quad z^2 = \frac{\mu^2}{b^2}. \quad (37)$$

Es ist bemerkenswert, daß die Formel (36) für $n^2\kappa$ auch in diesem Grenzfall, der nach S. 610 im allgemeinen eine gewisse Schwierigkeit bietet, einen Wert für $n^2\kappa$ liefert. Derselbe entspricht ersichtlich dem Resultat der Lord Rayleigh'schen Behandlung des Emissionsvorganges.

Ist $\frac{a}{b}$ sehr klein, aber endlich, so kommt eine Korrektur K hinzu, die darauf beruht, daß (besonders in unmittelbarer Umgebung von $z = y$) das Argument des arctg von Null abweicht. Diese Korrektur ist gegeben durch

$$K = \frac{\sqrt{\pi} \varepsilon^2 N}{m v_0 b} \left\{ \int_0^z 2 y e^{-y^2} dy \text{arctg} \frac{2 a y \sqrt{1+y^2}}{b(\varepsilon^2 - y^2)} - \int_z^\infty 2 y e^{-y^2} dy \text{arctg} \frac{2 a y \sqrt{1+y^2}}{b(y^2 - \varepsilon^2)} \right\}. \quad (38)$$

Die Durchrechnung eines Beispiels (Wasserstoff unter $1/100$ Atmosphäre Druck, $a = 1,5 \cdot 10^7$, $b = 1,45 \cdot 10^{10}$) ergab mir, daß für nicht zu kleine z (z. B. $z > 1$) die beiden Integrale sich derartig kompensieren, daß man eine weitere Annäherung erhält, indem man

$$K = - \frac{\sqrt{\pi} \varepsilon^2 N}{m v_0 b} \int_z^\infty 2 y dy e^{-y^2} \cdot \frac{2 a}{b} = - 2 \frac{\sqrt{\pi} \varepsilon^2 N a}{m v_0 b^2} e^{-\varepsilon^2} \quad (39)$$

setzt. Es würde dann werden

$$n^2 z = \frac{\sqrt{\pi^3} \varepsilon^2 N}{m v_0 b} e^{-\varepsilon^2} \left(1 - \frac{2 a}{\pi b} \right). \quad (40)$$

Für kleinere z wird das Korrektionsglied etwas größer, für $z = 0$ etwa das 1.8 bis 2fache. Im Exponenten ist innerhalb der hier benutzten Annäherung statt (35) zu schreiben $\frac{\mu^2}{b^2}$, so daß also in der schließlichen Formel

$$n^2 z = \frac{\sqrt{\pi^3} \varepsilon^2 N}{m v_0 b} e^{-\frac{\mu^2}{b^2}} \left(1 - \frac{2 a \rho}{\pi b} \right), \quad (41)$$

(wobei $1 < \rho < 2$ und vielleicht $\rho = 1 + e^{-\frac{\mu^2}{b^2}}$ gesetzt werden

darf) der Einfluß der Translation (in b) und der Zusammenstöße (in a) zum Ausdruck kommt.

Die Halbwertsbreite berechnet sich, wenn man die Formel (41) mit der bez. Bemerkung für $\mu = 0$ anwendet, durch $\left(\frac{\mu_1^2}{b^2}\right) (\geq) 0,69, 2\mu_1 (\geq) 1,66.b$, wobei das Gleichheitszeichen verschwindendem a entspricht; bei Wasserstoff würde dies

$$2\mu_1 (>) 2,4 \cdot 10^{10} \sqrt{\frac{\partial}{\partial_0}}$$

ergeben. Es ist sehr auffallend, daß die Berücksichtigung der variablen Geschwindigkeiten V den Wert gegen den S. 616 angegebenen nicht vergrößert, sondern verkleinert¹⁾; es spielen also bei dem speziellen Vorgang die bez. V kleineren Geschwindigkeiten in Summa eine größere Rolle als die größeren. Eine Übereinstimmung der Formel mit der Beobachtung würde verlangen, daß die Temperatur der emittierenden Wasserstoffmoleküle im Geißler-Rohr nur etwa 100° C wäre. —

Zu den vorstehenden speziellen Resultaten mag schließlich noch eine wichtige allgemeine Bemerkung gefügt werden.

Erstens sei betont, daß die durchgeführten Rechnungen über die Größe der Halbwertsbreite nur einen Teil der in den allgemeinen Formeln enthaltenen Aussagen veranschaulichen. Von wesentlichem Interesse ist außer jener Größe auch der Gesamtverlauf von $n\lambda$ innerhalb einer Absorptionslinie. Die bez. Diskussion mag vertagt werden, zumal sie eine vorhergehende Vervollständigung des Beobachtungsmateriales erfordert. Bisher hat sich nach meinen Rechnungen die Unvereinbarkeit der älteren Formel mit der Beobachtung an Dämpfen und die Vereinbarkeit der neueren herausgestellt.

Ferner sei betont, daß die Halbwertsbreite $2\mu_1 (= \nu')$ einer Absorptions- oder Emissionslinie von der direkt wahrnehmbaren Gesamtbreite der bez. Linie ganz verschieden ist.

¹⁾ Gleiches findet übrigens Lord Rayleigh bei Behandlung der Emission. *Scient. Papers* III, 263.

Linien, denen die gleiche Halbwertsbreite entspricht, können ganz verschieden breit erscheinen. Die Halbwertsbreite charakterisiert die Geschwindigkeit der Intensitätsänderung innerhalb einer Linie; die wahrgenommene Gesamtbreite hängt ganz wesentlich von der absoluten Intensität ab. So ist es also nicht ausgeschlossen, daß verschiedene Linien desselben Spektrums, obwohl nach Intensität und scheinbarer Gesamtbreite verschieden, doch eine gleiche Halbwertsbreite besitzen. Systematische Beobachtungen über diese Verhältnisse fehlen noch. Sollte ihre Durchführung innerhalb eines Spektrums auf verschiedene $2\mu_1$ führen, so würde dies im Kreise der hier verfolgten Annahmen auf verschiedene Molekulgattungen als Emissionszentren hinweisen. Andeutungen solcher Verhältnisse werden durch andersartige Beobachtungen bekanntlich bereits geliefert.

Göttingen, Anfang November 1912.



LIBRARY
UNIVERSITY OF MICHIGAN
HOLLAND MI 48106-1301
506(473036)

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1912, Heft I

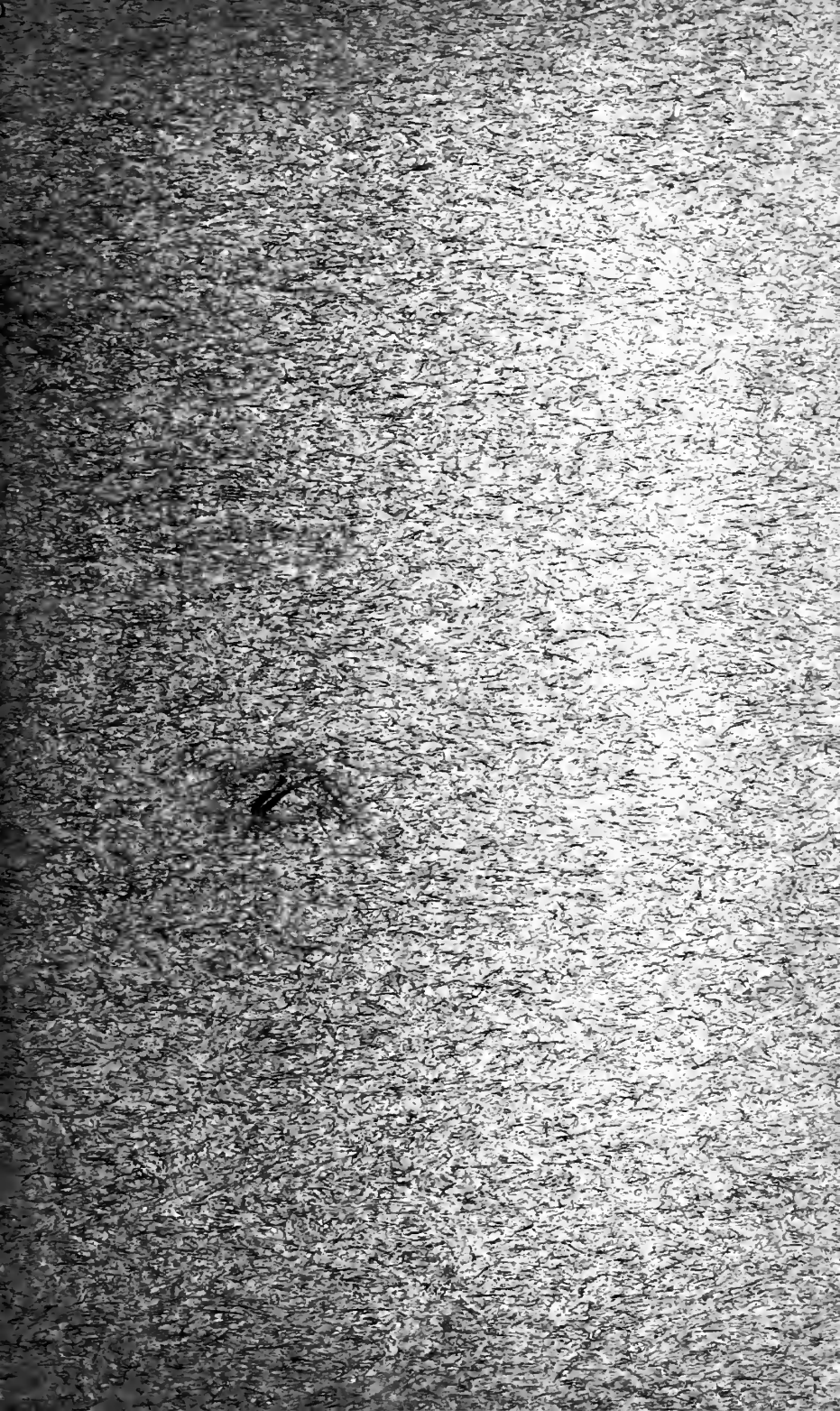
Januar- bis März-sitzung

München 1912

Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

ARVIND
150
MURRAY HILL
MIDTOWN MANHATTAN



Inhalt.

	Seite
Mitteilungen	
über die Klassensitzungen vom Januar, Februar und März	1*
Abhandlungen.	
S. Finsterwalder: Beobachtungen über die Art der Gletscherbewegung	1
A. Pringsheim: Über einige funktionentheoretische Anwendungen der Eulerschen Reihen-Transformation	11
K. Pressel: Zwei experimentelle Methoden zur Bestimmung der Form und Lage der Isothermflächen unterhalb der Erdoberfläche	93
H. Burkhardt: Die Untersuchungen von Cauchy und Poisson über Wasserwellen	97
S. Günther und F. Adami: Ein merkwürdiger Fall von Lokalmagnetismus an der bayerisch-sächsischen Grenze	121
A. Pringsheim: Über den Taylorscheu Lehrsatz für Funktionen einer reellen Veränderlichen	137

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

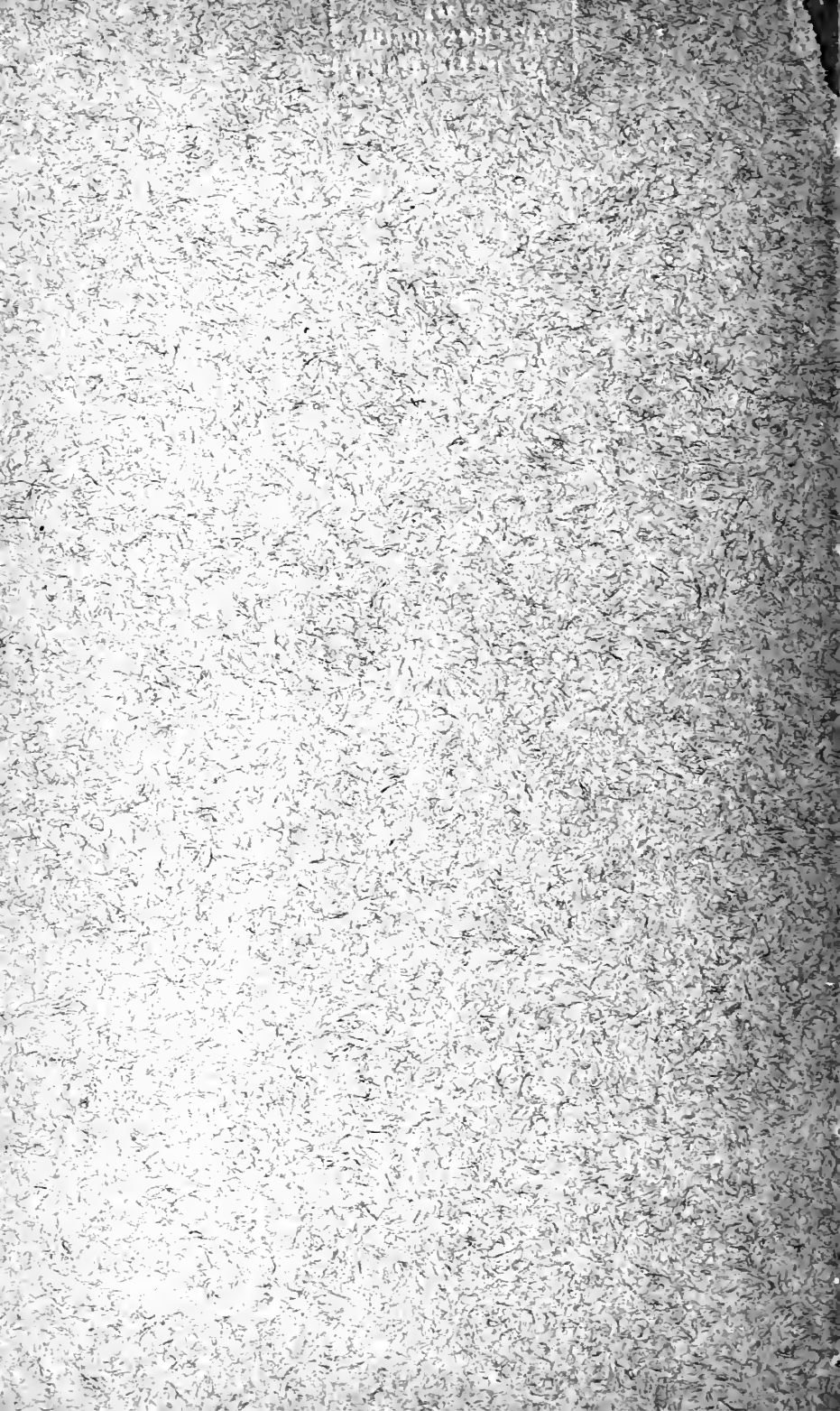
K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1912. Heft II
Mai- bis Julisitzung

München 1912

Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)





Inhalt.

Mitteilungen		Seite
über die Klassensitzungen vom Mai, Juni und Juli		7*
Abhandlungen.		
A. Föppl: Die Biegung einer kreisförmigen Platte		155
M. Schmidt: Neuberechnung des Anschlusses der südbayerischen Dreieckskette an die österreichische Triangulierung bei Salzburg und scheinbare Verschiebung der Hauptdreieckspunkte Watzmann und Rettenstein (mit 3 Tafeln)		191
E. Gehrcke: Über den Sinn der absoluten Bewegung von Körpern		209
Ch. Müntz: Aufbau der gesamten Geometrie auf Grund der projektiven Axiome allein		223
M. Lagally: Über eine dem Lambertischen Problem der acht Punkte verwandte Aufgabe		261
H. Liebmann: Das Pentagramma mirificum und die nichteuklidischen Parallelen		273
O. Haupt: Über die Entwicklung einer willkürlichen Funktion nach den Eigenfunktionen des Turbulenzproblems		289
W. Friedrich, P. Knipping und M. Laue: Interferenz-Erscheinungen bei Röntgenstrahlen (mit 5 Tafeln)		303
O. Szász: Über gewisse unendliche Kettenbruch-Determinanten und Kettenbrüche mit komplexen Elementen		323
M. Laue: Eine quantitative Prüfung der Theorie für die Interferenz-Erscheinungen bei Röntgenstrahlen		363
R. Seeliger: Bemerkungen über den Energieverlust von Elektronen beim Zusammenstoß mit Gasmolekülen		375
W. C. Röntgen: Bestimmungen des thermischen linearen Ausdehnungskoeffizienten von Cuprit und Diamant		381
J. Ranke: Die somatisch-anthropologische Abteilung der anthropologisch-prähistorischen Sammlung des Staates		389

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

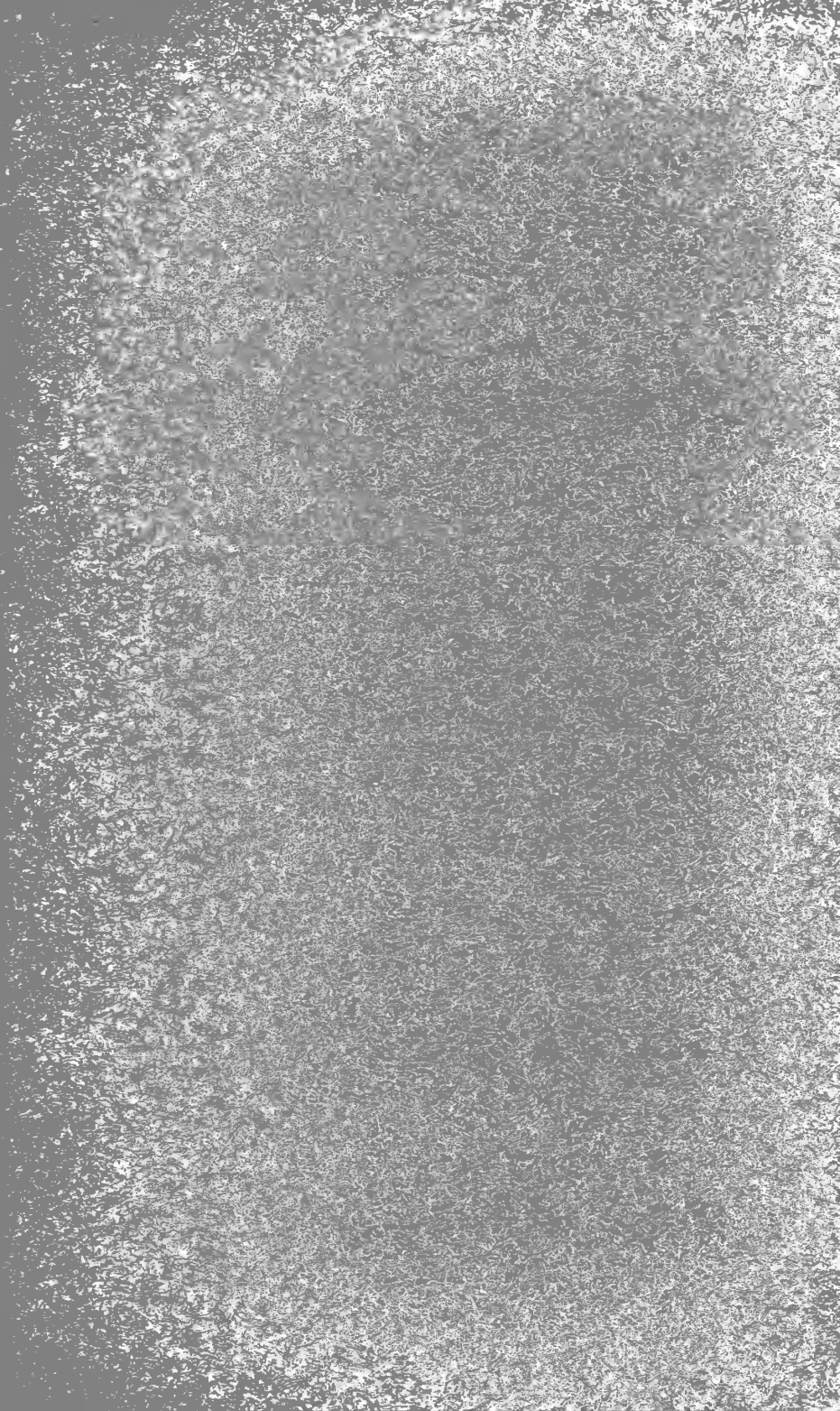
1912. Heft III

November- und Dezembersitzung

München 1912

Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

THE
MOUNTAIN STATE
MUSEUM

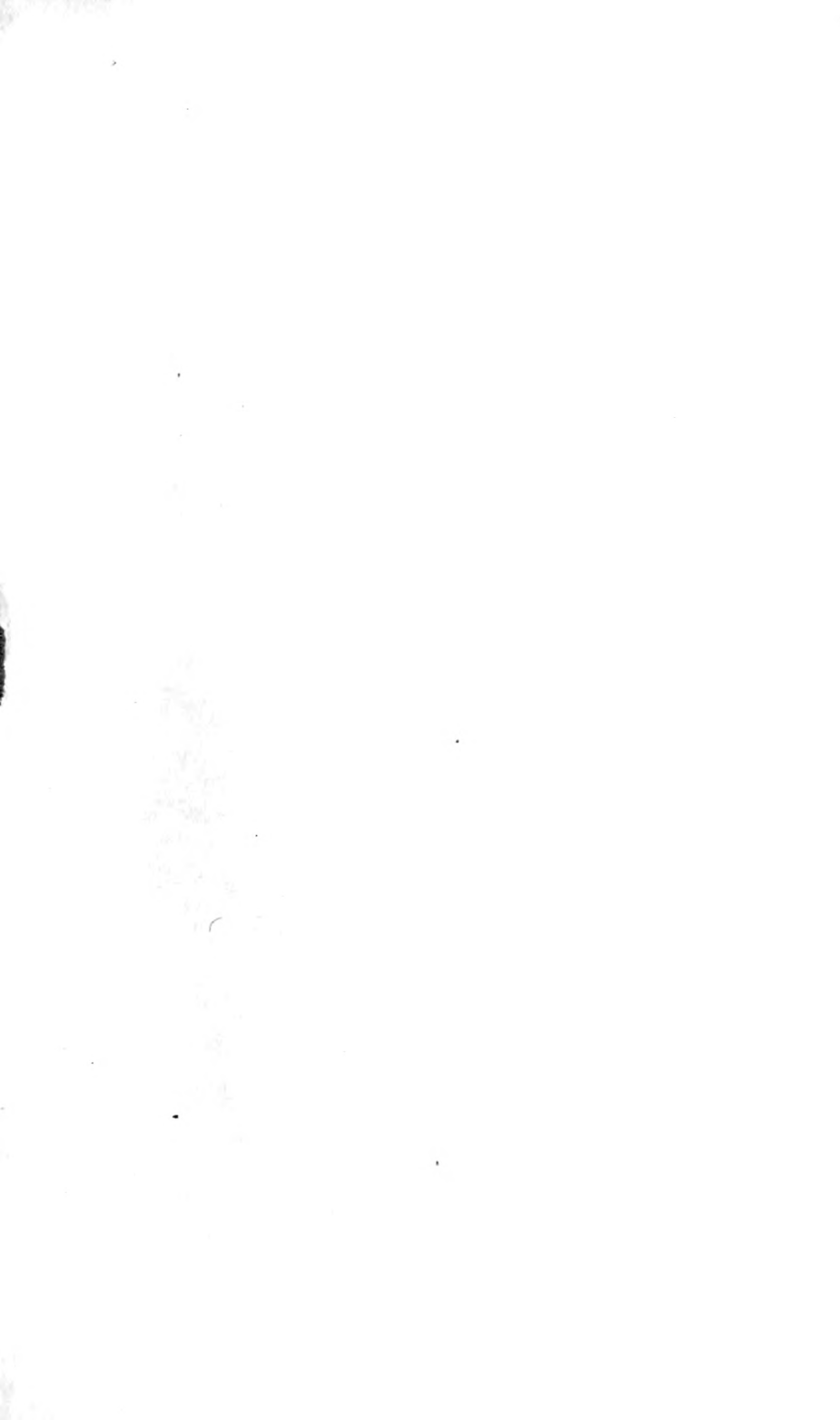


Inhalt.

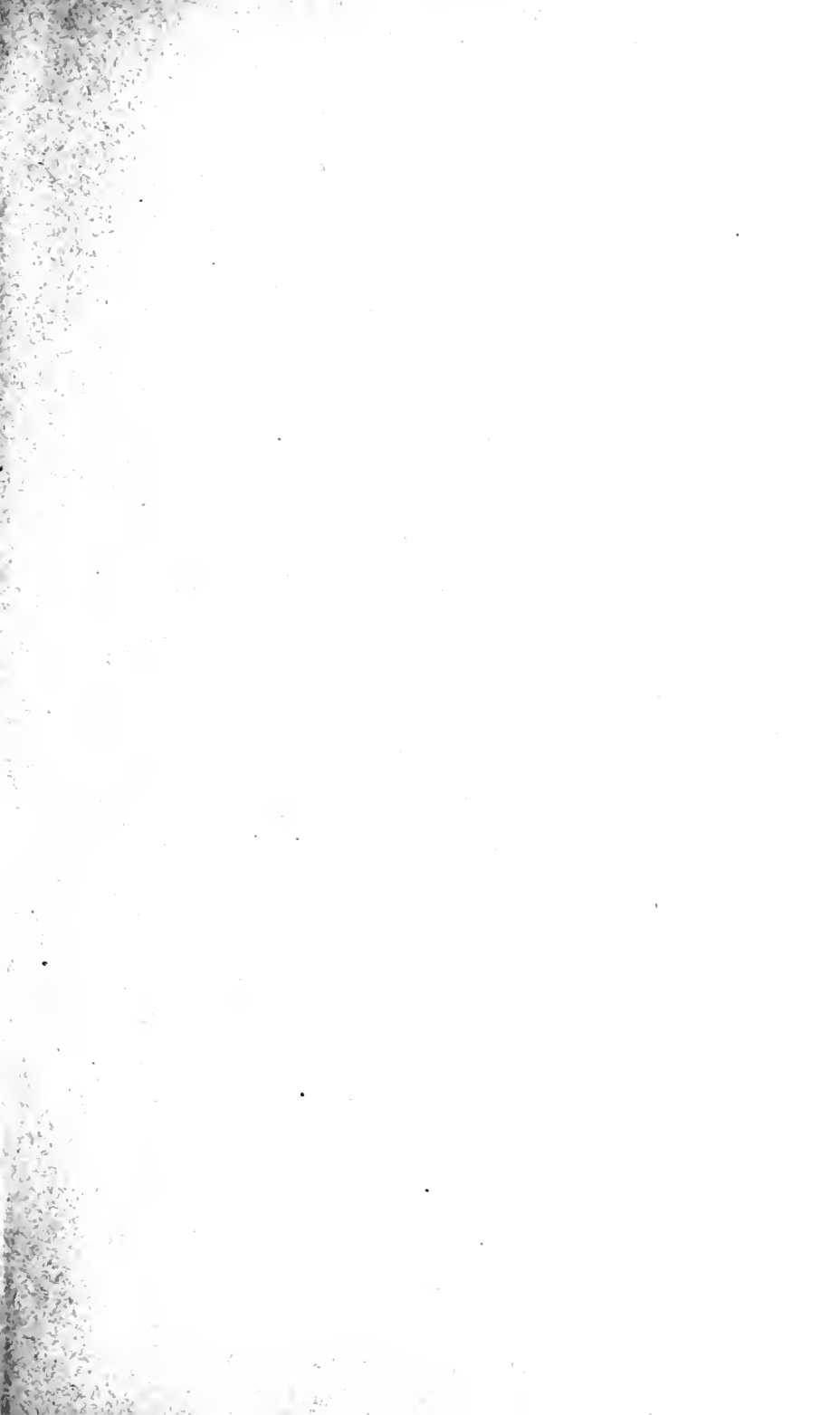
	Seite
Mitteilungen über die Klassensitzungen vom November und Dezember	15*
Verzeichnis der im Jahre 1912 eingelaufenen Druckschriften	21*

Abhandlungen.

H. Ebert: Protokoll der Sitzungen der luftelektrischen Kommission der kartellierten Deutschen Akademien zu München am 24. und 25. Mai 1912 samt den wissenschaftlichen Beilagen von H. Benndorf, J. Elster, H. Ebert, Th. Simon und K. E. F. Schmidt, als Berichte Nr. 1—5 (mit 1 Tafel)	391
H. Seeliger: Über die räumliche und scheinbare Verteilung der Sterne	451
P. Stäckel: Über die singulären Lösungen einer Differentialgleichung erster Ordnung mit zwei Veränderlichen, die zugleich partikuläre Integrale sind	511
A. Endrös: Vibrationsbeobachtungen in den oberbayerischen Seen und analoge Erscheinungen in den Meeren (mit 2 Tafeln)	515
H. Liebmann: Berührungstransformationen der geodätischen Linien	579
W. Voigt: Über das Gesetz der Intensitätsverteilung innerhalb der Linien eines Gasspektrums	603









er Wissen.

4725

1

AMNH LIBRARY



100229655