Pestalozzi's

sämmtliche Schriften.

Funfzehnter Band.

Mit fünf lithographirten Tafeln.

Mit den allergnädigsten Privilegien Ihrer Majestäten des Kaisers aller Reußen und Königs von Polen, des Königs von Preußen, des Königs von Bayern, des Königs von Würtemberg, Seiner Königl. Hoheit, des Großherzogs von Baden und der Hochlöblichen Cantons-Regierungen der Eidgenossenschaft.

Stuttgart und Tübingen,
in der J. G. Cotta'schen Buchhandlung.
1826.

Vorrede.

Indem ich hier mein Vorwort vom 14ten Band in Erinnerung bringe, habe ich rücksichtlich des Inhalts gegenwärtiger Schrift noch zu sagen:

Die Wichtigkeit der Zahl als Entwickelung der geistigen Anlagen des Kindes ist bis auf einen gewissen Punkt unter dem gebildetern Theil des Publikums anerkannt. Anders verhält es sich mit dem, was aus der Form und ihren Verhältnissen hervorgeht. Daher auch diesem Umstand die Ausführlichkeit ihrer Darlegung in diesem Bande zugeschrieben werden muß. Vorzüglich aber soll sie als Typus der Art und Weise dienen, wie jedes Unterrichtsfach nach den, in verschiedenen meiner Schriften niedergelegten Grundsäzen verwirklicht werden kann und auch verwirklicht werden wird. In der künftigen und lezten Lieferung wird durch die weitere Forsezung dieses Unterrichtsfaches die Anwendung desselben in ein möglich vollständiges Licht gesezt und in vielseitigen Uebungen dargelegt werden.

Die Rede, die ich als diesjähriger Präsident der helvetischen Gesellschaft am 26sten April in

Langenthal gehalten und in diesen Band aufzunehmen für nothwendig erachte, bitte ich vom Standpunkt aus in's Auge zu fassen, was besonders in einem Land, das durch die Folgen einer nicht solid begründeten Industrie in, dasselbe in sittlicher, geistiger, physischer und ökonomischer Hinsicht gefährdende Lagen versetzt worden, durch die Erziehung gethan werden kann und gethan werden muß, wenn den Uebeln, an denen Europa diesfalls mehr oder weniger allgemein leidet und an denen es nach und nach zu unterliegen gefahret, vorgebeugt und dieselben da, wo sie Fuß gegriffen, gemildert werden sollen. Eine tiefe und allgemeine Begründung des Volksunterrichts von der Wiege an ist eines der ersten und dringendsten Bedürfnisse der Zeit, und ein Mittel, das geeignet ist, diesem Ziel auf eine sichere Weise entgegenzuschreiten. Die zwey vorhergehenden sowohl, als auch den gegenwärtigen Band meiner Schriften bitte ich hauptsächlich von diesem Gesichtspunkt aus zu betrachten und ihnen diejenige Aufmerksamkeit zu schenken, die sie verdienen mögen.

Der Verfasser.

Neuhof, am 7ten Juni 1826.

Praktische

Elementarübungen.

Form- und Größenlehre.

Die Form

als

Typus der geistigen Entwicklung des Kindes durch die Schule.

Alles, was ich bey der Zahl dießfalls für den Schulunterricht aufgestellt habe, ist auch hier in seiner ganzen Ausdehnung anwendbar, richtig und wahr. Ich darf der Kürze halber nur dahin verweisen und hier höchstens das wiederholen, was der Form eigenthümlich zukommt, und in dem, was ich bereits hierüber für die häusliche Bildung aufstellte und sagte, noch nicht erörtert worden ist. Daß die Form als Entwicklung der geistigen Anlagen des Kindes in und durch die Schule nicht nur für die männliche Jugend bildend und anwendbar, sondern auch für das weibliche Geschlecht eben so gut und nothwendig, ja dringend ist, geht aus Folgendem hervor. Die Entwicklung der weiblichen Jugend ist zwar allerdings einer schnellern und bis zu einer gewissen Höhe, umfassenderen Bildung fähig; hingegen aber fehlt es derselben an Tiefe, Ruhe und Stärke, sich auf die gleiche Höhe schwingen zu können und darauf zu erhalten. Die Form muß deßwegen wesentlich als ein allgemeines, beyde Geschlechter gleich ansprechendes Element unserer Bildung angesehen werden; aber auch in und durch die Schule kann sie nicht nur als Typus der Entwicklung der geistigen Anlagen in's Auge gefaßt und benutzt werden, sondern sie ist in diesem Gebiet wie im häuslichen Leben geschickt, als Typus der Kunstfertigkeit aufgestellt zu werden. Gegenwärtige Darlegung berührt diesen Theil der Bildung nicht weiter, sie beschränkt sich einzig darauf, die Form als Typus der geistigen Entwicklung in ihrer ganzen Ausdehnung geltend zu machen.

Die Anschauung des Kindes in seinem schulfähigen Alter fordert die blos sinnliche Thätigkeitsbelebung der Glieder und Organe, deren Stufengang bey dem häuslichen Unterricht aufgestellt worden, nicht mehr in dem Umfange, wie dieses in der frühern Epoche geschehen ist; diese äußere Sinnesthätigkeit verliert sich nach und nach und wird innerliche Geistesthätigkeit; sie fängt in der Schulepoche an, von dem Aeußern, Sinnlichen auf das Innere und Geistige und so umgekehrt von dem Innern wieder auf das Aeußere zu wirken. Soll mit Hülfe der Form die Entwicklung der geistigen Anlagen des Kindes mit großem Erfolge betrieben und deren Resultat sicher gestellt werden, so muß auch beym Schulunterricht das Gedächtnißvermögen dieses Unterrrichtszweiges nur in so weit in Anspruch genommen werden, als es im Schüler durch innere und äußere Anschauung einen sichern Hintergrund hat. Will man durch die Formlehre die in ihrem Wesen liegenden, hohen Zwecke der Entwicklung der geistigen Kräfte des Kindes erreichen, so ist nothwendig, daß das, was für sein häusliches und früheres Leben dießfalls aufgestellt worden, auch wirklich ausgeübt werde, wenn man nicht auf einen Grund bauen soll, dem alle Vorbereitung zu einem glücklichen Gedeihen mangelt.

Jede Bildungsepoche hat ihr Eigenthümliches, und kann auch nur in der von der Natur für sie bestimmten Zeit wirklich mit Erfolg gebraucht, angewandt und sicher gestellt werden. Jede dießfällige Versetzung wirkt höchst nachtheilig und störend auf den Bildungsgang der Jugend ein. Auch giebt es kein Unterrichtsfach, in dem diese Befolgung wichtiger wäre als in der Formlehre; kein Fach setzt so viele Anschauungseindrücke voraus. Diese aber können auch nur von dem schulfähigen Alter hinlänglich so begründet werden, daß mit bedeutendem Erfolge in diesem vorgerückten Alter auf dieselbe gebaut werden dürfte. Es ist ein Irrthum zu glauben, daß etwas also Vernachlässigtes wirklich ganz und wahrhaft später noch eingeholt werden könne. Es kann höchstens etwas von der kostbarsten Zeit einer spätern Bildungsepoche auf den vernachlässigten Theil einer frühern verwendet und dadurch die spätere und geschwächte Bildungsepoche etwas weniger bemerkbar gemacht werden; aber immer nur mit Aufopferung der Zeit und Kraft, die jetzt zur Erreichung von etwas Anderm hätte verwendet werden sollen.

Es kommt in der Formlehre als Schulbildungsmittel wesentlich darauf an, durch die Unendlichkeit der Form und ihrer Größe in naturgemäßem Stufengange dem Kind den Blick in die sinnliche Welt sicher zu stellen, seine Anschauungskraft so weit zu üben und zu stärken, daß die

Abstraktion eine nothwendige Folge vielseitiger Anschauungen und Erfahrungen wird. Das Denkvermögen muß als eine weitere und nothwendige Folge dieser Anschauung, Erfahrung und Abstraktion, den Schüler auf eine gesicherte Weise zu selbsterzeugten richtigen Denkformen führen. Soll dieser Endzweck aber durch die Formlehre erreicht werden, so ist es nicht weniger wesentlich und nothwendig, den Schüler so zu führen, daß er gleichsam alle Formverhältnisse unter so einfache und ursprüngliche Gesichtspunkte zu bringen, aufzufassen und anzuschauen angeleitet werde, durch welche ihm der Ueberblick derselben nicht nur möglich, sondern selbst leicht wird. Einleuchtend geht aus diesem ferner hervor, daß die innere Anschauung des Schülers so thätig, schöpferisch und auf eine Weise ausgebildet werden müsse, durch welche ihm die Unendlichkeit der Formen leicht zu finden und dieselbe unter erschöpfende Gesichtspunkte zu bringen ganz habituel wird. Diese Unendlichkeit der Formen ist weder in ihrem Ursprunge noch in ihrem Ende als ein willkürliches menschliches Machwerk, sondern sie ist und muß als aus nothwendigen, unveränderlichen und ewigen Gesetzen hervorgehend und ganz und gar nicht unserm Willen unterworfen, angesehen und behandelt werden. Ueberzeugt von der Wichtigkeit der geistigen Entwicklung unserer Kräfte durch die Form glaube ich durch das, was ich für den häuslichen Unterricht dießfalls aufgestellt, dieselbe mit vollem Recht neben die gewöhnlichen Schulfächer des Schreiben- und Lesenlehrens setzen zu dürfen. Doch man wird mir hierüber bemerken wollen, so gut und zweckmäßig dieses auch sey, so müsse man doch fragen, wohin die Kenntniß dieser Formen die Jugend im allgemeinen führe? Individuel möge sie zwar ihren Nutzen haben, aber sie dürfe deßwegen nicht allgemein zur Einführung in Schulen anempfohlen werden. Diesem wird man beyfügen, warum noch gar besondere Mittel aufsuchen wollen, die die Geisteskräfte der Jugend ganz unabhängend von ihrem positiven wissenschaftlichen Unterricht, und zwar unabhängend von ihrem künftigen Berufe zu entwickeln bestimmt seyen, besonders da jedes Unterrichtsfach der Jugend ohnehin schon Gelegenheit darbiete, die Entwicklung seiner Kraft auf eine Weise sicher zu stellen, daß keine besondere Mittel dießfalls mehr angewandt werden dürfen. Solche und ähnliche Einwendungen werden mir die Menge gemacht werden. Ich begnüge mich aber, dieselben durch folgendes zu berichtigen: Wird der Schüler in den Besitz eines Typus gesetzt, der die Unendlichkeit der ihn umgebenden Formen in erschöpfenden Reihenfolgen seiner Anschauung unterwirft, so wird derselbe fähig, den Chaos so zu ordnen, daß er sich diese Reihenfolgen vollends zum Bewußtseyn bringt, und ihm der Ueberblick nicht nur möglich, sondern leicht wird. Er erhebt sich dadurch zu einer Fähigkeit, die Außenwelt bildend auf eine Weise in sich aufzunehmen, die auf keinem andern Wege von ihm zu erreichen möglich wird. Schon dieses gäbe der Formlehre einen gültigen Titel, neben den Fächern des Schreiben- und Lesenlernens in jeder Schule eingeführt zu werden. Wichtiger aber als dieses ist die Erzielung und Sicherstellung der geistigen Thätigkeit, die nur allein auf diesem Wege gefunden wird, und die den höchsten Anforderungen, welche an den Geist gemacht werden können, ein Genüge zu leisten im Stande ist. Giebt man zu, daß man besondere, aber allgemein passende Mittel anwenden dürfe und anwenden könne, um die physischen Kräfte des Kindes zu üben und zu stärken; so muß und darf man nicht weniger zugeben, daß auch der geistigen Entwicklung des Kindes die nämlichen Rechte und die nämlichen Ansprüche aus doppelten Gründen eingeräumt werden müssen. Diesem zufolge kann nur noch die Frage obwalten, ob dann die aufzustellenden Mittel die kräftigern und einzigen seyen, die zu diesem Ziele mit Sicherheit führen. Auch hierüber darf mit der größten Zuverlässigkeit geantwortet werden: ein durch die Erfahrung bestätigter Erfolg spricht auf eine Weise für die Sache, daß ich gar keinen Anstand nehme, auszusprechen, daß wenigstens bis jetzt nichts geliefert wurde, welches die Richtigkeit und Wichtigkeit dieser Ansichten mehr zu beurkunden geeignet wäre. Aber auch für die positive Anwendung im praktischen und bürgerlichen Leben selber bietet die Entwicklung des Kindes für alles, was es einst werden soll, entscheidende Vorzüge dar. Doch die Darlegung des Gegenstandes selber und seine wirklichen Ausführungsmittel werden jeden aufmerksamen Beobachter, so wie auch den strengen Prüfer, der sie im Zusammenhang mit diesen Grundsätzen in's Auge fassen will, mehr überzeugen, als alles, was ich dießfalls gegenwärtig noch mehr und weiter sagen könnte. Setzt man aber die Ausübung, die man in diesem Fache mit Kindern, deren Alter hiefür ganz passend seyn wird, mit dieser Prüfung noch in Verbindung, so gelangt man diesfalls zu einer vollendeten Ueberzeugung. Wer also zweifelt und sich aber doch gern überzeugen möchte, der sehe bey Knaben und Mädchen, die gehörig durch das häusliche Leben hiefür vorbereitet worden sind, mit welcher Freude, mit welchem Leben und mit welchen Folgen die Uebungen und Reihenfolge der Formlehre bey ihnen Eingang finden, und mit welcher Sicherheit ihre Geisteskräfte dadurch entwickelt und gebildet werden. Ich nehme in dieser Schrift an, das Kind sey durch das häusliche Leben so weit und in dem Geiste gebildet worden, wie ich bereits im vorhergehenden Band ins Licht zu setzen mich bemühte, und indem ich in der Folge auf diesen Grund baue, füge ich demselben noch bey: der Lehrer darf gegenwärtig nur bey solchen Schülern, denen die Elementarbildung der ersten Epoche solid eingeübt worden, annehmen, sie seyen durch das häusliche Leben so weit gebildet und vorbereitet worden, als ich in gegenwärtiger Schrift voraussetze. Bey jedem Schüler, wo das nicht ist, muß das, was zwar nicht in die Schule, sondern in das häusliche Leben gehört, nachgeholt und von zwey Uebeln das geringere gewählt werden. Die gegenwärtige Darlegung der Form geht, wie die Zahlenlehre, von dem schulfähigen Alter oder vom 6ten bis 7ten Jahre des Kindes aus. Was ich bey der Zahllehre rücksichtlich der praktischen Einübung in der Schule bey dem Schüler angerathen und besonders für die Schule über das laute Züsammensprechen in gehörigen Abänderungen und Abwechslungen gesagt habe, findet hier nicht nur seine volle Anwendung, sondern es muß eher noch mit größerer Ausdehnung als Einschränkung betrieben werden; indem die Menge der Anschauungsgegenstände in diesem Fach sich sehr vermindert hat, und diese ebenfalls wichtig und geläufig, wie die Zahlverhältnisse, in Worte gefaßt werden müssen. Der Schüler wird auch in diesem Unterrichtszweig mehr als in keinem andern geschickt und fähig, das, was er sich wirklich eingeübt und eigen gemacht hat, andern mitzutheilen; denn alles, wird in diesem Fache durch stark bestimmte und frey ausgedrückte Formen dargestellt und eignet sich zum gegenseitigen Unterricht, der in unsern Tagen so viel Bewegung in die Schulform brachte, ganz besonders. Die Leichtigkeit und bestimmte Anwendbarkeit dieser Unterrichtsweise kann durch die Formlehre am leichtesten außer allen Zweifel gesetzt werden. Die Bildung der Imagination und des dießfälligen Vorstellungsvermögens muß als der Formlehre eigenthümlich angesprochen werden, welches in der Zahllehre gar nicht der Fall ist; deßwegen sind auch in der Ausführung Uebung und Reihenfolgen erforderlich, die sich nicht in der Zahlenlehre befinden, und dennoch von hoher Wichtigkeit für die Bildung der Jugend werden, wenn die Wichtigkeit der Ausbildung dieser Kraft in dem ganzen Umfange anerkannt seyn wird. Die Form, als Typus der Entwicklung der Kunstkraft, wird dieses später noch außer allen Zweifel setzen. Es versteht sich, daß in diesen Uebungen die Ausbildung des Vorstellungsvermögens nicht mit der Ausbildung der Gedächtnißkraft verwechselt werden darf. So wichtig die Ausbildung der letztern auch ist, so findet sie in der Formlehre so wenig ihr Gebiet, als sie es in der Zahlenlehre gefunden hat. Sie muß in der Formenlehre nur ganz untergeordnet und ihr dienend benützt werden. Um aber diese, so wie die in der Zahlenlehre aufgestellte Grundsätze, auch hier in ein heiteres Licht zu setzen, ist die faktische Darlegung des Gegenstandes das einfachste, sicherste und beste Mittel. Ich schreite deshalb zu diesem vor, und mache den Anfang mit der geraden Linie, die gleichsam der Typus aller geradlinichten Formen ist, so wie die Einheit der einfachste Typus aller Zahlenverhältnisse war. Größe und Gestalt ist das, was an den Linien und ihrer Formirung sichtbar ist, und der Anschauung des Schülers unterworfen werden kann. Ich trenne die Betrachtung, die aus der Gestalt entspringt, von derjenigen, die aus der Größe hervorgeht, und führe jedes selbstständig und eigen durch, wie auch dieses bey der Zahlenlehre geschehen ist. Die Größenverhältnisse hingegen, die zur nähern und richtigen Auffassung der Form unentbehrlich sind, als gleich, ungleich, größer u. s. w., werden von der Form nicht getrennt dargestellt, sondern als innig mit ihr verbunden behandelt werden.

Der Lehrer trägt dem Schüler auf, er möchte auf seiner Schiefertafel eine gerade Linie zeichnen und ihm dann sagen, was er an derselben bemerke, und allenfalls mit ihr vornehmen könne. Der Schüler wird ohne Fehler etwa Folgendes angeben: Er könne die gerade Linie länger oder kürzer machen, und zwar an einem oder an zwey Orten, oder an einem oder an beyden Enden; er könne sie so kurz machen, bis sie aufhöre zu seyn, und so lang als er wolle; er könne sie in 2, 3, 4 und in so viele Theile theilen, als er es wünsche, und diese Theile könne man gleich oder ungleich machen und zwar so klein oder so groß, als er immer wolle; doch könne er jeden einzelnen Theil der Linie niemals so groß machen, als die Linie selbst. Er wird finden, daß jede Linie 2 Enden habe, oder daß 2 Endpunkte an derselben bemerkbar seyen.

Wie dieses auf 2 und mehrere Linien ausgedehnt werden könne, liegt als Norm ganz in dem, was mit einer Linie aufgestellt worden ist. Weit ist dieses aber auf keinen Fall auszudehnen, indem es nur eine zwey = und mehrmalige Wiederholung dessen ist, was er in einer Linie anschaute und auffaßte.

So wie ich voraus setze, daß das Kind die gerade Linie kenne, giebt der Lehrer dem Schüler jetzt 2 Linien und zwar gleich = und ungleichlaufende, und läßt ihn untersuchen und aussprechen, was jede Art solcher Linien für Eigenthümlichkeiten besitze. Rücksichtlich der gleichlaufenden Linien wird er finden, daß sie durch die Verlängerung oder Verkürzung nicht näher und nicht weiter von einander kommen, sich auf keine Seite gegen einander neigen und folglich sich niemals vereinigen können. Die ungleichlaufenden Linien aber nähern sich in einer Richtung immer mehr, bis sie sich am Ende vereinigen, in der andern Richtung aber gehen sie immer weiter auseinander, und können folglich niemals zusammen treffen. Die Linien in einer Richtung können auch zusammen treffen, bilden dann aber stets zwey nur eine Linie. Das was der Schüler so findet und ausspricht, muß er zugleich auf seiner Schiefertafel anschaulich darstellen. Dieses findet natürlich bey gleichlangen wie bey ungleichlangen Linien statt.

Der Lehrer sagt zum Schüler: gieb in wenig Worten den wesentlichsten Unterschied zwischen gleich = und ungleichlaufenden Linien und Linien in einer Richtung an. Er wird sagen: die gleichlaufenden Linien können sich vereinigen, die ungleichlaufenden aber werden an einem Orte zusammen treffen und dennoch 2 Linien bilden, diejenigen aber, die sich in einer Richtung befinden, bilden, wenn sie zusammen treffen, nur eine Linie. Nachdem sich der Schüler den Begriff von gleich = und ungleichlaufenden Linien und Linien, die in einer Richtung sind, geläufig gemacht und eben so geläufig ihre Verschiedenheiten in Worten auszudrücken fähig seyn wird, fährt der Lehrer weiter fort, und giebt ihm folgende Aufgabe.

Wenn du 3 gerade Linien hast, unter welchen Abänderungen können sie gleichlaufend, ungleichlaufend und in einer Richtung seyn? Er wird finden, 3 Linien können gleichlaufend seyn, oder 3 ungleichlaufend, 2 gleichlaufend und eine ungleichlaufend, 2 gleichlaufend und eine mit einer von beyden in einer Richtung, oder endlich 2 ungleichlaufend und eine wieder mit einer von diesen beyden in einer Richtung ꝛc. Als Uebung kann man den Schüler auch noch 4 Linien unter diesen Gesichtspunkten untersuchen lassen. — Dieses weiter ausdehnen zu wollen, wird aber auf keinen Fall nothwendig werden, wenn bey 2, 3 und 4 Linien das gethan worden ist, was ich so eben dargelegt habe. Nachdem der Schüler dieses alles wird anschaulich dargestellt haben, können aus diesen Reihenfolgen auch einzelne Fragen an ihn gerichtet werden, wie dieses in der Zahlenlehre statt gefunden, z. E.

Wenn 4 Linien gleichlaufend und ungleichlaufend sind, wie viele höchstens sind darunter gleichlaufend, wie viele höchstens ungleichlaufend? Kann man so viele gleichlaufend als auch ungleichlaufend machen? Wie viele von den 4 Linien können höchstens in einer Richtung seyn, wenn sich noch gleichlaufende darunter befinden sollen? Antwort: drey müssen in einer Richtung seyn und die vierte muß mit diesen 3 Linien gleichlaufend seyn. Auch haben wir gesehen, daß sich die ungleichlaufenden Linien vereinigen können, und an dieses wird die weitere Kenntniß der Form auf folgende Weise angeschlossen.

Seht auf euern Schiefertafeln, an wie vielen Stellen oder Punkten sich 2, hernach 3 und endlich 4 gerade Linien vereinigen können. Die Schüler werden bey 2 Linien keinen oder einen Punkt finden, bey 3 Linien keinen, 1, 2, oder 3 Punkte; bey 4 Linien, keinen 1, 2, 3, 4, 5, 6 Punkte. Dieses auf eine höhere Anzahl Linien ausdehnen zu wollen, kann als überflüssig angesehen werden. Dagegen finden, nachdem dieses von den Schülern dargestellt worden, einzelne Fragen mit Recht hier eine Stelle.

Frage. Wie viele Linien kann man in einem Punkt vereinigen?

Antwort. Von 2 Linien an so viel man will.

Wenn man Linien in 4 Punkten vereinigt, wie viele sind es? In wie viel Punkten können 4 Linien wenigstens und höchstens vereinigt werden u. s. w.

Aehnliche Fragen, die der Lehrer so an die Schüler richtet, sollen diese beantworten können, ohne dieselben auf ihren Schiefertafeln darzustellen. Die Beantwortungen sollen schneller von statten gehen, als der Schüler dieses mit Linien darstellte. Ist er aber nicht im Stande, diese Fragen ohne anschauliche Formen zu beantworten, so darf angenommen werden, daß ihm die ersten Uebungen nicht tief genug eingeprägt worden seyen.

Frage. Welches ist die kleinste und welches ist die höchste Anzahl Linien, die sich in einem Punkt vereinigen können?

Antwort. Die kleinste Anzahl ist 2, und die höchste so viel man will. Wenn sich 4 Linien in der höchsten Anzahl Punkte vereinigen und man davon eine durchstreicht, wie viele Vereinigungspunkte fallen weg; wenn man die 2te auslöscht, wie viele fallen weg?

Antwort. Im ersten Fall 3 und im zweyten Fall 2.

Frage. Wie viele von 3 Linien, die sich in der höchsten Anzahl Punkte vereinigen, muß man auslöschen, wenn noch ein Punkt bleiben soll?

Die gleichen Reihenfolgen können auch mit gleich- und ungleichlaufenden Linien statt finden. Z. E.

Untersuche auf deiner Tafel, in wie viel Punkten 2 gleichlaufende und eine ungleichlaufende, oder 3 gleichlaufende und eine ungleichlaufende, oder 2 und 2 gleichlaufende, aber unter einander ungleichlaufende Linien sich vereinigen können.

Für den ersten Fall wird er keinen, 1 oder 2 Punkte finden;

für den 2ten aber keinen, 1, 2, 3 Punkte;

für den 3ten endlich keinen, 1, 2, 3 oder 4 Punkte.

Noch ein Paar einzelne Fragen hierüber.

Frage. In wie viel Punkten höchstens können sich 2 und 3 gleichlaufende, aber unter sich ungleichlaufende Linien vereinigen?

Antwort. In 6 Punkten.

Frage. Welcher von euch, Schüler, kann von einem bis zu 6 Punkten alle Fälle gleich auf der Tafel darstellen, ohne einmal einzuhalten. Sind unter 4 Linien gleichlaufende, können mehr oder weniger Vereinigungspunkte gebildet werden, als wenn alle ungleichlaufend wären? Es sind gleichlaufende und ungleichlaufende Linien in 2 Punkten untereinander verbunden worden; es fragt sich, wie viele Linien es seyen? Antwort: 2 gleichlaufende und 1 ungleichlaufende u. s. w. — Es ist überflüssig, den Schüler ähnliche Untersuchungen mit Linien in einer Richtung darstellen zu lassen, da dieselbe durch die Verbindung nur eine Linie bilden.

Durch diese Darstellung weiß der Schüler, in wie viel Punkten die Linien sich vereinigen, und nun schreitet man zur Untersuchung der Art der Vereinigung derselben. Wenn 2 Linien sich vereinigen, kann man sehen, wie oft die Linien durch den Vereinigungspunkt gehen, oder denselben durchschneiden. Es geht entweder eine einmal, oder beyde und zwar jede einmal durch den Vereinigungspunkt.

Bey drey Linien in einem Punkt kann keine, oder eine, oder können 2 oder alle 3 Linien, jede einmal durch den Vereinigungspunkt gehen. Bey 3 Linien in 2 Punkten kann aber keine, oder 1, oder können 2, oder alle 3 Linien einmal durch die Vereinigungspunkte, oder 2 Linien jede einmal und die dritte hingegen durch 2 Punkte hindurch gehen.

Weil dieser Gesichtspunkt unwesentlicher ist, als der vorhergehende, so darf er in etwas kleinerm Maas eingeübt werden. Will man noch einige einzelne Fragen hierüber machen, so können die obigen diesfalls als Leitfaden dienen.

An dieses kann noch eine zweyte Betrachtungsweise über die Verbindung der Linien geknüpft werden, die wieder nicht sehr wesentlich ist, aber doch nicht übergangen werden darf.

Lehrer. Untersucht, wie viel Enden der Linien sich bey 2 Linien in und außer dem Vereinigungspunkt befinden. Die Schüler werden finden: entweder 2 in und 2 außer dem Vereiniaungspunkt, oder keine in und 4 außer demselben. Desgleichen können die Fälle zuerst mit 3 Linien in einem, hernach in 2 und endlich in 3 Vereinigungspunkten aufgefunden werden. Für den ersten Fall findet man 3 Enden in und 3 außen, oder 2 in und 4 außen, oder 1 in und 5 außen, over endlich 6 Enden außer dem Vereinigungspunkt.

Noch einige einzelne Fragen hierüber:

Frage. Drey Linien vereinigen sich in einem Punkt, es fragt sich, wie viele Enden der Linien höchstens in dem Vereinigungspunkt seyn können? Wie viel höchstens aus- ser demselben? Wie viel liegen in demselben, wenn sie sich in 2 Punkten vereinigen?

Daß auch hier die verschiedenen Gesichtspunkte mit einander verbunden werden können, und zwar als einzelne Fragen und Reihenfolgen, ist durch das, was ich bey der Zahlenlehre vielseitig aufstellte, bereits in ein heireres Licht gesetzt. Um jedoch dem Lehrer hinlänglich ausgear- beiteten Stoff an die Hand zu geben, mögen noch einige Fragen über diesen Gesichtspunkt hiefür dienen.

Wenn 3 Linien sich in einem Punkt vereinigen und 3 ihrer Enden im Vereinigungspunkte liegen, so fragt es sich, wie viele Linien durch denselben gehen? Ist das Gleiche bey eben so viel Linien in 2 Vereinigungspunkten, wie viele gehen durch dieselben? Drey Linien, die sich in 3 Punkten vereinigen, haben 6 ihrer Enden außer dem Ver- einigungspunkt, es fragt sich, wie oft sie durch dieselbe gehen?

Antwort. Jede geht durch 2 Vereinigungspunkte.

Ich schreite in den folgenden und ferner aufzustellen- den Uebungen weiter, und lasse den Schüler untersuchen, was durch die Verbindung dieser Linien entstehe. Die Winkel kennt der Schüler, wie die gleichlaufenden und ungleichlaufenden Linien, folglich kann der Lehrer ihm auftragen, zu untersuchen, wie viele Winkel mit 2 Linien in einem Punkt gebildet werden können. Er wird sicher

auch

auch 1, 2, oder 4 Winkel finden. Mit 3 Linien in einem Punkt findet er aber 2, 3, 4, 5 oder 6 Winkel.

Mit 3 Linien in 2 Punkten wird er 2, 3, 4, 5, 6 oder 8 Winkel finden.

Mit 3 Linien in 3 Punkten wird er aber 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 oder 12 Winkel finden.

Mit 4 Linien in einem Punkt 3, 4, 5, 6, 7 oder 8 Winkel.

Mit 4 Linien in 2 Punkten 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 oder 12 Winkel.

Mit 4 Linien in 3 Punkten 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 oder 14 Winkel.

Mit 4 Linien in 4 Punkten endlich findet er 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18 Winkel. (Seht Fig. 1.)

Mit 4 Linien in 5 und mehr Punkten alle Fälle erschöpfen zu wollen, darf als überflüssig angesehen werden; besonders wenn der Schüler mit großer Leichtigkeit obige Abänderungen zu machen im Stande seyn wird.

Da die Formverhältnisse, unter diesem Gesichtspunkt aufgefaßt, wichtiger als die vorhergehenden sind, so wird auch eine größere Zahl einzelner Fragen, die die mannigfaltigen Abwechselungen in sich fassen, nicht entbehrlich werden. Z. B. welches ist die größte Anzahl Winkel, die mit 2 Linien, welches diejenige, die mit 3 und 4 Linien gebildet werden kann? Welches ist die größte Anzahl Winkel, die mit zwey, drey und 4 Linien in einem Vereinigungspunkt; hernach mit 3 und 4 Linien in 2 Punkten gemacht werden?

Wie viele Winkel kann man mit 3 Linien in einem Punkt machen? Welches ist die geringste und welches die zweytgeringste Anzahl Winkel? Wie viele Winkel kann man mit 3 Linien mehr machen, als mit 2; mit 4 Linien mehr als mit 3?

Antwort: Mit 3 Linien kann man 8 Winkel mehr als mit 2, und mit 4 Linien kann man 12 Winkel mehr machen, als mit 3 Linien. (Seht Zeichn. 2.)

Welches ist die geringste Anzahl Winkel, die durch 4 Linien in 3 Punkten gebildet werden kann?

Antwort. 3. (Seht Figur 3.)

Wie viele Winkel kann man mit 7 Linien in einem Punkt höchstens und wie viele wenigstens machen?

Welches ist die kleinste Anzahl Winkel, die mit 2, 3, 4 Linien in einem Punkt gemacht werden kann?

Streicht man eine der 2 Linien, die 4 Winkel bilden, durch, wie viele Winkel verschwinden dadurch? Wenn man aber bey 3 Linien, die 12 Winkel bilden, eine davon durchstreicht, wie viele Winkel fallen dann weg?

Man hat 3 Linien so verbunden, daß sie die höchste Anzahl Winkel untereinander bilden, wie viel Linien muß man noch mit denselben verbinden, wenn es 12 neue Winkel geben soll?

Antwort; Man kann dieses mit einer Linie bilden.

Wie viele Winkel kann man mit 2 Linien bis zur höchsten Anzahl nicht machen? Antwort: 3. Welche aber bey 4 Linien nicht?

Die Ausdehnung dieser Uebung auf 5 und mehrere Linien soll auf die nämliche Weise geschehen.

Sind alle Winkel, die mit Linien gemacht werden, gleich groß? Kann man aber so viel man will gleiche, und auch so viel man will ungleiche machen?

Die Wichtigkeit der richtigen Auffassung der Formlehre und die Nothwendigkeit, das Wesen der frühern Gesichtspunkte fortdauernd näher zu bestimmen, setzen mich in die Lage, diesen Zusammenhang den Zöglingen durch wenige einzelne Fragen heiter und leicht begreiflich zu machen, und für die Dauer einzuüben.

Frage. Welches ist die höchste Anzahl Winkel, die mit 2 gleichlaufenden und einer ungleichlaufenden Linie gebildet werden kann?

So wieder mit 3 gleichlaufenden und einer ungleichlaufenden; desgleichen mit 2 und 2 gleichlaufenden und unter einander ungleichlaufenden Linien.

Giebt es weniger oder mehr Winkel, wenn sich unter 4 Linien, statt nur ungleichlaufende, auch gleichlaufende befinden?

Drey Linien vereinigen sich so, daß ihre 6 Endpunkte in den Vereinigungspunkten liegen; es fragt sich, wie viel Winkel in diesem Fall gemacht werden können?

Antwort. Drey; in diesem Fall darf man nur ein Dreyeck machen.

Alle sechs Enden liegen aber bey 3 Linien außer den Vereinigungspunkten; es fragt sich, wie viel Winkel dadurch gebildet werden können?

Antwort. Drey oder 4 (Seht Zeichn. 4 und 5).

Wenn aber keine Linie durch den Vereinigungspunkt geht, wie viel Winkel können dann gebildet werden?

Antwort: 2 oder 3 (Seht Zeichnung 6 und 7).

Mit wie viel Linien kann man 2 Winkel bilden?

Antwort. Mit 2 und 3 Linien (Seht Zchg. 6).

Wie viele Linien werden erfordert, um in 1, 2, 3 und 4 Punkten jedesmal 4 Winkel zu bilden?

Um in einem Punkt 4 Winkel zu bilden, werden 2, 3, 4 oder 5 Linien erfordert. Um in 2 Punkten 4 Winkel zu bilden aber 3, 4, 5, 6 Linien, (Seht Zeichnung 8). In 3 Punkten 3, 4, 5 und 6 Linien. In 4 Punkten aber 4, 5, 6, 7 oder 8 Linien.

Auch hier darf man es nicht vergessen, den Schüler aufzufordern, an seine Mitschüler, wie bey der Zahlenlehre, auch einzelne schwierige Fragen zu richten.

Alles, was ich diesfalls in der Zahlenlehre so vielseitig ins Licht zu setzen mich bemühte, muß auch hier seine volle Anwendung finden.

Bey Fragen, die etwas schwerer zu lösen sind, wird der Lehrer wohl thun, wenn er die Schüler abwechselnd das was sie gefunden haben, an seiner großen Wandtafel, an der es alle seine Mitschüler sehen können, vorzeichnen läßt. Die Zeitersparniß wird dadurch bedeutend werden, und dieses ist, wenn besonders die Klasse sehr zahlreich seyn sollte, sehr wichtig.

Der Lehrer hat, wie es sich von selbst versteht, dafür zu sorgen, daß die Verbindungen nicht zu frühe den Mitschülern gezeigt werden, damit keiner deshalb verleitet werde, nur nachzukopiren, was ihm auf der Wandtafel vorgemacht wird.

So wie der Schüler die Winkel kennt, so darf angenommen werden, er habe eine vollständige Kenntniß der Ecken. An diesen Faden wird geknüpft und also weiter geschritten.

Der Lehrer. Seht auf euern Tafeln, wie viele Ecken ihr mit 2, 3, 4 und 5 geraden Linien machen könnt. Die Schüler werden finden:

Mit 2 Linien könne keiner oder ein Ecken gemacht werden.

Mit 3 Linien aber entweder keiner, oder 1, 2 oder 3 Ecken.

Mit 4 Linien, keiner, 1, 2, 3, oder 4.

Mit 5 Linien, keiner, 1, 2, 3, 4 oder 5 Ecken.

Da hier keine große Mannigfaltigkeit der Formen statt findet, so dürfen auch die einzelnen Fragen den so eben aufgestellten Reihenfolgen entsprechend gemacht werden, und können daher nicht sehr ausgedehnt seyn.

Frage. Welches ist die kleinste und welches die größte Anzahl Ecken, die mit 4 Linien gemacht werden können?

Wenn man die größten Anzahl Ecken mit 4 Linien macht; wie viele Winkel befinden sich dabey?

Antwort. 4.

Wenn man aber mit 4 Linien 4 Ecken gemacht, und eine Linie davon durchgestrichen wird, so fragt es sich, wie viele Ecken dadurch verschwinden?

Antwort. 2.

Wenn aber 2 von diesen Linien durchgestrichen werden, wie viel fallen dann weg?

Antwort. Es können alle 4 Ecken, oder aber nur 3 dadurch verschwinden.

Werden mit 4 Linien 4 Ecken gebildet, wo befinden sich dann die Enden dieser Linien?

Antwort. In den 4 Vereinigungspunkten.

Statt der Anzahl Winkel, die in den verschiedenen Verbindungen gebildet werden, wird auch die Art derselben auf die gleiche Weise untersucht. Aber hier darf wieder vorausgesetzt werden, daß der Schüler die Art der Winkel, z. B. die rechten, spitzen und stumpfen Winkel vollkommen kenne. Auf dieses Fundament wird also auch hier weiter geschritten. Sollte dieses aber der Fall nicht seyn, so muß natürlich dem, was im häuslichen Kreise diesfalls nicht erzielt worden ist, nachgeholfen werden.

Fr. Bildet man mit 2 Linien 1 Winkel, was kann derselbe für eine Form haben?

Der Schüler wird finden, daß es ein rechter, ein spitzer oder ein stumpfer Winkel seyn könne. Desgleichen wird er bey der diesfälligen Bildung von 2 Winkeln finden, daß es entweder 2 rechte, oder ein spitzer und ein stumpfer Winkel seyn können.

Drey Winkel können durch 2 Linien nicht gebildet werden. Bildet man aber 4 Winkel, so sind dieselben entweder alle 4 rechte, oder es sind 2 spitze und 2 stumpfe Winkel.

Mit 3 Linien in einem Punkt können 2, 3, 4, 5 oder 6 Winkel gemacht werden.

Die 2 Winkel sind aber: 2 spitze, 1 spitzer und ein stumpfer oder 1 rechter und ein spitzer Winkel.

Drey Winkel. Drey stumpfe (siehe Zeichn. 9.), oder ein rechter und 2 stumpfe, oder ein spitzer und 2 stumpfe, ebenfalls nach Zeichnung 9. zu bilden; oder 3 spitze (s. Zeichn. 10.), oder ein rechter und 2 spitze, oder ein stumpfer und 2 spitze.

Vier Winkel. Zwey rechte und ein spitzer und ein stumpfer, oder 2 spitze und 2 stumpfe.

Fünf Winkel. 4 spitze und ein stumpfer, oder 3 spitze und 2 stumpfe, oder 3 spitze, 1 rechter und 1 stumpfer, oder 2 spitze und 3 rechte.

Sechs Winkel. 6 spitze, oder 4 spitze und 2 stumpfe, oder 4 spitze und 2 rechte.

Nach eben der Norm läßt man den Schüler die verschiedenen Arten der Winkel mit 3 Linien in 2 Punkten untersuchen; z. B.

Mit 3 Linien in 2 Punkten 2 Winkel: 2 rechte oder 2 stumpfe, oder 2 spitze, oder 1 rechter und 1 spitzer u. s. w.

Mit 3 Winkeln in dieser Verbindung: 3 rechte, oder 2 rechte und 1 spitzer, oder 2 stumpfe und 1 spitzer u. s. w.

Die höchste Anzahl Winkel in dieser Verbindung aber ist 8; und zwar 8 rechte, oder 4 rechte, 2 spitze und 2 stumpfe, oder 4 spitze und 4 stumpfe.

Mit 3 Linien in 3 Punkten, drey Winkel: entweder 3 spitze, oder 1 rechter und 2 spitze, oder 1 stumpfer und 2 spitze.

Mit 4 Winkeln in 3 Punkten durch 3 Linien: entweder 2 rechte und 2 spitze, oder 1 rechter, 2 spitze und 1 stumpfer u. s. w.

Die höchste Anzahl Winkel mit 3 Linien in 3 Punkten aber ist 12. Diese sind entweder 4 rechte, 4 spitze und 4 stumpfe; oder aber 6 spitze und 6 stumpfe Winkel. Das Nämliche kann auch mit 4 Linien durch alle, bey 3 Linien angegebenen Veränderungen durchgeführt werden. Daß auf diese Weise alle Fälle von dem Schüler leicht erschöpft werden können, unterliegt keinem Zweifel; aber auch hier treten schon unwesentlichere Verbindungen ein, deren Untersuchung folglich nicht mehr in ihrem ganzen Umfange nothwendig ist.

Mit 4 Linien will ich nur noch in Kürze anzeigen, welche Verbindungsarten zu erschöpfen, und von den kräftigern so wie von den schwächern Schülern durchgeführt werden sollten.

Wenigstens mit 4 Linien in einem Punkt bey der geringsten und höchsten Anzahl Winkel dürften diesfalls alle Veränderungen aufgesucht werden, die in 2, 3, 4, 5 und 6 Punkten möglich sind.

Er wird finden, die geringste Anzahl Winkel in 1, 2, 3, 4, 5 und 6 Punkten sey 3 in 1 Punkt, 3 in 2 Punkten, 7 in 5 Punkten (s. Zeichnung 11.) und endlich 11 Winkel in 6 Punkten.

An diesem Faden schreitet man weiter und untersucht, was dieses jedesmal für Arten von Winkel seyen.

Die höchste Anzahl Winkel in 1, 2, 3, 4, 5 und 6 Punkten sind in 1 Punkt 8, in 2 Punkten 10, in 3 Punkten 14, in 4 Punkten 18 (s. Zchg. 1.) und in 6 Punkten 24. (S. Zchg. 2.)

Eben so wird wieder zu den Arten der Winkel geschritten.

Will man dieses weiter ausdehnen, so nimmt man allenfalls die geringste und zweytgeringste, und die höchste und zweythöchste Anzahl Winkel, und unterwirft sie der nämlichen Untersuchung. Diese aber bis zur drittgeringsten und dritthöchsten Anzahl auszudehnen, ist überflüssig.

Die Wichtigkeit der Untersuchung der Arten der Winkel macht folgende Uebungen nothwendig:

Es sollen mit 5 Linien in 5 Punkten die geringste Anzahl Winkel gebildet und alle Veränderungen in Rücksicht der Arten derselben erschöpft werden. Die Fortsetzung dieser Aufsuchung mit 6 Linien in 6 Punkten, mit 7 Linien in 7 Punkten u. s. w. hat hier sein Gutes. Sollte der Schüler bey 7, 8, 9 und 10 Linien Mühe haben, alle Fälle zu erschöpfen, so darf er wenigstens angehalten werden, die wesentlichsten davon aufzusuchen.

Wie ich hier alle diese Reihenfolgen nacheinander aufstellte, also muß dieses natürlich mit der Unterbrechung von einzelnen Fragen gemischt, behandelt werden, wie ich dieses bereits durch die ganze Darlegung der Zahl und Form genugsam gezeigt habe. Die einzelnen Fragen, die am Ende jeder Reihenfolge aufgestellt werden, sollen nur noch als eine Norm, nach der dieses zu behandeln ist, angesehen werden. Man wird wohl thun, die Fragen von diesem Standpunkt aus ins Auge zu fassen:

F r a g e. Wie viele rechte Winkel kann man mit 2, und wie viele mit 3 Linien machen?

A n t w o r t. Mit 2 Linien kann man 1, 2 und 4;

mit 3 Linien aber 2, 3, 4, 5, 6 und 8 rechte Winkel machen. (Wollte man aber mit 3 Linien einen rechten Winkel machen, so würde eine Linie unbenutzt bleiben, und diese Verbindung dürfte dann nur als mit 2 Linien gemacht angesehen werden.)

Welches ist die höchste Anzahl rechte Winkel, die mit 4 Linien gemacht werden kann?

Antwort. 16. (S. Zchg. 12.)

Welches aber ist die geringste Anzahl rechte Winkel, die mit diesen 4 Linien gemacht werden kann?

Antwort. 3. (S. Zchg. 13.) So wäre die höchste Anzahl rechte Winkel mit 5 Linien 24, und die geringste nach den letzten Verbindungen 4.

Kann man 2, 3, 4, 5, 6 Linien so ziehen, daß sie nur rechte Winkel bilden? Antwort: ja. Wenn man von den 2 Linien, die 4 rechte Winkel bilden, eine auslöscht, wie viele fallen dadurch weg?

Welches ist die geringste Anzahl nur spitze Winkel, die mit 2 und 3 geraden Linien gemacht werden kann?

Antwort. Mit 2 Linien ist es ein Winkel, mit 3 Linien aber 2. (S. Zchg. 14.)

Diese Fragen werden, wie bey den rechten Winkeln, fortgesetzt, und man findet bey 4 Linien für die höchste Anzahl 8 Winkel (S. Zchg. 15.) für die geringste Anzahl 3. (nach Zchg. 13.)

Mit 5 Linien wäre so die höchste Zahl spitzer Winkel 14 (s. Zchg. 16.), ihre geringste Anzahl aber wäre 4. (nach Zchg. 13.)

Mit den stumpfen Winkeln würde man für 2 Linien einen und für 3 Linien 3 finden. (S. Zchg. 9.) Mit 4 Linien für die geringste Anzahl 3, (nach Zeichnung 13) und die höchste Anzahl 4 (nach Zeichnung 17).

Kann man mit 2, 3, 4 Linien ꝛc. eben so viele rechte als spitze Winkel machen?

Antwort. Mit 2 Linien kann man dieses nicht, wohl aber mit 3, 4 ꝛc. Linien. Können jedesmal so viele Winkel von der einen, als von der andern Form gemacht werden?

Diese nämlichen Fragen sollten auch in Rücksicht auf die spitzen und stumpfen, oder auf die stumpfen und rechten, oder auf die rechten, spitzen und stumpfen Winkel vereinigt gemacht und erweitert werden. Die Beantwortung wird keinem Schüler mehr schwer fallen, denn wenn er sich die oben angegebenen Reihenfolgen so auf der Schiefertafel eingeübt haben wird, wie es oben ausgeführt und angezeigt worden und er besonders die letzten Aufgaben aufgelöst hat, so kann ihm keine mehr gegeben werden, die er nicht mit Leichtigkeit zu lösen im Stande seyn wird.

Werden mit drey Linien in einem Punkt 2 Winkel gemacht, wie viele verschiedene Abänderungen giebt es in Rücksicht der Arten der Winkel?

Antwort. 3 Abänderungen.

Kannst du dir diese Abänderungen im Kopf vorstellen, ohne daß du nothwendig hast, dir dieses durchs Vorzeichnen auf der Schiefertafel zu erleichtern. Die größere Zahl obiger Fragen wird zwar der Schüler ohne diese Nachhülfe mit Leichtigkeit lösen. Dieses muß aber auch immer mehr erweitert werden, damit das Vorstellungsvermögen des Schülers eben so sehr gebildet werde, als durch alle diese drey Darstellungen seine schöpferische Erzeugungs- und Empfindungskraft geübt und gestärkt wird. Um diesen Endzweck noch vollständiger zu erreichen, wird man wohlthun, wenn man zur Abwechslung dem Schüler dann und wann aufträgt, er möchte das, was er jetzt auf der Schiefertafel darstellt, recht ansehn und es dann morgen aus dem Kopf wieder zeichnen, ohne die Schiefertafel weiter zu Hülfe zu nehmen. Dieses ist besonders bey Aufgaben wie die letzten waren, und die etwas schwierig aufzufinden und in der Anschauung zu behalten sind, von großer Wichtigkeit.

Daß die Art der Winkel mit den früher aufgestellten Gesichtspunkten auch wieder in Verbindung zu setzen seyen, wissen wir aus dem dießfalls Ausgeführten.

Es soll aber, wegen seiner Wichtigkeit, doch nicht ohne folgende Uebungen übergangen werden.

Wenn man mit 2 Linien einen rechten Winkel macht, wie viele Ecken sind dabey?

Wenn man aber zwey Winkel macht, wie viele Ecken sind alsdann damit verbunden? Antwort: Keine.

Werden durch 3 Linien 3 Winkel gebildet, wie viele Ecken finden dann statt?

Antwort: keine, eine, 2, 3. Für 3 Ecken kann man das Dreyeck gebrauchen. Für keine Ecke siehe Zeichnung 7.

Kann man 4 Linien so verbinden, daß sie 4 Winkel und 4 Ecken zugleich bilden? oder kann man sie so verbinden, daß es 4 Winkel und 5 Ecken giebt? Antwort: nein.

Wenn man mit 4 Linien 5 Winkel macht, wie viele giebt es dann?

Antwort: keinen, einen, 2 oder 3.

Wenn man mit 4 Linien die höchste Anzahl Winkel bildet, wie viele sind dabey möglich? und wenn man die höchste Anzahl Ecken bildet, wie viele Winkel hat es dann?

Antwort: Im ersten Fall hat es keinen, im zweyten Fall aber vier Winkel.

Man bildet mit zwey gleichlaufenden und einer ungleichlaufenden Linie die höchste Anzahl Winkel; es fragt sich, was es für Arten von Winkel seyen?

Antwort: acht rechte, oder 4 stumpfe und 4 spitze.

Werden aber mit diesen Linien die obigen Winkel gebildet, so fragt es sich, ob die Linien immer gleichlaufend seyen? Antwort: bey rechten sind sie immer gleichlaufend; bey 4 spitzen und bey 4 stumpfen können sie gleich- oder ungleichlaufend seyn.

Bildet man mit 3 Linien 2 stumpfe Winkel, so fragt es sich, ob dieselben gleich- oder ungleichlaufend seyen?

Antwort: sie können wieder beydes seyn.

Bildet man aber mit 3 Linien 6 spitze Winkel, so fragt es sich, ob sie gleich- oder ungleichlaufend seyen?

Man macht mit zwey gleichlaufenden und einer ungleichlaufenden Linie zwey Winkel; es fragt sich, was diese zwey Winkel für eine Form haben? Antwort: beyde rechte, oder beyde spitze, oder beyde stumpfe, oder der eine ist ein stumpfer und der andere ein spitzer Winkel.

Die gleichen Fragen können auch gegeben werden, wenn die Linien ungleichlaufend sind. Als Antwort wird man alle Abwechslungen, nur keine zwey rechte Winkel finden.

Was für Winkel kann man mit zwey gleichlaufenden Linien in ihrer kleinsten Anzahl machen? wie viele Winkel kann man mit den nämlichen Linien machen, wenn 2 gleichlaufend und 2 ungleichlaufend sind? und endlich, wenn alle 4 Linien ungleichlaufend sind?

Daß dieses auch auf die größte und zweytgrößte Anzahl Winkel ausgedehnt werden kann, unterliegt keinem Zweifel, und in so fern es der Lehrer nothwendig erachten sollte, wird er es auch ohne weitere Anleitung dahin ausdehnen.

Wenn man mit drey Linien in einem Punkt 3 stumpfe Winkel bildet, wie viele Enden der Linien liegen in und wie viele außer dem Vereinigungspunkt u. s. w.?

Wenn diese Linien so oft als möglich durch zwey Vereinigungspunkte gehen, was für Arten von Winkel werden gebildet?

In wie viel Vereinigungspunkten kann man mit vier Linien vier spitze Winkel machen?

Antwort. In 1, 2, 3 oder 4 Punkten. (S. Zchg. 18, 19, 20 und 21.)

In wie viel Punkten kann man mit 4 Linien 5 rechte Winkel machen? Antw. in 3 oder 4 Punkten.

So können Fragen über die stumpfen Winkel gegeben werden, oder über die rechten und stumpfen, oder über die stumpfen und spitzen u. s. w. vereinigt, welches gewiß ein jeder Lehrer ohne Mühe auszuführen im Stande ist. Daß man auch hier den Schüler anhalte, wenn ein solcher Typus gegeben ist, die Fragen ohne weitere Hülfe und Handbietung des Lehrers selbst zu bilden und dieselben, wie es bey der Zahlenlehre geschehen ist, an seine Mitschüler zu richten, versteht sich ein für alle mal ohne weitere Bemerkung. Wie und auf welche Weise dieses sowohl vom Lehrer als auch vom Schüler betrieben werden muß, um alle seine Mitschüler in gehörige Thätigkeit zu versetzen und sie darin zu erhalten, ist in der Darlegung der Zahlenlehre ausführlich behandelt worden.

Die Arten der Winkel bestimmen auch die Arten der Ecken und werden diesen gleich behandelt. Z. B. Wenn man mit 2 Linien eine Ecke macht, was hat dieselbe für eine Form?

Der Schüler wird wieder finden, daß sie, wie der Winkel, entweder recht, spitz oder stumpf seyn könne.

Die gleichen Untersuchungen können mit 3 Linien, um 1, 2, 3 Ecken, oder mit 4 Linien um 1, 2, 3 und 4 Ecken zu bilden, statt finden.

Will man dieses zu 5 und 6 Ecken ausdehnen, so können diese Uebungen als zweckmäßig, aber auf dieser Stufe nicht mehr als nothwendig angesehen werden.

Noch einige einzelne Fragen über die Ecken:

Kann man mit drey Linien 2 rechte, 2 spitze und 2 stumpfe Ecken machen? Antwort. Ja.

Aber auch drey von jeder Art?

Antwort: nur drey spitze Ecken sind möglich.

Kann man 4 spitze Ecken mit 4 Linien machen?

Antwort. Ja. (Seht Zchg. 21.)

Können mit 6 Linien 6 rechte, 6 stumpfe und 6 spitze Ecken gemacht werden?

Antwort. Ja. (Seht Zchgn. 22, 23 und 24.)

Weil diesem Gesichtspunkt etwas an Reichhaltigkeit fehlt, so soll er mit den vorhergehenden Uebungen und Reihenfolgen nicht verbunden werden.

Auch folgender Gesichtspunkt, unter dem die Formverhältnisse aufgefaßt werden können, ist nicht sehr reichhaltig, und bedarf deßhalb nicht ausführlich behandelt zu werden.

Der Lehrer macht den Schüler darauf aufmerksam, daß Linien, die einen Winkel oder Ecken bilden, auch den Namen Schenkel annehmen. Hierauf gestützt, läßt man den Schüler untersuchen, wie viele Schenkel 4 Linien bilden können? Die Schüler werden finden: 2, 3 oder 4. Zwey Schenkel bilden sie bey einem, 3 bey 2, 4 bey 3 Winkeln.

Nach der nämlichen Ansicht bilden drey Linien in einem Punkt entweder 3, 4, 5 oder 6 Schenkel. Vier Linien aber bilden in einem Punkt 4, 5, 6, 7 oder 8 Schenkel.

Mit 3 Linien in 2 Punkten kann man 3, 4, 5, 6, oder 7 Schenkel bilden.

Es ist nicht nothwendig, dieses auf eine höhere Anzahl Linien und Punkte auszudehnen.

Noch ein paar einzelne Fragen zum Beschluß.

Wenn man mit zwey Linien 3 Schenkel macht, wie viele Winkel sind dadurch gebildet worden?

Man

Man hat mit 4 Linien die höchste Anzahl Schenkel in einem Punkt gebildet; es fragt sich, wie viele Winkel dadurch entstanden seyen?

Ueber die Anzahl der geschlossenen Figuren.

Der Lehrer trägt dem Schüler auf, zu untersuchen, wie viel geschlossene Räume mit 4, 5, 6 &c. Linien zu machen möglich seyen.

Er wird bey 3 Linien einen Raum finden; bey 4 Linien aber 1, 2 oder 3; bey 5 Linien 1, 2, 3, 4, 5 oder 6; bey 6 Linien 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 oder 10 Räume.

Lehrer: Untersucht, wie viele geschlossene Figuren mit 2 und 2, oder mit 2 und 3, oder mit 2 und 5, oder mit 3 und 3, oder mit 3 und 4 gleichlaufenden Linien möglich werden?

Bey 2 und 2 gleichlaufenden Linien wird er 1, bey 2 und 3 gleichlaufenden aber 2 &c. geschlossene Figuren finden.

Mit Linien in drey Richtungen dieses fortzusetzen soll nicht als ganz entbehrlich behandelt werden.

Der Lehrer läßt den Schüler z. B. untersuchen, wie viele geschlossene Räume mit 3 mal 2, oder mit 3 mal 3, oder mit 3 mal 4 &c. gleichlaufenden Linien möglich seyen?

Für 3 mal 4 wird der Schüler höchstens 6 geschlossene Räume finden. Wenn man höchstens 6 geschlossene Räume machen kann, so wird man auch keinen, oder 1, 2, 3, 4 und 5 Räume eben so leicht finden können.

Frage: Wie viele Linien braucht man, um einen

Raum zu schließen? Mit wie vielen Linien kann man aber einen Raum schließen? Welches ist die höchste Anzahl geschlossener Räume, die man mit 5 Linien machen kann?

Man hat 2 geschlossene Figuren gemacht; es fragt sich, wie viele Linien dazu erfordert werden?

Antwort: 4, 5, 6 oder 7 u. s. w., bis so weit man will.

Kann man mit Linien, die gleichlaufend sind, einen Raum bilden? In wie vielen Richtungen müssen aber Linien gleichlaufend seyn, wenn man mit ihnen Figuren schließen will?

Antwort: In 2, 3 und mehreren Richtungen. Welches ist die höchste Anzahl geschlossener Figuren, die mit 2 und 4 gleichlaufenden Linien gebildet werden? Kann man jede Anzahl derselben bis zur höchsten machen? Wenn mit 4 Linien 2 geschlossene Figuren gebildet werden, wie oft gehen die Linien durch die Vereinigungspunkte?

Antwort: 2 mal.

Wenn man aber mit diesen Linien 3 geschlossene Figuren bildet, wie oft gehen sie dann durch die Vereinigungspunkte? Liegen die Enden der Linien in- oder außerhalb der Vereinigungspunkte? Sind die Linien dabey gleich- oder ungleichlaufend? Linien oder Schenkel, die einen Winkel bilden, nennt man, wenn sie eine Figur einschließen, auch Seiten.

Untersucht, wie viele Seiten man mit 3, 4, 5, 6 Linien 2c. machen könne? Der Schüler wird finden, daß er mit 3 Linien nur 3, mit 4 Linien aber 4, 5, 6 oder 8 Seiten bilden könne.

Mit 5 Linien kann man 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 und 15 Seiten bilden.

Einige Fragen hierüber:

Wie viele Seiten können mit 6 Linien höchstens gemacht werden? Welche Anzahl ist nicht möglich zu machen? Wenn 4 Linien die höchste Anzahl Seiten bilden, und man eine dieser 4 Linien durchstreicht, wie viele fallen weg?

Antwort: 5.

Wenn man aber die dritte dieser 4 Linien durchstreicht, wie viel fallen dann weg?

Antwort: drey.

Diese Fragen auf 5 und mehrere Linien auszudehnen, ist nicht ganz ohne alle Wichtigkeit.

Wie viele Seiten können mit 2 und 3 gleichlaufenden Linien höchstens und wie viele wenigstens gemacht werden? Welches ist die höchste Anzahl Seiten, die mit 2 mal 3 gleichlaufenden Linien gebildet werden können? Wenn man mit 4 Linien 4 Seiten bildet, wie viele Winkel können dazu gemacht werden?

Antwort. 4, 5 u. s. w. bis 16, ausgenommen 15 nicht.

Wie viele Ecken sind bey diesen 4 Seiten möglich?

Antwort. Keine, 1, 2, 3 oder 4.

So wie man den Schüler zuerst die Anzahl und hernach die Art der Winkel aufsuchen ließ, so muß auch hier der gleiche Stufengang beybehalten werden. Z. B.

Wenn man mit 3 Linien eine geschlossene Figur bildet, was kann dieselbe für eine Form haben?

Antwort: Keine andere als die eines Dreyecks. Wird aber durch die Verbindung von 4 Linien eine Figur gebildet, was kann dieselbe für eine Form haben?

Die Schüler werden finden, daß sie ein Dreyeck oder ein Viereck seyn könne. Bey 2 Figuren aber 2 Dreyecke oder 1 Dreyeck und 1 Viereck.

Fünf Linien, die mit einander verbunden werden, können, wenn sie eine Figur schließen, ein Dreyeck oder ein Viereck, oder ein Fünfeck bilden. Bey 2 Figuren aber 2 Dreyeck, oder 2 Viereck, oder ein Dreyeck und ein Viereck, oder 1 Fünfeck und 1 Dreyeck.

So wird das zu 3, 4, 5 und 6 Figuren fortgesetzt.

Bey vier Figuren wird der Schüler unter andern auch ein Sechseck und 3 Dreyecke finden. (S. Zchg. 26.)

Bey 6 Figuren wird er ein Fünfeck und 5 Dreyecke oder 3 Dreyecke und 4 Vierecke ꝛc. zu finden im Stande seyn. So kann man ihm auftragen, mit 6 Linien eine Figur zu bilden, aber nicht mehr alle Fälle, die möglich sind, erschöpfen zu wollen, sondern nur diejenigen, die er für sehr wichtig erachtet. Auch kann dieses noch bis auf mehrere Figuren fortgesetzt werden.

Noch einige einzelne Fragen über die so eben aufgestellten Reihenfolgen.

Um ein Dreyeck, Viereck, Fünfeck ꝛc. zu bilden, wie viel Linien werden jedesmal dazu erfordert?

Antwort: Für das Dreyeck drey, für das Viereck 4 Linien u. s. w.

Wie viele Linien werden wenigstens erfordert, um zwey Dreyecke zu bilden?

Antwort: Man kann diese zwey Figuren mit 4, 5 und 6 Linien bilden. Werden aber noch mehr Linien hinzu genommen, so sind einige davon nur als Schenkel zu betrachten und nützen zur Bildung des Dreyecks nichts.

Wie viele Linien werden erfordert, um fünf Dreyecke und ein Fünfeck zu bilden?

Antwort: 5 Linien.

Wie viel Linien werden erfordert, um ein Parallelogramm zu bilden?

Antwort: 2 paar gleichlaufende Linien.

Wie viel Linien werden wenigstens erfordert, um 2 Parallelogramme zu bilden?

Antwort: zwey und drey, oder drey und vier, oder vier und vier gleichlaufende Linien. (S. Zchg. 25.)

Wie viele Linien werden erfordert, um ein Dreyeck und ein Parallelogramm zu bilden?

Wie viele Figuren entstehen, wenn man 2 Dreyecke eins in das andere setzt?

Antwort: zwey (S. Zchg. 27.). Die Figur a nennt man ein Sechseck mit getrennter Begränzung. So kann man Achtecke mit getrennter Begränzung machen, und zwey wieder von den verschiedensten Arten. Zwey Quadrate so in einander gestellt bilden ebenfalls ein Achteck. Auch können auf diese Weise Räume geschlossen werden, die drey- oder mehrere mal eine getrennte Begränzung haben. Zwey Dreyeck so in einander gesetzt, bilden ein Dreyeck mit mehrmalig getrennter Begränzung.

So wie die geschlossenen Räume in Rücksicht der Anzahl der Ecken bestimmt worden sind, so können sie auch in Hinsicht der Arten der Winkel einer ähnlichen Betrachtung unterworfen werden.

Lehrer: Untersucht, was die drey Winkel eines Dreyecks für eine Form haben?

Die Schüler werden entweder drey spitze, oder zwey spitze und einen rechten, oder zwey spitze und einen stumpfen Winkel finden. Im ersten Fall wird das Dreyeck ein spitzwinklichtes, im zweyten Fall ein rechtwinklichtes und im dritten ein stumpfwinklichtes Dreyeck genannt.

So wird ihm das Viereck zur Untersuchung aufgetragen, und er wird finden, daß es entweder:

1) Vier rechte,
2) 2 rechte, 1 spitzen und 1 stumpfen,
3) 1 rechten, 1 spitzen und 2 stumpfe,
4) 2 spitze und 2 stumpfe,
5) 4 spitze (S. Zchg. 21.),
6) 1 rechten und 3 spitze,
7) 1 rechten, 2 spitze und 1 stumpfen,
8) 1 spitzen und 3 stumpfe,
9) 3 rechte und einen stumpfen Winkel haben kann.

Ganz auf die gleiche Weise läßt man ihn dieses auch in Rücksicht auf die Fünfecke, Sechsecke, in so weit es sein Bedürfniß erheischen mag, fortsetzen. Jedoch wird es nicht mehr nothwendig seyn, ihn bey den Sechs- und Siebenecken alle Fälle aufsuchen zu lassen.

Die Vierecke werden nicht, wie die Dreyecke, nur nach ihren Winkeln benannt und klassificirt, sondern zum

Theil auch nach dem gleich = und ungleichlaufend seyn der Seiten, und deswegen heißt man die Vierecke, die zwey Paar gleichlaufende Seiten haben, Parallelogramme, diejenigen aber, die nur ein paar gleichlaufende Seiten haben, Paralleltrapeze, und die, deren Seiten ungleichlaufend sind, Trapeze.

Hat das Parallelogramm rechte Winkel, so nennt man es ein rechtwinklichtes Parallelogramm, hat es aber spitze und stumpfe Winkel, so wird es ein schiefwinklichtes Parallelogramm genannt.

Die weitere Benennung aller dieser Vierecke, so wie der Fünfecke, Sechsecke ꝛc. läßt sich nicht leicht nach dieser Norm fortsetzen.

Einige einzelne Fragen über das Viereck werden das Wesen, auf das hier alles ankommt, noch näher bezeichnen.

Frage. Was für Arten von Winkel kann das Parallelogramm, das Rechteck, das Paralleltrapez und das Trapez haben? Wie kann man das spitzwinklichte Viereck auch noch anders nennen?

Antwort. Trapez.

Kann man ein Viereck machen, welches nur stumpfe Winkel hat?

Antwort. Nein.

Kann man ein Viereck machen, das so viele rechte als stumpfe Winkel hat?

Antwort. Nein.

Kann man recht =, stumpf = und spitzwinklichte Fünfecke machen?

Antwort. Man kann kein Fünfeck machen, das blos aus rechten Winkeln besteht; wohl aber kann man ein stumpf= und spitzwinklichtes Fünfeck machen.

Kann man aber ein recht= und stumpfwinklichtes Sechseck machen?

Antwort. Ja. (S. Zchg. 22, 23 und 24.)

Fragen dieser Art können auf Sieben=, Acht=, Neun= und Zehnecken ausgedehnt werden, und haben hier eine Wichtigkeit, die sie unter keinem andern Gesichtspunkt hatten, oder später erhalten können. Auch können die verschiedenen Figuren nach den gleichen und ungleichen Seiten benannt und eingetheilt werden; z. B.

Ein Dreyeck, das drey gleiche Seiten hat, nennt man ein gleichseitiges, oder auch ein regelmäßiges Dreyeck. Ein Dreyeck mit zwey gleichen Seiten nennt man ein gleichschenklichtes, und eines mit drey ungleichen Seiten ein unregelmäßiges Dreyeck.

So wieder beym Viereck. Ein Viereck mit vier gleichen Seiten und 4 gleichen Winkeln nennt man ein regelmäßiges Viereck oder auch Quadrat. Ein Viereck mit spitzen und stumpfen Winkeln nennt man Raute, die andere aber auch unregelmäßiges Viereck heißen.

Auch hier sind einzelne Fragen nicht entbehrlich.

Was hat das regelmäßige Drey=, Vier=, Fünfeck ꝛc. für Winkel?

Antwort. Das erste hat spitze, das zweyte rechte und das dritte stumpfe Winkel.

Was für Arten von gleichschenklichten Dreyecken giebt es?

Antwort. Es giebt recht-, spitz- und stumpfwinklicht gleichschenklichte Dreyecke.

Die gleichen Fragen und nämliche Antwort ist auch bey den unregelmäßigen Dreyecken anzuwenden.

Sind alle Figuren, die gleiche Seiten haben, regelmäßig?

Antwort. Keine, als das Dreyeck.

Was müssen die Vierecke, Fünfecke u. s. w. mehr noch als gleiche Seiten besitzen, wenn sie regelmäßig werden sollen?

Antwort. Noch gleiche Winkel.

Was für gleiche Winkel?

Antwort. Das Viereck muß rechte, das Fünfeck, Sechseck u. s. w. stumpfe Winkel haben.

Welche regelmäßige Figuren haben gleichlaufende Seiten?

Antwort. Das Viereck, Sechseck u. s. w.

Wie viel hat ein jedes derselben?

Antwort. Die erste Figur hat zwey Paar, die zweyte 3 Paar gleichlaufende Seiten u. s. w.

Welche regelmäßige Figuren haben keine gleiche gleichlaufende Seiten?

Antwort. Das Dreyeck, Fünfeck u. s. w.

Ist eine Figur deswegen regelmäßig, daß sie gleichlaufende Seiten hat?

Antwort. Nein.

Ist sie es, wenn sie gleiche Seiten hat?

Antwort. Eben so wenig.

Welche regelmäßige Figur hat spitze, rechte und stumpfe Winkel?

Antwort. Spitze Winkel hat nur das regelmäßige Dreyeck, rechte nur das Viereck, stumpfe aber haben alle regelmäßigen Vierecke, vom Fünfeck an.

Wie viel Linien werden erfordert, um 2, 3 ꝛc. Dreyecke, Vierecke, Fünfecke u. s. w. zu bilden?

Wie viele, um ein regelmäßiges Dreyeck und Viereck, oder ein regelmäßiges Viereck und Fünfeck zu bilden?

Diese Uebungen werden auch für die Kunstbildung von höherer Wichtigkeit werden.

Ich mache diese Bemerkung hier, um dadurch einen Wink zu geben, wie nahe und wie sehr die Geistesübungen auch in die Kunstübungen und Kunstfertigkeiten einzugreifen geeignet sind.

Bisher sind die verschiedenen Formen immer aus Linien zusammengesetzt worden. Diese Betrachtungsweise kann aber auch unter dem Gesichtspunkt, auch mit schon gebildeten Figuren vorgenommen, und zuerst jedes als ein Ganzes, welches in Theile zerlegt wird, ins Auge gefaßt werden. Z. B.

Ein Winkel kann durch eine Linie in zwey Winkel zerlegt werden, oder die Ecke in zwey Winkel, oder in eine Ecke und in einen Winkel, oder durch das Schließen des Raums kann derselbe sogar in 1 Dreyeck verwandelt werden.

Der Lehrer giebt dem Schüler folgende Eintheilung oder Zertheilung einer Form zu untersuchen auf:

Seht in was für Winkel ein stumpfer Winkel mit 1, 2, 3 Linien zerlegt werden könne, und setzet dieses bis zur Ecke fort. Untersucht ferner, in was für Figuren ein Dreyeck mit 1, 2 rc. Linien eingetheilt und zerlegt werden könne. Setzet diese Untersuchung aufs Fünfeck und Sechseck u. s. w. fort. Doch hiemit begnügt man sich, wenn der Zögling bestimmt, ob es Dreyecke, Vierecke, Fünfecke u. s. w. seyen.

Einzelne Fragen machen eine weitere Ausführung ähnlicher Reihenfolgen entbehrlich:

Frage. Kann man ein Dreyeck durch eine Linie in zwey Dreyecke zerlegen? Aber auch in zwey Vierecke?

In wie viel geschlossene Räume kann man ein Dreyeck durch zwey Linien höchstens zerlegen?

Antwort. In vier.

Kann man ein Dreyeck durch zwey Linien in ein Dreyeck und in ein Sechseck eintheilen?

Antwort. Ja. (S. Zchg. 28.)

Wird man ein Quadrat durch eine Linie in 2 Dreyecke zerlegen können?

Auch in zwey Rechtecke und in zwey Quadrate?

In was für zwey Theile kann man ein Dreyeck durch fünf Linien theilen?

Antwort. In zwey Siebenecke, oder in ein Achteck, oder in ein Achteck und in ein Siebeneck rc.

Durch wie viele Linien kann ein Dreyeck in zwey Vierecke eingetheilt werden?

In wie viel und in was für Theile kann man ein Parallelogramm durch eine, mit einer der Seiten gleichlaufende Linie eintheilen? Ein Sechseck, das drey und drey gleichlaufende Seiten hat, wird durch 2 Linien, die drey

Seiten gleichlaufend sind, in die höchste Anzahl Theile getheilt; es fragt sich, wie viel Theile es seyen, und was dieselben für eine Form haben? Kann man mit einer Linie alle Figuren in gleich viele Theile eintheilen?

Antwort. Nein. Um sich davon zu überzeugen, kann man nur Zeichnung 21. zu Rathe ziehen. Dieser Raum ist mit einer Linie in drey Theile zu theilen.

Mit wie viel Linien ist ein Dreyeck getheilt worden, wenn durch die Theilung zwey Dreyecke, oder ein Dreyeck und ein Viereck entsteht.

Statt durch die Verbindung und Zusammenstellung von Linien neue Figuren zu bekommen, kann man, wie ich oben bemerkte, schon gebildete Formen nehmen, und alle die Untersuchungen, die man mit den Linien vornahm, auch auf sie ausdehnen; z. B.

Man nimmt Winkel, Dreyecke, Vierecke rc. und fragt unter anderm, wie bey den Linien, ob und wie viele von ihnen gleichlaufend seyn können?

Der Schüler wird finden, daß 2, 3 und mehrere Winkel, d. h. in ihren Schenkeln, mit einander gleichlaufend seyn können (S. Zchg. 29 und 30).

Führt man dieses weiter fort, so wird der Schüler finden, daß nicht alle Winkel gleichlaufend in ihren Schenkeln mit einander seyn können. Natürlich muß auch untersucht werden, welche Winkel dann nicht gleichlaufend unter einander sind. Der Schüler wird keine Schwierigkeiten zu überwinden haben, und finden, daß die Schenkel des rechten Winkels nie mit denen des spitzen oder stumpfen gleichlaufend werden; die spitzen und stumpfen Win=

kel können aber, beydes, gleich und ungleichlaufend seyn. Für die gleichlaufenden Schenkel kann man nur Zeichnung 30 als Wegweisung benutzen.

Noch einige einzelne Fragen über diesen Gesichtspunkt.

Sind die Schenkel aller rechten Winkel mit einander gleichlaufend?

Antwort. Sie können so gestellt werden, daß sie gleich- oder ungleichlaufend stehen?

Können die Schenkel von gleichlaufenden Winkeln zusammen treffen oder nicht?

Antwort. Man kann sie so stellen, daß sie zusammen treffen, aber auch so, daß sie nicht zusammen treffen können. Für den ersten Fall siehe Zchg. 30.

Untersucht, wie viele Seiten in 2, 3 und 4 Dreyecken mit und unter einander gleichlaufend seyn können?

Die Schüler werden finden, daß bey zwey Dreyecken entweder keine, oder zwey oder 2 mal 2, oder 3 mal 2 Seiten gleichlaufend seyn können.

Bey drey Dreyecken kann man von ein mal 3 Seiten bis zu 3 mal 3, jede Anzahl gleichlaufender Seiten machen, worüber obige Zeichnung als dienlich angesehen werden darf.

Bis zu 4 und mehreren Dreyecken dieses fortzusetzen, ist aber auf keinen Fall nothwendig. Dagegen wird nicht entbehrlich, 2 Dreyecke, Vierecke, Fünfecke rc. diesen nämlichen Fragen und Untersuchungen zu unterwerfen; desgleichen ein Dreyeck mit dem Vier-, Fünf-, Sechsecken, oder ein Viereck mit dem Fünf=, Sechs= und Siebenecken ꝛc.

Einzelne Fragen auch hierüber:

Welches ist die höchste Zahl gleichlaufender, und welche diejenige ungleichlaufender Seiten bey zwey Dreyecken?

Können die drey Seiten eines Dreyecks niemals mit den vier Seiten eines Vierecks gleichlaufend seyn?

Antwort. Höchstens können zwey und zwey Seiten des Dreyecks und Vierecks mit einander gleichlaufend gemacht werden.

Wie viele Seiten können aber in einem Dreyeck und Fünfeck höchstens mit einander gleichlaufend seyn?

Antwort. Dreymal zwey Seiten (S. Zchg. 31).

Die Ausdehnung dieser Uebung auf Fünf= und Sechsecke, auf Neun= und Eilfecke, auf Vier= und Achtecke ꝛc. ist für den Schüler sehr bildend und muß ganz nach dieser oben aufgestellten Norm geschehen.

Frage. Man hat zwey geschlossene Räume gemacht, die dreymal zwey gleichlaufende Seiten haben, es fragt sich, was dieses für Figuren seyen?

Antwort. Zwey Dreyecke, oder ein Dreyeck und ein Fünfeck ꝛc.

So wie die ungleichlaufenden Linien zusammentreffen können, so muß diese Fähigkeit auch auf Winkel, Dreyecke, Vierecke ꝛc. ausgedehnt, und das Ergebniß davon untersucht werden.

Man knüpft an den Faden, der bey der Linie angegeben worden ist, an, und schreitet also weiter.

untersucht, in wie viel Punkten sich zwey und mehrere Winkel, Dreyecke ꝛc. vereinigen können.

Weil es aber mehrere Arten Winkel, Figuren ꝛc. hat, so muß bey der Untersuchung auch auf diesen Umstand Rücksicht genommen werden.

Seht, in wie viel Punkten zwey rechte, oder zwey stumpfe, oder zwey spitze Winkel in ihren Schenkeln mit einander verbunden werden können.

Für zwey rechte Winkel wird der Schüler einen, 2, 3 Vereinigungspunkte finden. (S. Zeichnung 32. für drey Punkte.) Die Figur a drückt die rechten Winkel aus. Zwey stumpfe Winkel können in einem, 2 und 3 Punkten mit einander verbunden werden; zwey spitze Winkel hingegen in einem, 2, 3 und 4 Punkten. (S. Zchg. 32.)

Das Nämliche auf drey Winkel und zwar auf drey rechte, oder stumpfe, oder 3 spitze, oder zwey rechte und einen spitzen auszudehnen, wird nicht als entbehrlich zu behandeln unterlassen werden dürfen.

So schreitet man weiter, und läßt den Schüler untersuchen, in wie viel Punkten zwey und drey Dreyecke, oder Vierecke, oder Dreyecke und Vierecke miteinander, verbunden werden können.

Bey den Dreyecken wird der Schüler von 1 bis 6 Vereinigungspunkten jede Anzahl finden; bey zwey Vierecken von 1 bis 16 Punkten ebenfalls jede Anzahl. (Seht für 16 Punkte Zchg. 34.)

Einzelne Fragen über diese Reihenfolgen:

In wieviel Punkten können zwey Parallelogramme mit einander verbunden werden? Welches ist die größte und welches ist die geringste Anzahl ihrer Vereinigungspunkte? Verbindet man 2 Parallelogramme in einem Punkt, wie viele ihrer Seiten können gleichlaufend seyn? Kann ein Dreyeck und ein Parallelogramm in so viel Punkten verbunden werden, als ein Dreyeck und ein Viereck? In wie viel Punkten kann ein Parallelogramm und ein Sechseck mit 3 paar gleichlaufenden Seiten mit einander verbunden werden? In wie viel Punkten zwey regelmäßige Dreyecke, Vierecke, Fünfecke u. s. w.? Zwey gleichschenklichte, rechtwinklichte Dreyecke können in wie viel Punkten mit einander verbunden werden? In wie vielen aber das regelmäßige Sechseck mit dem Sechseck, welches drey paar gleichlaufende Seiten hat? Wie viele Dreyecke, Vierecke u. s. w. können in einem Punkt verbunden werden?

Antwort. So viel man will.

Eben so fragt man, ob dieses in 2, 3, 4 und noch mehreren Punkten auch möglich sey; wie z. B. können 5 Dreyecke mit einander verbunden werden? Können auch so viele Quadrate in einem Punkt vereinigt werden, als man will?

Antwort. Nein.

Durch die Verbindung der Linien sind Winkel, Ecken, Figuren gebildet worden, und eben so kann auch mit den Winkeln, mit den Ecken, Dreyecken, Vierecken u. s. w. das Nämliche vorgenommen werden. Dem zufolge läßt man den Schüler untersuchen, wie viele Winkel durch die Verbindung der Schenkel von zwey Winkeln entstehen können.

Er wird ohne Anstand finden, man könne entweder 1, 2 bis 16 Winkel, jede Zahl nur keine 15 in dieser Verbindung machen. (Seht Zeichnung 33 für 16 Winkel.) Mit 2 Dreyecken aber von 1 bis 24 wieder jede Zahl, nur keine 23. Mit 2 Vierecken können von 1 bis 64 Winkel, wieder jede Zahl, ausgenommen 63, gebildet werden.

Hier müssen aber nicht alle Fälle erschöpft werden, sondern der Lehrer muß sich begnügen, dem Schüler aufzutragen, er möchte 13 oder 20 ꝛc. mit dieser Verbindung bilden.

Mit ein paar einzelnen Fragen wird dieser Gesichtspunkt in ein heiteres Licht gesetzt werden.

Frage. Kann man drey Dreyecke so verbinden, daß dadurch 3 neue Winkel gebildet werden? Werden 2 Dreyecke in der höchsten Anzahl Punkte verbunden, wie oft gehen die Linien durch die Vereinigungspunkte? Verbindet man 2 Vierecke in einem Punkt, und entsteht durch diese Verbindung ein Winkel; was kann dieser Winkel für eine Form haben?

Antwort. Er ist entweder recht, spitz oder stumpf.

Aehnliche Fragen können gemacht werden, wenn man 2, 3 und mehrere Winkel angiebt, doch darf dieses nicht auf eine zu hohe Anzahl Winkel und erschöpfend ausgeführt werden.

Können drey Parallelogramme so verbunden werden, daß durch ihre Verbindung 3 rechte, oder 3 spitze, oder 3 stumpfe Winkel gebildet werden? Wie viele Winkel können 2 Rechtecke durch ihre Verbindung höchstens mit einander bilden?

Antwort. 16. (S. Zchg. 35.)

Die gleiche Frage kann auch in Rücksicht auf spitz-, oder spitz- und stumpfwinklichte Vierecke gemacht werden.

Diese Betrachtung darf auch auf die Anzahl geschlossener Figuren ausgedehnt werden.

Untersucht, wie viele geschlossene Figuren mit 2, 3, 4 ꝛc. Winkeln gebildet werden können.

Mit 2 Winkeln wird er 1 oder 2, oder 3 Figuren bilden. (Seht Zchg. 33.) Mit 3 Winkeln aber 1, 2 bis zu 10 Figuren jede Zahl.

Das Gleiche läßt man sie mit Dreyecken, Vierecken, Fünfecken ꝛc. vornehmen. Auch mit Dreyecken und Vierecken vereinigt. Daß dieser Gesichtspunkt auf die Art der Figuren, die dadurch entstehen können, ausgedehnt werden kann, versteht sich von selbst, und soll nicht übergangen werden. Eben so dürfte man den Schüler die Anzahl der Schenkel und der Seiten, die dadurch entstehen, auf obige Weise untersuchen lassen.

Einzelne Fragen geben aber auch über diesen Gesichtspunkt hinlängliches Licht.

Frage. Kann man zwey Dreyecke so verbinden, daß dadurch eine neue geschlossene Figur entsteht? Welches wird die durch diese Verbindung gebildete, höchste Anzahl geschlossener Räume werden?

Antwort. Sieben. (S. Zchg. 36.)

Durch eine solche Vereinigung werden die ersten ursprünglichen Dreyecke in ganz andere Formen umgewandelt werden. Aber folgende Fragen werden geeignet seyn, den Schüler gleich auf das Wesen dieser Form aufmerksam zu machen.

Frage. Was für geschlossene 7 Räume sind dadurch entstanden? Sind sie in oder außerhalb den Dreyecken und in was ist das eine oder das andere von diesen Dreyecken verwandelt worden? Kann man zwey Parallelogramme so verbinden, daß durch ihre Verbindungsweise nichts als Parallelogramme entstehen?

Antwort. Ja.

Können auch Rechtecke so verbunden werden, daß nur wieder Rechtecke entstehen?

Antwort. Ja.

Können 2 Quadrate so verbunden werden, daß durch ihre Verbindung auch nur wieder Quadrate entstehen?

Antwort. Nein.

Welches wird die höchste Anzahl Dreyecke seyn, die durch die Verbindung zweyer Dreyecke entstehen? So können Fragen über Vierecke, Fünfecke u. s. w. gemacht werden.

Wie viele Quadrate können durch die Verbindung von 2, 3, 4 rc. Quadraten entstehen? Wie viele regelmäßige Dreyecke durch die Verbindung von zwey Dreyecken rc.? Welches ist die höchste Anzahl Seiten, die durch die Verbindung von zwey Dreyecken, Vierecken rc. entstehen können?

Wenn man 2 Fünfecke in der höchsten Anzahl Punkte vereinigt, werden sie dann auch die höchste Anzahl Seiten, Figuren, Winkel rc. bilden? Wie viele Seiten bilden zwey regelmäßige Fünfecke durch ihre Verbindung höchstens?

Gebildete Figuren können aber nicht nur in Punkten, sondern auch durch die Seiten mit einander verbunden werden.

Schon bey den Linien haben wir gesehen, daß zwey und mehrere derselben in einer Richtung, in einer Linie selbst vereinigt werden können, daß aber durch diese Verbindungsweise nicht nur nichts Neues entstehe; sondern eine größere Anzahl Linien in eine zusammen fällt, und deswegen der Unwichtigkeit halber ganz übergangen worden. Dieses hört aber in dieser Verbindungsweise nicht auf, und deshalb mag eine kurze Ausführung dieses Gesichtspunktes hier eine Stelle einnehmen.

Verbindet man zwey rechte Winkel in einer Linie oder in einem Schenkel mit einander, so bilden sie entweder 2, 3 oder 4 rechte Winkel. Seht für 2 Winkel Zchg. 37. (der Schenkel, in welchem diese 2 Winkel mit einander verbunden sind, findet sich etwas stärker gezeichnet). Für 3 und 4 Winkel s. Zchg. 38. und 39.

Werden zwey Winkel in zwey Schenkeln verbunden, so fallen die Winkel durch die Verbindung ihrer Schenkel in einen Winkel zusammen, und bieten nichts Neues mehr dar.

Man kann zwar den Schüler untersuchen lassen, ob alle Winkel unter einander in zwey Schenkel verbunden werden können; und er wird finden, daß nur zwey rechte, oder zwey gleich große spitze, oder zwey gleiche stumpfe Winkel in 2 Schenkeln, alle andere Arten Winkel aber immer nur in einem Schenkel mit einander verbunden werden können. So könnten auch mehrere Winkel unter einander in ihren Schenkeln verbunden werden, deren Ausführung nach Bedürfniß dem Lehrer überlassen bleibt.

Untersucht, in wie viel Seiten zwey Dreyecke mit einander verbunden werden können.

Aus dem, was bey den Winkeln aufgestellt worden ist, wird der Schüler mit aller Sicherheit auch zu finden im Stande seyn, daß man sie in 1, 2 und 3 Seiten mit einander verbinden könne.

Werden aber zwey Dreyecke durch 3 Seiten mit einander verbunden, so bilden sie auch nur ein Dreyeck.

Eben so findet der Schüler, daß zwey Vierecke wieder durch 1, 2, 3 und 4 Seiten mit einander verbunden werden können. Für den letzten Fall erhält man ebenfalls wieder nur ein Viereck.

Dieses aber bis zu den Fünf = und Sechsecken fortzusetzen, wird besonders durch die einzelnen Fragen, die über diesen Gesichtspunkt hier noch beygefügt werden, entbehrlich.

In wie viel Seiten können zwey Sechsecke höchstens mit einander verbunden werden?

Antwort. In 6 Seiten.

Was bilden denn diese zwey Figuren mit einander?

Antwort. Nur ein Sechseck.

Können immer zwey Sechsecke in sechs Seiten mit einander verbunden werden?

Antwort. Nein, nicht alle Sechsecke.

Was für zwey Quadrate können durch 4 Seiten mit einander verbunden werden?

Antwort. Zwey gleich große Quadrate.

In wie viel Seiten können zwey ungleiche Quadrate höchstens mit einander verbunden werden?

Antwort. In zwey Seiten.

Wie viele Quadrate können in einer Seite mit einander verbunden werden?

Antwort. So viel man will.

In wie viel Seiten können zwey regelmäßige Dreyecke, Vierecke, Fünfecke ꝛc. mit einander verbunden werden?

Auch kann man den Schüler untersuchen lassen, was für neue Formen sich durch diese Verbindungsarten ergeben, z. B.

Wenn man zwey Dreyecke mit einander verbindet, wie viel neue und was für Winkel entstehen dadurch? Verbindet man sie in zwey Seiten, wie viel und was für geschlossene Räume entstehen? Als weitere Anleitung hierüber folgen noch einige Aufgaben.

Wenn man drey Quadrate in einer Seite verbindet, wie viele und was für Winkel können dadurch entstehen? Wie viel und was für geschlossene Figuren werden dadurch gebildet? Wird ein Dreyeck, ein Viereck und ein Fünfeck in einer Seite mit einander verbunden; so fragt es sich, was diese Figuren für geschlossene Räume bilden? Welches ist die größte Anzahl Vereinigungslinien bey drey Parallelogrammen? Wie viele Winkel und was für geschlossene Figuren bilden sie dann?

Indem man gebildete Figuren in Seiten mit einander verbindet, kann man sie gleichzeitig auch noch in Punkten unter einander verbinden. Z. B.

Man läßt den Schüler untersuchen, in wie viel Punkten man zwey Dreyecke, die in einer Seite mit einander verbunden werden, noch vereinigt werden können.

Er wird finden: wenn sie in einer Seite verbunden sind, so können sie noch in einem, oder in 2, oder endlich in 3 Punkten vereinigt seyn. (Für 3 Punkte s. Zchg. 40.) Die Buchstaben a bezeichnen die drey Vereinigungspunkte.

Wenn 2 Dreyecke in zwey Seiten mit einander verbunden werden, in wie viel Punkten können sie dann noch zusammen treffen?

Antwort. In keinem oder in einem Punkt.

Verbindet man 2 Parallelogramme in einer Seite, in wie viel Punkten können sie dann noch verbunden werden? Was entsteht durch eine solche Verbindung, sowohl in Hinsicht der Anzahl als auch der Art der Winkel, und eben so in Hinsicht der Anzahl und Form der geschlossenen Figuren? Werden 3 Parallelogramme in einer Seite mit einander vereinigt, wie viele ihrer Seiten können dann mit einander gleichlaufend seyn? Verbindet man 2 Sechsecke in einer Seite, in wie vielen Punkten können sie noch mit einander verbunden werden? Was für geschlossene Räume entstehen dadurch? Ein Dreyeck, ein Viereck, ein Fünfeck und ein Sechseck werden in einer Seite mit einander verbunden; es fragt sich, welches die höchste Anzahl Vereinigungspunkte sey? Was für Figuren entstehen dadurch? Wie viele Winkel, wie viele Ecken, wie viele Seiten u. s. w.?

Mehrere Verbindungen und Figuren haben ihre Benennungen von der Lage erhalten, in der sie sich zu andern Figuren befinden, und deswegen müssen auch hier einige der wesentlichsten angeführt und eine Norm aufgestellt werden, nach welcher ein jeder im Stande ist, dieses auf andere Formen zu übertragen.

Zwey Winkel, die durch 2 Linien gebildet werden, nennt man Nebenwinkel. Zwey Winkel, die durch 3 Linien gebildet werden, nennt man Nebenwinkel eines Winkels, oder auch Nebenwinkel eines Ecks. Die Winkel an der Zeichnung 7 bilden die Nebenwinkel eines Ecks; aber man nennt auch alle 3 Winkel zusammen Nebenwinkel um einen Punkt herum.

Gestützt auf diese Kenntniß, kann der Lehrer dann weiters fahren, und folgende Fragen an seine Schüler richten.

Was für eine Form haben die 2 Nebenwinkel?

Antwort. Entweder sind beyde rechte, oder der eine ist ein spitzer und der andere ein stumpfer Winkel. Durch wie viel Linien sind sie immer gebildet worden? Sind aber diese Nebenwinkel aus 3 Winkeln gebildet worden, was können sie dann für eine Form haben?

Antwort. Alle 3 spitze, oder immer ein rechter und 2 spitze, oder einer ein stumpfer und 2 spitze.

Was sind die 2 oder 3 Nebenwinkel, die einen Winkel miteinander bilden, für Arten derselben? Desgleichen wenn sie ein Eck bilden? Was haben die 4 Nebenwinkel um einen Punkt herum für eine Form?

Antwort. Alle sind rechte Winkel; oder 2 sind rechte, einer ein spitzer und einer ein stumpfer Winkel ꝛc.

Zu einer großen Anzahl Winkel dürfen diese Fragen auf keinen Fall ausgedehnt werden.

Die Winkel a und a an der Zeichnung 41. nennt man ihrer Lage wegen Scheitelwinkel.

Was wird der Scheitelwinkel von einem spitzen Winkel seyn? Was derjenige eines rechten?

Daß man Figuren, die also liegen, auf gleiche Weise benennen könnte, versteht sich von selbst, doch ist diese Benennung im Leben weniger üblich, und wird, da überdieß ein jeder im Stande ist, dieses selbst zu machen, hier übergangen.

An Zeichnung 42. wird der Winkel a zu b der Lage nach ins Auge gefaßt, innere Gegenwinkel benannt; f und e, h und c sind aber äußere Gegenwinkel, und eben so g und d; a und e sind hingegen innere und äußere Gegenwinkel, desgleichen f und e und g und b und h; a und d endlich innere und äußere Wechselwinkel, desgleichen f und c, e und h und b und g.

Gestützt auf diese Kenntniß der Lage der Winkel, kann man den Schüler untersuchen lassen, in was für einer Stellung sich der Winkel a zu allen andern in einer solchen Figur befinde. Er wird finden, daß a Nebenwinkel von h, Scheitelwinkel von g, Nebenwinkel von f, innerer Gegenwinkel von b und innerer Wechselwinkel von c ist.

Noch einige einzelne Fragen über die Lage der Winkel in zwey Punkten.

Was für eine Form haben die innern Gegenwinkel bey den gleichlaufenden Linien? Was für eine Form die innern Wechselwinkel? Was für eine Form die innern und äußern Wechselwinkel und Gegenwinkel? Und was für eine Form haben die äußern Wechsel- und die äußern Gegenwinkel?

Die nämlichen Fragen werden auch auf die ungleichlaufenden Linien fortgesetzt.

Aus noch mehr als zwey Winkeln die Gegenwinkel und Wechselwinkel bilden zu wollen, wird, nachdem sich der Zögling die Lage der Winkel in zwey Punkten in dieser Ausdehnung eingeübt hat, nicht mehr nothwendig werden. Doch kann, im Fall man es weiter ausführen möchte, dieses leicht nach der Norm geschehen, die bey der Lage der Winkel in zwey Punkten aufgestellt worden ist.

Als Beschluß der Formlehre in geraden Linien kann man dem Schüler eine beliebige Verbindung von Linien vorlegen, und demselben gleichsam in einer Verbindung alle die aufgestellten Gesichtspunkte noch einmal angeben lassen.

Ich wähle hiefür Zeichnung 35. Aus wie viel Linien besteht diese Figur? Sind dieselben gleich- oder ungleichlaufend? Wie viele sind in jeder Richtung gleichlaufend? Mit wie viel Linien ist jede derselben gleich- und mit wie vielen ungleichlaufend? In wie viel Punkten vereinigen sich diese Linien? Wie viele vereinigen sich in jedem Punkt? Wie oft gehen Linien durch die Vereinigungspunkte? Wie viele Enden der Linien liegen in den Vereinigungspunkten? Wie viele und was für Winkel werden durch diese Linien gebildet? Wie viel und was für geschlossene Räume? Wie viele Seiten hat es in dieser Verbindung von Linien? Kann man diese Vierecke auch als geschlossene Figuren, die in Punkten mit einander verbunden sind, ansehen, und als welche? Auch als Figuren, die in Seiten mit einander verbunden sind? Finden sich in derselben Nebenwinkel, und wie viel Paar? Scheitelwinkel, und wie viel Paar? Nebenwinkel um einen Punkt herum? Wie viel Paar innere Gegenwinkel, äußere Gegenwinkel, u. s. w.

Diese Fragen müssen eben so wohl von dem Schüler als von dem Lehrer gemacht werden können. Nachdem eine Figur auf diese Weise den Schülern eingeübt worden ist, kann vom Lehrer eine andere beliebige Figur gemacht und dessen Stelle von einem Schüler vertreten werden. Auch kann er ihm ein sehr verwickeltes Vieleck vorzeichnen, und ihn bestimmen lassen, was es für eine Form habe. Z. B. etwa ein Sechzigeck. Soll eine anschauliche Beschreibung von demselben gemacht werden; es sey ein Sechzigeck mit so und so viel Winkeln in oder außer der Figur. Die Winkel haben diese oder jene Form, und liegen in oder außer derselben; es sey ein Sechzigeck, welches so und so viel mal so lang als breit sey. Es habe überall diese Breite, oder es wechsle in diesem oder jenem Verhältniß ab ꝛc. Daß eine bestimmte und leichte Beschreibung auf diese Weise gemacht werden kann, soll keinem Zweifel unterworfen seyn.

Ehe ich in den Uebungen weiter schreite, muß ich noch auf eine andere Darstellungsart der Formen aufmerksam machen. Statt den Schüler durch irgend eine Anzahl Linien, bey der er alle Formen, die mit derselben möglich sind, untersucht und erschöpft, aufzuhalten, könnte man ihm zur Abwechslung diese Darstellung, worin alle Veränderungen erschöpft wären, unter geordneten Gesichtspunkten zur Anschauung bringen.

Dieser Gang führt unmittelbar von der äußern Anschauung zur innern und muß als Abwechslung mit der obigen, wenn das Ganze vollendet und mit Lebendigkeit behandelt werden soll, auch seine Stelle finden. Diese von außen aufnehmende Darstellung der Thätigkeit im Anschauen und im Ordnen bietet das Leben unter mancherley Gestaltungen dar, und darf von dieser Seite, wenn man es nur als Kunstmittel des Unterrichts benutzen will, nicht außer Acht gelassen werden. Um aber dem Lehrer dießfalls eine anschauliche Anleitung und Wegweisung in die Hand zu geben, werde ich durch ein paar Beyspiele zeigen, wie dieses wirklich ausgeführt werden müsse.

Wenn der Schüler z. B. die Anzahl der Winkel aufzusuchen aufgefordert wird, so könnte ihm der Lehrer alle Veränderungen, die mit drey Linien in einem Punkt in Hinsicht der Anzahl Winkel möglich und auf einer Tabelle dargestellt wären, vorlegen und ihn auf folgende Weise aussprechen lassen. Diese Verbindungen von Linien sind immer mit drey Linien in einem Punkt gemacht worden. Die erste davon bildet zwey Winkel, die zweyte drey Winkel, die dritte vier Winkel u. s. w. So führt man ihm die Winkel, die mit drey Linien in zwey Punkten gebildet werden können, vor. Dann schreitet man zu 3 Linien in

3 Punkten. Am Ende faßt der Schüler alle die vorgeführten Abänderungen als ein Ganzes von neuem ins Auge, und sagt: mit drey Linien in 1, 2 und 3 Punkten können in Rücksicht der Zahl der Winkel so und so viele verschiedene Verbindungen gemacht werden.

Schaut diese Veränderungen noch einmal wohl an, dann wollen wir die Tabellen umkehren, und ihr müßt versuchen, dieses aus dem Kopf herzusagen. Hat dieses der Schüler zu einer solchen Geläufigkeit gebracht, so wird er diesen Zweck noch vollendeter erreichen, wenn man diese und ähnliche Uebungen auf Tabellen bringt und sie in dem Schulzimmer aufgehängt, lange Zeit vor seine Sinne bringt. Was hier mit der Anzahl der Winkel statt fand, kann und soll auch mit der Art der Winkel, mit der Anzahl der Figuren und mit der Art derselben, wenigstens dann und wann, als Abwechslung, eine Stelle finden. Will man dem Ganzen großes Leben geben, so wird man wohlthun, bey Zeiten bey ein und derselben Uebung diese Darstellungsarten anzuwenden, um dem Schüler irgend ein wichtiges Formverhältniß geläufig und geistig anschaulich zu machen. Zur Erreichung dieses Endzweckes wird ferner noch sehr zweckmäßig seyn, wenn der Lehrer allenfalls am Ende der Stunde einem Schüler aufträgt, er möchte bis morgen alle die heute aufgefundenen Verbindungen und Veränderungen auf eine Tabelle bringen, und dieselbe dann in der künftigen Stunde seinen Mitschülern vorlegen.

Wenn der Schüler auch nicht alle Fälle auffinden sollte, so kann der Lehrer sicher seyn, daß seine Mitschüler dieses gewiß bald bemerken und das Fehlende ergänzen werden. Es versteht sich, daß der Lehrer sehr zweckmäßig handeln wird, wenn er nicht immer den geübtesten seiner Schüler zu einer solchen Arbeit auffordert, sondern eben so oft einen seiner schwächern und ungeübtern hiezu aufmuntert; wünschen aber mehrere von ihnen dieses zu thun, so hat auch dieses sein Gutes, und darf nicht unbenutzt gelassen werden. Doch wird der Fortgang seiner Schule noch mehr befördert, wenn er jedem seiner Schüler, der frey so zu arbeiten wünscht, eine eigene Aufgabe für den oben näher bezeichneten Endzweck giebt.

Wer über diese und ähnliche Punkte noch mehr Anleitung wünscht, der darf das, was ich in der Zahlenlehre dießfalls weitläufig aus einander setzte, nur auf die Formlehre anzuwenden suchen.

Da sich an diese Uebungen sehr leicht die Bildung des Vorstellungsvermögens knüpft; so müssen sie vom Lehrer auch unter diesem Gesichtspunkt noch besonders in's Auge gefaßt werden; z. B. der Lehrer sagt zu seinen Schülern, sie möchten diese Verbindung recht ansehen, dieselbe recht auffassen, und sie morgen oder übermorgen, ohne irgend eine Unterbrechung, wieder darstellen. Sind sie im Stande, dieses zu thun, so fordert er sie nach dieser Zeit noch einmal auf, diese Verbindung so fest in's Auge zu fassen, daß sie dieselbe nach acht oder 14 Tagen und auch noch nach längerer Zeit ohne Anstand darzustellen fähig sind. Zur Ausbildung des Vorstellungsvermögens müssen natürlich nur die wichtigern und wesentlichern Formen benutzt werden. Es ist aber nicht darum zu thun, den Schüler so zu führen, daß er diese Formen nur wisse; sondern, daß er sich dieselben leicht vorzustellen fähig und sie darstellen zu können im Stande sey. Je mehr diese Fähigkeit befördert wird, desto mehr und vollkommner wird der Zweck, den man durch dieselbe erreichen soll, auch wirklich erreicht werden. Hier muß der Lehrer sehr wachsam seyn, daß die Uebungen nicht in mechanische Gedächtnißfertigkeiten ausarten.

Um ihn aber mit allen Vortheilen, die er bey der Einübung dieses Unterrichtsfaches rücksichtlich seiner Schüler benutzen kann, in volle Kenntniß zu setzen, werden folgende Bemerkungen nicht ganz unentbehrlich. Der Schüler muß, wie bey der Zahlenlehre, angehalten werden, das, was er auf seiner Schiefertafel aufzufinden im Stande ist, auch richtig auszusprechen. Der mündliche Ausdruck muß ihm so geläufig werden, wie die Anschauung und geistige Thätigkeit ihm durch die Uebungen habituel geworden sind.

Soll dieses vollkommen erreicht werden, so ist es von der höchsten Wichtigkeit, daß alles, was ich bey der Zahlenlehre dießfalls aufgestellt, auch hier in der höchsten Ausdehnung seine Anwendung finde, und folglich, so wie eine Reihenfolge vom Schüler aufgefunden worden ist, muß er angehalten werden, auszusprechen, was er dießfalls gethan und aufgefunden hat, und zwar so, daß bald ein Theil der Schüler zusammen spricht, bald wieder ein anderer Theil und ebenfalls bald die Stärkern, bald die Schwächern diese Sprachübungen abwechselnd betreiben. Dieses darf und soll so lange fortgesetzt werden, bis ein höherer Grad von Fertigkeiten wirklich in der Mehrzahl der Zöglinge erzeugt worden ist. Will der Lehrer alles benutzen, was die Kunst dießfalls darbietet, so ist folgendes Erleichterungsmittel nicht als unwesentlich anzusehen. So wie einer seiner Schüler die verschiedenen Formen, die unter gewissen Bedingungen möglich sind, erschöpft hat, wird der Schüler alle seine aufgefundenen Fälle sogleich auf die große Wandtafel des Lehrers darstellen. Auch ist in der dießfälligen Darstellung der Formen durch den Schüler als Abwechslung nicht weniger zu empfehlen, daß so wie einer derselben die gegebenen Aufgaben gelöst hat, er sie sogleich auf der Tafel des Lehrers darstellt; damit alle seine Mitschüler sehen, was er für Veränderungen von Formen in der kurzen Zeit zu finden im Stande gewesen sey. Hiezu kann er den schwächsten wie den stärksten seiner Schüler benutzen. Nicht weniger rathsam ist es, einen Schüler hinzustellen und ihn nur das auf die Tafel des Lehrers zeichnen zu lassen, was ihm seine Schüler zu diesem Endzweck dictiren. Wichtiger aber als diese Darstellungsweise ist noch folgendes:

So wie der Schüler im Darstellen der verschiedenen Formen sich einen gewissen Grad von Fertigkeit erworben hat, wird nothwendig, daß er angehalten werde, sich im Kopf vorzustellen, was er auf seiner Schiefertafel noch nie in der Wirklichkeit ausgeführt hat. Aufgaben so aufgeführt nöthigen ihn, seine innere Vorstellungskraft mit seinem äußern Darstellungsvermögen in Einklang zu bringen, und sich innerlich vollkommen geläufig zu machen, was äußerlich darzustellen möglich ist.

Wer aber dießfalls weitere Anleitung und Handbietung wünscht, den bitte ich, das, was ich über die Zahlenlehre aufgestellt, noch mehr und näher zu Rathe zu ziehen.

Ich setze die Uebungen der Formenlehre weiter fort und lasse die krumme Linie unmittelbar auf die gerade folgen und werde mich in der Darlegung der letztern weit kürzer fassen, als dieses bey den geraden Linien der Fall war, indem alle Uebungen und Reihenfolgen, die bey ihr statt gefunden, auch hier ihre volle Anwendung finden. Sie kann dießfalls als Norm dienen. Wer dieses aber ausgedehnter wünschen mag, den darf ich daher mit Recht auf die gerade Linie verweisen, um die daselbst aufgestellten Uebungen nur auf die krummen Linien zu übertragen. Dieses findet auch in Rücksicht auf die Ausführung der hierin zu befolgenden Grundsätze allgemein statt.

Der Lehrer trägt seinen Schülern auf, er soll auf seiner Schiefertafel eine krumme Linie machen *) und aufsuchen, was er an ihr bemerke. Er wird etwa folgendes anzugeben wissen: jede krumme Linie hat zwey verschiedene Seiten, eine hohle und eine erhabene; ist die krumme Linie ein Kreis, so schließt sie einen Raum ein, den man ein Rund nennt. Ist sie aber nur ein Theil von einem Kreis, so hat sie, wie die gerade Linie, zwey Enden. Man kann den Kreis an einem oder an zwey seiner Enden verlängern;

---

*) Es geht aus dem, was das häusliche Leben am Kinde thun soll, hervor, daß die krumme Linie, die es zu diesem Endzwecke benutzt, ein Kreis oder ein Theil desselben, ein Bogen, seyn muß.

bis er mit dem andern Ende zusammentrifft, und nur einen Kreis bildet. Auch kann man die krumme Linie verkürzern, und dieses so lange fortsetzen, bis sie wieder aufhört zu seyn. Eben so wird er finden, daß man sie in einen, in zwey und in mehrere Theile theilen könne.

Auf zwey und mehrere krumme Linien dieses auszudehnen, wird es einerseits nicht nothwendig werden, anderseits aber kann die gerade Linie als Norm hier ganz benützt werden.

Bey den geraden Linien wurde vorausgesetzt, daß der Schüler die gleich- und ungleichlaufenden Linien, und diejenigen in einer Richtung kenne, also kann dieses auch hier angenommen werden. Er fordert jetzt den Schüler auf, anzugeben, was die gleich- und ungleichlaufenden und die Linien in einer Richtung für Eigenschaften haben.

Der Schüler wird finden, die gleichlaufenden Linien seyen überall gleich weit von einander entfernt, und können nie zusammentreffen. Die ungleichlaufenden krummen Linien hingegen seyen nicht überall gleich weit von einander entfernt und können zusammentreffen. Krumme Linien, die sich in einer Richtung befinden, bilden bey hinlänglicher Fortsetzung immer wieder einen Kreis. Eine weitere Ausführung hievon ist bey den geraden Linien zu finden.

Lehrer. Untersucht auf euern Schiefertafeln, wie viele von drey krummen Linien gleich- und ungleichlaufend und wie viele in einer Richtung seyn können. — So wird dieses bis zu 4 und 5 krummen Linien fortgesetzt. Die gerade Linie kann, da es nichts neues giebt, hier vollkommen als Norm dienen.

Wird der Schüler mit großer Leichtigkeit alle Fälle, die bey den geraden Linien aufgestellt worden sind, zu finden im Stande seyn; so wird er dieses mit eben so großer Leichtigkeit auch auf die krummen anwenden, und es ist sogar nicht mehr nothwendig, diese Uebungen auf die krummlinichten Formen unter diesem Gesichtspunkt zu übertragen. Die ungleichlaufend krummen Linien können sich, wie wir oben gesehen haben, auch wie die geraden Linien vereinigen.

Untersucht, in wie viel Punkten sich 2, 3, 4 2c. krumme Linien vereinigen können.

Für zwey krumme Linien werden die Schüler keinen, einen oder 2 Vereinigungspunkte finden.

Für 3 Linien aber keinen 1, 2, 3, 4, 5, 6 Punkte.

Für 4 Linien keinen, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 oder 12 Punkte.

Aus dieser Untersuchung geht hervor, daß die krummen Linien immer doppelt so viel Vereinigungspunkte bilden, als eine eben so große Anzahl gerader Linien.

Nachdem der Schüler dieses auf seiner Schiefertafel wird dargestellt haben, kann diese Uebung durch einzelne Fragen, die ich diesem noch beyfüge, beschlossen werden.

Wie viele Linien können in 2 Punkten vereinigt werden?

Antwort: von 2 an so viel man will.

Es sind krumme Linien in 5 Punkten vereinigt worden; nun fragt man, wie viele Linien es seyen?

Antwort: von 3 an so viel man will.

In wie viel Punkte können 3 krumme Linien vereinigt werden? Welches ist die größte und welches die kleinste Anzahl von Vereinigungspunkten? Man verbindet 2 gleichlaufende und eine ungleichlaufende krumme Linie in der höchsten Anzahl Punkte; es fragt sich, wie viele Punkte es seyen?

Antwort: in 4 Punkten; denn jede krumme Linie kann von einer andern krummen nur einmal durchschnitten werden.

Welches ist die höchste Anzahl Vereinigungspunkte von 2 mal 2 gleichlaufenden krummen Linien?

Antwort: acht.

Will man diese Uebung weiter ausführen, so kann das, was ich dießfalls für die geraden Linien aufgestellt habe, auch hier als anwendbarer Stoff angesehen und behandelt werden.

Man schreitet weiter und läßt den Schüler untersuchen, wie oft auch die krummen Linien durch die Vereinigungspunkte gehen können, und stellt folgende Reihenfolgen auf:

Wenn sich zwey, drey ꝛc. krumme Linien vereinigen, wie oft können sie durch die Vereinigungspunkte gehen? Stelle dieses zuerst auf deiner Schiefertafel dar. Der Schüler wird finden:

Bey 2 krummen Linien können sie keinmal durch die Vereinigungspunkte gehen, oder eine ein mal und die andere 2 mal, oder beyde 2 mal. Bey 3 Linien wird er weiter finden, daß es von dem Durchgehen einer Linie durch den Vereinigungspunkt bis zum Durchgehen einer jeden Linie durch drey Vereinigungspunkte ohne Ausnahme fortgesetzt werden könne.

Diese Uebung ist schon bey den geraden Linien als etwas Unwesentlichers angenommen worden; daher darf sie aus doppelten Gründen nicht weit ausgedehnt werden. Ich überlasse ihre Fortsetzung dem Lehrer und schreite zu folgenden Untersuchungen.

Wie viele Enden der Linien können in und wie viele außer den Vereinigungspunkten liegen? Seht auf euern Schiefertafeln, wie viele Enden in den Vereinigungspunkten von 2, 3, 4 krummen Linien liegen können? Hernach wie viele Enden sich außer denselben befinden.

Bey 2 Linien werden die Schüler finden, daß kein, 1, 2, 3 oder alle 4 Enden in den Vereinigungspunkten liegen. Außer derselben wird das nämliche statt finden.

Haben die Schüler dieses auf der Schiefertafel durchgeführt, so mögen folgende einzelne Fragen hier noch eine Stelle finden.

Wenn 2 krumme Linien sich so vereinigen, daß keines ihrer Enden in den Vereinigungspunkten liegt, wie viel befinden sich außer denselben?

Antwort: keins, oder 1, 2, 3 oder 4. Soll kein Ende außer und keins in dem Vereinigungspunkt liegen, so müssen es Kreise seyn.

Wie viele Enden können bey 3 krummen Linien höchstens außer den Vereinigungspunkten liegen? Wie viele höchstens in denselben? Kann man 3 krumme Linien so verbinden, daß 3 Enden in und 3 außer denselben liegen?

Von der Anzahl der Winkel.

Untersucht, wie viele Winkel man mit 2, 3 und 4 krummen Linien machen könne.

Auch hier könnte man den Schüler dieses zuerst in einem, dann in 2, 3 Punkten u. s. w. untersuchen lassen, wie es bey den geraden Linien geschehen ist; da aber ein höherer Grad von Kraft und Fertigkeit in ihm auf dieser Stufe sich wirklich entwickelt vorfindet, so wird hier diese Eintheilung und Unterabtheilung nicht mehr nothwendig werden. Die Anzahl der Winkel kann daher auf folgende Weise aufgesucht werden.

Mit zwey krummen Linien können 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 und 8 Winkel gemacht werden. Mit 3 krummen Linien 2, 3, 4 u. s. w. bis 24 jede Anzahl, nur keine 23. Mit 4 krummen Linien aber von 3 bis zu 48 Winkeln jede Anzahl, nur sind keine 47 möglich.

Mit 4 Linien alle Fälle erschöpfen zu wollen wird nicht mehr nothwendig, wenn dieses mit 3 Linien wirklich ausgeführt worden ist. Will aber der Lehrer den Schüler noch in einigen der wichtigern und schwereren Verbindungen üben, so darf ihm nur aufgetragen werden, ohne die Reihenfolge aufzusuchen, gleich auf einmal 10, 30, 36, 40, 43 rc. Winkel zu machen. Einige einzelne Fragen werden hier nicht entbehrlich werden.

Wie viele Winkel kann man mit 2 krummen Linien höchstens machen?

Antwort: acht.

Welches ist aber die höchste Anzahl in einem Punkt? Wie viele Winkel kann man mit 4 krummen Linien in einem Punkt höchstens machen? Man hat drey Winkel gemacht; es fragt sich, mit wie viel Linien sie gebildet worden seyen?

Antwort: mit 2, 3 oder 4 Linien.

Wie viele krumme Linien werden erfordert, um 5 Winkel zu bilden? Wie viele Winkel kann man mit 3 krummen Linien mehr machen als mit 2?

Antwort: 16 Winkel.

Welches ist die geringste und welches die höchste Anzahl Winkel, die durch 4 krumme Linien in 5 Punkten gebildet werden kann? Welches ist die geringste Anzahl Winkel, die mit 3 Linien in 1, 2, 3, 4, 5 und 6 Punkten gemacht werden kann?

Antwort: in einem Punkt 2, in 2 Punkten 2, in 3 Punkten 3, in 4 Punkten 6 (S. Zchg. 45.), in 5 Punkten 10 (S. Zchg. 46.), und in 6 Punkten 14 Winkel.

Welches ist die höchste Anzahl Winkel, die mit 3 Linien in 1, 2, 3, 4, 5 und 6 Punkten gemacht werden können?

Antwort: in 1 Punkt 6, in 2 Punkten 12 (Siehe Zchg. 47.), in 3 Punkten 14 (S. Zchg. 48.), in 4 Punkten 18, in 5 Punkten 20 und in 6 Punkten 24 Winkel.

Wenn 2 krumme Linien 8 Winkel bilden, und man eine durchstreicht; wie viel Winkel fallen dadurch weg?

Antwort: alle 8 Winkel.

Hat man aber 4 krumme Linien so verbunden, daß sie die höchste Anzahl Winkel bilden, und wird eine von den 4 Linien ausgelöscht; so fragt es sich, wie viele Winkel wegfalen werden?

Antwort. 24 Winkel.

Welche Winkel kann man bey 2 krummen Linien, von der geringsten bis zur höchsten Anzahl, nicht machen?

Antwort. Außer 7 können alle gemacht werden.

Wie viele Winkel kann man mit 2 und 2 gleichlaufenden krummen Linien höchstens, und wie viele wenigstens machen? (Versteht sich, daß alle Linien auch für die geringste Anzahl vereinigt werden müssen.)

Antwort. Für die höchste Zahl 32 und für die geringste 2. (S. Zchg. 49.)

Wenn man mit 2 krummen Linien 2 Winkel macht; liegen die Ende der Linien in oder außerhalb der Vereinigungspunkte?

Antwort. Sie können in den Vereinigungspunkten liegen und auch außer denselben; die Linien können aber auch so gezogen werden, daß keines ihrer Enden zu finden ist.

Weil dieser Gesichtspunkt sehr wichtig ist, so mag zur weitern Ausführung der Stoff bey den geraden Linien über diese Uebung nachgesehen werden.

Wie viele Ecken kann man mit 2, 3, 4, 5 ꝛc. krummen Linien machen.

Die Schüler werden finden, daß man mit 2 krummen Linien entweder keinen, 1 oder 2 Ecken machen könne. Mit 3 Linien keinen, 1, 2 oder 3.

Da dieser Gesichtspunkt keine große Mannigfaltigkeit der Formen erzeugt, so wird er hier auch nicht weitläufig ausgeführt. Als weiterer Leitfaden kann das, was bey den geraden Linien aufgestellt ist, dienen.

Von den Arten der Winkel.

Die Zahlen, erhabenen und gemischten Winkel kennt der Schüler durch das, was in dem häuslichen Leben in ihm entwickelt worden ist. Noch giebt es eine Art gemischter Winkel, deren Linienvereinigung nicht durch Winkel und Ecken bezeichnet wird, die deswegen einen etwas undeutlichen Winkel bilden. (S. Zchg. 50.) Einen solchen Winkel nennt man einen undeutlich gemischten Winkel. In letzter Verbindung von 2 krummen Linien finden sich 2 undeutlich gemischte Winkel.

Gestützt auf die Kenntniß der krummlinichten Winkel läßt man den Schüler untersuchen, was für 2 Winkel mit 2 krummen Linien gebildet werden können.

Er wird finden: entweder 2 hohle (s. Zchg. 51), 2 erhabene, (s. Zchg. 52), 2 gemischte (s. Zchg. 53), 2 undeutlich gemischte (s. Zchg. 50), oder 1 erhabener und 1 gemischter (s. Zchg. 54), oder ein hohler und ein gemischter Winkel. (S. Zchg. 55.)

So werden 3 Winkel, die durch 2 Linien gebildet werden, der Form nach untersucht, und der Schüler wird für diese finden, daß entweder 2 hohle und ein gemischter, oder 2 gemischte und 1 hohler; oder 2 erhabene und 1 gemischter (s. Zchg. 56); oder ein erhabener und 2 gemischte Winkel gebildet werden können.

Bey 4 Winkeln, die durch 3 krumme Linien gebildet werden, wird der Schüler entweder 2 gemischte, 1 hohlen und 1 erhabenen, oder 2 gemischte und 2 hohle (Zchg. 57), oder 2 gemischte und zwey erhabene, oder 2 erhabene und 2 gemischte Winkel finden.

So wird dieses zu 5, 6 und 8 Winkel, die mit 2 krummen Linien gebildet werden, fortgesetzt; und der Schüler wird, wenn die so eben aufgestellten Fälle von ihm gefunden worden sind, auch dieses ohne die geringste Schwierigkeit aufzusuchen und aufzustellen im Stande seyn.

Zur Erleichterung hätte man dem Schüler auch zuerst auftragen können, alle die Veränderungen, die mit 2 krummen Linien diesfalls in einem, hernach in 2 Punkten gemacht werden können, in dieser Unterabtheilung aufzusuchen.

Nachdem aber dieser Gang in lückenlosen Reihenfolgen bey den geraden Linien statt gefunden hat, so ist diese Erleichterung hier kein Bedürfniß mehr. Will man aber die Arten der Winkel erschöpfend durchführen, so ist eine Eintheilung in 1, 2, 3, 4, 5 und 6 Punkten nicht ganz entbehrlich; denn die Verbindungsart, so wie die Verschiedenheit der Formen ist zu mannigfaltig. Alle diese Veränderungen aufsuchen zu wollen, ist aber nicht mehr Bedürfniß. Folgende Untersuchungen werden bey 3 krummen Linien hinreichend werden.

Wenn man mit 3 krummen Linien in 1 Punkt die geringste und höchste Anzahl Winkel macht, was für Arten von Winkel sind möglich. Desgleichen mit 3 Linien in 2 Punkten und so in 4, 5 und 6 Punkten.

Am wichtigsten sind die Erschöpfungen aller Fälle bey der geringsten Anzahl in einem, 2 und 3 Punkten; vorzüglich aber die Veränderungen, welche in 3 Punkten gemacht werden können. Sehr schwierige Verbindungen werden jedoch hier keine getroffen.

Vier krumme Linien und so 5 und 6 in 5 und sechs Punkten zu vereinigen, und die Arten der Winkel aufzusuchen, darf aber nie als entbehrlich angesehen werden.

Statt dieses weitläufig auszuführen, werde ich einige der wesentlichsten Fragen, die dieses in ein heiteres Licht setzen, noch beyfügen.

Kann man mit 2 krummen Linien in 2 Punkten, 2 hohle Winkel machen? desgleichen mit 3 Linien in 3 Punkten 3 hohle; mit 4 Linien in 4 Punkten 4 hohle u. s. w.?

Antwort. Mit 2 Linien in 2 Punkten, mit 3 in 3, mit 4 in 4 ꝛc. kann man 2, 3, 4 ꝛc. hohle Winkel machen. (S. Zchg. 51.)

Die nämlichen Fragen kann man auch über die erhabenen Winkel aufstellen, und man wird wieder finden, daß mit 2 krummen Linien in 2 Punkten 2 erhabene (s. Zchg. 56), mit 3 in 3 Punkten 3 erhabene, mit 4 in 4 Punkten 4 erhabene Winkel gemacht werden können. Mit den gemischten Winkeln wird er es nur bey 2, 4, 6 ꝛc. Punkten finden. (S. Zchg. 53 und 60.)

In wie viel Punkten kann man undeutlich gemischte Winkel machen?

Antwort. In 1, 2 ꝛc. Punkten (S. Zeichnung 50 und 61).

Kann man nur einen undeutlich gemischten Winkel machen?

Antwort. Nein, da, wo sich auf der einen Seite einer befindet, findet auch auf der andern Seite statt des Eckes ein zweyter statt.

Die letzten beyden Zeichnungen können zur Verdeutlichung dessen dienen.

Welches ist die höchste Anzahl erhabener Winkel, die mit 2, 3, 4 Linien in einem Punkt gebildet werden? So können auch wieder Fragen über die höchste Anzahl gemischter und erhabener Winkel gegeben werden?

Es versteht sich, daß diese Fragen auch auf mehrere Punkte ausgedehnt werden können und sollen.

Mit wie viel Linien können 3 erhabene Winkel gemacht werden?

Antwort. Mit 3, 4, 5 und 6 Linien. (S. Zchg. 62 für 6 Linien.) Auch diese Frage kann auf jede Art Winkel ausgedehnt werden.

Mit wie viel Linien kann man einen hohlen, einen erhabenen und einen gemischten, desgleichen 2 hohle, 2 erhabene und 2 gemischte Winkel machen? Wie viele Linien werden wenigstens erfordert, um 2 hohle, 2 erhabene, 2 gemischte und 2 undeutlich gemischte Winkel zu erhalten? Wenn man mit 3 krummen Linien die höchste Anzahl Winkel macht, was für Arten derselben giebt es?

Antwort. 6 hohle, 6 erhabene und 12 gemischte Winkel.

Wie bey den geraden Linien die verschiedenen Gesichtspunkte, unter denen diese Formen aufgefaßt worden sind, verbunden wurden; so wird dieses auch bey den krummen Linien nicht ganz entbehrlich werden. Wenn man aber das, was bey der geraden Linie diesfalls aufgestellt worden ist, zu Rathe zieht, so unterliegt es keinem Zweifel mehr, daß nicht nur jeder Lehrer, sondern selbst der schwächere Schüler im Stande seyn wird, dieses auszuführen. Ausgedehnter aber als dieses bey den geraden Linien behandelt worden ist, muß es bey der krummen auf keinen Fall geschehen.

Von den Arten der Ecken.

Die Ecken werden wie die Winkel benannt; es giebt daher hohle, erhabene und gemischte Ecken.

Untersucht, was für Ecken mit 2, 3, 4 rc. krummen Linien gebildet werden können. Bildet man mit zwey Linien ein Eck, so kann dasselbe entweder hohl, oder erhaben, oder gemischt seyn. Werden aber 2 Ecken gebildet, so können dieselben entweder beyde hohle, oder beyde erhabene, oder beyde gemischte Ecken seyn. (Siehe Zchg. 56 für 2 hohle, 51 für 2 erhabene, und 53 für die 2 gemischte Ecken.)

Mit 2 krummen Linien kann man 1, 2 und 3 Ecken bilden, und hier finden auch wieder alle Abänderungen statt, die bey 2 Ecken aufgestellt worden. Dieses auch auf 4 Linien und 4 Ecken auszudehnen, darf nicht als ganz entbehrlich angesehen und behandelt werden. Die einzelnen Fragen, die ich diesfalls aufstelle, mögen die weitere Ausführung in Reihenfolgen entbehrlich machen.

Frage. Wie viele hohle Ecken kann man mit 5 Linien höchstens machen? Wie viele erhabene oder wie viele gemischte mit 4 Linien? Mit wie viel Linien kann man 2 hohle Ecken machen?

Antwort. Mit 2, 3 oder 4 Linien (S. Zchg 56 und 62). Versteht sich, daß bey der letzten Verbindung von den 6 Linien nur 4 gezählt werden müssen.

Welches ist die geringste Anzahl Linien, mit denen man ein hohles, ein erhabenes und ein gemischtes Eck machen kann?

Die Durchführung der Schenkel bey den krummen Linien kann als entbehrlich behandelt werden. Würde aber ein Lehrer die Behandlung dieser Uebung für seine Schüler nicht gerne ganz übergehen; so kann das, was bey den geraden Linien aufgestellt worden, als Norm dienen.

Von der Anzahl der geschlossenen Räume.

Untersucht, wie viele Räume man mit 1, 2, 3, 4, 5 ꝛc. krummen Linien schließen könne.

Der Schüler wird finden, daß mit einer krummen Linie nur ein Raum, mit 2 krummen Linien aber 1, 2, 3, 4, 5, 6 und 7 Räume geschlossen werden können. Weiter als etwa zu 4 oder 5 und höchstens 6 Linien darf dieses nicht fortgesetzt werden.

Mit 2 gleichlaufenden Linien können wie viele Räume geschlossen werden?

Der Schüler wird finden 1 oder 2. —

So läßt man ihn untersuchen, wie viele Räume mit 2 gleichlaufenden und einer ungleichlaufenden Linie, oder mit 2 und 2 gleichlaufenden ꝛc. gebildet werden können.

Noch einige einzelne Fragen hierüber.

Wie viele geschlossene Figuren können mit 2 gleichlaufenden und einer ungleichlaufenden Linie höchstens gebildet werden? Welches ist die höchste Anzahl geschlossener Figuren, die mit 4 Linien gemacht werden kann? Mit wie viel Linien kann man einen Raum schließen?

Antwort. Mit jeder Anzahl krummer Linien.

Da die Untersuchung der Anzahl der Figuren sehr wesentlich ist, so kann dieser Gesichtspunkt mit den bis jetzt aufgestellten Uebungen der krummen Linien verbunden werden. Doch werde ich dieses nicht ausführen, und diesfalls nur auf das verweisen, was bey den geraden Linien sich wirklich ausgeführt findet.

Von der Anzahl der Seiten.

Untersucht, wie viele Seiten man mit 2, 3 rc. krummen Linien machen kann.

Der Schüler wird finden, mit einer krummen Linie könne man nur eine Seite bilden, mit 2 Linien aber 2, 3 oder 4; mit 3 krummen Linien aber 3, 4, 5, 6, 7 bis 12 Seiten.

Untersucht, wie viele Seiten mit 2 gleichlaufenden und einer ungleichlaufenden krummen Linie gemacht werden können.

Noch einige einzelne Fragen hierüber.

Wie viele Seiten kann man mit 4 krummen Linien höchstens bilden? Wenn man die höchste Anzahl Seiten bildet, und eine der 4 Linien durchstreicht, wie viele Seiten fallen weg? Wie viele Seiten können mit zwey gleichlaufenden Linien höchstens gebildet werden? Wie viele mit 2 gleichlaufenden und einer ungleichlaufenden Linie? Wenn 2 Linien 2 Seiten bilden, wie viele Winkel oder Ecken befinden sich dabey? Wie oft gehen die Linien durch die Vereinigungspunkte?

Von der Art der geschlossenen Figuren.

Wenn man mit 1, 2, 3, 4 ꝛc. krummen Linien eine, 2, 3 ꝛc. geschlossene Figuren bildet, was können sie in Rücksicht der Anzahl der Ecken für eine Form haben?

Mit einer krummen Linie kann man nur ein Rund, mit 2 Linien aber 1, 2 und 3 geschlossene Räume bilden. Wird einer derselben gebildet, so ist es ein Rund, oder ein Zweyeck (S. Zchg. 51). Bey 2 Figuren wird er 2 Rund, oder 2 Zweyecke, oder ein Rund und ein Zweyeck (s. Zchge 63.), oder ein Rund und ein Rund mit doppelter Begränzung (s. Zchg. 64) finden. Werden aber 3 Figuren gebildet, so sind keine andere Formen als 3 Zweyecke möglich.

Auf diese Weise werden alle Veränderungen, die mit 3 Linien möglich sind, von dem Schüler aufgefunden.

Dagegen sind folgende Formen für den Schüler etwas schwerer zu erschöpfen, Zeichnung 65 ist ein Rund, und 2 Runde mit getrennter Begränzung. Zeichnung 66 enthält 2 Runde mit einer dreymaligen getrennten Begränzung. Zeichnung 67. hingegen ein Rund und ein Zweyeck mit getrennter Begränzung.

Auf diese Weise kann bey jeder Figur ihre Form

wörtlich

wörtlich ausgedrückt und auf das Bestimmteste bezeichnet werden.

Da diese Betrachtungsweise der Form von Wichtigkeit ist; so werden einzelne Fragen in größerer Ausdehnung als gewöhnlich hier nicht entbehrlich werden.

Wie viele krumme Linien braucht man, um 2 Zweyecke zu bilden?

Antwort. 2 oder 3 oder 4. Es dürfen hiezu aber keine Linien genommen werden, die zur Bildung der beyden Zweyecke nichts beytragen. Seht für 4 Linien Zeichnung 68.

Wie viele Linien sind zur Bildung von zwey Dreyecken nothwendig?

Antwort. Von 3 bis zu 6 Linien kann man diese Figuren mit jeder Anzahl Linien bilden. (Für 3 Linien seht Zchg. 45. und für 6 Linien Zchg. 68.)

Aehnliche Fragen können auf mehrere Vierecke, Fünfecke 2c. ausgedehnt werden.

Wie viel Linien werden erfordert, um ein Rund und ein Viereck zu bilden? Welches ist die geringste und welches ist die höchste Anzahl Linien. Macht man mit 3 krummen Linien 2 geschlossene Figuren, die beyde eine gleiche Form haben sollen, so fragt es sich, was dieses für geschlossene Räume seyen? Kann man auch krummlinichte Parallelogramme bilden?

Wie viele können mit 2 Paar gleichlaufenden Linien gemacht werden?

Antwort. Zwey.

Was haben die andern geschlossenen Räume, die gleichzeitig mit diesen zwey Parallelogrammen gebildet werden, für eine Form?

Antwort. Es sind Paralleltrapeze, Zweyecke rc.

Wie viel Linien werden erfordert, um ein Viereck mit einer getrennten Begränzung zu erhalten?

Antwort. 4. (S. Zchg. 69.)

Wie viel zu einem Fünfeck?

Antwort. 5. Hiezu bedarf es ein Dreyeck und ein Zweyeck in demselben oder auch umgekehrt.

Wie viele Linien werden erfordert, um ein Sechseck mit getrennter Begränzung zu erhalten?

Antwort. 6 Linien. Diese Form kann durch 2 Dreyecke, oder durch ein Viereck und ein Dreyeck in demselben gebildet werden.

Wie viele Linien werden aber erfordert, um ein Sechseck mit mehrfacher getrennter Begränzung zu erhalten?

Antwort. 6 Linien. (S. Zchg. 70.)

Wenn man die höchste Anzahl geschlossener Räume bildet, so fragt es sich, von wie vielerley Arten dieselbe seyen? Wie viele Linien werden wenigstens erfordert, um ein Rund, ein Zweyeck, ein Dreyeck, ein Viereck rc. zu bilden.

Von der Art der geschlossenen Figuren in Hinsicht der Winkel.

Untersucht, was für ein Zweyeck mit 2 krummen Linien, wenn man auf die Arten der Winkel Rücksicht nimmt, gebildet werden könne.

Der Schüler wird finden: er könne ein Zweyeck mit 2 hohlen, oder eins mit 2 erhabenen, oder eins mit 2 gemischten Winkeln machen. Das erste nennt man ein hohlwinklichtes, das zweyte ein erhaben winklichtes, und das dritte ein gemischt winklichtes Zweyeck.

So läßt man den Schüler hinwieder die zwey Zweyecke, wie auch die 3 Zweyecke, welche mit 2 Linien gebildet werden können, untersuchen. Eben so wichtig ist es, die Dreyecke, Vierecke, Fünfecke ꝛc. diesfalls der gleichen Untersuchung zu unterwerfen.

Ein Dreyeck, welches 3 erhabene Winkel hat, nennt man ein erhaben winklichtes Dreyeck. (S. Zchg. 71 und 72.) Das eine mit innern, das andere aber mit äußern Winkeln. Zeichnung 73. stellt das hohlwinklichte Dreyeck dar. Alle andern sind gemischte Dreyecke und unterscheiden sich nur dadurch von einander, daß das eine mehr hohle oder erhabene oder gemischte Winkel hält, als das andere, und zwar wieder in und außer dem Dreyeck. Zeichnung 74. bildet ein Dreyeck mit einem undeutlich gemischten Winkel.

Alle diese Formeneintheilungen finden auch bey den Vierecken volle Anwendung. So giebt es wieder erhaben winklichte Vierecke, deren Winkel in und außer denselben liegen. Hohlwinklichte, deren Winkel sich aber immer in den Vierecken befinden. Zeichnung 60 stellt das gemischt winklichte Viereck dar. Zeichnung 75 bildet ein Viereck mit undeutlich gemischten Winkeln.

Wendet man hier das gleich- und ungleichlaufendseyn der Linien an; so findet man wieder Parallelogramme, Paralleltrapeze und Trapeze mit den oben angegebenen Winkeln. Eine noch umständlichere Darlegung dieser Form befindet sich bey den geraden Linien. Ich darf also diesfalls nur dahin verweisen.

Nach dieser Norm müssen auch die Fünfecke, Sechsecke ꝛc. vom Schüler untersucht werden. Versteht sich, daß hier nicht alle Veränderungen aufgesucht werden müssen; man darf sich desnahen auf einige der wesentlichsten beschränken; z. B. bey den Fünf-, Sechs-, Sieben-, Achtecken muß untersucht werden, ob diese Verbindungen immer mit einerley Winkeln gemacht werden können, ob die Winkel in oder außerhalb der Figur liegen ꝛc., wie viele undeutlich gemischte Winkel bey den einen oder andern Vierecken gemacht werden können ꝛc.

Einzelne Fragen hierüber mögen das allenfalls noch Mangelnde ergänzen.

Kann man ein hohlwinklichtes Zwey-, Drey-, Vier-, Sieben-, Achteck ꝛc. machen? Können die nämlichen Figuren auch mit den erhabenen, mit den gemischten und mit den undeutlich gemischten Winkeln gebildet werden? Können die oben angegebenen Vierecke durch innere und auch durch äußere Winkel gemacht werden? Was haben die Vierecke mit getrennter Begränzung für Winkel? Diese Fragen dürfen auf das Fünfeck, Sechseck ꝛc. mit ein- und vielfach getrennter Begränzung ausgedehnt werden. Auch kann der Lehrer sehr verwickelte Vielecke auf seiner Tafel mit krummen Linien darstellen, und die Schüler bestimmen lassen, was es für ein Viereck sey, wie viele Winkel sich von der einen oder andern in dieser Begränzung befinden.

Gebildete krummlinichte Figuren zu theilen.

In was für Formen kann ein Zweyeck durch eine krumme Linie zerlegt werden? Dasselbe kann hernach mit 2 krummen Linien wenigstens in den wichtigern Formen im Zweyeck fortgesetzt werden. Versteht sich, daß dieses auch auf Dreyecke, Vierecke rc. ausgedehnt werden muß.

Einige einzelne Fragen werden dieses in ein noch heiterers Licht setzen.

Kann man mit einer krummen Linie jedes Zweyeck in zwey andere Zweyecke zerlegen? Auch in 2 Dreyecke? Und eben so in Räume mit getrennter Begränzung? In was für Räume mit getrennter Begränzung kann es getheilt werden?

Die gleichen Fragen können auch auf das Dreyeck, Viereck rc. ausgedehnt werden.

In was für Räume kann man ein krummlinichtes Parallelogramm mit einer krummen Linie zerlegen?

Wie bey den geraden Linien, so können auch hier die gebildeten Formen in Rücksicht des gleich= und ungleichlaufend=seyns noch zusammengestellt werden.

Ein Paar einzelne Fragen werden diesfalls hinreichen.

Werden die Schenkel der Winkel, die aus krummen Linien gebildet sind, gleich= und ungleichlaufend untereinander seyn? Können die Schenkel aller Arten von Winkeln gleichlaufend gemacht werden?

Die gleichen Fragen dürfen aber auch auf das Zweyeck, Dreyeck, Viereck ꝛc. angewandt werden.

Wenn die Seiten eines Vierecks mit den Seiten eines andern gleichlaufend sind, liegt ein Viereck im andern, oder können sie neben oder unter einander liegen? Können Fünfecke, die alle untereinander gleichlaufende Seiten haben, so viel man will gebildet werden? Sind die Seiten eines Vierecks niemals mit denen eines Dreyecks gleichlaufend? Wie viele Seiten können in diesen Figuren untereinander gleichlaufend gemacht werden? Man hat 2 geschlossene Räume, die 2 mal 2 gleichlaufende Seiten haben; es fragt sich, was dieses für Figuren seyen.

So wie man bey den geraden Linien gebildete Formen mit einander verbunden hat; so soll dieses auch bey den krummen Linien geschehen. Doch wird es nicht in dem Umfange, wie dieses bey den krummen Linien durchgeführt worden ist, nothwendig werden. Das Aufgestellte bey der geraden Linie mag mit dem, was ich hier nur in Kürze angeben werde, für den Zweck, den ich durch diese Verbindungen zu erzielen suche, vollkommen erreicht werden.

Man läßt den Schüler untersuchen, in wie viel Punkten sich 2, 3 ꝛc. Winkel, die aus krummen Linien gebildet werden, vereinigen können.

Der Schüler wird finden, 2 Winkel können in 1, 2 bis zu 8 Punkten mit einander verbunden werden. Siehe Zchg. 76. für a den einen, für b den andern Winkel.

Mit 3 Winkeln müssen aber auf keinen Fall alle Veränderungen aufgesucht werden. So giebt man ihm 2, 3 u. s. w. Zweyecke auf die nämliche Weise zu untersuchen.

Der Schüler wird finden, daß 2 Zweyecke von 1 bis 8 Punkten wie die der krummlinichten Winkel sich vereinigen können. (Zchg. 76. dient auch hiefür.)

Mit Dreyecken und Vierecken kann man aber den Schüler nur einige der wichtigern Formen aufsuchen lassen. Auch in Hinsicht der einzelnen Fragen muß hier die Ausdehnung, welche bey den geraden Linien statt findet, nicht statt haben.

In wie viel Punkten können 2 Dreyecke höchstens vereinigt werden? Kann man so viele Vierecke in einen Punkt vereinigen, als man will? Können auch ein Zweyeck, Dreyeck, Vier=, Fünfeck rc. in einen Punkt vereinigt werden? In wie viel Punkten werden zwey krummlinichte Parallelogramme, die 4 und 4 gleichlaufende Seiten haben, mit einander vereinigt werden können?

Von der Anzahl der Winkel, die durch die Verbindung gebildeter Figuren entstehen können.

Untersucht, wie viele Winkel durch die Verbindung von 2 Zweyecken entstehen können.

Der Schüler wird finden, daß von eins bis 32 jede Anzahl, nur keine 31, möglich werden. Versteht sich, daß die Winkel, welche die Zweyecke selbst bilden, nicht gezählt werden dürfen, um die Anzahl 32 zu erhalten.

Die gleiche Untersuchung wird mit 2 Dreyecken, Vierecken rc., oder mit einem Zweyeck und mit einem Dreyeck, oder mit einem Zweyeck und Viereck statt finden. Alle

Veränderungen, die möglich sind, sollen aber in keinem Fall auf dieser Stufe aufgesucht werden. Je weiter der Schüler vorrückt, desto mehr muß er sich nur auf wichtigere und schwierigere Verbindungen einschränken.

Die wichtigern und schwierigern Fragen bey den geraden Linien dürfen zur weitern Ausführung hier als Leitfaden dienen.

Die Arten der Winkel untersuchen zu wollen, kann in dieser Verbindungsart ganz übergangen werden.

Hingegen wird es nicht ganz überflüssig, die Anzahl der geschlossenen Figuren, die aus diesen Verbindungen hervorgehen, wenigstens in einigen der wichtigsten Zusammenstellungen aufzusuchen; z. B.

Wie viele geschlossene Figuren können durch die Verbindung von 2 Zweyecken entstehen?

Der Schüler wird finden, entweder keine, oder 1, 2, 3 ꝛc. bis zu 9. (S. Zchg. 77.)

Wie viele werden durch 2 Dreyecke, oder durch ein Dreyeck und ein Zweyeck ꝛc., oder durch ein Viereck und ein Fünfeck gebildet werden?

Rücksichtlich der einzelnen Fragen und der weitern Ausführung kann man sich nach dem richten, was bey der geraden Linie aufgestellt worden ist.

Will man ein paar Fragen über die Anzahl der Seiten, die durch solche Verbindungen entstehen und gebildet werden können; so mag auch das, was bey der geraden Linie aufgestellt worden, für diesen Endzweck benutzt werden.

Wichtiger aber als dieses ist die Untersuchung der

Figuren, die durch die Verbindung gebildeter Formen entstehen.

Wenn man zwey Zweyecke so verbindet, daß eine neue geschlossene Figur gebildet wird, so fragt es sich, was dieselbe für eine Form haben könne?

Werden 2, 3, 4 rc. Figuren gebildet, so fragt es sich, was sie jedesmal für eine Form haben können?

Werden mit zwey Dreyecken oder mit zwey Vierecken rc. ein oder zwey oder drey rc. geschlossene Räume gebildet, so fragt es sich, was sie jedesmal für eine Form haben?

Gebildete Figuren in Seiten mit einander zu verbinden.

Untersucht, in wie viel Seiten zwey und mehrere Zweyecke, zwey und mehrere Dreyecke rc. mit einander verbunden werden können.

Er wird finden: zwey Zweyecke können in einer oder zwey Seiten mit einander verbunden werden; zwey Dreyecke aber in 1, 2 und 3 Seiten u. s. w. Werden die Zweyecke in zwey und die Dreyecke in 3 Seiten verbunden; so giebt es immer wieder nur eine Figur. Die weitere Ausführung ist bey den geraden Linien nachzusehen.

So wie die geradlinichten Formen in Seiten und Punkten gleichzeitig mit einander verbunden worden sind, so kann und soll dieses auch noch bey den krummlinichten Formen statt finden. Das bey den geraden Linien Ausgeführte mag hier als Leitfaden dienen.

Als Beschluß giebt man dem Schüler wieder, wie bey der geraden Linie, eine Form, an der er gleichsam alles wiederholt, was er im Gebiet der krummen Linien kennen gelernt. Für diesen Endzweck mag der Lehrer Zchg. 46. auf seine Tafel zeichnen, und sie Folgendes darstellen lassen. Es ist eine Verbindung von 3 krummen Linien, die sich in 5 Punkten vereinigen. Keine dieser Linien ist mit der andern gleichlaufend. In jedem ihrer Vereinigungspunkte kommen 2 Linien zusammen. Sie gehen 4mal durch diese Vereinigungspunkte hindurch, und zwar so, daß eine 2mal durchgeht, und jede der 2 anderen aber einmal. In diesen 5 Vereinigungspunkten befinden sich die 6 Ende der krummen Linien. Sie bilden mit einander 10 Winkel; davon sind 4 hohl, 2 erhaben und 4 gemischt. Sie bilden 3 geschlossene Räume, wovon zwey Dreyecke sind und einer ein Zweyeck. Das Zweyeck ist gemischtwinklicht, ein Dreyeck hohlwinklicht und das andere gemischtwinklicht. Ferner findet man Nebenwinkel, innere und äussere Gegen- und Wechselwinkel, Scheitelwinkel u. s. w. Dann zählt der Schüler auf, wie viel Paar von jeder Art sich vorfinden. Man kann diese Verbindung von Linien auch als 2 Dreyecke und ein Zweyeck ansehen, die sich an 2 Seiten berühren, oder aber als ein Viereck mit 2 äußern Winkeln, welches durch 2 Linien in zwey Dreyecke und in ein Zweyeck zerlegt worden ist. Diese 3 Linien bilden auch 7 Seiten, eine von diesen Linien bildet drey und zwey Linien, jede zwey Seiten. — Alle diese Uebungen und Reihenfolgen, die zuerst mit der geraden und hernach mit der krummen Linie getrennt aufgestellt worden sind, können und sollen jetzt dem Schüler auch in gegenseitiger Verbindung und Kürze vorgeführt werden. Die Ausführlichkeit und Umständlichkeit, mit welcher dieses zuerst mit den geraden und hernach mit den krummen Linien wirklich statt gefunden hat, machen eine ins Einzelne gehende Darlegung mit geraden und krummen Linien vereinigt entbehrlich. Ich darf mich dießfalls hier also kurz fassen und nur das aufführen, was den geraden und krummen Linien in ihrer Verbindungsart mit einander eigenthümlich ist. Zum voraus aber muß ich bemerken, daß wer auch immer noch mehr wünschen mag, darf nur in dem, was über die gerade oder über die krumme Linie aufgestellt worden ist, nachsehn, und er wird hinlänglich Anleitung und Stoff zu allem finden, was er sucht und wünschen mag. In der Ausführung bey Schülern müssen die folgenden Uebungen weniger umständlich behandelt werden als es bey den geraden und hernach bey den krummen Linien der Fall ist. Es wird beynahe unnöthig seyn, in Erinnerung zu bringen, daß alle Grundsätze und Ausführungs- und Erleichterungsmittel, die bey der geraden und krummen Linie angegeben worden sind, auch hier ihre volle Anwendung haben. Zu diesem nehme ich an, der Lehrer kenne vollkommen den Gang, den er in diesem Unterrichtszweig zu befolgen hat, und wisse gründlich, was ihm als Lehrer dießfalls zu thun obliege. Folglich werde ich mich hier nur mit dem befassen, was als neu in's Auge gefaßt werden muß.

Von der geraden und krummen Linie vereinigt.

Eine gerade und eine krumme Linie können nie mit einander gleichlaufend seyn. Giebt man aber mehrere gerade und krumme Linien an, so können sie, wie wir schon gesehen haben, unter einander gleich- und ungleichlaufend seyn. Man fängt hier gleich damit an und läßt den Schüler untersuchen, in wie viel Punkten sich die geraden und krummen Linien vereinigen können, und er wird finden, daß sich eine gerade und eine krumme Linie in 1 oder in 2 Punkten vereinigen; 2 gerade und 1 krumme Linie aber in 1, 2, 3, 4 und in 5 Punkten; 2 krumme und 1 gerade hingegen in 1, 2, 3, 4, 5 und in 6 Punkten. Dieses wird blos bis auf 4, 5 und 6 Linien, von denen immer einige gerade und die andern krumme Linien sind, ausgedehnt, und der Gesichtspunkt gleich- und ungleichlaufende Linien mit einander zu verbinden wird höchstens noch in einigen einzelnen Fragen nothwendig. Die Untersuchung, ob die graden und krummen Linien durch die Vereinigungspunkte gehen und ob die Endpunkte der Linien in oder außer diesen Vereinigungspunkten liegen, darf den Schülern jetzt höchstens nur flüchtig angedeutet werden. Wesentlich wird jedoch die Untersuchung der Anzahl der Winkel, die mit geraden und krummen Linien gebildet werden.

Der Schüler wird auf die gewohnte Weise finden, daß man mit 1 geraden und mit 1 krummen Linie entweder 1, 2, 3, 4, 5, 6 oder 8, nur keine 7 Winkel bilden könne. Dieses ist übrigens mit den geraden und krummen Linien übereinstimmend. Mit 2 geraden und 1 krummen

Linie wird man von 2 bis zu 20 Winkeln jede Zahl, 19 ausgenommen; mit 2 krummen und einer geraden Linie hingegen jede Zahl von 2 bis 24, außer 23, bilden können. Zwey gleichlaufende gerade und eine krumme Linie, oder umgekehrt, zwey gleichlaufende krumme und eine gerade Linie sollen nicht übergangen werden.

Zu einer größeren Anzahl Linien wird der Schüler dieses jedoch nicht fortsetzen. Die gleiche Untersuchung findet auch in Hinsicht der Anzahl Ecken, die mit dieser oder jener Anzahl gerader und krummer Linien gebildet werden, statt; z. B. mit einer geraden und einer krummen Linie kann man 1 oder 2 Ecken, mit zwey geraden und einer krummen hingegen 1, 2 oder 3 Ecken bilden.

Die Arten der Winkel werden auf die ganz gleiche Weise, wie bey den geraden Linien, untersucht werden. Man wird aber nur gemischtlinicht hohle und gemischtlinicht erhabene Winkel finden (Sehet für die erste Art Winkel Zeichnung 78; für die 2te aber Zeichnung 79). Bey 2 Winkeln, die durch eine gerade und eine krumme Linie gebildet werden, erhält man 2 gemischtlinichte hohle oder 2 gemischtlinichte erhabene, oder einen gemischtlinicht hohlen und einen erhabenen Winkel. Dieses wird zu 3, 4, 5, 6 und 8 Winkeln, welche mit einer geraden und einer krummen Linie gebildet werden können, fortgesetzt. Allenfalls alle Veränderungen aufzusuchen, die mit 2 geraden und 1 krummen Linie, und umgekehrt, vorgenommen werden können, ist zweckmäßig. Auch die Winkel der gleichlaufenden Linien dürfen hier nicht übergangen werden.

Die Arten der Ecken werden der gleichen Untersuchung unterworfen. Der Schüler wird finden, daß die Ecken, welche aus den geraden und krummen Linien gebildet werden, entweder gemischtlinicht erhabene (Seht Zchg. 78.), oder gemischtlinicht hohle Ecken sind (Sehet Zchg. 79.). Bey den 2 Ecken, die durch eine gerade und eine krumme Linie gemacht werden, erhält man immer nur 2 gemischtlinicht erhabene Ecken.

Mit 2 geraden und einer krummen Linie erhält man zu den obigen Ecken noch die, welche nur aus den geraden Linien gebildet werden können. Bey 2 krummen und einer geraden Linie hingegen erhält man wieder die obigen Ecken mit denen, welche nur durch die krummen Linien gebildet werden können. Folglich wäre eine weitere Ausführung davon nichts als eine Wiederholung dessen, was der Schüler schon weiß. Nicht unwesentlich ist die Untersuchung der Anzahl geschlossener Figuren, welche mit geraden und krummen Linien vereinigt gemacht werden können; z. B. mit einer geraden und einer krummen Linie kann man mit 1 oder 2, mit 2 geraden und einer krummen Linie aber 1, 2, 3 oder 4; mit 2 krummen und einer geraden Linie hingegen 1, 2, 3, 4, 5 und 6 geschlossene Räume bilden. Mit zwey gleichlaufenden geraden und einer krummen Linie wird 1, werden 2 oder 3, und umgekehrt mit 2 krummen und 1 geraden Linie 1, 2, 3 oder 4 geschlossene Räume gebildet.

Mit 2 gleichlaufend geraden und 2 gleichlaufenden krumme Linien kann man 1, 2, 3, 4, 5, 6 oder 7 Räume schließen. Wichtiger aber ist die Untersuchung der Arten dieser geschlossenen Räume.

Mit 1 geraden und 1 krummen Linie kann man ein Zweyeck und zwar ein gemischtlinichtes Zweyeck machen. Bey 2 geschlossenen Räumen kann man 2 solcher Zweyecke bilden. Macht man nur ein Rund, so dient die gerade Linie zu keiner geschlossenen Figur und gehört also in so fern nur zu den krummen Linien.

Bey 2 geraden und 1 krummen Linie kann man bey einem geschlossenen Raum ein Zweyeck oder ein Dreyeck bilden. Bey 2 Räumen oder 2 Zweyecken, 2 Dreyecken, 1 Zweyeck und 1 Dreyeck, oder endlich ein Zweyeck und ein Viereck. So wird dieses zu jeder Anzahl, die man mit 3 Linien machen kann, erschöpfend fortgesetzt. Doch hier darf man nicht stehn bleiben, sondern man muß die nämliche Untersuchung auch noch auf 4 Linien, und eben so auf 2 gleichlaufende und eine ungleichlaufende, und auf 2 und 2 gleichlaufende gerade und krumme Linien ausdehnen. Nicht weniger nothwendig ist es, die geschlossenen Räume auch in Hinsicht der Arten der Winkel, durch die sie gebildet werden, zu untersuchen. Der Schüler wird finden, ein Zweyeck, welches durch gerade und krumme Linien gebildet wird, habe immer 2 gemischtlinicht hohle Winkel. Ein Dreyeck, das durch 2 gerade und 1 krumme Linie gebildet wird, hat entweder einen rechten und einen gemischtlinicht hohlen Winkel, oder einen rechten und 2 gemischtlinichterhabene Winkel. Das erste Dreyeck nennt man ein gemischlinicht hohlwinklichtes, das zweyte ein gemischtlinicht erhabenwinklichtes Dreyeck. Bey diesen Arten von Dreyecken kann der durch die geraden Linien gebildete ebenfalls ein stumpfer oder ein spitzer seyn. Wenn mit 2 krummen und einer geraden Linie ein Dreyeck gebildet wird, so können wieder die nämlichen Untersuchungen statt finden, und an die Stelle der rechten, spitzen und stumpfen Winkel können erhabene hohle und gemischte treten: als ein gemischtlinicht hohlwinklichtes Dreyeck (siehe Zeichnung 80.), ein gemischtlinicht erhabenwinklichtes Dreyeck (siehe Zeichnung 81.), ein gemischtlinicht hohlwinklichtes Dreyeck (siehe Zeichnung 82.) u. s. w. Die verschiedenen Vierecke, Fünfecke, Sechsecke aufsuchen zu lassen, darf nicht übergangen werden.

Man wird bey dieser Ausführung immer wohl thun, wenn das, was bey der geraden Linie aufgestellt worden, nie aus dem Auge gelassen wird. Die Aufsuchung der Seiten, die mit dieser oder jener Anzahl gerader und krummer Linien gebildet werden können, muß hier nur sehr kurz behandelt werden. Nicht unwichtig ist auch noch das Theilen dieser gemischtlinichten Formen; z. B. ein gemischtlinichtes Zweyeck kann mit einer geraden oder krummen Linie in zwey Dreyecke, in ein Zweyeck und Viereck, oder in ein Zweyeck und Dreyeck zerlegt werden. Ein Viereck, Fünfeck, Sechseck mit mehr und weniger geraden und krummen Linien zu theilen, wird nicht übergangen. Alle Veränderungen, besonders bey mehreren Linien und in einem Vieleck zu erschöpfen liegt ganz außer dem Zweck, der durch solche Uebungen erreicht werden muß.

Gebildete Formen, als Winkel, Zweyecke, Dreyecke, Vierecke, Fünfecke u. s. w., wie die Linien zu behandeln, können auf dieser Stufe mit bedeutenden Abkürzungen ausgeführt

geführt werden. Die wesentlichern und nicht ganz entbehrlichen Uebungen sind noch folgende:

Man läßt die Schüler untersuchen, in wie viel Punkten sich gemischtlinichte Winkel, Zweyecke, Dreyecke ꝛc. unter einander werden vereinigen können. Verbindet man sie in 1, 2, 3 Punkten, so kann man den Schüler allenfalls untersuchen lassen, wie viele neue Winkel dadurch entstehen. Dann wird zu der Bestimmung der Arten derselben geschritten. Doch darf man dieses nicht erschöpfend mehr behandeln wollen. Das Gleiche kann auch auf die Anzahl und Arten der Ecken ausgedehnt werden. Jedoch ist dieser Gesichtspunkt etwas unwesentlicher. Die Untersuchung, wie viele neue geschlossene Räume durch die Verbindung gebildeter Formen entstehn, ist eine der wichtigern Uebungen auf dieser Stufe, und muß daher etwas ausführlicher behandelt werden; deßgleichen wenn man die Formen der neu gebildeten Figur dem Schüler zur Untersuchung vorlegt. Die Verbindung gebildeter Formen durch die Seiten darf man ebenfalls nicht ganz übergehen; doch soll es weniger ausführlich behandelt werden als diese letztern Gesichtspunkte. Die Lage der Winkel, Figuren u. s. w. ist nur eine Wiederholung dessen, was bey der geraden Linie aufgestellt worden; daher ist es nicht nöthig, sie bey den geraden und krummen Linien zu berühren. Den Beschluß dieser Uebungen mag endlich eine sehr verwickelte Verbindung von geraden und krummen Linien machen. Man läßt den Schüler gleichsam alles, was er sich durch die geraden und krummen Linien eigen gemacht hat, nach einander in sein Gedächtniß zurückrufen. Als Leitfaden hiezu kann man das bey der geraden, so wie das bey der krummen Linie Aufgestellte benutzen. Zu dieser gedrängten Darlegung sage ich noch: Ist auch kein Wink gegeben worden, daß die einzelnen Fragen nach jeder aufgestellten Reihenfolge nothwendig werden, so versteht es sich doch von selbst, und sie dürfen nicht nur nie übergangen werden, sondern je kürzer und gedrängter die aufgestellten Reihenfolgen waren, desto treffender muß auch durch ein paar Fragen das Wesen jeder Uebung erschöpft werden. Die schwierigsten einzelnen Fragen, die bey der geraden Linie aufgestellt worden sind, sollen hier als Muster dienen. Ist der Schüler im Stande, die schweren einzelnen Fragen gleich im Anfange zu lösen, so dürfen die Reihenfolgen jedesmal füglich übergangen werden.

Nicht unwichtig ist noch bey der vereinigten Einübung der gerad- und krummlinichten Formen, daß der Lehrer bey den wichtigeren Verhältnissen den Schüler jedesmal aufmerksam mache, durch was sich die geraden Linien von den krummen in dieser oder jener Verbindung unterscheiden. Alle diese Unterscheidungen liegen sehr ausführlich in dem, was über die geraden und krummen Linien jedesmal aufgestellt und gesagt worden ist. Ich darf daher mit vollem Vertrauen auf dieselben verweisen. So wie die Linie als Typus der Entwicklung der geistigen Kräfte benutzt worden ist; eben so ist auch die ebene und gebogene Fläche einer gleichen Behandlung fähig. Wenn indeß die Linien mit der nunmehr aufgestellten Ausführlichkeit behandelt worden sind, so bedarf die Ausführung der Flächenübungen keiner großen Ausdehnung.

Von der ebenen Fläche.

Die ebenen Flächen, die in einer Richtung, oder in einer Ebene liegen, hat sich der Schüler, indem er gebildete Räume auf seiner Schiefertafel mit einander verbunden, wirklich schon eingeübt. Es kann und darf also hier nur von solchen Flächen die Rede seyn, die in ungleichen Ebenen liegen.

Um Flächen in verschiedenen Ebenen darzustellen, bedarf man wirklicher beweisbarer Flächen. Diese können am leichtesten entweder aus Papier, Kartendeckel u. s. w. geschnitten werden, und wenn man will, so dienen die Schiefertafeln, welche die Schüler ohne dies in ihrer Hand haben, für diesen Endzweck. Einem jeden Schüler giebt man 2, 3, 4 bis 5 Flächen in die Hand und läßt ihn dieselben eben so behandeln, wie wenn es 2, 3 u. s. w. gerade oder krumme Linien wären. Die einfachste und erste Uebung wäre wieder, wie bey den geraden Linien, die Untersuchung der gleichlaufenden und ungleichlaufenden Flächen. Gäbe man dem Schüler dieses zu untersuchen, so fände er alles, was er bey den Linien früher aufgestellt, und eben so, daß drey Flächen sich in einer Richtung befinden können und ihm nichts Neues mehr darbieten. Es wird daher nicht fehlen, er wird folgende Veränderungen finden, entweder können 3 Flächen gleichlaufend, oder alle 3 ungleichlaufend, oder 2 gleichlaufend und 1 ungleichlaufend, oder 2 gleichlaufend und eine mit ihnen in einer Richtung, oder 2 ungleichlaufend und eine mit ihnen in einer Richtung seyn. Dieses auf eine und mehrere Flächen ausdehnen zu wollen, wird nicht mehr nothwendig.

Man schreitet daher wieder zu den ungleichlaufenden Flächen, wie bey den geraden Linien, und sieht, an wie viel Orten sie sich vereinigen können. Statt daß die Linien in Punkten zusammenkommen, vereinigen sich die Flächen immer in Linien mit einander.

Man tragt dem Schüler auf, zu untersuchen, in wie viel Linien sich zwey Flächen mit einander vereinigen können. Er wird wieder, wie bey den geraden Linien, finden, daß dieses nur an einem Ort oder in einer Linie möglich sey.

Drey Flächen vereinigen sich in einer, oder in 2, oder in 3 Linien.

Vier Flächen vereinigen sich in 1, 2, 3, 4, 5 oder 6 Linien.

Zwey gleichlaufende und eine ungleichlaufende Fläche vereinigen sich in 2 Linien. Wollte man sie nur in einer Linie vereinigen, so würde die dritte Fläche mit gar keiner derselben verbunden werden können.

Zwey und 2 gleichlaufende Flächen können sich in 2, 3 und 4 Linien vereinigen. Drey paar gleichlaufende aber höchstens in 12 Linien, wie sich 3 paar gleichlaufende Linien in 12 Punkten vereinigen. Flächen, wie die auf Zeichnung 83. vorgestellten, könnten allerdings in mehr Linien vereinigt werden. Diese größere Anzahl von Vereinigungslinien fallen aber mit den andern immer in eine Richtung, und geben bey der Verlängerung der Flächen nicht mehr Vereinigungslinien, als die geraden Linien Vereinigungspunkte bildeten.

Bey dieser Ausführung wird der Schüler Mühe ha=

ben, eine größere Anzahl Flächen so zu erhalten, daß sie sich in einer größern Anzahl Linien wirklich vereinigen. Ich bin daher sicher, daß man fragen wird, welches die einfachste, leichteste und natürlichste Art sey, diese Schwierigkeit zu überwinden. Ich antworte, wenn die geraden Linien genugthuend eingeübt worden sind und einige der leichtern Fälle mit Flächen wirklich von den Schülern ausgeführt seyn werden, so kann man ihnen einige der schwerern und künstlichern Verbindungen in Kartendeckel verfertigt vorlegen. Will man den Schüler diese Verbindungen mit Flächen wirklich ausführen lassen, so wird man wohl thun, immer 2 oder 3 Schüler mit einer gewissen Anzahl Flächen in der Hand zusammen zu setzen und ihnen die Verbindungen gemeinschaftlich zu machen erlauben. Statt aber dem Schüler diese Verbindungen künstlich vorzulegen, würde man noch besser thun, ihn aufzumuntern, dieses in seinen Freystunden selber in Kartendeckel zu verfertigen.

Der Schüler wird dieses zwar im Anfange nicht sehr vollkommen auszuführen im Stande seyn, doch aber immer so, daß das Dargestellte der Anschauung nachhilft. Die vollendete Verfertigung auch dieser Formen gehört der Kunstbildung an; worüber ich jedoch an einem andern Orte sprechen werde.

Auch könnten die mathematischen Körper, wiewohl nur sehr unvollständig, als Anschauungsgegenstände hiefür benutzt werden; denn inwendig sind diese Körper dem Auge nicht zugänglich, welches besonders bey der Verbindung von Flächen eine merkliche Lücke in die wirkliche An=

schauung bringt. Wird man aber dem Schüler dünne Kartendeckel und etwa eine Schere oder ein Federmesser und einen Lineal in die Hand geben und ihm die nothwendige Zeit einräumen, so wird er alle Formen zur Bewunderung darstellen können. Auch ist die Deutlichkeit alles, was für diesen Endzweck erzielt werden soll.

Eben so wichtig als die Anzahl der Vereinigungslinien mit jeder Anzahl Flächen aufzufinden, wird die Auffindung von jeder Zahl Winkel werden! Es werden daher jedem Schüler ein paar Flächen in die Hand gegeben und ihm aufgetragen, er möchte untersuchen, wie viele Winkel mit ihnen gebildet werden können. Es wird gewiß ein jeder finden, man könne entweder 1, 2 oder 4 Winkel machen, wie dieses bey den geraden Linien geschehen ist. Zum Unterschied der letztern Winkel nennt man sie Flächenwinkel. Würde man Flächen gebrauchen, wie sie Zeichnung 83. vorgestellt, so könnte allerdings auch noch eine größere Anzahl Winkel gemacht werden. Werden aber die Flächen gehörig verlängert, so giebt es auch in diesen Fällen nicht mehr als 12 oder 4 Winkel. Diese scheinbare Mehrzahl muß in Zukunft auch ohne weitere Bemerkung in jeder Verbindungsweise ein für allemal wegbleiben. Vereinigen sich 3 Flächen in einer Linie mit einander, so können sie wieder 2, 3, 4, 5 und 6 Flächenwinkel bilden. Vereinigen sie sich aber in 2 Linien, so findet man 2, 3, 4, 5, 6 und 8 Flächenwinkel und in 3 Linien von 3 bis 12 jede Anzahl, ausgenommen aber keine 11 Flächenwinkel.

Aus diesen Reihenfolgen geht klar hervor, daß alle

Formen, die bey den geraden Linien aufgestellt worden, auch bey den ebenen Flächen gebildet werden können. Bey dieser Ausführung findet gewiß kein Schüler irgend eine weitere Schwierigkeit mehr.

Drey, vier und mehrere Flächen können aber noch auf eine ihnen ganz eigenthümliche Weise verbunden werden; auch werden diese Verbindungen für die Flächenlehre von Wichtigkeit werden; z. B. 3 Flächen, eine nach der Höhe, die andere mit ihr nach der Breite und die dritte mit diesen zwey nach der Länge zu verbinden, wird der Schüler von 3 Winkeln bis zu 24 jede Zahl aufzufinden im Stande seyn, ausgenommen jedoch 23.

Daß diese Formen vom Schüler wirklich ausgeführt werden müssen, unterliegt keinem Zweifel. Diese Ausführung ist aber auch mit einigen Stück Karten, die rechtwinklicht geschnitten sind, gar nicht schwer. Mehr als etwa zu 4 oder 5 Flächen darf die Untersuchung der Anzahl der Winkel auch in dieser Verbindung nicht fortgesetzt werden.

Daß die Ausführung etwas mehr Zeit erfordert, als dieses bey den Linien geschehen ist, unterliegt keinem Zweifel, und um der Wichtigkeit halber muß sie ihm wirklich eingeräumt werden. Auch kann die Untersuchung der Anzahl der Winkel auf gleich- und ungleichlaufende Flächen ausgedehnt werden. Mehr aber als in 3 Richtungen gleichlaufende zu machen, wird in keinem Fall nothwendig werden. Die nämlichen Untersuchungen werden auch in Hinsicht der Ecken, die mit jeder Anzahl Flächen gebildet werden können, vorgenommen; da es hier an der großen

Mannigfaltigkeit fehlt, so darf dieses nicht mit der Ausdehnung behandelt werden, wie es bey den Winkeln geschehen ist.

Der Schüler wird finden, er könne mit zwey Flächen keinen oder einen Ecken machen. Um ihn von dem Ecken, der mit den Linien gebildet worden ist, zu unterscheiden, nennt man ihn Flächenecken. Mit drey Flächen kann man keinen, einen, zwey und drey Flächenecken machen; mit 4 aber keinen, 1, 2, 3 und 4; folglich treten hier wieder alle Fälle ein, die wir bey der Behandlung der geraden Linien gefunden haben.

So wie die Anzahl der Winkel aufgesucht worden ist, eben so wird auch ihre Art bestimmt. Werden mit 2 Flächen 1, 2 und 4 Winkel gebildet, so ist bey einem Winkel, derselbe ein rechter, ein spitzer oder ein stumpfer; bey zwey Winkeln sind entweder beyde rechte, oder der eine ist ein spitzer und der andere ein stumpfer; bey 4 Winkeln sind alle rechte, oder 2 sind spitze und 2 stumpfe Flächenwinkel. Das nämliche wird mit 3 Flächen bey 2, 3, 4 u. s. w. bis zu 12 Flächenwinkeln und zwar bey 1, 2 und 3 Vereinigungslinien aufgesucht werden. Der Schüler wird alle Veränderungen, die wir bey den geraden Linien gefunden haben, auch hier aufzufinden im Stande seyn. Das Gleiche läßt sich auch über 4 Flächen, die sich in 1, 2, 3, 4, 5 und 6 Linien vereinigen, sagen.

Da aber 3 Flächen noch so miteinander verbunden werden können, daß 24 Flächenwinkel entstehen, so muß auch diese Verbindungsart untersucht werden. Nimmt man die bey der Anzahl der Winkel geforderte Darstellung zu Hülfe, so werden alle Fälle ebenfalls mit der größten Leichtigkeit von dem Schüler gefunden. Diese Untersuchung etwa auf 3 paar gleichlaufende Flächen auszudehnen, muß nicht als entbehrlich angesehen werden. Die Ausführung davon ist aber so leicht, daß auch der schwächere Schüler gewiß alle Schwierigkeiten, die er etwa noch antreffen könnte, zu überwinden im Stande seyn wird. Die gleichen Untersuchungen finden auch in Hinsicht der Arten der Ecken statt.

Mit 2 Flächen kann ein rechter, ein spitzer und stumpfer Flächenecken gebildet werden. Bildet man mit 3 Flächen einen Flächenecken, so kann er wieder recht, spitz und stumpf seyn. Bey 2 Flächenecken können beyde rechte, oder beyde spitze u. s. w. seyn. Drey Flächenecken aber sind entweder ein rechter und 2 spitze, oder ein stumpfer und 2 spitze, oder alle 3 spitze Flächenecken. Mit 4 Flächen findet man alles, was mit 4 geraden Linien möglich ist; aber auf 5 und 6 ausgedehnt, giebt schon geschlossene Körper (Pyramiden). Sollte dieser Körper sich nicht vorfinden, so kann der Schüler mit 4 gleichseitigen Dreyecken, die in 6 Linien mit einander verbunden sind, sechs Flächenecken machen. Drey Flächen, die sich in 3 Linien vereinigen, und deren Ende aber von 6 Linien in einen Punkt zusammen kommen, wie z. B. bey der regelmäßigen Pyramide, beym Kubus u. s. w., bilden wieder eine neue Art von Winkel, die man körperliche Winkel nennt. Es ist aber nicht genug, daß der Schüler eine richtige Anschauung von einem körperlichen Winkel habe, sondern man läßt ihn denselben mit Kartendeckeln wirk=

lich verfertigen. Hernach läßt man den Schüler untersuchen, wie viele körperliche Winkel mit 3 Flächen gemacht werden können. Er wird finden, man könne 1, 2, 3, 4 bis 8 körperliche Ecken machen. Mit 4 Flächen können wenigstens einige der wesentlichern Verbindungen in Hinsicht der Anzahl der körperlichen Winkel gemacht werden, und allenfalls ein Paar der wesentlichern Verbindungen mit drey Paar gleichlaufenden Flächen sollen nicht übergangen werden. Es müssen ganz die gleichen Uebungen wiederholt werden, um die Art der körperlichen Winkel zu bestimmen. Auch hier läßt man sie zuerst einen rechten, spitzen und stumpfkörperlichen Winkel in Kartendeckel wirklich ausführen. Gestützt auf die Kenntniß eines körperlichen Winkels, untersucht der Schüler, was für 2, 3, 4, 5 u. s. w. körperliche Winkel mit 3 Flächen gebildet werden können. Auch stellt er es in Wirklichkeit so oft dar, als ihm die Anschauung davon noch Bedürfniß ist. Weit wird es aber auf keinen Fall fortgesetzt werden müssen, wenn alles das gethan worden, was hier auf jeder Stufe gefordert ist.

An diesem Faden wird zu der Anzahl der geschlossenen Räume geschritten, die nach Länge, Breite und Höhe gebildet werden und die einen körperlichen Raum einnehmen. Der Schüler wird finden, daß er, um einen solchen Raum zu schließen, 4 Flächen bedarf; die dreyseitige Pyramide mag als Anschauungskörper hiefür dienen. Man begnügt sich aber nicht damit, sondern giebt dem Schüler Zeit, die verschiedene Anzahl Körper, welche mit 4, 5, 6 u. s. w. Flächen gebildet werden können, aufzusuchen; auch kön=

nen hiezu gleichlaufende Flächen gegeben werden. Der Anfang wird mit 4 Flächen gemacht. Sind diese 4 gleichseitige Dreyecke, so giebt es eine regelmäßige Pyramide; sind sie ungleichseitig, so entstehn die verschiedenen unregelmäßigen Pyramiden. So schreitet man zu 5 Flächen, welches gleichseitige Pyramiden und andre unregelmäßige Körper geben wird.

Mit 6 gleichseitigen Dreyecken kann man eine doppelt regelmäßige Pyramide, und mit 6 Quadraten einen Kubus bilden. Verbindet man 6 andere unregelmäßige Dreyecke, Vierecke ꝛc. zu einem Körper, so erhält man die verschiedenen unregelmäßigen Körper; mit 8 gleichseitigen Dreyecken erhält man das Octaeder, mit 12 gleichseitigen Fünfecken das Dodecaeder, und mit 20 gleichseitigen Dreyecken das Icosaeder. Von den unregelmäßigen Körpern wird der Schüler alle Abänderungen, so weit man dieselben nothwendig findet, mit der höchsten Leichtigkeit darzustellen im Stande seyn. Sehr ausgedehnt muß dieses aber nicht ausgeführt werden.

Wichtiger hingegen ist, daß der Schüler alle schwierigen Körper, besonders die regelmäßigen, mit Kartendeckel zu verfertigen Zeit und Gelegenheit finde. Den Beschluß dieser Uebung macht die Beschreibung der geraden Körper. Wird man dem Schüler für diesen Endzweck den Kubus vorlegen; so können allenfalls folgende Fragen-an ihn gerichtet worden: Aus wie viel Flächen ist er gebildet? Wie viele Winkel und Ecken bilden sie? Wie viele Flächenwinkel und körperliche Winkel? Was für Arten von Winkel? Wie viele Linien und Flächen sind mit einander gleichlaufend? Wie viele Flächen und Linien sind mit einander ungleichlaufend? Mit wie vielen Flächen ist jede der 6 Flächen gleichlaufend? Mit wie vielen ist jede der 12 Linien gleichlaufend? Und so wieder mit dem ungleichlaufend Seyn. Mit wie vielen Flächen ist jede Fläche verbunden, und mit wie vielen ist eine jede davon nicht verbunden? Desgleichen wieder bey den Linien. In wie viel Punkten vereinigen sich diese 12 Linien? Wie viele Enden der Linien liegen in jedem der 8 Vereinigungspunkte? Auf gleiche Weise kann jeder regelmäßige sowohl als auch jeder unregelmäßige geradlinichte Körper dem Schüler vorgelegt werden, und er wird nicht nur die oben aufgestellten Fragen mit der größten Leichtigkeit zu beantworten im Stande seyn, sondern über jede Frage, die im Gebiet der Formverhältnisse enthalten ist, auch richtig und schnell antworten können. Wird der Anfang mit den mathematischen Körpern gemacht, so soll man keineswegs hier stehen bleiben, sondern alle geradlinichten Körper der Umgebungen des Kindes der gleichen Beobachtung und Betrachtung unterwerfen. Der Raum eines Zimmers, die Form eines Hauses, eines Kastens, einer Kiste, eines Pultes u. s. w. bieten hiefür treffliche Gelegenheiten dar. Da die Größe das Wesen der unregelmäßigen Körper näher bestimmt, so muß diese mit der Form noch so verbunden werden, wie bey der Formenlehre der geraden Linien ausführlich erörtert worden ist. Je mehr Leichtigkeit der Schüler besitzt, jeden Körper unter den oben angeführten Gesichtspunkten aufzufassen, desto weniger ausgedehnt muß diese letzte Uebung werden. Ueber die Art und Weise, wie sich der Lehrer dem Schüler gegenüber in dieser Einübung zu benehmen habe, verweise ich nur auf das, was ich bey der geraden Linie diesfalls sagte und aufstellte. Daß bedeutend weniger Zeit auf diese Uebungen zu verwenden sey, als auf die geraden Linien, will ich im Vorbeygehen nur erinnern. Die nämlichen Uebungen und Reihenfolgen könnten auch mit den krummen und mit den ebenen und krummen Flächen statt finden. Bey der Umständlichkeit, mit der zuerst die geraden Linien, hernach die krummen, dann die krummen und geraden vereinigt, und endlich die geradlinichten Körper behandelt worden sind, wird eine in's Einzelne gehende Ausführung bey den gebogenen Körpern ganz entbehrlich werden. Ich zeige daher nur in gedrängter Kürze an, was diesfalls weiter zu thun noch nicht als überflüssig angesehen werden darf. Die Kugel wird dem Schüler als eine einzige krumme Fläche anschaulich gemacht. Die krumme Fläche hat, wie die krumme Linie, eine hohle und eine erhabene Seite. Die hohle Seite ist inwendig und die erhabene auswendig. Also können wieder, wie bey den krummen Linien, erhabene, hohle und gemischte Flächenwinkel gebildet werden.

Statt mit Kartendeckel läßt man die Schüler die Formen allenfalls mit Thonerde oder andern leicht biegbaren Gegenständen darstellen. Auch kann er Rüben, Aepfel u. s. w. hiefür gebrauchen. Statt hohle, erhabene und gemischte Flächenwinkel läßt man den Schüler auf die nämliche Art Körperwinkel verfertigen. Man darf jetzt darauf zählen, daß der Schüler ohne Anstand alle diese und ähnliche Formen zu machen im Stande seyn wird. So führt der Lehrer ihn zu der Anzahl der gebogenen Körper, und er wird finden, daß die einfache, gebogene Fläche einen Körper schließt, den man Kugel nennt. Mit 2 solcher Flächen können 1, 2 oder 3 Körper gebildet werden.

Ein Körper, der durch 2 gebogene Flächen gebildet wird, hat einen Winkel und auch einen Ecken. Man nennt ihn deswegen Eineck. Das Eineck ist immer gemischt = hohl = und erhabenwinklicht, wie die krummlinichten Zweyecke. So läßt man die 2 und 3 Körper den Schüler ihrer Form nach untersuchen. Auch wird die wirkliche Ausführung in Thon oder andern weichen Materialien für den Anfang nicht entbehrlich werden.

Mit 3, 4 und mehreren einfach gebogenen Flächen wird das Gleiche fortgesetzt, und die verschiedenen Körper, die durch ihre Verbindung möglich werden, erschöpft. Und man darf sicher seyn, daß er dieses mit noch größerer Leichtigkeit zu thun im Stande seyn wird, als ihm dieses schon bey den ebenen Flächen anschaulich, leicht und geläufig geworden ist.

Den Beschluß läßt man den Schüler mit der Beschreibung einiger krummflächig begränzten Körper machen, und benützt das, was bey den geradlinichten Körpern als Norm aufgestellt worden.

Die Verbindung der ebenen und gebogenen Flächen ist so ganz gleich mit dem, was zuerst über die ebene, hernach über die krumme Fläche aufgestellt worden, daß hier die Ausführung ganz entbehrlich wird. Auch wird der

Schüler wenige Fälle treffen, die ihn nöthigen, anschaulich darzustellen, was er aufzusuchen hat.

Thon oder andere weiche Körper werden aber hier wieder die besten Dienste leisten.

Ist der Schüler in der Kenntniß der Formen einmal so weit geführt, so kann ihm jeder Gegenstand seiner Umgebungen vorgelegt werden, und er soll sich im Stande fühlen, in Rücksicht der Form eine, bis in's Einzelne gehende Beschreibung von jedem Körper zu machen. Er wird vielleicht den Kunstausdruck nicht von allen wissen; dieses wird ihn aber nicht hindern, das Wesen jeder Form dennoch genau anzugeben, und ihm sogar mangelnde Kunstausdrücke sehr oft ganz entbehrlich machen. Die Reichhaltigkeit seiner Anschauung soll die allfällige Armuth von einigen Kunstausdrücken so verschwinden machen, als existirten sie nicht.

Der Form zu dieser selbstständigen Haltung, von der sie ursprünglich ausgieng, zu verhelfen, ist einer der wesentlichern Gesichtspunkte, von den die gegenwärtige Darlegung derselben in's Auge gefaßt werden muß. Um das Gebiet aller Formen geistig gleichsam unter eine erschöpfende Norm zu bringen, werden folgende Uebungen obigen noch beygefügt werden müssen.

Von den Gesetzen, unter denen die verschiedenen Formen gebildet werden können.

Um den Schüler dahin zu führen, daß er mit Leichtigkeit findet, in wie viel Punkten sich etwa 30 und 30 gerade gleichlaufende Linien vereinigen, sagt der Lehrer:

Er soll sehen, in wie viel Punkten sich 2 und 2 und hernach 3 und 3 und allenfalls 4 und 4 gleichlaufende Linien höchstens vereinigen können, und er wird auf der Stelle angeben: 2 und 2 Linien vereinigen sich in 2 × 2 Punkten; 3 und 3 in 3 × 3 u. s. w., und so wird er endlich aussprechen, die 30 und 30 gleichlaufenden Linien können sich in 30 × 30 = 900 Punkten vereinigen. Gestützt auf dieses vom Schüler gefundene Gesetz, wird er mit eben der Leichtigkeit angeben, in wie viel Punkten sich 30 und 40 u. s. w. gleichlaufende Linien vereinigen können. 30 × 40 Punkte wird für diesen Fall die höchste Anzahl seyn, die es geben kann; 30 und 30 gleichlaufende krumme Linien können sich aus diesem Grunde in 30 × 30 Punkten, 2mal genommen, vereinigen; denn die krummen Linien bilden 2mal so viele Vereinigungspunkte, als die geraden.

30 krumme gleichlaufende und 30 gerade gleichlaufende Linien vereinigen sich höchstens in wie viel Punkten? Weil eine gerade Linie immer 2mal durch eine krumme geht; so erhält man so viele Vereinigungspunkte, als bey den krummen. Dieses Gesetz auf Linien, die in 3 und mehreren Richtungen gleichlaufend sind, überzutragen, wird der nämliche Gang beobachtet. Z. B. um zu untersuchen, in wie viel Punkten 30, 30 und 30 gerade gleichlaufende Linien sich höchstens vereinigen können, läßt man den Schüler untersuchen, in wie viel Punkten 2, 2 und 2, 3, 3 und 3 u. s. w. gleichlaufende Linien zusammen kommen können. Er findet sicher, 2, 2 und 2 gleichlaufende Linien vereinigen sich in 2 × 2 Punkten 3mal genommen;

3,

3, 3 und 3 in 3 × 3 Punkten 3mal wiederholt; und 30, 30 und 30 vereinigen sich in 30 × 30 wieder 3mal genommen, oder 900 dreymal wiederholt. Giebt man 10, 20 und 30 gleichlaufende gerade Linien an, und soll das Nämliche untersucht werden, so wird aus obigen Gesetzen hervorgehen, daß diese Linien sich in 10 × 20, 10 × 30 und 20 × 30 Punkten vereinigen können. Auch können diese Gesetze auf folgende Weise gesucht werden. Zieht man 10 gleichlaufende Linien, so können sie sich noch nicht vereinigen; zieht man aber die 20, so können sie mit den ersten 10 in 10mal 20 Punkten verbunden werden; werden endlich die 30 gleichlaufenden Linien gezogen, so können sie mit den 20 in 20 × 30 Punkten verbunden werden.

Statt der geraden gleichlaufenden Linien kann man auch krumme in 3 Richtungen geben, und der Schüler wird das Doppelte der Anzahl Vereinigungspunkte der geraden Linien finden; weil diese Linien unter den nämlichen Bedingungen immer das Doppelte an Vereinigungspunkten mit den geraden geben.

Um mit 10 gleichlaufenden geraden und 10 gleichlaufenden krummen Linien die höchste Anzahl Vereinigungspunkte zu finden, sieht man zuerst, in wie viel Punkten sich 10 und 10 gleichlaufende krumme Linien vereinigen können, und weiß nach obiger Auflösung, daß es 10 mal 10 Vereinigungspunkte 2mal genommen giebt, und weil jede gerade Linie wieder 2mal mit einer jeden krummen verbunden werden kann, so erhält man 10 × 10, 2 mal 2 mal genommen, und in allem 10 mal 10, 6mal wieder=

holt. Soll der Schüler untersuchen, in wie viel Punkten 10 gleichlaufende gerade, und 20 und 30 gleichlaufende krumme Linien sich vereinigen können; so wird nach dem oben Aufgestellten also verfahren werden müssen. Die 20 und 30 gleichlaufenden krummen Linien können sich in 20 mal 30 Punkten, 2mal genommen, vereinigen; werden die 10 gleichlaufenden geraden gezogen, so können sie mit den 20 krummen in 2 Punkten jedesmal verbunden werden, also 10 × 20, 2mal wiederholt, und mit den 30 aber 10 mal 30 auch 2mal genommen.

Auf Linien, die in 4 und noch mehreren Richtungen gleichlaufend sind, die diesfälligen Uebungen auszudehnen, kann gewiß mit der höchsten Leichtigkeit von jedem Schüler ausgeführt werden.

Bedeutend weiter gehen zu wollen, als es aber hier ausgeführt worden ist, wird nicht nothwendig; höchstens können die Gesetze der Vereinigung der Linien in 4 Richtungen noch erschöpfend aufgesucht werden. Durch die Vereinigung dieser Linien sind Winkel entstanden.

Als Gesetz wird der Schüler gleich aufstellen: es gebe immer 4mal so viele Winkel bey der höchsten Anzahl Vereinigungspunkte, als es Winkel seyen, denn um jeden Vereinigungspunkt können, wenn 2 Linien durchgehen, höchstens 4 Winkel gebildet werden.

Statt der Anzahl der Winkel kann man ihn auch ihre Form aufsuchen lassen. Bey den geraden Linien, die in 2 Richtungen gleichlaufend sind, giebt es alles nur rechte, oder aber die Hälfte spitze und stumpfe; denn um einen Punkt, der aus der Vereinigung von 2 geraden Linien entsteht, giebt es rechte oder immer 2 spitze und 2 stumpfe.

Zieht man aber Linien in 3 Richtungen gleichlaufend, so giebt es die Abänderung der Winkel von 3 Linien in 3 Punkten, welches ⅓tel der Summe rechte, ⅓tel stumpfe und ⅓tel spitze oder die Hälfte stumpfe und die Hälfte spitze ausmachen wird.

Bey Linien, die in 4 Rechnungen gleichlaufend sind, findet die Abwechslung von 4 Linien in 6 Punkten statt, die gewiß jeder nach dieser Anleitung und Stufenfolge auszuführen im Stande seyn wird. Mehr als zu 4 Richtungen darf auch hier nicht geschritten werden.

Bey den krummen Linien werden immer so viel hohle Winkel seyn, als Vereinigungspunkte, desgleichen erhabene; gemischte Winkel aber wird es 2mal so viel geben, als Vereinigungspunkte.

Mit den geraden und krummen Linien erhält man hingegen immer 2mal so viel gemischtlinicht hohle Winkel, als Vereinigungspunkte und eben so viele gemischtlinicht erhabene.

Eben so wird die Zahl der geschlossenen Figuren gesucht werden. Um bey den 30 und 30 geraden gleichlaufenden Linien die höchste Anzahl der geschlossenen Figuren zu finden, läßt man den Schüler auf gleiche Weise, wie es bey den Vereinigungspunkten geschehen ist, wieder anfangen; 2 und 2 gleichlaufende Linien bilden 1, 3 und 3 aber 2 mal 2 und 4 und 4 gleichlaufende Linien 3 × 3 u. s. w., 30 und 30 gleichlaufende Linien bilden aus den gleichen Gründen 29 mal 29 geschlossene Figuren. Auf eine andere Art gelöst. Zwischen 2 geraden Linien liegt ein Zwischenraum; so verhält es sich mit den andern 30 gleichlaufenden Linien, und werden sich diese Linien mit einander vereinigen, so entstehen also 29 mal 29 Zwischenräume oder geschlossene Figuren.

Sind aber 30 und 40 Linien gleichlaufend, so können aus eben diesen Gründen 29 mal 39 geschlossene Figuren werden, 30 gleichlaufende krumme Linien bilden schon so viel geschlossene Räume, als Linien sind. Mit 30 und 30 gleichlaufenden krummen Linien giebt es, aus obigen Gründen, zuerst 29 mal 29 Zwischenräume, oder geschlossene Figuren, zweymal wiederholt. (S. Zeichnung 84.) Die Verbindungsweise a und b besonders in's Auge gefaßt, entspricht den 29 mal 29 zweymal genommen; ferner findet man 29 Figuren noch 4mal mehr, noch 3 Figuren. Gäbe man 30 und 40 gleichlaufende krumme Linien an, so würden 29 mal 39 Figuren 2mal genommen entstehen, 2 mal 29 und 2 mal 39, mehr wieder 3 Figuren, wie es in letzter Verbindung statt fand. Giebt man 30 gleichlaufende gerade und 30 krumme Linien an, so findet man, wie oben, 29 mal 29, zweymal wiederholt, und 29 dreymal genommen, mehr aber noch 2 Figuren. Die gleichen Gesetze sind auch auf 30 und 40 gleichlaufende gerade und krumme Linien anwendbar. Daß dieses auch auf Linien in mehreren Richtungen passe, unterliegt keinem Zweifel; um jedoch nicht zu weitläufig und ermüdend zu werden, will ich hierüber nur noch ein Beyspiel mit geraden Linien geben. Man läßt den Schüler untersuchen, wie viel geschlossene Figuren mit 30, 30 und 30 gleichlaufenden geraden Linien gebildet werden können.

Das Dreyeck dient hier als Urform, und der Schüler wird finden, sie bilden 29 mal 29 geschlossene Räume, 3mal genommen; ferner 29 Figuren 3mal genommen, mehr noch 1. Gestützt auf diese Auflösung, können alle andern Aufgaben mit Linien in 3 Richtungen gelöst werden.

Es auf 4 Richtungen ausdehnen zu wollen, wird hier entbehrlich. So kann der Schüler auch die Gesetze aufstellen, unter denen die Linien die Punkte durchschneiden, oder durch die Vereinigungspunkte gehen können, oder wie viel Paar Scheitelwinkel oder Nebenwinkel sie bilden, wie viele Schenkel, wie viele Seiten u. s. w. Als Beyspiel hievon mag folgendes Exempel noch eine Stelle finden.

Wie viele Seiten können 30 und 30 gleichlaufende Linien höchstens bilden?

Die 30 gleichlaufenden Linien bilden keine Seiten. Zieht man die zweiten 30 Linien, so wird jede derselben in 29 Seiten getheilt, also 30 mal 29 Seiten; die ersten 30 Linien sind aber auch in 30 mal 29 Seiten gleichzeitig eingetheilt worden.

Daß dieser Verbindungsart von Linien noch andere gegeben werden können, unterliegt keinem Zweifel. Z. B. wenn man mit 30 und 30 gleichlaufenden Linien die höchste Anzahl Vereinigungspunkte bildet, welches ist die kleinste Anzahl Winkel? Schon früher haben wir gesehen, daß es 29 × 29 geschlossene Figuren, und zwar Vierecke giebt; jedes Viereck hat 4 Winkel, also 4 mal diese Summe wiederholt, wird die geringste Anzahl Winkel bey der höchsten Anzahl Vereinigungspunkten geben. Daß auch diese wie jede andere ähnliche Aufgabe auf die mannigfaltigste Art gelöst werden kann, mag in dieser Auflösung nachgesehn und mit den frühern verglichen einen Wink geben, und ich finde es ganz überflüssig, hier mehrere Lösungsarten anführen zu wollen.

Will man mit 60 Linien die höchste Anzahl rechte Winkel machen, wie müssen diese Linien gezogen werden? Antwort: 30 und 30 gleichlaufend.

Um diese Aufgabe zu lösen, kann man den Schüler nur untersuchen lassen, wie viele Winkel er erhalte, wenn er sie allenfalls als 59 gleichlaufende und eine ungleichlaufend, oder 58 und 2 gleichlaufend ziehen wollte; und so wird der Schüler leicht auf die Form von 30 und 30 geleitet werden; eben so können die ungleichlaufenden Linien behandelt werden; z. B.

In wie viel Punkten können sich 30 ungleichlaufende gerade Linien höchstens vereinigen? Um den Schüler zum Auffinden dieses Gesetzes zu führen, sagt ihm der Lehrer, er möchte sehen, in wie viel Punkten sich eine Linie mit andern vereinige; er wird finden, in keinem Punkt. Ziehst du aber eine zweyte Linie, in wie viel Punkten kann sie mit der ersten vereinigt werden? Er wird finden, in einem, die dritte Linie in 2 mehr; denn sie kann mit der ersten und zweyten verbunden werden; die 4te Linie giebt hinwieder 3 Punkte mehr, denn sie kann mit der ersten, zweiten und dritten Linie mit jeder einmal vereinigt werden; die dreyßigste Linie bildet 29 Punkte mehr als die ihr vorhergehende 29te Linie; denn sie kann mit jeder geraden Linie einmal, und mit den 29 also 29 mal verbunden werden.

Das Gesetz dieser Vereinigung wäre demnach:

erste Linie kein Punkt,
2te Linie 1 Punkt mehr,
3te Linie 2 Punkte mehr,
4te Linie 3 Punkte mehr u. s. w.;
29te Linie 28 Punkte mehr,
30te Linie 29 Punkte mehr.

Der Schüler wird ohne weitere Schwierigkeit anfangen, diese Vereinigungspunkte zusammen zu zählen. Da dieses aber zu viel Zeit erfordern würde, so wird der Lehrer wohl thun, ihn auf folgende Weise zu einer Abkürzung zu führen. Siehe wie viele Vereinigungspunkte die zweite und letzte Linie mit einander bilden? Er wird finden, dreißig, und die dritte und zweitletzte wieder 30; denn die dritte giebt um einen Punkt mehr als die zweite; die zweitletzte giebt um einen weniger als die letzte; folglich zusammen immer gleich viel.

Es sind 14½ mal 2 Linien, die Vereinigungspunkte bilden, und diesem zu Folge giebt es 14½ mal 30 Vereinigungspunkte; die erste Linie macht bey dieser Betrachtungsweise eine Ausnahme. Daß diese Gesetze auch noch auf andern Wegen gefunden werden können, und vom Schüler auch gefunden werden, wenn man ihn dieselben ganz selbstständig aufsuchen läßt, unterliegt keinem Zweifel mehr.

Auch soll der Lehrer erst dann mit seiner Leitung und Wegweisung einschreiten, wenn der Schüler das, was ihm möglich ist, aufgefunden haben wird.

Würden 31 statt 30 Linien gegeben werden, so hätte der Schüler 15 mal 31 Vereinigungspunkte zu finden. Für den gegenwärtigen Zweck ist die wirkliche Berechnung und Ausführung mit Zahlen nicht einmal nothwendig. Um mit 30 krummen Linien die höchste Anzahl Vereinigungspunkte aufzufinden, wird das, was bey den 30 geraden gefunden worden ist, nur verdoppelt, weil jede krumme Linie sich mit einer andern krummen immer in zwey, also in doppelt so viel Punkten, als die geraden, vereinigen kann.

Auch kann dieses Gesetz ohne Hülfe der geraden Linien ganz selbstständig auf folgende Weise gefunden werden.

Die erste krumme Linie kann keinen Vereinigungspunkt bilden, die zweite mit der ersten Linie aber 2; die dritte Linie aber mit jeder der vorhergehenden 2 mehr oder 2 mal 2 gleich 4; die 30te Linie aber mit den 29 vorhergehenden 29 × 2 Punkte oder 58; die zweite Linie bildet 2 Punkte, mit 58 Punkten giebt es 60, und aus dem gleichen Grunde, wie bey den geraden Linien, 14½ mal genommen, wird sich das Doppelte der Vereinigungspunkte, die bey den geraden Linien gefunden worden sind, ergeben. Mit 30 geraden und 30 krummen Linien wird aber die höchste Anzahl Vereinigungspunkte also gefunden werden. Es ist gleichgültig, ob man mit den geraden oder mit den krummen Linien den Anfang mache. Ich setze voraus, die Gesetze der geraden seyen angegeben. Man findet, die erste krumme Linie könne sich mit den 30 geraden in 30 × 2 oder 60 Punkten vereinigen; die 2te krumme wieder in 30 × 2 Punkten mit den geraden und in 2 Punkten mit der ersten krummen Linie; und so wird dieses fortgesetzt; für die 30te krumme Linie erhält man 30 × 2 Vereinigungspunkte mit den geraden, und 29 × 2 mit den krummen, oder 118 Punkte für die letzte Linie; die erste giebt 62 Punkte, zusammen sind es 180, und dieses wird wieder aus den obigen Gründen 15mal wiederholt; denn es sind 30 krumme Linien, und statt keines giebt die erste schon 60 Vereinigungspunkte.

Wie bey den gleichlaufenden Linien kann man auch hier die Anzahl der Winkel, ihre Arten, die Anzahl der Seiten und Winkel, das Durchgehen der Linien ꝛc. wieder unter die nämlichen erschöpfenden Gesetze bringen. Die Ausführung davon ist aber leicht und mit dem, was ich über die gleichlaufenden Linien aufgestellt habe, so gleich, daß eine weitere Ausführung hier nicht mehr gesucht und erwartet werden darf.

Selbst die Anzahl der geschlossenen Figuren aufzufinden, würde dem Schüler auch ohne weitere Handbietung nicht mehr schwer werden. Um aber eher zu viel, als zu wenig Stoff diesfalls in dieser Schrift niederzulegen, folgen noch ein paar Beyspiele:

Will man die höchste Anzahl geschlossener Figuren mit 30 ungleichlaufenden Linien finden; so fängt man, wie bey den Vereinigungspunkten an, und sucht, wie viele geschlossene Räume die erste gerade Linie geben wird;

man findet, keinen, die zweyte bildet ebenfalls keinen, die dritte aber einen, die vierte bildet mit den 3 frühern gezogenen Linien 2 mehr, und so fährt der Schüler fort, immer um eine geschlossene Figur zu steigen; die dreissigste Linie bildet 28 Figuren mehr. Will man es auf abgekürzte Art zusammenzählen, so addirt man den Raum, der mit der dritten Linie gebildet ist, mit den 28 Räumen der dreyssigsten Linie zusammen, und findet 29; die vierte Linie und die zwey letzten bilden wieder 29; die erste und zweyte Linie fallen aber ganz weg; es bleiben also noch 28 oder 14 mal 2 Linien, welches folglich 14 mal 29 geschlossene Räume geben wird.

Mit den krummen Linien finden die gleichen Reihenfolgen statt; bey diesen Linien bildet aber die erste schon eine Figur, und steigt dann immer um zwey. Weil die erste Linie als von nichts zu eins steigend in's Auge gefaßt werden muß und von dieser Linie an aber immer um 2 Figuren die Anzahl erhöhet wird, so muß die erste Linie im Zusammenzählen auch als eine Ausnahme behandelt werden. Das Weitere dieser Auflösung ist bey den geraden Linien nachzusehen. Würde eine Anzahl gerader und krummer Linien gegeben; so müßte zuerst die Anzahl der geschlossenen Räume mit den geraden oder mit den krummen aufgesucht und hernach mit der 2ten Art Linien wieder von vornen angefangen und so weiter geschritten werden, wie es beym Aufsuchen der Vereinigungspunkte der geraden und krummen Linien geschehen ist. Auch gleich und ungleichlaufende Linien können noch verbunden und aus dieser Verbindung die gleichen Aufgaben aufgelöst werden, wie dieses zuerst mit den gleichlaufenden und hernach mit den ungleichlaufenden Linien oben statt gefunden hat. Ausgedehnt dieses ausführen zu wollen, wird aber ganz überflüssig werden. Wichtiger und schwieriger wären noch etwa folgende Fragen:

Welches ist die höchste Anzahl nur spitzer Winkel (wenn keine andre dabey sich befinden dürfen), die mit 30 geraden Linien gebildet werden können. Das Dreyeck ist die einzig ursprüngliche Form, die hiefür dient. Der Schüler wird finden, mit 3 geraden Linien könne man 3 spitze Winkel machen, mit 4 Linien aber 8, mit 5 Linien 14. (Seht Zeichnung 16.) Die nämliche Frage soll auch auf die stumpfen Winkel ausgedehnt werden. Drey stumpfe Winkel, die von drey Linien um einen Punkt herum gebildet werden, sind die Grundform, von der ausgegangen werden muß. Vier Linien bilden nach dieser Form 4 stumpfe Winkel, 5 Linien aber 6 u. s. w.

So wie bisher die Gesetze, unter denen Linien mit einander verbunden werden können, vom Schüler aufgesucht worden sind, so dürfte dieses auch auf gebildete Formen ausgedehnt werden; z. B. In wie viel Punkten können 30 Winkel, und zwar entweder rechte oder spitze oder stumpfe, mit einander verbunden werden? Desgleichen eben so viel Dreyecke, Vierecke rc. Auch könnten die nämliche Anzahl Parallelogramme unter diesen Gesichtspunkten mit einander verbunden und zwar so, daß ihre Seiten gleichlaufend werden.

Statt die Anzahl ihrer Vereinigungspunkte aufzusuchen, dürfte man dieses wieder auf alle früher aufgestellten Gesichtspunkte ausdehnen.

Daß dieses mit den krummlinichten und mit den gerad- und krummlinichten Formen ebenfalls statt finden könne, scheint mir so klar, daß ich diese Bemerkung beynahe schon für überflüssig halte. Wenige Aufgaben hierüber werden aber mehr als hinreichend seyn und können leicht auch von Jedermann nach obiger Norm gemacht werden.

Was hier mit den Linien statt gefunden hat, kann auch auf die Flächen, die in verschiedenen Ebenen liegen, angewendet werden. Z. E.

In wie viel Linien werden sich 30 und 30 gleichlaufende Flächen vereinigen?

Hier wird der Schüler mit großer Leichtigkeit finden, daß sie sich in eben so viel Linien vereinigen können als eben so viel gleichlaufende Linien in Punkten.

Gibt man aber 30; 30 und 30 gleichlaufende ebene Flächen in der größten Anzahl Linien zu vereinigen; so wird der Schüler finden, es werde auch hier die nämliche Anzahl Vereinigungslinien geben, die es bey den geraden Linien Vereinigungspunkte gegeben. Eben so kann man ihn untersuchen lassen, wie viel Flächenwinkel, Körperwinkel ꝛc. dadurch entstehen können. Wichtiger aber als dieses ist die Bestimmung der Anzahl der Körper, welche durch diese Flächen gebildet werden können.

Sind 30 und 30 Flächen gleichlaufend, so bilden diese 29 mal 29 Zwischenräume und werden noch einmal 30 Flächen in einer andern Richtung gleichlaufend gezogen, so bilden diese letzten Flächen mit den andern 29 mal 29 Körper.

Auf ungleichlaufende Flächen dieses auszudehnen, kann nicht mehr Bedürfniß werden. Dagegen soll man den Schüler allenfalls noch untersuchen lassen, wie viel Körper mit 30 gleichlaufend gebogenen Flächen gebildet werden können, oder mit so viel gebogenen und geraden Flächen die gleichlaufend sind. Mehr aber als auf Linien, die in 3 Richtungen gleichlaufend sind, müssen diese Aufgaben auf keinen Fall erweitert werden.

Ich ende hiemit und beantworte nur noch eine Einwendung die hier gewiß gemacht wird, nämlich man erkenne die Wichtigkeit dieser letzten Uebung als Entwicklung der Geisteskräfte des Kindes; aber man sehe nicht ein, welche Anwendung solchen Uebungen je gegeben werden können.

Ich antworte: Was dem Menschen oft am nächsten liegt, sieht er am wenigsten. Soll dem Kind eine richtige Anschauung der Eintheilung eines Hauses, welches er bewohnt, gegeben werden, so sind ihm die Gesetze der Verbindung der verschiedenen Formen, die ich oben aufstellte, unentbehrlich, und die Anwendung davon wird in der spätern Darlegung so weit außer allen Zweifel gesetzt werden, daß sie Jedermann mit Thatsachen beantwortet erscheint.

Ich schreite in der Darlegung meines Gegenstandes weiter.

Die Zahl mit der Form
als
Typus der Entwicklung der geistigen Kräfte verbunden.

Wie man später durch die allgemeine Größenlehre sehen wird, so findet sich die Zahl mit allen Formverbindungen, wie diese in der Formlehre aufgestellt werden, vereinigt.

In der allgemeinen Größenlehre wird die Form einen solchen Einfluß auf die Zahl ausüben, daß man mit Recht annehmen darf, sie beherrsche die Zahl, während in der jetzigen Darlegung die Form der Zahl nur untergeordnet dienen soll.

Auf die erste Verbindung der Zahl mit der Form werde ich später zurückkehren. Die wesentlichere und wichtigere Form für den gegenwärtigen Endzweck ist rücksichtlich der geradlinichten Formen das Quadrat mit allen seinen Abstufungen von Vierecken und ihren Verhältnissen zu einander, die durch die Zahl ausgedrückt werden können. Für die Körper nimmt der Kubus mit allen seinen nahe verwandten Körpern die nämliche Stelle ein, wie das Quadrat mit seinen Abstufungen für die Fläche. —

Das Quadrat und der Kubus mit den ihm nahe verwandten Körpern sind die einzigen Flächen und Körper, die mit Hülfe der Zahl ohne verwickelte und schwierige, durch Formverhältnisse bedingte, geistige Schlüsse, in Hinsicht ihrer Größenverhältnisse zu einander, nur durch die Anschauung bestimmt und gelöst werden können. Hier wird man mir aber einwenden, es sey unbegreiflich, daß ich nicht bey der Linie, beym Winkel, beym Dreyeck u. s. w. anfange und den nämlichen Gang befolge, den ich diesfalls in der Formlehre aufgestellt habe.

Ich antworte hierüber nur folgendes: Wollte man die Linie oder den Winkel für diesen Endzweck benutzen; so würde, in so fern man bey den Anschauungsverhältnissen stehen bleiben sollte, nichts als ein gewöhnliches Rechnen statt finden; in so fern gehören alle diese Reihenfolgen und Uebungen ganz in die Zahlenlehre und dürfen nach dem, was sich dort aufgestellt findet, übergangen werden. Würde man sich aber mit den Anschauungsverhältnissen nicht begnügen, und diese Größenverhältnisse durch Schlüsse zur geistigen Anschauung erheben; so könnte und müßte allerdings bey der Linie, dem Winkel, den Seiten, dem Dreyeck u. s. w. der Anfang gemacht und hinwieder der gleiche Gang befolgt werden, der in der Formenlehre deßhalb aufgestellt worden. In diesem Fall aber müßte die Zahl der Form als untergeordnet in's Auge gefaßt und behandelt werden, welches, wie ich gleich anfangs bemerkte, auf eine andere und spätere Stufe gehört.

Mehr als diese Erläuterungen wird indeß die positive und bestimmte Darlegung dieser beyden Ansichten in geordnete Reihenfolgen und Uebungen der Sache in's Licht setzen.

Ich werde demnach jeden dieser zwey Gesichtpunkte in gedrängter Kürze darzustellen mich bemühen. Auch darf ich mich um so kürzer fassen, da alles was für den Lehrer und Schüler diesfalls nothwendig ist, in der Darlegung der Zahllehre so ausführlich erörtert worden, daß ich hierüber weitläufig einzutreten gar nicht mehr nothwendig erachte. Ich schreite also zur Sache selber. Der Lehrer fordert den Schüler auf, er möchte auf seiner Schiefertafel eine gerade Linie ziehen und auf dieselbe ein Quadrat machen; hernach eine zweyte Linie ziehen, die aber zweymal so lang ist als die erste und ebenfalls ein Quadrat auf derselben darstellen, und dieses dann bis zur Linie fortsetzen, die 10 mal so lang ist als die erste, und wovon das Quadrat 100 mal so groß wird als die erste. Zur Erleichterung für den Schüler wird man wohl thun, wenn man ihn die Linien jedes Quadrats, die dasselbe in 4, 9, 16, 25 u. s. w. Quadrate eintheilt, gleichzeitig ziehen läßt. Wie oft jedes Quadrat so groß ist als das erste, zweyte, dritte u. s. w., weiß der Schüler bereits schon aus der Zahlenlehre. Hingegen werden ihm folgende Betrachtungen und Anschauungen noch neu seyn.

Der Lehrer sagt zum Schüler: die 4 Seiten, welche ein Quadrat einschließen, nennt man gewöhnlich Umfang. Gestützt auf dieses, läßt er ihn untersuchen, wie oft das zweyte Quadrat so groß sey als das erste, und wie oft hinwieder der Umfang des ersten so groß sey als derjenige des zweyten. So wird das dritte Quadrat so wohl seinem

In=

Inhalt als Umfang nach mit den ersten verglichen und diese Vergleichung bis zum zehnten unter den nämlichen Gesichtspunkten fortgesezt

Auch kann man die ganze Reihenfolge Quadrate, mit dem zweiten oder dritten, so weit man es nothwendig erachtet, vergleichen.

Auf gleiche Weise kann auch der Umfang mit den Theilungs-Linien eines jeden dieser Quadrate noch verglichen werden. Statt aber dieses in Reihenfolgen umständlich weiter anzugeben, folgen hierüber ein paar einzelne Fragen.

Fr.: Wie oft sind die Theilungslinien des dritten Quadrats so groß als sein Umfang, oder so groß als der Umfang des ersten Quadrats u. s. w.?

Wie oft ist der Umfang des 10ten Quadrats so groß als derjenige des ersten und als der Inhalt des ersten, oder wie oft sind seine Theilungs-Linien so lang als die Theilungs-Linien des zweyten Quadrats?

Steht der Inhalt, der Umfang, stehen die Theilungs-Linien in den verschiedenen Quadraten immer in ein und demselben Verhältniß zu einander? Welches Verhältniß steigt am schnellsten zu hohen Zahlen empor.

Wie viele Theilungslinien braucht es um das zweite Quadrat in Quadrate, die dem ersten gleich sind, zu zerlegen? Wie viele zu dem neunten Quadrat? In welchem Verhältniß steigen die Theilungslinien? In welchem Verhältniß stehen sie zu den Quadraten, die jedesmal dadurch entstehen? Im welchem Verhältniß stehen die Theilungslinien jedesmal zum Umfang des Quadrats, in welchem sie gezogen sind?

An diese Reihenfolgen knüpft man dann Quadrate, Rechtecke und zwar auf folgende Weise an:

Lehrer. Stellt auf euren Schiefertafeln eine Reihe Rechtecke dar, wovon die Breite des ersten gleich ist einer Seite des ersten Quadrats, deren Länge aber gleich ist einer Seite des zweyten Quadrats; hernach ein zweytes Rechteck wieder mit der Breite des ersten Quadrats und mit der Länge des dritten. — Dieses kann er ihn bis zum zehnten Quadrat fortsetzen lassen.

Will man in diese Reihenfolgen weiter schreiten, so nimmt man die Breite des zweyten Quadrats und die Länge des dritten, und bildet nach dem Muster der obigen eine neue Reihenfolge.

Weiter als etwa bis zu dieser Reihenfolge wird dieses auf keinen Fall ausgedehnt. Als weitere Anleitung hievon mögen noch ein paar Fragen hier eine Stelle finden.

Fr.: Wie viele Quadrate, die dem ersten gleich sind, enthält das Rechteck, das die Breite des zweyten und die Länge des dritten Quadrats hat?

Antwort: 6.

Wie oft ist der Umfang dieses Rechtecks so groß als das erste Quadrat?

Antwort: 2½ mal so groß.

Ist der Umfang der Quadrate oder der Rechtecke bey gleichem Inhalt größer.

Wenn man das zweyte Quadrat in Quadrate, die dem ersten gleich sind und in Rechtecke zerlegt, die ebenfalls so groß sind als das erste, wie verhalten sich die Umfänge der Quadrate zu demjenigen des Rechtecks?

Man soll aus dem Umfang des vierten Quadrats ein Rechteck ohne Bruchverhältnisse bilden; es fragt sich, wie viele Quadrate ein solches Rechteck erhalte?

Antwort: ein Rechteck, welches 7 oder 12 oder 15 Quadrate enthält. Für das erste Rechteck gibt man der Breite 1 und der Länge 7; für das zweyte der Breite 2 und der Länge 6; für das dritte aber der Breite 3 und der Länge 5 mal eine Seite des ersten Quadrats.

Brüche könnten hier allerdings leicht gegeben werden; sie haben aber keinen andern Zweck, als das Kind mit dem Zahlverhältniß der Brüche noch vertrauter und bekannter zu machen. Diese Ausdehnung auf die Brüche gehört desnahen in so weit in's Gebiet der Zahlenlehre, die als vollkommen begründet, keiner weiteren Uebung hier mehr bedürfend, vorausgesetzt werden muß.

Diesem zufolge soll mit gegenwärtigen Uebungen auch erst dann angefangen werden, wenn die Zahlenlehre mit Brüchen ganz vollendet seyn wird.

Bis zu den Brüchen sollen wie gesagt, diese Uebungen auf keinen Fall ausgedehnt werden, indem es hier wesentlich darum zu thun ist, das Kind in das Gebiet der, mit der Zahl verbundenen Formverhältnisse einzuführen; sie in die, durch diese Uebungen aufgestellten Aufgaben und Reihenfolgen zu bringen, würde den Schüler nur durch Umwege zu dem vorgesetzten Ziel führen; besonders da man es nicht ausweichen kann, Brüche, die aus der Bestimmung der Form hervorgehen, übergehen zu wollen, oder auch nur zu können, und schon von dieser Seite wird der Schüler hinreichend in den Bruchverhältnissen geübt werden müssen. Folgendes Beyspiel mag als Beleg dienen:

Man soll aus dem dritten Quadrat ein Rechteck bilden, welches so groß ist als das dritte Quadrat, die Breite soll aber gleich seyn der Breite des zweyten Quadrats; es fragt sich, welches die Länge desselben seyn wird?

Antwort: 4 ½ mal die Seite des ersten Quadrats, oder, abgekürzt, die Quadratbreite.

Auflösung. Das dritte Quadrat enthält 9 Quadrate, die Breite des Rechtecks soll 2 Quadratbreiten haben; also kommen 2 Quadrate neben einander zu liegen; 2 sind in 9, 4 ½ mal enthalten, und müssen diesem zufolge 4 ½ mal eine solche Seite zur Länge erhalten.

Fr.: Man hat ein Rechteck, welches 2 Quadratbreiten und 7 Längen hat, oder welches 14 Quadrate enthält; nun soll man mit dem Umfang dieses Rechtecks ein Quadrat bilden; es fragt sich, wie viele Quadrate es enthalten werde?

Antwort 20 ¼.

Auflösung. Der Umfang des Rechtecks beträgt 18 Quadrat-Seiten; also kommen auf eine Seite des zu bildenden Quadrats 4 ½ solcher Theile oder Seiten; will man auf eine solche Seite aber ein Quadrat machen, so müssen 4 ½ mal so viele Quadrate übereinander gelegt werden, und 4 ½ mal 4 ½ Quadrat geben 20 ¼ Quadrate. Gut wird es seyn, wenn man die

Schüler dieses mit Quadraten wirklich ausführen läßt. Zu diesem Endzweck kann man das Quadrat nur in Quadrate und Rechtecke, die die Hälfte des Quadrats ausmachen, durch Theilungslinien zerlegen lassen.

Fr.: Man soll ein Quadrat in ein Rechteck verwandeln, welches so groß ist als das Quadrat; es fragt sich, auf welche Weise dieses gemacht werden könne?

Antwort: die Breite desselben kann $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ u. s. w. seyn, dann muß die Länge aber 2, 3, 4 u. s. w. seyn, oder die Breite kann $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{4}{5}$ tel u. s. w. seyn, und dann wird die Länge $1\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{3}$, $1\frac{1}{4}$ tel u. s. w. betragen.

Auflösung. Ist die Breite $\frac{1}{2}$, so kommt auf einmal die Länge nur $\frac{1}{2}$ Quadrat, und um ein ganzes Quadrat zu erhalten, muß man diese Länge 2 mal nehmen oder 2. So wird es mit $\frac{1}{3}$ teln, $\frac{1}{4}$ teln u. s. w. erläutert werden. Nimmt man aber $\frac{2}{3}$ der Breite an, so kommt auf eine Quadrat-Länge $\frac{2}{3}$ tel Quadrat, und $\frac{3}{3}$ tel sind $1\frac{1}{2}$ mal $\frac{2}{3}$ tel; also auch $1\frac{1}{2}$ lang. Dieses wird alles mit Linien wirklich ausgeführt werden müssen, bietet aber dem Schüler keine weiteren Schwierigkeiten mehr dar.

Aus einem Rechteck, dessen Breite 2 und dessen Länge 8 Quadratbreiten enthält, soll ein Quadrat gebildet werden, welches ihm gleich ist; es fragt sich, wie lang oder wie breit es werde?

Antwort: eine Seite wird 4 solcher Breiten oder Längen haben.

Würde man ein Rechteck, das statt 8 solcher Theile

9 hätte, angeben; so wäre der Schüler nicht mehr im Stande, ein Quadrat zu bilden, welches dem Rechteck gleich würde; indem dieses ein irrationelles Zahlverhältniß in sich faßt.

Auch diese Zahlverhältnisse müssen hier angeknüpft werden.

Bevor ich aber in dieser Richtung weiter schreite, werde ich das, was den rationellen Verhältnissen in den oben angegebenen Formen eigen ist, hier umständlich darlegen. Wie viel wird ein Quadrat enthalten, welches eins ist, wenn man seinem ganzen Umfang nach an jeder der 4 Seiten wieder ein Quadrat ansetzt und das hiedurch entstandene 12 Eck mit Quadraten zu einem Quadrat erhebt?

Antwort: 9 Quadrate.

So kann man den Schüler an die Länge und Breite eines Quadrats 2, 3, u. s. w. Quadrate setzen und wieder in ein Quadrat bilden lassen; auch kann man ihn auf diese Weise Rechtecke und Rechtecke und Quadrate bilden lassen; eben so kann man ihn Quadrate von allen 4 Seiten wegnehmen und den Rest wieder in Quadrate verwandeln lassen. Z. B. Vom 10ten Quadrat, oder von einem Quadrat, welches 100 Quadrate enthält, wird an jeder Seite eine Reihe Quadrate weggethan; es fragt sich, wie viel das übrig gebliebene Quadrat noch enthalte?

Antwort 64.

Wird dieses auch auf Rechtecke ausgedehnt; so wird der Schüler auch die diesfälligen Aufgaben mit eben der

Leichtigkeit lösen, wie er dieses beym Quadrat zu thun im Stande ist.

Aus einem Quadrat, welches 100 Quadrate enthält, sollen 2, 3, 4 u. s. w. gleich große Rechtecke gemacht werden, deren Breite 2 Quadratbreiten enthält; es fragt sich, wie viel die Länge jedesmal seyn werde?

Antwort: für 2 Rechtecke wird die Länge eines jeden 25 seyn; für 3 Rechtecke aber 16 ⅔ u. s. w. Umgekehrt 2, 3, u. s. w. Rechtecke in ein Quadrat zu verwandeln, ist aber nur bey Quadratzahlen möglich; bey jedem andern Zahlverhältniß kommt man in irrationelle Zahlen.

Statt in gleiche Rechtecke u. s. w., könnte man sie auch in ungleiche theilen, wovon das eine 2, 3, 4 mal so groß, oder um so viel größer oder kleiner wird als das andere u. s. w.; doch sind dieses alles nur Zahlbestimmungen, die auf dieser Stufe nichts Neues oder Wesentliches mehr darbieten, und deßwegen vollkommen übergangen werden dürfen.

Nachdem der Schüler eine hinreichende Kenntniß des Quadrats und des Rechteckes in den bezeichneten Richtungen sich erworben hat, kann diese Kenntniß auf das bürgerliche Leben, wie es in der Zahlenlehre geschehen ist, angewandt werden.

Dieser Gang wird auch hier beybehalten und einige der wesentlichen Reihenfolgen und Uebungen, deren Lösung sich auf das Quadrat und Rechteck gründet, werden in Kürze nur angeführt.

Die oben aufgestellten Reihenfolgen von Quadraten und Rechtecken müssen zu diesem Endzweck dem Schüler unter der Bedeutung irgend eines Maßes, als Klafter, Schuh, Zoll oder Linie zur Auffassung auf folgende Weise vorgeführt werden; z. B. Wenn die erste Linie einen Zoll vorstellt, die zweyte aber 2 Zoll, die dritte 3, und dieses so bis zu 10 fortsetzt und man auf jede dieser Linien ein Quadrat macht, wie viel Quadratzoll wird jedes Quadrat erhalten?

Eben so kann dieses mit den Rechtecken vorgenommen werden.

Stellen diese Linien aber Klafter oder Linien dar, so wird die nämliche Untersuchung unter dieser veränderten Benennung fortgesetzt werden.

Daß eine beliebige Linie und Fläche u. s. w. jedes Maß in einem verkleinerten Maßstab zu bezeichnen geeignet ist, soll jeder Lehrer seinem Schüler anschaulich zu machen im Stande seyn; besonders wenn im häuslichen Leben eine anschauliche praktische Vorbereitung statt gefunden hat, wie dieses in dem vorhergehenden Band in's Licht gesetzt worden ist. Ich darf diesfalls nur auf die Zahlenlehre verweisen. Die wirkliche Ausführung obiger Reihenfolge wäre folgende. Ich nehme an, die erste Linie bezeichne einen Zoll, die zweyte 2 u. s. w.

Zur Verdeutlichung derselben folgen hier einige einzelne Fragen.

Fr.: Wie viele Quadratzoll enthält das 10te Quadrat, oder wenn eine Linie 10 Zoll hat, wie viel Quadratzoll wird die Fläche auf derselben haben?

Wie viele Quadrat-Klafter wird das 10te Quadrat enthalten? Es wird angenommen, ein Klafter habe 6 Zolllängen, folglich 36 Quadratzoll; 36 ist in 100, 2 und $^{28}/_{36}$ mal enthalten, folglich wird es auch eben so viele Klafter ausmachen.

Welches Quadrat macht ein Quadratklafter? Welches mehr und welches weniger?

Was ist das erste, zweyte u. s. w. für ein Theil von einem Quadratschuh?

So wieder das zehnte, neunte u. s. w. von einem Schuh, oder wie viele Schuhe enthält ein jedes?

So wird hinwieder angenommen, jede dieser Linien bezeichne eine Linie, wovon 6 einen Zoll betragen, und die nämlichen Fragen werden dann auch auf diese ausgedehnt werden. Z. B. Wie viele Quadratlinien werden zu einem Quadratzoll erfordert?

Antwort 36.

Welche Quadrate machen keinen Quadratzoll aus?

Antwort: das erste, 2te, 3te, 4te und 5te. Welche aber machen mehr als einen Quadratzoll. Wie viel Quadratzoll macht das 10te Quadrat aus?

Das Gleiche kann auch mit den Klaftern vorgenommen werden; deren Ausführung ich aber dem Lehrer überlasse.

Angenommen, das Quadrat auf der ersten Linie bezeichne ein Klafter; es fragt sich, wie viele Quadratschuh, Quadratzoll und wie viel Quadratlinien es enthalte?

Antwort: 36 Quadratschuh 36 × 36 Quadratzoll und 36 × 36 × 36 Quadratlinien.

Die gleiche Frage stellt der Lehrer seinem Schüler auch über das zweyte Quadrat auf, und dieser wird finden, 2×2 Quadratklafter, 4 mal 36 Quadratschuhe, hernach 36 mal so viel Quadratzoll und endlich 36 mal noch so viele Quadratlinien.

Die wirkliche Berechnung hievon ist gar nicht nothwendig; besonders wenn der Schüler einmal weiß, wie viel das Quadratklafter von jeder dieser Eintheilungen Theile enthält.

Wie oft ist der Umfang der Quadratklafter so groß als der des Quadratschuhes, des Quadratzolls und endlich der Quadratlinie?

Noch einige Fragen über das Rechteck.

Wie viele Quadratschuhe wird ein Rechteck enthalten, das 2 Klafter breit und 3 lang ist?

Antwort: 6 Quadratklafter und 6 mal 36 Quadratschuhe.

Wie viele Klafter wird der Umfang eines solchen Rechtecks seyn?

Antwort: 10 Klafter oder 10 mal 6 Schuh.

Wie viel Linien im Umfang wird es erhalten?

Wie viel werden die Theilungslinien, die dieses Rechteck in Quadratklafter eintheilen, Schuhe, oder Zoll oder Linien enthalten?

Alle die Fragen, die gleich anfangs über das Quadrat und Rechteck aufgestellt worden sind, können auch hier als angewandte oder als benannte Zahlverhältnisse, die eine richtige Anschauung dieser Formen zum Hintergrund haben, noch in Kürze dem Schüler vorgeführt werden.

Die wirkliche Ausführung kann nach der im Anfang hiefür aufgestellten Norm statt finden.

Ich schreite zu den eigentlichen Anwendungsaufgaben, die auf diese Stufe gehören.

Man hat ein Stück Feld, welches ein Quadrat bildet, dessen Seite 4 Klafter, 3 Schuh, 4 Zoll und 1 Linie beträgt; es fragt sich, wie viele Quadratklafter u. s. w. dieses Feld enthalte? Oder wie viele Quadratlinien es in allem enthalte? Oder wie viele Zoll u. s. w.?

Um diese Aufgabe zu lösen, kann man das Ganze als eine Aufgabe, die für das Kopf- oder für das Zifferrechnen bestimmt ist, ansehen.

Für den ersten Fall genügt es, wenn der Schüler angibt, wie vielmal man die eine oder andere Zahl wiederholen müsse, ohne daß die Zahl jedesmal wirklich gesucht wird; denn die Zahlverhältnisse steigen bey diesen Aufgaben sehr bald zu einer Höhe, die nichts als mechanische Fertigkeiten und Gedächtnißkraft ansprechen würden, das wie ich früher in ein heiteres Licht zu setzen mich bemühte, nie als Hauptsache behandelt werden darf.

Wird diese Aufgabe aber als Uebung im Zifferrechnen gegeben; so mag sie dann auf folgende Weise ausgeführt werden: Die 4 Klafter, 3 Schuh, 4 Zoll und 1 Linie werden zuerst in Linien verwandelt; es gibt 27 Schuh; diese Schuh geben 162 Zoll und 4 dazu machen 166, endlich in Linien verwandelt machen es 996 und 1 Linie noch dazu gezählt, gibt 997 Linien für eine Seite von diesem Stück Feld.

Will man aber den Inhalt desselben finden; so muß man 997 mit 997 multiplizieren, und dieses gibt dann Quadratlinien. 36 Quadratlinien machen einen Quadratzoll; also muß diese erhaltene Summe mit 36 dividirt werden, die Quadratzolle noch einmal mit 36 dividirt, geben die Quadratschuhe, und endlich werden die Quadratschuhe mit 36 dividirt noch in Quadratklafter verwandelt. Auch diese und ähnliche Aufgaben können sehr mannigfaltig gelöst werden; als Beleg mag noch folgendes Beyspiel hier eine Stelle finden.

Der Schüler soll wissen, wie viele Quadratlinien zu einem Quadratklafter erfordert werden, und kann daher gleich mit dieser Summe das Ganze dividiren. Eben so weiß er, daß das Stück Feld 4 × 4 Quadratklafter enthält und an der Breite und an der Länge sich dann aber noch 3 Schuh 4 Zoll und 1 Linien befinden, folglich aber 2 Rechtecke auf die gewöhnliche Weise berechnet werden müssen. Faßt man sie aber als 2 gleich große Rechtecke in's Auge, so wird ein Quadrat, welches aus der Vereinigung der Länge und Breite dieser 2 Rechtecke entsteht, doppelt genommen und ist daher am Ende wieder abzuziehen.

So kann wieder ein Stück Feld berechnet werden, das ein Rechteck bildet, dessen Länge so und so viel Klafter, Schuh u. s. w. beträgt, und eben so die Breite.

Deßgleichen Flächen von Häusern, Wänden, von Zimmern, Böden und Decken, Gärten, Straßen, Gassen, Wegen, Brücken u. s. w. In wenig Worten, jede Fläche, die sich in Quadrate oder Rechtecke auflösen läßt.

So können die Bretter einer Tanne, ein großer Theil dessen, was der Schreiner, Weber u. s. w. ausführt, so wie das, was der Tuchhändler verkauft, dieser Berechnung unterworfen werden.

Sehr bildend für den Schüler wird es aber, wenn man ihn nicht nur anhaltet, dieses zu berechnen; sondern vorzüglich anleitet, diese Ausmessung auf die einfachste, leichteste und geschickteste Weise gleichzeitig auszuführen.

Ist der Schüler einmal so weit vorgerückt; so wird man sehr wohl thun, ihn öfters in Werkstätte, und an Orte zu führen, an denen er Gelegenheit finden wird, dieses praktisch ausgeführt vor sich zu sehen. Ist er reif und hiefür gehörig vorbereitet; so wird es nicht fehlen, was er nur einmal vor sich sieht, wird er auch sogleich nachzuahmen fähig werden.

Wichtig ist es, daß der Schüler die verschiedensten Anwendungen in der Wirklichkeit zu machen Gelegenheit findet, und diese Wichtigkeit wird durch die Darstellung, vermittelst der Zeichnungskunst unterstützt, noch sehr erhöht werden können; später werde ich bey der Kunstbildung diesen Gesichtspunkt noch mehr in's Licht setzen.

Die obigen Fragen und Betrachtungen können auch auf den Umfang dieser Gegenstände ausgedehnt werden; doch ist dieses weniger wesentlich und kann daher mit weniger Zeitaufwand behandelt werden.

Will man bey diesen Aufgaben als Uebung im Ziffernrechnen auch noch Brüche geben; so kann es ohne den Zweck zu verfehlen, geschehen; nothwendig ist es aber auf keinen Fall.

Wesentlich ist indeß folgende Frage.

Es hat Jemand ein Stück Feld, welches 10 Klafter, 4 Schuh breit, und 20 Klafter und 5 Schuh lang ist, dieses soll an ein andres, das ihm gleich ist, vertauscht werden, welches aber 15 Klafter und 2 Schuh breit ist; es fragt sich, wie lang es werde?

Auflösung. Es wird wieder auf obige Art der Inhalt des ersten Stücks Feld gesucht, und zwar hier in Quadratschuhen, hernach wird die Breite des zweyten Stücks in Schuhe verwandelt, und untersucht, wie oft diese Breite in dem Inhalt enthalten sey; eben so oft wird die Länge des zweyten Stücks einen Schuh betragen; denn wenn man die Anzahl der Schuh in die Breite, 1 mal in die Länge nimmt, so gibt es eben so viel Quadratschuhe als dasselbe breit ist.

Das Wesen dieser Aufgabe und ihrer Auflösung ist noch ausführlicher in der Verwandlung der Quadrate in Rechtecke oder der Rechtecke in andere ihm gleiche Rechtecke nachzusehen; besonders da, wo das Quadrat in jedes beliebige Rechteck verwandelt worden ist.

Statt gleich große Stücke Feld zu nehmen, kann man auch angeben, sie seyen ungleich, und sie stehen in diesem oder jenem Verhältniß zu einander; z. B. in ein Stück zu vertauschen, welches um die Hälfte, den Drittel u. s. w. größer würde, oder das doppelt so groß wäre u. s. w.

Alles dieses sind aber Zahlverhältnisse und kann in dem, was in der Zahlenlehre aufgestellt worden ist nachgesehen werden.

Ich habe mich diesfalls im Anfang umständlich erklärt, und gezeigt, daß ich dieses in gegenwärtiger Darlegung nicht mehr weiter zu berücksichtigen für nothwendig erachte.

Die Flächenverhältnisse von Tuch, Leinwand u. s. w. werden aber nicht durch Klafter, Schuhe, Zolle und Linien bestimmt, sondern durch den Stab oder die Elle und ihre Abtheilungen. Einerseits nehme ich an, der Schüler habe eine gründliche Anschauung von diesem Maaß und dessen Eintheilung, anderseits kann er, im Fall dieses nicht wäre, auf gleiche Weise zu deren Anschauungs-Erkenntniß geführt werden, wie dieses bey den Klaftern, Schuhen und Zöllen geschehen ist.

Noch ein paar Aufgaben hierüber mögen nicht als überflüssig angesehen werden.

Man bedarf zur Verfertigung von gewissen Kleidern 20 Stab Leinwand, die $\frac{7}{8}$ Stab breit ist, es fragt sich, wie viel Stab zu den gleichen Kleidern gebraucht werden, wenn sie $\frac{2}{3}$tel Stab breit ist?

Antwort. 26 $\frac{1}{4}$.

Auflösung. Das Stück Leinwand enthält 20 mal $\frac{7}{8}$tel Quadrat Stab, oder $\frac{140}{8}$; die Breite des zweyten Stücks ist $\frac{2}{3}$ Stab, also kommt auf einen Stab in die Länge nur $\frac{2}{3}$ Stab Fläche oder $\frac{2}{3}$ Quadrat-Stab; so oft also $\frac{2}{3}$ Stab in $\frac{140}{8}$ enthalten sind, so oft wird das zweyte Stück Leinwand einen Stab in die Länge erhalten. Drittel und 8tel vereinigen sich in den 24teln, $\frac{140}{8}$ sind gleich $\frac{420}{24}$, $\frac{2}{3}$ gleich $\frac{16}{24}$, und diese 16 sind in 420, 26 $\frac{1}{4}$ mal enthalten, also 26 $\frac{1}{4}$ Stab lang.

Auf eine zweyte Art gelöst. Das erste Stück Leinwand ist $\frac{7}{8}$ und das 2te $\frac{2}{3}$ breit, $\frac{7}{8}$ sind gleich $\frac{21}{24}$

und $^2/_3$ gleich $^{16}/_{24}$ oder das erste Stück $^{21}/_{24}$ und das zweyte $^{16}/_{24}$ Quadrat Stab, und so oft $^{21}/_{24}$ Quadrat Stab $^{16}/_{24}$ Quadrat Stab geben, so oft wird man auch die Anzahl Stabe des ersten Stücks Leinwand zu nehmen haben; 16 sind in 21 aber 1 und $^5/_{16}$tel mal enthalten, also auch $^{15}/_{16}$ mal 20 gleich 26 $^1/_4$. Ich habe hier nur einige der wesentlichern Auflösungen angeführt, da doch eine große Mannigfaltigkeit und Verschiedenheit gegeben werden könnte, um einerseits kurz und gedrängt diesen Gegenstand zu behandeln, und anderseits das nicht noch einmal zu wiederholen, was ich in der Zahllehre diesfalls dargestellt habe.

Alle Zahlverbindungen und Bestimmungen, die durch irgend ein reines Verhältniß ausgedrückt werden, dürfen bey diesen Aufgaben ganz wegbleiben; z. B. wie viele Stäbe würde man brauchen, wenn die Kleider, die man zu verfertigen wünscht, um die Hälfte mehr oder weniger forderten, oder wenn das Tuch oder die Leinwand um $^1/_{10}$ in der Wäsche eingehen (sich verkleinern) würde u. s. w.

In diesen Aufgaben hinwieder den Preis des Tuchs damit zu verbinden, gehört ganz der angewandten Zahlenlehre an, und darf hier keine Stelle erhalten. Das Weitere und Ausführlichere kann man diesfalls bey der Zahlenlehre nachsehen.

Dagegen gehören folgende Aufgaben noch hieher.

Durch ein Stück Feld, welches 360 Klafter lang ist, soll man das Recht zu einem Wege haben, der 410 Quadratklafter enthält; es fragt sich, wie breit er seyn könne?

Antwort. 1$^5/_{36}$ Klafter.

Auflösung.

Dieser Weg wird 360 Klafter lang werden, nimmt man für die Breite 1 Klafter, so erhält man für denselben 360 Quadratklafter; nun aber soll er 410 Quadratklafter enthalten, folglich so oft 360 in dieser Summe enthalten ist, eben so oft wird derselbe 1 Klafter breit werden, und dieses ist $1^{50}/_{360}$, gleich $1^{5}/_{36}$ mal enthalten. Wie die $^{5}/_{36}$ Klafter in Schuh, Zoll, Linien verwandelt werden können und verwandelt werden müssen, ist in der Zahlenlehre nachzusehen.

Man soll um einen Garten herum, der 10 Klafter breit und 15 lang ist, einen Weg machen, welcher 4 Schuh breit ist; es fragt sich, wie viel Quadratschuhe derselbe einnehmen werde?

Antwort. 1136 Quadratschuhe.

Auflösung. Die Breite des Gartens enthält 10 Klafter oder 60 Schuh, diese Breite ist auch die Länge des Wegs um den Garten herum; also enthält derselbe 60 mal 4 Quadratschuhe, gleich 240, und der Weg auf der andern Seite der Breite enthält eben so viel; die Länge hingegen ist 15 Klafter oder 90 Schuhe; diese Länge bildet auch die Länge Wegs, und der Flächeninhalt desselben wird 90 mal 4 Quadratschuhe, oder 360 seyn.

Der Weg der Breite des Gartens dient, so breit er ist, auch für die Länge des Wegs; also fallen in allem in jedem Eck des Gartens 4 mal 4 Quadratschuhe weg, also:

$$
\begin{array}{lll}
240, & 2 \text{ mal} & = 480 \\
360, & 2 \times & = \underline{720} \\
 & & \quad 1200
\end{array}
$$

hievon werden 4 mal 4 oder 16 für jedes Eck abgezogen, giebt 1136 Quadratschuhe.

So kann man Aufgaben bilden, in denen sich die Wege durchkreuzen, besonders in Gärten, Gartenbeeten 2c.; auch diese werden ganz auf obige Art gelöst; denn, wie 2 Wege sich einander durchkreuzen und man beyde auf obige Weise berechnet; so ist die Stelle, an der die Wege durch einander gehen, zweymal wiederholt worden, während sie nur einmal genommen werden darf. Dieses nach Bedürfniß weiter auszuführen, wird gewiß kein Lehrer irgend einen Anstand finden.

Einen Acker, der 30 Klafter breit und 50 lang ist, möchte man so mit Bäumen bepflanzen, die immer ein Klafter von einander entfernt, und eben so weit von den Grenzen zu stehen kommen; es fragt sich, wie viele Bäume hiezu erfordert werden?

Antwort. 1421 Bäume.

Auflösung. Die Breite des Feldes ist 30 Klafter, um ein Klafter Zwischenraum erfordert es zuerst 2 Punkte, und um 2 Zwischenräume 3 Punkte und also, um die 30 Klafter Zwischenräume von einem Klafter zu bilden, giebt es 31 Punkte, an die Bäume gesetzt werden müssen; weil sie aber noch ein Klafter weit von der Grenze des Feldes entfernt seyn sollen, so fallen 2 Bäume weg, also in allem nur 29; da es aber 50 Klafter breit ist, so würde man 51 dieser Bäume untereinander setzen können; sie müssen aber auch wieder 1 Klafter an 2 Seiten von der Grenze des Feldes entfernt bleiben, also nur 49 nach der

Länge und 29 nach der Breite; folglich in allem 29 mal 49 oder 1421 Bäume.

Statt Klafter können auch Klafter und Schuhe, oder Schuh und Zoll, oder Klafter, Schuh, Zoll und Linien vereinigt und ganz auf die gleiche Weise gelöst werden.

So wie das Quadrat einer Anwendung in dem bürgerlichen und Berufsleben fähig ist, so kann es als Anschauungs-Typus für die Erhebung aller Zahlverhältnisse in's Quadrat und der Ausziehung ihrer Wurzel dienen. Schon der Namen, den man diesen Operationen giebt, zeugt, daß bey der ersten Begründung und Lösung ähnlicher Reihenfolgen und Aufgaben diese Form benützt worden ist, und wie man bey der wirklichen Ausführung sehen wird, so kann es auch Niemand entgehen, wie sehr diese Formen geeignet sind, das Wesen der Auflösung einer jeden Aufgabe auf eine so anschauliche Weise darzustellen, daß über deren Richtigkeit und Wichtigkeit für den diesfälligen Endzweck gar kein Zweifel mehr obwalten kann. Schon aus der Zahlenlehre kennt der Schüler die Quadratzahlen; hier soll er sie aber noch als Wurzel und Quadrate in die Augen fassen lernen, und dieß kann auf folgende Weise an das, was in der Zahlenlehre aufgestellt worden ist, angeknüpft werden. Die gleich anfangs aufgestellte Reihe Quadrate kann auch hiefür wieder benutzt werden. Z. B.

Wenn man auf eine Linie, die 1, 2, 3, 4 ꝛc. mal so lang ist, als die erste, ein Quadrat macht, wie oft wird es so groß seyn, als das erste Quadrat?

Der Schüler wird finden, das erste Quadrat werde

1, das zweyte 4, das dritte 9 und das 10te hundert Quadrate, oder es werde wieder die nämlichen Zahlen geben, die er unter dem Namen Quadratzahlen schon kennt.

Die Linie, auf welcher das Quadrat jedesmal gebildet wird, nennt man die Wurzel desselben.

Welches ist die Wurzel von 1, 4, 9 rc. bis 100. Von dem Quadrat 1 ist Wurzel 1, die Wurzel vom Quadrat 4 ist 2, die von 9 ist 3, von 16, 4, von 25, 5, von 36, 6, von 49, 7, von 64, 8, von 81, 9, und von 100 endlich ist die Quadratwurzel 10.

Gestützt auf diese Ansicht und Kenntniß des Quadrats und seiner Wurzel läßt der Lehrer die Schüler angeben, welche Zahlen keine Quadratzahlen seyen, und als solche auch keine Wurzel von ihnen angeben können. Sie werden die Zahl 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12 u. s. w. nennen.

Auf welche Weise diese Zahlen in Quadratzahlen zerlegt werden können, weiß der Schüler schon aus der Zahlenlehre, folglich weiß er auch, wie ihre Wurzeln gefunden werden. Z. B. 2 kann in 1 und 1 als Quadratzahlen zerlegt werden, und ihre Wurzeln sind 1 und 1, desgleichen mit 3, 5 rc. In 5 sind 4 und 1, oder 5 eins Quadratzahlen und die Wurzeln werden 2 und 1, oder auch 5 mal 1.

Eine weitere Ausführung in Reihenfolgen wird ganz entbehrlich. Will man dem Schüler noch einzeine Fragen hierüber geben, so soll jeder Lehrer im Stande seyn, diese mit der größten Leichtigkeit auszuführen.

Um die Quadratwurzel von jeder Zahl zu finden, wird es nicht ganz entbehrlich seyn, diese Uebung auch auf die Brüche und auf die Ganzen und Brüche auszudehnen. Die Reihen folgen hiefür; auf die Hälfte, Drittel, Viertel einer Linie ein Quadrat zu machen und zu untersuchen, was es jedesmal für einen Theil von dem Quadrat auf der ganzen Linie werde.

Der Schüler wird für die Hälfte $^1/_4$, für das Quadrat auf den Drittel $^1/_9$, und für das auf den Zehntel der Linie $^1/_{100}$ erhalten.

Bey $^2/_3$, $^3/_4$, $^4/_5$ ꝛc. aber $^4/_9$, $^9/_{16}$ und $^{16}/_{25}$ finden.

Die Auflösung von $^4/_5$ wäre folgende: Macht man auf eine Linie, die $^4/_5$ ist, ein Quadrat, so erhält man für das Quadrat auf den 4 Theilen 4 mal 4 oder 16 Quadrate, wie man auf der von 5 Theilen 25 solcher Quadrate findet, oder $^{16}/_{25}$.

Auf eine andere Art gelöst.

$^4/_5$ sind zu einem Ganzen 4mal der fünfte Theil; macht man auf die 4 Theile ein Quadrat, so erhält man 16 Quadrate, und wird auf das Ganze, oder die 5 Theile ebenfalls eins gemacht, so erhält man 25 oder das erste Quadrat wird $^{16}/_{25}$ vom zweyten.

Ein Paar einzelne Fragen hierüber.

Wie viel giebt $^7/_8$ in's Quadrat erhoben.

Antwort. $^{49}/_{64}$.

Und wie viel ist hinwieder die Quadratwurzel von $^{49}/_{64}$.

Antwort. $^7/_8$.

Wie viel ist die Quadratwurzel von einem Viereck?

Antwort. Ein halbes.

Auflösung. Die Quadratwurzel von 1 ist 1, die von 4 aber ist 2; folglich ist die Quadratwurzel von 1 zu der von 4, wie ein Theil zu 2 Theile, oder in einem Bruch ausgedrückt $\frac{1}{2}$.

Wie viel ist die Quadratwurzel von $\frac{16}{25}$, $\frac{9}{64}$, $\frac{81}{100}$ ꝛc.

Auf diese Art wird der Schüler die Wurzel von jedem Bruch mit der größten Leichtigkeit finden. Auch kann man ihn auf dieser Stufe auf die irrationellen Brüche, und zwar auf folgende Weise, aufmerksam machen, z. B.

Wie viel ist Quadratwurzel von $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$ ꝛc?

Die Wurzel von 1 ist 1, die von 2 aber geht nicht rein auf, folglich hat $\frac{1}{2}$ keine reine Quadratwurzel.

Diesem fügt der Lehrer bey, daß er für einmal alle die Zahlen übergehen wolle, die keine reine Wurzel haben.

Erhält $\frac{7}{8}$ eine reine Quadratwurzel?

Antwort. Nein.

Haben die Brüche der Sechszehntel alle reine Quadratwurzeln?

Welche Wurzeln sind rein und welche sind nicht rein?

Antwort. Rein sind nur $\frac{1}{16}$, $\frac{4}{16}$, $\frac{9}{16}$ und $\frac{16}{16}$.

Die gleiche Reihenfolge kann auch bey Ganzen und in Brüchen eben so durchgeführt werden. Z. B.

Man soll auf eine Linie, die $1\frac{1}{2}$ enthaltet, ein Quadrat machen; es fragt sich, wie viel dasselbe enthalte?

Antwort. $2\frac{1}{4}$.

Auflösung. $1\frac{1}{2}$ machen $\frac{3}{2}$, 3 in's Quadrat erhoben giebt 9, und 2 giebt 4, also ist das Ganze $\frac{9}{4}$ oder $2\frac{1}{4}$.

Auf eine andere Art gelöst:

(S. Zchg. 85.) Eins in's Quadrat erhoben giebt 1; nun soll zu diesem Ganzen noch ein Halbes kommen; folglich muß so viel an der Breite und an der Länge angesetzt werden, und da wo sich diese dadurch zu bildenden Rechtecke auf der Ecke vereinigen, wird noch $\frac{1}{4}$ des ganzen Quadrats erfordert; in allem findet sich also 1, $\times$ $\frac{1}{2}$ $\times$ $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{4}$, oder $2\frac{1}{4}$.

Diese 2 Auflösungen sind die wesentlichsten, die gemacht werden können. Gestützt auf dieses, giebt man dem Schüler $1\frac{1}{3}$, $1\frac{1}{4}$, $2\frac{2}{3}$, $3\frac{3}{4}$ ꝛc. in's Quadrat zu erheben.

Er würde nach der zweyten Auflösung für 1, das Quadrat a, von 1, für 3 jedes der 2 Rechtecke b, und für c endlich 1 Quadrat von $\frac{1}{9}$ erhalten, zusammen $1\frac{7}{9}$ Quadrate.

Werden aber $3\frac{3}{4}$ in's Quadrat erhoben, so wird man für 3 das Quadrat a von 9, und die 2 Rechtecke jedes von 3 mal $\frac{3}{4}$ oder $\frac{9}{4}$ Quadrate; endlich noch das Quadrat c von $\frac{9}{16}$ erhalten, zusammen 9; $\frac{9}{4}$ 2mal genommen, und noch $\frac{9}{16}$ oder in allem $14\frac{1}{16}$.

Eine weitere Ausführung hievon ist ganz überflüssig.

Wie viel ist die Quadratwurzel von $2\frac{1}{4}$.

Antwort. $1\frac{1}{2}$.

Auflösung. $2\frac{1}{4}$ sind $\frac{9}{4}$, die Quadratwurzel von 9 ist 3, die von 4 aber 2; wenn also ein Quadrat $\frac{9}{4}$ von einem andern ist, so wird die Wurzel des ersten Quadrats $\frac{3}{2}$ des zweyten werden; $\frac{3}{2}$ sind aber $1\frac{1}{2}$.

Auch kann diese Frage nach Zeichnung 85 gelöst werden, indem die Wurzel von 1, 1 ist, und noch 1¼ bleibt, um mit diesem Rest von 1¼ wieder ein Quadrat mit dem ersten zu bilden, muß an die Breite und Länge dieses Quadrats angesetzt werden. Dieses giebt auf eine Seite gerade ½, und auf den Ecken oder für c bedarf man noch ¼ um ein Quadrat zu erhalten. Also auch auf diese Art gelöst, wird die Wurzel 1½.

Eben so kann man dem Schüler Ganze und Brüche geben, die keine reine Wurzel in sich fassen; wie z. B. welches ist die Quadratwurzel von 1⅓?

1⅓ machen ⁴⁄₃, die Quadratwurzel von 4 ist 2, 3 aber enthält keine neue Wurzel, also kann man die Quadratwurzel von diesem Bruch nicht rein finden.

So wie der Schüler eine vollendete Kenntniß der Erhebung des Quadrats und der Ausziehung der Wurzeln bis zu 100 sowohl in den ganzen Zahlen als in Brüchen sich eigen gemacht haben wird, so darf auf folgende Weise zu höhern Zahlen geschritten werden.

Nur Zahlen in's Quadrat zu erheben, sowohl Ganze und Brüche, als nur Brüche, ist nichts weiteres, als eine gewöhnliche Multiplikation der Zahl mit sich selbst. Die weitern Gründe und Auflösungen sind aus den obigen Beyspielen zu ersehen. Verwickelter und schwieriger ist aber die Quadratwurzel aus höhern Zahlen mit eben der Leichtigkeit zu finden. Auf die Anschauung gegründet, daß die Quadratwurzel von 100 10 sey, soll nun die Quadratwurzel von 121 gesucht werden.

Um dieses zu finden, kann Zeichnung 85. dienen. Das Quadrat a soll die 100 Quadrate in sich fassen, also fehlen ihm bis zu 121 noch 21 Quadrate, die nun, um wieder ein Quadrat zu erhalten, an die Länge und Breite des Quadrats von 100 angesetzt werden müssen. An einer Seite dieses Quadrats liegen 10, und an den 2 Seiten 20, und 21 können an 20 nur einmal angesetzt werden, also enthält jedes Rechteck b noch 10, und um das Quadrat zu schließen, erfordert es für c noch das Quadrat von 1, denn die Rechtecke b sind jedes nur 1 in der Breite; diesem zufolge wird die Quadratwurzel von 121 zuerst 10, dann noch 1 hinzu, folglich gerade 11 seyn.

Die Quadratwurzel von 144 wäre diesem nach für 100 zuerst 10; die 44, die noch bleiben, müssen auch an beyden Seiten des Quadrats angesetzt werden; da nun eine Seite dieses Quadrats 10 enthält, so erfordert es für beyde Seiten 2 mal 10 oder 20, und 20 sind in 44 2mal enthalten; also bekommt jedes Rechteck b 20, und für c erfordert es noch 4, da die Breite dieser beyden Rechtecke 2 ist; 100, 2 mal 20 und 2 mal 2 machen 144; die Quadratwurzel wird diesem zufolge 10 mehr 2 oder 12 werden.

Auf diese Weise wird der Schüler mit eben der Leichtigkeit finden, daß die Quadratwurzel von 196, 13, von 196, 14, von 225, 15 seye. Von 400 ist sie 20.

Die Quadratwurzel von 400 wird aber für den vorhabenden Endzweck noch auf folgende Art gelöst.

Die Quadratwurzel von einem Einer ist ein Einer, von 4 Einer 2 Einer, die von 100 aber ist ein Zehner, und von 400 wird sie aus den nämlichen Gründen 2 Zehner werden. Schreitet man auf diese Weise fort, so wird man finden, daß die Quadratwurzel von 9 Hunderter 3 Zehner, die von 16 Hunderter 4 und die von 100 Hundertern 10 Zehner oder 1 Hunderter seye. Will man dieses dem Schüler noch anschaulicher machen, so kann es also geschehen.

Für 400 läßt man ihn ein Quadrat machen, das aus 4 gleichen Quadraten zusammen gesetzt ist, man nimmt an, jede Seite eines solchen Quadrats seye wieder in 10 gleiche Theile getheilt, und das Quadrat dadurch in 100 Quadrate, und das ganze Quadrat, welches 4 solcher Quadrate enthält, wird 400 ausmachen. Eine Seite desselben wird dann 20 oder 2 Zehner seyn. Führt der Schüler dieses noch mit 2 oder 3 Quadraten so aus, so wird er mit eben der Leichtigkeit die Zehner zu finden im Stande seyn, wie er früher die Einer nur durch die Anschauung anzugeben wußte. Um ihm auch dieses recht anschaulich zu machen, mögen folgende Aufgaben nicht ganz entbehrlich seyn.

Ist die Quadratwurzel von 5 Hunderter eine reine Anzahl Zehner?

Antwort. Nein.

Von welcher Anzahl Hunderter kann man die Quadratwurzel in Zehnern rein nehmen?

Antwort. Von 1, 4, 9 ꝛc. bis 100 Hunderter kann man dieses rein in Zehnern finden.

Von welcher Anzahl Hunderter kann man das aber in Zehnern nicht rein finden.

Antwort. Von 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10 ꝛc. Hundertern kann dieses nicht rein geschehen.

Kann man die Quadratwurzel in Zehner rein von 8100 finden?

Antwort. Ja; denn 8 Tausend und 1 Hundert sind 81 Hunderter, und die Quadratwurzel von 81 Hundertern ist 9 Zehner.

Wird man die Quadratwurzel von 1 Tausender rein in Zehnern finden?

Antwort. Nein; denn 1 Tausender macht 10 Hunderter, und die Quadratwurzel von 10 ist nicht rein; folglich ist sie es auch nicht von 10 Hunderter.

Gestützt auf diese Fragen läßt man den Schüler untersuchen, wie viele Zehner und hernach wie viele Einer die Quadratwurzel von 5 Hunderter werde.

Die Quadratwurzel von 4 Hundertern ist 2 Zehner und bleibt zu den 5 Hundertern noch ein Hunderter, dieser Rest muß nach Zeichnung 85 in 2 Rechtecken an das Quadrat a angesetzt werden. Eine Seite davon enthält aber 2 Zehner oder 20, und einmal anzusetzen, wird man für die Breite und Länge des Quadrats 40 Quadrat bedürfen, 40 sind in 100 2mal enthalten, für das Quadrat c werden noch 4 Quadrate erfordert; 2 mal 40 und 4 gleich 84, bis zu 100 bleiben noch 16 Quadrate; also ist die Quadratwurzel von 500 zuerst 2 Zehner, hernach 2 Einer und noch 16 Rest.

Auf diese Weise läßt man den Schüler die Quadratwurzel von den verschiedenen Zahlen, die keine reine Anzahl Zehner als Wurzel haben, ausziehen, und setzt dieses so lang fort, bis derselbe zu 10 Zehnern kommt. 10 Zehner werden aber als ein Hunderter oder als die Quadrat=

wurzel von einem Zehntausender auf die gleiche Weise behandelt, wie es bey den Zehnern geschehen ist.

Diesem zufolge wird der Schüler finden, daß di Quadratwurzel von 4 Zehntausendern 2 Hunderter, vo 9 Zehntausendern 3, von 16, 4, von 25, 5 ꝛc. Hunderte seye. Von 100 Zehntausendern wird die Wurzel endlic 10 Hunderter, oder 1 Tausender werden.

Auf diese Kenntniß des Quadrats begründet, läß man dann den Schüler untersuchen, von welcher Anzah Zehntausender keine reine Quadratwurzel in Hunderte gefunden werden könne.

Er wird finden, von 2, 3, 5, 6 ꝛc. und von 99 Zehn tausendern könne die Wurzel in Hunderter nicht rein ge funden werden.

Als Beleg und weitere Uebung mögen ihm auch noc ein paar Aufgaben gegeben werden, z. B.

Der Schüler soll sehen, wie viel die Quadratwurz von 8 Zehntausender, Hunderter, hernach der Rest noc Zehner, und endlich der zweyte Rest noch Einer mache werde.

Er wird finden, die Quadratwurzel von 8 Zehnta sendern seye nach früherer Auflösung von den 4 Zehnta sendern 2 Hunderter, und bleiben noch 4 Zehntausende indem 2 Hunderter in's Quadrat erheben, nur 4 Zehnta sender machen. Diese 4 Zehntausender werden nach de gewöhnlichen Behandlung mit Ziffer zuerst als Zehner a gesetzt werden. (Zchg. 85.) Das Quadrat a soll 4 Zehn tausender vorstellen. An einer Seite des Quadrats li gen demnach 2 Hunderter und an der Länge und Breit usammen 4 Hunderter; um also nur einmal anzusetzen, werden schon 400 Quadrate erfordert, und um ein Zehnermal dieses anzusetzen, 10 mal 4 Hunderter oder 4 Tausender, und 4 Tausender sind in 4 Zehntausender 10mal enthalten, es bleibt aber in diesem Fall für das Quadrat c nichts mehr. Es darf daher nur 8 Zehnermal angesetzt werden; die 2 Rechtecke b zusammen geben also 8 mal 4 Tausend oder 32000 Quadrate, weil die Breite eines solchen Rechtecks 8 Zehner beträgt; so wird das Quadrat c 8 Zehner in's Quadrat erhoben, oder 64 Hunderter geben; mit den obigen 32000 giebt es 38400, und dieses von 4 Zehntausendern abgezogen, bleiben noch 1600 Quadrate, die jetzt noch als Einer auf die gleiche Weise an dieses so eben gefundene Quadrat angesetzt werden müssen. Das Quadrat a kann für diesen Endzweck als ein Quadrat angesehen werden, welches zuerst 4 Zehntausender enthält, hernach noch 38400, oder deren Wurzel 2 Hunderter und 8 Zehner oder 280 betragen wird. Soll wieder auf obige Art an die zwey Seiten angesetzt werden, so wird nur durch die einmalige Ansetzung 560 Quadrate erfordert, und dieses ist in 1600 Quadraten nur 2mal enthalten, also werden die 2 Rechtecke b 2 mal 560 gleich 1120 Quadrate in sich fassen, und auf den Ecken für das Quadrat c werden noch 4 Quadrate erfordert. 1120 und 4 machen 1124 und dieses von 1600 abgezogen, bleibt noch 476; folglich ist die Quadratwurzel von 8 Zehntausender 282, und bleibt noch ein Rest von 476.

Diese Norm ist auf jede Zahl, deren Wurzel Hunderter betragen wird, ganz anwendbar, und kann für alle

Zahlen, die unter 100 Zehntausendern sind, ohne die geringste Abänderung, benützt werden. Dieses also noch weiter ausführen zu wollen, wäre ganz unnöthig.

Die Quadratwurzel von 100 Zehntausendern oder von einer Million wäre 10 Hunderter oder 1 Tausender; von 4 Millionen aus den nämlichen Gründen, die oben angegeben wurden, aber 2 Tausender; von 81 Millionen 9 Zehntausender; von 100 Millionen aber 10 Tausender, oder 1 Zehntausender. So kann dieses wieder mit den hundert Millionen fortgesetzt werden. Doch zu sehr hohen Zahlen dieses ausdehnen zu wollen, wird nicht mehr nothwendig; besonders wenn der Schüler die so eben angegebenen Verhältnisse einmal richtig wird aufgefaßt haben.

Aber soll die Wurzel wirklich bis zu den Millionen nach dieser Weise ausgezogen werden? Ich antworte: die Norm, die bey den Zehntausendern angegeben worden ist, kann leicht auch bey den Millionen benutzt werden; besonders, wenn die Ziffer so als Erinnerungsmittel angewendet und benutzt werden, wie ich beym Kopfrechnen ausführlich erörterte. Aber die Quadratwurzel von Millionen auch als Kopfrechnungsübung zu suchen, soll die Kräfte eines gut geführten Schülers nicht übersteigen. Weil aber in hohen Zahlen nicht leicht Uebungen statt finden dürfen, die dem Schüler etwas Wichtiges deutlich zu machen bestimmt sind, so darf hiezu nicht zu leicht die Zuflucht genommen werden; besonders da die höhern Zahlenverhältnisse öfters sehr verführerisch für Lehrer und Schüler sind. —

Um die Kraft des Letztern zu prüfen, mag man sich mit ein paar Beyspielen begnügen. Wird der Schüler aber Mühe haben, die verschiedenen Operationen in dem Kopf vorzunehmen, und die Zahlverhältnisse zugleich behalten zu können, so erlaubt der Lehrer für das Letztere die Ziffer als Erinnerungsmittel zu gebrauchen.

Will man den Schüler untersuchen lassen, ob er richtig gerechnet habe, so wird nur die gefundene Zahl als Wurzel in's Quadrat erhoben, und der Rest dazu gezählt; welches die erste und ursprüngliche Zahl geben wird, wenn richtig gerechnet worden ist. — Die Gründe, auf denen dieses ruht, sind in obigen Aufgaben und Auflösungen leicht von jedem Schüler nachzuweisen. Eben so, wie von den ganzen Zahlen die Quadratwurzeln gesucht und gefunden wurden, so ist dieses auch auf die Brüche anwendbar; z. B.

Man soll untersuchen, wie viel die Quadratwurzel von $^1/_2$ sey.

Weil diese nicht rein aufgeht, so wendet man die Annäherungen, auf das Decimalsystem zurückgeführt, an.

Man läßt den Schüler $^1/_2$ in Hundertstel verwandeln. $^1/_2$ gleich $^{50}/_{100}$, die Quadratwurzel von 100 ist 10, die von 50 aber 7, und es bleibt noch 1; also ist die Quadratwurzel von $^1/_2$ oder $^{50}/_{100}$ gleich 7, und es bleibt noch $^1/_{100}$ eines Quadrats Rest.

Sollte man untersuchen wollen, wie viel 100tel statt Zehntel die Quadratwurzel von $^1/_2$ wäre, so müßte das $^1/_2$ statt in 100 in 10000 Theile eingetheilt werden. $^1/_2$ ist gleich $^{500}/_{10000}$, die Quadratwurzel von 10000 ist 100, und die von 500 ist 50 und bleiben noch $^{100}/_{10000}$; folglich ist die Quadratwurzel davon $^{50}/_{100}$ und bleiben noch $^{100}/_{10000}$.

Auf die nämliche Weise kann die Wurzel bis zu Tausendsteln fortgesetzt werden. Auch mit Brüchen, die nicht einmal rein in Hunderteln oder Zehntausendteln enthalten sind, kann ganz das Gleiche vorgenommen werden. Z. B.

Wie viel ist die Quadratwurzel von $^1/_3$ in Hundertel?

Um dieses zu lösen, verwandelt man $^1/_3$ in Hundertel, dieß macht $33^1/_3$ Hundertel. Die Quadratwurzel von $31^1/_3$ ist 5 und bleiben noch $8^1/_3$; die Wurzel von 100 ist 10; folglich ist die Quadratwurzel von $^1/_3$, $^5/_{10}$ und bleiben noch $8^1/_3$ Hundertel.

Würden $^2/_3$ angegeben, so hätte man $66^2/_3$ 100, und die Wurzel davon wäre $^8/_{10}$ und bleiben noch $2^2/_3$ 100tel. So kann jeder Bruch in Hundertel verwandelt werden, und die Wurzel davon wird in einem solchen Fall dann Zehntel. Sollte man sie aber noch mehr annähernd suchen, so müßte man die Brüche nur in 10000tel verwandeln, und im Fall diese Annäherung noch nicht genügte, so müßte man sie in 1000000 verwandeln. Für den ersten Fall würde die Wurzel 10tel, für den zweyten 100tel, für den dritten aber 1000tel geben.

Die Ausziehung der Wurzel geschieht aber ebenso, wie wenn es Ganze wären, muß aber jedoch jedesmal aus dem Nenner und Zähler des Bruches gleichzeitig gezogen werden; dann giebt die Wurzel des Nenners wieder den Nenner, die des Zählers den Zähler, und der Rest ist für den 1sten Fall 100tel, für den 3ten 1,000,000tel.

Sollte

Sollte man hier aber die Bemerkung machen, ob dann jeder Bruch nur durch das Decimalsystem annährend gefunden, oder ob die Quadratwurzel auch in andere Brüche eingetheilt annähernd bestimmt werden könne, so dient hierauf folgendes als Antwort: es kann jeder Bruch mit eben der Leichtigkeit in jeden andern verwandelt und annähernd die Wurzel gefunden werden. Z. B. von $\frac{1}{3}$ soll die Quadratwurzel in Achtel gesucht werden. — Das Quadrat müßte in diesem Fall in 64 statt in 100 Theile eingetheilt werden. $\frac{1}{3}$ erhält $21\frac{1}{3}$ Vierundsechzigstel; die Quadratwurzel von $41\frac{1}{3}$ ist 4, und bleibt $5\frac{1}{3}$ 64tel; und die Wurzel von 64 ist 8; also wird die Quadratwurzel von $\frac{1}{3} = \frac{4}{8}$ seyn und $5\frac{1}{3}$ 64 Rest bleiben. Würde man die Quadratwurzel in 9teln suchen, so müßte das Quadrat in 81 Theile eingetheilt werden. Daß man auch in diesen Annäherungen so weit als in dem Decimalbruch gehen kann, versteht sich von selbst; jedoch wird man immer besser thun, bey dem Decimalsystem zu bleiben. Ich habe diese Beyspiele nur angeführt, um dem Lehrer vielseitigern Stoff zur Entwicklung der Geistesanlagen seiner Schüler in dieser Schrift niederzulegen. Zu untersuchen, wie viel die Quadratwurzel von $1\frac{1}{2}$ Ganze und 10tel werde, verfährt man wie bey den einfachen Brüchen. Auch kann man zuerst die Quadratwurzel von dem Ganzen nehmen, giebt eins; will man den Rest noch in 10tel annähernd erhalten, so wird derselbe in 100tel eingetheilt; $\frac{1}{2}$ ist gleich $\frac{50}{100}$, diese müssen an das 1ste Quadrat angesetzt werden.

An Zeichnung 85 soll A eins vorstellen. Wenn das Quadrat in 100 Theile eingetheilt ist, so wird die Seite

10, an der Länge und Breite liegen 2 mal 10 gleich 20, und 20 sind in 50 2mal enthalten, also werden die 2 Rechtecke 64 machen und für C werden in diesem Fall noch 5 erfordert; in allem 44, von 50 abgezogen, bleiben noch $^{6}/_{100}$tel, die Wurzel ist also $1^{2}/_{10}$ und bleiben noch $^{6}/_{100}$ Rest. Wäre die Wurzel statt in 10tel, in 100tel gefordert worden, so hätte das Halbe statt in $^{50}/_{100}$ in $^{500}/_{10000}$tel verwandelt werden müssen. Die Auflösung ist der obigen auch in dieser Aufgabe gleich. Die Probe wird wieder wie bey den ganzen Zahlen gemacht, und darf höchstens dann und wann zur Abwechslung statt finden. Auf keinen Fall darf viel Zeit bey der Quadratwurzel auf die mechanische Ausführung verwandt werden, denn auch hier kommt alles darauf an, eine richtige Anschauung und richtige Begriffe von dem Quadrat und seiner Wurzel zu erhalten, und dieses ist das Wesentlichste, welches hiemit erzielt werden soll.

Weil aber mancher die Regel, unter der die Wurzel jeder Zahl gefunden werden kann, zu kennen wünscht, so werde ich auch diese in Kürze zu geben nicht außer dem Zweck dieser Schrift ansehen. Von 296,484 soll die Quadratwurzel gesucht werden.

Aus den obigen Auflösungen weiß der Schüler schon, daß die Quadratwurzel von Zehentausender Hunderter giebt; um dieses aber unter eine allgemeine Regel zu bringen, wird auf folgende Weise verfahren: die 2 ersten Stellen rechts jeder Zifferreihe bezeichnen immer weniger als 100 Einer, also ist die Wurzel davon immer nur Einer, die 2ten zwey Ziffer stellen aber immer wieder weniger als 100 Hunderter dar, und die Wurzel ist deswegen auch immer weniger, als 10 Zehner; eben so stellen die 3ten zwey Ziffer weniger, als 100 Zehentausender dar; die Wurzel wird deswegen immer auch weniger, als 10 Hunderter seyn. Aus diesem geht endlich hervor, daß die 2 ersten Stellen rechts einer Zifferreihe nur Einer, die 2ten zwey Zehner, die 3ten zwey Hunderter, die 4ten zwey Tausender u. s. w. in der Wurzel geben werden.

Wäre aber die Zifferreihe ungerad, so würde dieses in der Wurzel nichts ändern. Um die Quadratwurzel von obiger Zahl zu suchen, läßt man den Schüler die 3ten zwey Ziffer zusammen nehmen und sagt, dieses gebe aus den Gründen, die so eben angeführt sind, Hunderter, und weil es 29 Zehentausender sind, so wird dieselbe 5 Hunderter. Diese gefundenen 5 Hunderter müssen also in's Quadrat erhoben werden, giebt 25 Zehentausender, von 29 abgezogen bleibt 4 Zehentausender. Die folgende Stelle wird in dem Quadrat die Hunderter geben, oder 64 Hunderter und mit den oben gebliebenen 4 Zehentausendern giebt es 464 Hunderter, oder als Regel setzt man folgende 2 Ziffer zu dem Rest, und bildet das neue Quadrat der Hunderter und der Wurzel als Zehner, weil immer an 2 Seiten des ersten gefundenen oder ursprünglichen Quadrats angesetzt werden muß, so wird die gefundene Wurzel verdoppelt werden. Hier ist sie 5, und dieses 2mal genommen giebt 10, weil aber die jetzt zu suchende Quadratwurzel statt Hunderter Zehner geben soll, so wird durch Ansetzung einer Nulle die Verwandlung gemacht werden können; also muß nicht nur die vorhergehende Wurzel verdoppelt, sondern an diese Verdoppelung noch eine Nulle hinzugefügt werden. Dieses giebt 100, und ist in 464 viermal enthalten, macht 400. Seht für diese 400 die 2 Rechtecke in Zeichnung 85 an und für das Quadrat C muß die neu gefundene Zahl 4 noch in's Quadrat erhoben werden; giebt 16, und also in allem 416, von 464 abgezogen, bleibt noch 48. Die folgenden 2 Ziffer 84 werden zu den 48 Hundertern gesetzt, giebt 4884 Einer. Die Wurzel wird wieder, wie oben, verdoppelt, giebt 108; und weil dieses Zehner sind und die jetzt zu suchende Wurzel Einer geben wird, so muß wieder wie zuvor eine Nulle hinzugefügt werden, welches 1080 ausmacht, und dieses ist in 4884 4mal enthalten; 4mal 1080 = 4320; für das Quadrat C muß 4 in's Quadrat erhoben dazu gezählt werden, giebt mit 4324 eine Summe von 4336, und diese Zahl von 4884 abgezogen, bleibt noch 548. Also ist die Quadratwurzel von 296484, 544, und es bleibt noch ein Rest von 548. Will man den Schüler die Probe machen lassen, so wird die gefundene Zahl ins Quadrat erhoben und der Rest hinzugezählt muß wieder obige Zahl geben. Jede Aufgabe dieser Art kann nach dieser aufgestellten Regel gelöst werden. Wünscht man diese Regel noch kürzer und gedrängter zusammengezogen, so mag Folgendes hier noch eine Stelle einnehmen. Bey jeder Zahl, von der man die Quadratwurzel sucht, fängt man auf der rechten Seite an, nimmt immer 2 Stellen zusammen, bey den letzten zwey, und wenn die Zifferreihe ungerad ist, auch bey der letzten Ziffer, zieht auf die gewöhnliche Weise die Wurzel aus denselben, setzt zum Rest die folgenden 2 Ziffer, verdoppelt die erstgefundene Wurzel, fügt dieser Verdoppelung noch eine Nulle hinzu, und dividirt auf die gewöhnliche Weise in den Rest mit den 2 heruntergesetzten Ziffern, erhebt die Zahl, die dadurch gefunden wird, in's Quadrat, und zieht sie ebenfalls noch vom letzten Rest mit den 2 Ziffern vermehrt ab. Zu diesem neuen Rest werden die folgenden 2 Ziffer gesetzt und wieder ganz gleich wie bey den vorhergehenden 2 Ziffern verfahren. So wird dieses fortgesetzt, bis die Wurzel von allen Ziffern gefunden ist. Will aber dieses der Lehrer seinem Schüler noch anschaulich darstellen lassen, so kann das, was früher diesfalls aufgestellt worden ist, mit diesen Regeln näher zusammen gerückt werden. Die Zeichnung 85 wird hiebey gute Dienste leisten; denn es wird immer auf das Quadrat a mit seinen zwey Rechtecken und einem 2ten Quadrate zurückgeführt werden können. Auch wird der Lehrer wohl thun, den Schüler selber die Regel auffinden zu lassen, die ihm am deutlichsten und am meisten einleuchtend seyn mag. Daß auch noch andere Regeln, unter denen die Wurzel gesucht wird, vom Schüler gefunden werden können, unterliegt keinem Zweifel mehr. Wenn man den Rest noch in 10tel, 100tel, 1000tel u. s. w. ausziehen will, so werden für die 10tel an derselben noch 2 Nullen angesetzt; will man diese Annäherung aber bis zu den 100teln fortgesetzt haben, so werden 2 mal 2 Nullen, für die 1000tel aber 3×2 und so weiters hinzugefügt; der Rest bey der letzten Aufgabe ist 548 Ganze; für die 10tel müßte man $^{54800}/_{100}$, für die 100tel aber $^{5480000}/_{10000}$ erhalten. Die Gründe soll der Schüler auf dieser Stufe, ohne große Schwierigkeiten zu überwinden, anzugeben im Stande seyn; denn sie sind mit dem, was beym Kopfrechnen aufgestellt worden ist, ganz gleich und ruhen auf folgenden Gründen. Soll man noch 10tel in der Wurzel erhalten, so muß das Quadrat in 100 Theile getheilt werden, und die 548 in eben so viel mal 100 Theile giebt 54800, oder so viel Theile, als wenn man an den Rest 2 Nullen ansetzt. So wird das mit den 2ten 2 und 3ten zwey Nullen erklärt. Will man aber die Ausführung kennen lernen, so darf man die oben aufgestellte Regel auch auf die Decimal-Brüche, ohne irgend eine Abänderung, anwenden. Um die 10tel noch in letzter Aufgabe zu finden, werden, wie wir so eben gesehen haben, 2 Nullen hinzugefügt werden, giebt 54800; die Wurzel von 544 aber verdoppelt macht 1088 und an diese Verdopplung muß ebenfalls noch eine Nulle hinzugefügt werden; denn wenn das Quadrat in 100 Theile getheilt worden ist, durch das Hinzusetzen der 2 Nullen, so wird die Seite in 10 Theile getheilt, und 10 mal 1088 macht 10880 oder so viel als eine Nulle hinzugefügt; diese Summe ist in 54800, 5mal enthalten, 5 mal 10880 giebt 54400, und auf den Ecken der 2 Rechtecke muß die neu gefundene Zahl noch in's Quadrat erhoben werden, welches 25 giebt; in allem also 54425, und diese Zahl von 44800 abgezogen bleibt noch 375; diesem zufolge ist die Quadratwurzel $544^{5}/_{10}$ und bleiben noch $37^{5}/_{100}$ Quadrate Rest. Will man die Wurzel noch mehr annähernd erhalten, so wird jeder 100tel wieder in 100 gleiche Theile getheilt, oder noch einmal 2 Nullen angehängt werden, und wieder ganz wie bey den 10teln verfahren, welches dann die 100tel geben wird.

Der Schüler wird durch diese Uebungen einsehen lernen, daß er, wenn er diese Operation auch in's Unendliche fortsetzt, das Resultat nur dann genau finden kann, wenn die Quadratzahlen rein oder die Zahlen rationell sind. Zwar kann er es so annährend finden, als er immer will, niemals aber ganz. Will man ihn auf dieser Stufe noch zu größerer mechanischer Fertigkeit im Ausziehen der Quadratwurzel erheben, so wird man wohl thun, dem Schüler einige Beyspiele in höheren Zahlen zu geben, die er nur nach der Regel zu berechnen hat; ohne daß er sich diesfalls jedesmal Rechenschaft giebt, oder dieselbe weiter löst. Zu weit muß man diese mechanischen Fertigkeiten aber nicht treiben wollen. Befinden sich bey dem Ganzen noch Brüche, und soll die Wurzel in 10tel, 100tel u. s. w. ausgezogen werden, so müssen sie auf die gewöhnliche Weise in 100tel, 1000tel u. s. w. verwandelt und hernach wieder so verfahren werden, wie wenn sich keine Brüche bey dem Ganzen befänden.

Zum Beschluß der Uebung mit der Quadratwurzel mögen noch folgende Fragen eine Stelle hier finden.

Sind die Zahlen 1 und 2 rationelle Zahlen?

Antwort. Eins ist eine rationelle und 2 eine irrationelle Zahl.

Ist die Wurzel eines Bruches ein größerer Theil des Ganzen als sein Quadrat?

Antwort. Die Wurzel ist der größere Theil.

Welcher von euch kann mir die Regel angeben, die man beym Ausziehen der Quadratwurzel zu befolgen hat?

Welcher von Euch kann mir in wenig Worten die Regel angeben, und zugleich die Gründe, auf denen sie beruht?

Wie wird die Probe gemacht, wenn man untersuchen will, ob die Quadratwurzel richtig ausgezogen worden sey?

Wenn die Quadratzahl durch 6 Ziffer bezeichnet worden ist, wie viel wird die Wurzel Ziffer erhalten?

Antwort. 3 Ziffer.

Hat die Wurzel 3 Ziffer, wie viel wird die Quadratzahl Ziffer erhalten?

Antwort. 5 oder 6 Ziffer.

Die gleichen Fragen können auch über die Bruchverhältnisse gemacht werden.

Unter was für einer Form muß immer an ein Quadrat angesetzt werden, wenn wieder ein Quadrat entstehen soll?

Antwort. Unter der Form von 2 Rechtecken und einem Quadrat.

Bevor ich weiter schreite, will ich in einigen Beyspielen noch zeigen, welche Anwendung der Ausziehung der Quadratwurzel im praktischen Leben allenfalls gegeben werden dürfte.

Fr. Es hat jemand ein Stück Feld, welches 2500 Quadratschuhe enthält, er erinnert sich aber nicht mehr, wie lang und breit es ist, weiß indeß doch, daß es ein Quadrat bildet; es fragt sich, wie breit es sey?

Antwort. 50 Schuhe.

Auflösung. Wird es ein Quadrat bilden, so liegen an der Breite so viele Schuhe, als an der Länge, und folglich ist der Inhalt dadurch entstanden, daß man die Länge mit der Breite multiplizirt hat, oder das Ganze ist ein Quadrat, welches aus 2500 Quadratschuhen zusammengesetzt ist, oder aus 2500 Quadraten. Will man eine Seite kennen, so muß man die Quadratwurzel von 2500 suchen, welches 50 ist, also ist das Feld 50 Schuh breit.

Angenommen, das Stück Feld bilde ein Rechteck, das 2mal so lang als breit sey, und habe obigen Inhalt; es fragt sich, wie lang und wie breit es sey?

Auflösung. Wenn es 2mal so lang als breit ist, so kann es als ein Rechteck in's Auge gefaßt werden, welches 2 gleiche Quadrate in sich faßt; also kommt auf ein Quadrat die Hälfte von obigem Inhalt, oder 1250 Quadratschuhe. Will man eine Seite dieses Quadrats kennen, so muß die Quadratwurzel von 1250 gesucht werden, welches die Breite des Rechtecks giebt; für die Länge wird aber die Breite 2mal genommen. Wäre das Feld 3, 4, 5 rc. rc. mal so lang als breit angegeben, so müßte man die Quadratwurzel von $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ u. s. w. des Inhalts desselben suchen.

Ist es aber $1\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{3}$ u. s. w., so lang als breit angegeben worden, so würden $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ wieder ein Quadrat bilden, und müßte auf obige Weise mit $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ eines Quadrats eben so verfahren werden.

Daß keine Aufgabe dieser Art gegeben werden kann, die der Schüler nicht mit Leichtigkeit zu lösen im Stande wäre, soll aus diesen wenigen Beyspielen einleuchtend geworden seyn.

Man hat einen Garten gekauft, wovon das Klafter so viel 3tels Gulden kostet, als es Klafter sind; es fragt sich, wie viel Klafter er seye, und wie viel dasselbe kostet?

Antwort. 36 Klafter, und kostet $^{36}/_{3}$ Gulden oder 12 Gulden.

Auflösung. 432 fl. geben $^{1296}/_{3}$, und weil jedes Klafter so viel 3tels Gulden kostet, als Klafter sind, und jedes derselben diese Summe kostet, so wird der ganze Garten die Anzahl mal Klafter 3tels Gulden kosten, oder $^{1296}/_{3}$, eine Quadratzahl, deren Wurzel die Anzahl der Klafter oder drittels Gulden giebt, welches 36 ist. Soll die Probe gemacht werden, so müssen 36 mit 36 multiplizirt, als 3tel das Resultat in's Auge gefaßt, 432 Gulden geben.

Es ist ein Garten gekauft worden, wovon aber jedes Quadratklafter 2mal so viel 3tel Gulden kosten wird, als er Klafter enthält, und die ganze Summe beträgt $266^2/_3$ fl.; es fragt sich, wie viel Klafter er enthalte und wie viel ein jedes koste?

Antwort. 20 Quadratklafter und jedes kostet $13^1/_3$ fl.

Auflösung. $266^2/_3$ geben $^{800}/_{3}$, und weil ein jedes Quadratklafter 2 mal so viel 3tels Gulden kostet, als Klafter sind, wird die Anzahl Klafter mit ihren Gulden multiplicirt 2 mal ein Quadrat geben und dieses beträgt $^{800}/_{3}$, oder als ein doppeltes Quadrat im Ganzen in's Auge gefaßt, giebt es auf das einfache Quadrat 400; die Wurzel davon wird die Anzahl Klafter geben. Die Quadratwurzel von 400 = 20, und doppelt so viel Drittels Gulden giebt $^{40}/_{3} = 13^{1}/_{3}$ fl.

So können Aufgaben gegeben werden, die 2, 3, 4 mal so viel kosten als Klafter sind, oder auch nur $^{1}/_{2}$, $^{1}/_{3}$, $^{1}/_{4}$, $^{2}/_{3}$, $^{3}/_{4}$ mal u. s. w. und ganz auf obige Weise zu lösen sind.

An diese Aufgaben schließen sich unmittelbar die sogenannten Probleme des 2ten Grades an, und können mit Hülfe des Quadrats auch alle mit der höchsten Leichtigkeit gelöst werden. Die Fortsetzung hievon wird in einem spätern Band folgen, indem es den Schüler zu schnell auf eine Höhe führen würde, für die er einerseits noch nicht ganz vorbereitet ist, anderseits aber das, was auf dieser Stufe wichtig für denselben ist, und auf keine spätere gesetzt werden kann, vernachlässigt werden müßte, wenn man es unmittelbar hier sollte folgen lassen.

Ueberdieß soll der gegenwärtige Band nur das von den Raumverhältnissen enthalten, was gleichsam für jede Elementarschule dringendes Bedürfniß ist. Von diesem Standpunkt aus wird man diese Abbrechung billigen und die Anknüpfung des Kubus als eine natürliche und nothwendige Fortsetzung der dießfälligen Uebungen ansehen und dieselbe auch wünschen.

Ganz auf gleiche Weise kann der Kubus und alle Anschauungskörper behandelt werden. Weil das Quadrat und seine ihm nahe stehenden Rechtecke mit großer Ausführlichkeit dargelegt worden sind, so darf ich mich bey dem

Kubus kurz fassen und nur das aufführen, was diesem Körper ganz eigenthümlich zukommt.

Um dieses dem Schüler anschaulich zu machen wird man eine größere Anzahl gleicher Kubus bedürfen, damit einige größere Würfel durch dieselben gebildet werden können. Ein Würfel von 1, 8, 27, 64, 125 kleineren Kubus zusammengesetzt würde diesem Bedürfniß zu entsprechen geeignet seyn. Fragen, die hierüber gemacht werden können, wären in dem, was dießfalls bey den Quadraten aufgestellt worden ist, nachzusehen. Ich begnüge mich, dießfalls nur folgende hier anzuführen.

Wie verhält sich ein Kubus zu einem andern, der eine 3 mal so lange Seitenlinie hat? Antwort: er wird 27 mal so groß als der 1ste werden. Wären es aber Quadrate, in welchem Verhältniß würden sie dann zu einander stehn? Wie oft ist der 5te Kubus so groß als der 1ste, 2te, 3te und 4te, und was für ein Theil würde er vom 6ten werden?

Wie viele müßte der 10te wohl enthalten, wenn man in diesen Reihenfolgen fortschreiten würde. Antwort: 1000 Würfel.

Wie viele Quadrat-Flächen enthält der Umfang des ersten Würfels? Antwort: 6. — Hat jeder Würfel 6 Quadrate als Umfang? Wie oft ist der Umfang des 2ten Würfels so groß als der des ersten? So wird der Umfang des 3ten mit dem 1sten, 2ten, 4ten, 5ten u. s. w. Würfel verglichen werden. Wie oft ist der Umfang des 10ten Würfels so groß als der des 1sten oder 2ten?

In welchem Verhältniß steigt der Inhalt und Umfang dieser Würfel zu einander? Welcher nimmt schneller zu?

Auch könnten ähnliche Fragen noch über die Theilungsflächen in diesen Körpern gemacht werden. Wichtiger aber ist folgende Frage. Wie oft ist der Umfang des 2ten Kubus so groß als der des 1sten? Wie oft wird aber der Umfang der 2ten so groß als der des 1sten werden, wenn man die 8 Kubus, aus denen er zusammengesetzt ist, in einzelne Kubus zerlegen wird?

Die gleichen Reihenfolgen und Aufgaben können auch über das rechtwinklicht 4 seitige Prisma gebildet werden, über deren Ausführung ich hier jedoch nicht weiter eintrete, besonders da diese Uebungen bey dem Quadrat und Rechteck sehr weitläufig ausgeführt sich finden, und ganz nach der Norm, die beym Kubus angegeben worden ist, auch von jedermann nachgeahmt werden kann.

Die wichtigern Aufgaben hierüber wären allenfalls die Verwandlung des 1sten, 2ten und 3ten Kubus in ein rechtwinklichtes Prisma, wie es bey den Quadraten geschehen ist. Z. E. der 1ste Kubus soll in ein Prisma verwandelt werden, welches ihm gleich ist, und die Quadratfläche des 2ten Würfels zur Basis hat; somit der Quadratfläche des 3ten Würfels u. s. w.

Auflösung. Die Grundfläche des 2ten Würfels enthält 4 Quadrate, also soll der 1ste Würfel in 4 gleiche Prisma zerlegt und auf jedes Quadrat der Grundfläche des 2ten Würfels $1/4$ dieses 1sten Würfels gethan werden; folglich wird die Höhe des Prisma $1/4$ der Höhe des 1sten Würfels erhalten. Würde er in ein Prisma verwandelt, welches die Grundfläche des 3ten Kubus in sich faßte, so würde $1/9$ der Höhe des 1sten Würfels genommen werden müssen. So könnte der 2te Würfel in ein Prisma verwandelt werden, welches die Grundfläche des 10ten, 9ten Würfels u. s. w. erhalten würde. Umgekehrt, die Prisma in Kubus zu verwandeln, hat die gleichen Schwierigkeiten, wie die Rechtecke in gleichgroße Quadrate zu umwandeln. Es kann also nur in einigen wenigen Fällen geschehen. Die rationellen Zahlverhältnisse sind hier noch häufiger als bey dem Quadrat. Dagegen ist die Umwandlung in jedes Prisma, welches nicht regelmäßig ist, nicht nur möglich, sondern weiter nichts als ein noch verwickelteres Zahlverhältniß.

Nicht unwichtig wird es, den Umfang der Prisma mit dem der Würfel, mit denen sie gleich sind, zu vergleichen. Der Schüler wird finden, der Umfang der Würfel sey immer geringer als der des Prisma, und je unregelmäßiger dasselbe ist, desto kleiner wird es bey ein und demselben Umfang. Eine nicht unwichtige Uebung für den Kubus und für das Prisma ist folgende: Wenn man einen Kubus von 1000 hat und an eine Seite noch einen Kubus ansetzt, der einem dieser 1000 Kubus gleich ist, und dann an den Seiten des Kubus so viele dieser Würfel hinzufügt, daß es wieder einen Kubus bildet, so fragt es sich, wie viel hiezu erfordert werden? Antwort: 331.

Auflösung. Jede Quadratfläche dieses ursprünglichen Kubus erhält 100; soll an einen Würfel so viel angesetzt werden, daß wieder ein neuer Würfel entsteht, so müssen immer an 3 Quadrat-Flächen und zwar an die

Breite, an die Länge und an die Höhe angesetzt werden. Weil aber jede Quadratfläche an diesem Würfel 100 enthält; so erfordert es für die Breite 100, für die Höhe 100, und für die Länge ebenfalls 100, zusammen 300 Würfel; und diese 3 Flächen bilden von neuem 3 Flächenwinkel, die mit der Länge des Körpers oder mit 10 durch Kubus wieder angefüllt werden müssen, also noch 3 mal 10 oder 30 Kubus; diese 3 mal 10 Würfel bilden aber noch einen körperlichen Winkel, welcher mit einem Kubus von 1 ausgefüllt werden muß; folglich werden hiezu erfordert:

100 dreymal genommen,
10 dreymal genommen,
1 einmal genommen.

Würden aber 2 Würfel angesetzt, so müßte man
100, 2 × 3 nehmen,
10, 2 × 2 × 3, und noch
2 × 2 × 2 nehmen müssen. Würden 3 Würfel hinzugefügt werden, so entstände folgendes Verhältniß:
100, 3 × 3 genommen
10, 3 × 3 × 3 und
3 × 3 × 3.

Den Schüler dieses in einer Reihenfolge fortsetzen lassen, bis ihm diese Verhältnisse ganz geläufig werden, wird hier nothwendig, und darf nicht übergangen werden. Man wird mir aber einwenden, dieses sey nicht so leicht möglich, indem eine so große Anzahl Kubus nicht leicht zur Disposition des Schülers und Lehrers stehen dürfte und ohne dieses würde die Ausführung wohl schwer werden.

Diesem ist aber nicht also. Wird der Schüler angehalten, diese Bildungsweise des Würfels bey einer kleinen Anzahl Kubus richtig aufzufassen, so wird die Uebertragung auf einen Kubus, der aus einer großen Anzahl kleiner Kubus zusammengesetzt ist, für denselben ganz leicht werden. Ueberdieß würde die wirkliche Ausführung davon so viel Zeit erfordern, daß kein Schüler auf dieser Stufe die Mühe mehr nähme, dieses sich also anschaulich zu machen.

Zur Uebung können ähnliche Reihenfolgen auch bey dem Prisma aufgestellt werden. Doch ist es nicht nothwendig, dieses so ausführlich behandeln zu wollen, wie es bey dem Würfel so eben geschehen ist. Als Leitfaden mag eine Aufgabe hierüber noch eine Stelle finden. An ein Prisma, dessen Breite und Höhe jedes 5 mal die Breite eines Kubus hat, und dessen Länge aber 10 mal so viel beträgt, soll seiner Breite, Höhe und Länge nach eine Reihe Kubus so gesetzt werden, daß der ganze Körper wieder ein Prisma bildet; es fragt sich, wie viele Kubus hiezu erfordert werden?

Auflösung. An eine Fläche werden 5 × 5 Kubus erfordert, an 2 andern aber, an jeder 5 × 10, an die drey Flächenwinkel, an einen einmal 10, und an 2 anderen aber an jeden 1 mal 5, und endlich da, wo der körperliche Winkel gebildet wird noch ein Würfel von eins. Auch dieses kann dem Schüler noch mit einer geringen Anzahl Kubus anschaulich und geläufig gemacht werden. Mit diesem begnügt sich aber der Lehrer noch nicht. Sein Zögling soll so geführt werden, daß er diese und ähnliche Aufgaben

gaben auch ohne weitere Nachhülfe durch Anschauung zu lösen in den Stand gesetzt wird.

Das Vorstellungsvermögen soll so weit ausgebildet und in Anspruch genommen werden, als in der ersten Epoche das Anschauungsvermögen. Wie und auf welche Weise dieses geschehe, habe ich bereits im Anfange dieser Schrift hinlänglich erörtert. Das, was ich bey den Quadraten über das Bruchverhältniß der Zahlen bemerkt, ist hier doppelt anwendbar. Auch hier muß der Kubus dem Schüler als Kubikklafter, Kubikschuh, Zoll und Linie auf die gleiche Weise zur Anschauung gebracht werden, wie dieses bey der Fläche durch das Quadrat geschehen ist. Ein Kubikklafter hat 216 Kubikschuh. Ein Kubikschuh 216 Kubikzoll. Ein Kubikzoll aber 216 Kubiklinien.

Aus diesem geht ferner hervor, daß ein Kubikklafter 216 × 216 Kubuszoll erhalten wird, und 216 × 216 × 216 Kubiklinien. Diese höheren Zahlen müssen durch das Gedächtniß nicht behalten werden; es ist hinreichend, wenn der Schüler dieses mit großer Leichtigkeit zu finden und zu berechnen im Stande seyn wird.

Weitläufig müssen diese Uebungen aber auf keinen Fall ausgeführt werden. Will man indeß hiefür doch mehr Stoff als ich gegenwärtig darlege; so kann nur beym Quadrat nachgesehen und alle Reihenfolgen und Fragen auch auf Kubikklafter, Kubikschuh, Kubikzoll und Kubiklinien übertragen werden. Um den Lehrer etwas sicherer zu führen, mögen folgende einzelne Fragen noch eine Stelle finden:

Fr. Wie oft ist der Umfang des Kubikklafters so groß als der des Kubikschuhes, Kubikzolls u. s. w.?

Wie oft ist der Umfang des Kubikzolls so groß als der der Kubiklinien?

Wie viel Kubikklafter erhält ein Kubus, welcher 10 Klafter Länge hat?

Könnt ihr dieses leicht in einem Zimmer in der Wirklichkeit darstellen?

Antwort: Nein, denn der Gegenstand würde zu groß werden. Wie macht man es, wenn man es wenigstens anschaulich dargestellt haben möchte?

Antwort: mit kleinen Kubus, die in einem verkleinerten Maßstab dieses darstellen werden. Wie viele Kubikklafter wird ein Prisma enthalten, welches 6 Schuh breit, 7 hoch und 10 lang ist?

Wenn man einen Schuh an die Länge, einen an die Breite und endlich noch einen an die Höhe dieses letzten Prisma setzt und das Ganze wieder ein Prisma werden soll; so fragt es sich, wie viel Kubikschuhe hiezu erfordert werden?

Aehnliche Fragen werden beym Kubus mehrere gegeben, besonders um den Schüler zu üben, daß er an die Klafter Schuhe, an die Schuhe Zolle, und an die Zolle Linien setzen lerne.

Die Reihenfolgen, die bey der Vergrößerung des Kubus oben aufgestellt worden sind, können und werden hiefür wesentliche Dienste leisten. Zieht diese der Lehrer zu Rath, so soll er auch über diesen Punkt mit seinem Schüler keine Schwierigkeiten mehr treffen.

Ich schreite zu den eigentlichen Anwendungs=Aufgaben, die aus dem Kubus hervorgehn, und zeige in gedrängter Kürze, wie vielseitig dieser Körper in das praktische Leben einzugreifen geeignet ist. Zugleich muß ich auch hier noch einmal bemerken, wer immer mehr Stoff wünscht, mag in dem, was über das Quadrat aufgestellt ist, sich diese gegenwärtige Darlegung ergänzen.

Fr. Wie viele Kubikzoll wird ein Brett, eine Tischlade u. s. w. enthalten, wenn es so und so viel Zoll breit, hoch und lang ist?

Eben so wie viel Kubikfuß wird ein Heustock, ein Graben, der Raum eines Zimmers, eines Hauses, eines Kellers u. s. w. und jeder, der Kubikform ähnliche Körper enthalten?

Auch bey diesen Aufgaben ist es hinreichend, wenn der Schüler sogleich angeben kann, daß man in allen ähnlichen Fragen die Breite mit der Höhe und das, was herauskommt, noch mit der Länge multipliciren müsse. Z. B. der Heustock soll 2 Klafter 3 Schuh breit, 1 Klafter und 5 Schuh hoch, und endlich 2 Klafter und 4 Schuh lang seyn; es fragt sich, wie viel Kubikklafter derselbe enthalten werde?

Auflösung. Alles zu Schuh verwandelt, giebt für die Breite 15, für die Höhe 11 und für die Länge 16 Schuh. Der Inhalt davon wäre 15 × 11 und das gefundene 16 × genommen; und da das Kubikklafter 216 Kubikschuhe enthalten soll; so muß dieses mit 216 dividirt werden. Wären in dieser Aufgabe noch Zoll und Linien dazu gegeben worden, so hätte man gleich im Anfang alles in Linien verwandelt und dann wieder, wie oben, mit einander multipliciren müssen. Die Kubiklinien durch die Division von 216 in Kubikzoll, und die Kubikzoll durch 216 in Kubikfuß, und endlich die Kubikfuß durch die Division von 216 in Kubikklafter zu verwandeln. Daß diese und ähnliche Aufgaben auch noch auf andere Arten gelöst werden können, unterliegt keinem Zweifel, aber mehrere Abänderungen hier anführen zu wollen, würde mich von dem Zweck abführen, der durch diese Aufgaben erzielt werden soll. Eben so wenig gehört es hieher, diesen Klaftern irgend einen Preis beylegen zu wollen, indem dieses den angewandten Zahlverhältnissen anheim gestellt werden muß. Alles, was den Schüler nicht in das Wesen dieser Formen einzuführen geeignet ist, muß gegenwärtig ganz wegbleiben. Auch soll nicht aus den Augen gelassen werden, daß die wirkliche Ausmessung und Bestimmung für den Schüler so wichtig ist, als die richtige Anschauung eines jeden dieser Körper. Wenn daher der Schüler immer in die Lage gesetzt werden kann, daß er dieses selbst ausmessen lernt oder diese Ausmessung vor sich sieht, so dürfen solche Gelegenheiten nie vernachlässigt werden. Will man den Schüler zur Uebung in obigen Aufgaben noch mit den Bruchverhältnissen bekannt und vertraut machen, so kann es ohne Nachtheil geschehen; doch muß man diesen Uebungen keinen andern Werth beylegen, als eine Wiederholung der Brüche angewandt auf den Würfel, die, wenn das Ganze der Zahlenlehre dem Schüler zweckmäßig gegeben seyn wird, ihm nichts Neues mehr darbietet. Wie viele Kubikfuß werden zu den 4 Seitenmauern eines Gebäudes erfordert, wenn dasselbe 60 Schuh lang, 50 breit und 30 hoch ist, und die Dicke der Mauer 3 Schuh beträgt.

Auflösung. Ist das Gebäude 60 Schuh lang, 30 Schuh hoch und 3 Schuh dick, so wird eine solche Mauer $60 \times 30 \times 3$ Kubikfuß erhalten, und die gegenüber stehende Seite des Hauses wird eben so viel Kubikfuß in sich fassen. Die Breite ist aber 50, die Höhe wieder 30, und die Dicke der Mauer ebenfalls 3 Schuh; weil die Dicke der 2 anderen Mauern aber auch zur Breite gehöret, so fallen 2×3 oder 6 Schuh von der Breite der Mauer, die noch zu machen ist, weg, also statt 50 nur noch 44 Schuh oder $44 \times 30 \times 3$ Kubikfuß für eine solche Mauer. Die gegenüberstehende Seite ist eben so groß.

So könnte man angeben, wie viel Kubikfuß dieser dadurch gebildete, geschlossene Raum enthalten würde.

Um dieses zu lösen, zieht man nur die Dicke der Mauer ab, und verfährt, wie bey einem gewöhnlichen würfelförmigen Körper dießfalls oben angegeben worden ist. Würden in diesem Gebäude Zwischenräume gemacht, so könnte der Inhalt derselben, wie die äußeren Mauern berechnet werden, versteht sich, daß die äußere Linie des Gebäudes angegeben werden muß, wenn diese Berechnung statt finden soll. Die Dicke der Mauer wird wegfallen.

Sollten aber Zwischenmauern gemacht werden, die sich durchschneiden, so müßte die Dicke der Mauern in ihren Durchschnittslinien nur bey einer Mauer berechnet werden. Das Gleiche findet statt, wenn man die Böden und Decken der Zimmer ihrem körperlichen Inhalt nach berechnet haben will. Am Ende, nachdem der Inhalt einer jeden Mauer, eines jeden Bodens und einer jeden Decke berechnet seyn wird, kann man dem Schüler noch auftragen, den Raum auch eines jeden einzelnen Zimmers zu bestimmen. Als Probe kann man den Inhalt von allen diesen Räumen addiren, um zu sehn, ob es mit dem Raum, den das ganze Gebäude einnimmt, übereinstimmt.

Statt großer Gegenstände können auch kleinere, wie Kisten, Kasten, Pulte u. s. w. sowohl des Inhalts ihres Raumes halber, als auch der Materialien, die man zu ihrer Verfertigung bedarf, auf diese Weise berechnet werden. Je kleiner der Gegenstand ist, desto kleiner muß auch der Maßstab, der dazu benutzt wird, seyn. Aus diesem geht hervor, daß die Kubiklinie zu den kleinsten Körpern, und das Kubikklafter hingegen für die größten angewandt werden kann und angewandt werden soll.

Man kann den Schüler auch untersuchen lassen, wie viel Stück u. s. w. von irgend einem Körper erfordert werden, um diesen oder jenen Raum zu füllen. Z. E.

Man wünscht einen Koffer, der inwendig einen Kubikfuß bildet, mit Neuthalern oder irgend anderen Gegenständen zu verpacken. Angenommen, der neue Thaler nehme einen Raum ein, der im Durchmesser 2 Zoll beträgt und dessen Höhe $1/6$ Zoll ist; es fragt sich, wie viel von dieser Münzart in diesen Koffer gehe?

Auflösung. Wenn angenommen wird, ein Schuh in der Länge soll 12 Zoll oder 6 × 2 Zoll enthalten, so können in einer Richtung des Bodens 6 Neuthaler gelegt werden, und da der Koffer ein Quadrat bildet, so werden sie 6 mal neben einander stehen, oder 6 × 6 Thaler decken den Boden. Die Höhe einer solchen Münzsorte beträgt $1/6$ Zoll, also können sie auch 6×12 oder 72 mal über einander gelegt werden, oder 72×36 Neuthaler füllen die Kiste. Wer hierüber noch mehr Beyspiele wünscht, mag in dem, was über das Quadrat aufgestellt worden ist, nachsehen, und die dießfälligen Uebungen auch auf diese Körper anwenden. Daß auch das Prisma mit eben der Leichtigkeit durch den Kubus bestimmt und gelöst werden kann, wie das Rechteck durch das Quadrat, wird keinem aufmerksamen Beobachter weiter entgehn, und der praktische Lehrer wird gewiß auf keine fernern Schwierigkeiten mehr stoßen.

Was über die Erhebung einer Zahl in's Quadrat und die Ausziehung seiner Wurzel gesagt und bemerkt worden ist, findet volle Anwendung beym Kubus. Auch die einzelnen Fragen, die daselbst gemacht worden sind, können in dieser ganzen Ausdehnung auf den Kubus angewandt werden. Ich schreite daher, ohne diese Fragen zu wiederholen und ohne weitere Erläuterung zu den positiven Uebungen des Würfels vor.

Eins zu einem Kubus gemacht oder in Kubus erhoben giebt 1. Setzt man an diesen Kubus noch einen Kubus an, und wird dieses fortsetzen, bis es wieder einen Kubus bildet, so giebt es 8 Kubus; wird noch ein Kubus angesetzt und wieder wie oben fortgefahren, so entsteht ein Kubus von 27; 4 in Kubus erhoben giebt durch diese nämliche Bildung 64; 5, 125; 6, 216; 7, 343; 8, 512; 9, 729 und 10, 1000.

Wie der Schüler bis zu 100 die 10 Zahlen in's Qua=

drat erhoben gleichsam ohne weiteres Rechnen und Untersuchen, nur durch Anschauung sich eigen machen mußte, so ist für die Kubikwurzel und deren Erhebung die Kenntniß obiger Zahlen nothwendig. Aehnliche Fragen soll er daher auf der Stelle zu beantworten fähig seyn.

Fr. 9 in Kubus erhoben, wie viel wird es geben? so 8, 6, 3 u. s. w.

Welche Zahl ist in Kubus erhoben worden, wenn sie 125 giebt? Antwort: 5.

Welche aber, wenn es 1000 giebt? Welches ist die Kubikwurzel von 1000? Welches die von eins? Welches die von 125? Antwort: 5.

Was für Kubikwurzeln finden sich von 1 bis zu 10?

Antwort: 1 und 2, und zwar ist 1 die Kubikwurzel von 1, und 2 die von 8.

Welche Zahlen bis zu 10 haben keine reine Kubikwurzel?

Antwort: 2, 3, 4, 5, 6, 7 und 9.

Gestützt auf diese Ausführung und auf das, was der Schüler beym Quadrat sich eigen macht, soll er mit der größten Leichtigkeit $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_4$ u. s. w. in Kubus zu erheben im Stande seyn. Er wird für $^1/_2$, $^1/_8$; für $^1/_3$, $^1/_{27}$; für $^1/_4$, $^1/_{64}$ u. s. w. finden, und zwar auf folgende Weise gelbst. — Macht man auf 1 einen Kubus, so giebt es 1; der Kubus von 2 aber ist 8; folglich, wenn eine Seite eines Kubus die Hälfte eines andern ist, so wird der 1ste Kubus $^1/_8$ des 2ten, oder $^1/_2$ in Kubus erhoben giebt $^1/_8$.

Gestützt auf dieses werden $^2/_3$, $^3/_4$, $^4/_5$ u. s. w. in

Kubus erhoben. Für die $^2/_3$ erhält er $^8/_{27}$; für $^3/_4$, $^{27}/_{64}$; für $^4/_5$, $^{64}/_{125}$ u. s. w.

Einzelne Fragen hierüber.

Fr. Wie viel wird $^1/_{10}$ in Kubus erhoben geben?

Kann man jeden Bruch in Würfel erheben?

Wie viel wird die Kubikwurzel von $^1/_{1000}$ seyn? Antwort: $^1/_{10}$.

Auflösung. Die Kubikwurzel von 1 ist eins, und die von 1000 ist 10; wenn also ein Kubus $^1/_{1000}$ eines andern ist, so ist die Wurzel des einen dieser 2 Kubus $^1/_{10}$ von dem des andern, oder die Kubikwurzel von $^1/_{1000}$ ist $^1/_{10}$.

Wie viel wird die Kubikwurzel von $^8/_{27}$ seyn? Wie viel aber diejenige von $^{64}/_{125}$? Antwort: $^4/_5$.

Auflösung. Die Kubikwurzel von 64 ist 4, die von 125 aber 5; wenn also der Kubus $^{64}/_{125}$ seyn wird, so werden ihre Wurzeln zu einander $^4/_5$ werden.

Kann man jeden Bruch in den Kubus erheben?

Aber auch von jedem Bruch die Wurzel wieder rein ausziehn? Antwort: nein.

Von welchem Bruch kann man die Kubikwurzel nicht ausziehen? Von welchem kann man sie ausziehen?

Antwort: von $^1/_8$, $^1/_{27}$, $^8/_{27}$, $^1/_{64}$, $^8/_{64}$, $^{27}/_{64}$, $^1/_{125}$, $^8/_{125}$, $^{27}/_{125}$, $^{64}/_{125}$. Würde der Schüler auch $^{27}/_8$ angeben, so könnte ihn der Lehrer aufmerksam machen, daß dieses 3 Ganze und $^3/_8$ wären und nicht als ein Bruch angenommen werden dürfe. Welche 64tel haben reine Kubikwurzel?

Antwort: nur $^1/_{64}$, $^8/_{64}$, $^{27}/_{64}$ und $^{64}/_{64}$ haben reine Wurzeln; jede andre Anzahl 64tel enthält eine irrationelle Kubikwurzel. Eben so läßt man ihn Ganze und Brüche wieder in Kubik erheben, und untersuchen, wie viel jedesmal wieder die Wurzel davon sey. Z. E.

$1^1/_2$ in Kubik erhoben giebt $3^3/_8$, $1^1/_3$, $2^{10}/_{27}$ u. s. w.

Auflösung. $1^1/_2$ sind $^3/_2$, 3 in Kubik erhoben giebt 27, zwey aber dahin erhoben macht 8; also ist 3 in Kubik erhoben in Vergleichung mit 2 wie 27 zu 8, oder $3^3/_8$ zu 1. Eben so wird $1^1/_3$, oder $1^2/_3$, oder $1^1/_4$, $1^2/_4$, $1^3/_4$ u. s. w. gelöst werden. —

Der Schüler wird bald finden, jeder Bruch könne in den Kubik erhoben werden, und ebenso wieder von jedem dahin erhobenen die Wurzel ausgezogen werden.

Welches die Kubikwurzel von $3^3/_8$?

Antwort: $1^1/_2$.

Auflösung. $3^3/_8 = {}^{27}/_8$; die Kubikwurzel von 27 ist 3, und die von 8 ist 2; wenn also ein Kubik 27 Theile, wie ein andrer deren 8 hat, so ist die Wurzel des ersten von der des 2ten auch 3 Theile zu 2 oder $^3/_2 = 4^1/_2$.

Wie viel wird die Kubikwurzel von $37^1/_{27}$ seyn? Antwort: $3^1/_3$.

Auflösung. $37^1/_{27}$ machen $^{1000}/_{27}$; die Kubikwurzel von 1000 ist 10, die von 27 aber 3; wenn sich der eine Kubus zum andern verhält, wie $37^1/_{27}$ zu eins, oder wie 1000 zu 27; so wird sich die Wurzel dieser 2 Kubik zum ersten verhalten, wie 10 und 3, oder wie $3^1/_3$ zu 1, gleich $3^1/_3$.

Fr. Kann man von allen Zahlen, die Ganzen und Brüche enthalten, immer die Wurzel rein finden?

Von welchen können sie rein und von welchen nicht rein gefunden werden? Ist die Kubikwurzel von $2^1/_4$ rein oder nicht rein? Antwort: nicht rein.

Wäre sie das Gleiche als Quadratwurzel? Kann man von keiner Quadratzahl die Kubikwurzel nehmen? Antwort: ja, von 1, 64 u. s. w. Welche Quadratzahlen sind reine Kubikzahlen sowohl im Ganzen als auch in Brüchen, und in Ganzen und Brüchen zugleich? Hat es bis auf 100 mehr Quadrat= oder mehr Kubikzahlen?

Gestützt auf diese Kenntniß des Quadrats und des Kubus schreitet man zur Ausziehung der Kubikwurzel, wie dieses bey der Quadratwurzel geschehen ist. Bey letzterer Wurzel ist angenommen worden, der Schüler kenne bis zu 100 die Wurzel von jeder Zahl.

Bey der Kubikwurzel soll er hingegen dieselben bis auf 1000 kennen. Gestützt aber auf diese Kenntniß wird die Kubikwurzel von zwey und mehreren Tausenden auf folgende Weise gesucht werden. Z. B. Der Schüler soll die Kubikwurzel von 2 Tausender suchen. Um diese zu suchen wird angenommen, er kenne die Wurzel von 1000 als 10, und die übrigen 1000 müssen wieder, wie beym Quadrat, an den ersten Kubus angesetzt werden, und zwar an die Breite, Höhe und Länge. Um an eine Fläche diesen Kubus anzusetzen, erfordert es 10 mal 10 kleinere Kubus; soll man aber an die 3 Flächen der Länge, Breite und Höhe nach ansetzen, so erfordert es 3 mal 10 mal 10 oder 300, und diese Summe wäre wohl 3 mal in 1000, die übrig geblieben sind, enthalten; weil aber noch sehr viele Würfel erfordert werden, um den ganzen Kubus auszufüllen, so darf statt 3 mal nur 2 mal angesetzt werden, 2 mal 300 sind 600, und um die 3 Flächenwinkel, die dadurch entstanden sind, auszufüllen, erfordert es für jeden derselben 2 mal 2 mal 10 oder 40, und für die drey $3 \times 40 = 120$; für den körperlichen Winkel, der durch diese Ansetzung entsteht; wird aber noch 2 in Kubus erhoben, erfordert, oder 8, zusammen 600, 120 und 8 gleich 728, von 1000 abgezogen bleiben 272; die Kubikwurzel ist dem also 10 mehr 2 oder 12.

Um dieses anschaulich auszuführen, wird man wohlthun, einige kleine Kubus für den Anfang zu Hülfe zu nehmen; eine kleine Anzahl leistet die nämlichen Dienste, wie wenn eine große Anzahl benutzt würde. Sollten dem Lehrer aber keine Würfel zu Gebot stehen, so könnten diese auch leicht vom Schüler aus weichen Körpern selbst verfertigt werden, wie allenfalls aus weicher Erde, Thon, Aepfel, Erdäpfel u. s. w. Auch könnten aus diesen Materialien andere Formen geschnitten werden, die die Anschauung zu erleichtern sehr geeignet wären.

Z. B. Um an die 3 Flächen des ersten ursprünglichen Kubus anzusetzen, könnte man Quadratflächen, die immer einen Kubus hoch und eben so groß wie die Seiten des Würfels wären, benutzen, für die 3 Flächenwinkel könnte man aber rechtwinklichte Prisma aus den nämlichen Körpern verfertigen, die einen Würfel hoch und breit, aber so lang als der ursprüngliche Kubus würden, und endlich, um den körperlichen Winkel auszufüllen, würden noch Würfel gemacht, die die Länge, Breite und Höhe dieser kleinern Kubus enthielten.

Wird diese Anschauungsform angewandt und benutzt, so muß der Schüler dieselbe nur einigemal in der wirklichen Ausführung vor sich liegen haben, um sie dadurch ganz entbehrlich zu machen.

Sehr bald wird er es dadurch so weit bringen, daß durch sein Vorstellungsvermögen die wirkliche Anschauung ersetzt werden kann.

Bevor man aber in der Wurzel zu 2 Zehnern vorschreitet, müssen in jedem Fall noch ein paar Aufgaben, wie etwa folgende, gelöst werden.

Wie viel wird die Kubikwurzel von 7000 seyn?

Auflösung. Von einem Tausender ist die Kubikwurzel ein Zehner, und bleiben noch 6 Tausender, die an diesen ersten Kubus an 3 Flächen angesetzt werden müssen, um an eine Fläche desselben anzusetzen, erfordert es das Quadrat 100, und an 3 Seiten also 300; drey Hundert sind in 6000 wohl 20 mal enthalten; aber weil eine sehr große Anzahl Kubus zu Ausfüllung der 3 Flächenwinkel und des körperlichen erfordert wird; so darf man es nur etwa 9 mal nehmen; 9 mal 300 gleich 2700; für einen Flächenwinkel erfordert es $9 \times 9 \times 10 = 810$, und für die 3 Flächenwinkel 3 mal diese Summe $= 2430$; für den körperlichen Winkel noch den Kubus von 9 oder $9 \times 9 \times 9 = 729$; in allen wird es geben $2700 + 2430 + 729 = 5859$, und bleiben von 6000 noch 141; also ist die Kubikwurzel 10 mehr 9 gleich 19, und bleiben noch 141 Kubus Rest.

Will man die Probe hierüber machen, so erhebt man die 19 in Kubus, und zählt die 141 als Rest dazu, und dieses muß wieder 7000 geben, wenn richtig gerechnet worden ist.

Die Gründe davon gehen so anschaulich aus der Bildung des Kubus hervor, daß ich hierüber kein weiteres Wort verlieren will.

Fr. Wie viel wird die Kubikwurzel von 8000 werden?

Auflösung. Die Kubikwurzel von 1 ist 1, die von 8 ist 2, die Kubikwurzel aber von 1 Tausender ist ein Zehner, und die von 8 Tausender aus dem nämlichen Grunde 2 Zehner.

So schreitet man zu 3, 4, 5, 6, 7, 8 und 9 Zehner fort; ohne Mühe wird jeder Schüler finden, die Kubikwurzel von 27 Tausender sey, dieser Auflösung zu folge 3 Zehner von 64 Tausender aber 4, von 125 Tausender 5 u. s. w. Die dazwischen liegenden Zahlen aber immer zwischen diese Zehner hinein. Als Beleg mag folgende Aufgabe noch hier stehen.

Wie viel wird die Kubikwurzel von 68,000 seyn?

Auflösung. Von 64 ist sie 4 und von 64 Tausendern 4 Zehner; bleiben bis 68 Tausender noch 4 Tausender, die an die 3 Seiten des gefundenen Kubus angesetzt werden müssen. An einer Seite werden 4 Zehner ins Quadrat erhoben, oder $40 \times 40 = 1600$ Kubus, und an die 3 Seiten 3 mal so viel $= 4800$; diese Summe ist in dem Rest von 4000 kein mal enthalten; also giebt es keinen Einer mehr; folglich ist die Kubikwurzel von 68,000 40, und es bleibt ein Rest von 4000. Wären 90,000 angegeben worden, so hätte man zuerst auch 4 Zehner gefunden, und einen Rest von 26,000, der an 3 Flächen des gefundenen Kubus ebenso angesetzt werden muß. An einer Seite liegen 1600 und an 3 Seiten liegen 3×1600

$= 4800$; diese sind in 26,000 nur 4 mal enthalten (weil man für die Flächen- und körperlichen Winkel auch noch eine bedeutende Anzahl Würfel nöthig hat.) $4 \times 4800 = 1920$; für einen Flächenwinkel werden $4 \times 4 \times 40$ Kubus $= 640$, und für die drey Flächenwinkel $3 \times 640 = 1920$; für den körperlichen Winkel aber noch 4 in den Kubus erhoben $= 64$, erfordert, welches in allem $19{,}200 + 1920 + 64 = 21{,}184$, und diese Summe von 26,000 abgezogen bleiben noch 4816; folglich wird die Kubikwurzel von 90,000 vier und vierzig seyn und ein Rest von 4816 bleiben.

Ist der Schüler im Stande, mit einiger Leichtigkeit ähnliche Aufgaben zu lösen, so schreitet man zu tausend mal einem Tausender vor, deren Kubikwurzel ein Hunderter werden wird. 1000×1000 ist aber eine Million. Die Kubikwurzel von einer Million wird dem also ein Hunderter werden. Aus der obigen Reihenfolge geht ferner hervor, daß die Kubikwurzel von 8 Millionen 2 Hunderter, von 27 Millionen 3, von 64 aber 4 Hunderter u. s. w. seyn wird.

Ohne Mühe wird jeder Schüler auch im Stande seyn, die Kubikwurzel von Millionen als Kopfrechnungsübung auszuziehn und zu finden.

Doch darf dieses nicht zu weit fortgesetzt werden, wenn man nicht Gefahr laufen will, einen zu hohen Grad nur mechanischer Fertigkeiten entwickeln und erzielen zu wollen.

Ich halte deswegen hier ein und werde nur noch zeigen, wie mit Hülfe der Ziffer und der allenfalls zu befolgenden Regeln die Kubikwurzel von jeder Zahl mit eben der Leichtigkeit und Sicherheit von jedem Schüler als Zifferrechnungs-Uebung gefunden werden könne.

Sollte man aber die Kubikwurzel als Kopfrechnung gern noch weiter ausgeführt wissen, so darf ich dießfalls nur auf die Quadratwurzel verweisen.

Man soll von 34,900,000 die Kubikwurzel suchen, und zwar so, daß die Ziffer dem Schüler als Erinnerungs- und Erleichterungsmittel, so wie die Regel, nach welcher ähnliche Aufgaben gelöst werden, als Zifferrechnungs-Uebung dienlich seyn wird.

Um ihn mit Leichtigkeit dahin zu führen, wird man wohl thun, das, was über die Quadratwurzel aufgestellt worden ist, dieser Regel und dieser Operation näher zu rücken. Z. B. Wenn die Quadratwurzel einer Zahl Einer, Zehner, Hunderter in sich fassen soll, wie viele Ziffer wird die Quadratzahl jedesmal enthalten?

Antwort: für die Einer entweder eine oder 2 Ziffer, und zwar die Ziffer der Einer- und Zehnerstelle; für die Zehner wieder eine oder 2 Ziffer, und zwar solche, die Hunderter oder Tausender bezeichnen; für die Hunderter ebenfalls eine oder 2 Ziffer, und zwar Zehntausender oder Hunderttausender u. s. w.

Welche Ziffer geben für die Kubikwurzel Einer, welche Zehner, welche Hunderter u. s. w.?

Antwort: Einer geben die Ziffer der Einer-, Zehner- und Hunderter-Stelle, Zehner aber die der Tausender, Zehntausender und Hunderttausender; Hunderter endlich die der Millionen, Zehner- und Hunderter-Millionen.

Aus diesem folgt, daß die 3 ersten Ziffer rechts immer

mer Einer, die der 2ten drey Zehner, die dritten drey Hunderter, und die 4ten drey Tausender in der Kubikwurzel geben werden.

Sollen die Kubikwurzeln aus obiger Zahl gesucht werden; so fängt man wieder, wie bey der Quadratzahl an, stellt aber statt 2 Ziffer immer 3 zusammen.

Die Kubikwurzel von den letzten 2 Ziffern oder 34 ist 3, und weil es so viele Millionen sind, so giebt es als Wurzel 3 Hunderter; 3 Hunderter in Kubus erhoben werden 27 Millionen geben, und diese von 34 Millionen abgezogen bleiben 7 Millionen. Nach den Hundertern folgt die Wurzel in Zehner, und der Kubus in Tausender. Sieben Millionen in Tausender verwandelt machen 7000 Tausender, und weil keine Tausender in diesen künftigen 3 Stellen sich finden, so werden zu 7 Millionen nur die 3 Stellenbezeichner gesetzt, die 7000 Tausender müssen, weil es als Kubikwurzel keine Hunderter mehr giebt, als Zehner angesetzt werden, diesem zufolge muß wieder an 3 Flächen des gefundenen Kubus angelegt werden; an einer Fläche bedarf man 3 Hunderter in's Quadrat erhoben, giebt 9 Zehntausender, und an 3 Seiten 27 Zehntausender oder 270,000, um nur ein Einer mal anzusetzen, bedarf man diese Summe, und um einen Zehner zu erhalten, wird 10 mal diese Summe oder 2,700,000 erfordert, oder 2700 Tausender, und diese sind in 7000 Tausender 2 mal enthalten; 2 mal 2700 Tausender machen 5400 Tausender, und auf jeden der 3 Flächenwinkel kommt noch die Wurzel von drey Hunderter 2 Zehner mal 2 2 Zehner wiederholt, oder 120 Tausender, und dieses 3 mal genommen 360 Tausender; für den körperlichen Winkel aber 2 Zehner noch in den Kubus erhoben macht 8 Tausender, zusammen 5400 und 360 und 8, alles Tausender geben 5768 Tausender, von 7000 Tausender abgezogen bleiben noch 1232 Tausender, und weil es keinen Zehner mehr giebt, so verwandelt man diese Tausender in Einer, macht 1,232,000 Einer; diese müssen jetzt als Einer ganz auf obige Weise an den ersten Kubus angesetzt werden. Eine Seite des Kubus enthält 32 Zehner, in Kubus erhoben macht 102,400, und an die 3 Fächen 3 mal diese Summe = 307,200; diese Summe ist in 1,232,000 dreymal enthalten und 3 × 307200 = 921,600, und an jeden der 3 Flächenwinkel kommen die 32 Zehner oder 320 Einer 3 × 3 wiederholt macht 2880, und 3 mal dieses giebt 8640; auf den körperlichen Winkel aber noch 3 in Würfel erhoben gleich 27; in allen also 921,600 + 8640 + 27 = 930,267, und dieses von 1,232,000 abgezogen bleiben noch 301,733.

Die Kubikwurzel von obiger Zahl ist 323.

Aus dieser Auflösung geht aber folgende Regel hervor: zuerst wird beym Ausziehen irgend einer Kubikwurzel die Reihe Ziffer, von denen die Kubikwurzel ausgezogen werden soll, von der rechten Seite an, immer zu 3 und 3 Ziffer eingetheilt, und so oft in der Kubikzahl sich 3 Ziffer finden, erhält die Kubikwurzel dann eine Ziffer. Nach diesem wird aus den letzten 3 oder auch 2, oder auch nur einer Ziffer die Kubikwurzel auf die gewöhnliche Weise gesucht. Nach diesem werden die drey folgenden Ziffer zum Rest gesetzt, der durch die erste Auszeichnung geblieben ist, die gefundene Wurzel dann in's Quadrat erhoben, das Quadrat verdreyfacht, und hernach statt wie bey der Quadratwurzel nur eine Null, werden hier deren 2 angehängt, dann auf die gewöhnliche Art den Rest mit den folgenden 3 Ziffern dividirt, und so oft diese Summe darin enthalten ist, wird auch die gefundene Zahl noch in's Quadrat erhoben, eine Null angehängt und mit der ersten gefundenen Kubikwurzel multiplicirt; dieses 3 mal wiederholt, und endlich diese letztgefundene Wurzel noch in Kubus erhoben und alle diese Zahlen vom letzten Rest mit den 3 hinzugefügten Ziffern abgezogen. Die gleiche Wiederholung findet auch mit den folgenden 3 Ziffern statt, und wird bis zu den Einheiten jedesmal fortgesetzt werden.

Ich habe in der Aufstellung dieser Regel gar keinen Grund angegeben, weil das Wesen in allen vorhergehenden Auflösungen auf eine so anschauliche durch den Kubus selbst bedingte Darstellung hinlänglich begründet worden ist, und hier nur als eine ganz überflüssige Wiederholung angesehen werden müßte.

Ein Schüler, der im Stand seyn wird, die Regel anzugeben, auf der die Ausziehung der Kubikwurzel ruht, wird die Gründe, auf die sie sich stützt, mit noch weit größerer Leichtigkeit anzugeben fähig seyn.

Will man den Schüler mit dem Mechanismus dieser Rechnungsweise aber noch etwas mehr vertraut und bekannt machen, so mag man dem Schüler noch einige Beyspiele geben, und von ihm nur fordern, er möchte sie schnell nach oben angegebener Regel ausführen, ohne sich weiter mehr um die Gründe, auf denen sie ruht, zu bekümmern.

Will man bey dem übriggebliebenen Rest des Kubus seine Wurzel durch Annäherung, und zwar durch das Decimal-System, finden, wie es bey der Quadratwurzel geschehen ist; so setzt man an den Rest für die 10tel 3 Nullen an, für die 100tel 2 mal 3 Nullen, für die 1000tel aber 3×3 Nullen u. s. w.

Man verfährt dann bey der wirklichen Ausführung der Kubikwurzel, wie wenn es Ganze wären. Der obige Gang und die dabey aufgestellte Regel ist vollkommen anwendbar und wird der Kürze halber bey den Brüchen nicht noch einmal wiederholt werden.

Ich werde nur noch in ein paar Beyspielen zeigen, wie dieses auch auf die irrationellen Brüche bey der Kubikwurzel anwendbar sey.

Z. B. Es soll die Kubikwurzel in 10tel oder 100tel von einem $\frac{1}{2}$ gesucht werden. Will man sie von $\frac{1}{2}$ in 10tel wissen, so wird das Ganze in 1000 Theile getheilt, und auf das Halbe kommen dann $\frac{500}{1000}$. Die Kubikwurzel von 1000 ist 10, die von 500 aber 7, und bleiben noch $\frac{157}{1000}$; folglich ist Kubikwurzel von $\frac{1}{2}$ oder $\frac{500}{1000} = \frac{7}{10}$ und $\frac{157}{1000}$ bleiben Rest.

Würde man aber die Kubikwurzel von $\frac{1}{2}$ in $\frac{1}{1000}$ begehren; so müßte $\frac{1}{2} = \frac{500000}{1000000}$ verwandelt werden. Die Wurzel von einer Million ist 100 und die von 500 Tausender 7 Zehner; 7 Zehner in den Kubus erhoben giebt 343 Tausender, von 500 Tausender abgezogen bleibt noch 157 Tausender; diese werden an den erst gefundenen Kubus angesetzt. An einer Fläche liegen 7 Zehner, in den Kubus erhoben oder 4900 Hunderter, und an 3 Flächen

3 mal so viel = 14,700; der Rest ist 157 Tausender, in Einer verwandelt 157,000, und 14,700 sind in 157,000 neunmal enthalten; 9 mal 14,700 machen 132,300; ferner auf die Flächenwinkel dreymal 9 × 9 × 70 genommen, oder 17,010, und für den körperlichen Winkel 9 × 9 mal 9 oder 729; in allem 132,300 + 17,010 + 729 = 150,039; die Summe von 157,000 abgezogen bleiben noch $^{6961}/_{1000000}$; und die Kubikwurzel wird $^{79}/_{100}$ seyn. Wollte man die Wurzel in 1000tel kennen, so müßten 3 mal 3 Nullen angesetzt und auf die gleiche Weise verfahren werden.

Als weiterer Leitfaden und Stoff des Unterrichts kann das, was in der Quadratwurzel aufgestellt worden ist, benutzt werden.

Um einerseits nicht zu weitläufig zu seyn, anderseits aber nicht zu weit in einer einzigen Richtung vorzuschreiten, halte ich hier ein und knüpfe andere hieher gehörige Uebungen von ihrem Anfang an hier an.

Die Größe
als
Typus der geistigen Entwicklung für den Schulunterricht.

Der in der Formenlehre aufgestellte Gang wird auch hier mit den, aus der Natur des Gegenstands selbst hervorgehenden Abänderungen befolgt und auf folgende Weise angefangen werden müssen.

Eine gerade Linie kann ihrer Größe und Länge nach nicht verglichen werden; es müssen hiefür immer wenigstens zwey Linien oder Größen genommen werden. Die Betrachtung von zwey geraden Linien, die einander gleich oder ungleich seyn können, daß im Fall der Ungleichheit derselben, die eine länger oder kürzer als die andere ist, beruht nur auf sinnlichen Anschauungen und gehört nur so weit als Bildungsmittel in das häusliche Leben, oder dem ersten Stoff der Formenlehre an.

An diese ersten und ursprünglichen Begriffe wird aber auf folgende Weise angeknüpft werden.

Von zwey geraden Linien oder Größen, die einander gleich sind, kann in Hinsicht der Größenverhältnisse folgendes allgemein gesagt werden.

Eine jede von ihnen ist die Hälfte der Summe von beyden, und beyde sind zweymal diese Hälfte, oder wieder die ganze Summe.

Dieses auf 3 gleiche Linien ausgedehnt wird man für eine derselben $1/3$, für zwey $2/3$ und für drey drey Drittel oder die Summe von allen dreyen erhalten.

Auf 4 und mehrere Linien diese Untersuchung fortsetzen zu wollen, wird nicht nothwendig. Man schreitet dagegen auf die gleiche Art zu 2, 3 und 4 ungleich langen geraden Linien.

Bey 2 ungleich langen Linien kann man von der kürzern sagen, sie sey weniger als die Hälfte der Summe von beyden, die größere hingegen aber immer mehr als die Hälfte der Summe von diesen beyden; denn wenn die 2 Linien gleich wären, so würde nach obiger Darstellung von 2 gleich langen Linien eine jede die Hälfte seyn; im gegenwärtigen Fall ist die kleinere weniger als dieser Theil, indem sie so groß als die längere seyn müßte, wenn sie gerade eine Hälfte ausmachen sollte. Eben so die längere Linie zu der kürzern. Dieses auf eine andere Art zu lösen, darf man nur das, was ich dießfalls mit 3 ungleich langen Linien ausführen werde, in's Auge fassen.

Drey ungleich lange Linien stehen in folgendem Größenverhältniß zu einander:

Die größte von ihnen ist immer mehr als ein Drittel der Summe von allen dreyen; die kleinste hingegen immer weniger als ein Drittel, die mittlere aber $1/3$, und auch mehr oder weniger als $1/3$ der Summe.

Auflösung. Es werden 3 gleich lange Linien ge=

nommen; schneidet man von der ersten etwas weg, und wird dieses zur dritten Linie hinzugesetzt, so bleibt die Summe der drey Linien unveränderlich; die längste ist aber mehr als ein Drittel, die kürzeste weniger, die mittlere hingegen ein Drittel der Summe; wird aber von der ersten weg, und das Weggethane wieder zu der zweyten und dritten in ungleichen Theilen hinzugesetzt, so ist die längste mehr als ein Drittel, die kürzeste weniger als ein Drittel und die mittlere ebenfalls noch mehr als ein Drittel u. s. w.

Gestützt auf dieses, wird der Schüler ohne Anstand finden, daß bey 4 ungleichen Linien die längste immer mehr als ein Viertel, die kürzeste aber immer weniger als ein Viertel, die zwey mittlern hingegen können eine jede weniger, oder jede mehr als $1/_4$, oder eine $1/_4$ und die andere mehr oder weniger als $1/_4$, oder endlich eine mehr und die andere weniger als ein Viertel der Summe von allen 4 Linien seyn. Dieses soll von dem Schüler an den Linien ausgeführt werden. Mit 5 ungleich langen Linien die wichtigeren Verhältnisse von ihm angeben zu lassen, wird hinreichend werden. Hieher gehört, daß die längste von ihnen immer mehr als $1/_5$, die kürzeste hingegen immer weniger als $1/_5$ der Summe beträgt, die mittleren hingegen können alle Veränderungen, die mit mehr oder weniger des Fünfecks möglich sind, betragen.

Bey 3 Linien können aber 2 auch gleich und eine ungleich seyn. In diesem Fall betragen die zwey längern Linien jede mehr als $1/_3$ der Summe von allen drey u. s. w. —

Bey 4 Linien können 3 gleich und eine ungleich, oder auch 2 und 2 gleich seyn, und die gleichen Untersuchungen wieder vorgenommen werden.

Es ist überflüssig, dieses noch mit 5 und mehreren Linien hier auszuführen.

Einzelne Fragen, wie es bey der Formenlehre jedesmal geschehen ist, wird auch hier den Schluß jeder Uebung machen.

Frage. Was ist bey 20 ungleich langen Linien die längste immer für ein Theil der Summe aller?

Antwort. Immer mehr als $^1/_{20}$.

Was ist die mittlere von 3 ungleich langen Linien für ein Theil der Summe aller?

Antwort. $^1/_3$ oder auch mehr oder weniger als ein Drittel.

So wie man 2, 3, 4 rc. Linien in Rücksicht ihrer Länge zu einander in's Auge gefaßt; so kann man auch eine Linie in 2, 3, 4 rc. gleiche und ungleiche Theile theilen, und der Schüler wird auch alle obigen Größenverhältnisse unter dieser Form wieder finden. Z. B.

Eine Linie in 2 gleiche Theile getheilt, wird ein jeder Theil die Hälfte der Linien werden. Dieselbe in 2 ungleiche Theile getheilt, wird der größere immer mehr, und der kleinere immer weniger als die Hälfte der Linie ausmachen.

Bey 3 gleichen Theilen erhält ein jeder Theil $^1/_3$, und bey 3 ungleichen der größte immer mehr als $^1/_3$, der kleinste immer weniger als $^1/_3$, und der mittlere $^1/_3$, oder mehr oder auch weniger als $^1/_3$. Bey 2 gleichen und 1 ungleichen Theil werden 2 mehr und 1 weniger als $1/3$ und auch umgekehrt, betragen.

Auch hierüber können am Ende die obigen Fragen wiederholt werden.

Eben so kann man zu 2, 3, 4 rc. gleich langen Linien wieder gleich oder auch ungleich lange Linien hinzusetzen oder davon wegschneiden. Z. B.

Bey 2 gleich langen Linien zu einer eine Linie hinzugesetzt, entstehen ungleich lange Linien. Zu beyden gleich lange gesetzt, giebt wieder gleich lange; ungleich lange hinzugesetzt giebt immer ungleich lange Linien. So läßt man den Schüler mit 3 gleich langen Linien untersuchen, was durch das Hinzusetzen derselben entstehen könne. Er wird finden, daß wenn er zu einer etwas hinzusetzt, 2 gleich und 1 ungleich wird; setzt er zu 2 Linien gleiches, so entsteht wieder das Gleiche, setzt er zu allen 3 Linien gleiches, eben so u. s. w.

Wird aber Ungleiches hinzugesetzt, so werden alle 3 Linien ungleich. Das Nämliche soll auch mit 4 Linien geschehen. Ebenso kann das Gleiche vom Schüler mit ungleich langen Linien untersucht werden. Statt dieses aber hier auszuführen, folgen nur noch einzelne Fragen hierüber.

Wenn man zu 2 ungleich langen Linien 2 gleiche hinzusetzt, was für Linien entstehen? Werden aber 2 ungleichlange hinzugesetzt, was entsteht dann?

Antwort. Entweder 2 gleich lange, oder 2 ungleich lange Linien.

Wie müssen die ungleich langen Linien, die hinzugesetzt werden, beschaffen seyn, wenn gleich lange Linien entstehen sollen?

Antwort. Zu der kürzern muß eine Linie gesetzt werden, die um das länger ist, was ihr mangelt, um der längern gleich zu seyn.

Was muß man zu 3 gleich langen Linien setzen, wenn sie wieder gleich werden sollen? Was aber, wenn sie ungleich werden müssen? Was endlich, wenn 2 gleich und eine ungleich werden soll? Thut man zu 4 gleich langen Linien 2 und 2 gleiche hinzusetzen, wie viel werden einander gleich?

Die gleichen Reihenfolgen und Fragen können auch über das Wegthun von Theilen der Linien gemacht werden. Ein paar Beyspiele als Beleg mögen hier noch eine Stelle finden.

Fr. Wenn man bey 3 gleichlangen Linien von jeder einen ungleichen Theil wegnimmt, was werden die übrigen seyn?

Antwort. Ungleich.

Unter wie viel Veränderungen kann man von 3 gleichen Linien weg thun, wenn Ungleiches bleiben soll?

Antwort. Man kann von allen 3 oder nur von 2 Ungleiches weg thun.

Als Beschluß dieser Uebung mag das Hinzusetzen und Wegthun mit einander verbunden noch statt finden.

Fr. Wenn man zu 4 gleichen Linien gleiches hinzusetzt, und wieder gleiches abzieht, werden diese Linien alsdann verändert oder nicht?

Antwort. Es wird gleiches bleiben.

Wird aber zu 2 gleichen Linien Ungleiches hinzugesetzt und wieder Ungleiches abgezogen; so fragt es sich, ob wieder Gleiches bleibe?

Antwort. Entweder bleibt Gleiches oder Ungleiches.

Diese und ähnliche Fragen können wie natürlich nicht nur auf Linien, sondern auf alle Größenverhältnisse angewandt werden, und es wird ganz und gar nicht überflüssig, obige Begriffe auf folgende Weise zu erweitern und zu verallgemeinern.

Wenn man zu 3 gleichen Größen, sie mögen beschaffen seyn, wie sie wollen, wieder 3 ihnen gleiche Größen hinzusetzt, und wieder 3 ungleiche, aber ihnen ähnliche Größen wegthut; so fragt es sich, ob 3 gleiche oder 3 ungleiche Größen bleiben?

Antwort. 3 ungleiche Größen.

Zu 2 ungleichen Größen werden 2 ungleiche weg, und hernach wieder 2 ungleiche hinzugethan; es fragt sich, ob sie dadurch gleich oder ungleich geworden seyen?

Gestützt auf diese Vergleichung unvereinigter Linien, schreitet man zu deren Vereinigung.

Durch die Vereinigung von 2 geraden Linien entstehen, wie wir aus der Formenlehre schon wissen, Schenkel, Winkel, Ecken 2c. Die Untersuchung der Schenkel in Rücksicht ihrer Gleich- und Ungleichheit bietet wenig Wichtiges dar. Ich werde also nur in Kürze angeben, wie auch diese Ansicht nach Bedürfniß auf die zweckmäßigste Art ausgeführt werden könne.

Bilden 2 Linien nur 2 Schenkel, so ist in Hinsicht der Gleichheit und Ungleichheit keine andere Verände-rung, als die wir bey 2 Linien schon hatten, möglich. Bilden aber 2 gleichlange Linien 3 Schenkel, so sind entweder 2 gleich und einer ungleich, oder alle 3 un-gleich. Bey 4 Schenkeln, die durch 2 gleichlange Li-nien gebildet sind, werden entweder alle 4 gleich, oder 2 und 2 gleich, oder 2 gleich und 2 ungleich, oder 3 gleich und einer ungleich, oder alle 4 ungleich werden.

Eben so können 2 ungleich lange Linien behandelt werden. 3 Linien, die sich in 1, 2 und 3 Punkten vereinigen, können gleich untersucht werden, und zwar bey 3 gleichen, 2 gleichen und 1 ungleichen und bey 3 ungleich langen Linien. Es ist nicht nöthig, dieses weiter auszudehnen; da man sich schon bey 3 Linien mit den wichtigern Abänderungen begnügen kann.

Weil dieser Gesichtspunkt unbedeutend und außer den gewöhnlichen arithmetischen Kombinationen von glei-chen und ungleichen Größen nichts Neues darbietet, so übergehe ich auch die einzelnen Fragen und schreite zu den Winkeln.

Um mich in dieser Darstellung auch gedrängt und kurz fassen zu können, muß ich gleich anfangs bemer-ken, daß die in der Formenlehre aufgestellten Reihen-folgen hier volle Anwendung finden. Nach denselben können mit 2 geraden Linien 1, 2, oder 4 Winkel ge-macht werden. Ein Winkel kann nicht verglichen wer-den, es erfordert hiezu wenigstens 2.

Zwey Winkel können, in Rücksicht der Gleichheit, entweder gleich oder ungleich seyn. Sind sie gleich, so ist ein jeder ein Rechter. Sind sie aber ungleich, so wird der eine spitz und der andere stumpf seyn. Der spitze Winkel ist um das weniger, was der stumpfe Winkel mehr ist als ein rechter; zusammen betragen beyde die Summe von 2 rechten Winkeln. Oder unter den angenommenen dem Schüler jetzt bekannten Kunstausdruck gebracht: die Nebenwinkel sind entweder 2 rechte oder betragen mit einander 2 rechte Winkel.

Werden aber mit 2 Linien 4 Winkel gemacht, so können entweder 4 gleich, oder 2 und 2 gleich seyn.

Wünscht man den Schüler mit den einmal angenommenen Beweisformen vertraut und bekannt zu machen, so kann man denselben auffordern, er möchte durch die Nebenwinkel, welche 2 rechte betragen, hier zeigen, daß die Scheitelwinkel wirklich immer gleich groß seyen.

In Zeichnung 88. sind a und A die Scheitelwinkel, a und b betragen als Nebenwinkel 2 Rechte, und a und b ebenfalls, wird b von a und b und hinwieder von A und b weggethan, so hat man gleiches von gleichem weggethan; folglich muß gleiches bleiben,; es bleibt das paar Scheitelwinkel a und A.

Auf eine zweyte Art gelöst:

Sind a und b ꝛc. spitze und stumpfe Winkel, so ist b als spitzer um das weniger als ein rechter als a oder A mehr ist, als ein Rechter, und folglich ist a gerade um so viel mehr als ein Rechter, als auch A mehr als ein Rechter seyn wird.

So könnte dieses auf verschiedene Weise gelöst werden, die ich der Kürze halber hier übergehe.

Wie bey der Formenlehre, so können auch hier einige einzelne Fragen über die Winkel, die in 2 Punkten gebildet, an den Schüler gerichtet werden, bevor man zu 3 und mehreren Linien vorschreitet; z. B.

Wie viel rechte Winkel betragen die 4 Winkel, welche durch 2 Linien gebildet werden?

Antwort. Vier rechte.

Wie viel aber betragen die 2 Winkel, die durch 2 Linien gebildet werden?

Antwort. Zwey rechte.

Bildet man aber mit 2 Linien 2 ungleiche Winkel, um wie viel ist der spitze kleiner als der stumpfe?

Antwort. Um 2mal das, was der spitze kleiner ist, als ein rechter.

Werden aber 2 und 2 gleiche Winkel durch 2 Linien gebildet, um was sind die 2 stumpfern größer, als die zwey spitzen.

Antwort. Um 4mal das, was ein Stumpfer größer ist als ein Rechter, denn ein stumpfer Winkel ist immer um das größer als ein rechter, was der spitze kleiner ist; folglich ist von einem stumpfen Winkel zum spitzen 2mal die Größe dieses Winkels, und von 2 stumpfen Winkeln zu 2 spitzen 4mal diese Größe.

Wie viel rechte Winkel betragen die Nebenwinkel um einen Punkt herum.

Antwort. Vier rechte.

Wenn aber 2 und 2 gleich sind, wie viel betragen die einen und wie viel die andern zwey?

Antwort. 2 sind weniger, als die Hälfte der Sum=

me von 4 rechten, und 2 mehr als die Hälfte; oder 2 sind weniger als 2 rechte, und 2 mehr als 2 rechte.

Um wie viel sind sie mehr und um wie viel sind sie weniger als 2 rechte?

Mit 3 Linien in einem Punkt können 2, 3, 4, 5 und 6 Winkel gebildet werden.

Bey 2 Winkeln sind entweder 2 gleich oder beyde ungleich. Drey Winkel, alle 3 gleich oder 2 gleich und einer ungleich, oder alle 3 ungleich u. s. f. bis zu 6 Winkeln.

Mit dem rechten Winkel verglichen.

Zwey Winkel betragen mehr oder weniger als ein rechter. Drey Winkel, entweder 2 oder 4 rechte. 4, 5 und 6 Winkel betragen immer 4 rechte.

Werden 2 oder 3 oder 6 gleiche Winkel gemacht, so beträgt bey 2 gleichen ein jeder $1/2$ mehr oder weniger als ein halbrechter Winkel. Bey 3 ein jeder $2/3$ oder $4/3$, und bey 6 Winkeln ein jeder $2/3$. Werden aber 2 gleiche und ein ungleicher, oder 3 und 2 gleiche, oder 4 gleiche und ein ungleicher Winkel gemacht, so beträgt von den 2 gleichen und einem ungleichen einer 1 Rechten, und die 2 andern ein jeder $1 1/2$, oder einer weniger als ein Rechter und die andern ein jeder mehr als $1 1/2$ Rechte, oder einer mehr als 1 Rechter, und die andern weniger als $1 1/2$ Rechte; oder auch einer ein Rechter und die andern ein jeder $1/2$ Rechten u. s. w.; bey 3 und 2 gleichen ist einer der 3 gleichen 1 Rechter, und von den 2 gleichen jeder $1/2$ Rechter; bey 4 gleichen und 1 ungleichen ist jeder von den Vieren $2/3$ und der ungleiche $4/3$ Rechter.

Je mehr Winkel ungleich werden, desto unwichtiger sind die Veränderungen, die damit vorgenommen werden können. In der Reihenfolge bedarf dieses nicht weiter ausgedehnt zu werden, als es gegenwärtig angegeben worden ist. Hingegen sind einige einzelne Fragen hierüber nicht entbehrlich.

Werden mit 3 Linien in einem Punkt 2, 3, 4, 5 und 6 Winkel gebildet, wie viel rechte betragen sie jedesmal zusammen.

Antwort. Für 2, von mehr als Nichts, bis weniger als 2 jede Größe, bey 3 entweder 2 oder 4, und bey 4, 5 und 6 Winkeln immer vier rechte.

Werden mit diesen 3 Linien in einem Punkt 3 gleiche Winkel gemacht, wie viel rechte beträgt ein jeder?

Antwort. $^2/_3$ oder $^4/_3$ rechte.

Macht man aber 3 ungleiche Winkel, wie viel wird ein jeder betragen?

Antwort. Der kleinste immer weniger als $^2/_3$, oder weniger als $^4/_3$, der größte aber mehr als $^2/_3$ und mehr als $^4/_3$, der mittlere $^2/_3$ oder $^4/_3$, mehr oder weniger als $^2/_3$ und $^4/_3$. Um die $^2/_3$ und $^4/_3$ rechte zu machen, seht in der Formenlehre Zchg. 7 und 10.

Wie wir früher gesehen haben, so betragen bey 3 ungleichen Größen, die kleinere immer weniger, die größere immer mehr als $^1/_3$ der Summe aller 3. Nach Zeichnung 10. betragen die 3 Winkel 2, nach Zeichnung 7 aber 4 rechte.

Werden 3 mal 2 gleiche Winkel gemacht, wie viel rechte betragt dann ein jeder?

Antwort. 2 jeder mehr als $^2/_3$, zwey jeder weniger als $^2/_3$, 2 endlich mehr oder weniger als $^2/_3$ oder sind gleich $^2/_3$ rechte.

Wie viel Winkel können höchstens gleich und ungleich gemacht werden?

Wenn man einen rechten und 2 gleiche Winkel macht, wie viel beträgt dann ein jeder von den 2 gleichen?

Bevor man zur Untersuchung der Gleichheit und Ungleichheit der Winkel in 2 Punkten vorschreitet, kann man noch die wichtigeren Veränderungen, die mit 4, 5 6 Linien in einem Punkt gemacht werden können, vornehmen. Z. Ex.

Mit 4 Linien in einem Punkt können 3, 4, 5, 6, 7 und 8 Winkel gemacht werden.

Es wird bey jeder Anzahl untersucht, wie viel einander gleich oder ungleich seyn können. Dann werden die einzelnen und die Summe aller mit dem rechten verglichen werden. Bey dieser Untersuchung werden aber immer nur die wichtigern und schwierigern Fälle herausgehoben werden müssen.

Noch einige einzelne Fragen hierüber.

Fr. Welches ist die höchste Anzahl gleicher Winkel, die mit 4, 5 und 6 Linien in einem Punkt gemacht werden können? Wie viele Rechte betragen sie immer zusammen? Wie viel Rechte wird jeder einzelne Winkel in jedem Fall betragen?

Kann man mit 5 Linien in einem Punkt 5 gleiche Winkel machen? Wie viel beträgt dann ein solcher?

Antwort. $^4/_5$, oder $^2/_5$ Rechte.

Werden aber 5 ungleiche Winkel gemacht, wie viel beträgt der größte, kleinste und mittlere?

Antwort. Der größte mehr als $\frac{4}{5}$, oder auch mehr als $\frac{2}{5}$; der kleinste weniger als $\frac{4}{5}$ und auch weniger als $\frac{2}{5}$; die mittlern in allen Abwechslungen mehr oder weniger als $\frac{4}{5}$ und $\frac{2}{5}$; auch kann einer $\frac{2}{5}$ oder $\frac{4}{5}$ betragen. Mehrere können dieses aber nicht seyn, sonst würden sie einander gleich.

Macht man mit 6 Linien in einem Punkt 6 mal 2 gleiche Winkel, wie viel betragen die 2 größten, und wie viel die 2 kleinsten?

Antwort. Die 2 größten, ein jeder mehr als $\frac{2}{6}$, und die 2 kleinsten ein jeder weniger als $\frac{2}{6}$ Rechte.

Will man diese Fragen noch erweitern, so kann das, was bey 3 Linien in einem Punkt aufgestellt worden ist, auch hier als Leitfaden dienen. Will man noch einige Fragen über eine sehr hohe Anzahl Winkel, die in einem Punkt gebildet werden, machen; so kann es hier sehr füglich geschehen, und 3 Linien mögen diesfalls als Norm benutzt werden.

Die gleiche Ausführung findet auch mit 3 und mehreren Linien in 2 Punkten statt.

Das Wesentlichste und Wichtigste wäre mit 3 Linien in 3 Punkten die Untersuchung, wie viel bey 2, 3, 4, 5, 6 und 8 Winkeln einander gleich und ungleich gemacht werden können.

Macht man 2 Winkel, so findet man, daß entweder 2 gleich oder 2 ungleich sind. Bey 3 sind aber alle 3 gleich, oder 2 gleich und einer ungleich, oder alle 3 ungleich.

Macht man 4, so sind ebenfalls wieder alle Abänderungen möglich. Bey 5 Winkeln hingegen können entweder alle 5 gleich, oder 4 gleich und 1 ungleich, oder 3 und 2 gleich, oder 2 und 2 gleich und einer ungleich gemacht werden.

Mit 6 können entweder alle 6 gleich, oder 4 gleich und 2 ungleich, oder 2 und 2 und 2 gleich, oder 3 und 3 gleich, oder aber endlich 2 und 2 gleich und 2 ungleich gemacht werden.

Mit 8 Winkeln werden entweder alle 8 gleich gemacht, oder 4; 2 und 2 gleich, oder 4 und 4 gleich, oder 2, 2, 2 und 2 gleich.

So werden die Winkel im Ganzen und auch im Einzelnen mit dem rechten verglichen.

Mit 3 Linien in 2 Punkten werden zwey Winkel gemacht und untersucht, wie viel Rechte sie zusammen betragen.

Der Schüler wird finden, daß von wenigstens mehr als Nichts und bis zu weniger als 4 Rechten, jede Größe gemacht werden könne.

Die 3 Winkel mit 3 Linien in zwey Punkten betragen von mehr als 2 Rechten bis zu weniger als 4 wieder jede Größe.

Vier Winkel aber so gebildet, betragen immer nur 4 rechte. 5 Winkel von mehr als 4 rechten bis weniger als 6, jede Größe. Sechs Winkel immer nur 6 Rechte. 8 Winkel auch immer nur 8 Rechte.

Mit 4 Linien in 2 Punkten können die gleichen Uebungen statt finden. Ich halte eine diesfällige weitere Ausführung in dieser Schrift für ganz überflüssig.

Einige einzelne Fragen über die oben ausgeführten Reihenfolgen, so wie über 4 und 5 Linien in 2 Punkten, mögen diese Uebung schließen.

Fr. Wie viele gleiche Winkel können mit 3 Linien in 2 Punkten höchstens gemacht werden? Wie viel aber höchstens ungleich? Wie viel Rechte betragen sie in dem einen oder andern Fall alle zusammen? Werden aber mit diesen Linien in 2 Punkten 2 Winkel gemacht, wie viel Rechte können sie höchstens und wie viel wenigstens mit einander betragen? Wie viel Rechte beträgt in dem einen und andern Fall jeder einzelne Winkel? Kann man mit diesen Linien in 2 Punkten auch 3 gleiche Winkel machen? Was beträgt denn ein jeder?

Antwort. Ein Rechter.

Wenn man mit 3 Linien in 2 Punkten eine Summe von 1, 2, 3, 4, 5, 6 und 8 rechten Winkeln macht, wie viel Winkel müssen für jeden dieser Fälle gemacht werden?

Antwort. Für einen Rechten müssen 2 Winkel, für 2 Rechte 2, für 3 Rechte 3 u. s. w. gemacht werden.

Diese Untersuchung mit der Form der Winkel in Verbindung gesetzt, wäre nur eine Verbindung der Formlehre mit der Größenlehre und würde eigentlich nicht nothwendig; könnte aber dann und wann als eine kleine Abänderung eine Stelle finden. Z. B.

Wenn man mit 3 Linien in 2 Punkten weniger als

4 rechte Winkel macht; so fragt es sich, was dieses für Winkel seyen?

Antwort. Entweder 2 stumpfe, oder 2 rechte und ein stumpfer, oder 2 stumpfe und 1 spitzer Winkel.

Werden aber mit diesen Linien 6 rechte Winkel gemacht, was haben dieselben für eine Form?

Noch einige Fragen über 4, 5 und noch mehrere Linien in 2 Punkten.

Wie viel rechte Winkel betragen diejenigen in 2 Punkten höchstens und wenigstens?

Antwort. Höchstens 8 rechte und wenigstens mehr als nichts.

Kann man dieses mit jeder Anzahl Winkel in 2 Punkten machen.

Antwort. Ja.

Wie viel Winkel, die gleich sind, kann man höchstens mit 5 Linien in 2 Punkten machen?

Antwort. 12.

Wie viel wird einer von diesen Winkeln betragen?

Antwort. $\frac{2}{3}$ rechte.

Wenn man aber so 12 Winkel macht, wie viel können einander ungleich seyn.

Antwort. Es sind immer 2 einander gleich, und giebt diesem nach 6 mal 2 gleiche Winkel.

Wie viel betragen die größten und kleinsten immer?

Antwort. 4 der größten betragen immer mehr als $\frac{2}{3}$ rechte, und die 4 kleinsten immer weniger als $\frac{2}{3}$ rechte.

Werden mit 4 Linien in 2 Punkten 4 Winkel gemacht, wie viel rechte können dieselben mit einander betragen?

Antwort. Von mehr als 2 bis weniger als 6 rechte jede Größe. (S. Zchg. 19 und 17.)

Macht man in dieser Verbindung die höchste Summe und alles gleiche Winkel, wie viel wird dann ein jeder betragen?

Antwort. $^4/_3$ Rechte.

Von wie vielerley Größen können mit 4 Linien in 2 Punkten Winkel gebildet werden?

Antwort. 1, 2, 3, 4 oder fünferley Größen.

Wenn mit 9 und 10 Linien die höchste Anzahl Winkel in 2 Punkten gemacht werden, können alle einander gleich seyn?

Antwort. Mit 9 Linien können alle einander gleich seyn, mit 10 hingegen nicht.

Wie viel beträgt ein jeder der ersten Verbindungsart?

Weil die Winkel sowohl in ihrer Gleichheit als auch Ungleichheit einen wesentlichen Einfluß auf das Gleich- und Ungleichlaufend seyn der Linien haben, und umgekehrt, so muß dieses hier näher erörtert werden.

Die gleich- und ungleichlaufenden Linien bestimmen die Gleich- und Ungleichheit der Winkel, und zu dem wird eine genaue Kenntniß dieser 2 Verhältnisse erfordert, um die folgenden Größenbestimmungen aller Formen angeben zu können. Hiefür werden die 3 Linien in 2 Punkten in Rücksicht ihres Gleich- und Ungleichlaufendseyns noch einmal in Kürze wiederholt und angegeben. Z. B.

Man läßt den Schüler untersuchen, wie viel von den 2, 3, 4, 5, 6 und 8 Winkeln, wenn 2 Linien gleichlaufend sind, einander gleich und ungleich seyen. Das Nämliche, wenn sie ungleichlaufend sind. In dem einen und andern Fall werden sicher alle Veränderungen, die möglich sind, mit der größten Leichtigkeit von dem Schüler gefunden werden.

Kostet es ihn keine Anstrengung, alle diese Abänderungen zu erschöpfen, so ist es nicht einmal mehr nöthig, ihn alle diese Fälle auffsuchen zu lassen.

Eben so werden die Winkel in dem einen und andern Fall auch mit dem rechten, wenigstens in den wichtigsten Fällen verglichen. Die oben aufgestellten einzelnen Fragen haben ihre volle Anwendung; sie dürfen aber nicht mit der Ausdehnung, wie es schon geschehen ist, noch einmal wiederholt werden.

Als Anleitung für den Lehrer mögen noch ein paar Fragen hier eine Stelle finden.

Macht man mit 2 gleichlaufenden und einer ungleichlaufenden Linie 2 Winkel, so können beyde gleich seyn. Wenn sie gleich sind, wie viel Rechte werden sie betragen?

Antwort. Von mehr als nichts bis zu weniger als 4 Rechten jede Größe.

Macht man aber in 2 Punkten mit drey ungleichlaufenden Linien 8 Winkel, wie viel sind dann einander gleich? Welche Winkel kann man hier nur bey den gleichlaufenden Linien machen?

Antwort. 8 gleiche.

Kann man 4 und 4 gleiche Winkel bey den gleich- und ungleichlaufenden Linien machen?

Antwort. Beyde Fälle sind möglich.

Wichtiger aber wird die Bestimmung mit dem rechten Winkel, wenn man es noch mit der Lage der Winkel, als Gegen= und Wechselswinkel in Verbindung setzt. Dieses soll mit dem Schüler also durchgeführt werden.

Um sich aber den angenommenen üblichen Auflösungsarten zu nähern, so kann diese Untersuchung, wie folgt, statt finden.

Man läßt den Schüler untersuchen, was die 2 innern Gegenwinkel bey 2 gleichlaufenden Linien für Eigenschaften haben.

Er wird finden, sie können gleich oder ungleich seyn. Sind sie gleich, so beträgt ein jeder einen Rechten. Sind sie ungleich, so ist der eine um das mehr als ein Rechter, was der andere weniger als ein Rechter ist, zusammen wieder 2 Rechte. Die innern Gegenwinkel sind bey gleichlaufenden Linien 2 Rechte, oder sie betragen 2 Rechte. Durch die Zurückführung auf das, was der Schüler jetzt von den Gegenwinkeln weiß, soll er auf die nämliche Weise, wie es bey den Scheitelwinkeln geschehen ist, zeigen, daß die äußern Gegenwinkel bey gleichlaufenden Linien auch 2 Rechte betragen, oder daß die innern und äußern Gegenwinkel einander gleich sind, und eben so, daß die innern Wechselwinkel einander gleich sind; ferner die äußern Wechselwinkel, und endlich betragen die innern und äussern Wechselwinkel 2 Rechte.

Für den ersten Fall mag folgende Auflösungsart dienen. (S. Zchg. 89.)

$a + A$ sind gleich 2 rechte; $a + B$ und $A + b$ sind gleich 4 Rechte, als Nebenwinkel; werden von den letzten

4 Winkel a und A weggethan, so hat man 2 Rechte weggelassen, es bleiben also noch 2 Rechte für die Winkel B und b, welches die äußern Gegenwinkel sind.

Auflösung für den zweyten Fall. B und a betragen als Nebenwinkel 2 Rechte; a und A ebenfalls zwey Rechte als innere Gegenwinkel; wird a von den ersten 2 Winkeln, so wie auch von den zweyten abgezogen, so hat man Gleiches von Gleichem weggethan, folglich muß auch Gleiches bleiben; die Winkel B und A sind folglich wie alle innern und äußern Gegenwinkel bey gleichlaufenden Linien einander immer gleich.

Auflösung für den dritten Fall.

D und A betragen als Nebenwinkel 2 Rechte, und a + A ebenfalls als innere Gegenwinkel von gleichlaufenden Linien. Nimmt man A davon weg, so hat man wieder Gleiches von Gleichem weggethan, folglich muß Gleiches bleiben, es bleiben D und a, die als innere Wechselwinkel von gleichlaufenden Linien daher immer einander gleich sind.

Auflösung für den vierten Fall.

B und a betragen als Nebenwinkel 2 Rechte, D und d ebenfalls; nun ist aber a gleich D als innere Wechselwinkel; Gleiches von Gleichem weggethan, bleibt Gleiches; a von B + b und D von D + d, bleibt für das erste B und das zweyte d Gleiches. Folglich sind die äußern Wechselwinkel einander immer gleich.

Auflösung für den fünften Fall.

B und a betragen als Nebenwinkel 2 Rechte, a und D sind gleich als innere Wechselwinkel von gleichlaufenden Linien; folglich kann für a auch D gesetzt werden, ohne die Größen zu verändern. Also betragen B und D auch 2 Rechte. Daher die innern und äußern Wechselwinkel von gleichlaufenden Linien mit einander immer 2 Rechte bilden.

Daß auch mit den Wechselwinkeln, und zwar mit den innern oder äußern, der Anfang hätte gemacht werden dürfen, geht aus dieser Darstellung hervor; eben so, daß alle diese Fälle sehr mannigfaltig gelöst werden können. Ich führe aber hier keine andere und weitere Auflösung mehr an, und schreite zur Untersuchung der Eigenschaften der Winkel, die mit ungleichlaufenden Linien gebildet werden.

Die innern Gegenwinkel betragen, wie es der Schüler leicht finden wird, bey den ungleichlaufenden Linien keine 2 rechte Winkel. Sie sind entweder mehr oder weniger, und zwar von etwas mehr als Null bis zu weniger als 4 Rechte jede Größe.

Die äußern Gegenwinkel von ungleichlaufenden Linien betragen wieder von mehr als nichts bis zu weniger als 4 Rechte, 2 Rechte ausgenommen jede Größe.

Die innern und äußern Gegenwinkel von ungleichlaufenden Linien hingegen sind immer ungleich; eben so sind die innern Wechselwinkel, die äußern Wechselwinkel von ungleichlaufenden Linien einander immer ungleich, und betragen von etwas mehr als nichts, bis zu weniger als 4 Rechte, jede Größe.

Nachdem der Schüler diese Reihenfolge so durchge=

führt hat, können noch folgende einzelne Fragen an ihn gerichtet werden.

Frage. Was haben die innern Wechselwinkel bey gleichlaufenden Linien für eine Eigenschaft? Welche bey den Ungleichlaufenden? Was für Eigenschaften haben die innern Gegenwinkel bey ungleichlaufenden, und welche bey gleichlaufenden Linien?

Die innern Gegenwinkel sind gleich; es fragt sich, ob die Linien gleich oder ungleichlaufend seyen? Sie sind ungleich, und es fragt sich das Nämliche. So wieder bey den andern Winkeln.

Welche Winkel sind bey den gleichlaufenden Linien immer gleich, und welche aber immer ungleich? Welche betragen immer mit einander 2 Rechte?

Wenn die innern Gegenwinkel mehr als 2 Rechte betragen, so fragt es sich, ob die Linien gleich oder ungleichlaufend seyen? Auf welcher Seite treffen die Linien durch die Verlängerung zusammen, wenn die innern Gegenwinkel mehr als 2 Rechte betragen?

Antwort: Auf der Seite, wo dieselben mehr als 2 Rechte betragen.

Auf welcher Seite treffen sie aber bey ungleichen innern Wechselwinkeln zusammen?

Antwort: auf derjenigen Seite, wo der kleinere Winkel ist.

Diese Fragen können noch weiter ausgedehnt werden. Es folgen hier aber einige einzelne Fragen über die Form der Winkel nach diesem Gesichtspunkt.

Was sind die innern Gegenwinkel in Rücksicht ihrer Form für Winkel bey gleichlaufenden Linien?

Antwort: entweder Rechte, oder der eine ein spitzer und der andere ein stumpfer.

Die innern Wechselwinkel sind stumpfe; es fragt sich, ob die Linien gleich- oder ungleichlaufend seyen.

Drey Linien in 3 Punkten zu verbinden, wird ganz der obige Gang, und die obigen Reihenfolgen beobachtet werden.

Mit 3 Linien in 3 Punkten kann man jede Anzahl Winkel von 3 bis 12 nur keine 11 bilden, und so kann auch hier untersucht werden, wie viele gleich und ungleich gemacht werden können.

Bey 3 Winkeln sind 3 gleich, oder 2 gleich und einer ungleich, oder alle 3 ungleich.

Vier Winkel können alle gleich, oder 3 gleich und einer ungleich, oder 2 und 2 gleich, oder 2 gleich und 2 ungleich, oder alle 4 ungleich seyn. Auf diese Weise läßt man den Schüler dieses mit 5, 6 ꝛc. Winkel fortsetzen.

Bey 12 Winkeln findet man 6 und 6, oder 4 und 4 und 4; oder 6 mal 2; 4 und 4 mal 2; oder 2, 2, 4 und 4 gleich.

Vier, 5 und mehrere Linien in 3 Punkten zu verbinden, und die Gleichheit der Winkel zu untersuchen, wird auf dieser vorgerücktern Stufe für den Schüler nicht mehr nothwendig. Man kehrt wieder zu 3 als der kleinsten Anzahl Winkel zurück, und untersucht, wie viel rechte alle zusammen und jeder einzelne betrage.

Hier kommen wir zur ersten Aufgabe, die durch Anschauung allein nicht mehr gelöst werden kann, sondern auf früher begründete Anschauung durch geistige Schlüsse zurückgeführt werden muß. Dieß kann unter andern auf folgende Art geschehen. Um es auf Gegen- und Wechselwinkel von gleich- und ungleichlaufenden Linien, und dadurch auf die Anschauung zurückzuführen, müssen gleichlaufende Linien gezogen werden.

(Zchg. 90.) Der Winkel a ist gleich a′, und b = b′ als innere Wechselwinkel von gleichlaufenden Linien; der Winkel a, b und c sind als Nebenwinkel 2 Rechte, und a′, b′ und c sind eben so groß, also betragen die Winkel des Dreyecks auch 2 Rechte mit einander. Auf eine zweyte Art gelöst.

(Zchg. 91.) Der Winkel a′ ist gleich a als innerer Wechselwinkel, b′ gleich b als innere und äußere Gegenwinkel von gleichlaufenden Linien; a, b und c betragen als Nebenwinkel 2 Rechte, also a′, b′ und c ebenfalls 2 Rechte, und diese 3 Winkel bilden diejenigen des Dreyecks.

Aus dieser Auflösungsart geht ferner noch hervor, daß der äußere Winkel eines Dreyecks so groß ist als seine 2 innern, mit denen er nicht Nebenwinkel ist. Die Winkel a und b müssen zu diesem Behuf nur als ein Winkel in's Auge gefaßt werden.

Ich führe der Kürze halber nur 2 Auflösungen an, wiewohl auf sehr mannigfaltige Weise bestimmt, und auf frühere Anschauung zurückgeführt werden kann, daß die Winkel eines jeden Dreyecks mit einander 2 Rechte betragen.

Gestützt auf dieses wird fortgefahren zu untersuchen, wie viel Rechte, die 4, 5, 6, 7 rc. Winkel, die mit 3 Linien in 3 Punkten gebildet werden, mit einander betragen..

Bey 4 Winkel findet der Schüler, daß sie von mehr als 2 Rechte bis weniger als 4 Rechte jede Größe betragen.

Bey 5 Winkel von mehr als 4 bis zu weniger als 6 jede Größe. —

Bey 6 von mehr als 4 bis zu 6 Rechten auch jede Größe.

Noch einige Fragen über diese Reihenfolge.

Frage: wie viel betragt einer von den 3 gleichen Winkeln eines Dreyecks?

Antwort: ⅔ Rechte; denn alle 3 betragen 2 Rechte, und wenn sie gleich sind, so kommt auf einen der dritte Theil von 2 Rechten oder ⅔ Rechte.

Wenn aber alle 3 ungleich sind, wie viel wird ein jeder betragen?

Antwort: der größte mehr als ⅔, der kleinste weniger als ⅔, und der mittlere aber ⅔ und mehr, auch weniger als ⅔ Rechte.

Die Auflösung ruht auf dem allgemeinen Verhältniß von 3 ungleichen Größen zu einander.

Sind 2 gleich und der ungleiche ein Rechter, wie viel ist dann einer von den 2 gleichen? Wie viel, wenn diese 2 ungleich sind?

Antwort: einer mehr als ½, und der andere weniger als ½ Rechter.

So kann das gleiche gefragt werden, wenn der ungleiche spitz, oder wenn er stumpf ist.

Werden mit 3 Linien in 3 Punkten 3 gleiche und ein ungleicher Winkel gemacht, wie viel wird ein jeder betragen?

Antwort: ein jeder von den 3 gleichen wird $^2/_3$, der ungleiche aber $^4/_3$ Rechte betragen.

Werden aber 2 und 2 gleiche Winkel in dieser Verbindung gemacht, wie viel enthält dann ein jeder? Wie viel betragen 5 Winkel, die mit 3 Linien in 3 Punkten gemacht werden wenigstens und höchstens mit einander? Wie viel aber die höchste Anzahl Winkel, die mit 3 Linien in 3 Punkten gemacht werden können?

Antwort: 12 Rechte.

Werden mit 3 Linien in 3 Punkten 6 und 6 gleiche gemacht; so fragt es sich, wie viel ein jeder von ihnen betrage? Welcher Winkel ist demjenigen außer dem Dreyeck gleich? Sind 2 Winkel außer dem Dreyeck größer oder kleiner als die 3 in demselben?

Antwort: immer größer.

So wird dieses auf 3 und 4 Winkel außer dem Dreyeck ausgedehnt werden.

Sind die 3, 4, 5 2c. Winkel außer dem Dreyeck einander gleich oder ungleich? Wie viel betragen sie, wenn die 3 einander gleich sind?

Auch können die Arten der Dreyecke noch berücksichtiget werden. Z. B.

Wie viel beträgt jeder einzelne Winkel des rechtwinklichten Dreyecks? Wie viel die des stumpfwinklichten, wenn 2 einander gleich sind? u. s. w.

Wie

Wie viel betragen die 3 Winkel, welche von 4 Linien in 3 Punkten gebildet werden, wenigstens und höchstens?

Antwort: mehr als nichts und weniger als 6 Rechte.

Kann man jede Größe von etwas bis zu weniger als 6 machen? Ist das nämliche möglich, wenn 2 und 2 Linien gleichlaufend sind?

Wie viel gleiche Winkel kann man höchstens mit 4 Linien in 3 Punkten machen?

Antwort: 12.

Wie viel wird ein jeder betragen?

Antwort: ein Rechter.

Wie viel können aber gleich gemacht werden, wenn man von 2 Arten macht?

Antwort: 10 und 4 gleich.

Wie viel betragt dann ein jeder?

Antwort: Von den 10 beträgt jeder $\frac{2}{3}$, und von den 4 jeder $\frac{4}{3}$ rechte Winkel. Das gleichwinklichte oder gleichseitige Dreyeck muß hiefür benutzt werden.

So können noch einzelne Fragen über 5, 6 und noch mehrere Linien, die sich in 3 Punkten vereinigen, gegeben werden. Ich überlasse dieses dem Gutachten des Lehrers und schreite dagegen zu der Verbindung von 4 Linien in 4 Punkten.

Aus der Formlehre weiß der Schüler schon, daß bey 4 Linien in 4 Punkten 4, 5, 6 bis 18 jede Anzahl Winkel zu bilden möglich wird.

Weil hier in Rücksicht der Gleich- und Ungleichheit, so wie auch in Hinsicht der Vergleichung mit dem rechten Winkel eine bedeutende Mannigfaltigkeit statt findet, so wird man wohl thun, wenn man zuerst 2 paar, dann ein paar gleichlaufende Linien, und endlich die ungleichlaufenden untersucht.

Mit 2 paar gleichlaufenden Linien giebt es von 4 bis zu 16 jede Zahl Winkel, nur keine 16.

Die 4 Winkel sind entweder alle gleich, oder 2 und 2 gleich. Dieses darf durch die Anschauung begründet ohne weitern Beweis angenommen werden, oder im Fall man es beweisen will, so kann es auf folgende Art geschehen:

Werden die inneren Gegenwinkel in der Verbindung von 4 Linien in 4 Punkten als Rechte angenommen, so sind alle 4 Rechte, denn sie dürfen nur als 4 paar innere Gegenwinkel in's Auge gefaßt werden. Sind sie aber spitze und stumpfe, und will man beweisen, daß immer 2 und 2 einander gleich werden, so kann es auf folgende Art geschehen.

(Zchg. 94.) In dieser Verbindung sollen 2 paar gleichlaufende Linien seyn. Der Winkel a ist stumpf und b spitz, und es soll gezeigt werden, daß a = A und b = B werde. a + b betragen als innere Gegenwinkel von gleichlaufenden Linien 2 Rechte, eben so b + A; wird b von dem ersten und zweyten paar Gegenwinkel abgezogen, so hat man gleiches von gleichem weggethan, folglich bleibt gleiches, daher ist a = A. Ebenso wird gezeigt, daß b = B sey, woraus hervorgeht, daß ein Parallelogramm entweder 4 oder 2 und 2 gleiche Winkel enthält.

Gestützt auf dieses kann mit der größten Leichtigkeit gezeigt werden, wie viel Winkel bey jeder Anzahl durch 2 und 2 paar gleichlaufende Linien in 4 Punkten gleich und ungleich gemacht werden können.

Bey 5 Winkeln werden 5 gleich, oder 3 und 2 gleich gefunden werden. Bey 6 aber 6 gleich, oder 3 und 3 gleich, oder 4 und 2 gleich u. s. w. Mit 16 Winkel können 16 oder 8 und 8 gleich gemacht werden.

Würden aber nur 2 gleichlaufende und 2 ungleichlaufende Linien in 4 Punkten auf diese Weise verbunden, so gäbe es bey 4 Winkeln entweder 2 und 2 gleiche, oder 2 gleiche und 2 ungleiche, oder 4 ungleiche Winkel. Für den zweyten Fall müßte man 2 rechte und 1 spitzen und 1 stumpfen Winkel machen. Durch die gleichlaufenden Linien kann bewiesen werden, daß sie alsdann ungleich sind, da man das eine Paar nur als innere Gegenwinkel von gleichlaufenden Linien, die 2 Rechte betragen, in's Auge fassen kann; das andere aber als von ungleichlaufenden Linien u. s. w.

Dieses ist aber als durch die Anschauung hinlänglich bewiesen anzunehmen, und kann auch ohne weiters auf dieses gebaut fortgeschritten werden.

Mit 5 Winkeln, die von 2 gleich= und von 2 ungleichlaufenden Linien in 4 Punkten gebildet werden, sind 3 gleich und 2 ungleich, oder 2 gleich und 3 ungleich, oder auch alle 5 ungleich.

(Zchg. 95.) Die Winkel a und b betragen als innere Gegenwinkel von gleichlaufenden Linien 2 Rechte, b und c sind innere Gegenwinkel von ungleichlaufenden Linien, wird b von beyden paar Winkeln abgezogen, so hat man Gleiches von Ungleichem weggethan, also bleibt unglei=

ches. Folglich ist der Winkel a dem Winkel c nicht gleich. Eben so kann gezeigt werden, daß b ungleich d werde; a ist e als innerer und äußerer Gegenwinkel von ungleichlaufenden Linien auch ungleich.

Nach dieser Auflösung kann man leicht zeigen, daß, wenn auf diese Weise 16 Winkel gemacht werden, entweder 8, 4 und 4 gleich, oder aber 4 mal 4 gleich werden.

Alle Fälle hier erschöpfen zu wollen, wird aber nicht mehr nöthig. Eben so wenig müssen alle Veränderungen, die mit 4 ungleichlaufenden Linien in 4 Punkten möglich sind, untersucht werden.

Bey 4 Winkeln können entweder 3 gleich und 1 ungleich, 2 gleich und 2 ungleich, oder 4 ungleich gemacht werden.

Wollte man 2 und 2 gleiche machen, so würden 2 und 2 Linien gleichlaufend, oder 2 gleichlaufend und 2 ungleichlaufend seyn.

Die höchste Anzahl Winkel aber, die hier gemacht werden kann, ist 18, deren Untersuchung und Auflösung nicht übergangen werden darf.

Man wird finden, daß in dieser Verbindung in Rücksicht ihrer Gleich= und Ungleichheit folgende Fälle gemacht werden können: 3 mal 4 gleich und 6 gleich; oder 4, 6 und 4 mal 2 gleich, oder 8, 6 und 4 gleich, oder 2 mal 4 und 5 mal 2 gleich, und so giebt es noch mehrere sehr wesentliche Abänderungen.

Auflösung des ersten Falls.

Man macht ein gleichwinklichtes Dreyeck, theilt einen Winkel in 2 gleiche Theile und verlängert alle diese Linien, so daß 18 Winkel entstehen. Es giebt erstens 6 gleiche, stumpfe, wovon ein jeder $^4/_3$ Rechte beträgt, dann 4 Nebenwinkel, wovon jeder $^2/_3$ Rechte ist, 2 Winkel sind jeder in 2 Theile getheilt, und betragt einer davon $^1/_3$ Rechte. Die Winkel eines jeden Dreyecks betragen 2 Rechte, einer von den Winkeln des durch diese Theilung entstandenen Dreyecks betragt $^1/_3$, ein anderer $^2/_3$ Rechte, folglich bleibt für den dritten Winkel ein Rechter, die 3 Neben- und Scheitelwinkel dieses Rechten sind folglich auch Rechte.

Auflösung der zweyten Verbindung.

Es wird einer der Winkel des gleichwinklichten Dreyecks in 2 ungleiche Theile getheilt, und man erhält dadurch wieder 6 Winkel von $^4/_3$; 4 von $^2/_3$; 2 von mehr als $^1/_3$; 2 weniger als $^1/_3$ Rechte; die Winkel eines Dreyecks enthalten 2 Rechte, da einer aber mehr als $^1/_3$ und der andere $^2/_3$ Rechte ist, so kommt in dem einen Dreyeck auf den dritten Winkel weniger als ein Rechter, sein Nebenwinkel wird daher mehr als ein Rechter; folglich hat es noch 2 Winkel, die mehr und 2, die weniger als 1 Rechter betragen.

Auflösung der dritten Verbindung.

Es wird ein rechtwinklichtes Dreyeck mit 2 gleichen Winkeln gemacht, und der rechte Winkel wird in 2 gleiche Theile getheilt, dann werden alle Linien so verlängert, daß man 18 Winkel erhält. Dadurch giebt es 8 Winkel, die halbrechte sind; 4, wovon ein jeder $1^1/_2$ Rechter, und endlich 6, wovon jeder ein Rechter ist.

In der vierten Verbindung wird im nämlichen Dreyeck der rechte Winkel statt in gleiche, in 2 ungleiche Theile getheilt.

Wird der Schüler mit Leichtigkeit diese Verbindung auflösen und darstellen; so darf diese Uebung nicht mehr weiter ausgedehnt werden, und man kehrt zu der Vergleichung der Winkel mit dem Rechten zurück.

Werden mit 2 paar gleichlaufenden Linien in 4 Punkten 4 Winkel gemacht, so soll der Schüler untersuchen, wie viel Rechte sie mit einander betragen. Dasselbe geschieht auch mit 2 gleichlaufenden und 2 ungleichlaufenden und endlich mit 4 ungleichlaufenden Linien.

Das Parallelogramm hat 4 innere Gegenwinkel und diese betragen, weil die Linien gleichlaufend sind, immer mit einander 4 Rechte.

Die Winkel eines Vierecks mit 2 gleichlaufenden Seiten können auch als 2 paar innere Gegenwinkel von gleichlaufenden Linien in's Auge gefaßt werden; folglich bilden sie mit einander auch 2 mal 2 Rechte oder 4 Rechte. Daher die Winkel eines Paralleltrapezes ebenfalls 4 Rechte betragen.

Das Viereck mit ungleichlaufenden Seiten wird durch eine Hülfslinie in 2 Dreyecke zerlegt; die Winkel eines Dreyecks betragen 2 Rechte; die Winkel dieser 2 Dreyecke sind zugleich auch die Winkel des Vierecks; folglich betragen dieselben so viel als diejenigen von 2 Dreyecken, oder 4 Rechte.

Mit Hülfe der Dreyecke hätten auch die beyden vorhergehenden Fälle gelöst werden können. Um Weitläufigkeit zu vermeiden übergehe ich die verschiedenen Auflösungen, die über diese Aufgaben noch möglich sind.

Wie man in der Formenlehre gesehen hat, so giebt es auch Vierecke, die 3 innere und einen äußern Winkel haben (S. Zchg. 96.). Diese 4 Winkel kann man so klein machen als man will, und höchstens betragen sie weniger als 4 Rechte.

Auflösung: Um diese Winkel so klein zu machen als man will, ergiebt sich durch die Anschauung. Daß sie aber immer weniger als 4 Rechte betragen, muß auf frühere Anschauung zurückgeführt werden. Es wird in dieser Zeichnung eine Hülfelinie gezogen; die Winkel a + a sind gleich A und b + b gleich B; folglich ist A + B gleich a + a + b + b, oder der äußere Winkel eines solchen Vierecks ist so groß als die 3 innern Winkel desselben. Ein Winkel ist aber immer weniger als 2 Rechte, und also der äußere und die 3 innern weniger als 4, und alle zusammen folglich immer weniger als 4 Rechte.

Führe ich auch hier nur eine Auflösung an, so ist mit dieser gar nicht gemeint und gesagt, daß sich der Schüler gerade nur nach derselben richten soll. Es können wenigstens ein halbdutzend ganz verschiedene Auflösungen über diese Aufgabe gemacht werden.

Wenn der Schüler mit der freyen Unbefangenheit arbeitet, wie vorausgesetzt wird, indem man diesen Gang befolgt, so wird ein Schüler auf die eine, ein anderer auf eine 2te Auflösungsart von selbst fallen. Wie diese schöpferischen Selbsterzeugnisse behandelt werden müssen, habe ich mich in dem, was ich über die Zahl und Formenlehre bereits ausführlich dargelegt habe, so umständlich geäußert, daß man es nur als eine Wiederholung ansehen muß, wenn ich diesfalls gegenwärtig noch einmal eintreten sollte.

So wie 4 Winkel in 4 Punkten durch 4 Linien gebildet, mit dem Rechten verglichen worden sind, so schreitet man zu 5, 6, 7, 8 rc. bis zu 18 Winkeln fort. Die Abtheilung in Parallelogramme, Paralleltrapeze und Trapeze ist aber hiefür nicht mehr nothwendig.

Für 5 Winkel wird man von mehr als 2 Rechten bis zu weniger als 6, jede Größe machen können. Um die geringste Summe zu erhalten, bedarf man Zchg. 96. und für die höchste 95.

Mit 6 Winkeln ist die geringste Summe mehr als 4, und die höchste weniger als 8. Auch hiefür können, wie bey den meisten Fällen dieser Art, obige Zeichnungen benutzt werden. —

Will man den Schüler hierin sehr zweckmäßig üben und beschäftigen, so fordert ihn der Lehrer auf, gerade 5 oder 6, 7 oder weniger als 5 Rechte zu machen. Wird der Schüler mit Leichtigkeit solchen Anforderungen zu entsprechen im Stande seyn; so darf die oben angedeutete Reihenfolge nicht mehr sehr weit ausgedehnt werden. Je höher die Anzahl Winkel, die jedesmal gebildet wird, ist; desto unwichtiger wird auch die Uebung.

Zum Beschluß noch einige einzelne Fragen über 4 Linien in 4 Punkten.

Frage: wie viel Rechte betragen die 4 Winkel eines Vierecks immer? Wie viel diejenigen eines Vierecks mit einem äußern Winkel? Wie verhält sich der äußere zu den 3 innern Winkeln? Wie viel betragen 8 Winkel von 4 Linien in 4 Punkten gebildet, höchstens und wenigstens?

Wie viel Winkel können höchstens mit 4 Linien in 4 Punkten gleich gemacht werden? Können 6, 7 oder mehr oder weniger als 6, 7 Rechte gemacht werden? Von wie vielerley Größen kann man mit 4 Linien in 4 Punkten Winkel machen?

Antwort: von neunerley Größen.

Wenn die innern Winkel eines Vierecks gleich sind, und der äußere ein rechter ist, wie viel wird alsdann jeder einzelne betragen?

Antwort. Ein drittels Rechter.

Sind sie aber ungleich und der äußere ebenfalls ein Rechter, wie viel beträgt denn ein jeder?

Antwort. Der größte mehr und der kleinere weniger als $\frac{1}{3}$, der mittlere kann aber mehr oder weniger, oder auch $\frac{1}{3}$ Rechte betragen.

Ist in einem Trapez, welches 2 rechte Winkel hat, der äußere stumpfe auch gleich dem innern stumpfen?

Antwort. Ja. (S. Zchg. 97.)

a und a sind Rechte, folglich betragen m und d zusammen genommen auch 2 Rechte; eben so viel sind d und m als Nebenwinkel; wird d von d + m, und von d + M weggethan, so wird m gleich M werden. Auf die nämliche Weise kann bewiesen werden, daß der spitze Winkel d auch gleich D ist.

Wird im gleichwinklichten Dreyeck ein Winkel in 2 gleiche Theile getheilt, und diese Linie bis zur gegenüberstehenden Seite verlängert, wie viel Winkel werden dadurch einander gleich? Wie viel Rechte wird ein jeder betragen? Steht diese Theilungslinie recht= oder schiefwinklicht auf der gegenüberstehenden Seite, wie viel rechte Winkel wird dann jeder betragen? Aehnliche Fragen werden über andere Dreyecke auch gegeben, aber zu dem ungleichwinklichten wird es nicht fortgesetzt. Wird der Winkel eines gleichwinklichten Dreyecks in 2 ungleiche Theile getheilt; so fragt es sich, ob diese Theilungslinie auf der gegenüberstehenden Seite recht= oder schiefwinklicht stehe? Auch diese Frage wird wieder auf andere Dreyecke angewandt. Wenn man in einem Dreyeck, das 2 gleiche Winkel hat, und der ungleiche die Hälfte von einem der gleichen ist, einen von den gleichen in 2 gleiche Theile theilt, so fragt es sich, ob die Theilungslinie recht= oder schiefwinklicht auf die gegenüberstehende Seite zu stehen komme? Wie viel Winkel werden dadurch einander gleich?

Antwort. 3 gleich, 2 gleich und 1 ungleich.

Wie viel Rechte wird ein jeder davon betragen?

Antwort. 3 betragen jeder $\frac{2}{5}$, 2 jeder $\frac{4}{5}$, und einer $\frac{6}{5}$ Rechte.

Die Auflösung über diese Fragen soll der Schüler ohne allen Anstand zu machen im Stande seyn, wenn er sich alle aufgestellten Reihenfolgen gehörig eingeübt haben wird.

Wie viel Rechte wird jeder Winkel in Figur 98 betragen, wenn die Winkel b einander gleich sind? Desgleichen, wenn der Winkel a doppelt so groß als b ist?

Antwort. Der Winkel b $\frac{2}{5}$ und a $\frac{4}{5}$ Rechte.

Auflösung. a und b machen einen Winkel von 3mal dem Winkel b aus; folglich bleiben für die 2 andern Winkel b des Dreyecks noch 2 solcher Theile; auf einen Winkel b kommt der fünfte Theil von den Winkeln des Dreyecks oder von 2 Rechten, gleich 2/5 Rechte.

Wenn man in einem ungleich rechtwinklichten Dreyeck vom rechten Winkel auf die gegenüberstehende Seite eine rechtwinklichte Linie zieht; so fragt es sich, wie viel gleiche Winkel dadurch entstehen?

Antwort. 2, 2 und 2 gleiche.

Auflösung. (Um ein Dreyeck mit Buchstaben zu bezeichnen, bedarf man nur die 3 Buchstaben, die an ihren drey Ecken stehen, auf gewöhnliche Weise niederzuschreiben; eben so werden die Winkel bezeichnet, mit dem Unterschied, daß der Buchstabe des Scheitelpunktes in die Mitte zu stehen kommt. Eine Linie o der Seite wird hingegen mit 2 Buchstaben bezeichnet.)

(Zchg. 99.) Vom rechten Winkel a b c ist die Linie b d rechtwinklicht gezogen worden; die Winkel a d b und b d c sind recht. In dem Dreyeck b d c sind die Winkel b d c und d c b gleich den Winkeln a b c und b c a des Dreyecks a b c; folglich ist der dritte Winkel des ersten Dreyecks d b c, gleich dem dritten des zweyten Dreyecks b a c; auf gleiche Weise kann gezeigt werden, daß der Winkel d b a gleich d c b werde, und daher 3 mal 2 Winkel einander gleich sind.

Werden diese 4 Linien in 4 Punkten so verlängert, daß 18 Winkel entstehen; so fragt es sich, wie viel einander gleich oder ungleich werden?

Antwort. 4, 4, 6, 2 und 2 gleich.

Auch diese Auflösung gründet sich so ganz auf die obige, daß der Schüler gar keinen Anstand finden wird, diese Gleichheit der Winkel aufzufinden und anzugeben.

Wird einer der 2 gleichen Winkel des rechtwinklichten Dreyecks in 2 gleiche Theile getheilt, wie viel Winkel werden dadurch einander gleich? Was für einen Theil von einem Rechten wird jeder enthalten? Wird er aber in 2 ungleiche Theile getheilt, wie viel gleiche und ungleiche Winkel wird es geben, und wie viel wird jeder betragen?

Wünscht man diesfalls noch mehrere einzelne Fragen, so kann das, was bey 2, 3 und mehreren Linien, in 1, 2 und 3 Punkten statt gefunden hat, auch auf 4 übergetragen werden.

4 Linien in 5 Punkten verbunden, ist in seinen Resultaten weniger wichtig, als in 4, und darf diesfalls nicht mehr in der Ausdehnung dem Schüler zur Untersuchung vorgelegt werden; folgende Uebungen und Reihenfolgen sind hinreichend.

Er soll untersuchen, wie viel Winkel einander gleich, und ungleich seyn können, wenn 2 gleichlaufende und 2 ungleichlaufende Linien in 5 Punkten 7 und 8 Winkel bilden.

Bey 7 Winkeln findet er, 5 und 2 gleich, oder 4 und 2 gleich und einer ungleich, oder 3 und 2 gleich und 2 ungleich, oder 2 und 2 gleich und 3 ungleich u. s. w.

Die Lösung aller dieser Fälle ist ganz leicht. Z. B. um 5 und 2 gleiche Winkel zu machen, wird in dem gleich=

winklichten Dreyeck nur eine Linie mit einer Seite gleichlaufend gezogen; so sind die spitzen Winkel einander gleich als Winkel vom gleichwinklichten Dreyeck, und 2 andere als innere und äußere Gegenwinkel von gleichlaufenden Linien ꝛc.

Um 4 gleiche, 2 gleiche und einen ungleichen Winkel zu machen, wird in einem Dreyeck, welches 2 gleiche Winkel hat, an einer Seite, die dem ungleichen Winkel gegenüber steht, noch eine gleichlaufende Linie gezogen ꝛc.

Um 6 und 2 gleiche Winkel zu machen, werden aber, nach Zchg. 100, zwey gleichwinklichte Dreyecke gemacht. Bey 5 und 3 gleichen Winkeln wird in dem gleichseitigen Dreyeck eine Linie mit einer Seite gleichlaufend gezogen, und hernach eine verlängert ꝛc.

Auch können die Winkel jedesmal, sowohl im Ganzen als auch die einzelnen, mit dem Rechten verglichen werden.

Werden 7 Winkel gemacht, so betragen sie zusammen immer 6 Rechte; denn es giebt ein Dreyeck und 1 Viereck; die Winkel des Dreyecks betragen 2 und die des Vierecks 4 zusammen 6 Rechte. Sind 5 und 2 gleich, so ist jeder der 5 gleichen $^2/_3$, und jeder der 2 gleichen $^4/_3$ Rechte. Die Auflösung gründet sich auf das gleichwinklichte Dreyeck und dem der innern Gegenwinkel von gleichlaufenden Linien.

Bey 8 Winkeln betragen sie von mehr als 4 bis weniger als 8 Rechte, jede Größe. Werden 6 und 2 gleiche gemacht, so betragen alle zusammen $6^2/_3$ Rechte; 6 davon

$^2/_3$, 2 aber $^1/_3$ Rechte. Die weitere Ausführung wird, auf dieses begründet, keine Schwierigkeiten mehr darbieten.

Wenn man mit 2 gleichlaufenden und 2 ungleichlaufenden Linien die höchste Anzahl Winkel bildet, wie viel können einander gleich und ungleich seyn? Wie viel Rechte betragen alle mit einander? Wenn aber 10 und 10 Winkel gleich sind, wie viel wird jeder einzelne betragen?

Antwort. Von 10 ein jeder $^2/_3$ und von den andern ein jeder $^1/_3$ Rechte.

Wenn man mit 4 ungleichlaufenden Linien in 5 Punkten 20 Winkel macht, wie viel können höchstens gleich gemacht werden? Wie viel höchstens untereinander ungleich? wie viel Rechte werden sie auch in diesem Fall betragen?

Aehnliche Reihenfolgen und Uebungen werden auch mit 4 Linien in 6 Punkten statt finden; doch wird die Ausführung noch gedrängter seyn dürfen.

Einige einzelne Aufgaben werden hierüber hinreichen.

Frage. Welches ist die kleinste Anzahl Winkel mit 4 Linien in 6 Punkten, und wie viel können einander gleich seyn?

Antwort. 11 ist die kleinste Anzahl, und von dieser können 3, 3, 2 und 2 gleich und einer ungleich seyn.

Auflösung. (Zchg. 100.) a b c ist ein gleichwinklichtes Dreyeck, und der Winkel f g a ist recht. Aus dieser Verbindung der Linien folgt, daß die Winkel b a c und b c a einander gleich sind und jeder $^2/_3$ Rechte beträgt. f g a und f g c sind Rechte; die Winkel f a g und f g a des Dreyecks f g a betragen diesem zufolge $1^2/_3$ Rechte, folglich bleibt für den dritten Winkel desselben Dreyecks noch ⅓ und für f m b desgleichen; weil die 2 Winkel m b f und m f b des Dreyecks m f b 1⅔ Rechter ausmachen; c m g ist als Scheitelwinkel gleich f m b, also wieder 3 Winkel von ⅓ Rechter u. s. w.

Würde die Linie f g, statt rechtwinklicht, schiefwinklicht auf a c gezogen; so gäbe es 3, 2 und 2 gleiche und 4 ungleiche Winkel. Gestützt auf obige Auflösung, wird auch diese Aufgabe keine Schwierigkeiten mehr darbieten.

Würden durch die erste Verbindungsart von 4 Linien in 6 Punkten 24 Winkel gemacht werden, so würden 6 ein jeder ⅔, 6 jeder ⁴⁄₃, 4 jeder ein Rechter, 4 jeder ⅓, und endlich 4 jeder ⁵⁄₃ Rechte betragen.

In der zweyten Verbindung gäbe es aber 2 mal 6 und 6 mal 2 gleiche Winkel. Von den 2 mal 6 gleichen würden 6 jeder ⅔, und 6 aber ⁴⁄₃ Rechte, und ein jeder von den 6 mal 2 gleichen, der eine mehr oder weniger als diese Theile von einem Rechten betragen; z. B. 2 mehr als ein Rechter, und 2 jeder wieder um das weniger als ein Rechter; 2 weniger als ⅓ und wieder 2 um das mehr als ⁵⁄₃ Rechte u. s. w.

So werden bey den andern Dreyecken wieder Linien gezogen, und je regelmäßiger sie sind, desto leichter ist das Verhältniß der Winkel unter einander zu bestimmen. Der Anfang muß daher aber immer bey dem Regelmäßigen gemacht werden.

Ich fange an, die einzelnen Fragen auf dieser Stufe als entbehrlich zu behandeln. Mit 5 Linien dürfen nur noch die wichtigern Verbindungen gemacht werden. Ich schreite daher auch gleich zu der Verbindung von 5 Linien in 5 Punkten.

Die geringste Anzahl Winkel sind 5. Diese können in Rücksicht der Gleich = und Ungleichheit allen Veränderungen, die mit 5 möglich sind, unterworfen werden; als 5 gleich, 4 gleich und einer ungleich, oder 3 gleich und 2 ungleiche ꝛc.

Mit dem Rechten verglichen, wird jeder Schüler mit Leichtigkeit finden, daß die 5 Winkel in dem Fünfeck immer zusammen 6 Rechte betragen. Dieses kann durch das Dreyeck oder durch das Viereck gemeinschaftlich gelöst werden. Z. B.

Durch das Dreyeck gelöst. Das Fünfeck wird in Dreyecke zerlegt, dadurch erhält man 3 Dreyecke; folglich betragen die Winkel des Fünfecks 3 mal 2 oder 6 Rechte.

Auch kann von einem Punkt aus, der im Fünfeck liegt, dasselbe in 5 Dreyecke zerlegt werden. Die Winkel von 5 Dreyecken betragen 5 mal 2 oder 10 Rechte. Die Winkel aber um diesen angenommenen Punkt herum betragen 4 Rechte; diese 4 von 10 Rechten abgezogen bleiben noch 6 Rechte.

So kann das Fünfeck in 2 Vierecke zerlegt werden. Die Winkel von 2 Vierecken betragen 8 Rechte. Um diese Verwandlung des Fünfecks zu erhalten, macht man ein Paar Nebenwinkel, die nicht dazu gehören und 2 Rechte betragen; 2 von 8 abgezogen, bleiben noch 6 Rechte. Eben so kann das Viereck in ein Dreyeck und in ein Viereck verwandelt werden. Die Winkel des Dreyecks betragen 2 und die des Vierecks 4, zusammen 6 Rechte.

So

So mannigfaltig diese Auflösungen auch sind, so können deren noch mehrere gemacht werden, die von den so eben aufgestellten sehr verschieden sind. Der Kürze halber übergehe ich sie, und stelle über das Fünfeck nur noch folgende einzelne Fragen auf.

Frage. Wie viel beträgt ein Winkel eines Fünfecks, wenn alle einander gleich sind?

Antwort. $6/5$ Rechte; denn alle zusammen betragen 6 und einer davon der 6te Theil oder $6/5$ Rechte.

Wenn aber alle 5 einander ungleich sind, wie viel wird jeder einzelne betragen?

Antwort. Der größte mehr als $6/5$; der kleinste weniger als $6/5$; die mittlern aber $6/5$, oder mehr oder weniger als $6/5$ Rechte.

Sind aber 4 gleich und einer ungleich, und ist der ungleiche ein Rechter, wie viel wird dann ein jeder von den gleichen betragen?

So kann man den Schüler noch das Sechs-, Sieben-, Acht-, Neun- und Zehneck, die aber ihre Winkel alle in den Figuren haben, untersuchen lassen.

Das Sechseck beträgt 8 Rechte, und wenn die Winkel gleich sind, so ist einer davon $4/3$ Rechte; sind sie aber ungleich, so wird der größte mehr und der kleinste weniger als $4/3$ Rechte seyn.

Die Winkel eines Siebenecks betragen 10 Rechte; wenn alle gleich sind, so ist einer $1\,3/7$ Rechte. Wenn aber 6 gleich und der Ungleiche ein Rechter ist, so wird einer von den Gleichen $3/2$ Rechte enthalten.

Ein Achteck enthält 12 Rechte u. s. w.

Zum Beschluß dieser Uebung werden folgende einzelne Fragen dienen.

Wie viel Rechte beträgt das Drey=, Vier=, Fünf=, Sechseck?

Um wie viel Rechte steigen die Winkel bey jeder Figur, die eine Seite mehr hat als die vorhergehende? Um wie viel, wenn sie 2 Seiten mehr hat? In welchen geschlossenen Räumen sind die Winkel doppelt, oder 3 oder 4 mal so groß, als die des Dreyecks? In welchen doppelt und dreyfach so viel als die des Vierecks?

So wie die Winkel durch alle diese Verbindungen von Linien hindurch unter sich, ihrer Größe halber, so wie auch mit dem rechten Winkel verglichen worden sind, muß auch das Gleiche mit den Ecken statt finden. Der Anfang kann mit 2 Linien, die ein Eck bilden, gemacht werden.

Die Größe eines Ecks allein kann nicht verglichen werden; es müssen wenigstens 2 hiefür seyn. In Hinsicht des rechten Winkels kann er von mehr als 2 bis weniger als 4 jede Größe enthalten. Soll das Eck gerade 3 Rechte betragen, so muß der Winkel dieses Ecks ein Rechter seyn. Im Fall er mehr als 3 Rechte enthalten soll, ein spitzer, und ist er weniger als 3 Rechte, so muß der Winkel stumpf seyn.

Bildet man mit 3 Linien in 2 Punkten 2 Ecken; so können beyde einander gleich und auch ungleich seyn, und betragen alsdann von mehr als 4 bis zu weniger als 8 rechte jede Größe.

Drey Ecken mit 3 Linien gebildet, können 3 gleich oder 2 gleich und einer ungleich, oder alle ungleich gemacht werden. Zusammen betragen diese 3 Ecken immer 10 Rechte; denn die Winkel des Dreyecks betragen 2 Rechte, diejenigen um 3 Punkte herum aber 12 und die 2 von den 12 abgezogen, bleiben folglich für die Ecken noch 10 Rechte.

So werden die Ecken, welche mit 4 Linien gebildet sind, wieder verglichen werden.

Bey 4 Ecken wird der Schüler finden; 4 =, 2 gleich und 2 gleich, 3 gleich und 1 ungleich oder alle 4 ungleich. Mit einander betragen sie immer 12 Rechte; denn die Ecken und Winkel um vier Punkte herum machen mit einander 16 Rechte, die Winkel des Vierecks betragen aber 4 Rechte; 4 von 16 abgezogen bleiben noch 12 Rechte.

Anders verhalten sich die Ecken, wenn sich ein Eck in dem Viereck befindet. (S. Zchg. 96.) In diesem Fall bilden sie von 12 bis weniger als 16 Rechten jede Größe; denn die Winkel dieses Vierecks können von mehr als nichts, bis zu weniger als 4 jede Größe enthalten.

Werden mit 5 Linien in 5 Punkten 5 Ecken gemacht, so können sie in Rücksicht der Gleichheit und Ungleichheit alle Veränderungen bilden, die mit 5 Größen möglich sind. Diese Ecken betragen an Rechten immer 14; denn die Winkel eines Fünfecks betragen immer 6 Rechte, und diese von 20 abgezogen, bleiben für die Ecken noch 14 Rechte. Nun giebt es aber auch Fünfecke, die eines und auch solche, die 2 Ecken in der Figur haben; in diesem Fall ändert sich die Größe mit dem Rechten verglichen. Aber eben so ändert sich auch die Größe der Winkel in den verschiedenen 5 Ecken, denn die Ecken sind abhängig von den Winkeln.

Würde man dem Schüler zu bestimmen geben, wie viel die 5 Winkel eines Fünfecks, welches einen äußern Winkel hat, betragen, so würde er finden, von mehr als 2 bis zu weniger als 6 jede Größe.

Auflösung. (Zchg. 101.) Es wird in diesem Fünfeck die Hülfslinie a b so gezogen, daß das Fünfeck dadurch in 2 Vierecke zerlegt wird; die Winkel eines Vierecks betragen 4 Rechte; zusammen 8 Rechte. Die 2 Nebenwinkel, die dadurch gebildet werden, gehören nicht zum Fünfeck, 2 von 8 abgezogen bleiben noch 6 Rechte. Die Ecken mit den 4 innern Winkeln des Fünfecks betragen also 6 Rechte. Will man die kleinste Summe Rechte, so macht man den Winkel a so klein als möglich, und dadurch wird sein Eck beynahe 4 Rechte. Dieses Eck von den 6 Rechten des Fünfecks abgezogen, bleiben noch mehr als 2 Rechte für die innern Winkel; folglich sind die 5 Winkel des Fünfecks zusammen wenigstens mehr als 2 Rechte. Will man die höchste Summe Rechte, so macht man den Winkel a so groß als man kann, also weniger als 2 Rechte, und sein Eck wird in diesem Fall mehr als 2 Rechte, und mehr als 2 in dem Fünfeck von den 6 Rechten abgezogen, bleibt für die 4 innern Winkel noch weniger als 4 und weniger als 2 für den äußern, zusammen weniger als 6 und folglich betragen in diesem Fall die 5 Winkel des Fünfecks weniger als 6 Rechte.

Von mehr als 2 bis zu weniger als 6 Rechten können demnach in dieser Form die Winkel eines Fünfecks jede Größe enthalten. Sind aber alle Winkel in dem Fünfeck, so betragen sie immer 6 Rechte. Diesem zufolge betragen die 5 Ecken des Fünfecks, das einen äußern Winkel hat, von 14 Rechten bis zu weniger als 18 jede Größe.

Auch diese Aufgabe könnte wenigstens auf ein halb Dutzend verschiedene Arten gelöst werden, und es wird nicht fehlen, der Schüler wird dieselben auch ohne weiteres Zuthun des Lehrers finden.

Es können aber auch Fünfecke gemacht werden, die 2 innere Ecken oder 2 Winkel außer demselben haben; auch in diesem Fall wird wieder untersucht werden, wie viel Rechte die 5 Winkel, und wie viel die Ecken betragen.

Der Schüler wird finden: die Winkel können von mehr als 2 bis zu weniger als 6 Rechte jede Größe enthalten; die Ecken wieder von mehr als 14 bis zu weniger als 18 jede Größe.

Auflösung. (Zchg. 102.) Es werden die 2 Hülfslinien a b und b c gezogen. Um die höchste Summe der Rechten zu bilden, werden die 3 innern Winkel des Fünfecks so groß als möglich gemacht, betragen aber immer weniger als 2 Rechte, denn die Winkel c a b, a b c und b c a machen als die 3 Winkel des Dreyecks nur 2 Rechte; der Winkel a d b kann nie 2 Rechte betragen; desgleichen c f b, also sind diese 2 Winkel immer weniger als 4 Rechte, und dieses zu weniger als 2 gezählt giebt für die Winkel des Fünfecks höchstens weniger als 6 Rechte.

Um die geringste Größe dieser Winkel zu erhalten, werden die 3 innern Winkel so klein gemacht als möglich;

sie betragen aber immer etwas. Man verlängert c f bis zu p, und a o bis zu q; der Winkel b f c ist gleich f b p + b p f als äußerer Winkel des Dreyecks f p b; aus dem gleichen Grund ist der Winkel b d a gleich b q d + q b d; also die 2 Winkel des Fünfecks gleich den 3 Winkeln q b p + b p s + b q s des Vierecks b q s p, und 3 Winkel eines Vierecks sind schon immer größer als 2 Rechte; folglich werden die 2 Winkel b d a und b f c immer mehr als 2 Rechte; die innern Winkel betragen auch noch etwas, in allem also mehr als 2 Rechte. Die Ecken dieses Fünfecks betragen also wenigstens 14 Rechte, und höchstens weniger als 18.

Auch diese Aufgabe wird ganz gewiß sehr mannigfaltig ohne weitere Hülfe, die der Lehrer zu leisten hat, von dem Schüler gelöst werden können. So schreitet man zu dem Sechseck. Man weiß aus der Formlehre schon, daß es Sechsecke mit 1, 2 und 3 innern Ecken giebt. Zuerst werden die 6 Winkel und 6 Ecken bey einem, dann bey 2 und endlich bey 3 innern Ecken untersucht werden.

Für den ersten Fall werden die Winkel von mehr als 4 bis weniger als 8, und die Ecken von mehr als 16 bis weniger als 20 Rechte jede Größe enthalten.

Für den zweyten Fall werden die Winkel von mehr als Null bis zu weniger als 8 jede Größe, die Ecken aber von mehr als 16 bis weniger als 24 Rechte auch jede Größe erhalten.

Für den dritten Fall endlich werden die Winkel von mehr als 4 bis weniger als 8, die Ecken aber von mehr als 16 bis zu weniger als 20 Rechte jede Größe bilden können.

Die Auflösungen sind denen des Fünfecks ganz gleich; um aber dem Lehrer hinlänglich ausgeführten Stoff an die Hand zu geben, werde ich den zweyten Fall noch auflösen.

(Zchg. 103.) Alle Winkel können in dieser Verbindung von 6 Linien so klein oder so groß gemacht werden, als man immer wünscht, nur können die innern 4 Winkel nie so groß gemacht werden, als die des Vierecks; folglich immer weniger als 4 Rechte; eben so betragen die beyden äußern Winkel weniger als die Winkel der zwey Dreyecke, oder weniger als 4 Rechte; zusammen betragen sie daher weniger als 8 Rechte. Um aber die Größe der Ecken in dieser Figur zu bestimmen, wird die geringste und höchste Summe des Betrags der Winkel abgezogen. Etwas von 24 abgezogen bleibt für die Ecken weniger als 24 für die höchste Summe, und weniger als 8 von 24 abgezogen bleibt für die geringste Summe mehr als 16 Rechte.

Auf ganz gleiche Weise läßt man den Schüler die Ecken und Winkel des Sieben=, Acht=, Neun= und selbst des Zehnecks untersuchen, und zwar beym Siebeneck mit 1, 2, 3 und 4 innern Ecken; beym Achteck mit 1, 2, 3, 4 und 5 innern Ecken u. s. w.

Die Auflösungen beym Fünf= und Sechseck können als Leitfaden dienen, und kein Schüler, der gut geführt worden ist, soll und darf mehr auf Schwierigkeiten stoßen, die er nicht mit der größten Leichtigkeit zu überwinden im Stande wäre. Bevor man mit ihm aber weiter schreitet, können noch einige einzelne Fragen über diese eben aufgestellten Reihenfolgen und Uebungen gegeben werden.

Frage. Wie viel Rechte betragen die Winkel eines Zehnecks, welches ein inneres Eck hat, höchstens und wenigstens mit einander? Wie viel dessen Ecken? Wie viel aber die Winkel und wie viel die Ecken, wenn dasselbe 7 innere Ecken hat? Wie viel, wenn die Ecken alle außer demselben liegen?

In was für einem Verhältniß steht der äußere Winkel eines Vierecks zu den 3 innern?

Antwort. Er ist immer gleich den innern.

Wie viel Rechte betragen die 4 Winkel eines Vierecks mit einem äußern Winkel? Wie viel die Ecken? Wie viel höchstens und wie viel wenigstens?

Hat der äußere Winkel des Fünfecks zu seinen innern auch ein unverändertes Verhältniß.

Antwort. Nein.

Aber die 2 äußern Winkel des Fünfecks?

Antwort. Jeder ist gleich den 3 innern Winkeln mehr noch dem Nebenwinkel, der entsteht, wenn man einen Schenkel des andern Winkels verlängert.

Auflösung. (Zchg. 104.) Der Winkel g f a ist gleich den Winkeln f a c + a c g + c g f als die 3 innern Winkel eines Vierecks; der Winkel g c a ist gleich d e c + e d c als äußerer Winkel des Dreyecks c d e; folglich ist der Winkel a f g gleich f a c + a c g + c d e + d e c oder gleich den 3 innern mehr dem Nebenwinkel von d e g der d e c ist.

Haben die 4 innern Winkel eines Sechsecks zu den äußern auch ein unverändertes Verhältniß, wenn dasselbe 2 gleichlaufende Seiten hat?

Antwort. Ja, sie sind den 4 innern immer gleich.

Auflösung. (Zchg. 103.) Es werden in den 2 äussern Winkeln 2 gleichlaufende Linien mit den 2 gleichlaufenden Seiten gezogen, und dadurch werden die 4 entstandenen Winkel den 4 innern des Sechsecks, als innere Wechselwinkel von gleichlaufenden Linien, gleich.

Wären aber diese Seiten nicht gleichlaufend, so fragt es sich, ob die 2 äußern Winkel auch den 4 innern gleich würden?

Antwort. Ja.

Auflösung. (Zchg. 103.) Die Winkel in den 2 Dreyecken a b d und h g f betragen 4 Rechte; die in dem Viereck a h f d ebenfalls 4 Rechte; werden von eben benannten 2 Dreyecken die Winkel b a d + a d b + g h f + h f g und eben so von dem Viereck h f d a weggethan, so bleiben in den 2 Dreyecken die Winkel a d b und h g f; in dem Viereck aber die Winkel b a h + b d f + d f g + g h a; also sind die 2 äußern Winkel gleich den 4 innern.

So können auch in dem Sieben- und Achteck Fragen gebildet werden. Eben so, wenn man im Dreyeck, Viereck ꝛc. Seiten verlängert und die Winkel, die dadurch entstehen, mit dem innern vergleicht; desgleichen auch mit den Ecken.

Wie oft sind die Ecken eines Dreyecks so groß als seine 3 Winkel? Wie oft die des Zehnecks so groß als seine 10 Winkel?

In welcher Figur betragen die Winkel eben so viel als die Ecken des Dreyecks?

Wie oft sind die Ecken eines Vierecks so groß als seine 4 Winkel; wenn dasselbe ein inneres Eck hat?

Welche regelmäßige Figur hat den größten Winkel?

Antwort. Diejenige, welche die größte Anzahl Seiten hat.

Welche aber den kleinsten Winkel?

Antwort. Das Dreyeck, als diejenige, welche die geringste Anzahl Seiten hat.

In welchem Verhältniß steht die Größe des Winkels vom regelmäßigen Dreyeck zu denen des Vier = Fünfecks u. s. w.?

Eben so mit den Ecken. In welchem Verhältniß steigt das eine und in welchem nimmt das andere ab?

Können die Winkel jemals den Ecken gleich werden?

Antwort. Nein.

Was entstünde, wenn sie einander gleich würden?

Antwort. Eine gerade Linie.

Kann man in jeder regelmäßigen Figur von einem Punkt aus in die Winkel derselben Linien ziehen, wodurch alle Winkel einander gleich werden?

Antwort. Ja.

Wie viel wird einer dieser gleichen Winkel an dem Mittelpunkt des Dreyecks, Vier=, Fünfecks u. s. w. werden?

Antwort. Der des Dreyecks $\frac{4}{3}$ Rechte, der des Vierecks ein Rechter, der des Fünfecks $\frac{4}{5}$ Rechte u. s. w.

Der Winkel am Mittelpunkt einer regelmäßigen Fi=

gur ist ½ Rechter; es fragt sich, was dieses für eine Figur sey?

Antwort. Ein Achteck.

Auflösung. Wenn ein solcher Winkel ½ Rechter ist, so wird die regelmäßige Figur so viel Seiten enthalten, als ein Halbrechter in den Winkeln um einen Punkt herum enthalten seyn wird; ½ Rechter ist in 4 Rechten 8 mal enthalten.

Wenn das Eck eines regelmäßigen Vielecks 1⅔ mal so groß ist, als einer seiner Winkel, was wird dieses für eine Figur seyn?

Auflösung. Ist das Eck 1⅔ mal so groß als der Winkel, so kommt auf einen Winkel der regelmäßigen Figur 1½ Rechter; denn der Winkel hat einen Theil und das Eck 1⅔, zusammen 2⅔ oder 8 gleiche Theile, also kommt auf einen Theil der achte Theil von den Winkeln um einen Theil herum oder ½, und für die 3 Theile 3 Halbe oder 1½ Rechte.

Ist ein Winkel des regelmäßigen Vielecks 1½ Rechter; so wird jeder Winkel, in 2 gleiche Theile getheilt, ein Dreyeck geben, dessen Winkel am Mittelpunkt ½ Rechter beträgt, 1½ Rechter ist in dem Winkel um den Mittelpunkt oder in 4 Rechten 8 mal enthalten; folglich wird dieses ein Achteck geben.

Daß in diesem Geist einige der schwersten Aufgaben gegeben und ohne irgend eine Schwierigkeit gelöst werden könne, geht aus letzter Aufgabe und deren Auflösungsart hervor.

Die wesentlichsten und wichtigsten Untersuchungen, die aus der Verbindung von 2 Linien hervorgehen können, sind hier als vollendet anzusehen.

Drey Linien können auch Seiten und geschlossene Räume bilden. Soll der oben aufgestellte Stufengang befolgt werden, so muß mit den Seiten in Verbindung mit den Winkeln der Anfang gemacht werden.

Nur die Untersuchung der Gleich- und Ungleichheit der Seiten im Drey-, Viereck ꝛc. im Allgemeinen, ohne daß man es in Verbindung mit den Winkeln setzt, bietet außer einer Zahlkombination nichts Wesentliches dar. Z. B.

Die drey Seiten eines Dreyecks können alle 3 gleich, oder 2 gleich und 1 ungleich oder alle 3 ungleich seyn.

Diese Untersuchung findet natürlich beym Vier-, Fünfeck ꝛc. statt.

Ein Dreyeck mit 3 gleichen Seiten hat auch 3 gleiche Winkel, ist wieder eine Anschauungswahrheit, die keinen weitern Beweis oder Erläuterung zuläßt, und eben so umgekehrt ein Dreyeck, welches 3 gleiche Winkel hat, wird auch 3 gleiche Seiten erhalten; eben so könnte man noch annehmen, daß ein Dreyeck, welches 2 gleiche und eine ungleiche Seite hat, auch 2 gleiche und einen ungleichen Winkel erhalten wird, und daß den gleichen Winkeln immer die gleichen Seiten gegenüber stehen.

Will man dieses aber nicht durch die Anschauung hinlänglich begründet annehmen, so mag folgende Auflösung dieser Anforderung zu entsprechen geeignet seyn.

Auflösung. (Zchg. 105.) Die Seite a d soll gleich a m seyn und gezeigt werden, daß der Winkel a d m gleich amd wird. Die Seite ad bezeichnet die Oeffnung des Winkels amd; die Seite am aber die des Winkels adm; die Schenkel da und dm des ersten Winkels sind gleich ma und md des zweyten Winkels; also in gleicher Entfernung von ihrem Scheitelpunkt sind diese Winkel gleich geöffnet, und folglich einander gleich.

Ein Dreyeck, das 2 gleiche Seiten hat, wird demnach auch 2 gleiche Winkel haben, und diese gleichen Winkel stehen den gleichen Seiten gegenüber. Gestützt auf dieses, ist nun leicht zu beweisen, daß, wenn die 3te Seite eines Dreyecks länger oder kürzer als eine von diesen zwey Seiten ist, daß der dritte Winkel im ersten Fall größer und im zweyten kleiner wird.

Auflösung (Zchg. 106.). Die Seite mq soll länger seyn, als am, die gleich ap ist. Man zieht die Hülfslinien aq, macht mq gleich ma. Nach obiger Auflösung wird der Winkel mqa gleich qam, und aqm ist als äußerer Winkel des Dreyecks aqp gleich den Winkeln qpa und paq; folglich ist der Winkel aqm größer als apq, und map ist größer als maq; also wird der Winkel aqm aus doppeltem Grund größer als apm.

Auf eine zweyte Art gelöst.

Man verlängert die Seite ma bis sm gleich mp wird und zieht sp; dadurch wird der Winkel msp gleich mps, der Winkel mpa ist kleiner als mps, und psm ist kleiner als pam; weil dieser letzte Winkel Außenwinkel des Dreyecks psa ist; folglich wird der Winkel pan aus doppeltem Grund größer als der Winkel mpa.

Ein Dreyeck, welches 2 gleiche Seiten und eine ungleiche Seite hat, dessen ungleiche länger ist, wird auch 2 gleiche und einen ungleichen und zwar größeren Winkel erhalten, die gleichen Seiten stehen ferner den gleichen Winkeln gegenüber, und die größere Seite dem größern Winkel ꝛc.

Wird die ungleiche Seite aber kürzer angegeben, so kann wieder auf gleiche Weise gezeigt werden, daß der ihr gegenüberstehende Winkel auch kleiner wird. Entweder kann die kürzere Seite verlängert und einer von den 2 Seiten gleich gemacht, oder aber, es wird von einer der 2 gleichen so viel weggeschnitten und der kürzern gleich gemacht. Die Hülfslinien werden ebenso wie in den vorhergehenden Auflösungen gezogen.

Gestützt auf dieses giebt man dem Schüler zu untersuchen, ob ein Dreyeck, welches 3 ungleiche Seiten hat, auch 3 ungleiche Winkel habe.

Auflösung (Zchg. 107.). Die Seite a d soll länger als a p, und a p länger als p d seyn. Man verlängert a p und macht a s gleich a d; dadurch wird nach obiger Auflösung der Winkel a p d aus doppeltem Grund größer als p d a. Hernach verlängert man p d und macht p o gleich p a; dadurch wird der Winkel p d a aus doppeltem Grund größer als d a p. Aus diesem geht ferner hervor, daß ein Dreyeck, welches 3 ungleiche Seiten hat, auch immer 3 ungleiche Winkel habe, und der größten Seite der größte, der mittleren auch der mittlere und der kleinsten der kleinste Winkel gegenüberstehe.

Daß dieses nicht die einzigen Auflösungsarten sind, die ein also geführter Schüler zu machen im Stande seyn soll, bedarf nicht erwähnt zu werden. Eben so hätte man in diesen Auflösungen statt von den Seiten, von den Winkeln ausgehen und es auf obige Weise beweisen können.

Die Gleichheit und Ungleichheit der Seiten im Viereck, Fünfeck ꝛc. hängt nicht mehr immer von den Seiten ab, deswegen wird die Untersuchung derselben in diesen Figuren nicht wichtig und soll daher nicht auf dieselbe ausgedehnt werden.

Bevor ich zur Untersuchung der Seiten in 2 Dreyecken schreite, werde ich dem oben Dargelegten noch einige einzelne Fragen beyfügen.

Frage: Wie viel gleiche Seiten hat ein Dreyeck mit 3 gleichen Winkeln? Wie viel gleiche Seiten hat aber ein Dreyeck, welches 2 gleiche und eine ungleiche Seite hat? Ist die ungleiche Seite größer, wird dann der ungleiche Winkel auch größer als einer der 2 gleichen? Ist eine oder sind die 2 andern Seiten eines Dreyecks länger?

Antwort: 2 sind immer zusammen länger als die dritte Seite eines Dreyecks.

Dieses kann als durch die Anschauung klar, ohne weitern Beweis angenommen werden. Sollte man aber dieses gerne auf frühere Anschauung zurückführen, so kann folgende Auflösung dienen.

(Zchg. 108.) Man zieht auf die längste Seite eine Hülfslinie, die mit ihr 2 rechte Winkel bildet; der rechte Winkel ist immer der größte in einem Dreyeck, also ist die gegenüberstehende Seite die größte, folglich sind die 2 Seiten des Dreyecks zusammen genommen immer größer als die dritte desselben. Würde die Hülfslinie, die rechtwinklicht auf die gegenüber stehende Seite gezogen wird, außer das Dreyeck fallen, so könnte die Auflösung auf ganz gleiche Weise gemacht werden.

Wird die Gleich- und Ungleichheit der Seiten in 2 Dreyecken nur im allgemeinen aufgestellt, so finden alle Abänderungen, die mit der Zahl möglich sind, statt, ohne daß man auf irgend eine Schwierigkeit stößt. Die Ausführung ist überdieß unwichtig; deswegen schreite ich sogleich zu der Gleichheit der Seiten in 2 Dreyecken, verbunden mit der Gleich- und Ungleichheit der Winkel. Weil aber die Gleich- und Ungleichheit der Seiten und Winkel, auch die Gleich- und Ungleichheit der geschlossenen Räume bestimmt, so werde ich diese Untersuchung noch gleichzeitig damit verbinden. Versteht sich, daß jede Ansicht auch selbstständig durchgeführt werden könnte. Weil aber die selbstständige Behandlung jeder einzelnen Ansicht durch gegenwärtige Darlegung außer Zweifel gesetzt worden ist, so darf ich mir diese Abänderung erlauben, ohne der Klarheit zu schaden. Auch geschieht dieses gegenwärtig nur, um mich noch kürzer fassen zu können. Die Uebungen und Reihenfolgen hierüber wären folgende:

Untersucht, was 2 Dreyecke, die gleich groß sind, in Rücksicht der Seiten und Winkel für Eigenschaften zu einander haben.

Der eine Schüler wird finden, wenn sie gleichseitig seyen und eine Seite des einen gleich seyn werde einer Seite des andern, oder er wird sich auch so ausdrücken: zwey gleichseitige Dreyecke, die alle gleiche Seiten haben, sind einander gleich. Auch 2 Dreyecke, deren 3 Seiten und 3 Win-

Winkel des ersten gleich denjenigen des andern sind, sind ebenfalls einander gleich.

Auf diese Anschauung gegründet wird dann gezeigt, daß ein Dreyeck, welches 2 gleiche Seiten mit einem dazwischen liegenden Winkel, die den 2 Seiten mit einem dazwischen liegenden Winkel in einem andern Dreyeck gleich sind, sich selbst gleich und die 2 andern Seiten und 4 Winkel werden auch einander gleich werden. Weil aber Dreyecke gleich groß und in ihrer Form verschieden seyn können, so nennt man diejenigen Dreyecke, die in ihrer Form sich auch gleich sind, gleich und ähnliche Dreyecke.

Auflösung (Zchg. 109.): abd soll ein gleichschenklichtes Dreyeck seyn; die Seite ab gleich ad; mit der ungleichen Seite wird mq gleichlaufend bd gezogen; dadurch erhält man die 2 Dreyecke abd und amq, die einen gemeinschaftlichen Winkel bad haben, der auch als 2 gleiche Winkel in's Auge gefaßt werden kann. Im zweyten Dreyeck sind aber die zwey gleichen Seiten am und aq kürzer als die des ersten ab und ad, und das Dreyeck ist als ein Theil so lang kleiner als eine Seite kürzer seyn wird; würden sie aber länger gemacht, wie as und at, so würde das Dreyeck ast immer größer bleiben, so lang die Seiten as und at größer als ab und ad gemacht werden. Im ersten Fall wird das Dreyeck amq immer kleiner, im zweyten aber das Dreyeck ast immer größer als abd seyn, und nur dann gleich werden, wenn die gleichlaufende Seite mq wirklich auf bd fällt, und in diesem Fall wird die dritte Seite, so wie qm auch gleich bd und das Dreyeck amq gleich abd werden.

Wenn 2 Dreyecke also 4 gleiche Seiten haben und zwischen ihnen 2 gleiche Winkel liegen, so sind die Dreyecke einander gleich und die dritten zwey Seiten ebenfalls.

Aus diesem folgt ferner, daß so wie ein Winkel eines Dreyecks gleich ist demjenigen eines andern, und die 2 ihn einschließenden Seiten des ersten aber gleich und långer als die des zweyten werden, die ebenfalls gleich sind, so ist das erste Dreyeck größer als das zweyte, oder das zweyte ist kleiner als das erste u. s. w.

Wenn 2 Dreyecke 2 gleiche Winkel haben, die von 2 und 2 gleichen Seiten eingeschlossen sind, so werden sie ebenfalls einander gleich seyn und eben so die dritten 2 Seiten.

Statt daß bey der vorhergehenden Auflösung ein gleichschenklichtes Dreyeck genommen wurde, kann für diesen Fall nur ein ungleichschenklichtes benutzt und ganz auf obige Weise gelöst werden. Aus diesem wird dann wieder das Umgekehrte gefolgert; nåmlich wenn diese Winkel gleich und die 2 Seiten des ersten größer sind als die des zweyten, so ist das erste Dreyeck größer als das zweyte u. s. w.

Haben aber 2 Dreyecke 2 gleiche Seiten, und liegen auf den beyden gleichen Seiten 4 gleiche Winkel, so sind die Dreyecke selbst gleich groß.

Auflösung (Zchg. 110.): Die Seite b a des Dreyecks a b d soll gleich seyn b a des Dreyecks m b a, eben so ist der Winkel b a d für beyde Dreyecke gemein, und soll der Winkel d b a des ersten Dreyecks gleich werden m b a, so muß die Seite b d auf b m fallen, und wird in m mit der Seite a m zusammentreffen; denn der Winkel b d a muß gleich b m a werden, weil die Winkel eines Dreyecks 2 Rechte betragen; folglich giebt es durch diese Verbindung wieder 2 Dreyecke, welche 2 gleiche Winkel, die von 2 paar gleichen Seiten eingeschlossen sind, oder 2 gemeinschaftliche Seiten haben, und werden demnach nach obiger Auflösung einander gleich, und die 4 Seiten sind es ebenfalls. Haben diese 2 Dreyecke aber 2 ungleiche Seiten und 4 gleiche Winkel auf denselben, so sind sie einander ungleich.

Auf gleiche Weise wird die Aufgabe wieder gelöst werden, wenn in 2 Dreyecken 2 gleiche Seiten sind und auf ihnen 2 paar gleiche Winkel liegen, und es wird nicht fehlen, der Schüler findet auch in diesem Fall, daß sie einander gleich seyen und 2 paar gleiche Seiten haben.

Auch das Umgekehrte findet hier wieder statt.

Dreyecke können aber in Rücksicht ihrer Größe einander dennoch gleich seyn, wenn sie schon keine gleiche Seiten und Winkel haben; da aber diese Größe weder von den Seiten noch von den Winkeln abhängig ist, so werde ich später zu denselben zurückkehren, und für einmal diesen Gesichtspunkt gehörig erörtern.

Daß, bevor man weiter schreitet, auch wieder einzelne Fragen gegeben werden müssen, unterliegt keinem Zweifel mehr. Auch wenn ich es in Zukunft weder bemerken noch wirklich ausführen sollte, so kann dieses gewiß jeder Lehrer ergänzen. Um nicht weitläufig zu werden, werde ich in Zukunft nur da noch einige einzelne Fragen anführen, wo es dringendes Bedürfniß seyn wird.

Die gleichen Untersuchungen, die ich mit dem Drey, eck vornahm können auch auf die Vier-, Fünfecke ꝛc. ausgedehnt werden; doch sind sie nie so wichtig.

Der Schüler wird finden, 2 regelmäßige Vierecke, die 2 gleiche Seiten haben, sind einander gleich. Zwey Rechtecke, die gleiche Länge und Breite haben, sind ebenfalls einander gleich. Eben so 2 schiefwinklichte Parallelogramme, die gleiche Seiten und gleiche Winkel haben ꝛc. Sind 2 regelmäßige Fünfecke, Sechsecke ꝛc., die 2 gleiche Seiten haben, einander gleich?

Wichtiger aber als diese Untersuchungen sind folgende:

In der Formenlehre haben wir gesehen, daß mit 4 geraden Linien auch 2 und 3 geschlossene Figuren gemacht werden können.

In einem gleichseitigen Dreyeck wird ein Winkel in 2 gleiche Theile getheilt, und dadurch werden die damit gebildete Dreyecke und die 2 Theile der gegenüberstehenden Seite gleich.

Auflösung (Zchg. 111.): Der Winkel bad ist in 2 gleiche Theile getheilt; der Winkel bam gleich mad, die Seite ba gleich ad, und am ist eine gemeinschaftliche Seite für das Dreyeck bam und mad, und wie wir bey den Eigenschaften von 2 Dreyecken gesehen haben; so sind 2 Dreyecke, die 2 paar gleiche Seiten und zwischen ihnen 2 gleiche Winkel haben, einander gleich; und eben so die dritten 2 Seiten; folglich ist das Dreyeck abm gleich amd, und die Seite bm gleich md.

Auf eine zweyte Art gelöst.

(Zchg. 111.) In dem Dreyeck adm sind die Winkel adm und dam gleich abm, und mab des Dreyecks abm, und die Seite a d des ersten Dreyecks ist gleich a b des zweyten, als Seiten einer regelmäßigen Figur. Wenn 2 Dreyecke 2 gleiche Seiten und auf denselben 2 paar gleiche Winkel liegen, so sind die Dreyecke und ihre Seiten einander gleich.

Auch hierüber können noch mehrere andere Auflösungen gemacht werden.

Eben so kann wieder bewiesen werden, daß das gleichseitige Dreyeck in 2 gleich große Dreyecke, und der Winkel in 2 gleiche Theile getheilt wird, wenn man von der Mitte b d in den Winkel a eine Linie zieht.

Auflösung: Die Seite b m des Dreyecks b m a wird gleich der Seite m d des Dreyecks a m d; desgleichen b a gleich d a, und der Winkel a b m gleich m d a; wenn 2 Dreyecke 2 paar gleiche Seiten und zwischen ihnen 2 gleiche Winkel liegen, so sind die andern Seiten, Winkel und Dreyecke einander gleich; also das Dreyeck a b m gleich a m d, und der Winkel b a m gleich m a d.

Auch diese Aufgabe kann wieder auf die mannigfaltigste Art gelöst werden.

Als allgemein darf angenommen werden, daß wenn man in einem gleichseitigen Dreyeck einen Winkel in 2 gleiche Theile theilt, so wird auch das Dreyeck und die gegenüberstehende Seite in 2 gleiche Theile getheilt.

Ungleich werden aber die 2 Dreyecke, wenn man eine Seite desselben in 2 ungleiche Theile theilt, und eine Linie in den gegenüberstehenden Winkel zieht.

Wird in dem gleichschenklicht rechtwinklichtem, so wie in jedem andern gleichschenklichten Dreyeck, der ungleiche

Winkel in 2 gleiche Theile getheilt; so wird dadurch das Dreyeck und die gegenüberstehende Seite in 2 gleiche Theile getheilt.

Auch umgekehrt, wird in diesen Dreyecken die ungleiche Seite in 2 gleiche Theile getheilt, und in den gegenüberstehenden Winkel eine Linie gezogen; so wird das Dreyeck und der gegenüberstehende Winkel in 2 gleiche Theile getheilt werden.

Die Auflösung beyder Fälle ist der obigen ganz gleich. Werden die Seiten und Winkel in ungleiche Theile getheilt, so entsteht ungleiches, die ungleichen Figuren sind aber unwichtig, in so fern ihre Größe nicht auf irgend eine Weise näher bestimmt wird. Zu diesem kommen wir überdieß später, und daher werden diese Verhältnisse hier übergangen.

Eben so wie beym gleichseitigen Dreyeck eine Seite oder ein Winkel in 2 gleiche Theile getheilt worden ist, läßt man den Schüler beym gleichschenklichten Dreyeck entweder eine der gleichen Seiten oder einen der gleichen Winkel in 2 gleiche Theile theilen. Z. B.

Beym gleichschenklicht rechtwinklichten Dreyeck ist einer der 2 gleichen Winkel in 2 gleiche Theile getheilt worden: es fragt sich, ob die gegenüberstehende Seite und das Dreyeck auch in 2 gleiche Theile getheilt worden ist.

Der Schüler wird finden, daß weder das eine, noch das andere dadurch geschehen sey.

Auflösung (Zchg. 112.): Man zieht fb rechtwinklicht auf ad; der Winkel gaf gleich fab; agf gleich abf; die Seite af ist für das Dreyeck afg und afb gemein;

die Eigenschaften, unter denen 2 Dreyecke einander gleich sind, finden sich hier; also also das Dreyeck agf gleich afb; nun ist aber afb kleiner als das Dreyeck afd; die Seite fb gleich gf, weil es die gleichliegenden Seiten von 2 gleichen Dreyecken sind. Der Winkel fbd ist ein Rechter, und aus diesem folgt, daß fd auch länger ist als fb und auch länger als gf, also ist die Seite und das Dreyeck dadurch in 2 ungleiche Theile getheilt worden.

Wird aber in diesem Dreyeck eine von den gleichen Seiten in 2 gleiche Theile getheilt, und in den gegenüberstehenden Winkel eine Linie gezogen; so wird derselbe in 2 ungleiche Theile getheilt.

Auflösung (Zchg. 112.): Die Linie af theilt die Seite gd in 2 gleiche Theile; man zieht die Hülfslinie dq gleichlaufend ag und verlängert af, bis sie in q mit dq zusammentrifft; dadurch wird das Dreyeck dfq gleich afg; denn die Seite fd ist gleich fg, der Winkel fdq des Dreyecks qdf ist gleich agf; ferner der Winkel dfq gleich afg, also nach den Eigenschaften, die 2 gleiche Dreyecke haben, ist der Winkel dqf gleich faq, und dq gleich ag; ag ist aber kürzer als ad, und ad wird länger dq; adq als ein Dreyeck in's Auge gefaßt, welches 2 ungleiche Seiten ad und dq erhält, muß auch 2 ungleiche Winkel haben, folglich der Winkel dqf größer als daf; daraus folgt, daß der Winkel fag größer als fad wird. Wird eine der gleichen Seiten eines gleichschenklichten Dreyecks in 2 gleiche Theile getheilt, und von diesem Punkt an die gegenüberstehende Seite eine Linie gezogen, so wird, diesem zufolge, der Winkel immer in 2 ungleiche Theile getheilt.

Auch dieses kann wieder auf die mannigfaltigste Art gelöst werden.

Das Dreyeck hingegen wird dadurch in 2 ungleiche Theile getheilt werden.

Auflösung (Zchg. 113.): Man zieht die Hülfslinie dm und ap gleichlaufend bq und da gleichlaufend mp; die Seite mq ist gleich qp; also sind die 2 Parallelogramme mqbd und qbap nach den Eigenschaften, die zwey Vierecke haben, einander gleich. Das Dreyeck mbq ist die Hälfte des Parallelogrammes dbqm, das Dreyeck bqp ist die Hälfte des zweyten Parallelogrammes bapq und da die ganzen Parallelogramme gleich sind, so werden es auch ihre Hälften.

Wollte man aber zeigen, daß jedes Dreyeck wirklich die Hälfte von seinem Parallelogramm werde, so dürfen nur die Eigenschaften, die 2 gleiche Dreyecke haben, auch auf dieselben ausgedehnt werden.

Das gleichschenklicht rechtwinklichte Dreyeck ist dadurch aber nur in 2 gleich große Dreyecke in Rücksicht der Flächen eingetheilt worden. Ihrer Form nach ist es aber dadurch in 2 sehr verschiedenartige Dreyecke zerlegt worden; denn das eine Dreyeck ist recht=, das andere hingegen stumpfwinklicht.

Um sie von dem früher aufgestellten gleich großen Dreyecke zu unterscheiden, werden sie gleichhaltige Dreyecke genannt.

Auf eine zweyte Art gelöst.

(Zchg. 114.) Die Hülfslinie dh wird mit ac und hg mit ab gleichlaufend gezogen; durch diese Hülfslinien wird das Dreyeck chg gleich dhb, und gha gleich ahd; folglich das Dreyeck ach, welches aus den Dreyecken gch und gha zusammengesetzt ist, dem Dreyeck ahb, welches aus dhb und adh besteht, gleich.

Auch diese Aufgabe kann auf sehr mannigfaltige Art gelöst werden. Der Kürze wegen führte ich aber nur zwey an.

Aus diesem folgt allgemein, wenn man den Winkel eines Dreyecks, der zwischen 2 gleichen Seiten liegt, in 2 gleiche Theile theilt, so wird das Dreyeck auch in 2 gleich große Dreyecke getheilt und die gegenüberstehende Seite wird ebenfalls in 2 gleiche Theile getheilt; ist aber der Winkel zwischen 2 ungleichen Seiten, so wird die gegenüberstehende Seite in 2 ungleiche Theile getheilt, das Dreyeck selbst aber in 2 gleichhaltige Dreyecke zerlegt werden. Auch kann untersucht und ausgesprochen werden, was entstehe, wenn man eine Seite eines solchen Dreyecks in 2 gleiche Theile theilt.

Wie ich früher schon bemerkte, so ist es sehr unwesentlich, zu bestimmen, was durch die Eintheilung in ungleiche Theile entstehe.

Die gleiche Untersuchung wird mit dem gleichschenklicht spitzwinklichten und stumpfwinklichten und selbst mit dem ungleichseitigen recht=, spitz= und stumpfwinklichten Dreyeck vorgenommen werden.

Wird in dem gleichschenklicht spitz= und stumpfwinklichten Dreyeck einer von den gleichen Winkeln, oder eine von den gleichen Seiten in 2 gleiche Theile getheilt, so kann die Auflösung des gleichschenklicht rechtwinklichten vollkommen angewendet werden. In Hinsicht der Resultate wird ebenfalls wieder das Nämliche gefunden.

Soll aber eine Seite irgend eines beliebigen Dreyecks in 2 gleiche Theile getheilt, und in den gegenüberstehenden Winkel eine Linie gezogen werden, so wird das Dreyeck dadurch immer in 2 gleichhaltige Dreyecke eingetheilt. Die obigen Auflösungen sind auf diese Dreyecke auch anwendbar.

Als Anleitung und Beleg mögen noch ein paar Aufgaben hier eine Stelle finden.

(Zchg. 115.) Soll ein rechtwinklicht ungleichschenklichtes Dreyeck seyn, dessen längste Seite in 2 gleiche Theile getheilt ist; es fragt sich, ob die 2 Dreyecke gleichhaltig seyen?

Antwort. Sie sind gleichhaltig.

Auflösung. Man zieht s p und s t als Hülfslinien mit a b und b d gleichlaufend; dadurch wird das Dreyeck s p b gleich b s t; denn die Seite s b ist für beyde Dreyecke gemein, und der Winkel t s b gleich s b p, s b t gleich b s p und wenn 2 Dreyecke 2 gleiche Seiten haben und auf denselben 2 paar gleiche Winkel liegen, so sind die Dreyecke einander gleich; für die Dreyecke a s t und s d p erhält man wieder die Seite s d gleich s a, der Winkel s d p gleich a s t und d s p gleich s a t als innere und äussere Gegenwinkel von gleichlaufenden Linien, und wenn 2 Dreyecke wieder die obigen Eigenschaften haben, so sind sie einander gleich. Das Dreyeck a s b ist aus dem Dreyeck a s t und t s b zusammengesetzt, und s b d besteht aus l s p und s p b; folglich ist das Dreyeck a s b gleichhaltig mit s b d.

Es fragt sich ferner, ob durch diese Theilung der gegenüberstehende Winkel in 2 gleiche Theile getheilt worden sey?

Antwort. Er wird in 2 ungleiche Theile getheilt.

Auflösung. (Zchg. 116.) Man zieht m p gleichlaufend a b, verlängert a d bis p; dadurch wird das Dreyeck m p d gleich d a b, und eben so die Seite a b, gleich m p; m a ist als die mittlere Seite des rechtwinktlichten Dreyecks ungleich der kürzern a b; folglich ist die Seite m a ungleich m p, in dem Dreyeck a m p wird der Winkel m p a größer als p a m, weil m p a gleich d a b ist; aus diesem folgt, daß d a b größer ist als d a m.

In dem nämlichen Dreyeck ist der rechte Winkel in 2 gleiche Theile getheilt worden, es fragt sich, ob dadurch die gegenüberstehende Seite auch in 2 gleiche Theile getheilt wird?

Antwort. Nein.

Auflösung. (Zchg. 117.) Man zieht die Hülfslinie f m und macht den Winkel m f d gleich d f b; f d m ist schon gleich f d b; die Seite f d ist gemeinschaftlich den Dreyecken m f d und f d b; folglich sind die Dreyecke, Seiten und Winkel einander gleich. Die Seite m f ist gleich f b, der Winkel f m d gleich f b d; f m a ist dem also ein Nebenwinkel von einem Spitzen, daher ein stumpfer Winkel, und folglich der größte im Dreyeck a m f und die Seite a f größer als m f, m f ist gleich f b; also a f länger als f b.

Diese wenigen Beyspiele mögen hiefür hinreichen. Ich werde nur noch zeigen, daß beym ungleichseiti stumpfwinklichten Dreyeck die gleiche Auflösungsweise stat findet.

(Zchg. 118.) In diesem ungleichschenklichen stumpf winklichten Dreyeck theilt die Seite a o den kleinsten Winkel b a d in 2 gleiche Theile, dadurch wird die Seite b d in 2 ungleiche Theile getheilt.

Auflösung. Es wird die Hülfslinie o q gezogen und der Winkel a o q gleich a o b gemacht, dadurch werden die Seiten, Winkel und die 2 Dreyecke a o q und a o b einander gleich; also die Seite o q gleich o b, und der Winkel o q a gleich o b a. Man verlängert noch b d, so wird der Winkel s b a gleich o q d, und s b a ist als Aussenwinkel des Dreyecks b a d größer als der Winkel b d a; aus diesem folgt endlich, daß der Winkel o q d größer als o d q seye, und daß die Seite o d größer als o q werde; folglich wird die Seite in 2 ungleiche Theile getheilt.

Bevor man zu 4 Linien, die andere Formen bilden, schreitet, wird man wohl thun, statt eine, noch mehrere Linien in einem Dreyeck zu ziehen. Man fängt wieder beym gleichseitigen Dreyeck an, fährt dann mit dem gleich- und ungleichschenklichten fort, theilt einen Winkel in 2, 3 2c. Theile und untersucht, in wie viel gleiche Theile das Dreyeck und die gegenüberstehende Seite jedesmal getheilt werde. Eben so theilt man auch eine Seite in 3, 4 2c. gleiche Theile, zieht die Theilungslinie in den gegenüberstehenden Winkel und untersucht das Nämliche.

Als Leitfaden mag Folgendes dienen.

Theilt man einen Winkel eines gleichseitigen Dreyecks
: 3 gleiche Theile, so wird diese Theilungslinie das
reyeck in 2 gleiche und einen ungleichen Theil theilen;
is mittlere Dreyeck wird das kleinste.

Theilt man aber den Winkel so in 4 gleiche Theile,
giebt es 2 und 2 gleiche Dreyecke; die 2 mittlern sind
sdann die kleinern. Bey 5 Theilen giebt es 2 und 2
:iche und 1 ungleichen; wird aber ein Winkel in 6
:iche Theile getheilt, so giebt es 3 mal 2 gleiche Dreyecke
f. w.

Von der Seite ausgegangen. Theilt man eine Seite
s gleichseitigen Dreyecks in 3 gleiche Theile, und die
)den Theilungslinien an den gegenüberstehenden Win-
, so wird das Dreyeck in 3 gleichhaltige Theile oder
:eyecke getheilt. Der Winkel aber in 2 gleiche und ei-
ı ungleichen Theil. Wird es so in 4 Theile getheilt,
werden die 4 Dreyecke wieder gleichhaltig, der Winkel
:r erhält dadurch 2 gleiche und 2 gleiche Theile.

Würde die Seite in 4 ungleiche Theile getheilt, so
stünden 4 ungleiche Dreyecke, das auf dem kleinsten
eil dieser Linie würde auch das kleinste u. f. w. Wollte
n dieses erläutert wissen, so dürfte man es auf gewöhn-
e Weise auf gleiche Theile zurückführen.

So würde man das gleichschenklichte und zwar das
)twinklichte Dreyeck zuerst nehmen, hernach die andern
) dieses bis zu den ungleichseitigen fortsetzen. Je un-
:elmäßiger aber das Dreyeck ist, desto unwichtiger
den die Untersuchungen; die Auflösungen sind alsdann
h verwickelter und schwieriger. Es giebt aber keinen

Fall, der nicht vollkommen wie die oben angeführten Aufgaben gelöst werden könnte. Z. B.

Um zu zeigen, daß wenn eine Seite eines Dreyecks in 3 gleiche Theile getheilt worden ist, und von diesen Punkten aus in den gegenüberstehenden Winkel 2 Linien gezogen sind, das Dreyeck in 3 gleichhaltige Theile getheilt worden ist; müssen die 2 anstoßende Dreyecke als eins in's Auge gefaßt werden, welches in 2 gleiche Theile getheil ist. Einer von diesen Theilen bildet mit dem anstossende wieder ein solches Dreyeck; folglich diese 3 Dreyeck gleichhaltig.

So können in dem Dreyeck auch gleichlaufende Linie gezogen werden.

Man fordert den Schüler auf, zu untersuchen, i was für einem Verhältniß das Dreyeck zum Viereck steh das entsteht, wenn man in einem gleichseitigen Dreyec von der Mitte einer Seite, mit einer andern gleichlaufe an die gegenüberstehende eine Linie zieht, ferner, ob d andere Seite auch in 2 gleiche Theile getheilt werde?

Der Schüler wird finden, das Viereck sey 3mal groß, als das Dreyeck, und die andere Seite des gleic seitigen Dreyecks sey auch in 2 gleiche Theile getheilt.

Auflösung. (Zchg. 119.) q p ist die Linie, welc durch die Mitte von a d gleichlaufend b d gezogen wir die Hülfslinie p s wird gleichlaufend a b gemacht; d durch wird das Dreyeck a p q gleich p d s, weil dieselb 2 gleiche Seiten und darauf 2 paar gleiche Winkel habe aus diesem Grund wird die Seite p s gleich p a; p s b ist ein Parallelogramm; folglich p s gleich q b; a q glei q b, weil a d gleich a b ist; so werden auch die andern Seiten a q, q b, p d und p a gleich. Die andere Seite des gleichseitigen Dreyecks ist in 2 gleiche Theile getheilt. Das Dreyeck p s d gleich a p q, und nun wird die Hülfslinie q s gezogen, das Dreyeck p q s ist gleich a q p, weil der Winkel p q s 2⅔ Rechter betragt, denn s p d und p q a enthält ein jeder auch ⅔ Rechte; die Seiten s p und p q des Dreyecks s p q sind gleich p q und q a des Dreyecks q p a, und wenn 2 Dreyecke zwischen 4 gleichen Seiten 2 gleiche Winkel haben, so sind sie einander gleich. Auf gleiche Weise kann wieder gezeigt werden, daß das Dreyeck p q s gleich a q p wird; folglich das Paralleltrapez 3 mal so groß als das Dreyeck.

So wie dieses beym gleichseitigen Dreyeck untersucht worden ist, wird dieses auf alle andere Dreyecke fortgesetzt werden, und zwar zuerst beym gleichschenklichten und hernach bey'm ungleichseitigen Dreyeck. Die Auflösung in jedem Dreyeck ist aber der des gleichseitigen so ähnlich, daß eine weitere diesfällige Ausführung unnöthig wird. Ueberall wird man aber finden, daß die gegenüberstehende Seite immer in 2 gleiche Theile getheilt, und das Viereck immer 3mal so groß als das Dreyeck wird. Aus diesem folgt ferner, daß, wenn man nicht von der Mitte einer Seite des Dreyecks an die gegenüberstehende eine gleichlaufende Linie zieht, dieselbe ebenfalls nicht auf die Mitte fällt, und das Dreyeck mehr oder weniger als ⅓ des Vierecks wird. Dieser Unterschied wird aber später bestimmt.

Aus diesem folgt ferner noch, wenn man von der

Mitte einer Seite des Dreyecks an die gegenüberstehende eine ungleichlaufende Linie zieht, so wird diese Seite in 2 ungleiche Theile getheilt, und das Dreyeck wird ebenfalls mehr oder weniger als ⅓ des Paralleltrapez.

Nachdem eine Linie auf diese Weise in einem Dreyeck gezogen worden ist, setzt man diese Untersuchung auch auf 2, 3 und mehrere Linien fort. Z. B.

Wenn man eine Seite eines regelmäßigen Dreyecks in 3 gleiche Theile theilt, und mit einer andern Seite desselben 2 gleichlaufende Linien zieht, so wird die gegenüberstehende Seite auch in 3 gleiche Theile getheilt; das Dreyeck bekommt einen Theil wie das anstoßende Viereck deren 3 und das zweyte Viereck deren 5 enthalten wird.

Die Auflösung ist derjenigen mit 2 Theilen ganz gleich. Zuerst wird diese Verbindung von Linien so in's Auge gefaßt, als ein Dreyeck, durch dessen Mitte eine Linie gleichlaufend gezogen worden ist. Von der Kenntniß dieser 2 Theile wird dann zum dritten geschritten, und auch das dritte Paralleltrapez wird wieder in Dreyecke zerlegt.

Theilt man durch 2 gleichlaufende Linien eine Seite in 3 ungleiche Theile, so wird die gegenüberstehende Seite auch in 3 ungleiche Theile getheilt u. s. w.

Die weitere Ausführung ist in dem, was über 2 Theile gesagt und aufgestellt worden ist, nachzusehen.

Statt von einem Winkel aus auf die gegenüberstehende Seite eine und mehrere Linien, so wie auch von einer Seite aus gleichlaufende zu ziehen, können noch von mehreren

mehreren Winkeln und Seiten gleichzeitig Linien gezogen werden. Z. B.

Wenn man mit 2 Linien 2 Winkel eines gleichseitigen Dreyecks jede in 2 gleiche Theile theilt, und die Linien an die gegenüberstehenden Seiten gezogen, so fragt es sich, in welchem Verhältniß diese Theile zu einander stehen, und wie viel Seiten dadurch einander gleich und ungleich werden.

Antwort. Zwey Dreyecke werden einander gleich, und jedes von ihnen wird $1/6$ des Ganzen. Das dritte Dreyeck wird mit dem Viereck gleichhaltig, und von diesem Dreyeck und Viereck ist jedes ein Drittel des Ganzen.

Auflösung. (Zchg. 120.) Das Dreyeck a f d ist gleich d g b, weil ein jedes die Hälfte des Ganzen ist; wird das Viereck b d f h von diesen 2 Dreyecken weggethan, so bleibt noch Gleiches. Auf der einen Seite bleibt das Dreyeck b h a, auf der andern f h g, die diesem zufolge einander gleich sind. Auf gleiche Weise kann man es mit f g a und b g a machen, wodurch das Dreyeck g h a gleich dem Viereck f h b d wird. Das Viereck d b h f enthält aber 2 Dreyecke a b h, weil das Dreyeck h b d gleich b h a, und h d f gleich h f g als Dreyecke, deren Seiten in 2 gleiche Theile getheilt werden. Aus diesem folgt weiter, daß das Viereck 2 Theile wie die Dreyecke a h b und h f g einen enthält. Weil das Viereck gleich dem Dreyeck g h a ist, so wird dasselbe auch 2 solcher Theile in sich fassen; folglich 2 Dreyecke, jedes $1/3$ und ein Dreyeck $2/6$ gleich $1/3$. Das Viereck aber ein Drittel des Ganzen. Daß aber 4, 2 und 2 Seiten immer einander gleich sind, ist aus den

Eigenschaften, die diese Dreyecke zu einander haben, leicht zu beweisen. Eben so kann gezeigt werden, daß in einem rechtwinklichten Dreyeck, die einem Drittels rechten gegenüberstehende Seite, immer die Hälfte von der ist, welche im nämlichen Dreyeck dem Rechten gegenübersteht; denn die Seite a b ist die Hälfte von a g, weil a g gleich a d ist, und a b steht in dem Dreyeck a g b dem Drittels rechten Winkel, und a g dem Rechten gegenüber. Aus diesem Grund schneiden sich die 2 Theilungslinien, die die 2 Winkel eines gleichseitigen Dreyecks in 2 gleiche Theile theilen im Drittel der Entfernung der Seiten und ⅔ von ihren Scheitelpunkten.

Theilt man einen Winkel des gleichseitigen Dreyecks in 2 gleiche und einen in 2 ungleiche Theile, so kann das Dreyeck dadurch in 2 gleiche und 2 ungleiche, oder in 4 ungleiche Theile getheilt werden. Wird aber jeder Winkel in 2 ungleiche Theile getheilt, doch so, daß ein Theil eines Winkels gleich ist einem Theil des andern, so giebt es 3 gleiche und einen ungleichen oder 2 gleiche und 2 ungleiche Theile.

Auflösung der 3 gleichen und einem ungleichen Theil.

(Zchg. 120.) Wird f d gleich d g/3 und d b gleich a d/3 gemacht, so erhält das Viereck b d f h 2 Dreyecke, davon jedes die Hälfte von f h g oder a b h wird. Um dieses zu beweisen, darf nur von h auf die Mitte von g f und auf die Mitte von a b eine Hülfslinie gezogen werden. Ein hiedurch entstandenes Dreyeck wird ⅓ vom Dreyeck g h d und d h a oder ¼ vom Dreyeck b d g werden; dieses ist himwieder ⅓ des ganzen Dreyecks a g d; folglich das

Dreyeck ghf gleich $^2/_{12}$, hfdb gleich $^2/_{12}$ und abh gleich $^2/_{12}$, ahg aber gleich $^6/_{12}$ des ganzen Dreyecks agd.

Je mehr Theile ungleich gemacht werden, desto unwichtiger und schwieriger wird die Verbindung, und darf daher auch füglich übergangen werden.

Aber auch hier soll das Umgekehrte geschehen. Z. B. Wenn man die 2 Seiten eines gleichseitigen Dreyecks in 2 gleiche Theile theilt und an die gegenüberstehenden Winkel 2 Linien zieht, so wird das Dreyeck immer in 2 und 2 gleiche Theile getheilt, deren 2 jeder $^1/_3$, 2 aber jeder $^1/_6$ des Ganzen betragen.

Dieses wird hernach auf alle Dreyecke angewendet und ausgedehnt, und der Schüler wird ohne weitere Schwierigkeit finden, daß diese Verhältnisse auf alle Arten Dreyecke anwendbar werden. Auch kann bey dem einen oder andern Dreyeck die Gleichheit und Ungleichheit der Seiten aufgesucht und bestimmt werden, besonders bey dem gleichschenklichten. Man kann bey allen gleichschenklichten Dreyecken 4. 2 und 2 gleiche Seiten in dieser Verbindungsart bilden.

Bey dem ungleichseitigen Dreyeck wird diese Untersuchung aber gar nicht wichtig. Nothwendiger aber wird folgende Untersuchung; von allen 3 Winkeln eines jeden Dreyecks sollen auf die gegenüberstehende Seite 3 Linien gezogen werden. —

Der Anfang kann also gemacht werden: man theilt 2 Winkel eines gleichseitigen Dreyecks auf obige Art in 2 gleiche Theile, und zieht vom dritten Winkel durch den Vereinigungspunkt eine Linie, untersucht, ob diese Linie den Winkel und die gegenüberstehende Seite in 2 gleiche Theile theilt. Auch wird der Schüler ohne Anstand finden, daß der Winkel sowohl als die gegenüberstehende Seite in 2 gleiche Theile getheilt werden.

Dieses wird auf die gleichschenklichten Dreyecke ausgedehnt.

Werden die 2 gleichen Winkel zuerst mit 2 Linien in 2 gleiche Theile getheilt, und vom dritten Winkel durch diesen Durchschnittspunkt eine Linie gezogen, so wird der Winkel und die gegenüberstehende Seite wieder in 2 gleiche Theile getheilt.

Theilt man aber zuerst einen gleichen und einen ungleichen Winkel in 2 gleiche Theile, und wird hernach wieder durch den Vereinigungspunkt eine Linie gezogen; so wird der Winkel ebenfalls in 2 gleiche, die Seite aber in 2 ungleiche Theile getheilt.

Geschieht das Nämliche beym ungleichseitigen Dreyeck, so werden in jedem derselben die 3 gegenüberstehenden Seiten immer in 3 ungleiche Theile getheilt.

Statt daß man von den Winkeln ausgeht, werden diese Reihenfolgen auch umgekehrt von den Seiten ausgegangen und behandelt werden. Z. B.

In einem gleichseitigen Dreyeck werden 2 Seiten in 2 gleiche Theile getheilt, und von diesen Punkten aus in die gegenüberstehenden Winkel 2 Linien gezogen, hernach von der Mitte der dritten Seite aus eine Linie durch den Durchschnittspunkt noch gezogen, und ebenfalls untersucht, ob dadurch der dritte Winkel auch in 2 gleiche Theile getheilt werde.

Bey einer solchen Prüfung wird der Schüler aber finden, daß bey'm ungleichseitigen Dreyeck dasselbe nicht in 2 gleiche Theile getheilt werden könne. Hingegen wird der Größeninhalt in allen Dreyecken unverändert in 6 gleiche Theile dadurch eingetheilt.

Zieht man in irgend einem dieser Dreyecke vom Durchschnittspunkt auf die dritte Seite des Dreyecks 3 rechtwinklichte Linien, so werden sie immer einander gleich.

Auflösung. (Zchg. 121.) q t, q w, q v sollen die rechtwinklichten Linien vorstellen. Das Dreyeck a q c wird gleich a q v, weil der Winkel q a t gleich q a v, q c a gleich q v a und endlich t q a gleich a q v; die Seite a q ist für die 2 Dreyecke a q t und a q v gemein; wenn 2 Dreyecke 2 gleiche Seiten haben, und auf ihnen 2 paar gleiche Winkel liegen, so sind die Dreyecke und die gleichliegenden Seiten einander gleich; also q t gleich q v, und so werden die Dreyecke q t d und q d u wieder in's Auge gefaßt, und eben so bewiesen, daß q t gleich q u werde; folglich alle 3 rechtwinklichten Linien einander gleich. —

So wie man von mehreren Seiten und von mehreren Winkeln aus Linien gezogen hat, so kann dieses auch noch mit mehreren gleichlaufenden, die auf verschiedene Seiten gezogen werden, statt finden. Der Stufengang und die Reihenfolgen sind in dem, was so eben aufgestellt worden ist, ganz gleich; um mich kurz fassen zu können, werde ich diesfalls nur noch einige der wesentlichsten Aufgaben mit ihren Auflösungen anführen.

(Zchg. 122.) Die Linie b m soll mit a h und d l mit an gleichlaufend, und hm gleich ln seyn; es fragt sich, wie viel von den 4 Theilen einander gleich seyen?

Antwort. 2 gleich = und 2 ungleichhaltig.

Auflösung. Weil h m gleich l n ist, so wird das Viereck dgmh gleich glnb werden; denn die Seite mn des Dreyecks mnb ist gleich hl des Dreyecks hld; ferner ist der Winkel bnm des Dreyecks bmn gleich dem Winkel hld des Dreyecks hld, als innere und äußere Gegenwinkel von gleichlaufenden Linien; aus dem nämlichen Grund ist der Winkel bmn gleich dhl; das Dreyeck gml von beyden Dreyecken weggethan, bleibt Gleiches, also ist das Viereck bgln gleich gmhd; thut man abgd zu beyden hinzu, so erhält man wieder Gleiches; folglich anld gleich bmha. Wenn 2 Paralleltrapeze 2 gleiche Seiten haben, und sich, so wie es in dieser Verbindung geschieht, in einem Punkt a vereinigen, so sind die 2 Paralleltrapeze gleichhaltig.

Mehrere Linien in 2 Richtungen gleichlaufend zu ziehen, würde nichts als eine Wiederholung der Aufgaben seyn, die bereits ausführlich genug sich dargelegt finden; dagegen mögen folgende noch eine Stelle finden.

Wie viel Theile werden einander gleich, wenn man in einem gleichseitigen Dreyeck durch die Mitte einer Seite eine Linie gleichlaufend zieht, und hernach einen Winkel, mit einer zweyten, in 2 gleiche Theile theilt und dieselbe an die gegenüberstehende Seite verlängert?

Antwort. 4 Theile, wovon 2 und 2 gleich sind; 2 davon betragen jeder immer $\frac{1}{8}$ und 2 jeder $\frac{3}{8}$ des ganzen Dreyecks.

Die Auflösung kann auf ein Dreyeck, in welchem durch die Hälfte der Seite eine gleichlaufende Linie gezogen wird, zurückgeführt werden.

Seiten entstehen dadurch 6, 2 und 2 gleiche.

Ist aber diese gleichlaufende Linie nicht durch die Mitte gezogen, so entstehen, wie oben, 2 und 2 gleiche Räume; aber die 2 Dreyecke werden mehr oder weniger als $\frac{1}{8}$ des ganzen Dreyecks. Eben so werden die 2 Vierecke mehr oder weniger als $\frac{3}{8}$ des Ganzen. So kann das gleichschenklichte und ungleichseitige Dreyeck untersucht werden. Statt aber einen Winkel in 2 gleiche Theile zu theilen, wird in dem unregelmäßigen Dreyeck die Seite so eingetheilt werden. In diesen Fällen wird die Gleichhaltigkeit der verschiedenen Theile in allen Dreyecken unverändert bleiben.

Theilt man eine Seite eines Dreyecks in 2 gleiche Theile, und wird an den gegenüberstehenden Winkel eine Linie, und hernach von einer Seite aus 2 gleichlaufende und gleichweit von einander entfernte Linien gezogen, so fragt es sich, wie viel von den Theilen einander gleich und wie viel ein jeder des ganzen Dreyecks sey?

Antwort. 2, 2 und 2 gleich; 2 davon sind jeder $\frac{1}{18}$, 2 jeder $\frac{3}{18}$ und 2 jeder $\frac{5}{18}$ des Ganzen.

Werden diese Linien in ungleicher Entfernung gleichlaufend gezogen, so fragt es sich, wie viel in diesem Fall wieder einander gleich seyen, und wie viel ein jeder Theil des Ganzen betrage?

Bevor man zum Viereck vorschreitet, können noch einzelne Fragen über die verschiedenen Verhältnisse, die durch das Ziehen der Linien in Dreyecken entstehen, gegeben werden.

Weil diese Fragen so einfach aus den aufgestellten Reihenfolgen hervorgehen, so nehme ich keinen Anstand, dieses ganz dem Lehrer zu überlassen und zum Viereck vorzuschreiten. Auch hier wird der Anfang wieder bey'm regelmäßigen Viereck gemacht. —

Wird in einem Quadrat eine Linie gezogen, so kann dasselbe in 2 gleiche oder 2 ungleiche Theile getheilt werden. Bey 2 gleichen Theilen kann man entweder 2 Dreyecke, oder 2 Rechtecke, oder 2 Paralleltrapeze machen.

Bey 2 ungleichen aber 2 Paralleltrapeze, oder ein Dreyeck und ein Paralleltrapez, oder ein Dreyeck und ein Fünfeck.

Um den ersten Fall zu bilden, wird in dem Dreyeck eine Ecklinie gezogen; dadurch entstehen 2 Dreyecke, die 2 gleiche Seiten und auf denselben 4 gleiche Winkel haben, folglich sind sie einander gleich.

Für den zweyten Fall aber wird durch die Mitte einer Seite des Quadrats eine gleichlaufende Linie gezogen. Dadurch entstehen 2 Rechtecke, die gleiche Seiten haben, und als Sache der Anschauung schon sind sie einander gleich. Wollte man dieses auf das Dreyeck zurückgeführt wissen, so müßte jedes Rechteck nur in 2 Dreyecke zerlegt werden. Die weitere Ausführung wäre dann dem Obigen ganz gleich.

Für den dritten Fall wird von einem beliebigen Theil einer Seite des Quadrats (nur darf es nicht die Mitte seyn) so eine ungleichlaufende Linie gezogen, daß die 2 gleichlaufenden Seiten des Paralleltrapez gleich sind einer Seite des Quadrats.

(S. Zchg. 123.) Es wird auf gewöhnliche Weise durch das Dreyeck gezeigt, daß das Dreyeck a′ und b′ gleich a und b werde; folglich das eine Paralleltrapez gleich dem andern.

Für die ungleichen Theile kann die Linie außer diesen 3 Bestimmungen, in denen sie gleich werden, ganz beliebig gezogen werden. Die Gleichheit der Seiten zu bestimmen, wird nach und nach immer unwichtiger und darf daher größtentheils ganz ausbleiben. Dagegen erhält man öfters sehr wichtige Verhältnisse der Winkel, die folglich nicht ganz unbemerkt übergangen werden sollen. So trägt man dem Schüler auf, mit 2 Linien ein Quadrat in 2, 3 und 4 Theile zu theilen.

Ich werde einige der wichtigern Fälle, die er finden wird, hier anführen.

Er wird 4 gleiche Quadrate, oder 4 gleichschenklichtrechtwinkliche Dreyecke, oder 4 gleiche Trapeze, oder 2 und 2 gleiche Rechtecke, oder 2 gleiche Rechtecke und 2 ungleiche Quadrate, oder 3 gleiche Rechtecke, oder 2 gleiche und ein ungleiches Dreyeck ꝛc. finden. Nur ungleiche Theile zu bilden, ist unwichtig; besonders wenn man mit den gleichen angefangen hat.

Will man 4 gleiche Quadrate bilden, so werden in 2 Richtungen durch die Mitte mit den Seiten desselben 2 gleichlaufende Linien gezogen. — Für 4 gleiche Dreyecke zieht man im Quadrat die 2 Ecklinien. Jeder Winkel wird dadurch in 2 gleiche Theile getheilt, folglich werden die Winkel, die durch die Verbindung dieser 2 Linien am Vereinigungspunkt entstehen, Rechte. Die 4 Dreyecke sind gleich, weil 2 und 2 immer 2 gleiche Seiten und darauf 4 gleiche Winkel haben.

Auch die Trapeze können wieder durch die Dreyecke gelöst werden. (S. Zchg. 124.) Zuerst wird gezeigt, daß alle die spitzen Winkel, die auf den Seiten des Quadrats sich bilden, so wie die stumpfen, einander gleich werden; dann werden die 2 Hülfslinien gezogen und gezeigt, daß das Dreyeck a und c gleich a′ und c′ werde.

Eben so kann man ein Quadrat in 3, 4 und noch mehrere gleiche und ungleiche Theile eintheilen lassen; nur dürfen die ungleichen nicht weitläufig vorgenommen werden. Selbst ist es nicht nothwendig, die gleichen Theile bey einer größern Anzahl Linien zu erschöpfen.

Die gleichen Uebungen können mit dem Rechteck, mit der Raute, dem Parallelogramm, Paralleltrapez, und selbst mit dem Trapez vorgenommen werden.

Ich übergehe die Ausführung, und schreite zu den wesentlichern Aufgaben, die dem Schüler diesfalls vorgelegt werden können.

Jedes Parallelogramm wird durch eine Ecklinie in 2 gleich große, und durch 2 solche in 4 gleichhaltige Dreyecke getheilt.

Auflösung des zweyten Falls. (Zchg. 125.) Die Seite d c des Dreyecks d c f ist gleich der Seite a b des Dreyecks a f b; der Winkel f c d gleich f a b, und f d c gleich f b a; wenn 2 Dreyecke 2 gleiche Seiten haben und auf denselben 2 paar gleiche Winkel liegen, so sind die gegenüberstehenden Winkel und Seiten einander gleich, also die Seite cf gleich af und df gleich bf; in dem Dreyeck dab ist die Seite db durch af in 2 gleiche Theile getheilt, aus diesem folgt, daß das Dreyeck daf gleich afb, eben so abf gleich bfc und bfc gleich cfd ꝛc. werde. Ist es ein Quadrat, so werden die 4 Winkel um f herum Rechte; ist es aber ein Rechteck, so sind sie spitz und stumpf; 2 Dreyecke davon werden gleichschenklich spitz= und die andern gleichschenklicht stumpfwinklicht. Wäre es aber eine Raute, so würden die 4 Winkel um f wieder Rechte, die Dreyecke aber ungleichschenklicht rechtwinklicht. In diesen Fällen werden die Ecklinien jedesmal in 2 gleiche Theile getheilt.

Zieht man von einer Seite in 2 Winkel eines Parallelogramms 2 Linien, so wird das hiedurch entstandene Dreyeck so groß als die 2 andern; oder ein Dreyeck, welches mit einem Parallelogramm einerley Grundlinie hat, wird halb so groß als das Parallelogramm selbst.

Auflösung. (Zchg. 126.) Man zieht eine Hülfslinie, zeigt dann, daß das Dreyeck a gleich at und b gleich B werde, und zwar wieder durch die Gleichheit der Dreyecke, die auf 2 gleichen Seiten 2 paar gleiche Winkel haben. Die Winkel werden als innere Wechselwinkel von gleichlaufenden Linien einander gleich. Werden durch die Durchschnittspunkte von 2 Winkellinien in einem Parallelogramm noch 2 mit den Seiten gleichlaufende Linien gezogen, so wird dasselbe in 8 gleiche Theile getheilt. Ein jeder Theil wird ein Achtel des Ganzen.

So könnte man den Schüler allenfalls noch untersuchen lassen, wie viel Seiten, Winkel ꝛc. einander gleich werden.

Er wird finden, daß die Ecklinie, die von dem spitzen Winkel in einem Parallelogramm gezogen wird, immer länger ist als diejenige, die von den stumpfen Winkeln ausgeht.

Auflösung. (Zchg. 127.) Man nimmt hiezu ein Rechteck und zeigt, daß die Ecklinie immer die längste Linie ist, welche in einer solchen Figur gezogen werden kann. Um ein schiefwinklichtes Parallelogramm zu machen, werden nur die 2 Hülfslinien gezogen, dieselbe bilden mit Theilen von den Seiten des Rechtecks ein schiefwinklichtes Parallelogramm. Um zu zeigen, daß s t wirklich länger als jede andere Linie in dem Rechteck werde, kann man nur a m ziehen; diese Linie bildet auf den Seiten des Rechtecks immer stumpfe Winkel, also werden die Seiten des Dreyecks, die diesen stumpfen Winkeln gegenüberstehen, immer größer als die andern. Auch bilden diese Seiten die Ecklinien des stumpfwinklichten Dreyecks. Die 2 Ecklinien eines Paralleltrapez können hingegen einander gleich oder ungleich seyn.

Diese Auflösungen sind nicht nur leicht zu machen, sie können schon durch die Anschauung außer allen Zweifel gesetzt werden. Wichtiger wird es aber seyn, zu zeigen, daß dadurch 2 gleichhaltige und 2 ungleichhaltige Dreyecke entstehen.

Auflösung (Zchg. 128.): Die gleichlaufende Seite ab wird so weit verlängert, bis das Ganze ein Parallelo=

gramm giebt. Das Dreyeck cad wird, wie wir oben gesehen haben, die Hälfte von demselben, und eben so wird cbd wieder die Hälfte, also das Dreyeck cad gleich cbd. Das Dreyeck ced gehört nun zu beyden dieser Dreyecke; wird es von jedem abgezogen, so hat man Gleiches von Gleichem weggethan, und es muß daher noch Gleiches bleiben; auf der einen Seite bleibt cae, auf der andern aber ebd, und also sind diese 2 Dreyecke einander gleich. Die Seite ae ist aber ungleich ed, weil es keine Ecklinien des Parallelogrammes sind; aus diesem folgt, daß das Dreyeck aeb ungleich bed und bed ungleich dec wird.

In den verschiedenen unregelmäßigen Trapezen Ecklinien zu ziehen, wird nicht mehr nöthig. Ich werde noch einige Aufgaben über das Fünfeck in Kürze anführen.

Versteht sich, daß man dem Schüler auch hier wieder aufgeben könnte, ein Fünfeck mit 1, 2, 3 ꝛc. Linien in 2, 3, 4 ꝛc. gleiche Theile zu theilen, wie dieses beym Drey- und Viereck geschehen ist. Dieses würde aber Uebungen, die nicht mehr sehr nothwendig auf der gegenwärtigen Stufe sind, zu sehr ausdehnen. —

Man theilt in einem regelmäßigen Fünfeck einen Winkel in 2 gleiche Theile, und zieht von diesem Theilungspunkt an die gegenüberstehende Seite eine Linie; es fragt sich, ob die 2 dadurch entstandenen Vierecke einander gleich oder ungleich werden?

Auch kann man umgekehrt von der Mitte einer Seite an den gegenüberstehenden Winkel eine Linie ziehen, und untersuchen, ob die 2 Theile einander gleich oder ungleich werden.

Um die eine oder andere Aufgabe zu lösen, zieht man in jedem Viereck eine Hülfslinie, verwandelt dasselbe in Dreyecke, dadurch kann man leicht zeigen, daß sie einander gleich werden und folglich auch die Vierecke, oder das Fünfeck ist in dem einen und andern Fall in 2 gleiche Vierecke getheilt worden. —

Werden aber von einem Winkel eines Fünfecks in die gegenüberstehende 2 Winkel 2 Linien gezogen; so fragt es sich, in wie viel Theile das regelmäßige Fünfeck dadurch getheilt werde? Wie viel gleiche Winkel und Seiten seyen?

Antwort: 2 gleiche und 1 ungleiches Dreyeck; 5, 2 und 2 gleiche Winkel, und 5 und 2 gleiche Seiten.

Auflösung (Zchg. 129.): Der Winkel abc ist $\frac{6}{5}$ Rechte; die Seite ab gleich bc und deswegen der Winkel bac gleich bca und jeder $\frac{2}{5}$; desgleichen ist der Winkel dce gleich ced; folglich ist der Winkel dec und dce auch $\frac{2}{5}$ u. s. w. Weil das Dreyeck edc gleich abc ist, so wird die Seite ec gleich ac, und weil der Winkel abc stumpf ist, so wird die Seite ac länger als ab. Der Winkel dec ist gleich $\frac{2}{5}$, also bleibt für cea = $\frac{4}{5}$. Kennt man einmal alle Seiten und Winkel, so läßt sich die Gleich- und Ungleichheit der Dreyecke, gestützt auf dieses, dann finden. Um zu zeigen, daß das Dreyeck eca größer als dec werde, wird der Winkel aec durch die Hülfslinie em in 2 gleiche Theile getheilt; dadurch wird das Dreyeck emc gleich edc, also ist das Dreyeck eac größer als edc.

So läßt man den Schüler im Fünfeck auch 2 Linien ziehen, die einander durchschneiden, und untersuchen, wie viel Seiten, Winkel und Theile des Fünfecks dadurch einander gleich werden, und es wird nicht fehlen, er wird 2 gleiche Dreyecke und ein Dreyeck finden, welches dem Viereck ungleich ist; Winkel giebt es 6 und 3, Seiten 7 und 2 gleiche.

Mit den Seiten des Fünfecks gleichlaufende Linien zu ziehen, wird hier weniger wichtig, als im Dreyeck oder im Parallelogramm und darf daher ganz übergangen werden. Auch die unregelmäßigen Fünfecke dürfen nicht als sehr wichtig angesehen und müssen dem gemäß behandelt werden. Will man aber dem Schüler dennoch einige Aufgaben geben, so mögen solche Fünfecke gewählt werden, die dem regelmäßigen am nächsten stehen. Z. B. Ein Fünfeck mit 5 gleichen Seiten, 2 und 2 gleichen und einen ungleichen Winkel. Fünfecke mit innern Ecken werden aber auf keinen Fall gegeben. Auch dürfen höchstens nur ein paar Linien gezogen werden. Das Ausgeführte mag diesfalls als Leitfaden und Norm dienen. Auch das regelmäßige Sechseck wird einer gleichen Untersuchung unterworfen, und kann weitläufiger als das Fünfeck selbst behandelt werden, indem seine gleichlaufenden Seiten mehrere einfache und zugleich wichtige Verhältnisse in sich fassen.

Als Beleg mögen folgende Aufgaben dienen.

Zchg. 130. soll ein regelmäßiges Sechseck seyn. Es wird a b gezogen; es fragt sich, ob die 2 dadurch entstandene Vierecke einander gleich seyen?

Auflösung: man zieht q b und im b d das Dreyeck q p b gleich m n b, also die Seite q b gleich m b; der Winkel nmb gleich pqb; aus diesem folgt, der Winkel bma gleich bqa; die Seite am gleich aq; folglich das Dreyeck bma gleich bqa; die gleichliegenden Winkel bam und baq sind einander gleich; weil die Winkel des regelmäßigen Secksecks $\frac{4}{3}$ Rechte betragen, so ist der Winkel mab = $\frac{2}{3}$ Rechter u. s. w. Also das Dreyeck pqb mehr qba gleich mnb + bma. Das Sechseck ist dadurch in 2 gleiche Theile getheilt, ebenfalls theilt diese Ecklinie die 2 Winkel in 4 gleiche Theile.

Angenommen, es wären die drey Linien bq, ba und bm gezogen, und man möchte wissen, wie viel gleiche Winkel dadurch entstehen und in welchem Verhältniß diese 4 Theile des Sechsecks zu einander stehen?

Antwort: Es giebt 2 und 2 gleiche Theile, wovon 2, ein jeder $\frac{1}{6}$ des Ganzen ausmacht; zwey aber jeder $\frac{1}{3}$; ferner hat es 6, 2, 2 und 2 gleiche Winkel; jeder der 6 gleichen ist $\frac{1}{3}$, von 2 gleichen jeder $\frac{2}{3}$, 2 andere $\frac{4}{3}$, und von 2 endlich jeder ein Rechter.

Die Gleichheit der Theile ist aus obiger Auflösung zu ersehen. Man zieht die Hülfslinie ms, und macht den Winkel smb gleich bmn, und also wird das Dreyeck smb gleich mnb; die Seite bs gleich sm gleich sa, weil das Dreyeck sma gleichseitig ist, in dem Dreyeck bma ist die Seite ba durch sm in 2 gleiche Theile getheilt; aus diesem folgt endlich, daß das Dreyeck bma 2 mal so groß als bnm ist; ferner folgt aus diesem, daß die längste Ecklinie eines regelmäßigen Sechsecks 2 mal so lang als eine Seite desselben ist. Auch ist der Winkel durch diese Ecklinien in 3 gleiche Theile getheilt worden.

Zchg.

Zchg. 131. In dem regelmäßigen Sechseck werden die 2 Ecklinien af und db gezogen, no fragt sich wieder, wie viel gleiche Theile sie haben und in was für einem Verhältniß sie stehen; wie viel gleiche Winkel und Seiten dadurch entstehen? Aus letzter Auflösung geht hervor, daß eine solche Ecklinie einen Winkel des Sechsecks in 2 gleiche Theile theile, und also einer $^2/_3$ werde; jedes Dreyeck gleichseitig und nach obiger Auflösung ist es die Hälfte von dem größern; das größere ist aber 2 mal so groß als das kleinere, folglich $^1/_6$ des Ganzen; für das Viereck aber bleiben 2 solcher Theile oder $^1/_3$ des Ganzen. Man zieht st und fragt, wenn man sie verlängere, ob sie in den Winkel q falle?

Würde sie nicht in den Winkel q fallen, so müßte sie entweder auf bq oder qf zu stehen kommen, und folglich ein gleichseitiges Dreyeck bilden; denn die Winkel um s herum sind $^2/_3$, und kommt daher auf sbu auch $^2/_3$. Nun ist aber sb gleich ab gleich bq, und weil sb gleich bu ist, folgt daraus, daß ab gleich bq und auch gleich bu werde, welches nicht seyn kann, denn ein Theil eines Ganzen kann dem Ganzen nie gleich werden, und deßwegen kann su nicht auf bq und eben so wenig auf qf, sie muß dem also in den Winkel q fallen. —

So kann man im Sechseck auch von der Mitte einer Seite aus, auf die andere eine und mehrere Linien ziehen, und wieder untersuchen, wie viel Theile einander gleich und ungleich werden.

Die gleichen Uebungen können auch auf das regelmäßige Siebeneck, Achteck, Neuneck 2c. ausgedehnt werden. Je mehr aber eine Figur Seiten hat, desto geringer muß die Anzahl der Linien seyn, die man in derselben zieht, wenn man den Schüler nicht in zu verwickelte und schwierige Verhältnisse ohne Zweck und ohne Nutzen auf dieser Stufe führen will.

Bey dem unregelmäßigen Sieben-, Achtecke ꝛc. werden keine Linien mehr gezogen.

Die wesentlichern Aufgaben hierüber wären allenfalls noch folgende:

Die längste Ecklinie in einem Sieben-, Acht-, Neuneck ꝛc. und die Gleichheit der Winkel und Figuren zu untersuchen.

Wenn in einem Siebeneck von einem Winkel in 4 andere 4 Linien gezogen werden, in einem Achteck aber auf die nämliche Weise 5, in dem Neuneck 6; in wie viel gleiche Theile werden diese Figuren dadurch jedesmal getheilt werden? Wie viel Winkel werden einander gleich? Wie viel wird ein jeder betragen ꝛc.?

Sollte jemand diese Uebungen und Reihenfolgen ausgedehnter wünschen, so mag das, was über das Dreyeck und Viereck aufgestellt worden ist, als Leitfaden und Norm dienen, und gewiß wird man ohne die geringste Schwierigkeit sich dasselbe verschaffen können, was einem jeden an seinen individuellen Bedürfnissen und nach seiner Ansicht noch mangeln sollte. Auch wenn man hierüber noch einzelne Fragen zu geben wünscht, so wird man dieselben mit eben der Leichtigkeit zu bilden im Stande seyn.

Statt in den verschiedenen regelmäßigen und unregelmäßigen Figuren Linien zu ziehen, kann man die gleichen Untersuchungen zwischen gleich- und ungleichlaufenden Linien mit Figuren vornehmen jedoch hat man sich vorzüglich auf die gleichlaufenden als die wichtigern zu beschränken.

Der Anfang wird zu diesem Ende also gemacht:

Untersucht, wie viel gleiche Parallelogramme mit 3, 4, 5 ꝛc. gleichlaufenden Linien, die zwischen 2 gleichlaufenden Linien gezogen werden können.

Werden aber zwischen 2 gleichlaufenden Linien 2 gleichlaufende und eine ungleichlaufende gezogen, so können entweder 2, 3 oder 4 Figuren gemacht werden.

Bey 2 geschlossenen Räumen sind entweder beyde gleich, oder beyde ungleich; bey 3 sind entweder alle gleich, 2 gleich und einer ungleich, oder alle 3 ungleich. Bey 4 können alle 4 gleich, oder 2 und 2 gleich, oder alle 4 ungleich u. s. w. gemacht werden.

Auflösung des ersten Falls. Man macht nur ein Parallelogramm, dessen Seite die Hälfte einer Seite des Dreyecks ist (S. Zchg. 132.) Man zieht die Hülfslinie ap, und am auf die Mitte von db, dadurch wird apd gleich adm; das erste Dreyeck ist die Hälfte vom Parallelogramm, und das zweyte die Hälfte vom Dreyeck adb und wenn die Hälften einander gleich sind, so werden auch die Ganzen einander gleich.

Aus diesem folgt, daß wenn ein Parallelogramm und ein Dreyeck zwischen 2 ungleichlaufenden Linien stehen und 2 geschlossene Räume bilden, und die eine Seite des ersten, die auf einer parallelen Linie steht, die Hälfte von einer Seite des zweyten ist, beyde Figuren gleichhaltig werden; oder gewöhnlich also ausgedrückt: Ein Dreyeck, das mit einem Parallelogramm zwischen gleichlaufenden Linien steht, und das Doppelte der Grundlinie des Parallelogramms hat, ist demselben gleich.

Auch folgt aus diesem das Umgekehrte. Wenn ein Dreyeck und ein Viereck auf obige Art gebildet werden und die Seite des Parallelogramms mehr als das Doppelte der Seite des Dreyecks wird; so ist das erstere auch größer als das letztere.

Auflösung. Um 2 gleiche und einen ungleichen geschlossenen Raum zu bilden, wird Zeichnung 133 und df = ab gemacht; also wird das △ abh = hdf, denn die zwey Dreyecke haben auf zwey gleichen Seiten 2 paar gleiche Winkel, also sind die △e selbst einander gleich. Fasset man agf als ein Dreyeck in's Auge, so kann hd als durch die Mitte von af gleichlaufend mit ag angesehen werden, und das △ hdf oder abh als ⅓ vom Paralleltrapez ahdg betrachtet werden.

Diese Linienverbindung auf eine andere Art ausgedrückt: Zwey Scheiteldreyecke, die zwischen zwey gleichlaufenden Linien stehen, sind gleich der Hälfte des Parallelogramms, mit dem sie gleiche Grundlinie und gleiche Höhe haben und deren Linien auf obige Weise mit einander verbunden sind, oder die sich in der Mitte zwischen den 2 gleichlaufenden Linien durchschneiden.

Um 4 gleiche geschlossene Räume zu bilden, werden 2 Dreyecke und 2 Vierecke nach der Verbindungsart der Linien in Zeichnung 133. gemacht. So zieht man zwi=

schen zwey gleichlaufenden Linien 2 und 2 gleichlaufende und untersucht, wie oben, die Gleichheit und Ungleichheit der geschlossenen Räume, die dadurch gebildet werden. In Rücksicht auf die Zahl giebt es 3, 4, 5, 6 oder 7 geschlossene Räume. Bildet man 3 geschlossene Räume, so können alle 3 gleich, 2 gleich und 1 ungleich, oder alle 3 ungleich seyn.

Auflösung des ersten Falls (S. Zchg. 134.). Man macht die Seite ab des Parallelogramms abgh = bc des Parallelogramms bcdf, und df doppelt so lang als hg. Wenn eine Seite eines Parallelogramms die Hälfte der Seite des △ ist, so wird das Parallelogramm so groß als das △, also abgh = bgf, und aus dem gleichen Grunde wird hinwieder das △ gbf = bcdf.

Hieraus folgt ferner: wenn 2 Parallelogramme zwischen gleichlaufenden Linien stehen, gleiche Grundlinie haben und 3 geschlossene gleiche Räume bilden, die Grundlinie des Dreyecks doppelt so groß ist als die der Parallelogramme. Haben diese die gleichen Eigenschaften, so wird die 3te Figur den Parallelogrammen ungleich, wie in Zchg. 135., die ersten Figuren sind dennoch einander gleich.

Auflösung. Um zu zeigen, daß das Parallelogramm abem = dfgh werde, zieht man die Hülfslinie dm und fe. Das △ adm = bfe, weil die Seite ad = bf, und am = be, und der Winkel mad = ebf wird; wenn 2 Dreyecke zwischen 2 paar gleichen Seiten 2 gleiche Winkel haben, so sind sie einander gleich; wird vom 1sten △ das △ bid und die nämliche Figur auch vom 2ten weggethan, so bleibt für das erste das Paralleltrapez abim = dief, und wird hinwieder △ ime zu beyden Paralleltrapezen hinzugethan, so erhält man das Parallelogramm abem = mdfe; auf die gleiche Weise kann wieder gezeigt werden, daß das Parallelogramm mdfe = dfhg wird, und folglich dfhg = abem.

Aus diesem folgt aber allgemein, daß zwey Parallelogramme, die zwischen gleichlaufenden Linien stehen und gleiche Grundlinien haben, einander gleich sind. Und auch umgekehrt: 2 Parallelogramme, die einerley Höhe, aber ungleiche Grundlinien haben, sind einander ungleich. Oder auch: 2 Parallelogramme, die gleiche Grundlinien, aber ungleiche Höhe haben, sind einander ungleich, und zwar die größere Figur wird jedesmal die werden, die die größere Grundlinie oder die größere Höhe hat. Wird aber in einem solchen Falle die Grundlinie und die Höhe größer gemacht, so wird das Parallelogramm, welches diese Eigenschaft besitzt, auch aus doppelten Gründen größer werden als das andere. Auf diese Auflösung und die aus derselben hervorgehende Folgerung gestützt, können alle oben nur angedeuteten Fälle mit der größten Leichtigkeit erläutert und gelöst werden. Der Kürze halber übergehe ich ihre weitere Ausführung; dagegen aber werde ich hier noch einige der wichtigern Aufgaben, die mit vier, zwischen zwey gleichlaufenden gezogenen ungleichlaufenden Linien gemacht werden können, hier anführen.

Wenn man zwischen 2 gleichlaufenden Linien 4 ungleichlaufende zieht, so können 3, 4, 5 rc. geschlossene Flächen gebildet werden; eben so können in Rücksicht der Gleichheit und Ungleichheit alle Abänderungen statt finden, die bey 3, 4 ꝛc. Größen im allgemeinen früher schon angegeben worden sind.

Um unter anderm zu zeigen, daß 2 gleich sind und eine ungleich, kann man Zchg. 136. machen. Man macht die Seite ba = cd und zieht sa gleichlaufend mit gb und fc gleichlaufend mit dp; folglich wird das Parallelogramm gbas = fcdp; △ gba ist die Hälfte von gbas, und eben so ist das △ pcd die Hälfte vom Parallelogramm fcdp; wenn die Ganzen einander gleich sind, so werden es auch ihre Hälften oder genannte Dreyecke; ferner kann man allgemein aussprechen: zwey Dreyecke, die gleiche Grundlinien haben und zwischen zwey gleichlaufenden Linien stehen, sind gleichhaltig; oder zwey Dreyecke, die gleiche Grundlinien haben und gleiche Höhen, sind gleichhaltig. Ungleich sind sie, wie dieses bey den Parallelogrammen der Fall ist, wenn sie entweder ungleiche Grundlinien und gleiche Höhen, oder gleiche Grundlinien und ungleiche Höhen haben, oder aber, wenn die Grundlinie und die Höhe des einen Dreyecks mehr beträgt als die des andern. Daß der dritte geschlossene Raum in obiger Verbindung der Linien diesen zwey gleich oder ungleich gemacht werden kann, geht aus obiger Auflösung hervor. Auf die gleiche Weise können 5, 6 und noch mehrere gleich- und ungleichlaufende Linien gezogen werden.

Ich ende aber hiemit, und will nur noch in gedrängter Kürze zeigen, wie und unter welchen Bestimmungen 4, 5, 6 Ecken ꝛc. einander gleich oder ungleich seyen.

Werden zwischen zwey gleichlaufenden Linien zwey

Paralleltrapeze gemacht, deren gleichlaufende Seiten in diese zwey Linien fallen und wovon die zwey des einen zusammengenommen gleich sind denjenigen des andern; so sind beyde Paralleltrapeze einander gleich.

Auflösung (Zeichnung 137.). ab + ch = dc + gf. Verwandelt man jedes Paralleltrapez in 2 Dreyecke, so sind die 2 △ abe + beh gleich einem, welches eine Grundlinie eh + ab und eine Höhe ao (die die Entfernung zwischen zwey gleichlaufenden Linien bezeichnet) hat. Das Gleiche findet bey den 2 △ dgf und dgc statt; folglich sind 2 Paralleltrapeze, die die oben angegebenen Eigenschaften besitzen, einander gleich. Wie in dieser Verbindung 2, 3 rc. Paralleltrapeze auch gleich einem werden können, geht klar aus diesem hervor. Diese Folgerung ist auf das Dreyeck, Parallelogramm u. s. w. anwendbar. Ungleich ist aber ein Paralleltrapez einem andern, wenn beyde auf obige Art zwischen gleichlaufenden Linien stehen, aber die 2 parallelen Seiten des einen zusammengenommen ungleich denen des zweyten sind. Das größere Paralleltrapez hat zusammengenommen die längern, und das kleinere die kürzern Seiten. Zwischen ungleichlaufenden Linien die nämlichen Figuren zu machen und die Gleichheit und Ungleichheit derselben zu untersuchen, wird überflüssig. Zwey Trapeze mit einem innern Eck sind einander gleich, wenn ihre vier Ecke zwischen 3 gleichlaufenden Linien stehen und die dem äußern Winkel gegenüberstehende Seite des innern Trapez gleich ist der des andern.

Auflösung (Zchg. 138.). Die Linien ab, ge und fc sollen gleichlaufend und die Seite fm = dc; folglich wird das △ fma = dcb, und eben so das △ fgm = dec; wird das Dreyeck fgm von fam, und dec von dbc weggethan, so hat man Gleiches von Gleichem weggethan und bleibt deswegen Gleiches, oder das Trapez fgma = decb.

Ungleich sind zwey Trapeze mit einem innern Eck hinwieder, wenn sie mit ihren 4 Ecken zwischen 3 gleichlaufenden Linien stehen und die dem äußern Winkel gegenüberstehende Seite des einen ungleich ist der des andern.

Dieses auf Trapeze auszudehnen, die zwischen ungleichlaufenden Linien stehen, wird nicht nothwendig.

So sind 2 Trapeze mit 4 innern Winkeln, deren 4 Ecke ebenfalls zwischen 3 gleichlaufenden Linien stehen und wovon die mittlere gleichlaufende Ecklinie des einen gleich wird der des andern Trapez, ebenfalls einander gleich (Siehe hiefür Zeichnung 139. und die Seite am = pq.) Ungleich sind sie aber, wenn die Seite am ungleich pq ist. Zchg. 140. Zwey Fünfecke sind einander gleich, wenn fl, at und mx gleichlaufend und ap = st und mn = ox seyn wird. Die Auflösung davon ergiebt sich aus obigem.

Ganz auf die gleiche Weise kann gezeigt werden, daß 2 Sechsecke, 2 Siebenecke, 2 Achtecke, die so und so verbunden zwischen gleichlaufenden Linien liegen, einander gleich sind. Ich darf die weitere Ausführung davon jedem Lehrer überlassen und begnüge mich, über diesen Gesichtspunkt zur Ergänzung noch ein paar einzelne Fragen beyzufügen.

Fr. Es stehen 2 Dreyecke zwischen 2 gleichlaufenden

Linien und sind einander gleich; es fragt sich, was sie für Eigenschaften haben?

Fr. Zwey Dreyecke sind einander gleich und haben gleiche Grundlinien; es fragt sich, ob sie zwischen gleich- oder ungleichlaufenden Linien stehen?

Die gleichen Fragen können gebildet werden, wenn die Dreyecke ungleich sind. Auch sollen ähnliche Fragen auf das Parallelogramm, Paralleltrapez, Trapez, Fünf-, Sechs-, Siebeneck u. s. w. angewandt werden.

Fr. Wenn ein Dreyeck und ein Viereck, die zwischen zwey gleichlaufenden Linien stehen, einander gleich sind, was haben ihre Grundlinien für ein Verhältniß zu einander?

Antwort. Die Grundlinie des Dreyecks ist doppelt so groß als die des Parallelogramms.

Fr. Ein Dreyeck und ein Paralleltrapez, die zwischen zwey gleichlaufenden Linien stehen, sind einander gleich; es fragt sich, was sie für weitere Eigenschaften haben?

Antwort. Die zwey parallelen Seiten des Paralleltrapez müssen zusammengenommen gleich seyn der Grundlinie des Dreyecks.

Fr. Wie muß ein Dreyeck und ein Trapez zwischen gleichlaufenden Linien beschaffen seyn, wenn sie einander gleich seyn sollen?

Fr. Man wünscht zwischen gleichlaufenden Linien ein Dreyeck zu bilden, das gleich wird einem Fünfeck; es fragt sich, wie dieses beschaffen seyn müsse?

So kann man ein Dreyeck einem Sechseck, einem Siebeneck etc. gleich machen, oder aber ein Viereck einem Fünfeck, Sechseck u. s. w.

Als Ende dieser Uebung kann man den Schüler ein Zwölfeck etwa einem Zwanzigeck, oder ein Dreyeck und ein Siebeneck zusammen einem Dreyzehneck, oder 3 beliebige Figuren zusammen 4 andern Figuren gleich machen lassen.

Dieses wirklich ausgeführt und hernach wörtlich ausgesprochen, ist der bey der Lösung dieser Aufgabe zu befolgende Rang.

So nothwendig und wichtig ich die weitere Fortsetzung der Größenlehre in diesem Band ansehe, so mußte sie doch abgebrochen werden, um einige andere Ansichten meiner Bestrebungen in ein heiteres Licht zu setzen. Hieher gehört unter anderm die Anwendung der Form- und Grössenlehre..

Ich mache den Anfang mit ersterer, und füge diesem noch bey: nachdem die Formlehre als Entwicklung der geistigen Anlagen des Kinds beendigt seyn wird, kann auch mit dem, was hier folgt, angefangen werden.

Anwendung der Form im Darstellen gradlinichter Figuren auf dem Felde.

Die Formlehre als Typus der Entwicklung der geistigen Anlagen geht diesen Uebungen nicht nur voran, sondern das, was bey der geraden Linie diesfalls aufgestellt worden ist, muß wenigstens vollendet seyn, ehe damit angefangen werden darf.

Aus dem hierüber Aufgestellten geht denn auch weiter hervor, daß die in der Formlehre statt gefundenen Verbindungen von Linien und Figuren auch in der freyen Natur ihre volle Anwendung finden, und eben so bildend seyen, als was diesfalls für die Schule aufgestellt worden ist.

Allgemein müssen auf dem Felde alle geradlinichte Figuren gemacht werden, die in der einen Formenlehre als wichtig aufgestellt worden sind. Ich werde mich aber in dieser Darlegung begnügen, nur die im Leben besonders praktischen, und besonders bildenden Aufgaben und Reihenfolgen heraus zu heben.

Von dem Verzeichnen gerader Linien.

Mit 2 Stangen wird eine gerade Linie ausgesteckt oder bezeichnet; denn 2 Punkte sind immer in einer geraden Linie, oder in einer geraden Richtung; folglich bilden diese Stöcke, wo sie auch immer auf dem Felde ausgesteckt werden, eine gerade Linie.

Gestützt auf diese Kenntniß, werden von dem Schüler 3, 4, 5 Stöcke ausgesteckt, die eine gerade Linie bilden. Dieses wird so lange fortgesetzt, bis sie mit der größten Schnelligkeit und Sicherheit eine gerade Linie auf dem Felde mit jeder beliebigen Anzahl Stöcken verzeichnen können. Daß für diesen Endzweck die Stangen senkrecht eingesteckt werden müssen, bedarf ich wohl nicht zu erinnern, und eben so wenig deren Nothwendigkeit hier weiter auseinander zu setzen. —

Zwischen 2 Stangen soll eine 3te gesetzt werden, die mit ihnen in einer geraden Linie steht. So werden 2, 3, 4 Stangen zwischen 2 gegebene gebracht. Daß es zu dieser Ausführung, wenn sie schnell von statten gehen und sicher seyn soll, wenigstens 2 Schüler erfordert, ergiebt sich aus der Natur der Sache; denn man bedarf einen, der denjenigen lenkt, welcher die Zwischenstangen einzustecken hat.

Es soll zwischen 2 Stangen eine 3te, und außer derselben eine 4te eingesetzt werden, die mit einander eine gerade Linie bilden. —

So kann man sie zwischen denselben 2 oder 3, und eben so viel außer denselben einstecken lassen.

Auf eben diese Weise kann man die Schüler, 2, 3 gerade Linien machen lassen; doch, wenn sie einmal nur eine richtig so auf dem Feld darstellen, so können sie das Nämliche ohne neue Schwierigkeiten auf 2, 3 anwenden. Werden Linien so ausgesteckt, so müssen sie auch, ihrem Bedürfniß gemäß, groß gemacht werden; denn das Bedürfniß aller Formen, die auf dem Felde vorkommen, ist gegen das Bedürfniß, welches die Schule erheischt, groß.

Will man die Schüler über 2 oder 3 gerade Linien auf dem Felde ausstecken lassen, so giebt man ihnen, um nicht ganz das Gleiche mehreremal zu wiederholen, Größenbestimmungen, die eine weitere Ausführung bildend zu machen geeignet ist. Doch müssen alle diese Uebungen das Gebiet der Anschauung nicht übersteigen.

Zwey, 3 ꝛc. gleich lange Linien, oder 2, 3 Linien, die ungleich sind, wovon die 1te die kleinste, die 2te die längste, mittelste ꝛc. ist; oder 3 Linien, wovon die 2te doppelt so lang ist, als die 1te, und die 3te doppelt so lang, als die 2te, und so weiters werden vom Zöglinge auf dem Felde ausgesteckt. Um die dabey zu bezweckende Anschauung im richtigen Schätzen ihrer Größe zu erreichen, werden diese Größenverhältnisse von freyem Auge gemacht, und wenn es die Zeit erlaubt, so sollten öfters sehr lange Linien gemacht werden, damit sich das Auge des Schülers an das richtige Anschauen großer Gegenstände gewöhne, und neben diesem noch besonders seine physische Kraft im schnellen und weiten Laufen angeregt werde.

In unseren Tagen ist im Letzteren eine so allgemeine Trägheit, Weichlichkeit und Schlaffheit unter der Jugend eingerißen, daß dieses gewiß wichtiger für sie seyn wird, als mancher glauben mag. Wichtig ist dieses für die Jugend, da ihr zu dem vielen Schulsitzen in ihrem frühern Alter so wenig freye Luft und Bewegung in der Natur gegönnt wird. — Bey der Ausmessung und Bestimmung der Felder sowohl als bey andern Gegenständen der Natur findet ein angenommenes Maaß statt, und wird daher nicht am unrechten Orte stehen, wenn auch Uebungen hierüber jetzt folgen. Z. B. Linien, die eine bestimmte Anzahl Klafter oder Schuhe haben. Zu einem noch kleinern Maaße, wie etwa zu Zollen, Linien ꝛc. soll nicht geschritten werden. Um bey diesen Vergleichungen sicher zu seyn, ist es gut, wenn man den Schüler daran gewöhnt, im Anfang die Maaßstange oder die Meßkette richtig aufzufassen, um dadurch das Klaftermaaß im Großen etwa zu 1, 10, 100, 1000 zu abstrahiren. Zu diesem Ziele führende Uebungen mögen folgende vorzüglich dienen. Man läßt die Schüler eine Linie mit der Meßkette machen, die 1, 10, 20 ꝛc. Klafter hat, diese wird von ihnen so lange angeschaut, bis sie sich im Stande fühlen, solche Längen zu abstrahiren. So läßt man sie dann ohne Muster, Linien ausstecken, die diese oder jene Länge haben. Dieses wird so lange fortgesetzt, bis sie es auch zu einiger Fertigkeit hierin gebracht haben werden. Um aber bey der erst angegebenen Größenvergleichung sicher zu seyn, wird, nachdem die Linien in dem begehrten Verhältniß mit dem Auge ausgestreckt seyn wird, mit der Meßkette ihre Richtigkeit untersucht.

Gestützt auf diese Uebungen, kann man denn 2, 3 und mehreren Linien eine andere Eigenschaft beylegen; wie z. B. sie sollen gleichlaufend oder ungleichlaufend seyn. Den gleichlaufenden Linien werden Eigenschaften des gleich= oder ungleich=lang=seyns beygelegt werden. Z. E. die eine soll doppelt oder 3mal so lang seyn als die andere ꝛc., oder die eine soll so und so viel Klafter enthalten; ferner kann man die Schüler gleichlaufende Linien verfertigen lassen, deren Entfernung wie die Längen der letzten Linien bestimmt worden sind. Z. B. die 1te soll doppelt so weit von einer 2ten entfernt seyn, als die 2te von der 3ten ꝛc. Alles dieses muß aber auch wieder vom Auge beurtheilt und bestimmt werden; doch um sich der Richtigkeit auch hier wieder hinlänglich zu überzeugen, kann man die Schüler das vom Auge gemessene mit der Meßkette oder Meßstange untersuchen lassen. Statt der Maaßkette kann als Meßinstrument auch der Schritt oder der Fuß eines jeden Schülers angewendet werden; besonders wenn Linien oder Entfernungen zu untersuchen sind, wovon die eine doppelt so lang ist als die andere. Ist aber die Bestimmung der Entfernung in Schuhen oder Klaftern gegeben, so muß als berichtigendes Meßinstrument ein ihnen ähnlicher Maaßstab genommen werden. —

In mehreren Richtungen gleichlaufende Linien auf dem Felde auszustecken ist unnöthig, desgleichen nur ungleichlaufende, denen keine andere Eigenschaft beigelegt wird, als die oben angegebene. — Ich schreite daher, nachdem ich die getrennten Linien unter diesen Bestimmungen durchgeführt habe, zu den vereinigten Linien, nämlich zu den Winkeln. Auf dieser Stufe können auch noch getrennte Linien mit den bezeichneten Eigenschaften gemacht werden, denen die Natur Schwierigkeiten in ihrer Ausführung darbietet, wie z. B. zwischen 2 Stöcken, die auf 2 Seiten eines Hügels eingesteckt sind, und auch kleiner sind als der Hügel selbst, einen 3ten zu setzen, der mit ihnen eine gerade Linie bilden würde. Aufgaben dieser Art erfordern aber eine entwickelte geistige Schlußkraft der Formen und Größenverhältnisse, die auf dieser Stufe nicht vorausgesetzt oder gefordert werden darf, und folglich für einmal wegbleiben muß.

Vom Verzeichnen oder Ausstecken der Winkel.

Es sollen von den Schülern geradlinichte Winkel auf dem Felde ausgesteckt werden, und zwar rechte, spitze und stumpfe. Es werden den Schenkeln dieser Winkel Eigenschaften der Länge beigelegt; z. B. gleich und ungleich lang. Die ungleich langen Schenkel werden so gemacht, daß der eine 2, 3mal so lang ist, als der andere, welches aber nicht mehr sehr nöthig wird, wenn die einzelnen Linien in dieser Hinsicht genugthuend eingeübt worden sind. — Auch die Größe der Winkel soll wieder auf diese Art behandelt werden. Z. B. es werden gleich große, spitze,

oder

oder stumpfe Winkel ausgesteckt; (die rechte sind schon gleich) ferner Winkel der 1ten, 2ten Art, wovon der eine doppelt so groß ist als der andere. Weil die Schüler zur Sicherheit ihrer vom Auge geschätzten und gemessenen Linien zu Zeiten sich eines Instruments bedienen; so kann auch bey den Winkeln aus gleichen Gründen ein dazu schickliches Instrument angewendet werden. Wenn die Schüler 2 gleich große, spitze oder stumpfe Winkel ausgesteckt haben, so können sie diese Winkel der Maaßstange oder Kette oder Schritte etwa auf folgende Art untersuchen und prüfen, ob sie dieses richtig ausgeführt haben. Auf den Schenkel der zu berichtigenden Winkel werden in gleicher Entfernung von ihren Scheitelpunkten 14 Punkte durch Stangen bezeichnet; die Winkel sind gleich, wenn sie in gleicher Entfernung von ihrem Scheitelpunkte gleiche Oeffnungen haben. Um endlich mit einem Meßinstrumente zu untersuchen, ob ausgesteckte rechte Winkel wirklich auch recht seyen, kann man einen großen aus Holz von einem Tischler gemachten rechten Winkel gebrauchen, dessen weitere Anwendung in die Augen springt. Doch giebt es auch zu diesen Formen noch andere und eben so geeignete Instrumente. Um aber zur gehörigen Kenntniß derselben zu gelangen und dieselben richtig anzuwenden und zu gebrauchen, bedarf es der Größenlehre, die auf dieser Stufe noch nicht vorkommen darf. — Nicht uninteressant und zugleich wichtig ist es, daß die Schüler, wenigstens zu Zeiten, ihre Meßinstrumente selber suchen, und gewiß werden sie auch im Stande seyn, diese zu finden. Ein Winkel, welcher doppelt so groß ist als ein 2ter, soll vom

Schüler in 2 gleiche Theile von Aug getheilt, und hernach auf diese Art untersucht werden, ob dieses wirklich statt finde. Ist der 2te Winkel 3mal so groß, so wird er in 3 gleiche Theile getheilt werden.

Die Berichtigung kann mit einem Instrument, wo man es immer für nothwendig erachtet, vorgenommen werden. Eben so werden Winkel in 2, 3 und in jede beliebige Anzahl gleiche Theile getheilt werden können. So werden Nebenwinkel ausgesteckt.

Auf dem Felde sind 3 Punkte ausgesteckt gegeben, die die Ende der Schenkel eines paar Nebenwinkels bestimmen, es soll der Scheitelpunkt von diesem paar Nebenwinkel gesucht werden.

Einige Nebenfragen, die sich aus dieser Hauptfrage ergeben, wären folgende:

Fr. Wie müssen die 3 Punkte (Stangen) ausgesteckt seyn?

Antwort. Wie man will, nur dürfen nicht alle 3 in gerader Linie liegen.

Wie viel verschiedene paar Nebenwinkel können ausgesteckt werden?

Antwort. Entweder ein recht= oder ein schiefwinklichtes Paar.

In wie viel verschiedenen Linien kann der Scheitelpunkt dieser Nebenwinkel fallen?

Antwort. In 3 verschiedenen Linien, entweder in die 1, 2 oder 3te; denn die 3 Punkte, welche nicht in einer Richtung sind, bestimmen auch die Richtung 3 gerader Linien.

Man läßt sie die 3 angezeigten verschiedenen paar Nebenwinkel machen.

Die Auflösung ist mit der zwischen 2 Punkte einen 3ten auf dem Felde zu suchen, einerley, denn der Scheitelpunkt muß zwischen 2 gegebenen und mit ihnen in einerley Richtung seyn. Mit dem 3ten Punkt oder Stange läßt er dann in jeder Lage eine gerade Linie bilden.

Den Nebenwinkeln wird eine bestimmte Form beygelegt.

Es sollen auf den 3 verschiedenen Linien 3 schiefe oder 3 rechte paar Nebenwinkel gebildet werden; zwey rechte und ein schiefes Paar ꝛc. welches aber weiter nichts neues darbietet, als eine Zahlenkombination.

Auflösung der rechten Winkel.

Es wird so anfangen, wie es bey den beliebigen Nebenwinkeln geschehen ist, hernach der Scheitelpunkt eines jeden derselben so lange von Auge verändert, bis die Winkel dem Anschein nach recht sind. Zur Berichtigung kann man das Meßinstrument des rechten Winkels anlegen.

Die Lösung der schiefen Nebenwinkel ist so leicht, daß sie hier nicht weiter ausgeführt wird.

Es sollen 3 Stangen ausgesteckt werden, die die Ende der 3 gleichen Schenkel eines paar Nebenwinkels bilden.

Man wünscht die 3 Stangen so ausgesteckt, daß sie ein rechtes, oder daß sie ein schiefes paar Nebenwinkel mit gleichen Schenkeln bilden.

Zur Abwechslung soll zu Zeiten auch hier noch das Berichtigungsinstrument angelegt werden, damit der

Schüler sich immer an eine scharfe Bestimmung zu halten genöthigt sehe.

Die 3 einzusetzenden Stangen sollen aber die 3 Ende 3 ungleich langer Schenkel eines paar Nebenwinkels seyn.

Dem ungleichen Schenkel kann wieder eine Bestimmung doppelt, 3mal so lang ꝛc., halb so lang ꝛc. gegeben werden. Ferner kann die Länge in so und so viel Schuh, Klafter ꝛc. ausgedrückt werden.

Man läßt die Schüler 3 Punkte eines paar Nebenwinkels aufstellen, die 2 Ende der Schenkel und den Scheitelpunkt desselben bilden sollen, und dann zu diesen 3 Punkten das 3te Ende der Schenkel des paar Nebenwinkels suchen.

Alle Veränderungen und Uebungen, die über den Scheitelpunkt des paar Nebenwinkels oben gemacht worden sind, können auch auf den 3ten Endpunkt eines der Schenkel dieses Nebenwinkels ausgedehnt werden. Es aber weitläufig hier ausführen zu wollen, ist unnöthig; besonders wenn die Schüler in obigen Aufgaben auch nur einige Fertigkeit erlangt haben. Für den Lehrer haben sie aber doch immer noch einige Wichtigkeit, und werden sie auch behalten, wenn er Sinn für das hat, was die Jugend bedarf. Nach dem Bedürfniß seiner Schüler zu Zeiten Aufgaben zu übergehen, ist wichtig. Auch ist es für den Leiter der Jugend wichtig, zu wissen, was er überspringt und warum es nicht nachtheilig für seine Schüler wird, dieses oder jenes ganz zu übergehen.

Nebenwinkel zu bilden, wovon der eine 2mal 3mal ꝛc. so groß ist, als der andere, kann auch hier ausgeführt werden; doch ist diese Ausführung nicht mehr sehr nothwendig. Ein Berichtigungsinstrument dieser Größenverhältnisse wird aus oben bemerkten Gründen nur abwechselnd angewendet werden.

Nothwendiger und wichtiger sind die Aufgaben der Nebenwinkel, die mit 4 Winkeln, welche durch 2 Linien in einem Punkt gebildet werden, gemacht werden können.

Es werden diesem zufolge 4 Stangen ausgesteckt, welche die 4 Ende der Schenkel der Scheitelwinkel bilden.

Auch hier können die untergeordneten Fragen der Nebenwinkel wieder eine Stelle finden. Z. B.

Wie müssen die 4 Stangen zu einander stehen, wenn sie 4 Winkel bilden sollen?

Wie viel verschiedene paar Scheitelwinkel können gemacht werden? etc.

Auflösung der ersten Frage.

Der Durchschnittspunkt der Scheitelwinkel muß so gestellt werden, daß er zwischen den 4 gegebenen Punkten immer mit 2 und 2 in gerader Linie sich befindet. Um dieses auf die einfachste, schnellste und leichteste Art auszuführen, werden wenigstens 3 Schüler erfordert. Einer übernimmt die Stange des Durchschnittspunkts; der 2te stellt sich an ein Ende der 4 Schenkel oder Linien, und der 3te aber an ein anderes Ende, oder zu den Stangen der 2ten Linie; die letzten 2 leiten den 1sten Schüler bis er den Ort findet, der beyden entspricht.

So läßt man sie 4 Punkte ausstecken, die ein rechtes oder ein schiefes paar Scheitelwinkel bilden. (Die Natur dieser Form und Verbindungsart bringt es mit sich), daß da, wo ein paar Nebenwinkel sind, auch ein 2tes Statt finde.)

Es wird, bey den verschiedenen Arten der Winkel, den Schenkeln noch eine bestimmte Länge gegeben werden können. Z. B. 4 gleiche Schenkel, oder aber 3 gleiche mit einem ungleichen etc., oder 4 gleiche Schenkel, wovon ein jeder so und so viel Klafter hat. Sehr weit müssen diese Bestimmungen aber nicht ausgedehnt werden. Am wichtigsten sind ähnliche Aufgaben bey den rechten Winkeln.

Werden die Scheitelwinkel schief gemacht, so kann das eine paar 2, 3 mal so groß werden, als das andere.

Statt der 4 Enden der Schenkel eines paar Scheitelwinkels, können nur 3 und der Durchschnittspunkt ausgesteckt gegeben werden, und das 4te Ende der Schenkel aus diesen 4 Punkten gesucht werden, welches aber als eine unwesentliche Uebung des obigen anzusehen ist.

Von 3 Linien, und zwar, die sich in 1 Punkt vereinigen.

Es sollen 3 Punkte oder Stangen ausgesteckt werden, die die Ende der Schenkel gleicher Nebenwinkel um einen Punkt herum bilden, und hernach soll der Scheitelpunkt dieser Winkel gesucht werden.

Fr. Müssen die ersten 3 Stangen immer eine und dieselbe Lage zu einander haben, so kann man die Schüler 3 Stangen stecken lassen, die 3 ungleiche Winkel bilden; diesen ungleichen Nebenwinkeln um einen Punkt herum, kann wieder eine Form beygelegt werden. Entweder sollen sie drey stumpfe, oder einen rechten und 2 stumpfe

Winkel bilden. Ferner wird den Schenkeln immer eine gewisse Länge gegeben, die entweder gleich lang, oder die so und so viel Klafter etc. haben; oder wovon der eine Schenkel 2, 3 mal so lang ist, als ein 2ter, oder wovon der 3te wieder 2, 3 mal so lang ist als der 4te. Die gleichen Bestimmungen können noch den Winkeln beygelegt werden. Weit müssen diese Bestimmungen aber nicht getrieben werden; wenn es nicht ins Verwickelte, und zugleich in das Unnöthige führen soll. —

Es sollen 4 Punkte ausgesteckt werden, die der Scheitelpunkt, und drey Ende der Schenkel 2 gleicher Winkel sind, welche die Nebenwinkel eines Winkels bilden. —

Die Ende der Schenkel von 3 gleichen Nebenwinkeln einer Linie sollen ausgesteckt werden. So können alle Figuren, welche in der Formenlehre bey drey Linien in 1 Punkt statt fanden, durchgeführt werden. Zu den wichtigeren Aufgaben gehört: Mit 3 Linien in 1 Punkt 6 gleiche Winkel zu machen; 6 gleiche Winkel und so viel gleiche Schenkel; 4 und 2 gleiche, wovon 2 recht sind, und die Schenkel ebenfalls gleich. —

Noch wichtiger sind die Aufgaben, wenn man die Schüler die 6 Enden der Schenkel, oder der 3 Linien ausstecken läßt, und hernach den Durchschnittspunkt derselben sucht, welches aber auf die nämliche Weise geschieht, wie bey 2 Linien in 1 Punkt. — Den Schenkeln dieser Winkel können noch oben angegebene Eigenschaften beygelegt werden, welches nach dem Gegebenen gewiß ein jeder, ohne die geringste Schwierigkeit, und nach Bedürfniß auszuführen im Stande seyn wird. Sind die Schüler noch jung, oder in den vorhergehenden Aufgaben noch nicht sehr geübt; so wird es zweckmäßig seyn, ähnliche Aufgaben etwas weiter auszudehnen; auch können die Berichtigungsinstrumente der Linien, und auch das der Winkel zu Zeiten noch angelegt werden.

Von 3 Linien, die sich in 2 Punkten vereinigen.

Nur Figuren auf dem Felde auszustecken, welche bey drey Linien in 2 Punkten vorkommen, bietet keine Schwierigkeiten dar. Z. B. Ein paar Gegen- oder Wechselwinkel, und zwar innern oder äußeren, oder gemischt zu machen; ferner Winkel von allen 3 Arten, nämlich rechte, oder spitze, oder stumpfe; oder rechte und spitze u. s. w.; und wenn allen diesen Verbindungen und Arten der Winkel und Schenkel noch Eigenschaften der Länge beygelegt werden, bietet es auf dieser Stufe nichts Neues mehr dar; doch liegen in dieser Reihenfolge aber immer noch einige Aufgaben, die nothwendig und bildend für den Schüler werden; wie weit sie jedesmal ausgedehnt werden müssen, wird jeder Lehrer leicht ermessen, der den Geist der vorhergehenden aufgefaßt hat, und nur in die verschiedenen Zahl-Kombinationen einzudringen vermag.

Wichtiger aber sind folgende Aufgaben:

Es sollen 6 Stangen so in die Erde gesteckt werden, daß sie die 6 Enden der 7 Schenkel, die in 2 Punkten mit 3 Linien gebildet werden, bestimmen, und hernach sollen die 2 Durchschnittspunkte dieser 3 Linien gesucht werden.

Auflösung.

Zeichnung 141 a, b, g, d, e, und f sollen die Punkte seyn. Um die Aufgabe über einmal und mit Schnelligkeit zu lösen, werden 5 Schüler erfordert, wovon sich der 1ste in a, der 2te in b, der 3te in g befindet, der 4te sucht den Durchschnittspunkt zwischen a, c, und f, g, und der 5te sucht den zwischen b d und g, f: die letzten 2 Schüler werden beym Suchen der Durchschnittspunkte durch die ersten 3 geleitet, und zwar der 4te durch den 1sten und 3ten, und der 5te durch den 2ten und ebenfalls durch den 3ten; folglich hat der 3te allein 2 zu leiten. Wollte man es gleich vertheilen, so dürfte man nur 6 Schüler nehmen, und den 6ten in f setzen und einzig durch den 1sten und 4ten leiten lassen.

Es soll die nämliche Aufgabe mit 7 gleichen Schenkeln, oder mit 8 rechten Winkeln, oder mit beiden vereinigt gemacht werden.

Daß auch diese Aufgaben in den vorhergehenden angezeigten Kombinationen angewandt werden können, sieht jederman ein, und wird es auch ohne weitere Schwierigkeiten auszuführen im Stande seyn.

Statt drey Linien auf diese Art mit Stangen auszustecken, kann man auch 3, 4, 5 u. s. w. folgen lassen, wovon im ersten Fall 2, im 2ten 3, und im 3ten 4 in einer Richtung gleichlaufend sind, und gleich so viel Schüler zur Auflösung an die gehörigen Stellen setzen, als hiezu nothwendig werden. — Das Ausstecken der Stangen kann so verbunden werden, daß alle Ende derselben ausser dem Vereinigungspunkt liegen. Es sollen 4 Stangen ausgesteckt werden, welche 4 Ende von 3 Linien sind, und durch ihre Verbindung 5 Schenkel bilden.

Auflösung.

Zeichnung 142 a, b, c, d, sind die 4 Punkte, von c zwischen b d wird eine beliebige Linie c q so gezogen, daß sie nicht in a fällt, q und a durch eine Linie miteinander verbunden, und der Durchschnittspunkt b d und c q gesucht.

Wird dem Winkel noch eine gewisse Form beigelegt, oder die Schenkel durch die Gleichheit und Ungleichheit bestimmt, so können noch einige nicht unwichtige Fragen gebildet werden; die aber keineswegs sehr nothwendig sind, wenn das vorhergehende eingeübt ist.

Von 3 Linien in 3 Punkten.

Die Schüler stecken auf dem Felde 3 Ecke unter allen Abänderungen aus; ferner Dreyecke, deren Seiten durch die Gleichheit und Ungleichheit bestimmt sind, als Dreyecke, die 3 gleiche oder 2 gleiche und eine ungleiche, oder alle 3 ungleiche Seiten haben; und endlich wird die Gleichheit der Seiten in Verbindung mit der Form der △e gesetzt, und es werden also gleichschenklicht recht, spitz, und stumpfwinklichte △e gemacht; — gleichseitige gibt es nur spitzwinklichte u. s. w. Auch kann man den Seiten der △e noch ein angenommenes Maaß in Schuhen oder Klaftern beylegen. Z. B.: Es werden gleichseitige △e ausgesteckt, deren jede Seite so und so viel Schuh oder Klafter hat; gleichschenklicht rechtwinklichte, deren eine von den 2 gleichen Seiten oder deren ungleichen Seiten so und so viel Klafter hat; das nämliche kann auf alle andere △e angewendet werden. Mehr aber als einer Seite muß man in einem △ keine Bestimmung geben, weil die anderen von ihr abhängen, und dessen Abhängigkeit von dem Schüler hier noch nicht bestimmt werden kann. Zur Untersuchung und Berichtigung des durch das Auge bestimmten Form-Verhältnisses, kann auch zu Zeiten wieder das Instrument zu Hülfe genommen werden, welches aber auch jeder Lehrer ohne Erinnerung für ein und allemal jetzt wissen soll, wenn ihm nicht die 1ste Eigenschaft, die er als Lehrer besitzen muß, mangeln soll. Schwieriger und zugleich bildender für die Jugend mögen etwa folgende Aufgaben noch seyn:

Es sollen 6 Stangen ausgesteckt werden, welche die Enden der 6 Linien fixiren, die sich in 3 Punkten durchschneiden, und hernach sollen die 3 Durchschnittspunkte der Linien gesucht werden.

Auflösung.

Der Lehrer übergiebt 6 Schülern jedem eine Stange, läßt sie mit einander berathen, nach welcher Gegend ein jeder zu gehen habe, um die gehörige Stelle zu finden; zugleich giebt er 3 anderen, jedem ebenfalls eine Stange, die zu den Durchschnittspunkten der Seiten des △ bestimmt sind, und durch die ersten 6 geleitet werden müssen. Einer weitläuftigern und deutlicheren Auseinandersetzung bedarf man hierüber nicht mehr, wenn ähnliche, oben angeführte Aufgaben mit 2 Linien in einen Punkt ins Auge gefaßt werden, und die Schüler in denselben geübt sind. Dieses ist die verwickelteste und schwerste Aufgabe, welche in dieser Art gemacht werden kann. Sollte sie für die Schüler zu schwierig und verwickelt seyn; so könnte man einige leichtere, wie etwa folgende ist, dieser vorangehen lassen.

Man soll 4 Stangen ausstecken, die die 3 Scheitel eines △ und das Ende einer verlängerten Seite desselben bestimmen. Oder man soll 4 Stangen ausstecken, wovon 2 die Scheitelpunkte des △, und 2 die zwey verlängerten Seiten desselben bestimmen.

So kann man zu 5 und 6 Stangen hinauf, und zu 3 und 2 herunter steigen und Scheitelpunkte des △ wie auch verlängerte Seiten desselben angeben.

Daß eine große Mannigfaltigkeit der Aufgaben bey dieser verschiedenen Kombination Statt finde, liegt klar vorm Auge. Desgleichen, daß diese Aufgaben zum richtigen Orientiren auf dem Felde für die Jugend wichtig sind; besonders in einer Zeit, wo die Uebung der Sinne so allgemein vernachläßigt wird.

Mehrere Linien in 3 Punkten zu vereinigen, wird ganz übergangen, weil es nach dem was wirklich ausgeführt und zur Ausführung angeleitet ist, nicht mehr nothwendig wird; wenn aber der eine oder andere noch Aufgaben hierüber bedürfen sollte; so sage ich nur im Vorbeygehen: sie können nach der aufgestellten Norm und im gleichen Geist gemacht werden, und alles, was bey dem Ausgeführten wichtig war, muß auch als diesfalls wichtig in's Auge gefaßt werden.

Von 4 Linien in 4 Punkten.

Diese in 1, 2, 3 Punkten zu verbinden ist nicht mehr nothwendig.

Man läßt die Schüler verschiedene Arten 4 Ecke auf dem Felde ausstecken; zu den wichtigeren gehören: das Quadrat, das Rechteck, der Rhombus, (oder das schief-gleichseitige Parallelogramm) und noch etwa ein Parallel-trapez mit nur innern Winkeln, oder mit 3 innern und einem äußern etc.

Wenn ein 4Eck ein Quadrat bildet, so hat es 4 gleiche Seiten; in diesem Fall kann eine Seite einer solchen Figur durch Schuh, oder Klafter bezeichnet werden.

Es sollen von den Schülern 4 Ecke ausgesteckt werden, die 2, 3 mal etc. so lang als breit sind; auch können solche gemacht werden, deren Länge oder Breite so und so viel Schuh oder Klafter enthält. Das Gleiche wird mit dem schief, gleich- und ungleichseitigen Parallelogramm vorgenommen; das Gleiche mit dem Parallel-trapez.

Es soll ein Paralleltrapez ausgesteckt werden, welches 3 gleiche und eine ungleiche Seite hat. So mit dem Trapez, dessen Ausführung, wie bey dem Parallelogramm ist. Auch kann die Größe der Winkel der Parallelogramme und Paralleltrapeze, so wie die Seiten berücksichtigt werden.

Z. B.: Es soll ein Parallelogramm verfertigt werden, darin jeder stumpfe Winkel doppelt so groß ist als jeder spitze desselben. —

Parallelogramme, deren Länge doppelt so groß ist als ihre Breite. Auch können ihnen der Länge und Breite nach Schuh oder Klafter beygelegt werden. —

Es soll ein schiefwinklichtes Parallelogramm gemacht werden, dessen längste Seite 3 mal so lang wird, als eine Seite der Breite. — Den Winkeln kann auch bey diesen Figuren eine bestimmte Größe beygelegt werden.

Mit dem Trapez sind ähnliche Aufgaben entbehrlich; ich schreite daher zu 4 Ecken, bey denen mehr als 4 Bestimmungspunkte vorkommen.

Man soll mit 5 Stangen 5 Punkte suchen, welche die 4 Vereinigungspunkte eines 4Ecks und eine verlängerte Seite desselben vorstellen. Dem 4Eck kann noch eine oder können mehrere beliebige, oben angegebene Eigenschaften und Verhältnisse beygelegt werden.

So können mit 6 Stangen die 4 Vereinigungspunkte, und die Ende der 2 verlängerten Seiten ausgesteckt werden.

Deßgleichen mit 7, 8, 9 u. s. w. Stangen.

Die verwickelteste und schwerste Aufgabe ist aber etwa folgende:

Mit 8 Stangen sollen auf dem Felde 8 Punkte aufgezeichnet werden, welche die Ende von 4 Linien bezeichnen, die sich in 4 Punkten durchschneiden müssen, und hernach sollen die 4 Durchschnittspunkte gesucht werden.

Bey diesen Aufgaben ist nicht unwichtig, dem zu bildenden 4Ecke noch eine Eigenschaft beyzulegen; wie etwa, daß es ein Quadrat, oder Rechteck, oder Raute, oder ein schiefwinklichtes Parallelogramm; oder ein Rechteck, welches 2 mal so lang als breit u. s. w. sey, bilden soll.

Bey den einfacheren Figuren werden die Schenkel oder die verlängerten Seiten der geschlossenen Figur noch gleich gemacht.

Nach Bedürfniß wird gewiß jeder Lehrer die Aufgaben, die allenfalls hier noch nothwendig sind, auszuführen im Stande seyn. Ich schreite noch zu 4 Linien, die sich in 5 und 6 Punkten vereinigen.

Mit 5 Stäben sollen 5 Punkte ausgesteckt werden, welche die 5 Vereinigungs-Punkte von 4 Linien bilden.

Es sollen 8 Punkte ausgesteckt werden, welche die 8 Ende der 4 Linien bestimmen, die sich in 5 Punkten vereinigen können; nach diesem sollen endlich die 5 Vereinigungspunkte aufgesucht werden.

Das Gleiche kann mit 4 Linien in 6 Punkten statt finden.

Aehnliche Aufgaben gehören zugleich zu den verwickeltern und schwierigern, welche mit 4 Linien möglich sind.

Daß auch hier eine große Mannigfaltigkeit und Abstufung von Aufgaben statt finde, ist klar, es ist aber nicht nothwendig, sie hier weitläufig auszuführen. Ich habe mich daher mit einigen der nothwendigsten und verwickeltesten begnügt.

Es soll ein regelmäßiges Fünfeck auf dem Felde ausgesteckt werden.

Um diese Aufgabe zu lösen, wird erfordert, daß man die Größe der Winkel einer solchen Figur zuvor auffaßt und abstrahirt.

Alle dem regelmäßigen Fünfecke nahe verwandten gehören zu den nothwendigern und wesentlichern Aufgaben, die auf dieser Stufe möglich sind.

5 Linien auszustecken, die sich in der höchsten Anzahl Punkte vereinigen, gehört zu den verwickeltern und unwesentlichern Aufgaben.

10 Stangen sollen so ausgesteckt werden, daß sie 10 Enden der 5 Linien darstellen, welche sich in der höchsten Anzahl Punkte vereinigen. Wenn die Enden dieser Linien ausgesteckt sind, so möchte man ihre Durchschnittspunkte aufsuchen. Diese Aufgabe gehört zu der verwickeltesten, welche auf dieser Stufe gemacht werden darf. —

Es sollen 5 Linien so ausgesteckt werden, daß 3 in einer und 2 in einer andern Richtung gleichlaufend sind.

Die 5 Linien sollen wieder in diesen Richtungen so ausgesteckt werden, daß nur Stangen in ihren Endpunkten sind; nach diesem sollen die Durchschnittspunkte ausgesteckt werden.

So können, ohne in verwickelte Aufgaben zu verfallen, 6 Linien ꝛc. genommen werden, wovon 3 in einer und 3 in einer andern Richtung gleichlaufend sind; oder 4 in einer und 2 in einer andern ꝛc.; durch diese Verbindung entstehen dann mehrere geschlossene Figuren.

Auf eben diese Art kann man mit den 6 Ecken, oder mit 6 Linien in 6 und mehreren Punkten verfahren, deren weitere Ausführung ich einem jeden nach Lust und Bedürfniß überlassen darf, desgleichen mit dem 7 Eck. Weiter als etwa zum 8 Eck muß man es in keinem Fall fortsetzen.

Zu den wichtigeren Aufgaben gehört noch, Linien in mehreren Richtungen gleichlaufend zu ziehen, und ihre Durch-

Durchschnittspunkte zu suchen, nachdem die Endpunkte derselben durch Stangen ausgesteckt worden sind.

In mehreren Richtungen gleichlaufende und dabey noch ungleichlaufende Linien zu ziehen, würde verwickelt und zugleich noch unwichtig.

Zu den interessantern Aufgaben gehören noch die, in 3 Ecken, 4 Ecken ꝛc. die Mittelpunkte vom Auge zu suchen; besonders wenn die ausgesteckten Figuren regelmäßig sind. Das Berichtigungsinstrument kann auch hier mit Vortheil angelegt werden, um das Auge, wenn es nicht richtig schätzt, zu korrigiren. Ferner in ausgesteckten regel= und unregelmäßigen Figuren ihre Seiten so weit zu verlängern, bis sie zusammentreffen. Sodann können Figuren ausgesteckt werden, die, auf Papier gezeichnet, den ausgesteckten ähnlich werden; besonders können diese Uebungen in Gärten, und wo sonst verschiedenartige Formen vorkommen, mit Vortheil statt finden. Die Berichtigungsinstrumente sind auch hier zu Zeiten anzuwenden.

Endlich können noch Figuren gemacht werden, wovon schon ausgesteckte Linien, Ecklinien, oder Halbmesser oder Seiten derselben sind, welches aber alles dem Bedürfniß des Lehrers überlassen bleibt. Da die 1sten Uebungen und Reihenfolgen aber sehr bestimmt aus einander gesetzt, und ziemlich weitläufig ausgeführt sind, so ist eine weitere diesfällige Erörterung überflüssig.

Andere, hieher gehörende Uebungen sind folgende:

Die Winkel, welche die verschiedenen Richtungen eines Wegs bilden, werden von den Schülern aufgefaßt, dieselbe unter gleichem Größeverhältniß, aber verkleinert, auf Papier gebracht, und so, nach diesem Muster, die Richtung eines Wegs bestimmt. Man bleibt aber nicht allein bey den Winkeln stehen, sondern bringt auch die Länge der Schenkel in ein richtiges Verhältniß zu einander, und zwar wieder vom Auge. Um dieses praktisch sicher auszuführen, kann man die im Anfang anempfohlnen Meßinstrumente dann und wann zum Berichtigen der durch das Augenmaaß ausgeführten Aufgabe anlegen. Das Gleiche wird mit Zirkel und Lineal auf Papier statt finden. Eben so werden die Richtungen der Flüsse aufgenommen, bey welchen aber nicht alle kleinen Abweichungen angebracht werden dürfen, wenn man sich nicht gar in's Kleinliche verlieren will. Um die Richtung eines Weges oder Flusses aufzunehmen und ihn auf's Papier zu bringen, thut man wohl, die Lage der Winkel als Gegen- oder Wechselwinkel zu berücksichtigen und also aufzufassen.

Nach dieser Verfahrungsart kann man die Schüler Aecker, Wiesen, Waldungen und andere Gegenstände dieser Art aufnehmen lassen; besonders aber solche Felder, die sie interessiren, welche meistens ihren täglichen Anschauungen und Beobachtungen ausgesetzt sind, als Gärten, Wiesen, Aecker, Waldungen, Wege ꝛc. ꝛc. Diese Aufgaben und Uebungen gehören gewiß zu denjenigen, welche die Kinder am meisten ansprechen, und also als sehr bildend auf sie einzuwirken geeignet sind.

Der Flächeninhalt der aufgenommenen Felder muß auf dieser Stufe auf eine ganz ähnliche Weise berücksichtigt werden. Alle Aufgaben, die sich aus dem Flächeninhalt der Quadrate und Rechtecke ableiten lassen, gehören hieher. — Felder, Flüsse ꝛc. aber aufzunehmen, denen die Natur Schwierigkeiten darbietet, muß auf dieser Stufe ganz übergangen werden.

Die Anwendung der Form und Größe auf andere Gegenstände wird folgen.

R e d e,

die ich

als diesjähriger Präsident der helvetischen Gesellschaft

den 26sten April 1826

in Langenthal gehalten.

Theure, liebe Eidgenossen!
Edle vaterländische Brüder und Freunde!

Da Ihr mich in Eurer letzten Versammlung zum Präsidenten des heutigen Tages erwähltet, sprach ich in der Rührung meines Herzens folgende Worte zu Euch: „Ich kenne Sie nicht persönlich, liebe Herren und Freunde, „ich kenne Niemand von dem jungen Geschlecht, ich „glaubte auch Ihnen nicht bekannt zu seyn, um so über„raschter bin ich durch Ihre Wahl. Ich bin alt; mein „Blut ist zwar noch warm, aber die Nerven sind schwach. „Schenkt mir Gott noch ein Jahr, nun so will ich dann „zu Euch noch reden, wie's mir um's Herz ist, von Va„terland und Erziehung, denen ich mein Leben gewidmet „habe."

Ich wiederhole diese Worte heute mit der nämlichen Rührung, und suche in der Schwäche meines Alters mein Versprechen so viel möglich zu erfüllen und ein gutgemeintes Wort über Vaterland und Erziehung mit Euch zu reden. In der Ueberzeugung, daß ich mit Männern rede, die in keiner Rücksicht etwas von mir erwarten, das außer dem Kreis meiner Kenntnisse, meiner Erfahrungen und meiner Lebensbestrebungen liegt, gehe ich zur Sache.

Unser Vaterland, die Schweiz, ist ein durch die Natur in seinen größern Theilen sehr unbegünstigtes, armes Gebirgsland, aber in seinen ursprünglichen Verhältnissen vielseitig mit reichsständischen Rechten und Freyheiten begabet, die einzelnen Städten, Ländern, Herrschaften, Gemeinden und selber Individuen einen großen Spielraum der häuslichen und bürgerlichen freyen Selbstsorge und daraus entsprungenen Selbstständigkeit verschafften, deren Einwohner ihre genossenen Freyheiten und Rechte schon lange vor ihrer anerkannten Unabhängigkeit mit großer Weisheit und Mäßigung genossen und benutzten, und nach derselben mit eben der Weisheit und Mäßigung unter zum Theil ganz außerordentlich glücklichen Umständen bis auf unsere Tage erhielten und äufneten. Die Gesammtheit dieser Länder zeigte auch in den Tagen ihres Kampfes für diese Selbstständigkeit einen mit ausgezeichnetem Muth und Tapferkeit verbundenen Gemeingeist in der Beschützung und Vertheidigung der segensvollen Rechte und Genießungen ihrer Lage, und dabey eine Mäßigung, Anmaßungslosigkeit und Rechtlichkeit, die ihnen die allgemeine Achtung ihrer Zeitgenossen und selber der mit ihnen in offenem Kampfe stehenden Fürsten und Länder zuzog und sicherte. Beydes, ihr Muth und ihr Glück setzte ihr Zeitalter in allgemeines Erstaunen. Höchst merkwürdig ist, daß der Gemeingeist unsers lieben, alten Schweizerbundes aus zwey, in ihrem Wesen verschieden scheinenden Elementen hervorgieng, nämlich auf der einen Seite aus dem Geist eines, hohe Berge bewohnenden, unter sich selbst in großen Gleichheitsrechten, Uebungen und Gewohnheiten lebenden Hirtenvolks, auf der andern Seite von unsere Thäler und Ebenen bewohnenden Städten, Grafschaften, Herrschaften und Gemeinden, die Rechte-, Freyheiten- und Immunitäten halber mit den freyen Bergländern und selber unter einander in ganz ungleichen Lagen und Verhältnissen lebten, aber sammt und sonders den Segen des positiven Zustands ihrer Rechte und Freyheiten, alten Briefe, Siegeln, Immunitäten, Uebungen und Gewohnheiten dankten, die in den Feudalrechten der damaligen Zeit begründet, aber von dem biedern Schweizervolk in städtischen und ländlichen, in herrschaftlichen und abhängigen Verhältnissen mit segensreichem Zutrauen und mit großer menschenfreundlicher Mäßigung gegenseitig ausgeübt und genossen worden. Die in der Welt bisher beynahe unbekannten Bergländer von Uri, Schwyz und Unterwalden theilten in ihrer Armuth und Beschränkung die Tugenden, Ansichten und Bestrebungen der Vaterlandsliebe, des Gemeingeistes und der rechtlichen Freyheit derjenigen Städte, Grafschaften, Herrschaften und Gemeinden unsers Landes, die in dem damaligen Zeitpunkt ein gemeinsames Interesse mit ihnen hatten und sich darum an den, von ihnen im Grütli beschwornen, eidgenössischen Bund anschlossen.

In dieser ursprünglichen Vereinigung zwey so wesentlich heterogener Elemente in eine enge Staatsverbrüderung kannten die einzelnen Theile des neuen Staatskörpers kein allgemeines, in bestimmte Formen geordnetes, auf alle seine Theile nach gleichen Gesetzen einwirkendes, inneres Staatsrecht, als dasjenige, das sich für einen jeden Theil dieser Vereinigung aus der Natur und dem Wesen der Briefe, Siegel und Immunitäten unsrer einzelnen Städte und Länder selber ergab, aber in der Einfachheit, Unschuld und Edelmuth der bestehenden Gewalten in jedem Kanton als das Fundament sowohl des allgemeinen Landessegens als auch der allgemeinen Landesrechte anerkannt und mit heiliger Ehrfurcht in's Auge gefaßt und behandelt wurde. Dieser Mangel an gleichartiger Begründung der hoheitlichen, städtischen Lokalitäts- und Personalrechte und Gewalten des Vaterlands und der sorgfältigen Ausmachung gegegenseitiger Rechte unter einander, so wie überhaupt die Heterogenität des rechtlichen Beyeinanderlebens und Beyeinanderstehens unsrer bürgerlichen Einrichtungen mit den Regierungs- und Unterwerfungsformen des übrigen Europa, konnte nicht anders als in der Folge der Selbstsucht gegenseitiger Ansprüche, gegen einander, in unserm Innern vielseitig beunruhigenden Spielraum verschaffen. Aber im Anfange verhütete die allgemeine Gefahr, in der sich unser Vaterland durch seinen großen Freyheitskampf befand, so viel als jede Spur solcher Folgen. Diese Gefahr nöthigte in diesem Zeitpunkt die ungleichartigen Glieder unserer Vereinigung sich selber als einzelne Stände gleichsam zu vergessen. Sie kämpften den großen Kampf unsrer Selbstständigkeit in seiner langen Epoche bis an sein Ende, ehe sich in den so verschieden organisirten Kantonen unsers Vaterlands irgend ein Gefühl der Unbehaglichkeit dieses Zustandes und am allerwenigsten eine Neigung zeigte, sich dem Zeitgeist der Regierungs- und Verwaltungsformen des übrigen Europa zu nähern. Aber da sie, mitten in diesem Kampfe, selber noch mit den bedeutendsten fremden Staaten des Welttheils in freundschaftliche Näherung kamen und bald selber in ihre Dienste traten, so konnte das Gefühl des Bedürfnisses des Ungenugthuenden in den Formen einiger unsrer Regierungs- und Verwaltungseinrichtungen und besonders die Gelüste nach einer etwelchen Näherung unserer Unschuldseinrichtungen zu dem Zeitgeist der übrigen Welt nicht gar sehr lange ausbleiben. Die Unschuld des unbedingten, freyen Privatspielraums einzelner Städte, Orte und selber Personen, die in der Urzeit unsers Vaterlands statt hatte, mußte sich allmählig beschränken. Die Regierungen unsrer bedeutendsten Stände gründeten mit Weisheit und Mäßigung, in Verbindung mit der Mehrzahl ihrer Bürger, Kantonaleinrichtungen, die nicht mehr blos ein einfaches, unbeschränktes Resultat der Briefe und Siegel aller Stände, Behörden, Städte, Länder und Dörfer waren; aber Mäßigung, reiner, alter Bürger- und Freyheitssinn herrschte Jahrhunderte lang in der Massa der bürgerlichen Bewohner der altstädtisch regierten Hauptorte unsrer größern Kantone, die, wie ihre untergebenen Angehörigen, gegenseitig große, zum Theil selbst erkaufte Rechte und Freyheiten besaßen. Es ist dabey noch unstreitig, daß der rechtliche Freyheitssinn und Freyheitsgenuß der, den Kantonen angehörigen Landleute mit demjenigen der sie regierenden und verwaltenden Städte in diesem Zeitpunkt eine gleiche, sich gegenseitig unterstützende Richtung nahm und mit dem Freyheitssinn und Freyheitsgeist der democratisch verwalteten Urkantone in einer, in gewisser Rücksicht bewundernswürdigen Harmonie stand. Das Volk aller Stände genoß den Segen seiner Freyheitsverhältnisse in einer Art von, ich möchte sagen, heilig gegründetem, innerm Gleichgewicht, die dasselbe allgemein, beydes zu erheben und zu befriedigen geeignet war. Ungeachtet der bestehenden Ungleichheit der Ansprüche einzelner Stände und einzelner Klassen des Volks an einzelne Rechte und einzelne Genießungen, war der Zugang zu den höchsten Ehren und folglich der Zugang zu jeder rechtlichen Gewalt und zu jeder mit dieser Gewalt verbundenen Landesehre dem verdienstvollen Mann am Pfluge und dem ehrbaren Handwerker offen, wie dem Edelmann, der mehrere Burgen besaß. Wer das Zutrauen des Volks hatte, war der Landesehre sicher. Weder Kunst noch Gewalt gieng in ihren Wirkungen hierin weiter als die Folgen des öffentlichen Zutrauens, das sich ein Mann in diesem Zeitpunkt zu verschaffen wußte. Die ersten Häuser unsrer vaterländischen Regenten, deren Familien sich zum Theil bis auf heute in diesem Rang erhalten, haben den Ursprung ihres Einflusses und ihres Ranges im Zeitpunkte dieses edeln, vaterländischen Volkssinns und Volksgeists zu suchen. Aber freylich dauerte die Reinheit und Unschuld dieses Zustands im allgemeinen ihrer ursprünglichen Kraft nicht lange über den Zeitpunkt des Heldenkampfs für die Unabhängigkeit und Selbstständigkeit unsers Landes. Das Gold, das wir auf den Schlachtfeldern von Grandson und Murten gewannen, war die erste Versuchung zur Irrführung unsrer bürgerlichen Ansichten, Einrichtungen und Bestrebungen. Wer etwas Bedeutendes davon sich zueignen konnte, gelüstete bald nach Mehrerm und fand sehr schnell Gelegenheit, sich dieses jetzt in fremden Diensten leicht zu erwerben und damit zu Arten und Gattungen von Ehren, Rang, Würden, Gewalten, Geld und Genießungen zu gelangen, von denen die ersten Kämpfer für die Rechte des Vaterlandes durchaus keine Kunde hatten. Indeß erhielt sich das Uebergewicht des guten, alten, vaterländischen Geistes in der Mehrzahl unsers Volks in allen Ständen sehr lange in einer Art von fortdauernder Erbfolge der Bürgerkraft und Bürgertugenden unsrer Väter. Die Selbstsorge der schweizerischen Stände und Individuen für häuslichen Wohlstand und bürgerliche Selbstständigkeit blieb lange im Vaterland im freyen Spielraum seines unbefangenen und unberechneten, ursprünglichen Zustandes auf keine Weise durch irgend eine Art von selbstsüchtiger Neuerungssucht und Zudringlichkeit gestört, ich möchte sagen, unbevogtet, nämlich in dem Sinne, in welchem dieses Wort später in unserm Vaterlande gebraucht worden. Jeder einzelne Theil der Eidgenossenschaft war indeß bey jeder sich ergebenen Collision einem brüderlichen, zutrauensvollen, gemeineidgenössischen Recht unterworfen, und das Ganze erhielt sich eine Reihe von Jahren im ersten Leben des eidgenössischen Vereins segensreich und kraftvoll. Dieser ursprüngliche Zustand der Eidgenossenschaft aber erhielt durch das Stanzerverkommniß wesentliche Schwächung der Gemeinkraft und des Gemeineinflusses der ganzen eidgenössischen Verbrüderung in Rücksicht auf die segensvolle Gleichheit in der Gewährleistung der verbrieften Rechte der ungleichen Theilhaber dieser Staatsverbindung. Die Staatsgesetzgebungen wurden in einzelne Standes- und Kantonalgesetzgebungen umschaffen und vielseitig ungleich geformt. Dadurch verloren sie das hohe, innere, lebendige Fundament unsrer ursprünglichen Vereinigung, die innere Einheit und Gleichheit der Staatsgesetzgebung, wo nicht ganz, doch in verschiedenen Rücksichten sehr bedeutend. Die Selbstsorge der einzelnen Theile bekam einen, von dem Gemeingeist der Eidgenossenschaft getrennten, größern Spielraum der menschlichen Selbstsucht. Die Kantone wurden Freystaaten mit größern Ansprüchen, Ansichten und zum Theil neu erschaffenen Behörden. Die dießfällige Isolirung der Kantone entstand in einem Zeitpunkt, wo die eigentliche innere Vereinigung der Eidgenossenschaft in ihren Formen erst hätte beginnen sollen, und hatte ihren Ursprung wesentlich in vielseitigen Reizen zu Neuerungen mit einer allgemein überwägenden Neigung zur Erhaltung alles Bestehenden an jedem Ort und an jeder Stelle, wie es wirklich war. Dabey aber pflanzte das immer weitergreifende Reislaufen in fremde Dienste bey einigen schweizerischen Familien eine Art Geringschätzung unsers alten, einfachen, vaterländischen Lebens und Seyns und eine anmaßungs- und anspruchsvollere Lebens- und Denkungsweise, als diejenige, deren unsre Städte und Länder im allgemeinen bisher gewohnt waren. Aber eben diese Familien sorgten in ihren Kantonen und Geburtsorten lange selbst dafür, daß die Massa des Volks nicht außer den Geist der alten Einfachheit und zutrauensvollen Hingebung hinausfalle, die selber dem Interesse der Eitlern und Anmaßungsvollern dieser Individuen eben so dienlich als dem Vaterland segensreich war. Und es ist merkwürdig, daß in dem neuen Einfluß fremder Sitten, Denkungs- und Handlungsweisen auf das öffentliche und Privatleben unsrer Kantone dieser Geist der Sorgfalt für die Erhaltung einfacher, altschweizerischer Grundsätze und Lebensweisen in der Massa des Volks fortdauernd auch von solchen Männern geschützt, genährt und erhalten wurde, die hier und da in ihrem Einfluß auf das Vaterland einige, den Einrichtungen fremder Staaten sich nähernde Formen unsrer öffentlichen Erscheinung begünstigten. Aber es ist dadurch auch allein erklärlich, wodurch es möglich geworden, daß sich dieser Geist der ursprünglichen Grundsätze, Lebensweisen und Denkungsarten unter allen ihnen entgegenstehenden Umständen und Begegnissen, sowohl in tausend und tausend Hütten des gemeinen, schweizerischen Volks als in den Wohnhäusern der edelsten, angesehensten Familien unsers Vaterlands in einem sehr merklichen Grad seiner ursprünglichen Einfachheit und Reinheit bis auf unsre Tage zu erhalten vermögen.

Freunde und Brüder! Wie blühte dieser Geist noch in unsern Tagen in den edeln Männern, deren Andenken zu Ehren Ihr mich für heute an die Stelle gerufen, in der ich gegenwärtig in Eurer Mitte gerührt, mit belebten Gefühlen, beydes, der Dankbarkeit und der Beschämung dastehe. Aber diese Männer waren auch über das Allgemeine des durch den Zeitgeist, in dem sie lebten, schon vielseitig geschwächten, abgematteten und alternden Geistes der schweizerischen Urwelt in einem hohen Grad erhaben, und ihre diesfällige Auszeichnung ist es wesentlich und vorzüglich, was sie vor etwas mehr als einem halben Jahrhundert vermochte, sich in unserer Gesellschaft zu vereinigen und in derselben zur erneuerten Belebung altschweizerischer Gesinnungen, Denkungsarten und Handlungsweisen gemeinsame Kräfte, Mittel und Aufmunterung zu suchen. Sie verhehlten es sich nicht, und wir dürfen es uns noch viel weniger verhehlen, vielartiges Unkraut hatte schon lange in unserm altschweizerischen Leben Wurzel gefaßt und wuchs mit immer stärkerer Kraft in der Mitte der segensvollen Fluren unsers Vaterlands, und auch die Kraft des in unserer Mitte noch bestehenden Guten erschien vor unsern Augen seit Jahrhunderten in einer sich immer mehr abschwächenden Gestalt. Die Ursachen, die aus auswärtigen Verhältnissen entsprangen und dem ursprünglichen Erbgeist unsers schweizerischen Vaterlands entgegen wirkten, griffen immer tiefer und wirkten seit Jahrhunderten immer mehr, ich will nicht sagen auf die Entschweizerung, aber ich muß sagen, auf die Minderung der altschweizerischen Denkungs-, Handlungs- und Lebensweisen einer großen Anzahl vaterländischer Einwohner, und auf die Basis unserer ersten und ursprünglichen Regierungseinrichtungen, die die wirkliche und reale Näherung der Vermögensumstände des Mehrtheils unserer regierungsfähigen, städtischen Einwohner in Rücksicht ihrer Ansprüche mit den freyen Männern in den Urkantonen in eine merkliche Gleichheit setzten und den Handwerksstand in unsern bedeutendesten Städten zu einem ausgezeichneten Grad der Ehrenfestigkeit und Würde erhoben. Die nähern oder entferntern Verwandten der Militärpersonen, die einen höhern Rang im Auslande besaßen, fanden sich schon seit sehr Langem nicht mehr behaglich in den Werkstätten ihrer Väter und Großväter, und fremdartige Lebensweisen und Berufsarten gefielen ihnen und mit ihnen einem großen Theil ihrer Mitbürger besser als die Lebensweisen ihrer Vorfahren. Schreiberstellen im Regierungs- und Privatdienst, Plätze in Tribunalien, Rechtsdienste, Ehrendienste, Verwaltungsstellen, kurz Berufsarten, die das Beschwerliche und Unästhetische auch einträglicher Handwerke nicht an sich trugen und sich etwas mehr den Sitten, Gewohnheiten und Lebensweisen eines, von dem gemeinen Volk unterschiedenen, scheingebildetern Zeittons näherten, wurden den gemeinen bürgerlichen Berufen und auch den einträglichsten Handwerken vielseitig vorgezogen, und selber gemeine bürgerliche Dienste wurden immer mehr Bedürfniß von Bürgern, die nicht mehr im alten Geist zu dem Fleiß und der Thätigkeit erzogen werden, der für die Begründung eines befriedigten Lebens in den beschränkten Verhältnissen des Handwerksstands und seines Broderwerbs wesentlich ist.

Die Geringschätzung des handwerktreibenden Bürgerstands griff in gewissen, selber verdienstvollen Personen von höherm Range, noch weit mehr aber in verdienstlosen, eiteln Nachbetern dieser Neuerungsideen des gemeinbürgerlichen Lebens immer weiter, und hatte natürlich auch sehr bald zu Folge, daß die Regierungs- und Verwaltungsfähigkeit gemeiner Bürger und Zünfter allmählig anfieng bezweifelt und mit der Würde und dem Ansehen von Personen eines großen, öffentlichen Einflusses als ziemlich unverträglich und nur in seltenen Ausnahmen zuläßlich in's Auge gefaßt zu werden. Der äußere Schein von Kunstbildung und höherer Kultur wurde mit einer Art von Vorliebe und Einseitigkeit gesucht, daß sein äußerer Anschein auch da, wo er im Wesen nicht vorhanden war, dem kraftvollen bon sens,* aber etwas unästhetisch dastehenden, altväterischen Bürgergeist mit Vorliebe und Einseitigkeit vielseitig vorgezogen wurde, und dadurch das Bedürfniß und die Einführung von Stellen und Posten, an denen man mit aufrechtem Rücken leichtes Brod fand zum Nachtheil der Ressourçen und der Ehrenfestigkeit des alten, gemeinbürgerlichen, selbstständigen Berufslebens, immer mehr vermehrte. Dabey aber muß man nicht aus den Augen lassen, daß die Vorschritte dieser Abänderung mit großer Mäßigung statt fanden und von Geschlecht zu Geschlecht fast unmerklich vorwärts rückten. Die große Anzahl der städtischen Personen, die die Ressourcen eines bürgerlichen Dienst- und Ehrenlebens und die Vermehrung der dasselbe möglich machenden Ehren- und Dienststellen dem alten, bürgerlichen Zunft- und Berufsleben vorzog, lebte

Jahrhunderte lang mit einer bürgerlichen Mäßigung, Einschränkung und Sorgfalt und zeigte in derselben bis nahe an die gegenwärtige Zeit fortdauernd in ihrem öffentlichen und Privatleben im Allgemeinen einen wahren, altväterischen Geist, der an Ort und Stelle die innere Abänderung der alten Fundamente des ehemaligen Gemeingeistes und der ehemaligen Gemeinkraft unsers gemeinsamen Bürgerlebens kaum merklich machte. Die einflußreichen Bürger, die einen Theil des altbürgerlichen Einflusses des gemeinen Handwerkstandes auf die Wahl der Regierungsglieder und selber der Häupter der Stadtgemeinden mit der Würde der schweizerischen Regierungen, in so fern sie nicht mehr als blos beschränkte, bürgerliche Stadtobrigkeiten, sondern als anerkannte Staatsregierungen ihrer Kantone dastanden, nicht mehr ganz vereinbar fanden, giengen in diesem Gesichtspunkt, ich darf fast sagen, Jahrhunderte lang, mit Festigkeit, Consequenz und mit großer Klugheit und Mäßigung zu Werke; sie zogen bis nahe an unsere Zeiten die ausgezeichnetern, verdienstvollern, gemeinen Bürger mit großer Sorgfalt zur Theilnahme an den öffentlichen Geschäften selbst wohlwollend zu, und wirkten persönlich durchaus nicht erniedrigend und kränkend auf die Massa ihrer Mitbürger ein.

Wer indeß die Geschichte unserer Hauptstädte von dieser Seite, von dem Ursprung unserer eidgenössischen Vereinigung an, mit Ernst und Wahrheitsliebe in's Auge faßt, dem kann es nicht entgehen, daß die, dem reinen Ursprung unserer gemeineidgenössischen Vereinigung nachtheiligen Folgen des Reislaufens in fremde Dienste auf die

die Schwächung unserer gemeinbürgerlichen, anspruchslosen Regierungsformen und auf die Erzeugung vieler, in den ursprünglichen Formen unserer Verfassungen nicht gegründeten Familienansprachen schon in sehr frühen Zeiten vieles zur Minderung der Achtung und der Würde des gemeinbürgerlichen Einflusses in den Städten bis auf die Reformation, trotz aller Mäßigung unsers Nationalgeistes, beytrugen.

Aber diese Epoche erneuerte und stärkte den altbürgerlichen und altschweizerischen Geist der Städte, die sie annahmen, in einem hohen Grad. Die Glaubensfreyheit, die wir jetzt zu erkämpfen hatten, war mit der bürgerlichen Freyheit, die unsere Väter erkämpft, in einer hohen Uebereinstimmung, und führte in diesem Zeitpunkt die bürgerliche Denkungs- und Handlungsweise aller unserer Stände dem edeln, freyen, kraftvollen und allgemeinen Nationalgeist wieder näher, in dem sich unser Vaterland im Zeitpunkt unsers ursprünglichen Schweizerbunds vor ganz Europa in seiner erhabenen Würde auszeichnete. Zwingli's gemeinbürgerliche Heldenkraft war in Uebereinstimmung mit den religiösen Grundsätzen der Reformatoren anderer schweizerischer Städte, dem gemeinbürgerlichen Geist unserer städtischen Verfassungen und der ursprünglichen, hohen Sorgfalt für unsere Selbstständigkeit und Unabhängigkeit in einem hohen Grad vortheilhaft. Der Pensionsbrief in Zürich, der sein Werk war und von der Regierung bis auf die letzte Abänderung unserer schweizerischen Verfassungen alljährlich zweymal, Angesichts der ganzen Bürgergemeinde verlesen und beschworen werden mußte, ist ein erhabenes und sprechendes Denkmal des Einflusses der Reformation auf die Erhaltung des gemeinbürgerlichen Geistes unserer Verfassung und der Entfernung alles dessen, was der Abänderung ihres ursprünglichen Geistes und allen eiteln, unbürgerlichen Anmassungen ungebührliche, in unserer Verfassung nicht begründete Nahrung hätte geben können. Diese glückliche Epoche stärkte den Fleiß und die Gewerbsamkeit in Verbindung mit allen sittlichen Fundamenten des häuslichen und bürlichen Wohlstandes in allen Städten, die die Reformation annahmen, mit einer bewundernswürdigen Kraft und Schnelligkeit, und gab zugleich dem edeln Geist der damaligen Regierungen durch ihren Einfluß auf den Gebrauch der Kirchengüter große und genugsame Mittel an die Hand, den Segen der erweckten Arbeitsamkeit und Thätigkeit des Volks durch Errichtung von Schulen und Kunstanstalten, und durch Begünstigung alles dessen, was den geistigen Vorschritt der Nationalkultur in Uebereinstimmung mit den Sitten, Gewohnheiten und Lebensweisen der Vorzeit befördern konnte, zu Stadt und Land allgemein fest zu begründen und blühen zu machen. Auch mehrte sich seit dieser Epoche der häusliche und bürgerliche Wohlstand der bedeutendsten Kantone unsers Vaterlands allgemein in einem auffallend hohen Grad, und zwar nicht in plötzlichen Erscheinungen großer Reichthümer einzelner Häuser und Familien, und wirkte eben so wenig zu großen, merklichen Abweichungen von dem verfassungsmäßigen Regierungs- und Verwaltungsgeist unsers Landes. Sein Segen war in zahllosen Punkten einzelner, ihren Wohlstand durch gemeinen Fleiß und gemeine Arbeitsamkeit in mäßigen Vorschritten äufnender Familien und Haushaltungen sichtbar, so wie er sich ebenfalls in einer, in eben diesem Verhältniß mindernden Anzahl hülfsbedürftiger und unversorgter, dem Lande zur Last fallender Armen in seiner vollen Realkraft offenbarte, und wirkte in diesem Zeitpunkt durchaus in keinem unserer Verhältnisse auf die Erniedrigung und Abschwächung, weder der Ehrenfestigkeit, noch der Erwerbskraft und Erwerbsfreyheit der, in ihrem Wohlstande den begüterten Gliedern unserer städtischen und ländlichen Bürger nachstehenden Volksklasse. Die Concurrenz in den Mitteln zu der Erhöhung des individuellen Wohlstands aller Stände war dem Talent, dem Muth und dem Nachstreben aller ihrer Glieder allgemein offen, und im hohen Billigkeitsgefühl der damaligen Zeit war die Erhaltung der gesetzlichen Theilnahme der gemeinen bürgerlichen Familien an den Ehren- und Regierungsstellen des Vaterlands noch ein Grundsatz, der den edeln Bürgersmännern aus denjenigen Familien, die den größten Antheil und den höchsten Einfluß auf die Regierung ihrer Kantone hatten, noch wahrhaft am Herzen lag. Auch fand in diesem Zeitpunkt noch jeder Bürger, der mit edler Mäßigung und in den Schranken gesetzlicher Wege im Dienst und zum Dienst des Vaterlands mit Würde, Weisheit und thätiger Kraft in seinem bürgerlichen Einfluß höher strebte, bey diesen Männern freundliche und mitbürgerliche Handbietung, Rath und Aufmunterung in seinen Bestrebungen. In diesem innern, so allgemein tief, individual begründeten Fundament des wachsenden Wohlstandes unsers Landes lebten wir, wenige kleine Störungen ausgenommen, beynahe ein paar Jahrhunderte. Die Zünfte und Innungen, die in den spätern Zeiten ein so großes Hinderniß der Individualehre und des Individualwohlstandes der größern Menge unserer Mitbürger geworden, waren damals noch solide Fundamente des allgemein bürgerlichen und städtischen Wohlstandes und der allgemein bürgerlichen und städtischen Ehre, so wie sie später ein tödtliches Hinderniß der bürgerlichen Vorschritte in beyden Rücksichten geworden.

Wir haben aber, das dürfen wir uns auch nicht verhehlen, die lange Dauer der guten Folgen unserer ursprünglichen, einfachen, bürgerlichen Einrichtungen und des daraus entstandenen Einflusses zur Näherung und innern Gleichheit der Segnungen des wesentlichen, häuslichen Wohlstandes aller Stände unsers Landes nicht blos unserer Sorgfalt und weisen Mäßigung im Innern, sondern vorzüglich einem ausserordentlichen Glück, das uns von außen her begünstigte, zu danken. Auf dem stillen See fährt auch eine, in ihren einzelnen Brettern mürbe zu werden anfangende Barke ihre gewohnte Fahrt selber durch einzelne Klippen mit erfahrnen Schiffleuten sicher hindurch. Es ist vielleicht in der Weltgeschichte kein Beyspiel, daß ein kleines Land, mitten im fortdauernden Krieg mächtiger Nachbarn, Jahrhunderte lang den Frieden in seinem Innern und in allen seinen Grenzen allgemein und so viel als ungestört erhalten und so lange von großen kriegenden Mächten als neutral respektirt und behandelt wurde.

Aber um deswillen ist nicht weniger wahr, daß unsere Mäßigung den Segen dieses Glücks in einem ausserordentlichen Grad erhöhte und dauerhaft machte. Reichthum, Wohlstand und Ueberfluß vermehrte sich von Geschlecht zu Geschlecht in segensvoller, mäßiger, aber allgemeiner Progression auf unserm vaterländischen Boden, und änderte auch sehr lange den eben so allgemeinen Geist der Mäßigung im Gebrauch und in der Anwendung dieser Segensfolgen beynahe auf keinem Punkt in grellen, den wahren Fundamenten unsers Segenszustandes gewaltsam an's Herz greifenden Vorschritten. Die Reformation minderte zugleich in mehreren Hauptstädten der Schweiz, die sie annahmen, den Einfluß einiger, unserm ursprünglichen, schweizerischen Geist fremdartigen Regierungsansichten, Regierungsgrundsätze und Anmassungen, und gab der dauernden Sorgfalt der edlern Bürgermänner unserer Kantone die in einem hohen Grad sittlich begründete und für die Erhaltung des häuslichen Wohlstandes, des städtischen Handwerksstandes und überhaupt der handarbeitenden, bürgerlichen Berufe folgen- und segensreiche Basis, für deren Erhaltung der Edelmuth der schweizerischen, städtischen Regierungen bis nahe auf unsere Zeiten einen Grad von Sorgfalt trug, der in vielen unserer zünftigen Städte beynahe bis zur Aengstlichkeit gieng. Ich führe zum Beleg dieser Aeußerung nur folgendes Beyspiel an. In einer unserer Hauptstädte, in der die Regierungsgewalten des Kantons so viel als ganz in den Händen der Zünfte waren, meldete sich vor einem Jahrhundert ein französischer Emigrant in Verbindung mit mehreren bürgerlichen Kaufleuten um die Erlaubniß, eine Bandfabrik daselbst anlegen zu dürfen. Die Regierung war auch sehr geneigt, ihnen diese Erlaubniß zu geben; aber ein unbemittelter und verdienstloser, zünftiger Bandarbeiter setzte sich dagegen, weil ihre Briefe und Siegel einem jeden Passamenter verbieten, auf einem Stuhl auf einmal mehr als ein Band zu fabrizieren, und die höchste Gewalt der Stadt wagte es auch in diesem Zeitpunkt noch nicht, diese lächerliche Passamentereinrichtung als den ersten Fundamenten des öffentlichen, bürgerlichen Wohlstandes entgegenstehend zu erklären, und wies den französischen Fabrikanten mit seinem Ansuchen ab, dem aber bald in einer andern schweizerischen Stadt dasselbe mit Freuden bewilligt wurde und einen Erfolg hatte, daß von dieser Fabrik Millionen für diese Stadt gewonnen wurden. So groß war die Sorgfalt mehrerer eidgenössischer Städte in Rücksicht auf die Behandlung des Zunftgeistes mitten in ihrem ernsten und dauerhaften, stillen Entgegenwirken gegen ihre, zum Theil wirklichen, zum Theil oft nur scheinbaren Nachtheile. Dadurch erklärt sich allein, aber auch heiter, wie es möglich gewesen, daß mitten unter den immer wachsenden Anmassungen einzelner, nicht allgemein gleich edler und gleich edelmüthiger Familien auf einen immer größern Regierungseinfluß in ihren Städten und auf einen mit diesen Privatanmassungen übereinstimmenden, höhern Regierungston und Regierungsgeist, die Würde, die Ehrenfestigkeit und selber der Regierungseinfluß des größern Theils der handwerktreibenden Bürger in unsern Hauptstädten sich dennoch so lange in einem Grad erhielt, der sehr geeignet war, mannigfaltige Schwierigkeiten, die aus der Unpassenheit einiger alter Uebungen, Ansprüche und selber Briefe und Siegel entsprangen und mit dem Zeitgeist der gegenwärtigen Regierungsbedürfnisse in einem allzugroßen Contrast standen, durch gegenseitiges Zutrauen zu heben und in mehrern Fällen in friedlicher Stille verschwinden zu machen.

Das große Weltwerk der Reformation hat besonders auf die Schweizerischen Städte, die in häuslicher und bürgerlicher Hinsicht einen, aus gebildeten, wirthschaftlichen Kräften hervorgehenden Wohlstand besaßen, vorzüglich segnend eingewirkt. Der alte Erbfleiß dieser Städte hob die Kultur derselben in wissenschaftlicher und Kunst-Hinsicht, mitten in der Erhaltung ihres anspruchslosen, bürgerlichen Gemeingeists, zu einer ausgezeichneten Höhe der damaligen Civilisation. Sie übertrafen hierin, äusserlich mit unendlich höhern Mitteln begabte Städte; wozu ganz gewiß vieles beytrug, daß der Boden unsers Wohlstands für die Freßpflanzen, Zierbäume und eiteln Prunkerscheinungen des bürgerlichen Lebens durchaus nicht so reich und günstig war, als in vielen andern, größern Städten des Auslands; ferner trug auch hiezu wesentlich bey, daß wir, von diesen Auswüchsen des Civilisationsschimmers damals noch nichts weniger als allgemein geblendet, die ökonomischen Ressourçen, die uns durch die Reformation zufielen, lange, sehr lange mit großem Ernst zu der Aeuffnung der alten, mäßigen Fundamente unsers Wohlstands benutzten. Diese Städte wurden auch dadurch ganz natürlich der gesegnete Mittelpunkt der, in diesem Zeitpunkt wesentlich und solid vorschreitenden Kultur des ihnen angehörigen Landvolks; freylich nicht ohne wachsendes Uebergewicht ihres Regierungs- und Verwaltungseinflusses und aller Mittel auch in einer willkührlichen Anordnung und Aenderung der bestehenden Einrichtungen und Uebungen im Land; aber sie benutzten auch diesen, in gewisser Rücksicht wichtigen, aber einseitigen Vorsprung in diesem Zeitpunkt allgemein mit der so oft berührten Mäßigung und väterlichen Sorgfalt. Und so wenig der katholische Theil unsrer Kantone in dem Wohlstand, der aus der bürgerlichen Berufsthätigkeit und Anstrengung hervorgeht, mit den reformirten Städten gleichen Schritt zu halten vermochte, so standen seine Städte, Länder und Angehörigen im Wesentlichen des alten, Schweizerischen Wohlstands und Glücks, so wie der alten, Schweizerischen Grundsätze und Lebensweisen nichts weniger als sehr zurück. Sie fühlten dieses auch in einem hohen Grad selbst, und lebten, bey einem vielseitig noch fremdartigen Personalbenehmen einiger, in ausländischem Dienst befindlicher, sehr angesehener und einflußreicher Familien, dennoch in einem, in vielen Rücksichten vaterländischen, mit großer Popularität verbundenen, altschweizerischen Geist. Besonders war das Glück der Hirtenvölker in den Urkantonen äusserst groß und ihrem alten, ursprünglichen Geist im Innern ihrer Lebens- und Regierungsweise immer gleichförmig geblieben. Sie, die Katholiken, wetteiferten mit den Protestanten nach ihrer Art in dem guten Geist ihrer Väter, indessen diese durch ihren Reichthum und ihre Thätigkeit von dieser Seite die Fun=

damente des Gleichgewichts der eidgenössischen Stände merklich schwächten und in verschiedenen Rücksichten einer, den ursprünglichen Gemeingeist der Eidgenossenschaft gefährdenden Uebermacht entgegenschritten, während die Katholiken weit mehr einen unveränderten Besitzstand ihres alten Seyns zu erhalten suchten und sich desselben zum Theil bis auf unsre Tage erfreuen. Ihre Bevölkerung schritt nur in mäßiger Erhöhung vorwärts und die Industrie fand bey ihnen keinen Eingang; Grund und Boden sind bey ihnen zu keiner unnatürlichen Kunsthöhe getrieben. Das gierige Treiben nach großem Reichthum blieb ihnen größtentheils ziemlich fremd, und dadurch erklärt sich auch, daß die gewaltthätigen Vorfälle der neuern Zeit auf den innern Geist und die äussern Formen ihrer Verfassungen weniger Einfluß gehabt haben, als dieses unter entgegengesetzten Umständen ganz gewiß auch der Fall gewesen wäre. Ich kann nicht anders als meine Ueberzeugung von dem guten, alten, einfachen Geist besonders der gemeinen Volksklasse der katholischen Stände bestimmt und laut aussprechen: ich bin in meinen jüngern Jahren als naher Verwandter von Dr. Hotze, der als Arzt mit den benachbarten katholischen Ständen in täglichen Verhältnissen lebte, im Fall gewesen, hierüber diesen guten Geist vielseitig und sehr oft durch wiederholte Erfahrungen kennen zu lernen. Ihr einfacher bon sens, ihr zutrauensvolles, gutmüthiges, anmaßungsloses und hie und da anmuthvolles Benehmen war mir immer auffallend. Ich sah in diesen Verhältnissen durch tausend und tausend Beyspiele, daß diese guten Bergleute und überhaupt das gemeine katholische, Schweizerische Landvolk ganz gewiß auch in Rücksicht auf Geistesbildung und Erwerbsfähigkeit, mit etwas mehr Belebung, größerer Thätigkeit und solider Verbesserung ihres Schul- und Erziehungswesens segensvoll weiter geführt werden könnte, als dieses bis jetzt bey ihm der Fall ist. Diese Ueberzeugung stärkte sich während meines kurzen Aufenthals in Stanz in einem hohen Grad. Die vorzügliche Bildungsfähigkeit meiner dortigen, armen Kinder war mir auffallend und vorzüglich das Eigenthümliche sehr oft Originelle ihrer Geistesrichtung und der Fundamente ihrer innern Belebung, die in jeder Rücksicht leicht angesprochen werden konnte. Ich bin fest überzeugt, daß die elementarischen Bildungsmittel in ihrem ganzen Umfange bey diesen Kindern mit einem seltenen Erfolg anwendbar wären, so wie, daß diese Bergvölker in einer wahrhaft soliden Volkskultur weit schneller und leichter vorwärts gebracht werden könnten, als die meisten der durch Reichthum und Luxus zum Theil der Verwilderung preis gegebenen, zum Theil verkünstelten Kinder vieler unsrer Fabrikgegenden zu der Einfachheit und Naturkraft zurück geführt werden können, die eine solide Volksbildung wesentlich erfordert. Der Gegenstand ist wichtig, und ich habe Gründe, zu hoffen, daß einigen Gegenden des, in Geisteskultur und Erwerbskräften zurückstehenden, katholischen Landvolks dießfalls ein besseres Schicksal bevorstehe und vom erleuchtetern Katholizismus selber ausgehen werde. Das stille Glück auch der ärmsten dieser Gegenden hat schon jetzt vielseitig wesentlich gute Fundamente zu alle diesem und ist im ganzen Umfang, bis auf die gegenwärtige Zeit, sehr groß. Der vorzügliche Schatten, der dem großen Glück dieser Schweizerischen Bergvölker beywohnte, gieng wesentlich und so viel als allein aus ihrem unglücklichen Mitgenuß der Regierungsrechte in den gemeinen Herrschaften und der in einem hohen Grad staatsrechtlich unregelmäßig begründeten Verwaltungs- und Bevogtungsweise hervor. Der Mangel an staatsrechtlich genugsam begründeter Unterscheidung der Herrschaftsrechte mit den Rechten der höchsten Staatsgewalt war auch im ganzen Umfange der Schweiz eine mehr und minder belebte Quelle vieler einzelnen Lücken und bedenklichen Vorfälle in der öffentlichen Verwaltung, und hatte hie und da Folgen, die allmälig der wachsenden Selbstsucht einiger Regierungsstellen und Beamtungen einen großen Spielraum gaben, doch ohne auf den guten, segensvollen Zustand des Schweizerischen Vaterlands einen, im Großen allgemein nachtheiligen Einfluß zu haben.

Dieser Zustand dauerte so lange, bis im Anfange des vorigen Jahrhunderts die Folgen einer unpassenden, wie aus den Wolken herabgefallenen Steigerung eines unnatürlichen, in unsern Lagen und Verhältnissen keinen sichern Boden findenden Fabrikverdiensts und Geldreichthums die wesentlichen Fundamente des Ebenmaßes unsers bisherigen Wohlstands auf mehrern bedeutenden Punkten des Vaterlands gleichsam aus ihren Angeln hob. Erst in diesem Zeitpunkt vermochten die Ueberreste des alten, Schweizerischen, tief gewurzelten Gemeingeists unsrer Lebensweise, bey aller dauernden Sorgfalt und Mäßigung, es nicht mehr, dem Strom der Folgen vielseitiger Abschwächung unsers altbürgerlichen Zusammenlebens allgemein kraftvoll wirkenden Einhalt zu thun. Es flossen uns von allen Seiten auf eine unnatürliche Weise große, mit unserm frühern Zustande kontrastirende Geldmassen zu. Die große Zahl unsrer ehemals wohlhabenden Bürger fieng jetzt an, neben unverhältnißmäßig schnell reich gewordenen Fabrikanten und andern Günstlingen des Glücks und der Gewalt plötzlich in eine Art von erniedrigender Entfernung zu stehen, die auf den Geist unsers ehemaligen, bürgerlichen Beyeinanderlebens und auf die alten, zünftigen, Handwerk- und Berufstreibenden Bürger hie und da kränkend einwirkte, und zugleich die Schwäche vieler, sehr vieler ihrer Mitbürger zu einem Aufwand und zu Lebensweisen hinreizte, die mit ihren alten Erb- und Berufseinkünften, auch beym höchsten Fleiß und bey der höchsten Anstrengung, in keinem Verhältniß mehr standen und in den noch bestehenden Rechten ihrer zünftigen Einrichtungen selber die größten Hindernisse fanden, ihrer Erwerbsthätigkeit einen größern Spielraum und ihren Einkünften dadurch einen beträchtlichen, für die Erhaltung ihres alten, ehrenfesten, würdigen und selbstständigen Zustands nothwendigen Zuwachs zu verschaffen. Die Glieder des bürgerlichen Mittelstands, die aber an dem neuen Verdienst der Fabrikhäuser keinen Theil hatten, verloren die ehrenhafte Stellung und den würdigen, öffentlichen Einfluß, den sie bey ihrem mäßigen Einkommen Jahrhunderte lang, in den ersten und bedeutendesten Kantonalhauptstädten sowohl als in den von ihnen abhänglichen, privilegirten Municipalstädten, so ausgezeichnet segensvoll genossen. Eine

Art Glücksritter wurden hie und da Tongeber des Schicklichen und Anständigen im Lande; indeß aber die Zahl derer, die den neuen, so geheißenen guten Ton mitmachen konnten, sich von Jahr zu Jahr immer verminderte. Es war unter diesen Umständen hie und da in unsern Städten immer leichter, mit Ehren als Schmarozer- und unnütze Zierdpflanze dazustehn, und immer schwerer, mit unbemerkter, stiller Thätigkeit segensvoll im alten Geist unsrer Lebensweise für Weib und Kind selbstständig zu sorgen.

Noch für eine weit größere Volksmenge nachtheilig wirkte dieser Geldzufluß in den Landbezirken, in denen der neue, unnatürliche Fabrikverdienst einen vorzüglich schnellen und großen Einfluß hatte *). Er vertheuerte in den-

---

*) Anmerkung. Diese Stelle könnte zu Mißverständnissen Anlaß geben und uns von dem Gesichtspunkt ablenken, in welchem Grad die Reformation die Erwerbskraft aller Stände unsers Vaterlands auf solide Fundamente gegründet. Sie war es auch, die die Branschen der Industrie, über deren Verderben wir jetzt klagen, in der Armuth unsrer Städte und unsrer Dörfer möglich gemacht und ihren Segen nicht nur Jahrhunderte lang kraftvoll in unsrer Mitte erhalten, sondern auch gegenwärtig noch im Stande ist, die Mittel der Wiederherstellung unsrer selbst in den Ueberresten der Folgen ihrer Segenskräfte, die wir noch besitzen, uns in uns selbst fühlend zu machen, wenn wir uns dahin zu erheben vermögen, den Zustand, in dem wir uns dießfalls befinden, richtig, herzlich und vaterländisch, wie wir es sollen, in's Auge zu fassen. Es ist in unsrer Lage gar nicht um die Entfernung der Industrie aus unsern, durch sie jetzt gefährdeten Gegenden, sondern um die Erneuerung ihrer wesentlichen Segensfundamente zu

selben den Werth alles Grundeigenthums schnell mehr als um das Doppelte; er vermehrte die Bevölkerung unnatür-

---

thun. Wir bedürfen der Gewerbsamkeit in eben diesen Gegenden am allervorzüglichsten. Wir müssen im Gegentheil Gott danken, daß mitten in der Zeit, in welcher unsre ersten Fabriken bey weitem nicht den Zins ihrer darin steckenden Capitalien finden, sie dennoch mit aller Anstrengung fortfahren, ihren Arbeitern Brod zu verschaffen. Dabey hat auch der letzte, unnatürlich große Geldzufluß tausend und tausend armen Landeigenthümern die Vorschüsse an die Hand gegeben, die die Verbesserung ihrer Güter unumgänglich erforderte, wodurch der hohe Preis derselben möglich gemacht worden, so wie er sich nur durch den Fortgenuß dieses Verdienstes bis auf diese Zeit in dieser Höhe zu erhalten im Stande war. Und wir dürfen auch das nicht verkennen, daß die vielseitige geistige Belebung des Volks, so wie seine physische Gewandtheit in allem, was die Bildung der Erwerbskraft allgemein und besonders auch in Rücksicht auf die Landwirthschaft erfordert, durch das Daseyn der Fabriken äußerst gewonnen hat. Nur das Sittenverderbniß der letzten Epoche hat diesen Segen im Innersten seiner Fundamente so tief untergraben und es dahin gebracht, daß, obgleich in der Schweiz gegenwärtig unstreitig weit mehr kleine Landeigenthümer sind als ehemals, es dennoch wahr ist, daß dieser Zustand die größere Anzahl der Dorfeinwohner, im wahren Sinn des Worts, eigenthumlos gemacht, indem ein armer Mensch, der tief verschuldetes Land, das sich nicht einmal dem Reichen, will geschweigen dem Armen wirklich verzinset, anbaut, in der Wahrheit durchaus nicht als der Eigenthümer desselben, sondern als ein an seinen Erdschollen angeketteter Sklave anzusehn ist, den er, um leben zu können, als wäre er sein Eigenthum, unfruchtbar und segenlos behandeln muß. Wahrlich, das Land dieses Menschen lich, und indem er die größere Anzahl der Dorfeinwohner nach und nach eigenthumlos machte und den Besitzstand der ärmern Einwohner mit unerschwinglichen Schulden belastete, führte er zugleich beyde Klassen zu einem Aufwand, zu einer Verschwendung und Sorglosigkeit für die Zukunft und Nachwelt, der unglücklicherweise höchst geeignet war, die religiöse und sittliche Begründung des alten, häuslichen Lebens auch beym Landvolk und besonders bey der größern Anzahl der armen, sich immer vermehrenden eigenthumslosen Einwohner der Fabrikörter in seinen Fundamenten zu zerstören und dadurch dem Volksgeist und dem Volksleben der Dörfer eben wie demjenigen der Städte in allen Ständen eine Richtung und einen Spielraum zu geben, dessen Bedenklichkeit und Gefährde wir uns um so weniger verhehlen können, da er in der letzten großen Crisis unsers Vaterlands die Schwäche der wesentlichen Fundamente der Gemeinkraft der schweizerischen Vereinigung in einem Grad zu Tage förderte, der uns auch gegenwärtig über den innern Zustand unsrer selbst warnend aufmerksam machen und jedes edelmüthige und selbstsuchtlose Individuum unsers Vaterlands, in dessen Busen noch altschweizerischer, vaterländischer Sinn wohnt, auffordern sollte, den fortdauernden Quellen der Abschwächung unsers öffentlichen und Privatwohlstands, die aus fremdartigem Einfluß auf den Geist unsrer Verfassungen und die Lebensweise unsers Volks in allen Ständen ein-

ist nicht sein; der Reiche, dem er zinset, ist sein wahrer Eigenthümer, und nicht er.

wirkten, um so mehr entgegenzuarbeiten, da die Verfassungen, die uns gegenwärtig unter einander vereinigen, offenkundig aus Umständen, Vorfällen und Beweggründen hervorgiengen, die durchaus nicht geeignet waren, den altväterischen, schweizerischen Geist in seiner ursprünglichen Einfachheit und Reinheit in unsrer Mitte allgemein zu erneuern; sondern im Gegentheil den ersten Quellen seiner Abschwächung zu Stadt und Land vielseitige neue, zum Theil noch fremdartige Nahrung zu geben, und ich darf wohl sagen, sie in vielen Rücksichten bey uns einheimisch zu machen und uns daran zu gewöhnen; indeß die Verarmung eines großen Theils unsers Volks auf vielen Punkten des Vaterlands mit der Minderung der Ressourçen, unsere Bedürfnisse zu befriedigen, mit den sich vermindernden Mitteln, sie befriedigen zu können, in fortdauerndem Wachsthum ist und zugleich das Landeigenthum aus der Hand der wachsenden, ärmern Volksklassen immer mehr in diejenige der sich in eben dem Verhältniß vermindernden Begüterten hinübergeht, wodurch der Weg sich durch ländlichen Fleiß und ländliche Arbeitsamkeit in unsrer Mitte zu einer selbstständigen, häuslichen Existenz zu erheben, für eine sehr große Volksmenge immer schmäler und enger gemacht wird. Wir dürfen uns nicht verhehlen, daß unser Zustand von dieser Seite für eine sehr große Anzahl unsrer Mitbürger auf sehr vielen Punkten unsers Vaterlands in einem hohen Grad schwierig ist und mit jedem Tag noch schwieriger zu werden droht.

Die große Quelle der in einem so hohen Grad gestiegenen Abschwächung der Fundamente unsers altschweizerischen,

schen, häuslich und bürgerlich solid begründeten Wohlstands, der unnatürliche Geldzufluß des neuen Fabrikverdiensts war in diesem Zeitpunkt durch ganz außerordentliche Umstände befördert. Die Artikel unsrer Industrie wurden beynahe in ganz Europa mit einer Gierigkeit gesucht, die in einem für die höhere Industrie höchst ungünstig gelegenen Lande, wie die Schweiz, beynahe unglaublich schien, aber auch unmöglich sich für die Dauer zu erhalten vermochte.

Wir danken diesen Augenblick eines mächtigen Scheinglücks ganz gewiß dem realen Vorschritt unsrer wissenschaftlichen und Berufsbildung, den wir vor den meisten Staaten Europa's in diesem Zeitpunkt besaßen. Aber wir hätten nicht einen Augenblick daran denken sollen, daß diese für die Fabrikation unsrer Artikel unendlich glücklicher gelegenen Staaten uns diese Glücksgelegenheit nicht mit eben der Schnelligkeit wieder entziehen werden, mit welcher sie uns dieselbe einen Augenblick eigentlich auf eine verführerische und das Wesen unsers Wohlstands gefährdende Weise haben zufließen und in den Händen gelassen. Wir dürfen uns auf keine Weise verhehlen, daß unter den Umständen, unter denen wir leben, das vom Ausland so leicht gewonnene Geld mit eben der Schnelligkeit aus unsrer Mitte verschwindet und verschwinden muß, mit der es uns zugeflossen. Eben so wenig können wir uns die Größe des Nachtheils verhehlen, den ihr kurzes, precaires, aber gewaltsam auf uns einwirkendes Daseyn auf den Ganzen Umfang der soliden Fundamente unsers alten Wohlstands gehabt hat. Es ist unstreitig, diese vorübergehende, unnatürliche Glückserscheinung hat wie ein Waldstrom, der nach einem großen Ungewitter austritt und links und rechts dürre Fluren verheerend überschwemmt, auf uns eingewirkt, und es wäre unverzeihlich, diesen Zustand nicht fest, wie er wirklich ist, in's Auge zu fassen.

Unsere Reichen und unsere Armen sind in einem Grad des Zeitluxus und seines Verderbens befangen, daß bald jede, auch noch so unpassende Zeit, Geld und Kräfte verschwendende und selber ekelhafte Luxusthorheit, die in den Hauptstädten der größten Reiche an der Tagesordnung ist, nicht auch in, zu Zeiten an Ort und Stelle sehr lächerlicher Miniaturform bey uns eingerissen und in einem unnatürlichen Grad eine sehr bedeutende Zahl unsrer Einwohner selbst bis auf unsre Dörfer hinab angesteckt hat. Der müßiggängerische Zerstreuungston, dessen sich besonders auch die gemeinen und selber armen Einwohner der großen ressourçenvollen französischen und italienischen Städte auf ihren Promenaden, in ihren Cassino's rc. rc. erfreuen, wird in unsern Tagen auch sogar von Leuten, die in unsern Städtchen in Winkelgassen und auf armseligen Dachstübchen wohnen, und sich in gewissen Leisten mit großer Unbequemlichkeit und Beschwerde gleichsam über den Schuhleist dieser neumodischen, aber für uns unglücklichen Lebensweisen, so wie über denjenigen des Modegeschwätzes und der Modeansichten der Tagesbegegniße schlagen lassen, mit großer Gierigkeit gesucht und so viel ihnen möglich benutzt.

Unter diesen Umständen ist der Erwerbsgeist unsrer Väter so viel als blitzschnell in einen Grad von ver=

wöhntem Verbrauchsgeist hinübergegangen, der mit einem zehnfach größern Einkommen, als wir wirklich im allgemeinen besitzen, in unsrer Lage nicht für die Dauer sicher gestellt werden kann. Wir hören indeß von allen Seiten den Schreckensruf der Minderung unsrer öffentlichen Finanzen, deren Defizit gegen das Ausland aber bey der Isolirung unsrer Kantone nicht einmal in seiner bestimmten Wahrheit aufgenommen werden kann. Dabey ist der Grad des Leichtsinns, mit welchem wir durch den bloßen Reiz von Modenarrheiten gelockt, dem Ausland unser Geld von Tag zu Tag immer mehr zuwerfen, so groß, daß wahrlich die nächsten Nachkommen von tausend und tausend unsrer Mitbürger, die jetzt im Komödiantenprunk großstädtischer Wohlhabenheit umherziehn, es ganz gewiß in dürftigen Umständen bereuen werden, daß ihre Väter ihr Vermögen so gedankenlos sich bis auf den letzten Nothpfennig aus der Tasche spielen ließen. Aber nicht nur diese thörichten Opfer unsrer allgemein wachsenden Eitelkeits- und Sinnlichkeitsverschwendung und Schwäche, sondern auch der Fleiß und die Anstrengung unsrer bessern Bürger und Landeseinwohner kommen in ihrem, ehemals sichern und ihren Bedürfnissen vollkommen genugthuenden Einkommen und in ihren Erwerbsmitteln von Jahr zu Jahr immer mehr zurück. Man lasse sich nicht irrelenken, man frage sich unverholen, wie viele von hundert und hundert Familien, deren Großväter selbstständig im Stande waren, ihren Haushaltungen durch ihre gesicherten Erb- und Erwerbsmittel ein vollkommenes Genüge zu leisten und ihre Kinder, wenn es auch ihrer viele waren, nach den Sitten ihrer Zeit in einem hohen Grad von Ehrenfestigkeit zu erziehn und auszusteuern, sind dieses beydes im ganzen Umfange der Ansprüche und Ausgaben, die unsre gegenwärtige Zeit hiefür erfordert, selbstständig aus den Einkünften ihrer Erb- und Erwerbsmittel zu bestreiten nicht mehr im Stande. Und in wie vielen Kantonen ist die Errichtung neuer Stellen und Posten nur darum dringend und nothwendig, weil dieses bey sehr vielen, zum Theil sehr achtungswürdigen Familien der Fall ist. Man frage sich unbefangen: wohin muß es das Vaterland hinführen, daß die Zahl der Haushaltungen, deren Kinder durchaus nicht mehr den Grad der Sicherheit des ehrenfesten Zustands genießen, den unsre Vorfahren so allgemein von Kind auf Kindeskind hinab sich dauerhaft zu versichern gewußt, in dem Grad zunimmt, den wir vor unsern Augen sehen, aber bey der großen Verschiedenheit unsrer Verfassungen und Einrichtungen nicht einmal in großen und allgemeinen Uebersichten controliren können? Das Traumleben des vorigen Jahrhunderts, dessen Verirrungen so tief in den allgemeinen Wohlstand unsers lieben Vaterlands eingegriffen, hat uns schon so weit gebracht, daß die Mehrzahl der Einwohner vieler, mehr und minder bedeutenden Fabriförter schon jetzt als ganz eigenthumslos in's Auge gefaßt werden muß. Wir können uns nicht verhehlen, das kleine Erbeigenthum, das Jahrhunderte lang in tausend und tausend Hütten unveräußert auf Kinder und Kindeskinder frey hinuntergieng und eine Hauptstütze unsers öffentlichen Wohlstands war, hat sich auf eine höchst beunruhigende Weise in unsrer

Mitte vermindert, und ist in den Jubelgegenden unsers Fabrikreichthums am allermeisten verschwunden; dagegen aber ist hie und da in diesen Gegenden ein Gesindelleben der Menge eingewurzelt, dessen Folgen unter gewissen Umständen für das Vaterland noch beunruhigender werden könnten als selber ihre Eigenthumslosigkeit, und man darf hinzusetzen, daß sie es höchst wahrscheinlicherweise gewiß werden müssen, wenn wir nicht in dem guten, äußerst bildsamen Nationalgeist auch in den niedrigsten Volksklassen Mittel dagegen suchen und finden können. Wer darf es sich verhehlen, daß jedes bedeutende Begegniß im Ausland oder im Inlande, das auf die gegenwärtig noch bestehenden Unterhaltungs- und Erwerbsmittel der großen, ganz eigenthumslosen Volksmenge unsers Vaterlands einen, dieselben im Großen mindernden Einfluß haben würde, einen Zustand der Dinge hervorbringen könnte, der demjenigen einiger Fabrikgegenden in den letzten Jahren der Theurung, dessen wir uns alle mit Entsetzen erinnern, fast unausweichlich ähnlich werden müßte.

Vaterland! Die Mittel, einem solchen Zustand mit gesicherter Landeskraft vorzubeugen, ihm, wenn er erscheinen würde, genugthuend Hand zu bieten und ihn, ohne das Aeußerste zu gefahren, vorübergehen zu machen, mindern in deiner Mitte von Jahr zu Jahr sichtbar. Vaterland! Wo stehst du in diesem Fall? Frage dich selbst: wo gehst du hie und da mit den üblichen Schritten deines gewöhnlichen Zeitlebens, ich möchte fast sagen, freywillig selbst hin?

Edle Männer! Freunde und Brüder! Ihr ehrtet in meiner Wahl das Andenken der verehrungswürdigen Männer, die in dieser Epoche, bey der plötzlich sichtbaren Zunahme der Folgen der Altersschwäche unsrer Verfassungen und Lagen sich vereinigten, um den einfachen, kraft- und segensvollen, alten Schweizergeist in seiner Wahrheit und Reinheit für den innern Dienst des Vaterlands in den verschiedenen, einflußreichen Verhältnissen, in denen jeder von ihnen in seiner Heimath stand, unter den edelsten seiner Mitbürger von neuem zu beleben und so viel an ihm lag, ihn in seinen Umgebungen in allen Ständen allgemein zu machen. Wenige leben noch; das vorige Jahr war ich der einzige von ihnen in Eurer Mitte; kein anderer meiner Zeitgenossen war da. Möchte ich doch nicht allein dagewesen und ein würdigerer von ihnen an meine Stelle gewählt worden seyn! Eure Wahl hat das tiefe Gefühl in mir rege gemacht, wie wenig ich weder an meinem Geburtsorte noch in den verschiedenen Stellen, in denen ich in meinem Vaterlande gelebt habe, durch meine Bestrebungen unter meinen Mitbürgern die segensvollen Wirkungen hervorgebracht, die den Lebenslauf der meisten Mitglieder unsrer Gesellschaft, welche meine Zeitgenossen waren, auszeichneten. Ach! sie leben nicht mehr. Das dunkle Grab deckt die edeln Gebeine der meisten von ihnen. Freunde und Brüder! Sie waren nicht Männer ihrer Zeit. Weit aus die meisten standen in ihrer Bildung sowohl als in ihrem thatsächlichen Einfluß hoch über dieselbe empor. Sie kannten das tiefe Versinken ihrer Zeit unter den Geist der frühern schweizerischen Vorwelt. Aber sie lebten doch auch nicht außer dem innigsten Zusammenhange mit dem Geist der Zeit, in den ihre Lebensepoche hineinfiel. Die meisten von ihnen waren für die Bedürfnisse dieses Zusammenhangs vorzüglich gebildet, und dankten dieser, im häuslichen Leben genossenen Bildung den segensvollen Einfluß, den ihr Leben auf ihre Umgebungen und ihr Vaterland hatte; und es ist auch dieser Einfluß ihres Privatlebens auf das Einzelne ihrer Privatverhältnisse und Privatumgebungen, was ihnen den hohen Grad der öffentlichen Achtung, den sie durch ihr Leben genossen und in ihren Verhältnissen zum Wohl des Vaterlands benutzten, zuzog und sicherte. Es ist thatsächlich, daß die Edelsten von ihnen sich den Weg zu ihrem segensvollen, öffentlichen Einfluß durch die stille, aber hohe Kraft ihres edeln, würdigen Privatlebens bahnten. Ich lebte in meinen Jünglingsjahren im Zeitpunkt des jugendlichen Aufblühens mehrerer von ihnen. Die Erziehung, die sie genossen, und die damals noch in den Häusern der edelsten Schweizer üblich war, steht heute in einem, in verschiedenen Rücksichten mein Herz erhebenden Andenken vor mir. Sie athmete in ihrem Wesen noch vielseitig den hohen Geist der altschweizerischen, vaterländischen Gesinnungen, Ansichten, Denkungs- und Lebensweise. Als Söhne edler, Schweizerischer Väter lernten sie von Jugend auf im Kreis ihres häuslichen Lebens fühlen, denken und handeln, wie sie in ihren gereiften Jahren als edle, Schweizerische Männer gefühlt, gedacht, gehandelt und sich dadurch die Liebe, die Achtung und das Zutrauen aller derer, die in ihrer Zeit noch diesen alten, guten Geist ihres Vaterlands in ihrem Busen nährten, so ausgezeichnet erworben haben.

Also geschätzt, geehrt und geliebt, hatten sie in ihren Umgebungen auf alles, was unsre wesentlichen Interessen in ihren eigenen, besondern Lagen nahe berührte, einen wirksamen und sehr bedeutenden Einfluß. Die öffentliche Achtung für sie und auch für die Vereinigung, die sie, als unsre Vorfahren, mit einander verband, beschränkte sich nicht blos auf den Kreis unsers Vaterlandes; die edelsten Männer Deutschlands und mehrerer Länder theilten unsre Hochachtung für sie mit uns. So viel als vom Anfange ihrer Vereinigung an, besuchten mehrere von ihnen den Ort unsrer Zusammenkunft. Ihre Zahl vermehrte sich von Jahr zu Jahr. Männer vom höchsten Range, selber Prinzen, erschienen in unsrer Mitte und freuten sich mit menschenfreundlicher Theilnahme an dem thatsächlichen Beweis, der sich in unserm Kreise so auffallend offenbarte, daß bey allen Schwächen unsers, durch die Zeit allmählig veralteten, vaterländischen Geistes und bey aller Gewaltsamkeit eingerissener, unschweizerischer Gesinnungen, Lebensweisen, Einrichtungen und Maßregeln, der Geist der alten, vaterländischen Gesinnungen, Denkungs- und Lebensweisen in unsrer Mitte durchaus noch nicht ausgelöscht sey, und daß wir im Gegentheil uns mit Zutrauen der Hoffnung überlassen dürfen, das Vaterland werde im aufkeimenden Geschlecht Mittel finden, die reinen Kräfte unsrer altschweizerischen Denkungs- und Handlungsweise in unsrer Mitte von neuem zu beleben und allmählig wieder herzustellen. Es ist ganz gewiß, daß in diesem Zeitpunkt ein besserer Geist unsers Vaterlands in allen Kantonen zu erwachen und den Zeitübeln, die in unsrer Mitte

Fuß griffen, mit Ernst, Liebe und edelm Gemeinsinn entgegenzuwirken schien. Die Beyspiele des Muths, der Thätigkeit und der edeln Anstrengung, mit welcher die Mehrzahl unserer Mitglieder in ihren heimathlichen Kreisen dafür Kräfte und Mittel suchten, berechtigten uns zu diesen Hoffnungen.

Aber wir lebten am Vorabend des großen Weltbegegnisses der französischen Revolution, die mit der Allmacht ihrer Schreckensgewalt auch unser Vaterland mit dem äußersten Unglück und den größten Gefahren bedrohte, und bey ihrer ersten Annäherung an unsere Grenzen durch die Irrthümer und Leidenschaften, die ihren Rang leiteten, dem Geist der Eintracht und mit ihm den Segensfundamenten aller unserer innern Bestrebungen zur Wiederherstellung unserer selbst und zur Erneuerung unserer alten, vaterländischen Denkungs- und Handlungsweise einen bedauernswürdigen Herzstoß gab.

Freunde! Brüder! Eidgenossen! Laßt uns heute über dieses Begegniß mit neubelebten Gefühlen unserer Eintracht schweigen; laßt uns ganz vergessen, was diesfalls hinter uns ist, und mit reinem Herzen, edel und warm, streben nach dem, was vor uns ist. Wir sind äußerlich gerettet und wieder vereinigt in einen Zustand der Unabhängigkeit versetzt, der dem letzten Tropfen alteidgenössischen Schweizerbluts, das sich noch in unserer Mitte erhalten, mit der Macht eines tieferschütterten Herzens aufruft; alle Kräfte, die die Vorsehung in unserer Hand gelassen und in unserer Hand wieder vereinigt hat, mit der höchsten Anstrengung dahin zu verwenden, uns innerlich wieder herzustellen, und den Schwächen, Uebeln, Lücken und Fehlern, die schon vor dieser großen Weltepoche in unserer Mitte stark Fuß gegriffen und tiefe Wurzeln geschlagen, mit erneuertem, alteidgenössischem Muth entgegen zu arbeiten. Wir können uns nicht verhehlen, daß diese Lücken, Fehler und Schwächen in den Begegnissen dieses traurigen und höchst gefährlichen, aber jetzt so glücklich überstandenen Zeitpunkts in unserer Mitte sehr vielseitige Nahrung gefunden und namentlich auf die Stärkung, Erhöhung und Allgemeinmachung vieler unserer unpassenden, anmassungsvollen Lebens- und Handlungsweisen in unsern öffentlichen und Privateinrichtungen höchst verderblich einwirkten, und wahrlich das Bedürfniß verdoppelten, jedes vaterländische Individuum mit warmem Herzen aufzufordern, unserm guten, aber Hülfe, Rath, Beyspiel und weise Führung gewiß nicht weniger als vor der Revolution bedürftigen Volk in der Schwäche unserer Zeit, damit ich nicht sage, in unserer Schwäche, so weit wir noch können, im altschweizerischen Geist, das wieder zu werden, was die edelsten Männer des Vaterlands von den Zeiten unserer ersten eidgenössischen Vereinigung bis auf den heutigen Tag ihm immer waren, und den Geist allgemein wieder herzustellen, der sich in den Tagen der Vereinigung unserer Gesellschaft, von ihrem Ursprung an, so würdig und hoffnungsreich aussprach.

Edle Männer! Freunde und Brüder! In der Stellung, in der ich heute zu Euch stehe, zwingt mich mein Herz und das Pflichtgefühl meiner Stunde fordert mich auf, mit dem Muth eines vaterländischen Mannes aus der Vorzeit Euch, liebe, sämmtliche Mitglieder unserer Gesellschaft! edle, eidgenössische Männer! zuzurufen: Lasset uns in der That und Wahrheit der Stiftung unserer Gesellschaft und aller edeln Vorfahren unserer Vereinigung würdig werden. Lasset uns die Zwecke unserer Vereinigung in der That und Wahrheit in uns selbst wieder erneuern und tief fühlen, daß es nicht ein Geringes und nicht ein Leichtes ist, heute dem Vaterland und der Menschheit das zu werden, was diese Männer in den Tagen ihrer Laufbahn mit hohem Ernst und unabläßlicher Thätigkeit beyden zu werden sich bestrebten.

Männer und Brüder! Ein großer Theil der Epoche ihres Lebens war für ihre Bestrebungen noch viel günstiger, als es unsere Tage, sehr verschiedener Ursachen wegen, wahrlich nicht mehr sind. Die Ueberreste der alten, schweizerischen Zeit standen an ihrer Seite noch vielfacher belebt und in bestehenden Uebungen dem bessern Theil ihrer Mitbürger noch mehr in lebendigen Beyspielen vor Augen, als dieses in unsern Tagen der Fall ist. Wir können uns nicht verhehlen, sie wurden damals in ihren Bestrebungen noch von zarten Fäden häuslicher und bürgerlicher Verhältnisse und Näherungen belebt, von denen einige durch die Tage trauriger Mißstimmungen im Volksgeist aller Stände locker geworden und hie und da wirklich beynahe zerrissen erschienen. Die wesentlichsten Quellen unserer damaligen Verirrungen sind durch die Vorfälle der Zeit nichts weniger als verschwunden; sie sind im Gegentheil durch dieselben vielseitig gestärkt und belebt worden.

Die selbstsüchtigen und leidenschaftlichen Schwächen, welche unedlere Individua unsers Vaterlandes in allen Ständen schon seit Langem reizten, im Kreise ihrer Mitbürger in einem dem vaterländischen, alten, schweizerischen Geist entgegenstehenden Sinne zu fühlen, zu denken und zu handeln, haben sich in der Revolution durchaus nicht vermindert und sind auch durch die Annahme unserer neuen Verfassungen nichts weniger als verloren gegangen; diese Verfassungen haben im Gegentheil hie und da einer großen Anzahl Individuen in Städten und Dörfern vielseitigen Reiz, Mittel und Spielraum zu einem ungenirten, freyen willkührlichen und stolzen Benehmen gegen ihre schwächern Mitbürger gegeben, die vorher in ihren Lagen und Umständen durchaus, wo nicht gar keinen, doch ganz gewiß weniger Reiz, weniger Mittel und Spielraum zu einem solchen Benehmen gehabt haben. Die Schwächen unserer letzten Vorzeit machten uns zwar schon vielseitig Demuth heucheln, wo keine wahre Demuth da war; aber unsere jetzige Welt verbirgt ihre Eitelkeit und ihren Hochmuth auch da nicht, wo sie dieselben der Neuheit ihrer Form und ihrer Reize wegen, wenn auch nur anstandshalber, fast nothwendig mehr verbergen sollte.

Ich komme indeß auch hierin immer wieder auf die berührten Hauptursachen unsers tiefern, häuslichen und bürgerlichen Versinkens zurück. Die verderblichen Folgen des Uebermaßes unsers precairen Geldzuflusses, die seit so langem dem alten, schweizerischen Gemeingeist und der lieblichen Näherung aller Stände gegen einander einen tödtlichen Herzstoß gaben, sind durch die großen Vorfälle unserer Tage nichts weniger als gemildert worden; sie haben sich im Gegentheil noch verstärkt, und wir haben jetzt die doppelte Sorge, einerseits der Fortdauer der Verschwendung und des Leichtsinnes Einhalt zu thun, den wir uns durch den Mißbrauch des precairen, leichten Geldverdienstes zugezogen, anderseits der Gefahr, die Ressourçen, die wir zur Befriedigung unserer Bedürfnisse und Angewöhnungen bedürfen, schnell und vielseitig zu verlieren, vorzubeugen; indessen wir, mitten in diesem Bedürfniß, die größere Anzahl der Einwohner vieler unserer Gegenden einem Nothzustand entgegengehen sehen, der ihnen bey den Angewöhnungen ihrer gegenwärtigen Lebensweise doppelt unerträglich, dem aber solid abzuhelfen um so schwieriger seyn wird, da die in unsern Tagen unnatürlich gereizte und gesteigerte Selbstsucht aller Stände die verhältnißmäßige Landesedelmuth, die zu großen, in's Wesen unsers Vermögens- und Eigenthumszustandes eingreifenden Aufopferungen und Anstrengungen unausweichlich nothwendig werden könnte, in der Massa unserer übrig gebliebenen Reichen ganz gewiß nicht im Steigen ist, und die Kräfte unsers Mittelstandes, die ehemals im Vaterland durch ihre Allgemeinheit groß waren und bey dem guten, bürgerlichen Geist dieses Standes wohlthätig einwirkten, sich schon gegenwärtig auf eine sehr beunruhigende Weise vermindert haben, und sich immer noch weit mehr zu vermindern drohen. Freunde und Brüder! das Traurigste dabey ist noch dieses, daß der Leichtsinn unsers Zeitgeistes uns gleichsam aus einer ernsten und folgereichen Aufmerksamkeit auf diese Umstände herausgeworfen hat. Wir dürfen uns nicht verhehlen, wir fühlen die gemeinsamen Schwächen, die uns an kraftvollen Mitteln, den Umständen nach dem Grad ihrer wahren Bedürfnisse entgegenzuarbeiten, nothwendig sind, nicht genug in uns selbst. Die Mehrheit unsers Volks ist gedankenlos und zum Theil blind über die Wahrheit unserer Lage, und die Veränderung unserer bürgerlichen Vereinigung hat hie und da der Selbstsucht, Schwäche und Gierigkeit unsers Zeitgeistes einen die Unschuld, Einfachheit und Kraft unsers alten, vaterländischen Gemeingeistes diesfalls in einem hohen Grad gefährdenden Spielraum gegeben, gegen welchen wir um so mehr nicht genug auf unserer Hut seyn können, weil er bey der immer steigenden Minderung unserer ökonomischen Ressourçen immer mehr von den Bedürfnissen und hie und da selber von den Nothbedürfnissen unserer wirthschaftlichen Verhältnisse unterstützt und belebt wird. Auch ist alles Neue immer noch unreif. Seine erste Erscheinung ist zwar fast immer blühend, aber ein leichter Wind tödtet, wie wir alle wissen, die jungen, keimenden Blüthen; und wo das nicht ist, da geht es doch immer lange, heiße Sommertage hindurch, ehe auch die gesündesten Blüthen zu reifen Früchten gedeihen. Seyen wir doch im Segensgenusse unserer neuen Verfassungen edelmüthig und sorgfältig genug, die Betrachtung ernsthaft zu würdigen, daß jede neue bürgerliche Laufbahn sehr leicht und oft mit verführerischen Reizen auf Abwege von den ersten Fundamenten des in sich selbst erneuerten, vaterländischen Geistes und der in ihrem Innern neu belebten Vorsorge für's Volk hinzuführen geneigt ist. Freunde und Brüder! Ich möchte bey diesem Wort nicht mißverstanden werden. Wir sind alle neu und in unserm neuen Zustand alle mehr und minder fremdartig eingeimpft, und müssen wahrlich die Wiederherstellung des alten, schweizerischen Vaterlands = und Gemeingeistes in uns allen gleich zu erneuern suchen. Wir sollten durch die Geschichte unserer neuen Tage einsehen gelernt haben, daß auch die Selbstsucht gereifter Erfahrungen in den Mitteln ihrer Selbsthülfe stärker und vielseitiger Unterstützungen sicherer ist, als die gutmüthigsten Aufwallungen der Unerfahrenheit, und eben so, daß es auch sehr gut gemeynten Aufwallungen bey den Hindernissen, die ihnen die Erfahrung ihrer Gegner in den Weg legt, immer sehr schwer fällt, selbstsuchtlos zu bleiben. Die Erfahrung hingegen fühlt bey allen Hindernissen, die ihrer Stellung und ihren Zwecken in den Weg gelegt werden, auch in ihrer Altersschwäche den Zusammenhang ihrer Kräfte und ihrer Mittel für die Bedürfnisse des Augenblicks, und geht gewöhnlich, mitten unter sehr großen Schwierigkeiten, still, kühn und sicher ihren Zwecken entgegen. Die Unerfahrenheit hingegen fühlt die Irrthümer ihrer reggemachten, eigenen Selbstsucht und ihrer Unbehülflichkeit fast immer zu spät, und ihre Selbstsucht wird gar oft in dem Grad unedel, als sie lange leidenschaftlich und lebendig sich über sich selbst täuscht, und kommt auf diesem Wege gar oft dahin, sich am Ende über sich selbst und seine Irrthümer mehr zu ärgern als über das Unrecht seiner Widersacher.

Freunde und Brüder! Wir sollen es tief fühlen, daß wir uns nur auf dem Wege gereifter Erfahrungen zu dem wahren Segensgenuß unserer neuen Verhältnisse erheben können; und wir dürfen uns nicht verhehlen, daß wir in uns allen hierin tief eingewurzelte Schwierigkeiten, die in der Gedankenlosigkeit über den wirklichen, positiven Zustand wesentlicher Bedürfnisse des öffentlichen Wohlstandes unsers gutmüthigen, seinem Glück und seinen Kräften zu viel vertrauenden Volks liegen, zu bekämpfen haben. Die Traumsucht über den Ruhm, die Größe und Heldenkräfte der alten Schweizer, die in unserer Mitte wahrlich hie und da in schwache Ruhmredigkeit hinübergegangen, hat uns vielseitig zur Vernachlässigung der Kräfte und Vorzüge, durch welche unsere Vorfahren ihren Ruhm verdient und sich unsern Wohlstand und Segen erworben, hingeführt. Unsere Aufmerksamkeit sollte gegenwärtig in einem hohen Grad lebendig und kraftvoll auf das gerichtet seyn, was wir selbst seyn und werden, und wozu wir uns selbst im Ernst bilden und erheben sollten, um im Kreis unserer Mitbürger, in der Mitte unsers Volks und im Geist unserer edeln Vorfahren einflußreich und segensvoll dazustehen und zu handeln, und uns zu alle dem emporzuheben und tüchtig zu machen, was die Zeitumstände für den wahren Dienst des Vaterlands je von uns fordern könnten, um den dringenden Bedürfnissen der Gegenwart und den Gefahren, die uns selber in einer nahen Zukunft bedrohen, mit wahrem, altväterischem

schem Sinn und mit wahrer, alteidgenössischer Kraft vorbeugen und entgegenwirken zu können.

Edle Männer! Freunde und Brüder! Lernen wir uns doch je länger je mehr in aller Wahrheit, sowohl in derjenigen unserer Schwäche als in derjenigen unserer Kraft, erkennen. Wir vermögen es nicht mehr, in den Irrthümern und Eitelkeiten des spielenden Reichthums, die in den großen Staaten zum Zeitgeist der Welt und ihrer Führung geworden, in unsern kleinen Verhältnissen so weit fortzufahren, als hie und da ein unväterlicher und unschweizerischer Sinn dieses noch zu glauben scheint. Verhehlen wir uns doch nicht, daß wir, mitten im Anschein unserer Stille und Ruhe, vielleicht am Vor-Abend von Begegnissen stehen, die, wenn wir die Natur und das Wesen unsers Zustandes nicht in ihrer innersten Tiefe zu erkennen suchen, uns den Faden der innern Selbsthülfe, durch die unsere Väter den mäßigen Genuß ihres Wohlstandes sich Jahrhunderte sicherten, für die Zukunft unausweichlich abschneiden könnten. Die eingerissenen und zur Uebung gewordenen Ausgaben des Luxus und der Eitelkeit, die wir in vielen unserer Erscheinungen auffallen gemacht, haben uns hie und da an Einschränkungen und Mäßigungen in öffentlichen und Privaterscheinungen gehindert, an denen wir uns, ohne das Vaterland in seinen wesentlichen Interessen zu gefährden, durchaus nicht mehr in dem Grad hindern lassen dürfen, wie es hie und da bisher geschehen ist. Heil uns, wenn wir den öffentlichen und Privatbedürfnissen unsers Vaterlands ein Genüge leisten können. Wir dürfen den Auswüchsen der

Welteitelkeit unserer Tage in ihren größern Verhältnissen nicht frohnen. Wir dürfen und können ihnen nicht frohnen, und Miniaturformen des Großthuns sind in der Welt nicht nur gefährlich, sie sind auch noch etwas anders; vorzüglich aber sind sie unschweizerisch. Unser Vaterland bedarf in allen seinen Verhältnissen Solidität und wahre Kraft, und der Schweizer soll sie in allen seinen Verhältnissen suchen und fördern. Wir bedürfen in allen Rücksichten einer soliden Regierungskraft, einer soliden Militärkraft und sogar einer soliden Polizeykraft; aber für die Eitelkeitsbedeckung der Schwäche irgend einer dieser Kräfte haben wir kein Geld und sollen für dieselbe auch keines ausgeben und keines einnehmen. Dem Blendwerk der Eitelkeit, das die Solidität der wesentlichsten Kräfte auch der größern Staaten untergräbt, darf die öffentliche und allgemeine Meinung der Schweizer, in welcher Form und in welcher Gestalt sie sich auch ausspreche, nicht frohnen. Wir bedürfen der erneuerten Belebung des Geistes der Einschränkung und Mäßigung unserer Väter und vorzüglich des Geistes der Prunklosigkeit, der ihre Anstalten und Einrichtungen vielseitig veredelte und ihren Segen dauerhaft machte. Die Entgegenwirkung gegen die prunkvollen Einrichtungen des Zeitgeistes muß aber nicht aus kleinlicher Sparsamkeit der öffentlichen und Privatverwaltungen und Einrichtungen; sie muß aus der Erneuerung des alten, einfachen und anspruchslosen Geistes des schweizerischen Volks und einer größern, ernstern und eingeschränktern, häuslichen Lebensweise in allen unsern Ständen hervorgehen. Werden wir im Privatleben hiezu gelangen, so wird ganz gewiß eine edle, allgemeine Einschränkung der Ausgaben des öffentlichen Dienstes eine unfehlbare Folge einer weisern Sparsamkeit und der mit ihr verbundenen Segensfolgen der Erwerbsamkeit des schweizerischen Volks seyn. Unsere häusliche Einschränkung muß wesentlich als die Basis der Einschränkung des öffentlichen Dienstes, dessen wir eben so sehr bedürfen, angesehen und anerkannt werden. Alle diesfälligen Ersparnisse, die nicht aus dem Fundament der allgemeinen, edeln und freyen Beschränkung der häuslichen Ausgaben der Bürger in allen Ständen hervorgehen, sind nur segenslose Blendwerke; aber wenn sie auf dieses Fundament gegründet sind, so können ihre Segensfolgen unmöglich in Zweifel gezogen werden; und diese würden auch unter anderm ganz gewiß dahin wirken, daß wir aufhören würden, in dem Grad der offene Markt aller Elendigkeiten, mit denen uns das Ausland überschwemmt und aussaugt, zu bleiben, als wir dieses gegenwärtig noch sind, und mit der Minderung unserer Privateitelkeiten würden ganz gewiß auch einige öffentliche Eitelkeiten mächtige Reize verlieren, und viele von ihnen, die wahrlich im Wesen ganz eine Folge unserer Privateitelkeiten und Eitelkeitsliebhabereyen waren, werden dadurch in ihren wesentlichen Quellen selber verstopft werden. Das öffentliche und das Privatleben wirkt durch seinen innern, guten Gehalt und durch seine Irrthümer in seinen Segenswirkungen und in seinem Verderben gleich gegenseitig auf einander. Ich habe in meiner Jugend das alte Sprichwort oft gehört: „der Vatersinn auf dem Rathhaus ist nirgends kleiner als der

Vatersinn in den Wohnstuben der Bürgerhäuser," und ich wage es, hinzuzusetzen: „er sey auch am ersten Orte nicht leicht viel größer als am andern."

So wie wir uns auf der einen Seite mit weiser Sorgfalt einzuschränken suchen sollen, so müssen wir uns auf der andern Seite zu der uns noch möglichen Erwerbskraft und Erwerbsgewandtheit, deren wir gegenwärtig mehr als je bedürfen, zu erheben suchen. Alles was von der Wiege an zum Müßiggang, zur Zerstreuung, zur Untergrabung der gemeinen Gewerbskräfte und zu Beschäftigungen und Liebhabereyen hinlenkt, die der anhaltenden Thätigkeit und Kraft im Berufsleben nachtheilig ist und den Segen der diesfälligen Bildungsmittel, Bildungsanstalten und Bildungsgelegenheiten schwächt, muß im Nationalgeist in der ganzen Wichtigkeit seiner Folgen, die es auf die Minderung des soliden Privatwohlstands der weit größern Menge unsrer Mitbürger und dadurch auf die Fundamente des öffentlichen Wohlstands unsers allgemeinen Vaterlands hat, mit großem Ernst ins Auge gefaßt werden.

Aber welch ein unergründliches Meer von Bedürfnissen steht in dieser Hinsicht vor meinen Augen! Edle Männer! welch ein unergründliches Meer von Bedürfnissen muß jetzt vor Euern und vor den Augen jedes vaterländischen Schweizers stehen, dessen Herz von den wahren Ansichten der Gegenwartsbedürfnisse unsers Vaterlands ergriffen ist. Diese Bedürfnisse sind unstreitig von einer Natur, daß es jedem, sie mit unbefangenem Geiste auffassenden Manne auffallen muß, es sey ihnen unmöglich anders als durch tief in die Menschennatur eingreifende Mittel, die Kunstkräfte und Kunstfertigkeiten unsers Volks solid zu begründen, abzuhelfen. Wir sind in ökonomischer Hinsicht in großen Parthien in einen Zustand versunken, in dem wir uns der Volksbildung halber nicht mehr den Täuschungen überlassen dürfen, in denen wir uns in Rücksicht auf unsre Ansichten von dem gegenwärtigen Zustand der altschweizerischen Kraft und häuslichen und bürgerlichen Selbstständigkeit haben irreführen lassen.

Freunde! Brüder! Unser schweizerisches Vaterland ist in der gegenwärtigen Zeit ganz gewiß nur dadurch im Stande, den öffentlichen und Privatbedürfnissen seiner Lage im Geist, in der Würde und in der Kraft unsrer Vorfahren ein befriedigendes Genüge zu leisten, wenn seine Bürger allgemein oder wenigstens der weit größere Theil derselben lernen, sich durch die Solidität und den Segen ihrer Berufskräfte zu einer höhern häuslichen Selbstständigkeit zu erheben. Dazu aber müssen sie nothwendig besser, solider und kraftvoller erzogen werden, als dieses im Vaterland und zwar vielseitig an Oertern, wo von der bessern Vorwelt hiefür mehr als genugsame Fonds gestiftet sind und vorliegen, gegenwärtig geschieht. Das diesfällige Bedürfniß ist unwidersprechlich, und die Möglichkeit, ihm ein Genüge zu leisten, kann im Allgemeinen nicht bezweifelt werden, obgleich auch nicht zu läugnen, daß der wirklichen Ausführung der Sache im Lande sehr große und zum Theil tief eingewurzelte Hindernisse im Wege stehen, von denen sehr wesentliche vorzüglich daher rühren, daß die Verdienst- und Erwerbsfähigkeit unsers Volks, die in vielen Gegenden unsers Landes in einem sehr hohen Grad groß ist, in den diesfalls ausgezeichnetsten Individuen in der Taumelzeit unsers unverhältnißmäßig großen Geldzuflusses hie und da in unsrer Mitte gar nicht mit der Liebe, Schonung, Aufmunterung, Unterstützung und selber Auszeichnung behandelt worden ist, wie das allgemeine Interesse des Vaterlands es erfordert hätte. Desto dringender ist es aber gegenwärtig nothwendig, daß wir diesen Fehler in der ganzen Ausdehnung seiner Wichtigkeit anerkennen, so wie daß alles gethan werde, wodurch die ausgezeichnete Verdienst= und Erwerbs=Fähigkeit unsers Volks allenthalben im Land mit großer Theilnahme beholfen und so viel immer möglich in seiner Kraft unterstützt, geleitet, gebildet und höher gehoben werden kann, und vorzüglich die Individuen, die diesfalls größere Erwartungen zu erregen geeignet sind, mit der höchsten Liebe, Schonung, Aufmunterung, Unterstützung und selber Auszeichnung behandelt werden. Wir dürfen uns nicht verhehlen, dieser für das Vaterland jetzt so wichtige Gesichtspunkt ist wesentlich in der Taumelepoche des vorigen Jahrhunderts zum Theil mit Muthwillen ausser Acht gelassen, zum Theil gedankenlos ausser Mode gekommen. Er war auch nur ein paar Menschenalter früher in den Resten der einfachen, anmaßungslosen, gemeinbürgerlichen Denkungs= und Handlungsweise noch sehr allgemein in guter, segensvoller Uebung. Die Art, wie er in diesem Zeitpunkt hie und da vernachlässigt worden, ist beynahe unbegreiflich; und zwar um so viel mehr, da die ausgezeichneten Kunst=, Berufs= und Erwerbskräfte des Volks auf mehrern Punkten und in ganzen Distrikten des Vaterlands von einer Bedeutung sind, die jedem talentvollen Finanz-Minister eines weisen Fürsten diesfalls zu Aufmerksamkeiten und Maßregeln führen würden, wovon einige ganz gewiß einer gesegneten Anwendung auch für unser Vaterland in unsrer Lage um so mehr anwendbar wären, da die Erbtugenden des Hausfleißes, der Sparsamkeit und der Genügsamkeit, durch welche die Produkte einiger gemeiner Artikel der Industrie allein in einem seltenen Grad wohlfeil erzeugt werden können, Jahrhunderte lang in der niedersten, ärmsten Klasse unsrer Fabrikarbeiter ein festes und allgemeines Fundament gewonnen und gegenwärtig durch die Noth der Umstände selber beholfen, einer glücklichen Erneuerung ihrer segensvollen Fundamente fähig ist, wenn diese Volksklasse den Grad der edeln Handbietung, Wegweisung und Bildung, deren sie hiefür bedarf, finden würde. Wir dürfen uns aber dabey nicht vorstellen, daß der Grad der intellektuellen und Kunstbildung unsers Volks, bey welcher wir im Anfang unsrer Industrie so großes Geld gewonnen und durch welche wir die Fortdauer unsrer Fabrikation bis auf jetzt noch immer zu erhalten vermögen, für die gegenwärtigen Bedürfnisse unsers Vaterlands genug sey. Wir können nur durch eine sehr große Anstrengung für die Erhöhung und tiefere Begründung der intellektuellen und Kunstkräfte unsers Volks und durch eine, für dieses Bedürfniß solid begründete Erziehung aller Stände dahin gelangen, den ökonomischen Wohlstand des Vaterlands durch den Ertrag der Arbeitsamkeit desselben im ganzen Umfange seiner Bedürfnisse wieder herzustellen.

Wird das geschehen, oder nicht geschehen? Das weiß der Himmel. Aber daß es möglich wäre, wenn wir es im Geist der alten Vaterlandsliebe und Vaterlandskraft suchten und wollten, das würde uns sicher in die Augen fallen, wenn wir die Bedürfnisse des Vaterlands mit altschweizerischem Geist und mit altschweizerischer Kraft beherzigen würden. Jedermann weiß, welch hohen Grad des Einflusses der Nachahmungstrieb unsers Geschlechts hat. Das was jedermann thut, meint jedermann, er müsse es auch thun, und das was niemand thut, versucht auch niemand zu thun. Darum werden wir, trotz aller Umstände, in denen wir uns befinden, auch in dieser Hinsicht im allgemeinen durchaus nicht anders werden, als wir sind, und unsre Kinder auch zu nichts anderm machen, als zu dem, was wir selbst sind, wenn nicht in der Rücksicht, von der ich eben rede, sehr wirksame Beweggründe, Reize und Mittel in unsrer Mitte angeregt und belebt werden können, die dem Laufe des Stroms, in dem wir wahrlich in großer Gedankenlosigkeit, wo nicht allgemein, doch an sehr bedeutenden Punkten des Vaterlands fortschwimmen, eine Richtung geben, die er durchaus nicht von sich selbst nehmen wird. Sie, diese Richtung, muß, wenn wir ihres Segens wahrhaft theilhaft werden sollen, ganz gewiß von der Vaterlands-, Bürger- und Volksliebe der erleuchtetsten, erfahrensten, kraftvollsten und thätigsten Männer unsrer Zeit und in ihren wesentlichen Wirkungen weit mehr von ihrer Sorgfalt für die solide Bildung der Nachwelt ausgehen, als aber auf Versuche einer momentanen Umschaffung unsrer gegenwärtigen Zeitmenschen, ihrer Grundsätze, Lebensweisen, Genießungen und Anmaßungen gebaut werden.

Wahrlich, die gegenwärtige Generation ist auch in unserm Vaterland höchstens zu einer mäßigen Unterwerfung unter die Bedürfnisse allmähliger Einschränkungen tüchtig, aber durchaus nicht für die Umschaffung ihrer selbst zu großen Vorschritten auf immediate Begründung bedeutender Erwerbszweige fähig. Ihre Kräfte sind, besonders auf den ärmsten, nothleidendsten und gefährdetsten Punkten unsers Vaterlands, durchaus hiefür in einem zu hohen Grad zurückstehend und gelähmt. Es ist nicht nur, daß ihr Zeitalter nichts Bedeutendes that, sie hiefür zu bilden; so wie es mir in die Augen fällt, war es im Gegentheil im allgemeinen in einem hohen Grad geeignet, sie hiefür zu mißbilden. Ich bin zwar alt und meine Augen sehen nicht mehr sehr helle; aber sie haben doch auch lange gesehen. Die Erfahrungen meines Lebens sind groß, und was sie in dieser Rücksicht Abschreckendes und Verwirrendes für mich gehabt haben mögen, so ruht meine Ueberzeugung, daß die bessere Bildung der Nachwelt auch von dieser Seite in unsrer Hand ist, ganz gewiß auf gereiften Fundamenten. Es liegt auch nicht der geringste Zweifel in meiner Seele, daß wenn die größere Anzahl unsrer edlern und einflußreichern Mitbürger sich dahin erheben würde, mit väterlicher Schweizertreue und Schweizerischer Standhaftigkeit für die Bildung und Erziehung unsrer Jugend das zu thun, was zu einer bessern Begründung des häuslichen und öffentlichen Wohlstands noth thut und sicher in unsrer Hand liegt, vieles, sehr vieles geschehen könnte, das von großer Bedeutung und in seinen Folgen für das Vaterland wichtig und segensvoll werden müßte.

Es ist indeß auch nicht, daß es am guten Willen unserer edlern Mitbürger hierin fehlen sollte; aber unser eingewurzelter Zeitgeist hat die Aufmerksamkeit der großen Mehrheit unsrer Bürger in allen Ständen mehr auf diejenigen Bildungs- und Erziehungs-Gegenstände hingelenkt, die einzelnen Ständen dienlich, bequem, angenehm und vielleicht auch nothwendig, als auf diejenigen, die allem Volk in allen Ständen für die gute Begründung seiner häuslichen und bürgerlichen Selbstständigkeit dringend nothwendig sind. Es ist ganz gewiß jetzt nicht um die schnelle Weiterführung der höhern, wissenschaftlichen Bildung, noch viel weniger um die Allgemeinmachung der oberflächlichen Brosamen davon zu thun, die wir vielseitig unpassenderweise nur zu sehr allem Volk zu geben suchen; es handelt sich im Gegentheil vorzüglich um die allgemeine und genugthuende Begründung des häuslichen und bürgerlichen Wohlstands durch die bessere Ausbildung der allgemeinen Berufskräfte und Fertigkeiten, die auch durch eine noch so große Ausdehnung des Wortklangs oberflächlicher wissenschaftlicher Erkenntnisse auf keine Weise befördert, sondern wesentlich gehindert wird. Es herrschen wahrlich diesfalls hie und da Lücken und Mängel in der Erziehung und im Unterricht unsrer Jugend, die so tief eingewurzelt und mit so vielem blendenden und uns irreführenden Scheinguten unsers Verkünstlungslebens verwoben sind, daß wir allgemein den Grad des Bedürfnisses einer hierin tiefer gehenden Erziehungsweise aller Stände nicht tief genug zu Herzen nehmen. Sie bedürfen allgemein großer und entscheidender Maßregeln, die von der Wiege an mit vieler Sorgfalt und wahrlich gegenwärtig mit großer Kunst eingelenkt, angebahnt und begründet werden müssen, die uns aber unstreitig in vielen Rücksichten in einem hohen Grad mangeln. Die alten Segenskräfte der Wohnstubenbildung sind in der größern Mehrheit der Haushaltungen unsers Volks verschwunden, und die Volksschulen stehen, man dürfte fast sagen, so viel als allgemein von diesem wesentlichen Fundament aller wahren Menschenbildung und besonders alles Eigenthümlichen, was die solide Begründung des häuslichen und bürgerlichen Wohlstands der Individuen aller Stände wesentlich erfordert, entblößt.

Für die wissenschaftliche Ausbildung herrscht in unsrer Mitte noch vielfältiges, großes und belebtes Interesse; es erstreckt sich sogar hie und da auf die Bildung von hülf- und mittellosen Menschen, die nothwendig und dringend eine, mit den Bedürfnissen der Lebensweise, für die sie erzogen werden sollten, beschränkte, aber denselben genugthuende Erziehung erhalten sollten, und worin sie durch jeden Brosamen oberflächlicher, wissenschaftlicher Kenntnisse mehr gehindert als befördert werden. Gewöhnlich gehen bey den Kindern dieser Klasse von Einwohnern und Bürgern sechs bis sieben Jahre vorbey, ehe irgend etwas tiefer in die Menschennatur Eingreifendes für die Ausbildung ihrer Kräfte gethan wird; und in den höhern Klassen ist das, was in diesem Zeitpunkt vielseitig und oft mit großer Kunst und Mühseligkeit an ihnen versucht und gethan wird, der naturgemäßen Entfaltung ihrer Kräfte und der guten Begründung einer soliden Erziehung oft selber noch nachtheiliger als die Verwahrlosung, in welcher die größere Anzahl der Kinder des eigenthumslosen Volks im Müssiggang und in der Gedankenlosigkeit unter verführerischen Umständen diesen Zeitpunkt durchschlendert. Die Folgen dieses Zustandes, ich meine diejenigen der in diesem Grad ungebrauchten und mißbrauchten Kinderjahre sowohl, als der durch diese Umstände schon zum voraus in ihren Segenswirkungen untergrabenen und abgeschwächten Schuljahre, waren indeß in den Jubeljahren unsers großen Geldzuflusses bey fernem nicht so groß und für das Vaterland im Allgemeinen nicht so bedenklich, als sie es gegenwärtig bey der unverhältnißmäßigen und immer wachsenden Zahl der ökonomisch gleichsam in die Luft versetzten, eigenthumslosen und in Rücksicht ihrer Erwerbsfähigkeit in einem hohen Grad verwahrlosten Menschenmasse in unserm Vaterland wirklich ist. Man fühlt auch die Wahrheit dieser wichtigen Ansicht ziemlich allgemein, und doch sieht man kein kraftvoll reggewordenes Bestreben, das im Nationalgeist auf diesen Punkt hingelenkt ist; im Gegentheil, hundert und hundert besondere Interesse für allerley einzeln Gutes und Löbliches, das aber bey weitem nicht von diesem öffentlichen Interesse ist, erscheint in unserer Mitte vielseitig weit mehr und weit angelegentlicher vom allgemeinen Nationalinteresse belebt. Dieser Umstand hat sehr viele Ursachen, und man muß einige derselben, besonders wie sie von den Individuen unserer Verhältnisse in's Auge gefaßt werden können, Gerechtigkeit widerfahren lassen. Tausend und Tausende sprechen in ihren einzelnen Verhältnissen das Wort mit Recht aus: „was vermögen wir in unsern beschränkten Privatverhältnissen in Rücksicht auf diese unstreitig wichtige Angelegenheit des Vaterlands mit Hoffnung irgend eines gesegneten Erfolgs auszurichten oder auch nur anzubahnen?" Und einzeln können sie durchaus nicht in ihren Lagen und Verhältnissen Recht haben. Nur sage dieses Niemand im Allgemeinen. Nein, Niemand spreche das Wort aus: „wir haben im Allgemeinen keine Mittel, hierin zu helfen." Und ich bin überzeugt, ich stehe heute in der Mitte von Männern, die es tief fühlen, daß es dem Vaterland im Allgemeinen mehr an der genugsamen Belebung des Gefühls des Bedürfnisses dieser Mittel und an einem genugsam erwachten Eifer, sie kennen zu lernen zu prüfen und zu benutzen, als an ihrem Daseyn selber mangelt. Ihr Geist und ihr Wesen ist in den bessern Haushaltungen unsers Landes allgemein in den verschiedensten Formen und Gestalten zu Stadt und zu Land, auf dem Berg und im Thal, in Schlössern und in Strohhütten wirklich in Ausübung vorhanden, und er athmet eben so lebendig in mehreren unserer öffentlichen Einrichtungen und Anstalten, und besonders ist für die wesentlichen Anfänge dieser Mittel so viel als die Gesammtheit der Mütter aller Stände instinktartig belebt und vorbereitet; aber sie haben in den Kunstmitteln der gewohnten Erziehung durchaus keine, sie naturgemäß genugsam bildende und leitende Handbietung; und dann steht der Zeitgeist dem öffentli=

chen Einfluß des Guten, das diesfalls in unserer Mitte noch da ist, mit der ganzen Macht seines irre führenden Verderbens entgegen.

Aber so wie wir dahin kommen, die Ursachen und Mittel zu erkennen, durch welche der Zeitgeist im Stande ist, den Bestrebungen, der Nachwelt durch die Erziehung bessere Vorsehung zu thun, unübersteiglich scheinende Hindernisse in den Weg zu legen, so werden wir dadurch auch auf die Spur der ächten Mittel gelangen, dem diesfälligen bösen Einfluß desselben Schranken zu setzen.

So groß das Bedürfniß sowohl tief in die Menschen-Natur eingreifender als mit unsern positiven Lagen und Umständen sehr übereinstimmender Bildungs-, Erziehungs- und Versorgungsmaßregeln für unser Volk auch immer ist, so ist es dieses besonders in Rücksicht auf die große Anzahl der eigenthumslosen Armen unsers Vaterlands. Diese Menschen sind beynahe so viel als allgemein aller Bildungs-, Erziehungs- und Unterrichtsmittel, die ihre Kinder für die Sicherstellung eines häuslich und bürgerlich genugsam befriedigten Broderwerbs nöthig hätten, beraubt. Es ist unwidersprechlich, daß wenigstens die grössere Anzahl dieser Menschen hie und da im Vaterland, und zwar an einigen, in Rücksicht auf eine unnatürliche Ausdehnung ihrer Bevölkerung sich auszeichnenden Gegenden, im Allgemeinen durchaus nicht im Stande ist, den elterlichen Erziehungspflichten, die sie sowohl um ihrer Kinder als um des Vaterlands willen auf sich haben, ein Genüge zu leisten; und die gefährlichen Folgen sind eben so auffallend, die dieser Umstand unter leicht möglichen Ereignissen auf die wesentlichen Fundamente des allgemeinen Wohlstandes und der allgemeinen Sicherheit des Vaterlands haben konnte. Ein Aufwuchs zahlloser, allen Verführungen der Verwilderung und Entnervung vielseitig preis gegebener, eigenthumsloser und für ihre Bedürfnisse auf keine Weise mit Sicherheit und auf die Dauer unter wechselnden Umständen und Zeiten sich auch nur vor der äußersten Noth und dem äußersten Elend zu schützen fähiger Menschen ist ein Zustand, dessen Bedenklichkeit in einem jeden und besonders in einem kleinen, in seinen Ressourçen beschränkten und hiefür hinlänglich begründeter Anstalten mangelnden Staat kaum genug zu Herzen genommen werden kann. Ich darf noch beyfügen, es ist wahrlich ein Zustand, dessen Daseyn unser Vaterland in seinen frühern Tagen gar nicht kannte und dessen Möglichkeit es nicht einmal zu ahnen vermochte. Indeß ist diese, immer größer werdende Zahl der eigenthumslosen Menschen in unserer Mitte ein wesentlicher Bestandtheil unsers Schweizervolks selber, und das Vaterland ist wahrlich schuldig, den wahren Ursachen, die den gegenwärtigen Zustand, in dem sich diese große Anzahl unserer Mitbürger befindet, herbeygeführt, ernste Rechnung zu tragen und zu bedenken, daß die Väter von tausend und tausend, jetzt ganz eigenthumslosen Menschen zu ihrer Zeit auch das waren, was unsere jetzigen Begüterten und unser noch übrig gebliebene, ehrenfeste, selbstständige Mittelstand gegenwärtig in unsern Städten und Dörfern noch ist. Ich darf es bestimmt aussprechen, sehr viele unserer gegenwärtigen, reichen und begüterten Mitbürger, besonders auf den Punkten des Vaterlands, die durch den unnatürlichen Geldzufluß des Fabrikverdienstes im lezten Jahrhundert sehr blühend geworden, dürfen sich nicht verhehlen, daß viele ihrer Vorfahren in eben dem Zustand der Erniedrigung gegen die damaligen Begüterten und Geehrten standen, in welchem die große Anzahl der gegenwärtigen eigenthumslosen Einwohner des Landes jetzt gegen sie steht. Noch viel mehr hätte das Vaterland unrecht, wenn es keine ernste Aufmerksamkeit darauf werfen würde, daß eine große Anzahl der jetzt ganz eigenthumslosen Menschen an diesen Orten beynahe ein Jahrhundert lang im Dienst von Fabrikhäusern arbeitete, die sich zum Theil zu einem hohen Wohlstand erhoben, zum Theil die Umstände dieses vorübergehenden Reichthums leichtsinnig im Zeitspiel der Welt verloren und schnell wieder in den Zustand der Erniedrigung versanken, aus dem sie sich plötzlich für einen Augenblick erhoben, dabey aber durch ihre vorübergehende Lufterscheinung vielseitig dahin gewirkt, bey ihren Arbeitern den guten, sparsamen und eingeschränkten, häuslichen Geist, den diese von ihren Vätern geerbt haben, in ihnen auszulöschen und sie zum Theil in den wesentlichen, mit dem Eigenthümlichen ihres kleinen Besitzstandes übereinstimmenden Erb- und Berufskräften sittlich, geistig und physisch in einem hohen Grad abzuschwächen und in einen Zustand zu versetzen, in dem eine große Anzahl von ihnen äußerst unbeholfen, unberathen und dabey noch den vielseitigsten Versuchungen des Luxus, der Verschwendung und der Eitelkeit unsers Zeitgeistes immer mehr preis gegeben und zum Opfer des Blendwerks unsers Scheinwohlstandes

standes

standes dargeworfen dasteht. Wahrlich, wahrlich, das Vaterland ist verpflichtet, die Mittel ernsthaft in Ueberlegung zu nehmen, durch welche es möglich gemacht werden kann, den Bedürfnissen der öffentlichen Vorsorge, die diese Umstände erfordern, auf eine genugthuende Weise Vorsehung zu thun, und wohl zu bedenken, daß die bestehenden Hülfsmittel für die Landesarmuth in Zeiten gegründet worden, wo die Bedürfnisse, die die Armensorge der Gegenwart dringend fordert, gänzlich nicht da waren und keine Beweggründe obwalteten, den Gebrauch ihrer Fonds Gegenständen zu widmen, die an sich selbst von einem weit unbedeutendern Belang sind, als diejenigen, die in der Natur des gegenwärtigen Zustandes der immer wachsenden Menge unserer eigenthumslosen Einwohner liegen. Es läßt sich nicht einmal gedenken, daß diese Fonds auch beym treusten, weisesten und selbstsuchtlosesten Gebrauche für die Bedürfnisse unserer gegenwärtigen Lage hinreichen konnten. Diese Bedürfnisse sind so groß, daß das Vaterland diese Mittel durchaus nicht in den Stiftungen der Vorwelt finden kann, es muß sie nothwendig von sich selbst und von der Weisheit, dem Edelmuth, der Vaterlandsliebe und dem Bürgergeist seines jetzt lebenden Geschlechts erwarten, und bey denselben suchen. Es kann dieses auch mit gegründeter Hoffnung eines gesegneten Erfolgs thun, wenn es in sich selbst Kräfte und Muth fühlt, dieses Ziel sich durch eine allgemeine, auf die Menschennatur tief eingreifende und solid einwirkende Erziehung für alle seine Stände anzubahnen und vorzubereiten. Vor allem aus aber müssen wir tief fühlen, daß die höhere wissenschaftliche und Kunstausbildung einzelner Stände und einzelner Menschen etwas ganz Verschiedenes von dem ist, was die gute Erziehung des Menschengeschlechts in allen Ständen allgemein anspricht und fordert, und daß sie isolirt und einzeln dastehend, sehr leicht geeignet ist, neben der Vernachlässigung einzelner Stände in der Erziehung nur zerstörend und zwar gegenseitig durch den Einfluß der Gebildeten auf die Verwahrlosten und hinwieder durch die Rückwirkung der Verwahrlosten auf die Gebildeten zu wirken.

Vaterland! Die Nationalbildung, deren du bedarfst, muß mit der Kraft ihrer tiefern Einwirkung auf die Menschennatur alle Stände des Volks in einer Art von Ebenmaß ergreifen und in dieser Rücksicht gegenwärtig in der Bildung eines jeden Standes höher streben, weil ohne dieses das allgemeine Höherstreben, dessen wir bedürfen, durch das Zurückstehen jedes einzelnen in seinem Wesen gehemmt und die Erzielung des Ebenmaßes in demselben unerreichbar gemacht wird. Unsere Städte können sich durchaus nicht mehr durch die Beschränkungen unserer alten Handwerks- und Zunfteinrichtungen dem Wohlstande der Vorzeit auch nur von ferne nähern. Diese Formen stehen jetzt so tief unter alle dem, was unsere Städte in Rücksicht auf die Erneuerung des soliden, häuslichen Wohlstandes und der realen, bürgerlichen Ehrenfestigkeit, so wie zur Wiederherstellung des zahlreichen, selbstständigen Mittelstandes, der innerhalb ihrer Mauern wohnte, gegenwärtig dringend bedürfen, als die Routinemittel, die das Landvolk im Allgemeinen zur Begründung seiner häuslichen und öffentlichen Selbstständigkeit durch den Routinegang der für seinen Dienst bestehenden Bildungsmittel wirklich genießt, zur gesicherten, segensvollen Betreibung seines ländlichen Berufs nothwendig hat, bey den Zeitbedürfnissen und Schuldigkeiten des Landmanns als genugthuend angesehen werden dürfen. Diese Mittel sind, wie sie im Allgemeinen vor unsern Augen dastehen, durchaus nicht mehr fähig und geeignet, die ernste, mit den Fundamenten der Sittlichkeit innig zusammenhängende, geistige und physische Erwerbsbildung des Landvolks auf den Grad zu erheben, der erforderlich ist, die Fundamente des häuslichen Wohlstandes und einer solid begründeten Ehrenfestigkeit in unserer Mitte in diesem Stand genugthuend wieder herzustellen, durch welche ehemals ein zahlreicher, gesegneter Mittelstand auch in den kleinern schweizerischen Dörfern so vielseitig blühte. Am allerwenigsten sind die bestehenden Routinemittel der Bildung zur Industrie, die die meist eigenthumslosen Fabrik-Arbeiter, welche in so vielen unserer Gegenden so zahlreich sind, wirklich genießen, geeignet, den diesfälligen Bedürfnissen dieser wahrlich bedenklich großen Volksklasse und mit ihnen denjenigen des Vaterlands ein Genüge zu leisten. Sie wirken im Gegentheil vielseitig auffallend dahin, die Uebel, die wir gegenwärtig diesfalls schon leiden, von Tag zu Tag zu vermehren, und die Gefahren, denen wir ihrenthalben entgegengehen, uns immer näher zu bringen. Auch greift der Einfluß dieses Umstandes in seinen Folgen wahrlich nicht blos nur in die niederste Stufe, oder nach einem Ausdrucke, den ich sehr ungerne höre, nur in die Hefe des Volks. Es ist dem nicht so. Er wirkt im Gegentheil sehr vielseitig auf die bedeutenden, aber freylich immer schwächer werdenden Ueberreste unsers alten Mittelstandes. Und er muß es; denn es ist thatsächlich heiter, daß es hie und da zu Stadt und Land, ohne beträchtlich geerbtes Vermögen, auch mit bedeutenden Talenten und mit großem Fleiß, in den meisten unserer Berufs-Arten sehr schwer ist, ein so geheißener Ehrenmann, so wie man das Wort jetzt braucht, zu werden; und doch bedarf das Land, wenn sein Wohlstand in allen Ständen als wohlgegründet angesehen werden soll, in allen, auch in den niedern Ständen, allgemein einer bedeutenden Anzahl Ehrenleute. Desnahen ist offenbar eine sehr große Erhöhung der Kunstkräfte und Kunstfertigkeiten für eine sehr große Anzahl der Individuen unsers ehemals so gesegneten und blühenden Mittelstandes wahrlich eben so dringend nothwendig, als er dieses für die niedersten Fabrik-Arbeiter unsers Vaterlands auffallend ist.

Freunde und Brüder! Unsere Väter waren erhaben groß in der Noth. Möge das Vaterland heute in dieser Angelegenheit groß seyn, ehe die Noth da ist. Das Sprichwort: „der Mensch kann, was er will" — ist freylich in einem dummen Sinne nicht wahr; aber es hat für den weisen, fromm und kraftvoll höher strebenden Mann große Wahrheit in sich selbst. Wenn unser Schweizerland in vielen äußern Kräften denjenigen der großen Reiche unsers Welttheils äußerst nachsteht, so steht es keinem derselben in den innern Kräften, seiner Nachwelt durch die Erziehung in ihren wesentlichen und ersten Bedürfnissen ein Genüge zu leisten, nach; und es ist ein wesentliches Bedürfniß der Zeit, daß sich das Vaterland der Kräfte halber, die zur Wiederherstellung seiner selbst in allem, worin es schwach seyn mag, nothwendig sind, sich selbst nicht weniger zutraue, als es wirklich leisten kann. Das Unglück wäre unaussprechlich, wenn es sich gegenwärtig der Täuschung überlassen würde, als ob es bey dem großen, ausgezeichneten Kunsttalent so vieler unserer Gegenden und bey den, in unserer Hand sich befindenden, und seit Jahrhunderten von den Vätern vorbereitet in unsere Hand gelegten Mitteln einer wahren, tiefer greifenden, allgemeinen Volkskultur uns dennoch ganz und gar unmöglich wäre, durch öffentliche, aber tief in's Privatleben eingreifende und für unsere Gegenwartsbedürfnisse wohl berechnete Bildungs- und Erziehungs-Einrichtungen hierin dem Vaterland solid Vorsehung zu thun, oder wenigstens demselben die hiefür nothwendigen Mittel mit Solidität anzubahnen und vorzubereiten. Indeß können wir uns nicht verhehlen, daß die Benutzung dieser wesentlichen Grundlagen eines beträchtlichen Vorschrittes der Nationalkultur, die in unserer Hand liegen, unstreitig eine ernste und vielseitige Belebung von vielem, sehr vielem, das in unserer Mitte noch nichts weniger als ernsthaft, warm und allgemein dasteht, voraussetzt und fordert. Das Vaterland muß lernen, seine Armen als Arme erziehen. Unsere Armen sind in dieser Beziehung eigentlich an sich nichts weniger als arm; sie sind im Gegentheil in vielen unserer Gegenden diesfalls vorzüglich reich. Ihr Reichthum liegt in ihnen selbst; er liegt in ihren geistigen und physischen, einer hohen Bildung fähigen und würdigen Kräften. Die Erziehung des Armen ist desnahen dem Vaterland nicht darum schwer, weil er arm ist, sondern weil wir allgemein keine genugsame Mittel in unserer Mitte organisirt haben, die geeignet sind, ihn zur segensvollen Benutzung der Kräfte und Fertigkeiten, deren er in seiner Lage und in seinen Umständen dringend bedarf, zu bilden und zu erziehen.

Vaterland! Was die Armen für ihre Bildung von dir fordern, ist wenig gegen das, was sie dafür in sich selber besitzen, und sie werden es dir hundertfach wieder vergelten, wenn du es ihnen giebst, wie sie es, und zwar nicht blos für sich, sondern wahrlich auch für dich, wirklich bedürfen. Vaterland! Gieb es ihnen im altschweizerischen Geist mit Weisheit, Liebe und Selbstsuchtlosigkeit. Wahrlich, wahrlich, sie können es dir hundertfach wieder vergelten. Und so leicht als sie es dir wieder vergelten können, Vaterland! so leicht kannst du es ihnen geben. Das Geschenk, das sie von dir fordern, ist im Wesen und im Verhältniß gegen andere, unbedeutendere Dinge, die du thust und wohl zu vermögen glaubst, gar nicht groß. Die Bildungsmittel, deren die Armen bedürfen, kosten nur in dem Grad viel, als sie ihnen auf eine Weise gegeben werden, wie sie sie nicht nöthig haben und wie sie ihnen nicht dienen. Wie sie ihrer bedürfen, dürfen sie ganz gewiß nicht viel kosten; aber sie müssen hingegen vollkommen geeignet seyn, ihnen in dem zu dienen, was sie vorzüglich bedürfen; und das ist auffallend, sie von der Wiege auf zum ununterbrochenen Gebrauche ihrer Kräfte und

Anlagen zu bilden, ihre überlegte und erfinderische Thätigkeit zu beleben und ihnen besonders eine anhaltende Ausharrung, Anstrengung und Gewandtheit in den täglichen Erfordernissen ihres Berufslebens gleichsam zur andern Natur zu machen. Sie müssen fähig seyn, den Armen in dem Sinn reich zu machen, in welchem er allein wahrhaft reich werden kann und wahrhaft reich werden soll. Vaterland! Hiefür habe ich dir ein großes und gewiß wahres und gegründetes Trostwort zu sagen. Die Verminderung der Ressourçen des Zeitpunkts, in welchem der Geldzufluß in unsrer Mitte so groß war, hat in verschiedenen unsrer Fabrikgegenden durch ihre Folgen auf eine auffallende Art bewiesen, in welchem Grad selber unser armes, eigenthumsloses Volk fähig ist, von eingerissener Noth und Entbehrungen Vortheile zur Stärkung seiner selbst und zur Wiederherstellung verlorner, guter Kräfte zu ziehn. In mehrern Gegenden haben die im Leichtsinn der Taumeltage verwöhnten Fabrik-Arbeiter sich mit sehr großer Thätigkeit von neuem auf den Feldbau gelegt und jeden verworfenen Winkel mit vieler Anstrengung urbar zu machen gesucht. Ich habe bestimmte Zeugnisse von Männern, die beträchtliche Fabrikgegenden genau kennen, daß unsre eigenthumslosen Armen in den neuern Zeiten eine Kraft zur Selbsthülfe gezeigt haben, die in ihren Taumeltagen niemand von ihnen hätte erwarten dürfen. In andern bedeutenden Distrikten hat die ganze Masse der Fabrik-Arbeiter, beym vollkommenen Stillstand seiner üblichen Artikel, ebenfalls eine Kraft bewiesen, sich neue Fabrikzweige zuzueignen, die nur durch eine sehr er=

höhte und tief in alles Volk eingewurzelte Gewandtheit in der Erwerbskraft möglich gemacht werden kann und denkbar ist. Vaterland! In diesem Grad ist deine Lage für die Einführung tiefer greifender Bildungsmittel der Erwerbskraft bey deinem Volke selbst auf seinen untersten Punkten vorzüglich gut begründet, und in Rücksicht auf seine Kostspieligkeit durch die Kraft, die im Volke selbst liegt, zum voraus als leichter anzusehn als vielleicht in keinem andern Land. Wenn aber die Mittel, zu diesem Ziel zu gelangen, äußerlich schon nicht kostbar sind, so fordern sie hingegen die reinste und zarteste Belebung des Höchsten und Edelsten, daß das Vaterland in sich selber für sie besitzt. Sie fordern die thätige Mitwirkung der edelsten, weisesten, einflußreichsten und kraftvollsten Männer des Vaterlands. Es ist nur dadurch, daß Männer von solchem Einfluß, solcher Würde und solcher Kraft thätigen Antheil an diesem Gegenstande nehmen, möglich, das National-Interesse der Bürger aller Stände bis auf die niedersten Hütten hinab, dafür anzuregen, zu beleben und zu unterhalten, und so die Detailmittel, die zu diesem Ziele führen, allmählig allgemein in alle brave Wohnstuben des Vaterlands hineinzubringen und ihre dießfälligen Resultate gleichsam von selbst allgemein aus ihnen hervorgehen zu machen. Von dieser Seite ist denn freylich das, was es erfordert, den Bedürfnissen unsrer Lage in dieser Vaterlands-Angelegenheit ein Genüge zu leisten, im Innern ihres Wesens sehr ausgedehnt, allgemein das Höchste ansprechend und in das Niederste eingreifend, indem es nur dadurch möglich ist, ihre Mittel auf die mannigfaltigste Weise, wie es nothwendig ist, anzubahnen, vorzubereiten, einzulenken und durchzusetzen. Sie fordern weniger nichts als eine vielseitige und hie und da große Ueberwindung, ansprechende Abänderung und sogar Umkehrung unsers gewohnten Routinedenkens über die wahren Bedürfnisse der großen Anzahl unsrer eigenthumslosen Individuen, und selber eine vielseitige Abänderung unsrer Routine-Einrichtungen der bestehenden Bildungs- und Versorgungs-Anstalten derselben. Ich darf wohl sagen, wir bedürfen diesfalls in uns selbst eines erneuerten Geistes, eines erneuerten Herzens und sehr veränderter Maßregeln. Wir sind indeß nichts weniger als allein in der Lage, in Rücksicht auf unsere eigenthumslose Volksmenge Maßregeln ergreifen zu müssen, die wesentlich tief in die Menschennatur eingreifen und darum in ihrer Ausführung mit sehr großen Schwierigkeiten verbunden sind. Alle Staaten Europa's, und selber einzelne Städte, Oerter und Gegenden, die durch außerordentliche und schnelle Resultate ihrer Industrie plötzlich zu, mit ihren vorigen Verhältnissen unverhältnißmäßigen, und besonders der Natur-Anlage ihrer Lokalität nicht anpassenden Geldzuflüssen gekommen, sind im nämlichen Fall. Selber England, das durch seine Industrie die wesentlichsten Geldressourcen aller Welttheile auf seine Insel zu leiten im Stande ist, steht mitten in den unermeßlichen Geldresultaten seiner Kunst, seiner Politik und seiner Isolirung, durch die in's Unermeßliche steigende Vermehrung seiner eigenthmuslosen Menschen an einem Vorabend von öffentlichen Landesgefahren, die den unsrigen ganz ähnlich sind, und die Natur des Bedürfnisses, ihnen mit Solidität entgegenzuwirken, wird seine Regierung ganz gewiß dahin führen, Maßregeln für die individuelle Kunstbildung seines Volks durch die Erziehung zu ergreifen, die denjenigen, deren wir in unsern kleinen Lagen und Verhältnissen ebenfalls bedürfen, im Wesen nicht unähnlich seyn können. Das beynahe allgemeine National-Interesse, das dieses Land seit kurzem auf die Erziehung und den Unterricht der Kinder seiner eigenthumslosen Volksmasse zeigt, beweist offenbar, daß seine Einwohner, beydes, die Gefahren ihrer diesfälligen Lage und die Pflichten, die daraus nothwendig erfolgen, tief fühlen, und in der Erhöhung der intellektuellen und Kunstkräfte dieser Volksmenge Mittel zur Sicherheit ihres Staates suchen, zu denen sie auch durch das höchste Raffinement des Mechanismus ihrer Maschinen durchaus nicht zu gelangen vermögen. Das Höchste, das ihre Maschinekraft, wenn das Volk in ihrem Mechanismus ohne die Erhöhung der intellektuellen und Kunstkräfte seiner Individuen gelassen würde, hervorbringen könnte, müßte nothwendiger Weise alle ihre Resultate in Rücksicht auf den öffentlichen Volks- und Landessegen zu Scheinresultaten machen und ihre Segenskräfte in allen Ständen in sich selbst auflösen.

Ich wiederhole, alle Staaten unsers Welttheils leiden in den einzelnen Lokalitäten, in welchen die Fehler dieser Unpassenheit ihrer Industrie mit den Fundamenten des Gleichgewichts der Quellen des positiven Wohlstands aller Stände in Disharmonie stehen, und sind gezwungen, für und in diesen Lokalitäten mit uns die nämlichen Maßregeln zu ergreifen, wenn sie nicht den Großreichthum einzelner Individuen mit Gefährdung des positiven Wohlstandes einer ohne alles Verhältniß größern Anzahl ihrer Mitbürger sorglos und gedankenlos begünstigt sehen wollen; und dieser Gesichtspunkt ist denn wirklich nicht blos in Beziehung des Fabrikreichthums, er ist auch in Beziehung auf alle Arten von Großreichthum, die aus der Begünstigung einzelner Personen und einzelner Stände zum Nachtheil der rechtlichen Genießungen ihrer Mitbürger statt finden können, gleich wahr. Die öffentliche Militär-, Polizey- und selber Justizverwaltung kann durch Mangel an weiser Aufmerksamkeit auf die wesentlichsten Nothbedürfnisse der niedern Volksklassen, den ersten Quellen des ökonomischen und bürgerlichen Wohlstandes des gemeinen Mannes, d. i. dem Individualwohlstand der großen Mehrheit der Landes-Einwohner eines jeden Staates in den verschiedenartigsten Richtungen, aber im Wesen auf eine ganz gleiche Art nachtheilig entgegen wirken. Indeß ist der, vorzüglich vom Handels- und Fabrikstand ausgehende Hochflug des spielenden Haschens nach Großreichthum durch die öffentliche und Privatgefährdung des beruhigt mäßigen Wohlstandes seiner Mitmenschen, der gegenwärtig in unserm Welttheil allgemein so große Unglücke veranlaßt, doch auf dem Punkt, im ganzen Umfang seiner Quellen und Wirkungen erkannt zu werden. Und wenn es je von einem Volke zu hoffen ist, daß es sich bestreben werde, diesem bösen Zeitgeist in seinen Ursachen und Folgen mit Weisheit und Kraft Einhalt zu thun, so sollen wir es billig von den Nachkommen der Männer erwarten, die den großen und allgemeinen Volkswohlstand unsers lieben Vaterlands mit so großer Heldenkraft und mit Darsetzung ihres Leibs, Guts und Bluts gegründet haben. Dabey aber dürfen wir durchaus nicht aus den Augen lassen, daß die diesfällige Weisheit und Edelmuth unsers Vaterlandes mehr aus der Sorgfalt für die Erhöhung und Ausbildung der Erwerbs-Anlagen, Kräfte, Fertigkeiten und Gelegenheiten, als aus der Erhöhung und Vergrößerung des Eigenthums durch gesetzliche Begünstigungen in der Hand derer, die dasselbe jetzt wirklich besitzen, auf Jahrhunderte zu erhalten, hervorgehen muß. Wir bedürfen der freyen und ungehemmten Cirkulation des Geldes, wo es sich noch immer befindet, mehr als je. Alle Gesetze, die den Kredit und mit ihm den freyen Spielraum der Individuen des Handels- und Erwerbstandes schwächen und untergraben, sind den öffentlichen und allgemeinen Bedürfnissen des Vaterlandes gegenwärtig mehr als je nachtheilig. Es ist dringendes Bedürfniß, die grössere Massa unserer Einwohner zu den Grundsätzen, Kräften und Fertigkeiten zu bilden und zu erheben, durch welche es gegenwärtig allein möglich ist und möglich werden kann, mit gegründeter Hoffnung eines guten Erfolgs den Segensgenießungen einer solid begründeten, häuslichen und bürgerlichen Selbstständigkeit entgegenzustreben, und nicht in kunst- und tugendloser Ohnmacht gleichsam außer den Kreis der diesfälligen Möglichkeit geworfen, zu leben und zu sterben.

Die große Massa unserer Armen aber wird und kann sich durchaus nicht von selbst zu diesem Segen erheben.

Sie wird und kann durchaus nicht besser werden, als sie wirklich ist, und sich auch nicht höher heben, als sie wirklich steht, wenn nicht alle Stände unsers Landes sich gemeinsam bestreben, sich in Rücksicht auf die Fundamente des öffentlichen Wohlstandes auch zu höhern und edlern Grundsätzen zu erheben, als diejenigen sind, zu denen uns der Luxus und die Routinegrundsätze, Sitten, Lebensweisen, Ansprüche und Anmaßungen unserer Zeitgedankenlosigkeit und Zeitschwärmerey, mit einem Wort, unserer Zeitselbstsucht in großen Partheyen hingerissen und jetzt, so wie wir sind, dastehen machen.

Edle, liebe Eidgenossen und Brüder! Ich bin in meinen Achtzigerjahren mit dem Gefühl in Eure Mitte getreten, es sey wahrscheinlich das letzte Mal, daß ich diese Versammlung besuche. Ich wollte desnahen von allem, was ich nach meinen Ansichten für das Vaterland zu wünschen nothwendig und würdig fand, in dieser Stunde kein Wort verschweigen. Ich habe unbefangen meinem Herzen freyen Spielraum und meiner Zunge freyen Lauf gelassen. Ich weiß, es sind sehr viele Männer in unserm Vaterland und selber im Kreis unserer Versammlung, die in Rücksicht auf vieles, sehr vieles, wovon ich geredet, richtigere Einsichten und vielseitigere und bedeutendere Erfahrungen als ich haben. Das aber konnte mich nicht hindern, meine, wenn auch einseitigen und beschränkten Ansichten mit der Lebhaftigkeit, Wärme und Zuversicht auszusprechen, die mir die Ueberzeugung eingeflößt, daß ich mit edeln vaterländischen Männern rede, die, wenn sie auch meine

Ansichten nicht mit mir theilen, sondern entgegengesetzt als dem Vaterland für dienlich achten, mir dennoch di Gerechtigkeit widerfahren lassen werden, daß mein Rede aus reinem, vaterländischem Herzen geflossen un mit den Lebensbestrebungen, die ich den Erforschungen der naturgemäßen Begründung des Erziehungs= und Unterrichtswesens des Vaterlandes gewidmet, in Uebereinstimmung stehe.

Tab. II

Tab. III