This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Informazioni su questo libro

Si tratta della copia digitale di un libro che per generazioni è stato conservata negli scaffali di una biblioteca prima di essere digitalizzato da Google nell'ambito del progetto volto a rendere disponibili online i libri di tutto il mondo.

Ha sopravvissuto abbastanza per non essere più protetto dai diritti di copyright e diventare di pubblico dominio. Un libro di pubblico dominio è un libro che non è mai stato protetto dal copyright o i cui termini legali di copyright sono scaduti. La classificazione di un libro come di pubblico dominio può variare da paese a paese. I libri di pubblico dominio sono l'anello di congiunzione con il passato, rappresentano un patrimonio storico, culturale e di conoscenza spesso difficile da scoprire.

Commenti, note e altre annotazioni a margine presenti nel volume originale compariranno in questo file, come testimonianza del lungo viaggio percorso dal libro, dall'editore originale alla biblioteca, per giungere fino a te.

Linee guide per l'utilizzo

Google è orgoglioso di essere il partner delle biblioteche per digitalizzare i materiali di pubblico dominio e renderli universalmente disponibili. I libri di pubblico dominio appartengono al pubblico e noi ne siamo solamente i custodi. Tuttavia questo lavoro è oneroso, pertanto, per poter continuare ad offrire questo servizio abbiamo preso alcune iniziative per impedire l'utilizzo illecito da parte di soggetti commerciali, compresa l'imposizione di restrizioni sull'invio di query automatizzate.

Inoltre ti chiediamo di:

+ *Non fare un uso commerciale di questi file* Abbiamo concepito Google Ricerca Libri per l'uso da parte dei singoli utenti privati e ti chiediamo di utilizzare questi file per uso personale e non a fini commerciali.

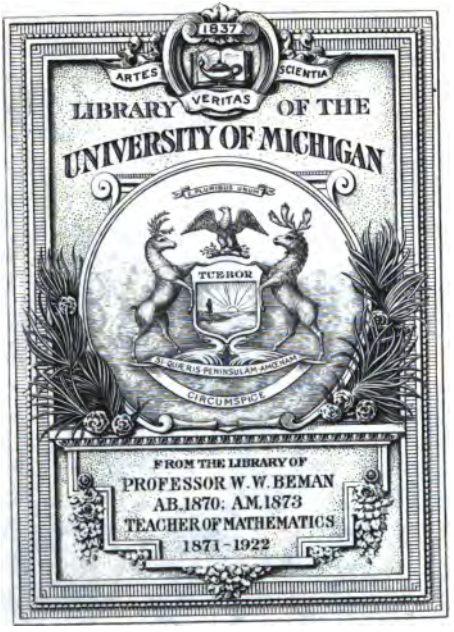
+ *Non inviare query automatizzate* Non inviare a Google query automatizzate di alcun tipo. Se stai effettuando delle ricerche nel campo della traduzione automatica, del riconoscimento ottico dei caratteri (OCR) o in altri campi dove necessiti di utilizzare grandi quantità di testo, ti invitiamo a contattarci. Incoraggiamo l'uso dei materiali di pubblico dominio per questi scopi e potremmo esserti di aiuto.

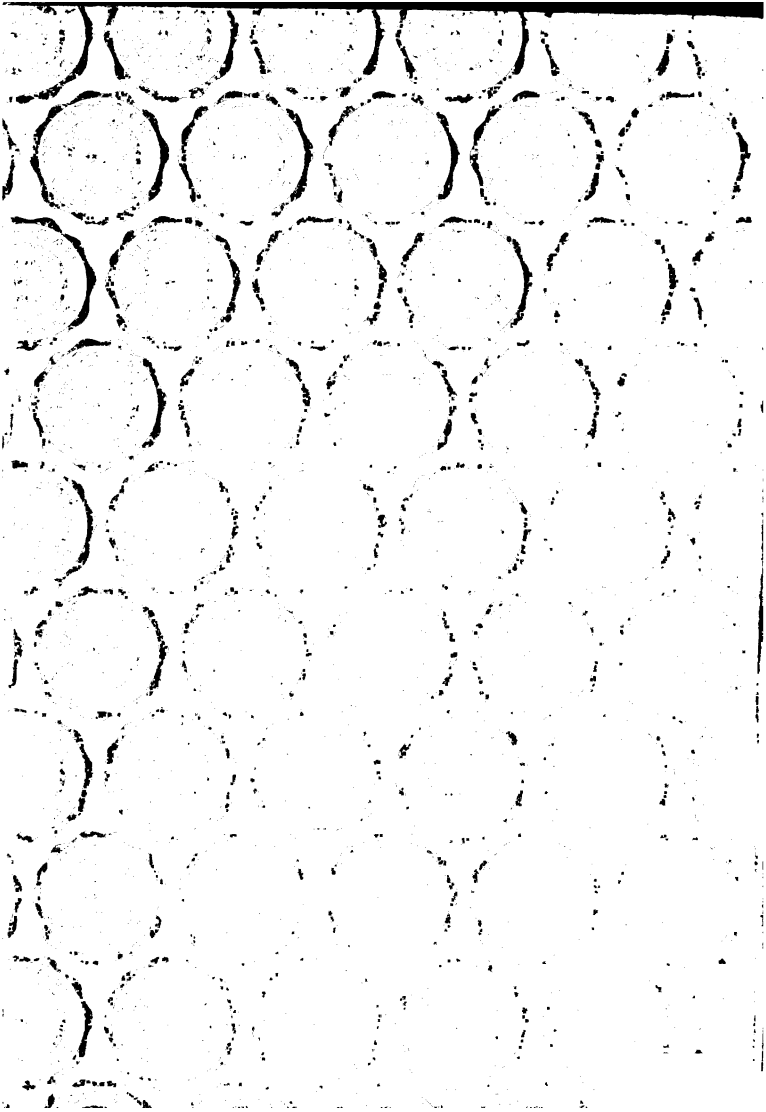
+ *Conserva la filigrana* La "filigrana" (watermark) di Google che compare in ciascun file è essenziale per informare gli utenti su questo progetto e aiutarli a trovare materiali aggiuntivi tramite Google Ricerca Libri. Non rimuoverla.

+ *Fanne un uso legale* Indipendentemente dall'utilizzo che ne farai, ricordati che è tua responsabilità accertati di farne un uso legale. Non dare per scontato che, poiché un libro è di pubblico dominio per gli utenti degli Stati Uniti, sia di pubblico dominio anche per gli utenti di altri paesi. I criteri che stabiliscono se un libro è protetto da copyright variano da Paese a Paese e non possiamo offrire indicazioni se un determinato uso del libro è consentito. Non dare per scontato che poiché un libro compare in Google Ricerca Libri ciò significhi che può essere utilizzato in qualsiasi modo e in qualsiasi Paese del mondo. Le sanzioni per le violazioni del copyright possono essere molto severe.

Informazioni su Google Ricerca Libri

La missione di Google è organizzare le informazioni a livello mondiale e renderle universalmente accessibili e fruibili. Google Ricerca Libri aiuta i lettori a scoprire i libri di tutto il mondo e consente ad autori ed editori di raggiungere un pubblico più ampio. Puoi effettuare una ricerca sul Web nell'intero testo di questo libro da `http://books.google.com`


1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE
FROM THE LIBRARY OF
PROFESSOR W. W. BEMAN
AB. 1870; AM. 1873
TEACHER OF MATHEMATICS
1871-1922



Math. - b.
QA
343
.:.8

MANUALI HOEPLI

TEORIA

DELLE

FUNZIONI ELLITTICHE

PER

ERNESTO PASCAL, 1865-

PROFESSORE NELLA R. UNIVERSITÀ DI PAVIA

S. C. DEL R. ISTITUTO LOMBARDO

ULRICO HOEPLI

EDITORE-LIBRAJO DELLA REAL CASA

MILANO

1896.

W. W. Beman
6-23-1923

PROPRIETÀ LETTERARIA.

Milano, Tip. Bernardoni di C. Rebeschini e C.

18 Sep. 23 EHYT

PREFAZIONE

Le lezioni sulle funzioni ellittiche che raccolgo in questo volume, sono, con qualche modificazione, quelle formanti la prima parte del corso di analisi superiore da me dettato nell'Università di Pavia nell'anno 1894-95.

L'indirizzo che ho voluto dare alla trattazione è questo: io ho voluto fondare tutta la trattazione sulla teoria delle funzioni ϑ di Jacobi ed è in ciò che il mio piano si stacca profondamente da quello degli altri recenti trattatisti, i quali in generale espongono la teoria delle ϑ quasi come un' appendice a quella delle funzioni ellittiche.

Dopo che Jacobi, alla fine dei suoi celebri *Fundamenta nova*, fu condotto alla scoperta delle eleganti funzioni ϑ, egli pensò subito di seguire un procedimento inverso e di fondare la teoria delle funzioni di Legendre sopra quella delle ϑ, e ci restano appunto di Jacobi alcune lezioni, conservateci da Borchardt, (Opere di Jacobi, vol. I, pagina 497; *Theorie der elliptischen Functionen aus*

428067

den eigenschaften der Thetareihen abgeleitet) in cui si sviluppa ampiamente ed elegantemente questo concetto.

Lo scopo che mi sono proposto io si può compendiare dicendo che, prendendo le mosse appunto da questa *Memoria* di Jacobi, ho voluto proseguirla sino a comprendere le funzioni σ, e la funzione p, e tutte le formole relative, le quali rappresentano le più recenti novità nel campo delle funzioni ellittiche.

In alcuni punti naturalmente, il passaggio per la via che mi sono imposta, mi ha presentato qualche non lieve difficoltà, che io ho cercato di superare nel modo più semplice che mi è riuscito di trovare; ho dovuto perciò dare un' estensione, maggiore di quanto ordinariamente non si faccia, alla ricerca delle relazioni fra le ϑ; e mi si è presentata come necessaria la ricerca di certe semplici relazioni fra le derivate delle ϑ per argomento zero, relazioni sulle quali non era, credo, stata ancora fissata l'attenzione.

Trattando della operazione indicata da Halphen colla lettera D (*Fonct. ellipt.* vol. I, pag. 294) ho voluto rintracciarne le formole corrispondenti per una via quasi inversa a quella seguìta dall' Halphen, perchè non mi pare un procedimento abbastanza elegante quello per il quale, p. es. il risultato dell' operazione D sui moduli debba ricavarsi dalle formole che danno i risultati di D sulle funzioni $p(u)$ e $\zeta(u)$; mi pare invece più naturale

cercare di risolvere *direttamente* il primo problema, e non seguire la via, direi quasi, contorta, tenuta da quell'Autore.

Non voglio infine tralasciare di notare che i procedimenti da me seguìti nei due paragrafi trattanti delle funzioni razionali di p e p' sono presi, quasi senza modificazioni, dalla citata opera di Halphen.

Pavia, ottobre del 1895.

ERNESTO PASCAL.

INDICE

CAPITOLO I.

LE FUNZIONI ϑ DI JACOBI.

§ 1. La serie ϑ fondamentale . . . . . Pag. 1
§ 2. Introduzione delle quattro funzioni ϑ. „ 3
§ 3. Riepilogo delle formole di definizione delle funzioni ϑ. Passaggio dall'una all'altra di esse . . . . . „ 8
§ 4. Equazioni differenziali cui soddisfanno le funzioni ϑ . . . . . „ 13
§ 5. Formola fondamentale di Jacobi . . „ 14
§ 6. Prima categoria di formole che si ricavano dalla formola fondamentale. „ 20
§ 7. Seconda categoria di formole che si ricavano dalla formola fondamentale. Formole in cui entrano tre argomenti indipendenti . . . . . „ 24
§ 8. Terza categoria. Formole in cui entrano due argomenti indipendenti . „ 25
§ 9. Quarta categoria. Formole in cui entra un solo argomento. Relazioni algebriche fra le ϑ . . . . . „ 28

§ 10. Quinta categoria. Relazioni algebriche fra i valori delle ϑ pari e della derivata di ϑ_1 per argomento zero. Pag. 30
§ 11. Equazione a tre termini per la funzione dispari ϑ_1. . . . . „ 33
§ 12. Le derivate dei rapporti delle funzioni ϑ . . . . . „ 38
§ 13. Derivate logaritmiche delle funzioni ϑ. „ 40
§ 14. Alcune formole relative alle derivate delle ϑ per argomento zero . . . „ 42
§ 15. Punti-zero delle funzioni ϑ . . . . „ 46
§ 16. Sviluppo delle funzioni ϑ in prodotti infiniti a due indici . . . . . „ 50

CAPITOLO II.

LE FUNZIONI ELLITTICHE DI LEGENDRE.

§ 1. Introduzione della funzione amplitudine di Jacobi, e dei moduli k, k' di Legendre . . . . . Pag. 52
§ 2. Teorema d'addizione per le funzioni ellittiche. . . . . „ 55
§ 3. Derivate delle funzioni ellittiche . . „ 56
§ 4. Formola di inversione. Introduzione dell'integrale ellittico di 1.ª specie. Integrale completo. . . . . „ 57
§ 5. Espressione del modulo q mediante k. „ 63
§ 6. Periodicità delle funzioni di Legendre „ 70
§ 7. Zeri e infiniti delle funzioni di Legendre . . . . . „ 73
§ 8. Degenerazione delle funzioni ellittiche di Legendre . . . . . „ 74

CAPITOLO III.

LE QUATTRO FUNZIONI σ DI WEIERSTRASS.

§ 1. Costruzione della funzione σ dispari. Pag. 78
§ 2. Introduzione delle tre σ pari . . . „ 82
§ 3. Formole di periodicità delle funzioni σ „ 85
§ 4. Formole relative al caso in cui l'argomento si accresce di semiperiodi „ 89
§ 5. Formole varie relative alle σ, ricavate da formole per le ϑ . . . . „ 91
§ 6. Equazione a tre termini per le funzioni σ dispari e formola d'addizione per la stessa funzione . . . „ 92
§ 7. Introduzione delle quantità e_1 e_2 e_3, degli invarianti g_2 g_3 e del descriminante Δ . . . . . „ 95
§ 8. Relazioni algebriche fra le quattro σ. Relazioni in cui compariscono due argomenti. Formole d'addizione per i rapporti delle σ . . . . . „ 101
§ 9. Relazioni fra le funzioni di Legendre e le funzioni σ . . . . . „ 103
§ 10. Omogeneità delle ϑ, delle σ, e dei moduli . . . . . „ ivi
§ 11. Punti-zero delle funzioni σ . . . . „ 106
§ 12. Scomposizione delle σ in prodotti infiniti doppii . . . . . „ ivi
§ 13. Degenerazione delle funzioni σ . . „ 107
§ 14. Studio dell'operazione D. Sua trasformazione . . . . . „ 109

§ 15. Derivate dei moduli trascendenti di 1.ª e 2.ª specie rispetto ai moduli algebrici, e dei moduli di 2.ª specie rispetto a quelli di 1.ª specie . . . Pag. 118
§ 16. Derivate del discriminante rispetto ai moduli trascendenti di 1.ª specie. Espressione notevole dei moduli trascendenti di 2.ª specie . . . . . „ 121
§ 17. Equazione a derivate parziali cui soddisfa la funzione σ dispari. . . . „ 122
§ 18. Equazioni a derivate parziali cui soddisfanno le tre funzioni σ pari . . „ 126
§ 19. Sviluppo in serie delle quattro funzioni σ; formole ricorrenti. . . . „ 128

CAPITOLO IV.

LA FUNZIONE $p(u)$ DI WEIERSTRASS.

§ 1. Introduzione della funzione $p(u)$ e sua biperiodicità . . . . . Pag. 133
§ 2. Espressione della p mediante le ϑ . „ 135
§ 3. Valori di $p(\omega)$, $p(\omega')$, $p(\omega'')$. . . . „ 137
§ 4. Relazione fra la funzione $p(u)$ e la funzione di Legendre sn v. . . . „ 141
§ 5. Espressione della derivata $p'(u)$ mediante la $p(u)$. Inversione. . . . „ 142
§ 6. Teorema d'addizione per la funzione $p(u)$. . . . . „ 147
§ 7. Addizione di semiperiodi all'argomento della funzione $p(u)$. . . . „ 154
§ 8. Infiniti delle funzioni $p(u)$, $p'(u)$. Omogeneità. . . . . „ 155
§ 9. Sviluppo di $p(u)$ in serie nell'intorno del punto $u=0$ . . . . . „ 156

§ 10. La funzione $p(u)$ sviluppata in una serie doppia. Conseguenze aritmetiche . . . . . Pag. 163
§ 11. Casi particolari della funzione $p(u)$. Sua degenerazione. . . . . „ 165
§ 12. Le funzioni razionali di p e p' . . „ 170
§ 13. Decomposizione delle funzioni razionali di p, p' in quozienti di prodotti di σ . . . . . » 174
§ 14. Trasformazione delle ϑ, delle σ e della p per la trasformazione lineare dei periodi. Differenza fondamentale fra le funzioni ϑ e le σ. . . „ 191

CAPITOLO V.

INTEGRALI ELLITTICI DI 1.ª, 2.ª. 3.ª SPECIE.

§ 1. Considerazioni generali sugli integrali ellittici . . . . . Pag. 192
§ 2. Distinzione degli integrali in quelli di 1.ª, 2.ª e 3.ª specie . . . . . „ 197
§ 3. Forma normale di Weierstrass. Corrispondente espressione dell' integrale ellittico generale. Trasformazione di una forma ellittica in quella normale. . . . . „ 200
§ 4. Gli integrali ellittici di 2.ª specie . „ 207
§ 5. Gli integrali ellittici di 3.ª specie. L'integrale Q di Klein . . . . . „ 210

CAPITOLO VI.

ESPRESSIONI DELLE FUNZIONI ELLITTICHE. QUANDO SI PRENDE PER FORMA FONDAMENTALE UNA BINARIA BIQUADRATICA QUALUNQUE.

§ 1. Espressione rimarchevole della σ dispari mediante l'integrale Q . . . Pag. 217
§ 2. Espressioni delle σ pari mediante Q „ 219
§ 3. Espressione di u, p, Q, riferite ad una binaria biquadratica qualunque. . „ 221
§ 4. Espressioni delle σ riferite alla biquadratica generale . . . . . „ 226

CAPITOLO I.

LE FUNZIONI ϑ DI JACOBI.

§ 1. **La serie ϑ fondamentale.** — Consideriamo la serie seguente

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} e^{a\nu^2+2b\nu+c}$$

dove a, b, c sono dei numeri qualunque, ν è un numero *intero*, e il sommatorio deve estendersi per tutti i numeri ν interi positivi e negativi.

È chiaro prima di tutto che tutti i termini di questa serie hanno per fattore comune e^c, e quindi basterà considerare l'altra serie

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} e^{a\nu^2+2b\nu}$$

che è la stessa di prima, ma divisa per un fattore costante.

La prima quistione che ci si presenta è quella che si riferisce alle condizioni necessarie e sufficienti per la convergenza assoluta della serie stessa.

È facile dimostrare che condizione necessaria e sufficiente per la convergenza assoluta della serie data è che: *il numero* a *abbia negativa la sua parte reale.*

Poniamo infatti

$$a = a_1 + i\,a_2$$

$$b = b_1 + i\,b_2.$$

Il termine generale della serie potrà allora scriversi

$$e^{(a_1+ia_2)\nu^2+2(b_1+ib_2)\nu} =$$

$$= e^{a_1\nu^2+2b_1\nu}\,[\cos(a_2\nu^2 + 2\,b_2\nu) + i\,\mathrm{sen}\,(a_2\nu^2 + 2\,b_2\nu)]$$

il cui modulo è

$$e^{a_1\nu^2+2b_1\nu}.$$

Ora se a_1 è positivo, allora per $\nu = \pm\infty$ questo modulo tende a infinito, e quindi il modulo del termine generale della serie tende a infinito; ciò basta per conchiudere che *se* a_1 *è positivo* la serie non sarà convergente. Perchè il modulo del termine generale possa tendere a zero, come deve accadere perchè la serie sia convergente, deve dunque necessariamente essere a_1 negativo.

D'altra parte si può dimostrare che questa è condizione sufficiente. Infatti formiamo il rapporto di un termine al precedente; dobbiamo distinguere due casi secondochè si considera un ν positivo ovvero un ν negativo.

Nel primo caso il modulo del rapporto di un termine al precedente è

$$e^{a_1\nu^2+2b_1\nu} : e^{a_1(\nu-1)^2+2b_1(\nu-1)} = e^{a_1(2\nu-1)+2b_1}$$

e per $\nu = +\infty$ questo rapporto tende a zero *se a_1 è negativo;* quindi, come si sa dalla teoria delle serie, si può subito dedurre la convergenza assoluta della serie formata coi termini da $\nu = 0$ sino a $\nu = +\infty$.

Analogamente considerando l'altra serie coi termini da $\nu = -1$ sino a $\nu = -\infty$, si vede che in essa il modulo del rapporto di un termine al precedente è

$$e^{a_1\nu^2-2b_1\nu} : e^{a_1(\nu-1)^2-2b_1(\nu-1)} = e^{a_1(2\nu-1)-2b_1}$$

e se a_1 è negativo questo rapporto tende a zero.

Si deduce quindi la convergenza di tutta la serie in esame, e una tal convergenza è *assoluta* perchè dalla dimostrazione risulta che è convergente la serie dei moduli.

§ 2. **Introduzione delle quattro funzioni ϑ.** — Nella serie del paragrafo precedente poniamo

$$a = \log q$$

$$b = x\,i.$$

Dovendo a avere la sua parte reale *negativa*, se ne ricava che *q deve avere un modulo compreso fra 0 e 1.* La serie diventa

$$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} q^{\nu^2}\, e^{2xi\nu}$$

la quale, per le cose dette, è assolutamente convergente per qualunque x, se il modulo di q è compreso fra 0 e 1. Noi vogliamo considerare la somma di questa serie come funzione di x.

Essendo la serie assolutamente convergente, la sua somma sarà indipendente dall'ordine dei termini; dunque noi potremo raccogliere a due a due i vari termini, e trasformarla facilmente in un'altra di forma trigonometrica. In effetti se raccogliamo i due termini che corrispondono a due valori di ν eguali ma di segno contrario, è chiaro, per le note relazioni fra la funzione esponenziale e le funzioni trigonometriche, che tali due termini formano

$$2\, q^{\nu^2} \cos 2\, \nu\, x$$

e quindi la serie diventa

$$1 + 2 \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} q^{\nu^2} \cos 2\, \nu\, x.$$

Questa serie considerata come funzione di x la chiameremo $\vartheta_3(x)$, per distinguerla da altre tre funzioni ϑ che si ricavano da essa e che ora introdurremo.

Nella serie

$$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} q^{\nu^2} e^{2\nu x i}$$

facciamo il seguente cangiamento. Poniamo in luogo di x, $x + \frac{1}{2}\pi$.

Allora si ha:

$$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} q^{\nu^2} e^{2\nu x i} e^{\nu \pi i}.$$

Secondochè ν è pari o dispari, l'ultimo fattore $e^{\nu \pi i}$ è eguale a $+1$ ovvero a -1; quindi facendo per questa nuova serie gli stessi cangiamenti fatti nell'antica, si vede che essa non è altro che la stessa di prima, ma coi segni alternati; essa cioè è:

$$1 + 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} q^{\nu^2} \cos 2 \nu x$$

che chiameremo $\vartheta(x)$. E dalle considerazioni fatte risulta anche subito che:

$$\vartheta_3\left(x + \frac{1}{2}\pi\right) = \vartheta(x).$$

Nella stessa serie $\vartheta_3(x)$ sopra considerata poniamo in luogo di x:

$$x + \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2} i \log q.$$

Essa diventa:

$$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} q^{\nu^2} e^{2\nu x i} e^{\nu \pi i} e^{-\nu \log q} =$$

$$= \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} (-1)^{\nu} q^{\nu^2 - \nu} e^{2\nu x i}.$$

Questa serie la porremo sotto la seguente forma:

$$= - i\, q^{-\frac{1}{4}} e^{xi} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} (-1)^{\nu}\, i\, q^{\frac{1}{4}(2\nu-1)^2} e^{(2\nu-1)xi}$$

e raccogliendo, come sopra, il termine corrispondente all'indice ν con quello corrispondente all'indice $-\nu+1$, i quali termini hanno lo stesso coefficiente ma col segno contrario, e ricordando che

$$i\,[e^{(2\nu-1)xi} - e^{-(2\nu-1)xi}] = -2 \operatorname{sen}(2\nu-1)\,x$$

si ha che l'espressione di sopra diventa

$$-i\, q^{-\frac{1}{4}} e^{xi}\, 2 \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} (-1)^{\nu-1}\, q^{\frac{1}{4}(2\nu-1)^2} \operatorname{sen}(2\nu-1)\,x$$

che noi porremo eguale a

$$= -i\, q^{-\frac{1}{4}} e^{xi}\, \vartheta_1(x).$$

Si ha quindi

$$\vartheta_3\left(x + \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2} i \log q\right) = -i\, q^{-\frac{1}{4}} e^{xi}\, \vartheta_1(x).$$

Seguitando collo stesso procedimento troveremo finalmente l'ultima funzione ϑ. Nella ϑ_3 al solito porremo in luogo di x,

$$x + \frac{1}{2} i \log q.$$

Si ha allora

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} q^{\nu^2} e^{2\nu x i} e^{-\nu \log q} =$$

$$= \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} q^{\nu^2-\nu} e^{2\nu x i}$$

che noi scriveremo sotto la forma

$$q^{-\frac{1}{4}} e^{xi} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} q^{\frac{1}{4}(2\nu-1)^2} e^{(2\nu-1)xi}.$$

Raccogliendo al solito i termini corrispondenti all'indice ν e all'indice $-\nu+1$, si ha:

$$q^{-\frac{1}{4}} e^{xi}\, 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} q^{\frac{1}{4}(2\nu-1)^2} \cos(2\nu-1)x$$

che porremo eguale a

$$q^{-\frac{1}{4}} e^{xi}\, \vartheta_2(x)$$

per modo che si ha la relazione

$$\vartheta_3\left(x + \frac{1}{2} i \log q\right) = q^{-\frac{1}{4}} e^{xi}\, \vartheta_2(x).$$

Come si vede dunque i valori delle altre tre funzioni ϑ ϑ_1 ϑ_2 non sono altro, a meno di fattori, che quelli della funzione ϑ_3 quando all'argomento x si aggiungono certe quantità determinate.

§ 3. **Riepilogo delle formole di definizione delle funzioni ϑ. Passaggio dall'una all'altra di esse.** — Per le cose dette nel paragrafo precedente le quattro funzioni ϑ restano definite dalle seguenti formole

$$\vartheta(x) = 1 + 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu q^{\nu^2} \cos 2\nu x =$$

$$= \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} (-1)^\nu q^{\nu^2} e^{2\nu x i}$$

$$\vartheta_1(x) = 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu-1} q^{\frac{1}{4}(2\nu-1)^2} \operatorname{sen}(2\nu-1)x =$$

$$= \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} (-1)^\nu i\, q^{\frac{1}{4}(2\nu-1)^2} e^{(2\nu-1)xi}$$

$$\vartheta_2(x) = 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} q^{\frac{1}{4}(2\nu-1)^2} \cos(2\nu-1)x =$$

$$= \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} q^{\frac{1}{4}(2\nu-1)^2} e^{(2\nu-1)xi}$$

$$\vartheta_3(x) = 1 + 2 \sum_{\nu=1}^{+\infty} q^{\nu^2} \cos 2\nu x =$$

$$= \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} q^{\nu^2} e^{2\nu x i}.$$

Ogni funzione ha una doppia espressione, o mediante gli esponenziali, o mediante le funzioni trigonometriche.

Una prima osservazione che ci si presenta è questa: la funzione $\vartheta_1(x)$ è evidentemente una funzione *dispari*, cioè muta di segno ma non di valore assoluto mutando l'argomento x in $-x$; le altre funzioni invece, mutando x in $-x$ non mutano nè di segno, nè di valore, e quindi sono funzioni *pari*.

Sono quindi funzioni dispari le derivate di ordine dispari di ϑ, ϑ_2, ϑ_3; e funzioni pari le derivate di ordine pari delle stesse; mentre per la funzione ϑ_1 si verifica il contrario; inoltre la ϑ_1 è zero per argomento zero, e anche zero sono le derivate di ordine dispari delle ϑ, ϑ_2, ϑ_3, per argomento zero.

Una seconda osservazione importante è che queste funzioni, *salvo dei fattori*, restano tutte inalterate aumentando o diminuendo l'argomento di due quantità che avranno poi una grande importanza in tutta la teoria, e che sono le quantità

$$\pi, \quad i \log q.$$

Queste due quantità le chiameremo *periodi*.

Per dimostrare ciò incominceremo coll'esaminare come si trasformano le une nelle altre quelle quattro funzioni, quando l'argomento si aumenta o diminuisce dei *semiperiodi*.

$$\frac{1}{2}\pi, \quad \frac{1}{2} i \log q.$$

Già nel paragrafo precedente abbiamo visto che la $\vartheta_3(x)$ diventa, a meno di fattori, ciascuna delle altre ϑ, quando l'argomento si accresce di tali quantità separatamente o contemporaneamente.

Ora possiamo far vedere che una tal proprietà è generale per ciascuna delle quattro funzioni.

Consideriamo per es., la funzione $\vartheta(x)$.

Aumentando l'argomento di $\frac{1}{2}\pi$, si ha

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^\nu q^{\nu^2} e^{2\nu x i} e^{\nu \pi i}$$

ed essendo

$$e^{\nu \pi i} = (-1)^\nu$$

si ottiene esattamente la funzione $\vartheta_3(x)$.

Aumentando l'argomento di $\frac{1}{2} i \log q$ si ha

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^\nu q^{\nu^2} e^{2\nu x i} e^{-\nu \log q} =$$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^\nu q^{\nu^2 - \nu} e^{2\nu x i} =$$

$$= -i q^{-\frac{1}{4}} e^{xi} \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^\nu i q^{\frac{1}{4}(2\nu-1)^2} e^{(2\nu-1)xi} =$$

$$= -i q^{-\frac{1}{4}} e^{xi} \vartheta_1(x).$$

Finalmente aumentando l'argomento di

$$\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2} i \log q$$

si ha nella stessa maniera

$$q^{-\frac{1}{4}} e^{xi} \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{\frac{1}{4}(2\nu-1)^2} e^{(2\nu-1)xi} =$$

$$= q^{-\frac{1}{4}} e^{xi} \vartheta_2 (x).$$

Lo stesso potrebbe verificarsi per le altre due funzioni, per modo che si ha infine tutto il complesso di formole racchiuse nella seguente tabella

$$\vartheta \left(x \pm \frac{1}{2}\pi\right) = \vartheta_3 (x)$$

$$\vartheta_1 \left(x \pm \frac{1}{2}\pi\right) = \pm \vartheta_2 (x)$$

$$\vartheta_2 \left(x \pm \frac{1}{2}\pi\right) = \mp \vartheta_1 (x)$$

$$\vartheta_3 \left(x \pm \frac{1}{2}\pi\right) = \vartheta (x)$$

$$\vartheta \left(x \pm \frac{1}{2} i \log q\right) = \mp i q^{-\frac{1}{4}} e^{\pm xi} \vartheta_1 (x)$$

$$\vartheta_1 \left(x \pm \frac{1}{2} i \log q\right) = \mp i q^{-\frac{1}{4}} e^{\pm xi} \vartheta (x)$$

$$\vartheta_2 \left(x \pm \frac{1}{2} i \log q\right) = + q^{-\frac{1}{4}} e^{\pm xi} \vartheta_3 (x)$$

$$\vartheta_3 \left(x \pm \frac{1}{2} i \log q\right) = + q^{-\frac{1}{4}} e^{\pm xi} \vartheta_2 (x).$$

Mediante queste formole possono subito trovarsi quelle per l'aumento dell'argomento di

$$\pm \frac{1}{2}\pi \pm \frac{1}{2} i \log q.$$

Così p. es. si trovano subito le altre

$$\vartheta\left(x + \frac{1}{2}\pi \pm \frac{1}{2} i \log q\right) = q^{-\frac{1}{4}} e^{\pm xi} \vartheta_2(x)$$

$$\vartheta_1\left(x + \frac{1}{2}\pi \pm \frac{1}{2} i \log q\right) = q^{-\frac{1}{4}} e^{\pm xi} \vartheta_3(x)$$

$$\vartheta_2\left(x + \frac{1}{2}\pi \pm \frac{1}{2} i \log q\right) = \pm i\, q^{-\frac{1}{4}} e^{\pm xi} \vartheta(x)$$

$$\vartheta_3\left(x + \frac{1}{2}\pi \pm \frac{1}{2} i \log q\right) = \mp i\, q^{-\frac{1}{4}} e^{\pm xi} \vartheta_1(x).$$

Da queste formole appare questo, che aumentando o diminuendo l'argomento del semiperiodo $\frac{1}{2}\pi$, avviene fra le quattro ϑ una permutazione formata con due trasposizioni, cioè si invertono ϑ e ϑ_3 fra loro e ϑ_1 e ϑ_2 fra loro. Così aumentando o diminuendo l'argomento di $\frac{1}{2} i \log q$ si invertono invece ϑ e ϑ_1 fra loro e ϑ_2 e ϑ_3 fra loro.

Di qui si ricava che se aggiungiamo all'argomento un intero periodo invece di un semiperiodo, allora, a meno di un fattore, ciascuna delle ϑ ri-

torna in sè stessa. Le formole corrispondenti si possono facilmente ricavare, riapplicando due volte di seguito le formole precedenti.

Si trova così la seguente tabella:

$$\vartheta(x \pm \pi) = \vartheta(x)$$

$$\vartheta_1(x \pm \pi) = -\vartheta_1(x)$$

$$\vartheta_2(x \pm \pi) = -\vartheta_2(x)$$

$$\vartheta_3(x \pm \pi) = \vartheta_3(x)$$

$$\vartheta(x \pm i \log q) = -q^{-1} e^{\pm 2xi} \vartheta(x)$$

$$\vartheta_1(x \pm i \log q) = -q^{-1} e^{\pm 2xi} \vartheta_1(x)$$

$$\vartheta_2(x \pm i \log q) = +q^{-1} e^{\pm 2xi} \vartheta_2(x)$$

$$\vartheta_3(x \pm i \log q) = +q^{-1} e^{\pm 2xi} \vartheta_3(x)$$

§ 4. **Equazioni differenziali cui soddisfanno le funzioni ϑ.** — Le serie ϑ e le loro derivate rispetto ad x, considerate come funzioni dell'argomento x e del modulo q sono gli integrali di una semplice equazione a derivate parziali, che ora ci proponiamo di trovare.

Deriviamo p. es. rispetto ad x la serie $\vartheta_3(x)$. Si ha

$$\frac{\partial \vartheta_3(x, q)}{\partial x} = 2i \sum_{-\infty}^{+\infty} \nu q^{\nu^2} e^{2\nu x i}$$

$$\frac{\partial^2 \vartheta_3(x, q)}{\partial x^2} = -4 \sum_{-\infty}^{+\infty} \nu^2 q^{\nu^2} e^{2\nu x i}.$$

Deriviamo invece rispetto a $\log q$, cioè deriviamo rispetto a q e poi moltiplichiamo per q stesso.

Si ha

$$\frac{\partial \vartheta_3(x, q)}{\partial (\log q)} = \frac{\partial \vartheta_3(x_3 q)}{\partial q} q = \sum_{-\infty}^{+\infty} \nu^2 q^{\nu^2} e^{2\nu x i}.$$

A meno di un fattore numerico, si ha cioè lo stesso risultato di prima; quindi possiamo conchiudere che la ϑ_3 (e così tutte le altre ϑ) soddisfa all'equazione differenziale

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} = -4 \frac{\partial \vartheta}{\partial (\log q)}.$$

A quest'equazione differenziale non solo soddisfanno le quattro ϑ, ma anche tutte le loro derivate rispetto ad x. Infatti per la forma speciale che ha quest'equazione differenziale si vede che la questione si riduce a osservare che la derivata seconda di una ϑ rispetto ad x e a $(\log q)$, è indipendente dall'ordine delle derivazioni, e quindi che derivando rispetto ad x ambo i membri di quella equazione differenziale, si può scrivere

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial \vartheta}{d x}\right) = -4 \frac{\partial}{\partial (\log q)}\left(\frac{\partial \vartheta}{d x}\right)$$

formola che dimostra l'assunto.

§ 5. **Formola fondamentale di Jacobi.** — Per passare alle relazioni algebriche esistenti fa le ϑ, Ja-

cobi comincia a stabilire una formola generale donde poi si ricavano tutte le altre. Noi vogliamo qui esporre il procedimento di Jacobi che è pieno di quell'eleganza classica che contraddistingue le opere di quel matematico.

Si premette la seguente considerazione. Si abbiano quattro quantità a_1, a_2, a_3, a_4, e altre quattro legate alle prime dalle relazioni

$$\left.\begin{aligned} a_1' &= \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) \\ a_2' &= \frac{1}{2}(a_1 + a_2 - a_3 - a_4) \\ a_3' &= \frac{1}{2}(a_1 - a_2 + a_3 - a_4) \\ a_4' &= \frac{1}{2}(a_1 - a_2 - a_3 + a_4) \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

È facile verificare che

$$\left.\begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 &= a_1'^2 + a_2'^2 + a_3'^2 + a_4'^2 \\ a_1 + a_2 &= a_1' + a_2' \\ a_1 + a_3 &= a_1' + a_3' \\ a_1 + a_4 &= a_1' + a_4' \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Se a_1, a_2, a_3, a_4 sono tutti numeri pari, ovvero tutti numeri dispari, allora dalle (1) si vede che a_1', a_2', a_3', a_4' saranno anche numeri *interi*, e

dalle (2) si vede che gli stessi saranno tutti pari se a_1' è pari; ovvero tutti dispari se a_1' è dispari.

Deduciamo dunque che il sistema dei quattro numeri o tutti pari o tutti dispari, mediante l'indicata trasformazione, si riduce ad un analogo sistema di quattro numeri o tutti pari o tutti dispari.

Dalle (1) si hanno le formole inverse

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2}(a_1' + a_2' + a_3' + a_4') \\ a_2 &= \frac{1}{2}(a_1' + a_2' - a_3' - a_4') \\ a_3 &= \frac{1}{2}(a_1' - a_2' + a_3' - a_4') \\ a_4 &= \frac{1}{2}(a_1' - a_2' - a_3' + a_4') \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Onde possiamo dire che i due sistemi (a_1, a_2, a_3, a_4), (a_1', a_1', a_3', a_4') stanno fra loro in perfetta reciprocità, cioè dal secondo di essi, colla stessa trasformazione si tornerebbe al primo.

Tutti i possibili sistemi di quattro numeri tutti pari, e di quattro numeri tutti dispari, si possono perciò ordinare in coppie, in maniera che con una trasformazione del genere di quella sopra indicata, si passa dall'uno all'altro dei due sistemi di una medesima coppia. Per modo che se applichiamo la trasformazione di sopra a tutti i possibili sistemi di quattro numeri pari e di quattro numeri dispari, otteniamo daccapo gli stessi

sistemi, in un ordine diverso, nessuno escluso, connessuno contato più che una volta.

Ciò premesso passiamo alla dimostrazione della formola fondamentale di Jacobi.

Possiamo scrivere le due serie ϑ_3 e ϑ_2 nel seguente modo:

$$\vartheta_3(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{\nu^2 \log q + 2\nu x i}$$

$$= e^{\frac{1}{\log q} x^2} \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{1}{\log q}\left[(2\nu)\frac{1}{2}\log q + x i\right]^2} \qquad (4)$$

$$\vartheta_2(x) = e^{\frac{1}{\log q} x^2} \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{1}{\log q}\left[(2\nu+1)\frac{1}{2}\log q + x i\right]^2}$$

Sotto questa forma si vede che le due serie ϑ_3 ϑ_2 si esprimono in maniera assai simile, solo che la prima di esse è un sommatorio che si deve estendere a tutti i numeri pari (2ν), e il secondo è invece un simile sommatorio che si deve estendere a tutti i numeri dispari ($2\nu + 1$).

Indichiamo con x_1 x_2 x_3 x_4 quattro argomenti e formiamo i prodotti:

$$\vartheta_3(x_1)\,\vartheta_3(x_2)\,\vartheta_3(x_3)\,\vartheta_3(x_4) =$$

$$= e^{\frac{1}{\log q}(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)} \sum_{\nu} e^{\frac{L}{\log q}}$$

$$\vartheta_2(x_1)\,\vartheta_2(x_2)\,\vartheta_2(x_3)\,\vartheta_2(x_4) =$$

$$= e^{\frac{1}{\log q}(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)} \sum_{\nu} e^{\frac{M}{\log q}}$$

dove

$$L = \sum_{k=1}^{4} \left[2\,\nu_k \frac{1}{2} \log q + x_k\, i \right]^2$$

$$M = \sum_{k=1}^{4} \left[(2\,\nu_k + 1) \frac{1}{2} \log q + x_k\, i \right]^2 .$$

Sommando si ha

$$\prod_{k=1}^{4} \vartheta_3 (x_k) + \prod_{k=1}^{4} \vartheta_2 (x_k) =$$

$$= e^{\frac{1}{\log q}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)} \sum e^{\frac{N}{\log q}} \qquad (5)$$

dove

$$N = \sum_{k=1}^{4} \left[a_k \frac{1}{2} \log q + x_k\, i \right]^2$$

e $a_1\, a_2\, a_3\, a_4$ rappresentano quattro numeri interi *o tutti pari ovvero tutti dispari*, e il sommatorio nella formola (5) bisogna estenderlo a tutti i possibili sistemi di quattro siffatti numeri.

Consideriamo ora quattro altri argomenti

$$x_1'\; x_2'\; x_3'\; x_4'$$

legati ai primitivi argomenti

$$x_1\; x_2\; x_3\; x_4$$

da relazioni perfettamente simili a quelle svilup-

pate sul principio di questo paragrafo, e consideriamo inoltre altri quattro numeri interi

$$a_1' \; a_2' \; a_3' \; a_4'$$

legati agli $a_1 \; a_2 \; a_3 \; a_4$ dalle analoghe relazioni.

Si può subito verificare che la espressione N resta trasformata in un'altra della medesima forma dove però ci sono le lettere cogli apici in luogo delle omonime senza apici, e ciò perchè la somma dei quadrati delle a resta trasformata nella somma dei quadrati delle a'; così quella delle x^2 resta trasformata in quella delle x'^2; e la somma dei prodotti delle a_k colle x_k resta trasformata nella somma dei prodotti delle a_k' colle x_k'. Si vede così che il secondo membro dell'espressione (5) è perfettamente eguale a quello che da esso si ricava sostituendo alle a e alle x, le a' e le x' purchè queste quantità sieno legate alle prime dalle note relazioni. Possiamo quindi dedurre che anche il primo membro della formola (5) è eguale a quello che da esso si ricava coi cangiamenti indicati, cioè si ha la formola fondamentale di Jacobi:

$$\prod_{k=1}^{4} \vartheta_2(x_k) + \prod_{k=1}^{4} \vartheta_3(x_k) =$$

$$= \prod_{k=1}^{4} \vartheta_2(x_k') + \prod_{k=1}^{4} \vartheta_3(x_k') \qquad \text{(A)}$$

formola che sussiste se le x' sono legate alle x

dalle relazioni

$$x_1' = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$$

$$x_2' = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)$$

$$x_3' = \frac{1}{2}(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)$$

$$x_4' = \frac{1}{2}(x_1 - x_2 - x_3 + x_4)$$

§ 6. **Prima categoria di formole che si ricavano dalla formola fondamentale.** — Una prima categoria di formole che si ricavano dalla formola fondamentale si può ottenere nel seguente modo.

Se noi ad alcuni degli argomenti $x_1\ x_2\ x_3\ x_4$ aggiungiamo dei semiperiodi, e lo facciamo in tal modo che anche gli argomenti $x_1'\ x_2'\ x_3'\ x_4'$ restino aumentati di semiperiodi o di multipli di semiperiodi, allora adoperando le formole del § 3 potremo trasformare la formola (6).

Incominciamo coll'aggiungere ad x_1 la qualità π. Allora dalle (7) si vede che $x_1'\ x_2'\ x_3'\ x_4'$ restano tutte aumentate di $\frac{1}{2}\pi$. Facendo tali cangiamenti nella (6) e adoperando le formole del § 3 si ha l'altra formola

$$-\prod_{k=1}^{4} \vartheta_2(x_k) + \prod_{k=4}^{4} \vartheta_3(x_k) =$$

$$= \prod_{k=1}^{4} \vartheta_1(x_k') + \prod_{k=1}^{4} \vartheta(x_k'). \qquad \text{(B)}$$

formola che differisce dalla (A) perchè in essa compariscono tutte le quattro ϑ, mentre che nella (A) ne compariscono solo due.

Sommando (A) (B) si avrebbe un'altra formola rimarchevole.

Possiamo similmente ottenere una formola in cui non ci entrano che ϑ e ϑ_1. Nella (B) aumentiamo di $\frac{1}{2}\pi$ i quattro argomenti x.

Allora gli argomenti x' restano aumentati rispettivamente di π, 0, 0, 0. Adoperando le solite formole del § 3 si ha la formola

$$-\prod_{k=1}^{4} \vartheta_1(x_k) + \prod_{k=1}^{4} \vartheta(x_k) =$$

$$= -\prod_{k=1}^{4} \vartheta_1(x_k') + \prod_{k=1}^{4} \vartheta(x_k') \qquad \text{(C)}$$

In tutte queste formole vi sono quattro termini, ognuno formato col prodotto di quattro ϑ col *medesimo indice.*

Si possono poi ottenere formole in cui vi sono prodotti di quattro ϑ non col medesimo indice.

Per procedere in questo paragrafo con maggiore semplicità introduciamo una notazione comoda per esprimere tutte queste relazioni. Indichiamo con

$$(i\,j\,h\,k)$$

il termine

$$\vartheta_i(x_1)\,\vartheta_j(x_2)\,\vartheta_h(x_3)\,\vartheta_k(x_4)$$

e con

$$(i\,j\,h\,k)'$$

lo stesso termine quando gli argomenti sono x' in luogo delle x. L'indice zero corrisponde alla ϑ senza indice.

Allora le tre relazioni già trovate diventano

$$(2222) + (3333) = (2222)' + (3333)' \qquad \text{(A)}$$

$$-(2222) + (3333) = (1111)' + (0000)' \qquad \text{(B)}$$

$$-(1111) + (0000) = -(1111)' + (0000)' \qquad \text{(C)}$$

Aumentando in (A) $x_1\,x_2$ della quantità $\frac{1}{2}\pi$, gli argomenti $x'_1\,x'_2\,x'_3\,x'_4$ si aumentano rispettivamente di $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{2}\pi$, 0,0. Adoperando allora le note formole di trasformazione si otterrà una formola in ogni termine della quale vi compariscono quattro ϑ, due collo stesso indice e due con indice diverso.

Si ha così:

$$(0033) + (1122) = (1122)' + (0033)'$$

Similmente

$$\left.\begin{aligned} (0033) - (1122) &= (2211)' + (3300)' \\ (0022) + (1133) &= (0022)' + (1133)' \\ (0022) - (1133) &= (2200)' + (3311)' \end{aligned}\right\} \quad \text{(D)}$$

La seconda di queste si ottiene dalla prima mutando i segni agli argomenti $x_1\, x_4$, e quindi scambiando poi x'_1 con $-x'_4$ e x'_2 con $-x'_3$. La terza e quarta infine si ricavano da (A) in modo analogo.

Vediamo ora in che maniera possiamo ricavare due altre formole di natura assai analoga alle (D).

Nelle prime due delle (D) aumentiamo $x_1\, x_2$ della quantità $\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2} i \log q$; anche $x'_1\, x'_2$ si aumenteranno della stessa quantità e si hanno le formole

$$(2233) + (3322) = (2233)' + (3322)'$$

$$(2233) - (3322) = -(1100) - (0011)'.$$

Se invece si aumentano $x_3\, x_4$ rispettivamente di $\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2} i \log q$ e di $-\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2} i \log q$, e quindi $x'_3\, x'_4$ delle stesse quantità si hanno le altre due formole

$$(0011) - (1100) = (0011)' - (1100)'$$

$$(0011) + (1100) = (3322)' - (2233)'$$

Da queste quattro formole otteniamo quelle che cercavamo cioè

$$\left.\begin{aligned} (3322) + (0011) &= (3322)' + (0011)' \\ (3322) - (0011) &= (2233)' + (1100)' \end{aligned}\right\} \quad (E)$$

Finalmente possiamo ottenere formole i cui termini contengono ϑ con tutti quattro gli indici.

Aumentiamo le x rispettivamente di

$$0,\ \frac{1}{2}\pi,\ \frac{1}{2}i\log q,\ -\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}i\log q$$

e quindi le x' delle medesime quantità.

Si ha allora da (A):

$$\left.\begin{array}{l}(3021)-(2130)=(3021)'-(2130)' \\ \text{Analogamente} \\ (2031)-(3120)=(2031)'-(3120)'\end{array}\right\}\quad(F)$$

Se nella prima delle (E) aumentiamo $x_1\ x_4$ di $\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}i\log q$ e quindi $x'_1\ x'_4$ della stessa quantità si ha l'altra formola

$$(1320)+(2013)=(1320)'+(2013)' \qquad (G)$$

§ 7. **Seconda categoria di formole che si ricavano dalla formola fondamentale. Formole in cui entrano tre argomenti indipendenti.** — Poniamo

$$x_4=-(x_1+x_2+x_3).$$

Allora si ha:

$$\begin{aligned}x_1'&=0\\x_2'&=x_1+x_2\\x_3'&=x_1+x_3\\x_4'&=-(x_2+x_3)\end{aligned}$$

La formola (B) diventa (ricordando che ϑ_1 è zero per argomento zero)

$$\vartheta(0)\,\vartheta(x_1+x_2)\,\vartheta(x_2+x_3)\,\vartheta(x_3+x_1)=$$
$$=\vartheta_3(x_1+x_2+x_3)\,\vartheta_3(x_1)\,\vartheta_3(x_2)\,\vartheta_3(x_3)-$$
$$-\vartheta_2(x_1+x_2+x_3)\,\vartheta_2(x_1)\,\vartheta_2(x_2)\,\vartheta_2(x_3).$$

Nella stessa maniera potrebbero trovarsi altre formole dalle altre trovate nel paragrafo precedente. Queste formole però poco ci occorreranno in seguito.

§ 8. **Terza categoria. Formole in cui entrano due argomenti indipendenti.** – Poniamo:

$$x_4=x_1 \qquad x_3=x_2.$$

donde si ha

$$x_1'=x_1+x_2$$
$$x_2'=0$$
$$x_3'=0$$
$$x'_4=x_1-x_2.$$

Sostituendo questi valori nelle varie formole dei paragrafi precedenti si ha una categoria di altre formole contenenti solo i due argomenti x_1 x_2 e che sono importanti per le cose che dovremo dire in seguito.

Tali formole sono:

$$\left.\begin{aligned}
&\vartheta^2(0)\,\vartheta(x_1+x_2)\,\vartheta(x_1-x_2)=\\
&\quad=\vartheta^2(x_1)\,\vartheta^2(x_2)-\vartheta_1^2(x_1)\,\vartheta_1^2(x_2)=\\
&\quad=\vartheta_3^2(x_1)\,\vartheta_3^2(x_2)-\vartheta_2^2(x_1)\,\vartheta_2^2(x_2)\\
&\vartheta_3^2(0)\,\vartheta_3(x_1+x_2)\,\vartheta_3(x_1-x_2)=\\
&\quad=\vartheta^2(x_1)\,\vartheta^2(x_2)+\vartheta_2^2(x_1)\,\vartheta_2^2(x_2)=\\
&\quad=\vartheta_3^2(x_1)\,\vartheta_3^2(x_2)+\vartheta_1^2(x_1)\,\vartheta_1^2(x_2)\\
&\vartheta_2^2(0)\,\vartheta_2(x_1+x_2)\,\vartheta_2(x_1-x_2)=\\
&\quad=\vartheta_3^2(x_1)\,\vartheta_3^2(x_2)-\vartheta^2(x_1)\,\vartheta^2(x_2)=\\
&\quad=\vartheta_2^2(x_1)\,\vartheta_2^2(x_2)-\vartheta_1^2(x_1)\,\vartheta_1^2(x_2)
\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

Le due prime di queste formole si ricavano direttamente dalle (B) (C); le altre quattro si possono ricavare nel seguente modo: in (B) scambiamo gli argomenti x cogli argomenti x'; poi in (A) e (B) così modificato, facciamo le precedenti apposizioni. Avremo due equazioni da cui colla risoluzione, si ricavano subito le ultime quattro delle (1).

Se nella prima delle (1) si accresce l'argomento x_1 della quantità $\frac{1}{2}\,i\log q$ e si tien conto delle formole solite di trasformazione, si ha la

formola

$$\left.\begin{aligned}
&\vartheta^2(0)\,\vartheta_1(x_1+x_2)\,\vartheta_1(x_1-x_1)= \\
&\qquad = \vartheta_1^2(x_1)\,\vartheta^2(x_2)-\vartheta^2(x_1)\,\vartheta_1^2(x_2) \\
&\text{Così si hanno le altre} \\
&\vartheta_3^2(0)\,\vartheta_1(x_1+x_2)\,\vartheta_1(x_1-x_2)= \\
&\qquad = \vartheta_1^2(x_1)\,\vartheta_3^2(x_2)-\vartheta_3^2(x_1)\,\vartheta_1^2(x_2) \\
&\vartheta_2^2(0)\,\vartheta_1(x_1+x_2)\,\vartheta_1(x_1-x_2)= \\
&\qquad = \vartheta_1^2(x_1)\,\vartheta_2^2(x_2)-\vartheta_2^2(x_1)\,\vartheta_1^2(x_2)
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Queste due ultime si ricavano in analoga maniera dalla 4.ª e 6.ª delle (1).

Si hanno poi le altre seguenti formole:

$$\left.\begin{aligned}
&\vartheta_2(0)\,\vartheta_3(0)\,\vartheta(x_1-x_2)\,\vartheta_1(x_1+x_2)= \\
&\qquad = \vartheta(x_1)\,\vartheta_1(x_1)\,\vartheta_2(x_2)\,\vartheta_3(x_2)\;+ \\
&\qquad + \vartheta(x_2)\,\vartheta_1(x_2)\,\vartheta_2(x_1)\,\vartheta_3(x_1) \\
&\vartheta(0)\,\vartheta_2(0)\,\vartheta(x_1-x_2)\,\vartheta_2(x_1+x_2)= \\
&\qquad = \vartheta(x_1)\,\vartheta_2(x_1)\,\vartheta(x_2)\,\vartheta_2(x_2)\;- \\
&\qquad - \vartheta_1(x_1)\,\vartheta_3(x_1)\,\vartheta_1(x_2)\,\vartheta_3(x_2) \\
&\vartheta_3(0)\,\vartheta(0)\,\vartheta(x_1-x_2)\,\vartheta_3(x_1+x_2)= \\
&\qquad = \vartheta(x_1)\,\vartheta_3(x_1)\,\vartheta(x_2)\,\vartheta_3(x_2)\;- \\
&\qquad - \vartheta_1(x_1)\,\vartheta_2(x_1)\,\vartheta_1(x_2)\,\vartheta_2(x_2)
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Queste tre formole sebbene di natura diversa riguardo alla costituzione dei loro termini le raccogliamo insieme perchè le dovremo in seguito combinare fra loro.

La prima di esse si ricava dalla (G) colle apposizioni di avanti, e le altre due si ricavano dalle formole (D). Similmente da (F) si hanno le formole seguenti analoghe alla prima delle (3):

$$\left.\begin{aligned}
&\vartheta(0)\,\vartheta_2(0)\,\vartheta_3(x_1-x_2)\,\vartheta_1(x_1+x_2)= \\
&\qquad =\vartheta_1(x_1)\,\vartheta_3(x_1)\,\vartheta(x_2)\,\vartheta_2(x_2)+ \\
&\qquad +\vartheta(x_1)\,\vartheta_2(x_1)\,\vartheta_1(x_2)\,\vartheta_3(x_2) \\
&\vartheta(0)\,\vartheta_3(0)\,\vartheta_2(x_1-x_2)\,\vartheta_1(x_1+x_2)= \\
&\qquad =\vartheta_1(x_1)\,\vartheta_2(x_1)\,\vartheta(x_2)\,\vartheta_3(x_2)+ \\
&\qquad +\vartheta(x_1)\,\vartheta_3(x_1)\,\vartheta_1(x_2)\,\vartheta_2(x_2)
\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

§ 9. **Quarta categoria. Formole in cui entra un solo argomento. Relazioni algebriche fra le ϑ.** — In due maniere possiamo ottenere dalle formole del paragrafo precedente, formole ad un argomento solo, e cioè, o ponendo fra loro eguali i due argomenti, o ponendone uno di essi eguale a zero.

Nel primo caso si hanno formole in cui le ϑ hanno in un termine l'argomento doppio $2x$ e in altri termini l'argomento semplice x, e nel secondo caso si hanno relazioni algebriche fra le ϑ col medesimo argomento.

Dalle (1) (4) ponendo $x_2 = x_1 = x$ si hanno le altre:

$$\vartheta^3(0)\,\vartheta(2x) = \vartheta^4(x) - \vartheta_1^4(x) =$$
$$= \vartheta_3^4(x) - \vartheta_2^4(x)$$

$$\vartheta_2^3(0)\,\vartheta_2(2x) = \vartheta_3^4(x) - \vartheta^4(x) =$$
$$= \vartheta_2^4(x) - \vartheta_1^4(x) \qquad (1)$$

$$\vartheta_3^3(0)\,\vartheta_3(2x) = \vartheta^4(x) + \vartheta_2^4(x) =$$
$$= \vartheta_3^4(x) + \vartheta_1^4(x)$$

$$\vartheta_3^2(0)\,\vartheta(0)\,\vartheta(2x) = \vartheta_1^2(x)\,\vartheta_2^2(x) + \vartheta^2(x)\,\vartheta_3^2(x)$$

E ponendo $x_2 = 0$ $x_1 = x$ in una delle (1) § 8 si ha

$$\vartheta_3^2(0)\,\vartheta_3^2(x) = \vartheta^2(0)\,\vartheta^2(x) + \vartheta_2^2(0)\,\vartheta_2^2(x). \qquad (2)$$

Se nella (D) poniamo $x_1 = x_2 = 0$ $x_3 = x_4 = x$, donde si ottiene $x'_1 = -x'_2 = x$, $x'_3 = x'_4 = 0$, si ricava l'altra formola

$$\vartheta_3^2(0)\,\vartheta^2(x) = \vartheta^2(0)\,\vartheta_3^2(x) + \vartheta_2^2(0)\,\vartheta_1^2(x). \qquad (3)$$

Questa formola potrebbe anche ricavarsi aumentando x di $\frac{\pi}{2}$ nella (2).

Le due formole (2) (3) possono considerarsi come le formole fondamentali rappresentanti le due relazioni algebriche esistenti fra le quattro ϑ considerate come funzioni di un medesimo argomento x.

Da esse mediante la relazione fra le ϑ pari con argomento zero e che sarà sviluppata nel paragrafo seguente possono ricavarsi le altre due relazioni con semplici eliminazioni algebriche:

$$\left.\begin{aligned} \vartheta_3^2(0)\,\vartheta_2^2(x) &= \vartheta_2^2(0)\,\vartheta_3^2(x) - \vartheta^2(0)\,\vartheta_1^2(x) \\ \vartheta_3^2(0)\,\vartheta_1^2(x) &= \vartheta_2^2(0)\,\vartheta^2(x) - \vartheta^2(0)\,\vartheta_2^2(x) \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

§ 10. — **Quinta categoria — Relazioni algebriche fra i valori delle ϑ pari e della derivata di ϑ_1 per argomento zero.** — Lo scopo di questo paragrafo è di ricercare due relazioni algebriche esistenti fra le quantità

$$\vartheta(0),\ \vartheta_2(0),\ \vartheta_3(0),\ \vartheta_1'(0).$$

Una prima di tali relazioni si trova subito ponendo $x = 0$ nella (2) del § 9. Si ha allora immediatamente

$$\vartheta_3^4(0) = \vartheta^4(0) + \vartheta_2^4(0) \qquad (1)$$

che è la formola *cosiddetta delle quarte potenze* cui abbiamo accennato sulla fine del precedente paragrafo.

Per passare ora ad una elegante relazione che lega la $\vartheta'_1(0)$ colle altre quantità, ci piace seguire anche qui il procedimento di Jacobi che è molto elegante.

Dalle formole di definizione delle ϑ (vedi § 3) risultano immediatamente le seguenti relazioni

$$\vartheta_3(x, q) + \vartheta(x, q) = 2\,\vartheta_3(2x, q^4)$$

$$\vartheta_3(x, q) - \vartheta(x, q) = 2\,\vartheta_2(2x, q^4)$$

donde

$$\vartheta_3(x, q) = \vartheta_3(2x, q^4) + \vartheta_2(2x, q^4)$$

$$\vartheta(x, q) = \vartheta_3(2x, q^4) - \vartheta_2(2x, q^4)$$

Consideriamo ora la relazione (vedi le relazioni (1), § 9).

$$\vartheta_2^3(0)\,\vartheta_2(2x) = \vartheta_3^4(x) - \vartheta^4(x)$$

in cui porremo x in luogo di $2x$, e quindi $\frac{x}{2}$ in luogo di x, e poi ci serviremo delle relazioni precedenti. Si ha allora la formola

$$\vartheta_2^3(0, q)\,\vartheta_2(x, q) =$$

$$= 8\,\vartheta_2(x, q^4)\,\vartheta_3(x, q^4)\,[\vartheta_2^2(x, q^4) + \vartheta_3^2(x, q^4)]$$

Aumentiamo ora x di $\frac{1}{2}\pi$. Allora dalle funzioni ϑ_2 ϑ_3 si passa alle ϑ_1 e ϑ, e si ha la formola

$$\vartheta_2^3(0, q)\,\vartheta_1(x\,q) =$$

$$= 8\,\vartheta_1(x, q^4)\,\vartheta(x, q^4)\,[\vartheta_1^2(x, q^4) + \vartheta^2(x, q^4)].$$

Deriviamo questa rispetto ad x, e poi poniamo $x = 0$. Si ha allora

$$\vartheta_2^3(0, q)\,\vartheta_1'(0, q) = 8\,\vartheta^3(0, q^4)\,\vartheta_1'(0, q^4).$$

D'altra parte dalle relazioni di sopra, ponendo

$x = 0$, si hanno le altre

$$\vartheta_3(0, q) = \vartheta_3(0, q^4) + \vartheta_2(0, q^4)$$
$$\vartheta(0, q) = \vartheta_3(0, q^4) - \vartheta_2(0, q^4)$$

$$\vartheta_2^4(0, q) =$$
$$= 8\,\vartheta_2(0, q^4)\,\vartheta_3(0, q^4)\,[\vartheta_3^2(0, q^4) + \vartheta_2^2(0, q^4)].$$

Moltiplicando queste tre formole e dividendo colla precedente e tenendo conto della (1), si ha la rimarchevole relazione

$$\frac{\vartheta_1'(0, q)}{\vartheta(0, q)\,\vartheta_2(0, q)\,\vartheta_3(0, q)} = \frac{\vartheta_1'(0, q^4)}{\vartheta(0, q^4)\,\vartheta_2(0, q^4)\,\vartheta_3(0, q^4)}$$

la quale mostra che il rapporto espresso dal primo membro resta inalterato di valore quando si muta la quantità q in q^4. Nella stessa maniera resterà inalterato quando si muta q^4 in q^{16}, e così di seguito. Ora siccome il modulo di q è minore di 1, così q^4, q^{16}, ... avranno moduli sempre decrescenti e quindi tendono a zero; possiamo perciò dire che il valore di quel rapporto è eguale a quello del suo limite per $q = 0$. Essendo la ϑ, e quindi anche quel rapporto, funzioni continue di q, il suo limite per $q = 0$ è lo stesso del suo valore per $q = 0$. Ricordando le serie di definizione delle ϑ si trova subito

$$\vartheta(0, 0) = 1 \qquad \vartheta_3(0, 0) = 1$$

$$\frac{\vartheta'(0, 0)}{\vartheta_2(0, 0)} = 1$$

onde possiamo infine conchiudere che quel rapporto è eguale ad 1, donde la formola richiesta

$$\vartheta_1'(0) = \vartheta(0)\,\vartheta_2(0)\,\vartheta_3(0), \tag{2}$$

§ 11. **Equazione a tre termini per la funzione dispari ϑ_1.** — Vogliamo ora passare alla ricerca di una importante relazione cui soddisfa la funzione dispari ϑ_1 e che chiameremo *l'equazione a tre termini.*

Partiamo dalla relazione (C) nella quale mutiamo il segno a x'_4, cioè intendiamo per il nuovo x'_4 non più la quantità

$$\frac{1}{2}(x_1 - x_2 - x_3 + x_4)$$

ma sibbene

$$x_4' = \frac{1}{2}(-x_1 + x_2 + x_3 - x_4).$$

Allora la formola (C) può scriversi

$$\prod_{k=1}^{4} \vartheta(x_k) - \prod_{k=1}^{4} \vartheta(x_k') =$$

$$= \prod_{k=1}^{4} \vartheta_1(x_k) + \prod_{k=1}^{4} \vartheta_1(x_k'). \tag{1}$$

dove x'_4 ha però il nuovo significato, non più l'antico.

Le relazioni che legavano le antiche x' alle x erano relazioni reciproche (v. § 5), cioè dalle x'

colle stesse formole si torna alle x; invece le relazioni che legano le nuove x' alle x non sono più reciproche, ma applicando alle x' le medesime formole si hanno delle nuove quantità x'', cui applicando daccapo le stesse formole si torna alle x primitive; queste trasformazioni hanno cioè una certa proprietà ciclica di 3.° ordine.

Le relazioni fra le quantità x, x', x'' (in numero di 12) sono quelle espresse nella seguente tabella

$$x_1' = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$$

$$x_2' = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)$$

$$x_3' = \frac{1}{2}(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)$$

$$x_4' = \frac{1}{2}(-x_1 + x_2 + x_3 - x_4)$$

$$x_1'' = \frac{1}{2}(x_1' + x_2' + x_3' + x_4')$$

$$x_2'' = \frac{1}{2}(x_1' + x_2' - x_3' - x_4')$$

$$x_3'' = \frac{1}{2}(x_1' - x_2' + x_3' - x_4')$$

$$x_4'' = \frac{1}{2}(-x_1' + x_2' + x_3' - x_4')$$

$$x_1 = \frac{1}{2}(x_1'' + x_2'' + x_3'' + x_4'')$$

$$x_2 = \frac{1}{2}(x_1'' + x_2'' - x_3'' - x_4'')$$

$$x_3 = \frac{1}{2}(x_1'' - x_2'' + x_3'' - x_4'')$$

$$x_4 = \frac{1}{2}(-x_1'' + x_2'' + x_3'' - x_4'')$$

da cui si ricavano le formole inverse

$$x_1 = \frac{1}{2}(x_1' + x_2' + x_3' - x_4')$$

$$x_2 = \frac{1}{2}(x_1' + x_2' - x_3' + x_4')$$

$$x_3 = \frac{1}{2}(x_1' - x_2' + x_3' + x_4')$$

$$x_4 = \frac{1}{2}(x_1' - x_2' - x_3' - x_4')$$

$$x_1' = \frac{1}{2}(x_1'' + x_2'' + x_3'' - x_4'')$$

$$x_2' = \frac{1}{2}(x_1'' + x_2'' - x_3'' + x_4'')$$

$$x_3' = \frac{1}{2}(x_1'' - x_2'' + x_3'' + x_4'')$$

$$x_4' = \frac{1}{2}(x_1'' - x_2'' - x_3'' - x_4'')$$

$$x_1'' = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + x_3 - x_4)$$

$$x_2'' = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - x_3 + x_4)$$

$$x_3'' = \frac{1}{2}(x_1 - x_2 + x_3 + x_4)$$

$$x_4'' = \frac{1}{2}(x_1 - x_2 - x_3 - x_4)$$

E sussiste sempre la proprietà che la somma dei quadrati delle x, è eguale a quella dei quadrati delle x' e a quella dei quadrati delle x'', cioè

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2 =$$
$$= x_1''^2 + x_2''^2 + x_3''^2 + x_4''^2.$$

In relazione a queste tre serie di formole possiamo scrivere altre due relazioni analoghe alla (1), permutando circolarmente nella (1) i simboli x, x', x''.

Si hanno allora le due altre formole

$$\left.\begin{aligned} &\prod_{k=1}^{4} \vartheta(x_k') - \prod_{k=1}^{4} \vartheta(x_k'') = \\ &= \prod_{k=1}^{4} \vartheta_1(x_k') + \prod_{k=1}^{4} \vartheta_1(x_k'') \\ &\prod_{k=1}^{4} \vartheta(x_k'') - \prod_{k=1}^{4} \vartheta(x_k) = \\ &= \prod_{k=1}^{4} \vartheta_1(x_k'') + \prod_{k=1}^{4} \vartheta_1(x_k). \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

E sommando (1) (2) si hà infine

$$\prod_{k=1}^{4} \vartheta_1(x_k) + \prod_{k=1}^{4} \vartheta_1(x'_k) + \prod_{k=1}^{4} \vartheta_1(x''_k) = 0 \qquad (3)$$

che è la equazione a tre termini.

A questa equazione possiamo dare un'altra forma. Poniamo

$$x_1 = y_1 + y_2$$
$$x_2 = y_1 - y_2$$
$$x_3 = y_3 + y_4$$
$$x_4 = y_3 - y_4$$

donde

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2.$$

Si troverà subito che

$$x_1' = y_1 + y_3$$
$$x_2' = y_1 - y_3$$
$$x_3' = y_4 + y_2$$
$$x_4' = y_4 - y_2$$

$$x_1'' = y_1 + y_4$$
$$x_2'' = y_1 - y_4$$
$$x_3'' = y_2 + y_3$$
$$x_4'' = y_2 - y_3.$$

La relazione di sopra diventa:

$$\begin{aligned}&\vartheta_1(y_1+y_2)\,\vartheta_1(y_1-y_2)\,\vartheta_1(y_3+y_4)\,\vartheta_1(y_3-y_4)+\\&+\vartheta_1(y_1+y_3)\,\vartheta_1(y_1-y_3)\,\vartheta_1(y_4+y_2)\,\vartheta_1(y_4-y_2)+\\&+\vartheta_1(y_1+y_4)\,\vartheta_1(y_1-y_4)\,\vartheta_1(y_2+y_3)\,\vartheta_1(y_2-y_3)=0.\end{aligned}\qquad(4)$$

Quando tratteremo della funzione σ di Weierstrass questa formola troverà la sua applicazione.

§ 12. **Le derivate dei rapporti delle funzioni ϑ.** — Una delle proprietà fondamentali delle funzioni ϑ è questa: *che la derivata rispetto ad* x *del rapporto di due qualunque delle funzioni ϑ, si esprime razionalmente mediante i rapporti delle ϑ.*

Per dimostrare questa proprietà partiamo dalle formole (1) (3) del § 8, combinate come segue:

$$\frac{\vartheta_2(0)}{\vartheta(0)}\frac{\vartheta_3(0)}{\vartheta(0)}\frac{\vartheta_1(x_1+x_2)}{\vartheta(x_1+x_2)}=$$

$$=\frac{\dfrac{\vartheta_1(x_1)}{\vartheta(x_1)}\dfrac{\vartheta_2(x_2)}{\vartheta(x_2)}\dfrac{\vartheta_3(x_2)}{\vartheta(x_2)}+\dfrac{\vartheta_1(x_2)}{\vartheta(x_2)}\dfrac{\vartheta_2(x_1)}{\vartheta(x_1)}\dfrac{\vartheta_3(x_1)}{\vartheta(x_1)}}{1-\dfrac{\vartheta_1^2(x_1)}{\vartheta^2(x_1)}\dfrac{\vartheta_1^2(x_2)}{\vartheta^2(x_2)}}$$

e facciamo le derivate del primo e secondo membro rispetto ad x_2 e poi poniamo $x_2=0$.

Osservando che le funzioni

$$\frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)}\qquad\frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)}$$

sono funzioni pari e quindi che le loro derivate rispetto ad x sono funzioni dispari, e perciò si annullano per $x = 0$, possiamo semplificare moltissimo il calcolo. Otteniamo così

$$\frac{\vartheta_2(0)}{\vartheta(0)}\frac{\vartheta_3(0)}{\vartheta(0)}\left[\frac{d}{d(x_1+x_2)}\frac{\vartheta_1(x_1+x_2)}{\vartheta(x_1+x_2)}\right]_{x_2=0} =$$

$$= \left[\frac{d}{dx_2}\frac{\vartheta_1(x_2)}{\vartheta(x_2)}\right]_{x_2=0}\frac{\vartheta_2(x_1)}{\vartheta(x_1)}\frac{\vartheta_3(x_1)}{\vartheta(x_1)}$$

cioè, mutando x_1 in x,

$$\frac{\vartheta_2(0)}{\vartheta(0)}\frac{\vartheta_3(0)}{\vartheta(0)}\frac{d}{dx}\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)} = +\frac{\vartheta_1'(0)}{\vartheta(0)}\frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)}\frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)}.$$

Similmente si procederebbe per gli altri rapporti.

Senza effettuare i calcoli che si condurrebbero nella stessa maniera noi segneremo qui le formole relative alle derivate di tutti i rapporti delle quattro ϑ fra loro,

$$\frac{d}{dx}\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)} = \vartheta^2(0)\frac{\vartheta_2(x)\vartheta_3(x)}{\vartheta^2(x)}$$

$$\frac{d}{dx}\frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)} = -\vartheta_3^2(0)\frac{\vartheta_1(x)\vartheta_3(x)}{\vartheta^2(x)}$$

$$\frac{d}{dx}\frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)} = -\vartheta_2^2(0)\frac{\vartheta_1(x)\vartheta_2(x)}{\vartheta^2(x)}$$

$$\frac{d}{dx}\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta_2(x)} = \vartheta_2^2(0)\frac{\vartheta(x)\vartheta_3(x)}{\vartheta_2^2(x)}$$

$$\frac{d}{dx}\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta_3(x)} = \vartheta_3^2(0)\,\frac{\vartheta(x)\,\vartheta_2(x)}{\vartheta_3^2(x)}$$

$$\frac{d}{dx}\frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta_3(x)} = -\vartheta^2(0)\,\frac{\vartheta(x)\,\vartheta_1(x)}{\vartheta_3^2(x)}.$$

§ 13. **Derivate logaritmiche delle funzioni ϑ.** — È facile far vedere che le derivate, a cominciare da quella del secondo ordine, del logaritmo di una qualunque delle funzioni ϑ, si esprimono razionalmente mediante i rapporti delle funzioni stesse.

Infatti partiamo dalle quattro eguaglianze

$$\vartheta^2(0)\,\vartheta(x_1+x_2)\,\vartheta(x_1-x_2) = \\ = \vartheta^2(x_1)\,\vartheta^2(x_2) - \vartheta_1^2(x_1)\,\vartheta_1^2(x_2)$$

$$\vartheta^2(0)\,\vartheta_1(x_1+x_2)\,\vartheta_1(x_1-x_2) = \\ = \vartheta_1^2(x_1)\,\vartheta^2(x_2) - \vartheta^2(x_1)\,\vartheta_1^2(x_2)$$

$$\vartheta^2(0)\,\vartheta_2(x_1+x_2)\,\vartheta_2(x_1-x_2) = \\ = \vartheta_2^2(x_1)\,\vartheta^2(x_2) - \vartheta_3^2(x_1)\,\vartheta_1^2(x_2)$$

$$\vartheta^2(0)\,\vartheta_3(x_1+x_2)\,\vartheta_3(x_1-x_2) = \\ = \vartheta_3^2(x_1)\,\vartheta^2(x_2) - \vartheta_2^2(x_1)\,\vartheta_1^2(x_2).$$

La prima di queste formole è la prima delle formole (1) (§ 8, Cap. I); le altre si possono subito ricavare dalla prima aumentando l'argomento x_1 rispettivamente di

$$\frac{1}{2}\,i\log q,\quad \frac{1}{2}\,\pi + \frac{1}{2}\,i\log q,\quad \frac{1}{2}\,\pi.$$

Per semplicità eseguiamo il procedimento che vogliamo applicare, per la ricerca delle derivate logaritmiche, solo sulla prima delle relazioni scritte. Si ha derivandola rispetto ad x_2:

$$\vartheta^2(0)[\vartheta'(x_1+x_2)\vartheta(x_1-x_2)-\vartheta(x_1+x_2)\vartheta'(x_1-x_2)]=$$
$$=2\vartheta^2(x_1)\vartheta(x_2)\vartheta'(x_2)-2\vartheta_1^2(x_1)\vartheta_1(x_2)\vartheta_1'(x_2)$$

e derivando una seconda volta, e ponendo poi $x_1=x$, $x_2=0$, e poi osservando che

$$\frac{\vartheta''(x)\vartheta(x)-\vartheta'^2(x)}{\vartheta^2(x)}=\frac{d^2}{dx^2}\log\vartheta(x)$$

si ha finalmente:

$$\frac{d^2}{dx^2}\log\vartheta(x)=\frac{\vartheta''(0)}{\vartheta(0)}-\frac{\vartheta_1'^2(0)}{\vartheta^2(0)}\frac{\vartheta_1^2(x)}{\vartheta^2(x)}.$$

E similmente:

$$\frac{d^2}{dx^2}\log\vartheta_1(x)=\frac{\vartheta''(0)}{\vartheta(0)}-\frac{\vartheta_1'^2(0)}{\vartheta^2(0)}\frac{\vartheta^2(0)}{\vartheta_1^2(x)}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\log\vartheta_2(x)=\frac{\vartheta''(0)}{\vartheta(0)}-\frac{\vartheta_1'^2(0)}{\vartheta^2(0)}\frac{\vartheta_3^2(x)}{\vartheta_2^2(x)}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\log\vartheta_3(x)=\frac{\vartheta''(0)}{\vartheta(0)}-\frac{\vartheta_1'^2(0)}{\vartheta^2(0)}\frac{\vartheta_2^2(x)}{\vartheta_3^2(x)}.$$

In quanto alle derivate di ordine superiore noi osserviamo che esse si riducono a derivate dei rapporti delle ϑ; ora nel paragrafo precedente è

stato dimostrato che le derivate dei rapporti delle ϑ si esprimono razionalmente mediante i rapporti delle ϑ stesse; dunque resta dimostrato in generale l'assunto.

Vogliamo qui notare le formole per le derivate terze logaritmiche delle ϑ, formole le quali si possono facilmente ricavare mediante i risultati del § precedente (v. anche § 5, Cap. IV).

$$\frac{d^3}{dx^3}\log\vartheta(x) = -2\vartheta'^2_1(0)\frac{\vartheta_1(x)\vartheta_2(x)\vartheta_3(x)}{\vartheta^3(x)}$$

$$\frac{d^3}{dx^3}\log\vartheta_1(x) = +2\vartheta'^2_1(0)\frac{\vartheta(x)\vartheta_2(x)\vartheta_3(x)}{\vartheta_1^3(x)}$$

$$\frac{d^3}{dx^3}\log\vartheta_2(x) = -2\vartheta'^2_1(0)\frac{\vartheta_1(x)\vartheta(x)\vartheta_3(x)}{\vartheta_2^3(x)}$$

$$\frac{d^3}{dx^3}\log\vartheta_3(x) = +2\vartheta'^2_1(0)\frac{\vartheta(x)\vartheta_1(x)\vartheta_2(x)}{\vartheta_3^3(x)}.$$

§ 14. **Alcune formole relative alle derivate delle ϑ per argomento zero.** — Vogliamo raccogliere in questo paragrafo alcune formole rimarchevoli che ci serviranno spesso nei calcoli seguenti. Queste formole si riferiscono a relazioni esistenti fra le derivate di ordine superiore delle ϑ prese per argomento zero.

Partendo da

$$\vartheta_1' = \vartheta\,\vartheta_2\,\vartheta_3$$

prendendo i logaritmi e le derivate rispetto a $\log q$ e poi servendosi dell'equazione differenziale cui

soddisfanno la ϑ e le loro derivate, si ha

$$\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'} = \frac{\vartheta''}{\vartheta} + \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} + \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}. \tag{1}$$

Derivando ambo i membri rispetto a $\log q$ e servendosi ancora delle solite equazioni differenziali si ha

$$\frac{\vartheta_1^{\mathrm{V}}}{\vartheta_1'} - \frac{\vartheta_1'''^2}{\vartheta_1'^2} =$$

$$= \left(\frac{\vartheta^{\mathrm{IV}}}{\vartheta} + \frac{\vartheta_2^{\mathrm{IV}}}{\vartheta_2} + \frac{\vartheta_3^{\mathrm{IV}}}{\vartheta_3}\right) - \left(\frac{\vartheta''^2}{\vartheta} + \frac{\vartheta_2''^2}{\vartheta_2} + \frac{\vartheta_3''^2}{\vartheta_3^2}\right). \tag{2}$$

Partiamo ora dalla formola per le derivate dei rapporti $\frac{\vartheta_2}{\vartheta_3}, \frac{\vartheta_3}{\vartheta}, \frac{\vartheta}{\vartheta_2}$ date nel § 12; deriviamo primo e secondo membro rispetto ad x, trasformiamo il secondo membro mediante le stesse formole del § 12 e poi poniamo $x = 0$.

Si ottengono così le formole

$$\left.\begin{aligned} \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} - \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} &= \vartheta^4 \\ \frac{\vartheta''}{\vartheta} - \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} &= \vartheta_2^4 \\ \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} - \frac{\vartheta''}{\vartheta} &= -\vartheta_3^4 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

E introducendo invece le derivate rispetto a $\log q$

si hanno le altre

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\log\vartheta_2}{d\log q}-\frac{d\log\vartheta_3}{d\log q}&=\frac{d}{d\log q}\log\frac{\vartheta_2}{\vartheta_3}=\frac{1}{4}\vartheta^4\\
\frac{d\log\vartheta_3}{d\log q}-\frac{d\log\vartheta}{d\log q}&=\frac{d}{d\log q}\log\frac{\vartheta_3}{\vartheta}=\frac{1}{4}\vartheta_2^4\\
\frac{d\log\vartheta}{d\log q}-\frac{d\log\vartheta_2}{d\log q}&=\frac{d}{d\log q}\log\frac{\vartheta}{\vartheta_2}=-\frac{1}{4}\vartheta_3^4
\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

Dalle formole per le derivate logaritmiche delle ϑ ottenute nel § 13 possiamo ottenerne delle altre.

Facciamo le derivate quarte logaritmiche delle ϑ pari e poi poniamo $x=0$. Tenendo presenti le formole per le derivate terze, effettuando lo sviluppo della quarta derivata del logaritmo di ciascuna ϑ, e servendoci ancora delle formole per le derivate dei rapporti delle ϑ (v. § 12) si hanno le altre formole

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\vartheta^{\mathrm{IV}}}{\vartheta}-3\frac{\vartheta''^2}{\vartheta^2}&=-2\,\vartheta_2^4\,\vartheta_3^4\\
\frac{\vartheta_2^{\mathrm{IV}}}{\vartheta_2}-3\frac{\vartheta_2''^2}{\vartheta_2^2}&=-2\,\vartheta_3^4\,\vartheta^4\\
\frac{\vartheta_3^{\mathrm{IV}}}{\vartheta_3}-3\frac{\vartheta_3''^2}{\vartheta_3^2}&=+2\,\vartheta^4\,\vartheta_2^4
\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

Vogliamo finalmente dimostrare un' altra formola.

Dalle (1) (2) opportunamente combinate si ha:

$$-3\frac{\vartheta_1^{\mathrm{V}}}{\vartheta_1'}+5\left(\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'}\right)^2=-3\left(\frac{\vartheta^{\mathrm{IV}}}{\vartheta}+\ldots\right)+$$

$$+5\left[\left(\frac{\vartheta''}{\vartheta}\right)^2+\ldots\right]+4\left[\frac{\vartheta''}{\vartheta}\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}+\ldots\right].$$

Ma dalle relazioni (3) quadrando e sommando si ha

$$\left[\left(\frac{\vartheta''}{\vartheta}\right)^2+\ldots\right]-\left[\frac{\vartheta''}{\vartheta}\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}+\ldots\right]=\frac{1}{2}(\vartheta^8+\vartheta_2^8+\vartheta_3^8)$$

onde possiamo scrivere

$$-3\frac{\vartheta_1^{\mathrm{V}}}{\vartheta_1'}+5\left(\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'}\right)^2=-3\left[\frac{\vartheta^{\mathrm{IV}}}{\vartheta}+\ldots\right]+$$

$$+9\left[\left(\frac{\vartheta''}{\vartheta}\right)^2+\ldots\right]-2(\vartheta^8+\vartheta_2^8+\vartheta_3^8.$$

Ricorrendo ora alle formole (5) si ha

$$\left[\frac{\vartheta^{\mathrm{IV}}}{\vartheta}+\ldots\right]-3\left[\left(\frac{\vartheta''}{\vartheta}\right)^2+\ldots\right]=$$

$$=-2(\vartheta_2^4\vartheta_3^4+\vartheta_3^4\vartheta^4-\vartheta^4\vartheta_2^4)=-(\vartheta^8+\vartheta_2^8+\vartheta_3^8,$$

onde infine

$$-3\frac{\vartheta_1^{\mathrm{V}}}{\vartheta_1'}+5\frac{\vartheta_1'''^2}{\vartheta_2'^2}=\vartheta^8+\vartheta_2^8+\vartheta_3^8. \qquad (6)$$

§ 15. **Punti-zero delle funzioni** ϑ. — Le funzioni ϑ sono funzioni *intere* (olomorfe) dell'argomento x; ciò risulta immediatamente dalla definizione, perchè abbiamo dimostrato che se mod $q < 1$, le serie ϑ sono convergenti, cioè hanno valore finito per qualunque x finito; dunque non c'è alcun punto x in cui una ϑ è *infinita;* esse sono perciò funzioni intere.

Ci proponiamo in questo § di ricercare quali sono i punti del piano complesso x nei quali ciascuna delle quattro ϑ ha valore zero.

Sappiamo già che essendo ϑ_1 una funzione dispari, essa è zero per $x = 0$. Essendo poi (v. § 3)

$$\vartheta_1(x + \pi) = -\vartheta_1(x)$$

$$\vartheta_1(x - i \log q) = -q^{-1} e^{-2xi} \vartheta_1(x)$$

la medesima funzione $\vartheta_1(x)$ è zero anche in tutti gli infiniti punti della forma

$$x = m\pi - ni \log q$$

dove $m\,n$ sono numeri *interi* qualunque positivi o negativi.

Come si vede, vi sono dunque in tutto il piano infiniti punti-zero della funzione $\vartheta_1(x)$.

Possiamo ora semplificare la ricerca nella seguente maniera:

Segniamo nel piano complesso il parallelogrammo

che ha per vertici i punti

$$x = 0$$
$$x = \pi$$
$$x = -i \log q$$
$$x = \pi - i \log q.$$

Dividiamo il piano, con rette parallele ai lati di questo parallelogrammo, in infiniti parallelogrammi eguali a questo. Considerando il punto $x = 0$ come appartenente al parallelogrammo fondamentale, ad ogni altro parallelogrammo sarà appartenente uno ed uno solo degli infiniti soprasegnati punti-zero di ϑ_1.

La ricerca allora si riduce a questo: esaminare se nell'interno di uno di tali parallelogrammi, per es. nel fondamentale, esiste un altro punto-zero di ϑ_1. Se esiste un tal punto in uno dei parallelogrammi esisterà in tutti, per effetto delle sopracitate formole; e se quindi non esiste in uno, non potrà esistere in nessun altro. Onde se noi troviamo che nel parallelogrammo fondamentale non esiste altro punto-zero di ϑ_1, possiamo dedurre che nel piano non esistono altri siffatti punti oltre quelli già indicati, che sono tutti i vertici della rete di parallelogrammi in cui si è diviso il piano.

Ricorreremo ad un teorema fondamentale nella teoria delle funzioni analitiche, che cioè se si ha una funzione analitica *intera* $\varphi(x)$, e si calcola l'integrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\, dx = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{d \log \varphi(x)}{dx}\, dx$$

esteso ad un contorno chiuso, il valore di un tale integrale è esattamente un *numero intero*, e rappresenta il numero degli zeri che la funzione ha nell'interno del contorno (teor. di Cauchy).

Calcoliamo ora l'integrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int d \log \vartheta_1 (x)$$

esteso a tutto il contorno del parallelogrammo fondamentale. Si ha:

$$\frac{1}{2\pi i}\left[\int_0^{\pi} + \int_{\pi}^{\pi - i\log q} + \int_{\pi - i\log q}^{-i\log q} + \int_{-i\log q}^{0}\right] d \log \vartheta_1 (x)$$

dove si intende che gli integrali sono calcolati percorrendo tratti *rettilinei* fra i due limiti.

Questa espressione la possiamo scrivere

$$\frac{1}{2\pi i}\left[\int_0^{\pi} d \log \vartheta_1 (x) + \int_{-i\log q}^{0} d \log \vartheta_1 (x) + \right.$$

$$\left. + \int_0^{-i\log q} d \log \vartheta_1 (x+\pi) + \int_{\pi}^{0} d \log \vartheta_1 (x - i \log q \right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\left[\int_0^{\pi} d \log \frac{\vartheta_1 (x)}{\vartheta_1 (x - i \log q)} + \right.$$

$$\left. + \int_0^{-i\log q} d \log \frac{\vartheta_1 (x+\pi)}{\vartheta_1 (x)}\right]$$

e tenendo conto delle relazioni del § 3 si ha:

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{\pi} d \log e^{2xi} = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{\pi} 2\, i\, d\, x = 1.$$

In forza del citato teorema possiamo allora conchiudere che nel parallelogrammo fondamentale la $\vartheta_1(x)$ non diventa zero che una volta sola, e propriamente nel punto $x = 0$. Dunque:

1.° *I soli punti-zero della funzione dispari* ϑ_1 *sono quelli della forma*

$$x = m\pi - n\, i \log q.$$

Le altre tre funzioni ϑ godono anche della proprietà di possedere un solo punto-zero in ciascuno dei parallelogrammi. Perchè sappiamo dalle solite formole del § 3 che si passa da ϑ_1 a ciascuna delle altre aggiungendo all'argomento un semiperiodo. La ϑ_1 così modificata è eguale ad un'altra della ϑ moltiplicata per un fattore costante e per un fattore esponenziale.

Ora questo fattore esponenziale non può diventare nè zero nè infinito per valore finito di x, dunque si ricava che, per es., $\vartheta(x)$ diventa zero solo nei punti in cui diventa zero

$$\vartheta_1\left(x - \frac{1}{2}\, i \log q\right);$$

$\vartheta_2(x)$ diventa zero solo nei punti in cui lo diventa

$$\vartheta_1\left(x + \frac{1}{2}\pi\right);$$

e $\vartheta_3(x)$ diventa zero solo nei punti in cui lo diventa

$$\vartheta_1\left(x + \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2} i \log q\right).$$

Abbiamo dunque che:

2.° *I soli punti-zero della funzione* $\vartheta_1(x)$ *sono quelli della forma*

$$x = \frac{1}{2} i \log q + m\pi - n i \log q;$$

3.° *I soli punti-zero della funzione* $\vartheta_2(x)$ *sono quelli della forma*

$$x = -\frac{1}{2}\pi + m\pi - n i \log q;$$

4.° *I soli punti-zero della funzione* $\vartheta_3(x)$ *sono quelli della forma*

$$x = -\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2} i \log q + m\pi - n i \log q$$

dove m n sono numeri interi qualunque positivi o negativi.

§ 16. **Sviluppo delle funzioni ϑ in prodotti infiniti a due indici.** — Una funzione intera (olomorfa; cioè che non ammette infiniti a distanza finita, come sono appunto le funzioni ϑ) può secondo la cosiddetta formola di Weierstrass svilupparsi in un prodotto infinito, ogni fattore del quale ha per radice uno dei punti-zero della funzione olomorfa stessa. È la generalizzazione della scomposizione in fattori di un polinomio razionale intero.

Siccome i punti-zero delle funzioni ϑ formano nel piano una *doppia* infinità di punti, così naturalmente lo sviluppo delle ϑ in prodotto infinito sarà uno sviluppo *in prodotto a doppio indice.*

Noi non ci fermeremo qui sul modo di ricercare un tale sviluppo, perchè queste formole non ci occorreranno per le cose che diremo in seguito e qui le diamo solo per rendere più completa la nostra raccolta di formole.

Esse sono le seguenti:

$$\vartheta(x) = \vartheta(0) \prod_{m,n} \left(1 - \frac{x}{m\pi - \left(n + \frac{1}{2}\right) i \log q}\right)$$

$$\vartheta_1(x) = \vartheta_1'(0)\, x \prod_{m,n} \left(1 - \frac{x}{m\pi - n\, i \log q}\right)$$

$$\vartheta_2(x) = \vartheta_2(0) \prod_{m,n} \left(1 - \frac{x}{\left(m + \frac{1}{2}\right)\pi - n\, i \log q}\right)$$

$$\vartheta_3(x) = \vartheta_3(0) \prod_{m,n} \left(1 - \frac{x}{\left(m + \frac{1}{2}\right)\pi - \left(n + \frac{1}{2}\right) i \log q}\right).$$

Si possono poi trovare delle formole per le quali le ϑ restino sviluppate in un prodotto infinito ad *un solo indice*; ogni fattore allora è un'espressione trigonometrica avente infinite radici.

Per brevità tralasciamo di dare questi altri sviluppi.

CAPITOLO II.

LE FUNZIONI ELLITTICHE DI LEGENDRE

§ 1. Introduzione della funzione amplitudine di Jacobi, e dei moduli k, k' di Legendre. — Poniamo:

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{k} &= \frac{\vartheta_2(0)}{\vartheta_3(0)} \\ \sqrt{k'} &= \frac{\vartheta(0)}{\vartheta_3(0)} \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Dalla relazione (1) § 10, Cap. I si ha allora subito la relazione

$$k^2 + k'^2 = 1.$$

Le quantità k, k' le chiameremo *moduli complementari.*

Facciamo ora le seguenti altre apposizioni.

Poniamo

$$\frac{\vartheta_3(0)}{\vartheta_2(0)} \frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)} = \operatorname{sen} \varphi \qquad (2)$$

e teniamo presente la seconda relazione (4) § 9, Cap. I che possiamo scrivere come segue

$$\frac{\vartheta(0)}{\vartheta_2(0)}\,\frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)} = \sqrt{1-\left(\frac{\vartheta_3(0)}{\vartheta_2(0)}\,\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)}\right)^2}.$$

Si ha allora che

$$\frac{\vartheta(0)}{\vartheta_2(0)}\,\frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)} = \cos\varphi. \tag{3}$$

E infine scrivendo la (3), § 9, Cap. I sotto la forma

$$\frac{\vartheta(0)}{\vartheta_3(0)}\,\frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)} = \sqrt{1-\left(\frac{\vartheta_2(0)}{\vartheta_3(0)}\,\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)}\right)^2}$$

si ha che

$$\frac{\vartheta(0)}{\vartheta_3(0)}\,\frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)} = \sqrt{1-k^2\operatorname{sen}\varphi}. \tag{4}$$

In questa maniera resta introdotta la quantità φ. I rapporti delle tre funzioni $\vartheta_1\,\vartheta_2\,\vartheta_3$ alla funzione ϑ si esprimono in modo facile tutti mediante la φ, e propriamente mediante le funzioni trigonometriche $\operatorname{sen}\varphi$, $\cos\varphi$, $\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}$. — La funzione $\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}$ si suole indicare col simbolo $\Delta\,\varphi$.

Mediante le formole precedenti la φ resta definita come una certa funzione di x. Per mettersi d'accordo colle formole che si trovano ordinariamente nei libri, noi introdurremo qui in luogo di x,

l'argomento

$$v = \vartheta_3^2(0) \,.\, x.$$

La φ sarà funzione di v e, seguendo Jacobi, questa funzione la chiamiamo *amplitudine*, e la rappresentiamo col simbolo $am\, v$; le funzioni *seno-amplitudine* v, *coseno-amplitudine* v, *delta-amplitudine* v che corrispondono a seno di φ, coseno di φ, delta di φ le indichiamo coi simboli abbreviati

$$\operatorname{sn} v, \quad \operatorname{cn} v, \quad \operatorname{dn} v.$$

Riassumendo abbiamo allora le formole:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)} &= \sqrt{k}\,\operatorname{sen}\varphi = \sqrt{k}\,\operatorname{sn} v \\
\frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)} &= \sqrt{\frac{k}{k'}}\cos\varphi = \sqrt{\frac{k}{k'}}\,\operatorname{cn} v \quad (v = \vartheta_3^2\, 0\,.\,x) \\
\frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)} &= \frac{1}{\sqrt{k'}}\,\Delta\varphi = \frac{1}{\sqrt{k'}}\operatorname{dn} v
\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Le tre funzioni $\operatorname{sn} v$, $\operatorname{cn} v$, $\operatorname{dn} v$ corrispondono alle tre funzioni ellittiche di Legendre. Scopo di questo capitolo sarà lo studio di queste tre funzioni. Queste funzioni si esprimono poi algebricamente l'una per l'altra mediante le formole

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{sn}^2 v + \operatorname{cn}^2 v &= 1 \\
\operatorname{dn}^2 v + k^2 \operatorname{sn}^2 v &= 1
\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

§ 2. **Teorema d'addizione per le funzioni ellittiche.** — Una delle proprietà importantissime delle funzioni ellittiche è quella contenuta nel cosiddetto *teorema d'addizione*, e che si riduce a questo: *fra la funzione presa per l'argomento* $v_1 \pm v_2$, *e quelle prese per gli argomenti semplici* v_1, v_2, *esiste una relazione algebrica razionale; e propriamente la prima si esprime razionalmente mediante le* sn, cn, dn *prese per gli argomenti semplici* v_1, v_2.

Colle formole che noi abbiamo già stabilite, possiamo assai facilmente dimostrare questa proprietà.

Ed infatti combinando fra loro le formole (1) (3) § 8, Cap. I, possiamo scrivere

$$\frac{\vartheta_2(0)}{\vartheta(0)}\,\frac{\vartheta_3(0)}{\vartheta(0)}\,\frac{\vartheta_1(x_1 \pm x_2)}{\vartheta(x_1 \pm x_2)} =$$

$$= \frac{\dfrac{\vartheta_1(x_1)}{\vartheta(x_1)}\,\dfrac{\vartheta_2(x_2)}{\vartheta(x_2)}\,\dfrac{\vartheta_3(x_2)}{\vartheta(x_2)} \pm \dfrac{\vartheta_1(x_2)}{(\vartheta x_2)}\,\dfrac{\vartheta_2(x_1)}{\vartheta(x_1)}\,\dfrac{\vartheta_3(x_1)}{\vartheta(x_1)}}{1 - \dfrac{\vartheta_1^2(x_1)}{\vartheta^2(x_1)}\,\dfrac{\vartheta_1^2(x_2)}{\vartheta^2(x_2)}}$$

$$\frac{\vartheta_2(0)}{\vartheta(0)}\,\frac{\vartheta_2(x_1 \pm x_2)}{\vartheta(x_1 \pm x_2)} =$$

$$= \frac{\dfrac{\vartheta_2(x_1)}{\vartheta(x_1)}\,\dfrac{\vartheta_2(x_2)}{\vartheta(x_2)} \mp \dfrac{\vartheta_1(x_1)}{\vartheta(x_1)}\,\dfrac{\vartheta_1(x_2)}{\vartheta(x_2)}\,\dfrac{\vartheta_3(x_1)}{\vartheta(x_1)}\,\dfrac{\vartheta_3(x_2)}{\vartheta(x_2)}}{1 - \dfrac{\vartheta_1^2(x_1)}{\vartheta^2(x_1)}\,\dfrac{\vartheta_1^2(x_2)}{\vartheta^2(x_2)}}$$

nella formola (2) e nelle sue analoghe, una tal corrispondenza è risoluta rispetto a φ. Ora ci vogliamo proporre il problema inverso; risolvere quella relazione rispetto ad x; vedere cioè in che modo x si esprime mediante la φ.

Troveremo che x si esprime mediante un integrale di cui uno dei limiti è φ, e che si chiamerà *integrale ellittico di 1.ª specie.*

Teniamo presente la prima delle formole del § precedente, sostituendo rispettivamente sen φ, cos φ, $\Delta\varphi$, alle funzioni sn v, cn v, dn v.

Introducendo la derivata rispetto a φ possiamo scrivere

$$\frac{d}{d\varphi}\operatorname{sen}\varphi \,.\, \frac{d\varphi}{dx} = \vartheta_2^2(0) \,.\, \cos\varphi \,.\, \Delta\varphi$$

cioè

$$\cos\varphi \,.\, \frac{d\varphi}{dx} = \vartheta_3^2(0) \,.\, \cos\varphi \,.\, \Delta\varphi$$

donde immediatamente:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \vartheta_3^2(0)\,\Delta\varphi$$

$$= \vartheta_3^2(0)\sqrt{1 - k^2\operatorname{sen}^2\varphi}$$

e quindi

$$v = \vartheta_3^2(0) \,.\, x = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\operatorname{sen}^2\varphi}} \qquad (1)$$

supposto che la corrispondenza fra φ e x si voglia fissare in modo che per $\varphi = 0$ anche $x = 0$.

Da questa formola si vede per quale ragione, come abbiamo avvertito nel paragrafo precedente, si suole prendere per argomento delle funzioni sn, cn, dn, non la semplice quantità x, ma la quantità $\vartheta_3^2(0).x$; in tal maniera si viene a prendere per argomento addirittura tutto l'integrale che sta al secondo membro e che ha una fondamentale importanza nella teoria delle funzioni ellittiche.

Dalla formola superiore appare inoltre un'altra cosa, ed è che le funzioni ϑ servono a risolvere il cosidetto *problema d'inversione*, cioè il problema di esprimere il limite superiore φ dell'integrale ellittico mediante l'integrale stesso che è x, a meno di un fattore costante. La formola (2) § 1, evidentemente risolve in tutto questo problema. Si potrebbe cominciare una esposizione della teoria delle funzioni ellittiche, col proporre prima d'ogni altro questo problema d'inversione e col cercare di risolverlo.

Il Legendre risolvette il problema coll'introduzione delle funzioni sn, cn, dn, di cui studiò le varie e singolari proprietà.

Fu Jacobi che si imbattè per il primo, nei suoi studi sulle funzioni ellittiche, nelle serie ϑ, (vedi *Fundamenta Nova*, Opere vol. 1.°), che poi egli in una posteriore Memoria (*Theorie der elliptischen Functionen, aus den eigenschaften der Thetareihen abgeleitet*, Opere, I, pag. 499) pose a capo di tutta la teoria delle funzioni ellittiche.

Si chiama *integrale completo* l'integrale esteso

da $\varphi = 0$ a $\varphi = \frac{\pi}{2}$ intendendo che il cammino d'integrazione sia il cammino rettilineo lungo l'asse reale.

Un tale integrale si suole indicare colla lettera K. Se invece di formare l'integrale col modulo k lo si forma col modulo complementare k', allora l'integrale completo corrispondente lo si indica con K'. Si ha quindi

$$\left.\begin{aligned} K &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} \\ K' &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k'^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

intendendo che i cammini d'integrazione sieno i tratti rettilinei fra i limiti segnati.

Passiamo ora a esprimere i valori delle ϑ per argomento zero mediante le costanti K, k.

Consideriamo i rapporti

$$\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)} \qquad \frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)}$$

e poniamo in essi $x = \frac{\pi}{2}$.

Tenendo presenti le formole del § 3 quei rap-

porti possono trasformarsi ponendo:

$$\frac{\vartheta_1\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\vartheta\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\vartheta_2(0)}{\vartheta_3(0)} = \sqrt{k}$$

$$\frac{\vartheta_2\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\vartheta\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{-\vartheta_1(0)}{\vartheta_3(0)} = 0.$$

Mediante le formole (5), § 1, Cap. II, si ha di qui

$$\operatorname{sen}\varphi = 1$$

$$\cos\varphi = 0$$

donde

$$\varphi = (4n+1)\frac{\pi}{2}$$

dove n è un numero *intero* ignoto.

Sostituendo nella formola (1) si ha

$$\vartheta_3^2(0)\frac{\pi}{2} = \int_0^{(4n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}}.$$

Il secondo membro di questa formola è indeterminato, fissato che sia il numero n; perchè resta

non ancora fissato il *cammino d'integrazione;* per ogni cammino d'integrazione, il numero n dovrà avere uno speciale valore, perchè l'eguaglianza sussista. Ora noi fissiamo che il cammino d'integrazione debba essere il cammino *rettilineo.* — Allora il numero n può facilmente determinarsi nel seguente modo: dovendo quella relazione sussistere per qualunque valore di q, poniamo $q = 0$ nel primo e secondo membro. È facile allora vedere che $k = 0$ perchè

$$\vartheta_2(0,0) = 0 \qquad \vartheta_3(0,0) = 1$$

e quindi l'integrale diventa

$$\int_0^{(4n+1)\frac{\pi}{2}} d\varphi = (4n+1)\frac{\pi}{2}.$$

È evidente allora che n non può essere che zero perchè il primo membro diventa semplicemente $\varphi \frac{\pi}{2}$.

Possiamo allora conchiudere la formola

$$\frac{\pi}{2}\vartheta_3^2\ 0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} = K$$

dove il secondo membro è K perchè il cammino d'integrazione è il cammino rettilineo giusta ciò che abbiamo fissato.

Di qui si ha:

$$\vartheta_3(0) = \sqrt{\frac{2K}{\pi}} \tag{3}$$

Dalle (1) § 1, Cap. II si hanno subito le altre formole

$$\left.\begin{aligned} \vartheta_2(0) &= \sqrt{\frac{2Kk}{\pi}} \\ \vartheta\ (0) &= \sqrt{\frac{2Kk'}{\pi}} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Mediante queste formole la relazione fra la x e la v resta trasformata così:

$$x = \frac{\pi v}{2K}.$$

§ 5. **Espressione del modulo** q **mediante** k. — Noi abbiamo definito k mediante una formola in cui compariscono i valori delle ϑ pari per argomento zero, e che quindi dipendono solo dal modulo q.

Ora ci proponiamo di risolvere il problema inverso: trovare q mediante k. Ci serviremo di un procedimento di Jacobi.

Partiamo dalle due formole di cui già ci siamo serviti precedentemente

$$\vartheta_3(0, q) = \vartheta_3(0, q^4) + \vartheta_2(0, q^4)$$

$$\vartheta\ (0, q) = \vartheta_3(0, q^4) - \vartheta_2(0, q^4)$$

Indichiamo con k_4, k_4', K_4, K_4' le quantità analoghe a k, k', K, K' quando invece del modulo q si sceglie il modulo q^4.

Servendosi delle formole (3) (4) del § 4, e delle due ultimamente segnate, possiamo scrivere le due altre:

$$\sqrt{K} = (1 + \sqrt{k_4})\sqrt{K_4}$$

$$\sqrt{Kk'} = (1 - \sqrt{k_4})\sqrt{K_1}$$

donde dividendo

$$\sqrt{k'} = \frac{1 - \sqrt{k_4}}{1 + \sqrt{k_4}}$$

e risolvendo rispetto a k_4 si ha

$$\sqrt{k_4} = \frac{1 - \sqrt{k'}}{1 + \sqrt{k'}}.$$

Queste due formole si prestano ad un' importante osservazione.

Se noi partiamo dal modulo k, per formare il modulo k_4 dobbiamo servirci della formola precedente, cioè dobbiamo formare prima il complementare di k che è k', e poi mediante la formola

$$\frac{1 - \sqrt{k'}}{1 + \sqrt{k'}}$$

formiamo il k_4. Immaginiamo ora di partire, anzichè dal modulo k, dal modulo k_4' complementare di k_4. Allora dobbiamo trovare prima il com-

plementare di k_4' che è k_4, e poi calcolare

$$\frac{1-\sqrt{k_4}}{1+\sqrt{k_4}}.$$

Ora per la formola di sopra, questa espressione è esattamente $\sqrt{k'}$; dunque possiamo conchiudere che se partiamo da k_4' e eseguiamo lo stesso procedimento che occorre per calcolare k_4, dato che sia k, giungiamo a k'.

Possiamo allora dalla formola trovata sopra

$$K = (1+\sqrt{k_4})^2 K_4$$

ricavarne un' altra mutando

k	in	k_4'
K	in	K_4'
k'	in	k_4
K'	in	K_4
k_4	in	k'
K_4	in	K'
k_4'	in	k
K_4'	in	K

colle quali trasformazioni si ha la formola

$$K_4' = (1+\sqrt{k'})^2 K'$$

donde

$$\frac{K_4'}{K_4} = 4\frac{K'}{K}$$

essendo

$$(1+\sqrt{k'})(1+\sqrt{k_4}) = 2.$$

Questa formola ci mostra un'elegante proprietà del rapporto dei due integrali completi K', K.

Questa proprietà è la seguente: *se si considerano K K' funzioni di q, e se si muta q in q^4, il rapporto $\frac{K'}{K}$ resta moltiplicato per 4.*

Come si vede è questa una proprietà analoga a quella della funzione logaritmica. Per modo che la funzione

$$\frac{K \log q}{K'}$$

deve restare inalterata, mutando q in q^4; e così analogamente mutando poi q^4 in q^{16}, in q^{64}, ecc. E poichè la serie di grandezze $q, q^4, q^{16}, q^{64}, \ldots$ è formata di quantità in valore assoluto sempre più piccole e tendenti allo zero (perchè mod $q < 1$), così possiamo dire che il rapporto

$$\frac{K \log q}{K'}$$

è eguale al suo limite per $q = 0$. Resta dunque a trovare il valore di un tal limite.

Per $q = 0$ anche $k = 0$; dalla formola di definizione di k, tenendo presenti gli sviluppi in serie delle ϑ, si ricava che

$$\lim_{q=0} \frac{k^2}{16\,q} = 1.$$

Inoltre per $k = 0$ il K tende a $\frac{\pi}{2}$; quindi possiamo dire che

$$\lim_{q=0} \frac{K \log q}{K'} = \frac{\pi}{2} \lim_{q=0} \frac{\log \frac{k^2}{16}}{K'}.$$

Ora si può far vedere che il limite che compare al secondo membro è eguale a -2.

Si ha così infine la formola

$$q = e^{-\pi \frac{K'}{K}}. \qquad (1)$$

Dovendo q avere il suo modulo minore di 1, si ricava che *il rapporto* $\frac{K'}{K}$ *deve avere la sua parte reale positiva diversa da zero.*

Per dimostrare che

$$\lim_{q=0} \frac{\log \frac{k^2}{16}}{K'} = 2$$

o, ciò che è lo stesso,

$$\lim_{k=0} \frac{K'}{\log \frac{4}{k}} = 1$$

procediamo nel seguente modo.

Essendo

$$K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k'^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}$$

colla sostituzione

$$z = k \operatorname{tg} \varphi$$

si ha

$$K' = \int_0^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{(1+z^2)(k^2+z^2)}}$$

che possiamo scrivere in forza di una proprietà elementare degli integrali definiti, e in forza dei cosidetti teoremi del valor medio,

$$K' = \int_0^{\sqrt{k}} + \int_{\sqrt{k}}^{\infty} = \left(\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\right)_{0,\sqrt{k}} \int_0^{\sqrt{k}} \frac{dz}{\sqrt{k^2+z^2}} +$$

$$+ \left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{z^2}}}\right)_{\sqrt{k},\infty} \int_{\sqrt{k}}^{\infty} \frac{dz}{z\sqrt{1+z^2}}$$

dove con i simboli

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\right)_{0,\sqrt{k}} \qquad \left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{z^2}}}\right)_{\sqrt{k},\infty}$$

si intendono valori di quelle funzioni in parentesi per valori di z compresi rispettivamente fra 0 e $\sqrt{k}$, e fra $\sqrt{k}$ e ∞.

Ora facciamo nel primo integrale la sostituzione

$$\frac{z}{k} = u$$

e nel secondo integrale la sostituzione

$$z = \frac{1}{u}.$$

Allora ambedue diventano eguali a

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{k}}} \frac{du}{\sqrt{1+u^2}}.$$

Si ha quindi

$$K' = \left[\left(\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\right)_{0,\sqrt{k}} + \left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{z^2}}}\right)_{\sqrt{k},\infty}\right] \int_0^{\frac{1}{\sqrt{k}}} \frac{du}{\sqrt{1+u^2}}.$$

Ora

$$\int_0^u \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \log\left(u + \sqrt{1+u^2}\right)$$

onde l'integrale precedente è eguale a

$$\log\left(\frac{1}{\sqrt{k}} + \sqrt{1+\frac{1}{k}}\right) = \log\frac{1}{\sqrt{k}} + \log\left(1+\sqrt{1+k}\right).$$

Il primo fattore nell'espressione di K' è eguale a $2+\eta$ dove η è una quantità che tende a zero con k; onde possiamo infine scrivere

$$\left(2+\eta\right)\left(\frac{1}{2}\log\frac{1}{k} + \log 2 + \varepsilon\right)$$

essendo ε una quantità che tende anche a zero con $k=0$. Si vede quindi che il limite di

$$\frac{K'}{\log\frac{1}{k} + 2\log 2}$$

cioè di

$$\frac{K'}{\log\frac{4}{k}}$$

è l'unità, come si volea dimostrare.

§ 6. **Periodicità delle funzioni di Legendre.** — Le funzioni di Legendre si esprimono come rapporti delle ϑ; ora queste si riproducono quando l'argo-

mento x si aumenta di

$$\pi, \qquad -i \log q,$$

dunque possiamo dire che le sn, cn, dn, si dovranno riprodurre quando x si aumenta di queste quantità, ovvero, ciò che è lo stesso, quando v si aumenta di

$$\vartheta_3^2(0) \,.\, \pi, \qquad -i\,\vartheta_3^2(0) \log q.$$

Queste due quantità, per effetto delle formole (3) § 4, e (1) § 5, sono rispettivamente

$$2K, \qquad 2iK'.$$

Possiamo adunque fin da ora prevedere che le quantità $2K$, $2iK'$ dovranno comparire nello studio della periodicità delle funzioni di Legendre.

Per trovare le formole corrispondenti basta tener presenti le formole del § 3, Cap. I e le (5) § 1. Cap. II. Si hanno allora le seguenti:

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{sn}(v+2K) &= -\operatorname{sn} v \\
\operatorname{cn}(v+2K) &= -\operatorname{cn} v \\
\operatorname{dn}(v+2K) &= \operatorname{dn} v \\
\operatorname{sn}(v+2iK') &= \operatorname{sn} v \\
\operatorname{cn}(v+2iK') &= -\operatorname{cn} v \\
\operatorname{dn}(v+2iK') &= -\operatorname{dn} v
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Da queste appare che, a differenza delle ϑ, queste funzioni si riproducono non moltiplicate per

altro fattore che ± 1, e ciò sia per il primo periodo $2K$, che per il secondo $2iK'$.

Aggiungendo opportunamente all'argomento v un'altra volta le quantità $2K$, $2iK'$ si possono ottenere formole i cui secondi membri sono tutti positivi.

Da queste formole appare che:

1.° $\operatorname{sn} v$ resta inalterato in valore e in segno, aumentando l'argomento di

$$4K, \qquad 2iK'.$$

2.° $\operatorname{cn} v$ resta inalterata aumentando l'argomento di

$$4K, \qquad 4iK'.$$

3.° $\operatorname{dn} v$ resta inalterata aumentando l'argomento di

$$2K, \qquad 4iK'.$$

A differenza delle ϑ le funzioni di Legendre sono funzioni *periodiche* nel senso puro. Le ϑ invece si riproducono ma moltiplicate per un fattore.

Si possono poi nella stessa maniera ottenere le formole che danno la trasformazione delle funzioni di Legendre quando l'argomento si aumenta delle

semplici quantità K, iK'. Si ottiene così:

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{sn}(v+K) &= \frac{\operatorname{cn} v}{\operatorname{dn} v} \\
\operatorname{cn}(v+K) &= -k'\frac{\operatorname{sn} v}{\operatorname{dn} v} \\
\operatorname{dn}(v+K) &= \frac{k'}{\operatorname{dn} v} \\
\operatorname{sn}(v+iK') &= \frac{1}{k\operatorname{sn} v} \\
\operatorname{cn}(v+iK') &= \frac{\operatorname{dn} v}{ik\operatorname{sn} v} \\
\operatorname{dn}(v+iK') &= \frac{\operatorname{cn} v}{i\operatorname{sn} v}
\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

§ 7. **Zeri e infiniti delle funzioni di Legendre.** — Dalle cose dette per le funzioni ϑ è facile ricavare in quali punti le funzioni sn, cn, dn diventano zero o infinite.

Consideriamo la prima delle tre funzioni; essa diventa zero nei punti in cui lo diventa $\vartheta_1(x)$, e diventa infinita nei punti in cui $\vartheta(x)$ diventa zero.

Questi punti sono in numero infinito; ma a noi occorre notare quelli che sono compresi nell'interno del parallelogrammo fondamentale dei periodi.

Chiamiamo parallelogrammo fondamentale dei

periodi per la funzione sn v quello che ha per vertici i punti 0, $4K$, $2iK'$, $4K+2iK'$.

Dividendo il piano delle v in infiniti altri parallelogrammi congruenti a questo, ad ogni punto del piano appartenente a qualunque altro parallelogrammo, corrisponde sempre un punto nel parallelogrammo fondamentale in cui la sn ha il medesimo valore.

Così per la cn v il parallelogrammo fondamentale ha per lati $4K$, $4iK'$; e per la dn v ha per lati $2K$, $4iK'$.

Tenendo presenti i risultati del § 12. Cap. I si ha che le tre funzioni diventano infinite nei medesimi punti della forma

$$v = 2mK + (2n+1)iK'$$

Nello stesso modo gli zeri di sn v sono della forma

$$v = 2mK + 2niK';$$

quelli di cn v sono

$$v = (2m+1)K + 2niK'$$

e quelli di dn v sono

$$v = (2m+1)K + (2n+1)iK'$$

§ 8. **Degenerazione delle funzioni ellittiche di Legendre.** — Vogliamo esaminare che cosa diventano le funzioni ellittiche quando il modulo k acquista dei valori limiti. Allora esse degenerano in fun-

zioni ordinarie, e propriamente diventano secondo i casi o funzioni trigonometriche o funzioni esponenziali. Considereremo prima il caso di $k=0$.

Allora

$$v=\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}}$$

diventa semplicemente

$$v=\int_0^{\varphi}d\varphi=\varphi.$$

E poichè $\varphi=\operatorname{am} v$ si ha che la funzione *amplitudine* diventa la variabile stessa.

L'integrale completo K diventa eguale a $\frac{\pi}{2}$.

E poichè $k'^2=1$ si ha

$$K'=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\cos\varphi}=$$

$$=\left[\log\frac{1+\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\infty.$$

Essendo poi $q = e^{-\pi \frac{K'}{K}}$ si ha $q = 0$, e quindi le funzioni ϑ diventano rispettivamente

$$\vartheta\,(x) = 1$$

$$\vartheta_1\,(x) = 0$$

$$\vartheta_2\,(x) = 0$$

$$\vartheta_3\,(x) = 1.$$

La funzione dn v diventa eguale ad 1, e le funzioni sn v, cn v diventano rispettivamente sen v, cos v.

Passiamo ora al caso $k^2 = 1$ $k'^2 = 0$; allora viceversa si ha $K = \infty$, $K' = \frac{\pi}{2}$.

L'argomento v diventa

$$v = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\cos\varphi} = \left[\log \frac{1 + \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{1 - \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}} \right]_0^{\varphi}$$

$$= \log \frac{1 + \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{1 - \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}$$

donde si ha

$$e^v = \frac{1 + \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{1 - \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{e^v - 1}{e + 1}$$

$$\operatorname{sn} v = \operatorname{sen}\varphi = \frac{e^v - e^{-v}}{e^v + e^{-v}}$$

$$\operatorname{cn} v = \cos\varphi = \frac{2}{e^v + e^{-v}}$$

$$\operatorname{dn} v = \cos\varphi$$

Come si vede, le funzioni ellittiche diventano funzioni esponenziali. In quanto poi alle serie ϑ esse diventano delle serie divergenti perchè il modulo q diventa eguale ad 1.

CAPITOLO III.

LE QUATTRO FUNZIONI σ DI WEIERSTRASS.

§ 1. **Costruzione della funzione σ dispari.** — Le funzioni di cui discorreremo in questo capitolo e la funzione p di cui si tratterà nel capitolo seguente, sono di data recente nella scienza; esse surrogano rispettivamente le funzioni ϑ e le funzioni sn, cn, dn, e hanno su queste il vantaggio di soddisfare ad alcune proprietà più semplici. Per il calcolo numerico però si prestano sempre meglio le antiche funzioni ϑ i cui sviluppi in serie soddisfanno a leggi molto semplici.

La maggiore importanza teorica delle σ rispetto alle ϑ si trova nella teoria della trasformazione lineare dei periodi, di cui parleremo in seguito. Per una *trasformazione lineare di periodi* le ϑ si scambiano fra loro moltiplicate per un fattore esponenziale di 2.° grado, e invece le σ si scambiano fra loro *semplicemente*.

Le funzioni σ di Weierstrass non sono che le ϑ di Jacobi moltiplicate per un fattore esponenziale di 2.° grado.

Esaminiamo con che criterio si incomincia col costruire la σ dispari.

Poniamo:

$$x = \frac{\pi u}{2\omega}$$

dove ω è una quantità costante di cui troveremo poi il significato, e u è il nuovo argomento che vogliamo sostituire a x ovvero a v del capitolo precedente.

Formiamo allora la seguente funzione

$$C e^{Au^2} \vartheta_1 (x)$$

dove A, C sono due costanti tali che lo sviluppo di quella espressione secondo le potenze ascendenti di u, manchi del termine in u^3, e abbia l'unità per coefficiente del primo termine.

Essendo ϑ_1 una funzione intera di x o, se si vuole, di u, e inoltre una funzione dispari, la funzione sopra scritta sarà ancora *intera* e *dispari*, e quindi il suo sviluppo in serie conterrà solo le potenze dispari positive di u.

Colla formola del Taylor cerchiamo questo sviluppo, si ha

$$C e^{Au^2} \vartheta_1 \left(\frac{\pi u}{2\omega}\right) = \left[2 C A u e^{Au^2} \vartheta_1 \left(\frac{\pi u}{2\omega}\right) + \right.$$

$$\left. + C e^{Au^2} \frac{\pi}{2\omega} \vartheta'_1 \left(\frac{\pi u}{2\omega}\right)\right]_{u=0} u +$$

$$+\left[2\,C\,A\,e^{Au^2}\vartheta_1\left(\frac{\pi u}{2\omega}\right)+4\,C\,A^2u^2e^{Au^2}\vartheta_1\left(\frac{\pi u}{2\omega}\right)+\right.$$

$$+4\,C\,A\,u\frac{\pi}{2\omega}e^{Au^2}\vartheta_1'\left(\frac{\pi u}{2\omega}\right)+$$

$$\left.+C\frac{\pi^2}{4\omega^2}e^{Au^2}\vartheta_1''\left(\frac{\pi u}{2\omega}\right)\right]_{u=0}\frac{u^2}{2!}+$$

$$+\left[T+6\,C\,A\frac{\pi}{2\omega}e^{Au^2}\vartheta_1'\left(\frac{\pi u}{2\omega}\right)+\right.$$

$$\left.+C\frac{\pi^3}{8\omega^3}e^{Au^2}\vartheta_1'''\left(\frac{\pi u}{2\omega}\right)\right]_{u=0}\frac{u^3}{3!}+\ldots$$

dove si è indicato con T l'assieme di tanti termini che vanno a zero per $u=0$, e dove evidentemente tutti i termini che moltiplicano u^2 vanno a zero.

Eseguendo i calcoli si ha dunque

$$=\frac{C\pi}{2\omega}\vartheta_1'(0)\,.\,u+$$

$$+\left[C\frac{\pi^3}{48\omega^3}\vartheta_1'''(0)+C\,A\frac{\pi}{2\omega}\vartheta_1'(0)\right]u^3+\ldots$$

Vogliamo ora determinare C, A in modo che sia zero il coefficiente di u^3, e che sia 1 il primo coefficiente. Poniamo perciò

$$\frac{C\pi\vartheta_1'(0)}{2\omega}=1$$

$$A\,\vartheta_1'(0) + \frac{\pi^2}{24\,\omega^2}\,\vartheta_1'''(0) = 0$$

donde

$$C = \frac{2\,\omega}{\pi\,\vartheta_1'(0)}$$

$$A = -\frac{1}{24}\,\frac{\pi^2}{\omega^2}\,\frac{\vartheta_1'''(0)}{\vartheta_1'(0)}.$$

La funzione così ottenuta la chiamiamo $\sigma\,(u)$; abbiamo cioè per definizione della σ dispari di Weierstrass la formola

$$\sigma(u) = \frac{2\,\omega}{\pi}\,e^{-\frac{1}{24}\frac{\pi^2}{\omega^2}\frac{\vartheta_1'''(0)}{\vartheta_1'(0)}u^2}\,\frac{\vartheta_1\left(\frac{\pi\,u}{2\,\omega}\right)}{\vartheta_1'(0)}.$$

Si noti però che qui coi simboli $\vartheta_1'\,\vartheta_1'''$ si intendono le derivate fatte rispetto ad x e non rispetto ad u.

Ponendo

$$\eta = -\frac{1}{12}\,\frac{\pi^2}{\omega}\,\frac{\vartheta_1'''(0)}{\vartheta_1'(0)}$$

si ha infine:

$$\sigma(u) = \frac{2\,\omega}{\pi}\,e^{\frac{1}{2}\frac{\eta}{\omega}u^2}\,\frac{\vartheta_1\left(\frac{\pi\,u}{2\,\omega}\right)}{\vartheta_1'(0)}.$$

§ 2. **Introduzione delle tre σ pari.** — Come abbiamo costruito la σ dispari mediante la ϑ dispari, così con formole assai analoghe possono costruirsi le σ pari. La σ dispari è il prodotto della ϑ dispari per una costante e per un fattore esponenziale di 2.° grado; la costante è determinata in modo che sia 1 il coefficiente del primo termine dello sviluppo in serie.

Le tre σ pari risultano formate nella stessa maniera; il fattore esponenziale di 2.° grado è il medesimo per tutte le σ, ed abbiamo visto, per il calcolo fatto, che è propriamente.

$$e^{\frac{1}{2}\frac{\eta}{\omega}u^2}$$

e la costante è determinata poi sempre in modo che sia 1 il primo coefficiente dello sviluppo.

Abbiamo allora tutti gli elementi per costruire le tre σ pari; per uniformarci alle notazioni abitualmente adoperate notiamo che le tre σ pari si indicano coi tre indici 1, 2, 3, e che propriamente $\sigma_1\ \sigma_2\ \sigma_3$ corrispondono rispettivamente alle funzioni ϑ_2, ϑ_3, ϑ.

Si hanno cioè le formole

$$e^{\frac{1}{2}\frac{\eta}{\omega}u^2}\frac{\vartheta_2\left(\frac{\pi u}{2\omega}\right)}{\vartheta_2(0)} = \sigma_1(u)$$

$$e^{\frac{1}{2}\frac{\eta}{\omega}u^2}\frac{\vartheta_3\left(\frac{\pi u}{2\omega}\right)}{\vartheta_3(0)} = \sigma_2(u)$$

$$e^{\frac{1}{2}\frac{\eta}{\omega}u^2}\frac{\vartheta\left(\frac{\pi u}{2\omega}\right)}{\vartheta(0)}=\sigma_3(u)$$

costruite appunto, sempre col medesimo fattore esponenziale, e in maniera che per $u=0$ tutte queste funzioni diventino eguali ad 1.

Non vogliamo tralasciare di notare una proprietà di queste σ pari ed è che *lo sviluppo in serie del prodotto delle tre σ pari manca del termine di 2.° ordine in u.*

In effetti lo sviluppo della prima di quelle σ è

$$1+\left[\frac{1}{2}\frac{\eta}{\omega}+\frac{1}{2}\frac{\pi^2}{4\omega^2}\frac{\vartheta_2''(0)}{\vartheta_2(0)}\right]u^2+\ldots$$

e così per le altre, e quindi lo sviluppo del prodotto è

$$1+\left[\frac{3}{2}\frac{\eta}{\omega}+\frac{1}{8}\frac{\pi^2}{\omega^2}\left(\frac{\vartheta_2''(0)}{\vartheta_2(0)}+\frac{\vartheta_3''(0)}{\vartheta_3(0)}+\frac{\vartheta''(0)}{\vartheta(0)}\right)\right]u^2+\ldots$$

Ora per effetto della relazione trovata in fine del § 10 Cap. I la quantità dentro parentesi è

$$\frac{3}{2}\frac{\eta}{\omega}+\frac{1}{8}\frac{\pi^2}{\omega^2}\frac{\vartheta_1'''(0)}{\vartheta_1'(0)}$$

che è identicamente zero per effetto del valore di η dato nel § precedente. Con ciò resta dimostrata la proprietà enunciata.

Questa proprietà è importante per il fatto che si generalizza al caso iperellittico; mediante essa potrebbe calcolarsi il fattore esponenziale che occorre per la costruzione delle σ mediante le ϑ, e che noi abbiamo calcolato nel § precedente con una via diversa.

Nel caso iperellittico questa proprietà sussiste, ma non sussiste invece più quella di cui ci siamo serviti nel paragrafo precedente per il calcolo del fattore esponenziale.

A proposito del fattore esponenziale, che come si vede ha molta importanza in questi calcoli, noi vogliamo osservare che esso può porsi sotto la forma:

$$e^{-\frac{1}{24}\frac{\pi^2}{\omega^2}\left(\frac{\vartheta''(0)}{\vartheta(0)}+\frac{\vartheta_2''(0)}{\vartheta_2(0)}+\frac{\vartheta_3''(0)}{\vartheta_3(0)}\right)u^2}$$

e tenendo conto delle equazioni differenziali cui soddisfano le ϑ, possiamo scrivere

$$\frac{\vartheta''(0)}{\vartheta(0)} = -4\,\frac{\dfrac{\partial\,\vartheta(0)}{\partial \log q}}{\vartheta(0)}$$

$$= -4\,\frac{\partial \log \vartheta(0)}{\partial \log q}$$

e quindi il fattore esponenziale è

$$e^{\frac{1}{6}\frac{\pi^2}{\omega^2}\frac{\partial \log[\vartheta(0)\vartheta_2(0)\vartheta_3(0)]}{\partial \log q}u^2}.$$

Questa forma per il fattore esponenziale è assai

caratteristica, ed essa trova poi la sua perfetta generalizzazione nel caso iperellittico

§ 3. **Formole di periodicità delle funzioni σ.** — Poniamo

$$\log q = i\pi\tau = i\pi\frac{\omega'}{\omega}$$

introducendo così una quantità ω' come prima abbiamo introdotta la quantità ω.

Dovendo q avere il suo modulo minore di 1, e quindi $\log q$ la sua parte reale negativa, si ha *che* $\frac{\omega'}{\omega} = \tau$ *deve avere la sua parte immaginaria positiva diversa da zero.*

Essendo poi

$$x = \frac{\pi u}{2\omega}$$

si vede che i due incrementi dell'argomento x

$$x = \pi \qquad x = -i\log q$$

che compariscono nelle formole di periodità delle ϑ, corrispondono agli incrementi di u

$$u = 2\omega, \qquad u = 2\omega'.$$

Ne ricaviamo quindi che le σ devono, a meno di un fattore, restare inalterate quando l'argomento u si aumenta di 2ω, ovvero di $2\omega'$.

Le quantità 2ω, $2\omega'$ si sogliono chiamare i *moduli di periodicità* di 1.ª specie, ovvero *periodi* di 1.ª specie.

Dovendo $\frac{\omega'}{\omega}$ avere la sua parte immaginaria positiva diversa da zero, si ricava che i punti

$$u = 2\,\omega, \qquad u = 2\,\omega'$$

non staranno allineati col punto $u = 0$; questi tre punti quindi formano i vertici di un parallelogrammo con area diversa da zero.

Disegniamo questo parallelogrammo che chiameremo *parallelogrammo fondamentale dei periodi*, e immaginiamo poi scomposto tutto il piano in tanti parallelogrammi congruenti come si è fatto al § 7 del Cap. II.

Vogliamo ora trovare le formole di periodicità delle σ. Si ha, partendo dalla definizione

$$\sigma(u + 2\,\omega) = -\frac{2\,\omega}{\pi}\, e^{\frac{1}{2}\frac{\eta}{\omega}(u^2+4u\omega+4\omega^2)}\, \frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta_1'(0)}$$

$$= -\frac{2\,\omega}{\pi}\, e^{\frac{1}{2}\frac{\eta}{\omega}u^2}\, \frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta_1'(0)}\, e^{2\eta(u+\omega)}$$

$$= -\sigma(u)\, e^{2\eta(u+\omega)}$$

$$\sigma(u + 2\,\omega') =$$

$$= -q^{-1}\, e^{-i\frac{\pi u}{\omega}}\, \frac{2\,\omega}{\pi}\, e^{\frac{1}{2}\frac{\eta}{\omega}u^2}\, \frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta_1'(0)}\, e^{\frac{1}{2}\frac{\eta}{\omega}(4\omega' u+4\omega'^2)}$$

$$= e^{-i\pi\frac{\omega'}{\omega}-i\pi\frac{u}{\omega}}\, \sigma(u)\, e^{2\eta\frac{\omega'}{\omega}(u+\omega')}$$

$$= -\sigma(u)\, e^{\left(2\eta\frac{\omega'}{\omega}-\frac{i\pi}{\omega}\right)(u+\omega')}$$

e ponendo

$$\left.\begin{aligned} \eta' &= \frac{\eta\,\omega' - \frac{i\,\pi}{2}}{\omega} \\ \text{cioè} \qquad & \\ \eta\,\omega' - \eta'\,\omega &= \frac{i\,\pi}{2} \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

si ha

$$\sigma(u + 2\,\omega') = -\,\sigma(u)\,e^{2\eta'(u+\omega')}.$$

Come si vede, mediante le notazioni introdotte si ha in queste formole una rilevante simmetria; ma c'è ancora dippiù, ed è che le formole di periodicità delle altre σ sono le stesse di queste (salvo i segni). Inoltre è notevole questo, che se vogliamo calcolare

$$\sigma(u + 2\,\omega'') \qquad (\text{ponendo } \omega'' = \omega + \omega')$$

si ha un formola perfettamente simile solo che invece di ω, η ovvero di ω', η' ci sono le quantità

$$\omega'' = \omega + \omega'$$

$$\eta'' = \eta + \eta'.$$

In effetti

$$\begin{aligned} \sigma(u + 2\,\omega'') &= -\,\sigma(u + 2\,\omega')\,e^{2\eta(u+2\omega'+\omega)} \\ &= \sigma(u)\,e^{2\eta'(u+\omega')+2\eta(u+2\omega'+\omega)} \\ &= \sigma(u)\,e^{2(\eta+\eta')u+2\eta\omega+2\eta'\omega'+4\eta\omega'} \end{aligned}$$

e per le formole (1) si ha

$$= -\sigma(u)\, e^{2\eta''(u+\omega'')}.$$

Nella stessa maniera possiamo trovare le formole di periodicità delle altre tre σ pari.

Si trova:

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_1(u+2\omega) &= -e^{2\eta(u+\omega)}\,\sigma_1(u)\\
\sigma_1(u+2\omega') &= +e^{2\eta'(u+\omega')}\,\sigma_1(u)\\
\sigma_2(u+2\omega) &= +e^{2\eta(u+\omega)}\,\sigma_2(u)\\
\sigma_2(u+2\omega') &= +e^{2\eta'(u+\omega')}\,\sigma_2(u)\\
\sigma_3(u+2\omega) &= +e^{2\eta(u+\omega)}\,\sigma_3(u)\\
\sigma_3(u+2\omega') &= -e^{2\eta'(u+\omega')}\,\sigma_3(u).
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Come si vede in queste formole e in quelle relative alla σ dispari, il fattore per cui è moltiplicato il secondo membro è sempre il medesimo ed è propriamente

$$e^{2\eta(u+\omega)}$$

ovvero

$$e^{2\eta'(u+\omega')}$$

secondochè si tratti dell'aggiunzione del periodo ω ovvero del periodo ω'.

Una osservazione bisogna aggiungere relativamente a queste formole; abbiamo detto che il fattore del secondo membro è sempre il medesimo; ma non è invece lo stesso il segno. I segni sono

propriamente i seguenti:

per la σ i segni sono $-$, $-$

per la σ_1 „ $-$, $+$

per la σ_2 „ $+$, $+$

per la σ_3 „ $+$, $-$

intendendo che il primo segno si riferisca alla formola del periodo 2ω, e il secondo alla formola del periodo $2\omega'$. Si vede che quelle quattro coppie di segni esauriscono tutte le possibili combinazioni.

Le quantità 2η, $2\eta'$ si sogliono chiamare *moduli di periodicità di 2.ª specie*, o *periodi di 2.ª specie*. Essi si possono esprimere colle formole

$$\eta = \frac{\sigma'(\omega)}{\sigma(\omega)}, \quad \eta' = \frac{\sigma'(\omega')}{\sigma(\omega')}, \quad \eta'' = \frac{\sigma'(\omega'')}{\sigma(\omega'')}$$

che si possono facilmente ricavare derivando le formole di periodicità di σ e poi ponendo $u = -\omega$, $-\omega'$, $-\omega''$ rispettivamente.

§ 4. **Formole relative al caso in cui l'argomento si accresce di semiperiodi.** — Quando l'argomento si accresce di semiperiodi, cioè delle quantità ω, ω' allora le ϑ si scambiano fra loro, coll'aggiunzione di un fattore esponenziale.

Questo fatto che si verifica per le funzioni ϑ, si verifica naturalmente anche per le σ; però al solito per le σ le formole relative hanno una maggiore simmetria.

Per trovarle bisogna tener presenti le formole del § 3, Cap. I. Si ha:

$$\sigma(u+\omega) = \frac{2\omega}{\pi} e^{\frac{1}{2}\frac{\eta}{\omega}(u+\omega)^2} \frac{\vartheta_1\left(x+\frac{1}{2}\pi\right)}{\vartheta_1'(0)}$$

$$= \sigma(\omega) e^{\eta u} e^{\frac{1}{2}\frac{\eta}{\omega}u^2} \frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta_2(0)}$$

$$= \sigma(\omega) e^{\eta u} \sigma_1(u)$$

$$\sigma(u+\omega') = \sigma(\omega') e^{\eta' u} \sigma_3(u)$$

$$\sigma(u+\omega'') = \sigma(\omega'') e^{\eta'' u} \sigma_2(u).$$

Da queste formole potrebbero trovarsi facilmente quelle relative alle σ_1, σ_2, σ_3.

Essendo poi

$$\sigma(0) = 0 = \sigma(2\omega) = \sigma(2\omega') = \sigma(2\omega'')$$

si ha

$$\sigma_1(\omega) = 0 \qquad \sigma_2(\omega'') = 0 \qquad \sigma_3(\omega') = 0.$$

Inoltre si possono avere subito le seguenti altre formole:

$$\sigma_1(\omega') = \frac{\sigma(\omega'')}{\sigma(\omega)} e^{-\eta\omega'}$$

$$\sigma_1(\omega'') = -\frac{\sigma(\omega')}{\sigma(\omega)} e^{\eta\omega'}$$

$$\sigma_2(\omega) = \frac{\sigma(\omega')}{\sigma(\omega'')} e^{\eta''\omega}$$

$$\sigma_2(\omega'') = \frac{\sigma(\omega)}{\sigma(\omega'')} e^{-\eta''\omega'}$$

$$\sigma_3(\omega) = \frac{\sigma(\omega'')}{\sigma(\omega')} e^{-\eta'\omega}$$

$$\sigma_3(\omega') = -\frac{\sigma(\omega)}{\sigma(\omega')} e^{\eta'\omega''}$$

$$\sigma(\omega) = \frac{2\omega}{\pi} e^{\frac{1}{2}\eta\omega} \frac{\vartheta_2(0)}{\vartheta_1'(0)}$$

$$\sigma(\omega') = i\frac{2\omega}{\pi} e^{\frac{1}{2}\eta'\omega'} \frac{\vartheta(0)}{\vartheta_1'(0)}$$

$$\sigma(\omega'') = \sqrt{i}\frac{2\omega}{\pi} e^{\frac{1}{2}\eta''\omega''} \frac{\vartheta_3(0)}{\vartheta_1'(0)}.$$

§ 5. **Formole varie relative alle σ, ricavate da formole per le ϑ.** — Dalle ultime formole del paragrafo precedente, tenendo presenti le relazioni fra le ϑ e ϑ_1' per argomento zero, si ricavano subito le due relazioni

$$\sigma(\omega)\,\sigma(\omega')\,\sigma(\omega'') = i\sqrt{i}\,\frac{8\omega^3}{\pi^3} e^{\frac{1}{2}(\eta\omega+\eta'\omega'+\eta''\omega'')}$$

$$e^{-2\eta\omega}\,\sigma^4(\omega) + e^{-2\eta'\omega'}\,\sigma^4(\omega') + e^{-2\eta''\omega''}\,\sigma^4(\omega'') = 0.$$

Dalla 1.ª delle formole (4) del § 8, Cap. I per $x_2 = x_1$, si ha

$$\vartheta(0)\,\vartheta_2(0)\,\vartheta_3(0)\,\vartheta_1(2x) = 2\,\vartheta_1(x)\,\vartheta(x)\,\vartheta_2(x)\,\vartheta_3(x).$$

Sostituendo alle ϑ le σ corrispondenti, da questa formola abbiamo subito l'altra:

$$\sigma(2u) = 2\,\sigma(u)\,\sigma_1(u)\,\sigma_2(u)\,\sigma_3(u).$$

§ 6. **Equazione a tre termini per la funzione σ dispari e formola d'addizione per la stessa funzione** — Sappiamo che la funzione $\vartheta_1(x)$ soddisfa alla cosiddetta *equazione a tre termini* (v. Cap. I, § 11.) Ora è facile mostrare che ad una simile relazione soddisfa ogni funzione formata moltiplicando la ϑ_1 per un fattore esponenziale di 2.° grado, e quindi anche la funzione σ.

In effetti, teniamo presente la formola (4) § 11. Cap. I. Essendo il primo membro di quella formola omogeneo rispetto alla ϑ_1, se questa si moltiplica per un fattore costante C, ogni termine resta moltiplicato per C^4. Inoltre moltiplicando ancora ϑ_1 per un fattore del tipo

$$e^{Ax^2},$$

il primo termine della formola resta moltiplicato per

$$e^{A[(x_1+x_2)^2+(x_1-x_2)^2+(x_3+x_4)^2+(x_3-x_4)^2]} =$$

$$= e^{A(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)}$$

e gli altri termini restano moltiplicati per il medesimo fattore, come è facile verificare.

Possiamo conchiudere che ad una relazione del tipo (4) § 11. Cap. I soddisfa non solo la $\vartheta_1(x)$, ma qualunque altra funzione del tipo

$$C e^{Ax^2} \vartheta_1(x)$$

e quindi anche la $\sigma(u)$.

Possiamo dunque dire che la σ soddisfa alla relazione

$$\sigma(u_1+u_2)\sigma(u_1-u_2)\sigma(u_3+u_4)\sigma(u_3-u_4)+$$
$$+\sigma(u_2+u_3)\sigma(u_2-u_3)\sigma(u_1+u_4)\sigma(u_1-u_4)+$$
$$+\sigma(u_3+u_1)\sigma(u_3-u_1)\sigma(u_2+u_4)\sigma(u_2-u_4)=0.$$

Di qui possiamo ricavare un'altra formola interessante.

Poniamo

$$u_4=u_3-\varepsilon.$$

Si ha allora

$$\sigma(u_1+u_2)\sigma(u_1-u_2)\sigma(2u_3-\varepsilon)\sigma(\varepsilon)+$$
$$+\sigma(u_2+u_3)\sigma(u_2-u_3)\sigma(u_1+u_3-\varepsilon)\sigma(u_1-u_3+\varepsilon)+$$
$$+\sigma(u_3+u_1)\sigma(u_3-u_1)\sigma(u_2+u_3-\varepsilon)\sigma(u_2-u_3+\varepsilon)=0$$

Deriviamo ora rispetto ad ε:

$$\sigma(u_1+u_2)\sigma(u_1-u_2)\times$$
$$\times[\sigma(2u_3-\varepsilon)\sigma'(\varepsilon)-\sigma'(2u_3-\varepsilon)\sigma(\varepsilon)]+$$
$$+\sigma(u_2+u_3)\sigma(u_2-u_3)\times$$
$$\times[-\sigma'(u_1+u_3-\varepsilon)\sigma(u_1-u_3+\varepsilon)+$$
$$+\sigma(u_1+u_3-\varepsilon)\sigma'(u_1-u_3+\varepsilon)]+$$

$$+\sigma(u_3+u_1)\,\sigma(u_3-u_1)\times$$
$$\times\left[-\sigma'(u_2+u_3-\varepsilon)\,\sigma(u_2-u_3+\varepsilon)+\right.$$
$$\left.+\sigma(u_2+u_3-\varepsilon)\,\sigma'(u_2-u_3+\varepsilon)\right]=0$$

e ponendo $\varepsilon=0$ e osservando $\sigma(0)=0$, $\sigma'(0)=1$ si ha:

$$\sigma(u_1+u_2)\,\sigma(u_1-u_2)\,\sigma(2u_3)+$$
$$+\sigma(u_2+u_3)\,\sigma(u_2-u_3)\,\sigma(u_1+u_3)\,\sigma(u_1-u_3)\times$$
$$\times\left[-\frac{\sigma'(u_1+u_3)}{\sigma(u_1+u_3)}+\frac{\sigma'(u_1-u_3)}{\sigma(u_1-u_3}\right]+$$
$$+\sigma(u_3+u_1)\,\sigma(u_3-u_1)\,\sigma(u_2+u_3)\,\sigma(u_2-u_3)\times$$
$$\times\left[-\frac{\sigma'(u_3+u_2)}{\sigma(u_3-u_3)}+\frac{\sigma'(u_2-u_3)}{\sigma(u_3+a_2)}\right]=0$$

donde

$$\frac{\sigma(u_1+u_2)\,\sigma(u_1-u_2)}{\sigma(u_2+u_3)\,\sigma(u_2-u_3)\,\sigma(u_1+u_3)\,\sigma(u_1-u_3)}=$$
$$=\frac{1}{\sigma(2u_3)}\left[\frac{\sigma'(u_1+u_3)}{\sigma(u_1+u_3)}-\frac{\sigma'(u_1-u_3)}{(\sigma u_1-u_3)}+\right.$$
$$\left.+\frac{\sigma'(u_2+u_3)}{\sigma(u_2-u_3)}-\frac{\sigma'(u_2-u_3)}{\sigma(u_2-u_3)}\right].$$

In questa formola porremo $u_3=0$. Per condurre più facilmente i calcoli cominciamo col porre:

$$\zeta(u)=\frac{d}{du}\log\sigma(u)=\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)};$$

allora

$$\lim_{u_3=0} \frac{\zeta(u_1+u_3)-\zeta(u_1-u_3)}{\sigma(2u_3)} =$$

$$= \lim_{u_3=0} \frac{\zeta(u_1+u_3)-\zeta(u_1-u_3)}{2u_3} \frac{1}{\dfrac{\sigma(2u_3)}{2u_3}} =$$

$$= \frac{\zeta'(u_1)}{\sigma'(0)} = \frac{d^2}{d\,u_1} \log \sigma(u_1).$$

Analogamente

$$\lim_{u_3=0} \frac{\zeta(u_2+u_3)-\zeta(u_2-u_3)}{\sigma(2u_3)} = \frac{d^2}{d\,u_2} \log \sigma(u_2)$$

onde infine possiamo scrivere:

$$\frac{\sigma(u_1+u_2)\,\sigma(u_1-u_2)}{\sigma^2(u_1)\,\sigma^2(u_1)} =$$

$$= \frac{d^2}{d\,u_1^2} \log \sigma(u_1) - \frac{d^2}{du_2^2} \log \sigma(u_2)$$

che è in certo modo *una formola d'addizione* e che ha una grande importanza in tutta la teoria delle σ.

§ 7. **Introduzione delle quantità e_1 e_2 e_3, degli invarianti g_2 g_3 e del discriminante Δ.**

Per ottenere delle formole più simmetriche, ci conviene introdurre tre quantità che avranno una grande importanza nelle cose che avremo a dire in seguito, e che acquisteranno poi un significato

più semplice di quello che risulta dalla definizione che qui ne daremo.

Queste tre quantità costanti le chiameremo e_1 e_2 e_3 e restano definite dalle formole

$$\left.\begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 (\vartheta^4 + \vartheta_3^4) \\ e_2 &= \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 (\vartheta_2^4 - \vartheta^4) \\ e_3 &= -\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 (\vartheta_3^4 + \vartheta_2^4) \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Ricordando la relazione fra le quarte potenze delle ϑ per argomenti zero

$$\vartheta^4 + \vartheta_2^4 = \vartheta_3^4$$

si possono ottenere le altre formole semplici

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{e_1 - e_2} &= \frac{\pi}{2\omega}\vartheta^2 \\ \sqrt{e_2 - e_3} &= \frac{\pi}{2\omega}\vartheta_2^2 \\ \sqrt{e_1 - e_3} &= \frac{\pi}{2\omega}\vartheta_3^2 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

È facile trovare immediatamente delle relazioni che legano le e col modulo k introdotto nel capitolo precedente.

Dalle (1) § I. Cap. II si ha subito

$$\left.\begin{aligned} k^2 &= \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} \\ k'^2 &= \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3} \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

e dalle formole di definizione si ha subito

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0. \qquad (4)$$

Queste formole sono fondamentali e si potrebbero assumere per definizione delle e, salvo che esse non riescono a definire le e che a meno di un fattore di proporzionalità.

Mediante queste quantità possiamo subito trasformare alcune formole già trovate avanti. Per es. si è trovato

$$v = \vartheta_3^2(0) \,.\, x;$$

si ha quindi subito

$$v = \frac{2\,\omega}{\pi}\sqrt{e_1 - e_3} \,.\, x = \frac{2\,\omega}{\pi}\sqrt{e_1 - e_3}\,\frac{\pi\, u}{2\,\omega} = \sqrt{e_1 - e_3} \,.\, u$$

e per la (3) § 4. Cap. II.

$$\frac{K}{\omega} = \sqrt{e_1 - e_3}$$

donde ricordando le formole

$$q = e^{i\pi\frac{\omega'}{\omega}} = e^{-\pi\frac{K'}{K}}$$

si ha

$$\left.\begin{aligned} \frac{i\,K'}{\omega'} &= \sqrt{e_1 - e_3} = \frac{K}{\omega} \\ \frac{v}{u} &= \sqrt{e_1 - e_3} \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

A questo proposito non vogliamo tralasciare di stabilire altre formole e altre notazioni di cui dovremo poi servirci in seguito.

Prima di tutto indichiamo con Δ il discriminante delle quantità $e_1\, e_2\, e_3$, cioè poniamo propriamente

$$\Delta = 16\,(e_1 - e_2)^2\,(e_2 - e_3)^2\,(e_1 - e_2)^2.$$

Mediante le relazioni di sopra si ha allora:

$$\left.\begin{aligned} \sqrt[8]{\Delta} &= \sqrt{2}\,\sqrt{\left(\frac{\pi}{2\,\omega}\right)^3}\,\vartheta\,\vartheta_2\,\vartheta_3 \\ &= \sqrt{2}\,\sqrt{\left(\frac{\pi}{2\,\omega}\right)^3}\,\vartheta_1'(0) \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Con questa formola possiamo mettere sotto altra forma il fattore di proporzionalità fra le ϑ e le σ di cui abbiamo trattato nel § 2 di questo capitolo. Tal fattore può porsi sotto la forma

$$e^{\frac{1}{48}\frac{\pi^2}{\omega^2}\frac{\partial \log(\Delta\omega^{12})}{\partial \log q}u^2}. \qquad (7)$$

Introduciamo infine i cosiddetti invarianti $g_2\, g_3$.

Poniamo

$$-4(e_1 e_2 + e_2 e_3 + e_3 e_1) = g_2$$

$$+ 4 e_1 e_2 e_2 = g_3.$$

Allora abbiamo subito le espressioni

$$g_2 = \frac{4}{3}[(e_2 - e_1)(e_2 - e_3) + (e_1 - e_3)^2]$$

$$= \frac{4}{3}\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^4 [-\vartheta^4 \vartheta_2^4 + \vartheta_3^8]$$

e per effetto della relazione che si ottiene formando i quadrati di ambo i membri della nota relazione fra le quarte potenze delle ϑ pari per argomenti zero, si ha

$$g_2 = \frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^4 (\vartheta^8 + \vartheta_2^8 + \vartheta_3^8).$$

Inoltre

$$g_3 = -\frac{4}{27}\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^6 (\vartheta^4 + \vartheta_3^4)(\vartheta_2^4 - \vartheta^4)(\vartheta_3^4 + \vartheta_2^4) =$$

$$= -\frac{4}{27}\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^6 (3\vartheta^4 \vartheta_2^8 - 3\vartheta^8 \vartheta_2^4 + 2\vartheta_2^{12} - 2\vartheta^{12}).$$

Mediante g_2 g_3 il discriminante Δ si può esprimere colla formola

$$\Delta = g_2^3 - 27 g_3^2.$$

Le quantità g_2 g_3 possono chiamarsi *moduli algebrici* a differenza delle quantità ω, ω' ovvero η, η' che possono chiamarsi *moduli trascendenti.*

Prima di terminare questo paragrafo dobbiamo aggiungere qualche osservazione sulle quantità g_2, g_3.

Consideriamo il polinomio che ha per radici le quantità e_1 e_2 e_3,

$$\varphi(z) = 4(z - e_1)(z - e_2)(z - e_3)$$
$$= 4z^3 - g_2 z - g_3.$$

Questo polinomio di 3.° grado può considerarsi come un polinomio di 4.° grado di cui sia zero il primo coefficiente, cioè di cui una delle radici sia l'infinito.

Supponiamo dato un generale polinomio di quarto grado

$$a_0 z^4 + 4a_1 z^3 + 6a_2 z^2 + 4a_3 z + a_4.$$

Nella *teoria delle forme* si studiano i cosiddetti *invarianti delle forme*, cioè quelle funzioni dei coefficienti, che restano inalterate quando la variabile si sottopone ad una trasformazione lineare. Si dimostra che esistono, per il caso del polinomio di 4.° grado, due soli *invarianti*, che risultano così formati mediante i coefficienti:

$$j = a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2$$

$$i = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}$$

Ora nella forma del polinomio $\varphi(z)$ è notevole questo, che se si calcolano tali invarianti si trova semplicemente

$$j = g_2$$

$$i = g_3$$

cioè gli *invarianti* funzionano da coefficienti del polinomio stesso. E siccome poi si sa dalla stessa *teoria delle forme* che due polinomi di 4.° grado i quali hanno i medesimi invarianti, sono sempre trasformabili l'uno nell'altro con una trasformazione lineare della variabile, così possiamo dire che, assegnato un polinomio di 4.° grado i cui coefficienti sieno tali che gli invarianti abbiano per valori i valori di g_2, g_3, si potrà sempre trasformare quel polinomio, con una trasformazione lineare, nel polinomio $\varphi(z)$. Non possiamo entrare in maggiori dettagli e perciò dobbiamo supporre nel lettore cognizione, almeno sommaria, dei principii della teoria delle forme.

§ 8. **Relazioni algebriche fra le quattro σ. Relazioni in cui compariscono due argomenti. Formole d'addizione per i rapporti delle σ.** — Tenendo presenti le formole (2) (3) (4) del § 9, Cap. I, si possono ricavare subito le relazioni algebriche esistenti fra le quattro σ; si hanno quattro formole assai semplici, di cui due sono conseguenza delle altre.

Esse sono

$$\sigma_1^2(u) - \sigma_3^2(u) + (e_1 - e_3)\,\sigma^2(u) = 0$$

$$\sigma_2^2(u) - \sigma_1^2(u) + (e_2 - e_1)\,\sigma^2(u) = 0$$

$$\sigma_3^2(u) - \sigma_2^2(u) + (e_3 - e_2)\,\sigma^2(u) = 0$$

$$(e_3 - e_2)\,\sigma_1^2(u) + (e_1 - e_3)\,\sigma_2^2(u) + (e_2 - e_1)\,\sigma_3^2(u) = 0$$

Possiamo ora ottenere delle relazioni nelle quali figurano due argomenti indipendenti u_1 u_2; tali relazioni si ottengono naturalmente trasformando quelle ottenute nel § 8 del Cap. I.

Dalla (2) § 8. Cap. I, si ha

$$\sigma(u_1 + u_2)\,\sigma(u_1 - u_2) =$$
$$= \sigma^2(u_1)\,\sigma_i^2(u_2) - \sigma_i^2(u_1)\,\sigma^2(u_2)$$

e dalle (4) § 8, Cap. I, insieme colla prima delle (3) si ha

$$\sigma(u_1 - u_2)\,\sigma_i(u_1 + u_2) = \sigma_i(u_1)\,\sigma(u_1)\,\sigma_j(u_2)\,\sigma_k(u_2) -$$
$$- \sigma_i(u_2)\,\sigma(u_2)\,\sigma_j(u_1)\,\sigma_k(u_1)$$

dove $i\,j\,k$ rappresentano una permutazione degli indici 1, 2, 3.

Dividendo membro a membro queste formole si ha *il teorema d'addizione per i rapporti delle tre σ pari alla σ dispari.* Si ha la formola

$$\frac{\sigma_i(u_1 + u_2)}{\sigma(u_1 + u_2)} =$$
$$= \frac{\sigma_i(u_1)\,\sigma(u_1)\,\sigma_j(u_2)\,\sigma_k(u_2) - \sigma_i(u_2)\,\sigma(u_2)\,\sigma_j(u_1)\,\sigma_k(u_1)}{\sigma^2(u_1)\,\sigma_i^2(u_2) - \sigma^2(u_2)\,\sigma_i^2(u_1)}$$

§ 9. **Relazioni fra le funzioni di Legendre e le funzioni σ.** — Le funzioni di Legendre si esprimono come rapporti delle ϑ, e quindi potranno esprimersi come rapporti delle σ; le formole corrispondenti sono molto semplici e sono le seguenti

$$\operatorname{sn} v = \sqrt{e_1 - e_3}\,\frac{\sigma(u)}{\sigma_3(u)}$$

$$\operatorname{cn} v = \frac{\sigma_1(u)}{\sigma_3(u)}$$

$$\operatorname{dn} v = \frac{\sigma_2(u)}{\sigma_3(u)}$$

donde otteniamo le altre

$$\frac{\sigma_1(u)}{\sigma(u)} = \sqrt{e_1 - e_3}\,\frac{\operatorname{cn} v}{\operatorname{sn} v}$$

$$\frac{\sigma_2(u)}{\sigma(u)} = \sqrt{e_1 - e_3}\,\frac{\operatorname{dn} v}{\operatorname{sn} v}$$

$$\frac{\sigma_3(u)}{\sigma(u)} = \sqrt{e_1 - e_3}\,\frac{1}{\operatorname{sn} v}$$

§ 10. **Omogeneità delle ϑ, delle σ, e dei moduli.** — Fra le funzioni ϑ e le σ c'è una differenza rimarchevole che ora vogliamo porre in vista.

Consideriamo sia le ϑ che le σ, dipendenti tutte dall'argomento u, e dai moduli ω, ω'. Ora è facile mostrare che tutte queste funzioni sono tutte funzioni omogenee delle tre quantità u, ω, ω'; ma che inoltre *le ϑ e le σ pari sono omogenee di grado*

zero, mentre che *la* σ *dispari è omogenea di grado uno.*

Per le formole

$$x = \frac{\pi u}{2\omega}$$

$$\log q = i\pi \frac{\omega'}{\omega}$$

si vede che se u, ω, ω' si moltiplicano per un fattore, sia x che q restano inalterati.

Possiamo dunque dire che anche le ϑ e quindi le sn, cn, dn restano inalterate, cioè sono funzioni omogenee di grado zero di u, ω, ω'.

Dalla formola di definizione di $\sigma(u)$ si vede invece che la σ resta moltiplicata per il medesimo fattore, per cui si moltiplicano u, ω, ω'; cioè

$$\sigma(r u; r\omega, r\omega') = r\,\sigma(u; \omega, \omega')$$

da cui si ha che *la* σ *è una funzione omogenea di grado 1.*

Per completare questa ricerca dobbiamo esaminare come si comportano tutti gli altri moduli introdotti nei paragrafi precedenti.

Noi abbiamo introdotto nei paragrafi precedenti le due altre quantità

$$K,\ K';$$

poi le altre

$$\eta,\ \eta';$$

poi ancora le altre

$$e_1\, e_2\, e_3 \text{ colla relazione } e_1 + e_2 + e_3 = 0;$$

e poi finalmente le altre

$$g_2\,,\ g_3\,.$$

Queste sono tutte quantità costanti, indipendenti cioè dall'argomento u, ma dipendenti naturalmente dai moduli ω, ω'. È facile vedere che ne dipendono tutte *omogeneamente*, ma con gradi diversi di omogeneità.

Moltiplicando ω, ω' per una stessa quantità, $K\,K'$ restano inalterati perchè

$$K = \vartheta_3{}^2\,(0)\,\frac{\pi}{2}$$

$$\log q = -\,\pi\,\frac{K'}{K}$$

dunque $K\,K'$ *sono omogenei di grado zero.*

Dalla formola di definizione di η (v. § 1, Capitolo III) si vede facilmente che η resta moltiplicata per r^{-1} se $\omega\,\omega'$ si moltiplicano per r; e lo stesso per η' come risulta da (1) § 3, Cap. III. Dunque: η, η' *sono omogenei di grado* -1.

Dalle (1) § 7, Cap. III si vede che $e_1\, e_2\, e_3$ *sono omogenei di grado* -2; e infine di qui si ricava subito che g_2 *è omogeneo di grado* -4, *e* g_3 *è omogeneo di grado* -6.

Considerando la σ come funzione di u, g_2, g_3 si ricava quindi la formola

$$\sigma\,(r\,u;\ r^{-4}\,g_2\,,\ r^{-6}\,g_3) = r\,\sigma\,(u;\,g_2\,,\,g_3).$$

§ 11. **Punti-zero delle funzioni** σ. — Dalle formole di definizione delle σ, e dalla ricerca fatta nel Cap. I riguardo ai punti-zero delle funzioni ϑ, possiamo subito trovare in quali punti le σ diventano zero. Si trova

$\sigma(u)$	diventa zero in tutti i punti della forma	$2m\omega + 2n\omega'$
$\sigma_1(u)$	"	$(2m+1)\omega + 2n\omega'$
$\sigma_2(u)$	"	$(2m+1)\omega + (2n+1)\omega'$
$\sigma_3(u)$	"	$2m\omega + (2n+1)\omega'$

m, n rappresentando sempre due numeri interi positivi o negativi.

§ 12. **Scomposizione delle** σ **in prodotti infiniti doppii.** — Come le ϑ così anche le σ si possono scomporre in prodotti infiniti doppii; noi, come abbiamo fatto per le ϑ, raccoglieremo qui solo le formole definitive, tralasciandone la dimostrazione dettagliata

$$\sigma(u) = u \prod_{m,n} \left(1 - \frac{u}{w}\right) e^{\frac{u}{w} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2}}$$

$$\sigma_i(u) = e^{-\frac{1}{2}e_i u^2} \prod_{m,n} \left(1 - \frac{u}{w_i}\right) e^{\frac{u}{w_i} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{w_i^2}}$$

dove

$$\begin{aligned} w &= 2m\omega + 2n\omega' \\ w_1 &= (2m+1)\omega + 2n\omega' \\ w_2 &= (2m+1)\omega + (2n+1)\omega' \\ w_3 &= 2m\omega + (2n+1)\omega'. \end{aligned}$$

§ 13. **Degenerazione delle funzioni** σ. — Ricercheremo ora che cosa diventano le σ nel caso limite in cui $q = 0$

Nel caso di $q = 0$ si ha $k = 0$, e quindi dalle formole (3), § 7, Cap. III, risulta subito che

$$e_2 = e_3 = a$$

cioè due delle quantità e risultano eguali fra loro; perciò il discriminante Δ risulta zero, e

$$e_1 = -2a.$$

Dalle (1) § 7, Cap. III si ha allora

$$\omega = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{-3a}}.$$

Consideriamo i rapporti

$$\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta_1'(0)} = \frac{\operatorname{sen} x - q^2 \operatorname{sen} 3x + \text{ecc.}}{1 - 3q^2 + \text{ecc.}}$$

$$\frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta_2(0)} = \frac{\cos x + q^2 \cos 3x + \text{ecc.}}{1 + q^2 + \text{ecc.}}$$

$$\frac{\vartheta_3(0)}{\vartheta_3(0)} = \frac{1 + 2q \cos 2x + \text{ecc.}}{1 + 2q + \text{ecc.}}$$

$$\frac{\vartheta(x)}{\vartheta(0)} = \frac{1 - 2q \cos 2x + \text{ecc.}}{1 - 2q + \text{ecc.}}$$

dalla nota relazione data dal teorema di Eulero. All'equazione differenziale di cui si parla, si potrebbe perciò dare sempre una forma nella quale comparisse solo una delle derivate rispetto ai due moduli omogenei, però allora si perderebbe molta simmetria, e si introdurrebbe poi necessariamente la *derivata prima* di σ rispetto ad u. Ora volendo eliminare questa derivata prima, volendo cioè ottenere anche per la σ una forma dell'equazione differenziale in cui non entri la derivata prima rispetto ad u ma solo la *derivata seconda*, come già si verifica per le funzioni ϑ, bisognerà necessariamente introdurre le derivate sia rispetto ad ω che ad ω'; ovvero sia rispetto a g_2 che a g_3; queste due derivate entreranno allora combinate in una certa maniera speciale e propriamente sotto la forma

$$-2\eta\frac{\partial\sigma}{\partial\omega}-2\eta'\frac{\partial\sigma}{\partial\omega'}.$$

Perciò noi, prima di passare alla ricerca dell'equazione differenziale cui soddisfa la σ, vogliamo fare uno studio preliminare sull'operazione

$$D=-2\eta\frac{\partial}{\partial\omega}-2\eta'\frac{\partial}{\partial\omega'}$$

che chiameremo operazione D.

Così ci sarà agevolata la ricerca posteriore.

Il problema principale che ci proporremo in questo paragrafo sarà di trasformare questa operazione in un'altra, nella quale invece di comparire le derivate rispetto ai moduli trascendenti

ω, ω', comparissero le derivate rispetto ai moduli algebrici g_2 g_3.

Dalla formola di definizione si ha immediatamente

$$D\omega = -2\eta$$

$$D\omega' = -2\eta'$$

$$D\omega'' = -2\eta''.$$

Inoltre tenendo presente che

$$\log q = i\pi \frac{\omega'}{\omega}$$

si ha

$$D \log q = \frac{i\pi}{\omega} D\omega' - i\pi \frac{\omega'}{\omega^2} D\omega =$$

$$= -2i\pi \frac{\eta'}{\omega} + 2i\pi \frac{\omega'}{\omega^2} \eta$$

$$= -\frac{\pi^2}{\omega^2}$$

servendosi della formola di relazione fra ω, ω', η, η'.

Passiamo ora a mostrare che

$$D\Delta = 0$$

cioè che l'operazione D applicata sul discriminante $\Delta = g_2^3 - 27 g_3^2$ dà per risultato zero; e questa è la proprietà fondamentale dell'operazione D.

Partiamo dalla formola (v. Cap. III, § 7)

$$\sqrt[8]{\Delta} = \sqrt{\frac{\pi^3}{4}}\, \omega^{-\frac{3}{2}}\, \vartheta_1'(0)$$

e applichiamo l'operazione D al primo e secondo membro. Essendo identicamente

$$D\,\vartheta_1'(0) = \frac{d\,\vartheta_1'(0)}{d \log q}\, D \log q$$

possiamo scrivere

$$\frac{1}{8}\,\Delta^{-\frac{7}{8}}\, D\,\Delta = \sqrt{\frac{\pi^3}{4}}\left[-\frac{3}{2}\,\omega^{-\frac{5}{2}}\, D\,\omega\,\vartheta_1'(0) + \right.$$

$$\left. + \omega^{-\frac{3}{2}}\,\frac{d\,\vartheta_1'(0)}{d \log q}\, D \log q\right]$$

$$= \sqrt{\frac{\pi^3}{4}}\left[3\,\omega^{-\frac{5}{2}}\,\eta\,\vartheta_1'(0) - \pi^2\,\omega^{-\frac{7}{2}}\,\frac{d\,\vartheta_1'(0)}{d \log q}\right]$$

e servendosi dell'equazione differenziale delle ϑ e della formola per la η, cioè:

$$\frac{d\,\vartheta_1'(0)}{d \log q} = -\frac{1}{4}\,\vartheta_1'''(0)$$

$$\eta = -\frac{1}{12}\,\frac{\pi^2}{\omega}\,\frac{\vartheta_1'''(0)}{\vartheta_1'(0)}$$

il secondo membro della formola precedente diventa identicamente zero. Con ciò è dimostrato il nostro assunto.

Cerchiamo ora di trasformare l'operazione D in un'altra nella quale non entrino più le derivate rispetto ad ω, ω', ma quelle rispetto agli invarianti g_2, g_3, che, come si sa, possono considerarsi moduli equivalenti ai moduli trascendenti ω, ω'.

Così trasformata, l'operazione D prenderà la forma

$$D = A \frac{\partial}{\partial g_2} + B \frac{\partial}{\partial g_3}$$

e resta a trovare A, B, che dovranno in generale essere funzioni dei moduli.

Dalla proprietà ultimamente dimostrata si trova subito quale deve essere il rapporto di queste due quantità.

Applichiamo una siffatta D al discriminante Δ e poi eguagliamo a zero il risultato.

Si ha

$$3 A g_2^2 - 2 . 27 . B g_3 = 0$$

donde

$$\frac{A}{B} = \frac{2 . 27 g_3}{3 g_2^2} = \frac{18 g_3}{g_2^2}.$$

Possiamo dunque dire che

$$D = h \left\{ 18 g_3 \frac{\partial}{\partial g_2} + g_2^2 \frac{\partial}{\partial g_3} \right\}$$

dove resta ancora a trovare il fattore h il quale in generale potrebbe a sua volta essere ancora

funzione dei moduli; noi però dimostreremo che è un numero, e propriamente eguale a $\frac{2}{3}$.

Per giungere a questo risultato dobbiamo cominciare col cercare l'effetto dell'operazione D sulle quantità e_1, e_2, e_3.

Essendo

$$4\, e_\alpha'^3 - g_2\, e_\alpha - g_3 = 0$$

si ha

$$12\, e_\alpha^2 \frac{\partial e_\alpha}{\partial g_2} - g_2 \frac{\partial e_\alpha}{\partial g_2} = e_\alpha$$

$$12\, e_\alpha^2 \frac{\partial e_\alpha}{\partial g_3} - g_2 \frac{\partial e_\alpha}{\partial g_3} = 1$$

$$\frac{\partial e_\alpha}{\partial g_2} = \frac{e_\alpha}{12\, e_\alpha^2 - g_2}$$

$$\frac{\partial e_\alpha}{\partial g_3} = \frac{1}{12\, e_\alpha^2 - g_2}.$$

Quindi possiamo scrivere

$$D\, e_\alpha = h\, \frac{18\, g_3\, e_\alpha + g_2^2}{12\, e_\alpha^2 - g_2}$$

$$= h\, \frac{18 \cdot 4\, e_\alpha^2\, e_\beta\, e_\gamma + g_2^2}{12\, e^2_\alpha - g_2}$$

dove α, β, γ salvo nell'ordine sono gli indici 1, 2, 3.

Essendo

$$e_\alpha + e_\beta + e_\gamma = 0$$

si ha ancora

$$D\, e_\alpha = h\, \frac{18 \,.\, 4\, e_\alpha^2 \left[e_\beta\, e_\gamma + e_\alpha\, (e_\alpha + e_\beta + e_\gamma)\right] + g_2^2}{12\, e_\alpha^2 - g_2}$$

$$= h\, \frac{18 \,.\, 4\, e_\alpha^2 \left[e_\alpha^2 - \frac{1}{4}\, g_2\right] + g_2^2}{12\, e_\alpha^2 - g_2}$$

$$= h\, (6\, e_\alpha^2 - g_2).$$

Di qui ricaviamo subito

$$D\, (e_1 - e_2) = 6\, h\, (e_1^2 - e_2^2)$$

$$= 6\, h\, (e_1 - e_2)\, (e_1 + e_2)$$

e servendoci delle formole che danno le e mediante le ϑ per argomento zero (v. § 7, Cap. III) si ha

$$D\, (e_1 - e_2) = 2\, h\, \frac{\pi^2}{\omega^2}\, \vartheta^4\, (\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4).$$

Cerchiamo invece di trovare in altro modo l'espressione di $D\, (e_1 - e_2)$ partendo cioè dalla formola

$$e_1 - e_2 = \frac{\pi^2}{4\, \omega^2}\, \vartheta^4.$$

Applicandovi l'operazione D sotto la prima forma si ha

$$D(e_1 - e_2) = \frac{\pi^2}{\omega^3}\eta\,\vartheta^4 - \frac{\pi^4}{\omega^4}\vartheta^4\frac{d\log\vartheta}{d\log q}$$

ed essendo

$$\eta = -\frac{1}{12}\frac{\pi^2}{\omega}\left(\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} + \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} + \frac{\vartheta''}{\vartheta}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\frac{\pi^2}{\omega}\left(\frac{d\log\vartheta_2}{d\log q} + \frac{d\log\vartheta_3}{d\log q} + \frac{d\log\vartheta}{d\log q}\right)$$

si ha infine

$$D(e_1 - e_2) =$$

$$= \frac{\pi^4}{3\,\omega^4}\vartheta^4\left\{-2\frac{d\log\vartheta}{d\log q} + \frac{d\log\vartheta_2}{d\log q} + \frac{d\log\vartheta_3}{d\log q}\right\}.$$

Tenendo ora presenti le formole per le ϑ da noi trovate nel § 14, Cap. I e paragonando i due risultati ottenuti per $D(e_1 - e_2)$ si ha infine

$$h = \frac{2}{3}.$$

Si ha dunque infine

$$D = -2\eta\frac{\partial}{\partial\omega} - 2\eta'\frac{\partial}{\partial\omega'} =$$

$$= 12\,g_3\frac{\partial}{\partial g_2} + \frac{2}{3}g_2^2\frac{\partial}{\partial g_3}.$$

Col trovato valore di h si ha allora

$$D\, e_\alpha = 4\, e_\alpha^2 - \frac{2}{3}\, g_2.$$

Vogliamo ora trovare $D\eta$.
Operando direttamente si ha

$$D\eta = D\left(-\frac{1}{12}\frac{\pi^2}{\omega}\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'}\right)$$

$$= -\frac{1}{6}\frac{\pi^2}{\omega^2}\eta\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'} + \frac{1}{12}\frac{\pi^4}{\omega^3}\frac{d}{d\log q}\left(\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'}\right)$$

ed essendo per effetto dell'equazione differenziale delle ϑ:

$$\frac{d}{d\log q}\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'} = -\frac{1}{4}\frac{\vartheta_1^{\mathrm{v}}}{\vartheta_1'} + \frac{1}{4}\left(\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'}\right)^2$$

si ha riducendo:

$$D\eta = \frac{1}{6\,.\,24}\frac{\pi^4}{\omega^3}\left\{5\left(\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'}\right)^2 - 3\frac{\vartheta_1^{\mathrm{v}}}{\vartheta_1'}\right\}.$$

Ora noi dimostrammo (v. § 14, Cap. I) che la quantità dentro parentesi è esattamente eguale a

$$\vartheta^8 + \vartheta_2^8 + \vartheta_3^8$$

che, come sappiamo, è proporzionale a g_2; quindi

si ha

$$D\eta = \frac{1}{6} g_2 \omega.$$

Essendo

$$\eta \omega' - \eta' \omega = \frac{i\pi}{2}$$

si ha:

$$\omega' D\eta + \eta D\omega' - \omega D\eta' - \eta' D\omega = 0$$

donde

$$D\eta' = \frac{1}{6} g_2 \omega'.$$

E così anche

$$D\eta'' = \frac{1}{6} g_2 \omega''.$$

§ 15. **Derivate dei moduli trascendenti di 1.ª e 2.ª specie rispetto ai moduli algebrici, e dei moduli di 2.ª specie rispetto a quelli di 1.ª specie.** — Vogliamo utilizzare le formole trovate, per trovare le derivate dei moduli trascendenti cioè ω, ω' ovvero η, η' rispetto ai moduli algebrici g_2, g_3.

Le quantità ω, ω' sono funzioni omogenee di g_2, g_3 di grado 1, se g_2 si considera del grado — 4 e g_3 di grado — 6; in altri termini sono funzioni omogenee di grado 1 di $g_2^{-\frac{1}{4}}$, $g_3^{-\frac{1}{6}}$. Quindi ap-

plicando opportunamente il teorema dell'omogeneità si ha

$$4 g_2 \frac{\partial \omega}{\partial g_2} + 6 g_3 \frac{\partial \omega}{\partial g_3} = -\omega.$$

Intanto si ha

$$D\omega = 12 g_3 \frac{\partial \omega}{\partial g_2} + \frac{2}{3} g_2^2 \frac{\partial \omega}{\partial g_3} = -2\eta$$

dunque risolvendo si ha

$$\frac{\partial \omega}{\partial g_2} = \frac{1}{\Delta}\left(-\frac{1}{4} g_2^2 \omega + \frac{9}{2} g_3 \eta\right)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial g_3} = \frac{1}{\Delta}\left(\frac{9}{2} g_3 \omega - 3 g_2 \eta\right).$$

Ponendo η', ω' in luogo di η, ω si avrebbero le formole per le derivate di ω'.

Collo stesso metodo possiamo trovare le derivate dei moduli trascendenti di 2.ª specie η, η' rispetto ai moduli algebrici.

La relazione di omogeneità (sapendo che η è omogenea di grado -1) dà

$$4 g_2 \frac{\partial \eta}{\partial g_2} + 6 g_3 \frac{\partial \eta}{\partial g_3} = \eta.$$

Questa insieme con

$$D\eta = 12 g_3 \frac{\partial \eta}{\partial g_2} + \frac{2}{3} g_2^2 \frac{\partial \eta}{\partial g_3} = \frac{1}{6} g_2 \omega$$

dà

$$\frac{\partial \eta}{\partial g_2} = \frac{1}{\Delta}\left(-\frac{3}{8} g_2 g_3 \omega + \frac{1}{4} g_2^2 \eta\right)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial g_3} = \frac{1}{\Delta}\left(\frac{1}{4} g_2^2 \omega - \frac{9}{2} g_3 \eta\right).$$

Sostituendo le lettere cogli apici η', ω' alle η, ω si hanno le formole per le derivate di η'.

Finalmente calcoliamo le derivate di η, η' rispetto ai moduli trascendenti di 1.ª specie ω, ω'.

La relazione d'omogeneità dà

$$\omega \frac{\partial \eta}{\partial \omega} + \omega' \frac{\partial \eta}{\partial \omega'} = -\eta$$

e intanto

$$D\eta = -2\eta \frac{\partial \eta}{\partial \omega} - 2\eta' \frac{\partial \eta}{\partial \omega'} = \frac{1}{6} g_2 \omega$$

onde

$$\frac{\partial \eta}{\partial \omega} = \frac{2i}{\pi}\left(\frac{1}{12} g_2 \omega \omega' - \eta \eta'\right)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial \omega'} = -\frac{2i}{\pi}\left(\frac{1}{12} g_2 \omega^2 - \eta^2\right).$$

Col solito scambio si hanno poi le derivate di η'.

§ 16. **Derivate del discriminante rispetto ai moduli trascendenti di 1.ª specie. Espressione notevole dai moduli trascendenti di 2.ª specie.** — La definizione della quantità η ha relazione colla definizione del fattore di proporzionalità fra le σ e le ϑ il qual fattore, come si sa, è esattamente

$$e^{\frac{1}{2}\frac{\eta}{\omega}u^2}.$$

Ora nei paragrafi precedenti noi ci siamo occupati di dare all'espressione di η varie forme.

In primo luogo η si può esprimere mediante il rapporto $\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'}$; poi mediante la derivata rispetto a $\log q$ del logaritmo del prodotto delle tre ϑ pari per argomento zero; infine mediante la derivata rispetto a $\log q$ del logaritmo del discriminante Δ (v. Cap. III, § 1, 2, 7).

La quantità η' poi si definisce in una maniera affatto diversa, e le due formole non hanno fra loro alcuna analogia.

Ora vogliamo dare una nuova forma della quantità η, forma la quale ha il vantaggio di rappresentare in una maniera perfettamente simmetrica ambedue le quantità η, η'.

Consideriamo che l'operazione D applicata al discriminante Δ dà per risultato zero, cioè

$$\eta\frac{\partial\Delta}{\partial\omega}+\eta'\frac{\partial\Delta}{\partial\omega'}=0.$$

Inoltre il discriminante è funzione omogenea di

grado -12 in $g_2^{-\frac{1}{4}}$, $g_3^{-\frac{1}{6}}$, e quindi è funzione omogenea di grado -12 in ω, ω'; onde possiamo scrivere

$$\omega \frac{\partial \Delta}{\partial \omega} + \omega' \frac{\partial \Delta}{\partial \omega'} = -12\,\Delta.$$

Risolvendo queste equazioni si ha

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \omega} = -\frac{24\,i}{\pi}\,\Delta\,\eta'$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \omega'} = \frac{24\,i}{\pi}\,\Delta\,\eta$$

donde

$$\eta = \frac{i\,\pi}{24}\,\frac{\partial \log \Delta}{\partial \omega'}$$

$$\eta' = -\frac{i\,\pi}{24}\,\frac{\partial \log \Delta}{\partial \omega}$$

Queste sono le due formole che noi cercavamo.

§ 17. **Equazione a derivate parziali cui soddisfa la funzione σ dispari.** — Le ϑ considerate come funzioni del modulo $\log q$ e dell'argomento x soddisfano ad un'equazione a derivate parziali semplicissima, che è sempre la medesima per tutte le quattro ϑ e per tutte le derivate di qualunque ϑ.

Il fatto che tutte le ϑ e anche tutte le loro derivate rispetto ad x, soddisfanno ad una medesima equazione differenziale semplicissima costituisce

certamente una elegante proprietà delle funzioni di Jacobi.

Per le σ non accade precisamente lo stesso, ma ogni σ soddisfa ad un' equazione differenziale diversa.

Per ritrovare quella cui soddisfa la σ dispari non c'è che trasformare l'equazione cui soddisfa la ϑ_1 che differisce da σ per un fattore.

Partiamo dalla formola

$$\vartheta_1(x) = \frac{\pi}{2\omega}\vartheta_1'(0)\, e^{-\frac{1}{2}\frac{\eta}{\omega}u^2}\sigma(u)$$

e formiamo le due derivate

$$\frac{\partial^2 \vartheta_1(x)}{\partial x^2}$$

$$-4\frac{\partial \vartheta_1(x)}{\partial \log q}$$

e poi eguagliamole fra loro.

Considerando che il secondo membro è espresso mediante u e che la relazione fra x e u è

$$x = \frac{\pi u}{2\omega},$$

abbiamo:

$$\frac{\partial \vartheta_1(x)}{\partial x} = \vartheta_1'(0)\, e^{-\frac{1}{2}\frac{\eta}{\omega}u^2}\left[-\frac{\eta}{\omega}u\,\sigma(u) + \sigma'(u)\right]$$

$$\frac{\partial^2 \vartheta_1(x)}{\partial x^2} = \frac{2\omega}{\pi} \vartheta_1'(0)\, e^{-\frac{1}{2}\frac{\eta}{\omega}u^2} \left[\left(\frac{\eta^2}{\omega^2} u^2 - \frac{\eta}{\omega}\right)\sigma(u) - \right.$$

$$\left. - \frac{2\eta}{\omega} u\, \sigma'(u) + \sigma''(u)\right].$$

Calcoliamo ora la derivata rispetto a $\log q$.

Possiamo scrivere, in virtù dei risultati dei paragrafi precedenti

$$D\vartheta_1(u) = \frac{\partial \vartheta_1(x)}{\partial \log q} D \log q = -\frac{\partial \vartheta_1(x)}{\partial \log q} \frac{\pi^2}{\omega^2}$$

donde

$$\frac{\partial \vartheta_1}{\partial \log q} = -\frac{\omega^2}{\pi^2} D\vartheta_1(x)$$

dove però si noti che siccome il primo membro è calcolato nell'ipotesi di x costante, così in tale ipotesi deve essere calcolato anche $D\vartheta_1(x)$; ma essendo poi $\vartheta_1(x)$ espresso mediante una formola contenente u e non x, nel calcolo dell'operazione D non bisogna pensare u costante, ma tener conto che

$$D u = D\left(\frac{2x}{\pi}\omega\right) = \frac{2x}{\pi} D\omega$$

$$= -\frac{2u\eta}{\omega}.$$

Si ha allora

$$\frac{\partial\, \vartheta_1(x)}{d \log q} = -\frac{\omega^2}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}\frac{\eta}{\omega}u^2} \Big[-\frac{1}{\omega^2} \vartheta_1'(0)\, \sigma(u)\, D\omega +$$

$$+ \frac{1}{\omega} \sigma(u)\, D\vartheta_1'(0) -$$

$$- \frac{1}{\omega} \vartheta_1'(0)\, \sigma(u) \left(\frac{1}{2} u^2 D \frac{\eta}{\omega} + \frac{\eta}{\omega} u\, D u \right) +$$

$$+ \frac{1}{\omega} \vartheta_1'(0) \left(D\sigma(u) + \sigma'(u)\, D u \right) \Big].$$

Ora

$$D\vartheta_1'(0) = \frac{d\vartheta_1'(0)}{d \log q} D \log q = -\frac{1}{4} \vartheta_1'''(0)\, D \log q =$$

$$= -3 \frac{\eta}{\omega} \vartheta_1'(0)$$

$$D\left(\frac{\eta}{\omega}\right) = \frac{1}{\omega} D\eta - \frac{\eta}{\omega^2} D\omega =$$

$$= \frac{1}{6} g_2 + \frac{2\eta^2}{\omega^2}$$

onde infine riducendo si ha

$$-4 \frac{\partial\, \vartheta_1(x)}{\partial \log q} = \frac{2\omega}{\pi} \vartheta_1'(0)\, e^{-\frac{1}{2}\frac{\eta}{\omega}u^2} \Big[\left(\frac{\eta^2}{\omega^2} u^2 - \frac{\eta}{\omega} \right) \sigma(u)$$

$$- 2 \frac{\eta}{\omega} u\, \sigma'(u)$$

$$- \frac{1}{12} g_2 u^2 \sigma(u) + D\sigma(u) \Big].$$

Eguagliando questa espressione con quella precedentemente ottenuta e riducendo, si ha la relazione

$$\sigma''(u) - D\,\sigma(u) + \frac{1}{12} g_2 u^2 \sigma(u) = 0$$

che è l'equazione differenziale per la σ dispari.

§ 18. **Equazioni a derivate parziali cui soddisfanno le tre funzioni σ pari.** — Con un calcolo analogo a quello del paragrafo precedente possiamo calcolare l'equazione corrispondente alla funzione $\sigma_1(u)$. Dobbiamo perciò partire dalla formola:

$$\vartheta_2(x) = \vartheta_2(0)\, e^{-\frac{1}{2}\frac{\eta}{\omega}u^2} \sigma_1(u).$$

La formola per

$$\frac{\partial^2 \vartheta_2(x)}{\partial x^2}$$

risulta simile a quella analoga del paragrafo precedente, però col fattore $\frac{4\omega^2}{\pi^2}$, invece di $\frac{2\omega}{\pi}$, e col cambio di $\vartheta_1'(0)$ in $\vartheta_2(0)$.

La formola per

$$\frac{\partial \vartheta_2(x)}{\partial \log q}$$

risulta

$$\frac{\partial \vartheta_2(x)}{\partial \log q} = -\frac{\omega^2}{\pi^2} e^{-\frac{1}{2}\frac{\eta}{\omega}u^2} [\sigma_1(u) D\vartheta_2(0) -$$

$$- \vartheta_2(0)\sigma_1(u)\left(\frac{1}{2}u^2 D\frac{\eta}{\omega} + \frac{\eta}{\omega} u Du\right) +$$

$$+ \vartheta_2(0)(D\sigma_1(u) + \sigma'(u) Du)].$$

Intanto al solito

$$D\vartheta_2(0) = -\frac{\pi^2}{\omega^2}\frac{d\vartheta_2(0)}{d\log q}$$

e servendosi delle formole (4) del § 14, Cap. I, si ha

$$\frac{1}{4}(\vartheta^4 + \vartheta_3^4) = \frac{d}{d\log q}\log\frac{\vartheta_2^2}{\vartheta\vartheta_3} =$$

$$= \frac{d}{d\log q}[3\log\vartheta_2 - \log\vartheta_1']$$

$$= \frac{3}{\vartheta_2}\frac{d\vartheta_2}{d\log q} - \frac{1}{\vartheta_1'}\frac{d\vartheta_1'}{d\log q}$$

$$= \frac{3}{\vartheta_2}\frac{d\vartheta_2}{d\log q} + \frac{\vartheta_1'''}{4\vartheta_1'}$$

donde ricordando che

$$e_1 = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2(\vartheta^4 + \vartheta_3^4)$$

$$b_7 = -6\, g_3$$

$$b_9 = -\frac{9}{4}\, g_2^{\,2}$$

$$b_{11} = -18\, g_2\, g_3$$

$$b_{13} = -3^3\, 2^3\, g_3^{\,2} + \frac{3\,.\,23}{8}\, g_2^{\,3}$$

. . . . . .

Analogamente possiamo procedere per le σ pari. Ponendo

$$\sigma_i\,(u) = 1 + b_2^{(i)}\,\frac{u^2}{2!} + b_4^{(i)}\,\frac{u^4}{4!} + \ldots$$

si ha subito

$$b_{2n}^{(i)} = D\, b_{2n-2}^{(i)} - e_i\, b_{2n-2}^{(i)} - \\ - \frac{(n-1)\,(2\,n-3)}{6}\, g_2\, b_{2n-4}^{(i)}.$$

Si badi però che in questa formola nell' applicare l'operazione D bisogna tener conto che i coefficienti b possono essere funzioni esplicite delle quantità $e_1\, e_2\, e_3$, e quindi bisogna allora tener conto delle formole che danno De_1, De_2, De_3.

Collo stesso procedimento con cui si è ottenuta questa formola ricorrente, cioè sostituendo nell'equazione differenziale lo sviluppo in serie, e poi eguagliando a zero i coefficienti delle diverse potenze di u, si può calcolare il secondo coefficiente $b_2^{(i)}$.

Eguagliando a zero i termini senza u si ha

$$b_2^{(i)} = -e_i.$$

Conoscendo ora il primo coefficiente che è 1, e il secondo $b_2^{(i)}$ possiamo, mediante la formola ricorrente, calcolare tutti gli altri.

Si trova così:

$$b_2^{(i)} = -e_i$$

$$b_4^{(i)} = -3\,e_i^2 + \frac{1}{2}\,g_2$$

$$b_6^{(i)} = -\frac{3}{4}\,g_2\,e_i + \frac{3}{4}\,g_3$$

$$b_8^{(i)} = \frac{21}{4}\,g_2\,e_i^2 - \frac{39}{4}\,g_3\,e_i - \frac{1}{4}\,g_2^2$$

$$b_{10}^{(i)} = \frac{135}{4}\,g_3\,e_i^2 - \frac{9}{16}\,g_2^2\,e_i + \frac{99}{16}\,g_2\,g_3.$$

. . . . . .

Al secondo membro di queste formole non compariscono potenze di e_i superiori alla seconda, perchè una potenza di e_i superiore alla seconda può sempre trasformarsi con una formola nella quale non entrano che potenze prime e seconde di e_i e le quantità g_2, g_3.

Così dalla identità

$$4\,e_i^3 - g_2\,e_i - g_3 = 0$$

si ha

$$e_i^3 = + \frac{1}{4} (g_2 e_i + g_3)$$

$$e_i^4 = \frac{1}{4} (g_2 e_i^2 + g_3 e_i)$$

$$e_i^5 = \frac{1}{4} g_3 e_i^2 + \frac{1}{16} g_2^2 e_i + \frac{1}{16} g_2 g_3$$

. . . . . .

CAPITOLO IV.

LA FUNZIONE $p(u)$ DI WEIERSTRASS.

§ 1. **Introduzione della funzione $p(u)$ e sua biperiodicità.** — Come mediante le ϑ si forma la funzione *seno amplitudine*, e le altre analoghe a queste, che hanno la proprietà della biperiodicità, così mediante le σ si può formare una funzione, chiamata $p(u)$, la quale ha un'importanza fondamentale in tutta la nuova teoria delle funzioni ellittiche.

La funzione $p(u)$ resta definita dalla formola

$$p(u) = -\frac{d^2}{du^2}\log\sigma(u)$$

$$= +\frac{\sigma'^2(u) - \sigma(u)\,\sigma''(u)}{\sigma^2(u)}.$$

Essendo $\sigma(u)$ una funzione dispari, la $\sigma'(u)$ è pari, e la $\sigma''(u)$ è dispari; dunque la $p(u)$ è una funzione pari, e perciò la sua prima derivata $p'(u)$ sarà una funzione dispari.

E facile mostrare che la $p(u)$ è una funzione biperiodica coi periodi 2ω, $2\omega'$.

In effetti partiamo dalle formole

$$\sigma(u+2\omega) = -e^{2\eta(u+\omega)}\,\sigma(u)$$

$$\sigma(u+2\omega') = -e^{2\eta'(u+\omega')}\,\sigma(u)$$

donde

$$\log\sigma(u+2\omega) = 2\eta(u+\omega) + \log(-1) + \log\sigma(u)$$

e quindi derivando si ha

$$\frac{\sigma'(u+2\omega)}{\sigma(u+2\omega)} = \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} + 2\eta.$$

Analogamente

$$\frac{\sigma'(u+2\omega')}{\sigma(u+2\omega')} = \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} + 2\eta'.$$

Derivando ancora una volta si ha

$$p(u+2\omega) = p(u)$$

$$p(u+2\omega') = p(u),$$

formole che dimostrano la doppia periodicità della funzione p.

Essendo

$$\sigma(0) = 0 \qquad \sigma'(0) = 1 \qquad \sigma''(0) = 0$$

(come si vede dallo sviluppo in serie della fun-

zione σ) si vede subito che

$$p(0) = \infty.$$

Aumentando l'argomento di ω, ω', ω'' si hanno delle formole rimarchevoli

$$p(u+\omega) = -\frac{d^2}{du^2}\log\sigma(u+\omega) =$$

$$= -\frac{d^2}{du^2}\log\sigma_1(u)$$

$$p(u+\omega') = -\frac{d^2}{du^2}\log\sigma(u+\omega') =$$

$$= -\frac{d^2}{du^2}\log\sigma_3(u)$$

$$p(u+\omega'') = -\frac{d^2}{du^2}\log\sigma(u+\omega'') =$$

$$= -\frac{d^2}{du^2}\log\sigma_2(u).$$

§ 2. **Espressione della p mediante le ϑ.** — Da

$$\sigma(u) = \frac{2\omega}{\pi}\, e^{\frac{1}{2}\frac{\eta}{\omega}u^2}\, \frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta_1'(0)}$$

si ha

$$\log\sigma(u) = \log\frac{2\omega}{\pi} + \frac{1}{2}\frac{\eta}{\omega}u^2 + \log\vartheta_1(x) - \log\vartheta_1'(0)$$

e derivando si ha

$$\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} = \frac{\eta}{\omega} u + \frac{\vartheta_1'(x)}{\vartheta_1(x)} \frac{\pi}{2\omega}$$

donde, derivando ancora, si ha

$$p(u) = -\frac{\eta}{\omega} - \frac{\vartheta_1''(x)\vartheta_1(x) - \vartheta_1'^2(x)}{\vartheta_1^2(x)} \frac{\pi^2}{4\omega^2}$$

$$= -\frac{\eta}{\omega} - \frac{\pi^2}{4\omega^2} \frac{d^2}{dx^2} \log \vartheta_1(x).$$

Di questa formola avremo occasione di servirci in un paragrafo seguente.

Aumentando l'argomento u di ω, ω', ω'' e quindi x di

$$\frac{1}{2}\pi, \quad -\frac{1}{2} i \log q, \quad \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2} i \log q$$

si hanno le altre formole nelle quali vengono a comparire le altre ϑ. Si ha

$$p(u+\omega) = -\frac{\eta}{\omega} - \frac{\pi^2}{4\omega^2} \frac{d^2}{dx^2} \log \vartheta_2(x)$$

$$p(u+\omega') = -\frac{\eta}{\omega} - \frac{\pi^2}{4\omega^2} \frac{d^2}{dx^2} \log \vartheta(x)$$

$$p(u+\omega'') = -\frac{\eta}{\omega} - \frac{\pi^2}{4\omega^2} \frac{d^2}{dx^2} \log \vartheta_3(x).$$

§ 3. **Valori di** $p(\omega)$, $p(\omega')$, $p(\omega'')$. — Prendiamo a considerare la relazione fondamentale cui soddisfa la σ, quella cioè relativa al cosidetto teorema d'addizione (v. § 6, Cap. III). Ponendo

$$u_1 = \omega$$

$$u_2 = u$$

si ha

$$\frac{\sigma(u+\omega)\,\sigma(\omega-u)}{\sigma^2(u)\,\sigma^2(\omega)} = p(u) - p(\omega)$$

donde essendo

$$\frac{\sigma(u+\omega)}{\sigma(\omega)} = e^{\eta u}\,\sigma_1(u)$$

$$\frac{\sigma(-u+\omega)}{\sigma(\omega)} = e^{-\eta u}\,\sigma_1(u)$$

si ha

$$p(u) - p(\omega) = \left[\frac{\sigma_1(u)}{\sigma(u)}\right]^2.$$

Analogamente

$$p(u) - p(\omega') = \left[\frac{\sigma_3(u)}{\sigma(u)}\right]^2$$

$$p(u) - p(\omega'') = \left[\frac{\sigma_2(u)}{\sigma(u)}\right]^2.$$

Ponendo $u = \omega, \omega', \omega''$ si possono avere subito le formole:

$$\sqrt{p(\omega) - p(\omega'')} = \frac{\sigma_2(\omega)}{\sigma(\omega)} = \frac{e^{\eta''\omega}\,\sigma(\omega')}{\sigma(\omega'')\,\sigma(\omega)}$$

$$\sqrt{p(\omega'') - p(\omega')} = \frac{\sigma_3(\omega'')}{\sigma(\omega'')} = -\frac{e^{\eta'\omega''}\,\sigma(\omega)}{\sigma(\omega')\,\sigma(\omega'')}$$

$$\sqrt{p(\omega') - p(\omega)} = \frac{\sigma_1(\omega')}{\sigma(\omega')} = \frac{e^{-\eta\omega'}\,\sigma(\omega'')}{\sigma(\omega)\,\sigma(\omega')}.$$

Se ora in luogo delle $\sigma(\omega)$ $\sigma(\omega')$ $\sigma(\omega'')$ poniamo le espressioni trovate al § 4 del Cap. III, e se teniamo conto delle relazioni fra le ϑ, ϑ_1' con argomento zero abbiamo

$$\sqrt{p(\omega) - p(\omega')} = \frac{\pi}{2\omega}\vartheta^2$$

$$\sqrt{p(\omega'') - p(\omega')} = \frac{\pi}{2\omega}\vartheta_2^2$$

$$\sqrt{p(\omega) - p(\omega')} = \frac{\pi}{2\omega}\vartheta_3^2$$

delle quali formole non potrebbero trovarsi i valori di $p(\omega)$, $p(\omega')$, $p(\omega'')$ perchè una di queste relazioni è conseguenza delle altre due.

Dimostreremo ora la relazione fondamentale

$$p(\omega) + p(\omega') + p(\omega'') = 0.$$

e allora si ricaverà subito che $p(\omega)$ $p(\omega')$ $p(\omega'')$ non sono altro che le quantità da noi introdotte avanti e chiamate rispettivamente e_1, e_3, e_2.

Poniamo $u = 0$ nelle formole alla fine del paragrafo precedente, e teniamo conto delle equazioni differenziali cui soddisfanno le ϑ.

Essendo

$$\frac{d^2 \vartheta_i(x)}{d x^2} = -4 \frac{d \vartheta_i(x)}{d \log q}$$

si ha

$$\frac{d^2 \log \vartheta_i(x)}{d x^2} = \frac{\vartheta''_i(x)}{\vartheta_i(x)} - \left(\frac{\vartheta'_i(x)}{\vartheta_i(x)}\right)^2$$

$$= -4 \frac{d \log \vartheta_i(x)}{d \log q} - \left(\frac{\vartheta'_i(x)}{\vartheta_i(x)}\right)^2.$$

Quindi otteniamo

$$p(\omega) = \frac{\pi^2}{4\omega^2}\left\{\frac{1}{3}\frac{\vartheta_1'''(0)}{\vartheta_1'(0)} + 4\frac{d \log \vartheta_2(0)}{d \log q}\right\}$$

$$p(\omega') = \frac{\pi^2}{4\omega^2}\left\{\frac{1}{3}\frac{\vartheta_1'''(0)}{\vartheta_1'(0)} + 4\frac{d \log \vartheta(0)}{d \log q}\right\}$$

$$p(\omega'') = \frac{\pi^2}{4\omega^2}\left\{\frac{1}{3}\frac{\vartheta_1'''(0)}{\vartheta_1'(0)} + 4\frac{d \log \vartheta_3(0)}{d \log q}\right\}$$

tenendo presente che ϑ, ϑ_2, ϑ_3 essendo funzioni pari, le loro derivate sono funzioni dispari, e quindi diventano zero per $x = 0$.

Inoltre per effetto dell'equazione differenziale cui soddisfanno le ϑ e le loro derivate si ha

$$\frac{\vartheta_1'''(0)}{\vartheta_1'(0)} = -4\,\frac{d\log\vartheta_1'(0)}{d\log q}$$

donde si hanno le formole rimarchevoli

$$p(\omega) = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2 \frac{d\log[\vartheta_1'^{-1}(0)\,\vartheta_2^3(0)]}{d\log q}$$

$$p(\omega') = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2 \frac{d\log[\vartheta_1'^{-1}(0)\,\vartheta^3(0)]}{d\log q}$$

$$p(\omega'') = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2 \frac{d\log[\vartheta_1'^{-1}(0)\,\vartheta_3^3(0)]}{d\log q}.$$

Di qui colla relazione

$$\vartheta_1'(0) = \vartheta(0)\,\vartheta_2(0)\,\vartheta_3(0)$$

si ha subito

$$p(\omega) + p(\omega') + p(\omega'') = 0.$$

Questa relazione insieme con quelle già trovate dà immediatamente

$$p(\omega) = e_1$$

$$p(\omega') = e_3$$

$$p(\omega'') = e_2.$$

§ 4. **Relazione fra la funzione $p(u)$ e la funzione di Legendre** sn v. — Teniamo presente la formola del § 2 relativa ad un'espressione di $p(u)$ mediante le ϑ, e adoperiamo le formole che danno le derivate logaritmiche di 2.° ordine delle funzioni ϑ (v. § 12 Cap. I). Si ha allora

$$p(u) = -\frac{\eta}{\omega} - \frac{\pi^2}{4\omega^2}\frac{\vartheta''(0)}{\vartheta(0)} + \frac{\pi^2}{4\omega^2}\frac{\vartheta'^2_1(0)}{\vartheta^2(0)}\frac{\vartheta^2(x)}{\vartheta_1^2(x)}.$$

Sostituendo per $\frac{\eta}{\omega}$ la sua espressione trasformata con un procedimento simile a quello del § 3, cioè

$$-\frac{\eta}{\omega} = -\frac{1}{3}\frac{\pi^2}{\omega^2}\frac{d\log\vartheta_1'(0)}{d\log q}$$

e inoltre ponendo

$$\frac{\vartheta''(0)}{\vartheta(0)} = -4\frac{d\log\vartheta(0)}{d\log q}$$

(per effetto dell'equazione differenziale delle ϑ), si ha

$$p(u) = \frac{\pi^2}{3\omega^2}\frac{d\log[\vartheta_1'^{-1}(0)\,\vartheta^3(0)]}{d\log q} + \\ + \frac{\pi^2}{4\omega^2}\frac{\vartheta_1'^2(0)}{\vartheta^2(0)}\frac{\vartheta^2(x)}{\vartheta_1^2(x)}.$$

E per effetto delle formole del § 3 e della espres-

sione di sn v, si ha finalmente

$$p(u) = e_3 + \frac{e_1 - e_3}{\operatorname{sn}^2 v}.$$

Come si vede fra le due funzioni $p(u)$, sn v esiste una semplicissima relazione algebrica.

Dalla formola precedente si hanno le altre:

$$\operatorname{sn} v = \sqrt{\frac{e_1 - e_3}{p(u) - e_3}}$$

$$\operatorname{cn} v = \sqrt{\frac{p(u) - e_1}{p(u) - e_3}}$$

$$\operatorname{dn} v = \sqrt{\frac{p(u) - e_2}{p(u) - e_3}}.$$

La funzione $p(u)$ gode, come le funzioni di Legendre, delle due proprietà fondamentali e caratteristiche, cioè: 1.ª *che la derivata della funzione si esprime algebricamente mediante la funzione stessa;* 2.ª *che possiede un teorema d'addizione, cioè che il valore della funzione per la somma di due argomenti si esprime algebricamente mediante i valori della funzione per gli argomenti semplici.*

§ 5. **Espressione della derivata $p'(u)$ mediante la $p(u)$. Inversione.** — Adoperando la formola per $p(u)$ trovata nel § 2 e derivando rispetto ad u si ha

$$p'(u) = -\frac{\pi^3}{8\,\omega^3} \frac{d^3 \log \vartheta_1(x)}{d\,x^3}.$$

Intanto teniamo presente la formola per la derivata seconda logaritmica della ϑ_1.

$$\frac{d^2}{d\,x^2}\log\vartheta_1(x)=\frac{\vartheta''(0)}{\vartheta(0)}-\frac{\vartheta_1'^2(0)}{\vartheta^2(0)}\frac{\vartheta^2(x)}{\vartheta_1^2(x)}.$$

Derivando ancora si ha

$$\frac{d^3}{d\,x^3}\log\vartheta_1(x)=-\frac{\vartheta_1'^2(0)}{\vartheta^2(0)}\frac{d}{d\,x}\frac{\vartheta^2(x)}{\vartheta_1^2(x)}.$$

Ora nel § 3 Cap. II abbiamo trovato

$$\frac{d}{d\,x}\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)}=\vartheta^2(0)\frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)}\frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)}$$

onde

$$\frac{d}{d\,x}\frac{\vartheta(x)}{\vartheta_1(x)}=-\vartheta^2(0)\frac{\vartheta_2(x)\,\vartheta_3(x)}{\vartheta_1^2(x)}$$

$$\frac{d^3}{d\,x^3}\log\vartheta_1(x)=2\,\vartheta_3'^2(0)\frac{\vartheta(x)\,\vartheta_2(x)\,\vartheta_3(x)}{\vartheta_1^3(x)}$$

e quindi

$$p'(u)=-\frac{\pi^2}{4\,\omega^3}\vartheta_1'^2(0)\frac{\vartheta(x)\,\vartheta_2(x)\,\vartheta_3(0)}{\vartheta_1^3(x)}$$

$$=2\,\frac{\sigma_1(u)\,\sigma_2(u)\,\sigma_3(u)}{\sigma^3(u)}.$$

Intanto dalle formole del § 3, Cap. IV si ha

$$\sqrt{[p(u)-e_1][p(u)-e_2][p(u)-e_3]} = \\ = \frac{\sigma_1(u)\,\sigma_2(u)\,\sigma_3(u)}{\sigma^3(u)}$$

onde infine si ha la rimarchevole relazione

$$p'^2(u) = 4\,[(p(u)-e_1)(p(u)-e_2)(p(u)-e_3)] \\ = 4\,p^3(u) - g_2\,p(u) - g_3.$$

Questa relazione equivale evidentemente all'altra

$$\int_{\infty}^{p(u)} \frac{dp}{2\sqrt{(p-e_1)(p-e_2)(p-e_3)}} = u$$

da cui si vede che la funzione $p(u)$, come a suo tempo mostrammo per la funzione *amplitudine*, serve a risolvere il problema d'inversione dell'integrale ellittico

$$\int_{\infty}^{y} \frac{dy}{2\sqrt{(y-e_1)(y-e_2)(y-e_3)}}$$

cioè dà l'espressione del limite superiore di questo integrale in funzione dell'integrale stesso.

Questo integrale si chiama *integrale ellittico sotto la forma di Weierstrass*. Ne discorreremo meglio in un prossimo capitolo.

Mediante la formola precedente ricaviamo subito che tutte le derivate di ordine superiore al primo si possono esprimere razionalmente mediante $p(u)$, $p'(u)$.

Derivando p. es. primo e secondo membro della formola precedente si ha

$$2p'(u)p''(u) = 12p^2(u)p'(u) - g_2 p'(u)$$

donde

$$p''(u) = 6p^2(u) - \frac{1}{2}g_2.$$

Similmente si hanno le formole

$$p'''(u) = 12p(u)p'(u)$$

$$p^{\text{IV}}(u) = 120p^3(u) - 18g_2 p(u) - 12g_3$$

$$p^{\text{V}}(u) = 360p^2(u)p'(u) - 18g_2 p'(u)$$

$$p^{\text{VI}}(u) = 36\Big[140p^4(u) - 28g_2 p^2(u) - \\ - 20g_3 p(u) + \frac{1}{4}g_2^2\Big]$$

. . . . . .

Le formole per le derivate di ordine pari si possono risolvere rispetto alle successive potenze di p, e quelle per le derivate di ordine dispari si possono risolvere rispetto ai prodotti delle successive potenze di p per p'.

Si hanno allora le formole

$$p^2 = \frac{1}{6}\left(p'' + \frac{1}{2}g_2\right)$$

$$p^3 = \frac{1}{10}\left(\frac{p^{\text{iv}}}{12} + \frac{3}{2} g_2 p + g_3\right)$$

. . . . . .

$$p p' = \frac{1}{12} p'''$$

$$p^2 p' = \frac{1}{360} p^{\text{v}} + \frac{1}{20} g_2 p'$$

. . . . . .

Ai secondi membri di queste formole ci sono sempre espressioni lineari in p e nelle sue derivate. Onde ogni funzione intera di p e p' potrà sempre esprimersi linearmente mediante la p e le sue derivate.

Vogliamo ancora notare che, mediante la formola trovata sopra, si hanno le altre

$$\int_{\infty}^{e_1} \frac{dp}{\sqrt{4p^3 - g_2 p - g_3}} = \omega$$

$$\int_{\infty}^{e_2} \frac{dp}{\sqrt{4p^3 - g_2 p - g_3}} = \omega''$$

$$\int_{\infty}^{e_3} \frac{dp}{\sqrt{4p^3 - g_2 p - g_3}} = \omega'.$$

formole che possono servire a definire le quantità ω, ω', ω'' purchè si stabiliscano opportunamente i cammini d'integrazione. Di ciò discorreremo in un apposito capitolo.

E infine vogliamo osservare che, mediante il precedente integrale, si vede che dato a $p(u)$ un qualunque valore, esiste sempre un valore dell'argomento u che vi corrisponde; anzi, ricordando poi le formole di periodicità di $p(u)$, si deduce che di tali valori dell'argomento ne esistono infiniti.

§ 6. **Teorema d'addizione per la funzione** $p(u)$. — Il teorema d'addizione lo ricaviamo dalla formola

$$\frac{\sigma(u_1+u_2)\,\sigma(u_1-u_2)}{\sigma^2(u_1)\,\sigma^2(u_2)}=p(u_2)-p(u_1).$$

Prendendo i logaritmi di ambo i membri, ponendo

$$\frac{d}{du}\log\sigma(u)=\zeta(u)$$

e derivando rispetto ad u_1 e u_2, si ha

$$\zeta(u_1+u_2)-\zeta(u_1-u_2)-2\,\zeta(u_2)=\frac{p'(u_2)}{p(u_2)-p(u_1)}$$

$$\zeta(u_1+u_2)+\zeta(u_1-u_2)-2\,\zeta(u_1)=\frac{-p'(u_1)}{p(u_2)-p(u_1)}$$

e derivando ancora rispetto ad u_1 si ha

$$-p(u_1+u_2)+p(u_1-u_2)=\frac{p'(u_2)\,p'(u_1)}{[p(u_2)-p(u_1)]^2}=$$

$$=\frac{d}{d\,u_1}\frac{p'(u_2)}{p(u_2)-p(u_1)}$$

$$-p(u_1+u_2)-p(u_1-u_2)+2\,p(u_1)=$$

$$=\frac{-[p(u_2)-p(u_1)]\,p''(u_1)-p'^2(u_1)}{[p(u_2)-p(u_1)]^2}=$$

$$=\frac{d}{d\,u_1}\frac{-p'(u_1)}{p(u_2)-p(u_1)}$$

donde

$$+2\,p(u_1+u_2)-2\,p(u_1)=$$

$$=\frac{p'^2(u_1)-p''(u_1)\,[p(u_1)-p(u_2)]-p'(u_1)\,p'(u_2)}{[p(u_2)-p(u_1)]^2}$$

$$=-\frac{d}{d\,u_1}\frac{p'(u_1)-p'(u_2)}{p(u_1)-p(u_2)}.$$

Quest' ultima formola può costituire una forma rimarchevole del teorema d'addizione.

Aggiungendo ad ambo i membri la quantità

$$4\,p(u_1)+2\,p(u_2)$$

si ha, riducendo,

$$2\,p(u_1+u_2)+2\,p(u_1)+2\,p(u_2)=$$

$$= \frac{1}{[p(u_2)-p(u_1)]^2}\left\{\left(2p^3(u_1)-\frac{1}{2}g_2p(u_1)-\frac{1}{2}g_3\right)+\right.$$

$$\left.+\left(2p^3(u_2)-\frac{1}{2}g_2p(u_2)-\frac{1}{2}g_3\right)-p'(u_1)p'(u_2)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{p'^2(u_1)+p'^2(u_2)-2p'(u_1)p'(u_2)}{[p(u_2)-p(u_1)]^2}.$$

Onde si ha infine la formola

$$p(u_1+u_2)+p(u_1)+p(u_2)=\frac{1}{4}\left[\frac{p'(u_2)-p'(u_1)}{p(u_2)-p(u_1)}\right]^2$$

che è la formola d'addizione per la funzione p. Questa formola può mettersi sotto varie forme.

Ponendo

$$u_1+u_2=-u_3$$

cioè

$$u_1+u_2+u_3=0$$

si ha

$$p(u_1)+p(u_2)+p(u_3)=\frac{1}{4}\left[\frac{p'(u_1)-p'(u_2)}{p(u_1)-p(u_2)}\right]^2$$

e permutando circolarmente u_1 u_2 u_3, il secondo membro può scriversi

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{p'(u_2)-p'(u_3)}{p(u_2)-p(u_3)}\right]^2$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{p'(u_3)-p'(u_1)}{p(u_3)-p(u_1)}\right]^2.$$

Abbiamo dunque l'eguaglianza, a meno del segno, delle radici quadrate dei rapporti che figurano al secondo membro.

È facile verificare che i segni di tali radici devono essere tutti positivi, cioè che si ha senz'altro la relazione

$$\frac{p'(u_1)-p'(u_2)}{p(u_1)-p(u_2)}=\frac{p'(u_2)-p'(u_3)}{p(u_2)-p(u_3)}=\frac{p'(u_3)-p'(u_1)}{p(u_3)-p(u_1)}.$$

In effetti se ad uno di questi rapporti ponessimo il segno negativo e si avesse per esempio

$$\frac{p'(u_1)-p'(u_2)}{p(u_1)-p(u_2)}=-\frac{p'(u_2)-p'(u_3)}{p(u_2)-p(u_3)}=$$

$$=\pm\frac{p'(u_3)-p'(u_1)}{p(u_3)-p(u_1)}$$

se ne dedurrebbe

$$\frac{p'(u_1)-p'(u_3)}{p(u_1)-2\,p(u_2)+p(u_3)}=\pm\frac{p'(u_3)-p'(u_1)}{p(u_3)-p(u_1)}$$

donde

$$p(u_3)-p(u_1)=\mp(p(u_1)-2\,p(u_2)+p(u_3)$$

e qualunque segno si scelga al secondo membro si avrebbe o una relazione fra $p(u_2)\,p(u_3)$, ovvero una relazione fra $p(u_1)$, $p(u_2)$ relazioni che sono assurde, perchè *due soli* dei tre argomenti sono fra loro indipendenti.

Possiamo dunque dire che alla relazione

$$u_1 + u_2 + u_3 = 0.$$

corrisponde l'eguaglianza di due dei tre rapporti precedenti.

Questo teorema d'addizione lo possiamo porre sotto un'altra forma elegante.

Si può far vedere che se la somma delle tre u è zero, allora è zero il determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p(u_1) & p(u_2) & p(u_3) \\ p'(u_1) & p'(u_2) & p'(u_3) \end{vmatrix} = 0.$$

Infatti la eguaglianza dei due primi rapporti può mettersi sotto la forma

$$[p(u_2) - p(u_1)]\, p'(u_3) + [p(u_3) - p(u_2)]\, p'(u_1) + \\ + [p(u_1) - p(u_3)]\, p'(u_2) = 0$$

e questo è proprio lo sviluppo del determinante di sopra.

Possiamo ancora trasformare nella seguente maniera il teorema d'addizione. L'annullarsi di quel determinante corrisponde alla sussistenza delle tre relazioni

$$a\,p(u_1) + b\,p'(u_1) + c = 0$$

$$a\,p(u_2) + b\,p'(u_2) + c = 0$$

$$a\,p(u_3) + b\,p'(u_3) + c = 0.$$

Quindi possiamo dire che *se determiniamo delle quantità a, b, c tali che le due prime di queste equazioni sieno soddisfatte, cioè tali che la equazione*

$$a\,p(u) + b\,p'(u) + c = 0.$$

sia soddisfatta da $u = u_1$, $u = u_2$, allora la stessa equazione sarà soddisfatta anche da $u = u_3$, se

$$u_1 + u_2 + u_3 = 0.$$

Prima di terminare questo paragrafo vogliamo fare un' interessante osservazione riguardante il teorema d'addizione delle funzioni ellittiche.

Vogliamo mostrare come tal teorema si collega colla celebre scoperta di Eulero sull' integrazione dell' equazione differenziale ellittica.

Consideriamo un' equazione differenziale della forma

$$\frac{d\,x_1}{\sqrt{X_1}} + \frac{d\,x_2}{\sqrt{X_2}} = 0$$

dove X_1, si intende un polinomio generale di 3.° o 4.° grado in x, e con X_2 il medesimo polinomio in cui si mette x_1 in luogo di x_2. In questa equazione differenziale le variabili sono separate, e quindi l' integrazione si riduce a due quadrature, ma però tali quadrature sono degli integrali ellittici, e quindi la soluzione dell'equazione data, cioè

$$u_1 + u_2 = \text{costante}$$

si presenterebbe sotto forma trascendente.

La scoperta di Eulero, cui abbiamo accennato, consiste in ciò che, sebbene in tal maniera l'integrale di quell'equazione si presenta sotto forma trascendente, pure esso può porsi sotto forma algebrica, cioè si può trovare una relazione algebrica fra x_1 x_2 e la costante arbitraria, che sia l'integrale dell'equazione data. Ora ciò si vede subito col teorema d'addizione delle funzioni ellittiche.

Supponiamo che il polinomio X_1 sia della forma di Weierstrass avanti adoperata, cioè

$$X_1 = 4\,x_1^3 - g_2\,x_1 - g_3,$$

allora le variabili x_1, x_2 non sono altro che le funzioni $p(u_1)$, $p(u_2)$ dove

$$u_1 = \int_{\infty}^{x_1} \frac{d\,x_1}{\sqrt{X_1}}$$

$$u_2 = \int_{\infty}^{x_2} \frac{d\,x_2}{\sqrt{X_2}}.$$

Ponendo

$$u_1 + u_2 = -\,u_3\,,$$

per il teorema d'addizione, si ha da questa ultima relazione

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p\,(u_1) & p\,(u_2) & p\,(u_3) \\ p'\,(u_1) & p'\,(u_2) & p'\,(u_3) \end{vmatrix} = 0$$

ovvero, ponendo $p(u_3) = x_3$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ \sqrt{X_1} & \sqrt{X_2} & \sqrt{X_3} \end{vmatrix} = 0.$$

Questa relazione *in cui* x_3 *funziona da costante arbitraria,* è l'integrale *algebrico* dell'equazione data.

§ 7. **Addizione di semiperiodi all'argomento della funzione** $p(u)$. — Mediante la formola d'addizione possiamo trovare i valori di $p(u+\omega)$, $p(u+\omega')$, $p(u+\omega'')$. Si ha

$$p(u+\omega) = -p(u) - e_1 + \frac{1}{4}\frac{p'^2(u)}{(p(u)-e_1)^2}$$

ed essendo

$$p'^2(u) = 4(p(u)-e_1)(p(u)-e_2)(p(u)-e_3)$$

si ha

$$p(u+\omega) = -(p(u)+e_1) + \frac{(p(u)-e_2)(p(u)-e_3)}{p(u)-e_1}$$

$$= \frac{+e_1^2 - p(u)(e_2+e_3) + e_2 e_3}{p(u)-e_1}$$

$$= \frac{[p(u)-e_1]e_1 + (e_1-e_2)(e_1-e_3)}{p(u)-e_1}$$

$$= e_1 + \frac{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}{p(u)-e_1}.$$

Analogamente

$$p(u+\omega') = e_3 + \frac{(e_3-e_1)(e_3-e_2)}{p(u)-e_3}$$

$$p(u+\omega'') = e_2 + \frac{(e_2-e_1)(e_2-e_3)}{p(u)-e_2}.$$

§ 8. **Infiniti delle funzioni** $p(u)$, $p'(u)$. **Omogeneità.** — Per trovare gli infiniti della funzione $p(u)$ basta ricordare la formola

$$p(u) = \frac{\sigma_1^2(u)}{\sigma^2(u)} - e_1$$

da cui si vede che $p(u)$ diventa infinita in tutti e soli i punti in cui diventa zero $\sigma(u)$, cioè nei punti della forma

$$u = 2m\omega + 2n\omega'.$$

In tutti tali punti la $p(u)$ diventa infinita di 2.° ordine; nel parallelogrammo fondamentale dei periodi, cioè in quello che ha per vertici i punti

$$0, \quad 2\omega, \quad 2\omega', \quad 2\omega + 2\omega'$$

di tali punti d'infinito di $p(u)$ ve n'è uno solo.

Nei medesimi punti la funzione

$$p'(u) = -\frac{\sigma_1(u)\,\sigma_2(u)\,\sigma_3(u)}{\sigma^3(u)}$$

diventa infinita di 3.° ordine.

In quanto agli zeri poi osserviamo che quelli $p(u)$ non hanno una espressione facile; mentre quelli di $p'(u)$ sono tutti e soli quelli delle tre funzioni σ pari; cioè tutti i punti della forma

$$u = m\omega + n\omega'$$

dove m, n sono numeri interi.

La funzione $p'(u)$, essendo la seconda derivata logaritmica della σ dispari che, come funzione di u, ω, ω', è omogenea di grado 1 (v. § 10, Cap. III), sarà omogenea di grado -2; quindi si avrà la relazione

$$p'(ru;\ r\omega,\ r\omega') = r^{-2}p'(u;\ \omega,\ \omega')$$

ovvero, ricordando che g_2, g_3 sono omogenee dei gradi -4, -6 rispettivamente, si può scrivere anche

$$p(ru;\ r^{-4}g_2,\ r^{-6}g_3) = r^{-2}p(u,\ g_2,\ g_3)$$

se p anzichè dipendente da ω, ω' la si vuol considerare dipendente da g_2, g_3.

§ 9. **Sviluppo di $p(u)$ in serie nell'intorno del punto $u = 0$.** — La funzione $p(u)$ diventa infinita di 2.° ordine nel punto $u = 0$, come risulta dal paragrafo precedente.

Possiamo ora dimostrare dippiù *che il prodotto*

$$u^2 p(u)$$

ha per limite 1 per $u = 0$, e quindi che lo sviluppo

di p (u) secondo le potenze di u, ha per primo termine esattamente $\frac{1}{u^2}$

In effetti sapendo che

$$\sigma(u) = u + A\,u^5 + \ldots$$

dove A è un coefficiente che ancora non conosciamo, e quindi

$$\sigma'(u) = 1 + 5\,A\,u^4 + \ldots$$

$$\sigma''(u) = 20\,A\,u^3 + \ldots$$

si ha

$$p(u) = \frac{\sigma'^2(u) - \sigma(u)\,\sigma''(u)}{\sigma^2(u)} =$$

$$= \frac{1 - 10\,A\,u^4 + \ldots}{u^2 + 2\,A\,u^6 + \ldots}$$

e quindi

$$\lim_{u=0} u^2\,p(u) = 1.$$

Nello sviluppo di $p(u)$ il primo termine sarà dunque $+\frac{1}{u^2}$. Non può poi esserci un termine in $\frac{1}{u}$ perchè $p(u)$ è una *funzione pari*, e non può esserci un termine senza u, perchè si può far vedere subito che

$$\lim_{u=0}\left[p(u) - \frac{1}{u^2}\right] = 0.$$

Basta perciò servirsi dei medesimi sviluppi dati sopra.

Si ricava perciò che gli altri termini dello sviluppo hanno tutti per fattore una potenza pari positiva di u.

Possiamo quindi porre

$$p(u) = \frac{1}{u^2} + a_2 u^2 + a_4 u^4 + \dots$$

dove $a_2\, a_4 \dots$ sono coefficienti ancora ignoti.

Di qui abbiamo

$$p^2(u) = \frac{1}{u^4} + 2\, a_2 + 2\, a_4 u^2 + a_2^2 u^4 + \dots$$

$$p^3(u) = \frac{1}{u^6} + \frac{3\, a_2}{u^2} + 3\, a_4 + 3\, a_2 u^2 + \dots$$

. . . . . .

mentre poi

$$p'(u) = -\frac{2}{u^3} + 2\, a_2 u + 4\, a_4 u^3 + \dots$$

$$p''(u) = \frac{2 \,.\, 3}{u^4} + 2\, a_2 + 12\, a_4 u^2 + \dots$$

$$p'''(u) = -\frac{2 \,.\, 3 \,.\, 4}{u^5} + 24\, a_4 u + \dots$$

. . . . . .

Ora se teniamo presenti le formole che esprimono p'', p''', ... mediante p, p' e sostituiamo in esse questi sviluppi, e paragoniamo i termini simili al primo e secondo membro, otteniamo facilmente delle formole che ci danno i coefficienti

$$a_2, a_4 \ldots$$

Si ha p. es.

$$2\,a_2 = 12\,a_2 - \frac{1}{2}\,g_2$$

donde

$$a_2 = \frac{1}{20}\,g_2.$$

Analogamente:

$$a_4 = \frac{1}{28}\,g_3$$

$$a_6 = \frac{1}{2^4 \,.\, 3 \,.\, 5^2}\,g_2^{\,2}.$$

. . . . . .

Partendo dall'eguaglianza

$$p'''(u) = 12\,p(u)\,p'(u)$$

possiamo trovare una facile formola di ricorrenza per il calcolo dei coefficienti a.

Possiamo scrivere

$$p'''(u) = -\frac{2.3.4}{u^5} +$$

$$+ \sum_{i=2}^{i=\infty} (2i)(2i-1)(2i-2)\, a_{2i}\, u^{2i-3}$$

e

$$12\, p(u)\, p'(u) = -\frac{2.3.4}{u^5} +$$

$$+ 12 \sum_{i=2}^{\infty} [2i\, a_{2i} + (2i-4)\, a_2\, a_{2i-4} +$$

$$+ (2i-6)\, a_4\, a_{2i-6} +$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$+ 4\, a_{2i-6}\, a_4 +$$

$$+ 2\, a_{2i-4}\, a_2 -$$

$$- 2\, a_{2i}]\, u^{2i-3} =$$

$$= -\frac{2.3.4}{u^5} + 12(i-1) \sum_{i=2}^{\infty} [2\, a_{2i} + a_2\, a_{2i-4} +$$

$$+ a_4\, a_{2i-6} + \ldots + a_{2i-6}\, a_4 + a_{2i-4}\, a_2]\, u^{2i-3}$$

dove la legge di formazione è evidente.

Dal paragone dei coefficienti dei termini simili risulta subito

$$(2i)(2i-1)\, a_{2i} = 12\, a_{2i} +$$

$$+ 6\, [a_2\, a_{2i-4} + a_4\, a_{2i-6} + \ldots + a_{2i-6}\, a_4 + a_{2i-4}\, a_2]$$

donde

$$a_{2i} = \frac{3}{(i-2)(2i+3)} [a_2 a_{2i-4} + a_4 a_{2i-6} + \ldots +$$

$$+ a_{2i-6} a_4 + a_{2i-4} a_2].$$

Questa è la richiesta formola di ricorrenza che dà i coefficienti a cominciare da a_6.

Il primo e il secondo cioè a_2, a_4 li abbiamo già ottenuti sopra. Si vede di qui che *tutti i coefficienti dello sviluppo di p(u) sono funzioni razionali intere di* g_2 g_3, e questa è una proprietà fondamentale ed importante.

Si trova così

$$a_6 = \frac{g_2^2}{2^4 . 3 . 5^2}$$

$$a_8 = \frac{3 g_2 g_3}{2^4 . 5 . 7 . 11}$$

$$a_{10} = \frac{1}{2^4 . 13}\left(\frac{g_3^2}{7} + \frac{g_2^3}{2 . 3 . 5^3}\right)$$

$$a_{12} = \frac{g_2^2 g_3}{2^5 . 3 . 5^2 . 7 . 11}$$

$$a_{14} = \frac{1}{17}\left(\frac{3 g_2 g_3^2}{2^4 . 7^2 . 11 . 13} + \frac{g_2^4}{2^8 . 3 . 5^3 . 13}\right)$$

$$a_{16} = \frac{1}{19}\left(\frac{29 g_2^3 g_3}{2^8 . 5^3 . 7 . 11 . 13} + \frac{g_3^3}{2^6 . 7^3 . 13}\right)$$

. . . . . .

Lo sviluppo di $p(u)$ di cui abbiamo trattato in questo paragrafo non vale in tutto il piano. Per i principii della teoria delle funzioni esso vale in un cerchio col centro nel punto $u=0$ e che non comprenda alcun punto in cui $p(u)$ è infinita (salvo il punto $u=0$).

Ciò risulta dal teorema di Cauchy sul campo di convergenza di una serie di Taylor. Si sa che tal campo è un cerchio dentro cui non esista alcun punto d'infinito della funzione che si sviluppa in serie; ora applicando questo teorema alla funzione

$$p(u) - \frac{1}{u^2}$$

la quale non diventa più infinita nel punto $u=0$, ma lo diventa invece in tutti gli altri punti d'infinito di $p(u)$, si ha appunto il risultato sopra enunciato.

Sapendo che i punti del piano in cui $p(u)$ diventa infinita, sono tutti i vertici dei parallelogrammi dei periodi, si ha che il campo di validità della serie di $p(u)$ è un cerchio col centro nell'origine, e il cui raggio è eguale al più piccolo fra i tre segmenti

$$(0, 2\omega)$$

$$(0, 2\omega')$$

$$(0, 2\omega'')$$

che rappresentano rispettivamente i due lati e la diagonale del parallelogrammo fondamentale.

§ 10. **La funzione $p(u)$ sviluppata in una serie doppia. Conseguenze aritmetiche.** — Dobbiamo prendere le mosse dalla formola di sviluppo di $\sigma(u)$ in un prodotto infinito a due indici:

$$\sigma(u) = u \prod_w \left(1 - \frac{u}{w}\right) e^{\frac{u}{w} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2}}$$

dove $w = 2m\omega + 2n\omega'$ con m, n numeri interi qualunque, *escluso il caso che sieno ambedue zero.*

Per ottenere $p(u)$ prendiamo i logaritmi dei due membri e poi formiamo la derivata seconda col segno mutato.

Si ha

$$\log \sigma(u) = \log u + \sum_w \left[\log\left(1 - \frac{u}{w}\right) + \left(\frac{u}{w} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2}\right)\right]$$

$$p(u) = -\frac{d^2}{du^2}\log\sigma(u) = \frac{1}{u^2} + \sum_w \left[\frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2}\right]$$

$$= \frac{1}{u^2} + 3u^2 \sum \frac{1}{w^4} + 5u^4 \sum \frac{1}{w^6} + \ldots$$

Notiamo che quest'ultimo risultato si ottiene osservando che i sommatorii:

$$\sum \frac{1}{w^3}$$

$$\sum \frac{1}{w^5}$$

. . .

sono zero perchè bisogna estendere il w in modo che m, n abbiano tutti i valori interi *positivi* e *negativi*.

Dal paragone di questa formola con quella del paragrafo precedente otteniamo che *le somme doppie*

$$\Sigma \frac{1}{w^{2i}} = \sum_{m,n} \frac{1}{(2m\omega + 2n\omega')^{2i}}$$

si esprimono come funzioni razionali intere degli invarianti g_2, g_3. E siccome poi dallo sviluppo del paragrafo precedente si ha che i primi due coefficienti sono, salvo un coefficiente numerico, eguali a g_2, g_3 e quindi si può dire che *tutti i coefficienti successivi sono funzioni razionali intere dei due primi*, così possiamo dedurre il risultato notevole *che tutte le somme*

$$\sum_{m,n} \frac{1}{(2m\omega + 2n\omega')^{2i}}$$

dove $i = 2, 3, 4, \ldots$ *si esprimono tutte razionalmente e in funzioni intere delle due prime di esse, cioè di quelle per le quali* $i = 2$, $i = 3$.

Questo risultato relativo alla somma delle serie doppie è importante, tanto più che esso è la generalizzazione di un teorema che si verifica per le serie semplici del tipo

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{2i}}$$

le quali, salvo fattori numerici, sono eguali rispet-

tivamente a π^2, π^4,... cioè sono funzioni razionali intere della prima di esse (vedi Cesáro; *Corso di analisi*, pag. 481).

In quanto alle serie doppie

$$\Sigma \frac{1}{\omega^p}$$

vogliamo ricordare che si dimostra essere esse convergenti *assolutamente* se $p > 2$ e se il rapporto $\frac{\omega'}{\omega}$ non è reale, il che appunto accade nel caso delle funzioni ellittiche, perchè in tal caso questo rapporto deve avere la parte immaginaria positiva diversa da zero. Per queste serie si può vedere: Eisenstein (*Crelle*, vol. 35 (1847)); Jordan, *Analyse*, I, pag. 161; Halphen, *Fonct. elliptiques*, I, pag. 358, ecc.

§ 11. **Casi particolari della funzione** $p(u)$. **Sua degenerazione.** — Vogliamo considerare dei casi particolari e propriamente quelli in cui uno degli invarianti è zero.

1.° caso; $g_3 = 0$. Allora il polinomio in p diventa

$$4p^3(u) - g_2 p(u)$$

e una delle radici e_1, e_2, e_3 diventa zero.

Poniamo per es. $e_3 = 0$; allora

$$e_1 = -\frac{1}{2}\sqrt{g_2}$$

$$e_2 = +\frac{1}{2}\sqrt{g_2}.$$

Le quattro radici

$$\infty, \quad 0, \quad e_1, \quad e_2$$

sono *armoniche*, cioè uno dei sei loro rapporti anarmonici è uguale a -1.

Facciamo la trasformazione

$$p = e_1 q^{-2}$$

introducendo la nuova variabile q in luogo di p.

Allora

$$\frac{dp}{dq} = -2 e_1 q^{-3}$$

e quindi l'integrale diventa

$$-\frac{1}{\sqrt{e_1}} \int_0^q \frac{dq}{\sqrt{1-q^4}}.$$

L'integrale ellittico generale si riduce a questa forma particolare quando le quattro radici del polinomio di quarto grado sono armoniche.

Questo integrale ellittico particolare è quello che si presenta nella rettificazione della lemniscata.

In questo caso si può dimostrare che se 2ω è un periodo della funzione $p(u)$, anche $2i\omega$ sarà un periodo; cioè che si possono scegliere i due semiperiodi in modo che il loro rapporto sia i.

Infatti partiamo dalla formola d'omogeneità della funzione p

$$p(ur;\ r^{-4} g_2,\ r^{-6} g_3) = r^{-2} p(u;\ g_2,\ g_3)$$

e poniamo $r = i$. Essendo $g_3 = 0$ e $r^{-4} = 1$ si ha

$$p(u\,i,\ g_2) = -p(u,\ g_2).$$

Di qui si ricava

$$\begin{aligned} p(i\,u + 2\,i\,\omega) &= -p(u + 2\,\omega) \\ &= -p(u) \\ &= p(i\,u) \end{aligned}$$

cioè ponendo

$$i\,u = u_1$$

si ha

$$p(u_1 + 2\,i\,\omega) = p(u_1)$$

qualunque sia u_1. Di qui si ricava che $2\,i\,\omega$ è anche un periodo.

La proprietà contenuta nella formola

$$p(i\,u) = -p(u)$$

costituisce una bella proprietà della funzione p corrispondente al caso particolare di cui qui si tratta.

2.° *caso;* $g_2 = 0$. Il caso di $g_2 = 0$ corrisponde a quello in cui le quattro radici del polinomio di 4.° grado che ha per invariante g_2, sono *equianarmoniche*, cioè uno dei loro rapporti anarmonici è radice cubica dell'unità *negativa*. Infatti in questo caso le quattro radici sono

$$\infty,\quad e_1,\quad \alpha\,e_1,\quad \alpha^2\,e_1$$

dove α è una radice cubica dell'unità. Il loro rapporto anarmonico è proprio $-\alpha$.

La funzione p anche in questo caso soddisfa ad una bella proprietà analoga a quella del caso precedente. Nella formola d'omogeneità ponendo $r = \alpha$ si ricava

$$p(\alpha u) = \alpha p(u).$$

Ora

$$\begin{aligned} p(u\alpha + 2\alpha\omega) &= \alpha p(u + 2\omega) \\ &= \alpha p(u) \\ &= p(\alpha u) \end{aligned}$$

e ponendo

$$\alpha u = u_1$$

si ha

$$p(u_1 + 2\alpha\omega) = p(u_1)$$

cioè $2\alpha\omega$ è anche un periodo se lo è 2ω.

In questo caso il rapporto dei periodi è una radice cubica dell'unità.

Passiamo ora ad esaminare in che cosa degenera la funzione $p(u)$ nei due casi limiti $q = 0$, $q = 1$.

Per trovare in che cosa degenera la p basta ricordare la relazione fra la $p(u)$ e la sn v.

Tenendo presenti i § 8, Cap. II, § 13, Cap. III,

si ha che per $q = 0$

$$p(u) = a - \frac{3a}{\operatorname{sen}^2 (u\sqrt{-3a})}$$

dove a è il valore comune di quelle due radici fra le e_1 e_2 e_3 che diventano fra loro eguali quando $q = 0$. In questo caso ω diventa

$$\frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{-3a}}$$

e ω' diventa infinito.

Nel caso in cui $q = 1$ si ha

$$k^2 = 1, \quad k'^2 = 0$$

quindi

$$e_2 = e_1 = -\frac{1}{2} e_3$$

$$g_2 = 3 e_3^2 \quad g_3 = e_3^3$$

e dalla (5), § 7, Cap. III si ha

$$v = u\sqrt{-\frac{3}{2} e_3}$$

e quindi

$$p(u) = e_3 - \frac{3}{2} e_3 \left(\frac{e^v + e^{-v}}{e^v - e^{-v}}\right)^2$$

dove v ha con u la relazione di sopra.

In questo caso $\omega = \infty$ ed essendo

$$\frac{i K'}{\omega'} = \sqrt{e_1 - e_3}$$

e inoltre essendo $K' = \frac{\pi}{2}$ quando $k'^2 = 0$ (v. § 8, Cap. II) si ha

$$\omega' = \frac{1}{2} i \pi \frac{1}{\sqrt{-\frac{3}{2} e_3}},$$

e infatti si può direttamente verificare che $2\omega'$ è un periodo di quella funzione esponenziale cui si riduce $p(u)$.

In ambo i casi, come si vede, le funzioni doppiamente periodiche diventano funzioni ad un sol periodo.

§ 12. **Le funzioni razionali di p e p'.** — Immaginiamo una qualunque funzione razionale di p e p'. Ricordando che p'^2 può esprimersi razionalmente mediante p, la supposta funzione razionale di p e p' potrà sempre porsi sotto la forma

$$\frac{M + N p'}{M_1 + N_1 p'}$$

dove $M\ N\ M_1\ N_1$ sono funzioni razionali intere della sola p; e moltiplicando numeratore e denominatore per $M_1 - N_1 p'$, possiamo fare scomparire il p' dal denominatore, e porre la funzione

data sempre sotto la forma

$$A + Bp'$$

dove A, B sono funzioni *razionali* della sola p. Facciamo allora la decomposizione delle funzioni fratte razionali A, B, coi metodi ordinarii.

Si ha in primo luogo una parte *intera* in p e p', di grado qualunque in p e di 1.° grado in p', la quale parte intera è formata di termini come p^n, e di termini come $p^n\ p'$.

Ora tenendo presenti le formole che esprimono le derivate successive di p mediante p e p' si vede subito che esse possono risolversi rispetto alle successive potenze di p, e anche rispetto ai prodotti delle successive potenze di p per p', e che ai *secondi membri si hanno sempre espressioni lineari nella p e nelle derivate successive di p* (v. § 5, Cap. IV); onde la parte intera, di cui sopra si parla, potrà sempre trasformarsi in un'espressione lineare nella p e nelle sue successive derivate.

Dopo la parte intera si ha una serie di frazioni del tipo

$$\sum_{ik} \frac{m_{ik}}{(p(u) - a_i)^k} + \sum_{jh} \frac{n_{jh}}{(p(u) - b_j)^h} p'(u)$$

dove m, n, sono costanti, a_i, b_j sono le radici dei denominatori di A, B; gli indici k, h devono avere i valori 1, 2,... sino al grado di molteplicità della corrispondente radice.

Sapendo che ad ogni valore di p corrisponde sempre un valore dell'argomento, possiamo sempre

porre

$$a_i = p(u_i)$$

$$b_j = p(u'_j)$$

e quindi alla data funzione si può sempre dare la forma

$$\sum_{ik} \frac{m_{ik}}{(p(u) - p(u_i))^k} + \sum_{jh} \frac{n_{jh}}{(p(u) - p(u_j'))^h} p'(u).$$

Ora dobbiamo ricordare delle formole riguardanti le funzioni p.

Dalla cosidetta formola d'addizione della σ, derivando rispetto agli argomenti si possono ottenere le formole (v. § 6),

$$\zeta(u + u_j') + \zeta(u - u_j') - 2\zeta(u) = \frac{p'(u)}{p(u) - p(u_j')}$$

$$\zeta(u + u_i) - \zeta(u - u_i) - 2\zeta(u_i) = \frac{-p'(u_i)}{p(u) - p(u_i)}$$

e derivando ancora rispetto ad u_j' e u_i rispettivamente si ha

$$-p(u + u_j') + p(u - u_j') = \frac{p'(u_j')}{[p(u) - p(u_j')]^2} p'(u)$$

$$-p(u + u_i) - p(u - u_i) + 2p(u_i) + \frac{p''(u_i)}{p(u) - p(u_i)} =$$

$$= -\frac{p'^2(u_i)}{[p(u) - p(u_i)]^2}$$

e derivando ancora si hanno altre formole nelle quali i denominatori del secondo membro sono di 3.° grado, e così di seguito.

Da queste formole appare che tutte le frazioni contenenti un denominatore di 1.° grado od un denominatore di 2.° grado, di 3.°, ecc., si possono esprimere mediante una combinazione lineare di quantità come

$$\zeta\,(u - u')$$

$$p\,(u - u')$$

$$p'\,(u - u')$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

Riunendo questo risultato con quell'altro relativo alla parte intera in p e p' possiamo dunque conchiudere *che ogni funzione razionale di $p\,(u)$, $p'\,(u)$ si potrà sempre esprimere come una combinazione lineare del tipo*

$$c + \sum_{\nu} c_\nu\,\zeta\,(u - u_\nu) + \sum_{\mu} c_\mu'\,p\,(u - u_\mu') +$$

$$+ \sum_{\varrho} c_\varrho''\,p'\,(u - u_\varrho'') + \ldots$$

cioè lineare in ζ in p e nelle successive derivate di p.

C'è da fare alcune osservazioni sul risultato precedente. Prima di tutto, tenendo presenti le formole precedenti, si vede che ogni volta che, nella trasformazione precedente, introduciamo le ζ in cui l'argomento sia variabile (dipendente da u) le ve-

niamo sempre a introdurre sotto le due forme

$$a\,[\zeta(u + u'_j) + \zeta(u - u'_j) - 2\,\zeta(u)]$$

$$b\,[\zeta(u + u_i) - \zeta(u - u_i)]$$

dove a, b sono dei fattori costanti (indipendenti da u); in altri termini tutta la parte in ζ che verrà nello sviluppo non sarà che somma di tanti termini di questo tipo; ora si vede che la somma dei singoli coefficienti delle varie ζ in queste espressioni è zero; dunque possiamo conchiudere che *sarà zero la somma di tutti i coefficienti c_ν dello sviluppo sopra indicato.*

Inoltre dobbiamo anche osservare che c'è un caso in cui lo sviluppo precedente appare in difetto e cioè quando uno degli argomenti u_i, u_j' è esattamente un semiperiodo ω; giacchè allora $p'(u_i)$ è zero.

Ora in questo caso possiamo mostrare che il risultato sussiste egualmente, ma bisogna mutare il procedimento.

Teniamo presente la formola

$$p(u - \omega_i) - e_i = (e_i - e_h)(e_i - e_k)\frac{1}{p(u) - e_i}$$

mediante la quale ogni frazione del tipo

$$\frac{a}{(p(u) - e_i)^n}$$

può ridursi ad una parte *intera* in $p(u - \omega_i)$, e quindi, mediante le formole citate al principio di

questo paragrafo, può poi ridursi ad un' espressione lineare in $p(u-\omega_i)$ e nelle sue derivate.

Per ogni frazione poi del tipo

$$\frac{a\,p'(u)}{p(u)-e_i}$$

col denominatore di 1.° grado, si può applicare senza alcuna difficoltà il procedimento generale dato sopra e introdurre le ζ; invece per una frazione del tipo

$$\frac{a\,p'(u)}{(p(u)-e_i)^n} \qquad n>1$$

può osservarsi che essa può scriversi

$$\frac{-a}{n-1}\frac{d}{du}\frac{1}{(p(u)-e_i)^{n-1}} =$$

$$= \frac{1}{n-1}\frac{1}{[(e_i-e_h)(e_i-e_k)]^{n-1}}\frac{d}{du}[p(u-\omega_i)-e_i]^{n-1}$$

Mediante le citate formole si trasformerà allora prima la funzione sotto il segno di derivazione in un' espressione lineare in $p(u-\omega_i)$ e nelle sue derivate successive e poi si eseguirà la derivazione Come si vede è in ogni caso sempre possibile la trasformazione contenuta nel teorema di sopra.

§ 13. **Decomposizione delle funzioni razionali di p, p' in quozienti di prodotti di σ.** — Consideriamo una funzione razionale *intera* qualunque di $p(u)$ $p'(u)$ e sia $F(u)$.

Se essa diventa zero di ordine n_i per $u = u_i$ [il che significa che sviluppata secondo le potenze ascendenti di $(u - u_i)$ nell' intorno del punto u_i, acquista per fattore $(u - u_i)^{n_i}$) la sua prima derivata rispetto ad u, avrà la stessa radice ma di ordine $n_i - 1$.

Se quindi noi formiamo il quoziente

$$\frac{F'(u)}{F(u)}$$

e poi facciamo la decomposizione di questa funzione in frazioni elementari, come si è fatto nel paragrafo precedente, non vi potranno essere frazioni con un denominatore di grado superiore ad 1, perchè se nello sviluppo vi fosse p. es. la frazione

$$\frac{A}{[p(u) - p(u_i)]^r}$$

il secondo membro per $u = u_i$ diventerebbe ∞ di ordine $r > 1$ [osservando che $p(u) - p(u_i)$ per $u = u_i$ diventa zero come $(u - u_i)$] mentre che il primo membro diventa ∞ di primo ordine.

Tenendo allora presenti le formole del paragrafo precedente, si vede che il secondo membro della formola di decomposizione verrà espresso solo mediante le ζ, perchè le p non vengono introdotte che quando ci sono frazioni con un denominatore a potenza superiore ad 1, come risulta dalle formole citate.

Del resto allo stesso risultato si può giungere

anche diversamente. La frazione $\frac{F'(u)}{F(u)}$ ha per infiniti i punti-zeri di $F(u)$ e il punto $u = 0$.

Come abbiamo osservato, i punti zero di $F(u)$ sono infiniti di 1.° ordine per quella frazione, e il punto $u = 0$ è anche infinito di primo ordine.

Giacchè essendo $F(u)$ funzione intera di p e p' e potendosi quindi sempre porre sotto la forma

$$F(u) = c_0 + c_1 p(u) + c_2 p'(u) + \ldots + c_{n+1} p^{(n)}(u)$$

e

$$F'(u) = c_1 p'(u) + \ldots + c_{n+1} p^{(n+1)}(u)$$

il punto $u = 0$ è infinito di n^{mo} ordine per F, e di $n + 1^{mo}$ ordine per F' e quindi di 1.° ordine per $\frac{F'}{F}$.

Immaginando quindi (v. § prec.) lo sviluppo di $\frac{F'}{F}$ mediante le ζ, p, p'... i cui argomenti sono del tipo $u - u_i$ dove u_i è radice di F, si vede che al secondo membro non vi possono comparire le p, p'... perchè queste diventano infinite di ordine superiore al primo; non vi possono che comparire le funzioni del tipo

$$\zeta(u - u_i), \qquad \zeta(u)$$

che essendo eguali a

$$\frac{\sigma'(u - u_i)}{\sigma(u - u_i)}, \qquad \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}$$

diventano appunto infinite di 1.° ordine.

Possiamo allora scrivere

$$\frac{F'(u)}{F(u)} = m + n_1 \zeta(u - u_1) + \\ + n_2 \zeta(u - u_2) + \ldots + n \zeta(u)$$

dove poi sappiamo che deve essere

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_\mu + n = 0.$$

È facile mostrare che il numero costante n_i non è altro che il grado di moltiplicità della radice u_i nel denominatore $F(u)$. Infatti moltiplichiamo primo e secondo membro per $u - u_i$ e poi passiamo al limite per $u = u_i$.

Il secondo membro diventa n_i, e il primo membro, tenendo presente lo sviluppo in serie di F nell'intorno di u_i, diventa il grado di moltiplicità della radice u_i in $F(u)$.

Dovendo allora $n_1\, n_2 \ldots$ essere tutti numeri interi positivi, il numero n sarà intero negativo.

Integriamo ora i due membri della precedente relazione e abbiamo

$$\log F(u) = mu + n_1 \log \sigma(u - u_1) + n_2 \log \sigma(u - u_2) + \ldots \\ - (n_1 + n_2 + \ldots) \log \sigma(u) + A$$

donde

$$F(u) = A\, e^{mu} \frac{\sigma^{n_1}(u - u_1) \ldots \sigma^{n_\mu}(u - u_\mu)}{\sigma^{n_1 + \ldots + n_\mu}(u)}.$$

Osserviamo ora che la F essendo funzione di p e p', sarà una funzione periodica coi periodi 2ω, $2\omega'$.

Avendo presenti le formole di periodicità della σ, si vede che alterando u di 2ω, il secondo membro si altera di

$$e^{2m\omega - 2\eta(n_1 u_1 + \ldots n_\mu u_\mu)}.$$

Deve dunque essere

$$2m\omega \quad 2\eta(n_1 u_1 + \ldots + n_\mu u_\mu) = 2si\pi.$$

E analogamente

$$2m\omega' - 2\eta'(n_1 u_1 + \ldots + n_\mu u_\mu) = 2s'i\pi$$

dove s, s' sono due numeri interi.

Ricordando che

$$\eta\omega' - \eta'\omega = \frac{i\pi}{2}$$

si ha

$$n_1 u_1 + \ldots + n_\mu u_\mu = 2s'\omega - 2s\omega'.$$

Alterando i punti-zero $u_1 \ldots u_\mu$ di multipli di periodi 2ω, $2\omega'$ si può sempre fare che il secondo membro si riduca a zero; basterebbe p. e. scrivere la precedente relazione sotto la forma

$$(u_1 - 2s'\omega + 2s\omega') + (n-1)u_1 + \ldots + n_\mu u_\mu = 0$$

e i punti zero diventano allora

$u_1 \quad 2s'\omega + 2s\omega'$

u_1 contato solo $n \quad 1$ volte

. . . . . .

u_μ contato n_μ volte.

Allora le costanti m, A restano cangiate, è in luogo dell' espressione soprascritta col medesimo procedimento si avrebbe l'altra

$$A' e^{m'u} \frac{\sigma(u-u_1+2s'\omega-2s\omega')\sigma^{n_1-1}(u-u_1)\ldots\sigma^{n}{}_{\mu}(u-u_{\mu})}{\sigma^{n_1+n_2+\ldots+n}{}_{\mu}(u)}$$

Ripetendo il precedente ragionamento su questa nuova espressione, è facile trovare che m' deve essere zero; quindi si vede che la funzione intera $F(u)$ può sempre porsi sotto la forma

$$A' \frac{\sigma(u-u_1')\,\sigma(u-u_2')\ldots\sigma(u-u_\nu')}{\sigma^{\nu}(u)}$$

dove alcune delle u_i' sono fra loro eguali ed eguali alle u_i precedenti, e *dove la somma di tutte le* u_i, *è zero.*

Considerando allora una funzione qualunque razionale di $p(u)$ $p'(u)$ e ponendola sotto la forma del quoziente di due funzioni *intere* come $F(u)$, e ponendo poi ambo i termini del quoziente sotto la forma precedente, possiamo infine conchiudere che *ogni funzione razionale di* p e p' *può porsi sotto la forma*

$$A \frac{\sigma(u-u_1')\,\sigma(u-u_2')\ldots\sigma(u-u_\nu')}{\sigma(u-u_1'')\,\sigma(u-u_2''\ldots\sigma(u-u_\nu'')}$$

dove alcune delle u' *o delle* u'' *possono anche essere zero, od essere fra loro eguali, e la somma di tutte le* u' *è eguale a quella di tutte le* u''.

È interessante a questo proposito stabilire la espressione, mediante le σ, del seguente determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ p(u) & p(u_1) & p(u_2) & \dots & p(u_n) \\ p'(u) & p'(u_1) & p'(u_2) & \dots & p'(u_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p^{n-1}(u) & p^{n-1}(u_1) & p^{n-1}(u_2) & \dots & p^{n-1}(u_n) \end{vmatrix}$$

Espresso mediante le σ quel determinante è esattamente eguale a

$$(-1)^n 2!\,3!\dots n! \frac{\sigma(u + u_1 + \dots + u_n) \prod_0^n \sigma(u_\alpha - u_\beta)}{[\sigma(u)\,\sigma(u_1)\dots\sigma(u_n)]^{n+1}}$$

Non entriamo nei dettagli della dimostrazione di questa formola.

§ 14. **Trasformazione delle ϑ, delle σ e della p per la trasformazione lineare dei periodi. Differenza fondamentale fra le funzioni ϑ e le σ.** — Sieno dati i semiperiodi ω, ω', e poi due altri ω_1 ω_1' legati ai primi da relazioni lineari omogenee a coefficienti *interi*, cioè

$$\omega_1 = a\,\omega + b\,\omega'$$

$$\omega_1' = c\,\omega + d\,\omega'$$

Le quantità ω_1 ω_1' sono anche evidentemente dei semiperiodi essendo a, b, c, d numeri interi.

Il sistema di semiperiodi ω_1, ω_1' si dirà *equivalente* al sistema ω, ω' quando il determinante

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

è eguale a $+1$.

Se ciò si verifica, allora ω, ω' potranno esprimersi linearmente e con coefficienti *interi* per mezzo di ω_1, ω_1'; però questa esprimibilità non basta perchè il determinante sia eguale a $+1$; potrebbe quel determinante essere anche eguale a -1; ma allora il sistema non potrà dirsi equivalente al primitivo, perchè si può far vedere che in tal caso ω_1 ω_1' non possono assumersi come moduli per costruire delle funzioni ellittiche. Giacchè sappiamo che una condizione fondamentale per questo, è che la parte immaginaria di $\frac{\omega_1'}{\omega_1}$ sia *positiva*; ora supposto che sia positiva la parte immaginaria di $\frac{\omega'}{\omega}$ possiamo mostrare che non lo sarà quella di $\frac{\omega_1'}{\omega_1}$ se il determinante è eguale a -1.

In effetti posto

$$\omega = A + iB$$

$$\omega' = A' + iB'$$

si avrà

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{(AA' + BB') + i(AB' - A'B)}{A^2 + A'^2}$$

dove per ipotesi

$$A B' - A' B > 0.$$

Fatta ora la trasformazione, e posto similmente

$$\omega_1 = A_1 + i B_1$$

$$\omega_1' = A_1' + i B_1'$$

si ha

$$A_1 = a A + b A' \qquad A_1' = c A + d A'$$

$$B_1 = a B + b B' \qquad B_1' = c B + d B'$$

donde

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_1' \\ B_1 & B_1' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}$$

Se dunque il determinante della trasformazione è negativo, lo sarà anche il primo membro, il quale poi diviso per $A_1^2 + A_1'^2$ non è altro che la parte immaginaria di $\frac{\omega_1'}{\omega_1}$.

La trasformazione sopra indicata resta naturalmente individuata dati che sieno i numeri a, b, c, d; essa può al solito indicarsi col simbolo

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Nella teoria dei numeri si dimostra che tutte siffatte sostituzioni si possono comporre mediante

le due

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ambedue di determinante eguale a $+1$.

Noi vogliamo esaminare quali relazioni esistono fra le ϑ o le σ calcolate per i moduli nuovi e pei moduli primitivi; quindi ci basterà esaminare le formole corrispondenti solo a queste due ultime sostituzioni.

Dobbiamo cominciare le nostre considerazioni dalla funzione p e dalla σ dispari.

Teniamo presenti le formole che esprimono gli invarianti $g_2\, g_3$ per mezzo di ω, ω', cioè (Cap. IV, § 9, 10)

$$g_2 = 60 \sum_{m,n} \frac{1}{(2\, m\, \omega + 2\, n\, \omega')^4}$$

$$g_3 = 140 \sum_{m,n} \frac{1}{(2\, m\, \omega + 2\, n\, \omega')^6}$$

dove m, n bisogna estenderli a tutti i numeri interi positivi e negativi, esclusa la cambinazione 0,0.

Da queste formole si vede che trasformando ω, ω' con sostituzione lineare a coefficienti interi, i nuovi $g_2\, g_3$ saranno gli stessi dei primi, perchè tale trasformazione equivarrà a spostare l'ordine dei termini in quei sommatorii che sono serie *assolutamente* convergenti (v. § 10, Cap. IV).

Poichè dunque $g_2\, g_3$ restano inalterati, possiamo dire che resta inalterata anche la funzione p e

la funzione σ dispari che dipendono direttamente da $g_2\, g_3$.

Onde possiamo scrivere semplicemente

$$p(u;\ \omega,\ \omega') = p(u;\ \omega_1,\ \omega_1')$$

$$\sigma(u;\ \omega,\ \omega') = \sigma(u;\ \omega_1,\ \omega_1').$$

In quanto alle σ pari si può fare la seguente considerazione.

Gli invarianti irrazionali $e_1\, e_2\, e_3$ devono naturalmente permutarsi fra loro perchè essi sono eguali ai valori della p per argomenti ω, ω'', ω'. Propriamente per la sostituzione

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

cioè

$$\omega_1 = \omega$$

$$\omega_1' = \omega + \omega' \qquad \omega_1'' = 2\,\omega + \omega'$$

si ha

$$e_1' = p(\omega_1) = p(\omega) = e_1$$

$$e_2' = p(\omega_1'') = p(2\,\omega + \omega') = e_3$$

$$e_3' = p(\omega_1') = p(\omega'') = e_2$$

mentre per la sostituzione

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

cioè

$$\omega_1 = \omega'$$

$$\omega_1' = -\omega \qquad \omega_1'' = \omega' - \omega = 2\,\omega + \omega''$$

si ha

$$e_1' = p(\omega_1) = p(\omega') = e_3$$

$$e_2' = p(\omega_1'') = p(\omega'') = e_2$$

$$e_3' = p(\omega_1') = p(\omega) = e_1 .$$

Come si vede, nel primo caso resta inalterato e_1 e si scambiano gli altri due, e nel secondo resta inalterato e_2 e si scambiano gli altri due.

Osservando ora che le σ pari dipendono, oltre che dagli invarianti $g_2\, g_3$, anche da uno solo dei tre invarianti irrazionali $e_1\, e_2\, e_3$, ricaviamo che le σ pari restano nel complesso inalterate, solo che si scambiano semplicemente fra loro in corrispondenza alla permutazione che subiscono le e.

Per le due sostituzioni fondamentali sopra citate si ha dunque

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_1(u;\ \omega_1,\ \omega_1') = \sigma_1(u;\ \omega,\ \omega') \\ \sigma_2(u;\ \omega_1,\ \omega_1') = \sigma_3(u;\ \omega,\ \omega') \\ \sigma_3(u;\ \omega_1,\ \omega_1') = \sigma_2(u;\ \omega,\ \omega') \end{array}\right\} \text{ per } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_1(u;\ \omega_1,\ \omega_1') = \sigma_3(u;\ \omega,\ \omega') \\ \sigma_2(u;\ \omega_1,\ \omega_1') = \sigma_2(u;\ \omega,\ \omega') \\ \sigma_3(u;\ \omega_1,\ \omega_1') = \sigma_1(u;\ \omega,\ \omega') \end{array}\right\} \text{ per } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vogliamo cercare ora come si trasformano i moduli di 2.ª specie η, η'. Dobbiamo tener presenti le formole del § 3, Cap. III, cioè

$$\eta = \frac{\sigma'(\omega)}{\sigma(\omega)}$$

$$\eta' = \frac{\sigma'(\omega')}{\sigma(\omega')}.$$

Per le due sostituzioni fondamentali, η, η' si trasformano precisamente come ω, ω'; dunque possiamo dire che anche in generale

$$\eta_1 = a\,\eta + b\,\eta'$$

$$\eta_1' = c\,\eta + d\,\eta'$$

cioè η, η' si trasformano come ω, ω'.

Come si vede le funzioni σ di Weierstrass rispetto alla trasformazione lineare dei periodi, si comportano assai semplicemente; esse si permutano fra loro semplicemente cioè senza l'aggiunta di alcun fattore.

È questo un fatto fondamentale per l'importanza delle σ rispetto alle funzioni ϑ le quali non si comportano così semplicemente, ma invece si permutano *moltiplicandosi per un fattore esponenziale di 2.° grado,* come vedremo nelle formole di sotto. Ed è questa proprietà caratteristica delle σ che si conserva nella costruzione delle σ iperellittiche mediante le ϑ.

Per completare questo capitolo ci resta solo a trovare le formole per la trasformazione delle ξ.

Le ξ non dipendono direttamente da ω, ω' ma dal modulo

$$q = e^{i\pi\frac{\omega'}{\omega}} = e^{i\pi\tau}$$

e dall'argomento

$$x = \frac{\pi u}{2\omega}.$$

Il trasformare ω, ω' colle formole solite corrisponde dunque a trasformare τ e x colle formole

$$\tau_1 = \frac{\omega_1'}{\omega_1} = \frac{c\omega + d\omega'}{a\omega + b\omega'} = \frac{c + d\tau}{a + b\tau}$$

$$x_1' = \frac{\pi u}{2\omega_1} = \frac{\pi u}{2(a\omega + b\omega')}.$$

Basta al solito occuparsi solo delle due sostituzioni fondamentali sopra citate. Per esse si ha:

$$\left.\begin{aligned} \tau_1 &= \tau + 1 \\ x_1 &= x \end{aligned}\right\} \text{per} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} \tau_1 &= -\frac{1}{\tau} \\ x_1 &= \frac{x}{\tau} \end{aligned}\right\} \text{per} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per ottenere le formole corrispondenti alla prima sostituzione si può procedere molto più semplicemente che ricorrendo alle formole per le σ e alle relazioni fra le ϑ e le σ. Si può ricorrere direttamente agli sviluppi in serie delle ϑ e si hanno allora subito le formole:

$$\vartheta\,(x,\ \tau) = \vartheta_3\,(x,\ \tau + 1)$$

$$\vartheta_1\,(x,\ \tau) = e^{-\frac{i\pi}{4}}\,\vartheta_1\,(x,\ \tau + 1)$$

$$\vartheta_2\,(x,\ \tau) = e^{-\frac{i\pi}{4}}\,\vartheta\,(x,\ \tau + 1)$$

$$\vartheta_3\,(x,\ \tau) = \vartheta\,(x,\ \tau + 1).$$

Non si può invece fare lo stesso per le formole della seconda sostituzione. Per esse dobbiamo ricorrere alle relazioni fra le ϑ e le σ che, servendoci delle già trovate relazioni (v. § 7, Cap. III)

$$\sqrt{e_1 - e_2} = \frac{\pi}{2\,\omega}\,\vartheta^2$$

$$\sqrt{e_2 - e_3} = \frac{\pi}{2\,\omega}\,\vartheta_2^{\,2} \qquad \sqrt[8]{\Delta} = \sqrt{2}\,\sqrt{\left(\frac{\pi}{2\,\omega}\right)^8}\,\vartheta_1'$$

$$\sqrt{e_1 - e_3} = \frac{\pi}{2\,\omega}\,\vartheta_3^{\,2}$$

noi porremo sotto la seguente forma

$$\vartheta\,(x) = \sqrt{\frac{2\,\omega}{\pi}}\,\sqrt[4]{e_1 - e_2}\;e^{-\frac{1}{2}\frac{\eta}{\omega}u^2}\,\sigma_3\,(u)$$

$$\vartheta_1(x) = \sqrt{\frac{2\omega}{\pi}}\sqrt{2}\,\sqrt[8]{\Delta}\,e^{-\frac{1}{2}\frac{\eta}{\omega}u^2}\,\sigma(u)$$

$$\vartheta_2(x) = \sqrt{\frac{2\omega}{\pi}}\,\sqrt[4]{e_2 - e_3}\,e^{-\frac{1}{2}\frac{\eta}{\omega}u^2}\,\sigma_1(u)$$

$$\vartheta_3(x) = \sqrt{\frac{2\omega}{\pi}}\,\sqrt[4]{e_1 - e_3}\,e^{-\frac{1}{2}\frac{\eta}{\omega}u^2}\,\sigma_2(u).$$

Si hanno allora le seguenti formole

$$\vartheta\left(\frac{x}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right) = i\sqrt{i\tau}\,e^{\frac{ix^2}{\pi\tau}}\,\vartheta_2(x, \tau)$$

$$\vartheta_1\left(\frac{x}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right) = \sqrt{i\tau}\,e^{\frac{ix^2}{\pi\tau}}\,\vartheta_1(x, \tau)$$

$$\vartheta_2\left(\frac{x}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right) = i\sqrt{i\tau}\,e^{\frac{ix^2}{\pi\tau}}\,\vartheta(x, \tau)$$

$$\vartheta_3\left(\frac{x}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right) = i\sqrt{i\tau}\,e^{\frac{ix^2}{\pi\tau}}\,\vartheta_3(x, \tau).$$

Come si vede non c'è, come per le σ, la permutazione pura e semplice, ma i secondi membri restano moltiplicati per un fattore esponenziale di 2.° grado $e^{\frac{ix^2}{\pi\tau}}$.

CAPITOLO V.

INTEGRALI ELLITTICI DI 1.ª, 2.ª, 3.ª SPECIE.

§ 1. **Considerazioni generali sugli integrali ellittici.** — Dagli elementi del calcolo infinitesimale si sa che cosa sono gli integrali ellittici

Immaginiamo due variabili x, y legate fra loro da una relazione algebrica $f(x\,y) = 0$ e consideriamo un integrale della forma

$$\int F(x\,y)\,d\,x$$

dove con $F(x\,y)$ si intende una funzione *razionale* di x, y. La funzione sotto il segno integrale è naturalmente una funzione *irrazionale* di x sola; la natura di un tale integrale dipende essenzialmente dalla specie di relazione $f(x\,y) = 0$ esistente fra x, y.

Si suole prendere un punto di vista geometrico e considerare la $f(x\,y) = 0$ come rappresentata nel piano mediante una curva algebrica.

Ora nelle curve algebriche ha un' importanza fondamentale il cosiddetto *genere*, e la sua im-

portanza viene da questo fatto che due curve generali che hanno il medesimo genere sono trasformabili razionalmente l'una nell'altra, cioè le coordinate dell' una possono sempre esprimersi razionalmente mediante quelle dell' altra, e viceversa; fra le due curve sussiste allora, come si dice, una *trasformazione birazionale.*

È naturale allora che gli integrali del tipo sopra indicato corrispondenti a due curve del medesimo genere, potranno trasformarsi gli uni negli altri, e quindi vien subito l'idea di distinguere gli integrali del tipo sopra indicato secondo il *genere* della curva $f(x\,y) = 0$; la relazione $f(x\,y) = 0$ si suol chiamare *la curva o la forma fondamentale* dell'integrale, il quale poi a sua volta si suol chiamare *integrale abeliano di genere eguale a quello della curva* $f = 0$.

Quando il genere è *zero*, allora si può mostrare che l'integrale corrispondente si può trasformare nell'integrale di una funzione razionale di *una variabile;* infatti dalla teoria delle curve si sa che una curva di genere zero ha la proprietà che le coordinate di un suo punto si possono esprimere mediante funzioni *razionali* di un parametro t, ed è perciò che le curve di genere zero si sogliono chiamare anche curve razionali.

Sostituendo allora in $F(x\,y)\,d\,x$ tali funzioni razionali, si ottiene evidentemente una funzione razionale di t.

Il caso immediatamente seguente è quello del genere 1; questo è il caso ellittico; *quando la curva fondamentale è di genere 1 allora l' integrale corrispondente si chiama ellittico.*

Due esempi rimarchevoli *di curve di genere 1* sono:

1. $y^2 = a_0 x^4 + 4 a_1 x^3 + 6 a_2 x^2 + 4 a_3 x + a_4$ dove il secondo membro rappresenta un polinomio generale di 4.° grado.

2. Una curva piana del terzo ordine.

Se la forma fondamentale è data sotto la forma 1) allora l'integrale ellittico generale ha la forma

$$\int F(x, \sqrt{a_0 x^4 + \ldots})\, d x$$

essendo F il simbolo di una funzione razionale.

Prima di terminare questo paragrafo vogliamo porre in rilievo una forma rimarchevole sotto cui può porsi un integrale abeliano qualunque, la così detta forma omogenea di Aronhold. Supporremo la equazione della curva fondamentale messa sotto la forma omogenea, introducendo cioè una terza variabile:

$$f(x_1\, x_2\, x_3) = 0.$$

Allora in forza del teorema di Eulero si ha

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{d f}{\partial x_2} + x_3 \frac{d f}{\partial x_3} = f = 0$$

e inoltre differenziando

$$d x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + d x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + d x_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0$$

donde

$$\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_1}}{\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ d x_2 & d x_3 \end{vmatrix}} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_2}}{\begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ d x_3 & d x_1 \end{vmatrix}} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_3}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ d x_1 & d x_2 \end{vmatrix}}$$

e perciò, introducendo tre quantità arbitrarie c_1, c_2, c_3, si ha che ciascuno di questi rapporti è anche eguale a

$$\frac{c_1 \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + c_2 \dfrac{\partial f}{\partial x_2} + c_3 \dfrac{\partial f}{\partial x_3}}{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ d x_1 & d x_2 & d x_3 \end{vmatrix}}.$$

Ora introducendo le variabili omogenee l'integrale abeliano diventa

$$\left(\text{ponendo cioè } x = \frac{x_1}{x_2}, y = \frac{x_2}{x_3}\right)$$

$$\int F(x_1\, x_2\, x_3) \frac{(x_3\, d x_1 - x_1\, d x_3)}{x_3^2}$$

il quale, in forza delle identità sopra dimostrate, è

eguale a

$$\int \frac{F(x_1\, x_2\, x_3)}{x_3^{\,2}} \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\begin{matrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ d\,x_1 & d\,x_2 & d\,x_3 \end{matrix}}{c_1 \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + c_2 \dfrac{\partial f}{\partial x_2} + c_3 \dfrac{\partial f}{\partial x_3}}$$

che possiamo scrivere

$$\int \Phi\,(x_1\, x_2\, x_3) \frac{(c\,x\,d\,x)}{\Sigma\, c_i \dfrac{\partial f}{\partial x_i}}$$

indicando con $(c\,x\,d\,x)$ il determinante di 3.° ordine, e con Φ l' assieme di tutti quegli altri fattori. Essendo la F di grado zero nelle tre variabili, la Φ sarà funzione omogenea di grado $n-3$ se n è l'ordine della curva fondamentale

$$f\,(x_1\, x_2\, x_3) = 0.$$

È chiaro, per il procedimento fatto, che l'espressione differenziale

$$\frac{(c\,x\,d\,x)}{\Sigma\, c_i \dfrac{\partial f}{\partial x_i}}$$

è *indipendente* da c.

Esaminiamo in quali punti diventa zero e infinita questa espressione differenziale.

La

$$\Sigma c_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

eguagliata a zero rappresenta la curva polare del punto di coordinate c_1 c_2 c_3 rispetto alla curva fondamentale; come si sa dalla geometria questa polare passa una volta sola per tutti i punti di contatto delle tangenti condotte da c alla curva e per tutti i punti doppii della curva stessa. Variando c, i punti doppii sono fissi, ma variano i punti di contatto delle tangenti condotte da c. Ciò ci fa in certo modo vedere che quella espressione differenziale non potrà avere per punti d' infinito tali punti di contatto, perchè come sappiamo quella espressione deve essere indipendente dalla posizione del punto c. Del resto si può subito far vedere che il determinante $(c\,x\,d\,x)$ si annulla anch'esso in tali punti di contatto, giacchè quando i tre punti di coordinate

$$c_1, c_2, c_3$$

$$x_1, x_2, x_3$$

$$x_1 + d\,x_1, x_2 + d\,x_2, x_3 + d\,x_3$$

sono in linea retta, allora questa retta è tangente alla curva, e il determinante $(c\,x\,d\,x)$ è zero, e d'altra parte questo non è zero, se quei tre punti non sono allineati cioè se la retta dei punti c, x non è tangente alla curva.

Ricaviamo quindi che *i soli punti d'infinito del-*

l'espressione differenziale sono i punti doppii della curva fondamentale; e se questa non ha punti doppii, quella espressione differenziale non ha nè zeri nè infiniti.

§ 2. **Distinzione degli integrali in quelli di 1.ª, 2.ª e 3.ª specie.** — Abbiamo detto nel paragrafo precedente che si hanno gli integrali ellittici quando la forma fondamentale è p. es. di una delle due forme seguenti:

1. $$x_2^2 x_3^2 = f_4 (x_1 x_2)$$

2. $$f_3 (x_1 x_2 x_2) = 0$$

dove con f_4 f_3 si intendono rispettivamente delle funzioni omogenee generali dei gradi 4, 3 nelle variabili indicate sotto il simbolo stesso; la $f_3 = 0$ deve rappresentare una curva piana generale di 3.° ordine, senza punti doppii, altrimenti il suo *genere* non sarebbe più 1.

Esaminiamo la curva di equazione

$$x_2^2 x_3^2 - f_4 (x_1 x_2) = 0.$$

Il punto $x_1 = 0$ $x_2 = 0$ è un punto della curva e, come si vede, è un punto doppio, perchè si annullano per $x_1 = 0$ $x_2 = 0$ tutte le derivate prime del primo membro dell'equazione della curva, e non tutte le derivate seconde. Le due tangenti nel punto doppio sono riunite nell'unica retta

$$x_2 = 0,$$

dunque quel punto doppio è propriamente una *cuspide.*

Formiamo l'espressione differenziale

$$\frac{(c\,x\;d\,x)}{\Sigma\, c_i \dfrac{\partial f}{\partial x_i}}$$

assumendo per punto c il punto

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 1.$$

Questa espressione diventa, tenendo conto dell'equazione della curva:

$$\frac{(x_1\, d\, x_2 - x_2\, d\, x_1)}{2\, x_2 \sqrt{f_4\,(x_1\, x_2)}}$$

la quale, per le cose dette nel paragrafo precedente, deve diventare infinita solo nella cuspide $x_1 = 0$ $x_2 = 0$.

Essendo in questo caso $n = 4$, sarà $n - 3 = 1$ e quindi Φ_{n-3} è una espressione omogenea in $x_1\, x_2\, x_3$ razionale di 1.° grado. Mediante l'equazione della curva una tale espressione può sempre ridursi alla forma

$$\Phi_1 = \frac{\varphi_\mu\,(x_1\, x_2) + \varphi_{\mu-2} \sqrt{f_4\,(x_1\, x_2)}}{\varphi_{\mu-1}\,(x_1\, x_2) + \varphi_{\mu-3} \sqrt{f_4\,(x_1\, x_2)}}.$$

La distinzione delle diverse specie di integrali ellittici (o in generale *abeliani*) si fa dal seguente punto di vista: la espressione che sta sotto il segno d'integrale può:

1. Non diventare infinita in alcun punto;

2. Diventare infinita in un punto, ma di ordine superiore al primo;

3. Diventare infinita di 1.° ordine in un punto.

E può poi naturalmente anche accadere che in certi punti si verifica la proprietà 2) e in certi altri la proprietà 3).

Se si verifica la proprietà 1) l'integrale non diventa mai infinito.

Nei punti in cui si verifica la proprietà 2) l'integrale diventa infinito algebricamente, cioè si può sempre trovare un'espressione *algebrica*, che diventi zero nello stesso punto, e per cui moltiplicando l'integrale, il limite del prodotto, quando la variabile si avvicina a quel punto, è l'unità. Nei punti invece in cui succede la proprietà 3) l'integrale diventa infinito, ma *logaritmicamente*, cioè si può sempre trovare una funzione algebrica per il cui logaritmo dividendo l'integrale, il limite del quoziente sia 1.

Un integrale per il quale si verifica la proprietà 1) sarà una funzione che non diventa infinita in alcun punto e si suol chiamare integrale ellittico di 1.ª specie; un integrale che non ammette altri infiniti che *infiniti algebrici* si chiamerà integrale ellittico di 2.ª specie; e finalmente sarà di 3.ª specie un integrale non avente altri infiniti che *infiniti logaritmici*.

Ogni altro integrale avente punti d'infiniti algebrici e punti d'infiniti logaritmici, si comporrà sempre mediante combinazione lineare di integrali di 1.ª, 2.ª, 3.ª specie.

Le asserzioni contenute in questo paragrafo non

le abbiamo dimostrate, e non sono certamente evidenti; esse risulteranno dimostrate da alcune considerazioni che avremo subito occasione di fare e che si fondano sugli sviluppi dati nei capitoli precedenti.

§ 3. **Forma normale di Weierstrass. Corrispondente espressione dell'integrale ellittico generale. Trasformazione di una forma ellittica in quella normale.** — Dalla teoria delle curve si sa che ogni curva piana di genere 1 (curva piana ellittica) può trasformarsi con *trasformazione birazionale* in una curva di equazione

$$x_3^2 x_2 - 4 x_1^3 + g_2 x_1 x_2^3 + g_3 x_2^3 = 0$$

o, in coordinate non omogenee,

$$y^2 - 4 x^3 + g_2 x + g_3 = 0.$$

Questa forma si chiama la *forma normale di Weierstrass*, e per le cose dette nel § 1, possiamo dunque prendere questa relazione per forma fondamentale per gli integrali ellittici.

Come si vede, la relazione esistente fra x, y è la stessa di quella esistente fra p e p', quindi ricordando che ad ogni qualunque valore assegnato a $p(u)$ corrisponde sempre un valore di u, possiamo dire che esisterà, per ogni sistema di valori di x, y, un argomento u in modo che sia

$$x = p\ (u)$$

$$y = p'(u)$$

cioè: *le coordinate di un punto di una curva ellittica piana possono sempre esprimersi come funzioni ellittiche di un parametro u.*

Possiamo nello stesso modo trovare una forma normale per un integrale ellittico generale.

Assumendo per forma fondamentale quella di Weierstrass e facendo un procedimento simile a quello del § 2, possiamo dire che *ogni integrale ellittico può sempre con trasformazioni razionali ridursi alla forma*

$$\int \psi(p, p') \frac{dp}{p'}$$

dove la p è la funzione di Weierstrass studiata nel capitolo precedente, e con ψ si intende una funzione razionale di p e p'.

Ora sappiamo che ogni $\psi(p\,p')$ può sempre porsi sotto la forma (v. Cap. IV, § 12)

$$\begin{aligned} c &+ \sum_{\nu} c_\nu \zeta(u - u_\nu) \quad + \\ &+ \sum_{\mu} c'_\mu p(u - u'_\mu) \quad + \\ &+ \sum_{\varrho} c_\varrho'' p'(u - u_\varrho'') + \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

dove

$$\sum_{\nu} c_\nu = 0$$

dunque, sostituendo, integrando ed osservando che $\frac{dp}{p'} = du$, possiamo dire che *ogni integrale ellittico potrà sempre ridursi all'espressione*

$$c\,u + \sum_{\nu} c_\nu \log \sigma (u - u_\nu) -$$

$$- \sum_{\mu} c'_\mu \zeta (u - u'_\mu) +$$

$$+ \sum_{\varrho} c''_\varrho p (u - u''_\varrho) +$$

$$+ \ldots\ldots\ldots$$

dove la somma di tutte le c_ν è zero.

Una tale espressione risulta di tre categorie di termini.

1) Termine in u (integrale di 1.ª specie);

2) Termini in ζ in p, p'... (integrali di 2.ª specie);

3) Termini in $\log \sigma$ (integrali di 3.ª specie).

Nei paragrafi seguenti sarà mostrato che ognuno di tali termini si può esprimere mediante *integrali in cui la variabile d'integrazione è p.*

Per le note proprietà delle funzioni p, p', p'',... $\zeta = \frac{\sigma'}{\sigma}$, σ si ha che

ζ possiede degli infiniti algebrici di 1.° ordine $(u = u'_\mu)$

p possiede degli infiniti algebrici di 2.° ordine $(u = u''_\varrho)$

p' possiede degli infiniti algebrici di 3.° ordine ($u = u'''_\tau$), ecc., ecc.

$\log \sigma$ possiede degli infiniti logaritmici ($u = u_\nu$).

Infine la quantità

$$u = \int_\infty^p \frac{dp}{p'}$$

nell'interno del parallelogrammo dei periodi, in cui il limite superiore p dell'integrale può ricevere *tutti i valori possibili*, non diventa naturalmente mai infinita; essa rappresenta un integrale che non diventa mai infinito per alcun valore di p.

Resta dunque pienamente dimostrato che ogni integrale ellittico può sempre comporsi linearmente mediante *tre* specie di integrali, di cui ognuna è caratterizzata dalle proprietà indicate nel § precedente.

Dall'analisi precedente risulta anche che *di integrali di 1.ª specie ne esiste uno solo cioè*

$$u = \int_\infty^p \frac{dp}{p'}.$$

Prima di terminare questo paragrafo vogliamo notare con quali trasformazioni una forma ellittica dei due tipi principali avanti ricordati, si riduce alla forma normale di Weierstrass.

I due tipi principali di forma ellittica sono (vedi Cap. V, § 2):

1.° $y^2 = a_0 x^4 + 4 a_1 x^3 + 6 a_2 x^2 + 4 a_3 x + a_4.$

2.° $$f_3(x\,y) = 0$$

dove con $f_3(x\,y) = 0$ si intende l'equazione generale di una curva piana di 3.° ordine.

Per trasformare la forma 1) nella forma normale trasformiamo prima la 1) colla sostituzione

$$x = x' - \frac{a_1}{a_0}; \quad y = \sqrt{a_0}\, y'$$

con che il secondo membro perde il secondo termine e diventa

$$y'^2 = x'^4 + 6\,\alpha_2\, x'^2 + 4\,\alpha_3\, x' + \alpha_4$$

dove

$$\alpha_2 = \frac{a_0\, a_2 - a_1^2}{a_0^2}$$

$$\alpha_3 = \frac{a_0^2\, a_3 - 3\, a_0\, a_1\, a_2 + 2\, a_1^3}{a_0^3}$$

$$\alpha_4 = \frac{a_0^3\, a_4 - 4\, a_0^2\, a_1\, a_3 + 6\, a_0\, a_1^2\, a_2 - 3\, a_1^4}{a_0^4}.$$

Si ponga ora

$$x' = \frac{1}{2\,a_0}\,\frac{p' - \alpha_3\,a_0^3}{p + \alpha_2\,a_0^2}$$

$$y' = \frac{1}{a_0^2}\left[2\,p - \alpha_2\,a_0^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{p' - \alpha_3\,a_0^3}{p + \alpha_2\,a_0^2}\right)^2\right].$$

Queste relazioni sono birazionali; infatti si vede subito che di qui potrebbero ricavarsi p, p' *razionalmente* mediante y', x'.

Mediante queste relazioni, sostituendo e riducendo si ha

$$\begin{aligned}(4\,p^2 - 4\,\alpha_2\,a_0^2\,p + \alpha_2^2\,a_0^4 - \alpha_4\,a_0^4)\,(p + \alpha_2\,a_0^2)^2 - \\ - (p'^2 - 2\,\alpha_3\,a_0^3\,p' + \alpha_3^2\,a_0^6)\,(p + \alpha_2\,a_0^2) - \\ - 2\,\alpha_3\,a_0^3\,(p' - \alpha_3\,a_0^3)\,(p + \alpha_2\,a_0^2) = 0.\end{aligned}$$

e sopprimendo il fattore $p + \alpha_2$, e riducendo si ha

$$\begin{aligned}p'^2 - 4\,p^3 + a_0^4\,(\alpha_4 + 3\,\alpha_2^2)\,p + \\ + a_0^6\,(\alpha_2\,\alpha_4 - \alpha_2^3 - \alpha_3^2) = 0.\end{aligned}$$

Con ciò la forma data è stata ridotta alla forma di Weierstrass. I coefficienti

$$a_0^4\,(\alpha_4 + 3\,\alpha_2^2)$$

$$a_0^6\,(\alpha_2\,\alpha_4 - \alpha_2^3 - \alpha_3^2)$$

non sono altro che gli invarianti g_2, g_3 della biquadratica data.

Vogliamo ora indicare un'altra trasformazione che ha su questa, ora sviluppata, un grande vantaggio.

Poniamo

$$x = \frac{\alpha p + \beta}{\gamma p + \delta}$$

e

$$y = \frac{p'}{(\gamma p + \delta)^2}.$$

Questa trasformazione, come si vede, è una trasformazione *birazionale*, potendosi subito ricavare p, p' razionalmente mediante x, y.

I coefficienti $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$ li determiniamo in maniera che

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = +1$$

e che $f(x)$ si riduca esattamente a

$$\frac{4p^3 - g_2 p - g_3}{(\gamma p + \delta)^4}.$$

Ciò si può sempre fare; bisogna perciò porre $\frac{\alpha}{\gamma}$ eguale ad una delle radici dell'equazione $f(x) = 0$; i quattro coefficienti devono poi ancora sottoporsi a due altre condizioni facili a trovarsi.

Il vantaggio di questa trasformazione è che, considerata solo in rispetto al polinomio $f(x)$, la variabile in questo resta assoggettata ad una sostituzione *lineare*.

Passiamo ora alla trasformazione della curva di 3.° ordine.

Prendiamo il punto di partenza da un teorema relativo a queste curve: se da un punto di flesso della curva si conducono le tre tangenti alla curva stessa, i punti di contatto di queste tangenti sono in linea retta.

Chiamiamo $c_x' \, c_x'' \, c_x'''$ i primi membri delle equazioni delle tre tangenti, e $u_x = 0$, $s_x = 0$ le equazioni rispett. della tangente di flesso, e della retta nella quale sono allineati i tre punti di contatto delle tre tangenti.

Allora la espressione

$$\frac{c_x' \, c_x'' \, c_x'''}{u_x \, s_x^2}$$

è una costante quando per le x si pongono le coordinate di un punto della curva data. Supponendo questa costante eguale ad 1, l'espressione della curva data resta trasformata in

$$c_x' \, c_x'' \, c_x''' - u_x \, s_x^2 = 0$$

che si riduce subito alla forma di Weierstrass, se si pone uno dei vertici del triangolo delle coordinate nel punto di flesso.

§ 4. Gli integrali ellittici di 2.ª specie. — Dall'analisi precedente risulta che vi sono varie categorie di integrali ellittici di 2.ª specie.

Quello che diventa infinito di 1.° ordine in un punto u' è

$$-\zeta(u-u') = -\frac{\sigma'(u-u')}{\sigma(u-u')}.$$

Tutti gli altri, cioè p, p', ... non sono che le derivate successive di questo e diventano in un punto, infinite di ordine superiore al primo.

Abbiamo dunque la definizione dell'integrale ellittico fondamentale di 2.ª specie (coll'infinito u')

$$Z(u-u') = -\frac{d}{du}\log\sigma(u-u') =$$

$$= -\int\frac{d^2}{du^2}\log\sigma(u-u')\,du = \int p(u-u')\,du =$$

$$= \int p(u-u')\frac{dp(u)}{p'(u)}.$$

Per le formole che conosciamo sulle σ, si ha che l'integrale Z ha per periodi precisamente le quantità da noi avanti introdotte e chiamate -2η, $-2\eta'$.

In effetti essendo

$$\sigma(u+2\omega) = -\sigma(u)\,e^{2\eta(u+\omega)}$$

si ha

$$\frac{\sigma'(u+2\omega)}{\sigma(u+2\omega)} = \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} + 2\eta.$$

E analogamente

$$\frac{\sigma'(u+2\omega')}{\sigma(u+2\omega')} = \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} - 2\eta'.$$

Le quantità -2η, $-2\eta'$ sono rispetto all'integrale Z quello che sono 2ω, $2\omega'$ rispetto all'integrale u. L'integrale Z considerato come funzione di p, si accresce in generale di un multiplo di 2η, $2\eta'$ sempre che p torna ad acquistare il medesimo valore; ad ogni valore di p corrispondono cioè per u tutti i valori del tipo

$$u + 2m\omega + 2n\omega'$$

e per Z tutti valori del tipo

$$Z + 2m\eta + 2n\eta',$$

dove m, n sono numeri interi positivi o negativi.

Fra tutte le Z aventi per infiniti tutti i punti u' possibili, noi ne possiamo scegliere una qualunque, perchè dimostreremo che tutte le altre si possono riferire a quella comunque scelta, cioè che tutte le altre non rappresentano una specie di trascendente diversa da quella; propriamente che: *la differenza fra due Z con punti d'infinito diversi è una funzione algebrica di p e p'.*

Sceglieremo allora come Z fondamentale la

$$Z(u) = \int p \frac{dp}{\sqrt{4p^3 - g_2 p - g_3}}$$

che ha per punto d'infinito nel piano u il punto $u=0$ e quindi nel piano di p il punto $p=\infty$.

Il teorema risulta subito mediante il teorema d'addizione della funzione p.

Ricordando la formola

$$p(u-u')-p(u)=-\frac{1}{2}\frac{d}{du}\frac{p'(u)-p'(u')}{p(u)-p(u')}$$

si ha

$$Z(u-u')-Z(u)=\frac{1}{2}\int\frac{d}{du}\frac{p'(u)-p'(u')}{p(u)-p(u')}du$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{p'(u)-p'(u')}{p(u)-p(u')}.$$

Quindi ogni Z con un punto d'infinito qualunque si può ridurre alla Z avente per punto d'infinito il punto $u=0$, ovvero, nel piano della variabile p, il punto $p=\infty$.

Possiamo dire che, come di integrali di 1.ª specie, anche di quelli di 2.ª specie, aventi un solo punto d'infinito di 1.° ordine, ne esiste uno solo.

Tutti gli altri integrali di 2.ª specie aventi infiniti nello stesso punto non sono che le derivate successive di questo.

Osserviamo che aggiungendo ad un integrale di 2.ª specie uno di 1.ª specie, si ottiene ancora uno di 2.ª specie.

§ 5. **Gli integrali ellittici di 3.ª specie. L'integrale Q di Klein.** — Nel § 3 abbiamo visto che nella scomposizione di un integrale ellittico gene-

rale gli integrali di 3.ª specie si presentano sotto la forma

$$\sum_{\nu} c_\nu \log \sigma (u - u_\nu)$$

dove la somma di tutte le c è zero.

Tutto questo sommatorio rappresenterebbe un integrale di 3.ª specie i cui punti d'infinito sono $u_1\, u_2 \ldots$; le quantità c sono i cosiddetti *residui; la somma di tutti i residui è zero.*

Si può porre questa espressione sotto la forma di un integrale nella variabile p; possiamo cioè scrivere:

$$\int d u \left[\sum_{\nu} c_\nu \frac{\sigma' (u - u_\nu)}{\sigma (u - u_\nu)}\right] =$$

$$= - \int [\sum_{\nu} c_\nu Z (u - u_\nu)] \frac{d p}{p'} .$$

La espressione dentro parentesi, come è facile vedere, è un'espressione doppiamente periodica perchè la somma delle c_ν è zero. Essa sarà dunque esprimibile mediante p e p', ciò che del resto può qui dimostrarsi anche direttamente come segue: ricordiamo la formola (v. § 4) riguardante la differenza fra $Z(u - u_1)$ e $Z(u)$; mediante tale formola possiamo sostituire a $Z(u - u_1)$ il suo valore, e allora si ha una parte in p, p', e una parte in $Z(u)$ ma col coefficiente zero perchè eguale a $\sum_{\nu} c_\nu$. Resta con ciò dimostrato l'assunto.

Ogni integrale del tipo precedente si può sempre comporre mediante certi altri di tipo più semplice. Il precedente ha molti punti d'infinito; componiamone uno simile ma con soli due punti d'infinito; allora dovendo essere zero la somma dei due residui, essi saranno eguali e di segno contrario; li potremo porre eguali ad 1. Avremo allora

$$\log \frac{\sigma(u-u_1)}{\sigma(u-u_2)} = \int \frac{dp}{p'} \left[Z(u-u_2) - Z(u-u_1)\right]$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{dp}{p'} \left[\frac{p'(u)-p'(u_1)}{p(u)-p(u_1)} - \frac{p'(u)-p'(u_2)}{p(u)-p(u_2)}\right].$$

Mediante questo si può comporre qualunque integrale del tipo generale avanti indicato; la dimostrazione di ciò si fa subito scrivendo

$$\Sigma\, c_\nu \log \sigma(u-u_\nu)$$

sotto la forma

$$c_1 \log \frac{\sigma(u-u_1)}{\sigma(u-u_2)} + (c_2+c_1) \log \frac{\sigma(u-u_2)}{\sigma(u-u_3)}$$

$$+ (c_3+c_2+c_1) \log \frac{\sigma(u-u_3)}{\sigma(u-u_4)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ (c_n+c_{n-1}+\ldots+c_1) \log \sigma(u-u_n)$$

ed osservando che è zero la somma di tutte le c che forma il coefficiente dell'ultimo termine.

L'integrale precedente si suole indicare (secondo Klein) colla lettera Q; per modo che si scrive

$$Q_{u_1 u_2} = \log \frac{\sigma(u - u_1)}{\sigma(u - u_2)} + \text{cost.}$$

Con questa notazione si rappresenta l'integrale indefinito; volendo definirlo fra i due limiti $u = u_1'$, $u = u_2'$ si ha

$$Q_{u_1 u_2}^{u_1' u_2'} = \log \frac{\sigma(u_1' - u_1)\,\sigma(u_2' - u_2)}{\sigma(u_1' - u_2)\,\sigma(u_2' - u_1)}.$$

Le quantità $u_1'\,u_2'$ si chiamano gli argomenti, e $u_1\,u_2$ sono i cosidetti parametri (punti d'infinito). Dalla forma precedente appare subito una proprietà singolare dell'integrale di 3.ª specie Q, cioè che *esso resta inalterato scambiando i parametri cogli argomenti:*

$$Q_{u_1 u_2}^{u_1' u_2'} = Q_{u_1' u_2'}^{u_1 u_2}.$$

L'integrale Q può mettersi sotto la forma di integrale doppio; infatti basta tener presente la espressione

$$Q_{u_1 u_2}^{u_1' u_2'} = \int_{u_2'}^{u_1'} [Z(u' - u_2) - Z(u' - u_1)]\, d\,u'$$

$$= \int_{u_2'}^{u_1'} d\,u' \int_{u_2}^{u_1} d\,u\; p(u' - u).$$

Questa forma fa vedere ancora una volta la proprietà già dimostrata della permutabilità dei parametri cogli argomenti, ricordando che p è una funzione *pari*, e quindi

$$p(u - u') = p(u' - u).$$

Questo integrale Q di Klein ha un'importanza speciale nella teoria delle funzioni ellittiche.

Esso si generalizza anche per il caso iperellittico, e la sua importanza sta principalmente nel fatto che esso è una forma invariantiva per la trasformazione lineare della forma ellittica fondamentale. Di ciò discorreremo in seguito.

Si adopera alcune volte un altro integrale di 3.ª specie che si indica colla lettera Π e che ha la seguente forma

$$\Pi_{u_1 0}(u) = \frac{1}{2} \int \frac{p'(u) + p'(u_1)}{p(u) - p(u_1)} \, du.$$

Dalla formola d'addizione delle σ

$$\frac{\sigma(u + u_1)\,\sigma(u - u_1)}{\sigma^2(u)\,\sigma^2(u_1)} = p(u_1) - p(u)$$

prendendo i logaritmi e derivando rispetto ad u, u_1 si hanno le due formole

$$\frac{\sigma'(u + u_1)}{\sigma(u + u_1)} + \frac{\sigma'(u - u_1)}{\sigma(u - u_1)} - 2\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} = \frac{-p'(u)}{p(u_1) - p(u)}$$

$$\frac{\sigma'(u+u_1)}{\sigma(u+u_1)}-\frac{\sigma'(u-u_1)}{\sigma(u-u_1)}-2\frac{\sigma'(u_1)}{\sigma(u_1)}=\frac{p'(u_1)}{p(u_1)-p(u)}$$

donde, sottraendo, si ha

$$\frac{1}{2}\frac{p'(u_1)+p'(u)}{p(u_1)-p(u)}=-\frac{\sigma'(u-u_1)}{\sigma(u-u_1)}-\frac{\sigma'(u_1)}{\sigma(u_1)}+\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}.$$

Con questa formola l'integrale superiore diventa

$$\Pi_{u_1 0}(u)=-\log\sigma(u-u_1)+\log\sigma(u)-\frac{\sigma'(u_1)}{\sigma(u_1)}u.$$

Da questa formola appare che questo integrale diventa infinito logaritmicamente nei due punti $u=0$, $u=u_1$.

Costruendo

$$-\Pi_{u_1-u_2,0}(u-u_2)=\Pi_{u_1u_2}(u)$$

si ha un integrale che diventa infinito in u_1 u_2:

$$\Pi_{u_1u_2}(u)=+\log\sigma(u-u_1)-\log\sigma(u-u_2)+$$
$$+\frac{\sigma'(u_1-u_2)}{\sigma(u_1-u_2)}(u-u_2)$$

che, come si vede, differisce dal $Q_{u_1u_2}$ solo per un termine che è integrale di 1.ª specie e per un termine costante.

Dobbiamo aggiungere qualche altra cosa riguardo alla periodicità degli integrali di 3.ª specie.

Dell'integrale Q le formole di periodicità sono semplici. Accrescendo l'argomento u di 2ω, $2\omega'$ l'integrale si accresce rispettivamente di

$$2\eta\,(u_2 - u_1)$$

$$2\eta'\,(u_2 - u_1).$$

CAPITOLO VI.

ESPRESSIONI DELLE FUNZIONI ELLITTICHE QUANDO SI PRENDE PER FORMA FONDAMENTALE UNA BINARIA BIQUADRATICA QUALUNQUE.

§ 1. **Espressione rimarchevole della σ dispari mediante l'integrale Q.** — Estendiamo l'integrale di 1.ª specie

$$\int \frac{dp}{p'}$$

fra due limiti qualunque, $p(u_1)$, $p(u_2)$.

Allora si ha

$$w = \int_{p(u_1)}^{p(u_2)} = \int_{\infty}^{p(u_2)} - \int_{\infty}^{p(u_1)} = u_2 - u_1 .$$

Il problema che ci proponiamo è questo: esprimere $\sigma(w) = \sigma(u_2 - u_1)$ mediante i valori di p, p' in u_1 e u_2. L'espressione di $p(w)$ mediante $p(u_1)$, $p(u_2)$ risulterebbe subito dal teorema d'addizione. Le formole notevoli che troveremo sono state tro-

vate per la prima volta da Klein (Math. Ann., vol. 27, pag. 455) e servono per le cose che diremo nei paragrafi seguenti.

Cominciamo col calcolare il valore di $Q_{u_1 u_2}^{u_1' u_2'}$ quando gli argomenti $u_1' u_2'$ si fanno convergere a valori eguali, ma di segno contrario, dei parametri, cioè quando si pone

$$u_1' = -u_1$$

$$u_2' = -u_2.$$

Per tali valori di $u_1' \; u_2'$ si ha

$$p\,(u_1') = \quad p\,(u_1)$$

$$p'\,(u_1') = -p'\,(u_1)$$

$$p\,(u_2') = \quad p\,(u_2)$$

$$p'\,(u_1') = -p'\,(u_2).$$

Tenendo presente la formola per Q si ha allora

$$Q_{u_1 u_2}^{-u_1 - u_2} = \log \frac{\sigma\,(2\,u_1)\,\sigma\,(2\,u_2)}{\sigma^2\,(u_1 + u_2)}.$$

Intanto dalla formola d'addizione per la σ cioè

$$\frac{\sigma\,(u_1 + u_2)\,\sigma\,(u_1 - u_2)}{\sigma^2\,(u_1)\,\sigma^2\,(u_2)} = p\,(u_2) - p\,(u_1)$$

ponendo $u_2 = u_1$ si ha

$$\frac{\sigma(2u_1)}{\sigma^4(u_1)} = \lim_{u_2=u_1} \frac{p(u_2)-p(u_1)}{\sigma(u_1-u_2)}$$

$$= \lim_{u_2=u_1} \frac{p(u_2)-p(u_1)}{u_2-u_1} \cdot \lim_{u_2=u_1} \frac{u_2-u_1}{\sigma(u_1-u_2)}$$

$$= -p'(u_1).$$

Analogamente

$$\frac{\sigma(2u_2)}{\sigma^4(u_2)} = -p'(u_2)$$

onde, combinando ancora colle formole d'addizione, si ha

$$\frac{\sigma(2u_1)\,\sigma(2u_2)}{\sigma^2(u_1+u_2)\,\sigma^2(u_2-u_1)} = \frac{p'(u_1)\,p'(u_2)}{[p(u_2)-p(u_1)]^2}.$$

Possiamo quindi scrivere la formola

$$\sigma(u_2-u_1) = \frac{p(u_2)-p(u_1)}{\sqrt{p'(u_1)\,p'(u_2)}}\, e^{\frac{1}{2}Q_{u_1u_2}^{-u_1-u_2}}.$$

Questa formola è notevole per il fatto che se invece di considerare, come qui, per fondamento la forma normale di Weierstrass, si considera una biquadratica qualunque, si trova una formola perfettamente analoga a questa.

§ 2. **Espressioni delle σ pari mediante *Q*.** — Vogliamo per le σ pari fare una ricerca analoga a quella del paragrafo precedente.

Partiamo dalle formole

$$\sqrt{p(u_1) - e_1} = \frac{\sigma_1(u_1)}{\sigma(u_1)}$$

$$\sqrt{p(u_2) - e_1} = \frac{\sigma_1(u_2)}{\sigma(u_2)}$$

$$\sqrt{p(u_1) - e_2}\,\sqrt{p(u_1) - e_3} = \frac{\sigma_2(u_1)\,\sigma_3(u_1)}{\sigma^2(u_1)}$$

$$\sqrt{p(u_2) - e_2}\,\sqrt{p(u_2) - e_3} = \frac{\sigma_2(u_2)\,\sigma_3(u_2)}{\sigma^2(u_2)}$$

dalle quali si ha

$$P = \sqrt{p(u_1) - e_1}\,\sqrt{p(u_2) - e_2}\,\sqrt{p(u_2) - e_3} +$$
$$+ \sqrt{p(u_2) - e_1}\,\sqrt{p(u_1) - e_2}\,\sqrt{p(u_1) - e_3} +$$
$$= \frac{\sigma(u_1)\sigma_1(u_1)\sigma_2(u_2)\sigma_3(u_2) + \sigma(u_2)\sigma_1(u_2)\sigma_2(u_1)\sigma_3(u_1)}{\sigma^2(u_1)\,\sigma^2(u_2)}.$$

Moltiplicando e dividendo il secondo membro per

$$\sigma^2(u_1)\,\sigma_1^2(u_2) - \sigma^2(u_2)\,\sigma_1^2(u_1)$$

e osservando che

$$\frac{\sigma^2(u_1)\,\sigma_1^2(u_2) - \sigma^2(u_2)\,\sigma_1^2(u_1)}{\sigma^2(u_1)\,\sigma^2(u_2)} = p(u_2) - p(u_1)$$

e che l'altro fattore del secondo membro della

formola superiore è (v. Cap. III, § 8)

$$\frac{\sigma_1(u_2 - u_1)}{\sigma(u_2 - u_1)}$$

si ha infine, tenendo conto della formola già data per la σ,

$$\sigma_1(u_2 - u_1) = \frac{P}{\sqrt{p'(u_1)\,p'(u_2)}}\, e^{\frac{1}{2} Q_{u_1 u_2} - u_1 - u_2}$$

dove P è formata mediante $p(u_1)\,p(u_2)$ nel modo sopra indicato.

§ 3. **Espressioni di** u, p, Q, **riferite ad una binaria biquadratica qualunque.** — Supponiamo la forma ellittica fondamentale del tipo

$$y^2 = f_4(x) = a_0 x^4 + 4 a_1 x^3 + \ldots$$

o, sotto forma omogenea,

$$x_3^2 x_2^2 = f_4(x_1 x_2) = a_0 x_1^4 + \ldots$$

Vogliamo cominciare coll' esaminare come resta espresso l' integrale di 1.ª specie u. Dico che si ha semplicemente

$$u = \int \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}$$

se per formole di trasformazione delle variabili p, p' nelle variabili x, y si assumono le seconde

indicate nel § 3, Cap. V, cioè

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{\alpha p + \beta}{\gamma p + \delta} \\ y &= \frac{p'}{(\gamma p + \delta)^2} \end{aligned}\right\} \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = +1.$$

In effetti si ha

$$d x = \frac{(\alpha \delta - \beta \gamma)\, d p}{(\gamma p + \delta)^2}$$

$$= \frac{d p}{(\gamma p + \delta)^2}$$

e quindi si ha

$$d u = \frac{d p}{p'} = \frac{d x}{y}.$$

Sotto forma omogenea si avrebbe:

$$d u = \frac{(x_2\, d x_1 - x_1\, d x_2)}{\sqrt{f(x_1\, x_2)}} = \frac{(x\, d x)}{\sqrt{f(x_1\, x_2)}}.$$

Se si adoperasse l'altra trasformazione indicata nello stesso § 3, Cap. V si avrebbe lo stesso risultato, ma a meno di un fattore costante $\sqrt{a_0}$. Poniamo qui sotto in nota il calcolo relativo, che

del resto per le cose di questo capitolo non ha importanza. *

Supposto allora che ai valori u_2 u_1 dell'argo-

* Essendo, per le formole di cui si parla,

$$x = -\frac{a_1}{a_0} + \frac{1}{2\,a_0}\,\frac{p' - \alpha_2\,a_0^2}{p + \alpha_2\,a_0^2}$$

$$y = \frac{1}{a_0\sqrt{a_0}}\left[(2\,p - \alpha_2\,a_0^2) - \frac{1}{4}\left(\frac{p' - \alpha_2\,a_0^2}{p + \alpha_2\,a_0^2}\right)^2\right]$$

si ha

$$d\,x = \frac{1}{2\,a_0}\,\frac{(p + \alpha_2\,a_0^2)\,d\,p' - (p' - \alpha_2\,a_0^2)\,d\,p}{(p + \alpha_2\,a_0^2)^2}$$

$$2\,p'\,d\,p' = (12\,p^2 - g_2)\,d\,p$$

$$d\,x = \frac{1}{2\,a_0}\,\frac{2\,p^3 + 6\,\alpha_2\,a_0^2\,p^2 + \frac{1}{2}\,g_2\,p - \frac{1}{2}\,\alpha_2\,a_0^2\,g_2 + g_3 + \alpha_2\,a_0^2\,p'}{p'\,(p + \alpha_2\,a_0^2)^2}\,d\,p$$

$$y = \frac{1}{2\,a_0\sqrt{a_0}}\Big[2\,p^3 + 6\,\alpha_2\,a_0^2\,p^2 + \frac{1}{2}\,g_2\,p + \frac{1}{2}\,g_3 -$$

$$- 2\,\alpha_2^3\,a_0^6 - \frac{1}{2}\,\alpha_2^2\,a_0^6 + \alpha_2\,a_0^2\,p'\Big]$$

ed essendo (v. § 3, Cap. V)

$$g_2 = a_0^4\,(\alpha_4 + 3\,\alpha_2^2)$$

$$g_3 = a_0^6\,(\alpha_2\,\alpha_4 - \alpha_2^3 - \alpha_3^2)$$

si ha

$$\frac{1}{2}\,g_3 - 2\,\alpha_2^3\,a_0^6 - \frac{1}{2}\,\alpha_2^2\,a_0^6 = g_3 - \frac{1}{2}\,\alpha_2\,a_0^2\,g_2$$

e quindi

$$\frac{d\,x}{y} = \sqrt{a_0}\,\frac{d\,p}{p'} = \sqrt{a_0}\,d\,u.$$

mento u corrispondano i valori x'' x' della variabile x, si ha

$$u_2 - u_1 = \int_{x'}^{x''} \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}.$$

Troviamo ora l'espressione di $p(u_2 - u_1)$.

Osserviamo che la forma binaria generale

$$f(x_1\, x_2)$$

si riduce al polinomio di Weierstrass

$$4\, x_1^3\, x_2 - g_2\, x_1\, x_2^3 - g_3\, x_2^4$$

con una trasformazione lineare delle variabili, di determinante eguale ad 1. È di tal genere appunto la trasformazione ora adoperata.

Ora io dico che si ha la formola

$$p\left(\int_{x'}^{x''}\right) = p(u_2 - u_1) = \frac{\sqrt{f(x')\, f(x'')} + F(x'\, x'')}{2\,(x'\, x'')^2}$$

dove $F(x'\, x'')$ è la seconda polare di f fra le variabili $x'\, x''$, cioè

$$F(x'\, x'') = \frac{1}{12}\left\{\frac{\partial^2 f(x_1'\, x_2')}{\partial x_1'^2}\, x_1''^2 + \ldots\right\}$$

e

$$(x'\, x'') = x_1'\, x_2'' - x_2'\, x_1''.$$

Per dimostrare la formola di sopra noi osserviamo che, per noti principii della teoria degli in-

varianti, le espressioni di cui è formata quella formola sono tutte espressioni invariantive, cioè restano inalterate colla sostituzione lineare delle variabili omogenee.

Supponiamo allora fatta la sostituzione lineare che muta il polinomio generale nel polinomio di Weierstrass.

Il secondo membro della formola si otterrà ponendo:

$$p(u_1),\ 1,\ p'(u_1),\ p(u_2),\ 1,\ p'(u_2)$$

in luogo di

$$x_1',\ x_2',\ \sqrt{f(x')},\ x_1'',\ x_2'',\ \sqrt{f(x'')}.$$

Si ha così

$$p(u_2 - u_1) =$$

$$= \frac{p'(u_1)p'(u_2) + 2p(u_1)p(u_2)[p(u_1) + p(u_2)] - \frac{g_2}{2}[p(u_1) + p(u_2)] - g_3}{2[p(u_1) - p(u_2)]^2}.$$

Ora questa formola è vera, perchè, opportunamente trasformando la formola d'addizione per la funzione p, possiamo ottenere precisamente quest'ultima formola, come è facile verificare. Dunque resta dimostrata la formola di sopra.

È facile ora ottenere l'espressione dell'integrale normale di 3.ª specie Q. Essendo (v. § 5, Cap. V)

$$Q_{u_1 u_2}^{u_1' u_2'} = \int_{u_2'}^{u_1'} d u' \int_{u_2}^{u_1} d u\, p(u' - u)$$

si ha

$$Q_{u_1 u_2}^{u_1' u_2'} \int_{x_1''}^{x_1'} \int_{x''}^{x'} \frac{d z'}{\sqrt{f(z')}} \frac{d z}{\sqrt{f(z)}} \frac{\sqrt{f(z)}\sqrt{f(z')} + F(z z')}{2(z z')}.$$

Questo integrale può indicarsi con $Q_{x' x''}^{x_1' x_1''}$ per porre in vista le variabili x, in luogo degli argomenti u.

Le formole di questo paragrafo sono importantissime, perchè mostrano appunto *le proprietà invariantive di p e di Q*, rispetto alla trasformazione lineare del polinomio fondamentale.

§ 4. **Espressioni delle σ riferite alla biquadratica generale.** — Le formole che daremo qui non sono che la generalizzazione di quelle date nei § 1, 2 di questo Capitolo.

Si ha

$$\sigma(u_2 - u_1) = \frac{(x' x'')}{\sqrt[4]{f(x') f(x'')}} e^{\frac{1}{2} Q_{u_1 u_2}^{-u_1 - u_2}}$$

$$\sigma_i(u_2 - u_1) = \frac{\sqrt{\varphi(x')}\sqrt{\psi(x'')} + \sqrt{\varphi(x'')}\sqrt{\psi(x')}}{2\sqrt[4]{f(x') f(x'')}} e^{\frac{1}{2} Q_{u_1 u_2}^{-u_1 - u_2}}$$

dove con $\varphi(x')$, $\psi(x')$, ... si intendono due fattori quadratici tali che si abbia esattamente

$$f(x) = \varphi(x)\psi(x).$$

Colla trasformazione adoperata nel paragrafo precedente, e *che per il polinomio $f(x)$ si riduce*

alla trasformazione lineare che lo riduce nel polinomio di Weierstrass, le formole qui date si trasformano esattamente in quelle citate dei § 1, 2. Il che mostra la loro esattezza.

Si può osservare che la scomposizione di $f(x)$ in due fattori quadratici $\varphi(x)$, $\psi(x)$ si può fare appunto in tre modi, ciascuno dei quali corrisponde ad una delle tre funzioni σ pari.

Per tutte le formole contenute in questo capitolo si può vedere: *Klein*, Math. Ann., vol. 32, p. 360.

ULRICO HOEPLI

EDITORE-LIBRAIO DELLA REAL CASA - MILANO

ELENCO

DEI

MANUALI HOEPLI

Publicati sino al 1 Febbraio 1896

La collezione dei **Manuali Hoepli**, iniziata col fine di volgarizzare i principii delle Scienze, delle Lettere e delle Arti, deve il suo grandissimo successo al concorso dei più autorevoli scienziati e letterati d'Italia ed ha ormai conseguito, mercè la sua eccezionale diffusione, uno sviluppo di più che quattrocento volumi, per cui si è dovuto classificarla per serie, come segue:

Serie Scientifica, Storica, Letteraria, Giuridica e Linguistica (a L. 1,50 il volume)

pei **Manuali** che trattano le scienze e gli studi letterari.

SERIE PRATICA (a L. 2 il volume)

pei **Manuali** che trattano le industrie agricole, manifatturiere e gli argomenti che si riferiscono alla vita pratica.

SERIE ARTISTICA (a L. 2 il volume)

pei **Manuali** che trattano le arti e le industrie artistiche nella loro storia e nelle loro applicazioni pratiche.

SERIE SPECIALE

pei **Manuali** che si riferiscono a qualsiasi argomento, ma che per la mole e per la straordinaria abbondanza di incisioni, non potevano essere classificati in una delle serie suddette, a prezzo determinato.

Tutti i Manuali Hoepli sono elegantemente legati in tela.

AVVERTENZA

Tutti i MANUALI HOEPLI si spediscono **franco di porto** *nel Regno. — Chi desidera ricevere i volumi raccomandati, onde evitare lo smarrimento, è pregato di aggiungere la sopratassa di raccomandazione.*

ELENCO DEI MANUALI HOEPLI

Publicati sino al 1 Febbraio 1896

L. c.

Abitazioni (Le) **degli animali domestici**, di U. Barpi, con oltre 100 incisioni. (In lavoro).

Acque (Le) **minerali e termali del Regno d'Italia**, di Luigi Tioli. Topografia — Analisi — Elenchi — Denominazione delle acque — Malattie per le quali si prescrivono — Comuni in cui scaturiscono — Stabilimenti e loro proprietarî — Acque e fanghi in commercio — Negozianti d'acque minerali, di pag. xxii-552. 5 50

Adulterazione e falsificazione degli alimenti, del Dott. Prof. L. Gabba, di pag. viii-212 . . . . . 2 —

Agricoltura. Vedi *Abitazioni animali domestici — Agronomia — Alimentazione del bestiame — Animali da cortile — Apicoltura — Bacologia — Bestiame e l'agricoltura — Botanica — Cantiniere — Caseificio — Catasto italiano — Cavallo — Chimica agraria — Colombi — Coltivazione piante tessili — Computisteria agraria — Concimi — Contabilità agraria — Economia fabbricati rurali — Enologia — Estimo rurale — Floricoltura — Frumento e mais — Frutta minori — Frutticoltura — Funghi e tartufi — Gelsicoltura — Geometria pratica — Humus — Igiene rurale — Insetti nocivi — Insetti utili — Latte, burro e cacio — Legislazione rurale — Macchine agricole — Malattie crittogamiche delle piante erbacee coltivate — Malattie*

L. c.

dei vini — Mezzeria — Molini — Olivo ed olio — Olii vegetali, animali e minerali — Orticoltura — Piante e fiori — Piante industriali — Piante tessili — Pollicoltura — Pomologia artificiale — Porcicoltura — Prato — Prodotti agricoli del Tropico — Selvicoltura — Tabacco — Triangolazioni topografiche e catastali — Uva passa — Uva da tavola — Vino — Viticoltura — Zootecnia.

Agronomia, del Prof. F. Carega di Muricce. 3ª ed. riveduta ed ampliata dall'autore, di pag. XII-210 . . 1 50

Alcool (Fabbricazione e materie prime). di F. Cantamessa, di pag. XII-307, con 24 incisioni . . . . . 3 —

Algebra complementare, di Pincherle:

Parte I. *Analisi algebrica,* di pag. VIII-174 . . . 1 50

Parte II. *Teoria delle equazioni,* di pag. IV-170 con 4 incisioni nel testo 1 50

Algebra elementare, di Pincherle, 6ª ed., p. VIII-210 1 50

— Vedi *Esercizi di algebra.*

Alimentazione. — Vedi *Adulterazione alimenti — Conserve alimentari — Frumento e mais — Latte, burro e cacio. — Panificazione razionale.*

Alimentazione, di G. Strafforello, di pag. VIII-122. 2 —

Alimentazione del bestiame, di T. Poggi. (In lavoro).

Alpi (Le), di J. Ball, trad. di I. Cremona, pag. VI-120. 1 50

— Vedi *Dizionario alpino — Prealpi.*

Amministrazione. — Vedi *Contabilità.*

Analisi del vino, ad uso dei chimici e dei legali, del Dott. M. Barth, con pref. del Dott. I. Nessler, trad. del Prof. D. F. C. Comboni, di pag. 142 con 7 incis. 2 —

— Vedi anche *Alcool — Cantiniere — Cognac — Enologia — Liquorista — Malattie dei vini — Vino — Viticoltura.*

Analisi volumetrica applicata specialmente ai prodotti commerciali e industriali, di P. E. Alessandri, di pag. X-341 con 52 incisioni 4 50

Anatomia. — Vedi anche *Animali parassiti — Batteriologia — Coleotteri — Embriologia — Fisiologia — Imbalsamatore — Insetti — Lepidotteri — Protistologia — Zoologia.*

L. c.

Anatomia e fisiologia comparata, del Prof. R. Besta, di pag. VII-218 con 34 incisioni 1 50

Anatomia microscopica (Tecnica di), del Prof. D. Carazzi, di pag. XI-211, con 5 incisioni. 1 50

Anatomia pittorica, di A. Lombardini, pag. VI-118, con 39 incisioni . . . . . 2 —

Anatomia topografica (Compendio di), del Dott. Prof. C. Falcone, di pag. XVI-395, con 30 incisioni (volume doppio) . . . . . 3 —

Animali (Gli) **parassiti dell'uomo,** del Prof. F. Mercanti, di pag. IV-179, con 33 incisioni 1 50

Animali da cortile, del Prof. P. Bonizzi, di pag. XIV-238 con 39 incisioni . . . . . 2 —

— Vedi anche *Bestiame* — *Cane* — *Cavallo* — *Colombi* — *Coniglicoltura* — *Pollicoltura* — *Porcicoltura.*

Antichità private dei romani, del Prof. W. Kopp, traduzione del Prof. N. Moreschi, 2ª edizione, di pagine XII-130 . . . . . 1 50

Antropologia, del Prof. G. Canestrini, 2ª ediz., riveduta ed ampliata, di pag. VIII-232, con 23 incisioni. 1 50

— Vedi anche *Etnografia* — *Fisiologia* — *Paleoetnologia.*

Apicoltura razionale, del Prof. G. Canestrini, 2ª edizione riveduta di pag. IV-196, con 43 incisioni . . 2 —

Arabo volgare (Manuale di), di De Sterlich e Dib Khaddag. Raccolta di 1200 vocaboli e 600 frasi più usuali, 2ª edizione. (In lavoro).

Araldica (Grammatica), di F. Tribolati, 3ª edizione, di pag. VIII-120, con 98 incisioni e un'appendice sulle "Livree" 2 50

Archeologia. — Vedi *Antichità private dei romani* — *Archeologia dell'arte* — *Monete romane* — *Numismatica* — *Paleografia* — *Paleoetnologia.*

Archeologia dell'arte, del Prof. I. Gentile:

Parte I. *Storia dell'arte greca* testo, 2ª ed. (esaurito).

" *Atlante* per l'opera sudd. di *149 tavole,* indice. 4 —

Parte II. *Storia dell'arte etrusca e romana,* testo, 2ª ediz., di pag. IV-228 . . . . . 2 —

" *Atlante* per l'opera sudd. di *79 tavole,* indice. 2 —

L. c.

Architettura italiana, dell'Arch. A. Melani, 2 vol., di pag. xviii-214 e xii-266, con 46 tavole e 113 figure, 2ª edizione . . . . . 6 —
I. Architet. Pelasgica, Etrusca, Italo-Greca e Romana.
II. Architettura Medioevale fino alla Contemporanea.

Aritmetica pratica, del Dott. F. Panizza, di pagine viii-188 . . . . . 1 50

Aritmetica razionale, del Prof. Dott. F. Panizza, 2ª ediz., pag. xii-210 . . . . . 1 50

Armonia (Manuale di), di G. Bernardi. (In lavoro).
— Vedi anche *Cantante — Pianista — Strumenti ad arco — Storia della musica — Strumentazione.*

Arte del dire (L'), del Prof. D. Ferrari, 3ª ediz., corretta ed ampliata, di pag. xiii-246. . . . . 1 50
— Vedi anche *Rettorica — Ritmica — Stilistica.*

Arte del nuoto, del Prof. P. Abbo. (In lavoro).

Arte mineraria, dell'Ing. Prof. V. Zoppetti, di pagine iv-182, con 112 figure in 14 tavole. . . . . 2 —

Arti (Le) **grafiche fotomeccaniche** ossia la Eliografia nelle diverse applicazioni (Fotozincotipia, fotozincografia, fotolitografia, fotocollografia, fotosilografia, ecc.), con un cenno storico sulle arti grafiche e un Dizionarietto tecnico; 2ª ediz. corretta ed accresciuta, con molte illustrioni; pag. viii-197 con 12 tav. illustrate. 2 —
— Vedi anche *Dizionario fotografico — Fotografia per dilettanti — Fotocromatografia — Fotografia ortocromatica — Litografia — Ricettario fotografico.*

Asfalto (L'), fabbricazione - applicazione, dell'Ing. E. Righetti, con 22 incisioni, di pag. viii-152 . . . . . 2 —

Assicurazione sulla vita, di C. Pagani, di p. vi-152. 1 50

Assistenza degli infermi nell'Ospedale ed in famiglia, del Dott. C. Calliano, di pag. xxiv-448, con 7 tavole. 4 50
— Vedi anche *Igiene — Medicatura antisettica — Soccorsi urgenza.*

Astronomia, di J. N. Lockyer, rifatta e riveduta dal Prof. G. Celoria, 4ª ediz. di pag. xvi-258 con 51 inc. 1 50
— Vedi anche *Cosmografia — Gnomonica — Gravitazione — Ottica — Spettroscopio.*

Atlante geografico-storico dell' Italia, del Dott. G. Garollo, 24 carte, 76 pag. di testo e un' Appendice. 2 —

L. c.

Atlante geografico universale, di KIEPERT, con notizie geografiche e statistiche del Dott. G. GAROLLO, 8ª ediz. (dalla 70000 alla 80000 copia), 25 carte, 88 pagine di testo . . . . . 2 —

Atmosfera. — Vedi *Climatologia* — *Igroscopi* — *Meteorologia* — *Sismologia.*

Attrezzatura, manovra delle navi e segnalazioni marittime, di F. IMPERATO, di pag. XXII-360, con fig. 232 nel testo e XV tavole litografate 4 50

— Vedi anche *Doveri del macchinista navale* — *Ingegnere navale* — *Filonauta* — *Macchinista navale* — *Marino.*

Avicoltura. — Vedi *Animali da cortile* — *Colombi domestici* — *Pollicoltura.*

Bachi da seta, del Prof. T. NENCI, di pag. VI-276, 2ª ediz., con 41 incisioni e 2 tavole . . . . . 2 —

— Vedi anche *Gelsicoltura* — *Industria della seta* — *Tintura della seta.*

Balistica. — Vedi *Esplodenti* — *Manuale dell'Ufficiale* — *Pirotecnia* — *Storia dell'arte militare antica e moderna.*

Batteriologia, dei Proff. G. e R. CANESTRINI, di pagine VI-240 con 29 illustrazioni 1 50

— Vedi anche *Anatomia microscopica* — *Animali parassiti* — *Microscopio* — *Protistologia.*

Belle arti. — Vedi *Anatomia pittorica* — *Architettura italiana* — *Calligrafia* — *Ceramiche* — *Colori e pittura* — *Colori e vernici* — *Decorazioni* — *Disegno* — *Disegno geometrico* — *Litografia* — *Monogrammi* — *Ornatista* — *Pittura* — *Raccoglitore* — *Ristauratore dei dipinti* — *Scoltura.*

Bestiame. — Vedi *Abitazioni* — *Alimentazione* — *Animali da cortile* — *Cane* — *Cavallo* — *Colombi domestici* — *Coniglicoltura* — *Igiene veterinaria* — *Pollicoltura* — *Porcicoltura* — *Zootecnia.*

Bestiame (Il) e l'agricoltura in Italia, del Prof. F. ALBERTI, di pag. VIII-312, con 22 zincotipie 2 50

Biancheria. — Vedi *Disegno, taglio e confezione di biancheria* — *Macchine da cucire* — *Monogrammi.*

L. c.

Bibbia (Manuale della), di S. M. ZAMPINI, di pagine XII-308 . . . . . 2 50

Bibliografia, di G. OTTINO, 2ª ediz., riveduta di pagine VI-166, con 17 incisioni . . . . . 2 —

— Vedi *Dizionario bibliografico.*

Bibliotecario (Manuale del), di PETZHOLDT, traduzione di G. BIAGI e G. FUMAGALLI, di pag. XX-364 con un'appendice di pag. 213 . . . . . 7 50

— Vedi *Dizionario bibliografico.*

Biliardo (Il giuoco del), di J. GELLI, di pag. XV-179 con 79 illustrazioni 2 50

Biografia. — Vedi *Cristoforo Colombo — Dantologia — Omero — Shakespeare.*

Borsa (Operazioni di). — Vedi *Debito pubblico — Valori pubblici.*

Botanica, del Prof. I. D. HOOKER, traduz. del Prof. N. PEDICINO, 4ª edizione, di pag. XIV-134, con 68 inc. 1 50

Bromatologia. — Vedi *Adulterazione — Alimentazione — Conserve alimentari — Frumento e mais — Latte, burro e cacio — Panificazione.*

Burro. — Vedi *Latte — Caseificio.*

Cacciatore (Manuale del), di G. FRANCESCHI, di pagine VIII-268, con 10 tavole e 14 incisioni nel testo. 2 50

Calci e Cementi (Impiego delle), per l'Ing. L. MAZZOCCHI, di pag. XII-212 con 49 incisioni. . . . . 2 —

Calcolo infinitesimale, del Prof. E. PASCAL:

Parte I. *Calcolo differenziale,* di pag. IX-316 con 10 incisioni (volume doppio) . . . . . 3 —

Parte II. *Calcolo integrale,* di pag. VI-318 con 15 incisioni (volume doppio). . . . . 3 —

— Vedi *Esercizi applicati al calcolo — Funzioni ellittiche — Determinanti e applicazioni.*

Calligrafia (Manuale di). Cenno storico, cifre numeriche, materiale adoperato per la scrittura e metodo d'insegnamento, con 69 tavole di modelli dei principali caratteri conformi ai programmi governativi del Professore R. PERCOSSI, con 35 fac-simili di scritture, elegantemente legato, tascabile, con leggio annesso al manuale per tenere il modello . . . . . 3 —

— Vedi anche *Monogrammi — Ornatista.*

L. c.

Calore (Il), del Dott. E. Jones, trad. di U. Fornari, di pag. VIII-296 con 98 incisioni (volume doppio) . . 3 —

Cane (Manuale dell'allevatore del), con molte tavole. (In lavoro).

Cantante (Manuale del), di L. Mastrigli, di p. XII-132. 2 —

Cantiniere. Lavori di cantina mese per mese, dell'Ingegnere A. Strucchi, di pag. VIII-172 con 30 incisioni. 2 —

Cartografia (Manuale teorico-pratico della), con un sunto sulla storia della Cartografia, del Prof. E. Gelcich, di pag. VI-257, con 37 illustrazioni . . . . . 2 —

— Vedi anche *Celerimensura — Disegno topografico — Telemetria — Triangolazione.*

Caseificio, di L. Manetti, 2ª edizione, completamente rifatta di Sartori, di pagine IV-212, con 34 incisioni. 2 —

— Vedi anche *Bestiame — Latte, burro e cacio.*

Catasto (Il nuovo) **italiano,** dell'Avv. E. Bruni, di pag. XII-346, vol. doppio. . . . . 3 —

Cavallo (Manuale del), del Ten. Colonnello C. Volpini, 2ª ediz., con un'appen. Proverbi sul cavallo. (In lav.).

Cavi telegrafici sottomarini. Costruzione, immersione, riparazione, dell'Ing. E. Jona, di pag. XVI-338, con 188 figure ed una carta delle comunicazioni telegrafiche sottomarine 5 50

Celerimensura (Manuale pratico di), e tavole logaritmiche a quattro decimali dell'Ing. F. Borletti, di pag. VI-148 con 29 incisioni 3 50

Celerimensura (Manuale e tavole di), dell'Ing. G. Orlandi, di p. 1200 con quadro generale d'interpolazioni. 18 —

— Vedi anche *Cartografia — Compensazione degli errori — Disegno topografico — Geometria pratica — Telemetria.*

Cemento. — Vedi *Calce e cemento.*

Cementazione. — Vedi *Tempera.*

Ceralacche. — Vedi *Vernici e lacche.*

Ceramiche, majoliche, vetri e porcellane (Guida per il raccoglitore di), del Conte L. De Mauri. (In lav.).

Chimica, del Prof. H. E. Roscoe, traduzione del Prof. A. Pavesi, di pag. VI-124, con 36 inc., 4ª ediz. 1 50

— Vedi anche *Alcool — Analisi del vino — Analisi volumetrica — Chimica — Chimica agraria — Chi-*

L. c.

mico industriale — Cognac — Concimi — Farmacista — Infezione, disinfezione — Latte, burro.

Chimica agraria, del Dott. A. Aducco, di p. VIII-328. 2 50

Chimico (Manuale del) **e dell' industriale**, ad uso dei Chimici analitici e tecnici, degli industriali, ecc., del Dott. Prof. L. Gabba, 2ª ediz. (In lavoro).

Chirurgia. — Vedi *Anatomia topografica — Assistenza infermi — Igiene — Medicatura antisettica — Soccorsi urgenza.*

Ciclista (Manuale del), di A. Galante, riccamente illustrato, 2ª ediz. (In lavoro).

Climatologia, di L. De Marchi, p. X-204, con 6 carte 1 50

— Vedi anche *Igroscopi — Meteorologia — Sismologia.*

Codice cavalleresco italiano (Tecnica del duello), opera premiata con medaglia d'oro, del cav. J. Gelli, 8ª ediz. riveduta di pag. XV-272 (Vedi *Duellante*) . 2 50

Codice doganale italiano con commento e note, dell'Avv. E. Bruni, di pag. XX-1078 con 4 incisioni. 6 50

Cognac (Fabbricazione del) **e dello spirito di vino e distillazione delle fecce e delle vinacce**, di Dal Piaz-di Prato, di pag. X-168, con 37 incisioni. 2 —

Coleotteri italiani, del Dott. A. Griffini, p. XVI-334 con 215 incisioni (volume doppio) . . . . . 3 —

Colombi domestici e colombicoltura, del Prof. P. Bonizzi, di pag. VI-210, con 29 incisioni . . . . . 2 —

— Vedi anche *Bestiame — Cane — Cavallo — Coniglicoltura — Pollicoltura — Porcicoltura.*

Colori e la pittura (La scienza dei), del Prof. L. Guaita, di pag. 248. . . . . 2 —

Colori e vernici, di G. Gorini, nuova edizione totalmente rifatta, per l'Ing. G. Appiani. (In lavoro).

— Vedi anche *Fotografia — Luce e colori — Vernici.*

Coltivazione ed industrie delle piante tessili, propriamente dette e di quelle che danno materia per legacci, lavori d'intreccio, sparteria, spazzole, scope, carta, ecc., coll'aggiunta di un Dizionario delle piante ed industrie tessili, di oltre 3000 voci, del Prof. M. A. Savorgnan D'Osoppo, di pag. XII-476, con 72 inc. 5 —

Compensazione degli errori con speciale applicazione ai rilievi geodetici, di F. Crotti, pag. IV-160. 2 —

L. c.

Compositore-Tipografo (Manuale dell'allievo), di S. LANDI. (In lavoro).

Computisteria, del Prof. V. GITTI, vol. I. Computisteria commerciale, 3ª ediz., di pag. VI-168. . . . . 1 50

— Vol. II. Computisteria finanziaria, di pag. VIII-156. 1 50

Computisteria agraria, del Prof. L. PETRI, di pagine VI-212. . . . . 1 50

— Vedi *Contabilità.*

Concia delle pelli ed arti affini, di G. GORINI, 3ª edizione interamente rifatta dai Dott. G. B. FRANCESCHI e G. VENTUROLI, di pag. IX-210. . . . . 2 —

Conciliatore (Manuale del), dell'AVV. G. PATTACINI. Guida teorico-pratica con formulario completo pel Conciliatore, Cancelliere, Usciere e Patrocinatore di cause. 3ª ediz. tutta riveduta ed ampliata dall'autore e messa in armonia con l'ultima legge 28 luglio 1895. p. X-465 3 —

Concimi, del Prof. A. FUNARO, di pag. VII-253 . . . 2 —

Confezione d'abiti per signora. — Vedi *Disegno, taglio e confezione di biancheria.*

Coniglicoltura pratica, di G. LICCIARDELLI. (In lav.).

Conserve alimentari, di G. GORINI, 3ª ediz. interamente rifatta dai Dott. G. B. FRANCESCHI e G. VENTUROLI. di pag. VIII-256. . . . . 2 —

Contabilità. — Vedi *Computisteria commerciale — Computisteria finanziaria — Computisteria agraria — Contabilità comunale — Contabilità generale dello stato — Interessi e sconti — Logismografia — Paga giornaliera — Ragioneria — Ragioneria delle Cooperative. — Ragioneria industriale — Scritture d'affari — Società di mutuo soccorso — Valori pubblici.*

Contabilità comunale, secondo le nuove disposizioni legislative e regolamentari (Testo unico 10 febbraio 1889 e R. Decreto 6 luglio 1890, del Prof. A. DE BRUN, di pag. VIII-244 . . . . . 1 50

Contabilità generale dello Stato, dell'AVV. E. BRUNI, pag. XII-422 (vol. doppio) . . . . . 3 —

Cosmografia. *Uno sguardo all'Universo*, di B. M. LA LETA, di pag. XII-197, con 11 incisioni e 3 tavole. 1 50

Costituzione degli stati. — Vedi *Diritti e doveri — Ordinamento.*

L. c.

Costruttore navale (Manuale del), di G. Rossi. (In lavoro).

Cristallografia geometrica, fisica e chimica applicata ai minerali, del Prof. F. Sansoni, di p. xvi-368, con 284 incisioni nel testo (vol. doppio) . . . . . 3 —

— Vedi *Geologia — Mineralogia.*

Cristoforo Colombo, di V. Bellio, con 10 incisioni, di pag. iv-136 . . . . . 1 50

Crittogame. — Vedi *Malattie crittogamiche.*

Crittografia (La) diplomatica, militare e commerciale, ossia l'arte di cifrare o decifrare le corrispondenze segrete, del Conte L. Gioppi. (In lavoro).

Cronologia. — Vedi *Storia e cronologia.*

Cubatura dei legnami (Prontuario per la), di G. Belluomini, 2ª ediz. aumentata e corretta, di pag. 204 . 2 50

Curve. Manuale pel tracciamento delle curve delle Ferrovie e Strade carrettiere di G. H. Kröhnke, traduzione di L. Loria, 2ª edizione, di pag. 164, con 1 tav. 2 50

Dantologia, di G. A. Scartazzini, 2ª ediz. Vita ed Opere di Dante Alighieri, di pag. vi-408 (vol. doppio) 3 —

Debito (Il) **pubblico italiano** e le regole e i modi per le operazioni sui titoli che lo rappresentano, di F. Azzoni, di pag. viii-376 (vol. doppio). . . . . 3 —

— Vedi *Operazioni di borsa.*

Decorazione e industrie artistiche, dell'Arch. A. Melani, 2 vol., di complessive pagine xx-460, con 118 incisioni . . . . . 6 —

Determinanti e applicazioni, del Prof. E. Pascal. (In lavoro).

— Vedi *Calcolo infinitesimale — Esercizi di calcolo — Funzioni ellittiche.*

Didattica per gli alunni delle scuole normali e pei maestri elementari del Prof. G. Soli, di pag. viii-214 . 1 50

Digesto (Il), di C. Ferrini, di pag. iv-134. . . . . 1 50

Dinamica elementare, del Dott. C. Cattaneo, di pag. viii-146, con 25 figure 1 50

— Vedi *Termodinamica.*

Diritti e doveri dei cittadini, secondo le Istituzioni dello Stato, per uso delle pubbliche scuole, del Prof. D. Maffioli, 8ª ed., di pag. xvi-206 . . . . . 1 50

L. c.

Diritto amministrativo giusta i programmi governativi, ad uso degli Istituti tecnici, del Prof. G. Loris, 2ª edizione, di pag. XXII-506 (volume doppio). . . . 3 —
— Vedi anche *Legge comunale — Contabilità comunale.*

Diritto civile (Compendio di), del Prof. G. Loris, giusta i programmi governativi ad uso degli Istituti Tecnici, di pag. XVI-336 (volume doppio). . . . . 3 —

Diritto civile italiano, del Prof. C. Albicini, p. VIII-128 1 50

Diritto commerciale italiano, di E. Vidari, di pag. X-514 (volume doppio). . . . . 3 —
— Vedi *Mandato.*

Diritto comunale e provinciale. — Vedi *Diritto amministrativo — Legge comunale — Contabilità comunale.*

Diritto costituzionale, di F. P. Contuzzi, 2ª ediz., di pag. XVI-370 (volume doppio). . . . . 3 —

Diritto ecclesiastico, C. Olmo, p. XII-472 (vol. doppio) 3 —

Diritto internazionale privato, dell'Avv. Prof. F. P. Contuzzi, di pag. XVI-392 (volume doppio) . . . . 3 —

Diritto internazionale pubblico, dell'Avv. Prof. F. P. Contuzzi, di pag. XII-320 (volume doppio). . . . . 3 —

Diritto penale, dell'Avv. A. Stoppato, di p. VIII-192. 1 50

Diritto romano, del Prof. C. Ferrini, di pag. VIII-132. 1 50

Disegnatore meccanico e nozioni tecniche generali di Aritmetica, Geometria, Algebra, Prospettiva, Resistenza dei materiali, Apparecchi idraulici, Macchine semplici ed a vapore, Propulsori, per V. Goffi, 2ª ediz. riveduta, di pag. XXI-435, con 363 figure . . . 5 —

Disegno. I principii del Disegno, del Prof. C. Boito, 3ª ediz., di pag. IV-206, con 61 silografie . . . . . 2 —

Disegno assonometrico, del Prof. P. Paoloni, di pagine IV-122 con 21 tavole e 23 figure nel testo. . . 2 —

Disegno geometrico, del Prof. A. Antilli, di pagine VIII-85, 6 figure nel testo e 26 tavole litografiche 2 —

Disegno industriale, di E. Giorli. Corso regolare di disegno geometrico e delle proiezioni. Degli sviluppi delle superfici dei solidi, Della costruzione dei principali organi delle macchine, Macchine utensili, di pagine VIII-218, con 206 problemi risolti e 261 figure 2 —

L. c.

Disegno di projezioni ortogonali, del Prof. D. LANDI, con molte tavole. (In lavoro).

Disegno topografico, del Capitano G. BERTELLI., 2ª ediz. di pag. VI-137, con 12 tavole e 10 incisioni . 2 —

— Vedi anche *Cartografia — Celerimensura — Prospettiva — Telemetria — Triangolazioni.*

Disegno, taglio e confezione di biancheria (Manuale teorico pratico di), di E. BONETTI, con un Dizionario di nomenclatura, di pag. VIII-216 con 40 tav. 3 —

Disegno, taglio e confezione di abiti da signora, di EMILIA COVA, con 40 tavole illustrative . . . . 3 —

Disinfezione. — Vedi *Infezione.*

Distillazione. — Vedi *Alcool — Analisi del vino — Analisi volumetrica — Chimica agraria — Chimico — Cognac — Farmacista — Liquorista.*

Ditteri italiani, di PAOLO LIOY (*Entomologia III*), di pag. VII-356, con 227 incisioni (volume doppio) . . 3 —

Dizionario alpino italiano. Parte 1ª: *Vette e valichi italiani*, dell'Ing. E. BIONAMI-SORMANI. — Parte 2ª: *Valli lombarde e limitrofe alla Lombardia*, dell'Ing. C. SCOLARI, di pag. XXII-310 . . . . . 3 50

— Vedi anche *Alpi — Prealpi.*

Dizionario Eritreo italiano arabo-amarico, raccolta dei vocaboli più usuali nelle principali lingue parlate nella colonia eritrea, di A. ALLORI, p. XXXIII-203. 2 50

— Vedi *Grammatica galla — Lingue d'Africa — Tigrè.*

Dizionario bibliografico, di C. ARLIA, di pag. 100. 1 50

— Vedi *Bibliografia — Bibliotecario.*

Dizionario Filatelico, per il Raccoglitore di francobolli con introduzione storica e bibliografia, di J. GELLI, di pag. LXIV-412. . . . . 4 50

Dizionario fotografico pei dilettanti e professionisti, con oltre 1500 voci in 4 lingue, 500 sinonimi, 600 formule, di L. GIOPPI, pag. VIII-600, con 95 inc. e 10 tav.. . 7 50

— Vedi *Arti grafiche — Fotocromatografia — Fotografia ortocromatica — Fotografia per dilettanti — Ricettario fotografico.*

Dizionario geografico universale, del Dott. G. GAROLLO, 4ª edizione completamente rifatta. Uscirà in autunno 1896.

L. c.

Dizionario tecnico italiano, tedesco, francese e inglese, dell'Ing. E WEBBER. 4 volumetti (In lav.).

Dizionario termini delle corse, di C. VOLPINI, p. 47. 1 —

Dizionario universale delle lingue italiana, tedesca, inglese e francese, disposte in un unico alfabeto. 1 vol. di pag. 1200 . . . . . 8 —

Dizionario volapük. — Vedi *Volapük.*

Dogane. — Vedi *Codice doganale — Trasporti e tariffe.*

Dottrina popolare, in 4 lingue. (Italiana, Francese, Inglese e Tedesca). Motti popolari, frasi commerciali e proverbi, raccolti da G. SESSA, 2ª ediz., di pag. IV-212. 2 —

Doveri del macchinista navale e condotta della macchina a vapore marina ad uso dei macchinisti navali e degli Istituti nautici, di M. LIGNAROLO, p. XVI-303. 2 50

Duellante (Manuale del) in appendice al *Codice cavalleresco.* Opera premiata con medaglia d'oro e con diploma d'onore, del cav. J. GELLI, 2ª edizione, di pag. VIII-256, con 27 tavole 2 50

Economia dei fabbricati rurali, di V. NICCOLI, di pag. VI-192. . . . . 2 —

— Vedi anche *Estimo rurale — Legislazione rurale.*

Economia politica, del Prof. W. S. JEVONS, traduz. del Prof. L. COSSA, 3ª ed., riveduta, di pag. XIV-174. 1 50

— Vedi anche *Diritti e doveri — Diritto civile — Diritto commerciale — Diritto ecclesiastico — Diritto internazionale — Diritto penale — Diritto romano — Ordinamento degli Stati — Scienza delle finanze.*

Edilizia. — Vedi *Abitazioni animali domestici — Architettura italiana — Asfalto — Calci e cementi — Fabbricati civili — Economia fabbricati rurali — Fognatura cittadina — Ingegnere civile — Marmista — Proprietario di case ed opifici — Ricchezza mobile — Resistenza dei materiali — Riscaldamento e ventilazione degli ambienti abitati — Travi metalliche composte.*

Elettricista (Manuale dell'), di G. COLOMBO e R. FERRINI, di pag. VIII-204-44, con 40 incisioni . . . . . 4 —

Elettricità, del Prof. FLEEMING JENKIN, traduz. del Prof. R. FERRINI, di pag. VIII-180, con 32 incisioni. 1 50

L. c.

— Vedi *Cavi telegrafici sottomarini — Elettricista — Galvanoplastica — Illuminazione elettrica — Magnetismo ed elettricità — Telefono — Telegrafia — Unità assolute.*

Embriologia e morfologia generale, del Prof. G. CATTANEO, di pag. x-212, con 71 incisioni. 1 50

Enciclopedia Hoepli (Piccola), in 2 volumi di 3375 pagine di due colonne per ogni pagina, con Appendice (146,740 voci). L'opera completa elegantem. leg. 20—

Energia fisica, di R. FERRINI, di p. VI-108, con 15 inc. 1 50

— Vedi anche *Calore — Dinamica — Luce e suono — Termodinamica.*

Enologia, precetti ad uso degli enologi italiani, del Prof. O. OTTAVI, 3ª ediz., riveduta e ampliata da A. STRUCCHI. (In lavoro).

— Vedi anche *Alcool — Analisi del vino — Cantiniere — Cognac — Liquorista — Malattie ed alterazioni dei vini — Uva passa — Uva da tavola — Vino — Viticoltura.*

Enologia domestica, di R. SERNAGIOTTO, pag. VIII-223. 2 —

Entomologia. — Vedi *Animali parassiti — Apicoltura — Bachi da seta — Coleotteri — Ditteri italiani — Imbalsamatore — Insetti nocivi — Insetti utili — Lepidotteri italiani — Naturalista viaggiatore — Ortotteri — Zoologia.*

Equazioni. — Vedi *Algebra complementare — Esercizi d'algebra.*

Eritrea. — Vedi *Dizionario eritreo, italiano-arabo — Grammatica galla — Lingue d'Africa — Prodotti agricoli del Tropico — Tigrè-italiano.*

Errori e pregiudizi volgari, confutati colla scorta della scienza e del raziocinio da G. STRAFFORELLO, di pag. IV-170. . . . . 1 50

Esercizi di algebra elementare, del Prof. PINCHERLE, di pag. VIII-135, con 2 incisioni 1 50

— Vedi *Algebra.*

Esercizi di calcolo infinitesimale (Calcolo differenziale e integrale), del Prof. E. PASCAL, di pag. XX-372 (volume doppio). . . . . 3 —

— Vedi *Calcolo infinitesimale — Determinanti e applicazioni — Funzioni ellittiche.*

L. c.

Esercizi di geometria, del Prof. PINCHERLE. (In lavoro).

Esercizi di traduzione a complemento della grammatica francese, del Prof. G. PRAT, p. VI-183 1 50

— Vedi *Grammatica — Letteratura.*

Esercizi di traduzione con vocabolario a complemento della grammatica tedesca, del Prof. G. ADLER, di pag. IV-236 . . . . . 1 50

— Vedi *Grammatica — Letteratura.*

Esercizi geografici e quesiti, di L. HUGUES, **sull'Atlante di R. Kiepert**, 3ª ediz. (In lavoro).

Esercizi greci per la 4ª classe ginnasiale in correlazione alle *Nozioni elementari di lingua greca*, del Prof. V. INAMA; di A. V. BISCONTI, di pag. XXI-237. 1 50

Esercizi latini con regole (Morfologia generale), del Prof. P. E. CERETI, di pag. XII-332 . . . . . 1 50

— Vedi anche *Grammatica latina — Letteratura romana.*

Esplodenti e modo di fabbricarli, R. MOLINA, p. XX-300 2 50

Estetica, del Prof. M. PILO, di pag. XX-260 . . . . . 1 50

— Vedi *Etica — Filosofia — Logica — Psicologia.*

Estimo rurale, di F. CAREGA DI MURICCE, p. VI-164. 2 —

— Vedi *Agronomia — Catasto — Celerimensura — Disegno topografico — Economia dei fabbricati rurali — Geometria pratica — Triangolazioni.*

Etica, del Prof. L. FRISO. (In lavoro).

Etnografia, B. MALFATTI, 2ª ed. inter. rifusa, p. VI-200 1 50

— Vedi *Antropologia.*

Etnologia. — Vedi *Paleoetnologia.*

Fabbricati civili di abitazioni, del Prof. C. LEVI, con molte incisioni. (In lavoro).

— Vedi anche *Edilizia*

Fabbro. — Vedi *Fonditore — Operaio — Tornitore.*

Falegname ed ebanista. Natura dei legnami, maniera di conservarli, prepararli, colorirli e vernicirli, loro cubatura, di G. BELLUOMINI, pag. X-138, con 42 inc. 2 —

Farmacista (Manuale del), del Dott. P. E. ALESSANDRI, di pag. XII-628, con 128 tav. e 80 incisioni originali. 6 50

Ferro. — Vedi *500 meccanismi — Ingegnere civile — Ingegnere navale — Metalli — Operaio — Re-*

L. c.

sistenza materiale — Siderurgia — Tempera — Travi metallici.

Ferrovie. — Vedi *Codice doganale — Curve — Macchinista e fuochista — Trasporti e tariffe.*

Filatura. Manuale di filatura, tessitura e lavorazione meccanica delle fibre tessili, di E. GROTHE, traduzione sull'ultima edizione tedesca, di p. VIII-414, con 105 inc. 5 —

— Vedi anche *Coltivazione — Piante industriali.*

Filatura della seta, di G. PASQUALIS. (In lavoro).

Filologia classica, greca e latina, V. INAMA, p. XII-195 1 50

Filonauta. Quadro generale di navigazione da diporto e consigli ai principianti, con un Vocabolario tecnico più in uso nel panfiliamento, del Capitano G. OLIVARI, di pag. XVI-286 . . . . . 2 50

Filosofia. — Vedi *Estetica — Etica — Filosofia morale — Logica — Psicologia — Psicologia fisiologica.*

Filosofia morale, di L. FRISO, p. XVI-336 (vol. doppio) 3 —

Finanze. — Vedi *Debito pubblico — Scienza delle finanze — Valori pubblici.*

Fiori artificiali, di O. BALLERINI, con molte illustrazioni. (In lavoro).

Fiori. — Vedi *Botanica — Floricoltura — Orticoltura — Piante e fiori.*

Fisica, del Prof. BALFOUR STEWART, trad. del Prof. G. CANTONI, 4ª ediz., di pag. X-188, con 48 incisioni . . 1 50

— Vedi *Calore — Energia fisica — Luce e suono.*

Fisiologia, di FOSTER, traduz. del Prof. G. ALBINI, 3ª ediz., di pag. XII-158, con 18 incisioni 1 50

Floricoltura (Manuale di), di C. M. Fratelli RODA, di pag. VIII-186, con 61 incisioni. . . . . 2 —

— Vedi anche *Botanica — Orticoltura — Piante e fiori.*

Fognatura cittadina, dell'Ing. D. SPATARO, di pagine X-684, con 220 figure e 1 tavola in litografia. . 7 —

Fonditore in tutti i metalli (Manuale del), di G. BELLUOMINI, di pag. 146, con 41 incisioni . . . . . 2 —

— Vedi anche *Operaio.*

Fonologia greca, del Prof. A. CINQUINI. (In lavoro).

Fonologia italiana, del Dott. L. STOPPATO, p. VIII-102. 1 50

Fonologia latina, di S. CONSOLI, di pag. 208 . . . 1 50

Fotocromatografia (La), del Dott. L. SASSI, di pagine XVI-138, con 19 incisioni . . . . . 2 —

L. c.

Fotografia ed arti affini. — Vedi *Arti grafiche — Dizionario fotografico — Fotocromatografia — Fotografia ortocromatica — Fotografia per dilettanti — Litografia — Ricettario fotografico.*

Fotografia ortocromatica, del Dott. C. Bonacini, con incisioni e tavole. . . . . 2 —

Fotografia pei dilettanti. (Come il sole dipinge), di G. Muffone, p. xii-306, 3ª ed. rifatta ed aument., 83 inc. 2 —

Frumento e mais, di G. Cantoni, p. vi-168 e 13 incis. 2 —

Frutta minori (Le), di A. Pucci, di pag. viii-192, con 96 incisioni 2 50

Frutticoltura, del Prof. Dott. D. Tamaro, 2ª ediz., con 86 illustrazioni, di pag. xvi-225 . . . . . 2 —

Fulmini e parafulmini, del Dott. Prof. E. Canestrini, di pag. viii-166, con 6 incisioni. . . . . 2 —

Funghi (I) **ed i tartufi,** loro natura, storia, coltura, conservazione e cucinatura. Cenni di Folco Bruni, di pag. viii-184 . . . . . 2 —

Funzioni ellittiche, del Prof. E. Pascal, di pag. 240. 1 50

— Vedi anche *Calcolo infinitesimale — Esercizi applicati al calcolo — Determinanti e applicazioni.*

Galvanoplastica, ed altre applicazioni dell'elettrolisi, Galvanostegia, Elettrometallurgia, Affinatura dei metalli, Preparazione dell'alluminio, Sbianchimento della carta e delle stoffe, Risanamento delle acque, Concia elettrica delle pelli, ecc., del Prof. R. Ferrini, 2ª ed., completamente rifatta, di pag. xii-392 con 45 incisioni. 4 —

Gelsicoltura, del Prof. D. Tamaro, p. xvi-175 e 22 inc. 2 —

Geodesia. — Vedi *Compensazione degli errori — Celerimensura — Curve — Disegno topografico — Geometria pratica — Telemetria — Triangolazioni.*

Geodinamica. — Vedi *Dinamica — Meccanica — Sismologia — Termodinamica — Vulcanismo.*

Geografia e storia del globo. — Vedi *Alpi — Atlante universale — Atlante dell'Italia — Cartografia — Catasto — Cristoforo Colombo — Dizionario alpino — Dizionario geografico — Esercizi geografici — Etnografia — Geografia — Geografia classica — Geografia fisica — Geologia — Mare — Paleoetnologia — Prealpi bergamasche — Prontuario*

L. :.

di geografia e statistica — Sismologia — Statistica — Vulcanismo.

Geografia, di G. Grove, trad. del Prof. E. Galletti, 2ª ediz., riveduta, di pag. XII-160, con 26 incisioni. . 1 50

Geografia classica, di H. F. Tozer, traduzione e note del Prof. I. Gentile, 5ª ediz., di pag. IV-168. . 1 50

Geografia fisica, di A. Geikie, traduzione sulla 6ª ediz. inglese di A. Stoppani, 3ª ediz., di pag. IV-132, con 20 incisioni 1 50

Geologia, di Geikie, traduzione sulla 3ª edizione inglese di A. Stoppani, 3ª ed., di p. VI-154, con 47 inc. 1 50

— Vedi *Cristallografia — Mineralogia — Paleografia.*

Geometria analitica dello spazio, del Prof. F. Aschieri, di pag. VI-196, con 11 incisioni 1 50

Geometria analitica del piano, del Pr. F. Aschieri, di pag. VI-194, con 12 incisioni 1 50

Geometria descrittiva di F. Aschieri, 2ª edizione. (In lavoro).

Geometria metrica e trigonometria, del Prof. S. Pincherle, 4ª ediz., di pag. IV-158, con 47 incisioni. 1 50

Geometria pratica, dell'Ing. Prof. G. Erede, 2ª ediz., riveduta, di pag. X-184, con 124 incisioni . . . . . 2 —

— Vedi *Celerimensura — Disegno assonometrico — Disegno geometrico — Disegno topografico — Geodesia — Regolo calcolatore — Statica — Telemetria — Triangolazioni.*

Geometria projettiva del piano e della stella, del Prof. F. Aschieri, 2ª edizione, di pag. VI-228, con 86 incisioni. 1 50

Geometria projettiva dello spazio, del Prof. F. Aschieri, 2ª ediz. rifatta, di pag. VI-264, con 16 incis. 1 50

Geometria pura elementare, del Prof. S. Pincherle, 4ª ediz., di pag. VIII-159, con 112 incisioni . 1 50

Giardino (Il) **infantile,** del Prof. P. Conti, di pagine IV-214, con 27 tavole (vol. doppio) . . . . . 3 —

— Vedi anche *Giuochi ginnastici.*

Ginnastica (Storia della), di F. Valletti, di p. VIII-184. 1 50

Ginnastica femminile di Valletti, p. VI-112, e 67 ill. 2 —

Ginnastica maschile (Manuale di), per cura di J. Gelli, di pag. VIII-108, con 216 incisioni . . . . . 2 —

L. c.

Gioielleria, oreficeria, oro, argento e platino, di E. Boselli, di pag. 336, con 125 incisioni . . . 4 —

Giuochi, sport e collezioni. — Vedi *Sport.*

Giuochi ginnastici per la gioventù delle scuole e del popolo, raccolti e descritti di F. Gabrielli, di pag. xx-218, con 24 tavole illustrative 2 50

Giurisprudenza e legislazione. — Vedi *Catasto — Codice doganale — Conciliatore — Debito pubblico — Digesto — Diritti e doveri — Diritto amministrativo — Diritto civile — Diritto commerciale — Diritto costituzionale — Diritto ecclesiastico — Diritto internazionale privato — Diritto internazionale pubblico — Diritto penale — Diritto romano — Economia politica — Imposte dirette — Legge comunale e provinciale — Legislazione rurale — Mandato commerciale — Notaro — Ordinamento stati liberi di Europa — Ordinamento stati liberi fuori di Europa — Proprietario di case — Ricchezza mobile — Scienza delle finanze — Testamenti.*

Glottologia, del Prof. G. De Gregorio. (In lavoro).
— Vedi anche *Crittografia — Letterature diverse — Lingua gotica — Lingue neolatine — Paleografia — Sanscrito.*

Gnomonica ossia **l'arte di costruire orologi solari,** del Prof. La Leta. (In lavoro).
— Vedi *Orologeria.*

Grafologia, di C. Lombroso, con 470 fac-simili, di pag. 252. . . . . 3 50

Grammatica araldica. — Vedi *Araldica.*

Grammatica e dizionario della lingua dei Galla (oromonica), del Prof. E. Viterbo.
Vol. I. Galla-Italiano, di pag. viii-152 . . . . . 2 50
Vol. II. Italiano-Galla, di pag. lxiv-106. . . . . 2 50

Grammatica francese, del Prof. G. Prat, p. xi-287. 1 50
— Vedi *Esercizi di traduzione — Letteratura.*

Grammatica greca. (Nozioni elementari di lingua greca), del Prof. Inama, 2ª edizione, di pag. xvi-208. 1 50
— Vedi *Esercizi — Letteratura.*

Grammatica della lingua greca moderna, del Prof. R. Lovera, di pag. vi-154 . . . . . 1 50

Grammatica inglese, del Prof. Lugi Pavia, p. xii-260 1 50

L. c.

Grammatica italiana, di T. Concari, 2ª edizione riveduta, di pag. xvi-230 . . . . . 1 50

Grammatica latina, del Prof. L. Valmaggi, p. x-250. 1 50

— Vedi *Esercizi latini* — *Letteratura romana.*

Grammatica olandese (Elementi di), di M. Morgana. (In lavoro).

Grammatica e vocabolario della lingua rumena, del Prof. R. Lovera, di pag. viii-200 . . . . . 1 50

Grammatica spagnuola, del Prof. L. Pavia, p. xii-194 1 50

— Vedi *Letteratura.*

Grammatica tedesca, del Prof. L. Pavia, p. xviii-254. 1 50

— Vedi *Esercizi di traduzione* — *Letteratura.*

Gravitazione. Spiegazione elementare delle principali perturbazioni nel sistema solare di Sir G. B. Airy, traduzione, note ed aggiunte di F. Porro, 50 inc., di pag. xxiv-176 . . . . . 1 50

Grecia antica. — Vedi *Arte greca* — *Storia antica.*

Humus (L'), **la fertilità e l'igiene dei terreni culturali,** del Prof. A. Casali, di pag. xvi-220 . . 2 —

Idraulica, del Prof. Ing. T. Perdoni. (In lavoro).

Idroterapia. — Vedi *Acque.*

Igiene. — Vedi *Acque minerali* — *Fognatura cittadina* — *Igiene del lavoro* — *Igiene vita pubblica e privata* — *Igiene privata e medicina popolare* — *Igiene rurale* — *Igiene scolastica* — *Igiene veterinaria* — *Infezione, disinfezione e disinfettanti* — *Medicatura antisettica.*

Igiene del lavoro, Trambusti A. e Sanarelli. di pagine viii-362, con 70 incisioni. 2 50

Igiene della vita pubblica e privata, del Dott. G. Faralli, di pag. xii-250 . . . . . 2 50

Igiene privata e medicina popolare ad uso delle famiglie, di C. Bock, trad. di E. Parietti sulla 7ª ediz. ted. con una introduzione di G. Sormani, di pag. xii-278. 2 50

Igiene rurale, A. Carraroli, pag. x-470 (vol. doppio). 3 —

Igiene scolastica, di A. Repossi, 2ª ed., di pag. iv-246. 2 —

Igiene veterinaria, del Dott. U. Barpi, di p. viii-228. 2 —

Igroscopi, igrometri, umidità atmosferica, del Prof. P. Cantoni, di pag. xii-146, con 24 inc. e 7 tab. 1 50

Illuminazione elettrica (Impianti di), dell'Ing. E. Piazzoli ,3ª edizione interamente rifatta. (In lavoro).

L. c.

Imbalsamatore (Manuale dell'), **preparatore tassidermista**, di R. Gestro. 2ª ed. riv., di p. XII-148, 38 inc. 2 —

— Vedi *Naturalista viaggiatore.*

Imposte dirette (Riscossione delle), E. Bruni, p. VIII-158 1 50

— Vedi anche *Proprietario di case* — *Ricchezza mobile.*

Industria della carta, dell'Ing. L. Sartori. (In lav.)

Industria della seta, di L. Gabba, 2ª ed., p. IV-208. 2 —

Industria (L') **stearica.** Manuale pratico dell'Ing. E. Marazza, di pag. 288, con 76 inc. e con molte tab. 5 —

Industrie diverse. — Vedi *Apicoltura* — *Arte mineraria* — *Asfalto* — *Colori e vernici* — *Concia pelli* — *Caseificio* — *Concimi* — *Conserve* — *Decorazioni* — *Falegname* — *Fiori artificiali* — *Floricoltura* — *Fonditore* — *Fotografia* — *Frutticoltura* — *Gnomonica* — *Industria della carta* — *Industria stearica* — *Imbalsamatore* — *Latte, burro e cacio* — *Marmista* — *Meccanico* — *Molini* — *Olii vegetali, animali e minerali* — *Operaio* — *Orticoltura* — *Ostricoltura* — *Panificazione* — *Piccole industrie* — *Pirotecnica* — *Piscicoltura* — *Pittura* — *Pollicoltura* — *Pomologia artificiale* — *Saponeria* — *Scoltura* — *Vernici e lacche.*

Industrie tessili. — Vedi *Bachi da seta* — *Coltivazione e industria delle piante tessili* — *Filatura* — *Filatura della seta* — *Gelsicoltura* — *Industria della seta* — *Piante tessili* — *Tessitore* — *Tintore* — *Tintura della seta.*

Infezione, disinfezione e disinfettanti, del Dottor Prof. P. E. Alessandri, di pag. VIII-190, con 7 inc. 2 —

Ingegnere civile. Manuale dell'Ingegnere civile e industriale, di G. Colombo, 14ª ed. (34°, 35° e 36° migliaio), di pag. XIV-356, con 203 figure 5 50

Il medesimo tradotto in francese da P. Marcillac. 5 50

Ingegnere navale. Prontuario di A. Cignoni, con 36 fig., di pag. XXXII-292. Leg. in tela L. 4 50, in pelle. 5 50

Ingegneria. — Vedi *Matematica e Ingegneria.*

Insetti nocivi, F. Franceschini, p. VIII-264. 96 incis. 2 —

Insetti utili, F. Franceschini, p. XII-160, 43 inc. e 1 tav. 2 —

Interesse e sconto, di E. Gagliardi, di pag. VI-204. 2 —

Ittiologia. — Vedi *Ostricoltura* — *Piscicoltura.*

L. c.

Latte, burro e cacio. Chimica analitica applicata al caseificio, del Prof. SARTORI, di pag. x-162, con 24 inc. 2 —
— Vedi *Caseificio.*

Lavori di terra (Manuale di), dell'Ing. B. LEONI. (In lavoro).

Lavori femminili. — Vedi *Confezione d'abiti per signora e l'arte del taglio — Disegno, taglio e confezioni di biancheria — Macchine da cucire e da ricamare — Monogrammi — Ornatista.*

Legge (La nuova) **comunale e provinciale,** annotata dall'Avv. E. MAZZOCCOLO, 3ª ediz., con l'aggiunta di due regolamenti e due indici, di pag. VIII-728 . . 4 50

Legge comunale (Appendice alla) **del 22 e 23 luglio 1894,** di E. MAZZOCCOLO, di pag. VIII-256. 2 —

Leggi. — Vedi *Catasto — Codice doganale — Conciliatore — Debito pubblico — Digesto — Diritto amministrativo-civile-commerciale-costituzionale-ecclesiastico-internazionale-penale-romano — Imposte dirette — Legge comunale — Legislazione rurale — Mandato commerciale — Notaio — Ordinamento degli stati — Proprietario case — Ricchezza mobile — Scienza finanze — Testamenti — Valori pubblici.*

Legislazione rurale secondo il programma governativo per gli Istituti Tecnici dell'Avv. E. BRUNI, di p. XI-422 3 —

Legnami. — Vedi *Cubatura dei legnami — Falegname.*

Lepidotteri italiani, del Dott. A. GRIFFINI, di pagine VIII-238 con 149 incisioni 1 50
— Vedi *Animali parassiti — Coleotteri — Ditteri — Insetti — Ortotteri.*

Letteratura albanese (Manuale di), del Prof. A. STRATICÒ, di pag. XXIV-280 (volume doppio) . . . . 3 —

Letteratura americana, di G. STRAFFORELLO, p. 158 1 50

Letteratura danese. — Vedi *Letteratura norvegiana.*

Letteratura ebraica, di A. REVEL, 2 vol., di pag. 364. 3 —

Letteratura egiziana, del Dott. L. BRIGIUTI. (In lav.).

Letteratura francese, del Prof. F. MARCILLAC, trad. di A. PAGANINI, 2ª ediz., di pag. VIII-184 . . . . . 1 50
— Vedi anche *Grammatica francese — Esercizi per la grammatica francese.*

L. c.

Letteratura greca, del Prof. V. Inama, 11ª ediz., migliorata (dal 40° al 45° migliaio), di pag. VIII-234 . . 1 50
— Vedi anche *Esercizi greci — Filologia classica — Glottologia — Grammatica greca — Verbi greci.*

Letteratura indiana, del Prof. A. De Gubernatis, di pag. VIII-159 . . . . . 1 50

Letteratura inglese, del Prof. E. Solazzi, 3ª ediz., di pag. VIII-194 . . . . . 1 50
— Vedi anche *Grammatica inglese.*

Letteratura islandese, di S. Ambrosoli. (In lavoro).

Letteratura italiana, di C. Fenini, 4ª ed., di p. VI-204 1 50

Letteratura latina. — Vedi *Esercizi di grammatica latina — Filologia classica — Fonologia latina — Grammatica latina — Letteratura romana.*

Letteratura norvegiana, di S. Consoli, p. XVI-272. 1 50

Letteratura persiana, del Prof. I. Pizzi, di pag. X-208. 1 50

Letteratura provenzale, A. Restori, di pag. X-220. 1 50

Letteratura romana, del Prof. F. Ramorino, 3ª ediz. riveduta e corretta (dall'8° al 12° migliaio), p. IV-320. 1 50

Letteratura spagnuola e portoghese, del Prof. L. Cappelletti, di pag. VI-206 . . . . . 1 50
— Vedi *Grammatica spagnuola.*

Letteratura tedesca, del Prof. O. Lange, traduz. di A. Paganini, 2ª ediz., corretta, di pag. XII-168. . 1 50
— Vedi *Esercizi tedeschi — Grammatica tedesca.*

Letteratura ungherese, di Zigàny Arpàd, di pagine XII-295 . . . . . 1 50

Letterature slave, di D. Ciàmpoli, 2 volumi:
I. Bulgari, Serbo-Croati, Yugo-Russi, di pag. IV-144. 1 50
II. Russi, Polacchi, Boemi, di pag. IV-142 . . . . 1 50

Libri e biblioteconomia. — Vedi *Bibliografia — Bibliotecario — Compositore-tipografo — Crittografia — Dizionario bibliografico — Paleografia — Tipografia.*

Lingua araba. — Vedi *Arabo volgare — Dizionario eritreo — Grammatica Galla — Lingue dell'Africa — Tigrè.*

Lingua getica, grammatica, esercizi, testi, vocabolario comparato con ispecial riguardo al tedesco, inglese, latino e greco, del Prof. S. Friedmann, di pag. XVI-333. (volume doppio) . . . . . 3 —

L. c.

Lingue dell' Africa, di R. Cust, versione italiana del Prof. A. De Gubernatis, di pag. IV-110. . . . 1 50

Lingue neo-latine, del Dott. E. Gorra, di pag. 147. 1 50

— Vedi *Filologia classica — Glottologia.*

Lingue straniere (Studio delle), di C. Marcel, ossia l'Arte di pensare in una lingua straniera, tradus. del Prof. Damiani, di pag. XVI-136 . . . . . 1 50

Linguistica e filologia. — Vedi *Arabo volgare — Dizionario eritreo italiano arabo-amarico — Dizionario universale in 4 lingue — Dottrina popolare in 4 lingue — Esercizi di traduzione per la grammatica francese — Idem per la grammatica tedesca — Esercizi greci — Esercizi latini — Filologia classica greca e latina — Fonologia greca — Fonologia latina — Fonologia italiana — Glottologia — Grammatica e dizionario della lingua galla — Grammatica francese — Idem greca — Idem greco-moderno — Idem inglese — Idem italiana — Idem latina — Idem olandese — Idem rumena — Idem spagnuola — Idem tedesca — Letteratura albanese — Idem americana — Idem ebraica — Idem egiziana — Idem francese — Idem greca — Idem indiana — Idem inglese — Idem islandese — Idem italiana — Idem latina — Idem norvegiana — Idem persiana — Idem provenzale — Idem romana — Idem spagnola e portoghese — Idem tedesca — Idem ungherese — Idem slava — Lingua gotica — Lingue dell'Africa — Lingue neolatine — Lingue straniere — Metrica dei greci e dei romani — Morfologia greca — Morfologia italiana — Sanscrito — Tigré-italiano — Verbi greci anomali — Volapük.*

Liquorista. (In lavoro).

— Vedi *Cognac.*

Litografia, di C. Doyen, di pag. VIII-261, con 8 tavole in cromo e fototipia e un album fuori testo con 40 figure di attrezzi, ecc., occorrenti al litografo . . . 4 —

Logaritmi (Tavole di), con 5 decimali, pubblicate per cura di O. Müller, 4ª ediz., aumentata delle tavole dei logaritmi d'addizione e sottrazione per cura di Raina, di pag. XXXIV-186 . . . . . 1 50

L.

Logica, di W. Stanley Jevons, traduz. del Prof. C. Cantoni, 4ª ediz., di pag. viii-154, e 15 incisioni . . 1 50
— Vedi *Estetica — Etica — Filosofia — Psicologia.*
Logica matematica, di C. Burali-Forti, di pagine vi-158. . . . . 1 50
Logismografia, di C. Chiesa, 3ª edizione, di pagine xiv-172 . . . . . 1 50
— Vedi *Contabilità.*
Luce e colori, del Prof. G. Bellotti, di pag. x-156, con 24 incisioni e 1 tavola. 1 50
Luce e suono, di E. Jones, trad. di U. Fornari, di pag. viii-336 con 121 incisioni (volume doppio) . . . 3 —
Macchinista e fuochista, del Prof. G. Gautero, 6ª edizione, con aggiunte dell'Ing. L. Loria, di pagine xiv-180, con 24 incisioni e col testo della Legge sulle caldaie, ecc. (dal 10° al 12° migliaio). . . . . 2 —
Macchinista navale (Manuale del) di M. Lignarolo, di pag. xii-404, con 164 figure 5 50
— Vedi *Doveri del macchinista navale.*
Macchine agricole, del conte A. Cencelli-Perti, di pag. viii-216, con 68 incisioni . . . . . 2 —
Macchine per cucire e ricamare, dell'Ing. Alfredo Galassini, di pag. vii-230 con 100 incisioni 2 50
Macchine. — Vedi anche *Disegnatore meccanico — — Il meccanico — Ingegnere civile — Ingegnere navale — Macchinista e fuochista — Macchinista navale — Meccanica — Meccanismi (500) — Modellatore meccanico — Operaio — Tornitore meccanico.*
Magnetismo ed elettricità, del Dott. G. Poloni, 2ª ediz. curata dal Prof. F. Grassi, di pag. xiv-370, con 136 incisioni e 2 tavole 3 50
Mais. — Vedi *Frumento e mais — Panificazione.*
Malattie crittogamiche delle piante erbacee coltivate, del Dottor R. Wolf, traduzione con note ed aggiunte del Dottor P. Baccarini, p. x-268, 50 inc. 2 —
Malattie ed alterazioni dei vini, del Prof. S. Cettolini, di pag. xi-138, con 13 incisioni . . . . . 2 —
Malattie trasmissibili. — Vedi *Animali parassiti — Zoonosi.*
Mandato commerciale, del Prof. E. Vidari, p. vi-160 1 50

L. c.

Mare (Il), del Prof. V. Bellio, di pag. IV-140, con 6 tavole litografate a colori 1 50

Marine (Manuale del) **militare e mercantile,** di De Amezaga, con 18 xilografie ed un elenco del personale dello Stato maggiore, di pag. VIII-264. . . . 5 —

Marmista (Manuale del), di A. Ricci, 2ª edizione, di pag. XII-154, con 47 incisioni. . . . . 2 —

Matematica e ingegneria. — Vedi *Algebra complementare — Algebra elementare — Aritmetica pratica — Aritmetica razionale — Calcolo infinitesimale* (2 vol.) — *Celerimensura — Compensazione degli errori — Curve — Equazioni — Esercizi d'algebra — Esercizi di calcolo infinitesimale — Esercizi di geometria — Fognatura cittadina — Funzioni ellittiche — Geometria analitica dello spazio — Idem del piano — Idem descrittiva — Idem metrica e trigonometrica — Idem pratica — Idem projettiva del piano e della stella — Idem projettiva dello spazio — Idem pura elementare — Ingegnere civile — Logaritmi — Logica matematica — Momenti resistenti e pesi di travi metalliche composte — Peso dei metalli — Regolo calcolatore — Resistenza dei materiali — Saggiatore — Travi metalliche — Unità assolute.*

Materia medica moderna (Manuale di), del Dott. G. Malacrida. (In lavoro).

Meccanica. — Vedi *Disegnatore meccanico — Disegno industriale — Macchinista e fuochista — Macchinista navale — Macchine agricole — Macchine da cucire e ricamare — Meccanica — Meccanico — Meccanismi (500) — Modellatore meccanico — Operaio — Orologeria — Tornitore meccanico.*

Meccanica, del Prof. R. Stawell Ball, traduz. del Prof. J. Benetti, 3ª edizione, di pag. XVI-214, con 89 incisioni. 1 50

Meccanico, di E. Giorli. Nozioni speciali di Aritmetica, Geometria, Meccanica, Generatori del vapore, Macchine a vapore, Collaudazione e costo dei materiali, Doratura, Argentatura e Nichelatura, di pagine XII-234 con 200 problemi risolti e 130 figure . . . . 2 —

L. c.

Meccanismi (500), scelti fra i più importanti e recenti riferentisi alla dinamica, idraulica, idrostatica, pneumatica, macchine a vapore, molini, torchi, orologerie ed altre diverse macchine, da H. T. Brown, traduzione italiana sulla 16ª edizione inglese, dall'Ingegnere F. Cerruti, di pag. VI-176, con 500 incisioni nel testo (2ª edizione italiana) 2 50

Medaglie. — Vedi *Monete greche — Monete romane — Numismatica.*

Medicatura antisettica, del Dott. A. Zambler, con prefazione del Prof. E. Triconi, di pag. XVI-124, con 6 incisioni 1 50

— Vedi *Terapeutica.*

Medicina. — Vedi *Acque minerali — Anatomia e fisiologia comparata — Anatomia microscopica — Anatomia topografica — Animali parassiti — Assistenza agli infermi — Farmacista — Igiene del lavoro — Igiene della vita pubblica e privata — Igiene privata — Igiene rurale — Igiene scolastica — Igiene veterinaria — Infezione, disinfezione e disinfettanti — Materia medica — Medicatura antisettica — Soccorsi d'urgenza — Terapeutica — Zoonosi.*

Metalli preziosi (oro, argento, platino, estrazione, fusione, assaggi, usi), di G. Gorini, 2ª edizione di pagine 196, e 9 incisioni . . . . . 2 —

— Vedi *Oreficeria — Saggiatore.*

Metallurgia. — Vedi *Siderurgia.*

Meteorologia generale, del Dott. L. De Marchi, di pag. VI-156, con 8 tavole colorate 1 50

— Vedi *Climatologia — Geografia fisica — Igroscopi e igrometri.*

Metrica dei greci e dei romani, di L. Müller, tradotta dal Dott. V. Lami, 2ª edizione. (In lavoro).

Metrologia Universale ed il **Codice Metrico Internazionale,** coll'indice alfabetico di tutti i pesi, misure, monete e delle regioni o Città dell'Ing. A. Tacchini di pag. XX-482 . . . . . 6 50

Mezzeria (Manuale pratico della) e dei varî sistemi della colonia parziaria in Italia, del Prof. Avv. A. Rabbeno, di pag. VIII-196 . . . . . 1 50

L. c.

Micologia. — Vedi *Funghi e Tartufi — Malattie crittogamiche.*

Microscopia. — Vedi *Anatomia microscopica — Animali parassiti — Bacologia — Batteriologia — Microscopio — Protistologia — Tecnica protistologica.*

Microscopio (Il), Guida elementare alle osservazioni di Microscopia, di CAMILLO ACQUA, di pag. XII-226, con 81 incisioni 1 50

Militaria. — Vedi *Cavallo — Codice cavalleresco — Duellante — Esplodenti — Scherma — Storia arte militare.*

Mineralogia. — Vedi *Arte mineraria — Cristallografia — Marmista — Metalli preziosi — Mineralogia generale — Mineralogia descrittiva — Oreficeria — Pietre preziose — Siderurgia.*

Mineralogia generale, del Prof. L. BOMBICCI, 2ª ed. riveduta, di p. XIV-190, con 183 inc. e 3 tav. cromolit. 1 50

Mineralogia descrittiva, del Prof. L. BOMBICCI, 2ª ediz. di pag. IV-300, con 119 incisioni (vol. doppio). . 3 —

Miniatura. — Vedi *Colori e vernici — Decorazione e ornamentazione — Luce e colori — Ornatista — Pittura.*

Mitilicoltura. — Vedi *Ostricoltura — Piscicoltura.*

Mitologia comparata, di A. DE GUBERNATIS, 2ª ediz., di pag. VIII-150 . . . . . 1 50

Mitologia greca, di FORESTI Vol. I *Divinità,* p. VIII-264 1 50
Vol. II, *Eroi,* pag. 188. . . . . 1 50

Mitologia romana, di A. FORESTI. (In lavoro).

Modellatore meccanico del falegname e dell'ebanista, del Prof. G. MINA, di pag. XVII-428, con 293 incisioni e 1 tavola. 5 50

Molini (Industria dei), di C. SIBER-MILLOT. (In lavoro).

Momenti resistenti e pesi di travi metalliche composte. Prontuario ad uso degli ingegneri, architetti e costruttori, con 10 figure ed una tabella per la chiodatura. di E. SCHENCK, di pag. XL-188. . . . 3 50

Monete greche, di S. AMBROSOLI, con numerose incioni. (In lavoro).

Monete romane, del Cav. F. GNECCHI, di pag. XV-182, con 15 tavole e 62 figure nel testo 1 50

L. c.

— Vedi *Medaglie — Metrologia — Numismatica — Paleografia — Tecnologia monetaria.*

Monogrammi, del Prof. A. SEVERI, 73 tavole divise in tre serie, le prime due di 462 in due cifre e la terza di 116 in tre cifre. 3 50

— Vedi *Ornatista.*

Morale. — Vedi *Estetica — Etica — Filosofia morale — Logica — Psicologia.*

Morfologia greca, del prof. V. BETTEI, di pag. XX-376 (volume doppio) . . . . . 3 —

Morfologia italiana, del Prof. E. GORRA, di pagine VI-142. . . . . 1 50

Musica. — Vedi *Armonia — Cantante — Pianista — Storia della musica — Strumentazione — Strumenti ad arco e la musica da camera.*

Mutuo soccorso. — Vedi *Società di mutuo soccorso.*

Naturalista viaggiatore, di A. ISSEL e R. GESTRO (Zoologia), di pag. VIII-144, con 38 incisioni . . . . 2 —

Nautica. — Vedi *Arte del nuoto — Attrezzatura navale — Costruttore navale — Doveri del macchinista navale — Filonauta — Ingegnere navale — Macchinista navale — Marino.*

Notaro (Manuale del), aggiunte le Tasse di registro, di bollo ed ipotecarie, norme e moduli pel Debito pubblico, del Notaio A. GARETTI, 2ª ediz., rifusa e ampliata, di pag. XII-340 . . . . . 3 50

— Vedi *Testamenti.*

Numismatica, del Dott. S. AMBROSOLI, 2ª ediz. corretta ed accresciuta, di pag. XV-250, con 120 fotoincisioni nel testo e 4 tavole 1 50

— Vedi *Araldica — Archeologia — Medaglie — Metrologia — Monete — Paleografia.*

Nuoto. — Vedi *Arte del nuoto.*

Olii vegetali, animali e minerali, loro applicazioni, di G. GORINI, di pag. VIII-214, con 7 incis., 2ª ediz., completamente rifatta dal Dott. G. FABRIS . . . . 2 —

Olivo ed olio, *Coltivazione dell'olivo, estrazione, purificazione e conservazione dell'olio,* del Prof. A. ALOI, 3ª ediz., di pag. XII-330, con 41 incisioni . . . . . 3 —

Omero, di W. GLADSTONE, traduz. di R. PALUMBO e C. FIORILLI, di pag. XII-196 . . . . . 1 50

L. c.

Operaio (Manuale dell'). Raccolta di cognizioni utili ed indispensabili agli operai tornitori, fabbri, calderai, fonditori di metalli, bronzisti, aggiustatori e meccanici, di G. Belluomini, 3ª edizione, di pag. xvi-216. 2 —

Operazioni doganali. — Vedi *Codice doganale* — *Trasporti e tariffe.*

Oratoria. — Vedi *L'arte del dire* — *Rettorica* — *Stilistica.*

Ordinamento degli Stati liberi d'Europa, del Dott. F. Racioppi, di pag. viii-310 (vol. doppio) . . 3 —

Ordinamento degli Stati liberi fuori d'Europa, del Dott. F. Racioppi, di pag. viii-376 (vol. doppio). 3 —

Oreficeria. — Vedi *Giojelleria* — *Metalli preziosi* — *Saggiatore.*

Ornatista (Manuale dell') di A. Melani. Raccolta di iniziali miniate e incise, d'inquadrature di pagina, di fregi e finalini, esistenti in opere antiche di biblioteche, musei e collezioni private XXIV tavole in colori per miniatori, calligrafi, pittori di insegne, ricamatori, incisori, disegnatori di caratteri da stampa, ecc. Iª serie . . . . . 4 —

Orografia. — Vedi *Alpi* — *Atlante* — *Dizionario alpino* — *Dizionario geografico* — *Geografia* — *Prealpi.*

Orologeria moderna, dell'Ing. Garuffa, con 187 illustrazioni, di pag. viii-302, con 276 incisioni . . . 5 —

— Vedi *Gnomonica.*

Orticoltura, del Prof. D. Tamaro, con 60 incisioni. 4 —

— Vedi *Agricoltura.*

Orttoteri ed insetti minori italiani, del Dott. A. Griffini. (In lavoro).

Ostricoltura e mitilicoltura, del Dott. D. Carazzi, con 13 fototipie, di pag. viii-202 . . . . . 2 50

— Vedi *Piscicoltura.*

Ottica, di E. Gelsich, di pag. xvi-576, con 216 incisioni e 1 tavola . . . . . 6 —

Paga giornaliera (Prontuario della), **da cinquanta centesimi a lire cinque,** di C. Negrin, di pagine 222. . . . . 2 50

L. c.

Paleoetnologia, di I. Regazzoni, di pag. xi-252, con 10 incisioni 1 50

Paleografia, di E. M. Thompson, traduz. dall'inglese, con aggiunte e note di G. Fumagalli, di pag. viii-156, con 21 incisioni nel testo e 3 tavole in fototipia . . 2 —

Panificazione razionale, di Pompilio, di pag. iv-126. 2 —

Parafulmini. — Vedi *Elettricità — Fulmini.*

Pedagogia. — Vedi *Didattica — Giardino infantile — Ginnastica femminile e maschile — Igiene scolastica.*

Pelli. — Vedi *Concia delle pelli.*

Pensioni. — Vedi *Società di mutuo soccorso.*

Pesi e misure. — Vedi *Metrologia universale — — Statica e applicazione alla teoria e costruzione degli strumenti metrici — Tecnologia e terminologia monetaria.*

Peso dei metalli, ferri quadrati, rettangolari, cilindrici, a squadra, a U, a Y, a Z, a T e a doppio T, e delle lamiere e tubi di tutti i metalli, di G. Belluomini, di pag. xxiv-248 . . . 3 50

Pianista (Manuale del), di L. Mastrigli, di p. xvi-112. 2 —

Piante e fiori sulle finestre, sulle terrazze e nei cortili. Coltura e descrizione delle principali specie e varietà, di A. Pucci, di pag. viii-198 con 116 incisioni. 2 50

— Vedi anche *Botanica — Floricoltura — Frutta minori — Frutticoltura.*

Piante industriali, coltivazione, raccolto e preparazione, di G. Gorini, nuova edizione, di pag. ii-144. 2 —

Piante tessili. — Vedi *Coltivazione e industrie delle piante tessili.*

Piccole industrie, del Prof. A. Errera, di p. xvi-186. 2 —

Pietre preziose, classificazione, valore, arte del gioielliere, di G. Gorini, 2ª edizione, di pag. 138, con 12 incisioni. . . . . 2 —

Pirotecnica moderna, di F. Di Maio, con 111 incisioni, di pag. viii-150. . . . . 2 50

Piscicoltura (d'acqua dolce), del Dott. E. Bettoni, di pag. viii-318, con 85 incisioni . . . . . 3 —

— Vedi *Ostricoltura.*

L. c.

Ricchezza mobile (Imposta sui redditi di), dell'Avvocato E. Bruni, di pag. VIII-218 . . . . . 1 50
— Vedi *Imposte dirette — Proprietario di case.*

Ricettario fotografico, Dott. Luigi Sassi, di p. VI-150 2 —

Riscaldamento e ventilazione degli ambienti abitati, del Prof. R. Ferrini, 2 vol., di pag. X-332, 94 incis. 4 —

Riscossione imposte. — Vedi *Imposte.*

Risorgimento italiano (Storia del), del Prof. F. Bertolini, di pag. VI-154 . . . . . 1 50
— Vedi *Storia e cronologia — Storia italiana.*

Ristauratore dei dipinti, del Conte G. Secco-Suardo, 2 vol., di pag. XVI-269, XII-362 con 47 incisioni . . . 6 —

Ritmica e metrica razionale italiana, del Professore Rocco Murari, di pag. XVI-216. . . . . 1 50
— Vedi *Arte del dire — Rettorica — Stilistica.*

Rivoluzione (La) **francese** (1789-1799), del Prof. Dott. Gian Paolo Solerio, di pag. IV-176 . . . . . 1 50

Saggiatore (Manuale del), di F. Buttari, di p. VIII-245, con 28 incisioni 2 50
— Vedi *Metalli preziosi — Oreficeria.*

Sanscrito (Avviamento allo studio del), di F. G. Fumi, 2ª ediz., rifatta, di pag. XII-254 (vol. doppio) . . . . 3 —

Saponeria, dell'Ing. E. Marazza. (In lavoro).

Scacchi (Manuale pel giuoco degli), di A. Seghieri, di pag. XV-222, con 191 illustrazioni, 2ª edizione. (In lavoro).

Scherma italiana (Manuale di), su i principii ideati da Ferdinando Masiello, di J. Gelli, di pag. VIII-194, con 66 tavole. 2 50
— Vedi anche *Codice cavalleresco — Duellante.*

Scienza delle finanze, di T. Carnevali, pag. IV-140. 1 50

Scienze fisiche e naturali. — Vedi *Anatomia comparata — Anatomia microscopica — Animali parassiti — Antropologia — Arte mineraria — Batteriologia — Botanica — Calore — Chimica — Chimica agraria — Coleotteri — Concimi — Cristallografia — Dinamica — Energia fisica — Fisica — Fisiologia — Flora italiana — Fulmini e parafulmini — Funghi e tartufi — Geologia — Imbalsamatore — Insetti — Lepidotteri — Luce e colori —*

L. c.

Luce e suono — Microscopio — Mineralogia — Naturalista — Ostricoltura — Ottica — Piscicoltura — Pomologia — Protistologia — Selvicoltura — Termodinamica — Tecnica protistologica — Zoologia.

Scoltura. Scoltura italiana antica e moderna, statuaria e ornamentale dell' Archit. Prof. A. MELANI, di pagine XVIII-196, con 56 tav. e 26 fig. intercalate nel testo. 4 —

Scritture d' affari (Precetti ed esempi di), per uso delle Scuole tecniche, popolari e commerciali, del Professor D. MAFFIOLI, di pag. VIII-203 . . . . . 1 50

Selvicoltura, di A. SANTILLI, di pag. VIII-220 e 46 incisioni . . . . . 2 —

Sericoltura. — Vedi *Bachi da seta — Gelsicoltura — Filatura — Industria della seta — Microscopio — Tintura della seta.*

Shakespeare, di DOWDEN, traduzione di A. BALZANI, di pag. XII-242 . . . . . 1 50

Siderurgia (Manuale di), dell'Ing. V. ZOPPETTI, pubblicato e completato per cura dell' Ing. E. GARUFFA, di pag. IV-368, con 220 incisioni. 5 50

Sismologia, del Capitano L. GATTA, di pag. VIII-175, con 16 incisioni e 1 carta 1 50

Soccorsi d' urgenza, del Dott. C. CALLIANO, di pagine XLI-299, con 6 tavole litografate, 3ª edizione. . 3 —

— Vedi *Assistenza infermi — Igiene — Medicatura antisettica.*

Società di Mutuo soccorso (Manuale Tecnico per le). Norme per l'assicurazione delle pensioni e dei sussidi per malattia e per morte, del Dott. G. GARDENGHI, di pagine VI-152. . . . . 1 50

Spettroscopio (Lo) **e le sue applicazioni,** di R. A. PROCTOR, traduz. con note ed aggiunte di F. PORRO, di pag. VI-178, con 71 incisioni e una carta di spettri. 1 50

Spirito di vino. — Vedi *Alcool — Cognac — Liquorista.*

Sport, giuochi e collezioni. — Vedi *Arte del nuoto — Biliardo — Cacciatore — Cane — Cavallo — Ceramiche — Ciclista — Codice cavalleresco — Duellante — Dizionario alpino — Dizionario filatelico*

L. c.

— *Dizionario termini delle corse* — *Filonauta* — *Giardino infantile* — *Ginnastica* — *Ginnastica maschile* — *Ginnastica femminile* — *Giuochi ginnastici per la gioventù e per le scuole* — *Pirotecnia* — *Prealpi bergamasche* — *Raccoglitore di oggetti d'arte* — *Scacchi* — *Scherma italiana.*

Statica (Principî di) **e loro applicazione alla teoria e costruzione degli strumenti metrici,** per l'Ing. E. BAGNOLI, di pag. VIII-252 con 192 incisioni . . . 3 50

Statistica, di F. VIRGILII, di pag. VIII-176 . . . . 1 50

Stemmi. — Vedi *Araldica.*

Stenografia, di G. GIORGETTI e M. TESSAROLI (secondo il sistema Gabelsberger-Noe), 2ª ediz. (In lav.).

Stilistica, del Prof. F. CAPELLO, di pag. XII-164. . . 1 50

— Vedi *Arte del dire* — *Rettorica* — *Ritmica.*

Storia antica. Vol. I. *L'Oriente Antico,* di I. GENTILE, di pag. XII-232 . . . . . 1 50

Vol. II. *La Grecia,* di G. TONIAZZO, di pag. VI-216. 1 50

Storia e cronologia medioevale e moderna, in CC tavole sinottiche, di V. CASAGRANDI, 2ª edizione, di pag. VI-260. . . . . 1 50

Storia dell'arte militare antica e moderna, di V. ROSSETTO, con 17 tavole illustrative, di pagine VIII-504 . . . . . 5 50

Storia della ginnastica. — Vedi *Storia.*

Storia italiana (Manuale di), di C. CANTÙ, di pagine IV-160. . . . . 1 50

— Vedi *Risorgimento.*

Storia della musica, del Dott. A. UNTERSTEINER, di pag. 300 (vol. doppio). . . . . 3 —

Storia naturale dell'uomo e suoi costumi. — Vedi *Antropologia* — *Etnografia* — *Fisiologia* — *Grafologia* — *Paleoetnologia.*

Storia dei popoli e miti. — Vedi *Cristoforo Colombo* — *Errori e pregiudizi* — *Mitologia* — *Mitologia greca* — *Mitologia romana* — *Risorgimento italiano* — *Rivoluzione francese* — *Storia antica* — *Storia e cronologia medioevale e moderna* — *Storia dell'arte militare antica e moderna* — *Storia italiana.*

L. c.

Strumentazione (Manuale di), di E. PROUT, traduzione italiana con note di V. RICCI, con 95 esempi, di pag. x-222 . . . . . 2 50

Strumenti ad arco (Gli) **e la musica da camera,** del Duca di CAFFARELLI F., di pag. x-235 . . . . 2 50

— Vedi anche *Armonia — Cantante — Pianista.*

Strumenti metrici. — Vedi *Metrologia — Statica.*

Suono. — Vedi *Luce e suono.*

Sussidi. — Vedi *Società Mutuo Soccorso.*

Tabacco, del Prof. G. CANTONI, di pag. IV-176, con 6 incisioni . . . . . 2 —

Tacheometria. — Vedi *Celerimensura — Telemetria — Topografia — Triangolazioni.*

Taglio e confezione di biancheria. — V. *Disegno.*

Tariffe ferroviarie. — Vedi *Codice doganale — Trasporti e tariffe.*

Tartufi e funghi. — Vedi *Funghi.*

Tasse di registro, bollo, ecc. — Vedi *Notaro.*

Tassidermista. — Vedi *Imbalsamatore — Naturalista viaggiatore.*

Tavole logaritmiche. — Vedi *Logaritmi.*

Tavole tacheometriche. — Vedi *Celerimensura — — Telemetria — Topografia — Triangolazioni.*

Tecnica microscopica. — Vedi *Anatomia microscopica.*

Tecnica protistologica, del Prof. L. MAGGI, di pag. XVI-318 (volume doppio) . . . . . 3 —

— Vedi *Protistologia.*

Tecnologia meccanica. — Vedi *Modellatore meccanico.*

Tecnologia e terminologia monetaria, di G. SACCHETTI, di pag. XIV-192 . . . . . 2 —

Telefono, di D. V. PICCOLI, di pag. IV-120, con 38 incisioni . . . . . 2 —

Telegrafia, di R. FERRINI, di pag. VI-318, con 95 incisioni . . . . . 2 —

— Vedi *Cavi e telegrafia sottomarina.*

Telemetria, misura delle distanze in guerra, di G. BERTELLI, di pag. XIII-145, con 12 zincotipie . 2 —

Tempera e cementazione, dell'Ing. FADDA, di pagine VIII-108, con 20 incisioni . . . . . 2 —

L. c.

Teologia. — Vedi *Bibbia — Diritto ecclesiastico — Religione e lingua dell'India inglese.*

Terapeutica (Manuale di) l'impiego ipodermico e la dosatura dei rimedî del Dott. G. MALACRIDA, di pagine 306 . . . . . 3 —

— Vedi *Medicatura antisettica.*

Termodinamica, di C. CATTANEO, di pag. x-196, con 4 figure 1 50

Terremoti. — Vedi *Sismologia — Vulcanismo.*

Tessitore (Manuale del), del Prof. P. PINCHETTI, 2ª edizione riveduta, di pag. XVI 312, con illustrazioni intercalate nel testo 3 50

Testamenti (Manuale dei), per cura del Dott. L. SERINA, di pag. VI-238 . . . . . 2 50

— Vedi *Notaio.*

Tigrè-italiano (Manuale), con due dizionarietti italiano-tigrè e tigrè-italiano ed una cartina dimostrativa degli idiomi parlati in Eritrea, del Cap. MANFREDO CAMPERIO, di pag. 180 . . . . . 2 50

— Vedi *Arabo volgare — Grammatica galla — Lingue dell'Africa.*

Tintore (Manuale del), di R. LEPETIT, 3ª ediz., di pagine x-279, con 14 incisioni (vol. doppio) . . . . . 4 —

Tintura della seta, studio chimico tecnico, di T. PASCAL, di pag. XVI-432 . . . . . 5 —

Tipografia. — Guida per chi stampa e fa stampare. — Compositori e Correttori, Revisori, Autori ed Editori, di S. LANDI, di pag. 280 . . . . . 2 50

— Vedi *Compositore-tipografo.*

Topografia e rilievi. — Vedi *Cartografia — Catasto italiano — Celerimensura — Compensazione degli errori — Curve — Disegno topografico — Estimo rurale — Geometria pratica — Regolo calcolatore — Telemetria — Triangolazioni topografiche e triangolazioni catastali.*

Tornitore meccanico (Guida pratica del), ovvero sistema unico per calcoli in generale sulla costruzione di viti e ruote dentate, arricchita di oltre 100 problemi risolti, di S. DINARO, di pag. 164. . . . . 2 —

Trasporti, tariffe, reclami ferroviari ed operazioni doganali. Manuale pratico ad uso dei com-

L. c.

mercianti e privati, colle norme per l'interpretazione delle tariffe e disposizioni vigenti, per A. G. Bianchi, con una carta delle reti ferroviarie italiane, di pagine xvi-152 . . . . . 2 —

Travi metalliici composti (Momenti resistenti, pesi dei), di E. Schenck, pagine xl-188, 10 figure e tabella per chiodatura 3 50

Triangolazioni topografiche e triangolazioni catastali, dell'Ing. O. Jacoangeli. Modo di fondarle sulla rete geodetica, di rilevarne e calcolarle, di pagine xiv-240, con 32 incisioni, 4 quadri degli elementi geodetici, 32 modelli esemplificati pei calcoli trigonometrici e tavole ausiliarie 7 50

— Vedi *Cartografia — Celerimensura — Disegno topografico — Geometria pratica — Telemetria.*

Trigonometria. — Vedi *Geometria metrica.*

Ufficiale (Manuale per l') del Regio Esercito italiano, di U. Morini, di pag. xx-388 . . . . . 3 50

Unità assolute. Definizione, Dimensioni, Rappresentazione, Problemi, dell'Ing. G. Bertolini, di p. x-124-44. 2 50

Uva passa (Industria dell') **e della essicazione delle frutta e degli ortaggi,** Prof. L. Paparelli. (In lavoro).

Uve da tavola. Varietà, coltivazione e commercio, del Dott. D. Tamaro. (In lavoro).

Valli lombarde, di Scolari. — Vedi *Dizionario alpino.*

Valori pubblici (Manuale per l'apprezzamento dei) e per le operazioni di Borsa, Dott. F. Piccinelli, di pag. xiv-236 . . . . . 2 50

— Vedi *Debito pubblico.*

Velocipedista. — Vedi *Ciclista.*

Ventilazione. — Vedi *Riscaldamento.*

Verbi greci anomali (I), di P. Spagnotti, secondo le Grammatiche di Curtius e Inama, di pag. xxiv-107. 1 50

Vernici, lacche, mastici, inchiostri da stampa, ceralacche e prodotti affini (Fabbricazione delle), dell'Ing. Ugo Fornari, di pag. viii-262 . . . . . 2 —

Veterinaria. — Vedi *Alimentazione del bestiame — Bestiame — Cane — Cavallo — Igiene veterinaria — Porcicoltura — Zootecnia.*

L. c.

Vino (Il), di G. GRAZZI-SONCINI, di pag. XVI-152. . . 2 —

Viticoltura ed enologia. — Vedi *Alcool — Analisi del vino — Cantiniere — Cognac — Enologia — Enologia domestica — Liquorista — Malattie ed alterazioni dei vini — Uva passa — Uve da tavola — Vino — Viticoltura.*

Viticoltura. Precetti ad uso dei Viticoltori italiani, del Prof. O. OTTAVI, rived. ed ampliata da A. STRUCCHI, 3ª ediz., di pag. VIII-184 e 22 incisioni . . . . . 2 —

Volapük (Dizionario italiano-volapük), preceduto dalle Nozioni compendiose di grammatica della lingua, del Prof. C. MATTEI, secondo i principii dell'inventore M. SCHLEYER, ed a norma del *Dizionario Volapük* ad uso dei francesi, del Prof. A. KERCKHOFFS, di pag. XXX-198. 2 50

Volapük (Dizion. volapük-italiano), del Prof. C. MATTEI, di pag. XX-204 . . . . . 2 50

— Manuale di conversazione e raccolta di vocaboli e dialoghi italiani-volapük, per cura di M. ROSA TOMMASI e A. ZAMBELLI, di pag. 152 . . . . . 2 50

Vulcanismo, del Capitano L. GATTA, di pag. VIII-268, con 28 incisioni 1 50

Zoologia. — Vedi *Anatomia e fisiologia comparate — Animali parassiti dell'uomo — Animali da cortile — Apicoltura — Bachi da seta — Batteriologia — Bestiame — Cane — Cavallo — Coleotteri — Colombi — Coniglicoltura — Ditteri — Embriologia e morfologia generale — Imbalsamatore — Insetti nocivi — Insetti utili — Lepidotteri — Naturalista viaggiatore — Ortotteri — Ostricoltura e mitilicoltura — Piscicoltura — Pollicoltura — Porcicoltura — Protistologia — Tecnica protistologica — Zoologia.*

Zoologia, Proff. E. H. GIGLIOLI e G. CAVANNA, 3 vol.:

I. Invertebrati, di pag. 200, con 45 figure . . . 1 50

II. Vertebrati. Parte I, Generalità, Ittiopsidi (Pesci ed Anfibi), di pag. XVI-156, con 33 incisioni. . 1 50

III. Vertebrati. Parte II, Sauropsidi, Teriopsidi (Rettili, Uccelli e Mammiferi), p. XVI-200 con 22 inc. 1 50

Zoonosi, del Dott. B. GALLI VALERIO, di pag. XV-227 1 50

Zootecnia, del Prof. G. TAMPELINI, p. VIII-297, con 52 inc. 2 50

INDICE ALFABETICO DEGLI AUTORI

Acqua C. Microscopio. . . *pag.* 30
Adler G. Eserc. di lingua ted. 17
Aducco A. Chimica agraria . . 10
Airy G. B. Gravitazione 22
Alberti F. Il bestiame e l'agricoltura. 7
Albicini G. Diritto civile 13
Abbo P. Arte del nuoto 6
Albini G. Fisiologia 18
Alessandri P. E. Analisi volumetrica 4
— Infezione, Disinfezione . . 23
— Farmacista (Manuale del). 17
Allori A. Dizionario eritreo. . 14
Aloi A. Olivo ed Olio. 31
Ambrosoli S. Numismatica . . 31
— Letteratura islandese . . . 25
— Monete greche. 30
Amezaga (De). Man. del Marino 28
Antilli A. Disegno geometrico. 13
Appiani G. Colori e vernici . . 10
Arlia C. Dizion. Bibliografico. 14
Arti grafiche, ecc. 6
Aschieri F. Geometria projettiva dello spazio 20
— Geometria projettiva del piano e della stella 20
— Geometria descrittiva . . 20
— Geometria analitica del piano. 20
— Geom. analit. dello spazio 20
Azzoni F. Debito pubblico italiano. 12
Baccarini P. Malattie crittogame. . . . . *pag.* 27
Bagnoli. Statica. 38
Balfour-Stewart. Fisica 18
Ball J. Alpi (Le) 4
Ball R. Stawell. Meccanica . . 28
Ballerini O. Fiori artificiali . . 18
Balzani A. Shakespeare. 37
Barpi U. Igiene veterinaria. . 22
— Abitazioni animali domestici. 3
Barth M. Analisi del vino . . . 4
Bellio V. Mare (Il) 28
— Cristoforo Colombo. 12
Bellotti G. Luce e colori. . . . 27
Belluomini G. Cubatura legnami 12
— Peso dei metalli. 33
— Falegname ed ebanista . . 17
— Manuale dell'Operaio . . . 3
— Fonditore 18
Benetti J. Meccanica 28
Bergamaschi O. Ragioneria industriale 35
Bernardi G. Armonia 6
Bertelli G. Disegno topografico 14
— Telemetria 39
Bertolini F. Storia risorgimento italiano 30
Bertolini G. Unità assolute . . . 41
Besta R. Anatomia e fisiologia comparata 5
Bettei V. Morfologia greca . . 31
Bettoni E. Piscicoltura. 33

Biagi G. Bibliotec. (Man. del) 8
Bianchi A. G. Trasporti, tariffe, reclami, oper. doganali . . 40
Bignami-Sormani. Diz. Alpino . . 14
Bisconti A. Eserc. gramm. greca 17
Bock. Igiene privata 22
Boito C. Disegno (Princ. del). 13
Bombicci L. Mineral. generale 30
— Mineralogia descrittiva . . 30
Bonacini C. Fotografia ortocromatica 19
Bonetti E. Disegno, taglio e confezione di biancheria. . 14
Bonizzi P. Anim. da cortile . . 5
— Colombi domestici 10
Borletti F. Celerimensura . . . 9
Boselli E. Gioielleria e Oref. 21-32
Brigiuti R. Letterat. egiziana. 24
Brown H. T. 500 Meccanismi . 29
Bruni F. Tartufi e funghi. . . 19
Bruni E. Imposte dirette. . . . 23
— Contabilità dello Stato . . 11
— Catasto italiano 9
— Codice doganale. 10
— Legislazione rurale. 24
— Ricchezza mobile 36
Burali-Forti. Logica matematica 27
Buttari F. Il saggiatore 36
Caffarelli F. Strumenti ad arco 39
Calliano C. Soccorsi d'urgenza 37
— Assistenza infermi 6
Camperio M. Manuale Tigrè-Italiano 40
Canestrini E. Fulmini e paraf. 19
Canestrini G. Apicoltura 5
— Antropologia 5
Canestrini G. e R. Batteriologia 7
Cantamessa F. Alcool 4
Cantoni C. Logica 27
— Psicologia 35
Cantoni G. Fisica. 18
— Tabacco (II) 39
— Prato (II) 34
— Frumento e Mais 19
Cantoni P. Igroscopi, Igrometri, Umidità atmosferica . . 22
Cantù C. Storia italiana 38
Capello F. Rettorica. 35
— Stilistica. 35
Cappelletti L. Letterat. spagn. e portoghese. 25
Carazzi D. Ostricoltura. 32
— Tecnica microscopica . . . 5
Carega di Muricce F. Agronomia 4
Carega di Muricce F. Estimo rurale . . . . . *pag.* 17
Carnevali. Scienza di finanze. 36
Carraroli A. Igiene rurale . . . 22
Casagrandi V. Storia e cron. 38
Casali A. L'Humus. 22
Cattaneo C. Dinamica element. 12
— Termodinamica 40
Cattaneo G. Embriologia e morfologia 16
Cavanna G. Zoologia 42
Celoria G. Astronomia 6
Cencelli-Perti A. Macchine agr. 27
Cereti P. A. Esercizi latini . . 17
Cerruti F. 500 meccanismi. . . 29
Cettolini S. Malattie dei vini . 27
Chiesa C. Logismografia . . . 27
Ciampoli D. Letterature slave 25
Cignoni A. Ing. navale (Prontuario dell') 23
Cinquini A. Fonologia greca . 18
Claudi C. Prospettiva 35
Colombo G. Ingegn. civile. . . 23
— Elettricista (Manuale dell') 15
Comboni E. Analisi del vino . 4
Concari T. Grammatica ital. . 22
Consoli S. Fonologia latina . 18
— Letter. Norveg. e Danese 25
Conti. Giardino infantile . . . 20
Contuzzi F. P. Diritto costituz. 13
— Diritto internaz. privato . 13
— Diritto internaz. pubblico 13
Cossa L. Economia politica . 15
Cova E. Disegno, taglio, ecc. 14
Cremona I. Alpi (Le) 4
Crotti F. Compens. degli errori 10
Cust. Relig. e lingue dell'India 35
— Lingue d'Africa. 26
Dal Piaz di Prato. Cognac . . . 10
Damiani. Lingue straniere . . 26
De Amezaga. Mar. mil. e merc. 28
De Brun A. Contab. comunale 11
De Gregorio G. Glottologia . . 21
De Gubernatis A. Mitol. comp. 30
— Letteratura indiana 25
— Relig. e lingue dell'India. 35
— Lingue d'Africa. 26
Del Lupo P. Pomologia artific. 34
De Marchi L. Meteorologia . . 29
— Climatologia 10
De Mauri L. Raccoglitore oggetti d'arte. 35
— Ceramiche, majoliche, ecc. 9
De Sterlich. Arabo volgare . . 5

Dib Khaddag. Arabo volg. *pag.* 5
Di Caffarelli F. Strum. ad arco 39
Di Maio F. Pirotecnica 83
Dinaro S. Tornitore meccanico 40
Dizionario universale 4 lingue . 15
Dowden. Shakspeare 37
Doyen C. Litografia 26
Enciclopedia Hoepli. 16
Erede G. Geom. pratica 20
Errera A. Piccole industrie . . 33
Fabris G. Olii 31
Fadda. Tempera cementazione 39
Falcone C. Anat. topografica 5
Faralli G. Igiene pubblica . . . 22
Fenini C. Letteratura italiana. 25
Ferrari D. Arte (L') del dire . . . 6
Ferrini C. Diritto romano . . . 13
— Il Digesto 12
Ferrini R. Elettricità 15
— Elettricista (Manuale dell') 15
— Energia fisica 16
— Galvanoplastica 19
— Riscaldamento e ventilaz. 33
— Telegrafia 39
Fiorilli C. Omero 31
Foresti A. Mitologia greca. 30
Vol. I Divinità e vol. II Eroi
— Mitologia romana 20
Fornari U. Vernici e lacche . . 41
— Luce e suono 27
— Il calore 9
Foster M. Fisiologia 18
Franceschi G. Cacciatore . . . 8
— Concia pelli 11
— Conserve alimentari 11
Franceschini F. Insetti utili . . 23
— Insetti nocivi 23
Friedmann S. Lingua gotica . 25
Frisc L. Etica 17
— Filosofia morale 18
Fumagalli G. Paleografia 33
— Bibliotecario 8
Fumi F. G. Sanscrito 36
Funaro A. Concimi (I) 11
Gabba L. Chimico (Man. del). 10
— Seta (Industria della) . . . 23
— Adulterazione e falsificazione degli alimenti 3
Gabelsberger-Noe. Stenografia. 38
Gabrielli F. Giuochi ginnastici 21
Gagliardi E. Interesse e sconto 23
Galante A. Ciclista 10
Galassini A. Macchine per cucire e da ricamare 27
Galletti E. Geografia . . . *pag.* 20
Galli-Valerio B. Zoonosi 42
Gallizia P. Resistenza di mater. 35
Gardenghi G. Soc. di Mutuo Socc 37
Garetti A. Notaro (Manuale del) 31
Garnier-Valletti. Pomologia . . 34
Garollo G. Atlante geografico 7
— Atl. geogr.-stor. dell'Italia. 6
— Dizionario geografico . . . 14
— Prontuario di geografia . . 34
Garuffa E. Orologeria 32
— Siderurgia 37
Gaslini A. Prodotti del Tropico. 34
Gatta L. Sismologia 37
— Vulcanismo 42
Gautero G. Macchinista e fuoch. 27
Geikie A. Geografia fisica . . . 20
— Geologia 20
Gelcich E. Cartografia 9
— Ottica 32
Gelli J. Biliardo 8
— Codice cavalleresco 10
— Dizionario filatelico 14
— Duellante 15
— Ginnastica maschile 20
— Scherma 36
Gentile I. Archeologia dell'arte 5
— Geografia classica 20
— Storia antica (Oriente) . . 33
Gestro R. Naturalista viaggiat. 31
— Imbalsamatore 23
Giglioli E. H. Zoologia 42
Gioppi L. Crittografia 12
— Dizionario fotografico . . 14
Giordani G. Propriet. di case . 34
Giorgetti G. Stenografia 38
Giorli E. Disegno industriale. 13
— Meccanico 28
Gitti V. Computisteria 11
— Ragioneria 35
Gladstone W. E. Omero 31
Gnecchi F. Monete romane . . 30
Goffi V. Disegnat. meccanico. 13
Gorini G. Colori e vernici . . . 10
— Concia di pelli 11
— Conserve alimentari 11
— Metalli preziosi 29
— Olii 31
— Piante industriali 33
— Pietre preziose 33
Gorra E. Lingue neo-latine . . 26
— Morfologia italiana 31
Grassi F. Magnetismo 27
Grazzi-Soncini G. Vino (Il) . . . 42

Griffini A. Coleotteri italiani . 10
— Lepidotteri italiani 24
— Ortotteri italiani 32
Grothe E. Filatura, tessitura . 18
Grove G. Geografia 20
Gualta L. Colori e pittura . . . 10
Hoepli U. Enciclopedia 16
Hooker I. D. Botanica 8
Hugues L. Esercizi geografici 17
Imperato F. Attrezzatura navi 7
Inama V. Letteratura greca . . 25
— Grammatica greca 21
— Filologia classica 18
— Esercizi greci 17
Issel A. Naturalista viaggiat. 31
Jacoangeli O. Triangolazioni topografiche e catastali . . . 41
Jenkin F. Elettricità 15
Jevons W. Stanley. Econ. polit. 15
— Logica 27
Jona E. Cavi e telegr. sottomar. 9
Jones E. Calore (II) 9
— Luce e suono 27
Kiepert R. Atlante geogr. univ. 7
— Esercizi geografici 17
Kopp W. Antich. priv. dei Rom. 5
Krühnke G. H. A. Curve 12
La Leta B. M. Cosmografia . . 11
— Gnomonica 21
Lami V. — Vedi Müller 29
Landi D. Disegno di projezioni ortogonali 14
Landi S. Tipografia 40
— Compositore-tipografo . . . 11
Lange O. Letteratura tedesca 25
Leoni B. Lavori di terra 24
Lepetit R. Tintore 40
Levi C. Costruzioni 17
Licciardelli. G. Coniglicoltura pratica 11
Lignarolo M. Macchin. navale. 27
— Doveri del macchinista . . 15
Lioy P. Ditteri italiani 14
Lockyer I. N. Astronomia . . . 6
Lombardini A. Anatomia pitt. 5
Lombroso C. Grafologia 21
Loria L. Curve (Tracc. delle) . . 12
— Macchinista e fuochista . . 27
Loris. Diritto amministrativo 13
— Diritto civile 13
Lovera R. Gramm. greca mod. 21
— Grammatica rumena 22
Maffioli D. Diritti e doveri . . 12
— Scritture d'affari 37
Maggi L. Protistologia . . *pag.* 35
— Tecnica protistologica . . . 39
Malacrida G. Materia medica . 28
— Terapeutica 40
Malfatti B. Etnografia 17
Manetti L. Caseificio 9
Mantovani G. Psicologia fisiologica 35
Marazza E. Industria stearica 23
— Saponeria 36
Marcel C. Lingue straniere . . 26
Marchi E. Porcicoltura 34
Marcilliac F. Letteratura franc. 24
Marcilliac P. Ingegnere civile. 23
Mastrigli L. Cantante 9
— Pianista 33
Mattei C. Volapük (Dizion.) . . 42
Mazzoccolo E. Legge comunale 24
— Legge (Appendice alla) . . 24
Mazzocchi L. Calci e cementi 8
Melani A. Scoltura italiana . . 37
— Architettura italiana . . . 6
— Pittura italiana 34
— Decoraz. e ind. artistiche 12
— Ornatista 32
Mercanti F. Animali parassiti 5
Mina G. Modellatore meccanico 30
Molina R. Esplodenti 17
Moreschi N. Antichità private dei Romani 5
Morgana M. Grammatica olandese 22
Morini U. Manuale dell'ufficiale 41
Muffone G. Fotografia 19
Müller L. Metrica dei Greci e dei Romani 29
Müller O. Logaritmi 26
Murari R. Ritmica 36
Negrin C. Pront. per le paghe . . 32
Nenci T. Bachi da seta 7
Niccoli. Econ. dei fabbr. rurali 15
Olivari G. Filonauta 18
Olmo C. Diritto ecclesiastico. 13
Orlandi G. Celerimensura . . . 9
Ottavi O. Enologia 16
— Viticoltura 42
Ottino G. Bibliografia 8
Pagani C. Assicuraz. sulla vita 6
Paganini A. Letteratura franc. 24
— Letteratura tedesca 25
Palumbo R. Omero 31
Panizza F. Aritmetica razion. 6
— Aritmetica pratica 6
Paoloni P. Disegno assonomet. 13

Paparelli S. Uva passa e frutta 41
Parietti E. Igiene privata . . . 22
Pascal. Tintura seta 40
Pascal E. Calcolo differenziale. 8
— Calcolo integrale 8
— Determinanti 12
— Esercizi 8-16
— Funzioni ellittiche 19
Pasqualis G. Filatura seta. . . 18
Pattacini G. Conciliatore. . . . 11
Pavesi A. Chimica 9
Pavia L. Grammatica tedesca 22
— Grammatica inglese 21
— Grammatica spagnuola . . 22
Pedicino N. A. Botanica 8
Percossi R. Calligrafia 8
Perdoni T. Idraulica. 22
Petri L. Computisteria agraria 11
Petzholdt. Bibliotecario 8
Piazzoli E. Illuminazione elett. 22
Piccinelli F. Valori pubblici . . 41
Piccoli D. V. Telefono. 39
Pilo M. Estetica 17
Pincherle S. Algebra elem. . . 4
— Algebra complementare. I. 4
— Equazioni 16
— Esercizi di geometria . . . 17
— Esercizi sull'algebra complementare 16
— Geom. metrica e trigonom. 20
— Geometria pura 20
Pinchetti P. Tessitore 40
Pizzi I. Letteratura persiana . 25
Poggi T. Aliment. del bestiame 4
Poloni G. Magnetismo ed elet. 27
Pompilio. Panificazione. 33
Porro F. Spettroscopio 37
— Gravitazione 22
Pozzi G. Regolo calcolatore e sue applicazioni 35
Prat G. Gramm. francese. . . . 21
— Esercizi di traduzione . . 17
Proctor R. A. Spettroscopio . . 37
Prout E. Strumentazione. . . . 39
Pucci A. Frutta minori 19
— Piante e fiori. 33
Rabbeno A. Mezzeria 29
Racioppi F. Ordinamento degli Stati liberi d'Europa 32
— degli Stati fuori d'Europa 32
Raina M. Logaritmi 26
Ramorino F. Letterat. romana 25
Regazzoni I. Paleoetnologia . . 38
Repossi A. Igiene scolastica . 22
Restori A. Letter. provenz. *pag.* 25
Revel A. Letteratura ebraica. 24
Ricci A. Marmista. 28
Ricci V. Strumentazione. . . . 39
Righetti E. Asfalto. 6
Roda Fili. Floricoltura 18
Roscoe H. E. Chimica 9
Rossetto V. Arte militare. . . 38
Rossi G. Costruttore navale . 12
Rota G. Ragion. cooperative 35
Sacchetti G. Tecnologia, terminologia monetaria 39
Sanarelli. Igiene del lavoro . . 22
Sansoni F. Cristallografia . . . 12
Santilli. Selvicoltura. 37
Sartori G. Latte, cacio, burro. 24
— Caseificio. 9
Sartori L. Industria della carta 23
Sassi L. Ricettario fotografico 36
— Fotocromatografia 18
Savorgnan. Coltiv. piante tess. 10
Scartazzini G. A. Dantologia. . 12
Schenck E. Travi metallici. 30-41
Scolari C. Dizionario alpino . 14
Secco-Suardo. Rist. dei dipinti. 36
Seghieri A. Scacchi 36
Serina L. Testamenti 40
Sernagiotto R. Enologia 16
Sessa G. Dottrina popolare. . 15
Severi A. Monogrammi. 31
Siber-Millot C. Molini (Ind. del) 30
Solazzi E. Letter. inglese . . . 25
Solerio G. P. Rivoluz. francese 36
Soli G. Didattica 12
Sormani G. Igiene privata. . . 22
Spagnotti P. Verbi greci 41
Spataro D. Fognatura cittadina 18
Stoppani A. Geogr. fisica . . . 20
— Geologia. 20
— Prealpi bergamasche. . . . 34
Stoppato A. Diritto penale. . . 13
Stoppato L. Fonologia italiana 18
Strafforeilo G. Alimentazione. 4
— Errori e pregiudizi 16
— Letteratura americana . . 24
Straticò A. Letteratura albanese 24
Strucchi A. Cantiniere 9
— Enologia. 16
— Viticoltura 42
Tacchini A. Metrologia 29
Tamaro D. Frutticoltura 19
— Gelsicoltura 19
— Orticoltura 32