ŒUVRES

DE

HENRI POINCARÉ

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS
Quai des Grands-Augustins, 55
135022-50

ŒUVRES

DE

HENRI POINCARÉ

PUBLIÉES

SOUS LES AUSPICES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

PAR

LA SECTION DE GÉOMÉTRIE

TOME IV

PUBLIÉ AVEC LA COLLABORATION

DE

GEORGES VALIRON

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

PARIS

GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR

LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Quai des Grands-Augustins, 55

1950

PRÉFACE

Le présent volume des « Œuvres de Henri Poincaré » contient tous les mémoires ou notes relatifs à la théorie *générale* des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables, et à la théorie des fonctions abéliennes ou connexes. On y a joint quelques notes brèves sur les séries trigonométriques, préliminaires aux travaux d'Astronomie qui seront publiés dans les tomes VII et VIII. M. Georges Valiron, professeur à la Faculté des Sciences de Paris, avec sa compétence reconnue dans la théorie des fonctions analytiques, a établi le manuscrit définitif et ajouté une série de notes, destinées à orienter le lecteur vers les développements que ces travaux de Poincaré ont reçus jusqu'ici. Nous lui adressons nos vifs remerciements, comme à la maison Gauthier-Villars, qui assura tous ses soins à l'édition du volume.

Cette édition a été rendue possible grâce à l'aide que nous avons reçue de l'industrie française. A l'appel du Comité Poincaré des « Amis de l'École Polytechnique », elle a répondu généreusement et rapidement, et nous tenons à lui rendre cet hommage dès aujourd'hui. La souscription n'étant pas close, c'est dans la préface du *dernier* volume des *Œuvres*, que nous donnerons la liste complète de nos « bienfaiteurs », c'est-à-dire de tous ceux dont la contribution aura dépassé une importante limite fixée par le Comité. Nous espérons, grâce à eux, réaliser l'édition des Œuvres de Henri Poincaré dans un délai minimum.

Gaston JULIA.

24 juillet 1950.

ANALYSE PURE

DEUXIÈME PARTIE :

THÉORIE DES FONCTIONS

THÉORIE GÉNÉRALE DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE

THÉORIE GÉNÉRALE DES FONCTIONS DE DEUX VARIABLES

FONCTIONS ABÉLIENNES

FONCTIONS DIVERSES

QUESTIONS DIVERSES

ANALYSE

DE SES

TRAVAUX SUR LA THÉORIE GÉNÉRALE DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE

FAITE PAR H. POINCARÉ (¹).

Acta mathematica, t. 38, p. 65-70 (1921).

VI. Théorie générale des fonctions d'une variable.

La Théorie des fonctions d'une seule variable complexe a fait dans ces derniers temps des progrès considérables, grâce aux travaux de M. Weierstrass et de M. Mittag-Leffler.

Ces fonctions peuvent se répartir en trois classes :

1° fonctions uniformes existant dans toute l'étendue du plan ;

2° fonctions uniformes à espaces lacunaires, c'est-à-dire n'existant pas dans toute l'étendue du plan ;

3° fonctions non uniformes.

Parmi les fonctions de la première classe, les plus importantes sont les fonctions entières, c'est-à-dire celles qui peuvent se développer suivant les puissances de x, en séries toujours convergentes. M. Weierstrass a fait voir

(¹) Comme les précédentes, cette analyse, et les suivantes faites en 1901, ne portent que sur les travaux publiés à cette époque. Dans la bibliographie nous avons fait figurer les travaux ultérieurs (numéros au delà du 304).

qu'une pareille fonction peut toujours se décomposer en un produit d'une infinité de facteurs primaires. Un facteur primaire de genre n est le produit $\left(1-\frac{x}{a}\right)e^{P(x)}$, $P(x)$ étant un polynôme entier de degré n. Une fonction de genre n est une fonction entière dont tous les facteurs primaires sont de genre inférieur.

Cette classification des fonctions entières en genres soulève un grand nombre de problèmes intéressants. J'ai voulu contribuer [87] à la solution de ces problèmes en étudiant la manière dont une fonction de genre n se comporte à l'infini et la rapidité avec laquelle décroissent les coefficients de son développement suivant les puissances de x. Je suis arrivé ainsi aux résultats suivants :

1° Si $F(x)$ est une fonction de genre n et si le module de x croît indéfiniment avec un argument tel que $e^{ax^{n+1}}$ tende vers zéro, le produit $F(x)e^{ax^{n+1}}$ tend aussi vers zéro.

2° L'intégrale

$$\int_0^{\infty} e^{(xz)^{n+1}} F(z)\,dz$$

représente une fonction entière de $\frac{1}{x}$.

3° Si A_p est le coefficient de x^p dans le développement de $F(x)$, on a

$$\lim A_p \sqrt[n+1]{p!} = 0 \qquad (\text{pour } p = \infty).$$

4° Si $F(x)$ est une fonction de genre zéro, elle est susceptible d'être représentée par la série d'Abel étudiée par M. Halphen dans le Tome X du *Bulletin de la Société Mathématique de France*, et cela quelle que soit la constante β.

Malheureusement les réciproques de ces propositions ne sont pas toujours vraies. Il est aisé de voir la raison pour laquelle il est impossible de trouver un critère infaillible, donnant les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction soit de genre n. En effet, la classification des fonctions en genres se rattache très étroitement à la théorie de la convergence des séries. Il y a donc toujours, ainsi que l'a montré M. Hadamard, des cas douteux où l'on peut hésiter entre le genre n et $n+1$. Mais M. Hadamard a montré quel parti on peut tirer de ces réciproques malgré les restrictions auxquelles elles sont soumises.

Pour qu'une fonction dont les zéros sont, par ordre de module croissant,

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_p, \quad \ldots,$$

soit de genre n, la première condition et la plus importante, c'est que la série

$$\frac{1}{a_1^{n+1}} + \frac{1}{a_2^{n+1}} + \ldots + \frac{1}{a_p^{n+1}} + \ldots$$

soit convergente. Or il n'y a point de critère de la convergence d'une série pouvant s'appliquer à tous les cas. C'est pour cela qu'il n'y a pas non plus de critère permettant de reconnaître dans tous les cas si une fonction est du genre n.

Outre les fonctions entières, la première classe comprend :

1° les fonctions qui ont des pôles;

2° celles qui ont un nombre fini de points singuliers essentiels;

3° celles qui en ont un nombre infini parmi lesquels on peut trouver des points singuliers isolés (j'appelle ainsi les points singuliers autour desquels on peut tracer un cercle assez petit pour ne contenir aucun autre point singulier);

4° celles qui ont une ligne singulière;

5° celles qui, ayant un nombre infini de points singuliers, mais n'ayant pas de lignes singulières, n'ont cependant pas de points singuliers isolés. (Les Allemands disent alors que les points singuliers forment *eine perfecte Menge*.)

J'ai donné, pour la première fois (¹), un exemple de fonctions de cette dernière catégorie; ce sont les fonctions fuchsiennes qui existent dans toute l'étendue du plan. En appliquant un théorème de M. Picard, on peut voir en effet que ces fonctions ne peuvent avoir des points singuliers isolés.

Passons maintenant à la deuxième classe, celle des fonctions à espaces lacunaires signalées pour la première fois par M. Weierstrass. J'ai été conduit par deux voies différentes [100] à m'occuper de ces fonctions. En premier lieu les fonctions fuchsiennes et kleinéennes n'existent en général qu'à l'intérieur d'un cercle ou d'un domaine plus compliqué; elles me fournissaient donc un exemple de fonctions à espaces lacunaires. Les résultats de ma thèse inaugurale me conduisaient également à des fonctions présentant des lacunes. Si l'on veut bien en effet se reporter au paragraphe que j'ai intitulé *Généralités sur les*

(¹) *Fonctions fuchsiennes.*

équations différentielles et à l'équation (4) de ce paragraphe, on verra que cette équation (4) n'a d'intégrale holomorphe que si le polygone convexe, qui contient tous les points représentatifs des différentes racines d'une certaine équation algébrique, ne contient pas l'origine. Cela ne pourrait pas arriver, si l'intégrale holomorphe de l'équation (4) considérée comme fonction des racines de cette équation algébrique, n'était une fonction à espace lacunaire.

Cette remarque m'a fait découvrir toute une classe de fonctions présentant des lacunes. Voici quel est leur mode de génération. On pose

$$\varphi(x) = \sum \frac{A_n}{x - b_n},$$

en supposant que la série ΣA_n soit absolument convergente et que les points b_n soient intérieurs à un certain domaine D ou situés sur le contour de ce domaine, et cela de telle façon que, si l'on prend sur ce contour un arc quelconque et aussi petit qu'on voudra, il y ait toujours sur cet arc une infinité de points b_n.

La fonction $\varphi(x)$ est alors une fonction uniforme admettant le domaine D comme espace lacunaire. Comme exemple particulier, j'ai cité la série

$$\varphi(x) = \sum \frac{u^m v^n w^p}{x - \dfrac{m\alpha + n\beta + p\gamma}{m+n+p}},$$

où u, v, w sont des constantes données, de module inférieur à 1, où α, β, γ sont des constantes imaginaires quelconques et où m, n et p peuvent prendre sous le signe Σ tous les systèmes de valeurs entières et positives.

La fonction $\varphi(x)$ a alors pour espace lacunaire le triangle $\alpha\beta\gamma$.

Il importe de se rendre compte de la véritable nature de ces fonctions à espaces lacunaires. Il arrive souvent que les développements en séries, à termes rationnels par exemple, sont convergents à la fois à l'intérieur et à l'extérieur de ce domaine et ne divergent que sur le contour même du domaine. Les deux parties du plan où la série converge sont alors complètement séparées par une ligne le long de laquelle le développement cesse d'être valable. Doit-on cependant considérer les deux fonctions représentées par le développement à l'intérieur et à l'extérieur du domaine comme le prolongement analytique l'une de l'autre? Plusieurs géomètres étaient autrefois tentés de le croire. M. Weierstrass a montré pour la première fois que leur point de vue était faux, en donnant des exemples de séries qui représentent dans des domaines différents des fonctions manifestement différentes. J'en ai moi-même rencontré un exemple dont je veux ici dire un mot. Certains développements qui représentent à l'intérieur du cercle fondamental une de ces fonctions que j'ai appelées plus haut théta-fuchsiennes représentent zéro à l'extérieur de ce cercle.

J'ai voulu donner [35] un argument nouveau à l'appui de la manière de voir de Weierstrass. Considérons une fonction $F(x)$ admettant un domaine D comme espace lacunaire, et une autre fonction $F_1(x)$ n'existant au contraire qu'à l'intérieur de ce domaine et admettant par conséquent tout le reste du plan comme espace lacunaire. Divisons le contour du domaine D en deux arcs A et B. J'ai démontré qu'on pouvait trouver deux fonctions uniformes $\Phi(x)$ et $\Phi_1(x)$ existant dans tout le plan et admettant seulement, la première A, la seconde B comme ligne singulière; et cela de telle sorte que

$$\Phi + \Phi_1 = F \qquad (\text{à l'extérieur de D}),$$
$$\Phi + \Phi_1 = F_1 \qquad (\text{à l'intérieur de D}).$$

Si la fonction F avait un prolongement analytique naturel à l'intérieur de D, ce prolongement devrait être F_1; mais nous avons choisi cette fonction F_1 d'une manière tout à fait arbitraire, en l'assujettisant seulement à n'exister qu'à l'intérieur de D. Il est donc dénué de sens de parler du prolongement naturel d'une fonction à l'intérieur d'un de ses espaces lacunaires. J'avais en même temps ramené l'étude des fonctions à espaces lacunaires à celle des transcendantes uniformes à ligne singulière essentielle. Je suis revenu sur la même question dans un Mémoire plus étendu [201].

La Théorie des fonctions non uniformes est loin d'être aussi avancée que celle des fonctions uniformes. J'ai montré d'abord [218] que le nombre de leurs déterminations s'il est infini est la première puissance au sens de Cantor.

Quoiqu'on connaisse assez bien la manière d'être de ces fonctions non uniformes dans le voisinage d'un point donné, quoique l'introduction des surfaces de Riemann ait jeté beaucoup de lumière sur les parties encore obscures de leur théorie, il y a encore bien des progrès à faire avant de connaître leurs principales propriétés. J'étais donc animé du désir de ramener leur étude à celle des transcendantes uniformes. La théorie des fonctions fuchsiennes me rapprochait déjà du but; j'avais démontré, en effet, que si $f(x, y) = 0$ est l'équation d'une courbe algébrique quelconque, on peut choisir un paramètre z de telle façon que x et y soient des fonctions uniformes de ce paramètre. J'avais ainsi résolu le problème pour les plus simples des fonctions non uniformes, c'est-à-dire pour les fonctions algébriques.

J'étais donc [85] naturellement porté à me demander si cette propriété est particulière aux fonctions algébriques, ou si l'on peut l'étendre à une fonction non uniforme quelconque. J'ai pu répondre à cette question et démontrer le théorème très général suivant :

Soit une fonction analytique quelconque de x, non uniforme. On peut toujours trouver une variable z, telle que x et y soient fonctions uniformes de z.

Mon point de départ a été la démonstration du principe de Dirichlet donnée par M. Schwarz. Mais ce principe n'aurait pu à lui seul me permettre de triompher des difficultés qui provenaient de la grande généralité du théorème à démontrer. Il faut d'abord définir la surface de Riemann à une infinité de feuillets dont je cherche à faire, sur une partie du plan, la représentation conforme. Je choisis cette surface de façon qu'elle soit simplement connexe, que tous les points singuliers restent en dehors de la surface proprement dite et se trouvent pour ainsi dire sur sa frontière, et enfin de façon que la fonction y ne puisse prendre deux valeurs différentes en un même point de la surface.

Je découpe une portion finie R de cette surface, et j'en fais sur un cercle la représentation conforme, ce que le théorème de M. Schwarz me permet de faire. Cette représentation se fait à l'aide d'une certaine fonction analytique u. Faisons ensuite croître indéfiniment la région R; nous aurons la représentation conforme d'une portion de plus en plus étendue de notre surface de Riemann. Il me faut alors faire voir que la fonction analytique u dont je parlais plus haut tend vers une limite finie et déterminée. Quand cela est fait, les premières difficultés seules sont vaincues. En effet, il reste à démontrer que la limite de la fonction u est elle-même une fonction analytique. Pour cela, il faut que la fonction analytique u tende *uniformément* vers sa limite (*gleichmässig*), ce que je suis parvenu à démontrer.

Ainsi, l'étude des fonctions non uniformes est ramenée, dans tous les cas possibles, à l'étude bien plus facile des fonctions uniformes.

Je rattacherai à ces recherches, relatives aux fonctions d'une variable, les travaux que j'ai consacrés à l'étude des séries de polynômes [33, 83]. Et en effet, il y a un fait qui joue un rôle très important dans la théorie des fonctions : c'est que les régions où une fonction quelconque peut être représentée par une série de puissances sont limitées par des cercles. On peut donc supposer qu'on pourra tirer un profit analogue de la connaissance des régions où conviennent des développements d'autre forme.

J'ai cherché, en particulier, les conditions de convergence des séries dont le $n^{\text{ième}}$ terme est un coefficient constant multiplié par un polynôme entier $P_n(x)$ de degré n, en supposant qu'il y ait entre un certain nombre de polynômes P_n consécutifs une relation de récurrence. Les séries ordonnées suivant les polynômes de Legendre n'en sont évidemment que des cas particuliers. J'ai trouvé que les régions où ces séries convergent sont limitées par certaines *courbes de convergence* et j'ai déterminé ces courbes en remarquant que la série

$$\Sigma P_n z^n,$$

considérée comme fonction de z, satisfait à une équation différentielle linéaire dont les coefficients sont des polynômes entiers en z et en x.

BIBLIOGRAPHIE SPÉCIALE A LA THÉORIE DES FONCTIONS.

[14] *Sur une propriété des fonctions uniformes* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 92, 1881, p. 1335-1336).

[29] *Sur les transcendantes entières* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 95, 1882, p. 23-26).

[33] (¹) *Sur les séries de polynômes* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 96, 1883, p. 637-639).

[35] *Sur les fonctions à espaces lacunaires* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 96, 1883, p. 1134-1136).

[44] (²) *Sur les courbes définies par les équations différentielles* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 98, 1884, p. 287-289).

[85] *Sur un théorème de la théorie générale des fonctions* (*Bull. Soc. math.*, t. 11, 1883, p. 112-125).

(¹) A été inséré Tome I, p. 223-225.

(²) A été inséré Tome I, p. 87-89.

[87] *Sur les fonctions entières* (*Bull. Soc. math.*, t. 11, 1883, p. 136-144).

[100] *Sur les fonctions à espaces lacunaires* (*Acta Soc. Sc. Fennicæ*, t. 12, 1883, p. 341-350).

[201] *Sur les fonctions à espaces lacunaires* (*American J. of Math.*, t. 14, 1892, p. 201-221).

[218] *Sur une propriété des fonctions analytiques* (*Rend. Circolo mat. Palermo*, t. 2, 1888, p. 197-200).

[345] *Sur l'uniformisation des fonctions analytiques* (*Acta Math.*, t. 31, 1907, p. 1-63).

SUR UNE
PROPRIÉTÉ DES FONCTIONS UNIFORMES

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 92, p. 1335-1336 (6 juin 1881).

Si $F(z)$ est une fonction uniforme de z, il pourra se faire ou qu'elle existe dans tout le plan, ou seulement dans une certaine région que j'appellerai la *région* S; si la fonction existait dans tout le plan, la région S s'étendrait dans tout le plan. A une même valeur de $F(z)$ correspondront une infinité de valeurs de z. Envisageons toutes ces valeurs comme fonctions de l'une d'entre elles que nous appellerons z, et appelons-les

(1) $$f_1(z), \quad f_2(z), \quad \ldots, \quad f_i(z);$$

ces fonctions forment un groupe, et l'on a évidemment

$$F[f_i(z)] = F(z).$$

La région S va se trouver partagée en une infinité de régions

$$R_0, \quad R_1, \quad R_2, \quad \ldots, \quad R_i$$

telles que, si z parcourt la région R_0, $f_i(z)$ parcourra la région R_i : c'est dire que l'on ne pourra, en général, disposer de i de telle façon que le module de $f_i(z) - z$ soit aussi petit que l'on veut.

Nous dirons alors que le groupe (1) est *discontinu*.

A fortiori, tout groupe contenu dans le groupe (1) sera discontinu.

Nous dirons que la fonction uniforme $F(x)$ *admet* le groupe (1); nous dirons aussi qu'elle *admet* tout groupe contenu dans le groupe (1).

En résumé, un *groupe* de fonctions

$$f_1(z), \quad f_2(z), \quad \ldots, \quad f_i(z)$$

sera *discontinu* si l'on peut diviser le plan ou une partie du plan en régions R_0, R_1, ..., R_i, ... telles que $f_i(z)$ parcoure R_i quand z parcourt R_0, et la fonction uniforme $F(z)$ admettra ce groupe si l'on a identiquement

$$F[f_i(z)] = F(z).$$

Cela posé, soit un groupe discontinu quelconque; envisageons les deux séries

$$\Theta(z) = \sum_{i=0}^{i=\infty} H[f_i(z)]\left[\frac{df_i(z)}{dz}\right]^m,$$

$$\Theta_1(z) = \sum_{i=0}^{i=\infty} H_1[f_i(z)]\left[\frac{df_i(z)}{dz}\right]^m.$$

Dans ces deux séries, m est un entier plus grand que 1; H et H_1 sont les algorithmes de deux fonctions rationnelles quelconques.

Ces deux séries seront convergentes sans que leur somme soit altérée quand on change l'ordre des termes; elles définiront deux fonctions uniformes de z, jouissant de la propriété suivante :

$$\Theta[f_i(z)] = \Theta(z)\left[\frac{df_i(z)}{dz}\right]^{-m},$$

$$\Theta_1[f_i(z)] = \Theta_1(z)\left[\frac{df_i(z)}{dz}\right]^{-m}.$$

La fonction

$$\frac{\Theta(z)}{\Theta_1(z)} = F(z)$$

sera donc uniforme et jouira de la propriété suivante

$$F[f_i(z)] = F(z),$$

c'est-à-dire qu'elle admettra le groupe proposé.

Il existe donc une infinité de fonctions uniformes admettant un groupe discontinu donné.

SUR UNE
PROPRIÉTÉ DES FONCTIONS ANALYTIQUES

Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, t. 2, p. 197-200 (1888).
(Extrait d'une lettre adressée à M. G.-B. Guccia, le 27 octobre 1888.)

La lecture de la Note de M. Vivanti dans un des derniers numéros des *Rendiconti* m'a vivement intéressé et m'a inspiré diverses réflexions qu'il ne sera peut-être pas inutile de mettre sous les yeux de vos lecteurs.

D'après M. Vivanti, une fonction multiforme est de la $n^{\text{ième}}$ puissance, si l'ensemble des valeurs qu'elle peut prendre pour une valeur donnée de la variable, est lui-même de la $n^{\text{ième}}$ puissance, au sens de M. Cantor. En particulier, elle sera de la première puissance si elle peut prendre en un point donné une infinité de valeurs susceptibles d'être rangées en une série linéaire

$$y_1, \quad y_2, \quad \ldots, \quad y_n, \quad \ldots$$

de façon que chacune d'elles se trouve dans cette série une fois, et une seule, avec un indice déterminé; si, en d'autres termes, on peut assigner à chacune de ces valeurs un numéro d'ordre. Au contraire une fonction qui pourrait prendre en un point donné, par exemple, toutes les valeurs possibles commensurables ou non, ou encore toutes les valeurs incommensurables, serait de la deuxième puissance.

Je me propose d'établir qu'il n'y a pas de fonction *analytique* multiforme d'une puissance supérieure à la première. Mais pour cela il faut bien s'entendre sur ce qu'on doit appeler fonction analytique.

J'adopterai la définition de M. Weierstrass.

Un élément de fonction analytique sera une série de puissances convergente à l'intérieur d'un certain cercle. Deux éléments de fonctions seront la continuation analytique l'un de l'autre, ou, plus brièvement, seront *dérivés* l'un de l'autre quand les deux cercles de convergence ont une partie commune et que dans cette partie commune les deux séries ont même somme.

Pour construire une fonction analytique, nous partirons d'un élément de fonction F_0 convergent dans un certain cercle C_0. Nous construirons ensuite les divers éléments de fonction F_1 dérivés de F_0; puis les éléments F_2 dérivés des divers éléments F_1; puis les éléments F_3 dérivés de F_2, et ainsi de suite.

L'ensemble des éléments F_1, celui des éléments F_2, etc. sont de la deuxième puissance. Mais il n'est pas nécessaire d'envisager tous ces éléments pour obtenir toutes les déterminations de la fonction.

J'appellerai F'_i ceux des éléments F_i dont le cercle de convergente C'_i aura pour centre un point ayant ses deux coordonnées commensurables.

Il est aisé de vérifier que l'ensemble des éléments F'_1 est de la première puissance (et qu'il en est de même de l'ensemble des éléments F'_{i+1} dérivés d'un élément F_i donné).

On voit aussi sans peine que tout point intérieur à l'un des cercles de convergence C_1 de l'un des éléments F_1 sera aussi intérieur à l'un des cercles de convergence C'_1 de l'un des éléments F'_1.

Tout cercle ayant une partie commune avec l'un des cercles C_1 aura aussi une partie commune avec un des cercles C'_1. Donc, tout élément dérivé de l'un des éléments F_1 sera aussi dérivé de l'un des éléments F'_1. Les divers éléments F_2 sont donc dérivés des divers éléments F'_1; de même les éléments F'_3 seront dérivés des éléments F'_2, etc.

La considération des éléments F'_1, F'_2, F'_3, etc. suffit pour obtenir toutes les déterminations de la fonction. Soit en effet AMB un chemin quelconque allant de la valeur initiale A de la variable à la valeur finale B. Il existera un nombre *fini* d'éléments F_0, F_1, F_2, ... F_n ayant pour cercles de convergence C_0, C_1, C_2, ..., C_n et tels que F_{i+1} soit dérivé de F_i, que le point A soit intérieur à C_0 et le point B à C_n et que l'arc AMB traverse successivement le cercle C_0, la partie commune à C_0 et C_1, le cercle C_1, la partie commune à C_1 et C_2, etc., sans jamais sortir de l'ensemble des $n+1$ cercles C_0, C_1, ..., C_n. Ce n'est qu'à cette condition que la fonction aura une valeur déterminée au point B quand on sera arrivé en ce point par le chemin AMB.

Nous pourrons alors remplacer F_0, F_1, ..., F_n, par $n+1$ éléments F_0, F'_1, ..., F'_n qui en diffèrent assez peu pour que l'arc AMB ne sorte pas de l'ensemble des $n+1$ nouveaux cercles de convergence C_0, C'_1, ..., C'_n.

La considération de ces éléments F'_i suffit donc pour faire connaître la valeur qu'acquiert la fonction quand on a parcouru le chemin AMB.

C. Q. F. D.

L'ensemble des éléments F'_1, F'_2, ..., F'_n etc. est de la première puissance.

En effet, l'ensemble des éléments F'_1, dérivés de F_0, est de la première puissance; donc on peut attribuer à chacun d'eux un numéro d'ordre α_1. L'ensemble des éléments F'_2, dérivés de celui des éléments F'_1 qui a pour numéro d'ordre α_1, sera encore de la première puissance, donc on peut donner à chacun d'eux un numéro d'ordre α_2, et ainsi de suite.

En résumé, un élément F'_n sera défini par n numéros d'ordre

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_n.$$

De sorte que l'ensemble des éléments F'_1, F'_2, ..., F'_n, etc. aura même puissance que l'ensemble des fractions continues limitées

$$\alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{\alpha_n}}},$$

ou que l'ensemble des nombres commensurables, lequel est comme on sait de la première puissance.

C. Q. F. D.

Il suit de là que *l'ensemble des déterminations d'une fonction analytique en un point donné est toujours, au plus, de la première puissance.*

Il n'existe donc pas, par exemple, de fonction analytique qui prenne en un point donné toutes les valeurs possibles commensurables ou non.

SUR LES TRANSCENDANTES ENTIÈRES

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 95, p. 23-26 (3 juillet 1882).

On sait que la découverte des facteurs primaires a jeté une lumière toute nouvelle sur la théorie des transcendantes entières, et a permis de les classer en un certain nombre de genres. D'après cette classification, une fonction du genre zéro est celle dont tous les facteurs primaires sont de la forme $1 - \frac{x}{a}$, et une fonction de genre n est celle dont tous les facteurs primaires sont de la forme $e^{P(x)}\left(1 - \frac{x}{a}\right)$, $P(x)$ étant un polynôme de degré n.

A l'égard de ces transcendantes entières, de genre n, je suis arrivé aux résultats suivants :

I. Soit d'abord une fonction $F(x)$ de genre zéro.

1° Supposons que x croisse indéfiniment en conservant un argument déterminé, et que α soit un nombre tel que

$$\lim e^{\alpha x} = 0;$$

on aura également

$$\lim e^{\alpha x} F(x) = 0,$$

quelque petit que soit le module du nombre α.

2° Considérons l'intégrale définie

$$\int_0^x F(z) e^{\alpha z} dz,$$

l'intégrale étant prise le long d'une droite d'argument tel que la limite de $e^{\alpha x}$

pour $z = \infty$ soit nulle. Cette intégrale définira une fonction $\Phi\left(\frac{1}{x}\right)$ qui est holomorphe en x, sauf pour $x = 0$, c'est-à-dire une fonction *entière* de $\frac{1}{x}$.

3° La fonction $F(x)$ peut se mettre sous la forme

$$\int \frac{\Phi(z)}{z} e^{\frac{1}{z}} dz,$$

l'algorithme $\Phi(z)$ désignant une fonction entière, et l'intégrale étant prise le long d'un contour enveloppant l'origine.

4° Si l'on se reporte maintenant au savant Mémoire de M. Halphen, intitulé *Sur une série d'Abel* et inséré dans un des derniers *Bulletins de la Société mathématique de France*, on reconnaîtra que $F(x)$ peut être représentée par la série d'Abel dont il est question dans ce Mémoire, et cela quelle que soit la constante β.

II. Malheureusement ces propriétés ne sont pas caractéristiques des fonctions du genre zéro; elles appartiennent en outre à quelques fonctions de genre 1, parmi lesquelles je citerai la suivante :

$$\prod_{n=1}^{n=\infty}\left(1 - \frac{x^2}{n^2 \log^2 n}\right).$$

Si plus généralement on envisage le produit infini

$$\Psi(x) = \prod\left(1 - \frac{x^2}{a_n^2}\right),$$

où la suite des nombres a_n est telle que la série $\sum \frac{1}{a_n}$ ne soit pas convergente, mais que cependant la limite de $\frac{a_n}{n}$ pour n infini soit infinie, la fonction $\Psi(x)$ sera de genre 1 et cependant jouira des propriétés énoncées plus haut.

III. Considérons maintenant une fonction $F(x)$ de genre n.

1° Supposons que x croisse indéfiniment en conservant un argument déterminé, et que α soit un nombre tel que

$$\lim e^{\alpha x^{n+1}} = 0;$$

on aura également

$$\lim e^{\alpha x^{n+1}} F(x) = 0,$$

quelque petit que soit le module de α.

2° L'intégrale définie

$$\int_0^{\infty} e^{(xz)^{n+1}} F(z)\, dz,$$

prise le long d'une droite d'argument tel que la limite de $e^{(xz)^{n+1}}$ pour $z = \infty$ soit nulle, représente une fonction entière de $\frac{1}{x}$.

3° Si l'on pose

$$F(x) = \Sigma A_p x^p,$$

et si α est le plus grand entier contenu dans $\frac{p}{n+1}$, on aura

$$\lim A_p \alpha ! = 0, \qquad \text{pour} \quad p = \infty.$$

4° On aura de même

$$\lim A_p \sqrt[n+1]{(p!)} = 0, \qquad \text{pour} \quad p = \infty,$$

et même la série

$$\Sigma A_p \sqrt[n+1]{(p!)}\, x^p$$

représentera une fonction entière.

5° La fonction $F(x)$ peut se mettre sous la forme

$$\int \frac{\Phi(z)}{z} e^{\left(\frac{1}{z}\right)^{n+1}} \frac{\left(\frac{x}{z}\right)^{n+1} - 1}{\frac{x}{z} - 1}\, dz,$$

$\Phi(z)$ désignant une fonction entière et l'intégrale étant prise le long d'un contour enveloppant l'origine.

SUR LES FONCTIONS ENTIÈRES

Bulletin de la Société Mathématique de France, t. II, p. 136-144 (20 juillet 1883).

Lorsqu'une série développée suivant les puissances de x est convergente pour toutes les valeurs de cette variable, elle définit une fonction entière; mais on peut aussi mettre une pareille fonction sous la forme du produit d'une infinité de facteurs primaires, comme le fait M. Weierstrass. Un facteur primaire est une expression de la forme

$$\left(1 - \frac{x}{a}\right) e^{P(x)},$$

$P(x)$ étant un polynôme entier en x, et le facteur est de genre n, si $P(x)$ est de degré n.

Une fonction entière est alors de genre n si elle ne contient que des facteurs de genre n ou de genre inférieur.

Bien des questions se posent au sujet de cette classification des fonctions entières; on peut se demander, par exemple :

1° *Si la somme de deux fonctions de genre n est aussi de genre n;*
2° *Si la dérivée d'une fonction de genre n est aussi de genre n.*

Ces théorèmes, en admettant qu'ils soient vrais, seraient très difficiles à démontrer. Je crois que je serai utile à ceux qui en chercheront plus tard la démonstration en publiant quelques résultats sur la façon dont se comportent à l'infini les fonctions de genre n.

Leurs propriétés à cet égard dépendent, en effet, dans une certaine mesure de leur genre. Par exemple, si l'on considère une fonction entière dont tous les zéros soient réels positifs, et que l'on fasse tendre x vers l'infini par valeurs réelles négatives, la fonction tendra vers l'infini si elle est de genre zéro, et vers zéro si elle est de genre 1. Voici d'autres propriétés analogues :

Considérons une transcendante de genre zéro

$$F(x) = \Pi_\nu \left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right),$$

et supposons que x tende vers l'infini avec un argument déterminé; soit α un nombre, aussi petit que l'on voudra, mais d'argument tel que

$$\lim e^{\alpha x} = 0.$$

Je dis que

$$\lim F(x) e^{\alpha x} = 0.$$

En effet, posons

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu + \ldots$$

($\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ ayant même argument que α), d'où

$$e^{\alpha x} F(x) = \Pi \left[e^{\alpha_\nu x} \left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right) \right].$$

Quelle est la condition pour que le module du facteur

$$e^{\alpha_\nu x} \left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right)$$

reste plus petit que 1 quand x varie de zéro à l'infini en conservant l'argument que nous lui avons attribué? Nous pouvons toujours supposer que $\alpha_\nu x$ est réel et négatif, sans quoi on se bornerait à la partie réelle de $\alpha_\nu x$, la partie imaginaire ne devant rien changer au module.

Cela posé, il faut satisfaire à l'inégalité

$$(1) \qquad \alpha_\nu x + \text{partie réelle } L\left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right) < 0.$$

Or

$$\text{partie réelle } L\left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right) < L\left(1 + \operatorname{mod} \frac{x}{a_\nu}\right) < \operatorname{mod} \frac{x}{a_\nu},$$

de sorte que l'inégalité (1) sera satisfaite si l'on a

$$(2) \qquad \operatorname{mod} \alpha_\nu > \operatorname{mod} \frac{1}{a_\nu}.$$

On peut choisir les α_ν de telle sorte que, pour toutes les valeurs de ν

supérieures à une certaine limite k, cette inégalité soit satisfaite. On a alors

$$e^{\alpha x} F(x) = F_1(x) F_2(x),$$

$$F_1(x) = \prod_{\nu=1}^{\nu=k} \left[e^{\alpha_\nu x} \left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right) \right],$$

$$F_2(x) = \prod_{\nu=k+1}^{\nu=\infty} \left[e^{\alpha_\nu x} \left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right) \right],$$

$$\lim F_1(x) = 0, \qquad \operatorname{mod} F_2(x) \leq 1;$$

d'où

$$\lim e^{\alpha x} F(x) = 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Il résulte de là que l'intégrale définie

$$\int_0^\infty F(z) e^{zx} dz$$

a une valeur finie toutes les fois que le chemin d'intégration est tel que $\lim e^{zx} = 0$. Cette intégrale définit donc une fonction $\Phi\left(\frac{1}{x}\right)$, Φ étant une fonction entière.

Soit

$$F(z) = \Sigma A_m z^m,$$

il viendra

$$\Phi\left(\frac{1}{x}\right) = \sum \frac{(-1)^{m+1} m! A_m}{x^{m+1}},$$

d'où

$$\lim \operatorname{mod}(m! A_m) = 0 \qquad \text{pour} \quad m = \infty.$$

On déduit de là

$$2i\pi F(x) = \int \Phi(-z) e^{\frac{x}{z}} \frac{dz}{z^2},$$

cette intégrale étant prise le long d'un contour entourant l'origine.

Si l'on se reporte maintenant au savant Mémoire de M. Halphen intitulé *Sur une série d'Abel* (¹), on reconnaîtra que $F(x)$, c'est-à-dire une fonction quelconque du genre zéro, peut être représentée par la série d'Abel dont il est question dans ce Mémoire, et cela quelle que soit la constante β.

(¹) *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. X, p. 67.

Malheureusement ce n'est pas là une propriété caractéristique des fonctions de genre zéro. En effet, la fonction

$$F(x) = \prod_{n=1}^{n=\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 L^2 n}\right),$$

qui est du genre 1, jouit de la même propriété.

En effet, je dis que l'on a

$$\lim e^{\alpha x} F(x) = 0,$$

si l'on fait tendre x vers l'infini avec un argument donné et si α est un nombre tel que αx soit réel et négatif. Pour cela, il suffit de faire voir que

$$\lim \frac{F(x)}{\sin i\alpha x} = 0,$$

puisque, dans ces circonstances, on a

$$\lim e^{\alpha x} \sin i\alpha x = \frac{1}{2i}.$$

Or on a

$$\frac{F(x)}{\sin i\alpha x} = \frac{1}{i\alpha x} \Pi \left(\frac{1 - \dfrac{x^2}{n^2 L^2 n}}{1 + \dfrac{\alpha^2 x^2}{n^2 \pi^2}} \right),$$

d'où, si x est assez grand et que ξ soit son module et a celui de α,

$$\operatorname{mod} \frac{F(x)}{\sin i\alpha x} < \Pi \left(\frac{1 + \dfrac{\xi^2}{n^2 L^2 n}}{1 - \dfrac{a^2 \xi^2}{n^2 \pi^2}} \right) = \Pi(H_n);$$

on peut toujours prendre n assez grand pour que

$$\frac{1}{n^2 L^2 n} < \frac{a^2}{n^2 \pi^2},$$

et, par conséquent, pour que le facteur H_n correspondant soit plus petit que 1. Nous poserons alors

$$\prod_{n=1}^{n=\infty} (H_n) = \prod_{n=1}^{n=k} (H_n) \times \prod_{n=k+1}^{n=\infty} (H_n).$$

Nous pourrons prendre k assez grand pour que

$$H_n < 1 \quad \text{quand} \quad n > k.$$

On aura alors

$$\operatorname{mod} \frac{F(x)}{\sin i\alpha x} < \prod_{n=1}^{n=k} (H_n).$$

Mais, quand ξ tend vers l'infini, H_n tend vers

$$G_n = \frac{\pi^2}{\alpha^2 L^2 n};$$

d'où

$$\lim \operatorname{mod} \frac{F(x)}{\sin i\alpha x} < \prod_{n=1}^{n=k} (G_n).$$

Or on peut prendre n assez grand pour que le second membre de cette inégalité soit aussi petit qu'on le veut.

On a donc

$$\lim \operatorname{mod} \frac{F(x)}{\sin i\alpha x} = 0;$$

d'où

$$\lim F(x) e^{\alpha x} = 0.$$

De là on déduit que la fonction $F(x)$ jouit de toutes les propriétés que nous avons démontrées plus haut pour les fonctions entières de genre zéro.

Considérons maintenant une fonction du genre 1 :

$$F(x) = \Pi e^{\xi_q x} (1 - \xi_q x).$$

Je dis que, si α est choisi de telle façon que

$$\lim e^{\alpha x^2} = 0,$$

on aura

$$\lim e^{\alpha x^2} F(x) = 0,$$

En effet, posons encore

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_q + \ldots;$$

nous aurons

$$F(x) e^{\alpha x^2} = \Pi [e^{\alpha_q x^2 + \xi_q x} (1 - \xi_q x)].$$

Quelle est la condition pour que le module du facteur

$$e^{\alpha_\nu x^2+\varepsilon_\nu x}(1-\varepsilon_\nu x) < 1$$

ou pour que

$$(1) \qquad \text{partie réelle}\,(\alpha_\nu x^2 - \varepsilon_\nu x) + \text{partie réelle}\,\mathrm{L}(1-\varepsilon_\nu x) < 0\,?$$

Supposons qu'on ait choisi α_ν de telle façon que, à partir d'une certaine valeur de ν que j'appelle k, 1° $\alpha_\nu x^2$ soit réel et négatif; 2° $\operatorname{mod}\alpha_\nu = h \operatorname{mod}\varepsilon_\nu^2$; h étant une quantité indépendante de ν et que nous allons déterminer. Je dis d'abord qu'on peut choisir h de façon à satisfaire à (1).

En effet, si l'on pose

$$\varepsilon_\nu x = \xi + i\eta,$$

l'inégalité (1) s'écrira

$$h(\xi^2+\eta^2) > \xi + \frac{1}{2}\mathrm{L}[(1-\xi)^2+\eta^2].$$

Je dis qu'on peut prendre h assez grand pour satisfaire à cette inégalité, quels que soient ξ et η.

En effet, la fonction

$$\Phi = \frac{\xi + \frac{1}{2}\mathrm{L}[(1-\xi)^2+\eta^2]}{\xi^2+\eta^2}$$

reste inférieure à une certaine limite, car elle ne pourrait devenir infinie que si ξ ou η tendaient vers l'infini, mais alors la fonction tend vers zéro; ou si ξ et η tendaient vers zéro, mais alors, en posant

$$\xi = \rho\cos\omega, \qquad \eta = \rho\sin\omega,$$

on trouve

$$\Phi = -\frac{\cos 2\omega}{2} - \frac{\rho\cos 3\omega}{3} - \frac{\rho^2\cos 4\omega}{4} - \ldots,$$

qui reste finie. Nous avons donc pour h une limite inférieure finie. C. Q. F. D.

Posons alors

$$\arg\alpha_\nu x^2 = \pi, \qquad \operatorname{mod}\alpha_\nu = h\operatorname{mod}\varepsilon_\nu^2 \qquad (\nu > k),$$

$$\sum_{\nu=k+1}^{\nu=\infty}\alpha_\nu x^2 = \beta x^2.$$

Nous aurons

$$e^{\beta x^2}\mathrm{F}(x) = \mathrm{F}_1(x)\,\mathrm{F}_2(x),$$

$$\mathrm{F}_1(x) = e^{(\alpha-\beta)x^2}\prod_{\nu=1}^{\nu=k} e^{\varepsilon_\nu x}(1-\varepsilon_\nu x),$$

$$\mathrm{F}_2(x) = \prod_{\nu=k+1}^{\nu=\infty} e^{\alpha_\nu x^2+\varepsilon_\nu x}(1-\varepsilon_\nu x).$$

On peut prendre k assez grand pour que la valeur absolue de βx^2 soit aussi petite que l'on veut et, par conséquent, pour que la partie réelle de $(\alpha - \beta)x^2$ soit négative; on aura alors

$$\lim F_1 = 0, \qquad \operatorname{mod} F_2 < 1,$$

d'où

$$\lim e^{\alpha x^2} F(x) = 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

En général, si $F(x)$ est une fonction de genre n, on aura

$$\lim F(x) e^{\alpha x^{n+1}} = 0$$

toutes les fois que

$$\lim e^{\alpha x^{n+1}} = 0.$$

Il suit de là que l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{(xz)^{n+1}} F(z)\, dz$$

représente une fonction $\Phi\left(\frac{1}{x}\right)$, Φ étant une fonction entière.

Posons

$$\int_0^\infty e^{z^{n+1}} z^p\, dz = C_p.$$

Nous aurons, en changeant z en zx,

$$\int_0^\infty e^{(xz)^{n+1}} z^p\, dz\, x^{p+1} = C_p$$

ou

$$\int_0^\infty e^{(xz)^{n+1}} z^p\, dz = \frac{C_p}{x^{p+1}}.$$

En différentiant cette relation, on trouve

$$\int_0^\infty e^{(xz)^{n+1}} z^{n+1} (n+1) x^n z^p\, dz = -\frac{(p+1) C_p}{x^{p+2}}$$

ou, faisant $x = 1$,

$$C_{p+n+1} = \int_0^\infty e^{z^{n+1}} z^{p+n+1}\, dz = -\frac{p+1}{n+1} C_p.$$

Si donc on pose

$$p = a(n+1) + r, \qquad r < n+1,$$

il vient

$$C_p = (-1)^a C_r \frac{(r+1)[(r+1)+(n+1)][(r+1)+2(n+1)]\dots[(r+1)+(a-1)(n+1)]}{(n+1)^a},$$

ou, posant

$$\frac{r-1}{n+1}=s,$$

$$C_p=(-1)^a C_r s(s+1)(s+2)\ldots(s+a-1).$$

Or, quand a tend vers l'infini

$$\lim\frac{s(s+1)(s+2)\ldots(s+a-1)}{1.2\ldots(a-1)}=\infty.$$

Si l'on pose

$$F(z)=\Sigma A_m z^m,\qquad \Phi\left(\frac{1}{x}\right)=\sum\frac{B_m}{x^{m+1}},$$

il vient

$$\operatorname{mod}B_p=\operatorname{mod}C_r\operatorname{mod}A_p s(s+1)(s+2)\ldots(s+a-1),$$

d'où

$$\lim A_p 1.2\ldots(a-1)=0\qquad\text{pour}\quad a=\infty,$$

car

$$\lim B_p=0.$$

Mais, comme on a aussi

$$\lim pB_p=0,$$

on aura

$$\lim aB_p\;=0,$$
$$\lim A_p a!=0.$$

Or nous avons

$$p!<(n+1)^{n+1}[2^{n+1}(n+1)^{n+1}][3^{n+1}(n+1)^{n+1}]\ldots[a^{n+1}(n+1)^{n+1}]p^r,$$
$$p!<(a!)^{n+1}(n+1)^p p^r$$

ou

$$A_p\sqrt[n+1]{p!}<A_p a!(n+1)^{\frac{p}{n+1}}p^{\frac{r}{n+1}}<A_p(a+1)!(n+1)^{\frac{p}{n+1}}p^{\frac{r}{n+1}+1}$$

ou

$$<\left|\frac{B_p}{C_r}\right|\frac{(a+1)!}{s(s+1)\ldots(s+a-1)}(n+1)^{\frac{p}{n+1}}p^{\frac{r}{n+1}+1}<\frac{1}{C_r s}B_p(n+1)^{\frac{p}{n+1}}p^{\frac{r}{n+1}+1},$$

dont la limite est zéro.

Donc

$$\lim A_p\sqrt[n+1]{p!}=0.$$

Ainsi, dans une fonction entière de genre n, le coefficient de x^p multiplié par la racine $n+1^{\text{ième}}$ du produit des p premiers nombres tend vers zéro quand p croît indéfiniment.

SUR LES FONCTIONS A ESPACES LACUNAIRES

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 96, p. 1134-1136 (16 avril 1883).

Dans une Note récente, M. Goursat, généralisant un résultat de M. Picard, a montré qu'une fonction uniforme admettant n coupures *séparées* peut être regardée comme la somme de n fonctions, admettant chacune une seule coupure. Le théorème que j'ai l'honneur de communiquer aujourd'hui à l'Académie est analogue à celui de M. Goursat. Ce qui lui donne peut-être quelque intérêt, c'est qu'il jette une certaine lumière sur le mode d'existence des fonctions à espaces lacunaires.

Considérons le plan des x comme divisé en deux parties par l'axe des quantités réelles. Soit $f(x)$ une fonction n'existant que dans la partie supérieure et étant partout holomorphe dans cette partie; soit $f_1(x)$ une fonction n'existant que dans la partie inférieure et étant partout holomorphe dans cette partie. La moitié inférieure du plan est pour $f(x)$, la moitié supérieure pour $f_1(x)$, un espace lacunaire. Je dis que je pourrai trouver deux fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ jouissant des propriétés suivantes : elles existeront dans tout le plan; la somme $\varphi + \psi$ sera égale à f dans la moitié supérieure du plan et à f_1 dans la moitié inférieure. La fonction φ admettra pour coupure le segment $(-1, +1)$ et la fonction ψ admettra les deux coupures $(-\infty, -1)$ et $(+1, +\infty)$.

En effet, désignons par la notation $F(x)$ une fonction qui sera égale à f dans la partie supérieure du plan et à f_1 dans la partie inférieure. Décrivons sur le segment $(-1, +1)$ comme diamètre une circonférence C qui aura pour centre l'origine et pour rayon l'unité. On démontre aisément qu'on peut toujours trouver deux fonctions entières $G(x)$ et $G'(x)$ telles que

$$F(x)\,\theta(x) = F(x)\left[e^{G\left(\frac{1}{x-1}\right) + G'\left(\frac{1}{x+1}\right)}\right]$$

tende vers zéro quand x tend vers -1 ou vers $+1$ *en suivant la circonférence* C.

Cela posé, si l'on pose $x = \rho e^{i\omega}$ et qu'on fasse $\rho = 1$, $F(x)\theta(x)$ sera une fonction de ω développable par la formule de Fourier, de sorte que

$$F(x)\theta(x) = \Sigma c_m \cos m\omega + \Sigma d_m \sin m\omega.$$

ou bien, en supposant toujours $\rho = 1$,

$$F(x)\theta(x) = \Sigma a_m x^{-m} + \Sigma b_m x^m;$$

posons

$$\varphi(x)\theta(x) = \Sigma a_m x^{-m}, \qquad \psi(x)\theta(x) = \Sigma b_m x^m.$$

Ces développements ne définissent la fonction φ qu'à l'extérieur et la fonction ψ qu'à l'intérieur du cercle C. Mais il est aisé de définir ces fonctions pour toute l'étendue du plan, à l'exception de leurs coupures respectives. Soit, par exemple, à définir la fonction $\varphi(x)$ pour un point x situé dans la moitié supérieure du plan. Soit AMB un arc du cercle C situé tout entier dans la moitié supérieure. Soit BNA ce qui reste de C quand on en a enlevé cet arc AMB. Soit APB un arc de courbe ne coupant pas l'axe des quantités réelles et laissant le point x en dehors; on définira $\varphi(x)$ de la façon suivante : on posera

$$2i\pi\varphi(x)\theta(x) = \int \frac{F(z)\theta(z)\,dz}{z-x},$$

l'intégrale étant prise le long du contour APBNA. On posera ensuite

$$\psi(x) = F(x) - \varphi(x)$$

et les fonctions φ et ψ ainsi définies satisferont aux conditions énoncées.

Il est clair d'ailleurs que ce qui précède s'applique au cas où la fonction $f(x)$, au lieu d'être limitée par l'axe des quantités réelles, admettrait un espace lacunaire quelconque.

Voici le point sur lequel je désirerais attirer l'attention. On pourrait croire qu'il existe une fonction $f_1(x)$ qui serait le prolongement naturel de $f(x)$ dans la moitié inférieure du plan, de telle sorte que, si deux fonctions φ et ψ existant dans tout le plan ont pour somme f dans la moitié supérieure, elles devront avoir pour somme f_1 dans la moitié inférieure. Il n'en est rien; je puis choisir tout à fait arbitrairement les deux fonctions f et f_1; de sorte que f n'a pas à proprement parler de *prolongement naturel* au delà de l'axe des quantités réelles. C'est le résultat auquel conduisait déjà l'étude des développements infinis.

On pourrait se demander ce qui arriverait si l'axe des quantités réelles était pour f et pour f_1 une limite artificielle et non une *limite naturelle*, si, par exemple, on prenait $f = 1$ et $f_1 = 0$. Les coupures des fonctions φ et ψ seraient alors aussi des *coupures artificielles* et, si l'on voulait les prolonger au delà de ces coupures par la série de Taylor, elles cesseraient d'être uniformes.

SUR LES FONCTIONS A ESPACES LACUNAIRES

Acta Societatis scientiarum Fennicæ, t. 12, p. 343-350 (1883).

M. Weierstrass dans un Mémoire intitulé *Zur Funktionenlehre* et inséré dans les *Berliner Monatsberichte* a appelé l'attention des géomètres sur certaines fonctions présentant des singularités spéciales. Au lieu de présenter un nombre fini ou infini de points singuliers essentiels *isolés* elles offrent des lignes singulières essentielles ou même des *espaces lacunaires* à l'intérieur desquels elles cessent d'exister. Dans une lettre à M. Mittag-Leffler, insérée dans les *Acta Societatis Scientiarum Fennicæ* M. Hermite a retrouvé les mêmes résultats par une voie toute différente. D'après les conseils de M. Hermite j'ai entrepris de rechercher de nouveaux exemples de la particularité signalée par les deux savants géomètres.

Il y a une infinité de manières de définir une fonction, et si l'on ne s'imposait *a priori* aucune condition, rien ne serait plus facile que de concevoir une transcendante présentant un espace lacunaire quelconque; on pourrait imaginer par exemple une fonction définie de la manière suivante; elle devrait être égale à 1 à l'extérieur d'un certain cercle, et cesser d'exister à l'intérieur de ce cercle. Ce cercle serait alors un *espace lacunaire*. Si donc on donnait au mot, *fonctions à espaces lacunaires* le sens étendu qu'il semble comporter d'abord, on pourrait en imaginer arbitrairement une infinité. Il est donc nécessaire de préciser ce qu'on doit entendre par cette expression; *fonctions à espaces lacunaires*. C'est ce qui est facile, grâce à une conception nouvelle des fonctions analytiques qui a son origine dans les travaux de Cauchy et que M. Weierstrass a si clairement exposée dans son Mémoire *Zur Functionenlehre* (*Manatsberichte*, août 1880, p. 12).

Considérons une série développée suivant les puissances croissantes de $x - x_0$. Elle sera convergente à l'intérieur d'un certain cercle C_0 ayant pour centre x_0 et pour rayon R. Si l'on ne s'occupait que du développement lui-même, on pourrait considérer la fonction définie par la série comme cessant d'exister à l'extérieur du cercle de convergence, et toute la région du plan extérieure à ce cercle comme formant un espace lacunaire. Ainsi comprise, la fonction à espaces lacunaires ne serait pas une notion analytique nouvelle. Mais il est un moyen bien connu d'étendre au delà du cercle de convergence le domaine où la fonction envisagée existe. Si l'on considère un point x_1 intérieur au cercle de convergence, on pourra par la formule de Taylor développer la fonction en série ordonnée suivant les puissances de $x - x_1$ et convergente à l'intérieur d'un certain cercle C_1. A l'intérieur de C_1, on prendra un point x_2 et l'on développera la fonction en série ordonnée suivant les puissances de $x - x_2$ et convergente à l'intérieur d'un certain cercle C_2. La fonction se trouvera alors définie non seulement à l'intérieur du premier cercle de convergence, mais à l'intérieur de C_1, de C_2, etc.

Pour la plupart des fonctions qui ont été jusqu'ici l'objet des travaux des géomètres, les cercles tels que C_1, C_2, etc., recouvrent tout le plan, soit une fois, soit plusieurs fois, soit une infinité de fois, en laissant seulement de côté certains points isolés, appelés points singuliers. La fonction existe partout, sauf en des points isolés. *Il n'y a pas d'espace lacunaire.*

Mais il n'en est pas toujours ainsi; il peut arriver que les cercles C_1, C_2, etc., laissent de côté non des points isolés, mais toute une ligne, ou même toute une région du plan. M. Weierstrass a le premier mis cette vérité en lumière, et après lui M. Hermite a défini à l'aide d'intégrales multiples définies des transcendantes qui n'ont d'existence que dans un domaine limité.

On pourrait citer un grand nombre d'autres exemples de ce fait analytique. Ainsi l'on sait que les fonctions définies par les séries

$$1 + \frac{1}{2} x^3 + \frac{1}{2^2} x^{3^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} x^{3^n} + \ldots$$

et

$$x\varphi(1) + x^2\varphi(2) + \ldots + x^n\varphi(n) + \ldots$$

[où $\varphi(n)$ représente la somme des puissances premières des diviseurs de n)] n'existent qu'à l'intérieur du cercle qui a pour centre l'origine et pour rayon l'unité. Il en est de même de certaines fonctions que j'ai définies dans une Note insérée aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* de Paris (séances des 14 et 21 février 1881) et que j'ai appelées fonctions fuchsiennes (¹).

Les exemples que je veux étudier spécialement dans la présente Note présenteront les particularités suivantes. Le plan sera divisé en deux régions, l'une extérieure, l'autre intérieure à un certain contour C *convexe*. A l'extérieur du contour la fonction envisagée sera holomorphe et uniforme (et par conséquent finie, continue, monodrome et monogène). A l'intérieur du contour elle cessera d'exister. La région intérieure à C sera un espace lacunaire.

Si x_0 est un point quelconque extérieur à C la fonction sera développable suivant les puissances de $x - x_0$; le cercle de convergence sera tangent extérieurement à C. Réciproquement si (x_0 étant un point quelconque extérieur à C) une fonction est développable suivant les puissances de $x - x_0$, de telle sorte que le cercle de convergence soit tangent extérieurement à C, il est clair que cette fonction offrira un espace lacunaire qui sera la région intérieure au contour C.

Voici maintenant comment je définirai une transcendante jouissant de ces propriétés. Envisageons la série suivante :

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{A_n}{x - b_n} = \varphi(x). \tag{1}$$

Je suppose :

1° que la série

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \operatorname{mod} A_n \tag{2}$$

soit convergente;

2° que tous les points b_n soient intérieurs à C ou sur le contour C lui-même;

3° que si l'on prend sur le contour C un arc quelconque et aussi petit que l'on voudra, il y ait toujours une infinité de points b_n sur cet arc.

Je pose

$$R_p = \sum_{n=p}^{n=\infty} \operatorname{mod} A_n, \qquad S = \sum_{n=0}^{n=\infty} \operatorname{mod} A_n.$$

(¹) *Voir* Tome II, p. 1-7.

La série (2) étant convergente, on pourra prendre p assez grand pour que R_p soit aussi petit que l'on veut.

Je dis d'abord que si x_0 est extérieur à C, la fonction $\varphi(x)$ définie par la série (1) peut se développer en série suivant les puissances de $x - x_0$, et que cette série est convergente à l'intérieur du cercle qui a pour centre x_0 et qui est tangent extérieurement à C. Si en effet R est le rayon de ce cercle, on aura pour tous les points b_n :

$$\operatorname{mod}(b_n - x_0) > R.$$

Posons

$$\operatorname{mod}(x - x_0) = \theta . R.$$

Supposons que x soit intérieur au cercle qui a pour centre x_0 et pour rayon R, on aura

$$\theta < 1.$$

On aura évidemment

$$-\varphi(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \left\{ \sum_{q=0}^{q=\infty} \left[A_n \frac{(x - x_0)^q}{(b_n - x_0)^{q+1}} \right] \right\}.$$

Il est clair :

1° que la série à termes positifs et à double entrée

$$(3) \qquad \sum_{n=0,\ q=0}^{n=\infty,\ q=\infty} \frac{\operatorname{mod} A_n \theta^{q+1}}{\operatorname{mod}(x - x_0)}$$

est convergente;

2° que

$$\operatorname{mod}\left[A_n \frac{(x - x_0)^q}{(b_n - x_0)^{q+1}} \right] < \frac{\operatorname{mod} A_n \theta^{q+1}}{\operatorname{mod}(x - x_0)}.$$

Il en résulte que les séries à double entrée

$$(4) \qquad \sum_{n=0,\ q=0}^{n=\infty,\ q=\infty} \operatorname{mod}\left[A_n \frac{(x - x_0)^q}{(b_n - x_0)^{q+1}} \right]$$

et

$$(5) \qquad \sum_{n=0,\ q=0}^{n=\infty,\ q=\infty} A_n \frac{(x - x_0)^q}{(b_n - x_0)^{q+1}}$$

sont convergentes et que leur somme est indépendante de l'ordre des termes.

La somme de la série (5) sera donc $-\varphi(x)$ quel que soit l'ordre des termes. On aura donc

$$(6) \qquad -\varphi(x) = \sum_{q=0}^{q=\infty} B_q (x - x_0)^q,$$

en posant

$$B_q = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n (b_n - x_0)^{-q-1}.$$

J'ai donc démontré à la fois :

1° que si x est extérieur à C la série (2) est convergente et la fonction $\varphi(x)$ qu'elle définit est holomorphe et uniforme ;

2° que si x est intérieur au cercle qui a pour centre x_0 et pour rayon R et qui est tangent extérieurement à C, la série (6) est convergente.

Je dis maintenant que la série (6) est divergente si x est sur ce cercle ou extérieur à ce cercle et pour le démontrer, je suppose d'abord que x_0 soit sur la normale élevée à C en un des points b_n, au point b_k par exemple.

Je me propose de faire voir que le terme

$$B_q R^q$$

ne tend pas vers zéro quand q tend vers l'infini ; je vais montrer en effet que l'on peut prendre q assez grand pour que

$$\operatorname{mod} R^q [B_q - A_k (b_k - x_0)^{-q-1}] < \varepsilon,$$

quelque petit que soit ε.

Soit p un nombre entier assez grand pour que

$$R_p < \frac{\varepsilon}{2} R.$$

Supposons en même temps

$$p > k.$$

Décrivons du point x_0 comme centre un cercle de rayon R' plus grand que R, mais assez petit pour que tous les points

$$b_0, \quad b_1, \quad b_2, \quad \ldots, \quad b_{k-2}, \quad b_{k-1}, \quad b_{k+1}, \quad b_{k+2}, \quad \ldots, \quad b_p$$

soient extérieurs à ce cercle. On aura

$$\frac{R}{R'} < 1.$$

Soit maintenant q un nombre entier assez grand pour que

$$\frac{S}{R'}\left(\frac{R}{R'}\right)^{q} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

On aura

$$B_q - A_k(b_k - x_0)^{-(q+1)} = \sum_{n=0}^{n=k-1} \frac{A_n}{(b_n - x_0)^{q+1}} + \sum_{n=k+1}^{n=p-1} \frac{A_n}{(b_n - x_0)^{q+1}} + \sum_{n=p}^{n=\infty} \frac{A_n}{(b_n - x_0)^{q+1}}.$$

On aura

$$\begin{aligned} &\operatorname{mod} R^q\left[B_q - A_k(b_k - x_0)^{-(q+1)}\right] \\ &\quad < \operatorname{mod}\left[\sum_{n=0}^{n=k-1} \frac{A_n R^q}{(b_n - x_0)^{q+1}} + \sum_{n=k+1}^{n=p-1} \frac{A_n R^q}{(b_n - x_0)^{q+1}}\right] + \operatorname{mod}\sum_{n=p}^{n=\infty} \frac{A_n R^q}{(b_n - x_0)^{q+1}} \\ &\quad < \sum_{n=0}^{n=k-1} \frac{\operatorname{mod} A_n}{R'}\left(\frac{R}{R'}\right)^{q} + \sum_{n=k+1}^{n=p-1} \frac{\operatorname{mod} A_n}{R'}\left(\frac{R}{R'}\right)^{q} + \sum_{n=p}^{n=\infty} \frac{\operatorname{mod} A_n}{R} < \frac{S}{R'}\left(\frac{R}{R'}\right)^{q} + \frac{R_p}{R} < \varepsilon. \end{aligned}$$

On a donc

$$\lim R^q\left[B_q - A_k(b_k - x_0)^{-q-1}\right] = 0.$$

Or

$$\operatorname{mod} R^q\left[A_k(b_k - x_0)^{-q-1}\right] = \frac{\operatorname{mod} A_k}{R}.$$

Il est donc impossible que $R^q A_k (b_k - x_0)^{-q-1}$ et par conséquent que $R^q B_q$ tende vers zéro.

Supposons maintenant que x_0 ne soit pas sur la normale élevée à C en l'un des points b_n; je dis que la série (6) est encore divergente quand

$$\operatorname{mod}(x - x_0) > R.$$

En effet supposons que cela ne soit pas vrai et que le cercle de convergence ait un rayon R' plus grand que R. Ce cercle de convergence découperait sur le contour C un certain arc sur lequel, par hypothèse, il devrait y avoir une infinité de points b_n. Soit b_k l'un de ces points. Elevons en ce point une normale à C et prenons sur cette normale un point x_1 assez voisin de b_k pour que le cercle K qui passe par b_k et qui a x_1 pour centre soit tout entier intérieur au cercle qui a pour rayon R' et pour centre x_0: cela est évidemment toujours possible. La fonction $\varphi(x)$ pourrait alors se développer en série suivant les puissances de $x - x_1$ et cette série devrait être convergente, non seulement à l'intérieur du cercle K, mais sur la circonférence de ce cercle, ce qui est contraire à ce que je viens de démontrer.

Il est donc démontré que le cercle de convergence de la série (6) est toujours tangent extérieurement à C.

Donc la fonction $\varphi(x)$ est holomorphe et uniforme à l'extérieur de C et présente un espace lacunaire à l'intérieur de ce contour.

Je vais maintenant citer quelques exemples de séries satisfaisant aux conditions imposées à la série (1).

Soit d'abord

$$\varphi(x) = \sum \frac{u_1^{m_1} u_2^{m_2} \ldots u_p^{m_p}}{x - \dfrac{m_1 \alpha_1 + m_2 \alpha_2 + \ldots + m_p \alpha_p}{m_1 + m_2 + \ldots + m_p}}. \tag{7}$$

Je suppose :

1° que $u_1, u_2, \ldots, u_p$ sont des quantités données de module plus petit que 1 ;

2° que $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ sont des constantes quelconques ;

3° que $m_1, m_2, \ldots, m_p$ prennent sous le signe Σ tous les systèmes de valeurs entières positives.

J'envisage le polygone P défini par les conditions suivantes :

1° Il est convexe.

2° Tous ses sommets font partie du système des points $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$.

3° Tous les points $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ qui ne sont pas des sommets du polygone P sont sur le périmètre de ce polygone ou à son intérieur.

Il est clair que :

1° La série

$$\Sigma \bmod (u_1^{m_1} u_2^{m_2} \ldots u_p^{m_p})$$

est convergente.

2° Tous les points

$$\frac{m_1 \alpha_1 + m_2 \alpha_2 + \ldots + m_p \alpha_p}{m_1 + m_2 + \ldots + m_p}$$

sont sur le périmètre de P ou bien à l'intérieur de ce polygone.

3° Sur tout segment, si petit qu'il soit, de l'un des côtés de P, il y a une infinité de points :

$$\frac{m_1 \alpha_1 + m_2 \alpha_2 + \ldots + m_p \alpha_p}{m_1 + m_2 + \ldots + m_p}.$$

Soit en effet $\alpha_1 \alpha_2$ le côté du polygone considéré, il est clair qu'on pourra choisir les entiers positifs m_1 et m_2 (et cela d'une infinité de manières) de telle sorte que le point

$$\frac{m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2}{m_1 + m_2}$$

soit situé sur un segment donné du côté $\alpha_1\alpha_2$.

Il en résulte que la fonction $\varphi(x)$ est holomorphe et uniforme à l'extérieur de P et présente un espace lacunaire à l'intérieur de ce polygone.

Dans le cas où $p = 3$, l'espace lacunaire se réduit au triangle $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$.

Dans le cas où $p = 2$, l'espace lacunaire se réduit à une ligne singulière essentielle qui est le segment de droite $\alpha_1\alpha_2$.

Comme second exemple je citerai la fonction dont voici l'origine.

Soit l'équation aux différences partielles

$$u_1 F_1 \frac{dz}{du_1} + u_2 F_2 \frac{dz}{du_2} + \ldots + u_n F_n \frac{dz}{du_n} = z. \tag{8}$$

F_1, F_2, ..., F_n sont des fonctions des n variables u_1, u_2, ..., u_n et du paramètre x, holomorphes pour toutes les valeurs de x et lorsque les modules de u_1, u_2, ..., u_n sont suffisamment petits. Elles se réduisent respectivement à

$$1, \quad \frac{x-\alpha_2}{x-\alpha_1}, \quad \ldots, \quad \frac{x-\alpha_n}{x-\alpha_1}$$

quand on y annule tous les u.

Dans une thèse que j'ai soutenue devant la Faculté des Sciences de Paris le 1er août 1879 [1], j'ai démontré que si le point x est extérieur au polygone convexe P circonscrit aux n points α_1, α_2, ..., α_n, il existe une série S ordonnée suivant les puissances des u, convergente et satisfaisant à l'équation (8) pourvu que les modules de ces variables soient assez petits. Les coefficients de cette série sont des fonctions rationnelles de x; si l'on donne aux u des valeurs de module suffisamment petit et qu'on les considère comme des constantes, la somme de la série est une fonction de x, et l'on peut voir qu'elle est analogue à la fonction $\varphi(x)$ définie par la série (1) et qu'elle présente comme elle un espace lacunaire. Le polygone P est compris tout entier dans cet espace lacunaire.

---

[1] *Voir* Tome I, p. XLIX-LXXIX.

SUR LES FONCTIONS A ESPACES LACUNAIRES

American Journal of mathematics, t. 14, p. 201-221 (1892).

M. Weierstrass dans un Mémoire intitulé *Zur Funktionenlehre* et inséré dans les *Berliner Monatsberichte* a appelé l'attention des géomètres sur certaines fonctions présentant des singularités spéciales. Au lieu de présenter un nombre fini ou infini de points singuliers essentiels *isolés* elles offrent des lignes singulières essentielles ou même des *espaces lacunaires* à l'intérieur desquels elles cessent d'exister. Dans une lettre à M. Mittag-Leffler, insérée dans les *Acta Societatis Scientiarum Fennicæ* M. Hermite a retrouvé les mêmes résultats par une voie toute différente. D'après les conseils de M. Hermite j'ai entrepris de rechercher de nouveaux exemples de la particularité signalée par les deux savants géomètres.

Il y a une infinité de manières de définir une fonction, et si l'on ne s'imposait *a priori* aucune condition, rien ne serait plus facile que de concevoir une transcendante présentant un espace lacunaire quelconque; on pourrait imaginer par exemple une fonction définie de la manière suivante; elle devrait être égale à 1 à l'extérieur d'un certain cercle, et cesser d'exister à l'intérieur de ce cercle. Ce cercle serait alors un *espace lacunaire*. Si donc on donnait au mot, *fonctions à espaces lacunaires* le sens étendu qu'il semble comporter d'abord, on pourrait en imaginer arbitrairement une infinité. Il est donc nécessaire de préciser ce qu'on doit entendre par cette expression, *fonctions à espaces lacunaires*. C'est ce qui est facile, grâce à une conception nouvelle des fonctions analytiques qui a son origine dans les travaux de Cauchy et que M. Weierstrass a si clairement exposée dans son Mémoire *Zur Functionenlehre* (*Monatsberichte*, août 1880, p. 12).

Considérons une série développée suivant les puissances croissantes de $x - x_0$. Elle sera convergente à l'intérieur d'un certain cercle C_0 ayant pour centre x_0 et pour rayon R. Si l'on ne s'occupait que du développement lui-même, on pourrait considérer la fonction définie par la série comme cessant d'exister à l'extérieur du cercle de convergence, et toute la région du plan extérieure à ce cercle comme formant un espace lacunaire. Ainsi comprise, la fonction à espaces lacunaires ne serait pas une notion analytique nouvelle. Mais il est un moyen bien connu d'étendre au delà du cercle de convergence le domaine où la fonction envisagée existe. Si l'on considère un point x_1 intérieur au cercle de convergence, on pourra par la formule de Taylor développer la fonction en série ordonnée suivant les puissances de $x - x_1$ et convergente à l'intérieur d'un certain cercle C_1. A l'intérieur de C_1, on prendra un point x_2 et l'on développera la fonction en série ordonnée suivant les puissances de $x - x_2$ et convergente à l'intérieur d'un certain cercle C_2. La fonction se trouvera alors définie non seulement à l'intérieur du premier cercle de convergence, mais à l'intérieur de C_1, de C_2, etc.

Pour la plupart des fonctions qui ont été jusqu'ici l'objet des travaux des géomètres, les cercles tels que C_1, C_2, etc., recouvrent tout le plan, soit une fois, soit plusieurs fois, soit une infinité de fois, en laissant seulement de côté certains points isolés, appelés points singuliers. La fonction existe partout, sauf en des points isolés. *Il n'y a pas d'espace lacunaire.*

Mais il n'en est pas toujours ainsi; il peut arriver que les cercles C_1, C_2, etc., laissent de côté non des points isolés, mais toute une ligne, où même toute une région du plan. M. Weierstrass a le premier mis cette vérité en lumière, et après lui M. Hermite a défini à l'aide d'intégrales multiples définies des transcendantes qui n'ont d'existence que dans un domaine limité.

On pourrait citer un grand nombre d'autres exemples de ce fait analytique. Ainsi l'on sait que les fonctions définies par les séries

$$1 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2^2}x^{3^2} + \ldots + \frac{1}{2^n}x^{3^n} + \ldots$$

et

$$x\varphi(1) + x^2\varphi(2) + \ldots + x^n\varphi(n) + \ldots$$

[où $\varphi(n)$ représente la somme des puissances premières des diviseurs de n] n'existent qu'à l'intérieur du cercle qui a pour centre l'origine et pour rayon l'unité. Il en est de même de certaines fonctions que j'ai appelées fuchsiennes.

Les exemples que je veux étudier spécialement dans la présente Note présenteront les particularités suivantes. Le plan sera divisé en deux régions, l'une extérieure, l'autre intérieure à un certain contour C. A l'extérieur du contour la fonction envisagée sera holomorphe et uniforme (et par conséquent finie, continue, monodrome et monogène). A l'intérieur du contour elle cessera d'exister. La région intérieure à C sera un espace lacunaire.

Je supposerai dans ce qui va suivre que la ligne qui limite C ait en chaque point une tangente et un rayon de courbure afin qu'on puisse construire un cercle tangent à cette ligne, ayant son centre en un point quelconque de la partie du plan qui est en dehors de C et de telle façon que ce cercle soit tout entier extérieur à C.

Si x_0 est un point quelconque extérieur à C la fonction sera développable suivant les puissances de $x - x_0$; le cercle de convergence sera tangent extérieurement à C. Réciproquement si (x_0 étant un point quelconque extérieur à C) une fonction est développable suivant les puissances de $x - x_0$, de telle sorte que le cercle de convergence soit tangent extérieurement à C, il est clair que cette fonction offrira un espace lacunaire qui sera la région intérieure au contour C.

Voici maintenant comment je définirai une transcendante jouissant de ces propriétés. Envisageons la série suivante :

$$(1) \qquad \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{A_n}{x - b_n} = \varphi(x).$$

Je suppose :

1° que la série

$$(2) \qquad \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n$$

soit absolument convergente;

2° que tous les points b_n soient intérieurs à C ou sur le contour C lui-même;

3° que si l'on prend sur le contour C un arc quelconque et aussi petit que l'on voudra, il y ait toujours une infinité de points b_n sur cet arc.

Je pose

$$R_p = \sum_{n=p}^{n=\infty} A_n, \qquad S = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n.$$

La série (2) étant absolument convergente, on pourra prendre p assez grand pour que R_p soit aussi petit que l'on veut.

Je dis d'abord que si x_0 est extérieur à C, la fonction $\varphi(x)$ définie par la série (1) peut se développer en série suivant les puissances de $x - x_0$, et que cette série est convergente à l'intérieur du cercle qui a pour centre x_0 et qui est tangent extérieurement à C. Si en effet R est le rayon de ce cercle, on aura pour tous les points b_n,

$$|b_n - x_0| > \mathrm{R}.$$

Posons

$$|x - x_0| = \Theta . \mathrm{R}.$$

Supposons que x soit intérieur au cercle qui a pour centre x_0 et pour rayon R, on aura

$$\Theta < 1,$$

On aura évidemment

$$-\varphi(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \left\{ \sum_{q=0}^{q=\infty} \left[\mathrm{A}_n \frac{(x - x_0)^q}{(b_n - x_0)^{q+1}} \right] \right\}.$$

Il est clair :

1° que la série à termes positifs et à double entrée

$$(3) \qquad \sum_{n=0,\ q=0}^{n=\infty,\ q=\infty} \frac{\mathrm{A}_n \Theta^{q+1}}{(x - x_0)}$$

est absolument convergente ;

2° que

$$\bmod \left[\mathrm{A}_n \frac{(x - x_0)^q}{(b_n - x_0)^{q+1}} \right] < \frac{\bmod \mathrm{A}_n \Theta^{q+1}}{\bmod (x - x_0)}.$$

Il en résulte que la série à double entrée

$$(4) \qquad \sum_{n=0,\ q=0}^{n=\infty,\ q=\infty} \mathrm{A}_n \frac{(x - x_0)^q}{(b_n - x_0)^{q+1}}$$

est absolument convergente et que sa somme est indépendante de l'ordre des termes.

La somme de la série (4) sera donc $-\varphi(x)$ quel que soit l'ordre des termes. On aura donc

$$(5) \qquad -\varphi(x) = \sum_{q=0}^{q=\infty} \mathrm{B}_q (x - x_0)^q,$$

en posant

$$\mathrm{B}_q = \sum_{n=0}^{n=\infty} \mathrm{A}_n (b_n - x_0)^{-(q+1)}.$$

J'ai donc démontré à la fois :

1° que si x est extérieur à C la série (2) est convergente et la fonction $\varphi(x)$ qu'elle définit est holomorphe et uniforme ;

2° que si x est intérieur au cercle qui a pour centre x_0 et pour rayon R et qui est tangent extérieurement à C, la série (5) est convergente.

Je dis maintenant que la série (5) est divergente si x est sur ce cercle ou extérieur à ce cercle et pour le démontrer, je suppose d'abord que x_0 soit sur la normale élevée à C en un des points b_n, au point b_k par exemple.

Je me propose de faire voir que le terme

$$\mathrm{B}_q \mathrm{R}^q$$

ne tend pas vers zéro quand q tend vers l'infini ; je vais montrer en effet que l'on peut prendre q assez grand pour que

$$\operatorname{mod} \mathrm{R}^q [\mathrm{B}_q - \mathrm{A}_k (b_k - x_0)^{-(q+1)}] < \varepsilon,$$

quelque petit que soit ε.

Soit p un nombre entier assez grand pour que

$$\mathrm{R}_p < \frac{\varepsilon}{2} \mathrm{R}.$$

Supposons en même temps

$$p > k.$$

Décrivons du point x_0 comme centre un cercle de rayon R' plus grand que R, mais assez petit pour que tous les points

$$b_0, \quad b_1, \quad b_2, \quad \ldots, \quad b_{k-2}, \quad b_{k-1}, \quad b_{k+1}, \quad b_{k+2}, \quad \ldots, \quad b_p$$

soient extérieurs à ce cercle. On aura

$$\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R}'} < 1.$$

Soit maintenant q un nombre entier assez grand pour que

$$\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{R}'} \left(\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R}'}\right)^q < \frac{\varepsilon}{2}.$$

On aura

$$B_q - A_k(b_k - x_0)^{-q+1} = \sum_{n=0}^{n=k-1} \frac{A_n}{(b_n - x_0)^{q+1}} + \sum_{n=k+1}^{n=p-1} \frac{A_n}{(b_n - x_0)^{q+1}} + \sum_{n=p}^{n=\infty} \frac{A_n}{(b_n - x_0)^{q+1}}.$$

On aura

$$\begin{aligned} &\operatorname{mod} R^q [B_q - A_k(b_k - x_0)^{-q+1}] \\ &\quad < \operatorname{mod} \left[\sum_{n=0}^{n=k-1} \frac{A_n R^q}{(b_n - x_0)^{q+1}} + \sum_{n=k+1}^{n=p-1} \frac{A_n R^q}{(b_n - x_0)^{q+1}} \right] + \operatorname{mod} \sum_{n=p}^{n=\infty} \frac{A_n R^q}{(b_n - x_0)^{q+1}} \\ &\quad < \sum_{n=0}^{n=k-1} \frac{\operatorname{mod} A_n}{R'} \left(\frac{R}{R'}\right)^q - \sum_{n=k+1}^{n=p-1} \frac{\operatorname{mod} A_n}{R'} \left(\frac{R}{R'}\right)^q + \sum_{n=p}^{n=\infty} \frac{\operatorname{mod} A_n}{R} < \frac{S}{R'} \left(\frac{R}{R'}\right)^q + \frac{R_p}{R} < \varepsilon. \end{aligned}$$

On a donc

$$\lim R^q [B_q - A_k(b_k - x_0)^{-q-1}] = 0.$$

Or

$$\operatorname{mod} [R^q A_k (b_k - x_0)^{-q-1}] = \frac{\operatorname{mod} A_k}{R}.$$

Il est donc impossible que $R^q A_k (b_k - x_0)^{-q-1}$ et par conséquent que $R^q B_q$ tende vers zéro.

Supposons maintenant que x_0 ne soit pas sur la normale élevée à C en l'un des points b_n; je dis que la série (5) est encore divergente quand

$$\operatorname{mod}(x - x_0) > R.$$

En effet supposons que cela ne soit pas vrai et que le cercle de convergence ait un rayon R′ plus grand que R. Ce cercle de convergence découperait sur le contour C un certain arc sur lequel, par hypothèse, il devrait y avoir une infinité de points b_n. Soit b_k l'un de ces points. Élevons en ce point une normale à C et prenons sur cette normale un point x_1 assez voisin de b_k pour que le cercle K qui passe par b_k et qui a x_1 pour centre soit tout entier intérieur au cercle qui a pour rayon R′ et pour centre x_0; cela est évidemment toujours possible. La fonction $\varphi(x)$ pourrait alors se développer en série suivant les puissances de $x - x_1$ et cette série devrait être convergente, non seulement à l'intérieur du cercle K, mais sur la circonférence de ce cercle, ce qui est contraire à ce que je viens de démontrer.

Il est donc démontré que le cercle de convergence de la série (5) est toujours tangent extérieurement à C.

Donc la fonction $\varphi(x)$ est holomorphe et uniforme à l'extérieur de C et présente un espace lacunaire à l'intérieur de ce contour.

Je vais maintenant citer quelques exemples de séries satisfaisant aux conditions imposées à la série (1).

Soit d'abord

$$(6) \qquad \varphi(x) = \sum \frac{u_1^{m_1} u_2^{m_2} \cdots u_p^{m_p}}{x - \dfrac{m_1 \alpha_1 + m_2 \alpha_2 + \ldots + m_p \alpha_p}{m_1 + m_2 + \ldots + m_p}}.$$

Je suppose :

1° que $u_1, u_2, \ldots, u_p$ sont des quantités données de module plus petit que 1 ;

2° que $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ sont des constantes quelconques ;

3° que $m_1, m_2, \ldots, m_p$ prennent sous le signe Σ tous les systèmes de valeurs entières positives.

J'envisage le polygone P défini par les conditions suivantes :

1° Il est convexe.

2° Tous ses sommets font partie du système des points $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$.

3° Tous les points $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ qui ne sont pas des sommets du polygone P sont sur le périmètre de ce polygone ou à son intérieur.

Il est clair que :

1° La série

$$\Sigma \operatorname{mod}(u_1^{m_1} u_2^{m_2} \ldots u_p^{m_p})$$

est convergente.

2° Tous les points

$$\frac{m_1 \alpha_1 + m_2 \alpha_2 + \ldots + m_p \alpha_p}{m_1 + m_2 + \ldots + m_p}$$

sont sur le périmètre de P ou bien à l'intérieur de ce polygone.

3° Pour tout segment, si petit qu'il soit, de l'un des côtés de P, il y a une infinité de points

$$\frac{m_1 \alpha_1 + m_2 \alpha_2 + \ldots + m_p \alpha_p}{m_1 + m_2 + \ldots + m_p}.$$

Soit en effet $\alpha_1 \alpha_2$ le côté du polygone considéré, il est clair qu'on pourra choisir les entiers positifs m_1 et m_2 (et cela d'une infinité de manières) de telle sorte que le point

$$\frac{m_1 \alpha_1 + m_2 \alpha_2}{m_1 + m_2}$$

soit situé sur un segment donné du côté $\alpha_1 \alpha_2$.

Il en résulte que la fonction $\varphi(x)$ est holomorphe et uniforme à l'extérieur de P et présente un espace lacunaire à l'intérieur de ce polygone.

Dans le cas où $p = 3$, l'espace lacunaire se réduit au triangle $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$.

Dans le cas où $p = 2$, l'espace lacunaire se réduit à une ligne singulière essentielle qui est le segment de droite $\alpha_1 \alpha_2$.

Comme second exemple je citerai la fonction dont voici l'origine.

Soit l'équation aux différences partielles

$$u_1 F_1 \frac{dz}{du_1} + u_2 F_2 \frac{dz}{du_2} + \ldots + u_n F_n \frac{dz}{du_n} = z. \tag{7}$$

F_1, F_2, ..., F_n sont des fonctions des n variables u_1, u_2, ..., u_n et du paramètre x, holomorphes pour toutes les valeurs de x et lorsque les modules de u_1, u_2, ..., u_n sont suffisamment petits. Elles se réduisent respectivement à

$$1, \quad \frac{x - \alpha_2}{x - \alpha_1}, \quad \ldots, \quad \frac{x - \alpha_n}{x - \alpha_1}$$

quand on y annule tous les u.

Dans une thèse que j'ai soutenue devant la Faculté des Sciences de Paris le 1^{er} août 1879, j'ai démontré que si le point x est extérieur au polygone convexe P circonscrit aux n points α_1, α_2, ..., α_n, il existe une série S ordonnée suivant les puissances des u, convergente et satisfaisant à l'équation (7) pourvu que les modules de ces variables soient assez petits. Les coefficients de cette série sont des fonctions rationnelles de x; si l'on donne aux u des valeurs de module suffisamment petit et qu'on les considère comme des constantes, la somme de la série est une fonction de x, et l'on peut voir qu'elle est analogue à la fonction $\varphi(x)$ définie par la série (1) et qu'elle présente comme elle un espace lacunaire. Le polygone P est compris tout entier dans cet espace lacunaire.

On remarquera que dans la démonstration qui précède, il y a un procédé qui joue un rôle essentiel. On décrit du point x_0 comme centre un cercle avec un rayon R' plus grand que

$$R = |x_0 - b_k|,$$

et cependant assez petit pour que tous les points

$$b_0, \quad b_1, \quad b_2, \quad \ldots, \quad b_{k-2}, \quad b_{k-1}, \quad b_{k+1}, \quad b_{k+2}, \quad \ldots, \quad b_n,$$

c'est-à-dire les points b_n tels que $n \leqq p$, $n \neq k$ soient tous extérieurs à ce cercle, et que

$$\sum_{n=p}^{n=\infty} |A_n| < \frac{\varepsilon}{2} R,$$

la sommation étant ainsi étendue à tous les indices $n > p$.

Les points b_n sont ainsi répartis en deux catégories :

1° ceux pour lesquels $n \leqq p$; *ils sont en nombre fini* et ils sont tous extérieurs au cercle de rayon R' à l'exception d'un seul, le point b_k;

2° ceux pour lesquels $n > p$ qui sont en nombre infini, mais si p est assez grand la somme des modules des coefficients correspondants A_n sera aussi petite qu'on voudra.

C'est sur la possibilité de cette répartition que repose toute la démonstration et c'est pour cette raison qu'elle n'est pas susceptible de diverses généralisations que l'on croirait d'abord possibles.

Soit par exemple dans le plan une courbe fermée C et z un point mobile assujetti à rester sur cette courbe; soit x un point extérieur à la courbe et $f(z)$ une fonction quelconque de z. L'intégrale

$$\int \frac{f(z)\,dz}{z-x}$$

étendue à la courbe fermée C définit une fonction $\varphi(x)$ de x. On pourrait croire que les raisonnements qui précèdent lui sont applicables, à condition que l'intégrale

$$\int |f(z)\,dz|$$

soit finie, et que la fonction $\varphi(x)$ admet l'intérieur de C comme espace lacunaire. Il n'en est rien à cause de l'impossibilité de la répartition dont nous venons de parler. Il est vrai que cette fonction $\varphi(x)$ reste holomorphe à l'extérieur de C, mais non pas que si x_0 est extérieur à C, le cercle de convergence relatif au développement de $\varphi(x)$ suivant les puissances croissantes de $x - x_0$ soit tout entier à l'extérieur de C. Il suffit pour s'en convaincre de se rappeler que si $f(x)$ est une fonction *quelconque* holomorphe à l'extérieur de C et tendant vers zéro quand le point x s'éloigne indéfiniment, l'intégrale

$$\int \frac{f(z)\,dz}{z-x}$$

prise le long de C est précisément égale à $2i\pi f(x)$.

De même si le point z n'est plus assujetti à rester sur la courbe C elle-même mais peut prendre une position quelconque à l'intérieur de cette courbe, si $f(z)$ est une fonction continue quelconque de z et $d\omega$ un élément de l'aire limitée par cette courbe, et que z désigne précisément l'affixe du centre de gravité de $d\omega$, l'intégrale

$$\int \frac{f(z)\,d\omega}{z-x}$$

étendue à l'aire limitée par C représentera une fonction $\varphi(x)$ qui sera holomorphe à l'extérieur de C mais qui n'admettra pas en général la région intérieure à C comme espace lacunaire.

On obtient des résultats analogues dans la théorie du potentiel newtonien. Soient $M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$ un nombre infini de points dont les masses $m_1, m_2, \ldots, m_n$ soient toutes positives. Supposons que la série

$$\Sigma\, m_n$$

soit convergente; que tous ces points attirent un point mobile P de coordonnées x, y et z conformément à la loi de Newton; que tous ces points soient à l'intérieur d'une certaine région R limitée par une surface S; et enfin que sur chaque élément si petit qu'il soit de cette surface S il y ait une infinité de ces points.

Soit alors $V(x, y, z)$ le potentiel de ces points attirants. On verrait alors par un raisonnement tout pareil à celui qui précède, que la fonction V est holomorphe à l'extérieur de R et qu'elle admet cette région R comme espace lacunaire.

Supposons au contraire que nous ayons affaire non pas à des points attirants discrets quoique en nombre infini et infiniment rapprochés les uns des autres, mais à une surface attirante, ou à un volume attirant, il n'en sera plus de même.

Si l'on considère par exemple un volume attirant limité par une surface S sans point singulier et que la densité soit une fonction holomorphe de x, y et z, la fonctions V pourra être prolongée par continuation analytique à l'intérieur du volume attirant.

Supposons en particulier une sphère attirante homogène ayant son centre à l'origine, ayant pour rayon R et pour masse M. Alors on sait que la fonction

$$V = \frac{M}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

loin d'admettre comme espace lacunaire l'intérieur de la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

peut être prolongée par continuation analytique jusqu'au centre même de cette sphère.

Il arrive quelquefois qu'on a à envisager des développements en séries de la forme suivante :

$$\varphi(x) = \Sigma R_n(x),$$

$R_n(x)$ étant rationnelle en x.

Supposons que ce développement soit convergent à l'intérieur d'une certaine courbe C, convergent également à l'extérieur de cette courbe, mais qu'il diverge pour tous les points de la courbe elle-même. Les développements de cette forme ont été étudiés par M. Weierstrass dans le Mémoire que j'ai cité plus haut, ainsi que les diverses circonstances que je vais signaler.

Soit $\varphi_1(x)$ la somme de la série à l'intérieur de la courbe C, $\varphi_2(x)$ la somme de cette même série à l'extérieur de la courbe C. Il peut se faire d'abord que les fonctions $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$ puissent être prolongées, par le procédé de la continuation analytique exposé au début du présent travail, la première à l'extérieur de C, la seconde à l'intérieur de C.

C'est ainsi que par exemple la série de M. Tannery :

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \left[\frac{x^n - 1}{x^n + 1} - \frac{x^{n-1} - 1}{x^{n-1} + 1} \right]$$

a pour somme $+1$ à l'extérieur du cercle

$$|x| = 1$$

et -1 à l'intérieur de ce cercle. Il est clair alors que les fonctions $+1$ et -1 peuvent être prolongées dans tout le plan.

Mais il peut arriver aussi que les fonctions φ_1 et φ_2 admettent comme espace lacunaire, la première l'extérieur de C, la seconde l'intérieur de C. M. Weierstrass cite des exemples de ce fait dans son Mémoire et d'ailleurs plusieurs des développements en séries de la fonction modulaire présentent la même particularité.

Une question se pose alors. Nous avons

$$\varphi_1(x) = \Sigma R_n(x)$$

à l'intérieur de C et

$$\varphi_2(x) = \Sigma R_n(x)$$

à l'extérieur de C. Avons-nous le droit de dire que la fonction φ_1 cesse d'exister à l'extérieur de C et la fonction φ_2 à l'intérieur, ou bien ne devrons-nous pas plutôt considérer les deux fonctions φ_1 et φ_2 comme le *prolongement naturel* l'une de l'autre ?

On en serait d'abord tenté; mais on renoncera à cette manière de voir si l'on réfléchit qu'à ce point de vue, une fonction à espace lacunaire aurait dans cet espace une infinité de prolongements naturels possibles. C'est ce dont on peut se rendre compte par deux raisonnements différents que je vais appliquer à des courbes C particulières mais qu'on pourrait étendre, *mutatis mutandis*, à des courbes C quelconques.

Supposons d'abord que la courbe C soit un cercle.

Soit encore

$$\varphi_1(x) = \Sigma R_n(x), \qquad \varphi_2(x) = \Sigma R_n(x),$$

la première égalité ayant lieu à l'intérieur du cercle, la seconde à l'extérieur. Supposons que les deux fonctions φ_1 et φ_2 ne puissent être prolongées analytiquement au delà du cercle.

J'ai démontré l'existence de certaines fonctions que j'ai appelées fuchsiennes et tétafuchsiennes qui n'existent qu'à l'intérieur du cercle C et pour lesquelles par conséquent la région extérieure à ce cercle est un espace lacunaire. Les fonctions tétafuchsiennes sont susceptibles d'un développement dont les termes sont des fonctions rationnelles de x; je me suis longuement étendu sur ces développements dans mon Mémoire sur les fonctions fuchsiennes (*Acta Mathematica*, t. I) [1].

Soit

$$\Sigma H_n(x) = \Sigma H\left(\frac{\alpha_n x + \beta_n}{\gamma_n x + \delta_n}\right)(\gamma_n x + \delta_n)^{-2m}$$

un de ces développements. Il représentera, en général, à l'intérieur de C une fonction tétafuchsienne qui cessera d'exister à l'extérieur de ce cercle, et à l'extérieur de C il représentera une *autre* fonction tétafuchsienne qui cessera à son tour d'exister à l'intérieur de ce cercle.

---

(1) *Voir* tome II, p. 169-257.

Dans ce développement $H(x)$ est une fonction rationnelle quelconque, m est un entier et $\left(x, \frac{\alpha_n x + \beta_n}{\gamma_n x + \delta_n}\right)$ une substitution quelconque du groupe fuchsien.

Si tous les infinis de $H(x)$ sont à l'extérieur de C, la fonction têtafuchsienne représentée par notre développement à l'intérieur de C n'aura pas d'infinis et, ainsi que je l'ai montré dans le Mémoire cité, on peut d'une infinité de manières choisir H de telle sorte que cette fonction soit identiquement nulle. On aura alors

$$\Sigma H_n(x) = 0 \qquad \text{(à l'intérieur de C)},$$

$$\Sigma H_n(x) = \Theta(x) \quad \text{(à l'extérieur de C)},$$

Θ étant une fonction têtafuchsienne.

Quel serait alors le prolongement naturel de $\varphi_1(x)$ à l'extérieur de C. Comme

$$\varphi_1 = \Sigma R_n,$$

ce prolongement serait la somme de ce développement à l'extérieur de C, c'est-à-dire φ_2.

Mais on a aussi à l'intérieur de C

$$\varphi_1 = \Sigma(R_n + H_n) \qquad \text{puisque} \quad \Sigma H_n = 0.$$

Le prolongement naturel de φ_1 à l'extérieur de C devrait encore être la somme de ce développement $\Sigma(R_n + H_n)$, c'est-à-dire $\varphi_2 + \Theta$.

Ainsi une fonction à espace lacunaire serait susceptible de plusieurs *prolongements naturels*; c'est assez dire qu'il n'y en a aucun qui mérite ce nom.

Mais on peut s'en rendre compte encore d'une autre manière.

Considérons le plan des x comme divisé en deux parties par l'axe des quantités réelles. Soit $f(x)$ une fonction n'existant que dans la partie supérieure et étant partout holomorphe dans cette partie; soit $f_1(x)$ une fonction n'existant que dans la partie inférieure du plan et étant partout holomorphe dans cette partie. La moitié inférieure du plan est pour $f(x)$, la moitié supérieure pour $f_1(x)$, un espace lacunaire.

Je dis alors que je pourrai trouver deux fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ jouissant des propriétés suivantes :

1° Elles existeront dans tout le plan, sauf le long de certaines *coupures*.

2° On aura $\varphi + \psi = f$ dans la moitié supérieure du plan.

3° On aura $\varphi + \psi = f_1$ dans la moitié inférieure.

4° La fonction φ admettra pour coupure le segment de l'axe des quantités réelles compris entre les points $x = -1$ et $x = +1$.

5° La fonction ψ admettra pour coupure les deux autres segments de l'axe des quantités réelles, c'est-à-dire les segments $(-\infty, -1)$ et $(+1, +\infty)$.

S'il en est ainsi, il est clair que si la fonction f avait un *prolongement naturel* dans la moitié inférieure du plan, ce prolongement ne pourrait être que f_1; car les fonctions φ et ψ existent dans tout le plan et le prolongement naturel de f devrait être comme la fonction f elle-même égal à la somme $\varphi + \psi$. Mais f_1 est une fonction *quelconque* assujettie seulement à n'exister que dans la moitié inférieure du plan. Une fonction quelconque pourrait donc être regardée comme le prolongement naturel de f.

Pour démontrer le théorème que je viens d'énoncer, j'ai besoin d'abord d'établir le lemme suivant.

Soit $F(x)$ une fonction que je n'assujettis pas à être analytique, mais qui doit rester finie et continue pour toutes les valeurs *réelles et positives* de x, tout en croissant indéfiniment avec x.

Je dis alors que quelle que soit cette fonction $F(x)$, on pourra toujours trouver une fonction analytique entière $G(x)$ qui croisse assez rapidement pour que le rapport

$$\frac{F(x)}{x\,G(x)}$$

tende vers zéro quand x croît indéfiniment par valeurs réelles positives.

En effet, on peut toujours trouver un nombre positif A_n assez grand pour que la plus grande valeur que prenne le module de $F(x)$ quand x varie de n à $n+1$ soit plus petite que A_n.

On aura alors (pour $n < x < n+1$)

$$|F(x)| < A_n < A_n\left(\frac{x}{n}\right)^{\lambda_n}. \tag{8}$$

Je puis supposer que λ_n est un entier positif plus grand que n et assez grand d'ailleurs pour que

$$A_n < \left(\frac{n}{n-1}\right)^{\lambda_n}. \tag{9}$$

Considérons alors la série

$$G(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n\left(\frac{x}{n}\right)^{\lambda_n}.$$

Je dis d'abord que cette série converge pour toutes les valeurs de x et représente par conséquent une fonction entière. Il vient en effet

$$\sqrt[n]{A_n\left(\frac{x}{n}\right)^{\lambda_n}} = A_n^{\frac{1}{n}}\left(\frac{x}{n}\right)^{\frac{\lambda_n}{n}} < \left(\frac{x}{n-1}\right)^{\frac{\lambda_n}{n}}.$$

Quand n croît indéfiniment $\frac{x}{n-1}$ tend vers zéro et comme $\frac{\lambda_n}{n}$ est plus grand que 1 il en sera de même de $\left(\frac{x}{n-1}\right)^{\frac{\lambda_n}{n}}$.

La série est donc convergente.

Je dis ensuite que pour les valeurs réelles et positives de x, on a

$$F(x) \quad G(x).$$

En effet tous les termes de la série $G(x)$ sont positifs, et l'inégalité (8) prouve qu'il y a toujours un de ces termes qui est plus grand que $|F(x)|$.

Il est clair alors que

$$\lim \frac{F(x)}{x\,G(x)} = 0 \qquad (\text{pour } x = \infty). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

On peut tirer de ce lemme divers corollaires. Comme $G(x)$ est une fonction entière dont les termes sont tous positifs et contiennent des puissances de x dont l'exposant dépasse toute limite, on aura quand x croîtra indéfiniment par valeurs réelles positives

$$\lim \frac{x^m}{G(x)} = 0, \qquad \lim \frac{G^m(x)}{e^{G(x)}} = 0,$$

et par conséquent

$$\lim F(x)\,e^{-G(x)} = 0.$$

Je dis maintenant que si $F(x)$ est finie pour les valeurs réelles de x tant positives que négatives et suffisamment grandes en valeur absolue, on pourra trouver une fonction entière $G(x)$ telle que

$$\lim F(x)\,e^{-G(x)} = 0,$$

quand x croît indéfiniment par valeurs *réelles* soit positives, soit négatives.

Soient en effet $F_1(x^2)$ la plus grande des deux quantités $|F(x)|$ et $|F(-x)|$, ce sera évidemment par définition même une fonction paire de x, c'est-à-dire ne changeant pas quand on change x en $-x$.

On pourra alors d'après le lemme qui précède trouver une fonction $G_1(x^2)$ telle que

$$\lim F_1(x^2)\, e^{-G_1(x^2)} = 0$$

pour $x^2 = +\infty$ (x^2 réel positif).

Si alors $G_1(x^2) = G(x)$ on aura

$$\lim F(x)\, e^{-G(x)} = 0$$

pour $x = \pm\infty$ (x réel, positif ou négatif).

Comme les valeurs que prend $F(x)$ quand $|x|$ est suffisamment grand, influent évidemment seules sur cette limite, il suffit pour que le lemme soit vrai que $F(x)$ soit fini pour les valeurs réelles de x suffisamment grandes, il suffit par exemple que $F(x)$ ne devienne infini que pour un nombre fini de valeurs réelles de x.

Considérons maintenant la circonférence

$$|x| = 1,$$

décrite sur le segment $(-1, +1)$ comme diamètre et supposons que sur cette circonférence que j'appellerai C pour abréger la fonction $F(x)$ n'ait qu'un nombre fini d'infinis parmi lesquels le point $x = +1$.

Je dis qu'on pourra trouver une fonction entière $G(x)$ telle que

$$\lim F(x)\, e^{-G\left(i\frac{x+1}{x-1}\right)} = 0$$

quand x tendra vers 1 en suivant la circonférence.

Posons en effet

$$y = i\frac{x+1}{x-1}.$$

Si x est sur la circonférence C, y sera réel; si x tend vers 1 en suivant l'une des moitiés de la circonférence, y tend vers $+\infty$; si x tend vers 1 en suivant l'autre moitié, y tend vers $-\infty$. Si nous posons $F(x) = F_1(y)$, la fonction F_1 n'admettra qu'un nombre fini d'infinis *réels*. Alors on pourra trouver une fonction $G(y)$ telle que

$$\lim F_1(y)\, e^{-G(y)} = 0 \qquad (\text{pour } \lim y = \pm\infty),$$

on en déduira par conséquent

$$\lim F(x)\, e^{-G\left(i\frac{x+1}{x-1}\right)} = 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

De même, alors même que $F(x)$ deviendrait infinie pour $x = -1$, on pourra trouver une fonction entière $G'(x)$ telle que

$$\lim F(x) e^{-G'\left(i\frac{x-1}{x+1}\right)} = 0,$$

quand x tend vers -1 en suivant la circonférence.

Ces corollaires établis, venons à la question qui nous occupe.

Nous désignerons par $F(x)$ une fonction qui sera égale à $f(x)$ dans la moitié supérieure du plan et à $f_1(x)$ dans la moitié inférieure. Sur la circonférence que j'ai appelée C, la fonction $F(x)$ ainsi définie ne pourra avoir que deux infinis, $x = +1$ et $x = -1$.

On pourra alors construire les deux fonctions entières

$$G\left(i\frac{x+1}{x-1}\right) \quad \text{et} \quad G'\left(i\frac{x-1}{x+1}\right)$$

que je viens de définir.

Soit alors

$$\theta(x) = e^{-G\left(i\frac{x+1}{x-1}\right)-G'\left(i\frac{x-1}{x+1}\right)} = e^{-G-G'}.$$

On voit que $\theta(x)$ est une fonction de x holomorphe dans tout le plan et n'admettant d'autres points singuliers que deux points singuliers essentiels $x = 1$ et $x = -1$.

Je dis maintenant que

$$\lim F(x)\theta(x) = 0,$$

quand x tend vers -1 ou vers $+1$ *en suivant la circonférence* C.

En effet

$$F\theta = F e^{-G} e^{-G'}.$$

Si x tend vers $+1$, Fe^{-G} tend vers zéro et $e^{-G'}$ vers une limite finie; si x tend vers -1, $Fe^{-G'}$ tend vers zéro et e^{-G} vers une limite finie.

Soit donc

$$x = e^{i\omega},$$

ω étant réel; x est alors sur la circonférence C; le produit $F(x)\theta(x)$ peut ainsi être regardée un instant comme une fonction de ω. Cette fonction est analytique sur tout arc de la circonférence C qui ne contient ni le point $x = +1$, ni le point $x = -1$, et quand x se rapproche indéfiniment de l'un de ces deux points elle tend vers zéro. Elle est donc développable par la formule de Fourier et je puis écrire

$$F\theta = \Sigma c_m \cos m\omega + \Sigma d_m \sin m\omega,$$

ou bien encore

$$F\theta = \Sigma a_m e^{-mi\omega} + \Sigma b_m e^{mi\omega} \qquad (a_0 = 0)$$

les coefficients a_m et b_m étant des constantes qu'il est aisé de calculer. On a en effet

$$2\pi a_m = \int_0^{2\pi} F\theta e^{mi\omega} d\omega,$$

$$2\pi b_m = \int_0^{2\pi} F\theta e^{-mi\omega} d\omega.$$

Considérons les deux développements

$$\varphi(x)\theta(x) = \Sigma a_m x^{-m},$$
$$\psi(x)\theta(x) = \Sigma b_m x^m.$$

Le premier de ces deux développements est convergent à l'extérieur de la circonférence C et sur la circonférence elle-même, mais diverge à l'intérieur de cette circonférence; le second développement au contraire converge à l'intérieur de C et sur la circonférence elle-même, mais diverge à l'extérieur de C.

Sur la circonférence elle-même, on a

$$\varphi(x)\theta(x) + \psi(x)\theta(x) = \Sigma a_m x^{-m} + \Sigma b_m x^m = F(x)\theta(x)$$

et par conséquent

$$\varphi(x) + \psi(x) = F(x).$$

Pour reconnaître si cette égalité a encore lieu pour les valeurs de x qui n'appartiennent pas à cette circonférence, il faut chercher à prolonger analytiquement $\varphi(x)$ à l'intérieur de C et $\psi(x)$ à l'extérieur de C.

Nous avons

$$2\pi i a_m = i\int_0^{2\pi} F\theta e^{mi\omega}\, d\omega = \int F\theta x^{m-1} dx,$$

$$2\pi i b_m = i\int_0^{2\pi} F\theta e^{-mi\omega} d\omega = \int F\theta x^{-m-1} dx,$$

les intégrales étant étendues à la circonférence C tout entière. Si je désigne alors pour éviter toute confusion par la lettre z un point de la circonférence C et par la lettre x un point n'appartenant pas à cette circonférence, il viendra

$$2i\pi a_m = \int F(z)\theta(z)z^{m-1}dz; \qquad 2i\pi b_m = \int F(z)\theta(z)z^{-m-1}dz,$$

et par conséquent si x est extérieur à C

$$2i\pi\varphi(x)\theta(x) = 2i\pi\Sigma a_m x^{-m} = \int F(z)\theta(z)\Sigma z^{m-1}x^{-m}dz,$$

ou enfin

$$2i\pi\varphi(x)\theta(x) = \int \frac{F(z)\theta(z)dz}{x-z};$$

et si x est au contraire intérieur à C,

$$2i\pi\psi(x)\theta(x) = 2i\pi\Sigma b_m x^m = \int F(z)\theta(z)\Sigma z^{-m-1}x^m dz$$

ou

$$(10) \qquad 2i\pi\psi(x)\theta(x) = \int \frac{F(z)\theta(z)dz}{z-x}.$$

Toutes ces intégrales doivent être prises le long de C.

Ces intégrales ne définissent encore les fonctions φ et ψ, la première qu'à l'extérieur de C seulement et la seconde qu'à l'intérieur de C seulement.

Mais on peut modifier le contour d'intégration.

Je représente sur la figure 1 l'axe des quantités réelles AOB, l'axe des quantités imaginaires DOE, et la circonférence BNEMAM'DN'B qui n'est autre chose que la circonférence C. Le point A est le point $x=-1$ et le point B est le point $x=+1$.

Joignons deux points M et N de la moitié supérieure de C par un arc de courbe quelconque MPN restant tout entier dans la moitié supérieure du cercle limité par C. Joignons de même deux points M' et N' de la moitié inférieure par un arc de courbe M'P'N'.

On peut remplacer le contour d'intégration C par le contour BNPMAM'P'N'B que j'appellerai C'. Je dis que si x est extérieur à C, on aura encore

$$2i\pi\varphi(x)\theta(x) = \int \frac{F(z)\theta(z)dz}{x-z},$$

l'intégrale étant prise le long de C', ou en d'autres termes que l'intégrale

$$(11) \qquad \int \frac{F(z)\theta(z)dz}{x-z}$$

prise le long de C' est égale à cette même intégrale prise le long de C.

Il suffit de montrer que cette même intégrale prise le long du contour NEMPN ou le long du contour N′P′M′DN′ est nulle.

En effet $F(z)\theta(z)$ est holomorphe sauf sur l'axe des quantités réelles, $\frac{1}{x-z}$ est holomorphe sauf pour $z = x$. Si donc x est extérieur à C, la fonction sous signe $\int$ sera holomorphe tant à l'intérieur du contour NEMPN qu'à l'intérieur du contour N′P′M′DN′; ce qui démontre la proposition énoncée.

Mais l'intégrale (11) prise le long de C′, définit une fonction de x qui reste holomorphe pour tous les points extérieurs à C′, et comme on peut rapprocher les deux arcs MPN et M′P′N′ autant que l'on veut de la droite AOB, on peut

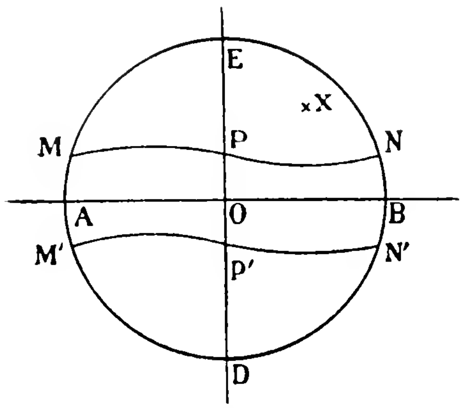

Fig. 1.

définir ainsi la fonction $\varphi(x)$ pour toutes les valeurs de x sauf pour le segment AOB, c'est-à-dire pour le segment $(-1, +1)$ qui sert de diamètre à la circonférence C.

La fonction $\varphi(x)$ ainsi définie est holomorphe sauf pour les points qui appartiennent à ce segment $(-1, +1)$.

Je me propose maintenant de démontrer qu'on aura pour un point x intérieur à C

$$\varphi(x) - \psi(x) = F(x).$$

Supposons en effet que le point x vienne en X, c'est-à-dire à l'intérieur du contour NEMPN. L'expression $-2i\pi\psi(x)\theta(x)$ sera égale à l'intégrale (11) prise le long de C; l'expression $2i\pi\theta(x)\varphi(x)$ sera égale à l'intégrale (11) prise le long de C′. Par conséquent l'expression

$$-2i\pi\theta(\varphi - \psi)$$

sera égale à l'intégrale (11) prise le long de NEMPN qui est égale à

$$-2i\pi F(x)\theta(x)$$

en vertu du théorème de Cauchy, plus l'intégrale (11) prise le long de N'P'M'DN' qui est nulle en vertu du même théorème; il vient donc

$$\varphi + \psi = F. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

On définirait de la même manière la fonction $\psi(x)$ à l'extérieur de C. Il suffit pour cela de prendre l'intégrale (10) le long d'un contour C″ formé en remplaçant les arcs NEM et M'DN' de la circonférence par deux arcs de courbe quelconques NQM et N'Q'N' situés en dehors de C et ne coupant pas l'axe des quantités réelles. On pourra alors choisir ces deux arcs de courbe de telle façon que le point x quel qu'il soit se trouve à l'intérieur de C″.

L'intégrale (10) prise le long de C″ est alors égale à $2i\pi\psi(x)\theta(x)$, ce qui définit la fonction $\psi(x)$.

On verrait aussi que $\psi(x)$ est holomorphe dans tout le plan et qu'elle n'admet d'autres singularités que deux coupures qui sont les deux segments $(-\infty, -1)$ et $(+1, +\infty)$.

On démontrerait d'ailleurs par un raisonnement identique à celui qui précède que l'on a à l'extérieur de C

$$\varphi + \psi = F.$$

Cette égalité a donc lieu dans tout le plan; c'est-à-dire qu'on aura

$$\varphi(x) + \psi(x) = f(x)$$

dans la moitié supérieure du plan et

$$\varphi(x) + \psi(x) = f_1(x)$$

dans la moitié inférieure. C. Q. F. D.

Les fonctions φ et ψ ne sont d'ailleurs pas les seules qui jouissent de cette propriété. Si en effet $\lambda(x)$ est une fonction de x n'ayant d'autre point singulier que deux points singuliers essentiels $+1$ et -1, la fonction $\varphi(x) + \lambda(x)$ n'aura d'autre singularité qu'une coupure $(-1, +1)$ et la fonction $\psi(x) - \lambda(x)$ n'aura d'autre singularité que deux coupures $(-\infty, -1)$ et $(+1, +\infty)$.

On aura d'ailleurs dans tout le plan

$$[\varphi(x) + \lambda(x)] + [\psi(x) - \lambda(x)] = F(x).$$

SUR UN THÉORÈME

DE LA

THÉORIE GÉNÉRALE DES FONCTIONS

Bulletin de la Société Mathématique de France, t. 11, p. 112-125 (18 mai 1883).

Voici le théorème que je me propose de démontrer :

Soit y une fonction analytique quelconque de x, non uniforme. On peut toujours trouver une variable z telle que x et y soient fonctions uniformes de z.

Pour démontrer ce résultat, je me servirai du beau théorème de M. Schwarz (*Monatsberichte*, octobre 1870), connu sous le nom de *Principe de Dirichlet*. Voici quel en est l'énoncé :

Appelons ξ et η les parties réelle et imaginaire de x.

Étant donné un contour quelconque C sur un plan ou sur une surface de Riemann, on peut toujours trouver une fonction u de ξ et de η qui satisfasse à l'équation

$$\Delta u = \frac{d^2 u}{d\xi^2} + \frac{d^2 u}{d\eta^2} = 0,$$

qui reste holomorphe à l'intérieur de C et qui prenne des valeurs données le long de C.

Je dirai qu'une fonction u devient logarithmiquement infinie au point $\xi = a$, $\eta = b$ quand la différence

$$u - \mathrm{L}\sqrt{(\xi - a)^2 + (\eta - b)^2}$$

reste holomorphe dans le voisinage de ce point.

En vertu du théorème de M. Schwarz, on pourra aussi trouver une fonction u qui satisfera à l'équation $\Delta u = 0$, qui prendra des valeurs données le long de C et qui restera holomorphe à l'intérieur de C, à l'exception de un ou plusieurs points donnés où elle deviendra logarithmiquement infinie.

Formation de la surface de Riemann S.

Considérons m fonctions de x,

$$(1) \qquad y_1, \; y_2, \; \ldots, \; y_m,$$

analytiques, non uniformes en général. Ces fonctions seront complètement définies lorsque l'on connaîtra, non seulement la valeur de x, mais encore le chemin par lequel la variable x a atteint cette valeur en partant du point initial O.

Nous considérerons la variable x comme se mouvant non sur un plan, mais sur une surface de Riemann S. Cette surface sera formée de feuillets plans superposés comme dans les surfaces de Riemann, à l'aide desquelles on étudie les fonctions algébriques : seulement ici le nombre des feuillets sera infini.

Traçons dans le plan un contour fermé quelconque C partant d'un point initial x quelconque et revenant finir à ce même point x. La surface S sera complètement définie, si nous disons à quelles conditions le point initial et le point final de ce contour devront être regardés comme appartenant à un même feuillet ou à des feuillets différents.

Or il y a deux sortes de contours C :

1° Ceux qui sont tels que l'une au moins des m fonctions y ne revient pas à sa valeur initiale quand la variable x décrit le contour C;

2° Ceux qui sont tels que les m fonctions y reviennent à leurs valeurs initiales quand la variable x décrit le contour C.

Parmi les contours de la deuxième sorte, je distinguerai encore deux espèces :

1° C sera de la première espèce, si l'on peut, en déformant ce contour d'une façon continue, passer à un contour infinitésimal de telle façon que le contour ne cesse jamais d'être de la seconde sorte;

2° C sera de la seconde espèce dans le cas contraire.

Eh bien, le point initial et le point final de C appartiendront à des feuillets différents si ce contour est de la première sorte, ou de la seconde espèce de la seconde sorte. Ils appartiendront au même feuillet si C est de la première espèce de la seconde sorte (*voir* Note I, à la fin du Mémoire).

La surface de Riemann est alors complètement définie. Elle est simplement connexe et ne diffère pas, au point de vue de la Géométrie de situation, de la surface d'un cercle, d'une calotte sphérique ou d'une nappe d'un hyperboloïde à deux nappes.

Définition des contours C.

Notre surface de Riemann S étant simplement connexe, nous pourrons y tracer une infinité de contours C s'enveloppant mutuellement et enveloppant le point O. Par chacun des points de la surface S (excepté par le point O) passera un de ces contours C et un seul.

Voici, d'ailleurs, comment on peut se rendre compte de la disposition de ces contours C. Considérons un cercle K ayant pour centre le point O et de rayon assez petit pour que les m fonctions y soient holomorphes à l'intérieur de ce cercle et même sur sa circonférence. On tracera ensuite une infinité de cercles C intérieurs et concentriques à K. Des différents points de la circonférence de K comme centres nous décrirons des cercles K' assez petits pour que les fonctions y restent holomorphes à l'intérieur de chacune d'eux et sur sa circonférence. Soit K_1 la portion de l'enveloppe des cercles K' qui est extérieure à K. La portion des cercles K' qui est extérieure à K recouvrira une région annulaire limitée par K et K_1, et l'on pourra sillonner cette région d'une infinité de contour C s'enveloppant mutuellement et enveloppant K.

Des divers points de K_1 comme centres, nous décrirons des cercles K'' assez petits pour que les fonctions y restent holomorphes à l'intérieur de chacun d'eux et sur sa circonférence. Soit K_2 la portion de l'enveloppe des cercles K'' qui est extérieure à K_1. La portion des cercles K'' qui est extérieure à K_1 couvrira une région annulaire limitée par K_1 et K_2, et l'on pourra sillonner cette région d'une infinité de contours C s'enveloppant mutuellement et enveloppant K_1, et ainsi de suite. On voit qu'on aura construit ainsi une infinité de contours fermés C, tels que par chaque point de la surface S passe un de ces contours et un seul.

Parmi ces contours C, j'en choisirai une infinité

$$C_1, \quad C_2, \quad \ldots, \quad C_n, \quad \ldots$$

tels que C_{n+1} enveloppe C_n et que tout point de la surface de Riemann soit intérieur à un des contours C_n.

Définition de la fonction y_m.

Soient k le module d'une fonction elliptique, K et K′ ses périodes.

Définissons l'algorithme φ par la relation suivante :

$$\frac{K'}{K} = \varphi(k^2).$$

On sait que la fonction φ est holomorphe, sauf pour

$$k^2 = 0, \qquad k^2 = 1, \qquad k^2 = \infty,$$

et qu'elle ne peut prendre que des valeurs dont la partie imaginaire est positive.

Soit ψ une fonction de x définie par l'équation

$$\psi = \frac{\varphi\left(\dfrac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\right) - \sqrt{-1}}{\varphi\left(\dfrac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\right) + \sqrt{-1}}.$$

La fonction ψ a son module constamment plus petit que 1, et elle est holomorphe, sauf pour (*voir* Note II, à la fin du Mémoire)

$$x = -\frac{\beta}{\alpha}, \qquad x = -\frac{\delta}{\gamma}, \qquad x = \frac{\delta - \beta}{\alpha - \gamma}.$$

Je supposerai de plus que β et δ aient été choisis de telle sorte que

$$\varphi\left(\frac{\beta}{\delta}\right) = \sqrt{-1},$$

de telle façon que ψ s'annule pour $x = 0$.

Je supposerai que la fonction y_m, la dernière du Tableau (1), soit précisément ψ. Si cela n'était pas, et si ψ ne faisait pas partie du Tableau (1), on l'y adjoindrait.

Posons maintenant

$$t = \log \bmod \frac{1}{\psi}.$$

La fonction t satisfera à l'équation $\Delta t = 0$. Elle sera essentiellement positive, et elle deviendra logarithmiquement infinie au point O et en divers autres points de la surface S, points que nous appellerons O_1, O_2, ...

Définition des fonctions u_n.

J'appellerai u_n une fonction qui est assujettie à satisfaire à l'équation $\Delta u_n = 0$, à s'annuler le long du contour C_n et à rester holomorphe à l'intérieur de ce contour, sauf au point O où elle devient logarithmiquement infinie.

Pour étudier les propriétés de cette fonction, je m'appuierai sur le théorème suivant, bien connu :

Si une fonction u satisfait à l'équation $\Delta u = 0$, si elle est positive le long d'un contour C; si de plus, en tous les points intérieurs à ce contour, elle est ou holomorphe ou logarithmiquement infinie, elle sera positive en tous les points intérieurs au contour C.

De là, on déduit que les fonctions u_n, $u_{n+1} - u_n$ et $t - u_n$ sont positives à l'intérieur du contour C_n.

Ainsi, en un point quelconque de la surface de Riemann S, la fonction u_n est constamment croissante avec n et constamment plus petite que t. Elle tend donc vers une limite finie u quand n croît indéfiniment.

En d'autres termes, la série

$$u = u_1 + (u_2 - u_1) + \ldots + (u_{n+1} - u_n) + \ldots \tag{2}$$

est convergente.

Emploi des fonctions t_i.

Cette démonstration ne s'appliquerait pas aux points O_1, O_2, ..., où la fonction t devient infinie pendant que u_n reste finie. En effet, t devenant infinie, nous n'aurions plus de limite supérieure pour u_n. Considérons, par exemple, le point O_i et de ce point comme centre décrivons un cercle K_i ne contenant aucun point singulier. On pourra construire une fonction t_i qui satisfera à l'équation $\Delta t_i = 0$, qui deviendra égale à t le long de K_i, et qui sera holomorphe à l'intérieur de ce cercle. Cela posé, la fonction $t_i - u_n$ sera positive à l'intérieur de K_i; par conséquent, même au point O_i, nous aurons une limite supérieure de u_n, qui sera t_i.

Continuité de la fonction u.

Il faut démontrer maintenant que u est une fonction continue de ξ et de η. Pour cela, je m'appuierai sur le théorème suivant, facile à démontrer :

Si u est fonction de ξ et de η qui, à l'intérieur d'un cercle K *de rayon* R, *satisfait à l'équation $\Delta u = 0$ et reste constamment comprise entre zéro et* A (A *étant une constante positive*), *ses dérivées $\frac{du}{d\xi}$ et $\frac{du}{d\eta}$ à l'intérieur d'un cercle k de rayon r et concentrique à* K *resteront plus petites en valeur absolue que $\frac{4AR^2}{(R-r)^2}$.*

Considérons donc deux cercles concentriques quelconques K et k ne contenant aucun point singulier. Soit A la plus grande valeur que puisse prendre la fonction u à l'intérieur de K, nous aurons à l'intérieur de k (et cela quel que soit n)

$$\left|\frac{du_n}{d\xi}\right| < \frac{4AR^2}{(R-r)^2} > \left|\frac{du_n}{d\eta}\right|.$$

Considérons maintenant deux points x' et x'', situés à l'intérieur de k, et soient u'_n et u''_n, u' et u'' les valeurs correspondantes de u_n et de u. Je dis que l'on pourra prendre la distance ρ des points x' et x'' assez petite pour que l'on ait

$$|u' - u''| < \varepsilon,$$

quelque petit que soit ε.

En effet, nous aurons, quel que soit n,

$$|u'_n - u''_n| < \frac{4AR^2\sqrt{2}}{(R-r)^2}\rho.$$

Nous pourrons donc toujours prendre ρ assez petit pour que l'on ait, quel que soit n,

$$|u'_n - u''_n| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Les points x' et x'' sont alors déterminés. Nous pourrons prendre alors n assez grand pour que

$$|u' - u'_n| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad |u'' - u''_n| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

On aura alors

$$u' - u'' < \varepsilon.$$

C. Q. F. D.

Ainsi u est une fonction continue de ξ et de η.

Uniformité de la convergence.

Nous avons vu que la série (2) est convergente, mais cela ne suffirait pas pour ce que nous avons en vue: il faut encore faire voir qu'elle est uniformément convergente (*gleichmässig*). En d'autres termes, il faut montrer qu'autour de chacun des points de la surface de Riemann S on peut trouver une région P jouissant de la propriété suivante; on pourra prendre n assez grand pour que la différence $u - u_n$ reste plus petite que ε à l'intérieur de la région P, et cela quelque petit que soit ε. Pour cela, il suffit de montrer qu'on peut toujours prendre n assez grand pour que la différence $u_{n+p} - u_n$ reste plus petite qu'une quantité donnée ε pour tous les points de P et quel que soit le nombre positif p.

En effet, prenons pour région P un carré intérieur au cercle k, et dont les côtés soient parallèles aux axes des ξ et des η.

Soit l le côté du carré. Partageons le carré P en h^2 carrés égaux par $h - 1$ parallèles équidistantes menées à chacun de ces côtés; les côtés de ces petits carrés seront $\frac{l}{h}$. Considérons un quelconque de ces petits carrés; soient x' le centre de ce petit carré et x'' un point quelconque intérieur à ce même petit carré; on aura

$$\operatorname{mod}(x' - x'') < \frac{l}{h\sqrt{2}}.$$

Soient u', u''; u'_n, u''_n; u'_{n+p}, u''_{n+p} les valeurs correspondantes de u, u_n et u_{n+p}; je dis qu'on peut prendre n assez grand pour que

$$u''_{n+p} - u''_n < \varepsilon.$$

Cela suffira pour démontrer le théorème énoncé, puisque x'' est un point quelconque du carré P.

On aura évidemment, quels que soient n et p,

$$u''_{n+p} - u''_n - u'_{n+p} + u'_n < \frac{8\,\mathrm{A}\,\mathrm{R}^2}{(\mathrm{R} - r)^2}\,\frac{l}{h}.$$

On pourra donc prendre le nombre entier h assez grand pour que l'on ait, quels que soient n et p,

$$|u''_{n+p} - u''_n - u'_{n+p} + u'_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Le nombre h est désormais déterminé. Formons la somme des h^2 quantités u'_n, $\Sigma u'_n$: elle aura évidemment pour limite $\Sigma u'$; on pourra donc prendre n assez grand pour que

$$\Sigma u' - \Sigma u'_n < \frac{\varepsilon}{2}.$$

On aura alors

$$u'_{n+p} - u'_n < u' - u'_n < \Sigma(u' - u'_n) < \frac{\varepsilon}{2}$$

et, enfin,

$$u''_{n+p} - u''_n < \varepsilon. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

La série (2) est donc uniformément convergente.

Propriété de la fonction u.

Je dis que la fonction u satisfait à l'équation $\Delta u = 0$ et est holomorphe si ce n'est au point O. En effet, considérons un contour c quelconque intérieur à P. La fonction u étant continue, nous pourrons construire une fonction U holomorphe à l'intérieur de c et satisfaisant aux condition suivantes :

$$\Delta U = 0 \quad (\text{à l'intérieur de } c), \qquad U = u \quad (\text{le long de } c).$$

Nous pourrons toujours prendre n assez grand pour que $u - u_n$ reste plus petit que ε le long de c. On aura alors

$$U - u_n < \varepsilon$$

le long de c et, par conséquent, à l'intérieur de c. On aura donc

$$U = \lim u_n \qquad \text{pour} \quad n = \infty$$

ou

$$U = u.$$

Il suit de là que la fonction u est holomorphe comme U et satisfait à l'équation $\Delta u = 0$.

La démonstration précédente ne s'appliquerait pas au cas où l'un des points O_i se trouverait à l'intérieur du cercle K, car alors la fonction t deviendrait infinie à l'intérieur de ce cercle; mais on tournerait la difficulté en remplaçant t par t_i. Il n'y aurait rien d'ailleurs à changer aux démonstrations précédentes, il n'y aurait qu'à changer partout t en t_i. Ainsi la fonction u est holomorphe, même aux points O_1, O_2, ...

On démontrerait de même que la fonction u devient logarithmiquement infinie au point O.

Considérons un cercle K' de rayon R' intérieur au carré P, et un cercle k' de rayon r' intérieur et concentrique à K'. On pourra toujours prendre n assez grand pour que

$$u - u_n < \varepsilon$$

pour tous les points intérieurs à K'. On aura alors, à l'intérieur de k',

$$\left|\frac{du}{d\xi} - \frac{du_n}{d\xi}\right| < \frac{4\varepsilon R'^2}{(R'-r')^2} > \left|\frac{du}{d\eta} - \frac{du_n}{d\eta}\right|.$$

Donc on peut prendre n assez grand pour que les valeurs absolues des différences $\frac{du}{d\xi} - \frac{du_n}{d\xi}$ et $\frac{du}{d\eta} - \frac{du_n}{d\eta}$ soient plus petites qu'une quantité donnée α pour tous les points intérieurs à k'.

Considérons maintenant une région quelconque G : je dis qu'on pourra prendre n assez grand pour que les inégalités

$$\left|\frac{du}{d\xi} - \frac{du_n}{d\xi}\right| < \alpha > \left|\frac{du}{d\eta} - \frac{du_n}{d\eta}\right| \tag{3}$$

subsistent pour tous les points de G. En effet, nous pourrons décomposer la région G en un nombre fini de régions partielles assez petites pour que chacune d'elles soit contenue dans un cercle tel que k'; alors nous pourrons prendre n assez grand pour que, dans chacune de ces régions partielles, les inégalités proposées soient satisfaites. En donnant à n la plus grande des valeurs ainsi obtenues, les inégalités auront lieu dans toute la région G.

En d'autres termes, les séries

$$\frac{du_1}{d\xi} + \left(\frac{du_2}{d\xi} - \frac{du_1}{d\xi}\right) + \ldots + \left(\frac{du_{n+1}}{d\xi} - \frac{du_n}{d\xi}\right) + \ldots,$$

$$\frac{du_1}{d\eta} + \left(\frac{du_2}{d\eta} - \frac{du_1}{d\eta}\right) + \ldots + \left(\frac{du_{n+1}}{d\eta} - \frac{du_n}{d\eta}\right) + \ldots$$

sont *uniformément convergentes* et ont pour sommes $\frac{du}{d\xi}$ et $\frac{du}{d\eta}$.

Définition des fonctions v et v_n.

Nous définirons les fonctions v et v_n par les équations

$$\frac{dv}{d\xi} = -\frac{du}{d\eta}, \qquad \frac{dv}{d\eta} = \frac{du}{d\xi},$$

$$\frac{dv_n}{d\xi} = -\frac{du_n}{d\eta}, \qquad \frac{dv_n}{d\eta} = \frac{du_n}{d\xi}.$$

Ces équations sont compatibles à cause des relations

$$\Delta u = \Delta u_n = 0.$$

Nous achèverons de définir les fonctions v et v_n en leur imposant de s'annuler pour un certain point A de la surface S, différent du point O. Les fonctions v et v_n, si M est le point (ξ, η), seront alors définies par les intégrales

$$v = \int_A^M \left(\frac{du}{d\xi} d\eta - \frac{du}{d\eta} d\xi\right), \qquad v_n = \int_A^M \left(\frac{du_n}{d\xi} d\eta - \frac{du_n}{d\eta} d\xi\right).$$

Reprenons la région G, et appelons L le plus grand chemin qu'il faut parcourir sur la surface S pour aller du point A à un point quelconque de G; supposons qu'on ait pris n assez grand pour que les inégalités (3) soient satisfaites; on aura alors

$$|v - v_n| < 2\alpha L,$$

ce qui prouve que la série

$$v_1 + (v_2 - v_1) + \ldots + (v_{n+1} - v_n) + \ldots$$

est uniformément convergente et a pour somme v.

Définition des fonctions z et z_n.

Nous poserons

$$z = e^{-(u+iv)}, \qquad z_n = e^{-(u_n+iv_n)}.$$

Les fonctions v et v_n n'étaient pas entièrement déterminées, car, selon le chemin que l'on prend pour aller de A en M, les valeurs de v, par exemple, peuvent différer d'un multiple de 2π. Si, par exemple, on revient au point A après avoir tourné k fois autour du point O, on a

$$v - v_n = 2k\pi.$$

Au contraire, les fonctions z et z_n sont parfaitement déterminées. On aura

$$\frac{dz}{dx} = \left(-\frac{du}{d\xi} + i\frac{du}{d\eta}\right)e^{-u-iv}, \qquad \frac{dz_n}{dx} = \left(-\frac{du_n}{d\xi} - i\frac{du_n}{d\eta}\right)e^{-(u_n+iv_n)}$$

ou, en posant $u + iv = \omega$, $u_n + iv_n = \omega_n$,

$$z = e^{-\omega}, \qquad z_n = e^{-\omega_n}, \qquad \frac{dz}{dx} = -\frac{d\omega}{dx}e^{-\omega}, \qquad \frac{dz_n}{dx} = -\frac{d\omega_n}{dx}e^{-\omega_n}.$$

Nous pouvons prendre n assez grand pour qu'à l'intérieur de la région G on ait à la fois

$$|z - z_n| < \varepsilon, \qquad \left|\frac{d\omega}{dx} - \frac{d\omega_n}{dx}\right| < \alpha,$$

α et ε étant deux quantités données.

Je dis que si l'on considère un point de G où

$$z \neq a,$$

on pourra prendre n assez grand pour que

$$\left|\frac{\dfrac{dz}{dx}}{z-a} - \frac{\dfrac{dz_n}{dx}}{z_n - a}\right| < \delta,$$

δ étant une quantité donnée. En effet, on aura identiquement

$$\frac{\dfrac{dz}{dx}}{z-a} - \frac{\dfrac{dz_n}{dx}}{z_n-a} = \frac{\dfrac{d\omega_n}{dx} - \dfrac{d\omega}{dx}}{1 - \dfrac{a}{z}} + a\frac{d\omega_n}{dx}\,\frac{z - z_n}{(z-a)(z_n-a)};$$

d'où, si n est assez grand,

$$(1) \qquad \left|\frac{\dfrac{dz}{dx}}{z-a} - \frac{\dfrac{dz_n}{dx}}{z_n-a}\right| < \frac{\alpha}{\operatorname{mod}\left(1 - \dfrac{a}{z}\right)}$$
$$+ \operatorname{mod} a\left(\operatorname{mod}\frac{d\omega}{dz} + \alpha\right)\frac{\varepsilon}{\operatorname{mod}(z-a)[\operatorname{mod}(z-a) - \varepsilon]}.$$

Et il est évident qu'on peut prendre ε et α assez petits pour que le second membre soit aussi petit que l'on veut.

Propriétés des fonctions z et z_n.

Il est évident, d'après la définition de la fonction z_n, que cette fonction ne peut prendre qu'une seule fois la même valeur à l'intérieur du contour C_n. Si donc on prend l'intégrale

$$\int \frac{\frac{dz_n}{dx}\,dx}{z_n - a},$$

le long d'un contour fermé intérieur à C_n, on aura pour résultat zéro ou $2i\pi$.

Je dis maintenant que la fonction z ne peut prendre deux fois la même valeur. Supposons, en effet, qu'elle prenne la valeur a en deux points B et C; on pourrait toujours construire une région G contenant les points B et C, et ne contenant ni le point O, ni aucun point (autre que B et C) où la fonction z devienne égale à a. On pourrait alors trouver une limite supérieure du module de $\frac{d\omega}{dz}$ et une limite inférieure du module de $z - a$ quand le point x est assujetti à rester sur le périmètre de G; soient λ et μ ces deux limites. On aura aussi

$$\operatorname{mod}\left(1 - \frac{a}{z}\right) > \mu,$$

puisque le module de z est essentiellement plus petit que 1.

On aura donc, en désignant par L la longueur du périmètre de G et en nous reportant à l'inégalité (4),

$$\left|\left(\int \frac{\frac{dz}{dx}}{z - a} - \frac{\frac{dz_n}{dx}}{z_n - a}\right) dx\right| < \left[\frac{\alpha}{\mu} + \operatorname{mod} a(\lambda + \alpha)\frac{\varepsilon}{\mu(\mu - \varepsilon)}\right] L,$$

l'intégrale étant prise le long du périmètre de G.

Il s'ensuit qu'on peut prendre n assez grand pour que la valeur absolue de la différence des deux intégrales

$$\int \frac{\frac{dz}{dx}}{z - a}\,dx, \quad \int \frac{\frac{dz_n}{dx}}{z_n - a}\,dx$$

soit aussi petite que l'on veut; or cela est absurde, puisque, si n est assez grand pour que le contour C_n enveloppe G, la première intégrale devrait être égale à $4i\pi$ et la seconde à $2i\pi$ ou à zéro.

L'hypothèse faite au début doit donc être rejetée, et, par conséquent, la fonction z ne peut prendre qu'une seule fois la même valeur. A une valeur de z ne pourra donc correspondre qu'un seul point de la surface S, et par conséquent un seul système de valeurs des fonctions y_1, y_2, ..., y_m, x, puisque la surface S a été construite de telle façon que ces fonctions ne puissent avoir qu'une seule valeur en chacun des points de cette surface.

Il résulte de là que y_1, y_2, ..., y_m et x sont des fonctions uniformes de z. C. Q. F. D.

NOTE I.

Il résulte de la manière dont cette surface S a été construite qu'autour de chaque point singulier viennent s'échanger une infinité de feuillets. Nous ne regarderons pas un point singulier comme faisant partie de la surface de Riemann, mais seulement de sa frontière; ainsi, quand nous dirons plus loin que tout point de la surface de Riemann est intérieur à l'un des contours C_n, il va sans dire que tous les points singuliers restent en dehors de tous les contours C_n.

Il résulte, en outre, de la façon dont la surface a été construite, que x et que les fonctions y, leurs intégrales, les intégrales de leurs intégrales, etc., ne peuvent prendre qu'une seule valeur en chacun des points de la surface S.

NOTE II.

Les points $-\frac{\beta}{\alpha}$, $-\frac{\delta}{\gamma}$ et $\frac{\delta-\beta}{\alpha-\gamma}$, étant des points singuliers, sont en dehors de la surface de Riemann.

SUR

L'UNIFORMISATION DES FONCTIONS ANALYTIQUES

Acta mathematica, t. 31, p. 1-63 (1907).

I. — Introduction.

Dans un Mémoire intitulé *Sur un théorème de la théorie générale des fonctions* (*Bull. Soc. math. de France*, t. 11, 1883) [1], j'ai démontré que plusieurs fonctions analytiques d'une même variable indépendante peuvent toujours être égalées à des fonctions *uniformes* d'une même variable.

La question a été reprise par M. Osgood, puis par M. Johansson : *Ueber die Uniformisirung Riemann'scher Flächen mit endlicher Anzahl Windungspunkte* (*Acta Societatis Scientiarum Fennicæ*, t. 33, n° 7) et enfin dans un intéressant travail de M. Brodén, *Bemerkungen über die Uniformisirung analytischer Funktionen* (*Lund, Berlingsche Buchdruckerei*, 1905) que nous aurons l'occasion de citer plus loin.

Mon premier Mémoire laissait subsister plusieurs questions non résolues.

1° Pour tout point de la surface de Riemann, pour lequel les fonctions données existent, les fonctions uniformisantes se comportent régulièrement. Il y a exception pour trois de ces points qui constituent ce que M. Hilbert appelle des *Ausnahmsstellen*. Cette difficulté a été signalée de nouveau par M. Hilbert dans sa Communication au Congrès des mathématiciens de Paris en 1900.

Elle tient à ce qu'on introduit une fonction auxiliaire, inverse d'une fonction fuchsienne et que pour ces trois points, cette fonction auxiliaire n'existe pas. Il est possible de l'écarter, et cela de deux manières; d'abord en remplaçant la

[1] *Voir* ce tome IV, p. 57.

fonction auxiliaire par une autre, également inverse d'une fonction fuchsienne et qui ne présente pas le même inconvénient; c'est ce que je fais plus loin au paragraphe IV; l'autre manière consiste à se passer complètement de fonction auxiliaire, c'est ce que je fais aux paragraphes XIII et XIV.

2° Mes procédés permettaient bien de démontrer que l'on pouvait faire la représentation conforme de ma surface de Riemann sur une aire intérieure à un cercle; mais on ne voyait pas que ce fût possible sur un cercle; M. Osgood a écarté cette difficulté; nous aurons néanmoins à y revenir au paragraphe VIII.

3° On n'était pas certain que cette façon d'uniformiser les fonctions fût la plus simple de toutes; on était même certain du contraire par l'exemple des fonctions fuchsiennes. L'introduction de la fonction auxiliaire, arbitraire dans une large mesure, donnait à la solution un caractère artificiel dont il convenait de se débarrasser, et pour cela il fallait démontrer que toute surface de Riemann, simplement connexe, est représentable soit sur un cercle, soit sur une sphère pointée (ou ce qui revient au même sur le plan tout entier).

Le problème n'est autre chose que le problème de Dirichlet appliqué à une surface de Riemann à une infinité de feuillets. Malheureusement les procédés ordinaires ne sont pas toujours applicables pour deux raisons : 1° parce que le domaine auquel on veut l'appliquer n'est pas une aire plane à un seul feuillet, mais est formé de plusieurs feuillets superposés; 2° parce que les frontières de ce domaine ne sont pas nettement délimitées et que souvent même on ne peut pas les atteindre, mais s'en approcher pour ainsi dire par une suite indéfinie d'approximations. De là la nécessité de faire grande attention aux détails de la démonstration, ce qui entraîne une assez grande prolixité.

Dans le paragraphe II, je précise la notion de la surface de Riemann qu'il va s'agir d'*uniformiser*. Je la considère comme un domaine formé d'une suite d'éléments, imbriqués les uns dans les autres et correspondant aux divers éléments d'une fonction analytique au sens weierstrassien du mot. Je montre comment on peut généraliser cette fonction et la rendre plus souple, principalement par l'introduction des *éléments algébriques* qui permettent de traiter les points de ramification algébrique de la surface de Riemann comme faisant partie de cette surface. J'étudie les relations mutuelles des diverses surfaces de Riemann correspondant aux divers systèmes de fonctions analytiques.

Dans le paragraphe III, je forme la fonction de Green relative à ma surface de Riemann; et je la représente par une série qui converge quand cette fonction existe. Je modifie la démonstration donnée dans mon Mémoire primitif en la rattachant à la *méthode du balayage* et je la simplifie par l'application du théorème de Harnack.

Dans le paragraphe IV, j'introduis la fonction auxiliaire majorante nécessaire pour assurer la convergence de la série; je montre que cette fonction peut être choisie de façon à éviter les *Ausnahmsstellen*.

Dans le paragraphe V, je déduis de la fonction de Green, la fonction analytique z qui doit assurer la représentation conforme de la surface de Riemann sur un cercle.

Dans le paragraphe VI, je généralise la méthode du balayage de façon à y faire rentrer celle que j'avais employée dans mon Mémoire primitif.

Dans le paragraphe VII, je compare les diverses fonctions z qu'on peut déduire d'une même surface de Riemann, et je montre qu'elles sont liées par des relations linéaires; je montre ensuite que chacune d'elles ne peut prendre plus d'une fois la même valeur.

Il s'agit ensuite de montrer que la surface de Riemann peut être représentée sur un cercle; c'est ce qu'a fait Osgood; je reproduis sa démonstration dans le paragraphe VIII, mais en la présentant de manière à faire voir que c'est bien par la fonction z que se fait la représentation. Je donne ensuite du même théorème une seconde démonstration.

Dans les paragraphes IX, X et XI, j'étudie les propriétés des fonctions uniformisantes; je montre leur analogie avec les fonctions fuchsiennes, leurs relations avec un groupe analogue aux groupes fuchsiens et la possibilité de les représenter par des séries analogues aux séries thétafuchsiennes.

A la fin du Mémoire, je cherche à me passer de la fonction auxiliaire majorante du paragraphe IV. Je considère un domaine D (ou surface de Riemann) simplement connexe, mais d'ailleurs quelconque. J'en enlève une aire simplement connexe, et il me reste un domaine D_1 doublement connexe. Au paragraphe XII je forme la fonction de Green relative à ce domaine et je montre qu'elle existe toujours. Je suis amené ensuite à distinguer deux cas.

Le premier cas est examiné aux paragraphes XIII et XIV; je montre que dans ce cas le domaine D_1 est représentable sur une couronne circulaire et le domaine D sur un cercle.

Dans le second cas que j'étudie au paragraphe XV, le domaine D_1 est représentable sur un cercle, et le domaine D sur une sphère.

Les critères qui permettent de discerner entre les deux cas peuvent se présenter sous des formes très différentes; on comparera celles que j'ai données au paragraphe XI, à la fin du paragraphe XII, au paragraphe XIII, au paragraphe XV; et on les rapprochera des critères proposés par M. Brodén.

Le théorème final (paragraphes XIV et XV) permettrait de démontrer l'existence des fonctions fuchsiennes d'un type donné, sans avoir recours ni à la méthode dite de continuité, ni à l'équation $\Delta u = e^u$.

II. — Définition des domaines D.

Représentons-nous une fonction analytique comme le faisait Weierstrass. Un *élément de fonction*, c'est une série de puissances R convergente à l'intérieur d'un cercle C. Deux éléments sont *contigus* quand leurs cercles de convergence C et C' ont une partie commune, et quand en tout point de cette partie commune, les deux séries R et R' correspondant à ces deux éléments ont même somme. Une *fonction analytique* sera alors constituée par un ensemble *dénombrable* d'éléments de fonction, tels que l'on peut passer de l'un quelconque de ces éléments E à un autre quelconque E' par une *chaîne* formée par un nombre fini d'éléments, le premier élément de la chaîne étant E et le dernier E', et chaque élément de la chaîne étant contigu au suivant et au précédent. Pourquoi cet ensemble doit-il être *dénombrable*, c'est ce que j'ai expliqué au Tome 2 des *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* (1).

Cela posé, voyons ce que nous devons entendre par le domaine D d'une fonction analytique F quelconque. C'est l'ensemble des cercles de convergence C relatifs aux différents éléments de F, mais avec la convention suivante : *pour que deux points du domaine soient regardés comme identiques, il ne suffit pas qu'ils aient mêmes coordonnées.* Soient E et E' deux éléments de la fonction, C et C' les cercles de convergence correspondants; R et R' les deux séries correspondantes, soient M et M' deux points considérés comme appartenant le premier à C, le second à C', et ayant d'ailleurs mêmes coordonnées; les deux points coïncident donc au point de vue géométrique, mais il ne s'ensuit pas qu'ils soient identiques à notre nouveau point de vue; de l'un de ces deux points comme centre, je décris un cercle K assez petit pour être contenu tout entier tant dans C que dans C'; si les deux séries R et R' ont même somme à

(1) *Voir* ce Tome IV, p. 11.

l'intérieur de K, les deux points M et M' seront regardés comme identiques, sinon non. Ainsi notre domaine sera un plan à plusieurs feuillets et en général à une infinité de feuillets; ce sera une *surface de Riemann* analogue à la surface S envisagée dans le Mémoire cité.

On pourra faire une convention différente; on pourra convenir que l'égalité des séries R et R' reste une condition *nécessaire* pour que les deux points M et M' soient identiques, mais que cette condition ne soit plus suffisante. Nous pourrons même convenir de regarder deux éléments de la fonction F comme non identiques, bien que les cercles C et C' correspondants soient les mêmes de même que les deux séries R et R'. Si par exemple on a $F = \sqrt{z}$, et qu'on parte d'un élément quelconque de cette fonction, l'élément sur lequel on retombera après avoir tourné deux fois autour du point $z = 0$ sera généralement regardé comme identique à l'élément initial. Mais nous pourrons également convenir de le regarder comme différent.

On définira ainsi un autre domaine D', nous pourrons appeler D le *domaine principal* de la fonction F; les divers domaines D' seront les *domaines secondaires* de cette même fonction. Alors à chaque point d'un domaine secondaire D' correspondra un point et un seul du domaine principal D, mais à un point de D pourront correspondre plusieurs points de D', et en effet pour que deux points de D' soient identiques il faut, mais il ne suffit pas que les deux points correspondants de D soient identiques.

Pour définir un domaine secondaire D', nous devons, d'après ce qui précède, énoncer les conditions nécessaires et suffisantes pour que deux de ses points M et M' doivent être regardés comme identiques. Le choix de ces conditions reste arbitraire dans une très large mesure, il est cependant soumis aux restrictions suivantes. Soient deux points M et M', ayant mêmes coordonnées et appartenant respectivement à deux éléments de fonctions; soient C et C' les deux cercles, R et R' les deux séries correspondant à ces deux éléments. Il s'agit de savoir à quelles conditions les deux points M et M' seront identiques.

1° La condition que $R = R'$ dans le voisinage des points M et M' n'est plus suffisante, mais reste nécessaire.

2° Si les points M et M' ont mêmes coordonnées, il y aura une infinité de couples de points N et N' appartenant respectivement à C et à C' et qui auront mêmes coordonnées. Si M et M' sont identiques, il devra en être de même pour tous les couples de points tels que N et N'.

3° Deux points identiques à un même troisième sont identiques entre eux.

4° Si nous considérons deux éléments *quelconques* de la fonction F, et que les cercles correspondants soient C et C′; il faudra que l'on puisse passer de l'un à l'autre par une *chaîne* d'un nombre fini d'éléments, dont les cercles soient respectivement C, C_1, C_2, ..., C_n, C′; et de telle façon que si l'on considère deux cercles consécutifs de cette chaîne, il y ait un point intérieur à l'un qui soit identique à un point intérieur à l'autre.

On voit aussi la possibilité de définir un domaine, indépendamment de toute fonction F. Il suffit de se représenter un ensemble dénombrable de cercles C_1, C_2, ..., en convenant que deux points appartenant à deux de ces cercles peuvent ne pas être identiques bien qu'ayant mêmes coordonnées, ou même que deux de ces cercles peuvent coïncider sans être regardés comme identiques. Il faut alors pour achever de définir le domaine, énoncer les conditions nécessaires et suffisantes pour que deux points M et M′ soient identiques; ces conditions devront rester soumises aux restrictions énoncées plus haut; la première ici n'a plus de sens, mais les trois autres doivent subsister.

Les cercles C_1, C_2, ... sont les éléments du domaine, et deux de ces éléments sont dits *contigus* quand les deux cercles ont une partie commune et que dans cette partie commune, les points correspondants sont identiques. Si alors D est le domaine principal ou un domaine secondaire d'une fonction F, et si deux éléments de D sont contigus, il en est de même des deux éléments correspondants de F; mais la réciproque, vraie pour le domaine principal, n'est pas vraie pour un domaine secondaire.

Observons maintenant qu'étant donnée une fonction analytique, on peut construire pour cette fonction plusieurs domaines principaux. Il y a en effet une infinité de manières de décomposer cette fonction en un ensemble dénombrable d'éléments de fonctions. Soit par exemple la fonction $\sqrt{z}$, nous pouvons prendre une infinité d'éléments, dont les cercles de convergence iront tous passer par l'origine; mais les centres de ces cercles, qui doivent former un ensemble dénombrable, pourront être choisis arbitrairement dans une certaine mesure. Il suffit de s'arranger de façon que tout point du plan soit intérieur au moins à l'un de ces cercles.

Comme nous pouvons choisir d'une infinité de manières ces cercles de convergence, il y a, si nous conservons la définition qui précède, une infinité de domaines qui peuvent être regardés comme le domaine principal d'une même fonction analytique. Tous ces domaines devront cependant être regardés comme *équivalents*. Cette notion de l'équivalence de deux domaines peut aussi se définir sans faire intervenir la fonction F. Deux domaines seront *équivalents* quand on pourra établir entre les points de l'un et ceux de l'autre une correspondance biunivoque, de telle façon qu'à tout point de l'un corresponde un point de l'autre et un seul, à deux points identiques de l'un deux points identiques de l'autre, à deux points non identiques de l'un, deux points non identiques de l'autre; et à deux points infiniment voisins de l'un, deux points infiniment voisins de l'autre.

Un domaine D est *contenu* dans un domaine D_1 quant à tout point de D correspond un point de D_1 et un seul; quant à un point de D_1 ne peut correspondre qu'ou bien un seul point de D, ou bien aucun point de D; quand enfin deux points de l'un sont identiques, non identiques ou infiniment voisins si les deux points correspondants de l'autre sont identiques, non identiques ou infiniment voisins.

Un domaine D sera *multiple* d'un domaine D_1, quand à tout point de D correspondra un point de D_1 et un seul, tandis qu'à tout point de D_1 correspondent plusieurs points de D ou même une infinité; de sorte qu'à deux points identiques de D correspondent deux points identiques de D_1, tandis que la réciproque peut ne pas être vraie; de sorte enfin qu'à deux points infiniment voisins de D correspondent deux points infiniment voisins de D_1. *Complétons toutes ces définitions* (domaines équivalents, contenus ou multiples) *en disant que deux points correspondants doivent avoir mêmes coordonnées.* Il est clair alors que si D est le domaine principal et D' un domaine secondaire d'une fonction analytique F, D' est multiple de D.

Quelques remarques encore. Nous avons donné plus haut la définition d'une fonction analytique F et de son domaine principal D; mais si l'on s'en tient à cette définition, il est permis de supposer que la fonction pourrait encore être prolongée analytiquement au delà de son domaine D, et que la frontière de ce domaine n'est pas une limite naturelle, mais une limite artificielle. C'est ainsi qu'un élément unique de fonction, une seule série avec son cercle de convergence satisferait à notre définition. Dans ce cas nous dirons que la fonction F est *incomplète*. Elle sera au contraire *complète*, si elle ne peut pas être prolongée, analytiquement en dehors de son domaine. Si l'on a une fonction incomplète, la fonction obtenue en la prolongeant analytiquement de toutes les manières possibles sera la fonction *complétée*. Il résulte de là que le domaine d'une fonction incomplète est contenu dans le domaine de sa fonction *complétée*.

Nous pouvons étendre la notion d'élément; et par exemple admettre des *éléments infinis* de fonction formés par la partie du plan *extérieure* à un cercle C, de centre a, et par une série procédant suivant les puissances *négatives* de $x - a$ et convergeant à l'extérieur du cercle C.

Ce n'est pas tout. Nous regardons en général la circonférence d'un de nos cercles comme ne faisant pas partie de l'élément correspondant. Si alors la fonction F possède des pôles, d'après la définition précédente, ces pôles ne feraient pas partie de son domaine, puisqu'ils ne seraient à l'intérieur d'aucun de nos cercles de convergence mais seulement sur la circonférence. Mais nous pouvons envisager outre les éléments de fonction considérés jusqu'ici et que nous appellerons *éléments holomorphes*, et qui sont formés d'une série de puissances et de son cercle de convergence, nous pouvons, dis-je, envisager ce que nous appellerons des *éléments polaires* et qui seront formés d'un cercle de convergence et du *quotient* de deux séries de puissances. Si nous introduisons ces éléments, nous pouvons étendre le domaine D de la fonction F de façon que les pôles en fassent partie.

Nous pouvons même envisager une troisième sorte d'éléments, les *éléments algébriques* formés d'un cercle de convergence et d'une série de *puissances fractionnaires*, cela pourrait nous permettre d'étendre le domaine d'une fonction de façon que ses points de ramification algébriques en fissent partie. Ce seraient seulement des points *singuliers* de ce domaine, et les éléments correspondants seraient singuliers même au point de vue géométrique (c'est-à-dire en faisant abstraction de la fonction F qui leur a donné naissance), car un pareil élément ne serait pas un cercle simple, mais un cercle multiple, n^{ple} si n est le dénominateur des exposants fractionnaires de notre série; de telle façon qu'il y aurait à l'intérieur de ce cercle, n points, qui auraient mêmes coordonnées et qui devraient néanmoins être regardés comme distincts; et qui s'échangeraient entre eux quand on tournerait autour du centre du cercle. Nous pourrons nous placer tantôt à l'un, tantôt à l'autre de ces différents points de vue.

Nous pouvons envisager maintenant le domaine d'un ensemble de fonctions analytiques. Soient F_1, F_2, ..., F_p un pareil ensemble. Un élément se composera d'un cercle de convergence C, et de p séries de puissances R_1, R_2, ..., R_p, convergentes à l'intérieur de ce cercle, et représentant respectivement une des déterminations des p fonctions $F_1, F_2, \ldots, F_p$. Deux éléments $C, R_1, R_2, \ldots, R_p$ et $C', R'_1, \ldots, R'_p$ sont contigus quand C et C' ont une partie commune et quand on a dans cette partie commune $R_1 = R'_1$, $R_2 = R'_2$, ..., $R_p = R'_p$. Rien à changer d'ailleurs à la définition du domaine principal.

Quelle relation y a-t-il entre le domaine principal D de l'ensemble et les domaines principaux D_1, D_2, ..., D_p des p fonctions considérées individuellement? Considérons un élément de D_1 et un point de cet élément, il pourra se faire qu'en ce point une des fonctions $F_2, F_3, \ldots, F_p$ n'existe pas; dans ce cas ce point n'appartiendra pas à D; il pourra se faire aussi que l'une de ces $p-1$ fonctions admette plusieurs valeurs, n par exemple; alors à ce point de D_1 correspondront n points de D qui devront être regardés comme distincts. Au contraire à tout point de D correspondra toujours un point de D_1 et un seul. Nous pouvons alors construire un domaine intermédiaire, D'_1, déduit de D_1 en supprimant tous les points de ce domaine auxquels ne correspondent aucun point de D; de sorte que D'_1 est contenu dans D_1 et que D est multiple de D'_1.

Deux points d'un domaine quelconque seront infiniment voisins s'ils ont des coordonnées infiniment peu différentes, et s'ils appartiennent à un même élément de ce domaine. Cela suffit pour qu'on comprenne ce qu'on doit entendre par une ligne continue tracée dans un domaine, par une ligne fermée, par une aire continue dont tous les points font partie d'un domaine, et par la frontière de cette aire. Le domaine sera alors *simplement connexe* si toute courbe fermée tracée sur ce domaine est la frontière complète d'une aire continue dont tous les points font partie du domaine.

III. — Formation de la fonction de Green.

Considérons un domaine D quelconque; soit C_0 un cercle représentant l'un des éléments de ce domaine, soit O un point intérieur à C_0; nous allons définir d'abord la fonction initiale u_0.

1° A l'intérieur de l'élément C_0.

Soit O′ un point extérieur au cercle C_0, de telle façon que la droite OO′ passe par le centre de ce cercle, et que le produit des distances de ce centre aux deux points O et O′ soit égal au carré du rayon du cercle. Alors si P est un point quelconque de la circonférence de C_0, le rapport $\frac{PO}{PO'}$ sera égal à une constante K. C'est ce que nous exprimerons en disant que les points O et O' sont *inverses l'un de l'autre par rapport au cercle* C_0.

Si alors M est un point du domaine, intérieur à C_0, nous prendrons pour la valeur de la fonction u_0 au point M :

$$u_0 = \log \frac{\text{MO}'.\text{K}}{\text{MO}}.$$

On voit que u_0 devient logarithmiquement infini au point O, est toujours, positif à l'intérieur de C_0 et nul sur la circonférence de ce cercle; u_0 peut être regardé comme le potentiel logarithmique dû à une masse $+1$ placée au point O et à des masses négatives réparties sur la circonférence de C_0.

2° Dans les éléments contigus à C_0.

Si C_1 est un élément contigu à C_0, on aura dans la partie commune à C_1 et à C_0

$$u_0 = \log \frac{\text{MO}'.\text{K}}{\text{MO}},$$

et en dehors de cette partie commune

$$u_0 = 0.$$

3° Dans les éléments non contigus à C_0, on aura partout $u_0 = 0$.

On voit d'après cela que la fonction u_0 est partout positive ou nulle, qu'elle est continue, mais que ses dérivées ne le sont pas.

Nous allons maintenant définir une suite indéfinie de fonctions

$$u_0, \quad u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_n, \quad \ldots \tag{1}$$

Ces fonctions, comme nous allons le voir, seront toutes positives ou nulles; elles seront finies, sauf au point O, où elles deviendront logarithmiquement infinies de telle façon que la différence $u_n - u_0$ reste finie. De plus elles seront continues mais leurs dérivées ne le seront pas. Et ceci nous amène à définir ce que nous appelons les *masses génératrices*. Ces masses sont réparties le long des lignes de discontinuité de ces dérivées. Soit dans un élément du domaine L une de ces lignes de discontinuité; la fonction u, d'après ce qui précède est continue, mais il n'en est pas de même de ses dérivées, et en particulier la *dérivée normale* $\frac{du}{dn}$ relative à la ligne L subit un saut brusque, quand on franchit cette ligne. C'est ce saut brusque divisé par 2π qui représente la densité de la masse génératrice le long de la ligne L. Les masses ainsi réparties le long des lignes de discontinuité sont comme nous le verrons toutes négatives, et il faut y adjoindre une masse positive égale à $+1$ et située au point O.

Nous allons voir comment nous passons de l'une des fonctions de la série (1) à la suivante; comme nous connaissons u_0, toutes les autres fonctions de la série (1) se trouveront ainsi définies. *Le passage de la fonction u_n à la fonction u_{n+1} se fera par la méthode du balayage*, que j'ai exposée dans l'*American Journal of Mathematics*, t. 12 [1].

Considérons la fonction u_n, soit C_k l'élément du domaine D que nous nous proposons de balayer. Envisageons les masses génératrices négatives relatives à la fonction u_n et situées à l'intérieur de C_k; elles sont réparties le long de certaines lignes de discontinuité L. Soit ds un élément de l'une de ces lignes. et $-\mu\, ds$ la masse génératrice négative située sur cet élément. Alors nous aurons pour la valeur de la fonction $u_{n+1}-u_n$ au point M :

1° A l'intérieur de C_k :

$$u_{n+1}-u_n=\int \mu\, ds \log \frac{\mathrm{MQ'.PQ}}{\mathrm{MQ.PQ'}}.$$

Q est le centre de gravité de l'élément ds, Q' est inverse de Q par rapport au cercle C_k, le point P est un point quelconque de la circonférence de C_k; quel que soit d'ailleurs ce point, le rapport $\frac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{PQ'}}$ conservera la même valeur, puisque Q et Q' sont inverses par rapport à C_k. L'intégrale doit être étendue à tous les éléments de toutes les lignes ds de discontinuité L intérieures à C_k.

2° Dans un élément C_h contigu à C_k.

On aura encore

$$u_{n+1}-u_n=\int \mu\, ds \log \frac{\mathrm{MQ'.PQ}}{\mathrm{MQ.PQ'}}$$

dans la partie commune à C_h et à C_k, et

$$u_{n+1}-u_n=0$$

en dehors de cette partie commune.

---

(1) *Voir* Tome IX.

3° Dans un élément non contigu à C_k on aura partout $u_{n+1} - u_n = 0$.

Il résulte de là, que la fonction $u_{n+1} - u_n$ est partout positive ou nulle; qu'elle est continue; que c'est un potentiel logarithmique, engendré par des masses génératrices positives $\mu\,ds$ placées sur les divers éléments ds des lignes de discontinuité L intérieures à C_k, et par des masses négatives réparties sur la circonférence de C_k. La densité de cette matière génératrice négative en un point P de cette circonférence est

$$\int \frac{\mu\,ds}{2\pi}\left(\frac{\cos\varphi'}{PQ'} - \frac{\cos\varphi}{PQ}\right),$$

φ et φ' étant les angles que fait le rayon mené de P au centre de C_k avec les droites PQ et PQ'. On voit que cette densité est toujours finie quelle que soit la position du point P sur la circonférence C_k.

Nous voyons alors que pour la fonction u_{n+1}, les masses négatives qui se trouvaient sur les lignes L intérieures à C_k ont disparu; car les masses négatives qui engendraient u_n sont égales et contraires aux masses positives qui engendrent $u_{n+1} - u_n$. Les masses négatives qui se trouvaient à l'intérieur de C_k en ont été *balayées*. Si le point O est intérieur à C_k, il s'y trouvait une masse positive $+1$, qui était l'une des masses génératrices de u_n. Le balayage ne porte pas sur cette masse positive qui subsiste et demeure l'une des masses génératrices de u_{n+1}. Ainsi aucune des masses génératrices de u_{n+1} n'est à l'intérieur de C_k, sauf la masse positive $+1$ qui pourrait se trouver au point O. Donc en aucun point de C_k (sauf au point O, si ce point est intérieur à C_k) il n'y a de masse génératrice de u_{n+1}. Donc en tout point de C_k sauf en O, la fonction u_{n+1} est une fonction *harmonique*, finie et continue ainsi que ses dérivées et satisfaisant à l'équation de Laplace $\Delta u_{n+1} = 0$.

On voit de plus que les lignes de discontinuité L ne sont autre chose que les circonférences des différents cercles qui représentent les éléments du domaine.

J'ai expliqué dans le Mémoire cité (*American Journal*, p. 225), comment on peut choisir l'ordre des balayages de façon que chaque élément du domaine soit balayé une infinité de fois.

Nous avons donc une série de fonctions

$$u_1,\quad u_2,\quad \ldots,\quad u_n,\quad \ldots$$

toujours positives et toujours croissantes; c'est-à-dire que nous avons une série

$$(1)\qquad \Sigma(u_{n+1} - u_n).$$

dont tous les termes sont positifs ou nuls. Deux hypothèses sont possibles; la série converge ou elle diverge. Voici ce que nous apprend à ce sujet le *théorème de Harnack*.

D'après ce théorème, si l'on a une série

$$f_1 + f_2 + \ldots + f_n + \ldots$$

et qu'à l'intérieur d'un certain cercle, le terme général f_n soit une fonction *harmonique* et *positive*; si la série converge en un point intérieur au cercle, elle convergera en tout autre point intérieur au cercle; de plus la convergence sera uniforme et la série obtenue en la différentiant une ou plusieurs fois terme à terme sera aussi uniformément convergente.

Cela posé, considérons un élément C_h. Cet élément est balayé une infinité de fois. Soient

$$u_{\gamma_1}, \quad u_{\gamma_2}, \quad \ldots, \quad u_{\gamma_n}, \quad \ldots$$

les fonctions obtenues immédiatement après ces différents balayages. Si le point O n'est pas intérieur à C_h, toutes ces fonctions sont harmoniques à l'intérieur de C_h; en tout cas, que O soit ou ne soit pas intérieur à C_h, les différences de ces fonctions seront harmoniques à l'intérieur de C_h. Donc la série

$$(2) \qquad \Sigma(u_{\gamma_{n+1}} - u_{\gamma_n})$$

a tous ses termes harmoniques et positifs et nous pouvons lui appliquer le théorème de Harnack, si donc elle converge en un point de C_h, elle convergera dans ce cercle tout entier. Si la série (2) converge, u_{γ_n} tend vers une limite finie quand n croît indéfiniment, ce qui montre que u_n ne croît pas indéfiniment avec n, c'est-à-dire que la série (1) converge. La condition nécessaire et suffisante pour que (2) converge, c'est que (1) converge. Si donc (1) converge en un point de C_h, elle convergera dans tout C_h, et l'on en déduit aisément que si elle converge en un point du domaine D, elle convergera dans ce domaine tout entier.

De plus, d'après le théorème de Harnack, si la convergence a lieu, elle sera uniforme, et l'on pourra différentier la série terme à terme, une ou plusieurs fois, la convergence restant uniforme; de sorte que la somme de la série sera une fonction harmonique.

Nous sommes donc en présence de deux hypothèses seulement.

1° Ou bien u_n croît indéfiniment avec n et cela pour tous les points du domaine D.

2° Ou bien, pour tous les points de D, u_n tend vers une limite u, et cette limite que nous appellerons *fonction de Green* est une fonction harmonique, sauf au point O; et dans le voisinage de O, la différence $u - u_0$ est harmonique. Cette fonction de Green est partout positive ou nulle.

Voyons quelle est l'influence de l'ordre des balayages. Je dis que la fonction u ne dépend pas de l'ordre des balayages, pourvu que chaque élément soit balayé une infinité de fois. Soient

$$\begin{array}{cccccc} u_0, & u_1, & u_2, & \ldots, & u_n, & \ldots \\ u'_0, & u'_1, & u'_2, & \ldots, & u'_n, & \ldots \end{array}$$

deux suites de fonctions obtenues par balayages successifs et ayant respectivement pour limites u et u'. Observons que la fonction initiale est la même pour les deux suites

$$u_0 = u'_0.$$

On a donc $u' > u_0$ puisque $u' > u'_0$; je dis que si $u' > u_n$, on aura également $u' > u_{n+1}$. Si l'on passe de u_n à u_{n+1} en balayant l'élément C_k, on a en dehors de C_k, $u_n = u_{n+1}$ et par conséquent $u' > u_{n+1}$. A l'intérieur de C_k, on voit que u' est une fonction harmonique, et il en est de même de u_{n+1} puisque C_k vient d'être balayé. Il en sera donc de même de $u' - u_{n+1}$, même si O est à l'intérieur de C_k. Or sur la circonférence de C_k on a $u_{n+1} = u_n$, et par conséquent $u' > u_{n+1}$. On aura donc encore à l'intérieur de C_k

$$u' > u_{n+1}.$$

On en conclut par récurrence que

$$u' > u_n,$$

et à la limite

$$u' \geqq u.$$

On trouverait de même

$$u > u'_n, \qquad u \geqq u'.$$

Donc

$$u = u'.$$

Si dans la formation de la suite des u'_n, tous les éléments n'étaient pas balayés une infinité de fois, ce raisonnement ne serait plus applicable, parce que la fonction u' ne serait pas partout harmonique, des masses génératrices pouvant rester dans des éléments qui auraient fini par ne pas être balayés. Mais la fonction u resterait harmonique et l'on aurait toujours

$$u > u'_n, \qquad u \geqq u'.$$

Peut-on appliquer les mêmes procédés, quand le domaine comprend ce que nous avons appelé un *élément algébrique* (c'est-à-dire un cercle multiple, *vide supra* § II *in fine*). Oui, mais il faut expliquer comment on peut balayer un pareil élément. Soit C_k le cercle en question, A son centre, et supposons que ce cercle soit n^{ple}, c'est-à-dire que chaque point intérieur à C_k représente n points du domaine regardés comme distincts et qui s'échangent entre eux quand on tourne autour de A. Nous construirons un autre cercle C′ ayant pour centre un point quelconque B; de telle façon qu'à tout point M du cercle C_k de coordonnées polaires ρ et ω, corresponde un point M′ du cercle C′ de coordonnées polaires, $\sqrt[n]{\rho}$ et $\frac{\omega}{n}$. La fonction u_p avant le balayage est une fonction harmonique des coordonnées de M, sauf le long de certaines lignes de discontinuité L où il y aura des masses génératrices négatives. Ce sera donc aussi une fonction harmonique des coordonnées de M′ sauf le long des lignes L′ formées par les points correspondants de ceux de L. Le long de ces lignes L′, il y a aussi des masses génératrices négatives, et en effet la fonction u_p considérée comme fonction des coordonnées du point M′, est continue le long de ces lignes, mais ses dérivées premières ne le sont pas. Nous pourrons balayer par le procédé ordinaire, celles de ces masses négatives qui sont à l'intérieur de C′ (puisque C′ est un cercle simple, et non plus un cercle multiple comme C_k); on définira ainsi la fonction u_{p+1}. On voit que, en dehors de C_k, on aura

$$u_p = u_{p+1};$$

de même sur la circonférence de C′ et par conséquent sur celle de C_k. A l'intérieur de C_k, on aura $u_{p+1} > u_p$ et u_{p+1} sera harmonique. Ainsi nous pouvons faire la représentation conforme du cercle multiple C_k sur le cercle simple C′, et appliquer la méthode du balayage au cercle C′. De même si nous avions des *éléments infinis*, nous ferions la représentation conforme de la partie du plan extérieure au cercle C_k, sur l'intérieur d'un cercle C′ et nous appliquerions la méthode du balayage à ce cercle C′.

Comparons maintenant les fonctions de Green u et u' relatives à deux domaines D et D' :

1° Quand D est contenu dans D'. Soient alors

$$u_0, \quad u_1, \quad \ldots, \quad u_n, \quad \ldots$$
$$u'_0, \quad u'_1, \quad \ldots, \quad u'_n, \quad \ldots$$

nos deux suites de fonctions, formées par balayages successifs et relatives, la première à D, la deuxième à D'. Nous pourrons supposer

$$u_0 = u'_0,$$

et en effet comme D est contenu dans D', nous pourrons supposer que le cercle C_0 qui est un élément de D, est aussi un élément de D'. Nous aurons alors à l'intérieur de C_0

$$u_0 = u'_0 > 0,$$

et en dehors de C_0

$$u_0 = u'_0 = 0.$$

Si la première suite est convergente, nous appellerons u sa limite et de même si la deuxième suite converge, sa limite s'appellera u'. La fonction u' est harmonique dans D' et par conséquent dans D (sauf au point O où c'est $u' - u_0$ qui est harmonique); elle est d'ailleurs positive; on démontrerait comme plus haut que l'on a $u' > u_0$, que l'on a $u' > u_{n+1}$ si $u' > u_n$, que par conséquent quel que soit n on a $u' > u_n$ et à la limite

$$u' \geq u.$$

D'où cette conséquence, *si la suite des u'_n converge pour le domaine* D', *la suite des u_n relative à un domaine* D *contenu dans* D' *convergera* a fortiori.

2° Quand le domaine D est multiple de D'.

Cette fois à tout point de D' correspondent plusieurs points de D; si nous reprenons nos deux séries, il faut supposer qu'aux différents points de D qui correspondent à un même point de D', la fonction u'_n reprend la même valeur, mais que la fonction u_n ne reprend pas en général la même valeur. Soit C_0 celui des éléments de D qui contient le point O; il y aura alors d'autres points $O_1, O_2, \ldots, O_p, \ldots$ qui correspondront au même point de D' que le point O;

et l'on pourra les regarder comme appartenant à autant de cercles C_0^1, C_0^2, ..., C_0^p, ... qui seront des éléments distincts de D, mais qui correspondront à un même élément de D'. Alors la fonction u'_n deviendra logarithmiquement infinie, non seulement en O, mais en O_1, O_2, ..., tandis que la fonction u_n ne deviendra infinie qu'en O.

Alors nous aurons dans le cercle C_0

$$u_0 = u'_0 > 0,$$

dans les autres cercles C_0^1, C_0^2, etc.

$$u'_0 > 0, \qquad u_0 = 0,$$

et en dehors de ces cercles

$$u_0 = u'_0 = 0.$$

Si donc la suite des u'_n converge on aura

$$u' \geq u'_0 \geq u_0$$

et en raisonnant comme plus haut on trouvera

$$u' > u_n.$$

Une observation toutefois; nous nous sommes appuyé plus haut sur ce que la différence $u' - u_{n+1}$ est harmonique à l'intérieur du cercle C_k que l'on vient de balayer; sachant de plus que cette différence est positive sur la circonférence de ce cercle, nous en avons conclu qu'elle reste positive à l'intérieur de ce cercle. Ici il peut se faire que $u' - u_{n+1}$ devienne infinie, puisque u' devient infinie aux points O_p différents de O, tandis que u_{n+1} reste finie, mais alors cette différence tend vers $+\infty$ et non pas vers $-\infty$ de sorte que la conclusion subsiste.

On aura donc à la limite

$$u' \geq u.$$

Si donc la série converge pour un domaine D' *elle convergera* a fortiori *pour un domaine* D *multiple de* D'.

3° Quand enfin à tout point de D correspond un point de D' et un seul, tandis qu'à un point de D' peuvent correspondre soit zéro, soit un, soit plusieurs points de D.

Dans ce cas il existe un domaine intermédiaire D″ tel que D soit multiple de D″ et D″ contenu dans D′.

Si alors la série converge pour D′ elle convergera pour D″, et par conséquent pour D.

On voit que la démonstration du Mémoire cité (*Bull. Soc. math.*) a été simplifiée par l'application de la méthode du balayage et surtout par celle du théorème de Harnack, qui permet de supprimer toutes les discussions relatives à l'uniformité de la convergence.

IV. — Introduction de la fonction auxiliaire majorante.

Considérons un système de fonctions

$$(1) \qquad y_1, \; y_2, \; \ldots, \; y_p,$$

et soit D le domaine principal de ce système; soit D_1 le domaine principal de l'une des fonctions y_1; d'après ce que nous avons vu plus haut, à chaque point de D correspond toujours un point de D_1 et un seul; mais à un point de D_1 peuvent correspondre zéro, un ou plusieurs points de D. Il existe donc un domaine intermédiaire D'_1, contenu dans D_1 et dont D est multiple, et il en résulte comme nous venons de le voir, que si la série converge pour D_1, elle convergera également pour D, et la fonction de Green existera pour D.

Soit maintenant D′ un domaine secondaire de notre système de fonctions, il sera multiple de D, de sorte que la fonction de Green existera également pour D′.

Cela posé il y a des fonctions y_1 pour le domaine principal desquelles la fonction de Green existe certainement. Considérons en effet une fonction fuchsienne quelconque

$$x = f(z)$$

n'existant qu'à l'intérieur du cercle fondamental, de centre $z = 0$ et de rayon 1. Résolvons l'équation $x = f(z)$ par rapport à z et soit

$$z = \varphi(x),$$

$\varphi(x)$ sera une fonction multiforme dont on peut former le domaine principal D_1. Considérons sur ce domaine D_1 la fonction

$$t = \log \frac{1}{|z|},$$

ce sera la fonction de Green cherchée ; elle est en effet toujours positive, et toujours harmonique, sauf en un seul point du domaine D_1, celui pour lequel on a $z = 0$, et en ce point elle devient logarithmiquement infinie.

Nos fonctions u_n du paragraphe précédent sont toujours plus petites que t, et cela est vrai des fonctions u_n relatives soit au domaine D_1 lui-même, soit à tout domaine contenu dans D_1, ou multiples d'un domaine contenu dans D_1. Si donc notre système (1) comprend la fonction

$$y_1 = z = \varphi(x),$$

la suite des u_n converge et la fonction de Green existe, soit pour le domaine principal D, soit pour un domaine secondaire D' quelconque de ce système (1). La fonction t joue le même rôle que celle que nous avons désignée par la même lettre dans le Mémoire cité (*Bull. Soc. math.*). Elle permet de montrer par l'inégalité

$$u_n < t,$$

que la série converge sauf pour les points où t est infini. Ces points sont les points de D qui correspondent au point $z = 0$ de D_1 ; en général, il y en a plusieurs, l'un est le point O, les autres pourront s'appeler O_1, O_2, ...

La fonction de Green, d'après sa définition, doit devenir infinie au point O, mais rester finie en O_1, O_2, etc. : seulement le théorème de Harnack nous apprend que si la série converge en un point du domaine D, elle convergera dans tous les autres points de ce même domaine, sauf au point O. Or elle converge en tous les points où t est fini ; donc elle convergera également en O_1, O_2, ... Nous sommes ainsi dispensés de la considération des fonctions t_i qui dans le Mémoire cité, avaient été précisément introduites pour démontrer la convergence aux points tels que O_1, O_2, ...

Supposons maintenant que dans notre système (1) ne figure pas de fonction de cette forme, c'est-à-dire qui soient l'inverse d'une fonction fuchsienne. Nous formerons alors un système (1 *bis*), obtenu en adjoignant au système (1) une $p+1^{\text{me}}$ fonction

$$y_{p+1} = z = \varphi(x)$$

qui soit l'inverse d'une fonction fuchsienne.

Soit Δ le domaine principal du système (1 *bis*), et Δ' un domaine secondaire de ce même système. Alors Δ' et Δ sont multiples d'un domaine δ contenu dans le domaine principal D du système (1).

Nous sommes certains alors que la fonction de Green existe pour Δ et Δ' puisque le système (1 *bis*) contient une fonction inverse d'une fonction fuchsienne; nous verrons que l'existence de cette fonction de Green, permet *d'uniformiser* les fonctions

$$y_1,\quad y_2,\quad \ldots,\quad y_p,\quad y_{p+1},$$

c'est-à-dire d'exprimer ces $p-1$ quantités en fonctions uniformes d'une même variable auxiliaire ζ; mais une difficulté peut se présenter; le champ dans lequel cette uniformisation sera réalisée, comprendra tous les points pour lesquels les $p+1$ fonctions existent, c'est-à-dire tous les points qui ont un correspondant dans Δ, c'est-à-dire tous les points de δ. Elle ne le sera pas pour tous les points pour lesquels les p premières fonctions *données* existent (abstraction faite de la $p+1^{\text{me}}$ fonction arbitrairement adjointe), c'est-à-dire pour tous les points de D, si δ est plus petit que D. La solution pourrait donc paraître imparfaite et c'est ce qui me conduit à la discussion suivante.

On peut faire plusieurs hypothèses au sujet de la fonction fuchsienne dont l'inverse est y_{p+1}.

1° Nous pouvons supposer que le polygone générateur de cette fonction fuchsienne a des sommets sur le cercle fondamental, c'est-à-dire qu'il est de la deuxième ou de la sixième famille. C'est ce qui arrive par exemple si l'on choisit pour cette fonction fuchsienne la fonction modulaire comme je l'ai fait dans le Mémoire cité. On sait que cette fonction ne peut prendre aucune des valeurs 0, 1, ∞, de sorte que la fonction inverse

$$y_{p+1} = \varphi(x)$$

n'existe pas pour $x=0$, $x=1$, $x=\infty$; si donc il y a dans le domaine D des points pour lesquels x prend l'une de ces trois valeurs, ces points doivent être exclus du domaine δ; ce sont des *Ausnahmsstellen*.

2° Nous pouvons supposer que le polygone générateur est tout entier à l'intérieur du cercle fondamental, c'est-à-dire que la fonction fuchsienne est de la première famille. Dans ce cas, cette fonction peut prendre toutes les valeurs possibles; la fonction inverse

$$y_{p+1} = \varphi(x)$$

existe pour toutes les valeurs de x. Il arrivera toutefois que cette fonction présentera des points de ramification algébrique. Si nous nous placions au point de vue que nous avions d'abord adopté, c'est-à-dire si nous ne voulions composer nos domaines que d'éléments holomorphes ou polaires, ces points de ramification seraient en dehors du domaine principal de cette fonction y_{p+1}; il n'en sera plus de même si au contraire nous admettons les éléments algébriques; à tout point de D correspondra un point du domaine de y_{p+1} et par conséquent un point de Δ. Les domaines δ et D seront identiques; Δ et Δ' seront multiples de D et il n'y aura plus d'*Ausnahmsstellen*.

Mais il y a quelque chose de plus; soient Δ et D deux domaines quelconques et supposons que Δ soit multiple de D. Nous dirons que Δ est *régulièrement multiple* de D, s'il satisfait à la condition suivante. Soit M un point de D; soient

$$M_1, \quad M_2, \quad \ldots$$

les points correspondants de Δ. Soit M' un autre point de D infiniment voisin de M; nous supposerons que parmi les points de Δ qui correspondent à M', il y en ait un qui soit infiniment voisin de M_1, un qui soit infiniment voisin de M_2, ...

Si cette condition est remplie, c'est-à-dire si Δ est régulièrement multiple de D, il est clair que, si à un certain point M de D correspondent un nombre *fini* n de points de Δ, alors à tout autre point de D correspondront le *même* nombre fini n de points de Δ.

Revenons maintenant aux domaines principaux Δ et D des systèmes (1 *bis*) et (1). Je dis que Δ est *régulièrement* multiple de D (si l'on admet des éléments algébriques, et si la fonction fuchsienne auxiliaire est de la première famille). Soit en effet M un point du domaine D, et x la valeur correspondante de cette variable. Pour cette valeur x, la fonction y_{p+1} existe et peut prendre une infinité de valeurs

$$z_1, \quad z_2, \quad \ldots, \quad z_q, \quad \ldots$$

qui se déduisent de l'une d'entre elles, z_1 par exemple, en appliquant à cette quantité z_1 les diverses substitutions linéaires du groupe fuchsien qui engendre la fonction fuchsienne auxiliaire.

Au point M de D, correspondront une infinité de points de Δ, que j'appellerai

$$(M, z_1), \quad (M, z_2), \quad \ldots, \quad (M, z_q), \quad \ldots$$

et qui correspondront aux différentes valeurs de la fonction y_{p+1}.

Soit maintenant M′ un autre point de D, infiniment voisin de M; soit $x+\varepsilon$ la valeur correspondante de x, et

$$\beta_1, \quad \beta_2, \quad \ldots, \quad \beta_q, \quad \ldots$$

les déterminations correspondantes de y_{p+1}. Au point M′ de D correspondront une infinité de points de Δ qui sont

$$(M', \beta_1), \quad (M', \beta_2), \quad \ldots, \quad (M', \beta_q), \quad \ldots.$$

Ce qu'il s'agit de démontrer, c'est que parmi ces points il y en a un qui diffère infiniment peu de (M, α_q), et comme M′ diffère très peu de M par hypothèse, il suffit d'établir que parmi les déterminations de $\varphi(x+\varepsilon)$, il y en a une, β_q par exemple, qui diffère infiniment peu de la détermination α_q de $\varphi(x)$. Or cela paraîtra évident pour peu qu'on réfléchisse aux propriétés des fonctions fuchsiennes de la première famille.

Soit maintenant D un domaine quelconque; je dis que nous pourrons trouver un domaine Δ, régulièrement multiple de D et simplement connexe. Soient en effet C_0 l'élément initial de D, C un élément quelconque, M un point intérieur à C, M_0 un point intérieur à C_0. On peut aller sur le domaine D de M_0 en M par plusieurs chemins; envisageons deux de ces chemins; ils pourront être *équivalents*, c'est-à-dire qu'ils pourront limiter une aire continue située sur D; mais ils pourront aussi ne pas l'être, à moins que D ne soit simplement connexe.

Cela posé, définissons le domaine Δ; un point de ce domaine sera caractérisé par le point M de D qui lui correspond, et par le chemin par lequel on est venu de M_0 en M; pour que deux points de Δ ainsi caractérisés soient identiques, il faudra et il suffira qu'ils correspondent à un même point M de D et qu'on soit venu de M_0 en M par deux chemins équivalents. Il est clair que Δ est simplement connexe, je dis qu'il est régulièrement multiple de D. Soient en effet M un point de D, appartenant à un élément C, M_0NM, $M_0N'M$, deux chemins allant de M_0 à M et que je supposerai *équivalents*. Ainsi se trouvera défini un point de Δ que j'appellerai (M, M_0NM). Ce qu'il s'agit de démontrer, c'est que si M′ est un point de D, très voisin de M, il y aura sur Δ un point très voisin de (M, M_0NM) et qui correspondra à M′. Et en effet, M′ étant très voisin de M, pourra être joint à M par un arc MM′ très petit; en l'adjoignant au chemin M_0NM, on obtiendra un chemin M_0NMM' qui en différera très peu; et alors le point (M', M_0NMM') est un point de Δ qui correspond à M′ et qui est très voisin de (M, M_0NM), ... C. Q. F. D.

Ce qui justifie ce résultat, c'est que si deux chemins M_0NM et $M_0N'M$ sont équivalents, il en est de même des deux chemins M_0NMM' et $M_0N'MM'$.

En résumé, étant donné un système (1) *quelconque de fonctions multiformes, et* D *le domaine principal de ce système, on peut toujours former un domaine régulièrement multiple de* D, *simplement connexe, et pour lequel la fonction de Green existe.*

Et en effet, formons une fonction $y_{p+1} = \varphi(x)$, inverse d'une fonction fuchsienne de la première famille; adjoignons-la au système (1) de façon à former le système (1 *bis*); le domaine principal Δ de ce système sera régulièrement multiple de D, à la condition que nous admettions des éléments algébriques. De plus Δ sera multiple d'un domaine contenu dans le domaine principal de y_{p+1} et comme la fonction de Green existe pour ce dernier domaine, elle existera *a fortiori* pour Δ. Nous avons vu en effet que la présence d'éléments algébriques n'empêche pas l'application de la méthode du balayage.

Nous pouvons ensuite construire un domaine Δ', régulièrement multiple de Δ et simplement connexe. Étant régulièrement multiple de Δ, il le sera de D. De plus la fonction de Green existant pour Δ, existera *a fortiori* pour Δ'.

V. — Les fonctions v et z.

Soit un domaine D quelconque, admettant une fonction de Green.

Nous allons maintenant comme dans le Mémoire cité, définir les fonctions v et v_n. Nous avons défini déjà les fonctions u et u_n; si $x = \xi + i\eta$ est la variable complexe envisagée, nous aurons

$$\Delta u = \frac{d^2 u}{d\xi^2} + \frac{d^2 u}{d\eta^2} = 0,$$

$$\Delta u_n = \frac{d^2 u_n}{d\xi^2} + \frac{d^2 u_n}{d\eta^2} = 0.$$

Les équations

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{dv}{d\xi} = \dfrac{du}{d\eta}, & \dfrac{du}{d\xi} = \dfrac{dv}{d\eta}, \\[2ex] \dfrac{dv_n}{d\xi} = -\dfrac{du_n}{d\eta}, & \dfrac{du_n}{d\xi} = \dfrac{dv_n}{d\eta}, \end{array} \right.$$

sont donc compatibles et peuvent servir à définir v et v_n. On achève de définir ces fonctions en leur imposant la condition de s'annuler en un point A différent de O; et alors nous aurons

$$(2) \qquad v = \int_A \left(\frac{du}{d\xi} d\eta - \frac{du}{d\eta} d\xi \right), \qquad v_n = \int_A \left(\frac{du_n}{d\xi} d\eta - \frac{du_n}{d\eta} d\xi \right).$$

On voit tout de suite que les suites $\frac{du_n}{d\xi}$, $\frac{du_n}{d\eta}$ convergeant uniformément (en vertu du théorème de Harnack) et ayant pour limites $\frac{du}{d\xi}$, $\frac{du}{d\eta}$, la suite v_n convergera uniformément et aura pour limite v; nous reviendrons plus loin sur ce résultat pour le préciser. Posons ensuite, toujours comme dans le Mémoire cité,

$$z = e^{-u-iv}, \qquad z_n = e^{-(u_n+iv_n)},$$

il est clair que la suite z_n a pour limite z. Le point essentiel, c'est que la fonction z est uniforme sur le domaine D quand ce domaine est simplement connexe.

En effet revenons aux intégrales (2) qui définissent v, ces intégrales peuvent admettre deux sortes de périodes :

1° Une période polaire, relative au point O qui est un infini pour les fonctions sous le signe $\int$. Cette période est égale à 2π.

2° Si D n'est pas simplement connexe, des périodes cycliques relatives aux chemins d'intégration qui seraient fermés sans être équivalents à zéro. Si D est simplement connexe, ces dernières périodes n'existent pas, de sorte que v n'admet que la période 2π; mais quand v augmente de 2π, z ne change pas. Cette fonction est donc uniforme. C. Q. F. D.

Mais il y a lieu d'examiner de plus près la formation de ces fonctions v_n et z_n. Soit d'abord C_0 l'élément initial, celui qui contient le point O. Nous aurons à l'extérieur de C_0 : $z_0 = 1$ et à l'intérieur de C_0

$$z_0 = \frac{x-a}{x-a'} \frac{X-a'}{X-a},$$

expression dont je vais expliquer la signification; x est la variable indépendante, c'est l'affixe du point M de coordonnées courantes ξ et η; a est l'affixe du point O, a' celle du point O' inverse de O par rapport au cercle C_0, de telle sorte que l'équation de la circonférence de C_0 soit

$$\left| \frac{x-a}{x-a'} \right| = \text{const.}$$

X sera l'affixe d'un point quelconque de cette circonférence, il en résulte que la fonction z_0 n'est pas entièrement définie, puisque nous pouvons choisir arbitrairement X sur cette circonférence : z_0 n'est définie qu'à un facteur constant près de module 1.

Ayant ainsi défini z_0, voyons comment les balayages successifs vont nous permettre de passer de z_n à z_{n+1}. Nous remarquerons que les fonctions z_n peuvent présenter des discontinuités le long des lignes L, c'est-à-dire le long des circonférences des différents éléments ; voyons quelle est la nature de ces discontinuités. D'abord u_n est continu ; il en résulte que quand on franchit une des lignes de discontinuité, le module de z_n ne change pas, mais il n'en est pas de même de son argument $-v_n$. Les dérivées de u_n sont au contraire discontinues. Soient ds un élément de l'arc d'une des lignes L, $d\nu$ un élément normal à cette ligne ; soient

$$\frac{du_n^0}{ds},\quad \frac{du_n^0}{d\nu},\quad \frac{du_n^1}{ds},\quad \frac{du_n^1}{d\nu}$$

les dérivées de u_n prises le long de L, ou le long de la normale à L ; l'exposant 0 correspondant à l'un des côtés de la ligne L, l'exposant 1 à l'autre côté. De même pour les dérivées de v_n. On aura

$$\frac{du_n^0}{ds} = \frac{du_n^1}{ds},\qquad \frac{du_n^0}{d\nu} = \frac{du_n^1}{d\nu} - 2\pi m',$$

en désignant par dm ce que nous avons appelé la masse génératrice située sur ds, et en posant $m' = \frac{dm}{ds}$ de façon que m' représente la densité de cette matière génératrice. D'autre part les équations (1) nous donnent

$$\frac{du_n}{ds} = -\frac{dv_n}{d\nu},\qquad \frac{du_n}{d\nu} = \frac{dv_n}{ds},$$

et on en conclut

$$(3)\qquad \frac{dv_n^0}{d\nu} = \frac{dv_n^1}{d\nu},\qquad \frac{dv_n^0}{ds} = \frac{dv_n^1}{ds} + 2\pi m'.$$

Cela posé, supposons que pour passer de z_n à z_{n+1} on veuille balayer un certain élément C_k, et je supposerai d'abord qu'il s'agisse d'un élément holomorphe ou polaire. A l'extérieur de C_k nous aurons

$$z_{n+1} = z_n,$$

et à l'intérieur de C_k

$$(4)\qquad \log \frac{z_{n+1}}{z_n} = \int \log \frac{(x-\alpha)(X-\alpha')}{(x-\alpha')(X-\alpha)}\, dm.$$

Dans cette expression, x est la variable indépendante; α est l'affixe d'un point d'une ligne de discontinuité L situé à l'intérieur de C_k; α' est l'affixe du point inverse de α par rapport à C_k, de telle façon que la circonférence de C_k ait pour équation

$$\left| \frac{x-\alpha}{x-\alpha'} \right| = \text{const.}$$

X est l'affixe d'un point quelconque de la circonférence de C_k, choisi arbitrairement, mais une fois pour toutes; dm est la masse génératrice située sur l'arc infiniment petit ds de la ligne L, arc dont le centre de gravité est α. Enfin l'intégration doit être étendue à toutes les lignes de discontinuité intérieures à C_k. A cause des équations (3) nous pouvons encore écrire

$$(4\ bis)\qquad \log \frac{z_{n-1}}{z_n} = \int \log \frac{(x-\alpha)(X-\alpha')}{(x-\alpha')(X-\alpha)}\, d\left(\frac{v_n'' - v_n'}{2\pi}\right),$$

v_n'' et v_n' étant les valeurs de la fonction v_n de part et d'autre de la ligne de discontinuité et dans le voisinage du point α de cette ligne.

Si C_k est un élément *infini*, c'est-à-dire comprenant la partie du plan *extérieure* à la circonférence de C_k, nous aurons en dehors de l'élément C_k, $z_{n+1} = z_n$, et dans l'élément C_k, qui est tout entier à l'extérieur de la circonférence de C_k

$$(4\ ter)\qquad \log \frac{z_{n+1}}{z_n} = \int \log \frac{(x-\alpha)(X-\alpha)}{(x-\alpha)(X-\alpha)}\, d\left(\frac{v_n' - v_n''}{2\pi}\right).$$

Si enfin C_k est un élément algébrique et si C_k est un cercle p^{ple}, on aura à l'extérieur de C_k : $z_{n+1} = z_n$ et à l'intérieur de C_k

$$(4\ quater)\qquad \log \frac{z_{n-1}}{z_n} = \int \log \frac{(\sqrt[p]{x} - \sqrt[p]{\alpha})(\sqrt[p]{X} - \sqrt[p]{\alpha'})}{(\sqrt[p]{x} - \sqrt[p]{\alpha'})(\sqrt[p]{X} - \sqrt[p]{\alpha})}\, d\left(\frac{v_n'' - v_n'}{2\pi}\right).$$

On voit qu'à cause des points X qui peuvent être arbitrairement choisis sur la circonférence de l'élément C_k, les fonctions z_n successives ne sont définies qu'à un facteur constant près de module 1 ; et encore ce facteur n'est constant que si l'on ne franchit pas une des lignes de discontinuité, mais il peut varier brusquement quand on franchit ces lignes.

Supposons un chemin ne franchissant et ne touchant aucune de ces lignes de discontinuité, c'est-à-dire aucune des circonférences des différents éléments, et envisageons l'intégrale

$$\int dv_n = \int \left(\frac{du_n}{d\xi} d\eta - \frac{du_n}{d\eta} d\xi \right)$$

prise le long d'un de ces chemins. Puisque le chemin n'a aucun point commun avec aucune des lignes de discontinuité, on peut contruire une aire où il n'y aura aucune ligne de discontinuité et qui contiendra notre chemin. Dans cette aire toutes les fonctions u_n sont harmoniques et on peut leur appliquer le théorème de Harnack; donc la suite des $\frac{du_n}{d\xi}$ et celle des $\frac{du_n}{d\eta}$ convergent uniformément, de sorte que $\int dv_n$ tend vers $\int dv$.

Si nous supposons maintenant que notre chemin, tout entier contenu à l'intérieur d'un élément C_h, coupe une ligne de discontinuité L; le même raisonnement n'est plus immédiatement applicable. Et en effet les fonctions u_n sont bien toutes positives, croissent avec n; de plus elles sont harmoniques dans l'aire envisagée, si l'on donne à n certaines valeurs en nombre infini, à savoir celles qui correspondent aux balayages successifs de l'élément C_h, parce qu'après chacun de ces balayages, il n'y a plus de masses génératrices dans C_h. Donc par le théorème de Harnack la suite des u_n et celle des $\frac{du_n}{d\xi}$ convergent uniformément pourvu qu'on ne donne à n que ces valeurs particulières. Mais comme u_n croît avec n, nous pouvons en conclure que la suite des u_n convergera encore uniformément pour toutes les valeurs entières de n; seulement la même conclusion ne s'impose pas en ce qui concerne les dérivées $\frac{du_n}{d\xi}$, qui ne vont pas nécessairement en croissant avec n. Décomposons notre chemin en deux parties séparées l'une de l'autre par le point d'intersection P du chemin et de la ligne L. Il suffirait de démontrer le théorème pour ces deux parties. Soit PM l'une de ces parties; si nous pouvions assigner aux dérivées de u_n une limite supérieure λ, même au point P, le théorème serait démontré. En effet, nous voulons démontrer que l'on peut prendre n assez grand pour que

$$\int_{PM} (dv - dv_n) < \varepsilon,$$

quel que soit ε.

Pour cela nous diviserons PM en deux parties PN + NM; si s est la longueur de l'arc PN, et λ la limite supérieure dont nous venons de parler, nous aurons

$$\int_{\text{PM}} (dv - dv_n) < s\lambda,$$

et nous pourrons prendre N assez près de P pour que $s\lambda < \frac{\varepsilon}{2}$, et le point N une fois choisi, comme NM ne va plus jusqu'à la ligne L, nous pourrions prendre n assez grand pour que

$$\int_{\text{NM}} (dv - dv_n) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nous sommes donc conduits à chercher cette limite supérieure λ et pour cela à étudier la façon dont les masses se distribuent sur les lignes L. Soit une masse m située à l'intérieur d'un cercle C_k, en A; soit B un point de la circonférence C_k, et R le rayon de cette circonférence, et O son centre. Balayons le cercle C_k, cette masse m va se répartir sur toute la circonférence C_k; soit δ la densité de la matière ainsi répartie dans le voisinage de B. On voit que $\frac{\delta}{m}$ est une fonction des trois distances OA, OB, AB, et que cette fonction ne devient infinie que pour AB = 0. Si le point A décrit une ligne de discontinuité L intérieure à C_k, et si B est un point fixe de la circonférence C_k non situé sur L, nous pourrons donc assigner une limite supérieure à $\frac{\delta}{m}$.

Supposons donc que B soit un point d'une circonférence C_k, mais ne soit pas à l'intersection de C_k avec une autre ligne de discontinuité; je me propose de chercher une limite supérieure de la densité de la matière attirante en ce point. Cette densité ne peut varier que dans deux cas :

1° Quand on balaye C_k;
2° Quand on balaye l'un des éléments dont fait partie B.

Dans le deuxième cas cette densité devient nulle. Dans le premier cas une masse négative au plus égale à 1 en valeur absolue est répartie en différents points A de C_k; on la balaye vers la circonférence de C_k; les points A sont sur les lignes de discontinuité intérieures à C_k, et comme le point B n'est pas sur une de ces lignes, nous pouvons assigner une limite supérieure à la distance AB, et par conséquent d'après ce qui précède au rapport $\frac{\delta}{m}$, de l'accroissement δ de densité au point B, par suite du balayage d'une masse m située en A, à cette masse m. Nous avons ainsi une limite supérieure de $\frac{\Sigma\delta}{\Sigma m}$, et comme Σm est au plus égale à 1, nous avons une limite H de $\Sigma\delta$, c'est-à-dire de l'accroissement total de la densité en B par suite du balayage de C_k. *Si nous supposons qu'entre deux balayages consécutifs de* C_k, *on balaye toujours l'un des éléments dont fait partie* B, nous voyons qu'avant chaque balayage de C_k, la densité en B est nulle; après ce balayage elle prend une valeur inférieure à H (limite de $\Sigma\delta$) et la conserve jusqu'à ce qu'on balaye un des éléments dont fait partie B, elle redevient alors nulle. *La densité au point* B *est donc limitée.*

Je dis maintenant que les dérivées $\frac{du_n}{d\xi}$, $\frac{du_n}{d\eta}$ sont limitées au point B. Décrivons en effet autour du point B un petit cercle K. Soit φ_n le potentiel logarithmique dû à l'attraction des masses situées à l'intérieur de K et qui sont toutes sur la circonférence de C_k; les densités étant limitées, φ_n et ses dérivées seront limitées; la fonction u_n qui est plus petite que u est limitée. La différence $u_n - \varphi_n$ est donc limitée à l'intérieur de K et sur la circonférence; de plus cette différence $u_n - \varphi_n$ est harmonique à l'intérieur de K; nous pouvons donc par l'application du théorème de Harnack, trouver une limite supérieure des dérivées de $u_n - \varphi_n$, et par conséquent de celles de u_n, puisque celles de φ_n sont limitées. C. Q. F. D.

Ce qui précède ne s'appliquerait pas à un point B qui serait à l'intersection de deux lignes de discontinuité; on verrait en effet qu'en un pareil point, la densité pourrait devenir logarithmiquement infinie (je veux dire que la densité en un point B' de C_k, très voisin de B est de l'ordre de logarithme de la distance BB'). Il en est de même pour les dérivées de u_n. Au contraire la fonction u_n elle-même, toujours plus petite que u, reste finie.

Mais nous pouvons toujours éviter de faire passer nos chemins d'intégration par ces points d'intersections des lignes de discontinuité. Le résultat resterait le même d'ailleurs si on les y faisait passer, car bien que $\frac{du_n}{d\xi}$ devienne logarithmiquement infinie, l'intégrale $\int \frac{du_n}{d\xi} d\eta$ resterait finie. Il résulte de là que l'intégrale

$$\int (dv - dv_n),$$

prise le long d'un chemin quelconque tend vers zéro quand n croît indéfiniment.

On a vu que les fonctions z_n ne sont définies qu'à un facteur constant près de module 1 qui peut varier brusquement quand on franchit une des lignes L, ou ce qui revient au même que les fonctions v_n ne sont définies qu'à une constante près qui varie brusquement quand on franchit une des lignes L. Les fonctions v_n outre les variations continues

$$\frac{du_n}{d\xi}d\eta - \frac{du_n}{d\eta}d\xi$$

qu'elles subissent quand on décrit un chemin quelconque, subissent donc des variations brusques quand on franchit une ligne L.

On peut pour achever de définir les v_n, convenir que ces variations brusques en certains points de certaines lignes L, doivent être nulles. Mais ces variations ne peuvent être nulles partout. Envisageons en effet les intégrales

$$\int dv, \quad \int dv_n,$$

prises le long d'un chemin fermé quelconque. Elles sont égales à 2π multiplié par la somme des masses intérieures au contour d'intégration. Pour v, il ne peut y avoir que la masse $+1$ située au point O; pour v_n il peut y avoir en outre des masses négatives sur les lignes L. Si donc le contour enveloppe le point O, la première intégrale sera égale à 2π et la deuxième généralement plus petite que 2π; si le contour n'enveloppe pas le point O, la première intégrale sera égale à zéro et la deuxième généralement négative.

VI. — Les fonctions $u_{p,n}$.

Nous avons dit que la fonction u obtenue était indépendante de l'ordre des balayages; mais nous avons jusqu'ici supposé que ceux-ci étaient dirigés de telle façon que l'on pouvait trouver une fonction u_n *dont l'indice n est un entier fini* et pour laquelle un élément quelconque aurait été balayé un nombre de fois aussi grand qu'on le veut. Nous considérions alors la série

$$u = u_0 + (u_1 - u_0) + \ldots + (u_{n+1} - u_n) + \ldots$$

comme une série ordinaire; nous pouvons aussi la traiter comme une série à double entrée.

Supposons une suite de fonctions *à deux indices* $u_{n,p}$. La première $u_{0,0}$ sera celle que nous appelions jusqu'ici u_0; $u_{0,n+1}$ se déduira de $u_{0,n}$ par le balayage d'un certain élément C_k; $u_{1.0}$ sera la limite de $u_{0.n}$ pour $n = \infty$; $u_{1.n+1}$ se déduira de $u_{1.n}$ par un balayage; $u_{2.0}$ sera la limite de $u_{1.n}$ pour $n = \infty$; et ainsi de suite; $u_{p.n+1}$ se déduira de $u_{p.n}$ par un balayage, et $u_{p+1.0}$ sera la limite de $u_{p.n}$ pour $n = \infty$. Il est clair que l'on aura

$$u_{p+1.m} > u_{p+1.0} > u_{p.n+1} > u_{p.n} > u_{p.0} > \dots > u_{0.0} > 0.$$

On verrait comme plus haut que

$$u > u_{p.n},$$

ce qui montrerait que la suite des $u_{p.n}$ quand n puis p tendent vers l'infini a une limite $\leqq u$; et comme cette limite est une fonction harmonique en vertu du théorème de Harnack, elle est plus grande que les u_n que nous avions envisagés dans les paragraphes précédents. Elle est donc $\geqq u$; elle est donc égale à u; c'est toujours le raisonnement de la fin du paragraphe III qui s'applique sans changement.

Nous pouvons, par exemple, considérer une série de domaines

$$d_0, \quad d_1, \quad d_2, \quad \dots$$

contenus dans notre domaine D, et tels que chacun d'eux soit contenu dans le suivant. De plus chacun d'eux sera formé d'un nombre fini d'éléments de D. Alors nous supposerons que les balayages qui font passer de $u_{0.n}$ à $u_{0.n+1}$ ne portent que sur les éléments de d_0 et de telle façon que chacun d'eux soit balayé une infinité de fois; que les balayages qui font passer de $u_{1.n}$ à $u_{1.n+1}$ ne portent que sur les éléments de d_1 et cela de telle façon que chacun d'eux soit balayé une infinité de fois; et ainsi de suite.

Dans ces conditions, il est clair que $u_{1.0}$ est harmonique dans tout le domaine d_0, et nul (de même que toutes fonctions $u_{0.n}$) en dehors de ce domaine et sur ses frontières; que $u_{2.0}$ est harmonique dans tout le domaine d_1 et nul (de même que toutes les fonctions $u_{1.n}$) en dehors de ce domaine d_1 et sur ses frontières et ainsi de suite.

Toutes les conclusions des paragraphes précédents s'appliquent sans changement; on peut définir les fonctions $v_{n.p}$ et $z_{n.p}$ à l'aide des $u_{n.p}$ comme on a défini les v_n et les z_n à l'aide des u_n. On pourrait seulement se demander si l'on peut encore comme au paragraphe précédent limiter la densité des masses génératrices en un point B, et si les conséquences déduites de cette limitation subsistent. Il faut pour cela, comme nous l'avons dit, que (si B est sur la circonférence de C_k) entre deux balayages consécutifs de C_k, on balaye toujours l'un des éléments dont fait partie B. Il est clair qu'on peut remplir cette condition pour les fonctions $u_{0,n}$ si B est à l'intérieur du domaine d_0 et *non pas sur sa frontière;* pour les fonctions $u_{1,n}$ si B est à l'intérieur du domaine d_1 et non pas sur sa frontière, et ainsi de suite. Quelle que soit donc la position de B, on pourra prendre p assez grand, pour que la condition ne cesse plus d'être remplie à partir du moment où l'on aura formé la fonction $u_{p,1}$. Nous pouvons donc raisonner comme au paragraphe précédent et conclure que

$$\int (dv - dv_{p,n})$$

prise le long d'un chemin quelconque, tend vers zéro, quand on fait tendre n puis p vers l'infini.

Dans le Mémoire cité (*Bull. Soc. Math.*) nous avons envisagé seulement les fonctions

$$u_{1,0}, \quad u_{2,0}, \quad \ldots, \quad u_{p,0}, \quad \ldots$$

qui sont les fonctions de Green relatives aux domaines successifs

$$d_1, \quad d_2, \quad \ldots, \quad d_p, \quad \ldots.$$

Nous y trouvions l'avantage que la fonction $u_{p,0}$ est harmonique à l'intérieur du domaine d_p, de sorte que la fonction $z_{p,0}$ est uniforme et continue dans le domaine d_p (ce qui n'arrive pas pour les fonctions z_n susceptibles comme nous l'avons vu de variations brusques). Nous évitions ainsi en partie la discussion du paragraphe précédent; j'ai cru pourtant que cette discussion était par elle-même instructive et je n'ai pas voulu pour cette raison me servir ici du même artifice.

VII. — Propriétés de la fonction z.

Faisons maintenant varier la position du point O: et amenons-le en O' (le sens de cette notation O' n'est donc plus le même qu'au paragraphe III; O et O' désignent simplement deux points quelconques du domaine D). On peut former deux fonctions de Green u et u' devenant logarithmiquement infinies, l'une en O, l'autre en O', et ce sont ces deux fonctions que je me propose de comparer.

Nous pourrons diriger les balayages soit comme au paragraphe III, soit comme au paragraphe VI; nous aurons dans le premier cas une suite de fonctions u_n, dans le second cas une suite de fonctions à double indice $u_{p.n}$; mais ces deux suites ont même limite. Nous désignerons par u'_n, $u'_{p.n}$, v'_n, $v'_{p.n}$, z'_n, $z'_{p.n}$, les fonctions qui sont à u' ce que u_n, $u_{p.n}$, v_n, $v_{p.n}$, z_n, $z_{p.n}$ sont à u.

Considérons en particulier les fonctions $z_{p.0}$, $z'_{p.0}$; soit a_p la valeur de $z_{p.0}$ en O' et a'_p celle de $z'_{p.0}$ en O. Je dis que $z_{p.0}$ ne pourra prendre qu'une seule fois la valeur a_p: prenons en effet l'intégrale

$$\int \frac{dz_{p.0}}{z_{p.0}-a_p} \tag{1}$$

le long de la frontière du domaine d_{p-1}; elle est égale à $2i\pi$; en effet quand nous ferons le tour de cette frontière, le point $z_{p.0}$ décrira un cercle de rayon 1 puisque $u_{p.0}$ est nul sur toute cette frontière, et il le décrira une fois et une seule. En effet $\int dv_{p.0}$ est égal à 2π, puisqu'en ce qui concerne cette fonction $u_{p.0}$ il n'y a à l'intérieur du domaine d_{p-1} d'autre masse génératrice qu'une masse $+1$ au point O. Le point a_p est d'ailleurs à l'intérieur du cercle de rayon 1 décrit par le point $z_{p.0}$; l'intégrale (1) est égale à $2i\pi$. Or cette intégrale est égale à $2i\pi$ multipliée par le nombre de fois que la fonction $z_{p.0}$ prend la valeur a_p à l'intérieur de d_{p-1}. Donc la fonction ne prend qu'une seule fois cette valeur. C. Q. F. D.

Cette démonstration ne peut donner lieu ici à aucune objection, car le domaine d_{p-1} se composant d'un nombre fini d'éléments, sa frontière se compose d'un nombre fini d'arcs de cercle; la fonction $u_{p.0}$ peut être ainsi définie, comme l'a montré M. Schwarz, à l'aide d'une équation différentielle linéaire à coefficients rationnels, de la même façon que les fonctions fuchsiennes. On pourrait d'ailleurs appliquer l'un quelconque des procédés pour la démonstration complète du principe de Dirichlet quand la frontière du domaine envisagé est formée de lignes analytiques, ou plus généralement quand elle a un rayon de courbure déterminé (cf. *American Journal*, p. 227, 228 et 229). Il n'y aurait rien à y changer.

Nous sommes donc certains que $u_{p.0}$ tend bien vers zéro quand on se rapproche indéfiniment de la frontière de d_{p-1}; et l'on peut appliquer les résultats obtenus plus haut, non seulement à l'intérieur, mais à la frontière de d_{p-1}. On démontrerait de la même manière que $z'_{p.0}$ ne peut prendre qu'une seule fois la valeur a'_p.

Cela posé soient ρ_p et φ_p le module et l'argument de a_p, envisageons le rapport

$$R = z'_{p.0} \frac{\rho_p z_{p.0} - e^{i\varphi_p}}{z_{p.0} - \rho_p e^{i\varphi_p}}.$$

Je dis que ce rapport ne peut, à l'intérieur de d_{p-1}, devenir ni nul, ni infini; en effet $z'_{p.0}$ et $z_{p.0}$ étant finis à l'intérieur de ce domaine, R ne pourrait devenir nul ou infini, que si l'on avait :

1° ou bien $z'_{p.0} = 0$, ce qui ne peut arriver qu'au point O;

2° ou bien $\rho_p z_{p.0} - e^{i\varphi_p} = 0$, ce qui est impossible puisque $\rho_p < 1$, $|z_{p.0}| < 1$, $|e^{i\varphi_p}| = 1$;

3° ou bien $z_{p.0} - \rho_p e^{i\varphi_p} = 0$, ou $z_{p.0} = a_p$; ce qui a lieu en O′ par hypothèse, et ne peut avoir lieu en aucun autre point par suite du théorème que nous venons de démontrer.

Il n'y aurait donc que pour le point O′, et en ce point le numérateur et le dénominateur s'annulent et la fraction reste finie.

Donc $\log|R|$ est une fonction harmonique à l'intérieur de d_{p-1}.

De plus quand on décrit la frontière de d_{p-1}, on a

$$|z_{p.0}| = |z'_{p.0}| = |R| = 1,$$

d'où $\log|R| = 0$; cette fonction s'annulant à la frontière du domaine et étant harmonique dans tout le domaine, doit s'annuler dans tout le domaine. Donc R est une constante dont le module est égal à 1.

Pour déterminer cette constante je donnerai aux fonctions leurs valeurs au point O, c'est-à-dire

$$z'_{p.0} = a'_p, \qquad z_{p.0} = 0, \qquad R = \frac{a'_p}{\rho_p}.$$

On a donc entre $z'_{p.0}$ et $z_{p.0}$ la relation linéaire

$$z'_{p.0} = \frac{a'_p}{\rho_p} \frac{z_{p.0} - \rho_p e^{i\varphi_p}}{\rho_p z_{p.0} - e^{i\varphi_p}}. \tag{2}$$

Soit maintenant

$$a = \rho e^{i\varphi}$$

la valeur de z au point O′, et a' la valeur de z' au point O. Faisons croître p

indéfiniment, $z_{p,n}$, $z'_{p,n}$, α_p, ρ_p, φ_p, α'_p tendront vers z, z', α, ρ, φ, α', et à la limite la relation (2) devient

$$(3)\qquad z' = \frac{\alpha'}{\rho}\,\frac{z - \rho e^{i\varphi}}{\rho z - e^{i\varphi}}.$$

Donc *les deux fonctions z et z' sont liées par une relation linéaire*. Ce n'est pas tout; z' ne peut s'annuler qu'une fois; à savoir au point O'. Donc z ne peut prendre qu'une fois la valeur α, c'est-à-dire la valeur qu'il prend au point O'; *et comme* O' est quelconque, *la fonction z ne peut prendre qu'une seule fois la même valeur*.

VIII. — Représentation conforme du domaine D sur un cercle.

Résumons les résultats obtenus; nous avons vu qu'il existe une fonction analytique z du domaine D, qui ne peut prendre que des valeurs de module plus petit que 1, et qui ne peut prendre chacune de ces valeurs qu'une seule fois, mais nous ne savons pas encore si elle peut prendre toutes ces valeurs. En d'autres termes, traçons dans le plan des z le cercle K, de centre O et de rayon 1. Nous aurons une représentation conforme du cercle K sur le domaine D, de telle façon qu'à tout point de D corresponde un point de K et un seul, et qu'à tout point de K ne puisse correspondre plus d'un point de D. Mais nous ne savons pas encore si à tout point de K correspond un point de D. C'est ce dernier point qu'il s'agit d'établir.

Nous serons donc amenés à distinguer dans K deux ensembles de points :

1° l'ensemble E des points de K auxquels correspond un point de D;

2° l'ensemble E_1 des points de K auxquels ne correspond aucun point de D.

Je me propose de démontrer que l'ensemble E comprend tout l'intérieur de K et que l'ensemble E_1 se réduit à la circonférence de K.

Observons d'abord que autour de tout point de E on peut décrire un cercle de rayon assez petit pour que tous les points intérieurs à ce cercle appartiennent également à E, et en effet la fonction z étant analytique, à toute aire de D correspondra une aire de K. L'ensemble E ne contient donc pas de points isolés, et est contenu dans son propre dérivé E'. En revanche E' contiendra des points qui n'appartiendront pas à E et qui représenteront la *frontière* de E.

Aux différents éléments C_k de D correspondront des aires γ_k du cercle K: toutes ces aires feront partie de E. Deux de ces aires ne pourront avoir de points communs que si elles correspondent à deux éléments *contigus* de D, c'est-à-dire à deux éléments tels que certains points de l'un soient identiques à certains points de l'autre, puisqu'à un point de K ne peut correspondre qu'un seul point de D (*cf.* paragraphe II). Je remarque d'autre part que l'ensemble E est *simplement connexe*, je veux dire par là que si une courbe fermée fait partie de E, tous les points intérieurs à cette courbe feront également partie de E. Cela résulte de ce fait que le domaine D est lui-même simplement connexe.

Si alors tous les points d'une courbe fermée C font partie de E, c'est-à-dire ont leurs images sur D, l'ensemble de ces images formeront aussi une courbe fermée. D étant simplement connexe, cette courbe enfermera une aire faisant partie de D. Les images sur K des différents points de cette aire formeront à leur tour une aire qui ne sera autre chose que l'aire limitée par C.

Si C est une circonférence de centre O, il n'y aura à l'intérieur de cette circonférence aucun point de E_1; si donc il n'y a pas de points de E_1 dont la distance à O soit égale à a, il n'y en aura pas non plus dont la distance soit plus petite que a.

Cela posé, nous allons donner de notre proposition une première démonstration fondée sur la méthode de Osgood.

Soit q un point quelconque de la frontière de E, soient q_1 et q_2 deux autres points de E_1 d'ailleurs quelconques. Construisons une fonction fuchsienne

$$\varphi(w)$$

définie de la façon suivante :

1° elle ne devra prendre aucune des trois valeurs

$$q, \quad q_1, \quad q_2.$$

2° le polygone générateur aura tous ses sommets sur le cercle fondamental (c'est-à-dire qu'il sera de la troisième famille); ce sera un quadrilatère dont les côtés seront conjugués deux à deux, de façon que deux côtés conjugués soient adjacents (c'est-à-dire qu'il sera de genre zéro); quand w se rapprochera de l'un des quatre sommets, $\varphi(w)$ tendra vers respectivement q, q_1, q_2 ou q_1 [de sorte que notre fonction $\varphi(w)$ sera liée à la fonction modulaire par une relation linéaire simple].

3° de plus on aura

$$\varphi(0) = 0.$$

Posons alors

$$z = \varphi(w),$$

on voit que w est une fonction multiforme de z et qui ne peut prendre que des valeurs dont le module est plus petit que 1. Quand z tend vers q, le module de toutes les déterminations de w tend vers l'unité, je précise : si parmi toutes les déterminations de w, celle dont le module est le plus petit est w_0, le module $|w_0|$ est plus grand qu'une fonction $\theta(|z-q|)$ qui tend vers l'unité quand $|z-q|$ tend vers zéro.

J'observe de plus qu'*à l'intérieur de* E la fonction w peut être regardée comme uniforme. En effet, cet ensemble E étant simplement connexe, une courbe fermée tracée sur E ne peut contenir à son intérieur que des points de E; elle ne peut donc contenir aucun des trois points singuliers q, q_1, q_2. Nous choisirons la détermination de w qui s'annule pour $z = 0$.

Posons alors

$$t = \log\left|\frac{1}{w}\right|,$$

cette fonction t sera harmonique dans E sauf en O où elle devient logarithmiquement infinie; de plus elle est toujours positive.

Comparons-la à une des fonctions u_n; ces fonctions, harmoniques dans D, le seront aussi sur K, puisque la représentation de D sur K est conforme. Il n'y aura d'exception que pour le point O où ces fonctions deviendront logarithmiquement infinies et pour les lignes correspondant aux lignes de discontinuité L des paragraphes précédents et qui en sont l'image sur K; dans le voisinage de ces lignes que nous appellerons l, les fonctions u_n se comportent comme des potentiels logarithmiques engendrés par des masses *négatives* répandues sur ces lignes.

La différence $t - u_n$ sera donc une fonction harmonique (même au point O) sauf sur les lignes l où elle se comportera comme un potentiel logarithmique engendré par des masses *positives* répandues sur ces lignes; elle pourra donc avoir des *maxima*, mais pas de minima.

Soit alors e_n l'ensemble des points appartenant aux divers éléments que l'on a dû successivement balayer pour obtenir u_n; sur la frontière de e_n et en déhors de e_n, on a

$$t > 0, \qquad u_n = 0, \qquad t - u_n > 0,$$

on aura donc aussi à l'intérieur de e_n (où il ne peut pas y avoir de minima)

$$t - u_n > 0, \qquad t > u_n,$$

et comme cela a lieu quel que soit n, on a dans E, à la limite

$$t > u.$$

Mais nous pouvons trouver une suite de points

$$m_1, \quad m_2, \quad \ldots, \quad m_h, \quad \ldots$$

qui appartiennent à E et qui se rapprochent indéfiniment de q, puisque q fait partie de E'. Si

$$\lim m_h = q, \qquad \lim \theta(|m_h - q|) = 1.$$

Soient t_h et w_h les valeurs de t et de w correspondant à m_h, on aura

$$|w_h| > \theta(|m_h - q|), \qquad \lim |w_h| = 1, \qquad \lim t_h = 0.$$

Or $u = \log\left|\frac{1}{z}\right|$ et se réduit à $\log\left|\frac{1}{m_h}\right|$ pour $z = m_h$. L'inégalité $t > u$ nous donne donc

$$t_h > \log\left|\frac{1}{m_h}\right| > 0.$$

On a donc

$$\lim \log\left|\frac{1}{m_h}\right| = 0,$$

et à la limite

$$\log\left|\frac{1}{q}\right| = 0, \qquad |q| = 1.$$

Le point q est donc sur la circonférence du cercle K, et comme q est quelconque, tous les points de la frontière sont sur cette circonférence, c'est-à-dire que E comprend tous les points intérieurs à K.

C. Q. F. D.

Nous allons donner de la même proposition une seconde démonstration.

Remarquons d'abord que les u_n considérées comme fonctions de z vont se comporter comme des potentiels logarithmiques; et *les masses génératrices seront les mêmes que les masses correspondantes, quand on regardait les* u_n *comme fonctions de* $x = \xi + i\eta$. Je ne veux pas dire que les *densités* restent les mêmes, parce que les aires et les longueurs sur K ne sont pas égales aux aires et aux longueurs sur D; mais dans deux aires, ou dans deux arcs correspondants, les quantités totales de matière attirante sont les mêmes. Je fais en passant cette remarque bien qu'elle ne doive jouer aucun rôle essentiel dans la démonstration qui va suivre, parce qu'elle découle immédiatement des propriétés de la représentation conforme.

Nous allons nous appuyer sur l'un des théorèmes de Green, qui est le suivant. Soient V et V' deux potentiels par exemple logarithmiques, on aura l'identité

$$\Sigma m V' = \Sigma m' V, \tag{1}$$

les masses m sont celles qui engendrent le potentiel V, et chacune d'elles doit être multipliée par la valeur de V' au point occupé par cette masse. De même les masses m' sont celles qui engendrent V', chacune d'elles doit être multipliée par la valeur correspondante de V.

Nous allons appliquer ce théorème :

1° A la fonction u regardée comme fonction de z, c'est un potentiel logarithmique engendré par une masse $+1$ située au point O, et par des masses négatives $-m$ réparties sur la circonférence de K.

2° A la fonction u_n regardée comme fonction de z, c'est un potentiel logarithmique engendré par une masse $+1$ située au point O, et par des masses négatives $-m_n$ réparties sur les lignes de discontinuité l.

3° A un potentiel auxiliaire w que nous allons définir.

Soit

$$|z| = r = e^{-u}.$$

Soit W un potentiel logarithmique, dû à des masses μ, toutes positives et toutes situées à l'intérieur de K et au sujet desquelles je suppose :

1° que la somme des masses μ contenues entre les deux circonférences concentriques à K et de rayons r' et $r'+dr'$, que cette somme, dis-je, est égale à $h'\,dr'$, h' étant une fonction quelconque de r', positive et finie;

2° que si sur la circonférence de rayon r', il y a des points de E_1, toutes les masses μ qui se trouvent sur cette circonférence, sont sur E_1.

Si alors r' et θ' sont les coordonnées polaires de la masse attirante μ; si $r=e^{-u}$, $\theta=-v$ sont celles du point attiré, on aura

$$W = \Sigma\mu \log \frac{1}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos(\theta-\theta')}}.$$

Soit W' le potentiel que l'on déduit de W en *balayant* le cercle K; il est dû à des masses positives μ' situées sur la circonférence de K, et il est égal à W en dehors de K et sur la circonférence de K. Posons enfin

$$w = W - W'.$$

Le potentiel w est alors dû aux masses μ et $-\mu'$; il est égal à zéro hors de K et sur la circonférence de K. A l'intérieur de K on a

$$w = \Sigma\mu \log \sqrt{\frac{r^2 r'^2 + 1 - 2rr'\cos(\theta - \theta')}{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(\theta - \theta')}} > 0.$$

Le radical du second membre, quand on fait varier $\theta - \theta'$, atteint son maximum pour $\theta - \theta' = 0$ et cela quels que soient r et r' (qui sont < 1). On a donc

$$w < \Sigma\mu \log \frac{1 - rr'}{r - r'} = \int_0^1 h'\,dr' \log \frac{1 - rr'}{r - r'}.$$

On voit aisément que le dernier membre est toujours fini et positif; qu'il s'annule pour $r = 1$ et *que si* h' *s'annule pour* $r' = 1$, si par exemple $h' = 1 - r'$, il s'annule comme u, de sorte que le rapport de w à u reste fini. On peut donc trouver une quantité positive λ telle que

$$(2) \qquad w < \lambda u.$$

La formule (1) appliquée à u et à u_n nous donne

$$(u - u_n)_0 = \Sigma m_n u - \Sigma m u_n.$$

Le premier membre représente la valeur de $u - u_n$ au point O où sont les deux masses $+1$; dans le second membre, il faut donner à u les valeurs correspondant aux diverses masses m_n et à u_n les valeurs correspondant aux diverses masses m. Mais ces dernières masses sont toutes sur K et sur cette circonférence u_n est nul. Nous pouvons donc écrire

$$(3) \qquad (u - u_n)_0 = \Sigma m_n u.$$

Appliquons maintenant le théorème de Green à u et à w, il viendra

$$(4) \qquad w_0 - \Sigma m w = \Sigma\mu u - \Sigma\mu' u.$$

w_0 étant la valeur de w en zéro. De même en l'appliquant à u_n et à w :

$$(5) \qquad w_0 - \Sigma m_n w = \Sigma\mu u_n - \Sigma\mu' u_n.$$

Toutes les masses μ' sont sur la circonférence K de même que toutes les masses m, or sur K on a

$$w = u = u_n = 0.$$

Nos équations peuvent donc s'écrire

$$(4\ bis) \qquad w_0 = \Sigma \mu u,$$

$$(5\ bis) \qquad w_0 - \Sigma m_n w = \Sigma \mu u_n,$$

ou en retranchant, et tenant compte de (2)

$$\Sigma \mu (u - u_n) = \Sigma m_n w - \lambda \Sigma m_n u,$$

ou en vertu de (3)

$$(6) \qquad \Sigma \mu (u - u_n) < \lambda (u - u_n)_0$$

la différence $u - u_n$ est toujours positive; mais sur les points de E_1 on a $u_n = 0$; de sorte que si sur la circonférence de rayon r', il y a des points de E_1, comme toutes les masses μ de cette circonférence seront en ces points, la valeur correspondante de $u - u_n$ sera

$$u = \log \frac{1}{r'}.$$

On aura donc

$$(7) \qquad \Sigma \mu (u - u_n) > \int_{\alpha}^{1} h\, dr' \log \frac{1}{r'},$$

α étant la plus courte distance du point O à l'ensemble E_1; car s'il y a des points de E_1 pour $r' = \alpha$, il y en aura, comme nous l'avons montré plus haut, pour $r' > \alpha$. On a donc

$$\int_{\alpha}^{1} h\, dr' \log \frac{1}{r'} < \lambda (u - u_n)_0.$$

Quand n croît indéfiniment la différence $(u - u_n)_0$ tend vers zéro; il en est donc de même du premier membre, ce qui veut dire que α tend vers 1; on a donc

$$\alpha = 1,$$

ce qui veut dire que l'ensemble E_1 se réduit à la circonférence K.

C. Q. F. D.

IX. — Propriétés des fonctions uniformisantes.

Considérons un système quelconque

$$(1)\qquad y_1,\ y_2,\ \ldots$$

de fonctions multiformes de x. Nous avons vu au paragraphe IV que si D est le domaine principal de ce système, on peut toujours trouver un domaine D′ régulièrement multiple de D, et simplement connexe, pour lequel la fonction de Green u existe.

Ce domaine D′ étant simplement connexe, les paragraphes V et VIII nous apprendront qu'on peut déduire de u une fonction z; que si dans le plan des z on trace le cercle K de centre O et de rayon 1; à tout point de K correspond un point de D′ et un seul, et réciproquement. Donc

$$y_1,\ y_2,\ \ldots,\ x$$

sont des fonctions uniformes de z, $x = \psi(z)$, $y_i = \theta_i(z)$.

J'ajoute qu'à tout point pour lequel les fonctions $y_1, y_2, \ldots$ existent toutes, correspondra un point intérieur à K, et non pas un point situé sur la circonférence de K. Il suffit pour obtenir ce résultat de choisir convenablement la fonction fuchsienne auxiliaire du paragraphe IV et d'admettre les éléments algébriques. *Il n'y a pas d'Ausnahmsstellen.*

Cherchons maintenant les propriétés de ces fonctions uniformes de z,

$$x = \psi(z), \qquad y_i = \theta_i(z).$$

Nous avons dit que D′ était régulièrement multiple de D; cela veut dire qu'à tout point M de D correspondent divers points

$$M_1,\ M_2,\ \ldots$$

de D′; si de plus le point M varie sur D d'une manière continue, il en sera de même des points $M_1, M_2, \ldots$ sur D′. Si M décrit une courbe fermée infiniment petite, il en sera de même de $M_1, M_2, \ldots$, mais cela ne sera plus vrai en général si la courbe fermée décrite par M n'est pas infiniment petite.

Je dis maintenant que si M_1 décrit une courbe fermée finie, il en sera de même de M_2. Cela tient à ce que le domaine D′ est simplement connexe. Soit en effet C la courbe fermée décrite par M_1, elle limitera une certaine aire située sur D'. Décomposons cette aire en une infinité d'aires infiniment petites. Quand M_1 décrira le contour d'une de ces aires partielles, M_2 reviendra à sa valeur initiale et décrira une courbe fermée. Il devra donc en être de même quand M décrira le contour de l'aire totale.

Donc M_2 est fonction *uniforme* de M_1 et réciproquement. Soit

$$M_2 = \Omega(M_1)$$

la fonction ainsi définie; si A est une courbe, ou une aire décrite par le point M_1 alors $\Omega(A)$ sera la courbe ou l'aire correspondante décrite par M_2. Par exemple cette aire A peut être un des éléments du domaine D' et alors $\Omega(A)$ sera un autre élément de D'.

Cela posé considérons les fonctions

$$u_0, \quad u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_n, \quad \ldots$$

formées en partant du point O et en balayant successivement les éléments

$$C_1, \quad C_2, \quad \ldots, \quad C_n, \quad \ldots$$

du domaine D'.

Formons ensuite les fonctions

$$u'_0, \quad u'_1, \quad u'_2, \quad \ldots, \quad u'_n, \quad \ldots$$

en partant du point $\Omega(O)$ et en balayant successivement les éléments

$$\Omega(C_1), \quad \Omega(C_2), \quad \ldots, \quad \Omega(C_n), \quad \ldots$$

du domaine D'.

Les éléments correspondants C_n et $\Omega(C_n)$ coïncident au point de vue géométrique, de même que les points O et $\Omega(O)$; les opérations donneront donc les mêmes résultats et l'on aura, pour un point M_1 quelconque du domaine D'

$$u'_n[\Omega(M_1)] = u_n[M_1],$$

et à la limite

$$u'[\Omega(M_1)] = u[M_1],$$

en appelant u' et u les limites des deux suites u'_n et u_n.

Or u' et u sont les fonctions de Green formées respectivement en partant des deux points $\Omega(O)$ et O; à l'aide de ces deux fonctions on peut former les deux fonctions z et z' par les procédés du paragraphe V. Nous avons vu au paragraphe VII que ces deux fonctions sont liées par une relation linéaire. Donc les valeurs de z qui correspondent aux deux points

$$M_1, \quad \Omega(M_1)$$

sont liées par une relation linéaire. Mais ces deux points correspondent à un même point M du domaine D, et par conséquent aux mêmes valeurs des fonctions

$$y_i = \theta_i(z), \qquad x = \psi(z).$$

Donc ces fonctions $\psi(z)$ et $\theta_i(z)$ ne sont pas altérées par certaines relations linéaires. Ces relations linéaires sont généralement en nombre infini, parce que les points de D' qui correspondent à un même point de D sont généralement en nombre infini. Elles forment naturellement un groupe; enfin de même que les substitutions des groupes fuchsiens elles n'altèrent pas la circonférence K. Ce groupe tout à fait analogue aux groupes fuchsiens peut s'appeler *fuchsoïde : ainsi nos fonctions* $\psi(z)$, $\theta_i(z)$ *ne sont pas altérées par les substitutions linéaires d'un groupe fuchsoïde.*

X. — Relations entre les fonctions de Green.

Comparons maintenant les fonctions u_n relatives au domaine D, et celles qui sont relatives au domaine D', régulièrement multiple de D.

Soit M un point de D et

$$\Omega_1(M), \quad \Omega_2(M), \quad \ldots$$

les points correspondants de D'; les fonctions Ω_1, Ω_2, ... sont continues, mais il peut se faire qu'elles s'échangent les unes avec les autres quand M décrit une courbe fermée de D.

Considérons la suite des fonctions

$$u_0^{(1)}, \quad u_1^{(1)}, \quad \ldots, \quad u_n^{(1)}, \quad \ldots$$

relatives au domaine D' et obtenues en partant du point $\Omega_1(O)$ et en balayant successivement les éléments

$$\Omega_1(C_1), \quad \Omega_1(C_2), \quad \ldots, \quad \Omega_1(C_n), \quad \ldots.$$

Considérons de même la suite des fonctions

$$u_0^{(k)}, \quad u_1^{(k)}, \quad \ldots, \quad u_n^{(k)}, \quad \ldots$$

relatives au domaine D' et obtenues en partant de $\Omega_k(O)$ et balayant successivement

$$\Omega_k(C_1),\quad \Omega_k(C_2),\quad \ldots,\quad \Omega_k(C_n),\quad \ldots.$$

D'après le paragraphe précédent on aura, pour un point M quelconque,

$$u_n^k\,[\Omega_k(M)] = u_n^1\,[\Omega_1(M)].$$

Considérons enfin les fonctions

$$U_0,\quad U_1,\quad \ldots,\quad U_n,\quad \ldots$$

relatives au domaine D et obtenues en partant du point O et balayant successivement les éléments suivants de D

$$C_1,\quad C_2,\quad \ldots,\quad C_n,\quad \ldots.$$

Je désignerai par C_0 l'élément de D dont fait partie le point O. Alors le point $\Omega_k(O)$ fera partie des éléments $\Omega_k(C_0)$. Les différents éléments $\Omega_k(C_0)$ n'ont aucun point commun.

Supposons en effet que deux éléments $\Omega_i(C_0)$ et $\Omega_k(C_0)$ aient un point identique, tous leurs points qui ont mêmes coordonnées devront être identiques, d'après l'une des conditions énoncées au paragraphe II. Or ces deux éléments coïncident au point de vue géométrique, donc tous les points correspondants de ces deux éléments devraient être identiques; si ensuite $\Omega_i(C_1)$ est contigu à $\Omega_i(C_0)$, $\Omega_k(C_1)$ est contigu à $\Omega_k(C_0)$; les deux éléments $\Omega_i(C_1)$ et $\Omega_k(C_1)$ auraient donc des points identiques, et il s'ensuivrait, comme pour $\Omega_i(C_0)$ et $\Omega_k(C_0)$, que ces deux éléments devraient être identiques; on verrait alors de proche en proche, que quel que soit le point M, $\Omega_i(M)$ serait identique à $\Omega_k(M)$.

Nous devons donc admettre que les deux éléments $\Omega_i(C_0)$ et $\Omega_k(C_0)$ ne peuvent avoir aucun point commun, et il en serait de même évidemment pour les deux éléments $\Omega_i(C_n)$ et $\Omega_k(C_n)$.

Cela posé, je me propose de démontrer que l'on a en un point quelconque du domaine D'

$$U_n = \Sigma_k\, u_n^k, \tag{1}$$

et d'abord que

$$U_0 = \Sigma_k\, u_0^k.$$

Considérons un point M quelconque de D'; s'il n'appartient à aucun des $\Omega_k(C_0)$ on aura

$$U_0 = u_0^{(k)} = 0.$$

S'il appartient à l'un des $\Omega_k(C_0)$, il ne pourra appartenir à aucun des $\Omega_i(C_0)$, on aura donc

$$u_0^{(i)} = 0 \qquad (\text{si } i \gtrless k),$$

et d'ailleurs, d'après la façon dont les fonctions u_n sont formées

$$U_0 = u_0^{(k)}.$$

On aura donc dans tous les cas

$$U_0 = \Sigma_k u_0^{(k)}.$$

Je dis maintenant que si

$$(2) \qquad U_{n-1} = \Sigma_k u_{n-1}^{(k)},$$

on aura également

$$U_n = \Sigma_k u_n^{(k)}.$$

En effet si le point M n'appartient à aucun des $\Omega_k(C_n)$, c'est-à-dire à l'un des éléments que l'on balaye pour passer des fonctions d'indice $n-1$ aux fonctions d'indice n, on aura

$$U_n = U_{n-1}, \qquad u_n^{(k)} = u_{n-1}^{(k)}.$$

Si M appartient à l'un des $\Omega_k(C_n)$, il n'appartiendra à aucun autre des $\Omega_i(C_n)$. Les masses génératrices de la fonction U_{n-1} s'obtiendront en ajoutant entre elles toutes les masses génératrices des fonctions $u_{n-1}^{(k)}$, en vertu de l'équation (2) et de la définition de ces masses génératrices. En balayant toutes ces masses on aura donc

$$U_n - U_{n-1} = \Sigma (u_n^{(k)} - u_{n-1}^{(k)}). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Qu'arrive-t-il maintenant quand n croît indéfiniment; $u_n^{(k)}$ tend vers une limite $u^{(k)}$ que nous supposons finie, et U_n tend vers une limite U qui peut être infinie. On a donc

$$U = U_0 + \Sigma_n (U_n - U_{n-1}) = \Sigma_k u_0^{(k)} + \Sigma_n \Sigma_k (u_n^{(k)} - u_{n-1}^{(k)}).$$

Il faut ici sommer d'abord par rapport à k, puis par rapport à n, mais comme les termes de ces séries sont essentiellement positifs, on peut en intervertir l'ordre et écrire

$$U = \Sigma_k u_0^{(k)} + \Sigma_k \Sigma_n (u_n^{(k)} - u_{n-1}^{(k)}) = \Sigma_k u^{(k)}.$$

Donc la condition nécessaire et suffisante pour que la fonction de Green existe pour le domaine D, c'est-à-dire pour que la suite des U_n ait une limite finie, c'est que la série $\Sigma_k u^{(k)}$ converge.

Si cette condition est remplie, nous voyons que les fonctions U et $u^{(k)}$ étant harmoniques et positives, on aura également, par le théorème de Harnack :

$$\frac{dU}{d\xi} = \sum \frac{du^{(k)}}{d\xi}, \qquad \frac{dU}{d\eta} = \sum \frac{du^{(k)}}{d\eta},$$

et par conséquent

$$V = \Sigma v^{(k)}, \qquad Z = \Pi z^{(k)},$$

$v^{(k)}$, $z^{(k)}$, V, Z étant formées avec $u^{(k)}$, U, comme v et z l'ont été avec u au paragraphe V (la lettre Π représente un produit infini).

Mais les variables $z^{(k)}$ sont liées entre elles par les relations linéaires, qui forment le groupe fuchsoïde du paragraphe précédent. *On prendra donc les diverses transformées de z par les substitutions linéaires de ce groupe fuchsoïde, on en fera le produit; si ce produit converge c'est que la fonction de Green existe pour le domaine* D *et ce produit est précisément la fonction* Z *déduite de cette fonction de Green* U *par les procédés du paragraphe* V.

XI. — Propriétés du groupe fuchsoïde.

Soit

$$\left(z, \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)$$

la substitution la plus générale de notre groupe fuchsoïde. Désignons par $u(D, O)$ la fonction de Green relative au domaine D et qui devient infinie au point O. De cette façon, les fonctions

$$u^{(k)}, \quad U$$

du paragraphe précédent seront désignées par

$$u[D', \Omega_k(O)], \quad u(D, O).$$

Nous désignerons par $z(D, O)$ la fonction déduite de $u(D, O)$, comme z a été déduit de u au paragraphe V.

Nous désignerons simplement par z la fonction $z[D', \Omega_1(O)]$ et ce sera notre nouvelle variable indépendante. Nous aurons alors

$$z[D', \Omega_k(O)] = \frac{\alpha_k z + \beta_k}{\gamma_k z + \delta_k},$$

le second membre correspondant à l'une des substitutions du groupe fuchsoïde; d'après cela, on devra avoir $\alpha_1 = \delta_1 = 1$, $\beta_1 = \gamma_1 = 0$, de sorte que l'indice 1 correspondra à la substitution identique.

On aura alors, d'après le paragraphe précédent

$$(1) \qquad z(D, O) = \prod \frac{\alpha_k z + \beta_k}{\gamma_k z + \delta_k}.$$

Soit maintenant $\Omega_1(O')$ un autre point quelconque de D', on aura d'après le paragraphe VII

$$z[D', \Omega_1(O')] = \frac{az + b}{cz + d},$$

a, b, c, d étant des constantes; on en conclut

$$z[D', \Omega_k(O')] = \frac{a(\alpha_k z + \beta_k) + b(\gamma_k z + \delta_k)}{c(\alpha_k z + \beta_k) + d(\gamma_k z + \delta_k)},$$

et l'on trouvera encore

$$(2) \qquad z(D, O') = \prod z[D', \Omega_k(O')] = \prod \frac{a(\alpha_k z + \beta_k) + b(\gamma_k z + \delta_k)}{c(\alpha_k z + \beta_k) + d(\gamma_k z + \delta_k)}.$$

Il s'agit donc de savoir si la somme

$$u(D, O) = \Sigma \log \left| \frac{\alpha_k z + \beta_k}{\gamma_k z + \delta_k} \right|$$

converge, c'est-à-dire si la fonction de Green existe pour le domaine D.

Or en vertu d'un théorème bien connu la condition nécessaire et suffisante pour que cette série

$$\Sigma \log \left| \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \right|$$

converge, c'est que la série

$$\sum \left(1 - \left| \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \right| \right)$$

converge absolument, ou encore que la série

$$\sum \left(1 - \left| \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \right|^2 \right)$$

converge ou encore qu'il en soit ainsi de la série

$$\sum \left[1 - \frac{(\alpha z + \beta)(\gamma z' + \delta)}{(\gamma z + \delta)(\alpha z' + \beta)}\right],$$

en désignant par z' une quantité qui a même argument que z et même module que $\frac{1}{z}$; et en effet

$$\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad \frac{\gamma z' + \delta}{\alpha z' + \beta}$$

sont imaginaires conjuguées. Or cela peut s'écrire (en tenant compte de $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$):

$$\sum \frac{z' - z}{(\gamma z + \delta)(\alpha z' + \beta)}.$$

Il est aisé de voir que pour les termes d'ordre élevé, pour lesquels α, β, γ, δ ont de très grandes valeurs, $|\alpha z' + \beta|$ est sensiblement égal à $|\gamma z' + \delta|$ et à $|\gamma z + \delta|$.

Ainsi la condition nécessaire et suffisante pour que la fonction de Green existe c'est que la série

$$\sum \frac{1}{|\gamma z + \delta|^2}$$

converge.

Reportons-nous au premier Chapitre de mon Mémoire sur les fonctions fuchsiennes et rappelons un des modes de raisonnement que nous y avons employés; soit S une petite aire enveloppant le point z, et soit S_k (*loc. cit.*) ce que devient cette aire quand on change z en $\frac{\alpha_k z + \beta_k}{\gamma_k z + \delta_k}$. Nous avons vu que ces aires sont entre elles comme les quantités

$$\frac{1}{|\gamma_k z + \delta_k|^4},$$

et comme la série ΣS_k converge certainement, puisque la somme de toutes ces aires est toujours plus petite que le cercle fondamental, nous en avons conclu que la série

$$\sum \frac{1}{|\gamma z + \delta|^4}.$$

converge toujours, ce qui est le fondement de la théorie des fonctions thétafuchsiennes.

Dans le cas qui nous occupe, nous pouvons en tirer la conclusion suivante : *La condition nécessaire et suffisante pour que la fonction de Green existe pour le domaine* D, *c'est que la série*

$$\sum \lambda_k$$

converge.

Si cette condition est remplie, et si D est simplement connexe, il existe une fonction Z qui prend aux différents points du domaine D toutes les valeurs intérieures au cercle de rayon 1 et ne prend chacune d'elles qu'une fois. Elle permet la représentation conforme du domaine D sur un cercle. Elle n'est pas altérée par les substitutions du groupe fuchsoïde.

Si cette condition est remplie, et si D n'est pas simplement connexe, il existe une fonction Z qui par rapport aux substitutions du groupe fuchsoïde satisfait à la condition

$$Z\left(\frac{\alpha_k z + \beta_k}{\gamma_k z + \delta_k}\right) = M_k Z(z),$$

M_k étant une constante de module 1.

Qu'arrive-t-il enfin si la condition n'est pas remplie. On pourrait former les séries thétafuchsiennes, lambdafuchsiennes, etc., tout comme avec les fonctions fuchsiennes ordinaires; on arriverait ainsi à l'étude complète du domaine D. Mais nous suivrons une autre voie.

XII. — Le domaine D_1 et sa fonction de Green.

Je vais utiliser les résultats de la méthode alternante de M. Schwarz. Reprenons notre domaine D, sur lequel nous ne faisons aucune hypothèse. Soit C_0 un élément de ce domaine, où se trouvera le point O, et C'_0 un autre élément qui aura pour centre le point O'. Nous pourrons toujours supposer que le point O qui appartient à C_0, n'appartient à aucun autre élément de D, contigu à C_0, et de même que le point O' qui appartient à C'_0 n'appartient à aucun autre élément de D, contigu à C'_0.

Construisons ensuite un domaine D_1 contenu dans D, et qu'on déduira de D tout simplement en supprimant l'élément C'_0; les points de D qui font partie de C'_0, sans appartenir à aucun autre élément de D, contigu à C'_0 ne feront pas partie de D_1; et au contraire les points des éléments contigus à C'_0 appartiendront à D_1, bien que faisant partie de C'_0.

Je dis d'abord que la fontion de Green existera pour ce domaine D_1. Formons en effet comme au paragraphe III, la série des fonctions u_n en partant du point O et en effectuant une série de balayages successifs portant sur les divers éléments de D_1 (c'est-à-dire sur les divers éléments de D, sauf sur C'_0). Ces fonctions u_n sont des potentiels logarithmiques engendrés par une masse positive $+1$ située en O et par diverses masses négatives dont la somme est égale à -1.

Cherchons la valeur moyenne de u_n sur la circonférence de C'_0; prenons pour un instant des coordonnées polaires r et ω, en prenant pour pôle le centre de C'_0, c'est-à-dire le point O' et envisageons l'intégrale

$$J = \int u_n \, d\omega$$

prise le long d'une circonférence ayant son centre en O'; nous aurons

$$r \frac{dJ}{dr} = \int \frac{du_n}{dr} r \, d\omega.$$

Cette intégrale est, en vertu des théorèmes de Green, égale à -2π multiplié par la somme des masses génératrices situées à l'intérieur de la circonférence. Cette somme est plus petite que 1 en valeur absolue; on a donc

$$2\pi > r \frac{dJ}{dr} > 0.$$

Si alors r_0 est le rayon de la circonférence de C_0 et si r_1 est la plus courte distance de O' à la frontière de D_1, on aura

$$J_0 < J_1 + 2\pi \log \frac{r_0}{r_1}.$$

Mais J_1 est nul puisque u_n est nul en tous les points de C'_0 qui ne font pas partie de D_1; r_1 n'est pas nul, car le point O' et les points voisins ont été supposés en dehors de D_1; on a donc

$$J_0 = \int u_n \, d\omega < 2\pi \log \frac{r_0}{r_1},$$

ce qui veut dire que la valeur moyenne de u_n sur la circonférence de C'_0 est plus petite que $\log\frac{r_0}{r_1}$; *a fortiori* la valeur minimum de u_n sur cette circonférence sera plus petite que $\log\frac{r_0}{r_1}$.

Soit E_n l'ensemble des arcs de cette circonférence tels que

$$u_n < \log\frac{r_0}{r_1}.$$

On voit que E_n ne peut pas se réduire à rien, quel que soit n. De plus E_{n+1} est contenu dans E_n puisque

$$u_{n+1} > u_n.$$

Donc il y a sur la circonférence de C'_0 au moins un point M tel que l'on ait, pour toutes les valeurs de n,

$$u_n < \log\frac{r_0}{r_1}.$$

En ce point M la suite des u_n convergera; et comme elle ne peut converger en un point sans converger partout (*voir* paragraphe III), elle convergera dans tout le domaine D_1. La fonction de Green que nous appellerons $u(D_1, O)$ existe donc pour ce domaine D_1.

Soit δ la partie commune à C'_0 et à D_1; ce sera un domaine limité extérieurement par la circonférence C'_0 et intérieurement par une ligne fermée L_0, formée d'un nombre fini d'arcs de cercle appartenant aux circonférences des divers éléments contigus à C'_0. Cette ligne fermée L_0 fera partie de la frontière de D_1.

On peut vérifier que la fonction de Green $u(D_1, O)$ tend vers zéro quand on se rapproche de L_0. En effet, cette fonction est harmonique et par conséquent analytique sur la circonférence C'_0 qui est tout entière à l'intérieur de D_1. Nous pouvons donc construire une fonction T qui soit harmonique dans le domaine δ, qui soit égale à zéro sur L_0 et à $u(D_1, O)$ sur la circonférence C_0. On aura alors

$$u_n = T = 0$$

sur L_0 et

$$u_n < T$$

sur la circonférence C'_0. Comme $u_n - T$ ne peut admettre que des minima, on aura

$$u_n < T$$

dans tout le domaine δ; et par conséquent

$$0 \leqq u(D_1, O) \leqq T.$$

Mais quand on se rapproche de L_0, T tend vers zéro, il en est donc de même de $u(D_1, O)$. Donc T et $u(D_1, O)$ sont deux fonctions harmoniques dans le domaine δ et qui prennent les mêmes valeurs sur la frontière de ce domaine. Elles sont donc égales et l'on a

$$u(D_1, O) = T.$$

Cela nous prouve en même temps, qu'en tous les points de L_0, la dérivée $\frac{du(D_1, O)}{dn}$ se comporte régulièrement, puisqu'il en est ainsi de $\frac{dT}{dn}$; et il en est ainsi de $\frac{dT}{dn}$, puisque le domaine dans lequel la fonction T est définie est limité par un nombre fini d'arcs de cercle et que tous les raisonnements habituels relatifs au problème de Dirichlet lui sont applicables sans difficulté.

Cela posé, supposons que le domaine D soit simplement connexe, le domaine D_1 ne le sera pas en général, car par exemple la circonférence C'_0 limite une aire faisant partie de D, à savoir le cercle C'_0, mais cette aire ne fait pas partie de D_1. Pour rendre le domaine D_1 simplement connexe, nous allons y pratiquer une coupure Q. La coupure Q sera une ligne qui partira d'un point quelconque de L_0 et qu'on prolongera indéfiniment dans le domaine D_1.

Je précise: imaginons une série de domaines successifs que j'appellerai

$$d_1, \quad d_2, \quad d_3, \quad \ldots$$

définis de la façon suivante : chacun d'eux sera formé d'un nombre fini d'éléments de D_1; d_1 comprendra entre autres tous ceux de ces éléments qui sont contigus à C'_0; d_{n+1} comprendra tous les éléments de d_n et d'autres encore; enfin nous nous arrangerons pour que le domaine comprenant C'_0 et tous les éléments de d_n et que j'appellerai e_n soit simplement connexe, et que tout élément de D_1 fasse partie de l'un des domaines d_n (et par conséquent de tous les domaines suivants $d_{n+1}, \ldots$).

Le domaine e_n étant simplement connexe sera limité par une certaine courbe fermée L_n; alors le domaine d_n sera doublement connexe et compris entre les deux courbes L_n et L_0; le domaine $d_{n+1} - d_n$ sera doublement connexe et compris entre les deux courbes L_{n+1} et L_n.

Alors notre coupure Q sera composée d'une série d'arcs $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$, etc., l'arc Q_n allant de L_{n-1} à L_n à travers le domaine $d_n - d_{n-1}$. Dans ces conditions la coupure Q rend le domaine D_1 simplement connexe, et en effet si une courbe fermée quelconque tracée sur D_1, n'enferme pas une aire appartenant à D_1, cette courbe appartiendra à l'un des domaines d_n et enveloppera la ligne L_0, elle coupera donc la coupure $Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_n$, et par conséquent la coupure Q.

Soit D_2 le domaine obtenu en partant de D_1 et le rendant simplement connexe par l'introduction de la coupure Q. Il va sans dire que certains éléments de D_1 étant traversés par la coupure Q, devront être remplacés dans le domaine D_2 par d'autres éléments en nombre fini ou infini, disposés de telle sorte qu'aucun de ces éléments nouveaux ne soit traversé par Q et que tous les points de l'élément ancien, sauf ceux de la coupure Q, appartiennent au moins à l'un des éléments nouveaux.

Cela posé je dis que la fonction de Green $u(D_2, O)$ existe pour le domaine D_2; en effet soit

$$u_n(D_2, O)$$

une des fonctions obtenues par les balayages successifs, on aura

$$u_n(D_2, O) < u(D_1, O),$$

puisque la dernière fonction est harmonique et positive dans tout le domaine D_1 et par conséquent dans tout le domaine D_2; que u_n (à part la masse $+1$ qui est au point O) n'est engendré que par des masses négatives de telle façon que la différence

$$u_n(D_2, O) - u(D_1, O)$$

ne peut admettre que des minima et pas de maxima et est d'ailleurs négative dans tous les éléments où $u_n(D_2, O)$ est nul, c'est-à-dire dans tous les éléments de D_2 sauf un nombre fini d'entre eux.

Donc la suite des $u_n(D_2, O)$ converge. C. Q. F. D.

Le domaine D_2 étant simplement connexe, l'existence de la fonction $u(D_2, O)$ entraîne celle de la fonction $z(D_2, O)$, c'est-à-dire d'après les paragraphes V, VI, VII et VIII la possibilité de la représentation conforme du domaine D_2 sur un cercle K. On voit alors que la circonférence de K va se partager en quatre arcs; l'un l'arc AB correspondra à la ligne L_0, les deux extrémités A et B correspondant au point où la coupure Q aboutit à L_0; deux autres arcs A'A et BB′ correspondront aux deux lèvres de la coupure Q. Le quatrième arc B′A′ correspondrait à la frontière du domaine primitivement donné D. Mais *ce dernier arc* B′A′ *peut se réduire à un point.*

Nous sommes donc amenés à distinguer deux cas :

1° Celui où l'arc B′A′ ne se réduit pas à un point. Dans ce cas je dis que le domaine D_1 est susceptible d'une représentation conforme sur un anneau circulaire et le domaine D sur un cercle; la fonction de Green $u(D, O)$ existe.

2° Celui où l'arc B′A′ se réduit à un point. Dans ce cas je dis que le domaine D_1 est susceptible de représentation conforme sur un cercle, et le domaine D sur une sphère fermée.

XIII. — La fonction V.

Proposons-nous d'abord de construire une fonction V qui soit harmonique dans le domaine D_1, égale à 1 sur L_0 et qui tende vers zéro quand on se rapproche de la frontière du domaine primitivement donné D. Partons d'une fonction V_0 ainsi définie :

1° A l'intérieur de L_0 (c'est-à-dire dans la partie de D qui ne fait pas partie de D_1) on a $V_0 = 1$.

2° Sur L_0 on a $V_0 = 1$.

3° En dehors de C'_0 et sur la circonférence de C'_0 on a $V_0 = 0$.

4° Dans le domaine δ, c'est-à-dire entre la circonférence C'_0 et L_0, la fonction V_0 est harmonique, elle tend vers zéro quand on se rapproche de la circonférence C'_0 et vers 1 quand on se rapproche de L_0; elle est donc toujours comprise entre 0 et 1.

Nous allons maintenant, en partant de cette fonction V_0, balayer successivement les divers éléments de D_1.

Cette fonction V_0 se comporte comme un potentiel logarithmique engendré par diverses masses situées sur L_0 et à l'intérieur de L_0 (donc en dehors des éléments de D_1) et sur lesquelles par conséquent ne porteront pas les balayages, et par des masses *négatives* situées sur la circonférence de C'_0.

Les masses balayées étant toutes négatives, les fonctions V_n seront toujours croissantes, toujours comprises entre 0 et 1. La suite des V_n convergera donc vers une certaine limite V qui sera harmonique dans le domaine D_1.

Je dis que V tend vers 1 quand on se rapproche de L_0. Soit en effet λ un des arcs de L_0, soit c la circonférence à laquelle cet arc appartient et qui limitera un cercle c correspondant à un élément de D contigu à C'_0 ; je suppose d'abord que l'on se rapproche de l'arc λ, je construis une fonction T, harmonique à l'intérieur de c, égale à 1 sur λ et à zéro sur le reste de la circonférence c. Au moment où l'on vient de balayer c, la fonction V_n est harmonique dans c; et l'on a

$$V_n = T = 1 \quad \text{sur } \lambda,$$
$$V_n > 0 = T \quad \text{sur le reste de la circonférence } c.$$

On a donc à l'intérieur de c

$$1 > V_n > T,$$

et par conséquent à la limite

$$1 > V > T.$$

Quand on se rapproche de λ, T tend vers 1, il en est donc de même de V. Il reste à voir ce qui se passe quand on se rapproche de l'extrémité d'un des arcs λ, c'est-à-dire du point d'intersection de deux circonférences telles que c. Il n'est pas nécessaire pour cela de répéter la discussion. Soient c et c' ces deux circonférences, A leur point d'intersection, λ et λ' les deux arcs de L_0 qui font partie de c et c'; du point A comme centre décrivons un cercle γ de rayon très petit, et considérons le domaine ε commun à γ et à D_1 et qui sera limité par une partie de la circonférence de γ et par une partie des arcs λ et λ'; dans ce domaine la fonction V est harmonique, elle tend vers 1 quand on se rapproche d'un quelconque des points de λ ou de λ', le point A excepté; cela suffit, d'après les propriétés bien connues des fonctions harmoniques, pour qu'elle tende encore vers 1 quand on se rapproche du point A.

On pourrait seulement se demander si la fonction V ne se réduit pas à une constante et n'est pas partout égale à 1.

Supposons d'abord qu'il n'en soit pas ainsi. Je dis qu'en tout point intérieur au domaine D_1 elle est plus petite que 1. Considérons en effet la représentation conforme du domaine D_2 défini plus haut sur le cercle K. Nous voyons que la fonction V [considérée non plus comme fonction d'un point N du domaine D_1 (ou D_2) mais comme fonction du point correspondant M du cercle K] est encore harmonique; elle est d'ailleurs toujours comprise entre 0 et 1. De plus en un point M au moins intérieur à K, la fonction V est < 1, puisque par hypothèse elle ne se réduit pas identiquement à 1. Soit alors M' un autre point intérieur à K; soient $V(M)$ et $V(M')$ les valeurs de V en ces deux points. Comme la fonction harmonique $1 - V$ est toujours positive, nous pouvons appliquer le théorème de Harnack et assigner une limite inférieure au rapport

$$\frac{1 - V(M')}{1 - V(M)}.$$

Comme $1 - V(M)$ n'est pas nul, il en est de même de $1 - V(M')$. Ainsi la fonction V n'est pas égale à 1, sauf peut-être aux points de D_1 (ou de D_2) qui correspondent à un point situé sur la circonférence de K. Mais les seuls points intérieurs à D_1 qui correspondent à un point de la circonférence de K sont ceux qui appartiennent à la frontière de D_2, c'est-à-dire les points de la coupure Q. Mais comme cette coupure Q a été arbitrairement tracée, et qu'on peut la changer, le théorème est vrai pour tous les points intérieurs à D_1.

En particulier on peut assigner une limite inférieure différente de zéro à la différence $1 - V$ sur la circonférence de C'_0.

Nous aurions pu, au lieu d'appliquer les procédés précédents au domaine D_1, les appliquer au domaine d_n que nous avons défini plus haut et qui est limité par les lignes L_n et L_0 (*cf.* p. 122). Nous aurions obtenu une fonction $V(d_n)$ qui aurait été à d_n ce que V est à D_1.

Ces fonctions $V(d_n)$ présentent une grande analogie avec les fonctions $u_{p,0}$ du paragraphe VI; on pourrait les obtenir en effet en partant de V et en balayant une infinité de fois tous les éléments de d_n avant de passer au balayage des autres éléments de D_1.

L'essentiel c'est que

$$V(d_n)$$

va en croissant avec n; l'application du théorème de Harnack nous apprend alors que la suite des $V(d_n)$ converge uniformément vers V, et que [si V' est une dérivée quelconque de V et $V'(d_n)$ la dérivée correspondante de $V(d_n)$], la suite des $V'(d_n)$ converge uniformément vers V'.

Posons maintenant

$$K_n = -\int \frac{dV(d_n)}{dr}\,ds, \qquad K = -\int \frac{dV}{dr}\,ds.$$

Les intégrales sont prises le long de la circonférence de C'_0; ds est l'élément d'arc de cette circonférence; les dérivées $\frac{dV}{dr}$, $\frac{dV(d_n)}{dr}$ sont prises par rapport à la normale à cette circonférence; il résulte de ce qui précède que la suite des K_n converge vers K; nous poserons alors

$$W = \frac{2\pi V}{K}, \qquad W_n = \frac{2\pi V(d_n)}{K_n}.$$

On voit que la suite des W_n converge *uniformément* vers W, et que la suite des W_n^1 converge *uniformément* vers W^1 (en désignant par W^1 et W_n^1 une dérivée quelconque de W et de W_n).

Nous allons maintenant définir des fonctions qui seront à W et W_n ce que v et z étaient à u au paragraphe V. Posons, à cet effet, comme dans ce paragraphe V :

$$\frac{dW'}{d\xi} = -\frac{dW}{d\eta}, \qquad \frac{dW}{d\xi} = \frac{dW'}{d\eta};$$

$$\frac{dW'_n}{d\xi} = -\frac{dW_n}{d\eta}, \qquad \frac{dW_n}{d\xi} = \frac{dW'_n}{d\eta};$$

$$Z = e^{-(W+iW')}, \qquad Z_n = e^{-(W_n+iW'_n)}.$$

Nous voyons que Z_n et ses dérivées convergent uniformément vers Z et ses dérivées. Les fonctions Z et Z_n sont uniformes, en effet, quand on tourne autour de L_0, W et W'_n augmentent de 2π, tandis que Z et Z_n ne changent pas.

La variable Z_n nous donne la représentation conforme du domaine d_n sur un anneau circulaire; en effet la frontière de d_n se compose de L_0 et de L_n, sur L_0 on a $V_n = 1$, $W_n = \frac{2\pi}{K_n}$, et sur L_n on a $W_n = 0$; il n'y a pas de difficulté pour établir ce dernier point puisque les lignes L_0 et L_n qui limitent le domaine d_n se composent d'un nombre fini d'arcs de cercle. Il résulte de là que Z_n ne peut prendre plus d'une fois la valeur A et par conséquent que l'intégrale

$$J_n = \int \frac{dZ_n}{Z_n - A}$$

prise le long d'un contour fermé quelconque ne peut être égale qu'à zéro ou à $2i\pi$. Mais nous avons vu que Z_n et ses dérivées convergent uniformément vers Z et ses dérivées, d'où il suit que J_n tend vers

$$J = \int \frac{dZ}{Z - A},$$

ce qui montre que cette intégrale ne peut être égale qu'à zéro ou $2i\pi$, et que Z ne peut prendre plus d'une fois la valeur A.

Donc la variable Z nous donne la représentation conforme du domaine D_1 sur un domaine plan, à un seul feuillet, c'est-à-dire dont les diverses parties ne se recouvrent pas mutuellement et qui est limité intérieurement par la circonférence de rayon $e^{-\frac{2\pi}{K}}$ et extérieurement par une ligne fermée ne pouvant sortir de la circonférence de rayon 1 (ce dernier point provient de ce que W est essentiellement positif).

Il faut maintenant établir que cette ligne fermée, qui limite extérieurement ce domaine plan n'est autre chose que la circonférence de rayon 1. C'est un problème analogue à celui du paragraphe VIII. Nous n'avons qu'à répéter l'analyse de ce paragraphe que nous ne reproduirons pas. L'ensemble E des points du plan auxquels correspond un point de D_1 n'est plus simplement connexe, puisque D_1 n'est pas simplement connexe; mais il est doublement connexe, étant limité intérieurement par la circonférence de rayon $e^{-\frac{2\pi}{K}}$; cette circonférence et une courbe fermée tracée dans E limitent alors toujours une aire faisant partie de E; si donc une circonférence de même centre, a tous ses points dans E, il ne pourra y avoir à l'intérieur de cette circonférence aucun point de l'ensemble E_1 des points du plan extérieurs à la circonférence de rayon $e^{-\frac{2\pi}{K}}$ et n'appartenant pas à E.

En s'appuyant là-dessus on définira comme au paragraphe VIII la fonction auxiliaire de Osgood $\varphi(w)$.

Nous prendrons ensuite

$$t = A \log\left|\frac{1}{w}\right|,$$

le coefficient A étant assez grand pour que t soit plus grand que $\frac{2\pi}{K}$, c'est-à-dire que W_n le long de la circonférence de rayon $e^{-\frac{2\pi}{K}}$ qui limite intérieurement E. Le reste de la démonstration se poursuit comme au paragraphe VIII et l'on arrive à la même conclusion : tout point q de la frontière de E est sur la circonférence de rayon 1.

Donc la fonction Z nous donne la représentation conforme de D_1 *sur un anneau circulaire.*

Nous avons ainsi :

1° Le domaine D_1 applicable sur un anneau circulaire;

2° L'élément C'_0 qui est un cercle.

Ces deux domaines ont une partie commune δ et leur ensemble forme le domaine

$$D = D_1 + C'_0 - \delta.$$

On peut alors appliquer un théorème connu de M. Schwarz et conclure que D *est applicable sur un cercle*. La fonction de Green $u(D, O)$ existe.

Où dans le raisonnement qui précède, avons-nous été amenés à supposer que la fonction V ne se réduit pas à une constante égale à 1; c'est que si V se réduisait à 1, la quantité K serait nulle. Ce qui rendrait la démonstration illusoire. Supposons donc que V ne se réduit pas à 1, je dis que K ne sera pas nul. Nous avons en effet comme nous l'avons vu plus haut, une limite supérieure de V, plus petite que 1 sur la circonférence C'_0, c'est ce que nous avons expliqué plus haut, soit A cette limite: soit alors T une fonction harmonique dans le domaine δ, se réduisant à 1 sur L_0 et à A sur la circonférence C'_0; on aura

$$K = -\int \frac{dT}{dr} ds.$$

et l'intégrale du second membre n'est pas nulle.

XIV. — Seconde démonstration.

On peut arriver au même résultat d'une façon plus simple par une autre voie. Observons d'abord que nous pouvons supposer que la ligne L_0, qui limite D_1 se réduit à une circonférence concentrique à C'_0. En effet rien ne nous oblige à prendre pour limite de D_1, les frontières de divers éléments de D, puisque ces éléments ont été tracés sur D d'une façon très arbitraire et qu'on aurait pu remplacer D par un domaine équivalent au sens du paragraphe II. Si nous avions supposé plus haut que L_0 est une circonférence, plusieurs des raisonnements précédents auraient pu être simplifiés.

Soit O' le centre commun de C'_0 et de L_0, r_0 le rayon de L_0, r_1 celui de C'_0, r la distance d'un point quelconque à O'. Considérons la fonction V, elle est égale à 1 sur L_0, et sur C'_0 elle est $< A < 1$; je dis que nous pouvons assigner une limite inférieure à la dérivée

$$-\frac{dV}{dr}$$

en un point quelconque de L_0; cette expression est d'ailleurs essentiellement positive; et en effet cette limite inférieure est

$$\frac{1 - A}{r_0 \log \frac{r_1}{r_0}}.$$

Je l'appellerai q.

Soit ensuite à l'intérieur de L_0,

$$T = \log \frac{r_0}{r}.$$

Nous aurons sur L_0,

$$T = 0, \qquad -\frac{dT}{dr} = \frac{1}{r_0}.$$

Construisons alors une fonction U satisfaisant aux conditions suivantes :

1° Dans D_1 on a

$$U = \frac{V}{qr_0}.$$

2° A l'intérieur de L_0 on a

$$U = T + \frac{1}{qr_0}.$$

3° Sur L_0 on a

$$U = \frac{1}{qr_0} = \frac{V}{qr_0} = T + \frac{1}{qr_0}.$$

Considérons deux points très voisins de L_0, l'un à l'extérieur, l'autre à l'intérieur : au premier on aura

$$-\left(\frac{dU}{dr}\right)_0 = \frac{-1}{qr_0}\frac{dV}{dr} > \frac{1}{r_0};$$

au second on aura

$$-\left(\frac{dU}{dr}\right)_1 = -\frac{dT}{dr} = \frac{1}{r_0};$$

et par conséquent

$$-\left(\frac{dU}{dr}\right)_0 > -\left(\frac{dU}{dr}\right)_1,$$

ce qui veut dire que la fonction U, harmonique dans D_1 et à l'intérieur de L_0, présente sur L_0 une discontinuité correspondant à des « masses génératrices » *positives*.

Cela posé, je dis que la fonction de Green

$$u(D, O')$$

existe; formons en effet par balayages successifs les fonctions

$$u_n(D, O');$$

elles admettent une masse $+1$ en O', et en outre des masses génératrices qui sont toutes négatives. La différence

$$U - u_n(D, O')$$

n'est plus discontinue en O' et comme en dehors de O' le potentiel U n'admet que des masses positives, et u_n que des masses négatives, la différence $U - u_n$ ne peut avoir que des maxima, et pas de minima; elle est d'ailleurs positive pour tous les points qui n'appartiennent pas aux éléments qu'on a *déjà balayés;* car avant d'obtenir u_n en ces points on a

$$U > 0, \quad u_n = 0.$$

On a donc dans tout le domaine D

$$U > u_n(D, O'),$$

ce qui veut dire que la suite des u_n, constamment croissante, tend vers une limite finie.

On aurait pu évidemment, avec quelques changements, raisonner de la même manière sans supposer que L_0 est une circonférence, mais cela n'a pas d'intérêt.

Il résulte de là par les raisonnements des paragraphes V, VI, VII et VIII que le domaine D est représentable sur un cercle.

XV. — Cas où la fonction de Green n'existe pas pour D.

Nous allons maintenant rechercher ce qui se passe quand la fonction V est constamment égale à 1. Reprenons la fonction de Green $u(D_1, O)$ et supposons encore que L_0 est une circonférence concentrique à C_0; envisageons la dérivée

$$\frac{du(D_1, O)}{dr}$$

aux différents points de L_0; nous avons vu au paragraphe XII qu'elle s'y comporte régulièrement; posons

$$H = \int \frac{du(D_1, O)}{dr}\, ds.$$

Elle représente au facteur -2π près, les masses négatives que les balayages ont amenés sur L; la masse négative totale étant -1, on a

$$H \leqq 2\pi.$$

Supposons d'abord

$$H < 2\pi,$$

je dis que dans ce cas V n'est pas constamment égale à 1.

En effet envisageons le domaine d_n limité par L_n et L_0 et imaginons que O fasse partie de ce domaine, ce qui arrivera pourvu que n soit assez grand. Écrivons simplement u au lieu de $u(D_1, O)$ et V_n au lieu de $V(d_n)$; nous aurons la formule de Green :

$$\int \left(u \frac{dV_n}{dn} - V_n \frac{du}{dn} \right) ds = 2\pi V_n^0.$$

Dans cette formule V_n^0 est la valeur de V_n en O; l'intégration est étendue à tous les éléments ds de la frontière d'un domaine contenant O; les dérivées $\frac{d}{dn}$ représentent les dérivées estimées suivant la normale à cette frontière, cette normale étant dirigée vers l'extérieur.

Nous pouvons appliquer cette formule au domaine d_n dont la frontière se compose d'un nombre fini d'arcs de cercle, de sorte que toutes nos fonctions s'y comportent régulièrement.

Sur L_0 on a

$$u = 0, \qquad V_n = 1, \quad \frac{du}{dn} = -\frac{du}{dr};$$

$$\int_{L_0} \left(u \frac{dV_n}{dn} - V_n \frac{du}{dn} \right) ds = H.$$

Sur L_n on a

$$V_n = 0, \qquad u > 0, \quad \frac{dV_n}{dn} < 0;$$

$$\int_{L_n} \left(u \frac{dV_n}{dn} - V_n \frac{du}{dn} \right) ds < 0.$$

On a donc

$$\int_{L_n} + \int_{L_0} = 2\pi V_n^0, \qquad \int_{L_n} = 0, \qquad \int_{L_0} = H;$$

d'où

$$2\pi V_n^0 < H;$$

on a donc à la limite

$$2\pi V^0 \leq H,$$

V^0 étant la valeur de V au point O, et $H < 2\pi$

$$V^0 < 1.$$

La fonction V n'est donc pas constamment égale à 1, ce qui permet d'appliquer les démonstrations des deux paragraphes précédents et de conclure que D est représentable sur un cercle.

Supposons maintenant $H = 2\pi$.

Dans ce cas, je dis que le domaine D_1 est représentable sur un cercle.

En effet continuons à écrire u au lieu de $u(D_1, O)$ et déduisons-en les fonctions v et z comme au paragraphe V. Bien que le domaine D_1 ne soit pas simplement connexe, la fonction z sera uniforme, et en effet quand on tourne autour de L_0, v augmente de H, c'est-à-dire de 2π, z est multiplié par $e^{2i\pi}$ et ne change pas.

A chaque point de D_1, correspond donc un point du plan des z et ce point est situé à l'intérieur du cercle Γ de centre O et de rayon 1. Il faut voir maintenant si la fonction z ne peut pas reprendre plusieurs fois la même valeur.

Reprenons les notations du paragraphe XIII en posant

$$K_n = -\int \frac{dV(d_n)}{dr}\,ds, \qquad K = -\int \frac{dV}{dr}\,ds;$$

$$W = \frac{2\pi V}{K}, \qquad W_n = \frac{2\pi V(d_n)}{K_n};$$

$$Z = e^{-(W + iW')}, \qquad Z_n = e^{-(W_n + iW'_n)},$$

W' et W'_n ayant même sens que dans ce paragraphe XIII.

Les conclusions précédentes subsisteront, c'est-à-dire que la variable Z_n donnera la représentation conforme du domaine d_n sur un anneau circulaire, compris entre les deux circonférences concentriques de rayon 1 et $e^{-\frac{2\pi}{K_n}}$. Seulement dans le cas qui nous occupe, K_n qui va constamment en décroissant, tend vers zéro, et l'on a $K = 0$, $V = 1$, $W = \infty$. Je dis que K_n va constamment en décroissant avec n; et en effet $V(d_n)$ va constamment en croissant, sauf sur L_0 où elle reste égale à 1; il en résulte que sur L_0

$$-\frac{dV(d_n)}{dr},$$

et par conséquent K_n vont en décroissant.

Cela posé, considérons $u(d_n, O)$ comme fonction de Z_n. C'est une fonction harmonique dans l'anneau circulaire $\left(1,\ e^{\frac{2\pi}{K_n}}\right)$, sauf au point correspondant à O où elle devient logarithmiquement infinie, et qui s'annule sur les deux circonférences qui limitent cet anneau. C'est donc le logarithme du module d'une fonction doublement périodique de troisième espèce par rapport au logarithme de Z_n.

Je précise; considérons un système de fonctions doublement périodiques admettant pour périodes $2i\pi$ et $\frac{4\pi}{K_n}$, de sorte que si $F(\log Z_n)$ est l'une de ces fonctions on ait

$$F(\log Z_n) = F(\log Z_n + 2i\pi) = F\left(\log Z_n + \frac{4\pi}{K_n}\right).$$

Nous pourrions les considérer comme des fonctions de Z_n, mais il vaudra mieux poser

$$Y_n Z_n = e^{\frac{2\pi}{K_n}},$$

de telle façon que $|Y_n| = 1$ le long de L_0 et $|Y_n| = e^{\frac{2\pi}{K_n}}$ le long de L_n.

Si nous posons alors

$$F(\log Z_n) = \Phi(Y_n),$$

nous voyons que Φ est une fonction uniforme de Y_n telle que

$$\Phi(Y_n) = \Phi\left(Y_n e^{\frac{4\pi}{K_n}}\right).$$

Mais si nous posons

$$u(d_n, O) = \log|\Omega(Y_n) Y_n'|,$$

Ω sera une fonction de troisième espèce, c'est-à-dire que ce sera une fonction uniforme de Y_n satisfaisant à la condition

$$\Omega\left(Y_n e^{\frac{4\pi}{K_n}}\right) = z\Omega(Y_n), \qquad z e^{\frac{4i\pi}{K_n}} = 1.$$

α et λ sont des constantes. Si Y_n^0 est la valeur de Y_n qui correspond au point O, valeur que nous pouvons toujours supposer réelle puisque l'argument de Y_n n'est déterminé qu'à une constante près, la fonction Ω devient infinie pour

$$Y_n = Y_n^0, \qquad Y_n = Y_n^0 e^{\frac{im\pi}{K_n}} \qquad (m \text{ entier positif ou négatif})$$

et nulle pour

$$Y_n = \frac{1}{Y_n^0}, \qquad Y_n = \frac{1}{Y_n^0} e^{\frac{im\pi}{K_n}}.$$

Elle se réduit à 1, pour $Y_n = 1$, et elle est par là entièrement déterminée par le quotient de deux fonctions Θ.

Il est aisé de voir que si nous posons

$$H_n = -\int_{L_0} \frac{du(d_n, O)}{dr} ds,$$

on aura $H_n < 2\pi$, $2\pi\lambda = H - H_n = 2\pi - H_n$.

On aura d'ailleurs

$$\log |Y_n| = -2\pi \frac{1 - V(d_n)}{K_n}.$$

Lorsque n croit indéfiniment, $1 - V(d_n)$ et K_n tendent vers zéro, mais leur rapport reste limité; je ne sais pas encore s'il tend vers une limite finie.

En effet la fonction harmonique

$$V(d_{n+1}) - V(d_n)$$

est constamment positive et elle s'annule sur L_0 : nous pouvons donc lui appliquer le théorème de Harnack, ce qui nous fournira une limite supérieure et inférieure du rapport

$$\frac{V(d_{n+1}) - V(d_n)}{K_n - K_{n+1}}.$$

Ces limites s'appliqueront au rapport

$$\frac{V(d_{n+p}) - V(d_n)}{K_n - K_{n+p}}$$

ou en faisant croitre p indéfiniment, au rapport

$$\frac{1 - V(d_n)}{K_n}$$

Ainsi en chaque point du domaine D_1, nous pouvons assigner une limite supérieure à

$$\log\left|\frac{1}{Y_n}\right|.$$

Nous pourrions de même assigner une limite supérieure à ses dérivées : car si V' représente une des dérivées de V, le théorème de Harnack nous fournira encore une limite supérieure du rapport

$$\frac{V'(d_{n+p}) - V'(d_n)}{V(d_{n+p}) - V(d_n)}.$$

Cela posé nous avons

$$\log|\Omega| = u(d_n, O) + \lambda \log\left|\frac{1}{Y_n}\right|.$$

Je dis que quand n croît indéfiniment, $\log|\Omega|$ tend uniformément vers $u(D_1, O)$; en effet $u(D_n, O)$ tendant uniformément vers $u(D_1, O)$, on peut prendre n assez grand pour que

$$u(D_1, O) - u(d_n, O) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

De plus λ tendant vers zéro et $\log\left|\frac{1}{Y_n}\right|$ restant limité, on peut prendre n assez grand pour que

$$\lambda \log\left|\frac{1}{Y_n}\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

d'où

$$|u(D_1, O) - \log|\Omega|| < \varepsilon.$$

On démontrerait de même que les dérivées de $\log|\Omega|$ tendent uniformément vers celles de $u(D_1, O)$, puisque celles de $u(d_n, O)$ tendent vers $u(D_1, O)$ et que celles de $\log\left|\frac{1}{Y_n}\right|$ sont limitées.

On en conclura que Ω tend uniformément vers z, et les dérivées de Ω vers celles de z quand n croît indéfiniment.

On verrait que dans le domaine d_n la fonction Ω peut prendre la même valeur *deux fois* au plus. Si alors l'on considère deux points O et M du domaine D, et les valeurs correspondantes Y_n^0 et Y_n de Y_n; nous avons vu que $\log\left|\frac{1}{Y_n^0}\right|$ et $\log\left|\frac{1}{Y_n}\right|$ sont limités; nous pouvons donc assigner une limite inférieure à $|Y_n^0|$ et à $|Y_n|$. Soit alors M' un point du domaine d_n pour lequel Ω

reprenne la même valeur qu'au point M, et Y'_n la valeur correspondante de Y_n. On démontrerait, en se servant de l'expression de Ω par les séries Θ, que quand n tend vers l'infini, et par conséquent K_n vers zéro (Y_n et Y''_n restant au-dessus d'une certaine limite), Y'_n tend vers zéro, de sorte que le point M' s'éloignera indéfiniment sur le domaine D_1, il ne pourra par exemple rester dans le domaine d_p, où p est un nombre *fixe* plus petit que n. On peut donc prendre n assez grand pour que l'on soit assuré que $\Omega(Y_n)$ ne prendra pas plus d'une fois la même valeur dans le domaine d_p; mais nous avons vu que $\Omega(Y_n)$ tend uniformément vers z quand n croit indéfiniment (et qu'il en est de même pour les dérivées) donc en répétant le raisonnement du paragraphe XIII, *on verrait que z ne peut prendre qu'une seule fois la même valeur dans le domaine d_p et par conséquent dans le domaine D_1.*

Ainsi soit C le cercle de centre O et de rayon 1; la fonction z nous donnera la représentation conforme du domaine D_1 sur ce cercle, de telle façon qu'à tout point du domaine corresponde un point du cercle et un seul, et qu'à tout point du cercle ne puisse correspondre plus d'un point du domaine; à un point de L_0 correspondra un point de la circonférence du cercle et réciproquement.

Nous serons ainsi conduits à répartir les points du cercle C en deux ensembles, l'ensemble E des points auxquels correspond un point du domaine, (ensemble dans lequel nous ferons entrer la circonférence dont les points correspondent à ceux de L_0) et l'ensemble E_1 des points auxquels ne correspond aucun point du domaine.

Tous les points de E_1 sont intérieurs à une circonférence, intérieure elle-même à la circonférence de rayon 1. Les points de la frontière de E, sauf ceux de la circonférence de rayon 1, font partie de E_1. Le domaine E est doublement connexe, comme D_1 dont il est l'image. Si donc nous considérons une courbe fermée tracée dans E, tous les points de E_1 seront intérieurs à cette courbe ou tous extérieurs.

Deux hypothèses sont donc possibles :

1° Ou bien E_1 se compose d'un seul point;

2° Ou bien E_1 en contient une infinité; car si E_1 contient plus d'un point, il ne peut admettre de points isolés.

Soient dans cette deuxième hypothèse q, q_1 et q_2 trois points de E_1, le premier sur la frontière de E. Construisons avec ces trois points les fonctions auxiliaires d'Osgood :

$$\varphi(w), \qquad t = \log\left|\frac{1}{w}\right|.$$

Cette fonction t est harmonique dans E sauf en O où elle devient logarithmiquement infinie; elle est partout positive et tend vers o quand on se rapproche de q. La fonction w est uniforme dans E, parce que toute courbe fermée tracée dans E n'enveloppe aucun des points singuliers q, q_1 q_2 ou les enveloppe tous trois.

On a donc $t > u(d_n, \mathrm{O})$ et par conséquent

$$t > u(\mathrm{D}_1, \mathrm{O}),$$

ce qui montre que $u(\mathrm{D}_1, \mathrm{O})$ tend vers zéro quand on se rapproche du point q; on en conclurait comme au paragraphe VIII que le point q doit se trouver sur la circonférence de rayon 1. Mais il n'en est pas ainsi puisque tous les points de E_1 sont intérieurs à cette circonférence.

Nous sommes donc ramenés à la première hypothèse, d'après laquelle E_1 se réduit à un seul point.

Pour nous résumer, la fonction z donne la représentation conforme de D_1 sur un cercle pointé.

Nous avons donc les deux domaines D_1 et C'_0, qui ont une partie commune δ, et représentables le premier sur un cercle pointé, le second sur un cercle. Nous pouvons alors, en appliquant les procédés de M. Schwartz (*Monatsberichte de l'Académie de Berlin*, octobre 1870, p. 792) conclure que le domaine total

$$\mathrm{D} = \mathrm{D}_1 + \mathrm{C}'_0 - \delta$$

est représentable sur une sphère pointée.

En résumé, un domaine D *simplement connexe quelconque est susceptible de représentation conforme soit sur un cercle* (paragraphes XIII *et* XIV), *soit une sphère pointée* (paragraphe XV).

Si alors nous nous reportons à la fin du paragraphe XII, nous verrons que le premier cas ne peut être que celui où l'arc B'A' ne se réduit pas à un point, et le second cas celui où cet arc se réduit à un point. On peut donc donner au critère qui permet de discerner les deux cas plusieurs formes entièrement différentes les unes des autres et différentes aussi de celle qu'avait adoptée M. Brodén.

Revenons pour terminer à notre fonction Y_n; nous avons vu que nous pouvions lui assigner une limite supérieure et une limite inférieure; mais il pourrait encore se faire qu'elle oscille entre ces limites quand n croît indéfiniment au lieu de tendre vers une limite déterminée. Les considérations précédentes montreraient qu'elle tend effectivement vers une limite déterminée qui est

$$\frac{z - z_0}{z - z'_0}\,\frac{1 - z'_0}{1 - z_0},$$

z_0 étant l'affixe du point unique auquel se réduit l'ensemble E_1, tandis que z'_0 est le point inverse de z_0 par rapport au cercle C.

ANALYSE

DE SES

TRAVAUX SUR LES FONCTIONS DE DEUX VARIABLES

FAITE PAR H. POINCARÉ.

Acta mathematica, t. 38, p. 70-73 (1921).

VII. Théorie générale des fonctions de deux variables.

Il semble d'abord que, pour étudier les fonctions de deux variables, il suffit d'appliquer, sans rien y changer, les principes qui ont servi à établir les propriétés des fonctions d'une seule variable. Il n'en est rien; il y a entre les deux théories des différences essentielles et l'on ne saurait passer de l'une à l'autre par une simple généralisation.

Cette différence apparait dès que l'on considère les polynômes entiers qui sont décomposables en facteurs s'il n'y a qu'une variable et ne le sont plus dans le cas contraire. Je laisserai de côté pour le moment les difficultés que l'on a éprouvées en voulant généraliser la théorie des résidus de Cauchy, car j'y veux consacrer le paragraphe suivant. J'insisterai seulement sur un exemple qui met bien en évidence les différences dont je viens de parler; c'est l'étude des fonctions méromorphes dans tous le plan, c'est-à-dire des transcendantes qui ne présentent à distance finie d'autres singularité que des infinis.

On sait que M. Weierstrass a démontré que, si une fonction d'une seule variable est méromorphe dans tout le plan, elle peut être regardée comme le quotient de deux fonctions entières. Pour arriver à ce résultat, le célèbre géomètre de Berlin construit une fonction entière qui s'annule pour tous les infinis de la fonction méromorphe donnée. Le produit des deux fonctions, ne devenant plus infini, est une fonction entière. Pour construire la transcendante en question, il faut considérer séparément les différents infinis de la fonction méromorphe donnée.

La méthode de M. Weierstrass paraît donc, au premier abord, ne pas pouvoir s'étendre aux fonctions de deux variables, dont les infinis sont non plus des points isolés, mais des multiplicités continues, et ne peuvent par conséquent être envisagés séparément. Aussi les géomètres qui tentaient de généraliser le théorème de M. Weierstrass ont-ils été longtemps arrêtés [32, 67].

J'eus l'idée de tourner la difficulté en généralisant la notion de fonction de deux variables. Soit en effet $V + iW$ une fonction des variables imaginaires $x + iy$ et $z + it$. La partie réelle V satisfera à l'équation

$$(1) \qquad \Delta V = \frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} + \frac{d^2V}{dt^2} = 0.$$

Mais cette condition n'est pas suffisante pour que V soit la partie réelle d'une fonction de nos deux variables. Il faut en outre que V satisfasse aux relations

$$(2) \qquad \frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} = 0, \qquad \frac{d^2V}{dx\,dz} - \frac{d^2V}{dy\,dt} = 0.$$

Envisageons maintenant toutes les fonctions V qui satisfont à l'équation (1) sans être assujetties à satisfaire aux équations (2). On pourra alors construire une fonction qui remplira cette unique condition (1) et qui de plus admettra une partie seulement des infinis de la fonction méromorphe donnée *sans en admettre d'autres*. Cela était impossible au contraire quand cette fonction restait assujettie aux conditions (2).

Pouvant alors considérer séparément les infinis de notre fonction méromorphe, nous n'avons plus qu'à appliquer la méthode même de M. Weierstrass pour construire une fonction e^V qui s'annule pour tous les infinis de la fonction méromorphe donnée et telle que V satisfasse à l'équation (1). On peut même en trouver une infinité. Soient en effet V_0 l'une d'elles et G une fonction entière, c'est-à-dire toujours finie, de x, y, z, t, satisfaisant à l'équation $\Delta G = 0$; toutes les fonctions $V_0 + G$ rempliront, comme la fonction V_0 elle-même, les conditions énoncées plus haut. Il reste à faire voir que, parmi ces fonctions, $V_0 + G$, il y en a une qui peut être regardée comme la partie réelle d'une fonction de $x + iy$ et de $z + it$, ce qui veut dire que l'on peut disposer de la fonction entière G, de telle façon que

$$\frac{d^2(V_0 + G)}{dx^2} + \frac{d^2(V_0 + G)}{dy^2} = \frac{d^2(V_0 + G)}{dx\,dz} + \frac{d^2(V_0 + G)}{dy\,dt} = 0.$$

C'est ce que j'ai fait, démontrant ainsi le théorème suivant :

Si une fonction de deux variables imaginaires est partout méromorphe, elle sera le quotient de deux fonctions entières. Je suis revenu sur cette même question [190] et je suis parvenu à simplifier considérablement les démonstrations.

En ce qui concerne les fonctions non uniformes, j'ai contribué à l'étude de leurs propriétés dans le voisinage d'un point donné, par les lemmes que j'ai démontrés au début de ma thèse inaugurale. Supposons qu'une équation

$$F(z, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$

définissant z comme fontion implicite de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, soit satisfaite pour le système de valeurs

$$z = x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0,$$

et que nous étudions la fonction dans un domaine voisin de ce système de valeurs. Je suppose de plus que dans ce domaine la fonction F soit holomorphe. On sait depuis longtemps que, si $\frac{dF}{dz}$ n'est pas nul, z est fonction holomorphe de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. J'ai cherché ce qui se passe lorsque $\frac{dF}{dz}$ est nul en même temps que $\frac{d^2F}{dz^2}, \frac{d^3F}{dz^3}, \ldots, \frac{d^{m-1}F}{dz^{m-1}}$, mais que la $m^{\text{ième}}$ dérivée $\frac{d^mF}{dz^m}$ n'est pas nulle. J'ai démontré que dans ce cas z satisfait à une équation algébrique de la forme

$$z^m + B_{m-1}z^{m-1} + B_{m-2}z^{m-2} + \ldots + B_1 z + B_0 = 0,$$

dont les coefficients B sont des fonctions holomorphes des x. J'ai obtenu ensuite un résultat analogue pour le cas où l'on a p fonctions implicites de n variables définies par p équations simultanées.

BIBLIOGRAPHIE SPÉCIALE AUX FONCTIONS DE DEUX VARIABLES.

[32]. *Sur les fonctions de deux variables* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 96, 1883, p. 238-240).

[67]. *Sur les fonctions de deux variables* (*Acta mathematica*, t. 2, 1883, p. 97-113).

[190]. *Les propriétés du potentiel et les fonctions abéliennes* (*Acta mathematica*, t. 22, 1898, p. 89-178).

[337]. *Les fonctions analytiques de deux variables et la représentation conforme* (*Rendiconti Circolo mat. Palermo*, t. 23, 1907, p. 185-220).

SUR LES FONCTIONS DE DEUX VARIABLES

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 96, p. 238-240 (22 janvier 1883).

On sait que M. Weierstrass a démontré le théorème suivant :

Si $F(x)$ *est une fonction méromorphe dans toute l'étendue du plan, on peut la mettre sous la forme du quotient de deux fonctions entières.*

Le théorème analogue pour les fonctions de deux variables n'est pas encore démontré. Je crois en avoir trouvé une démonstration rigoureuse, dont j'exposerai ici la marche générale si l'Académie veut bien le permettre.

Je considère une fonction $F(X, Y)$ de deux variables imaginaires

$$X = x + iy, \qquad Y = z + it,$$

et je suppose que, dans le voisinage d'un point quelconque, cette fonction puisse se mettre sous la forme $\frac{N}{D}$, N et D étant deux fonctions holomorphes.

La partie réelle u d'une fonction quelconque de X et de Y satisfait aux équations

$$\Delta u = \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2} + \frac{d^2 u}{dt^2} = 0,$$

$$\Delta_1 u = \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} = 0, \qquad \Delta_2 u = \frac{d^2 u}{dz^2} + \frac{d^2 u}{dt^2} = 0,$$

$$\Delta_3 u = \frac{d^2 u}{dy\,dz} - \frac{d^2 u}{dx\,dt} = 0, \qquad \Delta_4 u = \frac{d^2 u}{dx\,dz} - \frac{d^2 u}{dy\,dt} = 0.$$

J'appellerai fonction *potentielle* toute fonction qui satisfait à l'équation $\Delta u = 0$, et je dirai que cette fonction est entière si elle est holomorphe pour toutes les valeurs finies de x, y, z, t.

L'ensemble des points x, y, z, t qui satisfont à l'inégalité

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 + (t - t_0)^2 < r^2$$

formera une région que j'appellerai *hypersphérique*, à cause de la ressemblance entre l'inégalité précédente et celle qui exprime qu'un point est intérieur à une sphère.

1° Cela posé, je construis une infinité de régions hypersphériques R_1^0, R_2^0, ... Je suppose qu'un point quelconque (x, y, z, t) appartient au moins à une et au plus à cinq de ces régions. Je suppose que ces régions sont choisies de telle sorte qu'à l'intérieur de R_i^0, par exemple, la fonction F peut se mettre sous la forme $\frac{N_i}{D_i}$.

J'envisage également les régions R_i^1, formées par la partie commune à deux des régions R_i^0 et les régions R_i^2, R_i^3, R_i^4, formées par la partie commune à trois, à quatre ou à cinq de ces régions.

2° Je construirai une fonction potentielle J_i^p jouissant des propriétés suivantes : elle est holomorphe à l'extérieur de R_i^p et tend vers zéro quand $x^2 + y^2 + z^2 + t^2$ croît indéfiniment. La différence $J_i^p - \log \operatorname{mod} D$ est holomorphe à l'intérieur de R_i^p; enfin, sur la limite de la région R_i^p, J_i^p est holomorphe quand D ne s'annule pas.

Par exemple, si la région R_i^0 est formée de l'ensemble des points qui satisfont à l'inégalité

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 < 1,$$

voici comment on peut former la fonction J correspondante : on posera

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta\cos\psi, \qquad z = r\sin\theta\sin\psi\cos\varphi, \qquad t = r\sin\theta\sin\psi\sin\varphi.$$

Considérons trois angles θ', ψ' et φ', et posons

$$\alpha r = x\cos\theta' + y\sin\theta'\cos\psi' + z\sin\theta'\sin\psi'\cos\varphi' + t\sin\theta'\sin\psi'\sin\varphi',$$
$$d\omega' = \sin^2\theta'\sin\psi'\,d\theta'\,d\psi'\,d\varphi'.$$

Quand on fait $r = 1$, $\operatorname{mod} D$ et $\frac{d(\operatorname{mod} D)}{dr}$ se réduisent à des fonctions ν et λ de θ, φ et ψ; soient ν' et λ' ce que deviennent ν et λ quand on y remplace θ, φ et ψ par θ', φ' et ψ'. La fonction J sera égale,

pour $r > 1$, à

$$-\frac{1}{2\pi^2}\int\frac{2\nu'(1 - \alpha r) + \lambda'(1 - 2\alpha r + r^2)}{(1 - 2\alpha r + r^2)^2}\,d\omega';$$

pour $r < 1$, à

$$\log \operatorname{mod} D - \frac{1}{2\pi^2} \int \frac{2\nu'(1-\alpha r) + \lambda'(1-2\alpha r + r^2)}{(1-2\alpha r + r^2)^2} d\omega'.$$

3° Je formerai ensuite, à l'aide des fonctions J_i'', une fonction potentielle Φ, telle que si, en un point quelconque, F peut se mettre sous la forme $\frac{N}{D}$, la différence $\Phi - \log \operatorname{mod} D$ soit holomorphe. Je n'ai, pour cela, qu'à appliquer, sans y rien changer, la méthode par laquelle M. Weierstrass démontre le théorème de M. Mittag-Leffler (*Monatsberichte*, août 1880).

4° La fonction Φ ne satisfait pas, en général, aux équations

$$\Delta_1 \Phi = \Delta_2 \Phi = \Delta_3 \Phi = \Delta_4 \Phi = 0;$$

mais les expressions $\Delta_i \Phi$ sont des fonctions potentielles entières.

Je démontre que je puis trouver une fonction potentielle entière G satisfaisant aux quatre équations

$$\Delta_1 G = \Delta_1 \Phi, \qquad \Delta_2 G = \Delta_2 \Phi,$$
$$\Delta_3 G = \Delta_3 \Phi, \qquad \Delta_4 G = \Delta_4 \Phi.$$

La différence $\Phi - G$ est alors la partie réelle d'une fonction de deux variables $\psi(X, Y)$, et l'on voit aisément que les fonctions

$$e^{\psi} = G_1 \qquad \text{et} \qquad F e^{\psi} = G_2$$

sont des fonctions entières, de sorte que F est le quotient de deux fonctions entières G_1 et G_2. C. Q. F. D.

Les mêmes considérations peuvent servir à établir le théorème suivant :

Si Y est une fonction quelconque de X, non uniforme, qui ne présente pas de point singulier essentiel à distance finie, et qui ne puisse pas, pour une même valeur de X, prendre une infinité de valeurs finies infiniment voisines les unes des autres, elle pourra être considérée comme la solution d'une équation

$$G(X, Y) = 0,$$

où G est une fonction entière.

SUR LES FONCTIONS DE DEUX VARIABLES

Acta mathematica, t. 2, p. 97-113 (1883).

1. On sait que M. Weierstrass a démontré au sujet des fonctions d'une seule variable le théorème suivant :

Si $F(x)$ *est une fonction méromorphe dans toute l'étendue du plan, c'est-à-dire n'ayant à distance finie d'autre singularité que des pôles, on peut la mettre sous la forme du quotient de deux fonctions entières.*

Le théorème analogue pour les fonctions de deux variables n'est pas encore démontré. Je crois être arrivé à en donner une démonstration rigoureuse, mais comme elle est un peu longue, je n'en donnerai pas ici tous les détails; je me bornerai à en exposer les traits principaux qui suffiront aux géomètres pour la reconstituer.

Voici quel est le problème.

Je considère une fonction de deux variables $F(X, Y)$ et je suppose que dans le voisinage d'un point quelconque X_0, Y_0, on puisse la mettre sous la forme $\frac{N}{D}$, N et D étant deux séries ordonnées suivant les puissances de $X - X_0$ et $Y - Y_0$ et convergentes lorsque les modules de ces quantités sont suffisamment petits. Je suppose de plus que, lorsque les modules de $X - X_0$ et $Y - Y_0$ restent assez petits, les deux séries N et D ne peuvent s'annuler à la fois que pour des points isolés. Je dis que cette fonction peut se mettre sous la forme $\frac{G(X, Y)}{G_1(X, Y)}$, G et G_1 étant des séries ordonnées suivant les puissances de X et Y et *toujours* convergentes. Ainsi autour du point X_0, Y_0 il existera par hypothèse une région R_0 où la fonction F pourra se mettre sous la forme $\frac{N_0}{D_0}$; de même autour d'un autre point X_1, Y_1, il existera une région R_1 où F pourra s'écrire $\frac{N_1}{D_1}$. Mais si les deux régions R_0 et R_1 ont une partie commune, N_1 pourra ne pas être la *continuation analytique* de N_0. Tout ce que nous savons, c'est que dans la partie commune aux deux régions, le rapport $\frac{N_1}{N_0}$ ne devient ni nul, ni infini.

2. On sait que la partie réelle u d'une fonction d'une variable imaginaire $x+iy$, satisfait à l'équation $\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}=0$, de sorte que l'étude des fonctions d'une seule variable se ramène à l'étude d'une attraction s'exerçant en raison inverse de la distance. On a vu dans les derniers numéros des *Mathematische Annalen*, quel parti M. Klein a su tirer de considérations physiques qui sont au fond tout à fait analogues. De même si nous posons

$$X = x+iy, \qquad Y = z+it,$$

la partie réelle u d'une fonction quelconque de X et de Y satisfera à l'équation

$$\Delta u = \frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d^2u}{dz^2}+\frac{d^2u}{dt^2}=0,$$

de sorte qu'à ce point de vue l'étude des fonctions de deux variables se ramène à celle d'une *attraction s'exerçant dans l'espace à 4 dimensions en raison inverse du cube de la distance*. M. Kronecker a déjà fait voir (*Monatsberichte*, 1869) que la considération d'une pareille attraction peut être utile au géomètre qui veut étudier les fonctions de plusieurs variables. Je n'emploierai pas cependant le langage hypergéométrique; je me bornerai à lui emprunter quelques expressions. Ainsi l'ensemble des points x, y, z, t qui satisfont à l'inégalité

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2+(t-t_0)^2<R^2 \tag{1}$$

s'appellera une *région hypersphérique* dont le centre sera x_0, y_0, z_0, t_0 et le rayon R. L'ensemble des points qui satisferont à l'égalité

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2+(t-t_0)^2=R^2$$

formeront une *surface hypersphérique*.

Il y a toutefois une différence essentielle entre cette théorie et celle des fonctions d'une seule variable. Pour que u soit la partie réelle d'une fonction de X et de Y, il ne suffit pas qu'il satisfasse à l'équation $\Delta u = 0$. Il doit en outre satisfaire aux équations suivantes :

$$\Delta_1 u = \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} = 0, \qquad \Delta_2 u = \frac{d^2 u}{dz^2} + \frac{d^2 u}{dt^2} = 0;$$

$$\Delta_3 u = \frac{d^2 u}{dy\,dz} - \frac{d^2 u}{dx\,dt} = 0, \qquad \Delta_4 u = \frac{d^2 u}{dx\,dz} + \frac{d^2 u}{dy\,dt} = 0.$$

J'appellerai *fonction potentielle* toute fonction u qui satisfait à l'équation $\Delta u = 0$. Je supposerai que ma fonction potentielle est holomorphe pour toutes les valeurs de x, y, z, t, sauf pour certaines valeurs exceptionnelles qui formeront des points singuliers, ou même des lignes et des plages singulières.

Toute fonction potentielle qui n'aura aucune singularité à distance finie sera dite *entière*. Toute fonction potentielle entière qui reste constamment inférieure à une quantité donnée se réduit à une constante.

3. Voici la marche que je vais suivre dans la démonstration :

1° Je construirai une infinité de régions hypersphériques R_1^0, R_2^0, ... Je supposerai qu'un point quelconque x, y, z, t appartienne au moins à une, et au plus à cinq de ces régions; cela est toujours possible. Je supposerai de plus que ces régions sont choisies de telle sorte qu'à l'intérieur de R_i^0 par exemple, la fonction F peut se mettre sous la forme $\frac{N_i}{D_i}$; j'appelle M_i le module de D_i.

J'envisage également les régions R_i^1 formées par la partie commune à deux des régions R_i^0, et les régions R_i^2, R_i^3, R_i^4 formées par la partie commune à trois, à quatre, ou à cinq de ces régions hypersphériques.

2° Je construirai une fonction potentielle J_i^p jouissant des propriétés suivantes : elle est holomorphe à l'extérieur de R_i^p, et tend vers zéro quand $x^2 + y^2 + z^2 + t^2$ croît indéfiniment; à l'intérieur de R_i^p, la différence $J_i^p - \log M_i$ est holomorphe; enfin sur la limite de la région R_i^p, J_i^p est holomorphe quand $\log M_i$ l'est lui-même.

3° Je montrerai ensuite qu'on peut former une fonction potentielle Φ existant pour toutes les valeurs de x, y, z, t et telle que si en un point quelconque, F peut se mettre sous la forme $\frac{N}{D}$, la différence $\Phi - \log \operatorname{mod} D$ soit holomorphe.

4° Puis, je ferai voir que Φ peut s'écrire

$$\Phi_1 + G,$$

G étant une fonction potentielle entière et Φ_1 étant la partie réelle d'une fonction imaginaire $\Phi_1 + i\Phi'_1$ de X et de Y.

Le théorème énoncé sera alors démontré, car les fonctions $e^{\Phi_1+i\Phi'_1}$ et $\mathrm{F}e^{\Phi_1+i\Phi'_1}$ seront des fonctions entières de X et de Y.

Principe de Dirichlet.

4. Considérons la région hypersphérique dont l'équation est

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1$$

et qui a par conséquent pour centre l'origine et pour rayon l'unité. Je pose

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta\cos\psi, \qquad z = r\sin\theta\sin\psi\cos\varphi, \qquad t = r\sin\theta\sin\psi\sin\varphi.$$

Soient ξ, η, ζ, τ quatre quantités liées par la relation

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + \tau^2 = 1,$$

et posons

$$\xi = \cos\theta', \qquad \eta = \sin\theta'\cos\psi', \qquad \zeta = \sin\theta'\sin\psi'\cos\varphi', \qquad \tau = \sin\theta'\sin\psi'\sin\varphi';$$

$$x\xi + y\eta + z\zeta + t\tau = ar;$$

$$\sin^2\theta'\sin\psi'\,d\theta'\,d\varphi'\,d\psi' = d\omega'.$$

Soit v une fonction quelconque des angles θ, ψ, φ; soit v' ce que devient v quand on y remplace θ, ψ, φ par θ', ψ' et φ'. Considérons l'intégrale triple

$$\mathrm{V} = \int \frac{v'\,d\omega'}{1 - 2ar + r^2}$$

étendue à toute la surface hypersphérique. Cette fonction V sera évidemment une fonction potentielle qui sera holomorphe tant à l'intérieur qu'à l'extérieur de la région hypersphérique, mais cessera de l'être sur la surface hypersphérique elle-même. Supposons maintenant que le point x, y, z, t vienne sur cette surface, c'est-à-dire que r se réduise à 1; V se réduira à une fonction V_0 de θ, φ, et ψ définie par l'intégrale triple

$$\mathrm{V}_0 = \frac{1}{2}\int \frac{v'\,d\omega'}{1 - a},$$

la limite de V est toujours V_0 quand r tend vers l'unité, soit par valeurs inférieures, soit par valeurs supérieures à l'unité; donc V est une fonction toujours continue. Il n'en est pas de même de sa dérivée $\frac{dV}{dr}$ comme on le verra plus loin. De plus on peut démontrer que V_0 sera holomorphe en θ, φ, et ψ pour les mêmes valeurs que la fonction v elle-même.

La fonction

$$r\frac{dV}{dr} = 2\int \frac{(ar - r^2)v'\,d\omega'}{(1-2ar-r^2)^2}$$

est aussi une fonction potentielle holomorphe à l'intérieur et à l'extérieur de la région hypersphérique; mais cette fonction présente une discontinuité pour $r=1$. Elle tend vers $\pi^2 v - V_0$ pour $r = 1-\varepsilon$, c'est-à-dire quand r tend vers 1 par valeurs inférieures à 1 et vers $-\pi^2 v - V_0$ pour $r = 1+\varepsilon$, c'est-à-dire quand r tend vers 1 par valeurs supérieures à 1.

Tout ce qui précède ne suppose pas que v reste fini; cette fonction peut devenir infinie pour certaines valeurs de θ, φ, ψ, *pourvu qu'elle reste intégrable;* j'entends par là que l'intégrale triple

$$\int v' f\,d\omega'$$

(où f est une fonction quelconque finie de θ', φ' et ψ') doit être finie. Ainsi, si A et A_1 sont deux fonctions holomorphes de θ, φ, ψ, dont les déterminants fonctionnels par rapport à deux de ces variables ne s'annulent pas à la fois, la fonction v pourra devenir infinie toutes les fois que $A = A_1 = 0$ pourvu que $v(A^2 + A_1^2)^m$ reste fini, m étant supposé plus petit que 1.

5. Considérons maintenant la fonction suivante :

$$\frac{1}{\pi^2}\left(V + r\frac{dV}{dr}\right) = \frac{1}{\pi^2}\int \frac{(1-r^2)v'\,d\omega'}{(1-2ar+r^2)^2}.$$

Cette fonction, d'après ce qui précède, est une fonction holomorphe pour $r \gtrless 1$; pour $r=1$ elle se réduit à $\pm v$ selon que r tend vers 1 par valeurs inférieures ou supérieures à cette limite. Or la fonction v est une fonction donnée quelconque, qui n'est assujettie qu'à être intégrable. Nous savons donc construire une fonction potentielle qui reste holomorphe à l'intérieur d'une région hypersphérique et qui prend des valeurs données sur la surface de cette région. C'est le principe de Dirichlet étendu aux fonctions de deux variables.

6. Ce qui précède s'applique évidemment à une région hypersphérique

quelconque. On peut même étendre, en appliquant directement la belle méthode de M. Schwarz, le principe de Dirichlet à une région quelconque et en particulier à une région limitée par des portions de surfaces hypersphériques. Mais il y a une différence essentielle avec la théorie des fonctions d'une seule variable. Il n'y a qu'une seule fonction potentielle holomorphe u qui prenne sur les limites d'une région donnée une suite de valeurs déterminées, et cette fonction ne satisfait pas en général aux équations

$$\Delta_1 u = \Delta_2 u = \Delta_3 u = \Delta_4 u = 0,$$

de sorte qu'il est impossible en général de construire une fonction de $x + iy$ et de $z + it$ qui n'ait pas de singularités dans une région donnée, et dont la partie réelle prenne des valeurs déterminées à l'avance sur les limites de cette région. C'est là qu'il faut chercher la véritable explication des différences si profondes que l'on observe entre les fonctions d'une variable et celles de deux variables et en particulier de ce fait que l'on ne peut construire une fonction de deux variables ayant quatre périodes quelconques.

Formation des fonctions J_i^0.

7. Considérons une des régions que nous avons appelées R_i^0 et supposons qu'à l'intérieur de cette région on ait $F = \frac{N_i}{D_i}$; N_i et D_i étant holomorphes en X et en Y.

Je pose

$$D_i = X + \sqrt{-1}\, X_1, \qquad M_i^2 = X^2 + X_1^2.$$

Je suppose enfin que la région R_i^0 soit hypersphérique et, pour fixer les idées, je supposerai comme aux paragraphes 4 et 5 qu'elle ait pour centre l'origine et pour rayon l'unité. Sur la surface hypersphérique qui limite R_i^0, le logarithme de M_i se réduit à une fonction de θ, φ et ψ que j'appelle v. Cette fonction est intégrable d'après la règle exposée à la fin du paragraphe 4. Le principe de Dirichlet nous permet donc de former une fonction potentielle

$$u = \frac{1}{\pi^2} \int \frac{(1 - r^2) v'\, d\omega'}{(1 - 2ar + r^2)^2},$$

qui est holomorphe pour $r < 1$ et se réduit à v pour $r = 1 - \varepsilon$.

Si nous posons comme plus haut

$$V = \int \frac{v'\,d\omega'}{1-2ar+r^2}, \qquad 2V_0 = \int \frac{v'\,d\omega'}{1-a},$$

nous aurons

$$\pi^2 u = V + r\frac{dV}{dr},$$

d'où

$$\pi^2 \frac{du}{dr} = 2\frac{dV}{dr} + r\frac{d^2V}{dr^2}.$$

Mais l'équation $\Delta V = 0$ peut s'écrire

$$r^2\frac{d^2V}{dr^2} + 3r\frac{dV}{dr} + DV = 0,$$

en posant pour abréger

$$DV = \frac{d^2V}{d\theta^2} + \operatorname{cos\acute{e}c}^2\theta\,\frac{d^2V}{d\varphi^2} + \operatorname{cos\acute{e}c}^2\theta\,\operatorname{cos\acute{e}c}^2\varphi\,\frac{d^2V}{d\psi^2} + 2\operatorname{cotg}\theta\,\frac{dV}{d\theta} + \operatorname{cos\acute{e}c}^2\theta\,\operatorname{cotg}\varphi\,\frac{dV}{d\varphi},$$

d'où

$$-\pi^2 r\frac{du}{dr} = r\frac{dV}{dr} + DV,$$

et si w est ce que devient $\frac{du}{dr}$ pour $r = 1-\varepsilon$:

$$\pi^2 w = V_0 - \pi^2 v - DV_0.$$

Mais V_0 et par conséquent DV_0 est holomorphe en θ, φ, et ψ, toutes les fois que la fonction v l'est elle-même, c'est-à-dire pourvu que l'on n'ait pas à la fois $X = X_1 = 0$. Il en est donc de même de w.

Quand $r > 1$, la fonction u est holomorphe, mais elle se réduit à $-v$ pour $r = 1+\varepsilon$, et est par conséquent discontinue pour $r = 1$. Quant à la fonction $\frac{du}{dr}$, elle se réduit à

$$v + \frac{1}{\pi^2}(V_0 - DV_0)$$

pour $r = 1+\varepsilon$, puisque $r\frac{dV}{dr}$ se réduit à $-\pi^2 v - V_0$ d'après le paragraphe 4.

Soit maintenant λ ce que devient $\frac{d\log M_i}{dr}$ pour $r = 1$. On aura

$$\lambda = \frac{r\frac{dM_i}{dr}}{M_i} = \frac{x\frac{dM_i}{dx} + y\frac{dM_i}{dy} + z\frac{dM_i}{dz} + t\frac{dM_i}{dt}}{\sqrt{X^2 + X_1^2}}.$$

Ainsi, le produit $\lambda\sqrt{A^2+A_1^2}$ restant fini quand A et A_1 s'annulent à la fois, la fonction λ est intégrable, et nous pourrons écrire, en appelant λ' ce que devient λ quand on y change θ, φ, ψ en θ', φ', ψ' :

$$W = \int \frac{\lambda'\, d\omega'}{1-2ar+r^2}, \qquad 2W_0 = \int \frac{\lambda'\, d\omega'}{1-a},$$

W sera une fonction potentielle analogue à V, et W_0 sera holomorphe en θ, φ, ψ en même temps que λ, c'est-à-dire toutes les fois que M_i ne s'annulera pas.

Définissons maintenant notre fonction J_i^0 ainsi qu'il suit; elle sera égale :

pour $r > 1$ à

$$-\frac{u}{2} - \frac{V}{2\pi^2} - \frac{W}{2\pi^2};$$

pour $r < 1$ à

$$\log M_i - \frac{u}{2} - \frac{V}{2\pi^2} - \frac{W}{2\pi^2}.$$

Quand r tendra vers 1 *soit par valeurs supérieures, soit par valeurs inférieure à* 1, J_i^0 et $\frac{dJ_i^0}{dr}$ tendront respectivement vers

$$\frac{v}{2} - \frac{V_0}{2\pi^2} - \frac{W_0}{2\pi^2} \quad \text{et} \quad \frac{DV_0}{2\pi^2} + \frac{W_0}{2\pi^2} + \frac{\lambda}{2}.$$

Ainsi les deux fonctions J_i^0 et $\frac{dJ_i^0}{dr}$ sont continues pour $r=1$, et elles se réduisent pour $r=1$ à des fonctions de θ, φ, ψ qui sont holomorphes pourvu que M_i ne soit pas nul.

Mais d'après le théorème de M$^{\text{me}}$ de Kowalevsky, il n'y a qu'une seule fonction analytique F de r, θ, φ, ψ qui satisfasse à l'équation $\Delta F = 0$ et qui se réduise ainsi que sa dérivée $\frac{dF}{dr}$ à des fonctions analytiques données de θ, φ et ψ quand on fait $r=1$. Les deux portions de la fonction J_i^0 sont donc la *continuation analytique* l'une de l'autre. La fonction J_i^0 satisfait donc bien aux conditions imposées. On peut voir d'ailleurs qu'elle est intégrable sur la surface hypersphérique R_i^0.

Ce que je viens de dire s'applique évidemment à une région hypersphérique quelconque.

8. La fonction J_i^0 peut se mettre sous la forme suivante. Soient ξ, η, ζ, τ quatre fonctions de u et de v telles que l'on ait identiquement

$$D_i(\xi + i\eta, \zeta + i\tau) = 0;$$

soit δ une fonction convenablement choisie de u et de v, on peut écrire

$$J_i^0 = \iint \frac{\delta\, du\, dv}{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 + (\tau - t)^2},$$

l'intégrale double s'étendant aux valeurs de u et de v telles que le point ξ, η, ζ, τ soit à l'intérieur de R_i^0.

9. Si une fonction potentielle u est holomorphe à l'intérieur et à l'extérieur d'une certaine région R; si elle tend vers zéro quand $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = r^2$ croît indéfiniment; si elle est encore holomorphe sur la limite même de la région R, excepté sur une certaine ligne singulière pour laquelle nous ne savons rien; si enfin elle est intégrable sur la limite même de la région R, je dis qu'elle est identiquement nulle.

Je suppose d'abord que la région R soit hypersphérique et, pour fixer les idées, qu'elle a pour équation

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1.$$

Si l'on fait $r = 1$, notre fonction u devient une certaine fonction v de θ, φ, ψ, qui par hypothèse est intégrable. Soit v' ce que devient v quand on y change θ, φ, ψ en θ', φ', ψ'. La fonction v étant intégrable, nous pourrons former les intégrales suivantes :

$$U = \frac{1}{\pi^2} \int \frac{(1 - r^2)\, v'\, d\omega'}{(1 - 2\alpha r + r^2)^2}, \qquad V = \int \frac{v'\, d\omega'}{1 - 2\alpha r + r^2}, \qquad 2V_0 = \int \frac{v'\, d\omega'}{1 - \alpha}.$$

Pour $r > 1$, on aura $U = -u$ et pour $r < 1$, on aura $U = u$; on aura donc pour $r = 1 + \varepsilon$:

$$\frac{du}{dr} = -v - \frac{1}{\pi^2}(V_0 - DV_0),$$

et pour $r = 1 - \varepsilon$:

$$\frac{du}{dr} = -v + \frac{1}{\pi^2}(V_0 - DV_0).$$

Mais la fonction étant holomorphe par hypothèse même pour $r = 1$, sa dérivée doit être continue, c'est-à-dire que l'on a pour $r = 1$:

$$\frac{du}{dr} = -v, \qquad V_0 - DV_0 = 0.$$

Mais alors les deux fonctions potentielles u et $-r\frac{du}{dr}$, ayant même valeur sur la surface hypersphérique, seront identiques et l'on aura

$$u+r\frac{du}{dr}=0.$$

Cette identité entraîne la suivante :

$$u=\frac{v}{r}.$$

Mais u doit être holomorphe pour $r=0$, et cela ne peut avoir lieu vu l'identité précédente, que si v et u sont identiquement nuls. C. Q. F. D.

10. Je suppose maintenant que la région R soit la partie commune à deux régions hypersphériques S et S_1, dont j'écrirai les équations sous la forme

$$S=0, \qquad S_1=0,$$

de telle sorte que la région R se compose de l'ensemble des points x, y, z, t, qui satisfont à la fois aux deux inégalités

$$S<0, \qquad S_1<0.$$

La région R aura alors pour limites deux portions s et s_1 des deux surfaces hypersphériques S et S_1; et par hypothèse notre fonction u pourra cesser d'être holomorphe sur deux lignes singulières l et l_1 situées respectivement sur s et s_1, *mais sans cesser d'être intégrable*.

Considérons une surface hypersphérique Σ ayant pour équation

$$S+S_1=0,$$

et passant par conséquent par l'intersection des deux surfaces hypersphériques S et S_1. Je suppose que s et l soient extérieures à Σ et que s_1 et l_1 soient intérieures à Σ; nous pourrons, en faisant jouer à notre fonction u le même rôle que jouait $\log M_i$ dans le paragraphe 7, construire une fonction u_1, jouissant des propriétés suivantes :

1° Elle sera holomorphe à l'extérieur de Σ, et par conséquent sur la portion de surface s.

2° La différence $u-u_1$ sera holomorphe à l'intérieur de Σ, et par conséquent u_1 ne pourra cesser d'être holomorphe que sur la ligne singulière l, mais sans cesser d'être intégrable.

D'après le paragraphe précédent la fonction u_1 est identiquement nulle. On verrait de même que la fonction $u - u_1$ qui ne peut cesser d'être holomorphe que sur la ligne singulière l_1 et qui ne cesse pas d'être intégrable, doit être identiquement nulle. Il en est donc ainsi de la fonction u elle-même.

C. Q. F. D.

Formation des fonctions J_i^1.

11. Considérons deux régions hypersphériques R_i^0 et R_k^0, les deux surfaces hypersphériques S_i et S_k qui leur servent de limite, et les fonctions J_i^0 et J_k^0 correspondantes. Je puis, en faisant jouer à J_k^0 le même rôle que jouait $\log M_i$ dans le paragraphe 7, construire une fonction J_i^1 qui soit holomorphe à l'extérieur de R_i^0 et telle que la différence $J_k^0 - J_i^1$ soit holomorphe à l'intérieur de R_i^0. Considérons la région R_i^1 formée par la partie commune à R_i^0 et à R_k^0 et limitée par deux portions de surfaces hypersphériques s_i et s_k appartenant respectivement aux deux surfaces S_i et S_k. Notre fonction J_i^1 est alors holomorphe à l'extérieur de R_i^1 et sa différence avec $\log M_i$ est holomorphe à l'intérieur de R_i^1.

On peut construire de la même manière une autre fonction K_i^1 qui soit holomorphe à l'extérieur de R_k^0 et telle que la différence $J_i^0 - K_i^1$ soit holomorphe à l'intérieur de R_k^0. Cette fonction est identique à J_i^1, car la différence $K_i^1 - J_i^1$ ne peut cesser d'être holomorphe que sur les portions de surfaces s_i et s_k et seulement aux points où M_i s'annule. Elle ne cesse d'ailleurs pas d'être intégrable. Elle est donc nulle.

12. Considérons maintenant l'ensemble des deux régions R_i^0 et R_k^0 et la fonction $J_i^0 + J_k^0 - J_i^1$; supposons qu'en un point quelconque intérieur à l'une des deux régions R_i^0 et R_k^0, F se mette sous la forme $\frac{N}{D}$; je dis que la différence

$$J_i^0 + J_k^0 - J_i^1 - \log \operatorname{mod} D$$

est holomorphe.

En effet, si le point considéré n'appartient pas à s_i ou à s_k, cela est évident; mais supposons qu'il appartienne à l'une de ces portions de surfaces, par exemple à s_i; les différences $J_k^0 - \log \operatorname{mod} D$ et $J_i^0 - J_i^1$ seront holomorphes d'après la façon même dont ces fontions J_k^0 et J_i^1 ont été construites. Il en est donc de même de leur somme $J_i^0 + J_k^0 - J_i^1 - \log \operatorname{mod} D$.

C. Q. F. D.

13. On formerait de même les fonctions J_i^2, J_i^3, J_i^4. Supposons que l'on envisage n régions hypersphériques R_1^0, R_2^0, ..., R_n^0; puis toutes les régions R_i^1 formées des parties communes à deux quelconques de ces n régions; puis toutes les régions R_i^2, R_i^3, R_i^4 formées des parties communes à trois, à quatre ou à cinq quelconques de ces n régions hypersphériques. Formons les diverses fonctions J_i^0, J_i^1, J_i^2, J_i^3, J_i^4 correspondant à ces diverses régions R_i^0, R_i^1, R_i^2, R_i^3, R_i^4. On voit aisément, comme au paragraphe 12, que si en un point quelconque intérieur à l'une des n régions R_i^0, la fonction F se met sous la forme $\frac{N}{D}$, la fonction

$$\Sigma J_i^0 - \Sigma J_i^1 + \Sigma J_i^2 - \Sigma J_i^3 + \Sigma J_i^4 - \log \operatorname{mod} D$$

est holomorphe.

Formation de la fonction Φ.

14. Pour former la fonction Φ il suffit d'appliquer, sans y rien changer, la méthode par laquelle M. Weierstrass a démontré le théorème de M. Mittag-Leffler.

Une fonction potentielle U qui ne présente pas de singularité à l'origine peut se développer suivant les puissances croissantes de x, y, z, t. Si la série ainsi obtenue est convergente, toutes les fois que

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 < r^2,$$

r sera le *rayon de convergence*.

Soient ε et ε_n'' deux nombres positifs quelconques, le premier plus petit que 1. Soit U_m ce que devient le développement de la fonction U suivant les puissances de x, y, z, t quand on y supprime tous les termes d'ordre inférieur à m. On pourra toujours prendre m assez grand pour que

$$\operatorname{mod} U_m < \varepsilon_n'',$$

toutes les fois que

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 < \varepsilon^2 r^2.$$

On pourra alors trouver un nombre $\varepsilon < 1$ et une série de nombres positifs ε_n'' dont la somme soit convergente. Supposons de plus, ce qui est permis, que l'origine ait été choisie de telle sorte qu'aucune des fonctions J_i'' n'y présente de singularité, J_n'' pourra alors être développé suivant les puissances de x, y, z, t; appelons K_n'' ce que devient J_n'' quand on y supprime les termes de degré inférieur à m_n^p. Nous supposerons que m_n^p a été choisi assez grand pour que :

$$\operatorname{mod} K_n^p < \varepsilon_n^p,$$

toutes les fois que

$$x^2+y^2+z^2+t^2 < \varepsilon^2 (r_n^p)^2,$$

r_n^p étant le rayon de convergence de la série J_n^p. La fonction

$$\Phi = \sum_1^\infty {}_n K_n^0 - \sum_1^\infty {}_n K_n^1 - \sum_1^\infty {}_n K_n^2 - \sum_1^\infty {}_n K_n^3 + \sum_1^\infty {}_n K_n^4$$

satisfera alors aux conditions énoncées, c'est-à-dire que si dans le voisinage d'un point quelconque on a

$$F = \frac{N}{D},$$

la différence

$$\Phi - \log \operatorname{mod} D$$

sera holomorphe.

Formation de Φ_1 et de G.

15. La fonction Φ satisfait à l'équation $\Delta\Phi = 0$; mais elle ne satisfait pas en général aux équations

$$\Delta_1\Phi = \Delta_2\Phi = \Delta_3\Phi = \Delta_4\Phi = 0.$$

Les expressions $\Delta_1\Phi$, $\Delta_2\Phi$, $\Delta_3\Phi$, $\Delta_4\Phi$ sont des fonctions potentielles. Je dis qu'elles sont entières. En effet, dans le voisinage d'un point quelconque la fonction $\Phi - \log \operatorname{mod} D$ est holomorphe; il en est donc de même de $\Delta_1\Phi - \Delta_1 \log \operatorname{mod} D$ et de $\Delta_1\Phi$, puisque $\Delta_1 \log \operatorname{mod} D = 0$.

Les fonctions $\Delta_1\Phi$, $\Delta_2\Phi$, $\Delta_3\Phi$, $\Delta_4\Phi$ sont donc entières et par conséquent développables suivant les puissances de x, y, z, t quelles que soient les valeurs de ces quantités.

16. Il s'agit de former une fonction Φ_1 satisfaisant à la fois aux équations

$$\Delta_1\Phi_1 = \Delta_2\Phi_1 = \Delta_3\Phi_1 = \Delta_4\Phi_1 = 0,$$

et telle que la différence $\Phi - \Phi_1 = G$ soit une fonction entière. Pour cela, il suffit de trouver une fonction entière G qui satisfasse aux équations

$$(1)\qquad \begin{cases} \Delta_1 G = \Delta_1\Phi, & \Delta_2 G = \Delta_2\Phi; \\ \Delta_3 G = \Delta_3\Phi, & \Delta_4 G = \Delta_4\Phi. \end{cases}$$

Je dis que cela est toujours possible. Posons en effet

$$G = \Sigma A_{m.n.p.q} \frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!} \frac{z^p}{p!} \frac{t^q}{q!}.$$

Voici la condition pour que G soit une fonction entière.

Posons

$$m + n + p + q = s,$$

et considérons un instant s comme un nombre donné. Soit H_s la plus grande valeur que puisse prendre le module de $A_{m.n.p.q}$. G sera une fonction entière si l'expression

$$H_s \frac{r^s}{s!}$$

tend vers zéro quand s croît indéfiniment et cela *quel que soit* r.

Posons

$$\Delta_1\Phi = \Sigma B_{m.n.p.q} \frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!} \frac{z^p}{p!} \frac{t^q}{q!},$$

$$\Delta_2\Phi = \Sigma C_{m.n.p.q} \frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!} \frac{z^p}{p!} \frac{t^q}{q!},$$

$$\Delta_3\Phi = \Sigma D_{m.n.p.q} \frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!} \frac{z^p}{p!} \frac{t^q}{q!},$$

$$\Delta_4\Phi = \Sigma E_{m.n.p.q} \frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!} \frac{z^p}{p!} \frac{t^q}{q!}.$$

Soit P_s la plus grande valeur que puisse prendre le module de $B_{m.n.p.q}$, $C_{m.n.p.q}$; $D_{m.n.p.q}$, $E_{m.n.p.q}$; s étant toujours supposé constant. Le produit

$$P_s \frac{r^s}{s!}$$

tendra vers zéro quel que soit r quand s croîtra indéfiniment, puisque les $\Delta_i\Phi$ sont des fonctions entières.

Les équations (1) nous donnent

$$\begin{aligned}
A_{m.n.p.q} - A_{m-2.n+2.p.q} &= B_{m-2.n.p.q},\\
A_{m.n.p.q} - A_{m.n.p-2.q+2} &= C_{m.n.p-2.q},\\
A_{m.n.p.q} - A_{m+1.n-1.p-1.q+1} &= D_{m.n-1.p-1.q},\\
A_{m.n.p.q} - A_{m-1.n+1.p-1.q+1} &= E_{m-1.n.p-1.q}.
\end{aligned}$$

Si nous supposons toujours s constant, nous avons $\frac{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)}{1.2.3.4}$

inconnues qui sont les A et $\frac{(s-1)s(s+1)(s+2)}{1.2.3}$ équations à résoudre. Mais nous savons que ces équations sont compatibles, puisqu'on peut toujours satisfaire aux équations (1) en faisant $G = \Phi$. Nous pouvons même nous donner arbitrairement les $2s+1$ coefficients

$$A_{m,0,s-m,0} \quad \text{et} \quad A_{m,1,1,s-m,0}.$$

Nous les prendrons égaux à zéro. On a alors, comme on le voit aisément,

$$H < P_s \frac{(s+1)^4}{1},$$

d'où

$$\lim H \frac{r^s}{s!} = 0.$$

Donc G est une fonction entière. Donc Φ_1 est une fonction qui satisfait aux quatre équations $\Delta_i \Phi_1 = 0$, de sorte qu'on peut trouver une fonction imaginaire $\Phi_1 + \sqrt{-1}\,\Phi'_1$ dont elle soit la partie réelle. D'ailleurs il est clair que la différence

$$\Phi_1 + \sqrt{-1}\,\Phi'_1 - \log D$$

est partout holomorphe.

Le théorème est donc démontré.

17. Il n'est pas douteux que des considérations analogues à celles qui précèdent ne puissent être très utiles dans l'étude de divers points délicats de la théorie des fonctions de deux variables.

Elles peuvent servir à démontrer le théorème suivant : *Si* Y *est une fonction quelconque de* X, *non uniforme, qui ne présente pas de point singulier essentiel à distance finie et qui ne puisse pas, pour une même valeur de* X, *prendre une infinité de valeurs finies infiniment voisines les unes des autres; elle pourra être considérée comme la solution d'une équation*

$$G(X, Y) = 0,$$

où G *est une fonction entière.*

SUR LES PROPRIÉTÉS DU POTENTIEL

ET

SUR LES FONCTIONS ABÉLIENNES

Acta mathematica, t. 22, p. 89-178 (1898).

I. Introduction.

Une courbe de genre p dépend de $3p-3$ modules; les fonctions Θ à p variables qui dérivent d'une courbe algébrique par le procédé de Riemann dépendent donc de $3p-3$ paramètres arbitraires. Les fonctions Θ les plus générales de p variables dépendent de

$$\frac{p(p+1)}{2}$$

paramètres arbitraires. Pour $p=2$ et pour $p=3$, les deux nombres sont égaux et l'on a

$$3p-3=\frac{p(p+1)}{2}.$$

Pour $p>3$, le premier nombre est toujours plus petit que le second. Il y a donc des fonctions Θ qu'on ne peut obtenir par les procédés de Riemann.

Nous arrivons donc à cette conclusion que les fonctions définies par Riemann ne sont par les fonctions les plus générales qui ont p variables et $2p$ périodes. Nous sommes ainsi amené à nous poser la question suivante :

Toutes les fonctions qui ont p variables et $2p$ périodes peuvent-elles être regardées comme un quotient de fonctions Θ ?

Weierstrass s'est préoccupé de cette question et est arrivé à démontrer que la réponse doit être affirmative.

Mais sa démonstration est restée longtemps inédite et n'était connue que de quelques-uns de ses élèves.

M. Picard et moi, abordâmes le même problème en 1883, et publiâmes à ce sujet une Note dans les *Comptes rendus* (décembre 1883) (¹). Nous connaissions le résultat de Weiertrass, mais nous ignorions les procédés par lesquels il y était parvenu.

Quand la démonstration de Weierstrass ayant été enfin imprimée (*Œuvres complètes*, t. 3), je pus en avoir connaissance, je reconnus la complète identité des deux démonstrations.

La démonstration de M. Appell est au contraire complètement différente de celle de Weierstrass.

Mais elle se rattache à un problème différent, étroitement apparenté à celui qui nous occupe, et dont je dois d'abord dire quelques mots.

Soit une fonction de plusieurs variables; elle est *méromorphe*, c'est-à-dire que dans le voisinage d'un point quelconque, elle peut être égalée au quotient de deux séries de puissances, convergentes dans une certaine étendue. Est-elle toujours le quotient de deux fonctions entières, c'est-à-dire de deux séries de puissances *toujours* convergentes ?

La réponse doit être affirmative. C'est ce que j'ai démontré dans le Tome 2 des *Acta mathematica* (²).

En s'appuyant sur ce résultat et sur les propriétés de certaines équations aux différences finies, M. Appell a donné une démonstration entièrement nouvelle du théorème de Weiertrass (*Journal de Liouville*, 1891).

Mais en réfléchissant sur la démonstration contenue dans mon Mémoire cité plus haut du Tome 2 des *Acta*, je me suis aperçu qu'il suffit d'y changer peu de chose pour en tirer une troisième démonstration du théorème de Weiertrass, entièrement différente des deux premières.

C'est cette troisième démonstration dont je voudrais faire l'objet du présent Mémoire.

Je dois m'appuyer sur les propriétés du potentiel dans l'espace à n dimensions. Ces propriétés sont bien connues et je n'aurai le plus souvent qu'à les rappeler.

(¹) *Voir* ce Tome IV, p. 307.
(²) *Voir* ce Tome IV, p. 147.

Mais quelques-unes d'entre elles représentent un certain intérêt; on me pardonnera si, à l'occasion, j'y insiste un peu plus qu'il n'est nécessaire pour mon sujet.

C'est ainsi que les paragraphes IV et V pourraient être supprimés sans que la démonstration en souffrît le moins du monde.

J'observerai que la démonstration que je donne ici est plus simple que celle que j'ai donnée dans le Tome 2, où j'ai employé un détour inutile, dans la crainte un peu puérile de redémontrer des théorèmes déjà connus.

II. — Fonctions harmoniques.

Une fonction V de n variables

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n$$

est dite *harmonique* dans un certain domaine :

1° Si dans ce domaine elle est finie, continue et possède des dérivées des deux premiers ordres.

2° Si dans ce domaine ses dérivées du second ordre satisfont à l'équation de Laplace :

$$\Delta V = \frac{d^2 V}{dx_1^2} + \frac{d^2 V}{dx_2^2} + \ldots + \frac{d^2 V}{dx_n^2} = 0;$$

si le domaine s'étend à l'infini, il faut de plus que la fonction V s'annule à l'infini.

Considérons les n variables x comme les coordonnées d'un point dans l'espace à n dimensions; la distance du point mobile $x_1, x_2, \ldots, x_n$, au point fixe $a_1, a_2, \ldots, a_n$ est égale par définition à

$$r = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2}.$$

On voit aisément que

$$r^{2-n}$$

est une fonction harmonique dans tout l'espace, sauf au point

$$x_1 = a_1, \quad x_2 = a_2, \quad \ldots, \quad x_n = a_n.$$

Pour $n = 3$, c'est-à-dire dans l'espace ordinaire, on a

$$r^{2-n} = \frac{1}{r};$$

nous retombons donc sur le potentiel newtonien.

Les propriétés du potentiel newtonien sont bien connues : elles peuvent d'ailleurs en général être étendues facilement au cas de n quelconque.

La première de ces propriétés est le théorème de Green exprimé par l'équation

$$\int\left(V\frac{dU}{dn}-U\frac{dV}{dn}\right)d\omega=\int(V\Delta U-U\Delta V)\,d\tau;$$

la seconde intégrale est étendue à tous les éléments $d\tau$ d'un volume T et la première à tous les éléments $d\omega$ de la surface S qui limite ce volume.

La dérivée $\frac{dV}{dn}$ représente la dérivée *estimée suivant la normale à l'élément* $d\omega$, c'est-à-dire que l'on a

$$\frac{dV}{dn}=l_1\frac{dV}{dx_1}+l_2\frac{dV}{dx_2}+l_3\frac{dV}{dx_3};$$

l_1, l_2 et l_3 étant les cosinus directeurs de l'élément de surface $d\omega$.

Les fonctions V et U doivent être finies et continues, et posséder des dérivées des deux premiers ordres.

Théorème 1. — *Si* V *et* U *sont des fonctions harmoniques, il reste*

$$\int\left(V\frac{dU}{dn}-U\frac{dV}{dn}\right)d\omega=0.$$

Une autre propriété du potentiel newtonien est la suivante : si un potentiel est dû à des masses attirantes, il est une fonction holomorphe de x_1, x_2, x_3 en tout point situé hors des masses attirantes.

Théorème 2. — *Considérons par exemple une surface attirante ; soit* $d\omega'$ *un élément de cette surface ;* x'_1, x'_2, x'_3 *les coordonnées du centre de gravité de cet élément ;* r *la distance des deux points* x'_1, x'_2, x'_3 *et* x_1, x_2, x_3. *Le potentiel aura pour expression*

$$V=\int\frac{\delta\,d\omega'}{r},$$

δ' *étant une fonction de* x'_1, x'_2, x'_3 *; c'est cette fonction que l'on appelle ordinairement la densité superficielle de la matière attirante.*

Considérons un sphère

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=\rho^2.$$

ayant pour centre l'origine et supposons que la surface attirante soit tout entière en dehors de cette sphère, de sorte que l'on ait

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 > \rho^2.$$

Développons

$$\frac{1}{r} = [(x'_1 - x_1)^2 + (x'_2 - x_2)^2 + (x'_3 - x_3)^2]^{-\frac{1}{2}}$$

suivant les puissances de x_1, x_2, x_3. Les coefficients du développement seront plus petits que les coefficients correspondants du développement de

$$\frac{1}{\rho}\left[1 - \sum\left(\frac{2x_k}{\rho} + \frac{x_k^2}{\rho^2}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Le développement est donc uniformément convergent par rapport à x'_1, x'_2, x'_3 pourvu que

$$\sum\left(\frac{2\,|x_k|}{\rho} + \frac{x_k^2}{\rho^2}\right) < 1$$

ou

$$\sum\left(1 + \frac{|x_k|}{\rho}\right)^2 < 4,$$

ou enfin pourvu que

$$(1) \qquad |x_1| < \rho\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right), \qquad |x_2| < \rho\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right), \qquad |x_3| < \rho\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right).$$

Plus généralement le développement de

$$\left[\sum_{k=1}^{n} (x'_k - x_k)^2\right]^p$$

suivant les puissances croissantes des x_k a ses coefficients plus petits que ceux du développement de

$$\rho^{2p}\left[1 - \sum\left(\frac{2x_k}{\rho} + \frac{x_k^2}{\rho^2}\right)\right]^p \qquad (p < 0),$$

en posant

$$\rho^2 = \Sigma x_k'^2.$$

Le développement converge donc uniformément pourvu que

$$|x_k| < \rho\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1\right) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Soit donc

$$(2) \qquad \Sigma A x_1^{\alpha} x_2^{\beta} x_3^{\gamma}$$

le développement de $\frac{1}{r}$ suivant les puissances de x_1, x_2 et x_3. La convergence de ce développement est uniforme, tant par rapport à x'_1, x'_2, x'_3 que par rapport à x_1, x_2, x_3 pourvu que ces quantités satisfassent aux inégalités

$$x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3 < \rho^2,$$
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < \rho^2\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - 1\right)^2 - \varepsilon,$$

ε étant une quantité aussi petite que l'on veut.

Les coefficients A sont, bien entendu, des fonctions des x'_k.

Il vient alors

$$(3)\qquad V = \int \frac{\delta' \, d\omega'}{r} = \Sigma \, x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3} \int A \delta' \, d\omega'.$$

Comme la convergence de la série (2) est uniforme, la série du dernier membre de (3) converge également et représente V. Donc le potentiel V peut être développé en série procédant suivant les puissances de x_1, x_2, x_3 pourvu que les modules de ces quantités soient assez petits.

Pour que ce résultat soit exact, il n'est pas nécessaire que la fonction δ' soit finie et continue, il suffit que l'intégrale

$$\int |\delta'| \, d\omega'$$

existe et soit finie. Par exemple, en un point Q de la surface attirante, la densité δ' pourra devenir infinie, pourvu que le produit de la densité δ' au point M′ par la distance M′Q tende vers une limite finie quand la distance M′Q tend vers zéro.

En effet, d'après la discussion précédente nous avons

$$|A| < B h^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} \qquad (h < 1),$$

B et h étant deux nombres indépendants des exposants α et des coordonnées x'_1, x'_2, x'_3. On a donc

$$\left| \int A \delta' \, d\omega' \right| < h^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} B \int |\delta'| \, d\omega',$$

ce qui montre que la série (3) converge pourvu que $\int |\delta'| \, d\omega'$ soit finie.

Par un simple changement d'origine, on démontrerait que V est développable suivant les puissances de $x_1 - a_1$, $x_2 - a_2$, $x_3 - a_3$ pourvu que l'on puisse trouver des nombres ρ et ε tels que

$$(x'_1 - a_1)^2 + (x'_2 - a_2)^2 + (x'_3 - a_3)^2 = \rho^2,$$
$$(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2 < \rho^2 \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right)^2 - \varepsilon.$$

Or c'est ce qu'on peut toujours faire, pourvu que le point a_1, a_2, a_3 ne soit pas sur la surface attirante.

Le potentiel V est donc une fonction holomorphe dans tout l'espace sauf sur la surface attirante.

En particulier, ce sera une fonction holomorphe en tout point de la sphère

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \rho^2.$$

Cela ne veut pas dire que la série (3) converge en tous les points de cette sphère; tout ce que nous avons démontré, c'est que la convergence a lieu en tous les points de la sphère concentrique dont le rayon est

$$\rho\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right).$$

Mais la série présente une particularité curieuse; supposons que dans la série (3) on groupe ensemble tous les termes de même degré; chacun de ces groupes formera un polynôme homogène en x_1, x_2, x_3 et satisfaisant à l'équation de Laplace; c'est ce qu'on appelle un *polynôme sphérique*.

Quand les termes sont ainsi groupés, la série (3) converge en tous les points de la sphère de rayon ρ; et en effet la série (2), si l'on convient de grouper ensemble les termes de même degré, converge uniformément dans toute sphère de rayon plus petit que ρ.

Je n'insisterai pas davantage sur la démonstration de cette proposition qui est bien connue et qui ne m'est d'ailleurs pas utile pour mon objet.

La condition de convergence absolue de la série (3) est donc

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < \rho^2,$$

si l'on groupe ensemble les termes de même degré et

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < \rho^2 \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right)^2,$$

si on laisse ces termes séparés les uns des autres.

C'est ainsi que la série alternée

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

n'est pas absolument convergente, mais qu'elle le devient si l'on groupe les termes de la manière suivante

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots.$$

Passons au cas dit de la double couche.

Théorème 3. — Soient l'_1, l'_2, l'_3 les cosinus directeurs de l'élément de surface $d\omega'$; x'_1, x'_2, x'_3 les coordonnées du centre de gravité de cet élément, et δ' une fonction quelconque de ces coordonnées; soit toujours r la distance des points x_1, x_2, x_3 et x'_1, x'_2, x'_3. Considérons l'intégrale

$$V = \int \delta' \, d\omega' \left[l'_1 \frac{d\frac{1}{r}}{dx_1} + l'_2 \frac{d\frac{1}{r}}{dx_2} + l'_3 \frac{d\frac{1}{r}}{dx_3} \right].$$

Cette intégrale est ce qu'on appelle le potentiel d'une double couche. Soit encore

$$x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3 = \rho^2,$$

soit

$$(4) \qquad l'_1 \frac{d\frac{1}{r}}{dx_1} + l'_2 \frac{d\frac{1}{r}}{dx_2} + l'_3 \frac{d\frac{1}{r}}{dx_3} = \Sigma A x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3}$$

le développement de l'expression qui figure entre parenthèses sous le signe $\int$ par rapport aux puissances de x_1, x_2 et x_3. Comme l'_1, l'_2 et l'_3 sont limités, nous voyons d'abord que ce développement converge et que la convergence est uniforme tant par rapport aux x' que par rapport aux x pourvu que

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < \rho^2 \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right)^2 - \varepsilon.$$

Par conséquent V peut se développer suivant les puissances de x_1, x_2, x_3 et le développement converge pourvu que

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < \rho^2.$$

Donc le potentiel V d'une double couche attirante est une fonction holomorphe dans tout l'espace, sauf sur la double couche attirante elle-même.

Cela resterait vrai, même si δ' pouvait devenir infini, pourvu que l'intégrale

$$\int |\delta'|\, d\omega'$$

soit finie.

Enfin si l'on groupe ensemble les termes de même degré, le développement de V converge absolument pourvu que

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < \rho^2,$$

et chaque terme de ce développement est un polynôme sphérique.

Théorème 4. — Considérons une surface fermée quelconque S.

Soit V une fonction qui soit harmonique à l'intérieur de S, sauf sur tous les points d'une certaine courbe singulière C.

Soit ρ la plus courte distance du point x_1, x_2, x_3 à la courbe singulière C. Je suppose que

$$\frac{V}{\log \rho}, \quad \rho \frac{dV}{dx_1}, \quad \rho \frac{dV}{dx_2}, \quad \rho \frac{dV}{dx_3}$$

restent finis quand ρ tend vers zéro et que le point x_1, x_2, x_3 se rapproche indéfiniment de la courbe C.

Je supposerai que la surface S et la courbe C sont analytiques et qu'elles ne se touchent en aucun point de façon qu'elles se coupent sous un angle fini.

Considérons maintenant le vecteur F dont les composantes sont

$$\frac{dV}{dx_1}, \quad \frac{dV}{dx_2}, \quad \frac{dV}{dx_3}.$$

Soit ensuite M le point x_1, x_2, x_3 et N le point de la courbe C qui est le plus rapproché de M; la droite MN est par conséquent normale à la courbe C et c'est sa longueur que nous avons appelée plus haut ρ.

Soit Φ la projection du vecteur F sur la droite MN.

Je suppose que le produit $\rho\Phi$ tend vers une limite bien déterminée 2μ quand le point M se rapproche indéfiniment du point N. Cette limite 2μ est, bien entendu, une fonction de la position du point N sur la courbe C; mais elle ne dépend pas de la direction de la droite MN dans le plan normal en N à la courbe C.

Nous envisagerons encore un point P intérieur à S et dont les coordonnées s'appelleront y_1, y_2, y_3.

Construisons un domaine D défini par les trois conditions suivantes :

1° Les points de ce domaine sont intérieurs à S.

2° La distance d'un point de ce domaine à P est plus grande que ε.

3° La distance d'un point de ce domaine à la courbe C est plus grande que ε.

Le domaine D est limité par trois surfaces :

1° par la surface S, ou plutôt par la portion S_1 de cette surface dont tous les points sont à une distance de C plus grande que ε ;

2° par la sphère Σ de centre P et de rayon ε ;

3° par une surface-canal K, enveloppe des sphères de rayon ε dont le centre est sur C. L'équation de cette surface-canal peut s'écrire $\rho = \varepsilon$.

Si la courbe C coupe la surface S en h points, la surface-canal K découpera sur la surface S, si ε est très petit, h petites courbes fermées entourant ces h points. La portion de S située en dehors de ces h petites courbes est celle que nous venons d'appeler S_1 ; la portion de S située à l'intérieur de ces h petites courbes pourra s'appeler S_2.

Posons

$$r^2 = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2; \qquad U = \frac{1}{r}.$$

Les fonctions V et U sont harmoniques dans le domaine D et le théorème de Green nous donne

$$\int \left(V \frac{dU}{dn} - U \frac{dV}{dn} \right) d\omega = 0.$$

Les intégrales doivent être étendues à toutes les surfaces qui limitent le domaine D, c'est-à-dire aux surfaces S_1, Σ et K ; nous aurons donc

$$\int_{S_1} + \int_{\Sigma} + \int_{K} = 0.$$

Faisons maintenant tendre ε vers zéro et voyons vers quelle limite tendra chacune de ces trois intégrales.

Occupons-nous d'abord de $\int_{S_1}$. Je dis que cette intégrale tend vers une limite finie et déterminée que l'on peut considérer, d'après les conventions habituelles, comme la définition de l'intégrale $\int_S$ étendue à la surface S tout entière.

Il suffit pour cela de montrer que l'intégrale

$$\int_S \left| V \frac{dU}{dn} - U \frac{dV}{dn} \right| d\omega$$

est finie; la fonction sous le signe $\int$ devient infinie aux h points où la courbe C coupe la surface S; mais comme il s'agit d'une intégrale double, il suffit, pour que l'intégrale soit finie, qu'en tout point M, voisin de l'un de ces h points que j'appelle Q, la fonction sous le signe $\int$ soit au plus de l'ordre de l'inverse de la distance MQ, ou ce qui revient au même de l'ordre de $\frac{1}{\rho}$.

Or U et $\frac{dU}{dn}$ sont finis, V est de l'ordre de $\log\rho$ et $\frac{dV}{dn}$ de l'ordre de $\frac{1}{\rho}$. La condition est donc remplie.

Pour la même raison

$$\int_S |V|\, d\omega, \qquad \int_S \left| \frac{dV}{dn} \right| d\omega$$

sont finies. Donc, d'après un théorème démontré plus haut, l'intégrale

$$\int_S \left(V \frac{dU}{dn} - U \frac{dV}{dn} \right) d\omega = \int V \frac{d\frac{1}{r}}{dn} d\omega - \int \frac{dV}{dn} \frac{d\omega}{r}$$

est une fonction holomorphe de y_1, y_2, y_3 pourvu que le point y_1, y_2, y_3 soit à l'intérieur de S.

En effet l'intégrale

$$\int V \frac{d\frac{1}{r}}{dn} d\omega$$

n'est autre chose que le potentiel de double couche envisagé plus haut

$$\int \delta\, d\omega' \left[l_1 \frac{d\frac{1}{r}}{dx_1} + l_2 \frac{d\frac{1}{r}}{dx_2} + l_3 \frac{d\frac{1}{r}}{dx_3} \right];$$

les notations seules sont changées, on passe de la seconde intégrale à la première en changeant x_1, x_2, x_3 en y_1, y_2, y_3; x'_1, x'_2, x'_3 en x_1, x_2, x_3; $d\omega'$ en $d\omega$; δ' en V.

De même l'intégrale

$$\int \frac{dV}{dn} \frac{d\omega}{r}$$

n'est autre chose que l'intégrale

$$\int \delta \frac{d\omega'}{r}$$

qui représente le potentiel d'une surface attirante. Il n'y a qu'un changement de notations et l'on passe de l'une à l'autre en changeant les x en y, les x' en x, $d\omega'$ en $d\omega$, δ' en $\frac{dV}{dn}$.

Voici donc un premier résultat : *la limite pour $\varepsilon = 0$ de l'intégrale $\int_{S_1}$ est une fonction holomorphe des y.*

Passons à l'intégrale $\int_\Sigma$; la surface de la sphère est $4\pi\varepsilon^2$. V et $\frac{dV}{dn}$ sont finis; U est égal à $\frac{1}{\varepsilon}$ et $\frac{dU}{dn}$ à $\frac{1}{\varepsilon^2}$.

Donc

$$\int \frac{dV}{dn} \frac{d\omega}{r}$$

est de l'ordre de ε et tend vers zéro; et d'autre part

$$\lim \int V \frac{dU}{dn} d\omega = \lim \int V \frac{d\omega}{\varepsilon^2} = 4\pi V(y_1, y_2, y_3),$$

c'est-à-dire que

$$\lim \int_\Sigma = 4\pi V(y_1, y_2, y_3).$$

Considérons enfin l'intégrale $\int_K$.

La surface-canal K est engendrée pas des circonférences de rayon ε dont le plan est normal à la courbe C. Soient Q et Q' deux points infiniment voisins de la courbe C; considérons les deux circonférences dont le plan est normal à C aux deux points Q et Q'. La portion de la surface comprise entre ces deux circonférences sera ce que j'appellerai un « segment » de la surface.

Si l'arc QQ' est égal à ds, l'aire du segment correspondant sera $2\pi\varepsilon\, ds$. Considérons notre intégrale

$$\int \left(V\frac{dU}{dn} - U\frac{dV}{dn}\right) d\omega,$$

et étendons-la à ce segment.

U et $\frac{dU}{dn}$ sont finies; V est de l'ordre de $\log\varepsilon$ et $\frac{dV}{dn}$ de l'ordre de $\frac{1}{\varepsilon}$. Alors l'intégrale

$$\int V\frac{dU}{dn}\, d\omega$$

est de l'ordre de $\varepsilon\log\varepsilon$ et tend vers zéro. L'intégrale

$$\int \frac{dV}{dn} U\, d\omega = \int \frac{dV}{dn}\frac{d\omega}{r}$$

tend au contraire vers une limite finie; qui est égale au produit

$$2\pi\, ds \lim\left(\varepsilon\frac{dV}{dn}\right) \lim\frac{1}{r}.$$

La limite de $\varepsilon\frac{dV}{dn}$ est ce que j'ai appelé plus haut 2μ. La limite de $\frac{1}{r}$ est l'inverse de la distance du point P au centre de gravité de l'élément ds.

L'intégrale devrait être étendue à la portion K_1 de la surface K qui est à l'intérieur de S; considérons l'intégrale

$$\int_{K_2}$$

étendue à la portion K_2 de la surface K engendrée par les circonférences de rayon ε dont le centre est sur la partie de C intérieure à S.

Les deux surfaces K_1 et K_2 ne coïncident pas exactement parce qu'il peut y avoir des circonférences de rayon ε qui ne sont que partiellement intérieures à S, ou encore des circonférences qui sont intérieures à S mais dont le centre est extérieur à S, ou inversement.

Mais si ε est très petit, l'aire totale des parties de K_1 qui n'appartiennent pas à K_2, ou celle des parties de K_2 qui n'appartiennent pas à K_1, est de l'ordre de ε^2. Et, comme la fonction sous le signe $\int$ est de l'ordre de $\frac{1}{\varepsilon}$, la différence

$$\int_{K_1} - \int_{K_2}$$

est de l'ordre de ε et tend vers zéro.

Quant à l'intégrale $\int_{K_2}$, elle est la somme des intégrales relatives aux segments qui correspondent à la partie de C intérieure à S. Elle tend donc vers la limite

$$-4\pi\int\frac{\mu\,ds}{r},$$

où r désigne la distance du point P à l'élément ds.

C'est, au facteur -4π près, le potentiel par rapport au point P de la ligne attirante C, la densité linéaire étant égale à μ.

Ce potentiel multiplié par -4π est donc la limite vers laquelle tend notre intégrale $\int_K$.

Donc en passant à la limite, notre équation

$$\int_S\int_\Sigma\int_K = 0$$

nous apprend que $V(y_1, y_2, y_3)$ est égal au potentiel de cette ligne attirante plus une fonction des y, holomorphe à l'intérieur de S.

Nous pouvons donc énoncer le résultat suivant :

Théorème 4. — *La fonction V satisfaisant aux conditions énoncées plus haut est égale à l'intérieur de S à une fonction holomorphe plus le potentiel d'une ligne attirante*; la ligne attirante est C et la densité linéaire est μ.

Si en particulier on suppose que V est harmonique dans toute la région intérieure à S, μ sera nul; et V sera une fonction holomorphe en tout point intérieur à S.

D'où cette conséquence.

Toute fonction harmonique dans un domaine est holomorphe dans ce domaine.

J'ai insisté un peu sur cette démonstration, parce que c'est le modèle sur lequel sera calquée plus loin la démonstration d'un théorème important.

Tous ces résultats s'étendent facilement au cas d'un nombre quelconque de variables; et d'abord le théorème de Green.

Considérons dans l'espace à n dimensions un domaine D et la variété fermée à $n-1$ dimensions S qui limite ce domaine.

Considérons une portion de cette variété assez petite pour que ses équations puissent se mettre sous la forme suivante :

$$x_i = \varphi_i(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Les u sont des variables auxiliaires et les φ sont des séries procédant suivant les puissances des u.

Considérons le jacobien ou déterminant fonctionnel de

$$\varphi_1 + \alpha_1 \xi, \quad \varphi_2 + \alpha_2 \xi, \quad \ldots, \quad \varphi_n + \alpha_n \xi$$

par rapport à

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_{n-1}, \quad \xi.$$

Ce jacobien étant évidemment une fonction linéaire des indéterminées α, je l'appelle

$$D_1 \alpha_1 + D_2 \alpha_2 + \ldots + D_n \alpha_n.$$

Soit ensuite

$$D_0 = \sqrt{D_1^2 + D_2^2 + \ldots + D_n^2}.$$

L'intégrale $n - 1^{\text{ple}}$

$$\int D_0 \, du_1 \, du_2 \ldots du_{n-1}$$

étendue à une portion H de la variété S s'appellera *l'aire* de cette portion H; les intégrales $n - 1^{\text{ples}}$

$$\int D_1 \, du_1 \, du_2 \ldots du_{n-1}, \quad \ldots, \quad \int D_n \, du_1 \, du_2 \ldots du_{n-1}$$

s'appelleront les projections de cette aire sur les espaces coordonnés. Si la portion H est infiniment petite, l'intégrale

$$\int D_0 \, du_1 \ldots du_{n-1}$$

pourra s'appeler l'aire d'un élément de la variété S et se représenter par $d\omega$.

Les rapports

$$\frac{D_1}{D_0}, \quad \frac{D_2}{D_0}, \quad \ldots, \quad \frac{D_n}{D_0}$$

seront les cosinus directeurs de l'élément $d\omega$.

Nous poserons alors, φ étant une fonction quelconque des x :

$$\frac{d\varphi}{d\nu} = \frac{D_1}{D_0} \frac{d\varphi}{dx_1} + \frac{D_2}{D_0} \frac{d\varphi}{dx_2} + \ldots + \frac{D_n}{D_0} \frac{d\varphi}{dx_n}.$$

Ces définitions posées, le théorème de Green se généralise immédiatement et l'on a :

Théorème 1 généralisé. — *Si V et U sont deux fonctions harmoniques dans le domaine D, on a*

$$\int_S \left(V \frac{dU}{dn} - U \frac{dV}{dn} \right) d\omega = 0.$$

On trouve de même :

Théorème 2 généralisé. — *Considérons l'intégrale*

$$V = \int \frac{\delta' \, d\omega}{r^{n-2}}$$

étendue à tous les éléments $d\omega'$ d'une variété S à $n-1$ dimensions; soient

$$x'_1, \quad x'_2, \quad \ldots, \quad x'_n$$

les coordonnées de l'élément $d\omega'$; r la distance des points $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$; δ' une fonction quelconque des x' telle que l'intégrale

$$\int |\delta'| \, d\omega'$$

soit finie.

La fonction V sera développable suivant les puissances de x pourvu que

$$\Sigma x'^2 > \rho^2, \qquad \Sigma x^2 < \rho^2 \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1 \right)^2.$$

La série converge encore absolument si

$$\Sigma x^2 < \rho^2$$

pourvu que l'on ait soin de grouper ensemble les termes de même degré.

Corollaire. — *La fonction V est holomorphe dans tout l'espace à n dimensions sauf pour les points de la variété S.*

Théorème 3 généralisé. — *Considérons l'intégrale*

$$V = \int \delta \, d\omega' \frac{d(r^{2-n})}{dn}.$$

Dans cette formule, δ', $d\omega'$ et r ont même signification que dans le théorème précédent et l'on pose

$$\frac{d(r^{2-n})}{d\nu'} = \sum \frac{D'_k}{D'_0} \frac{d(r^{2-n})}{dx'_k},$$

D'_0 et D'_k étant les quantités analogues aux D_0 et aux D_k définis plus haut qui sont relatives à l'élément $d\omega'$.

La fonction V sera encore développable suivant les puissances des x si

$$\Sigma x'^2 < \rho^2, \qquad \Sigma x^2 < \rho^2 \left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 2\right)^2.$$

Si l'on groupe ensemble les termes de même degré, la convergence est encore absolue pour $\Sigma x^2 < \rho^2$.

Corollaire. — *La fonction V est holomorphe dans tout l'espace à n dimensions sauf pour les points de la variété* S.

Le théorème 4 est également susceptible de généralisation; je ne m'en occuperai pas pour le moment parce que je me réserve de revenir avec plus de détails sur ce point important. Mais j'aurai peut-être encore besoin de plusieurs propositions qui sont des conséquences des propriétés des fonctions de Green relatives à une hypersphère. Ces propriétés étant bien connues, au moins en ce qui concerne l'espace à 3 dimensions, je n'insisterai pas sur la démonstration.

Théorème 5. — *Considérons l'hypersphère*

$$\Sigma x^2 = R^2, \tag{1}$$

que j'appellerai S. Soit P un point intérieur à l'hypersphère dont les coordonnées seront $y_1, y_2, \ldots, y_n$; nous aurons

$$\Sigma y^2 = \rho^2, \qquad \rho < R.$$

Soit P' le point conjugué de P; ses coordonnées seront

$$y_1 \frac{R^2}{\rho^2}, \quad y_2 \frac{R^2}{\rho^2}, \quad \ldots, \quad y_n \frac{R^2}{\rho^2}.$$

Soit r la distance du point $x_1, x_2, \ldots, x_n$ à P et r' sa distance à P' de sorte que

$$r^2 = \Sigma(x-y)^2, \qquad r'^2 = \sum \left(x - y\frac{R^2}{\rho^2}\right)^2.$$

Lorsque le point $x_1, x_2, \ldots, x_n$ est sur l'hypersphère, on a

$$\frac{r'}{r} = \frac{\rho}{R};$$

considérons alors la fonction

$$G = \left(\frac{1}{r}\right)^{n-2} - \left(\frac{R}{\rho r'}\right)^{n-2};$$

c'est une fonction harmonique dans tout l'espace à n dimensions, sauf aux points P et P'; elle s'annule quand le point $x_1, \ldots, x_n$ vient sur S.

Considérons une fonction V harmonique à l'intérieur d'une hypersphère plus grande que S.

Considérons une hypersphère Σ de rayon ε et de centre P et le domaine D compris entre les deux hypersphères S et Σ; dans ce domaine les deux fonctions V et G sont harmoniques et le théorème de Green nous donne

$$\int \left(G \frac{dV}{d\nu} - \frac{dG}{d\nu} V \right) d\omega = 0.$$

L'intégration devant être étendue à tous les éléments des deux hypersphères S et Σ, j'écris

$$\int_S + \int_\Sigma = 0.$$

Quand ε tend vers zéro, la seconde intégale $\int_\Sigma$ tend vers une limite finie

$$CV(y_1, y_2, \ldots, y_n);$$

C est une constante numérique, qui est égale à $n - 2$ fois l'aire de l'hypersphère de rayon 1.

Quant à la première intégrale, comme G s'annule sur S, elle se réduit à

$$-\int \frac{dG}{d\nu} V \, d\omega.$$

Ainsi $V(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ est égal à l'intégrale

$$\frac{1}{C} \int \frac{dG}{d\nu} V \, d\omega.$$

De même, comme la fonction r^{2-n} est aussi harmonique dans tout l'espace sauf au point P, on trouverait

$$V(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \frac{1}{C} \int \left(\frac{dr^{2-n}}{d\nu} V - r^{2-n} \frac{dV}{d\nu} \right) d\omega.$$

Mais d'après les théorèmes 2 et 3 généralisés, l'intégrale du second membre est développable suivant les puissances de y pourvu que

$$\Sigma y^2 < R^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right)^2.$$

Dans le cas où la fonction V est harmonique dans toute portion finie de l'espace, on peut prendre R aussi grand que l'on veut. Nous arrivons donc au résultat suivant :

Si la fonction V est harmonique dans toute portion finie de l'espace à n dimensions (c'est-à-dire si elle satisfait partout à l'équation de Laplace $\Delta V = 0$ et possède partout des dérivées du second ordre, mais sans être assujettie à tendre vers zéro quand le point $x_1, x_2, \ldots, x_n$ s'éloigne indéfiniment), *cette fonction V est développable suivant les puissances des x; ce développement est toujours convergent.*

Si l'on groupe ensemble les termes de même degré, chacun des groupes sera un polynôme homogène qui devra satisfaire à l'équation de Laplace; c'est-à-dire ce qu'on peut appeler un *polynôme hypersphérique.*

Théorème 6. — *Reprenons la formule*

$$V(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \frac{1}{C}\int \frac{dG}{dv} V\,d\omega.$$

Si R est très grand et ρ fini, r est de l'ordre de R et r' de l'ordre de R^2, si le point $x_1, x_2, \ldots, x_n$ est sur S.

Donc r^{2-n} et r'^{2-n} sont de l'ordre de R^{2-n} et R^{4-2n}. Leurs dérivées premières par rapport aux x sont respectivement de l'ordre de R^{1-n} et R^{2-2n}, et leurs dérivées secondes sont respectivement de l'ordre de R^{-n} et R^{-2n}.

Les dérivées premières de r^{2-n} par rapport aux y sont égales au signe près aux dérivées premières par rapport aux x, elles sont donc de l'ordre de R^{1-n}.

De même les dérivées secondes de r^{2-n} prises par rapport à l'une des variables x et à l'une des variables y, sont égales au signe près aux dérivées secondes prises par rapport à deux variables x; elles sont donc de l'ordre de R^{-n}.

Supposons ensuite que le point P vienne en P_1 et que la distance PP_1 soit finie; soit r_1 la distance du point $x_1, x_2, \ldots, x_n$ au point P_1 et r'_1 sa distance au point P'_1 conjugué de P_1; soit ρ_1 la distance du point P_1 à l'origine.

L'accroissement

$$r_1^{2-n} - r^{2-n}$$

est du même ordre que les dérivées $\dfrac{dr^{2-n}}{dx}$, c'est-à-dire de l'ordre R^{1-n}; de même les accroissements

$$\frac{d(r_1^{2-n} - r^{2-n})}{dx}$$

seront du même ordre que les dérivées $\dfrac{d^2 r^{2-n}}{dx\,dy}$, c'est-à-dire de l'ordre de R^{-n}.

Si nous observons ensuite que l'on a

$$\frac{dF}{d\nu} = \sum \frac{x_k}{R}\frac{dF}{dx_k}, \qquad \left|\frac{x_k}{R}\right| < 1;$$

on verra que

$$\frac{d(r_1^{2-n} - r^{2-n})}{d\nu}, \quad \frac{dr'^{(2-n)}}{d\nu}, \quad \frac{dr_1'^{(2-n)}}{d\nu}$$

sont du même ordre que

$$\frac{d(r_1^{2-n} - r^{2-n})}{dx}, \quad \frac{dr'^{(2-n)}}{dx}, \quad \frac{dr_1'^{(2-n)}}{dx},$$

c'est-à-dire respectivement de l'ordre de

$$R^{-n}, \quad R^{2-2n}, \quad R^{2-2n}.$$

Nous avons

$$G = r^{2-n} - \left(\frac{\rho r'}{R}\right)^{2-n},$$

et nous poserons, de même

$$G_1 = r_1^{2-n} - \left(\frac{\rho_1 r_1'}{R}\right)^{2-n},$$

et il viendra

$$\frac{dG}{d\nu} - \frac{dG_1}{d\nu} = \frac{d(r^{2-n} - r_1^{2-n})}{d\nu} - \left(\frac{R}{\rho}\right)^{n-2}\frac{dr'^{(2-n)}}{d\nu} + \left(\frac{R}{\rho_1}\right)^{n-2}\frac{dr_1'^{(2-n)}}{d\nu}.$$

Dans le second membre, le premier terme est de l'ordre de R^{-n} et les deux derniers sont aussi de l'ordre de R^{-n}; donc le premier membre est de l'ordre de R^{-n}.

Cela posé, soient $z_1, z_2, \ldots, z_n$ les coordonnées de P_1; nous aurons

$$V(z_1, z_2, \ldots, z_n) - V(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \frac{1}{C}\int\left(\frac{dG_1}{d\nu} - \frac{dG}{d\nu}\right)V\,d\omega.$$

La fonction $\frac{dG_1}{dr} - \frac{dG}{dr}$ est de l'ordre de R^{-n}; le champ d'intégration est de l'ordre de R^{n-1}; *si la fonction V est finie*, l'intégrale du second membre est infiniment petite et l'on a

$$V(z_1, z_2, \ldots, z_n) = V(y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

Comme les deux points P et P_1 sont quelconques, cela veut dire que V est une constante.

Nous arrivons donc à cette conséquence :

Une fonction harmonique dans toute portion finie de l'espace et dont le module est limité se réduit à une constante.

Théorème 7. — *De là on peut tirer une conséquence importante : Supposons que la fonction V soit harmonique dans toute partie finie de l'espace; qu'elle soit par conséquent susceptible d'être développée en une série toujours convergente de polynômes hypersphériques, qu'elle soit en un mot ce qu'on pourrait appeler une fonction harmonique entière.*

Supposons de plus qu'elle soit n fois périodique; alors l'espace à n dimensions se trouvera subdivisé en une infinité de *prismatoïdes des périodes* formant un assemblage à la Bravais et à l'intérieur de ces divers prismatoïdes, la fonction reprendra les mêmes valeurs.

Son module est donc limité et elle doit se réduire à une constante; d'où cette conclusion :

Toute fonction harmonique entière n fois périodique se réduit à une constante.

C'est aussi une conséquence de ce fait bien connu qu'une fonction harmonique ne peut avoir ni maximum ni minimum.

Je renverrai d'ailleurs pour plus de détails à un Mémoire de M. Appell publié dans les *Acta mathematica*, t. 4.

III — Fonctions biharmoniques.

Soit $F = V + iW$ une fonction des n variables complexes

$$z_1 = x_1 + iy_1, \qquad z_2 = x_2 + iy_2, \qquad \ldots, \qquad z_n = x_n + iy_n.$$

On aura alors

$$\frac{dV}{dx_k} = \frac{dW}{dy_k}, \qquad \frac{dV}{dy_k} = -\frac{dW}{dx_k},$$

d'où il suit que l'expression

$$(1) \qquad \sum \left(\frac{dV}{dx_k} dy_k - \frac{dV}{dy_k} dx_k \right)$$

est une différentielle exacte.

Si donc V est la partie réelle d'une fonction F, l'expression (1) sera différentielle exacte.

De là nous tirons les équations

$$(2) \qquad \frac{d^2V}{dx_k^2} + \frac{d^2V}{dy_k^2} = 0, \qquad \frac{d^2V}{dx_k\,dx_q} + \frac{d^2V}{dy_k\,dy_q} = 0, \qquad \frac{d^2V}{dx_k\,dy_q} = \frac{d^2V}{dy_k\,dx_q}.$$

Toute fonction satisfaisant à ces équations (2) et d'ailleurs continue et ayant des dérivées secondes sera dite *biharmonique*. Des équations (2) on tire aisément

$$(3) \qquad \Delta V = \sum \left(\frac{d^2V}{dx_k^2} + \frac{d^2V}{dy_k^2} \right) = 0.$$

Ainsi toute fonction biharmonique est en même temps une fonction harmonique des $2n$ variables x et y.

Si $n = 1$, toute fonction harmonique est la partie réelle d'une fonction de variable complexe.

Mais, si $n > 1$, il n'en est plus de même et la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction V puisse être regardée comme la partie réelle d'une fonction de variables complexes, c'est que cette fonction V soit biharmonique.

Les équations (2) peuvent encore se mettre sous une autre forme.

Soit

$$u_k = x_k - iy_k,$$

et supposons qu'au lieu des x et des y, on prenne pour variables les z et les u. Alors la condition pour que V soit biharmonique, c'est qu'il soit de la forme

$$\varphi(z_1, z_2, \ldots, z_n) + \varphi_1(u_1, u_2, \ldots, u_n).$$

de sorte que les équations (2) peuvent être remplacées par les suivantes qu'on en déduit d'ailleurs par un calcul simple

$$\frac{d^2 V}{dz_k\, du_q} = 0, \tag{2'}$$

où l'indice k peut être égal à q. Ces équations sont au nombre de n^2.

Théorème 8. — *Quelle est la condition pour qu'on puisse trouver un polynôme* V *satisfaisant aux n^2 équations*

$$\frac{d^2 V}{dz_k\, du_q} = \Phi_{k.q}, \tag{4}$$

où les Φ sont des polynômes donnés.

Il est clair que les Φ doivent satisfaire aux relations suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\Phi_{k.q}}{dz_m} &= \frac{d\Phi_{m.q}}{dz_k} = \frac{d^3 V}{dz_m\, dz_k\, du_q}, \\ \frac{d\Phi_{q.k}}{du_m} &= \frac{d\Phi_{q.m}}{du_k} = \frac{d^3 V}{dz_q\, du_k\, du_m}. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

L'indice q peut être égal à k ou à m; mais ces deux derniers indices doivent être différents, sans quoi les relations se réduiraient à des identités.

Le nombre des relations (5) est donc $n^2(n-1)$.

Les conditions (5) sont évidemment nécessaires, je dis qu'elles sont suffisantes.

En effet supposons d'abord que les Φ soient des polynômes homogènes de degré λ par rapport aux z d'une part et homogènes de degré μ par rapport aux u d'autre part :

Alors il suffira pour satisfaire aux équations (4) de faire

$$V = \frac{\Sigma z_k u_q \Phi_{k.q}}{(\lambda+1)(\mu+1)}.$$

Il est aisé de vérifier que cette expression satisfait aux équations (4) si les conditions (5) sont remplies.

Si maintenant les Φ sont des polynômes quelconques, on n'aura qu'à les décomposer en parties homogènes tant par rapport aux z que par rapport aux u.

Ainsi pour qu'on puisse satisfaire aux équations (4) *il faut et il suffit que les conditions* (5) *soient remplies.*

Il est clair d'ailleurs que si l'on peut y satisfaire, on peut le faire d'une infinité de manières puisqu'on peut ajouter à V une fonction biharmonique quelconque sans que les équations (4) cessent d'avoir lieu.

Si l'on revient aux variables x et y les équations (4) deviennent

$$(4')\quad \begin{cases} \dfrac{d^2 V}{dx_k^2} + \dfrac{d^2 V}{dy_k^2} = F_k, \\[2mm] \dfrac{d^2 V}{dx_k\,dx_q} - \dfrac{d^2 V}{dy_k\,dy_q} = F_{kq}, \\[2mm] \dfrac{d^2 V}{dx_k\,dy_q} - \dfrac{d^2 V}{dx_q\,dy_k} = F'_{kq}, \end{cases}$$

les F étant des polynômes donnés en x et y, et les conditions (5) deviennent

$$(5')\quad \begin{cases} \dfrac{dF_{kq}}{dx_m} + \dfrac{dF'_{kq}}{dy_m} = \dfrac{dF_{mq}}{dx_k} + \dfrac{dF'_{mq}}{dy_k}, \\[2mm] \dfrac{dF_{kq}}{dy_m} - \dfrac{dF'_{kq}}{dx_m} = \dfrac{dF_{mq}}{dy_k} - \dfrac{dF'_{mq}}{dx_k}. \end{cases}$$

IV. — Potentiel d'une courbe.

Considérons d'abord une courbe analytique dans l'espace ordinaire à 3 dimensions. Soient x'_1, x'_2, x'_3 les coordonnées d'un point de cette courbe et r la distance de ce point au point x_1, x_2, x_3. Le potentiel de cette courbe sera

$$V = \int \frac{\delta'\,ds'}{r},$$

où δ' représente la densité et ds' l'élément d'arc de la courbe. Je veux étudier cette courbe et son potentiel dans le voisinage d'un de ses points O. Je prendrai ce point, que je supposerai non singulier, pour origine des coordonnées; je prendrai la tangente en ce point pour axe des x_1 et le plan osculateur pour plan des $x_1 x_2$; nous pourrons mettre alors les équations de la courbe sous la forme suivante :

$$x'_1 = \varphi_1(t), \qquad x'_2 = \varphi_2(t), \qquad x'_3 = \varphi_3(t),$$

les φ étant des séries ordonnées suivant les puissances de t et s'annulant avec t. De plus pour $t = 0$, $\dfrac{d\varphi_1}{dt}$ ne s'annule pas, mais

$$\frac{d\varphi_2}{dt} = \frac{d\varphi_3}{dt} = \frac{d^2\varphi_3}{dt^2} = 0.$$

Nous aurons d'ailleurs

$$ds' = dt\,\psi(t),$$

ψ étant une série développée suivant les puissances de t, et je supposerai de plus que δ' est également développable suivant les puissances de t.

Cela posé

$$r^2 = (x'_1 - x_1)^2 + (x'_2 - x_2)^2 + (x'_3 - x_3)^2$$

est développable suivant les puissances de t, x_1, x_2 et x_3.

Écrivons l'équation

$$r^2 = 0,$$

et résolvons-la par rapport à t; cette équation comportera deux solutions

$$t = \theta_1(x_1, x_2, x_3), \qquad t = \theta_2(x_1, x_2, x_3)$$

qui s'annulent pour $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Ces deux solutions sont imaginaires bien entendu.

Considérons le produit $(t - \theta_1)(t - \theta_2)$ et posons

$$(t - \theta_1)(t - \theta_2) = t^2 - 2Yt + Z,$$

Y et Z seront deux séries procédant suivant les puissances des x. De plus on aura

$$r^2 = (t^2 - 2Yt + Z)\Theta,$$

Θ étant une série procédant suivant les puissances de t, x_1, x_2, x_3 et *ne s'annulant pas pour*

$$t = x_1 = x_2 = x_3 = 0.$$

Pour tous ces théorèmes, je renverrai au Mémoire de Weierstrass sur les fonctions de plusieurs variables (*Œuvres complètes*, t. II, p. 135 et suiv.) et au début de ma thèse inaugurale (Paris, Gauthier-Villars, 1879) (¹).

On aura donc

$$V = \int \frac{\delta'\psi}{\sqrt{\Theta}} \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 2Yt + Z}} = \int \frac{U\,dt}{\sqrt{t^2 - 2Yt + Z}},$$

U étant une série développée suivant les puissances de t et des x.

(¹) *Voir* Tome I, p. XLIX-CXXIX.

Cela posé, nous allons nous proposer de mettre U sous la forme suivante :

$$(1)\qquad U = U_0 + \Phi(t - Y) + \frac{d\Phi}{dt}(t^2 - 2Yt + Z),$$

U_0 étant une série développée suivant les puissances des x, et Φ une série développée suivant les puissances des x et de t.

Si nous mettons U sous cette forme, nous en déduirons la valeur de V, car l'intégrale indéfinie sera

$$U_0 \log\left[(t - Y) + \sqrt{t^2 - 2Yt + Z}\right] + \Phi\sqrt{t^2 - 2Yt + Z}.$$

Si U était un polynôme, il se mettrait sous la forme (1) par un procédé bien connu. Mais U étant une série, il faut démontrer que ce procédé, toujours applicable, conduit à un résultat convergent.

Posons

$$t = Y + \xi, \qquad Y^2 - Z = \eta,$$

l'équation (1) devient

$$(1')\qquad U = U_0 + \xi\Phi + (\xi^2 - \eta)\frac{d\Phi}{d\xi}.$$

Comme U est développable suivant les puissances de t et des x et Y suivant les puissances des x; la fonction U sera développable également suivant les puissances de ξ et des x.

D'autre part η est développable suivant les puissances de x; mais nous ne nous servirons pas de cette propriété et nous traiterons η comme une variable indépendante.

En conséquence, dans l'équation (1′) :

1° U sera une série *donnée* procédant suivant les puissances de ξ et des x;

2° U_0 sera une série *inconnue* procédant suivant les puissances de η et des x;

3° Φ sera une série *inconnue* procédant suivant les puissances de ξ, de η et des x.

Écrivons alors

$$U_0 = u_0 + \eta u_1 + \eta^2 u_2 + \ldots,$$

$$\Phi = \Phi_0 + \eta\Phi_1 + \eta^2\Phi_2 + \ldots.$$

Alors l'équation (1′) se décompose dans la série d'équations suivantes :

$$(2') \quad \begin{cases} \xi\Phi_0 + \xi^2 \dfrac{d\Phi_0}{d\xi} + u_0 = \mathrm{U}, \\ \xi\Phi_1 + \xi^2 \dfrac{d\Phi_1}{d\xi} + u_1 = \dfrac{d\Phi_0}{d\xi}, \\ \xi\Phi_2 + \xi^2 \dfrac{d\Phi_2}{d\xi} + u_2 = \dfrac{d\Phi_1}{d\xi}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Nous sommes ainsi conduits à envisager l'équation

$$\xi\Phi_k + \xi^2 \frac{d\Phi_k}{d\xi} + u_k = \Sigma \mathrm{A}_m \xi^m,$$

$\Sigma \mathrm{A}_m \xi^m$ étant une série donnée procédant suivant les puissances de ξ. On y satisfait en faisant

$$u_k = \mathrm{A}_0, \qquad \Phi_k = \mathrm{A}_1 + \frac{\mathrm{A}_2\xi}{2} + \frac{\mathrm{A}_3\xi^2}{3} + \dots.$$

On peut donc calculer les Φ_k et les u_k, mais il reste à savoir si le développement converge.

Pour cela je compare l'équation (1′) à la suivante :

$$(1'') \qquad \mathrm{U}' = \mathrm{U}'_0 + \xi\Phi' - \frac{2\eta}{\xi}(\Phi' - \varphi').$$

U′ est une série donnée procédant suivant les puissances de ξ et des x. U'_0 et Φ' sont des séries inconnues procédant, la première suivant les puissances de η et des x, la seconde suivant celles de ξ, de η et des x, et où enfin φ' est ce que devient Φ' pour $\xi = 0$. L'équation (1″), en posant

$$\mathrm{U}'_0 = \Sigma\eta^m u'_m, \qquad \Phi' = \Sigma\eta^m \Phi'_m, \qquad \varphi' = \Sigma\eta^m \varphi'_m,$$

se décompose en une série d'équations

$$(2'') \quad \begin{cases} \xi\Phi'_0 + u'_0 = \mathrm{U}', \\ \xi\Phi'_1 + u'_1 = 2\dfrac{\Phi'_0 - \varphi'_0}{\xi}, \\ \xi\Phi'_2 + u'_2 = 2\dfrac{\Phi'_1 - \varphi'_1}{\xi}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Supposons que U′ ait tous ses coefficients positifs et plus grands en valeur absolue que ceux de U et comparons les équations ($2'$) et ($2''$); soit

$$\begin{array}{ll} U = \Sigma A\, \xi^m\, x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3}, & U' = \Sigma A'\, \xi^m\, x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3}; \qquad A' > |A|, \\ \Phi_0 = \Sigma B_0\, \xi^{m+1} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3}, & \Phi'_0 = \Sigma B'_0\, \xi^{m+1} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3}, \\ \Phi_1 = \Sigma B_1\, \xi^{m+3} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3}, & \Phi'_1 = \Sigma B'_1\, \xi^{m+3} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}$$

Il viendra

$$B_0 = \frac{A}{m}, \qquad B'_0 = A', \qquad B_1 = \frac{m-1}{m-2} B_0, \qquad B'_1 = 2 B'_0,$$

ce qui montre que les B' sont positifs et que

$$B'_k > |B_k|.$$

La convergence des séries dans le cas de l'équation ($1''$) entraîne donc la convergence dans le cas de l'équation ($1'$).

Or on satisfera à l'équation ($1''$) en faisant

$$U'_0 = \frac{U'(\sqrt{2\eta}) + U'(-\sqrt{2\eta})}{2}; \qquad \varphi' = \frac{U'(\sqrt{2\eta}) - U'(-\sqrt{2\eta})}{2\sqrt{2\eta}},$$

$$\Phi' = \varphi' + \xi \frac{U' - U'_0 - \xi\varphi'}{\xi^2 - 2\eta}.$$

Inutile de dire que $U'(\sqrt{2\eta})$ représente ce que devient U' quand on y change ξ en $\sqrt{2\eta}$.

On voit en effet que dans ces conditions $U' - U'_0 - \xi\varphi'$ est divisible par $\xi^2 - 2\eta$.

Ainsi nos séries convergent et U peut se mettre sous la forme (1).

Nous pouvons alors trouver la valeur de V, puisque nous avons l'intégrale indéfinie

$$U_0 \log\left[t - Y + \sqrt{t^2 - 2Yt + Z}\right] + \Phi\sqrt{t^2 - 2Yt + Z}.$$

Nous supposerons que les deux extrémités de la courbe attirante correspondent aux valeurs t_0 et t_1 du paramètre t; de sorte que les deux limites d'intégration seront t_0 et t_1.

Nous supposerons d'abord que t_0 et t_1 ne sont pas nuls et que, par exemple,

$$t_0 < 0 < t_1.$$

En d'autres termes, nous étudierons le potentiel dans le voisinage d'un point de la courbe qui n'est pas une des extrémités.

Dans ces conditions U_0, $\Phi(t_1)$, $\Phi(t_0)$, et les deux radicaux

$$\sqrt{t_1^2 - 2Yt_1 + Z}, \quad \sqrt{t_0^2 - 2Yt_0 + Z}$$

sont des fonctions holomorphes des x; il en est de même de

$$\log\left[t_1 - Y + \sqrt{t_1^2 - 2Yt_1 + Z}\right].$$

Car le radical est développable suivant les puissances de Y et de Z et le logarithme ne devient pas infini pour $Y = Z = 0$.

Il n'en est plus de même de

$$\log\left[t_0 - Y + \sqrt{t_0^2 - 2Yt_0 + Z}\right],$$

car si l'on fait $Y = Z = 0$, il reste

$$\log(t_0 + \sqrt{t_0^2}).$$

Si l'on convient de prendre la détermination positive du radical; il faudra, puisque t_0 est négatif, prendre

$$\sqrt{t_0^2} = -t_0,$$

d'où

$$\log(t_0 + \sqrt{t_0^2}) = \log(t_0 - t_0) = \infty.$$

Au contraire,

$$\log(-t_0 + Y + \sqrt{t_0^2 - 2Yt_0 + Z})$$

se réduit pour $Y = Z = 0$ à $\log(-2t_0)$ et n'est pas infini; c'est donc une fonction développable suivant les puissances des x.

Or nous avons

$$\log(t_0 - Y + \sqrt{t_0^2 - 2Yt_0 + Z}) = \log(Z - Y^2) - \log(-t_0 + Y + \sqrt{t_0^2 - 2Yt_0 + Z}).$$

Donc :

Théorème 9. — *Le potentiel V d'une courbe attirante est égal dans le voisinage d'un point de cette courbe qui n'est ni une extrémité de la courbe, ni un point singulier; ce potentiel, dis-je, est égal à une fonction U_0 holomorphe par rapport aux x, multipliée par* $\log(Z - Y^2)$, *plus une autre fonction holomorphe des x. D'ailleurs $Z - Y^2$ est aussi une fonction holomorphe des x.*

Supposons maintenant $t_0 = 0$; ou en d'autres termes, étudions le potentiel dans le voisinage d'une des extrémités de la courbe. Alors

$$\sqrt{t_0^2 - 2t_0 Y + Z}$$

se réduit à $\sqrt{Z}$ et n'est plus une fonction holomorphe des x. Mais Z est égal à $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, multiplié par une fonction holomorphe des x ne s'annulant pas avec les x.

On a d'autre part

$$\log(t_0 - Y + \sqrt{t_0^2 + 2t_0 X + Z}) = \log(\sqrt{Z} - Y).$$

Le potentiel est alors égal à la fonction holomorphe U_0 multipliée par $\log(\sqrt{Z} - Y)$, plus une fonction holomorphe, plus une autre fonction holomorphe multipliée par $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

En résumé soit une courbe attirante AOB, décomposons-la en deux segments AO et OB; et prenons le point O pour origine.

Dans le voisinage du point O, le potentiel du premier segment sera

$$U_0 \log(\sqrt{Z} - Y) + H + W\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2},$$

et celui du second segment

$$U_0 \log(\sqrt{Z} - Y) + H' - W\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2},$$

U_0, H, H' et W étant des fonctions holomorphes; celui de la courbe entière sera

$$U_0 \log(Z - Y^2) + H + H'.$$

Pour bien nous rendre compte de la signification de ce résultat, cherchons d'abord ce que c'est que la surface $Z - Y^2 = 0$; l'équation

$$Z = Y^2$$

signifie que l'équation en t

$$t^2 - 2tY - Z = 0$$

a deux racines égales; or cette équation en t est équivalente à la suivante :

$$r = 0.$$

Supposons donc que du point x_1, x_2, x_3 comme centre nous décrivions une sphère de rayon nul. Cette sphère coupera la courbe attirante en un certain nombre de points imaginaires; le lieu des points x_1, x_2, x_3 qui sont tels que deux de ces points imaginaires d'intersection se confondent est précisément la surface

$$Z = Y^2.$$

Cette surface est imaginaire, mais elle présente une courbe réelle qui n'est autre chose que la courbe attirante.

Cherchons maintenant la signification de U_0.

Notre potentiel V est égal à l'intégrale

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{U\,dt}{\sqrt{t^2 - 2Yt + Z}}.$$

La fonction sous le signe $\int$, considérée comme fonction de t, présente un certain nombre de points singuliers. Représentons ces points singuliers dans le plan des t; nous ne nous occuperons que de ceux d'entre eux qui sont voisins de l'origine; ils sont au nombre de deux qui sont les racines de l'équation en t

$$t^2 - 2tY + Z = 0.$$

Soient τ et τ' ces deux points :

Quand les variables x varieront, ces deux points τ et τ' varieront également; et quand les x auront décrit un contour fermé, ces deux points τ et τ' décriront des contours fermés ou s'échangeront entre eux.

Dans ce dernier cas (ou bien encore si τ et τ' décrivent des contours fermés, mais de telle sorte que τ ait tourné autour de τ') l'intégrale définie V ne reprendra pas sa valeur, mais elle augmentera d'une période.

Cette période que j'appelle H sera l'intégrale

$$\int \frac{U\,dt}{\sqrt{t^2 - 2tY + Z}}$$

prise le long d'un contour fermé enveloppant les deux points τ et τ'. Or les diverses déterminations de notre intégrale définie V correspondent aux diverses déterminations du logarithme

$$\log(Z - Y^2).$$

Quand ce logarithme augmente de $2i\pi$, V augmente de $2i\pi U_0$; on a donc

$$H = 2i\pi U_0.$$

Il serait d'ailleurs aisé de vérifier que la période H est une fonction holomorphe des x. En effet, le contour fermé le long duquel cette intégrale est prise peut être choisi d'une manière quelconque pourvu qu'il enveloppe τ et τ'. Je le choisirai donc fixe et indépendant des x. Comme il passe toujours à distance finie des deux points τ et τ', la fonction sous le signe $\int$ est en tous ses points, holomorphe par rapport à t et aux x. L'intégrale est donc une fonction holomorphe des x. C. Q. F. D.

Il faudrait pour être complet, étudier V dans le voisinage d'un point singulier de la courbe attirante, par exemple d'un point de rebroussement. Je me contenterai de la remarque suivante :

Soit ρ la distance du point x_1, x_2, x_3 au point singulier. Le produit $V\rho$ tend vers zéro quand le point x_1, x_2, x_3 se rapproche indéfiniment du point singulier en suivant une courbe quelconque non tangente à la courbe attirante.

Revenons à notre fonction U_0, cherchons sa valeur quand les x s'annulent; c'est au facteur constant près $i\pi$ l'intégrale

$$\int_{\tau}^{\tau'} \frac{U\,dt}{\sqrt{(t-\tau)(t-\tau')}}.$$

Si les x sont très petits, τ et τ' sont très voisins l'un de l'autre et de zéro et quant t varie de τ à τ', t reste très petit. Alors sous le signe $\int$ la fonction U ne prend que des valeurs très peu différentes de A, A étant la valeur de U quand t et les x s'annulent.

L'intégrale diffère donc peu de

$$A\int \frac{dt}{\sqrt{(t-\tau)(t-\tau')}} = A\,i\pi.$$

Ainsi U_0 se réduit à A quand les x s'annulent.

Or nous avons

$$U = \frac{\partial\psi}{\sqrt{\Theta}},$$

$$\psi = \sqrt{\sum\left(\frac{dx'}{dt}\right)^2}; \qquad \Theta(t-\tau)(t-\tau') = \Sigma(x'-x)^2.$$

Quand les x s'annulent, τ et τ' s'annulent et il reste

$$\Theta t^2 = \Sigma x'^2.$$

Si t est très petit, on a sensiblement

$$x' = t\frac{dx'}{dt};$$

il reste donc

$$\Theta = \sum\left(\frac{dx'}{dt}\right)^2 = \psi^2.$$

On en conclut

$$U = \delta'.$$

Ainsi sur la courbe attirante, la fonction U_0 n'est autre chose que la densité.

Ce que nous venons de dire de l'intégrale

$$\int\frac{\delta' ds}{r}$$

s'applique sans aucun changement si la courbe attirante, au lieu d'être dans l'espace ordinaire, est dans l'espace à n dimensions et si au lieu de trois variables x_1, x_2, x_3, nous en avons un nombre quelconque.

Revenons encore sur quelques points de détail et d'abord sur la génération de la surface

$$Z = Y^2.$$

C'est l'enveloppe d'un cône isotrope (c'est-à-dire d'une sphère de rayon nul) dont le sommet décrit une courbe attirante. On voit aisément que c'est une surface développable.

Reprenons la formule donnée plus haut

$$V = U_0 \log(Z - Y^2) + H + H';$$

on en tire

$$\frac{dV}{dx_1} = \frac{dU_0}{dx_1}\log(Z - Y^2) + U_0\frac{d\log(Z - Y^2)}{dx_1} + \frac{d(H + H')}{dx_1}$$

et

$$\frac{dU_0}{dx_1}V - \frac{dV}{dx_1}U_0 = \frac{dU_0}{dx_1}(H + H') - U_0\frac{d(H + H')}{dx_1} - U_0^2\frac{d\log(Z - Y^2)}{dx_1}.$$

Je remarque que U_0 et $\frac{dU_0}{dx_1}$ sont des fonctions holomorphes des x et que le second membre est égal à une fonction holomorphe des x divisée par $Z - Y^2$.

Donc V satisfait à une équation linéaire du premier ordre à second membre et à coefficients holomorphes.

Il est intéressant, au point de vue de la généralisation qui va suivre, de retrouver ce résultat par une autre voie.

Nous avons

$$V = \int \frac{\delta \psi \, dt}{r},$$

et nous en tirons aisément

$$\frac{dV}{dx_1} = \int \frac{dt}{r^3} \left[r^2 \frac{d(\delta' \psi)}{dx_1} - r \frac{dr}{dx_1} \delta' \psi \right].$$

Les fonctions $\delta' \psi$, r^2 et

$$r^2 \frac{d(\delta' \psi)}{dx_1} - r \frac{dr}{dx_1} \delta' \psi = M$$

sont holomorphes par rapport à t et aux x; de plus le développement de r^2 commence par des termes du second degré, celui de $\delta' \psi$ par des termes de degré zéro; celui de M par des termes de degré 1. Nous poserons

$$\delta \psi = N,$$

de sorte que nos intégrales prendront la forme

$$N = \int \frac{N \, dt}{r}, \qquad \frac{dN}{dx_1} = \int \frac{M \, dt}{r^3}.$$

Transformons ces deux intégrales, et d'abord l'intégrale V; nous allons chercher à mettre l'intégrale indéfinie sous la forme

$$\int \frac{N \, dt}{r} = \Phi \int \frac{dt}{r} + Pr,$$

P étant une fonction holomorphe de t et des x, et Φ une fonction holomorphe des x seulement.

Cela nous donne

$$N = \Phi + r^2 \frac{dP}{dt} + r \frac{dr}{dt} P. \tag{3}$$

Cette équation (3) présente une grande analogie avec l'équation (1'); elle pourrait, soit se traiter de la même manière, soit s'y ramener par une transformation, je préfère suivre une autre marche.

Je développe r^2 suivant les puissances de t et des x, et je fais de même pour N, P et Φ; je groupe ensemble les termes de même degré et j'écris

$$r^2 = F_2 + F_3 + \ldots,$$
$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_1 + \Phi_2 + \ldots,$$
$$N = N_0 + N_1 + N_2 + \ldots,$$
$$P = P_0 + P_1 + \ldots.$$

La notation F_k, par exemple, représente un groupe de termes homogène par rapport à t et aux x.

L'équation (3) se décompose alors et nous donne

$$N_0 = \Phi_0, \qquad N_1 = \Phi_1 + \frac{1}{2}\frac{dF_2}{dt}P_0, \qquad N_2 = \Phi_2 + F_2\frac{dP_1}{dt} + \frac{1}{2}\frac{dF_2}{dt}P_1 + \frac{1}{2}\frac{dF_3}{dt}P_0,$$

$$N_3 = \Phi_3 + F_2\frac{dP_2}{dt} + \frac{1}{2}\frac{dF_2}{dt}P_2 + F_3\frac{dP_1}{dt} + \frac{1}{2}\frac{dF_3}{dt}P_1 + \frac{1}{2}\frac{dF_4}{dt}P_0,$$

. . . .

La première équation nous donne Φ_0; de la seconde, on en tirera P_0 et Φ_1. La troisième nous donnera P_1 et Φ_2, la quatrième P_2 et Φ_3, etc.

En général ces équations prendront la forme

$$F_2\frac{dP_k}{dt} + \frac{1}{2}\frac{dF_2}{dt}P_k + \Phi_{k+1} = H_{k+1}.$$

H_k étant un polynôme *connu* homogène et de degré k par rapport à t et aux x.

Pour résoudre cette équation, posons

$$P_k = \Sigma A_m t^m, \qquad H_{k+1} = \Sigma B_m t^m, \qquad F_2 = C_2 t^2 + 2C_1 t + C_0.$$

Les A et les B sont évidemment des polynômes homogènes par rapport aux x. Les degrés respectifs de A_m, B_m, C_2, C_1, C_0 sont $k - m$, $k + 1 - m$, 0, 1 et 2.

En égalant les termes en t^m, on trouve

$$m C_2 A_{m-1} + (2m+1) C_1 A_m + (m+1) C_0 A_{m+1} = B_m.$$

Comme C_2 est une constante, on fera successivement dans l'équation précédente

$$m = k+1, \quad k, \quad k-1, \quad \ldots, \quad 2, \quad 1,$$

ce qui permettra de calculer successivement

$$A_k, \quad A_{k-1}, \quad \ldots, \quad A_0,$$

qui seront des polynômes entiers par rapport aux x.

La dernière équation, qui correspond au cas de $m = 0$, est d'une forme un peu différente, elle s'écrit

$$3C_1 A_0 + 2C_0 A_1 + \Phi_{k+1} = B_0,$$

elle nous donne Φ_{k+1}.

On peut donc mettre N sous la forme (3), la question de convergence des séries demeurant réservée.

Occupons-nous maintenant de transformer l'intégrale

$$\frac{dV}{dx_1} = \int \frac{M\,dt}{r^3}.$$

Je m'appuierai sur le lemme suivant, sur lequel je me réserve de revenir plus loin.

Soient trois fonctions holomorphes M, A_1 *et* A_2. *Si* M *s'annule toutes les fois que* A_1 *et* A_2 *s'annulent à la fois (au moins dans le voisinage de l'origine), on peut trouver deux fonctions holomorphes* B_1 *et* B_2 *telles que l'on ait identiquement*

$$M = A_1 B_1 + A_2 B_2.$$

Considérons les deux fonctions holomorphes

$$r^2 \quad \text{et} \quad r\frac{dr}{dt}.$$

Pour qu'elles s'annulent à la fois, il faut que l'équation

$$t^2 - 2Xt - Z = 0$$

ait deux racines égales; c'est-à-dire que

$$Z - Y^2 = 0.$$

La fonction $(Z - Y^2)M$ s'annule donc toutes les fois que r^2 et $r\frac{dr}{dt}$ s'annulent à la fois, de sorte qu'on peut poser

$$(Z - Y^2)M = r^2 B_1 + r\frac{dr}{dt} B_2,$$

B_1 et B_2 étant holomorphes; on en déduit

$$\int \frac{M\,dt}{r^3}(Z - Y^2) = \int \left(B_1 + \frac{dB_2}{dt}\right)\frac{dt}{r} - \frac{B_2}{r}.$$

L'intégrale

$$\int \left(B_1 + \frac{dB_2}{dt}\right)\frac{dt}{r}$$

peut se traiter comme V, ce qui montre qu'elle est égale à

$$\Phi' \int \frac{dt}{r} + P' r.$$

Φ' et P' étant holomorphes ; on a donc finalement

$$(4) \qquad (Z - Y^2) \int \frac{M\,dt}{r^3} = \Phi' \int \frac{dt}{r} + P' r - \frac{B_2}{r}.$$

Il reste à traiter la question de la convergence des séries.

Pour démontrer la convergence de la série P qui entraîne celle de toutes les autres, j'emploierai la méthode des fonctions majorantes et je comparerai l'équation (3) à l'équation

$$(3') \qquad N'' = \Phi'' + \frac{d}{dt}(P'' F''),$$

où N'' est une série donnée, holomorphe en t et x et dont tous les coefficients sont positifs et plus grands en valeur absolue que ceux de N; où Φ'' et P'' sont deux séries inconnues holomorphes, la première en x, la seconde en t et x, où enfin

$$F'' = \frac{C_2 t^2}{2} - G,$$

G étant une série dont les coefficients sont positifs et égaux à la valeur absolue de ceux de $r^2 - C_2 t^2$.

L'intégration de l'équation (3') est d'ailleurs facile.

On en tire

$$P'' F'' = \int N''\,dt - \Phi'' t - \Phi''',$$

Φ''' étant une nouvelle série holomorphe en x; on peut toujours choisir les deux séries inconnues Φ'' et Φ''' de telle façon que le second membre soit divisible par F''; on obtiendra ensuite immédiatement P''.

Cela posé, reprenons l'équation (4) et l'équation qui donne la valeur de $\int \frac{N\,dt}{r}$; nous en tirerons

$$(5) \qquad (Z - Y^2)\Phi \int \frac{M\,dt}{r^3} - \Phi' \int \frac{N\,dt}{r} = (\Phi P' - P\Phi') r - \frac{\Phi B_2}{r}.$$

Cherchons les valeurs de Φ et Φ', et pour cela prenons l'équation

$$\int \frac{N\,dt}{r} = \Phi \int \frac{dt}{r} + P r.$$

Prenons les intégrales le long d'un contour fermé enveloppant τ et τ'; le premier membre devient égal à U_0; soit J l'intégrale $\int \frac{dt}{r}$ prise le long de ce même contour. Quant à l'intégrale

$$\int d(\mathrm{P}r),$$

prise le long d'un contour fermé, elle est nulle; il vient donc

$$U_0 = \Phi \mathrm{J}.$$

Nous avons vu que U_0 est une fonction holomorphe des x ne s'annulant pas avec les x. Pour la même raison, il en est de même de J.

On trouve de même, en partant de l'équation (4)

$$(Z - Y^2)\frac{dU_0}{dx_1} = \Phi' \mathrm{J}.$$

et alors l'équation (5) peut s'écrire

$$(Z - Y^2)\left[U_0 \int \frac{M\,dt}{r'} - \frac{dU_0}{dx_1}\int \frac{N\,dt}{r}\right] = \left[U_0 P' - P\frac{dU_0}{dx_1}(Z - Y^2)\right] r - \frac{U_0 B_2}{r}$$

ou en prenant les intégrales entre les limites t_0 et t_1

$$(Z - Y^2)\left(U_0 \frac{dV}{dx_1} - V\frac{dU_0}{dx_1}\right) = \Theta,$$

Θ étant une fonction holomorphe des x. C. Q. F. D.

V. — Généralisation.

Je me propose d'étendre les résultats précédents au cas d'une variété attirante à $n - 2$ dimensions dans l'espace à n dimensions, la loi d'attraction étant en raison inverse de la puissance $n - 1$ des distances.

Soit v la variété attirante. O un point de cette variété dans le voisinage duquel nous voulons étudier le potentiel. Nous supposerons que ce n'est pas un point singulier et nous le prendrons pour origine.

Les équations de la variété v prendront la forme suivante :

$$x'_k = \varphi_k(t_1, t_2, \ldots, t_{n-2}) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

les φ_k étant holomophes et s'annulant avec les t.

L'expression

$$r^2 = \Sigma(x_k - x'_k)^2$$

est développable en série procédant suivant les puissances des x et des t, le développement commence par des termes du second degré; je pourrai toujours choisir les variables auxiliaires t de telle façon que, quand les x s'annulent, les termes du second degré de r^2 se réduisent à

$$t_1^2 + t_2^2 + \ldots + t_{n-2}^2.$$

Cela posé, le potentiel cherché sera représenté par l'intégrale $n-2^{\text{ple}}$

$$V = \int \frac{N\,d\sigma}{r^{n-2}};$$

N désigne une fonction holomorphe des t et des x et j'ai désigné pour abréger par $d\sigma$ le produit

$$d\sigma = dt_1\,dt_2\ldots dt_{n-2}.$$

L'intégrale V n'est pas une fonction holomorphe des t et des x parce que r s'annule avec les t et les x, c'est-à-dire dans le champ d'intégration. Voyons d'un peu plus près en quoi consiste cette singularité.

Représentons dans l'espace à $2n-4$ dimensions les parties réelles et imaginaires des $n-2$ variables complexes $t_1, t_2, \ldots, t_{n-2}$.

L'intégrale V est une intégrale $n-2^{\text{ple}}$ étendue aux éléments d'une certaine variété w à $n-2$ dimensions située dans cet espace à $2n-4$ dimensions.

Cette variété est d'ailleurs plane; soit, en effet,

$$t_k = u_k + \sqrt{-1}\,v_k.$$

Comme dans l'intégrale V, nous ne donnons aux t que des valeurs réelles, nous aurons

$$v_1 = v_2 = \ldots = v_{n-2} = 0.$$

C'est là l'équation de notre variété w. Mais cette variété n'est pas indéfinie, elle est limitée par une variété à $n-3$ dimensions que j'appellerai λ et qui aura pour équations

$$v_k = 0, \qquad f(u_1, u_2, \ldots, u_{n-2}) = 0.$$

Pour achever de définir la variété w, il faut donc adjoindre aux équations $v_k = 0$, l'inégalité $f > 0$.

La variété λ est ainsi le *bord* de la variété w.

Le point

$$t_1 = t_2 = \ldots = t_{n-2} = 0$$

n'appartient d'ailleurs pas à λ; car nous n'avons pas supposé que le point O se trouvait sur le bord de la variété attirante v.

D'après un théorème connu, généralisation de celui de Cauchy [*cf.* Mémoire *sur les résidus des intégrales doubles* (*Acta mathematica*, t. 9)] ([1]), l'intégrale ne changera pas quand on la prendra le long d'une autre variété ω', ayant même bord que ω, pourvu qu'on puisse passer d'une manière continue de ω à ω' sans rencontrer de point singulier.

Quand le point $x_1, x_2, \ldots, x_n$ décrira certains contours fermés, il faudra déformer la variété ω d'une manière continue de telle façon que sur cette variété ne se trouve jamais aucun point singulier; quand le contour fermé aura été complètement décrit; il pourra se faire que la variété ω ne revienne pas à sa forme primitive, et se soit changée en une autre variété ω'.

L'intégrale V se sera alors changée en $V + U_0$, U_0 étant une période de l'intégrale $(n-2)^{\text{ple}}$

$$\int \frac{N\,d\sigma}{r^{n-2}}.$$

Pour aller plus loin, nous allons appliquer la même méthode que dans le cas de l'espace ordinaire.

Nous allons chercher à mettre N sous la forme

$$N = r^2 \sum \frac{dP_k}{dt_k} - (n-4) \Sigma P_k r \frac{dr}{dt_k} + \Phi, \tag{1}$$

où Φ est une fonction holomorphe des x et les $P_k (k = 1, 2, \ldots, n-2)$ des fonctions holomorphes des x et des t.

Cette équation équivaut en effet à

$$\int \frac{N\,d\sigma}{r^{n-2}} = \sum \int \frac{d}{dt_k}\left(\frac{P_k}{r^{n-4}}\right) d\sigma + \Phi \int \frac{d\sigma}{r^{n-2}}. \tag{2}$$

Décomposons les séries N, P_k, Φ, r^2 en groupes de termes homogènes tant par rapport aux t que par rapport aux x. Soient

$$N_{\mu,\nu},\quad P_{k,\mu,\nu},\quad \Phi_\mu,\quad F_{\mu,\nu}$$

les groupes de termes de

$$N,\quad P_k,\quad \Phi,\quad r^2,$$

qui sont de degré μ par rapport aux x et degré ν par rapport aux t.

([1]) *Voir* Tome III, p. 440-489.

Nous allons calculer les groupes inconnus $P_{k.\mu.\nu}$ dans l'ordre suivant : on commencera par les termes où $\mu+\nu$ est le plus petit et l'on rangera les groupes dans l'ordre des $\mu+\nu$ croissants; les groupes correspondant à une même valeur de $\mu+\nu$ seront rangés dans l'ordre des μ croissants.

Nous aurons donc en posant pour abréger

$$P_{k.\mu.\nu} = H_k,$$

en nous rappelant que

$$F_{0.2} = \Sigma t^2$$

et en désignant par M un ensemble de termes déjà calculés, homogènes de degré μ par rapport aux x et de degré $\nu+1$ par rapport aux t, nous aurons donc, dis-je [en égalant dans (1) les termes de même degré]

$$(3) \qquad M = \Sigma t^2 \sum \frac{dH_k}{dt_k} - (n-4)\Sigma H_k t_k.$$

Nous poserons $\sum \frac{dH}{dt} = Z$ et d'autre part, on peut poser et cela d'une infinité de manières

$$M = \Sigma t_k A_k.$$

Nous chercherons donc à faire

$$A_k = t_k Z - (n-4) H_k,$$

d'où l'on tire aisément

$$\sum \frac{dA_k}{dt_k} = (\nu+1) Z,$$

en tenant compte de

$$\Sigma t_k \frac{dZ}{dt_k} = (\nu-1) Z, \qquad Z = \sum \frac{dH_k}{dt_k},$$

car Z est homogène de degré $\nu-1$ par rapport aux t.

Nos équations nous donneront donc Z et les H_k.

En égalant dans l'équation (3) les termes de degré μ par rapport aux x et zéro par rapport aux t, on a une équation qui donne Φ_μ.

Il resterait à traiter la question de la convergence des séries; comme les théorèmes que je démontre dans ce paragraphe et dans le précédent ne sont pas indispensables pour mon sujet principal, je ne veux pas trop m'y attarder et je me bornerai à indiquer la marche générale de la démonstration.

Il est d'abord facile de mettre $r^2 = F$ sous la forme suivante :

$$r^2 = F = u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_{n-2}^2 + z,$$

où u_k est une série développée suivant les puissances de t et des x, commençant par des termes du premier degré, et dont les termes du premier degré se réduisent à t_k quand les x s'annulent; où z est une série développée suivant les puissances des x et commençant par des termes du second degré.

Cela posé, l'intégrale

$$\int \frac{N\,dt_1\,dt_2\ldots dt_{n-2}}{r^{n-2}}$$

devient

$$\int \frac{N\Delta\,du_1\,du_2\ldots du_{n-2}}{r^{n-2}},$$

où Δ est le jacobien des t par rapport aux u; ce jacobien étant une fonction holomorphe des t et des x, et aussi des u et des x, nous voyons que nous pouvons toujours supposer que l'on a

$$r^2 = \Sigma t^2 + z,$$

car les u peuvent jouer le même rôle que les t.

Supposons donc

$$r^2 = \Sigma t^2 + z.$$

Notre équation devient alors

$$(\Sigma t^2 + z)\sum \frac{dP}{dt} - (n-4)\Sigma(tP) = N - \Phi. \tag{4}$$

Notre fonction N peut se développer en une série absolument convergente de la forme

$$N = \Sigma Y \rho^\beta,$$

où β est un entier pair et où Y est un polynôme homogène de degré α par rapport aux t et satisfaisant à l'équation

$$\sum \frac{d^2 Y}{dt^2} = \Delta Y = 0,$$

et où enfin l'on a posé

$$\rho^2 = \Sigma t^2.$$

Cherchons à satisfaire à la fois aux équations

$$\sum \frac{dP}{dt} = 0, \qquad \Sigma tP = -\frac{1}{n-4} Y \rho^\beta.$$

Pour cela faisons

$$\mathrm{P}_k = a\frac{d\mathrm{Y}}{dt_k}\rho^{\beta} + bt_k\mathrm{Y}\rho^{\beta-2},$$

où a et b sont des coefficients qu'il s'agit de déterminer. Pour cela on trouve les deux équations

$$a\alpha + b = -\frac{1}{n-4},$$

$$a\alpha\beta + b(\alpha+\beta+n-4) = 0,$$

dont le déterminant ne s'annule que pour

$$\alpha = 0 \qquad \text{ou} \qquad \alpha + n - 4 = 0.$$

Comme n est plus grand que 4, cette seconde hypothèse ne peut se réaliser, mais nous devons exclure le cas de $\alpha = 0$.

Appelons donc N_0 l'ensemble des termes de N pour lesquels α sera nul, de sorte que N_0 sera fonction de ρ^2 seulement et résolvons l'équation

$$(4') \qquad (\Sigma t^2+\sigma)\sum\frac{d\mathrm{P}}{dt} - (n-4)\Sigma(t\mathrm{P}) = \mathrm{N} - \mathrm{N}_0;$$

cela pourra se faire en prenant

$$\mathrm{P} = \Sigma a\frac{d\mathrm{Y}}{dt}\rho^{\beta} - \Sigma bt\mathrm{Y}\rho^{\beta-2}$$

(les termes où α est nul étant exclus); comme les coefficients a et b sont limités, la série est convergente.

Il faut maintenant trouver des séries P_k satisfaisant à l'équation

$$(4'') \qquad (\rho^2+\sigma)\sum\frac{d\mathrm{P}}{dt} - (n-4)\Sigma t\,\mathrm{P} = \mathrm{N}_0 - \Phi.$$

Nous poserons

$$\mathrm{P}_k = t_k\mathrm{Q},$$

Q étant une fonction de ρ^2; l'équation devient

$$(\rho^2+\sigma)\left[(n-2)\mathrm{Q} + \rho\frac{d\mathrm{Q}}{d\rho}\right] - (n-4)\rho^2\mathrm{Q} = \mathrm{N}_0 - \Phi$$

ou bien

$$\frac{d}{d\rho}\left[\frac{\mathrm{Q}\rho^{n-2}}{(\rho^2+\sigma)^{\frac{n-4}{2}}}\right] = \frac{(\mathrm{N}_0-\Phi)\rho^{n-3}}{(\rho^2+\sigma)^{\frac{n-2}{2}}}.$$

L'équation est tout à fait semblable à celle qui a été traitée dans le paragraphe précédent et pourrait se traiter de la même manière.

On pourrait dire aussi : nous déterminerons Φ à l'aide de l'équation

$$\int \frac{\Lambda_0 \rho^{n-3}\, d\rho}{(\rho^2+z)^{\frac{n-2}{2}}} = \Phi \int \frac{\rho^{n-3}\, d\rho}{(\rho^2+z)^{\frac{n-2}{2}}},$$

les intégrales étant prises le long d'un contour fermé entourant les deux points

$$\rho = \pm\sqrt{-z}.$$

Si dans ces intégrales on pose

$$\rho = \rho'\sqrt{z},$$

et qu'on prenne les intégrales suivant un contour entourant les deux points $\rho' = \pm i$, l'intégrale du second membre sera une constante; dans celle du premier membre la fonction sous le signe $\int$ sera une fonction holomorphe des x et de $\sqrt{z}$; Φ devra donc être une fonction holomorphe des x et de $\sqrt{z}$; et j'ajouterai des x et de z; car Φ ne change pas quand $\sqrt{z}$ se change en $-\sqrt{z}$.

Si Φ est une fonction holomorphe, il est clair qu'il en est de même de Q.

On pourrait aussi ramener nos intégrales par des intégrations par parties aux cas simples $n = 3$ ou $n = 4$.

Pour résumer cette longue discussion, l'intégrale V peut toujours être mise sous la forme

$$\int \frac{\Lambda\, d\sigma}{r^{n-2}} = \sum \int \frac{d}{dt_k}\left(\frac{\mathrm{P}_k}{r^{n-4}}\right) d\sigma + \Phi \int \frac{d\sigma}{r^{n-2}}. \tag{2}$$

Considérons maintenant l'intégrale

$$\frac{d\mathrm{V}}{dx_1} = \int \frac{\mathrm{M}\, d\sigma}{r^n},$$

où

$$\mathrm{M} = r^2 \frac{d\Lambda}{dx_1} + (n-2)\Lambda(x_1 - x_1')$$

est une fonction holomorphe des t et des x.

Considérons les équations

$$r^2 = r\frac{dr}{dt_1} = r\frac{dr}{dt_2} = \ldots = r\frac{dr}{dt_{n-2}} = 0. \tag{3}$$

et éliminons les t entre ces équations dont les premiers membres sont holomorphes en t et en x; nous obtiendrons une certaine équation

$$H = 0, \tag{6}$$

dont le premier membre sera holomorphe par rapport aux x. En appliquant le même lemme que dans le paragraphe précédent, nous pourrons écrire

$$HM = A r^2 + B_1 r \frac{dr}{dt_1} + B_2 r \frac{dr}{dt_2} + \ldots + B_{n-2} r \frac{dr}{dt_{n-2}},$$

A et les B étant holomorphes en t et en x; car H s'annule toutes les fois que les équations (5) sont satisfaites.

Ce lemme est bien connu, et d'ailleurs, en ce qui concerne son application actuelle, il suffit pour lui donner une évidence immédiate, de rappeler que nous avons vu qu'on peut toujours supposer

$$r^2 = \Sigma t^2 + z,$$

d'où

$$r \frac{dr}{dt_k} = t_k; \qquad H = z.$$

Cela posé notre intégrale devient

$$H \int \frac{M\, d\sigma}{r^n} = \int \left[A + \frac{1}{n-2} \sum \frac{dB_k}{dt_k} \right] \frac{d\sigma}{r^{n-2}} - \sum \int \frac{d}{dt_k} \left(\frac{B_k}{(n-2) r^{n-2}} \right) d\sigma.$$

La première intégrale du second membre se traitera comme $\int \frac{A\, d\sigma}{r^{n-2}}$ et l'on trouvera finalement l'équation suivante analogue à (2) ainsi qu'à l'équation (4) du paragraphe précédent

$$H \int \frac{M\, d\sigma}{r^n} = \sum \int \frac{d}{dt_k} \left(\frac{P'_k}{r^{n-2}} \right) d\sigma + \Phi' \int \frac{d\sigma}{r^{n-2}}. \tag{7}$$

Nous n'avons plus qu'à continuer le raisonnement comme dans le paragraphe précédent.

Dans l'équation (2) comme dans l'équation (7), le premier terme du second membre est nul si l'intégrale est prise le long d'une variété fermée; elle est une fonction holomorphe des x dans le cas contraire.

Prenons d'abord les intégrales le long de la variété fermée qui correspond à la période U_0 dont nous avons parlé plus haut, les équations (2) et (7) nous donneront

$$U_0 = \Phi J,$$

$$H \frac{dU_0}{dx_1} = \Phi' J,$$

J étant la période de l'intégrale $\int \frac{dz}{r^{n-2}}$, laquelle période est une fonction holomorphe des x ne s'annulant pas avec les x.

On tirera alors des équations (2) et (7) (en prenant les intégrales dans les limites qui conviennent à V)

$$H\left(U_0\frac{dV}{dx_1} - V\frac{dU_0}{dx_1}\right) = \Theta_1,$$

Θ_1 étant une fonction holomorphe des x et l'on trouverait de même

$$H\left(U_0\frac{dV}{dx_2} - V\frac{dU_0}{dx_2}\right) = \Theta_2,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$H\left(U_0\frac{dV}{dx_n} - V\frac{dU_0}{dx_n}\right) = \Theta_n;$$

ces équations peuvent s'écrire encore

$$d\left(\frac{V}{U_0}\right) = \frac{\Theta_1\,dx_1 + \Theta_2\,dx_2 + \dots + \Theta_n\,dx_n}{HU_0^2}.$$

Posons

$$\frac{\Theta_k}{U_0^2} = A_k\frac{dH}{dx_k} + B_k H,$$

l'expression

$$\sum\left(\frac{A_k}{H}\frac{dH}{dx_k} + B_k\right)dx_k$$

devra être une différentielle exacte, ce qui entraîne l'identité

$$0 = (A_2 - A_1)\frac{dH}{dx_1}\frac{dH}{dx_2} + (A_1 - A_2)H\frac{d^2H}{dx_1\,dx_2} + H\left(\frac{dA_1}{dx_2}\frac{dH}{dx_1} - \frac{dA_2}{dx_1}\frac{dH}{dx_2}\right) + H^2\left(\frac{dB_1}{dx_2} - \frac{dB_2}{dx_1}\right).$$

Cette équation nous montre d'abord que pour $H = 0$, on a $A_1 = A_2$ et de même

$$A_1 = A_2 = \dots = A_n.$$

Comme les A_k sont arbitraires pourvu qu'ils se réduisent à $\frac{\Theta_k}{U_0^2} : \frac{dH}{dx_k}$ pour $H = 0$, nous pourrons supposer que tous les A_k sont égaux et supprimer l'indice k; notre équation devient alors en divisant par H

$$\frac{dA}{dx_1}\frac{dH}{dx_2} - \frac{dA}{dx_2}\frac{dH}{dx_1} - H\left(\frac{dB_1}{dx_2} - \frac{dB_2}{dx_1}\right) = 0;$$

ce qui montre que l'on peut regarder A comme une constante; car si l'on a $H = 0$, $dH = 0$, il vient $dA = 0$.

Il vient alors

$$d\left(\frac{V}{U_0}\right) = A\, d \log H + B_1 dx_1 + B_2 dx_2 + \ldots + B_n dx_n.$$

Comme il est aisé de vérifier que les B ne peuvent être que des fonctions holomorphes des x, nous déduirons

$$V = AU_0 \log H + \text{fonction holomorphe des } x.$$

Il nous reste à voir quelle est la signification de cette variété $H = 0$, qui joue un grand rôle dans l'analyse précédente.

L'équation

$$r^2 = 0$$

est l'équation d'une variété à $n - 1$ dimensions que j'appelle K et qu'on peut assimiler à un cône ayant son sommet en un point P de la variété attirante v. La variété K est le lieu des points dont la distance à P est nulle; elle est donc imaginaire et n'a d'autre point réel que le point P lui-même.

Quand le point P se déplace sur la variété v, la variété K se déplace également et son enveloppe s'obtient en éliminant les t entre les équations (5); c'est donc la variété à $n - 1$ dimensions

$$H = 0.$$

Cette variété est donc imaginaire et n'a d'autres points réels que ceux de v.

Considérons une fonction holomorphe F de n variables complexes

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2, \quad \ldots, \quad z_n = x_n + iy_n$$

et considérons les x et les y comme les coordonnées d'un point dans l'espace à $2n$ dimensions.

L'équation $F = 0$ se décompose en deux autres obtenues en égalant à zéro la partie réelle et la partie imaginaire de F; elle définit ainsi une variété à $2n - 2$ dimensions que j'appelle v.

Nous verrons plus loin que la fonction

$$\log |F|$$

est égale au potentiel de la variété attirante v plus une fonction holomorphe des x et des y.

Nous devrons donc avoir

$$\log |F| = U_0 \log H + \Phi,$$

U_0, H et Φ étant des fonctions holomorphes des x et des y.

L'équation $|F| = 0$ doit donc coïncider avec l'équation $H = 0$. L'équation $|F| = 0$ représente une variété à $2n-1$ dimensions qui est imaginaire et dont les seuls points réels sont les points de la variété à $2n-2$ dimensions v.

Vérifions donc que la variété $|F| = 0$ est bien l'enveloppe des variétés $r^2 = 0$.

Observons d'abord que, si nous laissons de côté les points singuliers, nous pouvons écrire

$$F = (z_n - f)\Phi,$$

où f est une fonction holomorphe de $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ et où Φ est une fonction holomorphe de $z_1, z_2, \ldots, z_n$ qui ne s'annule pas dans le voisinage du point considéré.

Soit

$$f = f_1 + if_2,$$

de sorte que f_1 et f_2 sont des fonctions holomorphes de

$$x_1, \quad y_1, \quad x_2, \quad y_2, \quad \ldots, \quad x_{n-1}, \quad y_{n-1};$$

les coefficients des développements de ces fonctions holomorphes étant réels.

La variété à $2n-2$ dimensions v a pour équations

$$x_n = f_1, \qquad y_n = f_2,$$

et la variété imaginaire à $2n-1$ dimensions $|F| = 0$ a pour équations

$$(8) \qquad (x_n - f_1) + i(y_n - f_2) = 0.$$

Cela posé, soit $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n, y'_1, y'_2, \ldots, y'_n$ un point de v, la variété correspondante $r^2 = 0$ a pour équation

$$(9) \qquad \Sigma(x_k - x'_k)^2 + \Sigma(y_k - y'_k)^2 = 0.$$

Il faut chercher l'enveloppe de cette variété, en faisant varier

$$\begin{gathered} x'_1, \quad x'_2, \quad \ldots, \quad x'_{n-1}, \\ y'_1, \quad y'_2, \quad \ldots, \quad y'_{n-1}, \end{gathered}$$

et en même temps x'_n et y'_n, puisque l'on a

$$\begin{gathered} x'_n = f_1(x'_1, y'_1, \ldots, x'_{n-1}, y'_{n-1}), \\ y'_n = f_2(x'_1, y'_1, \ldots, x'_{n-1}, y'_{n-1}). \end{gathered}$$

On trouve ainsi par la différentiation de (9)

$$\left.\begin{aligned}(x_k - x'_k) + (x_n - x'_n)\frac{dx'_n}{dx'_k} + (y_n - y'_n)\frac{dy'_n}{dx'_k} = 0\\ (y_k - y'_k) + (x_n - x'_n)\frac{dx'_n}{dy'_k} + (y_n - y'_n)\frac{dy'_n}{dy'_k} = 0\end{aligned}\right\} \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1)$$

A cause des relations

$$\frac{dx'_n}{dx'_k} = \frac{dy'_n}{dy'_k}, \qquad \frac{dx'_n}{dy'_k} = -\frac{dy'_n}{dx'_k}$$

il vient

$$(x_k - x'_k) + i(y_k - y'_k) + \left(\frac{dx'_n}{dx'_k} - i\frac{dy'_n}{dx'_k}\right)[(x_n - x'_n) + i(y_n - y'_n)] = 0,$$

et en combinant avec (9)

$$(x_k - x'_k) + i(y_k - y'_k) = (x_n - x'_n) + i(y_n - y'_n) = 0$$

On a donc

$$x_n + iy_n = x'_n + iy'_n = f(x'_1 + iy'_1, x'_2 + iy'_2, \ldots, x'_{n-1} + iy'_{n-1}).$$

Or

$$x'_k + iy'_k = x_k + iy_k.$$

Donc

$$x_n + iy_n = f(x_1 + iy_1, x_2 + iy_2, \ldots, x_{n-1} + iy_{n-1}),$$

de sorte qu'on retrouve l'équation (8). C. Q. F. D.

VI. — Généralisation du théorème 4.

Soit dans l'espace à n dimensions une variété S à $n-1$ dimensions; supposons que cette variété soit fermée et limite un domaine G.

Soit maintenant C une variété analytique à $n-2$ dimensions; nous mettrons les équations de la variété C sous la forme suivante :

$$(1) \qquad x_k = \varphi_k(t_1, t_2, \ldots, t_{n-2}) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Cela posé, considérons les hypersphères de rayon ε ayant pour centre un point de C. L'équation générale de ces hypersphères sera

$$(2) \qquad \Sigma(x_k - \varphi_k)^2 = \varepsilon^2,$$

et cette équation contient $n-2$ paramètres arbitraires qui sont les t. Pour avoir l'enveloppe de ces hypersphères, il suffit de différentier l'équation (2) par rapport aux paramètres t, ce qui donne les $n-2$ équations

$$(3) \qquad \Sigma(x_k - \xi_k)\frac{d\xi_k}{dt_h} = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, n-2).$$

En éliminant les t entre les équations (2) et (3) on obtiendrait l'équation d'une variété à $n-1$ dimensions que j'appelle K et qui est une sorte de *variété-canal*.

Posons

$$x_k - \xi_k = \alpha_k \varepsilon \cos\theta + \beta_k \varepsilon \sin\theta,$$

et cherchons à choisir les α et les β de telle façon que les équations (2) et (3) soient satisfaites quel que soit θ; nous obtiendrons les équations suivantes qui définissent les α et les β

$$(4) \qquad \begin{cases} \Sigma\alpha^2 = \Sigma\beta^2 = 1, & \Sigma\alpha\beta = 0, \\ \Sigma\alpha\dfrac{d\xi}{dt_h} = \Sigma\beta\dfrac{d\xi}{dt_h} = 0 & (h = 1, 2, \ldots, n-2). \end{cases}$$

Je dis que les cosinus directeurs de l'élément de surface de K, c'est-à-dire les quantités que j'ai appelées

$$\frac{D_k}{D_0}$$

au paragraphe II sont égales à

$$\frac{x_k - \xi_k}{\varepsilon} = \alpha_k \cos\theta + \beta_k \sin\theta.$$

Pour cela il suffit de vérifier que l'on a

$$\sum\left(\frac{x_k - \xi_k}{\varepsilon}\right)^2 = 1,$$

et en outre

$$\frac{x_1 - \xi_1}{D_1} = \frac{x_2 - \xi_2}{D_2} = \ldots = \frac{x_n - \xi_n}{D_n}$$

ou ce qui revient au même

$$(5) \qquad \begin{cases} \Sigma(x_k - \xi_k)\dfrac{dx_k}{d\theta} = 0, \\ \Sigma(x_k - \xi_k)\dfrac{dx_k}{dt_h} = 0 & (h = 1, 2, \ldots, n-2). \end{cases}$$

Ces conditions sont évidemment remplies, car en différentiant (2) on trouve

$$\Sigma(x_k - \xi_k)\frac{d(x_k - \xi_k)}{dt_h} = 0, \qquad \Sigma(x_k - \xi_k)\frac{dx_k}{d\theta} = 0,$$

et en combinant avec (3) on retrouve (5).

On déduit de là

$$D_0 = \Sigma(\alpha_k \cos\theta + \beta_k \sin\theta) D_k,$$

c'est-à-dire que D_0 est égal au déterminant

$$\left| \frac{dx_k}{dt_1}, \quad \frac{dx_k}{dt_2}, \quad \ldots, \quad \frac{dx_k}{dt_{n-2}}, \quad \frac{dx_k}{d\theta}, \quad \alpha_k \cos\theta + \beta_k \sin\theta \right| \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Or on a

$$\frac{dx_k}{dt} = \frac{d\xi_k}{dt} + \varepsilon\left(\frac{d\alpha_k}{dt}\cos\theta + \frac{d\beta_k}{dt}\sin\theta\right),$$

et comme ε est très petit, on peut écrire

$$\frac{dx_k}{dt} = \frac{d\xi_k}{dt}.$$

Il vient donc, en négligeant ε^2 :

$$D_0 = \left| \frac{d\xi_k}{dt_1}, \quad \frac{d\xi_k}{dt_2}, \quad \ldots, \quad \frac{d\xi_k}{dt_{n-2}}, \quad \varepsilon(-\alpha_k \sin\theta + \beta_k \cos\theta), \quad \alpha_k \cos\theta + \beta_k \sin\theta \right|$$

ou bien

$$D_0 = \varepsilon \left| \frac{d\xi_k}{dt_1}, \quad \frac{d\xi_k}{dt_2}, \quad \ldots, \quad \frac{d\xi_k}{dt_{n-2}}, \quad \beta_k, \quad \alpha_k \right|.$$

Remplaçons les lignes $m^{\text{ième}}$ et $p^{\text{ième}}$ du déterminant par deux lignes ainsi obtenues; l'une sera obtenue en multipliant la première ligne par α_1, la seconde par α_2, ..., la $n^{\text{ième}}$ par α_n, et ajoutant; l'autre en multipliant la première ligne par β_1, la seconde par β_2, ..., la $n^{\text{ième}}$ par β_n et ajoutant.

Le déterminant se trouve ainsi multiplié par

$$\alpha_m \beta_p - \alpha_p \beta_m.$$

En tenant compte des équations (4) on voit que tous les éléments des deux lignes nouvelles sont égaux à 0 ou à 1 et l'on conclut

$$(\alpha_m \beta_p - \alpha_p \beta_m) D_0 = \varepsilon \Delta_{m,p},$$

$\Delta_{m,p}$ étant le mineur obtenu en supprimant les deux dernières colonnes et les lignes m et p.

On a $\frac{n(n-1)}{2}$ équations de cette forme. En faisant la somme des carrés, et remarquant que

$$\Sigma(\alpha_m\beta_p - \alpha_p\beta_m)^2 = 1,$$

on trouve

$$D_0^2 = \varepsilon^2 \Sigma \Delta_{m,p}^2.$$

Nous poserons

$$\Sigma \Delta_{m,p}^2 = \Delta_0^2,$$

et il viendra, aux quantités près de l'ordre de ε^2 :

$$D_0 = \varepsilon \Delta_0.$$

L'aire de la variété C est donc représentée par l'intégrale $n - 2^{\text{ple}}$

$$\int \Delta_0 \, dt_1 \, dt_2 \ldots dt_{n-2},$$

et celle de K (en négligeant ε^2) par l'intégrale $n - 1^{\text{ple}}$

$$\varepsilon \int \Delta_0 \, dt_1 \, dt_2 \ldots dt_{n-2} \, d\theta.$$

Il nous faut distinguer quelles seront les parties de la variété-canal K qui conviennent. Nous ne conserverons de cette variété que les points qui satisferont aux deux conditions suivantes :

1° ils seront à l'intérieur de S;

2° leur plus courte distance à C sera précisément ε, et non pas plus petite que ε.

Les circonstances suivantes peuvent en effet se présenter :

1° Il peut arriver que le point $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de K soit à l'extérieur de S, tandis que le point correspondant $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ de C est à l'intérieur de S.

2° Il peut arriver au contraire que le point $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de K soit à l'intérieur de S, tandis que le point correspondant $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ de C sera à l'extérieur de S.

3° Il peut arriver enfin que l'on puisse du point $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mener deux normales à C, l'une égale à ε, l'autre plus petite que ε, de telle façon que ce point appartienne à K, mais que sa plus courte distance à C soit cependant plus petite que ε.

Soit K_1 la portion de K formée par les points $x_1, x_2, \ldots, x_n$, tels que les points correspondants $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ de C soient à l'intérieur de S. La portion de K qui convient au problème sera alors

$$K_1 - k + k' - k'';$$

k, lieu des points $x_1, x_2, \ldots, x_n$ qui sont extérieurs à S, mais tels que les points $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ correspondants soient intérieurs à S;

k', lieu des points $x_1, x_2, \ldots, x_n$ qui sont intérieurs à S, mais tels que les points $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ correspondants soient extérieurs à S;

k'', lieu des points d'où l'on peut mener à C deux normales, l'une égale à ε, l'autre plus petite que ε.

Je dis que l'aire totale de k, k' et k'' est de l'ordre de ε^2.

Démontrons-le d'abord pour k et k'.

Si les deux points $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ sont l'un extérieur et l'autre intérieur à S, comme la distance de ces deux points est ε, la plus courte distance de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ à S sera plus petite que ε. Considérons la partie de C formée par les points $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ dont la plus courte distance à S est plus petite que ε. Son aire, représentée par l'intégrale

$$\int \Delta_0 \, dt_1 \, dt_2 \ldots dt_n,$$

sera, je suppose, égale à A. L'aire de $k + k'$, représentée par l'intégrale

$$\varepsilon \int \Delta_0 \, dt_1 \, dt_2 \ldots dt_n \, d\theta,$$

sera alors plus petite que

$$2\pi\varepsilon A.$$

Je dis que A est de l'ordre de ε.

Pour nous en rendre compte, supposons par exemple que la variété S soit une hypersphère

$$(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2 = \rho^2,$$

et faisons varier ρ.

Soit $F(\rho)$ l'aire de la partie de la variété C contenue à l'intérieur de cette hypersphère.

Nous allons faire varier ρ depuis zéro jusqu'à ρ_0 par exemple; cet intervalle va pouvoir se partager en un nombre fini d'intervalles partiels, de telle sorte que dans chacun de ces intervalles partiels, $F(\rho)$ soit une fonction analytique de ρ.

Si nous donnons à ρ une valeur comprise à l'intérieur d'un de ces intervalles, A sera égal à

$$F(\rho+\varepsilon)-F(\rho-\varepsilon),$$

et comme la fonction F est analytique, A sera de l'ordre de ε.

On peut d'ailleurs éviter cette difficulté par l'artifice suivant.

Soit C' l'intersection de C et de S; c'est une variété à $n-3$ dimensions. Soit $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ un point de C'; α_k et β_k les valeurs correspondantes des coefficients α et β définis plus haut.

Considérons l'ensemble des points

$$x_k=\varphi_k+\zeta(\alpha_k\cos\theta+\beta_k\sin\theta),$$

où les φ_k (ainsi que les α_k et β_k) prennent toutes les valeurs qui correspondent aux différents points de C'; où θ varie de zéro à 2π et ζ de zéro à ε.

Cet ensemble de points formera une variété W à $n-1$ dimensions qui s'écartera peu de S, puisque le point $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ est sur S et que ζ est très petit.

Remplaçons S par une variété S' peu différente, mais comprenant la variété W; il n'y aura plus alors d'aires k et k'; car si le point $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ de C est à l'intérieur de S', il en est de même du point correspondant $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de K et inversement. Pour s'en rendre compte, il suffit de remarquer que lorsque le point φ_k de C traverse S', il est sur C' et par conséquent le point correspondant x_k est sur W et par conséquent sur S', puisque W fait partie de S'.

Passons maintenant à k''; je dis que l'aire de k'' sera très petite, non seulement d'une manière absolue, mais par rapport à ε.

En effet, l'équation de la variété-canal K peut pour ε très petit se mettre sous la forme suivante :

Soient

$$F=0, \qquad F_1=0$$

les équations de la variété C; l'équation de K s'écrira en négligeant les puissances supérieures de ε :

$$F^2\sum\left(\frac{dF_1}{dx}\right)^2-2FF_1\sum\left(\frac{dF}{dx}\frac{dF_1}{dx}\right)+F_1^2\sum\left(\frac{dF}{dx}\right)^2=\varepsilon^2\sum\left(\frac{dF_1}{dx_i}\frac{dF}{dx_k}-\frac{dF_1}{dx_k}\frac{dF}{dx_i}\right)^2.$$

Cette variété ne présentera pas de singularité, à moins que tous les déterminants

$$\frac{dF_1}{dx_i}\frac{dF}{dx_k} - \frac{dF_1}{dx_k}\frac{dF}{dx_i}$$

ne s'annulent à la fois. Si cela n'a pas lieu, dans un certain domaine, on est donc certain que deux nappes de la variété K ne peuvent pas se couper dans ce domaine, et par conséquent que ce domaine ne contient aucune partie de k''.

L'ensemble des points de C tels que tous ces déterminants s'annulent forme une variété singulière C'' qui aura au plus $n-3$ dimensions.

Si le point $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ de C n'est pas sur C'', nous pourrons choisir ε assez petit pour être certains que le point correspondant $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de K n'est pas sur k''.

Soit alors C_1 l'ensemble des points de C dont la plus courte distance à C' est plus petite que δ. Nous pourrons prendre ε assez petit pour que si le point $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ de C n'est pas sur C_1, nous soyons certains que le point correspondant $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de K ne sera pas sur k''. Il est à remarquer que la valeur que l'on doit attribuer à ε doit être d'autant plus petite que δ est plus petit.

Soit A l'aire de C_1, elle sera de l'ordre de δ. L'aire de k'' sera plus petite que $2\pi\varepsilon A$. Quand δ et par conséquent ε tendent vers zéro, on voit que le rapport de l'aire de k'' à ε tend vers zéro. C. Q. F. D.

Envisageons maintenant une fonction V jouissant des propriétés suivantes :

1° Elle est harmonique à l'intérieur de la variété S, sauf sur la variété C.

2° Quand le point $x_1, x_2, \ldots, x_n$ est à une distance ε de la variété C, elle est de l'ordre de $\log \varepsilon$.

3° En même temps ses dérivées premières sont de l'ordre de $\frac{1}{\varepsilon}$.

4° Considérons un point $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ de C et un point $x_1, x_2, \ldots, x_n$ très voisin du premier, et tel que l'on ait

$$x_k - \varphi_k = \alpha_k \varepsilon \cos\theta + \beta_k \varepsilon \sin\theta,$$

les α_k et les β_k étant les coefficients définis plus haut et correspondant au point $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$; je supposerai que l'expression

$$(x_1-\varphi_1)\frac{dV}{dx_1} + (x_2-\varphi_2)\frac{dV}{dx_2} + \ldots + (x_n-\varphi_n)\frac{dV}{dx_n}$$

tend vers une limite finie indépendante de θ quand ε tend vers zéro.

Cette limite que j'appellerai δ est évidemment une fonction des coordonnées $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ du point considéré de C.

Cela posé, soit

$$y_1, \quad y_2, \quad \ldots, \quad y_n$$

un point quelconque intérieur à S. Posons

$$r^2 = \Sigma(x_k - y_k)^2, \qquad U = \frac{1}{r^{n-2}}.$$

Soit ensuite Σ l'hypersphère

$$\Sigma(x_k - y_k)^2 = \varepsilon^2.$$

Dans le domaine limité par la variété S, par l'hypersphère Σ et par la variété-canal K, les deux fonctions V et U sont harmoniques, nous pouvons donc appliquer le théorème de Green et écrire

$$\int \left(V \frac{dU}{dn} - U \frac{dV}{dn} \right) d\omega = 0,$$

les intégrales étant prises le long des variétés qui limitent le domaine, c'est ce que je mettrai en évidence en écrivant l'équation qui précède sous la forme suivante :

$$\int_{S_1} - \int_K + \int_\Sigma = 0,$$

ou bien encore

$$\int_{S_1} + \int_{K_1} - \int_k + \int_{k'} - \int_{k''} - \int_\Sigma = 0;$$

S_1 représente ici la partie de S qui est extérieure à K.

Je vais maintenant faire tendre ε vers zéro.

Je dis que $\int_{S_1}$ tend vers une limite finie et déterminée que j'appellerai $\int_S$. En effet la variété S a $n-1$ dimensions, l'intersection de C et de S en a $n-3$; l'aire de $S - S_1$ (c'est-à-dire de l'ensemble des points de S dont la distance à C est plus petite que ε) sera donc de l'ordre de ε^2. Si nous changeons ε en ε', ε' étant plus petit que ε et tel que la différence $\varepsilon - \varepsilon'$ soit très petite par rapport à ε, si nous appelons s l'ensemble des points de S dont la distance à C est comprise entre ε et ε' ; l'aire de s sera de l'ordre de $\varepsilon(\varepsilon - \varepsilon')$; de plus dans s, les fonctions U et $\frac{dU}{dn}$ sont finies, tandis que V et $\frac{dV}{dn}$ sont de l'ordre de $\log \varepsilon$ et de $\frac{1}{\varepsilon}$. L'intégrale $\int_s$ est donc de l'ordre de $\varepsilon - \varepsilon'$. Nous en concluons que l'intégrale

$$\int_S \left(V \frac{dU}{dn} - U \frac{dV}{dn} \right) d\omega,$$

et même l'intégrale

$$\int_S \left(\left| V \frac{dU}{d\nu} \right| + \left| U \frac{dV}{d\nu} \right| \right) d\omega$$

sont finies.

De plus d'après les théorèmes **2** et **3** généralisés, la première intégrale est une fonction holomorphe et harmonique des y.

Ainsi quand ε tend vers zéro, l'intégrale $\int_{S_1}$ tend vers une fonction holomorphe et harmonique des y.

En même temps, les intégrales $\int_k$, $\int_{k'}$, $\int_{k''}$ tendent vers zéro ; en effet les aires d'intégration k, k' et k'' sont très petites par rapport à ε et la fonction sous le signe $\int$ est de l'ordre de $\frac{1}{\varepsilon}$.

Passons à l'intégrale $\int_\Sigma$. L'aire de Σ est proportionnelle à ε^{n-1}. A la surface de Σ, V et $\frac{dV}{d\nu}$ sont finis ; U est égal à $\frac{1}{\varepsilon^{n-2}}$ et $\frac{dU}{d\nu}$ à $\frac{n-2}{\varepsilon^{n-1}}$. Donc quand ε tend vers zéro,

$$\varepsilon^{n-1} \left(V \frac{dU}{d\nu} - U \frac{dV}{d\nu} \right)$$

tend vers $(n-2)V_0$, V_0 étant la valeur de V au point de $y_1, y_2, \dots, y_n$, c'est-à-dire au centre de Σ.

La limite de l'intégrale $\int_{\Sigma_1}$ est donc égale à V_0 multipliée par un facteur constant numérique.

Reste l'intégrale $\int_{h_1}$. Elle est égale à

$$2\pi\varepsilon \int \left(V \frac{dU}{d\nu} - U \frac{dV}{d\nu} \right) d\tau,$$

en représentant par

$$\int d\tau = \int \Delta_0 \, dt_1 \, dt_2 \dots dt_{n-2}$$

l'aire de C.

V est de l'ordre de $\log\varepsilon$ et $\frac{dU}{d\nu}$ est fini, donc

$$\varepsilon V \frac{dU}{d\nu}$$

tend vers zéro. D'autre part U est égal à r^{2-n} et

$$\varepsilon \frac{dV}{d\nu} = \Sigma (x_k - \xi_k) \frac{dV}{dx_k}$$

tend vers δ. Donc l'intégrale $\int_{K_1}$ tend vers

$$-2\pi\int\frac{\delta\,d\tau}{r^{n-2}},$$

r désignant la distance de l'élément $d\tau$ au point $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

C'est le potentiel d'une variété attirante à $n-2$ dimensions, au point y_1, $y_2, \ldots, y_n$. La variété attirante est C et la densité de la matière attirante est δ.

Notre équation devient ainsi

$$\int_S - 2\pi\int\frac{\delta\,d\tau}{r^{n-2}} + CV_0 = 0,$$

C étant un coefficient constant.

Nous arrivons donc à l'énoncé suivant qui est la généralisation de notre théorème 4 :

Notre fonction V est, dans le domaine considéré, égale au potentiel de la variété attirante C, plus une fonction holomorphe et harmonique.

On pourrait dans la démonstration précédente, remplacer la variété-canal K, par d'autres variétés très peu différentes et qui joueraient le même rôle.

Nous en verrons un exemple dans le paragraphe suivant.

VII. — Applications aux fonctions logarithmiques.

Soit F une fonction des n variables complexes :

$$z_1 = x_1 + iy_1, \qquad z_2 = x_2 + iy_2, \qquad \ldots, \qquad z_n = x_n + iy_n$$

holomorphe dans un certain domaine G.

La fonction

$$V = \log|F|$$

sera une fonction biharmonique des $2n$ variables x et y dans tout ce domaine sauf sur la variété à $2n-2$ dimensions

$$F = 0,$$

variété que j'appellerai C dans ce qui va suivre.

J'appellerai S la variété à $2n-1$ dimensions qui limite le domaine G.

Nous pourrions en partant de la variété C, construire, comme dans le paragraphe précédent, une variété-canal K à $2n-1$ dimensions qui serait l'enveloppe des hypersphères dont le rayon serait ε et dont le centre serait sur C.

J'envisagerai ensuite une hypersphère Σ dont le centre sera un point quelconque de G et dont le rayon sera ε. Je désignerai par P le centre de cette hypersphère.

Je désignerai par M le point de coordonnées courantes

$$x_1, \quad y_1, \quad x_2, \quad y_2, \quad \ldots, \quad x_n, \quad y_n$$

et par r la distance MP.

J'ai déjà posé

$$V = \log |F|;$$

je pose de même

$$U = \frac{1}{r^{2n-2}}.$$

La fonction U a même définition qu'au paragraphe précédent; il me reste à montrer que la fonction V satisfait bien aux mêmes conditions que dans le paragraphe précédent.

1° Quand le point M est à la distance ε de la variété C, V est de l'ordre de $\log \varepsilon$.

Soit en effet

$$x'_1, \quad y'_1, \quad x'_2, \quad y'_2, \quad \ldots, \quad x'_n, \quad y'_n$$

un point quelconque M' de la variété C.

Je poserai d'ailleurs

$$x'_k + i y'_k = z'_k.$$

Si le point M' n'est pas singulier, c'est-à-dire si en ce point $\frac{dF}{dz_n}$ ne s'annule pas; nous pourrons poser

$$F = (z_n - H)\Theta.$$

H est une série développée suivant les puissances de

$$z_1 - z'_1, \quad z_2 - z'_2, \quad \ldots, \quad z_{n-1} - z'_{n-1},$$

et se réduit à z'_n quand tous les z_k deviennent égaux à z'_k.

Θ est une série développée suivant les puissances de

$$z_1 - z'_1, \quad z_2 - z'_2, \quad \ldots, \quad z_n - z'_n,$$

et ne s'annule pas quand tous les z_k deviennent égaux à z'_k.

Supposons maintenant que le point M' soit singulier; je suppose donc qu'en ce point $\frac{dF}{dz_n}$ s'annule, mais cependant que toutes les dérivées successives de F par rapport à z_n ne s'annulent pas à la fois. Par exemple, pour fixer les idées, je supposerai

$$\frac{dF}{dz_n} = \frac{d^2F}{dz_n^2} = 0, \qquad \frac{d^3F}{dz_n^3} \gtrless 0.$$

Alors nous pourrons poser

$$F = (z_n^3 + H_2 z_n^2 + H_1 z_n + H_0)\Theta.$$

Θ conserve la même signification. Les séries H_2, H_1, H_0 sont comme H développées suivant les puissances de

$$z_1 - z'_1, \quad z_2 - z'_2, \quad \ldots, \quad z_{n-1} - z'_{n-1}.$$

Quand tous les z_k deviennent égaux à z'_k, le polynôme

$$z_n^3 + H_2 z_n^2 + H_1 z_n + H_0$$

se réduit à

$$(z_n - z'_n)^3.$$

Tout cela résulte des théorèmes cités plus haut et qui se trouvent soit dans les œuvres de Weierstrass, soit au début de ma thèse.

Reste le cas où toutes les dérivées $\frac{d^kF}{dz_n^k}$ sont nulles à la fois. Mais ce cas se ramène au précédent. Il suffit de faire un changement linéaire de variables; et l'on peut toujours le faire de telle façon que toutes les dérivées de F par rapport à l'une des nouvelles variables ne s'annulent pas à la fois. Car nous ne supposons pas que F soit identiquement nul. Qu'on se reporte d'ailleurs au dernier des théorèmes de la partie citée de ma thèse.

Cela posé, plaçons-nous d'abord dans le premier cas : celui où

$$F = (z_n - H)\Theta.$$

Considérons le point de coordonnées courantes M dont les coordonnées sont les parties réelles et imaginaires de

$$z_1, \quad z_2, \quad \ldots, \quad z_n.$$

Considérons le point M'' dont les coordonnées sont les parties réelles et imaginaires de

$$z_1, \quad z_2, \quad \ldots, \quad z_{n-1}, \quad H(z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}).$$

La distance MM'' est précisément

$$|z_n - H|.$$

Nous aurons alors

$$V = \log|z_n - H| + \log|\Theta|;$$

le second terme est fini, le premier est négatif et très grand; il est égal à $\log MM''$.

Mais comme ε représente la plus courte distance de M à C et que M'' est sur C, on a

$$MM'' > \varepsilon,$$

et par conséquent

$$|\log MM''| < |\log \varepsilon|.$$

Donc V est de l'ordre de $\log \varepsilon$. C. Q. F. D.

Passons au second cas où

$$F = (z_n^3 + H_2 z_n^2 + H_1 z_n + H_0)\Theta.$$

Soient h_1, h_2, h_3 les trois racines de l'équation

$$z_n^3 + H_2 z_n^2 + H_1 z_n + H_0 = 0.$$

Soient M''_1, M''_2, M''_3 les trois points dont les coordonnées sont les parties réelles et imaginaires de

$$\begin{array}{lllll} z_1, & z_2, & \ldots, & z_{n-1}, & h_1, \\ z_1, & z_2, & \ldots, & z_{n-1}, & h_2, \\ z_1, & z_2, & \ldots, & z_{n-1}, & h_3. \end{array}$$

Ces trois points sont sur C et l'on aura

$$|z_n^3 + H_2 z_n^2 + H_1 z_n + H_0| = MM''_1 \times MM''_2 \times MM''_3$$

d'où

$$V = \log(MM''_1 . MM''_2 . MM''_3) + \log|\Theta|.$$

Le second terme est fini.

Quant au premier il est plus en valeur absolue que

$$3 \log \varepsilon;$$

car les points M''_1, M''_2, M''_3 étant sur C, on a

$$MM''_1 > \varepsilon, \qquad MM''_2 > \varepsilon, \qquad MM''_3 > \varepsilon.$$

Donc V est de l'ordre de $\log \varepsilon$. C. Q. F. D.

2° Les dérivées premières de V sont de l'ordre de $\frac{1}{\varepsilon}$.

Ces dérivées premières sont les parties réelles et imaginaires de

$$\frac{d \log F}{dz_1}, \quad \frac{d \log F}{dz_2}, \quad \ldots, \quad \frac{d \log F}{dz_n}.$$

Nous pouvons toujours supposer que toutes les dérivées successives de F par rapport à z_n ne s'annulent pas à la fois, non plus que toutes les dérivées par rapport à z_1, non plus que toutes les dérivées successives par rapport à z_2, etc.

Car, ainsi que je l'ai dit plus haut, s'il n'en était pas ainsi, on n'aurait qu'à faire un changement linéaire de variables.

Il suffira d'ailleurs de démontrer la proposition énoncée pour $\frac{d \log F}{dz_n}$; si l'on a

$$F = (z_n - H)\Theta,$$

il vient

$$\frac{d \log F}{dz_n} = \frac{1}{z_n - H} + \frac{d \log \Theta}{dz_n}.$$

Le second terme est fini et le premier a son module égal à $\frac{1}{MM'}$ et par conséquent plus petit que $\frac{1}{\varepsilon}$.

Si l'on a

$$F = (z_n^3 + H_2 z_n^2 + H_1 z_n + H_0)\Theta = (z_n - h_1)(z_n - h_2)(z_n - h_3)\Theta,$$

il vient

$$\frac{d \log F}{dz_n} = \frac{1}{z_n - h_1} + \frac{1}{z_n - h_2} + \frac{1}{z_n - h_3} + \frac{d \log \Theta}{dz_n}.$$

Le dernier terme est fini et les trois autres ont leurs modules égaux à

$$\frac{1}{MM''_1}, \quad \frac{1}{MM''_2}, \quad \frac{1}{MM''_3},$$

c'est-à-dire plus petits que $\frac{1}{\varepsilon}$.

Donc dans tous les cas le module de $\frac{d \log F}{dz_n}$ est de l'ordre de $\frac{1}{\varepsilon}$.

C. Q. F. D.

3° L'expression

$$E = \Sigma(x_k - x'_k)\frac{dV}{dx_k} + (y_k - y'_k)\frac{dV}{dy_k}$$

tend vers l'unité; quand le point M' dont les coordonnées sont x'_k et y'_k est sur la variété C; quand la distance de M' au point M dont les coordonnées sont x_k et y_k tend vers zéro; quand enfin la droite MM' est normale à la variété C.

Exprimons d'abord que la droite MM' est normale à la variété C. Nous aurons les équations suivantes :

$$\frac{z_1 - z'_1}{A_1^0} = \frac{z_2 - z'_2}{A_2^0} = \ldots = \frac{z_n - z'_n}{A_n^0} = \tau$$

qui correspondent aux équations (3) du paragraphe précédent.

Dans ces équations A_k^0 a la signification suivante. Soit A_k ce que devient $\frac{dF}{dz_k}$ quand on y remplace les z_k par z'_k; A_k^0 sera l'imaginaire conjuguée de A_k.

D'autre part E est la partie réelle de

$$J = \Sigma(z_k - z'_k)\frac{d \log F}{dz_k} = \frac{\tau}{F}\Sigma A_k^0 \frac{dF}{dz_k}.$$

La formule des accroissements finis nous donne ensuite

$$F = \Sigma B_k(z_k - z'_k),$$

B_k étant une quantité complexe dont la partie réelle est comprise entre celle de A_k et celle de $\frac{dF}{dz_k}$ et dont la partie imaginaire est comprise de même entre celles de A_k et de $\frac{dF}{dz_k}$. En effet F est nul pour $z_k = z'_k$ puisque le point M' est sur C.

Il vient alors

$$J = \frac{\tau}{\Sigma B_k(z_k - z'_k)}\Sigma A_k^0 \frac{dF}{dz_k} = \frac{\Sigma A_k^0 \frac{dF}{dz_k}}{\Sigma A_k^0 B_k}.$$

Quand la distance MM' tend vers zéro, $\frac{dF}{dz_k}$ et B_k tendent vers A_k et J tend vers 1.

Il en est donc de même de sa partie réelle E. C. Q. F. D.

Ainsi la troisième condition imposée à V dans le paragraphe précédent est remplie et la quantité ρ est égale à 1.

Donc

La fonction $\log|F|$ *est égale dans le domaine* G *à une fonction holomorphe et harmonique des* x *et des* y, *plus le potentiel de la variété attirante* C, *la densité de la matière attirante étant égale à* 1.

C'est là le théorème fondamental que je veux emprunter à la théorie du potentiel pour l'appliquer à la théorie des fonctions abéliennes.

La démonstration du paragraphe précédent peut être un peu modifiée en substituant à la variété-canal K, une autre variété peu différente qui a pour équation

$$|F| = \text{const.}$$

En effet résolvons l'équation

$$F(z_1, z_2, \ldots, z_n) = F$$

par rapport à z_n et supposons que l'on trouve ainsi

$$z_n = H(z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, F)$$

et faisons-y

$$F = |F|\, e^{i\theta}.$$

Soient H' et H'' les parties réelles et imaginaires de H de telle sorte que

$$x_n = H', \qquad y_n = H''.$$

Alors x_n et y_n vont se trouver exprimés en fonctions de

$$x_1, \quad y_1, \quad x_2, \quad y_2, \quad \ldots, \quad x_{n-1}, \quad y_{n-1}, \quad \theta,$$

de sorte que la quantité que nous avons appelée D_0^2 sera la somme des carrés des déterminants contenus dans la matrice

$$\begin{vmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\dfrac{dx_n}{dx_1} & \dfrac{dx_n}{dy_1} & \dfrac{dx_n}{dx_2} & \dfrac{dx_n}{dy_2} & \dfrac{dx_n}{d\theta} \\
\dfrac{dy_n}{dx_1} & \dfrac{dy_n}{dy_1} & \dfrac{dy_n}{dx_2} & \dfrac{dy_n}{dy_2} & \dfrac{dy_n}{d\theta}
\end{vmatrix}.$$

J'ai en écrivant cette matrice supposé $n = 3$ pour fixer les idées.

On en déduit

$$D_0^2=\sum\left(\frac{dx_n}{dx_k}\frac{dy_n}{d\theta}-\frac{dx_n}{d\theta}\frac{dy_n}{dx_k}\right)^2+\sum\left(\frac{dx_n}{dy_k}\frac{dy_n}{d\theta}-\frac{dy_n}{dy_k}\frac{dx_n}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dx_n}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy_n}{d\theta}\right)^2,$$

d'où

$$D_0^2=\left(1-\sum\left|\frac{dz_n}{dz_k}\right|^2\right)\left|\frac{dz_n}{dF}\right|^2|F'|^2.$$

D'autre part nous aurons

$$|F'|^2\left(\frac{dV}{d\nu}\right)^2=\sum\left|\frac{dF}{dz_k}\right|^2.$$

Mais pour comparer cette formule avec la précédente, il importe de remarquer que dans l'une d'elles nous faisons entrer les dérivées partielles

$$\frac{dz_n}{dF},\qquad\frac{dz_n}{dz_k}$$

en regardant z_n comme fonction de F et des z_K et dans l'autre les dérivées

$$\frac{dF}{dz_k},\qquad\frac{dF}{dz_n}$$

en regardant F comme fonction de $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Pour rendre les formules comparables, nous transformerons par les relations

$$\frac{dF}{dz_k}+\frac{dF}{dz_n}\frac{dz_n}{dz_k}=0;\qquad\frac{dF}{dz_n}\frac{dz_n}{dF}=1,$$

ce qui donne

$$D_0^2=\frac{|F'|^2}{\left|\dfrac{dF}{dz_n}\right|^4}\sum\left|\frac{dF}{dz_k}\right|^2.$$

Envisageons l'intégrale qui correspond à $\int_K$, à savoir

$$\int\left(U\frac{dV}{d\nu}-V\frac{dU}{d\nu}\right)D_0\,dx_1\,dy_1\,dx_2\,dy_2\ldots dx_{n-1}\,dy_{n-1}\,d\theta.$$

Entre quelles limites faut-il prendre cette intégrale? Pour nous en rendre compte, observons que le domaine G est arbitraire dans une très large mesure; nous pourrons le supposer défini par des inégalités de la forme suivante :

$$\alpha_1<x_1<\alpha'_1,\qquad\alpha_2<x_2<\alpha'_2,\qquad\ldots,\qquad\alpha_n<x_n<\alpha'_n;$$
$$\beta_1<y_1<\beta'_1,\qquad\beta_2<y_2<\beta'_2,\qquad\ldots,\qquad\beta_n<y_n<\beta'_n.$$

Nous pourrons toujours supposer que les constantes α et β ont été choisies de telle sorte que si l'une des quantités x_n ou y_n atteint l'une de ses limites α_n, α'_n, β_n ou β'_n; et que l'une des inégalités relatives à x_n ou à y_n soit remplacée par une égalité, le module $|F|$ restera supérieur à une certaine limite.

En effet donnons d'abord à $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ les valeurs

$$\alpha_1 + i\beta_1, \quad \alpha_2 + i\beta_2, \quad \ldots, \quad \alpha_{n-1} + i\beta_{n-1};$$

nous pourrons choisir α_n, β_n, α'_n et β'_n de telle sorte que si nous considérons dans le plan de la variable z_n le rectangle dont les côtés ont pour équations

$$x_n = \alpha_n, \qquad x_n = \alpha'_n, \qquad y_n = \beta_n, \qquad y_n = \beta'_n,$$

F ne s'annule pas sur le périmètre de ce rectangle et s'annule à l'intérieur de ce rectangle.

Si ensuite α'_k est assez voisin de α_k et β'_k assez voisin de β_k, F ne s'annulera pas non plus quand z_n décrira le périmètre de ce rectangle et quand en même temps x_k variera de α_k à α'_k et y_k de β_k à β'_k ($k = 1, 2, \ldots, n-1$). Ainsi se trouve justifiée l'hypothèse faite plus haut.

Dans ces conditions, les limites de l'intégration seront

$$\begin{array}{lll} \alpha_k \text{ et } \alpha'_k & \text{pour } x_k & \\ \beta_k \text{ et } \beta'_k & \text{pour } y_k & (k = 1, 2, \ldots, n-1), \\ 0 \text{ et } 2\pi & \text{pour } \theta, & \end{array}$$

pourvu que $|F|$ soit plus petit que le plus bas module que puisse atteindre F quand z_n décrit le périmètre du rectangle dont il vient d'être question.

Cela posé l'intégrale

$$\int \frac{dU}{d\nu} V D_n \, dx_1 \ldots dy_{n-1} \, d\theta$$

tend vers zéro quand $|F|$ tend vers zéro, et il nous suffira d'envisager l'intégrale

$$\int U \frac{dV}{d\nu} D_n \, dx_1 \ldots dy_{n-1} \, d\theta = \int \frac{U \sum \left| \frac{dF}{dz_k} \right|^2}{\left| \frac{dF}{dz_n} \right|^2} \, dx_1 \ldots dy_{n-1} \, d\theta.$$

Quand $|F|$ tend vers zéro, la variété $|F| = \text{const.}$ tend à se confondre avec C et la quantité sous le signe $\int$ tend vers la valeur qui correspond aux points de la variété C.

Elle devient donc indépendante de θ, et en intégrant d'abord par rapport à θ, notre intégrale devient

$$2\pi \int \frac{U \sum \left| \frac{dF}{dz_k} \right|^2}{\left| \frac{dF}{dz_n} \right|^2} dx_1 \ldots dy_{n-1}.$$

Comparons-la avec l'intégrale qui représente l'aire de C.

Il est aisé de voir que cette intégrale est égale à

$$\int \frac{\sum \left| \frac{dF}{dz_k} \right|^2}{\left| \frac{dF}{dz_n} \right|^2} dx_1 \ldots dy_{n-1} = \int d\omega.$$

Notre intégrale a donc pour limite

$$2\pi \int U \, d\omega = 2\pi \int \frac{d\omega}{r^{2n-2}},$$

ce qui représente au facteur 2π près, le potentiel de la variété attirante C.

C. Q. F. D.

L'avantage de cette façon de procéder, c'est qu'on évite les difficultés relatives aux petites portions de variété appelées k, k' et k'' dans le paragraphe précédent.

VIII. — Application aux fonctions Abéliennes.

Nous allons appliquer ce qui précède aux fonctions de n variables méromorphes et $2n$ fois périodiques.

Qu'est-ce d'abord qu'une fonction méromorphe ?

Voici les hypothèses que nous allons faire et que nous regardons comme constituant la définition d'une fonction méromorphe.

Il y aura dans l'espace à $2n$ dimensions une infinité de domaines G, distribués de telle façon que tout point de l'espace à $2n$ dimensions appartienne *au moins à un* de ces domaines.

Dans un domaine G, la fonction méromorphe pourra être représentée par le quotient de deux séries de puissances.

Je ne restreins pas la généralité en supposant que ces deux séries de puissances ne peuvent être l'une et l'autre divisibles par une troisième série de même forme s'annulant à l'intérieur de G.

Weierstrass a démontré en effet (*Œuvres complètes*, 2, p. 151) que si deux séries de puissances P_1 et P_2 s'annulent en un certain point M, on peut toujours trouver trois autres séries P_0, P'_1, P'_2 telles que l'on ait

$$P_1 = P_0 P'_1,$$
$$P_2 = P_0 P'_2,$$

et telles que les deux séries P'_1 et P'_2 n'admettent aucun diviseur commun s'annulant au point M.

Qu'arrive-t-il alors dans la partie commune à deux domaines G et G'?

Dans le domaine G, la fonction méromorphe F sera égale au quotient de deux séries $\frac{P}{Q}$; dans le domaine G' au quotient de deux séries $\frac{P'}{Q'}$; dans la partie commune on aura

$$\frac{P}{Q} = \frac{P'}{Q'}.$$

La variété $P = 0$ a $2n - 2$ dimensions; je dis que dans la partie commune à G et à G', elle ne diffère pas de la variété $P' = 0$.

Supposons en effet, qu'en un point de cette partie commune, on ait $P' = 0$ sans avoir $P = 0$; soit

$$z_1 = a_1, \qquad z_2 = a_2, \qquad \ldots, \qquad z_n = a_n,$$

ce point que j'appellerai M. Je pourrai toujours supposer qu'en ce point toutes les dérivées successives de P' par rapport à z_n ne s'annulent pas à la fois, sans quoi je ferais un changement linéaire de variables. Imaginons par exemple

$$\frac{dP'}{dz_n} = \frac{d^2P'}{dz_n^2} = 0, \qquad \frac{d^3P'}{dz_n^3} \gtrless 0.$$

Alors on aura

$$P' = [(z_n - a_n)^3 + H_1(z_n - a_n)^2 + H_2(z_n - a_n) + H_3]\Theta = H.\Theta,$$

où les H sont des séries ordonnées suivant les puissances de

$$z_1 - a_1, \quad z_2 - a_2, \quad \ldots, \quad z_{n-1} - a_{n-1},$$

et s'annulant pour $z_k = a_k$, et où Θ est une série ordonnée suivant les puissances des $z_k - a_k$ et ne s'annulant pas pour $z_k = a_k$.

Soit alors

$$H = (z_n - a_n - h_1)(z_n - a_n - h_2)(z_n - a_n - h_3);$$

h_1, h_2 et h_3 seront des fonctions de

$$z_1 - a_1, \quad z_2 - a_2, \quad \ldots, \quad z_{n-1} - a_{n-1}$$

s'annulant avec ces variables.

Quand on égalera z_n à $a_n + h_1$, $a_n + h_2$, $a_n + h_3$; P' sera nul et P ne sera pas nul, donc Q' devra s'annuler; donc Q' est divisible par H, ce qui est absurde puisque nous avons supposé que P' et Q' n'avaient pas de diviseur commun.

Donc les deux variétés $P = 0$, $P' = 0$ sont identiques.

Il en est évidemment de même des deux variétés $Q = 0$, $Q' = 0$.

J'appellerai C la variété $P = 0$; et C' la variété $Q = 0$; j'appellerai W l'intersection de ces deux variétés qui est elle-même une variété à $2n - 4$ dimensions.

Il importait de démontrer que la définition de la variété C ne dépendait pas de la façon dont F est mise sous la forme du quotient de deux séries, c'est-à-dire que les deux variétés $P = 0$ et $P' = 0$ sont identiques; je puis ainsi étendre nos variétés C et C' au delà du domaine G.

Supposons maintenant que notre fonction méromorphe F est $2n$ fois périodique. L'espace à $2n$ dimensions va se trouver partagé en une infinité de *prismatoïdes des périodes* dont le rôle est analogue à celui des parallélogrammes des périodes dans la théorie des fonctions elliptiques.

Soient

$$R_0, \quad R_1, \quad R_2, \quad \ldots, \quad R_k, \quad \ldots$$

ces prismatoïdes; l'ordre des indices est d'ailleurs arbitraire jusqu'à nouvel ordre.

Je désignerai par C_k, C'_k, W_k les portions de variétés C, C', W qui sont intérieures au prismatoïde R_k.

L'aire de C_k sera finie; ce sera une constante qui sera la même pour C_k que pour C_0; car la variété C_k n'est autre chose que la variété C_0 transportée parallèlement à elle-même. Soit A cette aire.

Soit $d\omega'$ un élément de l'aire de la variété C, M' son centre de gravité, $x'_1, y'_1, \ldots, x'_n, y'_n$ ses coordonnées. Soit M le point de coordonnées courantes, $x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n$ ses coordonnées. Soit r la distance MM'.

Considérons l'intégrale

$$V = \int \frac{d\omega'}{r^{2n-2}},$$

étendue à tous les éléments $d\omega'$ de la variété C_k (c'est-à-dire le potentiel de cette variété C_k).

Développons $\frac{1}{r^{2n-2}}$ suivant les puissances croissantes des x et des y, c'est-à-dire des coordonnées du point M, et écrivons

$$\frac{1}{r^{2n-2}} = U_0 + U_1 + U_2 + \ldots,$$

U_k étant un ensemble de termes homogènes de degré k par rapport aux x et aux y.

Supposons que les coordonnées x et y soient finies et les coordonnées x' et y' très grandes, de telle façon que

$$\rho = \sqrt{\Sigma x_k'^2 + \Sigma y_k'^2},$$

distance du point M' à l'origine, soit un infiniment grand du premier ordre.

Alors U_0 sera égal à

$$\frac{1}{\rho^{2n-2}}$$

et sera un infiniment petit d'ordre $2n-2$.

U_1 sera un infiniment petit d'ordre $2n-1$, U_2 d'ordre $2n$, etc.

Si nous posons

$$H = \frac{1}{r^{2n-2}} - U_0 - U_1 - U_2,$$

H sera un infiniment petit d'ordre $2n+1$.

Précisons davantage; je suppose que ρ_0 et ρ_1 soient deux constantes et que l'on ait

$$\Sigma x^2 + \Sigma y^2 < \rho_0^2 < \rho_1^2 < \Sigma x'^2 + \Sigma y'^2, \tag{2}$$

on pourra trouver une constante B telle que

$$H < \frac{B}{\rho^{2n+1}}.$$

Soit maintenant

$$S = \int d\omega\, (U_0 + U_1 + U_2),$$

l'intégration étant étendue à tous les éléments $d\omega'$ de la variété C_k; S_k sera un polynôme du second degré par rapport aux x et aux y. Ce polynôme sera harmonique, c'est-à-dire qu'on aura

$$\Delta S_k = 0;$$

car on a

$$\Delta \frac{1}{r^{2n-2}} = 0,$$

et par conséquent

$$\Delta U_0 = \Delta U_1 = \Delta U_2 = 0.$$

On a ensuite

$$V_k - S_k = \int H \, d\omega'.$$

Il est clair que si les inégalités (α) sont remplies, on aura

$$V_k - S_k < \frac{AB}{\sigma^{2n+1}},$$

la lettre σ désignant la plus petite valeur que puisse prendre ρ à l'intérieur du prismatoïde R_k.

Soit d'un autre côté T le volume d'un prismatoïde des périodes; ce volume est évidemment le même pour tous les prismatoïdes. Soit D la longueur de la plus grande diagonale de ce prismatoïde; cette longueur est aussi la même pour tous les prismatoïdes.

A l'intérieur du prismatoïde R_k, ρ sera compris entre σ et $\sigma + D$. L'intégrale $2n^{\text{ple}}$

$$\int \frac{dx'_1 \, dx'_2 \ldots dx'_n \, dy'_1 \ldots dy'_n}{(\rho - D)^{2n+1}} = \int \frac{d\tau}{(\rho - D)^{2n+1}}$$

étendue au prismatoïde R_k sera plus grande que $\frac{T}{\sigma^{2n+1}}$; je désigne pour abréger par $d\tau$ le produit des $2n$ différentielles dx' et dy'.

On aura donc

$$V_k - S_k < \frac{AB}{T} \int \frac{d\tau}{(\rho - D)^{2n+1}}.$$

Je dis que la série

$$\Sigma (V_k - S_k)$$

est absolument convergente. En effet, nous distinguerons parmi les prismatoïdes R_k :

1° ceux dont tous les points ne satisfont pas aux inégalités

$$\rho > \rho_1, \qquad \rho > \mathrm{D}.$$

Ceux-là sont en nombre fini et correspondent à un nombre fini de termes de la série.

2° ceux dont tous les points satisfont aux inégalités

$$\rho > \rho_1, \qquad \rho > \mathrm{D}.$$

La somme

$$\Sigma(\mathrm{V}_k - \mathrm{S}_k)$$

relative à ces prismatoïdes est plus petite que l'intégrale

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{T}} \int \frac{d\tau}{(\rho - \mathrm{D})^{2n+1}}$$

étendue à tous les éléments $d\tau$ de ces prismatoïdes; ou *a fortiori* plus petite que l'intégrale

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{T}} \int \frac{d\tau}{(\rho - \mathrm{D})^{2n+1}}$$

étendue à tous les éléments $d\tau$ de l'espace tels que

$$\rho > \rho_1, \qquad \rho > \mathrm{D};$$

je puis toujours supposer pour fixer les idées

$$\rho > \rho_1 > \mathrm{D}.$$

Or cette dernière intégrale est égale à l'intégrale simple

$$\frac{\mathrm{AB}\varpi}{\mathrm{T}} \int_{\rho_1}^{\infty} \frac{d\rho}{\rho^2},$$

ϖ étant une constante, et cette intégrale simple est finie.

Donc la série

$$\Sigma(\mathrm{V}_k - \mathrm{S}_k)$$

est absolument convergente. C. Q. F. D.

Cette série est évidemment égale à l'intégrale

$$\int \mathrm{H}\, d\omega'$$

étendue à tous les éléments $d\omega'$ de la variété C.

Je désigne par V la somme de cette série.

Voici les propriétés fondamentales de cette fonction V.

1° Elle est harmonique dans tout l'espace sauf pour les points de la variété C.

2° La différence $V - V_k$ est harmonique en tous les points du prismatoïde R_k.

3° Envisageons un domaine G, où l'on peut mettre F sous la forme $\frac{P}{Q}$ et qui fasse partie de R_k.

D'après le théorème fondamental du paragraphe précédent, la fonction

$$\log |P|$$

est, à l'intérieur de G, égale à

$$\varphi + \varphi',$$

φ étant une fonction holomorphe et harmonique des x et des y et φ' étant le potentiel d'une variété attirante qui est la partie de C intérieure à G; c'est-à-dire l'intégrale

$$\int \frac{d\omega'}{r^{2n-2}}$$

étendue à cette partie de C. Mais comme V_k est la même intégrale étendue à une partie de C plus étendue, à savoir à la partie de C qui est intérieure à R_k, la différence

$$V_k - \varphi'$$

sera une fonction holomorphe et harmonique dans G.

Donc la différence

$$V_k - \log |P|,$$

et par conséquent *la différence*

$$V - \log |P|$$

est dans tout le domaine G *une fonction holomorphe et harmonique des* x *et des* y.

4° La fonction $\log|P|$ est biharmonique.

Si donc je représente par

$$DV$$

l'une des expressions

$$\frac{d^2 V}{dx_k^2} + \frac{d^2 V}{dy_k^2}, \qquad \frac{d^2 V}{dx_k\, dx_q} + \frac{d^2 V}{dy_k\, dy_q}, \qquad \frac{d^2 V}{dx_k\, dy_q} - \frac{d^2 V}{dy_k\, dx_q},$$

on aura

$$D \log |P| = 0.$$

Or $V - \log|P|$ est une fonction holomorphe et harmonique; donc

$$D(V - \log|P|)$$

sera aussi une fonction holomorphe et harmonique, puisque

$$\Delta D(V - \log|P|) = D \Delta(V - \log|P|) = 0;$$

et puisque

$$D \log |P| = 0,$$

nous arrivons à cette conclusion que

DV *est une fonction holomorphe et harmonique dans tout l'espace.*

5° Qu'arrive-t-il quand les quantités $z_1, z_2, \ldots, z_n$ augmentent d'une période ?

Soit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ une période de telle façon que la fonction F ne change pas quand $z_1, z_2, \ldots, z_n$ se changent en

$$z_1 + \alpha_1, \quad z_2 + \alpha_2, \quad \ldots, \quad z_n + \alpha_n.$$

Je représenterai par

$$V(z_i + \alpha_i), \quad V_k(z_i + \alpha_i), \quad S_k(z_i + \alpha_i)$$

ce que deviennent V, V_k et S_k, c'est-à-dire $V(z_i)$, $V_k(z_i)$, $S_k(z_i)$ quand on change z_i en $z_i + \alpha_i$; nous aurons alors

$$V(z_i + \alpha_i) = \Sigma[V_k(z_i + \alpha_i) - S_k(z_i + \alpha_i)],$$

$$V(z_i) = \Sigma[V_k(z_i) - S_k(z_i)].$$

Quand z'_i se changera en $z'_i + \alpha_i$, le prismatoïde R_k se changera en un autre prismatoïde R_h; et comme la distance des points $z_i + \alpha_i$ et $z'_i + \alpha_i$ est égale à celle des points z_i et z'_i, nous aurons

$$V_k(z_i) = V_h(z_i + \alpha_i).$$

D'autre part nous pouvons remplacer l'équation

$$V(z_i + \alpha_i) = \Sigma[V_k(z_i + \alpha_i) - S_k(z_i + \alpha_i)],$$

par la suivante

$$V(z_i + a_i) = \Sigma[V_h(z_i + a_i) - S_h(z_i + a_i)].$$

Les deux séries ne diffèrent en effet que par l'ordre des termes; la première s'étend aux prismatoïdes R_k, c'est-à-dire à *tous* les prismatoïdes; la seconde aux prismatoïdes R_h, c'est-à-dire aussi à *tous* les prismatoïdes. Je puis écrire également

$$V(z_i + a_i) = \Sigma[V_k(z_i) - S_h(z_i + a_i)].$$

et par conséquent

$$V(z_i + a_i) - V(z_i) = \Sigma[S_k(z_i) - S_h(z_i + a_i)].$$

Tous les termes du second membre sont des polynômes du second degré par rapport aux x et aux y.

Donc quand les z augmentent d'une période, V augmente d'un polynôme qui est au plus du second degré.

Étudions les termes du second degré et cherchons par exemple le coefficient de $\frac{x_1^2}{2}$.

Dans $S_k(z_i)$ ce coefficient est égal à l'intégrale :

$$\int d\omega' \frac{d^2 \rho^{-2n+2}}{dx_1'^2} \qquad \text{où} \quad \rho^2 = \Sigma x_k'^2 + \Sigma y_k'^2;$$

l'intégration est étendue à tous les éléments $d\omega'$ de la partie de C qui est intérieure à R_k; j'appelle J_k cette intégrale.

Dans $S_h(z_i + a_i)$, le coefficient sera la même intégrale étendue à tous les éléments $d\omega'$ de la partie de C intérieure à R_h; c'est donc J_h.

Donc le coefficient cherché dans $V(z_i + a_i) - V(z_i)$ est la somme de la série

$$\Sigma(J_k - J_h).$$

Je dis que cette série est absolument convergente et a pour somme zéro. Elle est absolument convergente parce que son terme général est de l'ordre de

$$\rho^{-2n-1},$$

c'est-à-dire du même ordre que le terme général de la série $\Sigma(V_k - S_k)$ qui est convergente.

Pour évaluer la somme, groupons les termes d'une façon particulière.

Soit $R_k = R'_0$ un prismatoïde quelconque, $R_h = R'_1$ ce que devient R_k quand on change z'_i en $z'_i + \alpha_i$; soit plus généralement R'_n ce que devient $R_k = R'_0$ quand on change z'_i en $z'_i + n\alpha_i$, n étant un entier positif ou négatif.

Les prismatoïdes

$$\ldots,\quad R'_{-n},\quad \ldots,\quad R'_{-1},\quad R'_0,\quad R'_1,\quad R'_2,\quad \ldots,\quad R'_p,\quad \ldots$$

formeront ce que j'appellerai un groupe de prismatoïdes. Tout prismatoïde appartiendra à l'un de ces groupes et à un seul.

Nous aurons ainsi réparti en groupes les prismatoïdes et par conséquent les termes de la série.

Il me suffit de montrer que la somme des termes d'un groupe est nulle.

En effet, soit J'_n l'intégrale qui sera à R'_n ce que J_k est à R_k. Notre groupe de termes s'écrira

$$(J'_{-n} - J'_{-n+1}) + \ldots + (J'_{-1} - J'_0) + (J'_0 - J'_1) + (J'_1 - J'_2) + \ldots + (J'_p - J'_{p+1}).$$

La somme des termes sera

$$J'_{-n} - J'_{p+1},$$

en nous arrêtant au $n^{\text{ième}}$ terme dans un sens et au $p^{\text{ième}}$ dans l'autre. Quand n et p croîtront indéfiniment, J'_{-n} et J'_{p+1} tendront vers zéro.

Donc la somme cherchée est nulle. C. Q. F. D.

Donc le coefficient de $\frac{x_1^2}{2}$ est nul et l'on démontrerait de même que les autres termes du second degré sont nuls également.

Donc la différence $V(z_i + \alpha_i) - V(z_i)$ est un polynôme du premier degré seulement.

Donc quand les z augmentent d'une période, la fonction V augmente d'un polynôme du premier degré par rapport aux x et aux y.

On démontrerait de même :

1° Que l'intégrale

$$V' = \int H\, d\omega'$$

étendue à tous les éléments de la variété C' est finie.

2° Que la fonction V' est harmonique dans tout l'espace sauf sur la variété C'.

3° Que la différence

$$V' - \log|Q|$$

est dans tout le domaine G une fonction holomorphe et harmonique.

4° Que les expressions DV' sont harmoniques dans tout l'espace.

5° Que la fonction V' augmente d'un polynôme du premier degré par rapport aux x et aux y quand les z augmentent d'une période.

IX. — Introduction des fonctions Θ.

Nous venons de voir que les expressions DV sont des fonctions holomorphes et harmoniques dans tout l'espace.

D'autre part, nous avons trouvé

$$V(z_i + a_i) - V(z_i) = H,$$

H étant un polynôme du premier degré; on a donc

$$DV(z_i + a_i) - DV(z_i) = DH = 0$$

ou

$$DV(z_i + a_i) = DV(z_i),$$

ce qui montre que les DV sont des fonctions périodiques.

Les DV étant des fonctions à la fois harmoniques et périodiques se réduisent à des constantes (théorème 7).

Je dis maintenant que l'on peut toujours trouver un polynôme Z du second degré par rapport aux x et aux y et tel que les expressions DZ se réduisent à des constantes données.

Ce théorème peut encore s'énoncer d'une autre manière.

Reprenons les notations du paragraphe III et posons

$$x_k + iy_k = z_k, \qquad x_k - iy_k = u_k.$$

Je dis qu'on peut toujours trouver un polynôme Z du second degré par rapport aux z et aux u et tel que les n^2 quantités

$$\frac{d^2 Z}{dz_k\, du_q}$$

soient égales à n^2 constantes données $A_{k\,q}$.

L'identité des deux énoncés est manifeste et d'ailleurs le second énoncé est immédiatement évident puisqu'on n'a qu'à prendre

$$Z = \Sigma A_{k,q} z_k u_q.$$

Il résulte de là que nous pourrons toujours trouver un polynôme Z tel que les expressions DZ soient égales aux constantes DV.

On aura donc

$$D(V - Z) = 0,$$

c'est-à-dire que la fonction $V - Z$ est biharmonique dans tout l'espace sauf sur C.

D'autre part $\log|P|$ étant biharmonique, on a

$$D(V - Z - \log|P|) = 0,$$

et comme $V - Z - \log|P|$ est holomorphe et harmonique à l'intérieur de G, même sur C, nous pouvons conclure que

$$V - Z - \log|P|$$

est holomorphe et *biharmonique* à l'intérieur de G, même sur C. Enfin $V - Z$ augmente d'un polynôme du premier degré par rapport aux x et aux y, quand les z augmentent d'une période.

Les équations

$$D(V - Z) = 0$$

nous apprennent que l'expression

$$\sum \left[\frac{d(V - Z)}{dx_k} dy_k - \frac{d(V - Z)}{dy_k} dx_k \right]$$

est une différentielle exacte. Posons donc

$$T = \int \sum \left[\frac{d(V - Z)}{dx_k} dy_k - \frac{d(V - Z)}{dy_k} dx_k \right].$$

L'intégrale prise le long d'un contour fermé est nulle si ce contour ne tourne pas autour de C; elle n'est pas nulle en général, si le contour tourne autour de C.

Donc T est une fonction uniforme dans tout domaine simplement connexe ne contenant aucun point de C. Mais ce n'est plus une fonction uniforme dans un domaine traversé par C.

Considérons de même la fonction

$$\arg P = \int \sum \left[\frac{d \log |P|}{dx_k} dy_k - \frac{d \log |P|}{dy_k} dx_k \right],$$

c'est également une fonction uniforme dans tout domaine simplement connexe non traversé par C; et une fonction non uniforme dans un domaine traversé par C.

La différence

$$T - \arg P = \int \sum \left[\frac{d(V - Z - \log |P|)}{dx_k} dy_k - \frac{d(V - Z - \log |P|)}{dy_k} dx_k \right]$$

est une fonction uniforme dans tout le domaine G, quoique ce domaine soit traversé par C; et en effet $V - Z - \log |P|$ est biharmonique dans tout le domaine G.

La fonction

$$\varphi = V - Z + iT - \log P$$

a pour partie réelle

$$V - Z - \log |P|,$$

et pour partie imaginaire

$$T - \arg P.$$

C'est donc une fonction des n variables complexes

$$z_1, \quad z_2, \quad \ldots, \quad z_n,$$

et de plus cette fonction est holomorphe dans tout le domaine G.

Posons ensuite

$$e^{V - Z + iT} = \Theta(z_i),$$

il viendra

$$\Theta = P e^{\varphi}.$$

P et φ étant des fonctions holomorphes des n variables complexes z dans le domaine G, il en sera de même de Θ et comme tout point de l'espace fait partie d'un domaine tel que G :

La fonction Θ est une fonction des n variables complexes z holomorphe dans tout l'espace.

Nous avons trouvé plus haut

$$V(z_i + a_i) - V(z_i) = H.$$

H étant un polynôme du premier degré. D'autre part Z étant un polynôme du second degré, on aura

$$Z(z_i + a_i) - Z(z_i) = \Omega,$$

Ω étant un polynôme du premier degré; il vient alors

$$\begin{aligned}\frac{d}{dy_k}[T(z_i+a_i) - T(z_i)] &= \frac{d}{dx_k}[V(z_i+a_i) - V(z_i) - Z(z_i+a_i) + Z(z_i)]\\ &= \frac{d(H-\Omega)}{dx_k} = \text{const.},\end{aligned}$$

et de même

$$\frac{d}{dx_k}[T(z_i + a_i) - T(z_i)] = -\frac{d(H-\Omega)}{dy_k} = \text{const.}$$

Les dérivées de $T(z_i + a_i) - T(z_i)$ étant des constantes, on aura

$$T(z_i + a_i) - T(z_i) = \Psi,$$

Ψ étant encore un polynôme du premier degré. J'écris enfin

$$V(z_k + a_k) - Z(z_k + a_k) + iT(z_k + a_k) - V(z_k) + Z(z_k) - iT(z_k) = U,$$

U étant un polynôme du premier degré par rapport aux x et aux y.

Comme

$$\begin{gathered} V(z_k) - Z(z_k) + iT(z_k),\\ V(z_k + a_k) - Z(z_k + a_k) + iT(z_k + a_k)\end{gathered}$$

sont des fonctions des n variables complexes z, il en sera de même de U.

Donc U est un polynôme du premier degré par rapport aux n variables complexes z et l'on aura

$$\Theta(z_i + a_i) = \Theta(z_i)\,e^{U}. \tag{1}$$

Cette propriété rappelle la propriété fondamentale des fonctions Θ et il est aisé de voir comment les fonctions qui satisfont à la condition (1) se ramènent aux fonctions Θ ordinaires; je renverrai pour plus de détails à mon Mémoire sur les fonctions abéliennes inséré dans l'*American Journal of Mathematics* [1].

On démontrerait de même :

1° que les DV' sont des constantes;

---

[1] *Voir* ce Tome IV, p. 318.

2° qu'il existe un polynôme du second degré Z' tel que

$$DZ' = DV';$$

3° que si l'on pose

$$T' = \int \sum \left[\frac{d(V' - Z')}{dx_k} dy_k - \frac{d(V' - Z')}{dy_k} dx_k \right],$$

$$\Theta' = e^{V' - Z' + iT'};$$

la fonction Θ' est dans tout l'espace une fonction holomorphe des n variables complexes z.

4° enfin que

$$\Theta'(z_i + \omega_i) = \Theta'(z_i) e^{U'},$$

U' étant un polynôme du premier degré par rapport aux n variables complexes z.

Considérons maintenant le rapport

$$\frac{F\Theta'}{\Theta}$$

ou plutôt son logarithme

$$H = \log F + \log \Theta' - \log \Theta.$$

1° C'est une fonction des n variables complexes z.

2° Cette fonction H est holomorphe dans tout l'espace, et en effet, dans le domaine G, elle est égale à la différence de

$$V' - Z' + iT' - \log Q$$

et

$$V - Z + iT - \log P,$$

qui sont toutes deux holomorphes dans le domaine G.

3° Quand les z augmentent d'une période, cette fonction H augmente de

$$U' - U,$$

c'est-à-dire d'un polynôme du premier degré; les dérivées secondes de H sont donc périodiques et comme elles sont holomorphes dans tout l'espace, elles se réduisent à des constantes.

En d'autres termes, H est un polynôme du second degré.

On a donc finalement

$$F = \frac{\Theta}{\Theta} e^{H},$$

H étant un polynôme du second degré.

Cette formule démontre la possibilité de mettre F sous la forme du quotient de deux fonctions Θ ordinaires; il suffit pour s'en rendre compte d'appliquer les principes de mon Mémoire cité de l'*American Journal of Mathematics*.

LES

FONCTIONS ANALYTIQUES DE DEUX VARIABLES
ET LA REPRÉSENTATION CONFORME

Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, t. 23, p. 185-220 (1907)

I. — Énoncé du problème.

On sait que la théorie des fonctions analytiques d'une seule variable est intimement liée à celle de la représentation conforme, et quelle clarté cette considération de la représentation conforme a jetée sur les propriétés fondamentales des fonctions. Dans ces conditions, j'ai été tenté de rechercher s'il n'y aurait pas quelque chose d'analogue en ce qui concerne les fonctions de deux variables. Je n'ai obtenu, bien entendu, que des résultats partiels et fragmentaires, mais avant de les exposer, je voudrais rappeler en quelques mots les propositions fondamentales bien connues relatives aux fonctions d'une variable.

On peut se proposer deux problèmes distincts :

Soit $Z = X + iY$ une fonction analytique de $z = x + iy$. Soit dans le plan des z un *arc de courbe* l et sur cet arc un point m; soit dans le plan des Z un autre arc de courbe L et sur cet arc un point M. Est-il possible de déterminer la fonction analytique Z de telle façon qu'elle soit régulière dans le voisinage du point m; que Z soit au point M quand z est au point m et que Z décrive la courbe L quand z décrit la courbe l? Cela c'est le *problème local*, et l'on sait qu'il comporte une infinité de solutions.

Soit maintenant dans le plan des z une *courbe fermée* l limitant un certain domaine d; soit dans le plan des Z une courbe fermée L limitant un domaine D.

Est-il possible de déterminer la fonction analytique Z, de telle façon qu'elle soit régulière dans le domaine d, que Z parcoure la ligne L (ou le domaine D) quand z parcourt la ligne l (ou le domaine d)? Cela c'est le *problème étendu*; et le principe de Dirichlet nous apprend qu'il comporte une solution et une seule.

On peut se poser deux problèmes analogues en ce qui concerne les fonctions de deux variables. Soient $Z = X + iY$ et $Z' = X' + iY'$ deux fonctions analytiques des deux variables complexes $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$. Nous pouvons envisager l'espace à quatre dimensions des zz' et celui des ZZ'.

Soit alors dans l'espace zz' une portion de surface à 3 dimensions s et sur cette surface un point m. Soit dans l'espace des ZZ' une portion de surface à 3 dimensions S et sur cette surface un point M. Est-il possible de déterminer les fonctions Z et Z' de telle façon qu'elles soient régulières dans le voisinage du point m, que le point ZZ' soit en M quand le point zz' est en m et qu'il décrive S quand le point zz' décrit s? C'est le *problème local*.

Soit maintenant dans l'espace des zz' une surface *fermée* à 3 dimensions s limitant un domaine à 4 dimensions d. Soit dans l'espace ZZ' une surface fermée à 3 dimensions S limitant un domaine D. Est-il possible de déterminer les fonctions Z et Z' de telle façon qu'elles soient régulières dans le domaine d, que le point ZZ' parcoure S ou D quand le point zz' parcourt s ou d? C'est le *problème étendu*.

Dans le cas où ce problème étendu est susceptible d'une solution, on ne saurait dire, sans un abus de langage, que cette solution nous fournit la *représentation conforme* de d sur D. Ce mot de représentation conforme suppose en effet la conservation des angles. Nous dirons donc simplement que nous obtenons ainsi la représentation *régulière* de d sur D.

Une première remarque, presque évidente, c'est que le problème local ne comporte pas toujours une solution. En effet les fonctions X, Y, X', Y' doivent satisfaire aux équations différentielles

$$(1) \qquad \frac{dX}{dx} = \frac{dY}{dy}, \qquad \frac{dX}{dy} = -\frac{dY}{dx},$$

et à trois autres systèmes analogues que l'on déduit de (1) en accentuant, soit les lettres X et Y, soit les lettres x et y, soit les quatre lettres à la fois. Ces quatre systèmes réunis forment un système (1 *bis*). Soient alors

$$x = \varphi(y, x', y'), \qquad X = \Phi(Y, X', Y')$$

les équations des surfaces s et S. Supposons alors que le point zz' reste sur la surface s et exprimons tout en fonction de y, x', y'.

Désignons par des ∂ ronds les dérivées partielles prises par rapport à ces trois variables, x étant liée à ces trois variables par l'équation de la surface $x = \varphi$. Continuons à désigner par des d ordinaires les dérivées par rapport aux quatre variables supposées indépendantes. Nous aurons alors

$$(2)\qquad \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{dX}{dy} + \frac{dX}{dx}\frac{d\varphi}{dy},$$

plus onze autres équations que l'on déduira de (2) en changeant y en x' ou en y'; ou bien X, en Y, X' ou Y'. L'ensemble de ces douze équations formera le système (2 *bis*).

Si alors entre les huit équations (1 *bis*) et les douze équations (2 *bis*) on élimine les dérivées partielles $\frac{dX}{dx}$, $\frac{dX}{dy}$, etc., il restera quatre équations linéaires entre les douze dérivées partielles $\frac{\partial X}{\partial y}$, etc.; c'est ce que nous appellerons le système (3).

D'autre part, si le point ZZ' reste sur la surface S dont l'équation est $X = \Phi$, on aura

$$(4)\qquad \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{d\Phi}{dY}\frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{d\Phi}{dX'}\frac{\partial X'}{\partial y} + \frac{d\Phi}{dY'}\frac{\partial Y'}{\partial y},$$

avec deux autres équations déduites de (4) en changeant y en x' ou y' et qui avec (4) formeront le système (4 *bis*). On remplacera dans le système (3) les trois dérivées

$$\frac{\partial X}{\partial y},\qquad \frac{\partial X}{\partial x'},\qquad \frac{\partial X}{\partial y'},$$

par leurs valeurs données par le système (4 *bis*) et il restera quatre équations entre les trois fonctions inconnues Y, X', Y' et leurs dérivées partielles par rapport aux variables indépendantes y, x', y'. On aurait donc à trouver *trois* fonctions inconnues satisfaisant à *quatre* équations différentielles, ce qui en général est impossible.

II. — Principes de la classification des surfaces.

A ce point de vue, les surfaces s peuvent se répartir en plusieurs classes.

Il peut arriver qu'aucune transformation ne transforme s en elle-même. Je m'explique: les transformations que je vais envisager sont celles qui changent le point x, y, x', y' dans le point X, Y, X', Y' de telle façon que $X + iY$ et $X' + iY'$ soient fonctions analytiques de $x + iy$ et $x' + iy'$.

Ce sont les transformations que j'ai envisagées dans le paragraphe précédent, ce sont les seules que, sauf avis contraire, j'envisagerai désormais.

Qu'arrive-t-il alors si aucune transformation de cette forme ne transforme s en elle-même ? Il en résulte évidemment que si le *problème local* comporte une solution, il n'en comporte certainement qu'une. Car si deux transformations T et T_1 changeaient s en S, la transformation inverse T_1^{-1} changerait S en s, de sorte que la combinaison TT_1^{-1} changerait la surface s en elle-même.

Nous verrons plus loin comment on peut dans ce cas reconnaître si le problème local comporte une solution par des calculs qui peuvent être longs mais qui restent élémentaires.

Si au contraire il existe des transformations qui changent s en elle-même, le problème local ne saurait comporter une solution sans en comporter plusieurs.

Nous sommes ainsi conduits à étudier les transformations des surfaces s en elles-mêmes et à fonder sur ces transformations et les groupes qu'elles forment une classification de ces surfaces.

Nous nous attacherons surtout aux groupes continus formés de semblables transformations.

Soit s une surface quelconque; soit G le groupe de s, c'est-à-dire le groupe des transformations qui n'altèrent pas s; soit s' une autre surface, soit G' le groupe de s'.

Soient

$$T_1, \quad T_2, \quad \ldots$$

les diverses substitutions de G. Si le groupe G' est le transformé de G par une transformation U quelconque, c'est-à-dire si les diverses transformations de G' sont

$$U^{-1}T_1U, \quad U^{-1}T_2U, \quad \ldots,$$

nous dirons que G et G', ou bien encore que s et s' appartiennent à la même classe.

Pour que le problème local soit possible, il est évidemment nécessaire que s et S appartiennent à la même classe et par conséquent que leurs groupes soient isomorphes.

III. — Classification des groupes.

Je ne ferai pour le moment intervenir dans la classification des surfaces s que les transformations infinitésimales de ces surfaces en elles-mêmes ; de sorte que nous avons à rechercher les groupes *continus* G qui n'altèrent pas ces surfaces, et parmi ces groupes continus nous sommes d'abord amenés à distinguer les groupes continus *finis* et les groupes continus *infinis*.

Envisageons d'abord les groupes continus finis. Leurs substitutions doivent, comme nous l'avons dit, être de la forme suivante :

$$[z, z', z_0, z'_0 ; f(z, z'), f'(z, z'), f_0(z_0, z'_0), f'_0(z_0, z'_0)],$$

où z et z' sont les variables complexes $x+iy$ et $x'+iy'$, ou z_0 et z'_0 sont leurs imaginaires conjuguées $x-iy$ et $x'-iy'$, où $f(z, z')$, $f'(z, z')$ sont des fonctions analytiques de z et de z', et où $f_0(z_0, z'_0)$, $f'_0(z_0, z'_0)$ sont imaginaires conjuguées de $f(z, z')$, $f'(z, z')$. Si nous considérons le groupe formé par les substitutions

$$[z, z' ; f(z, z'), f'(z, z')]$$

en nous abstenant momentanément de considérer z_0 et z'_0, ce groupe est un groupe continu fini à deux variables.

Or on sait former tous les groupes continus finis à deux variables ; les méthodes de Lie permettent de le faire. Je me bornerai à renvoyer à Lie lui-même (¹) ou bien à Campbell (²).

On verra que ces groupes se ramènent à vingt-sept types dont les principaux sont le groupe linéaire général à deux variables et ses sous-groupes, le groupe des substitutions linéaires à une variable portant séparément sur z et sur z', le groupe

$$(q, xq, \ldots, x^r q, yq, p, xp, x^2 p + rxyq)$$

et leurs sous-groupes.

Toutefois ces groupes ne sont pas ainsi mis encore sous la forme qui nous

---

(¹) SOPHUS LIE, *Theorie der Transformationsgruppen*, III. Abschnitt, Abtheilung 1 et 2 (Leipzig, Teubner, 1893).

(²) CAMPBELL, *Introductory Treatise on Lie's Theorie of Finite Continuous Transformation Groups* (Oxford, Clarendon Press, 1903).

convient. En effet dans la théorie générale des groupes, on considère un groupe d'ordre r comme dérivé de r substitutions infinitésimales

$$\zeta_1, \quad \zeta_2, \quad \ldots, \quad \zeta_r,$$

et alors toutes les transformations infinitésimales du groupe sont de la forme

$$\alpha_1 \zeta_1 + \alpha_2 \zeta_2 + \ldots + \alpha_r \zeta_r,$$

où les coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ sont *réels* ou *imaginaires*.

Au contraire, dans des recherches comme celle-ci, il convient de définir un groupe dérivé de r substitutions infinitésimales

$$\zeta_1, \quad \zeta_2, \quad \ldots, \quad \zeta_r,$$

celui dont toutes les transformations infinitésimales sont de la forme

$$\alpha_1 \zeta_1 + \alpha_2 \zeta_2 + \ldots + \alpha_r \zeta_r,$$

les coefficients α étant tous réels.

Soit, pour prendre un exemple simple, le groupe dont toutes les transformations infinitésimales sont

$$(\alpha + i\beta)\frac{df}{dz} + (\alpha' + i\beta')\frac{df}{dz'},$$

$\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ étant quatre constantes réelles.

Au point de vue ordinaire, ce groupe est d'ordre 2 et dérive des deux substitutions fondamentales

$$\frac{df}{dz}, \quad \frac{df}{dz'}.$$

Au point de vue nouveau, il est d'ordre 4 et dérive des quatre substitutions fondamentales

$$\frac{df}{dz}, \qquad i\frac{df}{dz}, \qquad \frac{df}{dz'}, \qquad i\frac{df}{dz'}.$$

Pour bien faire comprendre ce qu'il y a à faire, j'opérerai sur le groupe linéaire général. Ce groupe dérive des huit substitutions fondamentales suivantes $\left(\text{j'écris partout } p \text{ et } p' \text{ au lieu de } \frac{df}{dz}, \frac{df}{dz'}\right)$:

$$A = p, \qquad A' = p'; \qquad B = zp, \qquad B' = z'p'; \qquad C = z'p, \qquad C' = zp';$$
$$D = z(zp + z'p'), \qquad D' = z'(zp + z'p').$$

avec les équations de structure

$$(A, B) = A, \quad (A', B') = A', \quad (A, C') = A', \quad (A', C) = A,$$
$$(A, D) = 2B - B', \quad (A', D') = 2B' - B, \quad (A, D') = C, \quad (A', D) = C',$$
$$(B, C) = -C, \quad (B', C') = C', \quad \ldots.$$

Au point de vue nouveau, nous devons regarder le groupe comme d'ordre 16 et comme dérivé des 16 substitutions

$$A, \quad A', \quad B, \quad B', \quad C, \quad C', \quad D, \quad D',$$
$$iA, \quad iA', \quad iB, \quad iB', \quad iC, \quad iC', \quad iD, \quad iD'.$$

Quant aux nouvelles équations de structure, elles se déduiront aisément des anciennes ; ainsi l'équation

$$(A, B) = A$$

nous donnera

$$(A, B) = A, \quad (iA, B) = iA, \quad (A, iB) = iA, \quad (iA, iB) = -A.$$

Le groupe linéaire étant ainsi envisagé comme d'ordre 16 et ses équations de structure étant formées, on aura à rechercher tous ses sous-groupes ; on sait qu'il y a des méthodes générales pour les former.

Je citerai seulement quelques exemples : nous pouvons prendre le groupe dérivé des huit substitutions

$$(1) \qquad e^{i\theta}A, \quad e^{i\theta'}A', \quad B, \quad B', \quad e^{i(\theta-\theta')}C, \quad e^{i(\theta'-\theta)}C', \quad e^{-i\theta}D, \quad e^{-i\theta'}D',$$

où θ et θ' sont des angles réels quelconques, ou bien encore

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} (\alpha C - \alpha' C'), \quad i(\alpha C + \alpha' C'), \quad iB, \quad iB', \quad (A + \alpha D), \\ \quad i(A - \alpha D), \quad (A' + \alpha' D'), \quad i(A' - \alpha' D'), \end{array} \right.$$

où α et α' sont des constantes quelconques, réelles ou complexes.

Quand on suppose en particulier $\theta = \theta'$, le groupe (1) se réduit au groupe *réel*

$$(3) \qquad A, \quad A', \quad B, \quad B', \quad C, \quad C', \quad D, \quad D' ;$$

quand on suppose $\alpha = \alpha' = -1$, le groupe (2) se réduit au groupe

$$(4) \quad (C - C'), \quad i(C + C'), \quad iB, \quad iB', \quad (A - D), \quad i(A + D), \quad (A' - D'), \quad i(A' + D')$$

qui est celui des transformations qui n'altèrent pas l'hypersphère

$$zz_0 - z'z'_0 = 1.$$

On peut se demander si ces groupes peuvent toujours se ramener aux *groupes réels* étudiés par Lie (*loc. cit.*, III. Abschnitt, p. 360 et suiv.). Nous remarquerons d'abord que tous les groupes (1) sont isomorphes et se ramènent au groupe réel (3) par un changement de variables, en posant

$$z = z_1 e^{i\theta}, \qquad z' = z'_1 e^{-i\theta}.$$

De même, tous les groupes (2) sont isomorphes et se ramènent au groupe (4) par un changement de variables, en posant

$$z = \sqrt{\gamma}\, z_1, \qquad z' = \sqrt{\alpha}\, z'_1.$$

Mais il n'y a pas moyen de ramener par un changement de variables analogues le groupe (4) au groupe (3). Le problème que nous nous proposons ici est donc plus général que celui qui a été résolu par Lie dans le Chapitre cité. Mais il présente avec lui une grande parenté et il peut être résolu par des procédés analogues sur lesquels nous n'insisterons pas ici.

Supposons donc que l'on ait formé par ces moyens un groupe g d'ordre r, dont toutes les transformations sont de la forme

$$[z, z';\ f(z, z'),\ f'(z, z')],$$

f et f' étant analytiques, et dont d'autre part chaque transformation finie est une puissance *réelle* d'une transformation infinitésimale, tandis que chaque transformation infinitésimale est une combinaison linéaire à coefficients *réels* de r transformations fondamentales.

Les considérations qui précèdent permettent de former tous les groupes g qui satisfont à ces conditions; quand on connaîtra l'un de ces groupes g on formera immédiatement le groupe G correspondant qui a pour transformations

$$[z, z', z_0, z'_0;\ f(z, z'),\ f'(z, z'),\ f_0(z_0, z'_0),\ f'_0(z_0, z'_0)].$$

Mais il n'est pas encore certain qu'à ce groupe G corresponde une classe de surfaces s et c'est ce qu'il nous reste à examiner.

Si le groupe G est d'ordre 1, il existe un système de lignes à une dimension qui sont inaltérées par le groupe, et qui sont définies par des équations différentielles. Toute surface à 3 dimensions engendrée par ces lignes est inaltérée par le groupe; de sorte qu'à ce groupe G correspondront une infinité de surfaces s dépendant d'une fonction arbitraire de deux variables.

Si le groupe G est d'ordre 2, il existe un système de surfaces à 2 dimensions qui sont inaltérées par le groupe et qui sont définies par des équations différentielles. Toute surface à 3 dimensions engendrée par ces surfaces à 2 dimensions est inaltérée par le groupe; de sorte qu'à ce groupe G correspondront une infinité de surfaces s dépendant d'une fonction arbitraire d'une seule variable.

Si le groupe G est d'ordre 3, il existe un système de surfaces à 3 dimensions qui sont inaltérées par le groupe et qui sont définies par des équations différentielles. A ce groupe G correspondent donc une infinité de surfaces s dépendant d'une constante arbitraire.

Si donc le groupe est d'ordre 3 au plus, il y a toujours une classe correspondante de surface s. Qu'arrive-t-il maintenant si le groupe est d'ordre plus élevé? Soient

$$X_1, \quad X_2, \quad \ldots, \quad X_r$$

les transformations infinitésimales du groupe; on aura

$$X_k = X_k \frac{df}{dz} + X'_k \frac{df}{dz'} + X_{0k} \frac{df}{dz_0} + X'_{0k} \frac{df}{dz'_0},$$

où X_k et X'_k sont des fonctions de z et z', tandis que X_{0k} et X'_{0k} sont les fonctions imaginaires conjuguées de z_0 et z'_0.

Si f est le premier membre de l'équation de la surface s, la fonction f doit satisfaire à l'équation aux dérivées partielles

$$Xf = 0,$$

sinon identiquement, du moins pour $f = 0$.

Formons donc un déterminant de quatre lignes

$$X_k, \quad X'_k, \quad X_{0k}, \quad X'_{0k},$$

k prenant quatre des r valeurs $1, 2, \ldots, r$. Plusieurs cas peuvent se présenter :

1° Ou bien tous les déterminants ainsi formés s'annulent identiquement; alors le groupe G n'est pas transitif, il existe une infinité de surfaces s, définies par des équations différentielles et dépendant d'une constante arbitraire, et qui ne sont pas altérées par le groupe.

C'est ce qui arrive par exemple pour le groupe dérivé de

$$\begin{aligned} iB &= zp - z_0 p_0, \\ iB' &= z'p' - z'_0 p'_0, \\ C - C' &= z'p - zp' - z'_0 p_0 - z_0 p'_0, \\ i(C + C') &= z'p + zp' - z'_0 p_0 - z_0 p'_0. \end{aligned}$$

J'ai écrit p, p_0, etc., au lieu de $\frac{df}{dz}$, $\frac{df}{dz_0}$, etc. Le groupe étant d'ordre 4, on n'a qu'un seul déterminant

$$\begin{vmatrix} z & 0 & z' & 0 \\ 0 & z & 0 & -z'_0 \\ z & z' & z_0 & -z'_0 \\ z' & z & -z_0 & -z_0 \end{vmatrix},$$

qui est identiquement nul, et l'on voit en effet que les surfaces

$$zz_0 - z'z'_0 = K,$$

où K est une constante arbitraire, ne sont pas altérées par le groupe.

2° Ou bien tous les déterminants ne s'annulent pas identiquement; mais ils s'annulent tous à la fois quand on a

$$F(z, z', z_0, z'_0) = 0. \tag{5}$$

L'équation (5) définit alors une surface à 3 dimensions. Cela nécessite quelques explications. Le premier membre de l'équation (5) est complexe, de sorte qu'il semblerait que cette équation équivaut à deux équations *réelles* entre x, y, x', y' qui définiraient une surface à 2 dimensions. Les équations de cette surface à 2 dimensions devraient alors s'écrire

$$\left\{ \begin{aligned} F(z, z', z_0, z'_0) &= 0, \\ F_0(z_0, z'_0, z, z') &= 0, \end{aligned} \right. \tag{5 bis}$$

F_0 étant ce que devient F quand on change i en $-i$ dans ses coefficients.

Mais on doit observer que X_{0k} et X'_{0k} sont imaginaires conjugués de X_k et X'_k. Donc quand on changera i, z, z', z_0, z'_0 en $-i$, z_0, z'_0, z, z', il arrivera que X_k et X_{0k} s'échangeront de même que X'_k et X'_{0k} et les déterminants ne changeront pas. On aura donc

$$F(z, z', z_0, z'_0) = F_0(z_0, z'_0, z, z'),$$

de sorte que les deux équations (5 *bis*) ne sont pas distinctes et définissent par conséquent une surface à 3 dimensions.

S'il existe une surface s inaltérée par le groupe, ce ne pourra être que la surface (5); je dis maintenant que cette surface (5) n'est effectivement pas altérée par le groupe. Soit en effet T une transformation quelconque du groupe; alors les substitutions infinitésimales

$$T^{-1}X_kT$$

seront les transformées par T des substitutions fondamentales A_k du groupe.

Si l'on forme un déterminant Δ avec quatre substitutions A_k comme on vient de l'expliquer, puis qu'on forme de la même manière un déterminant Δ' avec les quatre substitutions $T^{-1}A_kT$, ce déterminant Δ' sera le transformé de Δ par la transformation T.

F est par définition le plus grand commun diviseur des déterminants Δ; de même le plus grand commun diviseur des déterminants Δ' sera le transformé de F par T.

Mais comme T fait partie du groupe, les substitutions $T^{-1}A_kT$ sont des combinaisons linéaires à coefficients constants des A_k; les déterminants Δ' seront donc aussi des combinaisons linéaires des Δ; le plus grand commun diviseur des Δ' sera donc égal à celui des Δ à un facteur constant près. Donc F se reproduit à un facteur constant près quand on lui applique la transformation T. Donc la surface (5) n'est pas altérée par cette transformation.

C. Q. F. D.

C'est ce qui arrive par exemple pour le groupe (4) ou les fonctions qui jouent le rôle de X_k, etc., sont :

iB	z	0	$-z_0$	0
iB'	0	z'	0	$-z'_0$
$C - C'$	z	$-z$	z'_0	z_0
$i(C + C')$	z'	z	z'_0	$-z_0$
$A - D$	$1 - z^2$	$-zz'$	$1 - z_0^2$	$-z_0z'_0$
$i(A + D)$	$1 + z^2$	zz'	$1 + z_0^2$	$-z_0z'_0$
$A' - D'$	$-zz'$	$1 - z'^2$	$-z_0z'_0$	$1 - z_0'^2$
$i(A' + D')$	zz'	$1 + z'^2$	$z_0z'_0$	$-1 - z_0'^2$

En formant les déterminants Δ on voit qu'ils ont pour plus grand commun diviseur

$$zz_0 + z'z'_0 - 1.$$

Le groupe n'altère donc pas l'hypersphère

$$zz_0 + z'z'_0 = 1.$$

3° Ou bien les déterminants Δ sont premiers entre eux. Dans ce cas il n'y a pas de surface s inaltérée par le groupe G.

C'est ce qui arrive pour le groupe (3); nous voyons en effet que deux de nos déterminants Δ (obtenus respectivement avec les substitutions A, A', B, C ou A, A', B', C) s'écrivent

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ z & 0 & z_0 & 0 \\ 0 & z & 0 & z_0 \end{vmatrix} = (z - z_0)^2, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ z' & 0 & z'_0 & 0 \\ 0 & z' & 0 & z'_0 \end{vmatrix} = (z' - z'_0)^2,$$

et n'ont aucun commun diviseur; les déterminants ne peuvent s'annuler à la fois que si l'on a

$$z = z_0, \qquad z' = z'_0,$$

ce qui définit une surface à 2 et non pas à 3 dimensions.

Je terminerai en citant un exemple d'une classe de surfaces s où le groupe G est continu d'*ordre infini*. Soit en effet la surface

$$z = z_0.$$

Cette surface est évidemment inaltérée par le groupe

$$[z, z', z_0, z'_0; \varphi(z), f(z, z'), \varphi(z_0), f_0(z_0, z'_0)],$$

où φ est une fonction réelle arbitraire, f et f_0 deux fonctions complexes arbitraires, imaginaires conjuguées l'une de l'autre.

IV. — Définition des invariants.

Proposons-nous le problème suivant, analogue au problème local. Soit s une surface quelconque et m un point sur cette surface; soit S une autre surface et M un point sur cette surface. Peut-on trouver une transformation qui change s en S', S' ayant avec S au point M un contact du $n^{\text{ième}}$ ordre?

Nous pourrons, sans restreindre la généralité, supposer que m et M sont à l'origine des coordonnées. Nous mettrons alors l'équation de la surface S sous la forme

$$\text{(1)} \qquad F(X, Y, X', Y') = 0,$$

et nous supposerons F développé suivant les puissances de X, Y, X', Y'; nous avons besoin, pour notre objet, de connaître ce développement jusqu'aux termes du $n^{\text{ième}}$ ordre inclusivement, ce qui suppose

$$N = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{24} - 1$$

coefficients arbitraires, que nous appellerons les coefficients A; mais nous pouvons aussi, sans restreindre la généralité, supposer que F est de la forme

$$F = X - \Phi(Y, X', Y'),$$

et il ne reste plus alors que

$$N = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6} - 1$$

coefficients arbitraires réels que nous appellerons les coefficients A'.

L'équation de la surface S pourra se mettre sous la forme

$$(2) \qquad x = \varphi_1(u, v, w), \qquad y = \varphi_2(u, v, w), \qquad x' = \varphi_3(u, v, w), \qquad y' = \varphi_4(u, v, w),$$

φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 étant quatre fonctions réelles développables suivant les puissances de trois paramètres u, v, w; nous avons besoin de ce développement jusqu'aux termes du $n^{\text{ième}}$ ordre inclusivement, ce qui suppose 4N' coefficients arbitraires réels que nous appellerons les coefficients B.

Ici encore ce nombre peut être réduit : car nous pouvons, sans restreindre la généralité, supposer

$$y = u, \qquad x' = v, \qquad y' = w,$$

et il ne reste plus alors que N' coefficients arbitraires réels que j'appellerai les coefficients B'.

Enfin, les équations de la transformation peuvent s'écrire

$$(3) \qquad Z = \psi(z, z'), \qquad Z' = \psi_1(z, z'),$$

ψ et ψ_1 étant deux fonctions analytiques complexes développables suivant les puissances de z et de z' : nous avons besoin des termes jusqu'au $n^{\text{ième}}$ ordre, ce qui fait

$$2\left[\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1\right]$$

coefficients arbitraires complexes, ou, ce qui revient au même,

$$N = 2n^2 + 6n$$

coefficients arbitraires réels que nous appellerons les coefficients C.

Cela posé, nous pouvons dans les équations (3) séparer les parties réelles et imaginaires, ce qui nous donne

$$(4) \qquad X = \varphi_1, \qquad Y = \varphi_2, \qquad X' = \varphi_3, \qquad Y' = \varphi_4,$$

les φ étant des fonctions développées suivant les puissances de x, y, x', y'.

Si dans les équations (4) on remplace x, y, x', y' par leurs valeurs (2), on aura X, Y, X', Y' en fonctions de u, v, w, sous la forme

$$(5)\qquad X = \theta_1(u, v, w), \qquad Y = \theta_2(u, v, w), \qquad X' = \theta_3(u, v, w), \qquad Y' = \theta_4(u, v, w),$$

et ce seront les équations de la surface S'.

Pour exprimer que S et S' ont un contact du $n^{\text{ième}}$ ordre, substituons dans F, à la place de X, Y, X', Y' leurs valeurs (5); nous aurons F développé suivant les puissances de u, v, w : c'est ce que nous appellerons le développement (6). La condition à exprimer c'est que tous les termes de ce développement, jusqu'au $n^{\text{ième}}$ ordre inclusivement, sont nuls. Comme les termes de degré zéro sont nuls d'eux mêmes, cela fait N' coefficients qui doivent s'annuler. Et ces coefficients sont égaux à des polynômes entiers par rapport aux A, aux B et aux C et d'ailleurs linéaires et homogènes par rapport aux A.

Nous avons donc N' équations à satisfaire. Si nous considérons les A et les B (c'est-à-dire les deux surfaces s et S) comme donnés et les C (c'est-à-dire la transformation) comme inconnus, nous avons N'' inconnues. Pour $n < 9$, nous avons

$$N'' > N',$$

c'est-à-dire plus d'inconnues que d'équations. Pour $n \geqq 9$ nous avons

$$N'' < N',$$

c'est-à-dire plus d'équations que d'inconnues.

Le problème serait donc toujours possible pour $n < 9$ et généralement impossible pour $n \geqq 9$; mais il convient d'examiner la chose de plus près. Supposons que l'on élimine les C entre les N' relations, combien restera-t-il de relations distinctes entre les A et les B? Pour nous en rendre compte, nous allons procéder par différentiation. Supposons que l'on ait écrit les équations (1) et (2) sous la forme particulière où les A et B se réduisent aux A' et aux B'; ce qui, comme nous l'avons vu, ne restreint par la généralité. Nos relations seront satisfaites quand les deux surfaces s et S seront identiques et que la transformation se réduira à la transformation identique; c'est-à-dire quand chaque A sera égal au B' correspondant, quand chaque C se réduira à la valeur C_0 (C_0 étant égal suivant les cas à 0 ou à 1) qui correspond à la substitution identique. Donnons ensuite aux A' et aux C des accroissements infiniment petits, de telle sorte que l'on ait

$$A'_i = B'_i + \delta A'_i, \qquad C = C_0 + \delta C.$$

En différentiant nos N' équations, nous obtiendrons N' relations linéaires entre les N' différentielles $\partial A'$ et les N'' différentielles ∂C. Ces relations sont toutes distinctes, et en effet chacune d'elles ne contiendra que l'une des différentielles $\partial A'$, et cela avec le coefficient 1. Par exemple, celle d'entre elles que l'on obtiendra en égalant à zéro le cofficient de $u^2 vw$ du développement (6) ne contiendra que le $\partial A'$ du coefficient de $Y^2 X' Y'$ dans le développement (1).

Éliminons maintenant l'un des ∂C, que nous appellerons ∂C_1. Cette différentielle figurera dans l'une au moins de nos relations, sans quoi on pourrait satisfaire à nos relations en annulant tous les $\partial A'$ et sans annuler tous les ∂C; supposons donc que ∂C_1 figure dans la relation qui contient $\partial A'_1$; alors en retranchant cette relation de chacune des autres après l'avoir multipliée par un coefficient convenable, on éliminera ∂C_1 et il restera $N' - 1$ équations linéaires; elles seront toutes distinctes, car chacun des $\partial A'$ autres que $\partial A'_1$ figurera dans une de ces équations et dans une seule.

En y faisant $\partial A'_1 = 0$, nous aurons des équations de même forme sur lesquelles nous pourrons opérer comme sur les précédentes, en éliminant ∂C_2 et réduisant d'une unité le nombre des relations, à moins que l'on ne puisse y satisfaire en annulant tous les $\partial A'$, sans annuler tous les ∂C, et ainsi de suite.

On voit ainsi que le nombre cherché des relations distinctes est égal à

$$N - N + P,$$

P étant le nombre de manières de satisfaire aux équations données en annulant tous les $\partial A'$ sans annuler tous les ∂C.

Or toute solution de ces équations, où $\partial A' = 0$, et où par conséquent la surface S ne change pas, correspond à une transformation infinitésimale qui change S en elle-même, ou tout au moins en une surface présentant avec S un contact d'ordre n au point M.

Donc P n'est autre chose que l'ordre de ce groupe. Il ne faudrait pas croire que P est l'ordre du groupe G défini plus haut. En effet nous ne devons prendre parmi les substitutions du groupe que celles qui conservent le point M, ce qui réduit déjà l'ordre de trois unités. D'autre part, supposons par exemple que le point M soit l'origine, et que nous considérions un polynôme du $n^{\text{ième}}$ ordre en x, y, x', y', s'annulant à l'origine (c'est-à-dire en M); ce polynôme sera transformé en une série ordonnée suivant les puissances de x, y, x', y', et s'annulant à l'origine; *si dans cette série les termes d'ordre n et d'ordre plus petit sont identiques au polynôme primitif*, la transformation correspondante sera une de celles que Lie appelle dans son Chapitre 28 une *transformation d'ordre* $n+1$. Au point de vue qui nous occupe, elle correspondra à des δC nuls et devra être regardée comme une transformation identique. De ce fait encore l'ordre se trouve réduit. Ainsi P n'est pas égal à l'ordre r de G, mais c'est l'ordre du groupe formé par celles des transformations de G qui conservent l'origine M et qui sont au plus de l'ordre n au sens de Lie. On voit que pour n très grand, P se réduit à $r-3$.

Quoi qu'il en soit, le nombre de nos relations distinctes entre les A' et les B' est

$$N - N'' + P.$$

Ces relations expriment que les deux surfaces S et s peuvent être transformées de façon à être amenées à avoir un contact d'ordre n. Si s est donnée, il faut que les coefficients de S satisfassent à $N'-N''+P$ conditions, c'est-à-dire que $N'-N''+P$ fonctions de ces coefficients, *que nous appellerons les invariants du* $n^{\text{ième}}$ *ordre de notre surface* S, aient des valeurs convenables; je n'insiste pas sur les détails de la démonstration qui devrait être conduite comme dans tous les cas analogues.

Nous arrivons donc à la règle suivante qui nous fait voir l'importance de ces invariants : *pour que deux surfaces s et* S *puissent être transformées l'une de l'autre, il faut qu'aux points correspondants tous les invariants de tous les ordres des deux surfaces aient même valeur.*

V. — Étude de quelques cas simples.

Supposons d'abord que le groupe G se réduise à la substitution identique, c'est-à-dire que s et S ne soient inaltérées par aucune transformation; nous savons que si le problème local admet une solution, il n'en admet qu'une. Considérons un système quelconque d'invariants, trois au moins; soit m_1 un point de s. Pour savoir quel est le point M_1 de S qui peut correspondre à m_1, il faut chercher quel est le point de S qui a même invariants que m_1. Le point M_1 est déterminé par cette condition; de sorte que nous savons quel est le point de S qui *peut* correspondre à chacun des points de s; il reste à vérifier si la correspondance ainsi définie entre les points des deux surfaces, définit une transformation de la forme cherchée.

Supposons maintenant que le groupe G soit d'ordre 1; les points de S qui ont mêmes invariants que m_1 sont alors en nombre infini, ils forment une ligne sur S; si d'ailleurs la transformation de s en S est possible, elle l'est d'une infinité de manières, de sorte que n'importe quel point M_1 de la ligne L peut correspondre à m_1. Considérant donc un point m_1 quelconque de s, et la ligne L correspondante de S, nous choisirons *arbitrairement* sur cette ligne le point M_1 qui doit correspondre à m_1; la transformation, si elle existe, sera alors entièrement déterminée; comment verrons-nous alors quel est le point M_2 qui doit correspondre à un autre point m_2 de s? Supposons d'abord que les points m_1 et m_2 soient infiniment voisins; il doit en être de même pour M_1 et M_2. Si les points m_1 et M_1 sont donnés, la transformation, si elle existe, est entièrement déterminée, on peut développer $Z - Z_1$ et $Z' - Z'_1$ suivant les puissances de $z - z_1$ et $z' - z'_1$ (en supposant que l'on a $Z = Z_1$, $Z' = Z'_1$ au point M_1 et $z = z_1$, $z' = z_1$ au point m_1) et il est facile de calculer les premiers coefficients du développement en fonctions des coordonnées des points m_1 et M_1. Connaissant ces premiers coefficients nous saurons comment la grandeur et la direction du vecteur infiniment petit M_1M_2 dépend de celles du vecteur m_1m_2; le point m_2 étant donné, nous en déduirons donc le point M_2.

Si maintenant m_1 et m_2 ne sont pas infiniment voisins, joignons m_1 à m_2 par une ligne quelconque située sur s; il s'agit de déterminer la ligne correspondante sur S. Pour cela considérons un segment mm' de la ligne m_1m_2 et le segment correspondant MM' de la ligne M_1M_2. Soient x, y, x', y' les coordonnées de m; X, Y, X', Y' celles de M; soient $x + dx$, $y + dy$, $x' + dx'$, $y' + dy'$ celles de m'; $X + dX$, $Y + dY$, $X' + dX'$, $Y' + dY'$ celles de M'. D'après ce qui précède, nous avons une relation entre

$$\begin{gathered} x, \quad y, \quad x', \quad y', \quad X, \quad Y, \quad X', \quad Y'; \\ dx, \quad dy, \quad dx', \quad dy', \quad dX, \quad dY, \quad dX', \quad dY' \end{gathered}$$

et si la ligne m_1m_2 est donnée de façon que x, y, x', y', dx, dy, dx', dy' puissent être regardées comme des fonctions connues d'un paramètre unique t et de sa différentielle dt, cette relation nous fournira une équation différentielle entre

$$t, \quad X, \quad Y, \quad X', \quad Y', \quad \frac{dX}{dt}, \quad \frac{dY}{dt}, \quad \frac{dX'}{dt}, \quad \frac{dY'}{dt},$$

qui déterminera les fonctions inconnues X, Y, X', Y' en fonction de t et par conséquent la ligne M_1M_2.

On opérerait d'après les mêmes principes si le groupe G était d'ordre plus grand que 1. Nous examinerons plus loin avec plus de détails le cas du groupe (4) du paragraphe III.

Quelques mots encore au sujet de l'exemple cité plus haut, et où le groupe G est d'ordre infini. Supposons que la surface S se réduise au plan

$$X = 0.$$

A quelles conditions doit satisfaire la surface s pour que le problème local puisse être résolu? En tous les points de s, on a $X = 0$.

Soit $F(x, y, x', y') = 0$ l'équation de la surface s; on aura, en différentiant, cette équation

$$\frac{dF}{dx}dx + \frac{dF}{dy}dy + \frac{dF}{dx'}dx' + \frac{dF}{dy'}dy' = 0. \tag{1}$$

Mais comme cette équation de la surface s peut également s'écrire $X = 0$, nous aurons

$$\frac{dX}{dx}dx + \frac{dX}{dy}dy + \frac{dX}{dx'}dx' + \frac{dX}{dy'}dy' = 0.$$

Les quatre dérivées de X sont donc proportionnelles aux quatre dérivées de F, non pour tous les points de l'espace, mais pour tous les points de s.

Cela posé, considérons les équations

$$X = 0, \qquad Y = Y_0 \qquad (Y_0 \text{ étant une constante}).$$

Elles définiront une surface à 2 dimensions que j'appellerai $\sigma(Y_0)$ et qui sera tout entière sur s; je me propose de former l'équation différentielle de ces surfaces $\sigma(Y_0)$. Nous aurons

$$\frac{dY}{dx}dx + \frac{dY}{dy}dy + \frac{dY}{dx'}dx' + \frac{dY}{dy'}dy' = 0.$$

ou bien

$$\frac{dX}{dy}dx - \frac{dX}{dx}dy + \frac{dX}{dy'}dx' - \frac{dX}{dx'}dy' = 0.$$

ou sur s :

$$\frac{dF}{dy}dx - \frac{dF}{dx}dy + \frac{dF}{dy'}dx' - \frac{dF}{dx'}dy' = 0. \tag{2}$$

Nous avons ainsi trois équations entre x, y, x', y' et leurs différentielles. Ce sont les deux équations différentielles (1) et (2) et l'équation $F = 0$. Entre ces trois équations éliminons y' et dy', il restera une équation différentielle

$$(3) \qquad \xi\,dx - \eta\,dy + \xi'\,dx' = 0,$$

où ξ, η, ξ' sont des fonctions connues de x, y, x'.

L'équation (3) doit satisfaire à une condition d'intégrabilité, facile à former. Si cette condition n'est pas satisfaite, le problème local ne peut pas être résolu. Si au contraire elle est satisfaite, je dis qu'on aura une solution de ce problème. En effet, dès que l'équation (3) sera intégrée, on aura la valeur de X et celle de Y en tous les points de la surface s. Donnons à x' et à y' des valeurs quelconques x'_0 et y'_0 ; nous aurons alors la valeur de la fonction

$$Z = X + iY$$

en tous les points de la ligne l, intersection de la surface s avec le plan à 2 dimensions

$$x' = x'_0, \qquad y' = y'_0.$$

Or quand on connaît une fonction *analytique* d'une variable le long d'une ligne, on la connaît dans tout le plan. Nous connaîtrons donc la fonction Z pour toutes les valeurs de z, quand on aura $z' = x'_0 + iy'_0$, mais comme x'_0 et y'_0 ont des valeurs arbitraires quelconques, nous connaîtrons Z pour toutes les valeurs de z et de z'. Nous savons que Z est fonction analytique de z, c'est-à-dire que l'on a

$$\frac{dZ}{dz_0} = 0,$$

en supposant Z exprimé en fonction de $z = x + iy$, de $z_0 = x - iy$, de z' et de z'_0. Cette équation a lieu en tous les points de l'espace, et nous en déduisons

$$\frac{d^2Z}{dz_0\,dz'_0} = 0,$$

ce qui nous apprend que $\dfrac{dZ}{dz'_0}$ est fonction analytique de z. Il reste à montrer que Z est fonction analytique de z', ce qui s'exprimerait par la relation

$$\frac{dZ}{dz'_0} = 0.$$

La fonction $X + iY$ étant définie par l'équation (3), nous aurons, *non pas dans tout l'espace, mais en tous les points de s :*

$$
\begin{aligned}
\frac{dX}{dx} &= A\frac{dF}{dx}, & \frac{dY}{dx} &= B\frac{dF}{dx} - C\frac{dF}{dy},\\
\frac{dX}{dy} &= A\frac{dF}{dy}, & \frac{dY}{dy} &= B\frac{dF}{dy} - C\frac{dF}{dx},\\
\frac{dX}{dx'} &= A\frac{dF}{dx'}, & \frac{dY}{dx'} &= B\frac{dF}{dx'} - C\frac{dF}{dy'},\\
\frac{dX}{dy'} &= A\frac{dF}{dy'}, & \frac{dY}{dy'} &= B\frac{dF}{dy'} - C\frac{dF}{dx'},
\end{aligned}
$$

A, B, C étant des fonctions indéterminées.

Mais l'équation $\frac{dZ}{dz_0} = 0$ équivaut à

$$\frac{dX}{dx} = \frac{dY}{dy}, \qquad \frac{dX}{dy} = -\frac{dY}{dx}$$

ou

$$(A + C)\frac{dF}{dx} - B\frac{dF}{dy} = 0,$$

$$B\frac{dF}{dx} + (A - C)\frac{dF}{dy} = 0,$$

d'où

$$(A - C)^2 + B^2 = 0,$$

ou, puisque A, B et C sont essentiellement réels,

$$A + C = B = 0,$$

d'où

$$\frac{dX}{dx'} = \frac{dY}{dy'}, \qquad \frac{dX}{dy'} = -\frac{dY}{dx'},$$

ce qui équivaut à

$$\frac{dZ}{dz'} = 0,$$

équation qui est ainsi satisfaite en tous les points de s. Or nous avons vu que $\frac{dZ}{dz'}$ est une fonction analytique de z, et cette fonction étant nulle en tous les points de s devra être identiquement nulle. De sorte que l'équation $\frac{dZ}{dz'} = 0$ devra être satisfaite dans tout l'espace. C. Q. F. D.

On peut remarquer que l'équation (3) admet une infinité de solutions et que Y peut être remplacé par une fonction arbitraire *réelle* quelconque de Y.

Dans ces conditions, Z se trouve remplacé par une fonction arbitraire réelle quelconque de Z. Quant à la seconde fonction $Z' = X' + iY'$, elle peut évidemment, dans le cas qui nous occupe, être tout à fait quelconque.

VI. — Le problème mixte.

Nous allons introduire un problème nouveau que nous appellerons le *problème mixte* parce qu'il tient pour ainsi dire le milieu entre le problème local et le problème étendu.

Supposons que les surfaces s et S ne présentent pas de point singulier.

Supposons que le problème local puisse être résolu dans le voisinage de chacun des points m de la surface s. Si alors

$$\varphi(z, z', z_0, z'_0) = 0$$

est l'équation de la surface s et

$$\Phi(Z, Z', Z_0, Z'_0) = 0$$

celle de la surface S, on peut trouver des fonctions

$$Z = f(z, z'), \qquad Z' = f'(z, z'), \tag{1}$$

analytiques dans le voisinage du point m, et telle que l'on ait identiquement dans le voisinage de ce point m :

$$\Phi[f(z, z'), f'(z, z'), f_0(z_0, z'_0), f'_0(z_0, z'_0)] = \varphi(z, z', z_0, z'_0)\psi(z, z', z_0, z'_0), \tag{2}$$

ψ étant une fonction analytique de z, z', z_0, z'_0 dans le voisinage du point m.

Nous devrons supposer de plus que le déterminant fonctionnel

$$\frac{dZ}{dz}\frac{dZ'}{dz'} - \frac{dZ'}{dz}\frac{dZ}{dz'}$$

ne s'annule pas au point m, sans quoi, en résolvant les équations (1) on ne trouverait pas pour z et z' des fonctions analytiques de Z et de Z'. Il s'ensuit que la fonction ψ, qui est finie et analytique au point m, ne s'annule pas au point m.

Les fonctions f, f', ψ dépendant du point m, nous mettrons ce fait en évidence en posant

$$f(z, z') = Z(m); \quad f'(z, z') = Z'(m); \quad f_0(z_0, z'_0) = Z_0(m); \quad f'_0(z_0, z'_0) = Z'_0(m).$$

et en écrivant $\psi(m; z, z', z_0, z'_0)$, ou simplement $\psi(m)$, au lieu de $\psi(z, z', z_0, z'_0)$. Nous retenons donc que la fonction $\psi(m)$ est finie, analytique et différente de zéro dans le voisinage de m.

D'autre part il peut se faire que le problème local admette plusieurs solutions ou une infinité de solutions. C'est même seulement dans ce cas que la question dont nous allons nous occuper peut présenter de l'intérêt. S'il en est ainsi, nous désignerons par $Z(m)$, $Z'(m)$, l'une des solutions du problème local au point m et nous choisirons cette solution arbitrairement, mais une fois pour toutes.

Nous devons nous demander maintenant s'il existe des fonctions

$$f(z, z'), \quad f'(z, z')$$

qui restent analytiques en tous les points de s et telles que l'on ait une identité de la forme (2) où la fonction ψ reste analytique, finie, et différente de zéro en tous les points de s. C'est là ce que nous appellerons le *problème mixte*.

Nous supposerons que les deux surfaces s et S sont continues au point de vue analytique, de telle sorte que les fonctions φ et Φ soient analytiques pour toutes les valeurs des variables que nous avons à envisager.

Si le problème local n'admettait qu'une seule solution, c'est-à-dire si la surface s n'admettait aucune transformation en elle-même, le problème mixte doit évidemment être résolu par l'affirmative. Soient en effet $Z(m)$ et $Z'(m)$ les fonctions relatives à un point m de s; soient $Z(m')$, $Z'(m')$ celles qui sont relatives à un autre point m' de s, et qui existent d'après nos hypothèses. Ces fonctions substituées à la place de $f(z, z')$, $f'(z, z')$ satisfont à la condition (2); il doit en être de même, par continuité analytique, des fonctions qui sont la continuation analytique de $Z(m)$, $Z'(m)$. Or si le problème local n'admet qu'une solution, ces deux solutions doivent être identiques, d'où il suit que $Z(m')$, $Z'(m')$ ne peuvent être autre chose que la continuation analytique de $Z(m)$, $Z'(m)$.

Comme nous supposons que le problème local admet une solution en tous les points de s, nous savons que les fonctions $Z(m')$, $Z'(m')$ sont analytiques et ne présentent aucune singularité dans le voisinage du point m'. Donc on peut poursuivre la continuation analytique de $Z(m)$, $Z'(m)$ sur toute la surface s sans rencontrer aucune singularité. Ces fonctions avec leur continuation analytique nous donnent donc la solution du problème mixte.

Mais il n'en est plus de même si la surface s admet des transformations en elle-même, la solution du problème n'étant plus unique; nous savons bien que $Z(m')$, $Z'(m')$ n'ont pas de singularité près de m', nous savons bien que l'on peut poursuivre par continuation analytique les fonctions $Z(m)$, $Z'(m)$; mais nous ne savons plus si $Z(m')$, $Z'(m')$ sont les continuations analytiques de $Z(m)$, $Z'(m)$. La question est donc de savoir si ces continuations analytiques de $Z(m)$, $Z'(m)$ [nous dirons simplement désormais si *les fonctions* $Z(m)$ et $Z'(m)$] peuvent présenter des singularités sur la surface s.

Il s'agit de savoir quelles peuvent être ces singularités. A cet effet, nous remarquerons que si nous posons

$$Z(m) = F[Z(m'), Z'(m')], \qquad Z'(m) = F'[Z(m'), Z'(m')],$$

la substitution

$$\left| Z, Z', Z_0, Z'_0 ; F[Z, Z'], F'[Z, Z'], F_0[Z_0, Z'_0], F'_0[Z_0, Z'_0] \right|$$

sera une substitution du groupe fondamental G relatif à la surface S. D'ailleurs, si $Z(m)$, $Z'(m)$, considérées comme fonctions de z et de z', présentent une singularité dans le voisinage du point m'; comme d'autre part dans le voisinage de ce point $Z(m')$, $Z'(m')$ sont des fonctions analytiques régulières de z et de z' et que réciproquement z et z' sont des fonctions analytiques régulières de $Z(m')$, $Z'(m')$, il faudra bien que les fonctions

$$F(Z, Z'), \qquad F'(Z, Z')$$

[c'est-à-dire $Z(m)$, $Z'(m)$ considérées comme fonctions de $Z(m')$, $Z'(m')$] présentent une singularité. Nous sommes donc encore ramenés à l'étude du groupe fondamental G de la surface S.

Nous pouvons déjà tirer de là la conclusion suivante. Supposons que pour aucune des substitutions du groupe G, les fonctions

$$F(Z, Z'), \qquad F'(Z, Z')$$

ne présentent aucune singularité en aucun point de la surface S. C'est ce qui arrivera dans un très grand nombre de cas et qui sont précisément les plus importants. Nous verrons en particulier que c'est ce qui arrive si la surface S est une hypersphère. C'est là ce que nous appellerons la condition A.

Il arrivera alors que les fonctions $Z(m)$, $Z'(m)$ peuvent être prolongées analytiquement sur toute la surface s sans présenter aucune singularité en aucun point de cette surface. Il reste à montrer que ces fonctions sont uniformes. C'est ce qui arrivera *si nous supposons de plus que la surface s est simplement connexe;* dans ce cas, en effet, si la fonction $Z(m)$ n'était pas uniforme, deux de ses déterminations ne pourraient s'échanger qu'en tournant autour d'un point singulier et nous avons vu qu'il n'y en avait pas.

Donc, pour les surfaces simplement connexes qui satisferont à la condition A, toutes les fois que le problème local pourra être résolu en chaque point de la surface, le problème mixte admettra une solution.

Je n'ai pas l'intention de pousser jusqu'au bout la discussion de la condition A. Je me bornerai à quelques remarques :

1° Je suppose que les fonctions $Z(m)$, $Z'(m)$ puissent être définies de façon à être des fonctions continues du point m. En d'autres termes nous savons que le problème local admet une solution autour de chaque point de s; et je suppose de plus que les deux solutions de ce problème qui correspondent à deux points infiniment voisins soient infiniment peu différentes l'une de l'autre. Soit encore

$$Z(m') = F[Z(m), Z'(m)], \qquad Z'(m') = F'[Z(m), Z'(m)].$$

Nous avons vu que la substitution définie par les deux fonctions F et F' appartient au groupe G de S; mais nous devons distinguer dans ce groupe les transformations infinitésimales et leurs combinaisons qui forment un groupe *continu* G_0 faisant partie de G.

Je dis qu'avec notre nouvelle hypothèse, la substitution F, F' fait partie non seulement de G, mais de G_0. Et en effet cette substitution peut être désignée par (m, m') puisqu'elle dépend, d'après sa définition, des deux points m et m'.

Joignons m et m' par un arc de courbe quelconque situé sur s et décomposons cet arc en une infinité d'arcs infiniment petits

$$mm_1, \quad m_1m_2, \quad \ldots, \quad m_{q-1}m_q, \quad m_qm'.$$

Alors la substitution (m, m') pourra être regardée comme la combinaison des substitutions

$$(m, m_1), (m_1, m_2), \quad \ldots, \quad (m_{q-1}, m_q), \quad (m_q, m'),$$

qui sont infinitésimales. Elle appartient donc à G_0. Il suffit donc alors que la condition A soit remplie par toutes les transformations de G_0.

2° Je suppose que la condition A soit remplie par toutes les transformations *infinitésimales* de G, je dis qu'elle le sera encore pour toutes les transformations *finies* de G_0. Et en effet si elle l'est pour deux transformations, elle le sera également par leurs produits. Le théorème de Cauchy sur l'intégrabilité des équations différentielles permet de compléter aisément la démonstration.

3° Il est aisé de voir que les substitutions de G ne peuvent jamais présenter certains genres de singularité; par exemple elles n'auront jamais de pôle si la surface S est tout entière à distance finie; car, le point

$$Z(m), \quad Z'(m), \quad Z_0(m), \quad Z'_0(m)$$

devant se trouver sur la surface S, ses coordonnées ne pourront devenir infinies.

4° Elles ne pourront pas non plus, au moins dans des cas très étendus, présenter de points de ramification algébrique, mais ceci exige plus d'attention. Pour pouvoir l'exposer plus facilement, je vais changer pour un instant de notation et écrire : x_1 et y_1 au lieu de $Z(m')$, $Z'(m')$; et x et y au lieu de $Z(m)$, $Z'(m)$. Alors on aura

$$x = F(x_1, y_1), \qquad y = F'(x_1, y_1),$$

d'où l'on tirera

$$x_1 = \theta(x, y), \qquad y_1 = \theta'(x, y);$$

et pour l'équation de la surface S

$$\Phi(x, y, x_0, y_0) = 0.$$

Je poserai ensuite

$$x_2 = \theta(x_1, y_1), \qquad y_2 = \theta'(x_1, y_1),$$
$$x_3 = \theta(x_2, y_2), \qquad y_3 = \theta'(x_2, y_2),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\Phi_n = \Phi(x_n, y_n, x_n^0, y_n^0),$$

x_n^0 et y_n^0 étant les imaginaires conjuguées de x_n et y_n. On aura alors l'identité

$$\Phi_1 = \Phi\psi(x, y, x_0, y_0),$$

ψ étant une fonction régulière et différente de zéro au point considéré.

Soient a, b les valeurs de $Z(m)$, $Z'(m)$ qui correspondent au point m' de la surface s; soient a_1, b_1 les valeurs de $Z(m')$, $Z'(m')$ qui correspondent à ce même point m'. Ce que nous appelons le *point considéré* c'est le point $x = a$, $y = b$, $x_1 = a_1$, $y_1 = b_1$.

Dans des cas très étendus, le groupe G relatif à la surface S comprendra une substitution

$$T = (Z, Z', Z_0, Z'_0; Z_1, Z'_1, Z_1^0, Z_1'^0),$$

qui, changeant la surface S en elle-même, changera le point $Z = a$, $Z' = b$, en $Z_1 = a_1$, $Z'_1 = b_1$; et de telle façon que dans le voisinage de $Z = a$, $Z' = b$, les fonctions Z_1, Z'_1 soient analytiques en Z et Z' et, réciproquement, que dans le voisinage de $Z_1 = a_1$, $Z'_1 = b_1$, les fonctions Z, Z' soient analytiques en Z_1 et Z'_1. Si cette condition est remplie nous pourrons toujours supposer que

$$a = a_1, \qquad b = b_1.$$

Si en effet il n'en était pas ainsi, nous pourrions appliquer à $Z(m')$, $Z'(m')$ la substitution inverse de T et nous obtiendrions de nouvelles fonctions $Y(m')$, $Y'(m')$, telles que l'on ait

$$Y(m') = a, \qquad Y'(m') = b$$

pour

$$Z(m') = a_1, \qquad Z'(m') = b_1,$$

c'est-à-dire pour

$$Z(m) = a, \qquad Z'(m) = b,$$

tandis que $Z(m)$, $Z'(m)$, considérées comme fonctions de $Y(m')$, $Y'(m')$, présenteraient un point de ramification.

Nous pourrons alors, sans restreindre la généralité, supposer

$$a = b = a_1 = b_1 = 0.$$

S'il en est ainsi, les fonctions $F(x_1, y_1)$, $F'(x_1, y_1)$ s'annulent et présentent un point de ramification pour $x_1 = y_1 = 0$. Si nous envisageons les fonctions inverses

$$x_1 = \theta(x, y), \qquad y_1 = \theta'(x, y),$$

ces fonctions seront développables suivant les puissances de x et de y. Pour $x = y = 0$ elles s'annuleront *ainsi que le déterminant fonctionnel*

$$\Delta = \frac{dx_1}{dx}\frac{dy_1}{dy} - \frac{dx_1}{dy}\frac{dy_1}{dx} = \frac{\partial(x_1, y_1)}{\partial(x, y)}.$$

Cela posé, nous aurons successivement

$$\Phi_1 = \Phi\psi, \qquad \Phi_2 = \Phi_1\psi_1, \qquad \ldots, \qquad \Phi_{n+1} = \Phi_n\psi_n.$$

où l'on a posé pour abréger

$$\psi_n = \psi(x_n, y_n, x_n^0, y_n^0).$$

Cela nous permet d'écrire

$$\Phi_n = \Phi H_n,$$

où

$$H_1 = \psi, \qquad H_2 = \psi\psi_1, \qquad \ldots, \qquad H_n = \psi\psi_1\ldots\psi_{n-1}.$$

La fonction ψ ne s'annulant pas à l'origine par hypothèse, il en est de même de ψ_n et par conséquent de H_n.

Soit

$$\Delta_n = \frac{d(x_n, y_n)}{d(x, y)} = \frac{d(x_n, y_n)}{d(x_{n-1}, y_{n-1})} \cdots \frac{d(x_2, y_2)}{d(x_1, y_1)} \frac{d(x_1, y_1)}{d(x, y)}.$$

Il est clair que Δ_n présente un zéro d'ordre n pour $x = y = 0$.

Nous pouvons toujours supposer

$$x_1 = \alpha x + \theta_2, \qquad y_1 = \theta'_2,$$

θ_2 et θ'_2 étant des séries développées suivant les puissances de x et de y et commençant par des termes du second degré. Car on peut toujours ramener les fonctions θ et θ' à cette forme par un changement linéaire de variables. Mais nous allons faire d'abord une hypothèse de plus; nous allons supposer que x_1 et par conséquent x_n est fonction seulement de x. On a alors

$$\Delta_n = \frac{dx_n}{dx} \frac{dy_n}{dy};$$

et comme pour $x = y = 0$ on a $\frac{dx_n}{dx} = \alpha^n$, on voit que $\frac{dy_n}{dy}$ doit présenter un zéro d'ordre n. Il vient alors en différentiant $\Phi_n = \Phi H_n$

$$\frac{d\Phi_n}{dy_n} \frac{dy_n}{dy} = H_n \frac{d\Phi}{dy} + \Phi \frac{dH_n}{dy}.$$

Le premier membre présente un zéro d'ordre n, et H_n ne s'annule pas. Il faut donc que l'équation $\Phi = 0$ entraîne $\frac{d\Phi}{dy} = 0$ aux quantités près d'ordre n en x, y, x_0, y_0; c'est-à-dire que les deux surfaces

$$\Phi = 0, \qquad \frac{d\Phi}{dy} = 0$$

présentent un contact d'ordre n. Comme on peut prendre l'entier n aussi grand que l'on veut, on doit conclure que l'équation $\Phi = 0$ entraîne $\frac{d\Phi}{dy} = 0$. Pour la même raison, elle doit entraîner $\frac{d\Phi}{dy_0} = 0$.

Mais cela n'est possible que si l'on a

$$\Phi = f(x, x_0) f_1(x, y, x_0, y_0),$$

f_1 ne s'annulant pas pour $x = y = x_0 = y_0 = 0$; c'est-à-dire si l'équation de la surface S se réduit à

$$f(x, x_0) = 0.$$

C'est là une forme d'équation très particulière et admettant un groupe G continu d'ordre infini.

Seulement nous avons fait au début une hypothèse très particulière, à savoir que x_1 est fonction de x seulement et il reste à faire voir que l'on peut toujours, par un changement de variables convenable, ramener au cas où cette hypothèse est vérifiée.

Je veux montrer qu'il existe une fonction $\xi(x, y)$ développable suivant les puissances de x et y, et telle que l'on ait identiquement

$$\xi(x_1, y_1) = F[\xi(x, y)],$$

F étant développable suivant les puissances de ξ. Posons

$$\xi(x, y) = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \ldots,$$
$$F = \beta_1 \xi + \beta_2 \xi^2 + \beta_3 \xi^3 + \ldots,$$

ξ_n étant homogène de degré n en x et y. Nous aurons d'abord

$$\xi_1 = x, \qquad \beta_1 = \alpha.$$

Nous déterminerons ensuite par approximations successives ξ_2 et β_2, puis ξ_3 et β_3, etc. Pour déterminer ξ_n et β_n nous aurons une identité de la forme

$$\xi_n(\alpha x, 0) = \alpha \xi_n(x, y) + \beta_n x^n + \text{termes connus}$$

et l'on pourra déterminer ξ_n et β_n sans difficulté. On pourrait même supposer $\beta_n = 0$ à moins que l'on n'ait

$$\alpha^{n-1} = 1.$$

Quant à la convergence des séries, on l'établirait par la méthode des fonctions majorantes.

On pourrait alors prendre pour variables nouvelles ξ et y au lieu de x et y et recommencer le raisonnement précédent. On verrait ainsi que l'équation de S doit être de la forme

$$f[\xi(x, y), \xi_0(x_0, y_0)] = 0.$$

5° Comme les deux surfaces s et S jouent un rôle identique, il est clair qu'au lieu d'envisager le groupe G de la surface S, on aurait pu tout aussi bien envisager le groupe g de la surface s.

VII. — Transformations de l'hypersphère.

Je suppose que la surface s soit *l'hypersphère*

$$(1) \qquad zz_0 + z'z'_0 = 1,$$

et je me propose de déterminer le groupe G correspondant. J'observe d'abord que cette hypersphère se change en elle-même par les substitutions linéaires

$$(2) \qquad \left(z, z'; \frac{az + bz' + c}{a''z + b''z' + c''}, \frac{a'z + b'z' + c'}{a''z + b''z' + c''}\right),$$

pourvu que les coefficients $a, b, \ldots$ satisfassent aux conditions

$$(3) \qquad \begin{cases} aa_0 + a'a'_0 - a''a''_0 = bb_0 + b'b'_0 - b''b''_0 = -cc_0 - c'c'_0 + c''c''_0, \\ ab_0 + a'b'_0 - a''b''_0 = bc_0 + b'c'_0 - b''c''_0 = ca_0 + c'a'_0 - c''a''_0 = 0, \\ a_0b + a'_0b' - a''_0b'' = b_0c + b'_0c' - b''_0c'' = c_0a + c'_0a' - c''_0a'' = 0. \end{cases}$$

Les substitutions (2) forment évidemment un groupe que j'appellerai Γ. C'est un groupe continu d'ordre 8 qui est précisément le groupe (4) du paragraphe III. Les groupes discontinus contenus dans ce groupe Γ sont précisément les groupes hyperfuchsiens découverts par M. Picard.

Il reste à savoir si Γ est identique à G, ou si Γ est un sous-groupe de G. J'établirai d'abord que G *ne contient pas d'autre substitution infinitésimale que celles de* Γ.

A cet effet, j'aurai avantage à transformer l'équation de l'hypersphère en posant

$$z = \frac{1 + x}{1 - x}, \qquad z_0 = \frac{1 + x_0}{1 - x_0}, \qquad z' = \frac{y\sqrt{2}}{1 - x}, \qquad z'_0 = \frac{y_0\sqrt{2}}{1 - x_0},$$

d'où

$$zz_0 + z'z'_0 - 1 = \frac{2(x + x_0 + yy_0)}{(1 - x)(1 - x_0)}.$$

L'équation de l'hypersphère devient ainsi

$$(4) \qquad x + x_0 + y y_0 = 0.$$

Appliquons à nos variables une transformation infinitésimale en changeant x et y en $x + \xi$ et $y + \eta$. Pour que cette transformation n'altère pas l'hypersphère, il faut que l'on ait l'identité

$$(5) \qquad \xi + \xi_0 + \eta y_0 + \eta_0 y = (x + x_0 + y y_0)\psi,$$

ψ étant une fonction analytique de x, x_0, y, y_0.

Développons ξ, η, ξ_0, η_0, ψ suivant les puissances de y et de y_0 et écrivons

$$\xi = \Sigma \xi_{\mu\nu}, \qquad \eta = \Sigma \eta_{\mu\nu}, \qquad \xi_0 = \Sigma \xi^0_{\mu\nu}, \qquad \eta_0 = \Sigma \eta^0_{\mu\nu}, \qquad \psi = \Sigma \psi_{\mu\nu},$$

$\xi_{\mu\nu}$, ..., $\psi_{\mu\nu}$ représentant l'ensemble des termes en $y^\mu y_0^\nu$.

L'identité (5) nous donnera en égalant les termes en $y^\mu y_0^\nu$

$$(6) \qquad \xi_{\mu\nu} + \xi^0_{\mu\nu} + \eta_{\mu,\nu-1} y_0 + \eta^0_{\mu-1,\nu} y = (x + x_0)\psi_{\mu\nu} + y y_0 \psi_{\mu-1,\nu-1}.$$

On voit que l'on peut avoir une série d'identités de la forme (6) où figureront seulement des fonctions

$$(7) \qquad \xi_{\mu\nu}, \quad \xi^0_{\mu\nu}, \quad \eta_{\mu,\nu-1}, \quad \eta^0_{\mu-1,\nu}, \quad \psi_{\mu\nu}$$

pour lesquelles la différence $\mu - \nu$ *sera constante.* Nous pourrons donc considérer séparément les fonctions de la forme (7) correspondant à une différence donnée $\mu - \nu$.

Nous devons observer de plus que dans $\xi_{\mu\nu}$ l'indice ν doit être nul, car la fonction ξ ne dépend que de x et de y. Inversement, dans $\xi^0_{\mu\nu}$ l'indice μ doit être nul. De même dans $\eta_{\mu,\nu-1}$ on doit avoir $\nu = 1$; dans $\eta^0_{\mu-1,\nu}$ on doit avoir $\mu = 1$. Donc on aura $\xi_{\mu\nu} = 0$ par exemple si ν n'est pas nul.

Faisons d'abord $\mu - \nu = 0$, nous aurons la série d'identités

$$\xi_{00} + \xi^0_{00} = (x + x_0)\psi_{00}, \qquad \eta_{10} y_0 + \eta^0_{01} y = (x + x_0)\psi_{11} + y y_0 \psi_{00},$$
$$0 = (x + x_0)\psi_{22} + y y_0 \psi_{11} = (x + x_0)\psi_{33} + y y_0 \psi_{22} = \ldots = (x + x_0)\psi_{\mu\mu} + y y_0 \psi_{\mu-1,\mu-1}.$$

On voit que les rapports $\frac{\psi_{11}}{\psi_{22}}$, $\frac{\psi_{22}}{\psi_{33}}$, ..., $\frac{\psi_{\mu-1,\mu-1}}{\psi_{\mu\mu}}$ sont divisibles par $x + x_0$.

Donc ψ_{11} sera divisible par $(x + x_0)^{\mu-1}$ et cela quelque grand que soit μ, c'est-à-dire que l'on devra avoir

$$\psi_{11} = 0,$$

d'où

$$\xi_{00} + \xi^0_{00} = (x + x_0)\psi_{00}, \qquad \eta_{10} y_0 + \eta^0_{01} y = y y_0 \psi_{00}$$

ou, en posant $\eta_{10} = \zeta y$, $\eta_{01}^0 = \zeta_0 y_0$,

$$\zeta + \zeta_0 = \psi_{00}.$$

Nous aurons d'ailleurs

$$\xi = \xi_{00}, \qquad \xi_0 = \xi_{00}^0,$$

puisque ξ ne contient pas d'autre terme, et il restera

$$\xi - \xi_0 = (x + x_0)(\zeta - \zeta_0), \tag{8}$$

où ξ et ζ dépendent seulement de x ; ξ_0 et ζ_0 seulement de x_0.

Cela n'est possible que si

$$\frac{d\zeta}{dx} = -\frac{d\zeta_0}{dx_0} = \text{const.}$$

Ce qui nous donne les quatre solutions suivantes :

$$(9) \quad \begin{cases} 1^\circ & \zeta = ix, \quad \zeta_0 = -ix_0, \quad \xi = ix^2, \quad \xi_0 = -ix_0^2, \quad \eta = ixy, \quad \eta_0 = -ix_0y_0; \\ 2^\circ & \zeta = \zeta_0 = 1, \quad \xi = 2x, \quad \xi_0 = 2x_0, \quad \eta = y, \quad \eta_0 = y_0; \\ 3^\circ & \zeta = i, \quad \zeta_0 = -i, \quad \xi = \xi_0 = 0, \quad \eta = iy, \quad \eta_0 = -iy_0; \\ 4^\circ & \zeta = \zeta_0 = 0, \quad \xi = i, \quad \xi_0 = -i, \quad \eta = \eta_0 = 0. \end{cases}$$

Supposons maintenant

$$\mu = \nu - 1;$$

nous aurons la suite d'identités

$$\xi_{10} + \eta_{00}^0 y = (x + x_0)\psi_{10}, \qquad \eta_{20} y_0 = (x + x_0)\psi_{21} + y y_0 \psi_{10},$$
$$0 = (x + x_0)\psi_{32} - \psi_{21} = (x + x_0)\psi_{43} - \psi_{32} = \ldots.$$

On verrait comme plus haut que $\psi_{21} = 0$, et l'on en déduirait

$$\xi_{10} = \alpha y, \qquad \eta_{00}^0 = \beta_0, \qquad \eta_{20} = y^2\gamma, \qquad \psi_{10} = y\gamma,$$

α et γ dépendant seulement de x, et β_0 de x_0. Il reste alors

$$\alpha + \beta_0 = (x + x_0)\gamma;$$

ce qui comporte les quatre solutions suivantes :

$$(10) \quad \begin{cases} \gamma = 1, & \alpha = x, & \beta_0 = x_0, & \xi = xy, & \xi_0 = 0, & \eta = y^2, & \eta_0 = x_0, \\ \gamma = 0, & \alpha = i, & \beta_0 = -i, & \xi = iy, & \xi_0 = 0, & \eta = 0, & \eta_0 = -i, \\ \gamma = 0, & \alpha = 1, & \beta_0 = -1, & \xi = y, & \xi_0 = 0, & \eta = 0, & \eta_0 = -1, \\ \gamma = i, & \alpha = ix, & \beta_0 = ix_0, & \xi = ixy, & \xi_0 = 0, & \eta = iy^2, & \eta_0 = ix_0. \end{cases}$$

Ces solutions ne conviennent pas, car elles ne donnent pas pour ξ et ξ_0 d'une part, pour η et η_0 d'autre part, des fonctions imaginaires conjuguées. Mais en faisant $\mu = \nu - 1$ on trouve quatre nouvelles solutions

$$(10\,bis)\quad \left\{\begin{array}{llll} \xi = 0, & \xi_0 = x_0 y_0, & \eta = x, & \eta_0 = y_0^2, \\ \xi = 0, & \xi_0 = -i y_0, & \eta = i, & \eta_0 = 0, \\ \xi = 0, & \xi_0 = y_0, & \eta = -1, & \eta_0 = 0, \\ \xi = 0, & \xi_0 = -i x_0 y_0, & \eta = -ix, & \eta_0 = -i y_0^2 \end{array}\right.$$

qui sont imaginaires conjuguées des précédentes. En ajoutant les solutions (10) et (10 *bis*) on trouve quatre nouvelles solutions

$$(11)\quad \left\{\begin{array}{lllll} 5^o & \xi = xy, & \xi_0 = x_0 y_0, & \eta = y^2 + x, & \eta_0 = y_0^2 + x_0; \\ 6^o & \xi = iy, & \xi_0 = -i y_0, & \eta = i, & \eta_0 = -i; \\ 7^o & \xi = y, & \xi_0 = y_0, & \eta = -1, & \eta_0 = -1; \\ 8^o & \xi = ixy, & \xi_0 = -i x_0 y_0, & \eta = -ix + iy^2, & \eta_0 = ix_0 - i y_0^2 \end{array}\right.$$

qui conviennent au problème.

Si nous faisons maintenant $\mu = \nu + b$, il vient, en supposant $b > 0$,

$$\xi_{b0} = (x - x_0)\psi_{b0}, \qquad \eta_{b+1,0}\, y_0 = (x - x_0)\psi_{b+1,1} + y y_0 \psi_{b0}.$$

On verrait comme plus haut que $\psi_{b+1,1}$ est nul et l'on en déduirait

$$y\,\xi_{b0} = (x - x_0)\,\eta_{b+1,0}.$$

Le premier membre ne dépendant pas de x_0, il doit en être de même du second; ce qui entraîne

$$\eta_{b+1,0} = \xi_{b0} = 0:$$

il n'y a pas de solution. Si l'on supposait $b < 0$, on arriverait au même résultat, car on obtiendrait des relations qui seraient imaginaires conjuguées des précédentes. Le problème ne comporte donc pas d'autres solutions que les solutions (9) et (11). Ces solutions sont au nombre de huit, elles ne peuvent donc être autres que les huit transformations infinitésimales du groupe Γ qui est d'ordre 8. C. Q. F. D.

Je mets maintenant de nouveau l'équation de l'hypersphère sous la forme (1) et je me propose de démontrer que le groupe G ne contient pas d'autres transformations *finies* que celles de Γ. Soit en effet

$$T = (z, z_0; Z, Z_0)$$

une pareille transformation. Je ne restreindrai pas la généralité en supposant que pour $z = z' = 0$, on a $Z = Z' = 0$.

Supposons en effet que cette transformation T transforme le point $z = \alpha$, $z' = \alpha'$ dans le point $Z = \beta$, $Z' = \beta'$; je supposerai de plus qu'aucun de ces deux points n'est sur l'hypersphère. Je supposerai encore que le déterminant fonctionnel de la transformation T, c'est-à-dire le déterminant fonctionnel de Z et Z' par rapport à z et z', ne s'annule pas pour $z = \alpha$, $z' = \alpha'$. Cela est permis puisque ce déterminant n'est pas identiquement nul et que le point α, α' est arbitraire.

Parmi les substitutions du groupe Γ, il y en a une qui change l'origine en un point quelconque $z = c$, $z' = c'$, pourvu que ce point ne soit pas sur l'hypersphère; ce qui veut dire que l'on peut choisir les coefficients a, b, ... de la substitution (2) de telle façon que les relations (3) soient satisfaites, que $c'' = 1$ et que c et c' aient des valeurs quelconques, pourvu que ces valeurs ne satisfassent pas à l'égalité

$$cc_0 + c'c'_0 = 1.$$

Soient alors A et B celles des substitutions du groupe Γ qui changent l'origine en le point α, α' pour A, ou en le point β, β' pour B. Alors la substitution

$$\mathrm{ATB}^{-1}$$

transformera le point $z = z' = 0$ en lui-même. Elle fera d'ailleurs partie du groupe G puisque A, T et B en font partie; elle pourra donc être substituée à T. D'ailleurs son déterminant fonctionnel ne s'annule pas à l'origine.

C. Q. F. D.

Soient G_1 et Γ_1 les sous-groupes formés des substitutions de G et de Γ qui changent l'origine en elle-même. Il est clair que Γ_1 sera un sous-groupe de G_1 et, d'après l'hypothèse que nous venons de justifier, T fait partie de G_1. Quant au groupe Γ_1, il est formé de toutes les substitutions (2) qui sont telles que

$$c = c' = 0,$$

d'où

$$a'' = b'' = 0, \qquad c'' = 1.$$

Nous ne restreindrons pas non plus la généralité en supposant que T est tel que l'on ait (pour $z = z' = 0$, c'est-à-dire à l'origine)

$$\frac{dZ}{dz'} = 0.$$

Supposons en effet que l'on ait à l'origine

$$\frac{dZ}{dz} = A, \qquad \frac{dZ}{dz'} = B, \qquad \frac{dZ'}{dz} = A', \qquad \frac{dZ'}{dz'} = B'.$$

Nous pourrons combiner la substitution T avec une substitution du groupe Γ_1, et nous obtiendrons ainsi une substitution T_1 appartenant comme T au groupe G_1 et qui changera z et z' en

$$Z_1 = aZ + bZ',$$
$$Z'_1 = a'Z + b'Z'.$$

Les coefficients a, b, a', b' sont assujettis aux conditions

$$(12) \qquad \begin{cases} aa_0 - a\,a'_0 = bb_0 + b'b'_0 = 1, \\ ab_0 - a'b'_0 = a_0 b - a'_0 b' = 0, \end{cases}$$

qui ne sont autre chose que les conditions (3); il faut choisir a, b de façon que ces conditions (3) soient remplies et que l'on ait

$$aA + bA' = 0.$$

Cela est toujours possible. La substitution T_1 satisfait d'ailleurs à la condition imposée $\dfrac{dZ_1}{dz} = 0$. C. Q. F. D.

Ajoutons que le déterminant fonctionnel de Z_1 et Z'_1 par rapport à z et à z' ne s'annule pas à l'origine, puisque celui de T ne s'annule pas.

Soient G_2 et Γ_2 les sous-groupes formés des substitutions de G_1 et Γ_1 qui satisfont à l'origine à la condition

$$(13) \qquad \frac{dZ}{dz'} = 0.$$

Il est clair que Γ_2 sera un sous-groupe de G_2 et, d'après l'hypothèse que nous venons de justifier, T fait partie de G_2. Quant à Γ_2, il est formé de toutes les substitutions de Γ_1 pour lesquelles on a

$$b = b_0 = 0.$$

d'où, d'après les conditions (12),

$$a' = a'_0 = 0.$$

Il se compose donc des substitutions qui changent z et z' en

$$az, \quad b'z',$$

où

$$aa_0 = b'b'_0 = 1.$$

Ainsi T fait partie de G, de G_1 et de G_2. D'ailleurs : Γ est le plus grand groupe continu contenu dans G; Γ_1 est le plus grand groupe continu contenu dans G_1; Γ_2 est le plus grand groupe continu contenu dans G_2. Comme T fait partie de G, il change tout groupe continu contenu dans G en un groupe continu contenu dans G; donc tout sous-groupe de Γ en un sous-groupe de Γ; donc Γ en lui-même. De même T change Γ_1 en lui-même et Γ_2 en lui-même.

Si donc l'on a

$$Z = f(z, z'), \qquad Z' = f'(z, z'),$$

on devra avoir identiquement

$$f(az, b'z') = \mathrm{A} f(z, z'), \qquad f'(az, b'z') = \mathrm{B}' f'(z, z'),$$

A et B' étant des constantes de module 1, si a et b' sont des constantes quelconques de module 1. Cela n'est possible que si l'on a

$$Z = \lambda z^n, \qquad Z' = \lambda' z'^p.$$

Il est aisé de vérifier que l'équation de l'hypersphère ne pourra rester inaltérée que si les constantes n et p se réduisent à l'unité, c'est-à-dire si T fait partie de Γ_2.

Donc il n'existe pas d'autre substitution qui n'altère pas l'hypersphère que celles du groupe Γ. *Les deux groupes* G *et* Γ *sont identiques.*

C. Q. F. D.

Nous allons maintenant vérifier que les fonctions

$$Z = \frac{az + bz' + c}{a''z + b''z' + c''}, \qquad Z' = \frac{a'z + b'z' + c'}{a''z + a''z' + c''}$$

ne présentent aucune singularité en dehors de l'hypersphère.

La seule singularité possible serait obtenue pour

$$(14) \qquad a''z + b''z' + c'' = 0.$$

Mais en vertu des relations (3) l'équation de l'hypersphère peut s'écrire

$$(15)\quad (az+bz'+c)(a_0z_0+b_0z'_0+c_0)+(a'z+b'z'+c')(a'_0z_0+b'_0z'_0+c'_0)$$
$$=(a''z+b''z'+c'')(a''_0z_0+b''_0z'_0+c''_0).$$

Si l'équation (14) était satisfaite, le second membre de (15) devrait s'annuler, ce qui est impossible, car le premier membre est essentiellement positif.

Comme d'ailleurs l'hypersphère est simplement connexe, les conditions du paragraphe précédent sont remplies; c'est-à-dire que si l'une des deux surfaces s et S est une hypersphère et si le problème local peut être résolu dans le voisinage de chaque point, le problème mixte comportera une solution.

VIII. — Le problème étendu.

Reprenons notre surface s limitant un domaine d et notre surface S limitant un domaine D. Nous supposons le problème mixte résolu; nous connaissons donc des fonctions Z et Z', analytiques en tous les points z, z' de la surface s et transformant s en S. Pouvons-nous en déduire la solution du problème étendu, c'est-à-dire pouvons-nous trouver des fonctions, analytiques, non seulement en tous les points de la surface s, mais en tous les points du domaine d limité par cette surface et transformant s en S et d en D? Les fonctions Z et Z', qui nous fournissent la solution du problème mixte et qui sont régulières sur la surface s, présentent-elles des singularités à l'intérieur de d?

La réponse nous est fournie par un théorème de M. Hartogs [1].

D'après ce théorème, une fonction de deux variables z et z' sera analytique à l'intérieur d'un domaine d à quatre dimensions, pourvu qu'elle le soit sur la surface s à trois dimensions qui limite ce domaine.

La démonstration pourrait se rattacher à des considérations que j'ai développées à propos d'une question entièrement différente dans le *Bulletin Astronomique*, t. XVI. Voir aussi mes *Leçons de Mécanique céleste*, t. II. Soit F(z, z') la fonction en question. Par hypothèse, elle est régulière dans un domaine δ comprenant tous les points de s et les points suffisamment voisins; je dis qu'elle est régulière dans tout le domaine d.

Considérons un contour γ dans le plan des z et l'aire β limitée par ce contour.

---

[1] HARTOGS, *Einige Folgerungen aus der Cauchyschen Integralformel bei Funktionen mehrerer Veränderlichen* (*Sitzungsb. der math.-physik. Klasse der K. B. Akademie der Wissenschaften zu München*, t. 36, 1906, p. 223-242).

Je dirai qu'un point $z = a$ satisfait à la condition A, s'il existe une valeur a' de z' telle que le point a, a' appartienne à d; je dirai que l'aire β satisfait à la condition A si tous ses points satisfont à la condition A. Je dirai qu'un point $z = a$ satisfait à la condition B, s'il existe des valeurs a' de z' telles que le point a, a' fasse partie de δ. Je dirai que l'aire β satisfait à la condition B, s'il existe des valeurs de z' qui associées à un point quelconque de β donnent un point appartenant au domaine δ.

L'ensemble de ces valeurs de z' forme alors dans le plan des z' une certaine aire β', et en associant un point quelconque de β avec un point quelconque de β', on obtiendra un domaine à quatre dimensions $\beta\beta'$ faisant partie de δ. Il est clair qu'un point $z = a$ quelconque satisfait à la condition B s'il satisfait à la condition A. Soit, en effet,

$$\Phi(z, z_0, z', z'_0) = 0$$

l'équation de s; le domaine d pourra être défini par l'inégalité

$$\Phi > 0,$$

et le domaine δ par les inégalités

$$\Phi > -\varepsilon, \qquad \Phi < \varepsilon.$$

Soit $z = a$; nous aurons par hypothèse des valeurs de z' pour lesquelles $\Phi > 0$; d'autre part pour z' très grand on aura $\Phi < 0$, puisque la surface s est fermée, d'où il résulte que le domaine d ne s'étend pas à l'infini. Donc par continuité Φ pourra prendre des valeurs comprises entre $-\varepsilon$ et ε. C. Q. F. D.

On déduira de là que dans le voisinage de tout point $z = a$ satisfaisant à la condition A il y a une aire β satisfaisant à la condition B, et par conséquent que toute aire β satisfaisant à la condition A peut être décomposée en aires plus petites satisfaisant à la condition B.

Je dis maintenant que la fonction F est uniforme dans d. Considérons en effet un contour fermé γ dans le plan des z, soit F_0 la valeur initiale de F quand on part d'un certain point de ce contour, et F_1 la valeur finale quand on en a fait tout le tour. Il faut démontrer que

$$F_1 = F_0.$$

D'abord la différence $F_1 - F_0$ est une fonction de z', susceptible d'être poursuivie par continuation analytique. Supposons d'abord que l'aire β limitée par le contour γ satisfasse à la condition B, alors pour les valeurs de z' appartenant à l'aire β', on aura

$$F_1 - F_0 = 0,$$

puisque la fonction F est uniforme dans le domaine δ et par conséquent dans le domaine $\beta\beta'$.

Cette différence sera donc encore nulle pour toutes les valeurs de z'.

Si l'aire β ne satisfait pas à la condition B, on la décomposera en aires plus petites satisfaisant à cette condition.

La fonction F est donc uniforme, il reste à montrer qu'elle ne présente pas de singularité, c'est-à-dire que l'intégrale

$$\int (z - a)^p \mathrm{F}\, dz,$$

où a est un point quelconque satisfaisant à la condition A, où p est un entier positif quelconque, intégrale prise le long d'un contour fermé quelconque entourant le point a; que cette intégrale, dis-je, est toujours nulle. Or c'est ce que l'on verrait en raisonnant sur cette intégrale comme nous avons raisonné sur la différence $F_1 - F_0$.

Il ne sera pas inutile de donner une démonstration spéciale pour le cas où la surface s est une hypersphère. Soit

$$Z = F(z, z') = X + iY.$$

Sa partie réelle X satisfera aux équations

$$(1) \qquad \frac{d^2X}{dz\,dz_0} = \frac{d^2X}{dz'\,dz_0} = \frac{d^2X}{dz\,dz'_0} = \frac{d^2X}{dz'\,dz'_0} = 0,$$

et par conséquent à l'équation

$$(2) \qquad \frac{d^2X}{dz\,dz_0} + \frac{d^2X}{dz'\,dz'_0} = 0.$$

Si alors nous faisons

$$z = x + iy, \qquad z_0 = x - iy,$$
$$z' = x' + iy', \qquad z'_0 = x' - iy',$$

l'équation (2) pourra s'écrire

$$(3) \qquad \Delta X = \frac{d^2X}{dx^2} + \frac{d^2X}{dy^2} + \frac{d^2X}{dx'^2} + \frac{d^2X}{dy'^2} = 0.$$

C'est l'équation de Laplace; la fonction X étant par hypothèse régulière dans le domaine δ, c'est-à-dire pour les points voisins de l'hypersphère

$$zz_0 + z'z'_0 = 1,$$

pourra s'exprimer à l'aide des fonctions sphériques, ou plutôt de leur généralisation pour quatre dimensions; nous pourrons donc écrire

$$\text{(4)} \qquad X = \Sigma P_n + \Sigma Q_n (zz_0 + z'z'_0)^{-1-n},$$

P_n et Q_n étant des polynômes homogènes d'ordre n en x, y, x', y' satisfaisant à l'équation (3); ou ce qui revient au même en z, z_0, z', z'_0 satisfaisant à l'équation (2). La fonction X ne peut d'ailleurs être développée sous cette forme que d'une seule manière.

Soient alors D_1X, D_2X, D_3X, D_4X les quatre dérivées partielles de X qui s'annulent en vertu des équations (1), il viendra

$$\Sigma DP_n + \Sigma D[Q_n (zz_0 + z'z'_0)^{-1-n}] = 0.$$

Nous remarquerons que DP_n et DQ_n sont des polynômes sphériques d'ordre $n-2$; c'est-à-dire que l'on a

$$\Delta(DP_n) = \Delta(DQ_n) = 0.$$

Posons pour abréger

$$-1-n = k, \qquad R = zz_0 + z'z'_0,$$

et supprimons l'indice n de Q quand il ne sera pas indispensable. Il viendra

$$D_1(QR^k) = R^k DQ + kR^{k-1}\left(z \frac{dQ}{dz} + z_0 \frac{dQ}{dz_0}\right) + kQR^{k-1} + k(k-1)zz_0QR^{k-2},$$

$$D_2(QR^k) = R^k DQ + kR^{k-1}\left(z \frac{dQ}{dz'} + z'_0 \frac{dQ}{dz_0}\right) + k(k-1)zz'_0QR^{k-2},$$

$$D_3(QR^k) = R^k DQ + kR^{k-1}\left(z' \frac{dQ}{dz} + z_0 \frac{dQ}{dz'_0}\right) + k(k-1)z'z_0QR^{k-2},$$

$$D_4(QR^k) = R^k DQ + kR^{k-1}\left(z' \frac{dQ}{dz'} + z'_0 \frac{dQ}{dz'_0}\right) + kQR^{k-1} + k(k-1)z'z'_0QR^{k-2}.$$

En combinant la première et la quatrième de ces relations et appliquant à Q le théorème des fonctions homogènes, on trouve

$$\Delta(QR^k) = R^k \Delta Q + kR^{k-1}(nQ) + 2kQR^{k-1} + k(k-1)(zz_0 + z'z'_0)QR^{k-2},$$

ou, en remarquant que $\Delta Q = 0$, $zz_0 + z'z'_0 = R$,

$$\Delta(QR^k) = nkR^{k-1}Q + k(k+1)QR^{k-1},$$

d'où

$$\Delta(QR^k) = 0, \qquad \text{puisque} \quad k+1 = -n.$$

Il est clair que l'on aura

$$\Delta[D(QR^k)] = 0,$$

et que $D(QR^k)$ est homogène d'ordre $-n-4$; on a donc

$$D_i(Q_n R^k) = H_n R^{k-2},$$

H'_n étant un polynôme sphérique d'ordre $n+2$, dont l'expression est donnée par les formules précédentes. Dans ces conditions, les équations (1) peuvent s'écrire

$$0 = \Sigma D_i P_n + \Sigma H_n^i R^{k-2}$$

et comme une fonction ne peut se développer que d'une seule manière en série de la forme (4), on devra avoir séparément

$$D_i P_n = 0, \qquad H_n^i = 0, \qquad D_i(Q_n R^k) = 0.$$

On aura donc

$$(5) \qquad Q_n R^k = Y + Y_0,$$

Y étant fonction de z et z' seulement, Y_0 fonction de z_0 et z'_0 seulement. On en tire

$$Q_n = (Y + Y_0)(zz_0 + z'z'_0)^{n+1}.$$

$Q_n R^k$ est une fonction rationnelle. Donc il en est de même de Y; il suffit pour s'en assurer de donner à z_0 et z'_0 des valeurs constantes dans l'identité (5). Il en est de même de Y_0. Posons donc

$$Y = \frac{U}{V}, \qquad Y_0 = \frac{U_0}{V_0},$$

U, V, U_0, V_0 étant des polynômes premiers entre eux; il viendra

$$(6) \qquad Q_n V V_0 = (UV_0 + U_0 V)(zz_0 + z'z'_0)^{n+1}.$$

V divise le premier membre, il est premier avec U et avec V_0, donc avec UV_0 et avec $UV_0 + U_0V$; donc il divisera le facteur $(zz_0 + z'z'_0)^{n+1}$. Or ce facteur n'admet aucun diviseur dépendant seulement de z et z'; il faut donc que l'on ait

$$V = V_0 = 1,$$

ce qui est impossible, puisque Q_n est de degré n, et que le second membre contient un facteur de degré $2n+2$. On a donc

$$Q_n = 0,$$

et par conséquent

$$X = \Sigma P_n,$$

ce qui montre que X reste régulier dans tout le domaine d intérieur à l'hypersphère. C. Q. F. D.

On voit la différence avec le cas des fonctions d'une seule variable. Dans ce cas l'équation (4) deviendrait

$$X = \Sigma P_n + \Sigma Q_n (z z_0)^{-n},$$

et l'équation (6),

$$Q_n V V_0 = (U V_0 + U_0 V)(z z_0)^n;$$

V serait un diviseur de z^n, V_0 un diviseur de z_0^n et il n'y aurait pas de raison pour que Q_n soit nul; on trouverait au contraire

$$V = z^n, \qquad V_0 = z_0^n, \qquad U = U_0 = 1, \qquad Q_n = z^n + z_0^n,$$

ou bien

$$V = z^n, \qquad V_0 = z_0^n, \qquad U = i, \qquad U_0 = -i, \qquad Q_n = i(z^n - z_0^n).$$

IX. — Le problème sur l'hypersphère.

Supposons que la surface s soit une hypersphère et la surface S une surface infiniment voisine de l'hypersphère. Soit

$$z z_0 + z' z'_0 = 1$$

l'équation de s; soit

$$Z Z_0 + Z' Z'_0 = 1 - \psi$$

celle de S, ψ étant très petit. Nous poserons

$$Z = z + \zeta, \qquad Z' = z' + \zeta',$$
$$Z_0 = z_0 + \zeta_0, \qquad Z'_0 = z'_0 + \zeta'_0,$$

ζ, etc. étant très petits. Il s'agit de savoir si l'on peut trouver des fonctions

$$\theta, \quad \zeta, \quad \zeta', \quad \zeta_0, \quad \zeta'_0$$

satisfaisant à l'identité

$$(1)\qquad z\zeta_0 + z_0\zeta + z'\zeta'_0 + z'_0\zeta' = \psi + (zz_0 + z'z'_0 - 1)\theta = \varphi.$$

Nous avons, pour écrire cette identité, négligé les carrés de ζ. J'ajoute que ζ et ζ' doivent être fonctions seulement de z et de z', et ζ_0 et ζ'_0 de z_0 et z'_0.

En différentiant cette identité, on trouve

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned}
\zeta_0 + z_0\frac{d\zeta}{dz} + z'_0\frac{d\zeta'}{dz} &= \frac{d\psi}{dz} + z_0\theta = \frac{d\varphi}{dz},\\
\zeta'_0 + z_0\frac{d\zeta}{dz'} + z'_0\frac{d\zeta'}{dz'} &= \frac{d\psi}{dz'} + z'_0\theta = \frac{d\varphi}{dz'},\\
\zeta + z\frac{d\zeta_0}{dz_0} + z'\frac{d\zeta'_0}{dz_0} &= \frac{d\psi}{dz_0} + z\theta = \frac{d\varphi}{dz_0},\\
\zeta' + z\frac{d\zeta_0}{dz'_0} + z'\frac{d\zeta'_0}{dz'_0} &= \frac{d\psi}{dz'_0} + z'\theta = \frac{d\varphi}{dz'_0}.
\end{aligned}\right.$$

En différentiant une fois de plus on trouve

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned}
D_1\varphi &= \frac{d\zeta}{dz} + \frac{d\zeta_0}{dz_0},\\
D_2\varphi &= \frac{d\zeta}{dz'} + \frac{d\zeta'_0}{dz_0},\\
D_3\varphi &= \frac{d\zeta'}{dz} + \frac{d\zeta_0}{dz'_0},\\
D_4\varphi &= \frac{d\zeta'}{dz'} + \frac{d\zeta'_0}{dz'_0},
\end{aligned}\right.$$

D_1, D_2, D_3, D_4 ayant (ainsi que Δ) la même signification que dans le paragraphe précédent.

On en conclut qu'on a pour des indices i et k quelconques

$$D_i D_k \varphi = 0,$$

et par conséquent

$$(4)\qquad \Delta\Delta\varphi = 0,$$

ou bien encore

$$(4\ bis)\qquad D_i\Delta\varphi = \Delta D_i\varphi = 0.$$

La solution générale de l'équation (4) est

$$\varphi = \Sigma X_n + \Sigma Y_n R + \Sigma U_n R^{-n} + \Sigma V_n R^{-1-n},$$

X_n, Y_n, U_n, V_n désignant des polynômes sphériques d'ordre n et d'ailleurs

$$R = zz_0 + z'z'_0.$$

Comme la fonction φ doit rester régulière pour $R = 0$, il restera

$$\varphi = \Sigma X_n + \Sigma Y_n R,$$

ou

$$(5) \qquad \varphi = X + YR,$$

avec

$$X = \Sigma X_n, \qquad Y = \Sigma Y_n, \qquad \Delta X = 0, \qquad \Delta Y = 0.$$

Les équations (4 *bis*) nous donnent

$$D_i \Delta(YR) = 0.$$

Nous avons d'ailleurs

$$\Delta\varphi = \Sigma\Delta(Y_n R) = \Sigma(2 + n) Y_n,$$

de sorte que les équations (4 *bis*) deviennent

$$\Sigma(2 + n) D_i(Y_n) = 0,$$

ce qui exige que l'on ait séparément

$$D_i(Y_n) = 0, \qquad D_i(Y) = 0.$$

Calculons maintenant $D_i D_k(YR)$; nous trouvons, en nous reportant aux formules qui donnent $D_i(QR^k)$ et y faisant $k = 1$, $Q = Y$, $D_i Y = 0$,

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} D_1(YR) &= z \frac{dY}{dz} + z_0 \frac{dY}{dz} + Y, \\ D_2(YR) &= z \frac{dY}{dz} + z'_0 \frac{dY}{dz_0}, \\ D_3(YR) &= z' \frac{dY}{dz} + z_0 \frac{dY}{dz'_0}, \\ D_4(YR) &= z' \frac{dY}{dz'} + z'_0 \frac{dY}{dz'_0} + Y. \end{aligned} \right.$$

Les équations $D_i(Y) = 0$ nous apprennent que Y est la somme d'une fonction de z et de z' et d'une fonction de z_0 et z'_0. Il en résulte immédiatement qu'il en est de même des seconds membres des équations (6) et par conséquent que l'on a

$$D_i D_k(YR) = 0.$$

Comme $D_i D_k \varphi = 0$, on aura de même

$$(7) \qquad D_i D_k X = D_i D_k Y = 0.$$

Pour $R = 1$, φ se réduit à ψ *qui est une fonction connue*, et l'on a d'ailleurs

$$\varphi = X + Y.$$

Si donc nous posons

$$Q = X - Y,$$

la fonction Q régulière à l'intérieur de l'hypersphère et satisfaisant à $\Delta Q = 0$ se réduira à ψ sur la surface de l'hypersphère. *La fonction Q est donc entièrement déterminée et peut être regardée comme une donnée de la question.*

A cause des équations (7) on devra avoir

$$D_i D_k Q = 0. \tag{8}$$

C'est là une première condition pour que le problème étendu comporte une solution.

Nos équations prouvent que Y, $D_1 X$, $D_2 X$, $D_3 X$, $D_4 X$ sont égaux à une fonction de z et de z', plus une fonction de z_0 et de z'_0; écrivons donc

$$Y = U + U_0, \qquad D_i(X) = V_i + V_i^0,$$

où U et V_i sont fonctions de z et z', U_0 et V_i^0, fonctions de z_0 et z'_0.

Nous pourrons écrire

$$D_i \varphi = W_i + W_i^0,$$

où W_i dépend de z et z', et W_i^0 de z_0 et z'_0. On a alors

$$\left\{\begin{array}{ll} W_1 = V_1 - U - z\dfrac{dU}{dz}, & W_2 = V_2 + z\dfrac{dU}{dz}, \\ W_3 = V_3 - z\dfrac{dU}{dz}, & W_4 = V_4 - U - z'\dfrac{dU}{dz}. \end{array}\right. \tag{9}$$

Quant à W_1^0, W_2^0, W_3^0, W_4^0, ils sont naturellement imaginaires conjugués de W_1, W_2, W_3, W_4 et nous ne les écrirons pas explicitement.

On a

$$D_i X = D_i Q = V_i + V_i^0$$

et comme Q est une fonction connue, les fonctions V_i doivent être regardées comme connues.

La comparaison des équations (5) et (9) nous donne alors

$$\frac{d\zeta}{dz} = V_1 - U - z\frac{dU}{dz} - C_1, \qquad \frac{d\zeta}{dz} = V_2 - z\frac{dU}{dz} - C_2,$$

$$\frac{d\zeta}{dz} = V_3 - z\frac{dU}{dz} - C_3, \qquad \frac{d\zeta}{dz} = V_4 - U - z\frac{dU}{dz} - C_4.$$

les C étant des constantes; on tire de là par intégration

$$(10)\quad \begin{cases} \zeta = \mathrm{U}z + \mathrm{C}_1 z + \mathrm{C}_2 z' + \displaystyle\int (\mathrm{V}_1\, dz + \mathrm{V}_2\, dz'), \\ \zeta' = \mathrm{U}z' + \mathrm{C}_3 z + \mathrm{C}_4 z' + \displaystyle\int (\mathrm{V}_3\, dz + \mathrm{V}_4\, dz'). \end{cases}$$

Il faut donc que

$$\mathrm{V}_1\, dz + \mathrm{V}_2\, dz', \qquad \mathrm{V}_3\, dz + \mathrm{V}_4\, dz'$$

soient des différentielles exactes, et *c'est là la seconde condition pour que le problème soit possible.*

Posons ensuite

$$\mathrm{C}_1 z + \mathrm{C}_2 z' + \int (\mathrm{V}_1\, dz + \mathrm{V}_2\, dz') = \eta,$$

$$\mathrm{C}_3 z + \mathrm{C}_4 z' + \int (\mathrm{V}_3\, dz + \mathrm{V}_4\, dz') = \eta'.$$

Les fonctions η et η' dépendent seulement de z et z' et elles sont entièrement déterminées, *à trois constantes près pour chacune d'elles* (à savoir pour η, C_1, C_2 et la constante d'intégration).

Cela posé, les équations (10) nous donnent

$$\xi = (\mathrm{U} - \mathrm{U}_0)\mathrm{R} + \eta z_0 - \eta_0 z + \eta' z'_0 - \eta'_0 z$$

et comme $\mathrm{Y} = \mathrm{U} + \mathrm{U}_0$, on aura, d'après (5),

$$(11)\quad \begin{cases} \mathrm{X} = \eta z_0 - \eta_0 z + \eta' z'_0 + \eta'_0 z', \\ \mathrm{Y} = \mathrm{Q} - \eta z_0 - \eta_0 z - \eta' z'_0 - \eta'_0 z'. \end{cases}$$

Les fonctions X et Y seront donc déterminées à un certain nombre de constantes près. Pour que le problème se trouve résolu, il faut et il suffit que la valeur de Y déduite des équations (11) satisfasse aux conditions

$$\mathrm{D}_i \mathrm{Y} = 0.$$

Car alors on pourra poser $\mathrm{Y} = \mathrm{U} + \mathrm{U}_0$ et les équations (10) nous donneront la solution du problème. Mais il est aisé de voir que l'on trouve

$$\mathrm{D}_1 \mathrm{Y} = \mathrm{D}_1 \mathrm{Q} - \frac{d\eta}{dz} - \frac{d\eta_0}{dz_0} = \mathrm{V}_1 + \mathrm{V}_1^0 - \mathrm{V}_1 - \mathrm{V}_1^0 - \mathrm{C}_1 - \mathrm{C}_1^0$$

avec trois autres équations analogues, et par conséquent que l'on peut choisir les constantes de façon que

$$\mathrm{D}_i \mathrm{Y} = 0.$$

Les deux conditions énoncées plus haut sont donc suffisantes.

Quelque incomplets qu'ils soient, les résultats précédents suffiront, je pense, pour montrer à quel point le problème qui nous occupe se présente sous un jour différent pour les fonctions d'une variable et pour celles de deux variables. J'espère pourtant que, quand on aura mis la chose au point, les considérations de ce genre rendront pour les fonctions de deux variables des services analogues à ceux qu'elles ont déjà rendus pour les fonctions d'une variable.

ANALYSE

DE SES

TRAVAUX SUR LES FONCTIONS ABÉLIENNES

FAITE PAR H. POINCARÉ.

Acta mathematica, t. 38, p. 79-85 (1921).

X. — Fonctions abéliennes.

La Théorie des fonctions abéliennes est loin d'être aussi avancée que celle des fonctions elliptiques. Un grand nombre des propriétés de ces dernières transcendantes ne s'étendent pas ou ne s'étendent que difficilement au cas général. On ne doit pas s'en étonner si l'on se rappelle que beaucoup de propriétés des fonctions d'une variable ne sont plus applicables aux fonctions de plusieurs variables. C'est la même difficulté qui nous a occupés au paragraphe VII.

On a été conduit aux fonctions abéliennes par l'étude des courbes algébriques et des intégrales abéliennes. Je me suis occupé incidemment [138] des transformations birationnelles des courbes algébriques afin de démontrer qu'on peut toujours ramener ces courbes à des courbes gauches dépourvues de toute irrégularité. Un des premiers faits que l'on a remarqué est la possibilité de la réduction de ces intégrales abéliennes. Jacobi en a déjà rencontré quelques exemples; dans des cas assez nombreux, on voit des intégrales appartenant à une courbe de genre p se réduire à des intégrales de genre inférieur à p ou même à des intégrales elliptiques. Mais on est bientôt amené à se placer à un point de vue plus élevé; les fonctions Θ, qui doivent leur origine aux intégrales abéliennes de première espèce, ne sont qu'un cas particulier des séries Θ les plus générales. Mais il est aisé de voir qu'à ces transcendantes plus générales appartiennent des intégrales, qui sont, il est vrai, des intégrales de différentielles totales, mais qui peuvent néanmoins être regardées comme la généralisation des intégrales de première espèce. Il est alors naturel d'appliquer à ces intégrales le procédé de la réduction; le problème primitif reçoit une importante extension; mais, par la suppression d'une restriction gênante, il est simplifié et non compliqué; car on peut désormais introduire dans les raisonnements des fonctions Θ quelconques, sans avoir à s'inquiéter de leur origine.

Les géomètres se sont de longue date préoccupés de ce problème, qui doit nous fournir d'importantes données sur les fonctions algébriques et qui est un des meilleurs chemins pour pénétrer dans le domaine mystérieux des fonctions abéliennes. Dans ces derniers temps, M. Picard, par une série de brillants travaux, lui a fait faire plusieurs pas importants.

Mes premiers essais dans cet ordre d'idées ne portent que sur un cas particulier. Ainsi que je l'ai expliqué plus haut, dans le paragraphe intitulé : *Intégration des équations linéaires par les fonctions algébriques*, si l'intégrale générale d'une équation linéaire est algébrique et si, à l'aide de cette intégrale générale, on forme un système d'intégrales abéliennes de première espèce, il y a entre les périodes de ce système un grand nombre de relations intéressantes. J'avais là un moyen [40] de pénétrer plus profondément dans l'étude des fonctions abéliennes, et je résolus d'en profiter. Je choisis comme exemple particulier le système d'intégrales abéliennes que l'on peut former à l'aide de la résolvante de Galois de l'équation modulaire relative à la transformation du septième ordre. Je trouvai que les relations qui existent entre les périodes suffisent pour les déterminer complètement. Étant parvenu ainsi à calculer ces périodes, je m'aperçus que, parmi les intégrales abéliennes de ce système (qui est du genre 3), il y en a une infinité qui sont susceptibles d'être réduites aux intégrales elliptiques. C'était là un troisième exemple d'une circonstance remarquable, déjà signalée deux fois par M. Picard.

Mon attention fut de nouveau attirée sur cette question par un Mémoire de M^{me} Kowalevski, où se trouvaient cités deux théorèmes de M. Weierstrass, sur la réduction des intégrales abéliennes aux intégrales elliptiques. Ces deux théorèmes avaient été communiqués à divers savants par des lettres du professeur de Berlin, mais la démonstration n'en avait pas été publiée. J'ai donné [88] deux démonstrations différentes de ces deux propositions; j'ignore encore si mes méthodes sont identiques à celles de M. Weierstrass. Toutes deux sont empruntées à l'Arithmétique, et l'on ne doit pas s'en étonner, car le problème est en réalité purement arithmétique. La première démonstration se fonde sur la considération des formes bilinéaires. Dans la seconde, j'emploie un procédé particulier de réduction. Je suppose que dans un système d'intégrales de genre ρ, il y en ait μ qui soient réductibles au genre μ. Leurs 2ρ périodes, ou périodes anciennes, s'exprimeront alors à l'aide de 2μ quantités, qui seront les périodes nouvelles, par des polynômes linéaires à coefficients entiers. On peut donc dresser un Tableau de $4\rho\mu$ nombres entiers qui caractérise la réduction. Mais ce Tableau peut être dressé d'une infinité de manières; car on peut remplacer, soit le système des périodes anciennes, soit le système des périodes nouvelles par un système équivalent. Le problème est précisément de profiter de cette circonstance pour réduire le Tableau à sa plus simple expression. Dans ma seconde méthode, la réduction se fait par une série d'opérations toutes pareilles entre elles.

Je profitai des avantages de ces deux méthodes pour généraliser les deux théorèmes de M. Weierstrass et les étendre au cas de la réduction des intégrales abéliennes à d'autres intégrales abéliennes.

Le théorème de M. Weierstrass était plus général en un sens que le théorème de M. Picard sur le même sujet; ce dernier ne s'appliquait en effet qu'à la réduction du genre 2 au genre 1; le géomètre allemand avait étudié la réduction d'un genre ρ quelconque au genre 1. D'autre part, le théorème de M. Picard contenait plus que celui de M. Weierstrass car la réduction y était poussée plus loin. Était-il possible de trouver une proposition qui contînt à la fois celle de M. Weierstrass et celle de M. Picard, c'est-à-dire de pousser dans le cas général la réduction aussi loin que ce dernier analyste? L'application de ma seconde méthode m'a fait reconnaître [62, 84] que cela peut se faire sans difficulté.

Le même procédé me permit en même temps d'étudier le cas général (réduction d'un genre ρ quelconque, non plus au genre 1, mais à un genre μ également quelconque) et de pousser la réduction beaucoup plus loin que je ne l'avais fait dans mon premier travail. Le théorème auquel je fus ainsi conduit contient, comme cas particulier, toutes les propositions antérieurement découvertes et résume ainsi toute la théorie.

Un cas particulier bien digne d'intérêt est celui où une infinité d'intégrales d'un même système se réduisent aux intégrales elliptiques. M. Picard en avait déjà rencontré deux exemples, et il semblait probable que, dans un système d'intégrales de genre ρ, il ne pouvait y avoir plus de ρ intégrales réductibles sans qu'il y en eût une infinité. J'ai démontré [50, 84] qu'il en était effectivement ainsi et j'ai trouvé en même temps les relations fort simples qui unissent entre elles les intégrales réductibles.

Les méthodes que je viens d'exposer permettent une classification rationnelle des cas de réduction. Mais cette classification, à côté d'incontestables avantages, présente un inconvénient grave : elle ne distingue pas du cas général les cas particuliers où les intégrales abéliennes à réduire appartiennent à une courbe algébrique. Ces derniers ne présentent pas d'intérêt spécial au point de vue de la théorie des fonctions abéliennes; mais ils en ont un fort grand, au contraire, si l'on se propose pour but l'étude des fonctions algébriques. Il importait donc de trouver une classification nouvelle, ne portant que sur ces cas particuliers et laissant de côté tous les autres. J'ai indiqué [59] un moyen d'arriver à ce résultat par l'étude de la transformation des fonctions fuchsiennnes ; mais je n'ai pas eu le temps d'approfondir cette théorie.

L'étude systématique des fonctions abéliennes devait naturellement commencer par l'examen des cas de réduction, la suite de cet exposé le fera suffisamment comprendre ; mais ce n'était qu'un premier pas, et bien d'autres problèmes restaient à résoudre.

On vient de voir que les fonctions Θ, définies à l'aide des intégrations abéliennes de première espèce, ne sont que des cas très particuliers des séries Θ les plus générales.

Qu'est-ce qui caractérise les fonctions Θ spéciales, c'est-à-dire celles qui doivent leur origine aux intégrales abéliennes ? Qu'est-ce qui permet de les distinguer parmi les fonctions Θ les plus générales ? C'est la circonstance suivante, la variété

$$\Theta = 0$$

est pour employer le langage de Lie, une variété doublement de translation. C'est ce qu'on aurait pu déduire aisément des recherches antérieures de Lie. Mais je suis parvenu au même résultat [150, 194] par une voie entièrement différente. Cette condition peut évidemment s'exprimer par une relation entre les périodes, mais cette relation est transcendante et ne peut s'exprimer que sous une forme de série. Je me suis borné à indiquer les premiers termes de cette série, je veux dire ceux qui sont le plus sensibles quand la fonction Θ diffère peu d'un produit de fonctions elliptiques. La forme en est curieuse, car il y entre des radicaux. On peut concevoir une infinité de fonctions de n variables, admettant $2n$ systèmes de périodes et ne rentrant pas dans la catégorie spécialement étudiée par Riemann. Ces fonctions peuvent-elles être toujours regardées comme le quotient de deux fonctions Θ? Riemann était parvenu à le démontrer, mais il n'a jamais publié sa démonstration. M. Weierstrass a retrouvé le même résultat, mais il n'a pas publié non plus de son vivant la méthode dont il s'est servi.

Abordant l'étude de ces fonctions, que je n'assujettissais qu'à la condition d'être périodiques [12], je reconnus qu'on pouvait toujours les tirer des fonctions abéliennes ordinaires, obtenues par la méthode d'inversion de Jacobi, en appliquant le procédé de la réduction des intégrales abéliennes.

Dans ces conditions, nous devions naturellement songer, M. Picard et moi, à unir nos efforts pour retrouver le résultat de Riemann. Nous reconnûmes [41] qu'il devait y avoir entre les périodes les mêmes relations que dans le cas particulier des fonctions nées de l'inversion des intégrales abéliennes. Il était aisé d'en conclure que toutes les fonctions à n variables et à $2n$ périodes s'expriment par le moyen des séries Θ.

La méthode que je viens d'exposer est celle même dont s'était servi M. Weierstrass et qu'il n'avait pas publiée; c'est ce que nous reconnûmes quand après la mort du savant géomètre, nous reçûmes les bonnes feuilles du troisième volume de ses œuvres complètes.

Il n'y avait que quelques différences de détail; c'est ainsi que j'ai employé un moyen un peu différent pour démontrer un lemme indispensable, d'après lequel il y a toujours une relation algébrique entre p fonctions à p variables et à $2p$ périodes. J'y suis revenu plus tard [169].

Revenons au théorème dont j'avais donné une démonstration, après M. Weierstrass et en commun avec M. Picard. Depuis M. Appell en a donné une nouvelle, fondée sur de tous autres principes et j'en ai moi-même donné une troisième, entièrement différente des deux premières [169, 190]. Je rappelle par quel artifice j'ai démontré qu'une fonction méromorphe de plusieurs variables est toujours le quotient de deux fonctions entières (*vide suprà*, § VII). Quelle est la nature de ces fonctions entières? Les perfectionnements apportés [190] à ma démonstration primitive m'ont permis de résoudre cette question, et de faire voir directement que si la fonction méromorphe est périodique, ces deux fonctions entières sont des fonctions périodiques. Je me bornerai à dire que la démonstration présente quelques analogies avec celle par laquelle Weierstrass établit qu'il existe une fonction entière de genre 2 qui admet tous les zéros d'une fonction elliptique.

L'existence de ces fonctions périodiques, en face desquelles le procédé de l'inversion est impuissant, fait mieux ressortir la nécessité où nous nous trouvons d'établir la théorie des fonctions abéliennes en partant des séries Θ elles-mêmes. On sait qu'il est possible de fonder sur l'étude directe des fonctions Θ à une seule variable toute la théorie des fonctions elliptiques; le point de départ est ce fait que l'équation

$$\Theta(x) = 0$$

n'a qu'une seule racine à l'intérieur du parallélogramme des périodes. De là l'importance du problème suivant, dont la solution [86, 12] doit évidemment précéder toute étude directe des séries Θ à plusieurs variables. Combien les équations simultanées

$$(1)\quad \begin{aligned} &\Theta(x_1 - a_1, x_2 - a_2, \ldots, x_n - a_n) \\ &\quad = \Theta(x_1 - b_1, x_2 - b_2, \ldots, x_n - b_n) = \ldots = \Theta(x_1 - l_1, x_2 - l_2, \ldots, x_n - l_n) = 0, \end{aligned}$$

où les a, les b, ..., les l sont des constantes données, ont-elles de solutions distinctes? A l'aide d'une formule de M. Kronecker, j'ai pu démontrer que ce nombre est constant et indépendant des périodes, ainsi que des constantes a, b, ..., l. Il me fut facile ensuite, en envisageant le cas particulier où la fonction Θ se réduit à un produit de n fonctions Θ elliptiques, de démontrer que ce nombre est précisément $1.2.3\ldots n$.

J'appliquai aussi la même méthode à des équations analogues aux équations (1), mais plus compliquées, et je trouvai le nombre des solutions distinctes qu'elles doivent avoir.

Mais il y a plus; dans le cas des fonctions elliptiques, on trouve aisément la valeur de la racine de l'équation

$$\Theta(x) = 0.$$

Si l'on a affaire à des équations analogues, mais plus compliquées, on peut encore trouver la somme des racines.

Revenant aux fonctions abéliennes et aux équations (1), on peut alors se demander [55, 84] s'il est possible de trouver la somme des valeurs de x_1, celle des valeurs de x_2, etc., qui satisfont à ces équations. Ce problème est plus compliqué que le précédent, dans lequel le nombre cherché était une constante; cette circonstance permettait de se restreindre à un cas particulier, et l'on était ainsi immédiatement ramené aux fonctions elliptiques. Il n'en est plus de même ici; les nombres cherchés ne sont plus des constantes, mais des fonctions des périodes.

Toutefois le problème est immédiatement résolu quand on est ramené aux fonctions elliptiques, c'est-à-dire quand on se trouve dans un des cas de réduction étudiés plus haut. Quand, dans le système d'intégrales abéliennes de genre n qui correspondent aux fonctions envisagées, il y a n intégrales distinctes réductibles aux intégrales elliptiques, il est aisé de voir que les fonctions Θ abéliennes s'expriment très simplement à l'aide de fonctions Θ elliptiques. On peut alors, par l'application du théorème d'Abel généralisé (*cf.* § VIII) résoudre complètement le problème qui nous occupe.

Le système des périodes d'une fonction Θ quelconque diffère toujours infiniment peu d'un système de périodes correspondant à un cas de réduction. C'est là une circonstance qui donnera, je n'en doute pas, la clef de bien des problèmes. Elle nous donne en particulier la solution que nous cherchons.

Nous connaissons la somme cherchée des valeurs de x toutes les fois que nous nous trouvons dans un cas de réduction. Or cette somme doit être une fonction continue des périodes; *nous la connaîtrons donc dans tous les cas possibles.* C'est ainsi que, si l'on connaît une fonction continue de x pour toutes les valeurs commensurables de la variable, on la connaîtra également pour toutes les valeurs incommensurables.

On peut encore se placer à un autre point de vue pour étudier les zéros des fonctions Θ. Considérons une fonction Θ de deux variables $\Theta(x, y)$. Soient (α, β), (γ, δ) deux périodes de cette fonction. Écrivons l'équation

$$\Theta(\alpha t + \gamma u, \beta t + \delta u) = 0,$$

où t et u sont des nombres assujettis à rester réels et compris entre 0 et 1. Cette équation ainsi interprétée admettra un certain nombre de solutions. Je serai conduit, par des considérations qui ne sauraient trouver place ici, à les distinguer en deux espèces. Soient alors N_1 le nombre des solutions de la première espèce, T_1 la somme des valeurs correspondantes de t, U_1 celle des valeurs de u. Soient N_2, T_2 et U_2 les quantités analogues en ce qui concerne les solutions de la seconde espèce. On peut se proposer de déterminer les nombres $N_1 - N_2$, $T_1 - T_2$, $U_1 - U_2$.

Je suis parvenu par une méthode assez simple [55] à déterminer $N_1 - N_2$. On obtient ainsi divers renseignements importants au sujet du nombre total des solutions $N_1 + N_2$. Ce nombre est en effet toujours supérieur à $N_1 - N_2$ et il est de même parité.

On peut arriver au même résultat par l'emploi des intégrales doubles prises entre des limites imaginaires. J'ai lieu d'espérer de plus que la même considération pourra conduire à la valeur de $T_1 - T_2$ et de $U_1 - U_2$.

Enfin on peut se poser encore la question d'une autre manière. Soit une fonction Θ spéciale de p variables engendrée par une courbe algébrique de genre p

$$F(x, y) = 0.$$

Soient $u_1(x, y)$, $u_2(x, y)$, ..., $u_p(x, y)$ les p intégrales abéliennes de première espèce. J'écrirai pour abréger $\Theta(v_i)$ pour

$$\Theta(v_1, v_2, \ldots, v_p) \qquad [\text{et } u_i(x) \text{ pour } u_i(x, y)],$$

et je considérerai pq constantes $e_{i,k}$ où l'indice i varie de 1 à p et l'indice k de 1 à q. J'envisage alors les q équations

$$\Theta[u_i(x_1) + u_i(x_2) + \ldots + u_i(x_q) - e_{i,1}] = 0,$$
$$\Theta[u_i(x_1) + u_i(x_2) + \ldots + u_i(x_q) - e_{i,2}] = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Theta[u_i(x_1) + u_i(x_2) + \ldots + u_i(x_q) - e_{i,q}] = 0,$$

où x_1, x_2, ..., x_p sont les inconnues. Combien ces équations ont-elles de solutions? C'est le problème que j'ai résolu par une formule simple [194], le cas de $q = p$ se réduisant à celui que j'ai traité plus haut, tandis que le cas de $q = 1$ n'est autre que celui de Riemann.

BIBLIOGRAPHIE SPÉCIALE AUX FONCTIONS ABÉLIENNES.

[12] *Sur les fonctions abéliennes* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 92, 1881, p. 958-959).

[41] *Sur un théorème de Riemann* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 97, 1883, p. 1284-1287).

[50] (1) *Sur la réduction des intégrales abéliennes* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 99, 1884, p. 853-855).

[55] *Sur les fonctions abéliennes* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 100, 1885, p. 785-787).

[59] *Sur les transformations des fonctions fuchsiennes et la réductien des intégrales abéliennes* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 102, 1886, p. 41-44).

[62] (2) *Sur la réduction des intégrales abéliennes* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 102, 1886, p. 915-916).

[84] *Sur les fonctions abéliennes* (*American Journal of math.*, t. 8, 1886, p. 289-342).

[86] *Sur les fonctions Θ* (*Bull. Soc. math. France*, t. 11, 1883, p. 129-134).

[88] (3) *Sur la réduction des intégrales abéliennes* (*Bull. Société math. France*, t. 12, 1884, p. 124-143).

[138] (4) *Sur les transformations birationnelles des courbes algébriques* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 117, 1893, p. 18-23).

[150] *Sur les fonctions abéliennes* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 120, 1895, p. 239-243).

[169] *Sur les fonctions abéliennes* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 124, 1897, p. 1407-1411).

[190] (5) *Les propriétés du potentiel et les fonctions abéliennes* (*Acta math.*, t. 22, 1898, p. 89-178).

[194] *Remarques diverses sur les fonctions abéliennes* (*J. math.*, t. 1, 1895, p. 219-314).

[343] *Sur les fonctions abéliennes* (*Acta math.*, t. 26, 1902, p. 43-98).

(1) A été inséré Tome III, p. 352-354.
(2) A été inséré Tome III, p. 360-361.
(3) A été inséré Tome III, p. 333-351.
(4) Sera inséré Tome VI.
(5) Inséré ci-dessus, p. 10[illegible].

SUR LES FONCTIONS ABÉLIENNES

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 92, p. 958-959 (18 avril 1881).

Première remarque. — Les p équations

$$(1)\qquad \begin{cases} \Theta(x_1 + \lambda_{1,1}, x_2 + \lambda_{2,1}, \ldots, x_p + \lambda_{p,1}) = 0, \\ \Theta(x_1 + \lambda_{1,2}, x_2 + \lambda_{2,2}, \ldots, x_p + \lambda_{p,2}) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Theta(x_1 + \lambda_{1,p}, x_2 + \lambda_{2,p}, \ldots, x_p + \lambda_{p,p}) = 0 \end{cases}$$

ont $1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times p$ solutions communes, outre celles qu'on en déduit par l'addition des périodes. Elles ne sont jamais impossibles. De plus, *en général*, on ne peut choisir les λ de telle façon qu'elles cessent d'être distinctes. En supposant que la fonction Θ considérée doit son origine à un système d'intégrales abéliennes, je montre à quelle condition on pourra choisir les λ de telle façon que les équations (1) cessent d'être distinctes.

Deuxième remarque. — M. Picard, dans deux Notes du 21 février et du 7 mars, a montré que les fonctions abéliennes se ramènent, dans certains cas, aux fonctions elleptiques; de même les fonctions abéliennes peuvent, dans certains cas, se ramener à des fonctions abéliennes d'un moins grand nombre de variables. C'est ce qui donne l'explication d'une anomalie que j'avais remarquée.

Une fonction Θ de p variables dépend de $\frac{p(p+1)}{2}$ paramètres qui sont les périodes α_{ik}. Or une relation de genre p,

$$f(x, y) = 0,$$

peut être supposée de degré $p+1$ (Clebsch et Gordan, *Theorie der Abelschen Functionen*). Elle dépend alors seulement de $(p+2$ paramètres.

Supposons donc que, choisissant arbitrairement les $\frac{p(p+1)}{2}$ paramètres α_{ik}, on forme une fonction Θ, que j'appelle Θ_1, et avec elle p fonctions abéliennes à $2p$ périodes

$$F_1, \quad F_2, \quad \ldots, \quad F_p.$$

Les équations

$$F_1 = u, \qquad F_2 = F_3 = \ldots = F_p = 0$$

définissent x_1 en fonction de u; on aura

$$x_1 = \int \varphi(u, v)\, du,$$

φ étant rationnel en u et v, et v étant lié à u par une relation algébrique

$$(2) \qquad f(u, v) = 0.$$

Cette relation ne sera pas, en général, du genre p, puisqu'une relation algébrique du genre p dépend de moins de $\frac{p(p+1)}{2}$ paramètres. Si donc on forme, par les procédés connus, le système d'intégrales abéliennes de première espèce qui correspondent à la relation (2), puis la fonction Θ correspondante, cette fonction Θ aura plus de p variables, et pourtant elle devra se ramener à la fonction Θ_1, qui n'en a que p. On voit donc là un des exemples de ces réductions, qui ont été étudiées par M. Picard.

Troisième remarque. — Soit

$$F(u_1, u_2, \ldots, u_p)$$

une fonction abélienne à p variables et $2p$ périodes. M. Appell substitue à la place de u_i l'intégrale abélienne $u^i(x, y)$, et il arrive à ramener la fonction F à une fonction d'une seule variable. Cette fonction se décompose alors en éléments simples de la forme

$$A \frac{d}{du_k} L\Theta[u^i(x, y) + G_i].$$

Bornons-nous au cas de deux variables; le résultat de M. Appell est susceptible d'être présenté sous une autre forme et en même temps d'être généralisé. Envisageons la fonction abélienne

$$F(u_1, u_2),$$

et supposons que u_1 et u_2 soient liés par la relation

$$\Theta(u_1 + \lambda_1, u_2 + \lambda_2) = 0.$$

F se décompose alors en éléments simples, qui sont de la forme

$$A \frac{d}{du_1} L\Theta(u_1 - G_1, u_2 - G_2) \quad \text{ou} \quad A' \frac{d}{du_2} L\Theta(u_1 - G'_1, u_2 + G'_2),$$

en supposant qu'il n'y ait pas d'infini multiple.

Ce résultat n'est pas susceptible de généralisation dans le cas où il y a plus de deux variables.

SUR LES FONCTIONS Θ

Bulletin de la Société Mathématique de France, t. 11, p. 129-134 (20 juillet 1883).

Considérons une fonction Θ à n variables

$$\Theta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum e^{\varphi + m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_n x_n},$$

φ représentant une forme quadratique par rapport aux n nombres entiers m_1, m_2, ..., m_n. Considérons ensuite n^2 constantes quelconques

$$\begin{array}{cccc} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n}, \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots, & a_{nn}. \end{array}$$

Si nous écrivons, pour abréger,

$$\Theta(x_i - a_{1i}) = \Theta(x_1 - a_{11}, x_2 - a_{12}, \ldots, x_n - a_{1n}),$$

et que nous considérions les n équations simultanées

$$(1) \qquad \Theta(x_i - a_{1i}) = \Theta(x_i - a_{2i}) = \ldots = \Theta(x_i - a_{ni}) = 0,$$

on peut se demander combien ces équations ont de systèmes de solutions communes. Je ne considère pas, bien entendu, comme distinctes les solutions congruentes, c'est-à-dire celles qui ne diffèrent entre elles que par des multiples des périodes.

Le problème est résolu dans le cas de $n = 1$, c'est-à-dire dans le cas particulier des fonctions elliptiques; mais je ne crois pas qu'il le soit encore dans le cas général des fonctions abéliennes.

Dans le cas des fonctions elliptiques, la forme φ se réduit à un seul terme

$$\alpha_1 m_1^2.$$

et la fonction Θ à la série $\Sigma e^{\alpha_1 m_1^2 + m_1 x_1}$.

Les équations (1) se réduisent à l'équation unique

$$(2) \qquad \Theta(x_1 - a) = 0,$$

et cette équation n'admet qu'une solution.

Pour le démontrer, on se sert de la formule de Cauchy qui sert à calculer le nombre des racines d'une équation qui sont intérieures à un contour donné, et l'on applique cette formule au parallélogramme des périodes.

Depuis, M. Kronecker a généralisé la formule de Cauchy de manière à exprimer sous la forme d'une intégrale multiple définie le nombre des solutions communes à un système de n équations à n inconnues, lorsqu'on assujettit ces solutions à être comprises dans un domaine donné.

Malheureusement cette formule ne se prête pas comme on pourrait le croire au premier abord, à la généralisation immédiate de l'analyse qui donne le nombre des solutions de l'équation (2).

En revanche, elle peut nous conduire indirectement à la solution du problème qui nous occupe. En effet, le nombre cherché des solutions des équations (1) ne pourrait dépendre que des périodes, c'est-à-dire des coefficients de la forme quadratique φ, et je vais démontrer qu'il en est indépendant. Pour obtenir le nombre des solutions distinctes des équations (1), il faut chercher le nombre des solutions comprises dans le *prismatoïde* des périodes, pour nous servir d'une expression qu'à employée, pour la première fois, l'illustre géomètre de Berlin que nous citons en ce moment (*Comptes rendus : Des unités complexes*, 1883). C'est donc à ce prismatoïde qu'il faut appliquer l'intégrale de M. Kronecker. Je dis que cette intégrale qui nous donne le nombre cherché est indépendante des coefficients de φ.

En effet, considérons d'une manière générale l'intégrale de M. Kronecker, appliquée à un système d'équations quelconque et à un domaine quelconque, et supposons que ces équations dépendent de certains paramètres variables. L'intégrale ne pourra cesser d'être une fonction continue de ces paramètres que si l'expression sous le signe $\int$ devient infinie pour un point de la périphérie du domaine considéré. Or cela ne peut arriver que si une des solutions du système d'équations données se trouve sur cette périphérie. Mais notre intégrale représente un nombre positif essentiellement entier, de sorte que, toutes les fois qu'elle sera une fonction continue des paramètres envisagés, elle sera *constante*. Ainsi l'intégrale ne peut varier que si une solution entre dans le domaine ou si elle en sort.

Mais, dans le cas particulier qui nous occupe, en admettant qu'une solution sorte du prismatoïde des périodes, il faudra, en vertu de la périodicité même, qu'une autre solution y entre au même instant, de sorte que l'intégrale de M. Kronecker ne peut jamais varier.

Il suffira donc de résoudre le problème dans un cas particulier pour l'avoir résolu dans le cas général. Or cela est aisé, car nous n'avons qu'à supposer

$$\varphi = \alpha_1 m_1^2 + \alpha_2 m_2^2 + \ldots + \alpha_n m_n^2$$

et, en posant alors

$$\theta_i(x_i) = \sum e^{\alpha_i m_i^2 + m_i x_i}$$

on aura

$$\Theta = \theta_1 \theta_2 \ldots \theta_n,$$

de sorte que la fonction Θ se réduira à un produit de fonctions Θ elliptiques.

Les équations (1) se ramènent alors à un certain nombre d'équations de la forme (2), et il est aisé de voir qu'elles admettent $n!$ solutions distinctes. Ainsi, si le nombre des variables est égal successivement à 1, 2, 3, 4, ..., le nombre des solutions des équations (1) sera de 1, 2, 6, 24, ...

Une autre application du même principe va maintenant nous permettre de résoudre un problème un peu plus général.

Considérons un système de $n \times p \times k$ constantes que nous désignerons par la notation

$$a_{ijh},$$

l'indice i variant depuis 1 jusqu'à p, l'indice j depuis 1 jusqu'à n, et l'indice h depuis 1 jusqu'à k. Supposons que l'on ait entre ces quantités les relations suivantes :

$$\sum_{i=1}^{p} a_{ij1} = \sum_{i=1}^{p} a_{ij2} = \sum_{i=1}^{p} a_{ij3} = \ldots = \sum_{i=1}^{p} a_{ijk},$$

et cela quel que soit l'indice j.

Soient de plus $A_1, A_2, \ldots, A_k$, k constantes tout à fait quelconques, et posons

$$H = \sum_{h=1}^{h=k} A_h \prod_{i=1}^{i=p} \Theta(x_j - a_{ijh}).$$

Nous dirons que H est une fonction homogène et de degré p. Cela posé, envisageons n fonctions homogènes

$$H_1, \quad H_2, \quad \ldots, \quad H_n$$

respectivement de degré $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Quel est le nombre des systèmes de valeurs des x qui annulent à la fois ces n fonctions? Le même raisonnement que nous venons de faire montre que ce nombre est constant et indépendant, par exemple, des quantités A_h.

Or, dans le cas où les fonctions H se réduisent à des produits de fonctions Θ, ce nombre est égal à

$$(3) \qquad n! \cdot p_1 p_2 \ldots p_n.$$

Tel est donc le nombre cherché.

Il est à remarquer qu'il peut arriver que les n équatoins

$$H_1 = H_2 = \ldots H_n = 0$$

ne soient pas distinctes, c'est-à-dire qu'elles aient, outre un nombre de solutions communes *isolées*, toujours inférieures à l'expression (3), une infinité de solutions communes non isolées les unes des autres.

C'est en particulier ce qui arrive dans le problème de l'inversion de Jacobi, tel qu'on le traite ordinairement.

Demandons-nous maintenant combien il y a de fonctions

$$\Theta(x_i - a_i)$$

qui s'annulent pour n systèmes donnés de valeurs de x_i.

Je représenterai ces n systèmes par la notation

$$x_i = b_{ik} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, n).$$

Nous aurons alors à résoudre les n équations

$$(4) \qquad \Theta(b_{i1} - a_i) = \Theta(b_{i2} - a_i) = \ldots = \Theta(b_{in} - a_i) = 0$$

par rapport aux a_i.

Ces équations, d'après ce qui précède ont $n!$ solutions communes. Il existe donc $n!$ fonctions Θ qui s'annulent pour n systèmes donnés de valeurs des x.

Si $n > 2$, on a

$$n! > n.$$

Il en résulte que les $n!$ solutions communes des équations (1) ne sont pas indépendantes et qu'il y a entre elles $n! - n$ relations La connaissance de n d'entre elles suffit pour faire connaître les autres.

Mais, pour se rendre compte de la complication des relations envisagées, il suffit de chercher quel est le nombre des systèmes de $n! - n$ solutions complémentaires qui correspondent à un même système de n solutions données.

On pourra construire $n!$ fonctions Θ qui s'annuleront pour les n solutions données; on en choisira n quelconques; ce choix pourra se faire de

$$(5) \qquad N = \frac{(n! - 1)!}{(n! - n)!}$$

manières. A chacune des combinaisons de n fonctions Θ correspondra un système de $n! - n$ solutions complémentaires. Le nombre de ces systèmes sera donc donné par l'expression (5).

Ce nombre croît très rapidement; pour $n = 3, 4, 5, 6, \ldots$, on aura successivement

$$N = 20, \qquad N = 10626, \qquad N > 10^8, \qquad N > 10^{15}.$$

SUR UN THÉORÈME DE RIEMANN
RELATIF AUX FONCTIONS DE n VARIABLES INDÉPENDANTES ADMETTANT $2n$ SYSTÈMES DE PÉRIODES

(EN COLLABORATION AVEC ÉMILE PICARD)

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 97, p. 1284-1287 (3 décembre 1883).

Les fonctions Θ de n variables indépendantes permettent, comme on sait, de former des fonctions uniformes de n variables avec $2n$ systèmes de périodes. Ces périodes ne sont pas arbitraires, car elles satisfont à $\frac{n(n-1)}{2}$ relations bien connues. Dans une conversation avec M. Hermite, lors de son voyage à Paris, en 1860, Riemann avait affirmé que ces relations devaient nécessairement exister entre les $2n$ systèmes de périodes de fonction uniforme de n variables, $2n$ fois périodique [1], tout au moins après une transformation de degré convenable effectuée sur ces périodes, mais il n'a jamais indiqué la marche qui l'a conduit à cette importante proposition. M. Weierstrass aurait depuis annoncé à quelques-uns de ses élèves qu'il possédait une démonstration du théorème précédent, mais l'illustre géomètre de Berlin n'a jamais, à notre connaissance, publié ni indiqué la méthode dont il a fait usage.

La proposition énoncée peut se démontrer aisément à l'aide des considérations suivantes. Soit

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{llll} \omega_{1,1}, & \omega_{1,2}, & \ldots & \omega_{1,2n}, \\ \omega_{2,1}, & \omega_{2,2}, & \ldots & \omega_{2,2n}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \omega_{n,1}, & \omega_{n,2}, & \ldots & \omega_{n,2n} \end{array}\right.$$

[1] M. Hermite a énoncé, d'après Riemann, ce théorème dans une Note faisant suite à la sixième édition du Traité de Lacroix.

un système irréductible de $2n$ périodes simultanées des n variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$. On sait, d'après M. Weierstrass (*Monatsbericht*, 1862), qu'entre $(n+1)$ fonctions $2n$ fois périodiques de n variables, existe une relation algébrique; soit, en désignant ces fonctions par $u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}$,

$$f(u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}) = 0,$$

et l'on peut choisir $(n+1)$ fonctions, de telle sorte que toute autre fonction admettant les mêmes périodes s'exprime rationnellement à l'aide de $u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}$.

Cela posé, on établit que les fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_n$ satisfont au système d'équations aux différentielles totales

$$\begin{aligned}
dx_1 &= P_{1,1}du_1 + P_{1,2}du_2 + \ldots + P_{1,n}du_n,\\
dx_2 &= P_{2,1}du_1 + P_{2,2}du_2 + \ldots + P_{2,n}du_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
dx_n &= P_{n,1}du_1 + P_{n,2}du_2 + \ldots + P_{n,n}du_n,
\end{aligned}$$

où les P sont fonctions rationnelles de $u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}$.

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont donc des intégrales de différentielles totales algébriques admettant le système des périodes (1). Posons maintenant

$$u_1 = \varphi_1(t), \qquad u_2 = \varphi_2(t), \qquad \ldots, \qquad u_n = \varphi_n(t),$$

les φ étant des fonctions rationnelles, absolument arbitraires, d'une variable t; $x_1, x_2, \ldots, x_n$ deviendront des fonctions $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de la seule variable t, et ce seront des intégrales abéliennes de première espèce correspondant à la relation algébrique entre t et u_{n+1},

$$f(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, u_{n+1}) = 0.$$

On remarquera d'abord que ces n intégrales seront linéairement indépendantes, si les φ sont pris d'une manière arbitraire; on voit ensuite que chaque système de périodes correspondantes des intégrales $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sera nécessairement de la forme

$$\begin{aligned}
&m_1\omega_{1,1} + m_2\omega_{1,2} + \ldots + m_{2n}\omega_{1,2n},\\
&m_1\omega_{2,1} + m_2\omega_{2,2} + \ldots + m_{2n}\omega_{2,2n},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&m_1\omega_{n,1} + m_2\omega_{n,2} + \ldots + m_{2n}\omega_{n,2n},
\end{aligned}$$

où les m sont des entiers. En écrivant la relation entre les périodes de deux intégrales quelconques X_α et X_β, on aura donc

$$(2)\qquad \sum_{i=1}^{i=2n}\sum_{k=1}^{k=2n} c_{i,k}\,\omega_{\alpha,i}\,\omega_{\beta,k}=0,$$

les c étant des entiers indépendants de α et β, et l'on a de plus $c_{i,i}=0$, $c_{i,k}=-c_{k,i}$.

Le déterminant $|c_{i,k}|$ d'ordre $2n$, qui est un déterminant gauche, sera un carré parfait m^2.

Admettons pour un instant que m ne soit pas nul; on établira sans peine qu'en effectuant sur les périodes ω une transformation d'ordre m, c'est-à-dire en remplaçant les périodes ω par des périodes Ω qui en soient des fonctions linéaires à coefficients entiers de déterminant égal à m, la relation entre les périodes de X_α et X_β devient, quels que soient α et β,

$$\begin{aligned}\Omega_{\alpha,1}\Omega_{\beta,2}-\Omega_{\alpha,2}\Omega_{\beta,1}+\Omega_{\alpha,3}\Omega_{\beta,4}-\Omega_{\alpha,4}\Omega_{\beta,3}+\ldots\\ +\Omega_{\alpha,2n-1}\Omega_{\beta,2n}-\Omega_{\alpha,2n}\Omega_{\beta,2n-1}=0,\end{aligned}$$

et cette égalité établit le théorème de Riemann.

Nous avons maintenant à montrer que m ne peut être nul; nous nous appuierons pour cela sur la remarque suivante, qui résulte immédiatement d'un théorème fondamental de Riemann. Si l'on pose

$$\omega_{\alpha,i}=A_{\alpha,i}+B_{\alpha,i}\sqrt{-1},$$

la somme

$$\sum_{i=1}^{i=2n}\sum_{k=1}^{k=2n} c_{i,k}\,A_{\alpha,i}B_{\alpha,k}$$

est certainement différente de zéro. Cela admis, nous démontrons que, si le déterminant $|c_{i,k}|=0$, on peut, par une transformation de degré convenable, remplacer le système des ω par un système de Ω, la relation (2) par

$$\Omega_{\alpha,1}\Omega_{\beta,2}-\Omega_{\alpha,2}\Omega_{\beta,1}+\ldots+\Omega_{\alpha,2r-1}\Omega_{\beta,2r}-\Omega_{\alpha,2r}\Omega_{\beta,2r-1}=0,$$

où r est moindre que n. De plus, puisque r est moindre que n, on peut, en considérant une combinaison linéaire convenable de $X_1, X_2, \ldots, X_n$ (laquelle ne peut être identiquement nulle, puisque les X sont linéairement indépendants), supposer, en gardant les mêmes notations, que

$$\Omega_{\alpha,1}=\Omega_{\alpha,3}=\ldots=\Omega_{\alpha,2r-1}=0;$$

mais, d'après la remarque précédente, si l'on pose

$$\Omega_{\alpha,i} = A_i - B_i\sqrt{-1},$$

la somme

$$A_1B_2 - A_2B_1 + A_3B_4 - A_4B_3 - \ldots + A_{2r-1}B_{2r} - A_{2r}B_{2r-1}$$

n'est pas nulle, ce qui nous amène à une contradiction, puisque, ici,

$$A_1 = B_1 = 0, \qquad A_3 = B_3 = 0, \qquad \ldots, \qquad A_{2r-1} = B_{2r-1} = 0.$$

Le déterminant ne peut donc être nul, et la démonstration est complète.

On déduit immédiatement du théorème qui vient d'être établi cette conséquence bien digne d'intérêt : *toute fonction* $2n$ *fois périodique de* n *variables indépendantes peut être exprimée au moyen des fonctions* Θ.

SUR LES FONCTIONS ABÉLIENNES

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 100, p. 785-787 (16 mars 1885).

Dans une Communication que j'ai eu l'honneur de faire à l'Académie, le 18 avril 1881, et dans un travail plus étendu, inséré au Tome XI du *Bulletin de la Société mathématique de France*, j'ai donné une formule pour déterminer le nombre des zéros communs à p fonctions Θ à p variables ([1]).

Appelons fonction Θ d'ordre m une fonction entière de p variables x_1, x_2, ..., x_p qui ne change pas quand on augmente ces variables d'une des p premières périodes et qui se multiplie respectivement par les facteurs

$$(1) \qquad e^{-m x_1+\delta_1}, \quad e^{-m x_2+\delta_2}, \quad \dots, \quad e^{-m x_p+\delta_p}$$

quand les variables augmentent d'une des p dernières périodes. Les quantités (1) s'appelleront les multiplicateurs.

Si l'on considère p fonctions Θ_1, Θ_2, ..., Θ_p d'ordres m_1, m_2, ..., m_p, les équations

$$\Theta_1 = \Theta_2 = \ldots = \Theta_p = 0$$

admettront

$$N = p!\, m_1 m_2 \ldots m_p$$

solutions distinctes (c'est-à-dire non congruentes).

Soient X_1 la somme des N valeurs de x_1, X_2 la somme des N valeurs de x_2, ..., X_p la somme des N valeurs de x_p qui satisfont à ces p équations. Il y a moyen de calculer X_i.

(1) *Voir* ce Tome IV, p. 299 et 302.

Soit

$$e^{-m_i v_k + \delta_{ik}}$$

le $k^{\text{ième}}$ multiplicateur de la fonction Θ_i. On trouvera

$$X_i = F_i,$$

F_i étant un polynôme du premier degré par rapport aux δ_{ik} et dont les coefficients dépendent des quantités $m_1, m_2, \ldots, m_p$ et des périodes. F_i sera aussi un polynôme du premier degré par rapport à chacune des quantités m considérées séparément et par rapport aux périodes.

Supposons $p = 2$ pour fixer les idées; appelons les périodes, pour plus de symétrie,

$$\begin{matrix} a_1, & a_2, & a_3, & a_4, \\ b_1, & b_2, & b_3, & b_4. \end{matrix}$$

Envisageons, toujours pour la symétrie, au lieu des fonctions Θ, des fonctions φ plus générales, analogues aux fonctions intermédiaires de MM. Briot et Bouquet, et définies par les quatre identités

$$\varphi(x_1 + a_i, x_2 + b_i) = \varphi(x_1, x_2)\, e^{\alpha_i x_1 + \beta_i x_2 + \gamma_i} \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Posons ensuite

$$\delta_i = \gamma_i - \frac{1}{2}(\alpha_i a_i + \beta_i b_i),$$

$$M_{ij} = a_i \alpha_j - a_j \alpha_i + b_i \beta_j - b_j \beta_i,$$

$$\Gamma_1 = a_3 \delta_1 - a_1 \delta_3 + a_4 \delta_2 - a_2 \delta_4,$$

$$\Gamma_2 = b_3 \delta_1 - b_1 \delta_3 + b_4 \delta_2 - b_2 \delta_4.$$

Les quantités M et Γ peuvent être regardées comme des invariants, c'est-à-dire qu'elles ne changent pas quand on multiplie la fonction φ par une exponentielle

$$e^{\lambda x_1^2 + 2\mu x_1 x_2 + \nu x_2^2 + h x_1 + k x_2}.$$

On devra avoir

$$(2) \qquad \Sigma M_{ij} y_i z_j = -2 m i \pi (y_1 z_3 - y_3 z_1 + y_2 z_4 - y_4 z_2),$$

m étant l'ordre de la fonction φ. Il ne peut y avoir de fonctions intermédiaires, où les invariants M auraient d'autres valeurs que celles qui résultent de l'identité (2), *si ce n'est dans les cas de réduction des périodes étudiées par M. Picard.*

Considérons maintenant deux fonctions intermédiaires φ et φ', et appelons

m', α', β', δ', Γ' les quantités analogues à m, α, β, δ, Γ et relatives à la seconde fonction φ'. Les équations

$$\varphi = \varphi' = 0$$

auront $2mm'$ solutions distinctes, et les sommes X_1 et X_2 des $2mm'$ valeurs de x_1 et des $2mm'$ valeurs de x_2, qui satisfont à ces équations, seront données par les congruences

$$X_1 \equiv -\frac{1}{2i\pi}(\Gamma_1 m' + \Gamma'_1 m),$$

$$X_2 \equiv -\frac{1}{2i\pi}(\Gamma_2 m' + \Gamma'_2 m).$$

Il y a une autre manière d'étudier le nombre des zéros de la fonction φ. Supposons qu'on recherche combien cette fonction admet de zéros distincts de la forme suivante

$$x_1 = a_i t + a_j u,$$
$$x_2 = b_i t + b_j u,$$

les quantités t et u étant assujetties à être réelles. On partagera ces zéros en deux classes suivant le signe du déterminant fonctionnel :

$$\frac{d\psi}{dt}\frac{d\theta}{du} - \frac{d\psi}{du}\frac{d\theta}{dt},$$

ψ et θ étant les parties réelle et imaginaire de φ.

On trouvera que le nombre des zéros distincts de la première classe, diminué de celui des zéros distincts de la seconde classe, est égal à $-\frac{M_{ij}}{2i\pi}$, c'est-à-dire à m dans le cas de $i = 1$, $j = 3$, ou de $i = 2$, $j = 4$, et à 0 dans tous les autres cas. En conséquence, le nombre total des zéros distincts est au moins égal à m si $i = 1$, $j = 3$, ou si $i = 2$, $j = 4$, et il diffère de m d'un nombre pair. Il est toujours pair dans tous les autres cas.

SUR LA

TRANSFORMATION DES FONCTIONS FUCHSIENNES

ET LA

RÉDUCTION DES INTÉGRALES ABÉLIENNES

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 102, p. 41-44 (4 janvier 1886).

Soient x et y deux variables liées par une relation algébrique

$$\varphi(x, y) = 0 \tag{1}$$

de genre p; posons

$$x = f(x', y'), \qquad y = f_1(x', y'), \tag{2}$$

f et f_1 étant rationnels. On en déduira entre x' et y' une relation algébrique

$$\psi(x', y') = 0, \tag{3}$$

qui sera, en général, de genre $q > p$. On voit ainsi comment, par une opération algébrique, une courbe de genre q peut se réduire au genre p. En même temps, les fonctions abéliennes de rang q, engendrées par la courbe (3), peuvent se réduire à des fonctions de rang p.

La réduction des fonctions abéliennes a été l'objet de travaux fort nombreux, parmi lesquels les plus approfondis sont ceux de MM. Weierstrass et Picard. J'ai donné moi-même, à ce sujet, un théorème, d'après lequel, quand il y a réduction, on peut, par une transformation d'ordre k, changer la fonction Θ à réduire en un produit de fonctions Θ, d'un moindre nombre de variables. L'entier k est alors le nombre caractéristique de la réduction.

Ce théorème fournit une classification très simple des cas de réduction, qui peut être utile pour divers objets, mais qui offre l'inconvénient grave de ne pas distinguer des autres les cas où la réduction des fonctions abéliennes est accompagnée de la réduction du genre d'une courbe algébrique.

On sait, en effet, que tous les systèmes de fonctions abéliennes ne sont pas engendrés par une courbe algébrique; et, quand on appliquera la réduction à des fonctions engendrées de cette façon, il n'arrivera pas toujours que les fonctions réduites soient susceptibles du même mode de génération. Nous avons démontré, au contraire, M. Picard et moi, qu'un système *quelconque* de fonctions abéliennes peut être déduit par réduction d'un système analogue, engendré par une courbe algébrique.

On peut éviter cet inconvénient, en prenant pour point de départ d'une classification des cas de réduction la théorie de la transformation des fonctions fuchsiennes. On peut se proposer, étant donné un groupe fuchsien, de trouver les sous-groupes fuchsiens qui y sont contenus, et cette étude présente avec la transformation des fonctions elliptiques une analogie sur laquelle il est inutile d'insister.

Avant d'aller plus loin, revenons aux équations (1) et (2) et observons que x' et y' seront, en général, des fonctions non uniformes de x et de y; mais que ces fonctions peuvent cependant être inramifiées (*unverzweigt*), c'est-à-dire que, quand x et y décrivent des contours fermés *infiniment petits*, x' et y' reviennent à la même valeur.

Comme premier résultat, on peut montrer que, si x' et y' sont des fonctions inramifiées, et si $p = 1$, on devra avoir aussi $q = 1$, de telle sorte que la réduction au genre 1 par des fonctions inramifiées est impossible. Si $p = q = 1$, le problème de la réduction se ramène simplement à celui de la transformation des fonctions elliptiques.

Je me bornerai, pour le moment, à citer quelques exemples. Je numéroterai les côtés du polygone générateur de mon groupe fuchsien, en suivant son périmètre dans le sens positif, et j'exprimerai la loi de conjugaison des côtés par la notation suivante : $(a, b; c, d; \ldots)$, ce qui voudra dire que le côté numéroté a est conjugué du côté b, le côté c du côté d, etc. L'angle des deux côtés a et b sera désigné par la notation $\overline{a.b}$; la substitution qui change le côté a dans le côté conjugué b, par la notation $S(a, b)$; le polygone fondamental s'appellera P, et son transformé par la substitution $S(a, b)$ s'appellera $PS(a, b)$. J'appellerai q, p et k, le genre avant réduction, le genre après réduction et le nombre caractéristique de la réduction.

Le polygone Q générateur du sous-groupe envisagé se composera du polygone P et d'un certain nombre de ses transformées; le côté numéroté 1 sera le même dans P et dans Q.

Exemple I. — P est un hexagone avec la loi de conjugaison

$$(1,3;\ 2,4;\ 5,6).$$

$\overline{5.6} = \pi$, la somme des autres angles est égale à π. Nous prendrons

$$Q = P + PS(5,6);$$

Q sera un octogone avec la loi $(1,3;\ 2,4;\ 5,7;\ 6,8)$.

$$p = 1, \qquad q = 2, \qquad k = 2$$

(réduction du genre 2 au genre 1 avec entier caractéristique 2).

Exemple II. — P est un hexagone avec la même loi de conjuguaison que plus haut.

$\overline{5.6} = \frac{2\pi}{3}$, la somme des autres angles est $\frac{2\pi}{3}$. Nous prendrons

$$Q = P + PS(5,6) + PS^2(5,6);$$

Q sera un dodécagone avec la loi $(1,3;\ 2,4;\ 5,7;\ 6,8;\ 9,11;\ 10,12)$.

$$p = 1, \qquad q = 3, \qquad k = 3.$$

Exemple III. — P est encore un hexagone, et sa loi est toujours la même. On a encore

$$Q = P + PS(5,6) + PS^2(5,6).$$

L'angle $\overline{5.6}$ est toujours $\frac{2\pi}{3}$, mais la somme des autres angles est 2π. La loi du dodécagone est changée et devient

$$(1,3;\ 2,8;\ 4,6;\ 5,11;\ 7,9;\ 10,12).$$

$$p = 1; \qquad q = 2, \qquad k = 3.$$

Exemple IV. — P est un hexagone dont les côtés opposés sont conjugués. La somme des angles de rang pair, de même que celle des angles de rang impair est égale à π. Nous prendrons

$$Q = P + PS(1,4) + PS^2(1,4);$$

Q aura 14 côtés et nous prendrons, pour loi de conjugaison,

$$(1,8;\ 7,14;\ 5,12;\ 3,10;\ 6,9;\ 4,11;\ 2,13).$$

On a encore

$$p=1,\qquad q=2,\qquad k=3.$$

Exemple V. — P est un octogone dont les côtés opposés sont conjugués. On prendra

$$Q = P + PS(1,5).$$

Q aura 14 côtés; je prendrai les côtés opposés conjugués.

Dans ce cas, on aura

$$p=2,\qquad q=5,\qquad k=2,$$

et x', y' seront des fonctions inramifiées de x et y.

SUR LES FONCTIONS ABÉLIENNES

American Journal of mathematics, t. 8, p. 289-342 (1886).

I. — Réduction des intégrales.

J'ai donné dans le *Bulletin de la Société mathématique de France* (t. 12, p. 124) [1] une démonstration et une généralisation de deux théorèmes de M. Weierstrass. Je veux d'abord rappeler ici succinctement, en y ajoutant quelques compléments, ce qu'il y a d'essentiel dans cette démonstration.

Soient $J_1, J_2, \ldots, J_\rho$, ρ intégrales abéliennes de rang ρ.

Soient

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_\rho; \quad x'_1, \quad x'_2, \quad \ldots, \quad x'_\rho,$$

un système de périodes normales de J_1;

$$y_1, \quad y_2, \quad \ldots, \quad y_\rho; \quad y'_1, \quad y'_2, \quad \ldots, \quad y'_\rho$$

les périodes correspondantes de J_2;

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$t_1, \quad t_2, \quad \ldots, \quad t_\rho; \quad t'_1, \quad t'_2, \quad \ldots, \quad t'_\rho$$

les périodes correspondantes de J_μ;

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et enfin

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_\rho; \quad u'_1, \quad u'_2, \quad \ldots, \quad u'_\rho$$

celles de J_ρ.

---

[1] *Voir* Tome III, p. 333-351.

De telle façon que l'on ait

$$x_1 y'_1 - x'_1 y_1 + x_2 y'_2 - x'_2 y_2 - \ldots + x_\rho y'_\rho - x'_\rho y_\rho = 0$$

et $\frac{\rho(\rho-1)}{2} - 1$ autres relations de même forme.

Imaginons maintenant que l'on puisse trouver $2\mu^2$ nombres

$$\begin{array}{cccc}
\xi_1, & \xi_2, & \ldots, & \xi_{2\mu}, \\
\eta_1, & \eta_2, & \ldots, & \eta_{2\mu}, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots, \\
\tau_1, & \tau_2, & \ldots, & \tau_{2\mu},
\end{array}$$

tels que les périodes de l'intégrale J_1 puissent se mettre sous la forme suivante :

$$x_i = \Sigma_k \alpha_{i.k} \xi_k; \qquad x'_i = \Sigma_k \alpha'_{i.k} \xi_k,$$

les $4\mu\rho$ nombres $\alpha_{i.k}$ et $\alpha'_{i.k}$ étant tous entiers.

Supposons que l'on ait de même pour les périodes de l'intégrale J_2 :

$$y_i = \Sigma \alpha_{i.k} \eta_k; \qquad y'_i = \Sigma \alpha'_{i.k} \eta_k.$$

(les nombres $\alpha_{i.k}$ et $\alpha'_{i.k}$ conservant les mêmes valeurs que plus haut) qu'il en soit de même pour les périodes des intégrales suivantes $J_3, \ldots$ et qu'enfin pour les périodes de l'intégrale J_μ on ait

$$t_i = \Sigma \alpha_{i.k} \tau_k; \qquad t'_i = \Sigma \alpha'_{i.k} \tau_k.$$

Nous dirons alors que les μ intégrales $J_1, J_2, \ldots, J_\mu$ sont réductibles au genre μ.

Nous formerons le tableau de $4\mu\rho$ nombres entiers :

$$(1) \qquad \begin{vmatrix}
\alpha_{1.1} & \alpha'_{1.1} & \alpha_{2.1} & \alpha'_{2.1} & \ldots & \alpha_{\rho.1} & \alpha'_{\rho.1} \\
\alpha_{1.2} & \alpha'_{1.2} & \alpha_{2.2} & \alpha'_{2.2} & \ldots & \alpha_{\rho.2} & \alpha'_{\rho.2} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\alpha_{1.2\mu} & \alpha'_{1.2\mu} & \alpha_{2.2\mu} & \alpha'_{2.2\mu} & \ldots & \alpha_{\rho.2\mu} & \alpha'_{\rho.2\mu}
\end{vmatrix},$$

Le problème que nous nous proposons est de réduire ce tableau à sa plus simple expression.

Voici comment cette réduction peut se faire :

1° Au lieu d'envisager un système de périodes normales

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_\rho; \quad x'_1, \quad x'_2, \quad \ldots, \quad x'_\rho$$

de l'intégrale J_1 et les périodes correspondantes des autres intégrales, on aurait pu envisager un *autre* système de périodes normales de J_1.

Par exemple :

$$x_1 + x'_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_\rho; \qquad x'_1, \quad x'_2, \quad \ldots, \quad x'_\rho$$

ou bien

$$-x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_\rho; \quad -x'_1, \quad x'_2, \quad \ldots, \quad x'_\rho$$

ou bien

$$-x'_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_\rho; \qquad x_1, \quad x'_2, \quad \ldots, \quad x'_\rho$$

formeront encore trois systèmes de périodes normales de J_1.

Il sera donc permis :

Ou bien d'ajouter dans le tableau (1) aux termes d'une colonne de rang impair, les termes correspondants de la colonne de rang pair qui la suit (nous dirons pour abréger que ces deux colonnes appartiennent à la même paire).

Ou bien de changer de signe tous les termes des deux colonnes d'une même paire.

Ou bien de permuter deux colonnes d'une même paire en changeant tous les signes de l'une d'elles.

Plus généralement on peut faire l'opération suivante que j'appellerai l'opération A et qui n'est qu'une combinaison de celles dont nous venons de parler :

Remplacer les nombres $\alpha_{i,k}$ et $\alpha'_{i,k}$ par les nombres entiers $\beta_{i,k}$ et $\beta'_{i,k}$ définis comme il suit :

$$\beta_{i,k} = a_i \alpha_{i,k} + b_i \alpha'_{i,k}; \qquad \beta'_{i,k} = c_i \alpha_{i,k} + d_i \alpha'_{i,k},$$

où

$$(a_1, b_1, c_1, d_1), \quad (a_2, b_2, c_2, d_2), \quad \ldots, \quad (a_\rho, b_\rho, c_\rho, d_\rho)$$

sont 4ρ nombres entiers satisfaisant aux ρ conditions

$$a_i d_i - b_i c_i = 1.$$

De même les périodes

$$-x_2, \quad x_1, \quad x_3, \quad x_4, \quad \ldots, \quad x_\rho; \quad -x'_2, \quad x'_1, \quad x'_3, \quad x'_4, \quad \ldots, \quad x'_\rho$$

ou bien

$$x_1 + x_2, \quad x_2, \quad x_3, \quad \ldots, \quad x_\rho; \qquad x'_1, \quad x'_2 - x'_1, \quad x'_3, \quad \ldots, \quad x'_\rho$$

sont encore des périodes normales.

Il est donc permis :

Ou bien de permuter deux paires de colonnes en changeant tous les signes de l'une d'entre elles.

Ou bien d'ajouter la première colonne d'une paire π à la première colonne d'une autre paire π' et de retrancher en même temps la deuxième colonne de la paire π' de la deuxième colonne de la paire π.

Plus géŕalement on peut faire l'opération suivante que j'appellerai l'opération B :

Remplacer les nombres $\alpha_{i,k}$ et $\alpha'_{i,k}$ par les nombres $\beta_{i,k}$ et $\beta'_{i,k}$ définis comme il suit :

$$\beta_{i,k} = \Sigma_j a_{i,j} \alpha_{j,k}; \qquad \beta'_{i,k} = \Sigma_j b_{i,j} \alpha'_{j,k},$$

les $a_{i,j}$ et les $b_{i,j}$ étant des nombres entiers satisfaisant aux conditions suivantes : le déterminant des $a_{i,j}$ est égal à 1 de même que celui des $b_{i,j}$; de plus on a

$$\Sigma_i a_{i,j} b_{i,k} = 0 \qquad \text{si} \quad j \quad k,$$

et

$$\Sigma_i a_{i,j} b_{i,j} = 1,$$

de telle sorte que les deux substitutions linéaires définies, la première par les ρ^2 nombres $a_{i,j}$, la seconde par les ρ^2 nombres $b_{i,j}$ soient deux substitutions corrélatives.

2° Posons maintenant

$$\xi'_k = \Sigma a_{i,k} \xi_i,$$

les $a_{i,k}$ étant des coefficients entiers dont le déterminant est égal à 1. Supposons de plus que les quantités

$$\eta'_k, \quad \ldots, \quad \tau_k$$

soient formées à l'aide des η, ... et des τ comme les ξ' sont formés avec les ξ.

Par hypothèse les périodes de l'intégrale J_1 sont des combinaisons linéaires à coefficients entiers des quantités ξ et les périodes des intégrales J_2, ..., J_μ seront formées avec les quantitées η, ..., τ comme celles de J_1 avec les quantités ξ.

De même (et cela se voit sans peine), les périodes de l'intégrale J_1 seront des combinaisons linéaires à coefficients entiers des quantités ξ' et les périodes des intégrales J_2, ..., J_μ seront formées avec les quantités η', ..., τ' comme celles de J_1 avec les quantités ξ'.

Il est donc permis de faire l'opération suivante que j'appellerai l'opération C :

Remplacer les nombres $\alpha_{i,k}$ et $\alpha'_{i,k}$ par les nombres $\beta_{i,k}$ et $\beta'_{i,k}$ définis comme il suit :

$$\beta_{i,k} = \Sigma_j a_{j,k}\alpha_{i,j}; \qquad \beta'_{i,k} = \Sigma_j a_{j,k}\alpha'_{i,j},$$

les coefficients $a_{j,k}$ étant $4\mu^2$ nombres entiers dont le déterminant est égal à 1.

On peut en particulier permuter deux lignes du tableau (1) en changeant tous les signes de l'une d'elles, ou bien ajouter une ligne à une autre.

En d'autres termes, on conserve le même système de périodes normales, mais on remplace le système des quantités ξ auxquelles ces périodes peuvent se réduire par un système équivalent.

Le problème que je me propose est de réduire le tableau (1) à sa plus simple expression par le moyen des opérations A, B et C.

Envisageons d'abord le cas où $\mu = 1$, c'est-à-dire où l'intégrale J_1 est réductible aux intégrales elliptiques. Nous supposerons de plus, mais seulement pour fixer les idées, $\rho = 3$.

Le tableau (1) s'écrira alors

$$\begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha'_{1,1} & \alpha_{2,1} & \alpha'_{2,1} & \alpha_{3,1} & \alpha'_{3,1} \\ \alpha_{1,2} & \alpha'_{1,2} & \alpha_{2,2} & \alpha'_{2,2} & \alpha_{3,2} & \alpha'_{3,2} \end{vmatrix}.$$

Il est clair que les opérations A, B, C appliquées au tableau précédent ne changeront : ni la quantité

$$(2) \qquad \alpha_{1,1}\alpha'_{1,2} - \alpha_{1,2}\alpha'_{1,1} + \alpha_{2,1}\alpha'_{2,2} - \alpha_{2,2}\alpha'_{2,1} + \alpha_{3,1}\alpha'_{3,2} - \alpha_{3,2}\alpha'_{3,1},$$

ni le plus grand commun diviseur des termes de la première ligne, ni celui des termes de la deuxième ligne, ni celui des déterminants formés avec deux des colonnes du tableau.

Cela posé :

1° On peut, par l'opération A, annuler $\alpha'_{1,1}$, $\alpha'_{2,1}$, $\alpha'_{3,1}$. Il est donc toujours permis de supposer que le tableau (1) s'écrit

$$\begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & 0 & \alpha_{2,1} & 0 & \alpha_{3,1} & 0 \\ \alpha_{1,2} & \alpha'_{1,2} & \alpha_{2,2} & \alpha'_{2,2} & \alpha_{3,2} & \alpha'_{3,2} \end{vmatrix}.$$

2° Appliquons maintenant l'opération B. Les nombres $\alpha'_{1,1}$, $\alpha'_{2,1}$, $\alpha'_{3,1}$ ne cesseront pas d'être nuls; mais nous pourrons nous servir de cette opération de façon à annuler $\alpha_{2,1}$ et $\alpha_{3,1}$. Il arrivera alors que $\alpha_{1,1}$ sera le seul terme de la première ligne qui ne sera pas nul; je puis toujours le supposer égal à 1; car s'il ne l'était pas on pourrait remplacer la période ξ_1 par son multiple $\alpha_{1,1}\xi_1$ et $\alpha_{1,1}$ deviendrait ainsi égal à 1. Il est donc toujours permis de supposer que le tableau (1) s'écrit

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{1,2} & \alpha'_{1,2} & \alpha_{2,2} & \alpha'_{2,2} & \alpha_{3,2} & \alpha'_{3,2} \end{vmatrix}.$$

3° Appliquons de nouveau l'opération A, mais sans toucher à la première paire de colonnes; les termes déjà annulés resteront nuls. Mais nous pourrons diriger l'opération de façon à annuler $\alpha'_{2,2}$ et $\alpha'_{3,2}$. Le tableau deviendra

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{1,2} & \alpha'_{1,2} & \alpha_{2,2} & 0 & \alpha_{3,2} & 0 \end{vmatrix}.$$

4° Appliquons l'opération B sans toucher à la première paire de colonnes; les termes déjà annulés resteront nuls, et nous pourrons diriger l'opération de façon à annuler $\alpha_{3,2}$.

Le tableau (1) s'écrira alors, en remplaçant les lettres α pourvues d'indices par de simples lettres a, b, c, etc.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

5° Appliquons maintenant l'opération C en retranchant a fois la première ligne de la seconde; le tableau se simplifie encore et s'écrit

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & c & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

On est ainsi conduit au théorème de M. Weierstrass que j'ai démontré et généralisé dans la Note citée plus haut.

Mais la simplification peut être encore poussée plus loin ainsi que M. Picard l'a montré dans le cas de $\rho = 2$.

Le nombre b (que je puis toujours regarder comme premier avec c) est une constante absolue à laquelle je ne puis toucher, car ce n'est autre chose que l'invariant (2). Mais je vais montrer que je puis en dirigeant convenablement les opérations rendre c égal à tel nombre entier (premier avec b) que je voudrai et en particulier à 1.

Je puis en combinant les opérations A et B, ajouter α fois la deuxième colonne à la troisième en ajoutant α fois la quatrième colonne à la première.

Le tableau devient

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & c+\alpha b & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Je puis de même ajouter β fois la deuxième colonne à la quatrième en retranchant β fois la troisième colonne de la première; il vient alors

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta c-\alpha\beta b & b & c+\alpha b & \beta b & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Je puis toujours choisir les nombres entiers α et β de telle sorte que le plus grand commun diviseur de

$$c+ab \quad \text{et de} \quad \beta b$$

soit tel nombre d (premier avec b) que je voudrai.

Appliquons ensuite l'opération A sans toucher à la première paire de colonnes, mais de façon à annuler le quatrième terme de la deuxième ligne; il vient

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta c-\alpha\beta b & b & d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

ou en ajoutant $\beta c+\alpha\beta b$ fois la première ligne à la deuxième

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

d'où il suit que la forme la plus simple du tableau (1) est la suivante :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Nous allons maintenant passer au cas général.

Voyons d'abord quels sont les invariants que les opérations A, B et C laisseront inaltérés.

Il y a en premier lieu le plus grand commun diviseur des déterminants obtenus en prenant 2μ colonnes dans le tableau (1). Je pourrai toujours supposer que ce commun diviseur est égal à 1.

En effet l'opération C permet de remplacer le système des périodes ξ par un système équivalent. Mais il peut arriver dans certains cas qu'on puisse remplacer ce système par un autre, non pas équivalent mais plus simple.

Si par exemple on avait (en faisant pour plus de simplicité $\rho = 2$, $\mu = 1$) :

$$x_1 = 2\xi_1, \qquad x'_1 = b\xi_2, \qquad x_2 = \xi_2, \qquad x'_2 = 0,$$

il serait plus simple de poser $2\xi_1 = \xi'_1$ et de considérer le système des périodes ξ'_1 et ξ_2; c'est d'ailleurs ce que nous avons déjà fait une fois.

Si donc les déterminants définis plus haut n'étaient pas premiers entre eux, il serait possible de remplacer les périodes ξ par un autre système plus simple et on réduirait ainsi à l'unité le plus grand commun diviseur en question.

Cela posé, les $\mu(2\mu - 1)$ quantités

$$\Phi_{k,q} = \Sigma_i (a_{i,k} a'_{i,q} - a_{i,q} a'_{i,k})$$

ne sont pas altérées par les opérations A et B.

La forme bilinéaire

$$F = \Sigma_{k,q} \Phi_{k,q} \xi_k \eta_q$$

(où l'on donne à k et à q les valeurs $1, 2, \ldots, 2\mu$ en observant que

$$\Phi_{k,q} = -\Phi_{q,k}, \qquad \Phi_{q,q} = 0)$$

ne sera donc pas altérée par les opérations A et B.

On voit sans peine que l'opération C change cette forme en une autre équivalente, au sens arithmétique du mot.

Soit Δ^2 le déterminant des nombres $\Phi_{k,p}$ (qui est évidemment un carré parfait); ce sera un premier invariant de la forme F.

Nous allons chercher à réduire cette forme bilinéaire F à sa plus simple expression par une transformation linéaire convenablement choisie.

Si Δ n'est pas nul, la forme F pourra être réduite ainsi qu'il suit :

$$F = \Sigma_k A_k (\xi_{2k-1} \eta_{2k} - \xi_{2k} \eta_{2k-1}),$$

où $A_1, A_2, \ldots, A_\mu$ sont μ nombres entiers tels que

$$A_1 A_2 A_3 \ldots A_\mu = \Delta.$$

Il suffit pour s'en assurer de répéter presque sans y rien changer le raisonnement de MM. Clebsch et Jordan (*Theorie der Abelschen Functionen*, p. 103).

Il en sera encore de même si Δ est nul; seulement un ou plusieurs des nombres A_k seraient nuls.

Mais on peut pousser plus loin encore la réduction. Supposons pour fixer les idées $\mu = 3$, et imaginons (en supposant Δ différent de 0) que la forme F soit réduite ainsi qu'il suit :

$$A_1(\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1) + A_2(\xi_3\eta_4 - \xi_4\eta_3) + A_3(\xi_5\eta_6 - \xi_6\eta_5).$$

Soit A le plus grand commun diviseur des trois nombres A_1, A_2, A_3; soit A^2B celui des trois produits A_1A_2, A_1A_3, A_2A_3; soit enfin

$$A_1A_2A_3 = A^3B^2C = \Delta,$$

la forme F peut être réduite encore ainsi qu'il suit :

$$A(\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1) + AB(\xi_3\eta_4 - \xi_4\eta_3) + ABC(\xi_5\eta_6 - \xi_6\eta_5).$$

Ceci nous fait voir quels sont, outre Δ les invariants de la forme F.

Soit Δ_i le plus grand commun diviseur des mineurs d'ordre i du déterminant Δ^2; ce sera un invariant, et la forme F n'en aura pas d'autres; il suffira d'ailleurs d'envisager les mineurs d'ordre impair.

Observons maintenant que les $2\mu^2$ quantités ξ, η, ..., τ ne peuvent être choisies arbitrairement. Envisageons en effet la forme bilinéaire

$$\Sigma_i(x_iy'_i - x'_iy_i).$$

Si l'on y substitue à la place de x_i ou de x'_i

$$a_1x_i + a_2y_i + a_3z_i + \ldots + a_\mu t_i,$$
$$a_1x'_i + a_2y'_i + a_3z'_i + \ldots + a_\mu t'_i,$$

et en même temps à la place de y_i ou de y'_i

$$b_1x_i + b_2y_i + b_3z_i + \ldots + b_\mu t_i,$$
$$b_1x'_i + b_2y'_i + b_3z'_i + \ldots + b_\mu t'_i,$$

les a et b étant 2μ nombres tout à fait quelconques, le résultat de la substitution devra être nul.

Si l'on substitue à la place de x_i ou de x'_i les parties réelles de

$$a_1x_i + a_2y_i + a_3z_i + \ldots + a_\mu t_i,$$
$$a_1x'_i + a_2y'_i + a_3z'_i + \ldots + a_\mu t'_i,$$

et à la place de y_i ou de y'_i les parties imaginaires des mêmes quantités, le résultat de la substitution devra être positif.

Reprenons donc la forme

$$F(\xi_k, \eta_k) = \Sigma\Phi_{k,q}\xi_k\eta_q.$$

Nous devrons avoir

$$F(a_1\xi_k + a_2\eta_k + \ldots + a_\mu\tau_k,\ b_1\xi_k + b_2\eta_k + \ldots + b_\mu\tau_k) = 0,$$
$$F[R(a_1\xi_k + a_2\eta_k + \ldots + a_\mu\tau_k),\ I(a_1\xi_k + a_2\eta_k + \ldots + a_\mu\tau_k)] > 0,$$

quelles que soient les quantités a et b.

Nous désignons pour abréger par $R(u)$ et $I(u)$ les parties réelle et imaginaire de u.

Nous pouvons toujours supposer que la forme F est réduite. Nous l'écrirons donc en supposant $\mu = 3$ pour fixer les idées

$$F(\xi_k, \eta_k) = A_1(\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1) + A_2(\xi_3\eta_4 - \xi_4\eta_3) + A_3(\xi_5\eta_6 - \xi_6\eta_5).$$

Je dis que les trois nombres A_1, A_2, A_3 sont différents de zéro. Supposons en effet que A_3 par exemple soit nul. On pourrait choisir alors les nombres a_1, a_2 et a_3 de telle sorte que

$$\arg(a_1\xi_1 + a_2\eta_1 + a_3\tau_1) = \arg(a_1\xi_2 + a_2\eta_2 + a_3\tau_2),$$
$$\arg(a_1\xi_3 + a_2\eta_3 + a_3\tau_3) = \arg(a_1\xi_4 + a_2\eta_4 + a_3\tau_4).$$

Ces deux conditions jointes à $A_3 = 0$ entraîneraient

$$F[R(a_1\xi_k + a_2\eta_k + a_3\tau_k),\ I(a_1\xi_k + a_2\eta_k + a_3\tau_k)] = 0,$$

ce qui serait contraire à l'inégalité démontrée plus haut. *Donc Δ ne peut jamais être nul.*

Cela posé, on voit sans peine que l'on a entre les ξ, les η et les τ la relation

$$A_1(\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1) + A_2(\xi_3\eta_4 - \xi_4\eta_3) + A_3(\xi_5\eta_6 - \xi_6\eta_5) = 0$$

et les deux relations analogues.

Cette démonstration se trouve dans une Note que nous avons publiée, M. Picard et moi, dans le Tome 97 des *Comptes rendus* [1]. Dans cette Note nous avons établi que toute fonction analytique de n variables et à $2n$ périodes peut s'exprimer à l'aide des fonctions Θ. Mais je ne reproduis ici que la portion de la démonstration qui est utile pour mon objet actuel.

Revenons maintenant au problème de la réduction du tableau (1) et supposons pour fixer les idées, $\mu = 2$, $\rho = 4$.

---

(1) *Voir* ce tome IV, p. 307.

Nous commencerons au moyen de l'opération C par réduire la forme F à sa plus simple expression. Nous écrirons donc

$$F = a(\xi_1\eta_4 - \xi_4\eta_1) + ab(\xi_2\eta_3 - \xi_3\eta_2),$$

a et b étant deux entiers différents de zéro; cela est toujours possible d'après ce qui précède.

Nous avons vu en traitant le cas particulier de $\mu = 1$, qu'on peut par les opérations A et B faire disparaître tous les termes de la première ligne du tableau (1), sauf le premier; qu'on peut ensuite par les opérations A et B, et en ayant soin de ne pas toucher à la première paire, faire disparaître tous les termes de la deuxième ligne sauf les trois premiers. Nous opérerons de même ici et nous ferons disparaître tous les termes, sauf le premier de la première ligne, les trois premiers de la deuxième, les cinq premiers de la troisième et les sept premiers de la quatrième.

Le tableau (1) s'écrira alors

$$\begin{vmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\alpha_{1.2} & \alpha'_{1.2} & \alpha_{2.2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\alpha_{1.3} & \alpha'_{1.3} & \alpha_{2.3} & \alpha'_{2.3} & \alpha_{3.3} & 0 & 0 & 0 \\
\alpha_{1.4} & \alpha'_{1.4} & \alpha_{2.4} & \alpha'_{2.4} & \alpha_{3.4} & \alpha'_{3.4} & \alpha_{4.4} & 0
\end{vmatrix}.$$

Nous n'avons employé que les opérations A et B; la forme F n'a donc pas changé et l'on a encore

$$F = a(\xi_1\eta_4 - \xi_4\eta_1) + ab(\xi_2\eta_3 - \xi_3\eta_2).$$

On a donc

$$\Phi_{12} = \alpha'_{1.2} = 0, \qquad \Phi_{13} = \alpha'_{1.3} = 0,$$
$$\Phi_{14} = \alpha'_{1.4} = a, \qquad \Phi_{23} = \alpha_{2.2}\alpha'_{2.3} = ab.$$

De plus $\alpha_{2.2}$ doit être égal à 1 sans quoi le plus grand commun diviseur des déterminants formés avec quatre colonnes du tableau (1) ne serait pas égal à 1.

Le tableau (1) peut donc s'écrire

$$\begin{vmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\alpha_{1.2} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\alpha_{1.3} & 0 & \alpha_{2.3} & ab & \alpha_{3.3} & 0 & 0 & 0 \\
\alpha_{1.4} & a & \alpha_{2.4} & \alpha'_{2.4} & \alpha_{3.4} & \alpha'_{3.4} & \alpha_{4.4} & 0
\end{vmatrix}.$$

Retranchons maintenant la première ligne, $\alpha_{1.2}$ fois de la deuxième, $\alpha_{1.3}$

fois de la troisième, $\alpha_{1.4}$ de la quatrième; puis la deuxième ligne $\alpha_{2.3}$ fois de la troisième et $\alpha_{2.4}$ fois de la quatrième, le tableau (1) deviendra

$$(1\ bis)\qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ab & \alpha_{3.3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & \alpha'_{2.4} & \alpha_{3.4} & \alpha'_{1.4} & \alpha_{1.4} & 0 \end{vmatrix}.$$

Ici deux cas sont à distinguer suivant que a est égal à 1 ou n'est pas égal à 1. Supposons d'abord $a = 1$.

Retranchons la deuxième colonne $\alpha'_{2.4}$ fois de la quatrième et ajoutons en même temps la troisième colonne $\alpha'_{2.4}$ fois à la première (opération B).

Retranchons $\alpha_{3.4}$ fois la deuxième colonne de la cinquième et la sixième de la première (opérations A et B).

Retranchons enfin $\alpha_{1.4}$ fois la deuxième colonne de la septième et la huitième de la première.

Le tableau 1 devient alors

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha'_{2.4} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & \alpha_{3.3} & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha'_{2.4}\,\alpha_{3.4} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

On peut ensuite en retranchant la première ligne un nombre convenable de fois de la deuxième et de la quatrième, amener le tableau (1) à la forme

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & \alpha_{3.3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Enfin une dernière simplification est encore possible. Les nombres b et $\alpha_{3.3}$ sont premiers entre eux, et l'on peut en opérant comme nous l'avons fait dans le cas particulier de $\mu = 1$, réduire $\alpha_{3.3}$ à l'unité.

Le tableau (1) est alors amené à sa forme définitive

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Supposons maintenant que a ne soit pas égal à 1 et reprenons le tableau (1) sous sa forme (1 *bis*).

Il est clair que ab et $\alpha_{3,3}$ sont premiers entre eux; on pourra donc, en opérant comme nous l'avons fait dans le cas particulier de $\mu = 1$, réduire $\alpha_{3,3}$ à l'unité.

Comme nous avons appliqué plusieurs fois l'opération C, la forme F a été changée en une autre forme équivalente, mais *elle a dû rester divisible par a.* Donc

$$\Phi_{2,4} = \alpha'_{2,4} \qquad \text{et} \qquad \Phi_{3,4} = \alpha'_{3,4} \qquad (\text{puisque } \alpha_{3,3} = 1)$$

doivent être divisibles par a. Soit donc

$$\alpha'_{2,4} = ac, \qquad \alpha'_{3,4} = ad.$$

Nous retrancherons ensuite la troisième ligne $\alpha_{3,4}$ fois de la quatrième et le tableau (1 *bis*) deviendra

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ab & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & ac' & 0 & ad & \alpha_{4,4} & 0 \end{vmatrix},$$

où $c' = c - b\alpha_{3,4}$.

Retranchons maintenant c' fois la deuxième colonne de la quatrième en ajoutant c' fois la troisième à la première.

Retranchons d fois la deuxième de la sixième en ajoutant d fois la cinquième à la première.

Nous avons introduit ainsi dans la première colonne le terme c' à la seconde ligne et le terme d à la troisième; nous les ferons disparaître en retranchant c' fois la première ligne de la deuxième et d fois de la troisième. Le tableau (1) deviendra alors

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ab & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{4,4} & 0 \end{vmatrix}.$$

Enfin une dernière simplification est encore possible; il est clair que a et $\alpha_{4,4}$ sont premiers entre eux; nous pouvons donc opérer comme nous l'avons fait dans le cas de $\mu = 1$ et comme nous l'avons fait deux fois dans le cas actuel et réduire $\alpha_{4,4}$ à l'unité. Le tableau (1) prendra alors sa forme définitive

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ab & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

On peut généraliser; j'écrirai le tableau (1) réduit à sa plus simple expression en supposant $\rho = 6$, $\mu = 3$

$$\begin{vmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & abc & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & ab & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{vmatrix}.$$

Il reste maintenant à écrire le tableau des périodes sous la forme habituelle; nous le ferons dans les quatre cas que nous avons choisis plus haut pour exemples, c'est-à-dire quand

$$\begin{array}{lll}
\mu = 1, & \rho = 3, & \\
\mu = 2, & \rho = 4, & \alpha = 1, \\
\mu = 2, & \rho = 4, & \alpha = 1, \\
\mu = 3, & \rho = 6, & \alpha = 1.
\end{array}$$

Nous supposerons que le tableau (1) a été réduit à sa plus simple expression comme il a été dit plus haut, et nous ferons :

Dans le premier cas :

$$\xi_2 = \frac{1}{b}.$$

Dans le deuxième cas :

$$\xi_3 = 1, \qquad \xi_4 = 0; \qquad \eta_3 = 0, \qquad \eta_4 = \frac{1}{b}.$$

Dans le troisième cas :

$$\xi_3 = \frac{1}{a}, \qquad \xi_4 = 0; \qquad \eta_3 = 0, \qquad \eta_4 = \frac{1}{ab}.$$

Enfin dans le quatrième :

$$\begin{array}{lll}
\xi_6 = \dfrac{1}{a}, & \xi_5 = 0, & \xi_4 = 0, \\
\eta_6 = 0, & \eta_5 = \dfrac{1}{ab}, & \eta_4 = 0, \\
\zeta_6 = 0, & \zeta_5 = 0, & \zeta_4 = \dfrac{1}{abc}.
\end{array}$$

Cela est toujours possible en choisissant convenablement les intégrales J_1, $J_2, \ldots, J_\mu$.

Il résulte de là et de la forme du tableau (1) que les périodes $x'_1, x'_2, \ldots, x'_\rho$ de J_1 sont toutes égales à 0, excepté une qui est égale à 1. De même des périodes correspondantes de $J_2, \ldots, J_\mu$. En d'autres termes, $J_1, J_2, \ldots, J_\mu$

sont des *intégrales normales*. On y adjoindra $\rho-\mu$ autres intégrales normales et on écrira le tableau des périodes sous la forme habituelle, c'est-à-dire dans l'ordre suivant :

$$\begin{array}{cccccccc}
x'_1, & x'_2, & \ldots, & x'_\rho, & x_1, & x_2, & \ldots, & x_\rho, \\
y'_1, & y'_2, & \ldots, & y'_\rho, & y_1, & y_2, & \ldots, & y_\rho, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots, \\
u'_1, & u'_2, & \ldots, & u'_\rho, & u_1, & u_2, & \ldots, & u_\rho.
\end{array}$$

On obtiendra ainsi les tableaux suivants :

Premier cas. — $\mu=1$, $\rho=3$:

$$\begin{vmatrix}
1 & 0 & 0 & \xi_1 & \frac{1}{b} & 0 \\
0 & 1 & 0 & \frac{1}{b} & G & H \\
0 & 0 & 1 & 0 & H & G'
\end{vmatrix}.$$

Deuxième cas. — $\mu=2$, $\rho=4$, $a=1$:

$$\begin{vmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & \xi_1 & \xi_2 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & \eta_1 & \eta_2 & \frac{1}{b} & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{b} & G & H \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & H & G'
\end{vmatrix}.$$

Troisième cas. — $\mu=2$, $\rho=4$, $a>1$:

$$\begin{vmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & \xi_1 & \xi_2 & 0 & \frac{1}{a} \\
0 & 1 & 0 & 0 & \eta_1 & \eta_2 & \frac{1}{ab} & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{ab} & G & H \\
0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a} & 0 & H & G'
\end{vmatrix}.$$

Quatrième cas. — $\mu=3$, $\rho=6$, $a>1$:

$$\begin{vmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & 0 & 0 & \frac{1}{a} \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & 0 & \frac{1}{ab} & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 & \frac{1}{abc} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{abc} & G & H'' & H' \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{ab} & 0 & H'' & G' & H \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a} & 0 & 0 & H' & H & G''
\end{vmatrix}.$$

a, b et c sont des entiers; il est clair d'ailleurs qu'on doit avoir

$$\xi_2 = \eta_1, \qquad \xi_1 = \tau_1, \qquad \eta_2 = \tau_2.$$

L'inspection de ces tableaux montre que s'il y a μ intégrales réductibles au rang μ, il y en aura $\rho - \mu$ réductibles au rang $\rho - \mu$.

II. — Cas singuliers de réduction.

Nous allons désormais nous restreindre au cas où une ou plusieurs des intégrales abéliennes considérées sont réductibles aux intégrales elliptiques.

Soient J_1 et J_2 deux intégrales abéliennes réductibles aux intégrales elliptiques. Soient

$$\begin{array}{llll} x_1 = \alpha_1\xi_1 + \beta_1\xi_2, & x_2 = \alpha_2\xi_1 + \beta_2\xi_2, & \ldots, & x_\rho = \alpha_\rho\xi_1 + \beta_\rho\xi_2, \\ x'_1 = \alpha'_1\xi_1 + \beta'_1\xi_2, & x'_2 = \alpha'_2\xi_1 + \beta'_2\xi_2, & \ldots, & x'_\rho = \alpha'_\rho\xi_1 + \beta'_\rho\xi_2, \end{array}$$

les périodes normales de J_1 et

$$\begin{array}{lll} y_1 = \gamma_1\eta_1 + \delta_1\eta_2, & \ldots, & y_\rho = \gamma_\rho\eta_1 + \delta_\rho\eta_2, \\ y'_1 = \gamma'_1\eta_1 + \delta'_1\eta_2, & \ldots, & y'_\rho = \gamma'_\rho\eta_1 + \delta'_\rho\eta_2, \end{array}$$

les périodes normales de J_2. Les α, β, γ et δ seront des entiers.

On devra avoir

$$\Sigma(x_i y'_i - y_i x'_i) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, \rho)$$

et par conséquent

$$A\xi_1\eta_1 + B\xi_1\eta_2 + C\xi_2\eta_1 + D\xi_2\eta_2 = 0, \tag{1}$$

où

$$\begin{aligned} A &= \Sigma(\alpha_i\gamma'_i - \alpha'_i\gamma_i), \\ B &= \Sigma(\alpha_i\delta'_i - \alpha'_i\delta_i), \\ C &= \Sigma(\beta_i\gamma'_i - \beta'_i\gamma_i), \\ D &= \Sigma(\beta_i\delta'_i - \beta'_i\delta_i). \end{aligned}$$

A, B, C et D sont des entiers.

Cela posé de deux choses l'une :

Ou bien l'égalité (1) n'est pas une identité, ou bien elle est une identité, de sorte que

$$A = B = C = D = 0.$$

1° Supposons d'abord qu'elle ne soit pas une identité.

Je dis alors qu'il y aura une infinité d'intégrales de la forme

$$J_1 + \lambda J_2$$

qui seront réductibles aux intégrales elliptiques. En effet pour que $J_1 + \lambda J_2$ soit réductible, il suffit qu'il y ait entre les quatre quantités

$$\xi_1, \quad \xi_2, \quad \lambda\eta_1, \quad \lambda\eta_2$$

deux relations linéaires et homogènes à coefficients commensurables que je pourrai écrire

$$\xi_1 = \lambda(b\,\eta_1 + c\,\eta_2),$$
$$\xi_2 = \lambda(b'\eta_1 + c'\,\eta_2),$$

b, c, b', c' étant commensurables.

L'élimination de λ entre ces deux équations donnera la condition

$$b'\xi_1\eta_1 + c'\xi_1\eta_2 - b\,\xi_2\eta_1 - c\,\xi_2\eta_2 = 0.$$

Cette condition sera satisfaite si l'on pose

$$b' = \mu A, \qquad c' = \mu B, \qquad b = -\mu C, \qquad c = -\mu D,$$

μ étant un nombre commensurable quelconque.

On aura alors

$$\lambda = -\frac{\xi_1}{\mu(C\eta_1 + D\eta_2)}.$$

Si donc nous posons

$$\frac{\xi_1}{C\eta_1 + D\eta_2} = h,$$

l'intégrale

$$J_1 + \mu h J_2$$

sera réductible toutes les fois que μ sera commensurable.

On peut toujours supposer que $h = 1$; car si cela n'était pas, on remplacerait l'intégrale J_2 par l'intégrale hJ_2 qui n'en diffère que par le facteur constant h.

On a alors

$$\xi_1 = C\eta_1 + D\eta_2,$$
$$\xi_2 = -(A\eta_1 + B\eta_2).$$

2° Supposons maintenant que la relation (1) soit une identité. Imaginons que le tableau des périodes ait été réduit comme il a été dit au paragraphe précédent et qu'il s'écrive (en supposant $\rho = 3$ pour fixer les idées) :

$$(2)\qquad \left|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & \xi_2 & \dfrac{1}{\alpha} & 0 & \text{(périodes de l'intégrale } J_1\text{)} \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{1}{\alpha} & G & H & \text{(périodes d'une intégrale que j'appelle } J'_2\text{)} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & H & G' & \text{(périodes d'une intégrale que j'appelle } J'_3\text{)} \end{matrix}\right|,$$

α étant un entier.

Si donc on pose

$$\xi_1 = \frac{1}{\alpha},$$

on aura

$$(3)\qquad \left\{\begin{matrix} \alpha_1 = 0, & \alpha_2 = 1, & \alpha_3 = 0; & \alpha'_1 = \alpha, & \alpha'_2 = 0, & \alpha'_3 = 0, \\ \beta_1 = 1, & \beta_2 = 0, & \beta_3 = 0; & \beta'_1 = 0, & \beta'_2 = 0, & \beta'_3 = 0. \end{matrix}\right.$$

Il viendra alors

$$A = -\alpha\gamma_1 + \gamma'_2; \qquad B = -\alpha\delta_1 + \delta'_2; \qquad C = \gamma'_1; \qquad D = \delta'_1.$$

Pour que la relation (1) soit une identité, on doit donc avoir

$$\gamma'_1 = \delta'_1 = 0, \qquad \gamma'_2 = \alpha\gamma_1, \qquad \delta'_2 = \alpha\delta_1,$$

ce qui entraîne évidemment

$$\mu'_1 = 0, \qquad \mu'_2 = \alpha\mu_1.$$

Or si l'intégrale J_2 qui doit être une combinaison linéaire de J_1, J'_2 et J'_3 s'écrit par exemple :

$$J_2 = hJ_1 + kJ'_2 + lJ'_3,$$

on aura

$$\mu'_1 = h, \qquad \mu_1 = h\xi_2 + \frac{k}{\alpha}; \qquad \mu'_2 = k.$$

Les conditions précédentes équivalent donc à la suivante :

$$h = 0.$$

On a donc

$$J_2 = kJ'_2 + lJ'_3.$$

Revenons maintenant au cas où la relation (1) n'est pas une identité, mais en supposant que le tableau des périodes ait été ramené à la forme (2) de façon que les α et les β prennent les valeurs (3).

On aura alors une infinité d'intégrales réductibles

$$J_1 + \mu J_2,$$

où μ est un nombre commensurable quelconque.

On aura d'ailleurs

$$\xi_1 = \frac{1}{a} = C\alpha_{11} - D\alpha_{12} = \gamma'_1\alpha_{11} - \delta'_1\alpha_{12} = y'_1.$$

La première période de l'intégrale $J_1 + \mu J_2$ [dans l'ordre du tableau (2)] est alors

$$x'_1 + \mu y'_1 = 1 + \frac{\mu}{a}.$$

Nous pouvons donc choisir le nombre commensurable μ, de telle sorte que cette première période soit nulle; il suffit pour cela de poser

$$\mu = -a.$$

On a alors

$$J_1 - aJ_2 = kJ'_2 + lJ'_3,$$

k et l étant des coefficients numériques convenablement choisis.

Si donc parmi les intégrales abéliennes

$$hJ_1 + kJ'_2 + lJ'_3,$$

il y en a une (autre que J_1) qui soit réductible aux intégrales elliptiques, ou bien h sera nul, ou bien il y en aura une infinité d'autres comprises dans la formule générale suivante :

$$\mu hJ_1 + kJ'_2 + lJ'_3$$

(où μ est un nombre commensurable quelconque) qui seront également réductibles. En particulier

$$kJ'_2 + lJ'_3$$

est une intégrale réductible.

Si donc on désigne par

$$y'_1, \quad y'_2, \quad y'_3; \quad y_1, \quad y_2, \quad y_3$$

les périodes de cette intégrale

$$kJ'_2 + lJ'_3,$$

on devra avoir

$$y'_1 = 0, \qquad y'_2 = a y_2,$$

ce qui prouve que pour cette intégrale la relation (1) est une identité.

D'où la conséquence suivante :

S'il existe deux intégrales réductibles J_2 et J_1 pour lesquelles la relation (1) ne soit pas une identité, il y en aura une infinité d'autres et parmi celles-là, il y en aura encore une pour laquelle la relation (1) sera une identité.

Je vais maintenant démontrer le théorème suivant :

Si dans un système d'intégrales abéliennes de rang ρ, il y en a $\rho - 1$ linéairement indépendantes qui sont réductibles aux intégrales elliptiques, il y en aura une $\rho^{\text{ième}}$ qui sera également réductible.

En effet ces $\rho - 1$ intégrales abéliennes linéairement indépendantes et réductibles aux intégrales elliptiques, peuvent être regardées comme formant un système de $\rho - 1$ intégrales réductibles au genre $\rho - 1$. Donc d'après le théorème énoncé à la fin du paragraphe précédent, il devra y avoir une $\rho^{\text{ième}}$ intégrale, linéairement indépendante des $\rho - 1$ premières, et qui sera réductible au genre 1.

C. Q. F. D.

Je dis maintenant que si l'on a $\mu + 1$ intégrales réductibles aux intégrales elliptiques (et que ces $\mu + 1$ intégrales ne soient pas linéairement indépendantes) il y en a une infinité.

Soient en effet

$$y_1, \quad y_2, \quad \dots, \quad y_\mu$$

μ intégrales réductibles linéairement indépendantes et

$$J = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_\mu y_\mu$$

une $\mu + 1^{\text{ième}}$ intégrale qui est une combinaison linéaire des μ premières et que je suppose également réductible.

Les périodes de l'une quelconque des μ intégrales $y_1, y_2, \dots, y_\mu$, celles de y_i par exemple, devront être des combinaisons linéaires à coefficients entiers de deux quantités que j'appelle ξ_i et η_i qui sont les périodes de l'intégrale elliptique à laquelle peut se réduire y_i.

Il résulte de là que les périodes de

$$J = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_\mu y_\mu$$

seront des combinaisons linéaires à coefficients entiers des 2μ quantités

$$\begin{array}{cccc} \alpha_1 \xi_1, & \alpha_2 \xi_2, & \ldots, & \alpha_\mu \xi_\mu, \\ \alpha_1 \eta_1, & \alpha_2 \eta_2, & \ldots, & \alpha_\mu \eta_\mu. \end{array}$$

Pour que cette intégrale J soit réductible aux intégrales elliptiques, il faut et il suffit qu'il y ait entre ces 2μ quantités, $2\mu - 2$ relations linéaires homogènes à coefficients entiers.

Supposons qu'il en soit ainsi, et soient

$$\beta_1, \quad \beta_2, \quad \ldots, \quad \beta_\mu$$

μ nombres commensurables *quelconques* différents de zéro; il y aura alors aussi $2\mu - 2$ relations linéaires à coefficients entiers entre les 2μ quantités

$$\begin{array}{cccc} \alpha_1 \beta_1 \xi_1, & \alpha_2 \beta_2 \xi_2, & \ldots, & \alpha_\mu \beta_\mu \xi_\mu, \\ \alpha_1 \beta_1 \eta_1, & \alpha_2 \beta_2 \eta_2, & \ldots, & \alpha_\mu \beta_\mu \eta_\mu, \end{array}$$

et par conséquent l'intégrale

$$\alpha_1 \beta_1 y_1 + \alpha_2 \beta_2 y_2 + \ldots + \alpha_\mu \beta_\mu y_\mu$$

sera réductible quels que soient les nombres commensurables $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\mu$.

C. Q. F. D.

Si en particulier il y a plus de ρ intégrales réductibles, il y en aura une infinité.

Et en effet, entre $\rho + 1$ intégrales il y aura toujours une relation linéaire, puisqu'un système d'intégrales abéliennes de rang ρ ne contient que ρ intégrales linéairement indépendantes.

Dans un Mémoire inséré aux *Acta Mathematica*, M^me^ Kowalevski étudie le cas de réduction des intégrales de rang 3 au rang 1, en supposant que le nombre caractéristique de la réduction que nous avons ici appelé b soit égal à 2.

Dans un cas remarquable, elle trouve quatre intégrales réductibles et n'en trouve que quatre; il n'y en a que quatre en effet où b soit égal à 2, mais il y en a une infinité pour lesquelles b est supérieur à 2.

Je vais enfin pour terminer ce paragraphe démontrer que tout système d'intégrales abéliennes diffère infiniment peu d'un système réductible.

Voici ce que j'entends par là :

Soit (en supposant $\rho = 4$ pour fixer les idées),

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \tau_{1,1} & \tau_{2,1} & \tau_{3,1} & \tau_{4,1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \tau_{1,2} & \tau_{2,2} & \tau_{3,2} & \tau_{4,2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \tau_{1,3} & \tau_{2,3} & \tau_{3,3} & \tau_{4,3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \tau_{1,4} & \tau_{2,4} & \tau_{3,4} & \tau_{4,4} \end{vmatrix} \qquad (\tau_{i,k} = \tau_{k,i})$$

le tableau des périodes normales d'un système d'intégrales abéliennes. On n'obtiendra un système d'intégrales abéliennes proprement dites, c'est-à-dire un système engendré par une courbe algébrique, que s'il y a une certaine relation entre les ρ; car le nombre des modules d'une courbe de rang 4 étant 9, est inférieur à 10, nombre des τ.

Il convient toutefois de s'affranchir de cette difficulté, et pour cela il suffit d'étendre un peu le sens du mot *intégrales abéliennes*.

Soient x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, cinq fonctions abéliennes (8 fois périodiques) de quatre variables u_1, u_2, u_3 et u_4.

Il y aura entre ces cinq fonctions une relation algébrique

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 0,$$

et il est aisé de voir que u_1, u_2, u_3 et u_4 sont des intégrales de différentielles totales dépendant de x_1, x_2, x_3, x_4 et x_5. On aura

$$u_1 = \int \psi_1 \, dx_1 + \psi_2 \, dx_2 + \psi_3 \, dx_3 + \psi_4 \, dx_4,$$

où ψ_1, ψ_2, ψ_3 et ψ_4 sont des fonctions rationnelles de x_1, x_2, x_3, x_4 et x_5.

Nous conviendrons d'appeler encore intégrales abéliennes les intégrales de différentielles totales ainsi engendrées.

Alors quels que soient les τ (pourvu qu'ils satisfassent à certaines inégalités et sans qu'ils soient assujettis à aucune égalité) ils pourront être regardés comme les périodes d'un système d'intégrales abéliennes et la difficulté signalée plus haut disparaîtra.

Considérons donc le système suivant de périodes :

$$\begin{array}{llllllll} 1, & 0, & 0, & 0, & \tau_{1,1} + r\varepsilon_{1,1}, & \tau_{2,1} + r\varepsilon_{2,1}, & \tau_{3,1} + r\varepsilon_{3,1}, & \tau_{4,1} + r\varepsilon_{4,1}, \\ 0, & 1, & 0, & 0, & \tau_{1,2} + r\varepsilon_{1,2}, & \tau_{2,2} + r\varepsilon_{2,2}, & \tau_{3,2} + r\varepsilon_{3,2}, & \tau_{4,2} + r\varepsilon_{4,2}, \\ 0, & 0, & 1, & 0, & \tau_{1,3} + r\varepsilon_{1,3}, & \tau_{2,3} + r\varepsilon_{2,3}, & \tau_{3,3} + r\varepsilon_{3,3}, & \tau_{4,3} + r\varepsilon_{4,3}, \\ 0, & 0, & 0, & 1, & \tau_{1,4} + r\varepsilon_{1,4}, & \tau_{2,4} + r\varepsilon_{2,4}, & \tau_{3,4} + r\varepsilon_{3,4}, & \tau_{4,4} + r\varepsilon_{4,4}. \end{array}$$

Ici r est une quantité positive donnée. Quant aux ε ce sont des quantités satisfaisant bien entendu à la condition

$$\varepsilon_{i,k} = \varepsilon_{k,i},$$

et que j'assujettis de plus aux inégalités

$$\varepsilon < 1.$$

Laissons r constant et faisons varier les ε en leur donnant toutes les valeurs compatibles avec les inégalités précédentes. Nous obtiendrons ainsi une infinité de systèmes d'intégrales abéliennes.

Parmi ces systèmes, il y en aura *quelque petit que soit r*, une infinité qui contiendront quatre intégrales réductibles au rang 1.

C'est ce que j'entendais en disant que tout système d'intégrales abéliennes est infiniment voisin d'une infinité de systèmes réductibles.

Le résultat que je viens d'énoncer est presque évident. En effet une intégrale sera évidemment réductible au genre 1 si toutes ses périodes sont de la forme

$$\alpha + \beta\sqrt{-1},$$

α et β étant commensurables ; si en d'autres termes, toutes les périodes sont des nombres complexes commensurables.

Mais parmi les nombres

$$\tau_{i,k} + r\varepsilon_{i,k}$$

qui satisfont à la condition

$$\varepsilon_{i,k} < 1,$$

il y aura, quelque petit que soit r, une infinité de nombres complexes commensurables.

On peut donc choisir les $\varepsilon_{i,k}$ d'une infinité de manières et de telle façon que les quatre intégrales normales soient réductibles aux intégrales elliptiques.

Je pourrais ajouter que l'on peut choisir les $\varepsilon_{i,k}$ de telle sorte qu'il y ait une infinité d'intégrales réductibles, mais je n'ai pas besoin pour mon objet de cette extension du résultat précédent.

III. — Généralisation du théorème d'Abel.

Je suis obligé ici de faire une digression et de donner avant d'aller plus loin, une généralisation du théorème d'Abel qui me sera utile dans la suite.

Soit

$$f(x, y) = 0 \tag{1}$$

une courbe plane quelconque. Soit $u(x, y)$ une intégrale abélienne de première espèce attachée à cette courbe. Soit c une courbe variable de degré donné m qui coupe la courbe (1) en q points variables :

$$x_1, y_1; \quad x_2, y_2; \quad \ldots; \quad x_q, y_q.$$

La somme

$$u(x_1, y_1) + u(x_2, y_2) + \ldots + u(x_q, y_q)$$

sera une constante (quelle que soit la courbe c, pourvu toutefois que son degré m ne change pas).

Tel est le théorème d'Abel que je me propose d'étendre aux surfaces.

Je vais d'abord l'étendre aux courbes gauches.

Soit c une courbe gauche quelconque et x, y, z un point mobile sur cette courbe. Nous pourrons mettre l'équation de cette courbe c sous la forme suivante :

$$f(x, y) = 0, \qquad z = \frac{\varphi(x, y)}{\psi(x, y)},$$

f, φ et ψ étant des polynômes entiers en x et en y. L'intersection complète des deux surfaces.

$$f = 0, \qquad \psi z - \varphi = 0,$$

se compose alors de la courbe c et d'un certain nombre de droites parallèles à l'axe des z et qui sont les droites communes aux trois cylindres

$$f(x, y) = 0, \qquad \psi(x, y) = 0, \qquad \varphi(x, y) = 0.$$

D'ailleurs toutes les droites communes aux deux premiers de ces cylindres, doivent également appartenir au troisième. Je renverrai pour plus de détails au Mémoire de M. Halphen sur les *Courbes gauches algébriques*, couronné par l'Académie de Berlin.

Il existera un certain nombre d'intégrales

$$u(x, y, z) = \int R(x, y, z)\,dx$$

(où R est une fonction rationnelle de x, y et de z; y et z étant définis en fonction de x par les équations de la courbe c) qui resteront finies en tous les points de c.

Ce seront les intégrales de première espèce attachées à la courbe c.

Le théorème d'Abel s'applique à ces intégrales. Considérons une surface algébrique d'ordre m qui coupe c en q points :

$$(x_1, y_1, z_1), \quad (x_2, y_2, z_2) \quad \ldots, \quad (x_q, y_q, z_q),$$

la somme

$$u(x_1, y_1, z_1) + u(x_2, y_2, z_2) + \ldots + u(x_q, y_q, z_q)$$

restera constante quand on fera varier cette surface, pourvu que m reste constant.

Cela est presque évident et pourrait se démontrer directement par le même procédé que le théorème d'Abel relatif aux courbes planes. On peut aussi le déduire aisément de ce théorème :

L'intégrale u peut se mettre sous la forme

$$\int \mathrm{R}\left[x, y, \frac{\varphi(x, y)}{\psi(x, y)}\right] dx = \int \mathrm{R}_1(x, y)\, dx,$$

R_1 étant rationnel en x et en y. C'est alors une intégrale abélienne attachée à la courbe plane $f = 0$.

Soit maintenant

$$\theta(x, y, z) = z^m + \theta_1(x, y) z^{m-1} + \theta_2(x, y) z^{m-2} + \ldots + \theta_m(x, y) = 0$$

l'équation d'une surface quelconque S d'ordre m.

Si l'on y remplace z par sa valeur $\frac{\varphi}{\psi}$, il vient

$$(2) \qquad \varphi^m + \theta_1 \psi \varphi^{m-1} + \theta_2 \psi^2 \varphi^{m-2} + \ldots + \theta_m \psi^m = 0.$$

Si l'on appelle n et $n+1$ les degrés des deux polynômes ψ et φ, l'équation (2) sera l'équation d'une courbe plane de degré $m(n+1)$. Cette courbe plane coupera la courbe $f = 0$ en un certain nombre de points. Parmi les points d'intersection, il y en aura q

$$(x_1, y_1), \quad (x_2, y_2), \quad \ldots, \quad (x_q, y_q)$$

qui correspondront aux q points communs à la courbe c et à la surface S. Les autres correspondront aux droites communes aux trois cylindres

$$f = 0, \qquad \varphi = 0, \qquad \psi = 0,$$

la trace de chacune de ces droites sur le plan des xy comptant pour m points d'intersection.

Les points d'intersection de la première sorte sont mobiles, les autres sont fixes. Mais dans l'application du théorème d'Abel aux courbes planes les points d'intersection fixes ne doivent pas intervenir. Nous pouvons donc écrire

$$u(x_1, y_1) + u(x_2, y_2) + \ldots + u(x_q, y_q) = \text{const.}$$

C. Q. F. D.

Supposons en particulier que la courbe c soit l'intersection complète de deux surfaces algébriques

$$f(x, y, z) = 0, \quad \varphi(x, y, z) = 0$$

de degrés m et n. Il est aisé de former alors les intégrales de première espèce.

Supposons que la courbe c n'ait pas de point singulier, ce qui veut dire que les trois déterminants fonctionnels

$$\frac{df}{dy}\frac{d\varphi}{dz} - \frac{df}{dz}\frac{d\varphi}{dy}, \qquad \frac{df}{dz}\frac{d\varphi}{dx} - \frac{df}{dx}\frac{d\varphi}{dz}, \qquad \frac{df}{dx}\frac{d\varphi}{dy} - \frac{df}{dy}\frac{d\varphi}{dx}$$

ne peuvent pas s'annuler à la fois en un point de la courbe.

Je dis que l'intégrale

$$u = \int \frac{P(x, y, z)\,dx}{\dfrac{df}{dy}\dfrac{d\varphi}{dz} - \dfrac{df}{dz}\dfrac{d\varphi}{dy}},$$

où P est un polynôme quelconque de degré $m + n - 4$, sera de première espèce.

En effet elle reste finie quand x, y et z deviennent infinis; elle ne pourrait donc devenir infinie que si le dénominateur

$$\frac{df}{dy}\frac{d\varphi}{dz} - \frac{df}{dz}\frac{d\varphi}{dy}$$

s'annulait. Mais on a

$$u = \int \frac{P\,dx}{\dfrac{df}{dy}\dfrac{d\varphi}{dz} - \dfrac{df}{dz}\dfrac{d\varphi}{dy}} = \int \frac{P\,dy}{\dfrac{df}{dz}\dfrac{d\varphi}{dx} - \dfrac{df}{dx}\dfrac{d\varphi}{dz}} = \int \frac{P\,dz}{\dfrac{df}{dx}\dfrac{d\varphi}{dy} - \dfrac{df}{dy}\dfrac{d\varphi}{dx}}.$$

L'intégrale u ne pourrait donc devenir infinie que si les trois déterminants fonctionnels s'annulaient à la fois, ce qui n'a pas lieu, par hypothèse.

Donc elle restera toujours finie. C. Q. F. D.

Passons maintenant aux surfaces. Soit

$$f(x, y, z) = 0$$

une surface algébrique S.

M. Picard a démontré qu'il n'existe pas pour toutes les surfaces d'intégrales de différentielle exacte de première espèce, c'est-à-dire d'intégrale de la forme

$$u = \int (\mathrm{R}\,dx + \mathrm{R}_1\,dy)$$

qui reste toujours finie, où la quantité sous le signe $\int$ est une différentielle exacte, où enfin R et R_1 sont rationnels en x, y et z.

Je dis que dans ce cas le théorème d'Abel est encore applicable.

Voici ce que j'entends par là.

On sait que pour définir une famille de courbes gauches, il ne suffit pas de s'en donner le degré, mais qu'il faut connaître également plusieurs autres nombres caractéristiques. Je renverrai d'ailleurs pour plus de détails au Mémoire cité de M. Halphen. Quoi qu'il en soit, nous dirons que deux courbes gauches, sans point singulier, appartiennent à la même famille quand tous les nombres définis par M. Halphen seront les mêmes pour les deux courbes. On peut alors passer de l'une à l'autre par variation continue.

Soit alors une courbe gauche C qui varie, mais de façon à appartenir toujours à la même famille. Soient

$$(x_1, y_1, z_1), \quad \ldots, \quad (x_q, y_q, z_q)$$

ses q points d'intersection avec la surface S. Soit $u_1, u_2, \ldots, u_q$ les valeurs de l'intégrale u en ces q points. La somme

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_q$$

sera une constante.

Commençons par envisager le cas particulier où la courbe C est l'intersection complète de deux surfaces algébriques d'ordre m et n, et que j'appellerai S_1 et S_2. Alors les q points d'intersection de C et de S seront les q points communs aux trois surfaces

$$\mathrm{S}, \quad \mathrm{S}_1, \quad \mathrm{S}_2.$$

L'intersection de S et de S_1 est une courbe gauche et l'intégrale u d'après sa définition même, sera une intégrale de première espèce attachée à cette courbe gauche. Nous pouvons donc faire varier la surface S_2 sans que la somme

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_q$$

varie. Pour la même raison, cette même somme ne variera pas quand on fera varier S_1. Donc quelles que soient les surfaces S_1 et S_2 on aura

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_q = k;$$

k étant une constante. C. Q. F. D.

En particulier, si $m = n = 1$, la courbe C se réduit à une droite, et l'on a pour toutes les droites de l'espace

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_q = \mathrm{K};$$

K étant une constante.

Je dis maintenant que $k = mn\mathrm{K}$.

En effet faisons dégénérer la surface S_1 en m plans et la surface S_2 en n plans; la courbe C dégénérera en mn droites. La somme Σu étant égale à K lorsqu'on envisage une droite isolée, devra être égale à $mn\mathrm{K}$ quand on envisagera un système de mn droites.

Envisageons maintenant une courbe gauche de degré d qui ne soit pas une intersection complète. Son équation pourra toujours s'écrire

$$\mathrm{F}(x, y) = 0, \qquad \psi(x, y)z - \varphi(x, y) = 0.$$

F, ψ et φ étant des polynômes dont le degré est respectivement d, n et $n+1$.

Les deux surfaces algébriques

$$\mathrm{F} = 0, \qquad \psi z - \varphi = 0$$

sont de degré d et $n+1$. Leur intersection complète se compose de la courbe C et de nd droites parallèles à l'axe des z. Soient

$$(x_1, y_1, z_1), \quad \ldots, \quad (x_q, y_q, z_q)$$

les q points d'intersection de C et de S et

$$(x_{q+1}, y_{q+1}, z_{q+1}), \quad \ldots, \quad (x_p, y_p, z_p)$$

les $p-q$ points d'intersection des nd droites dont je viens de parler et de S.

On aura alors d'après ce que nous venons de voir

$$u(x_1, y_1, z_1) + u(x_2, y_2, z_2) + \ldots + u(x_p, y_p, z_p) = (n+1)d\mathrm{K}.$$

D'autre part on aura pour les nd droites

$$u(x_{q+1}, y_{q+1}, z_{q+1}) + u(x_{q+2}, y_{q+2}, z_{q+2}) + \ldots + u(x_p, y_p, z_p) = nd\mathrm{K}.$$

On a donc

$$u(x_1, y_1, z_1) + u(x_2, y_2, z_2) + \ldots + u(x_q, y_q, z_q) = d\mathrm{K}.$$

C. Q. F. D.

Cela montre en même temps que la somme Σu est la même pour deux courbes de même degré, quand même ces deux courbes n'appartiennent pas à la même famille.

On comprendra, sans que j'insiste davantage, que le théorème d'Abel s'applique encore aux intégrales de première espèce de différentielles totales de la forme

$$\int \mathrm{R}_1 dx_1 + \mathrm{R}_2 dx_2 + \ldots, \mathrm{R}_n dx_n,$$

où les R sont des fonctions rationnelles de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et z, et où z est défini par une équation algébrique

$$\mathrm{F}(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = 0.$$

Je vais maintenant, quoique cela ne soit pas nécessaire pour mon objet principal, montrer comment et dans quelle mesure le théorème d'Abel peut s'étendre aux surfaces qui n'admettent pas d'intégrale de première espèce.

En ce qui concerne les courbes planes, sans point singulier, ce théorème peut s'énoncer de la façon suivante :

Soit $f = 0$ une courbe algébrique de degré m; soient $\varphi = 0$, $\varphi + \varepsilon\psi = 0$ deux autres courbes algébriques de même degré et infiniment peu différentes l'une de l'autre.

Soient (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_q, y_q) les q points d'intersection de $f = 0$, $\varphi = 0$; soient $(x_1 + dx_1, y_1 + dy_1)$, ..., $(x_q + dx_q, y_q + dy_q)$ les q points d'intersection de $f = 0$, $\varphi + \varepsilon\psi = 0$. On aura

$$\sum_{\nu=1}^{q} \frac{\mathrm{P}(x_\nu, y_\nu)\, dx_\nu}{\dfrac{df}{dy_\nu}} = 0,$$

P est un polynôme quelconque d'ordre $m - 3$.

De même, en ce qui concerne les courbes gauches, sans point singulier, le théorème d'Abel peut s'énoncer comme il suit :

Nous ne considérerons qu'une courbe gauche, intersection complète de deux surfaces algébriques

$$f = 0, \qquad f_1 = 0,$$

de degrés m et n.

Soient encore $\varphi = 0$, $\varphi + \varepsilon\psi = 0$, deux surfaces algébriques infiniment voisines l'une de l'autre. La courbe gauche coupe la surface $\varphi = 0$ en q points (x_ν, y_ν, z_ν) et la surface $\varphi + \varepsilon\psi = 0$ en q points $(x_\nu + dx_\nu, y_\nu + dy_\nu, z_\nu + dz_\nu)$ et l'on a

$$\sum \frac{P(x_\nu, y_\nu, z_\nu)\, dx_\nu}{\dfrac{df}{dy_\nu}\dfrac{df_1}{dz_\nu} - \dfrac{df_1}{dy_\nu}\dfrac{df}{dz_\nu}} = 0,$$

P étant un polynôme quelconque de degré $m + n - 4$.

Passons maintenant aux surfaces; soit $f = 0$ une surface algébrique d'ordre m. Considérons son intersection avec une courbe gauche variable, intersection complète de deux surfaces $\varphi = 0$, $\varphi_1 = 0$ d'ordres n et p. La surface $f = 0$ coupera une de ces courbes gauches C en q points (x_ν, y_ν, z_ν) et une courbe gauche C′, infiniment voisine de C en q points $(x_\nu + dx_\nu, y_\nu + dy_\nu, z_\nu + dz_\nu)$.

Soient $\varphi = 0$, $\varphi_1 = 0$ les équations de la courbe C et $\varphi + \varepsilon\psi = 0$, $\varphi_1 + \varepsilon\psi_1 = 0$ les équations de C′, ε étant infiniment petit.

Nous envisagerons la courbe C″ qui a pour équations

$$\varphi + \varepsilon\psi = 0, \qquad \varphi_1 = 0,$$

et nous appellerons

$$(x_\nu + \delta x_\nu, y_\nu + \delta y_\nu, z_\nu + \delta z_\nu)$$

ses q points d'intersection avec la surface $f = 0$. Nous poserons ensuite

$$dx_\nu = \delta x_\nu + \partial x_\nu, \qquad dy_\nu = \delta y_\nu + \partial y_\nu, \qquad dz_\nu = \delta z_\nu + \partial z_\nu.$$

Les deux courbes C et C″ étant sur la même surface $\varphi_1 = 0$, on aura

$$\frac{d\varphi_1}{dx_\nu}\delta x_\nu + \frac{d\varphi_1}{dy_\nu}\delta y_\nu + \frac{d\varphi_1}{dz_\nu}\delta z_\nu = 0.$$

De même les deux courbes C″ et C′ étant sur la même surface $\varphi + \varepsilon\psi = 0$, on peut, en négligeant ε, écrire

$$\frac{d\varphi}{dx_\nu}\,\partial x_\nu + \frac{d\varphi}{dy_\nu}\,\partial y_\nu + \frac{d\varphi}{dz_\nu}\,\partial z_\nu = 0. \tag{3}$$

Appliquons le théorème d'Abel à l'intersection de la courbe gauche $f = 0$, $\varphi_1 = 0$, avec les deux surfaces infiniment voisines $\varphi = 0$, $\varphi + \varepsilon\psi = 0$. Il viendra

$$\sum \frac{P_\nu \delta x_\nu}{\dfrac{\partial(f, \varphi_1)}{\partial(y_\nu, z_\nu)}} = 0.$$

Dans cette équation P_ν désigne un polynôme de degré $m + p - 4$, où x, y, z ont été remplacés par x_ν, y_ν, z_ν et $\dfrac{\partial(f, \varphi_1)}{\partial(y_\nu, z_\nu)}$ représente suivant l'usage le déterminant fonctionnel de f et de φ_1 par rapport à y_ν et à z_ν.

Mais on a identiquement

$$\frac{\delta x_\nu}{\dfrac{\partial(f, \varphi_1)}{\partial(y_\nu, z_\nu)}} = \frac{\delta y_\nu}{\dfrac{\partial(f, \varphi_1)}{\partial(z_\nu, x_\nu)}} = \frac{\delta z_\nu}{\dfrac{\partial(f, \varphi_1)}{\partial(x_\nu, y_\nu)}} = \frac{\dfrac{d\varphi}{dx_\nu}\,\delta x_\nu + \dfrac{d\varphi}{\delta y_\nu}\,\delta y_\nu + \dfrac{d\varphi}{dz_\nu}\,\delta z_\nu}{\dfrac{\partial(f, \varphi, \varphi_1)}{\partial(x_\nu, y_\nu, z_\nu)}}.$$

Je désignerai pour abréger par Δ_ν le dénominateur de la dernière de ces fractions.

On aura alors

$$\sum_{\nu=1}^{q} \frac{P_\nu}{\Delta_\nu}\left(\frac{d\varphi}{dx_\nu}\,\delta x_\nu + \frac{d\varphi}{dy_\nu}\,\delta y_\nu + \frac{d\varphi}{dz_\nu}\,\delta z_\nu\right) = 0.$$

Mais on a de même, à cause de (3) :

$$\sum \frac{P_\nu}{\Delta_\nu}\left(\frac{d\varphi}{dx_\nu}\,dx_\nu + \frac{d\varphi}{dy_\nu}\,dy_\nu + \frac{d\varphi}{dz_\nu}\,dz_\nu\right) = 0.$$

Il vient donc

$$\sum \frac{P_\nu}{\Delta_\nu}\left(\frac{d\varphi}{dx_\nu}\,dx_\nu + \frac{d\varphi}{dy_\nu}\,dy_\nu + \frac{d\varphi}{dz_\nu}\,dz_\nu\right) = 0;$$

c'est la généralisation du théorème d'Abel.

On trouve de même

$$\sum \frac{Q_\nu}{\Delta_\nu}\left(\frac{d\varphi_1}{dx_\nu}\,dx_\nu + \frac{d\varphi_1}{dy_\nu}\,dy_\nu + \frac{d\varphi_1}{dz_\nu}\,dz_\nu\right) = 0.$$

Q_ν étant un polynôme de degré $m + n - 4$.

Un cas particulier intéressant est celui où la surface $f = 0$ se réduit à un plan; si $\varphi = 0$, $\varphi_1 = 0$ sont deux courbes planes de degré m se coupant en m^2 points (x_ν, y_ν) et si deux courbes de degré m infiniment voisines se coupent en m^2 points $(x_\nu + dx_\nu, y_\nu + dy_\nu)$ on aura

$$\sum \frac{P(x_\nu, y_\nu)\left[\dfrac{d(\varphi - \lambda\varphi_1)}{dx_\nu} dx_\nu + \dfrac{d(\varphi + \lambda\varphi_1)}{dy_\nu} dy_\nu\right]}{\dfrac{d\varphi}{dx_\nu}\dfrac{d\varphi_1}{dy_\nu} - \dfrac{d\varphi_1}{dx_\nu}\dfrac{d\varphi}{dy_\nu}} = 0,$$

P étant un polynôme quelconque de degré $m - 3$ et λ étant une constante quelconque.

IV. — Fonctions intermédiaires.

Envisageons un système de fonctions abéliennes à n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et à $2n$ périodes. A l'exemple de MM. Briot et Bouquet, j'appellerai fonction intermédiaire toute fonction entière des n variables qui se reproduit multipliée par une exponentielle quand les n variables augmentent d'une période.

Soit par exemple : $a_{1.k}, a_{2.k}, \ldots a_{n.k}$ une période. Une fonction entière Φ sera une fonction intermédiaire si l'on a

$$\Phi(x_1 + a_{1.k}, x_2 + a_{2.k}, \ldots, x_n + a_{n.k}) = \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, e^{\alpha_{1.k}x_1 + \alpha_{2.k}x_2 + \ldots + \alpha_{n.k}x_n + \gamma_k}$$

(les α et les γ étant des constantes) et cela pour toutes les périodes.

Je vais supposer pour fixer les idées qu'il n'y a que deux variables x et y; j'appellerai les périodes fondamentales

$$\begin{matrix} a_1, & a_2, & a_3, & a_4, \\ b_1, & b_2, & b_3, & b_4, \end{matrix}$$

et les multiplicateurs correspondants seront

$$e^{\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1}, \quad e^{\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2}, \quad e^{\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3}, \quad e^{\alpha_4 x + \beta_4 y + \gamma_4}.$$

Si l'on augmente x et y d'abord de la période (a_1, b_1) puis de la période (a_2, b_2), les deux multiplicateurs successifs ont pour exposants d'abord

$$(\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2), \quad \text{puis } (\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 + \alpha_1 a_2 + \beta_1 b_2).$$

Le résultat devant être le même dans les deux cas, le nombre

$$\alpha_2 a_1 + \beta_2 b_1 - \alpha_1 a_2 - \beta_1 b_2 = M_{1.2}$$

devra être égal à un entier multiplié par $2i\pi$. Il en sera de même des expressions analogues $M_{i,k}$ où les indices i et k ou des valeurs quelconques.

Considérons en particulier une exponentielle de la forme suivante :

$$e^{P} \qquad \text{où} \quad P = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F.$$

Si l'on augmente x et y de a et de b, l'exponentielle se trouvera multipliée par

$$e^{\alpha x + \beta y + \gamma},$$

où

$$\alpha = 2Aa + 2Bb,$$
$$\beta = 2Ba + 2Cb,$$
$$\gamma = Aa^2 + 2Bab + Cb^2 + 2Da + 2Eb.$$

Il vient donc

$$\frac{1}{2} M_{i,k} = (Aa_i + Bb_i)a_k + (Ba_i + Cb_i)b_k - (Aa_k + Bb_k)a_i - (Ba_k + Cb_k)b_i = 0.$$

Ainsi pour une exponentielle e^{P}, tous les $M_{i,k}$ sont nuls. Il est aisé de voir que ces exponentielles sont les seules fonctions intermédiaires qui jouissent de cette propriété. Car si une autre fonction intermédiaire Φ en jouissait, on pourrait trouver une exponentielle e^{-P} telle que la fonction Φe^{-P}, qui est également intermédiaire, eût tous ses multiplicateurs égaux à 1. Il en résulterait que cette fonction Φe^{-P} qui est *entière* serait quadruplement périodique; elle se réduirait donc à une constante, de sorte qu'on devrait avoir

$$\Phi = Ce^{P}.$$

C. Q. F. D.

Supposons maintenant que les périodes

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad a_4,$$
$$b_1, \quad b_2, \quad b_3, \quad b_4,$$

que nous considérons soient des périodes normales, de sorte que l'on ait

$$(1) \qquad a_1 b_3 - a_3 b_1 + a_2 b_4 - a_4 b_2 = 0.$$

Posons

$$a'_1 = a_3, \quad a'_3 = -a_1, \quad a'_2 = a_4, \quad a'_4 = -a_2,$$
$$b'_1 = b_3, \quad b'_3 = -b_1, \quad b'_2 = b_4, \quad b'_4 = -b_2.$$

On aura alors

$$\Sigma a_i a'_i = \Sigma a_i b'_i = 0.$$

Je dis maintenant qu'on a

$$\Sigma_{i,k} M_{i,k}(a'_i b'_k - a'_k b'_i) = 0, \tag{2}$$

la somme étant étendue aux six combinaisons possibles des nombres i et k.

En effet cela peut s'écrire

$$\Sigma_{i,k} M_{i,k} a'_i b'_k = 0,$$

où cette fois on donnera à i et à k, indépendamment l'un de l'autre les valeurs 1, 2, 3, 4; cela fera donc en tout seize termes dont quatre seront nuls parce que $M_{i,i} = 0$.

La relation précédente devient alors

$$\Sigma_{i,k}(\alpha_i a_k + \beta_i b_k - \alpha_k a_i - \beta_k b_i) a'_i b'_k = 0$$

ou bien

$$\Sigma_i(\alpha_i a'_i \Sigma_k a_k b'_k) + \Sigma_i(\beta_i b_i \Sigma_k b_k b'_k) - \Sigma_k(\alpha_k b'_k \Sigma_i a_i a'_i) - \Sigma_k(\beta_k b'_k \Sigma_i b_i a'_i) = 0.$$

La relation est donc vérifiée, puisqu'on a

$$\Sigma_k a_k b'_k = \Sigma_k b_k b'_k = \Sigma_i a_i a'_i = \Sigma_i b_i a'_i = 0.$$

Cela posé, de deux choses l'une, ou bien les relations (1) et (2) sont distinctes, où elles ne le sont pas.

Je ne veux pas démontrer ici que ces relations ne seront jamais distinctes à moins que les intégrales abéliennes considérées ne soient réductibles aux intégrales elliptiques. La démonstration serait sans doute fort longue.

Laissons de côté ce cas exceptionnel et supposons que les deux relations ne sont pas distinctes, et par conséquent que les $M_{i,k}$ sont nuls, à l'exception de $M_{1,3}$ et de $M_{2,4}$ qui sont égaux entre eux.

$$M_{1,3} = M_{2,4} = 2mi\pi.$$

Le nombre m devra toujours être de même signe; il sera positif si comme on le suppose d'ordinaire, on a

$$a_1^0 a_3^1 - a_1^1 a_3^0 + a_2^0 a_4^1 - a_2^1 a_4^0 > 0,$$

en désignant par a_i^0 et a_i^1 les parties réelle et imaginaire de a_i.

Nous dirons alors que la fonction intermédiaire envisagée est d'ordre m.

La fonction intermédiaire sera une fonction Θ d'ordre m si les quatre multiplicateurs sont

$$1, \quad 1, \quad e^{mv_1+\gamma_3}, \quad e^{mv_2+\gamma_4},$$

les huit périodes étant :

$$\text{pour } x: \quad 2i\pi, \quad 0, \quad G, \quad H,$$
$$\text{pour } y: \quad 0, \quad 2i\pi, \quad H, \quad G'.$$

Il est aisé de voir :

1° Que toute fonction intermédiaire peut être regardée comme le produit d'une fonction Θ et d'une exponentielle de la forme e^{P}.

2° Que toutes les fonctions Θ d'ordre m qui ont mêmes multiplicateurs sont des fonctions linéaires de m^2 d'entre elles.

Il en résulte que toutes les fonctions linéaires qui ont mêmes multiplicateurs sont des fonctions linéaires de m^2 d'entre elles.

Cela posé, on peut définir le multiplicateur correspondant à une période quelconque (a, b) en se donnant les trois nombres (α, β, γ).

Si par exemple on a

$$\Phi(x+a, y+b) = \Phi(x, y)\, e^{\alpha x+\beta y+\gamma},$$

le multiplicateur serait défini par les trois nombres (α, β, γ). Mais il est préférable d'envisager trois autres nombres (α, β, δ) dont le dernier δ est défini comme il suit :

$$\delta = \gamma - \frac{1}{2}(a\alpha + b\beta),$$

ou plutôt

$$\delta \equiv \gamma - \frac{1}{2}(a\alpha + b\beta) \pmod{2i\pi}.$$

Car on peut évidemment augmenter δ d'un multiple de $2i\pi$ sans changer le multiplicateur.

Soient donc (a, b), (a', b') deux périodes quelconques. Les multiplicateurs seront définis par les deux systèmes de nombres (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$ ou bien encore par les deux systèmes de nombres (α, β, δ), $(\alpha', \beta', \delta')$ en posant

$$\delta = \gamma - \frac{1}{2}(a\alpha + b\beta), \qquad \delta' = \gamma' - \frac{1}{2}(a'\alpha' + b'\beta').$$

Considérons maintenant la période $(a + a', b + b')$; le multiplicateur correspondant sera défini par les trois nombres $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ ou bien encore par les nombres $(\alpha'', \beta'', \delta'')$, on trouve aisément

$$\alpha'' = \alpha + \alpha', \qquad \beta'' = \beta + \beta',$$
$$\gamma'' \equiv \gamma + \gamma' + a'\alpha + b'\beta \equiv \gamma + \gamma' + a\alpha' + b\beta' \pmod{2i\pi},$$
$$\delta'' \equiv \gamma'' - \frac{1}{2}[\alpha''(a + a') + \beta''(b + b')] \equiv \delta + \delta' + \frac{1}{2}(a\alpha' + b\beta' - a'\alpha - b'\beta).$$

Or d'après ce que nous avons vu

$$a'\alpha + b'\beta - a\alpha' - b\beta' = 2ki\pi,$$

k étant un entier. On aura donc, selon que l'entier k sera pair ou impair :

$$\delta'' \equiv \delta + \delta'$$

ou

$$\delta'' \equiv \delta + \delta' + i\pi \pmod{2i\pi}.$$

Cherchons donc à déterminer le nombre k.

Supposons que l'on ait

$$\begin{aligned} a &= \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3 + \xi_4 a_4 \\ a' &= \eta_1 a_1 + \eta_2 a_2 + \eta_3 a_3 + \eta_4 a_4 \end{aligned} \qquad \text{(les } \xi \text{ et les } \eta \text{ étant entiers)},$$

et de même pour b et b'. Il viendra

$$k = m(\xi_1\eta_3 - \xi_3\eta_1 + \xi_2\eta_4 - \xi_4\eta_2).$$

Si donc m est pair, on aura toujours

$$\delta'' \equiv \delta + \delta'.$$

Si au contraire, m est impair, tout dépend de la parité de la parenthèse.

Considérons donc une période quelconque

$$a = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3 + \xi_4 a_4,$$
$$b = \xi_1 b_1 + \xi_2 b_2 + \xi_3 b_3 + \xi_4 b_4,$$

et proposons-nous de trouver le multiplicateur correspondant (α, β, δ). On trouvera aisément

$$\alpha = \xi_1 \alpha_1 + \xi_2 \alpha_2 + \xi_3 \alpha_3 + \xi_4 \alpha_4,$$
$$\beta = \xi_1 \beta_1 + \xi_2 \beta_2 + \xi_3 \beta_3 + \xi_4 \beta_4.$$

On aura de plus

$$\delta \equiv \xi_1 \delta_1 + \xi_2 \delta_2 + \xi_3 \delta_3 + \xi_4 \delta_4 \pmod{2i\pi},$$

si m est pair ou si

$$\xi_1 \xi_3 + \xi_2 \xi_4$$

est pair.

On aura au contraire

$$\delta \equiv \xi_1 \delta_1 + \xi_2 \delta_2 + \xi_3 \delta_3 + \xi_4 \delta_4 + i\pi,$$

si m et $\xi_1 \xi_3 + \xi_2 \xi_4$ sont impairs.

Nous allons maintenant introduire six nombres

$$(3) \qquad (a, \alpha), \quad (a, \beta), \quad (a, \delta), \quad (b, \alpha), \quad (b, \beta), \quad (b, \delta)$$

définis comme il suit; considérons la forme bilinéaire

$$x_1 y_3 - x_3 y_1 + x_2 y_4 - x_4 y_2$$

et substituons a_1, a_2, a_3, a_4 à la place de x_1, x_2, x_3, x_4 et $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ à la place de y_1, y_2, y_3, y_4; nous aurons (a, α); de même pour les autres.

Nous poserons de plus

$$(a, \delta) = 2 \mathrm{R} i\pi,$$
$$(b, \delta) = 2 \mathrm{S} i\pi.$$

Nous conviendrons d'écrire

$$(x', y') \equiv (x, y),$$

lorsque la différence $x' - x$, $y' - y$ sera une période.

Si donc on augmente chacun des δ d'un multiple de $2 i\pi$, ce qui ne change pas les multiplicateurs, les nombres R et S deviendront R' et S'; mais on aura

$$(\mathrm{R}', \mathrm{S}') \equiv (\mathrm{R}, \mathrm{S}).$$

Voyons maintenant ce que deviennent nos six nombres (3).

1° Quand on change de variables.

2° Quand on change de périodes.

3° Quand on multiplie la fonction intermédiaire par une exponentielle de la forme e^{P}.

1° *Changement d'origine.* — Imaginons qu'on pose

$$x = x' + h, \qquad y = y' + k,$$

quels seront les six nombres relatifs aux nouvelles variables x', y'?

Il est évident que les quatre nombres

$$(a, \alpha), \quad (a, \beta), \quad (b, \alpha), \quad (b, \beta)$$

ne changeront pas. Quand à R et à S, ils augmenteront respectivement de

$$\frac{1}{2 i\pi}[h(a, \alpha) + k(a, \beta)] \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{2 i\pi}[h(b, \alpha) + k(b, \beta)].$$

2° *Changement linéaire.* — Posons

$$x = \lambda x' + \mu y', \qquad \Delta x' = \mu_1 x - \mu y,$$
$$y = \lambda_1 x' + \mu_1 y', \qquad \Delta y' = -\lambda_1 x + \lambda y,$$
$$\Delta = \lambda\mu_1 - \lambda_1\mu.$$

On aura alors, en appelant a', b', α', β' les nouvelles valeurs de a, b, α, β :

$$a' = \lambda a + \mu b, \qquad \Delta\alpha' = \mu_1\alpha - \lambda_1\beta,$$
$$b' = \lambda_1 a + \mu_1 b, \qquad \Delta\beta' = -\mu\alpha + \lambda\beta.$$

Si nous formons alors les nouveaux nombres

$$(a', \alpha'), \quad (a', \beta'), \quad \ldots,$$

il viendra

$$(a', \alpha') = \frac{\lambda\mu_1}{\Delta}(a, \alpha) + \frac{\mu\mu_1}{\Delta}(b, \alpha) - \frac{\lambda\lambda_1}{\Delta}(a, \beta) - \frac{\mu\lambda_1}{\Delta}(b, \beta),$$

et de même pour les trois autres.

Les quatre nouveaux nombres tels que (a', α') s'exprimeront donc linéairement en fonction des anciens.

Voici le tableau des coefficients :

	$\frac{(a, \alpha)}{\Delta}$	$\frac{(b, \alpha)}{\Delta}$	$\frac{(a, \beta)}{\Delta}$	$\frac{(b, \beta)}{\Delta}$
(a', α')	$\lambda\mu_1$	$\mu\mu_1$	$-\lambda\lambda_1$	$-\mu\lambda_1$
(b', α')	$\lambda_1\mu_1$	μ_1^2	λ_1^2	$-\lambda_1\mu_1$
(a', β')	$-\lambda\mu$	$-\mu^2$	λ^2	$\lambda\mu$
(b', β')	$-\lambda_1\mu$	$\mu_1\mu$	$\lambda\lambda_1$	$\lambda\mu_1$

Ce tableau montre immédiatement que

$$(a, \alpha) + (b, \beta)$$

est un invariant et il est aisé de voir en effet que cette expression est égale à

$$M_{1,} + M_{2,} = 4mi\pi.$$

Mais il y a plus. Supposons que l'on ait

$$(a, \alpha) = (b, \beta) = 2mi\pi$$

et

$$(a, \beta) = (b, \alpha) = 0,$$

le tableau précédent montre qu'on aura encore

$$(a', \alpha') = (b', \beta') = 2mi\pi.$$

et

$$(a, \beta') = (b, \alpha') = 0.$$

Nous allons voir maintenant que les quatre nombres (a, α), etc., ont effectivement les valeurs que j'indique plus haut.

Pour une exponentielle de la forme e^{P}, on voit aisément que ces quatre nombres sont nuls.

Pour une fonction Θ les quatre périodes ont pour valeurs respectivement

$$\begin{array}{cccc} 2i\pi, & 0, & G, & H, \\ 0, & 2i\pi, & H, & G' \end{array}$$

et les nombres α et β ont pour valeurs

$$\begin{array}{cccc} 0, & 0, & m, & 0, \\ 0, & 0, & 0, & m. \end{array}$$

Il en résulte que l'on a

$$(a, \alpha) = (b, \beta) = 2mi\pi,$$
$$(a, \beta) = (b, \alpha) = 0.$$

Ces valeurs resteront encore les mêmes quand on multipliera une fonction Θ par une exponentielle e^{P}; elles ne changeront pas non plus (ainsi que nous venons de le voir) quand on changera de variables. Elles sont donc les mêmes pour une fonction intermédiaire quelconque.

Qu'arrive-t-il maintenant des nombres R et S?

Il est aisé de voir que par suite du changement linéaire que nous envisageons, les γ et les δ ne changent pas. On aura donc, en appelant R' et S' les nouvelles valeurs de R et de S :

$$\mathrm{R}' = \lambda \mathrm{R} + \mu \mathrm{S},$$
$$\mathrm{S}' = \lambda_1 \mathrm{R} + \mu_1 \mathrm{S}.$$

Revenons au changement de variables que nous avions envisagé d'abord, c'est-à-dire au changement d'origine. Nous avons vu que R et S augmentaient respectivement de

$$\frac{1}{2i\pi}[h(a, \alpha) - k(a, \beta)],$$

$$\frac{1}{2i\pi}[h(b, \alpha) - k(b, \beta)].$$

Ces deux quantités, en tenant compte des valeurs des nombres (a, α), etc., se réduisent à

$$mh \quad \text{et} \quad mk.$$

Si donc on change de variables en posant

$$x' = \lambda x + \mu y + h,$$
$$y' = \lambda_1 x + \mu_1 y + k,$$

il viendra

$$R' = \lambda R + \mu S - mh,$$
$$S' = \lambda_1 R + \mu_1 S - mk,$$

ce qui peut s'énoncer ainsi :

Les nombres $-\frac{R}{m}$ et $-\frac{S}{m}$ subissent le même changement que les variables elles-mêmes.

3° *Changement de périodes.* — Supposons que l'on remplace le système des périodes

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad a_4,$$
$$b_1, \quad b_2, \quad b_3, \quad b_4,$$

que nous supposons être un système de périodes normales, par un autre système équivalent et également formé de périodes normales.

Les nouvelles valeurs des nombres α et β seront formées avec les anciennes, comme les nouvelles périodes avec les anciennes et il en sera encore de même des nouvelles valeurs des nombres δ à un multiple près de $i\pi$.

Il en résulte que les nouvelles valeurs des quatre nombres (a, α), (a, β), (b, α), (b, β) sont les mêmes que les anciennes; et que les nouvelles valeurs de R et de S sont aussi les mêmes que les anciennes à une demi-période près.

C'est cette demi-période qu'il faut maintenant chercher à déterminer.

Pour cela il faut envisager les changements simples de périodes qui sont les suivants :

1° Permutation de a_1 et de a_3 en changeant le signe d'une des deux périodes.

2° Changement simultané des signes de a_1 et a_3.

3° Permutation des deux paires de périodes (a_1, a_3), (a_2, a_4).

4° Changement de a_1 en $a_1 + a_3$.

5° Changement de a_1 en $a_1 + a_3$ et de a_4 en $a_4 - a_3$.

Les trois premières opérations ne peuvent altérer les nombres R et S. Il n'en est pas de même des deux dernières.

Si l'on change a_1 en $a_1 + a_3$, δ_1 va se changer en $\delta_1 + \delta_3 + \frac{1}{2} M_{1,3}$ ou en $\delta_1 + \delta_3 + mi\pi$. De sorte que le nouveau δ_1 sera congru à $\delta_1 + \delta_3$ ou à $\delta_1 + \delta_3 + i\pi$ selon que m sera pair ou impair. Si l'on appelle R' et S' les nouvelles valeurs de R et de S, on aura

$$(R', S') \equiv (R, S),$$

si m est pair, et

$$(R', S') \equiv \left(R + \frac{a_3}{2}, S + \frac{b_3}{2}\right),$$

si m est impair.

Dans la cinquième opération, le nouveau δ_1 sera $\delta_1 + \delta_4 + \frac{1}{2} M_{1,4}$ et le nouveau δ_4 sera $\delta_4 - \delta_3 - \frac{1}{2} M_{4,3}$.

Mais comme on $M_{1,4} = M_{4,3} = 0$, on voit que cette cinquième opération n'altère pas R et S.

Ainsi donc dans le cas où m est pair, on a toujours

$$(R', S') \equiv (R, S),$$

et l'on a dans tous les cas possibles

$$(2R', 2S') \equiv (2R, 2S).$$

4° *Multiplication par une exponentielle.* — Supposons que l'on multiplie la fonction intermédiaire envisagée par l'exponentielle e^P, où

$$P = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F.$$

Nous avons trouvé pour l'exponentielle

$$\alpha = 2Aa + 2Bb,$$
$$\beta = 2Ba + 2Cb,$$
$$\gamma = Aa^2 + 2Bab + Cb^2 + 2Da + 2Eb,$$

et par conséquent

$$\delta = 2Da + 2Eb,$$

ce qui montre que les six nombres (α, α), (α, β), (α, δ), etc., sont tous nuls.

On ne change donc pas ces six nombres en multipliant une fonction intermédiaire par une exponentielle.

On voit donc dans quelle mesure nos six nombres peuvent être regardés comme des invariants.

Ces résultats se généralisent immédiatement et s'étendent au cas des fonctions abéliennes de plus de deux variables, mais il est tout à fait inutile que j'insiste sur ce point.

V. — Transformation.

Soit

$$(1) \qquad \begin{cases} a_1, & a_2, & a_3, & a_4, \\ b_1, & b_2, & b_3, & b_4, \end{cases}$$

un système de périodes normales, tel que

$$a_1 b_3 - a_3 b_1 + a_2 b_4 - a_4 b_2 = 0.$$

Envisageons maintenant un second système de périodes

$$(2) \qquad \begin{cases} c_1, & c_2, & c_3, & c_4, \\ d_1, & d_2, & d_3, & d_4, \end{cases}$$

qu'on obtiendra en posant

$$\begin{aligned} c_i &= \Sigma \lambda_{i,k} a_k \\ d_i &= \Sigma \lambda_{i,k} b_k \end{aligned} \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4),$$

les $\lambda_{i,k}$ étant des nombres entiers.

Nous supposerons que ces nombres entiers λ aient été choisis de telle sorte que l'on ait identiquement

$$c_1 d_3 - c_3 d_1 + c_2 d_4 - c_4 d_2 = \mu (a_1 b_3 - a_3 b_1 + a_2 b_4 - a_4 b_2).$$

Le déterminant des λ sera alors égal à μ^2 et l'opération par laquelle on passe du système des périodes (1) au système (2) s'appellera une transformation d'ordre μ.

Il est évident que toute fonction qui admettra le système de périodes (1), admettra également le système (2), d'où il suit que les fonctions abéliennes engendrées par le système (1) ne sont que des cas particuliers de celles qui sont engendrées par le système (2).

Si l'on considère une fonction intermédiaire relative au système (1), ce sera aussi une fonction intermédiaire par rapport au système (2), mais la réciproque n'est pas vraie. Une fonction intermédiaire relative au système (2) n'est pas toujours une fonction intermédiaire par rapport au système (1).

Soit

$$e^{\alpha_i u+\beta_i v+\gamma_i}$$

le multiplicateur d'une fonction intermédiaire relative au système (1) par rapport à la période (a_i, b_i) et

$$e^{\alpha_i u+\beta_i v+\gamma_i}$$

son multiplicateur par rapport à la période (c_i, d_i).

Nous poserons comme dans le paragraphe précédent

$$\delta_i = \gamma_i - \frac{1}{2}(a_i\alpha_i + b_i\beta_i); \qquad \delta'_i = \gamma'_i - \frac{1}{2}(c_i\alpha'_i + d_i\beta'_i),$$

et il viendra

$$(3) \qquad \alpha'_i = \Sigma\lambda_{i,k}\alpha_k, \qquad \beta'_i = -\Sigma\lambda_{i,k}\beta_k,$$

$$(4) \qquad \delta'_i \equiv \Sigma\lambda_{i,k}\delta_k \qquad (\text{mod } i\pi).$$

Il en résulte que si l'on forme les six nombres

$$(c, \alpha'), \quad (c, \beta'), \quad (c, \delta'), \quad (d, \alpha'), \quad \ldots,$$

on aura

$$(c, \alpha') = \mu(a, \alpha), \qquad (c, \beta') = \mu(a, \beta), \qquad \ldots.$$

On en conclut que si une fonction intermédiaire est d'ordre m par rapport au système (1), elle sera d'ordre $m\mu$ par rapport au système (2).

Posons maintenant

$$R_1 = \frac{1}{2i\pi}(c, \delta'), \qquad S_1 = \frac{1}{2i\pi}(d, \delta');$$

on trouvera

$$(2R_1, 2S_1) \equiv (2\mu R, 2\mu S);$$

c'est-à-dire que les nombres R_1, S_1 ne différeront des nombres μR, μS que d'une demi-période du système (2).

Cela posé, imaginons qu'on se donne les α', les β' et les δ' et qu'on se propose de déterminer les α, les β et les δ. Les α et les β se calculeront sans ambiguïté par le moyen des équations (3). Pour déterminer les δ, il faut mettre les congruences (4) sous une forme plus précise.

Nous les écrirons

$$(4) \qquad \delta'_i \equiv \Sigma\lambda_{i,k}\delta_k + \varepsilon_i \qquad (\text{mod } 2i\pi);$$

ε_i ne dépendra que des $\lambda_{i,k}$ et sera égal tantôt à zéro, tantôt à $i\pi$ (*cf.* paragraphes précédents).

Nous n'avons besoin de connaître les δ qu'à un multiple près de $2i\pi$. Il est aisé de conclure que les congruences (4) comportent un nombre de solutions égal au déterminant des λ, c'est-à-dire à μ^2.

Je vais maintenant résoudre deux problèmes inverses.

1° Former les fonctions intermédiaires du système (2) à l'aide de celles du système (1).

Nous nous donnons les nombres α', β' et δ' correspondant à un système de fonctions intermédiaires d'ordre p, relatives au système (2).

Des égalités et congruences (3) et (4) nous déduirons μ^2 systèmes de valeurs des nombres α, β et δ.

A chacun de ces systèmes de valeurs, correspondront m^2 fonctions intermédiaires d'ordre m relatives au système (1).

Par rapport au système (2), ces fonctions intermédiaires seront d'ordre mp et correspondront aux nombres donnés α', β', δ'.

On aura donc en tout $m^2\mu^2$ pareilles fonctions d'ordre $m\mu$ qui seront linéairement indépendantes et à l'aide desquelles toutes les autres pourront par conséquent s'exprimer linéairement.

2° Former les fonctions intermédiaires du système (1) à l'aide de celles du système (2).

Nous nous proposons de trouver une fonction d'ordre m admettant pour chacune des périodes du système (1) un multiplicateur défini par trois nombres donnés (α, β, δ).

Pour les périodes du système (2), le multiplicateur sera défini par les trois nombres (α', β', δ') que l'on peut déduire des relations (3) et (4).

Toute combinaison des périodes (2) est aussi une combinaison des périodes (1); mais la réciproque n'est pas vraie. Parmi les combinaisons des périodes (1), on peut en choisir μ^2 que j'appellerai périodes principales et qui jouiront de la propriété suivante :

Une période quelconque, je veux dire une combinaison quelconque des périodes (1), est toujours égale à une période principale, augmentée d'une combinaison des périodes (2).

Soit alors

$$(0, 0),\quad (a_1, b_1),\quad (a_2, b_2),\quad \ldots,\quad (a_q, b_q),$$

les μ^2 périodes principales ($\nu = \mu^2 - 1$) et

$$(0, 0, 0), \quad (\alpha''_1, \beta''_1, \delta''_1), \quad (\alpha''_2, \beta''_2, \delta''_2), \quad \ldots, \quad (\alpha''_\nu, \beta''_\nu, \delta''_\nu),$$

les nombres qui définissent les multiplicateurs correspondants.

Quant aux multiplicateurs eux-mêmes, nous les appellerons pour abréger :

$$1, \quad P_1, \quad P_2, \quad \ldots, \quad P_\nu.$$

Cela posé, soit $\Phi(x, y)$ une fonction intermédiaire d'ordre $m\mu$ par rapport au système (2) et admettant pour les périodes de ce système les mêmes multiplicateurs $(\alpha', \beta', \delta')$ que la fonction qu'il s'agit de construire.

Les fonctions suivantes :

$$P_1\Phi(x - a''_1, y - b''_1), \quad P_2\Phi(x - a''_2, y - b''_2), \quad \ldots, \quad P_\nu\Phi(x - a''_\nu, y - b''_\nu),$$

admettront les mêmes multiplicateurs que la fonction Φ elle-même. Il est aisé de voir alors que la fonctiou

$$\Phi(x, y) + \sum_{i=1}^{\nu} P_i\Phi(x - a''_i, y - b''_i)$$

est une fonction intermédiaire d'ordre m par rapport au système (1) et admettant les multiplicateurs (α, β, δ).

Le problème proposé est donc résolu.

Nous allons maintenant étudier plus particulièrement le cas où les intégrales abéliennes qui ont donné naissance au système de fonctions abéliennes envisagées, sont susceptibles d'être ramenées aux intégrales elliptiques.

Supposons pour fixer les idées qu'il n'y ait que trois variables x, y et z et écrivons le tableau des périodes sous la forme suivante :

$$\begin{array}{llllllll}
\text{pour } x: & 1, & 0, & 0, & G, & H'', & H', \\
\text{pour } y: & 0, & 1, & 0, & H'', & G', & H, \\
\text{pour } z: & 0, & 0, & 1, & H', & H, & G''.
\end{array}$$

La variable $\alpha x + \beta y + \gamma z$ aura alors pour périodes :

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad (\alpha G + \beta H'' + \gamma H'), \quad (\alpha H'' + \beta G' + \gamma H), \quad (\alpha H' + \beta H + \gamma G'').$$

Si ces six périodes se réduisent à deux, nous dirons que la variable $\alpha x + \beta y + \gamma z$ est réductible. Les variables réductibles correspondent ainsi aux intégrales abéliennes réductibles aux intégrales elliptiques que nous avons envisagées dans les paragraphes I et II.

Supposons qu'il y ait une variable réductible; je puis toujours par les procédés du paragraphe I ramener le tableau des périodes à la forme

$$(5)\qquad \begin{cases} \text{pour } x: & 1, & 0, & 0, & G, & \dfrac{1}{a}, & 0 \\ \text{pour } y: & 0, & 1, & 0, & \dfrac{1}{a}, & G', & H \\ \text{pour } z: & 0, & 0, & 1, & 0, & H, & G'' \end{cases} \qquad (a \text{ étant un entier}),$$

de telle sorte que la variable réductible soit précisément x.

Supposons maintenant qu'il y ait une autre variable réductible; il y aura certainement une troisième variable réductible, d'après les conclusions du paragraphe II, et de plus, ou bien ces variables seront de la forme

$$\beta y + \gamma z, \quad \beta' y + \gamma' z,$$

ou bien elle sera de la forme générale

$$\alpha x + \beta y + \gamma z, \quad \alpha' x + \beta' y + \gamma' z;$$

mais il y aura une infinité d'autres variables réductibles parmi lesquelles les deux suivantes :

$$\beta y + \gamma z, \quad \beta' y + \gamma' z,$$

ne dépendront que de y et de z.

Dans tous les cas, s'il y a trois variables réductibles, ou s'il y en a une infinité, l'une de ces variables sera x, et deux autres seront des combinaisons de y et de z seulement.

Cela posé, reprenons le tableau des périodes (5) et multiplions les quatrième, cinquième et sixième périodes par a. Cette opération sera une transformation d'ordre a. Le tableau des périodes deviendra ainsi

$$\begin{matrix} 1, & 0, & 0, & aG, & 1, & 0, \\ 0, & 1, & 0, & 1, & aG', & aH, \\ 0, & 0, & 1, & 0, & aH, & aG''. \end{matrix}$$

Retranchons maintenant la première période de la cinquième et la deuxième de la quatrième, le tableau des périodes se simplifiera et deviendra

$$\begin{matrix} \text{pour } x: & 1, & 0, & 0, & aG, & 0, & 0, \\ \text{pour } y: & 0, & 1, & 0, & 0, & aG', & aH, \\ \text{pour } z: & 0, & 0, & 1, & 0, & aH, & aG''. \end{matrix}$$

Les périodes de x sont ainsi rendues indépendantes de celles de y et de z. La première et la quatrième période appartiennent à x seulement, les quatre autres périodes à y et à z seulement.

Les deux variables

$$\beta y + \gamma z, \quad \beta' y + \gamma' z$$

resteront d'ailleurs réductibles. Il en résulte que si nous envisageons le système de périodes suivant :

$$\begin{array}{lcccc} \text{pour } y : & 1, & 0, & aG', & aH, \\ \text{pour } z : & 0, & 1, & aH, & aG'', \end{array}$$

qui n'est plus que de genre 2, le système d'intégrales abéliennes correspondant admettra encore deux intégrales réductibles aux intégrales elliptiques.

On pourra donc d'après les principes du paragraphe I réduire le tableau des périodes, en prenant pour nouvelles variables

$$y_1 = \beta y + \gamma z, \qquad z_1 = \beta' y + \gamma' z.$$

On trouvera ainsi

$$\begin{array}{lcccc} \text{pour } y_1 : & 1, & 0, & G'_1, & \dfrac{1}{b}, \\ \text{pour } z_1 : & 0, & 1, & \dfrac{1}{b}, & G''_1 \end{array} \quad (b \text{ étant un entier}).$$

Le tableau complet des périodes sera alors

$$\begin{array}{lcccccc} \text{pour } x : & 1, & 0, & 0, & aG, & 0, & 0, \\ \text{pour } y_1 : & 0, & 1, & 0, & 0, & G'_1, & \dfrac{1}{b}, \\ \text{pour } z_1 : & 0, & 0, & 1, & 0, & \dfrac{1}{b}, & G''_1. \end{array}$$

Faisons ensuite l'opération suivante qui est une transformation d'ordre b :

Multiplier les trois dernières périodes par b ; puis retrancher la deuxième de la sixième et la troisième de la cinquième.

Le tableau des périodes devient ainsi :

$$\begin{array}{lcccccc} \text{pour } x : & 1, & 0, & 0, & abG, & 0, & 0, \\ \text{pour } y_1 : & 0, & 1, & 0, & 0, & bG'_1, & 0, \\ \text{pour } z_1 : & 0, & 0, & 1, & 0, & 0, & bG''_1. \end{array}$$

On voit que les périodes des trois variables x, y_1 et z_1 sont ainsi rendues indépendantes.

On reconnait sans peine comment le raisonnement précédent s'étend au cas général et l'on peut énoncer le résultat suivant :

Si dans un système de variables abéliennes de genre ρ, il y a ρ variables réductibles, on peut par une transformation d'ordre convenable, simplifier le tableau des périodes de manière à rendre indépendantes les périodes des variables définitives.

Nous avons été obligé de faire dans le raisonnement précédent $\rho = 3$ et non $\rho = 2$, parce que la généralisation en partant du cas de $\rho = 2$ aurait pu présenter des difficultés.

Nous allons revenir à l'hypothèse $\rho = 2$ et supposer de nouveau qu'il n'y a que deux variables x et y.

Considérons en particulier le cas où les périodes de x et de y sont indépendantes et où le tableau des périodes s'écrit

$$\begin{array}{cccc} 2i\pi, & 0, & G, & 0, \\ 0, & 2i\pi, & 0, & G'. \end{array}$$

Cherchons à former toutes les fonctions Θ d'ordre m qui admettent pour multiplicateurs relativement à nos quatre périodes

$$1, \quad 1, \quad e^{mx+\gamma}, \quad e^{my+\gamma'}.$$

On pourra former m fonctions Θ elliptiques, dépendant de la variable x, admettant les deux périodes

$$2i\pi \quad \text{et} \quad G,$$

avec les multiplicateurs

$$1 \quad \text{et} \quad e^{mx+\gamma}.$$

Soient

$$\Theta_1(x), \quad \Theta_2(x), \quad \ldots, \quad \Theta_m(x),$$

ces m fonctions.

On pourra de même former m fonctions Θ elliptiques, dépendant de la variable y, admettant les deux périodes

$$2i\pi \quad \text{et} \quad G',$$

avec les multiplicateurs

$$1 \quad \text{et} \quad e^{my+\gamma'}.$$

Soient

$$\Theta'_1(y), \quad \Theta'_2(y), \quad \ldots, \quad \Theta'_m(y)$$

ces m fonctions.

Les m^2 produits

$$\Theta_i(x)\Theta'_k(y) \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, m)$$

seront alors des fonctions Θ de x et de y, à l'aide desquelles toutes les autres s'exprimeront linéairement.

Une fonction Θ quelconque d'ordre m est alors égale à

$$\Sigma A_{i,k}\Theta_i(x)\Theta'_k(y),$$

où les $A_{i,k}$ sont des constantes numériques.

Une fonction intermédiaire quelconque sera de la forme

$$\Sigma A_{i,k} e^{P}\theta_i(x)\Theta'_k(y),$$

où P est un polynôme entier du deuxième degré en x et en y.

Supposons maintenant que les périodes de x et de y ne soient plus indépendantes, mais que les deux variables

$$\alpha x + \beta y, \quad \alpha' x + \beta' y$$

soient réductibles.

On pourra alors en prenant pour variables nouvelles,

$$x' = \alpha x + \beta y, \qquad y' = \alpha' x + \beta' y,$$

et en opérant sur les périodes une transformation d'ordre μ, rendre indépendantes les périodes de x' et de y'.

Les fonctions intermédiaires d'ordre m relatives au premier système de périodes seront des fonctions intermédiaires d'ordre $m\mu$ par rapport au système transformé.

Il en résulte que toute fonction intermédiaire d'ordre m par rapport au premier système pourra se mettre sous la forme

$$\Sigma A_{i,k} e^{P}\Theta_i(\alpha x + \beta y)\Theta'_k(\alpha' x + \beta' y). \tag{6}$$

Les $A_{i,k}$ sont des constantes; les indices i et k varient de 1 à $m\mu$; les Θ_i et les Θ_k sont des fonctions Θ elliptiques d'ordre $m\mu$; P est un polynôme du second degré en x et y.

Une expression de la forme (6) n'est d'ailleurs pas toujours une fonction intermédiaire relative au premier système de périodes.

Il faut pour cela qu'il y ait entre les X_{ik}

$$m^2(\mu^2-1)$$

relations linéaires qu'il est aisé de former.

Ces résultats s'étendent immédiatement au cas de ρ variables.

VI. — Somme des zéros.

Soient $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_\rho$, ρ fonctions intermédiaires de ρ variables $x_1, x_2, \ldots, x_\rho$ admettant les mêmes périodes et étant respectivement d'ordre $m_1, m_2, \ldots, m_\rho$. Considérons les solutions communes aux ρ équations simultanées

$$(1) \qquad \Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3 = \ldots = \Phi_\rho = 0.$$

Soit

$$x_1 = y_1, \quad x_2 = y_2, \quad \ldots, \quad x_\rho = y_\rho,$$

un système de solutions des équations (1). Soit

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_\rho$$

une des périodes.

Il est clair que

$$x_1 = y_1 + a_1, \quad x_2 = y_2 + a_2, \quad \ldots, \quad x_\rho = y_\rho + a_\rho$$

sera un autre système de solutions. Mais nous ne regarderons pas ces deux solutions comme distinctes.

Dans un travail inséré au Tome XI du *Bulletin de la Société mathématique de France* (1), j'ai déterminé le nombre des solutions distinctes et démontré qu'il est égal à

$$N = \rho!\, m_1 m_2 \ldots m_\rho.$$

Soit maintenant

$$x_i = y_{ik}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, \rho;\ k = 1, 2, \ldots, N),$$

un quelconque de ces N systèmes de solutions.

Je me propose de déterminer la somme de ces solutions, c'est-à-dire de calculer les ρ quantités

$$H_1 = \sum_{k=1}^{N} y_{1k}, \quad H_2 = \sum_{k=1}^{N} y_{2k}, \quad \ldots, \quad H_\rho = \sum_{k=1}^{N} y_{\rho k}.$$

---

(1) *Voir* ce Tome IV, p. 302.

Il est clair que ces quantités H ne pourront être déterminées qu'à un multiple près des périodes. En effet nous ne regardons pas comme distinctes les deux solutions

$$y_{1,k},\quad y_{2,k},\quad \ldots,\quad y_{\rho,k}$$

et

$$y_{1,k}+a_1,\quad y_{2,k}+a_2,\quad \ldots,\quad y_{\rho,k}+a_\rho.$$

Mais si on les remplace l'une par l'autre

$$H_1,\quad H_2,\quad \ldots,\quad H_\rho$$

se changeront en

$$H_1+a_1,\quad H_2+a_2,\quad \ldots,\quad H_\rho+a_\rho.$$

Les H nous seront donc donnés non par une égalité mais par une congruence.

Je vais maintenant montrer que les H ne dépendent que des périodes et des multiplicateurs.

Pour cela nous allons, pour fixer les idées, supposer qu'il n'y a que deux variables x et y.

Nous aurons alors deux fonctions intermédiaires Φ_1 et Φ_2 d'ordres m_1 et m_2 et nous envisagerons les deux équations

$$\Phi_1=\Phi_2=0,$$

qui ont $2m_1m_2$ solutions distinctes.

Soient alors

$$(2)\qquad \begin{cases} a_1, & a_2, & a_3, & a_4,\\ b_1, & b_2, & b_3, & b_4,\end{cases}$$

les périodes et

$$(\alpha_1,\ \beta_1,\ \delta_1),\quad (\alpha_2,\ \beta_2,\ \delta_2),\quad (\alpha_3,\ \beta_3,\ \delta_3),\quad (\alpha_4,\ \beta_4,\ \delta_4),$$
$$(\alpha'_1,\ \beta'_1,\ \delta'_1),\quad (\alpha'_2,\ \beta'_2,\ \delta'_2),\quad (\alpha'_3,\ \beta'_3,\ \delta'_3),\quad (\alpha'_4,\ \beta'_4,\ \delta'_4),$$

les multiplicateurs de Φ_1 et de Φ_2, en conservant aux lettres α, β et δ la même signification que dans les deux paragraphes précédents.

Je dis que H_1 et H_2 ne dépendront que des a, des b, des α, des β et des δ.

Soient en effet Φ'_1 et Φ'_2 deux fonctions intermédiaires admettant respectivement les mêmes multiplicateurs que Φ_1 et Φ_2. Formons les équations

$$(3)\qquad \Phi_1+\lambda_1\Phi'_1=\Phi_2+\lambda_2\Phi'_2=0,$$

qui auront $2m_1m_2$ solutions distinctes; faisons les sommes H_1, H_2 de ces $2m_1m_2$ solutions. Je dis que H_1 et H_2 ne dépendent pas des λ.

Soient Φ''_1 une fonction intermédiaire ayant mêmes multiplicateurs que Φ_1 et Φ'_1, et Φ''_1 une fonction intermédiaire ayant mêmes multiplicateurs que Φ_2 et Φ'_2. Alors les quotients

$$\frac{\Phi_1 - \lambda_1 \Phi'_1}{\Phi''_1} \quad \text{et} \quad \frac{\Phi_2 + \lambda_2 \Phi'_2}{\Phi''_2}$$

seront des fonctions abéliennes.

Soient maintenant X, Y et Z trois fonctions abéliennes quelconques admettant les périodes (2); il y aura entre ces trois fonctions une relation algébrique que j'écris

$$F(X, Y, Z) = 0, \tag{4}$$

et toute fonction abélienne sera une fonction rationnelle de X, Y et Z.

Il en sera ainsi en particulier des six dérivées partielles

$$\frac{dX}{dx}, \quad \frac{dY}{dx}, \quad \frac{dZ}{dx}, \quad \frac{dX}{dy}, \quad \frac{dY}{dy}, \quad \frac{dZ}{dy};$$

ce qui permet de poser

$$x = \int (A\, dX + B\, dY),$$

$$y = \int (A_1\, dX + B_1\, dY),$$

A, B, A_1, B_1 étant des fonctions rationnelles de X, Y et Z.

En d'autres termes, si l'on regarde X, Y et Z comme les coordonnées d'un point dans un plan, l'équation (4) représente une surface algébrique et x et y sont des intégrales de différentielles totales de première espèce attachées à cette surface.

De plus je pourrai écrire

$$\frac{\Phi_1 - \lambda_1 \Phi'_1}{\Phi''_1} = \frac{P_1 + \lambda_1 P'_1}{Q_1}, \qquad \frac{\Phi_2 + \lambda_2 \Phi'_2}{\Phi''_2} = \frac{P_2 + \lambda_2 P'_2}{Q_2},$$

P_1, P'_1, Q_1, P_2, P'_2 et Q_2 étant des polynômes entiers en X, Y et Z.

Il en résulte que les équations (3) équivalent aux suivantes

$$P_1 + \lambda P'_1 = P_2 + \lambda_2 P'_2 = 0. \tag{3 bis}$$

Ces dernières représentent une courbe gauche algébrique, variable avec les paramètres λ_1 et λ_2.

Pour avoir H_1, il faut envisager les différents points d'intersection de cette courbe et de la surface (4), et faire la somme des différentes valeurs que prend l'intégrale de première espèce x en ces différents points :

Le théorème d'Abel généralisé nous apprend que cette somme est une constante. Donc H_1 ne dépend pas de λ_1 et de λ_2. C. Q. F. D.

Cela posé, proposons-nous d'évaluer cette somme en fonction des a, des b, des α, des β et des δ.

Commençons par le cas des fonctions elliptiques et imaginons que l'on ait deux périodes

$$a_1 \quad \text{et} \quad a_2$$

avec les multiplicateurs (α_1, γ_1), (α_2, γ_2), ou encore

$$(\alpha_1, \delta_1), \quad (\alpha_2, \delta_2),$$

les nombres α, γ et δ ayant même signification que plus haut.

On trouve aisément que si m est le nombre des zéros de la fonction intermédiaire envisagée et H leur somme, on aura

$$2mi\pi = \alpha_2 a_1 - \alpha_1 a_2$$

et

$$2Hi\pi = \frac{\alpha_2 a_1^2}{2} + \gamma_2 a_1 - \frac{\alpha_1 a_2^2}{2} - \gamma_1 a_2,$$

ou en tenant compte des relations

$$\gamma = \delta + \frac{1}{2} a\alpha,$$

$$2Hi\pi = \left(\frac{\alpha_2 a_1}{2} - \frac{\alpha_1 a_2}{2}\right)(a_1 + a_2) + \delta_2 a_1 - \delta_1 a_2$$

ou

$$H = \frac{m}{2}(a_1 + a_2) + \frac{\delta_2 a_1 - \delta_1 a_2}{2i\pi}.$$

Si m est pair, on obtient ainsi

$$H \equiv \frac{\delta_2 a_1 - \delta_1 a_2}{2i\pi} \qquad (\text{mod } a_1, a_2),$$

et si m est impair

$$H \equiv \frac{\delta_2 a_1 - \delta_1 a_2}{2i\pi} + \frac{a_1 + a_2}{2} \qquad (\text{mod } a_1, a_2).$$

Revenons maintenant au cas de deux variables, mais en supposant que les périodes de x et de y soient indépendantes. Soient alors

$$\begin{array}{lcccc} \text{pour } x: & a_1, & 0, & a_3, & 0, \\ \text{pour } y: & 0, & b_2, & 0, & b_4, \end{array}$$

ces quatre périodes et

$$(\alpha_1, \beta_1, \delta_1), \quad (\alpha_2, \beta_2, \delta_2), \quad (\alpha_3, \beta_3, \delta_3), \quad (\alpha_4, \beta_4, \delta_4),$$

les multiplicateurs correspondants. On aura

$$\begin{array}{ll} \alpha_2 a_1 - \beta_1 b_2 = M_{1,2} = 0, & \alpha_3 a_1 - \alpha_1 a_3 = M_{1,3} = 2mi\pi, \\ \alpha_4 a_1 - \beta_1 b_4 = 0, & \alpha_2 a_3 - \beta_3 b_2 = 0, \\ \beta_4 b_2 - \beta_2 b_4 = 2mi\pi, & \beta_3 b_4 - \alpha_4 a_3 = 0, \end{array}$$

ce qui permet de poser, μ étant une constante convenablement choisie

$$\alpha_2 = \mu b_2, \quad \alpha_4 = \mu b_4, \quad \beta_1 = \mu a_1, \quad \beta_3 = \mu a_3.$$

Multiplions maintenant notre fonction intermédiaire par

$$e^{-\mu xy},$$

α_2, α_4, β_1, β_3 s'annuleront et les autres nombres α, β, δ ne changeront pas. Nous ne changerons pas d'ailleurs les zéros de notre fonction intermédiaire.

Nous pouvons donc toujours supposer que l'on a

$$\alpha_2 = \alpha_4 = \beta_1 = \beta_3 = 0.$$

Soient maintenant Φ et Φ' deux fonctions intermédiaires d'ordres m et m' ayant respectivement pour multiplicateurs

$$\begin{array}{cccc} (\alpha_1, 0, \delta_1), & (0, \beta_2, \delta_2), & (\alpha_3, 0, \delta_3), & (0, \beta_4, \delta_4), \\ (\alpha'_1, 0, \delta'_1), & (0, \beta'_2, \delta'_2), & (\alpha'_3, 0, \delta'_3), & (0, \beta'_4, \delta'_4), \end{array}$$

et envisageons les deux équations

$$\Phi = \Phi' = 0, \tag{5}$$

qui ont $2mm'$ solutions distinctes.

Il existe m^2 fonctions intermédiaires qui ont mêmes multiplicateurs que Φ, et m'^2 fonctions qui ont mêmes multiplicateurs que Φ'. Mais d'après ce que nous venons de voir, H_1 et H_2 ne dépendent que des multiplicateurs et ne changeront pas si l'on remplace Φ et Φ' par d'autres fonctions intermédiaires ayant mêmes multiplicateurs.

Parmi les fonctions qui ont mêmes multiplicateurs que Φ, il y en a qui sont de la forme

$$\Phi_1(x)\Phi_2(y);$$

$\Phi_1(x)$ est une fonction intermédiaire elliptique, admettant les périodes a_1, a_3 et les multiplicateurs (α_1, δ_1), (α_3, δ_3).

De même $\Phi_2(y)$ a pour périodes b_2, b_4 et pour multiplicateurs (β_2, δ_2), (β_4, δ_4).

Je pourrai de même remplacer Φ' par le produit

$$\Phi'_1(x)\Phi'_2(y);$$

$\Phi'_1(x)$ aura pour périodes a_1, a_3 et pour multiplicateurs (α'_1, δ'_1), (α'_3, δ'_3) et $\Phi'_2(y)$ aura pour périodes b_2, b_4 et pour multiplicateurs (β'_2, δ'_2), (β'_4, δ'_4).

Nous remplacerons donc les équations (5) par les suivantes :

$$\Phi_1(x)\Phi_2(y) = \Phi'_1(x)\Phi'_2(y) = 0,$$

ou ce qui revient au même par les suivantes :

$$(6) \qquad \Phi_1(x) = \Phi'_2(y) = 0 \qquad \text{et} \qquad \Phi'_1(x) = \Phi_2(y) = 0.$$

Soient h_1, h_2, h'_1, h'_2 la somme des zéros de Φ_1, Φ_2, Φ'_1, Φ'_2.

Je dis qu'on aura

$$\mathrm{H}_1 = m' h_1 + m h'_1,$$
$$\mathrm{H}_2 = m' h_2 + m h'_2.$$

En effet énumérons les $2mm'$ solutions des équations (6).

On les obtiendra

1° En combinant les m zéros de Φ_1 avec les m' zéros de Φ'_2.

2° En combinant les m' zéros de Φ'_1 avec les m zéros de Φ_2.

Donc chacun des zéros de Φ_1 paraîtra m' fois et chacun des zéros de Φ'_1 paraîtra m fois. C'est pourquoi l'on a

$$\mathrm{H}_1 = m' h_1 + m h'_1.$$

Nous aurons d'autre part

$$h_1 \equiv \frac{\delta_3 a_1 - \delta_1 a_3}{2i\pi} + m\,\frac{a_1 + a_2}{2},$$

$$h'_1 \equiv \frac{\delta'_3 a_1 - \delta'_1 a_3}{2i\pi} + m'\,\frac{a_1 + a_2}{2},$$

d'où

$$H_1 = \frac{m'}{2i\pi}(\delta_3 a_1 - \delta_1 a_3) + \frac{m}{2i\pi}(\delta'_3 a_1 - \delta'_1 a_3),$$

le terme $2mm'\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)$ disparaît comme étant un multiple des périodes.

Posons maintenant, en reprenant les notations des paragraphes précédents :

$$(a, \delta) = a_1\delta_3 - a_3\delta_1 + a_2\delta_4 - a_4\delta_2 = a_1\delta_3 - a_3\delta_1, \qquad (\text{puisque } a_2 = a_4 = 0),$$
$$(a, \delta) = 2R\,i\pi, \qquad (b, \delta) = 2S\,i\pi,$$
$$(a, \delta') = 2R'i\pi, \qquad (b, \delta') = 2S'i\pi.$$

Il viendra

$$H_1 = m'R + mR',$$

et de même

$$H_2 = m'S + mS'.$$

Nous pouvons donc écrire plus succinctement, et conformément aux notations adoptées plus haut,

$$(7) \qquad (H_1, H_2) = (m'R + mR', m'S + mS').$$

Cette formule est démontrée pour deux fonctions intermédiaires quelconques, toutes les fois que les périodes de x et de y sont indépendantes.

Passons maintenant à un cas plus général, et supposons que les périodes de x et de y ne soient plus indépendantes, mais que parmi les variables de la forme $cx + dy$, il y en ait deux qui soient réductibles.

Nous supposerons d'abord que ce soient x et y qui soient réductibles et que les périodes s'écrivent :

$$(8) \qquad \begin{cases} \text{pour } x: & a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad a_4, \\ \text{pour } y: & b_1, \quad b_2, \quad b_3, \quad b_4, \end{cases}$$

de telle façon qu'il y ait deux relations linéaires à coefficients entiers entre a_1, a_2, a_3 et a_4 et de même deux autres relations semblables entre b_1, b_2, b_3 et b_4.

On pourra alors, par une transformation d'ordre μ, amener les périodes de x et de y à être indépendantes et remplacer le système des périodes (8) par un nouveau système (9) de périodes indépendantes.

Soient alors Φ et Φ' deux fonctions intermédiaires d'ordres m et m'.

Envisageons encore les équations

$$\Phi = \Phi' = 0.$$

Soient R, S et R', S' les nombres R et S relatifs aux deux fonctions Φ et Φ'.

Par rapport au nouveau système de périodes (9), Φ et Φ' seront des fonctions intermédiaires d'ordres $m\mu$ et $m'\mu$ et par rapport à ce nouveau système, leurs nombres caractéristiques seront devenus respectivement R_1, S_1 et R'_1, S'_1.

On aura d'ailleurs (*cf.* paragraphe précédent)

$$(2R_1,\ 2S_1) \equiv (2\mu R,\ 2\mu S),$$
$$(2R'_1,\ 2S'_1) \equiv (2\mu R',\ 2\mu S'),$$

par rapport aux périodes (9) et *a fortiori* par rapport aux périodes (8).

Les équations

$$\Phi = \Phi' = 0$$

auront $2mm'$ solutions distinctes par rapport aux périodes (8); la somme des $2mm'$ valeurs de x sera H_1, celle des $2mm'$ valeurs de y sera H_2.

Ces mêmes équations auront $2\mu^2 mm'$ solutions distinctes par rapport aux périodes (9); la somme des $2\mu^2 mm'$ valeurs de x sera k_1, celle des $2\mu^2 mm'$ valeurs de y sera k_2.

On aura d'ailleurs évidemment

$$(k_1,\ k_2) \equiv (\mu^2 H_1,\ \mu^2 H_2),$$

la congruence étant prise par rapport aux périodes (8).

Nous pourrons appliquer au calcul de k_1 et de k_2 la formule démontrée précédemment pour le cas où les périodes x et y sont indépendantes, ce qui donne

$$(k_1,\ k_2) \equiv (\mu m' R_1 + \mu m R'_1,\ \mu m' S_1 + \mu m S'_1)$$

ou

$$(2k_1,\ 2k_2) \equiv (2\mu^2[m'R + mR'],\ 2\mu^2[m'S + mS']),$$

ou enfin

$$(10) \qquad (2\mu^2 H_1,\ 2\mu^2 H_2) \equiv (2\mu^2[m'R + mR'],\ 2\mu^2[m'S + mS']).$$

Envisageons donc le système des deux quantités

$$H_1 - m'R - mR', \quad H_2 - m'S - mS'.$$

D'après la congruence (10), ces deux quantités devront toujours être égales à une période divisée par $2\mu^2$. Or ces deux quantités sont évidemment des fonctions continues des δ et des δ'. Ce ne peuvent donc être que des constantes, ce qui nous permet d'écrire

$$(H_1,\ H_2) \equiv (m'R + mR' + \Delta_1,\ m'S + mS' + \Delta_2),$$

Δ_1 et Δ_2 sont des constantes ne dépendant que des périodes a et b, des α et des β, mais indépendantes des δ et des δ'.

Il reste à déterminer ces constantes. Pour cela, j'envisagerai un cas particulier, celui où les δ et les δ' sont tous nuls. Dans ce cas on a

$$R = R' = S = S' = 0.$$

De plus la fonction $\Phi(x, y)$ aura mêmes multiplicateurs que $\Phi(-x, -y)$ et par conséquent que

$$\Phi(x, y) + \Phi(-x, -y),$$

qui est une fonction paire.

Cela nous permet de supposer que dans les équations

$$\Phi = \Phi' = 0,$$

Φ et Φ' sont des fonctions paires.

Si alors

$$x = x_0, \qquad y = y_0$$

est une solution de ces équations, il en sera de même de

$$x = -x_0, \qquad y = -y_0.$$

Si ces deux solutions sont distinctes, leur somme est nulle; elles entrent toutes deux dans l'expression de H_1 et de H_2 et elles s'y détruisent.

Si elles ne sont pas distinctes, une seule d'entre elles devra entrer dans l'expression de H_1 et de H_2 et ce sera évidemment une demi-période.

Ainsi dans le cas qui nous occupe (H_1, H_2) est toujours une demi-période et comme on a dans ce cas

$$(H_1, H_2) \equiv (\Delta_1, \Delta_2),$$

on voit que (Δ_1, Δ_2) est aussi une demi-période; on a donc dans le cas général

$$(2H_1, 2H_2) \equiv (2m'R + 2mR', 2m'S + 2mS').$$

Cette formule subsiste encore quand on fait un changement linéaire de variables ou un changement de périodes (*cf.* paragraphe IV).

Cette formule est ainsi établie pour tous les cas où il y a deux variables réductibles; mais il est aisé de l'étendre au cas le plus général.

En effet, d'après un théorème démontré au paragraphe II, tout système de périodes diffère infiniment peu d'un système correspondant à un cas de réductibilité. De plus il est clair que H_1 et H_2 sont des fonctions continues des périodes.

La formule précédente doit donc s'appliquer quelles que soient les périodes.

C'est ainsi que si $f(x)$ et $\Phi(x)$ sont deux fonctions continues de x qui sont égales pour toutes les valeurs incommensurables de x, elles seront encore égales pour toutes les valeurs commensurables. La façon de raisonner est toute pareille dans les deux cas.

Ainsi dans tous les cas la différence

$$(H_1 - m'R - mR', H_2 - m'S - mS')$$

est toujours une demi-période.

Ceci permet d'écrire

$$(H_1, H_2) = \Big[m'R + mR' + \tfrac{1}{2}(e_1 a_1 + e_2 a_2 + e_3 a_3 + e_4 a_4),$$
$$m'S + mS' + \tfrac{1}{2}(e_1 b_1 + e_2 b_2 + e_3 b_3 + e_4 b_4)\Big],$$

les e étant des entiers.

Par raison de continuité, les entiers e devront avoir toujours la même valeur, ou plutôt puisqu'il s'agit, non d'une égalité, mais d'une congruence, e_1 devra toujours être de même parité; de même pour e_2, e_3 et e_4.

Pour déterminer la parité des nombres e, il suffit donc d'envisager un cas particulier. Or quand les périodes de x et de y sont indépendantes, nous avons trouvé

$$(H_1, H_2) = (m'R + mR', m'S + mS').$$

Cette formule subsiste donc dans le cas général.

Ainsi, si l'on envisage les deux équations

$$\Phi(x, y) = \Phi'(x, y) = 0,$$

où Φ et Φ' sont deux fonctions intermédiaires d'ordres m et m', elles auront $2mm'$ solutions distinctes. La somme des $2mm'$ valeurs de x sera égale à $m'R + mR'$, et celle des $2mm'$ valeurs de y sera égale à $m'S + mS'$ à un multiple près des périodes.

Envisageons en particulier la fonction Θ de Riemann, c'est-à-dire la fonction Θ du premier ordre.

Soit donc

$$\Theta(x, y) = \Sigma\, e^{mx + ny + \frac{1}{2}(\lambda m^2 + 2\mu mn + \nu n^2)},$$

ce qui nous donne pour les quantités a, b, α, β, γ, δ les valeurs suivantes :

Valeurs de	a,	b,	α,	β,	γ,	δ,
	$2i\pi$,	0,	0,	0,	0,	0,
	0,	$2i\pi$,	0,	0,	0,	0,
	λ,	μ,	1,	0,	$\frac{1}{2}\lambda$,	0,
	μ,	ν,	0,	1,	$\frac{1}{2}\nu$,	0.

On a donc aussi

$$R = S = 0.$$

Considérons maintenant la fonction

$$\Theta(x - h, y - k).$$

Nous avons vu au paragraphe IV que si l'on faisait subir aux variables x et y un certain changement linéaire, les nombres $-\frac{R}{m}$, $-\frac{S}{m}$ subiraient précisément le même changement, d'où il suit que R et S qui avaient pour valeurs zéro pour la fonction

$$\Theta(x, y),$$

auront pour valeurs h et k pour la fonction

$$\Theta(x - h, y - k).$$

Considérons alors deux équations simultanées

$$\Theta(x - h, y - k) = \Theta(x - h', y - k') = 0.$$

Ces équations auront deux solutions distinctes. La somme des deux valeurs de x sera $h + h'$, celle des deux valeurs de y sera $k + k'$ à un multiple près des périodes.

Il serait aisé de voir comment ces résultats peuvent s'étendre au cas où il y a plus de deux variables.

Supposons d'abord qu'il y ait trois variables x, y et z et trois fonctions intermédiaires Φ, Φ' et Φ'' d'ordres m, m' et m''.

On formera pour chacune d'elles trois nombres analogues à R et S que j'appellerai R, S, T pour la première, R', S', T' pour la seconde et R'', S'', T'' pour la troisième.

Si l'on appelle H_1 la somme des $6mm'm''$ valeurs de x, H_2 celle des $6mm'm''$

valeurs de y et H_3 celle des $6mm'm''$ valeurs de z qui satisfont aux trois équations

$$\Phi = \Phi' = \Phi'' = 0,$$

on aura

$$(H_1, H_2, H_3) \equiv (2m'm''R + 2mm''R' + 2mm'R'', 2m'm''S + 2mm''S' + 2mm'S'', \\ 2m'm''T + 2mm''T' + 2mm'T'').$$

Soient en particulier trois fonctions θ du premier ordre. Supposons que l'on ait les trois équations

$$\Theta(x-h, y-k, z-l) = \Theta(x-h', y-k', z-l') = \Theta(x-h'', y-k'', z-l'') = 0.$$

Elles auront six solutions distinctes. La somme des six valeurs de x sera $2(h+h'+h'')$, celle des six valeurs de y sera $2(k+k'+k'')$ et celle des six valeurs de z sera $2(l+l'+l'')$ à un multiple près des périodes.

Plus généralement. Soit

$$\Theta(x_1, x_2, \ldots, x_\rho)$$

une fonction θ à ρ variables. Formons les ρ équations

$$(11) \qquad \Theta(x_1 - h_{1,k}, x_2 - h_{2,k}, \ldots, x_\rho - h_{\rho,k}) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, \rho).$$

Elles auront $\rho\,!$ solutions distinctes.

Si l'on néglige les multiples des périodes, la somme des $\rho\,!$ valeurs de x_i, sera

$$(\rho - 1)\,!\;\; (h_{i,1} + h_{i,2} + \ldots + h_{i,\rho}).$$

Si les ρ fonctions θ qui entrent dans les équations (11) sont toutes paires ou impaires, tous les h sont des demi-périodes. La somme des valeurs de x_i sera donc une demi-période si $\rho = 2$ et si par conséquent $(\rho-1)\,!$ est impair. Si au contraire $\rho > 2$ et si par conséquent $(\rho-1)\,!$ est pair, la somme des valeurs de x_i sera une période entière. Or nous n'avons déterminé cette somme qu'à un multiple près des périodes ; on peut donc la regarder comme nulle.

Si donc $\rho > 2$ et si l'on forme ρ équations en annulant ρ des 4^ρ fonctions θ paires ou impaires, la somme des $\rho\,!$ solutions distinctes de ces ρ équations sera nulle.

SUR LES FONCTIONS ABÉLIENNES

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 120, p. 239-243 (4 février 1895).

Soit

$$F(u_1, u_2, \ldots, u_p)$$

ou simplement $F(u_i)$ une fonction abélienne, c'est-à-dire une fonction à p variables et à $2p$ périodes qui ne change pas quand l'un des arguments augmente de $2i\pi$ et qui admet, d'autre part, p autres périodes dites de *seconde espèce*, de telle sorte que l'on ait

$$F(u_i + a_{ik}) = F(u_i) \qquad (k = 1, 2, \ldots, p).$$

Les p^2 quantités a_{ik} satisfont d'ailleurs à la condition

$$a_{ik} = a_{ki}.$$

Parmi les fonctions abéliennes, je distinguerai celles que j'appellerai *spéciales* et qui doivent leur origine à une courbe algébrique C de genre p. On sait que pour $p = 2$ et pour $p = 3$ toutes les fonctions abéliennes sont spéciales, mais qu'il n'en est plus de même pour $p \geq 4$.

A l'égard des fonctions abéliennes spéciales, on peut considérer p intégrales abéliennes de première espèce

$$v_1(x), \quad v_2(x), \quad \ldots, \quad v_p(x),$$

qui sont des fonctions des coordonnées x et y d'un point de la courbe C, ou plus simplement encore des fonctions de l'abscisse x seulement.

Considérons maintenant la fonction Θ.

On peut étudier ses zéros à deux points de vue différents. On peut d'abord former p équations à p inconnues.

$$\Theta(u_i - e_{ik}) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, p), \tag{1}$$

où les e_{ik} sont p^2 constantes données. Les équations (1) admettent, comme je l'ai montré, $p!$ solutions.

On peut encore, comme l'a fait Riemann, s'il s'agit de fonctions spéciales, former une seule équation à une inconnue

$$\Theta[v_i(x) - e_i] = 0, \tag{2}$$

où les e_i sont p constantes données. Le nombre des solutions est alors égal à p.

Ces résultats peuvent être généralisés de plusieurs manières différentes :

1° J'appellerai fonction θ une fonction entière de $u_1, u_2, \ldots, u_p$ qui, comme la fonction Θ, se reproduit multipliée par un facteur exponentiel quand on augmente les u_i d'une période de deuxième espèce et, de plus, ne change pas quand un des u_i augmente de $2i\pi$. Je dirai que deux fonctions θ appartiennent au même faisceau quand elles admettent les mêmes facteurs exponentiels et qu'une fonction θ est d'ordre n quand elle admet les mêmes facteurs exponentiels que

$$[\Theta(u_i - e_i)]^n.$$

Un faisceau d'ordre n comprend n^p fonctions θ linéairement indépendantes.

Cela posé, s'il s'agit de fonctions spéciales, on démontre aisément qu'*il y a dans un faisceau d'ordre n*

$$n^p + p - np - 1,$$

fonctions θ linéairement indépendantes qui s'annulent identiquement quand on y remplace u_i par $v_i(x)$.

2° Supposons toujours qu'il s'agisse de fonctions spéciales et formons les q équations à q inconnues

$$\Theta[v_i(x_1) + v_i(x_2) + \ldots + v_i(x_q) - e_{ik}] = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, q), \tag{3}$$

où les e_{ik} sont pq constantes données.

Ces équations admettent

$$\frac{p!}{(p-q)!}$$

solutions, en ne regardant pas comme distinctes deux solutions qui ne diffèrent que par l'ordre dans lequel se présentent les q points

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_q.$$

Ce résultat, qui contient comme cas particuliers ceux que je viens d'énoncer au sujet des équations (1) et (2), peut se démontrer par une méthode analogue à celle qui m'a permis d'établir le résultat particulier relatif à l'équation (1) (*Bull. Soc. math. France*, t. XI) [1].

Cette méthode consiste à approfondir ce qui se passe dans un cas particulier que j'appellerai *cas singulier elliptique*, et qui est celui où les $a_{ik} (i \gtrless k)$ s'annulent et où la fonction Θ se décompose en un produit de p fonctions Θ elliptiques. Je me bornerai à dire que, dans ce cas, la courbe C de genre p se décompose en p courbes de genre 1.

Le résultat de Riemann relatif à l'équation (2) et le mien qui se rapporte aux équations (1) entraînent des conséquences qui semblent, au premier abord, mal se concilier entre elles. Le paradoxe, bien entendu, n'est qu'apparent, et tout s'explique par la circonstance suivante :

Soit, par exemple, $p = 3$; formons les deux équations

$$(4) \qquad \begin{cases} \Theta(u_1 - e_1, u_2 - e_2, u_3 - e_3) = 0, \\ \Theta(u_1 - e'_1, u_2 - e'_2, u_3 - e'_3) = 0. \end{cases}$$

Si l'on regarde u_1, u_2, u_3 comme les coordonnées rectangulaires d'un point dans l'espace, ces équations représentent une courbe que j'appellerai A.

Dans certains cas, cette courbe A *se décompose*. Pour $p = 3$, la courbe C se réduit à une courbe plane du quatrième degré sans point double. Les propriétés géométriques de ces courbes planes permettent très aisément d'expliquer les circonstances de la décomposition de la courbe A, et le paradoxe s'évanouit.

J'arrive à une autre question.

M. Lie a appelé *surface de translation* une surface dont les équations peuvent être mises sous la forme

$$x_i = f_i(t) + \varphi_i(t') \qquad (i = 1, 2, 3),$$

où x_1, x_2, x_3 représentent les coordonnées rectangulaires d'un point dans l'espace et où t et t' sont deux variables auxiliaires.

---

[1] *Voir* ce Tome IV, p. 17.

On peut de même appeler *variété de translation* une variété à $p-1$ dimensions dont les équations peuvent être mises sous la forme

$$x_i = f_{1,i}(t_1) + f_{2,i}(t_2) + \ldots + f_{p-1,i}(t_{p-1}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

où $x_1, x_2, \ldots, x_p$ sont les coordonnées rectangulaires d'un point dans l'espace à p dimensions et où les t sont des variables auxiliaires.

Cela posé, supposons, dans le cas de $p=3$, que u_1, u_2, u_3 représentent les coordonnées d'un point dans l'espace; ou, plus généralement, pour p quelconque, supposons que $u_1, u_2, \ldots, u_p$ représentent les coordonnées d'un point dans l'espace à p dimensions.

Alors Riemann a démontré que, dans le cas de $p=3$, la surface

$$\Theta(u_1, u_2, u_3) = 0$$

est de translation. De même pour p quelconque, et, *s'il s'agit de fonctions spéciales*, la variété

$$\Theta(u_i) = 0$$

sera de translation.

On peut se demander si cette propriété est encore vraie pour les fonctions abéliennes non spéciales.

La réponse doit être négative.

On pourrait déduire de là, sous la forme d'équations aux dérivées partielles auxquelles doit satisfaire Θ, la condition pour que les fonctions abéliennes de périodes données soient spéciales.

Mais je n'ai pas traité la question dans toute sa généralité. J'ai envisagé seulement les cas voisins du cas singulier elliptique, c'est-à-dire que j'ai supposé que, les a_{ii} restant finis, les $a_{ik} (i \gtrless k)$ sont très petits. On peut alors former aisément les conditions pour que la variété $\Theta = 0$ soit de translation, en nombre égal à celui des conditions pour que les fonctions abéliennes soient spéciales. Dans le cas de $p=4$, il n'y a qu'une seule condition, qui s'écrit

$$\sqrt{a_{12}a_{13}a_{34}a_{24}} + \sqrt{a_{13}a_{14}a_{23}a_{24}} = \sqrt{a_{12}a_{14}a_{23}a_{34}}.$$

En passant à la limite de diverses manières, on peut être conduit à des résultats intéressants; c'est ainsi que l'on voit que la surface

$$xyz + x + y + z = 0$$

est de deux manières différentes une surface de translation.

Outre le cas singulier elliptique, il y a un cas remarquable que l'on pourrait appeler le cas singulier abélien; c'est celui où la fonction Θ se décompose en un produit de plusieurs fonctions Θ abéliennes d'un nombre moindre de variables.

En envisageant un cas voisin du cas singulier abélien, puis en passant à la limite d'une manière convenable, on est conduit à certains résultats intéressants au sujet des fonctions abéliennes.

On voit, par exemple, que certaines surfaces, dont les équations s'expriment à l'aide de fonctions quadruplement périodiques de deuxième espèce, sont des surfaces de translation.

REMARQUES DIVERSES

SUR LES FONCTIONS ABÉLIENNES

Journal de Mathématiques, 5e série, t. I, p. 219-314 (1895).

I. — Définitions.

Je considère un système de fonctions abéliennes de genre p dépendant des p variables

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_p$$

et admettant $2p$ périodes.

J'écrirai souvent pour abréger

$$F(u_i) \quad \text{ou} \quad F(u_i - e_i),$$

au lieu de

$$F(u_1, u_2, \ldots, u_p) \quad \text{ou} \quad F(u_1 - e_1, u_2 - e_2, \ldots, u_p - e_p),$$

$e_1, e_2, \ldots, e_p$ étant des constantes quelconques.

Si $F(u_i)$ est une des fonctions abéliennes considérées et si l'on a

$$F(u_i) = F(u_i + a_i),$$

on dit que

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_p$$

est une période; on sait que l'on peut toujours supposer que l'on a choisi les variables *normales* et les périodes *normales* de sorte que le tableau complet des $2p$ périodes s'écrive

(1)
$$\left\{\begin{array}{cccc} 2i\pi, & 0, & \ldots, & 0, \\ 0, & 2i\pi, & \ldots, & 0, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & 0, & \ldots, & 2i\pi, \\ a_{1,1}, & a_{1,2}, & \ldots, & a_{1,p}, \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & \ldots, & a_{2,p}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ a_{p,1}, & a_{p,2}, & \ldots, & a_{p,p}, \end{array}\right.$$

avec la condition

$$a_{i,k} = a_{k,i}.$$

Les p premières périodes du tableau (1) seront les périodes de première espèce et les p dernières les périodes de seconde espèce.

Une fonction θ d'ordre n est une fonction entière qui jouit des propriétés suivantes :

1° Quand on augmente les u_i de la $k^{\text{ième}}$ période de première espèce (c'est-à-dire quand on change u_k par exemple en $u_k + 2i\pi$, les autres u_i ne changeant pas), la fonction θ est multipliée par un facteur constant, que j'appellerai α_k;

2° Quand on augmente les u_i de la $k^{\text{ième}}$ période de seconde espèce, la fonction θ est multipliée par un facteur exponentiel de la forme

$$e^{nu_k+\gamma_k},$$

de sorte que

$$\theta(u_i + a_{i,k}) = e^{nu_k+\gamma_k}\theta(u_i).$$

Les facteurs

$$\alpha_k \quad \text{et} \quad e^{nu_k+\gamma_k}$$

s'appelleront les *multiplicateurs*.

Si deux fonctions θ ont les mêmes multiplicateurs, on dira qu'elles appartiennent au même *faisceau*.

Il est bien connu que, dans un faisceau d'ordre n et de genre p, il y a

$$n^p$$

fonctions θ linéairement indépendantes dont toutes les autres fonctions θ du faisceau sont des combinaisons linéaires.

Parmi les fonctions θ il y en a une qui est particulièrement remarquable et que j'appellerai Θ.

C'est la fonction bien connue

$$\sum e^{m_1 n_1 + m_2 n_2 + \ldots + m_p n_p - \frac{1}{2} \sum_{ik} a_{ik} m_i m_k},$$

qui est une fonction θ du premier ordre.

Le cas le plus simple est celui que j'appellerai le *cas singulier elliptique*; c'est celui où dans le tableau (1) des périodes normales tous les $a_{i,k}$ sont nuls si $i \neq k$.

La fonction Θ est alors le produit de p fonctions Θ elliptiques.

Vient ensuite le cas que j'appellerai *cas singulier abélien*. Il se présentera dans les circonstances suivantes :

Soit

$$p = p_1 + p_2 + \ldots + p_q.$$

Prenons les p dernières lignes du tableau (1), nous obtiendrons ainsi un tableau à p lignes et p colonnes. Je suppose que tous les éléments de ce tableau soient nuls, sauf :

1° Ceux qui appartiennent à la fois aux p_1 premières lignes et aux p_1 premières colonnes;

2° Ceux qui appartiennent à la fois aux p_2 lignes suivantes et aux p_2 colonnes suivantes;

. . . .

Et enfin ceux qui appartiennent à la fois aux p_q dernières lignes et aux p_q dernières colonnes.

S'il en est ainsi la fonction Θ à p variables sera le produit de q fonctions Θ admettant respectivement p_1, p_2, ... et p_q variables.

On sait comment les fonctions abéliennes ont été imaginées; on a considéré une courbe algébrique quelconque de genre p et les p intégrales abéliennes de première espèce correspondantes que j'appellerai $v_1, v_2, \ldots, v_p$; supposons alors qu'on prenne sur la courbe p points quelconques, qu'on considère une des intégrales abéliennes v_i, et qu'on fasse la somme Σv_i des valeurs de cette intégrale en ces p points.

Alors toute fonction symétrique des coordonnées de nos p points sera une fonction abélienne de

$$\Sigma v_1, \quad \Sigma v_2, \quad \ldots, \quad \Sigma v_p.$$

Mais on sait également que toutes les fonctions abéliennes ne peuvent pas être obtenues de cette manière.

Un système S de fonctions abéliennes de genre p dépend de

$$\frac{p(p+1)}{2}$$

constantes qui sont les périodes normales $a_{i,k}$.

Une courbe algébrique de genre p, si l'on ne regarde pas comme distinctes deux courbes dérivées l'une de l'autre par une transformation birationnelle, ne dépend que de $3p - 3$ constantes.

Ces deux nombres sont égaux pour $p = 2$ et pour $p = 3$; mais, pour $p > 3$, le premier est plus grand; il existe donc des fonctions abéliennes qui n'ont pas pour origine une courbe algébrique de genre p.

J'appellerai fonctions abéliennes *spéciales* celles qui admettent cette origine.

II. — Zéros des θ.

Après ces préliminaires sur lesquels j'ai peut-être un peu longuement insisté, j'arrive à l'objet de mon travail qui est l'étude des zéros des fonctions θ. Cette question a été abordée par deux voies très différentes; et par l'une comme par l'autre on a pénétré assez loin à l'intérieur du domaine inconnu qu'il s'agissait d'explorer; mais ces deux voies ne se sont pas encore rejointes, pour ainsi dire; c'est là le résultat que je voudrais atteindre, car je crois qu'il ne doit plus nous coûter qu'un léger effort.

Dans le Tome XI du *Bulletin de la Société mathématique de France* [1], j'ai démontré le théorème suivant :

Soient p fonctions θ *qui soient respectivement d'ordres*

$$n_1, \quad n_2, \quad \dots, \quad n_p;$$

le nombre de leurs zéros communs sera

$$n_1 n_2 \dots n_p (p!).$$

Bien entendu, je ne considère pas comme distincts deux zéros qui ne diffèrent que par des multiples des périodes.

---

[1] *Voir* ce Tome IV, p. 300.

Si en particulier l'on considère p fonctions θ d'ordre n appartenant à un même faisceau, le nombre de leurs zéros communs sera

$$n^p p!$$

Il en résulte que la relation algébrique qui existe entre $p+2$ fonctions θ d'ordre n, appartenant à un même faisceau, est d'ordre

$$n^p p!$$

ou d'ordre moindre; et il est aisé de vérifier ensuite qu'en général elle n'est pas d'ordre moindre.

Mais il ne sera peut-être pas sans intérêt de montrer comment on peut arriver au même résultat par un chemin entièrement différent.

Considérons donc $p+2$ fonctions θ d'ordre n appartenant à un même faisceau; soient $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{p+2}$ ces fonctions.

Considérons un polynôme homogène et d'ordre m par rapport à ces $p+2$ fonctions θ.

Les coefficients arbitraires de ce polynôme sont au nombre de

$$\frac{(m+p+1)!}{(m)!(p+1)!}.$$

Mais ce polynôme sera une fonction θ d'ordre

$$mn,$$

et tous les polynômes ainsi obtenus seront des fonctions θ *appartenant au même faisceau*.

Or un faisceau de genre p et d'ordre mn ne peut contenir que

$$m^p n^p$$

fonctions θ linéairement indépendantes.

Il y a donc *au moins*

$$\varphi(m) = \frac{(m+p+1)!}{(m)!(p+1)!} - m^p n^p$$

de nos polynômes qui s'annulent et qui d'ailleurs sont linéairement indépendants.

Il y a donc *au moins*, entre nos $p+2$ fonctions θ d'ordre n, $\varphi(m)$ relations algébriques homogènes d'ordre m, linéairement distinctes.

Soit, d'autre part,

$$F(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{p+2}) = 0$$

celle de toutes les relations algébriques entre les $p+2$ fonctions θ dont le degré est le plus petit.

Soit q ce degré; c'est le nombre q qu'il s'agit de déterminer.

Toutes les autres relations algébriques homogènes entre les $p+2$ fonctions θ s'obtiendront en multipliant

$$F = 0$$

par un polynôme quelconque homogène par rapport aux θ.

Nous pouvons maintenant répondre à la question suivante :

Combien y a-t-il entre les θ de relations algébriques et homogènes d'ordre $q+h$ linéairement distinctes?

Il y en aura autant que de polynômes homogènes d'ordre h linéairement indépendants; car on obtiendra toutes ces relations en multipliant $F = 0$ par l'un de ces polynômes.

Il y aura donc entre les $p+2$ fonctions θ

$$\frac{(h+p+1)!}{h!(p+1)!}$$

relations algébriques homogènes d'ordre $q+h$ et il n'y en aura pas davantage.

Nous aurons donc, quel que soit le nombre h,

$$\frac{(h+p+1)!}{h!(p+1)!} = \varphi(q+h)$$

ou bien

$$(1) \qquad \frac{(h+p+1)!}{h!(p+1)!} - \frac{(q+h+p+1)!}{(q+h)!(p+1)!} + (q+h)^p n^p = 0,$$

ou bien

$$(1\ bis) \qquad \frac{(h+p+1)(h+p)\ldots(h+2)(h+1)}{(p+1)!} - \frac{(q+h+p+1)(q+h+p)\ldots(q+h+1)}{(p+1)!} + (q+h)^p n^p = 0.$$

Tous les termes du premier membre de (1) ou de (1 *bis*) sont des polynômes entiers en h.

Le premier terme

$$\frac{(h+p+1)!}{h!\,(p-1)!}$$

est un polynôme d'ordre $p+1$ dont les deux premiers termes sont

$$\frac{h^{p+1}}{(p+1)!} + \frac{(p+1)(p+2)}{2(p+1)!}\,h^p.$$

Le second terme

$$-\frac{(-q+h+p+1)!}{(-q+h)!\,(p+1)!}$$

est un polynôme d'ordre $p+1$ dont les premiers termes sont

$$-\frac{h^{p+1}}{(p+1)!} - \frac{qh^p}{p!} - \frac{(p+1)(p+2)}{2(p+1)!}\,h^p.$$

Enfin le troisième terme est un polynôme d'ordre p dont le premier terme est

$$n^p h^p.$$

Il résulte de tout cela que les termes en h^{p+1} se détruisent et que le premier membre de (1) est un polynôme d'ordre p en h dont le premier terme est

$$h^p\left(n^p - \frac{q}{p!}\right).$$

Comme le premier membre de (1) ne peut être négatif, quelle que soit la valeur positive ou nulle attribuée à l'entier h, le coefficient du terme en h^p ne peut pas être négatif, ce qui donne

$$q \leq n^p p! \tag{2}$$

Il nous reste à faire voir qu'*en général* le nombre q n'est pas inférieur à $n^p p!$ c'est-à-dire qu'en général il n'existe pas entre nos $p+2$ fonctions θ de relation algébrique de degré plus petit que $n^p p!$

On peut présenter la chose dans un autre langage.

Envisageons les n^p fonctions θ d'un même faisceau de genre p et d'ordre n; considérons ces n^p fonctions θ comme les coordonnées homogènes d'un point M dans l'espace à $n^p - 1$ dimensions.

Si nous donnons aux p variables $u_1, u_2, \ldots, u_p$ toutes les valeurs possibles, ce point M va décrire une certaine variété V.

Cette variété V sera située dans l'espace à $n^p - 1$ dimensions; elle aura elle-même p dimensions; elle sera algébrique; son degré sera au plus égal à $n^p p!$

Je me propose d'établir qu'en général ce degré n'est pas inférieur à $n^p p!$

III. — Cas singulier elliptique.

Pour cela, il me suffit de montrer qu'il en est ainsi dans un cas particulier; car, si la réduction du degré avait lieu en général, elle devrait avoir lieu aussi dans ce cas particulier.

Le cas particulier que je choisirai est celui que j'ai appelé *cas singulier elliptique*.

Voyons comment on peut dans ce cas former les n^p fonctions θ du faisceau.

Considérons un premier système de fonctions elliptiques dépendant de la variable u_1; formons avec cette variable u_1 un faisceau d'ordre n et de genre 1 de fonctions θ elliptiques. Soient

$$(1) \qquad \theta_{1,1}, \quad \theta_{1,2}, \quad \ldots, \quad \theta_{1,n}$$

les n fonctions de ce faisceau.

Soient de même

$$(2) \qquad \theta_{2,1}, \quad \theta_{2,2}, \quad \ldots, \quad \theta_{2,n}$$

n fonctions θ elliptiques de la variable u_2, formant un faisceau d'ordre n et de genre 1.

Et ainsi de suite.

Soient enfin

$$(p) \qquad \theta_{p,1}, \quad \theta_{p,2}, \quad \ldots, \quad \theta_{p,n}$$

n fonctions θ elliptiques de la variable u_p, formant un faisceau d'ordre n et de genre 1.

Cela posé, prenons une fonction dans le tableau (1), une dans le tableau (2), etc., et enfin une dans le tableau (p). Faisons le produit de ces p fonctions; nous obtiendrons une fonction θ abélienne à p variables répondant au cas singulier elliptique.

Comme chacun des tableaux (1), (2), ..., (p) contient n fonctions différentes, on obtiendra n^p fonctions θ abéliennes à p variables, linéairement indépendantes et formant un faisceau d'ordre n et de genre p.

Ce sont ces n^p fonctions θ abéliennes que je regarde comme les coordonnées homogènes du point M qui engendre la variété V, dans l'espace à $n^p - 1$ dimensions.

Un premier point, fort important, est le suivant : pour que deux systèmes de valeurs de $u_1, u_2, \ldots, u_p$ correspondent à un même point de V, il faut et il suffit que la différence de ces deux systèmes de valeurs soit une période.

En effet, pour que ces deux systèmes correspondent à un même point de V, il faut et il suffit :

1° Que les rapports des fonctions θ elliptiques

$$(1) \qquad \theta_{1,1}, \quad \theta_{1,2}, \quad \ldots, \quad \theta_{1,n}$$

reprennent les mêmes valeurs, c'est-à-dire que les deux valeurs de u_1 diffèrent d'une période;

2° Que les rapports des fonctions θ elliptiques (2) reprennent les mêmes valeurs, c'est-à-dire que les deux valeurs de u_2 diffèrent d'une période, etc., et enfin que les rapports des fonctions θ elliptiques (p) reprennent les mêmes valeurs, c'est-à-dire que les deux valeurs de u_p diffèrent d'une période.

Il y a exception pour $n = 2$; dans ce cas, en effet, il n'y a dans le tableau (1), par exemple, que deux fonctions elliptiques $\theta_{1,1}, \theta_{1,2}$ et le rapport de ces deux fonctions peut reprendre la même valeur, sans que les deux valeurs de u_1 diffèrent d'une période.

Pour évaluer le degré de la variété V, il faut la *couper* par une variété plane (c'est-à-dire algébrique et du premier degré) ayant $n^p - p - 1$ dimensions et compter le nombre des points d'intersection. Une pareille variété plane, que nous pouvons d'ailleurs choisir arbitrairement, sera définie par p équations linéaires entre les coordonnées courantes.

Soient donc

$$\eta_{1,1}, \quad \eta_{1,2}, \quad \ldots, \quad \eta_{1,p}$$

p combinaisons linéaires des fonctions θ elliptiques (1).

Soient de même

$$\eta_{2,1}, \quad \eta_{2,2}, \quad \ldots, \quad \eta_{2,p}$$

p combinaisons linéaires des fonctions elliptiques (2), etc.

Soient enfin

$$\eta_{p,1}, \quad \eta_{p,2}, \quad \ldots, \quad \eta_{p,p}$$

p combinaisons linéaires des fonctions elliptiques (p).

Considérons les équations

$$
(3)\qquad \begin{cases} \eta_{1,1}\,\eta_{2,1}\ldots\eta_{p,1}=0, \\ \eta_{1,2}\,\eta_{2,2}\ldots\eta_{p,2}=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \eta_{1,p}\,\eta_{2,p}\ldots\eta_{p,p}=0. \end{cases}
$$

Les premiers membres seront des fonctions linéaires des n^p fonctions θ abéliennes de notre faisceau, c'est-à-dire des coordonnées courantes.

Les équations (3) définiront donc une variété plane P.

Il est aisé d'évaluer le nombre des solutions distinctes des équations (3) en ne considérant pas comme distincts deux systèmes de valeurs des u qui ne diffèrent que d'une période.

Cette évaluation est presque immédiate, et je l'ai déjà faite dans le Mémoire cité plus haut du *Bulletin de la Société mathématique de France*. Le nombre des solutions est $n^p p!$

A chacune de ces solutions correspond, comme nous l'avons vu, un point de V et un seul.

Ainsi le nombre des points d'intersection de V et de P est égal à $n^p p!$

La variété V est donc du degré $n^p p!$

En résumé le degré de la variété V ne peut s'abaisser que dans des cas exceptionnels.

Je ne m'arrêterai pas à rechercher quels sont ces cas exceptionnels. Je rappellerai seulement que le cas de $n=2$ est toujours excepté et qu'il y a de cette exception un exemple bien connu.

Soit

$$p=2,\qquad n=2;$$

d'où

$$n^p p! = 8,\qquad n^p = 4;$$

dans ce cas la variété V se réduit à une surface dans l'espace ordinaire à trois dimensions.

Dans ce cas, le degré se réduit; et V est une surface de Kummer du quatrième degré.

IV. — Théorème de Riemann.

Dans les deux numéros qui précèdent et dans mon Mémoire du *Bulletin de la Société mathématique*, j'ai exposé un premier moyen d'étudier les zéros des fonctions θ. Mais il y en a un autre, entièrement différent et qui est dû à Riemann.

Il ne s'applique qu'aux fonctions abéliennes *spéciales*, au sens donné à ce mot au paragraphe I.

Considérons donc un système S de fonctions abéliennes spéciales, c'est-à-dire devant leur existence à une courbe algébrique C de genre p.

A cette courbe appartiendront p intégrales abéliennes de première espèce

$$v_1, \quad v_2, \quad \ldots, \quad v_p,$$

correspondant aux variables

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_p.$$

Soit (x, y) un point de la courbe C; les v_i seront des fonctions de x et de y qui ne sont pas des variables indépendantes, mais qui sont liées par l'équation de la courbe.

On aura

$$v_i(x, y) = \int_{x_0, y_0}^{x, y} dv_i.$$

dv_i est une fonction rationnelle bien déterminée de (x, y), de dx et de dy; mais v_i ne sera entièrement définie en fonction de x et de y (à une période près, bien entendu) que quand on se sera donné la limite inférieure d'intégration, c'est-à-dire le point (x_0, y_0).

Nous verrons un peu plus loin comment ce point (x_0, y_0) doit être choisi; mais je dis tout de suite que ce point ne sera pas le même, en général, pour les p intégrales

$$v_1, \quad v_2, \quad \ldots, \quad v_p,$$

de sorte qu'en général ces p intégrales ne pourront pas s'annuler à la fois.

Voici maintenant l'énoncé des théorèmes découverts par Riemann :

Considérons la fonction Θ définie plus haut, qui est paire et du premier ordre.

Soient $e_1, e_2, \ldots, e_p$ p constantes quelconques; formons l'équation

$$\Theta(v_i - e_i) = 0. \tag{1}$$

Comme les v_i sont des fonctions de x et de y, cette équation (1) est une équation en x et y, définissant un point (x, y) de la courbe C. Comme y et x ne sont pas deux variables indépendantes, je dirai désormais, pour abréger le langage, le point x au lieu du point (x, y).

Riemann a démontré que cette équation (1) admet p solutions.

Soient

$$x^{(1)}, \quad x^{(2)}, \quad \ldots, \quad x^{(p)}$$

ces p solutions et soient

$$v_i^{(1)}, \quad v_i^{(2)}, \quad \ldots, \quad v_i^{(p)}$$

les valeurs correspondantes de l'intégrale v_i; Riemann a montré que l'on a

$$(2) \qquad e_i = v_i^{(1)} + v_i^{(2)} + \ldots + v_i^{(p)} + c_i$$

(les c_i étant des constantes indépendantes de $e_1, e_2, \ldots, e_p$), cela, bien entendu, à un multiple près des périodes.

Je dis maintenant qu'on peut choisir les limites inférieures d'intégration, de façon que les constantes c_i soient nulles.

Ces limites d'intégration, que j'ai appelées plus haut (x_0, y_0), sont restées jusqu'ici arbitraires.

Changer les limites d'intégration, c'est changer v_i en $v_i + h_i$, les h_i étant des constantes. Mais il faut en même temps changer e_i en $e_i + h_i$, de façon que $v_i - e_i$ ne change pas.

Quant aux

$$c_i = e_i - v_i^{(1)} - v_i^{(2)} - \ldots - v_i^{(p)},$$

ils se changent en

$$c_i + (1-p)h_i.$$

Il suffit donc de prendre

$$h_i = \frac{c_i}{p-1},$$

pour satisfaire à la question.

Nous pouvons donc toujours choisir les limites inférieures d'intégration de façon que les relations (2) s'écrivent

$$(2\ bis) \qquad e_i = v_i^{(1)} + v_i^{(2)} + \ldots + v_i^{(p)}.$$

Cette démonstration est en défaut quand le dénominateur $p-1$ s'annule; c'est-à-dire pour les fonctions elliptiques.

Dans ce cas, en effet, la relation (2)

$$e_i = v_i^{(1)} + c_i \qquad (i = 1)$$

ne peut pas se mettre sous la forme (2 *bis*) et c_i, quelle que soit la limite inférieure d'intégration, est égal à la demi-somme des périodes normales. On sait, en effet, que la fonction Θ elliptique s'annule quand la variable est égale à cette demi-somme.

Le théorème le plus important est le suivant :

Pour que

$$\Theta(u_i) = 0,$$

il faut et il suffit que u_i puisse se mettre sous la forme

$$u_i = v_i^1 + v_i^2 + \ldots + v_i^{(p-1)};$$

ou bien encore (ce qui revient au même) :

Pour que

$$\Theta(u_i) = 0,$$

il faut et il suffit que u_i puisse se mettre sous la forme

$$u_i = -v_i^{(1)} - v_i^{(2)} - \ldots - v_i^{(p-1)}.$$

Insistons un peu sur la signification de ce résultat.

Supposons, par exemple, $p = 3$ et considérons l'équation

$$\Theta(u_1, u_2, u_3) = 0.$$

Si nous regardons u_1, u_2, u_3 comme les coordonnées rectangulaires d'un point dans l'espace, cette équation représente une surface, et les équations de cette surface peuvent être mises sous la forme

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1^1 + v_1^2, \\ u_2 &= v_2^1 + v_2^2, \\ u_3 &= v_3^1 + v_3^2; \end{aligned}$$

v_1^1, v_2^1, v_3^1 sont fonctions d'une seule variable $x^{(1)}$; v_1^2, v_2^2, v_3^2 sont fonctions d'une seule variable $x^{(2)}$.

Il en résulte que notre surface peut être engendrée de la manière suivante : Une courbe se déplace d'un mouvement de translation sans se déformer et de telle façon qu'un de ses points décrive une courbe fixe. Une surface susceptible de ce mode de génération s'appelle une *surface de translation*.

Plus généralement, si l'équation

$$(3) \qquad F(u_1, u_2, \ldots, u_p) = 0$$

admet une solution de la forme

$$(4)\qquad \begin{cases} u_1 = \varphi_1^{(1)}(t_1) + \varphi_1^{(2)}(t_2) + \ldots + \varphi_1^{(p-1)}(t_{p-1}), \\ u_2 = \varphi_2^{(1)}(t_1) + \varphi_2^{(2)}(t_2) + \ldots + \varphi_2^{(p-1)}(t_{p-1}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u_p = \varphi_p^{(1)}(t_1) + \varphi_p^{(2)}(t_2) + \ldots + \varphi_p^{(p-1)}(t_{p-1}), \end{cases}$$

$t_1, t_2, \ldots, t_{p-1}$ étant $p-1$ variables indépendantes, je dirai que l'équation (3) est *translative*.

Alors, d'après ce qui précède, l'équation

$$\Theta = 0$$

sera translative pour tout système de fonctions abéliennes *spécial* au sens donné à ce mot au paragraphe I.

On peut alors se demander si cette propriété est encore vraie pour des fonctions abéliennes non spéciales.

Parmi les autres résultats obtenus par Riemann, je citerai seulement les suivants :

Un système de valeurs quelconque

$$e_1, \quad e_2, \quad \ldots, \quad e_p$$

peut être toujours mis sous la forme

$$e_i = v_i^{(1)} + v_i^{(2)} + \ldots + v_i^{(p)},$$

et en général il ne peut l'être que d'une seule manière; pour que cela puisse se faire de plusieurs manières (et alors d'une infinité de manières), il faut et il suffit que

$$\Theta(v_i - e_i)$$

soit identiquement nulle; ou ce qui revient au même, il faut et il suffit qu'on puisse mettre les e_i sous la forme

$$e_i = -v_i^{(1)} - v_i^{(2)} - \ldots - v_i^{(p-2)}.$$

Soit maintenant un système de valeurs

$$r_1, \quad r_2, \quad \ldots, \quad r_p,$$

tel que

$$\Theta(r_i) = 0.$$

Les r_i peuvent toujours être mis sous la forme

$$r_i = v_i^1 + v_i^2 + \ldots + v_i^{p-2}.$$

En général, cela n'est possible que d'une manière et il n'y a exception que si toutes les dérivées du premier ordre de Θ s'annulent en même temps que Θ.

V. — Extension du théorème de Riemann.

Considérons maintenant un faisceau d'ordre n et de genre p.

Soit θ une fonction de ce faisceau; formons l'équation

$$(1) \qquad \theta(v_i) = 0.$$

En raisonnant tout à fait comme l'a fait Riemann, on verrait que cette équation (si elle n'est pas identiquement satisfaite) admet np solutions.

Soient

$$x^1, \quad x^2, \quad \ldots, \quad x^{np}$$

ces np solutions, c'est-à-dire les np points de la courbe C qui satisfont à la question. Soient

$$v_i^{(1)}, \quad v_i^2, \quad \ldots, \quad v_i^{np}$$

les valeurs correspondantes de l'intégrale v_i.

Le raisonnement prouve encore que l'on a

$$(2) \qquad v_i^1 + v_i^2 + \ldots + v_i^{np} = C_i,$$

les C_i étant des constantes qui sont les mêmes pour toutes les fonctions θ du faisceau.

Je dis que les équations (2) peuvent nous permettre de déterminer p des points $x^{(i}$ quand on connaît les $(n-1)p$ autres.

En effet, considérons l'une quelconque des fonctions θ du faisceau et soient

$$(3) \qquad x_0^1, \quad x_0^2, \quad \ldots, \quad x_0^{np}$$

les np solutions correspondantes de l'équation (1); par les np points x_0^i je fais passer une courbe adjointe quelconque H. Cette courbe H coupera la courbe C, en dehors des points doubles et des points x_0^i, en un certain nombre d'autres points que j'appelle

$$x_1^1, \quad x_1^2, \quad \ldots, \quad x_1^{(q)}.$$

Alors les équations (2) signifieront que les points $x^{(i)}$ et les points $x_1^{(k)}$ sont sur une même courbe adjointe de même degré que H.

Je puis toujours supposer que le degré de H est supérieur à celui de C diminué de trois unités. On sait que dans ce cas on peut choisir arbitrairement tous les points d'intersection, sauf p d'entre eux.

Par les μ points $x_1^{(k)}$ et par $(n-1)p$ des points $x^{(i)}$ je pourrai donc toujours faire passer une courbe adjointe de même degré que H et, en général, je n'en pourrai faire passer qu'une seule. Les p autres points $x^{(i)}$ se trouveront donc ainsi déterminés.

J'ai dit que dans un faisceau il y a n^p fonctions θ linéairement indépendantes. Le premier membre de l'équation (1) (si la fonction θ est la plus générale du faisceau) contient donc n^p coefficients arbitraires que j'appellerai A et dont il dépend linéairement.

Disposons des A de telle façon que l'équation (1) soit satisfaite pour $(n-1)p$ points donnés quelconques de la courbe C, à savoir

$$x^{(1)},\quad x^{(2)},\quad \ldots,\quad x^{(np-p)}, \tag{4}$$

il en résultera, d'après ce qui précède, qu'elle sera également satisfaite pour p autres points de la courbe C, à savoir

$$x^{(np-p+1)},\quad \ldots,\quad x^{(np)}, \tag{5}$$

qui sont déterminés par les $(n-1)p$ premiers.

Disposons encore des A de telle façon que l'équation (1) soit satisfaite pour un autre point de C différent des points (4) et (5).

La fonction θ devrait alors s'annuler pour $np+1$ points différents, ce qui ne peut arriver que si elle est identiquement nulle.

Or nous avons introduit, entre les A, des relations linéaires au nombre de $np-p+1$; il reste donc

$$n^p+p-np-1$$

coefficients A arbitraires.

Il existe donc dans notre faisceau $n^p+p-np-1$ fonctions θ linéairement indépendantes et qui s'annulent identiquement quand on y remplace les variables indépendantes u_i par les intégrales v_i.

Cela peut se traduire dans un autre langage.

Reprenons la variété algébrique V définie au paragraphe III. Je rappelle qu'elle est de degré $n^p p\,!$, qu'elle appartient à l'espace à $n^p - 1$ dimensions et qu'elle a elle-même p dimensions.

Considérons un point dont les coordonnées homogènes soient précisément les n^p fonctions $\theta(v_i)$; ce sera un point de la variété V.

Et quand le point x décrira la courbe C, ce point de la variété V décrira une certaine *courbe* (ou variété à une dimension) que j'appelle B.

Cette courbe B, qui fait partie de V, est de genre p comme la courbe C à laquelle elle correspond point par point.

Pour trouver son degré, il suffit de chercher le nombre de ses points d'intersection avec une variété plane à $n^p - 2$ dimensions; c'est-à-dire le nombre des solutions de l'équation (1).

Nous avons vu que ce nombre est égal à np : la courbe B est donc de degré np.

Enfin, d'après ce qui précède, il y a entre les coordonnées d'un point de B

$$n^p - np + p - 1$$

relations linéaires à coefficients constants. Ces relations définissent un espace plan à $(n-1)p$ dimensions.

La courbe B fait donc partie d'un espace plan à $(n-1)p$ dimensions.

Soient par exemple $n = 2$, $p = 2$; d'où

$$n^p - 1 = 3, \qquad n^p p\,! = 8, \qquad (n-1)p = 2;$$

la variété V est alors une surface de Kummer du quatrième degré dans l'espace ordinaire et la courbe B, qui sera du quatrième degré sera plane.

Considérons maintenant l'équation

$$\theta(v_i - e_i) = 0; \tag{6}$$

les quantités

$$e_1, \quad e_2, \quad \ldots, \quad e_p \tag{7}$$

étant p constantes quelconques. Elle jouira des mêmes propriétés que l'équation (1); la démonstration serait la même; elle est d'ailleurs inutile, car, si les fonctions $\theta(u_i)$ forment un faisceau, il en sera de même des fonctions $\theta(u_i - e_i)$.

Si donc les n^p fonctions $\theta(v_i - e_i)$ sont les coordonnées homogènes d'un point, ce point, quand x décrira la courbe C, décrira une certaine courbe B′ située sur V.

Cette courbe B′ sera de degré np, de genre p et sera située dans un espace plan à $(n-1)p$ dimensions.

Il y aura une p-uple infinité de courbes B′; par chaque point de V passera une infinité de ces courbes.

Deux de ces courbes en général ne se rencontreront pas; les deux courbes correspondant à deux systèmes de valeurs

$$e_i \quad \text{et} \quad e'_i$$

des quantités (7) ne pourraient en effet se rencontrer que si l'on peut trouver deux points x et x' sur C tels que

$$e_i - e'_i = v_i - v'_i.$$

Cela n'arrivera pas en général sauf pour $p = 2$.

Nous savons toutefois que l'on peut trouver sur une variété V quelconque deux courbes B′ qui ont au moins un point commun, puisque par tout point de V passent une infinité de courbes B′. Mais on peut se demander si deux courbes B′ peuvent se rencontrer en deux points.

Pour cela il faudrait que l'on pût trouver sur C quatre points, x, x', x'', x''', tels que

$$e_i - e'_i = v_i - v'_i = v''_i - v_i;$$

d'où

$$v_i + v'''_i = v'_i + v''_i. \tag{8}$$

Une égalité telle que (8) est-elle possible?

Les théorèmes de Riemann énoncés à la fin du numéro précédent nous fourniront la réponse.

Si $p = 2$, l'égalité (8) est possible; nous pouvons supposer que la courbe C est une courbe du quatrième ordre avec un point double. La condition pour que l'égalité (8) soit satisfaite, c'est alors que les points x et x''' d'une part, x' et x'' d'autre part soient en ligne droite avec le point double.

Si $p > 2$, l'égalité (8) ne serait possible que si la fonction Θ pouvait s'annuler en même temps que toutes ses dérivées du premier ordre. Or cela n'arrivera pas en général, je veux dire pour un système S quelconque de fonctions abéliennes.

Par conséquent on ne peut pas, en général, trouver sur la variété V deux courbes B′ qui se coupent en plus d'un point.

VI. — Examens des cas singuliers elliptiques.

Voyons ce que deviennent ces résultats dans les cas singuliers et commençons par le cas singulier elliptique, où la fonction Θ est le produit de p fonctions Θ elliptiques.

Soit d'abord $p = 2$.

Considérons notre variété V de degré $2n^2$ et les courbes B′ de degré $2n$ tracées sur cette variété.

Considérons en particulier la courbe B.

Cette courbe peut être regardée comme définie par l'équation

$$u_i = v_i$$

ou bien

$$\Theta(u_i) = 0.$$

Dans le cas singulier elliptique on a

$$\Theta(u_i) = \Theta_1(u_1)\,\Theta_2(u_2),$$

Θ_1 et Θ_2 étant des fonctions Θ elliptiques; de sorte que l'équation de la courbe B se décompose en deux

$$\Theta_1(u_1) = 0, \qquad \Theta_2(u_2) = 0.$$

La première nous donne

$$u_1 = \alpha_1,$$

α_1 étant la demi-somme des périodes de la fonction Θ_1; la seconde nous donne de même

$$u_2 = \alpha_2.$$

La courbe B se décompose donc en deux autres, ayant respectivement pour équations

$$u_1 = \alpha_1, \qquad u_2 = \alpha_2.$$

Quel est le degré de chacune d'elles et en particulier de la courbe $u_1 = \alpha_1$?

Soit $\theta(u_i)$ une fonction quelconque du faisceau qui nous a servi à former la variété V; ce sera une fonction θ abélienne d'ordre n et de genre 2 qui sera une fonction linéaire à coefficients constants des n^2 fonctions θ fondamentales du faisceau; c'est-à-dire (avec le mode de représentation géométrique adopté pour la définition de la variété V) des coordonnées homogènes courantes dans l'espace à $n^2 - 1$ dimensions.

L'équation

$$\theta(u_i) = 0 \tag{1}$$

est donc celle d'une variété *plane* P à $n^2 - 2$ dimensions. Pour déterminer le degré de la courbe $u_1 = \varpi_1$, il faut chercher en combien de points elle coupe la variété P.

Or si l'on fait $u_1 = \varpi_1$ le premier membre de (1) devient une fonction θ elliptique d'ordre n par rapport à u_2; l'équation (1) admet alors n solutions.

La courbe $u_1 = \varpi_1$ est donc de degré n.

Ainsi la courbe B qui, dans le cas général, est de degré $2n$ et de genre 2, se décompose dans le cas singulier en deux courbes de degré n et de genre 1.

Il est clair qu'il en est de même de toutes les courbes B'.

Le cas de $n = 2$ est toujours excepté; examinons donc le cas de $n = 3$.

Dans le cas général, si $n = 3$, la courbe est du sixième degré et du genre 2; c'est une courbe gauche dans l'espace à $(n - 1)p = 4$ dimensions. Dans le cas singulier, elle se décompose en deux courbes du degré 3 et du genre 1 qui doivent être toutes deux planes. Ces deux courbes ont un point commun $u_1 = \varpi_1$, $u_2 = \varpi_2$.

Si nous projetons la courbe B sur un plan quelconque, la projection sera, dans le cas général, une courbe du sixième ordre avec huits points doubles; dans le cas singulier, elle se décomposera en deux cubiques se coupant en neuf points; elle acquerra donc un point double de plus.

Passons au cas de $p = 3$ et proposons-nous de trouver ce que devient la courbe B dans le cas singulier elliptique.

Cette courbe a pour équation

$$u_i = v_i$$

et doit satisfaire aux théorèmes de Riemann.

Il est clair que l'on peut satisfaire à ces théorèmes en supposant que la courbe B se décompose en trois autres ayant respectivement pour équations

$$\left\{\begin{array}{ll} u_2 = \dfrac{\varpi_2}{2}, & u_3 = \dfrac{\varpi_3}{2}, \\ u_1 = \dfrac{\varpi_1}{2}, & u_3 = \dfrac{\varpi_3}{2}, \\ u_1 = \dfrac{\varpi_1}{2}, & u_2 = \dfrac{\varpi_2}{2}. \end{array}\right. \tag{2}$$

Par exemple,

$$\Theta(v_i + v'_i) = \theta_1(v_1 + v'_1)\,\theta_2(v_2 + v'_2)\,\theta_3(v_3 + v'_3) \tag{3}$$

sera identiquement nul.

En effet, si la courbe B se décompose en trois autres définies par les équations (2), il est clair que deux des trois équations

$$v_1 = \frac{\alpha_1}{2}, \qquad v_2 = \frac{\alpha_2}{2}, \qquad v_3 = \frac{\alpha_3}{2}$$

devront être satisfaites. De même deux des trois équations

$$v'_1 = \frac{\alpha_1}{2}, \qquad v'_2 = \frac{\alpha_2}{2}, \qquad v'_3 = \frac{\alpha_3}{2}$$

devront être satisfaites. Il en résulte que l'une des trois équations

$$v_i + v'_i = \alpha_i \qquad (i = 1, 2, 3)$$

devra être satisfaite. Donc l'un des trois facteurs du second membre de (3) devra s'annuler. Donc

$$\Theta(v_i + v'_i) = 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Malheureusement cette solution n'est pas unique. On satisfait également aux théorèmes de Riemann en supposant que la courbe C se décompose en trois autres ayant respectivement pour équations

$$\begin{cases} u_2 = \dfrac{\alpha_2}{2}, & u_3 = \dfrac{\alpha_3}{2} + h, \\[2mm] u_1 = \dfrac{\alpha_1}{2}, & u_3 = \dfrac{\alpha_3}{2} - h, \\[2mm] u_1 = \dfrac{\alpha_1}{2}, & u_2 = \dfrac{\alpha_2}{2}, \end{cases} \tag{4}$$

h désignant une constante quelconque.

Un examen plus approfondi est donc nécessaire.

Voici comment nous y procéderons. Ne nous supposons plus dans le cas singulier elliptique, mais dans un cas très voisin de ce cas singulier. Supposons, en d'autres termes, que, dans le tableau (1) du paragraphe I, les quantités

$$a_{i,k}$$

(que j'appellerai *termes diagonaux*) sont finies, mais que les quantités

$$a_{i,k} \qquad (i \gtrless k)$$

(que j'appellerai *termes latéraux*) sont infiniment petites du premier ordre sans être nulles.

Étudions maintenant la courbe définie par les équations

$$(5) \qquad \begin{cases} \Theta(u_i - e_i) = 0, \\ \Theta(u_i - e'_i) = 0, \end{cases}$$

où les e_i et les e'_i sont six constantes quelconques. Cette courbe, que nous appellerons A, jouit de diverses propriétés.

Nous savons que, pour un choix convenable des constantes e_i et e'_i, elle se décompose en plusieurs autres, parmi lesquelles la courbe B (ou bien une courbe B').

Pour aborder l'étude de cette courbe A, observons que la fonction Θ dépend non seulement des u, mais des $a_{i,k}$, et peut se développer suivant les puissances de ces quantités. Nous allons effectuer le développement suivant les puissances des termes latéraux que nous avons supposés très petits. Nous avons

$$\Theta = \Sigma\, e^{m_1 u_1 + \ldots + m_p u_p - \frac{1}{2}\Sigma a_{i,k} m_i m_k};$$

calculons les premiers termes du développement, à savoir ceux d'ordre zéro et d'ordre 1.

D'abord le terme d'ordre zéro s'obtiendra en annulant les termes latéraux $a_{i,k} (i \gtrless k)$; on voit que la fonction Θ se réduit au produit de trois fonctions Θ elliptiques, à savoir

$$\Theta = \theta_1 \theta_2 \theta_3,$$

où

$$\theta_i = \Sigma\, e^{m_i u_i - \frac{a_{i,i} m_i^2}{2}}.$$

Cherchons maintenant le coefficient de $a_{2,3}$ par exemple.

Le terme général de Θ contient le facteur

$$e^{-a_{2,3} m_2 m_3}.$$

Si nous développons ce facteur suivant les puissances croissantes de $a_{2,3}$, il devient, en négligeant les termes du deuxième ordre,

$$1 - a_{2,3} m_2 m_3.$$

Le coefficient de $a_{2,3}$ dans le développement de Θ sera donc

$$-\Sigma m_2 m_3 e^{\Sigma m_i u_i - \frac{a_{i,i} m_i^2}{2}},$$

c'est-à-dire

$$-\theta_1 \theta'_2 \theta'_3.$$

Je pose, bien entendu,

$$\theta'_i = \frac{d\theta_i}{du_i}.$$

Ainsi les premiers termes du développement de Θ (en négligeant les termes du second ordre) seront

$$(6) \qquad \Theta = \theta_1 \theta_2 \theta_3 - a_{2,3} \theta_1 \theta'_2 \theta'_3 - a_{1,3} \theta_2 \theta'_1 \theta'_3 - a_{1,2} \theta_3 \theta'_1 \theta'_2 + \ldots.$$

J'aurai à revenir dans la suite sur ce développement et à calculer les termes d'ordre supérieur. Ceux-ci me suffisent pour le moment.

Étudions l'équation

$$(7) \qquad \Theta = 0.$$

Comme les θ et leurs dérivées ne peuvent devenir infinis, Θ ne peut s'annuler que si le premier terme du développement (6)

$$\theta_1 \theta_2 \theta_3$$

est infiniment petit du premier ordre, sans quoi ce terme ne pourrait se détruire avec aucun autre.

L'un au moins des trois facteurs θ_1, θ_2, θ_3 doit être infiniment petit, c'est-à-dire que l'une au moins des trois quantités u_i doit être infiniment voisine de α_i (à une période près, bien entendu).

Comme je puis choisir deux d'entre elles arbitrairement, je supposerai que u_2 et u_3 aient des valeurs qui ne soient pas très voisines de α_2 et α_3, mais d'ailleurs quelconques.

Alors les deux facteurs θ_2 et θ_3 sont finis; et le facteur θ_1, de même que $u_1 - \alpha_1$, doit être infiniment petit du premier ordre.

Le premier membre de l'équation (7) est développable suivant les puissances croissantes de

$$u_1 - \alpha_1, \quad a_{1,2}, \quad a_{2,3}, \quad a_{1,3}.$$

L'équation est satisfaite quand toutes ces quantités s'annulent.

Enfin le coefficient du terme en $u_1 - \alpha_1$ est égal à

$$\theta'_1(\alpha_1)\theta_2(u_2)\theta_3(u_3)$$

et ne s'annule pas puisque u_2 n'est pas égal à α_2 ni u_3 à α_3.

Donc, en vertu d'un théorème bien connu, l'équation (7) pourra être résolue par rapport à $u_1 - \alpha_1$, cette quantité étant développable suivant les puissances croissantes des termes latéraux $a_{i,k}$.

Les premiers termes du développement, en négligeant ceux du second ordre, seront

$$u_1 = \alpha_1 + a_{1,2}\frac{\theta'_2}{\theta_2} + a_{1,3}\frac{\theta'_3}{\theta_3} + \ldots. \tag{8}$$

Ce développement est valable quand les termes latéraux $a_{j,k}$ sont assez petits et quand u_2 n'est pas voisin de α_2, ni u_3 de α_3.

Donnons donc à u_2 et à u_3 des valeurs quelconques u_2^0 et u_3^0 que je suppose n'être pas très voisines de α_2 et de α_3; le développement (8) nous donnera la valeur correspondante u_1^0 de u_1 qui sera très voisine de α_1.

Puisque

$$\Theta(u_i^0) = 0,$$

nous pourrons poser

$$u_i^0 = v_i^0 + v_i^1,$$

où v_i^0 et v_i^1 sont deux valeurs particulières de l'intégrale que j'ai appelée v_i, correspondant à deux points particuliers de la courbe C que j'appellerai x_0 et x_1.

Alors il existera deux courbes remarquables

$$u_i = v_i + v_i^1 \qquad \text{(courbe } B_1\text{)},$$
$$u_i = v_i + v_i^0 \qquad \text{(courbe } B_0\text{)}.$$

Je dis que ce sont deux courbes; en effet v_i^1 et v_i^0 sont des constantes, puisque je regarde les points x_0 et x_1 comme fixes; v_i est une fonction d'une seule variable indépendante, puisque cette intégrale dépend seulement du point x, mobile sur la courbe C.

Ces deux courbes B_0 et B_1 passeront toutes deux par les points

$$u_i = u_i^0 = v_i^0 + v_i^1.$$

Ce sont ces deux courbes que je me propose d'étudier en détail.

J'ai supposé que je faisais tendre les termes latéraux $a_{i,k}$ vers zéro; pour fixer les idées, je vais poser

$$a_{i,k} = t\beta_{i,k} \qquad (i \neq k),$$

les $\beta_{i,k}$ étant des constantes et t un paramètre que je vais faire tendre vers zéro.

Écrivons alors l'équation (8) sous la forme

$$u_1 = \mathrm{F}(u_2, u_3); \tag{8 bis}$$

le second membre se trouve développé suivant les puissances croissantes de t.

Désignons par

$$\frac{dv_i}{dx}, \quad \frac{d^2 v_i}{dx^2}$$

les dérivées de v_i par rapport à x et par

$$\frac{dv_i^0}{dx_0}, \quad \frac{d^2 v_i^0}{dx_0^2}, \quad \frac{dv_i^1}{dx_1}, \quad \frac{d^2 v_i^1}{dx_1^2}$$

les valeurs de ces dérivées pour $x = x_0$ et pour $x = x_1$.

Le long de la courbe B_0, on aura

$$dv_1^0 = \frac{d\mathrm{F}}{du_2} dv_2^0 + \frac{d\mathrm{F}}{du_3} dv_3^0.$$

Au point $u_i = u_i^0$ en particulier, on aurait

$$dv_1^0 = \frac{d\mathrm{F}_0}{du_2} dv_2^0 + \frac{d\mathrm{F}_0}{du_3} dv_3^0,$$

en appelant $\frac{d\mathrm{F}_0}{du_i}$ la valeur de $\frac{d\mathrm{F}}{du_i}$ pour $u_i = u_i^0$.

On en déduira

$$dv_2^0\left(\frac{d\mathrm{F}}{du_2} - \frac{d\mathrm{F}_0}{du_2}\right) + dv_3^0\left(\frac{d\mathrm{F}}{du_3} - \frac{d\mathrm{F}_0}{du_3}\right) = 0. \tag{9}$$

On trouverait de même, pour la courbe B_1,

$$dv_2^1\left(\frac{d\mathrm{F}}{du_2} - \frac{d\mathrm{F}_0}{du_2}\right) + dv_3^1\left(\frac{d\mathrm{F}}{du_3} - \frac{d\mathrm{F}_0}{du_3}\right) = 0. \tag{10}$$

Les équations (8), (9) et (10) suffiraient pour définir les courbes B_0 et B_1 si l'on connaissait les deux constantes

$$\frac{dv_3^0}{dv_2^0}, \quad \frac{dv_3^1}{dv_2^1}.$$

Pour abréger l'écriture, je supposerai que v_3^0 a été exprimé en fonction de v_2^0 et v_2^1 en fonction de v_3^1 et je poserai

$$\frac{dv_3^0}{dv_2^0} = \xi, \qquad \frac{d^2 v_3^0}{dv_2^{0\,2}} = \xi',$$

$$\frac{dv_2^1}{dv_3^1} = \eta, \qquad \frac{d^2 v_2^1}{dv_3^{1\,2}} = \eta',$$

de sorte que les équations (9) et (10) s'écriront

$$\left(\frac{dF}{du_2} - \frac{dF_0}{du_2}\right) + \xi\left(\frac{dF}{du_3} - \frac{dF_0}{du_3}\right) = 0, \tag{9 bis}$$

$$\eta\left(\frac{dF}{du_2} - \frac{dF_0}{du_2}\right) + \left(\frac{dF}{du_3} - \frac{dF_0}{du_3}\right) = 0. \tag{10 bis}$$

Cherchons à déterminer les deux constantes ξ et η.

Soient x et x' deux points quelconques mobiles sur la courbe C, v_i et v'_i les valeurs correspondantes de l'intégrale v_i.

Si l'on reprend alors l'équation (8) et qu'on y fasse

$$u_2 = v_2 + v'_2,$$

$$u_3 = v_3 + v'_3,$$

on aura aussi

$$u_1 = v_1 + v'_1.$$

Considérons v_1 et v_3 comme fonctions de v_2, v'_1 et v'_2 comme fonctions de v'_3.

Alors u_1, u_2 et u_3, et aussi $F(u_2, u_3)$, seront des fonctions des deux variables indépendantes v_2 et v'_3. On devra avoir

$$\frac{d^2 u_i}{dv_2\, dv'_3} = 0,$$

puisque

$$u_i = v_i + v'_i,$$

v_i dépendant seulement de v_2 et v'_i de v'_3.

Nous pourrons donc écrire, en tenant compte de (8),

$$\frac{d^2 F}{dv_2\, dv'_3} = 0, \qquad \frac{d^3 F}{dv_2^2\, dv'_3} = 0, \qquad \frac{d^3 F}{dv_2\, dv'^2_3} = 0, \qquad \frac{d^4 F}{dv_2^2\, dv'^2_3} = 0. \tag{11}$$

Les premiers membres des équations (11) s'expriment aisément à l'aide des dérivées de F par rapport aux u et des quatre dérivées

$$(12)\qquad \frac{dv_3}{dv_2},\quad \frac{d^2v_3}{dv_2^2},\quad \frac{dv'_2}{dv'_3},\quad \frac{d^2v'_2}{dv'^2_3}.$$

Les équations (11) sont donc quatre relations entre les quatre dérivées (12). Si l'on y fait

$$v_i = v_i^0,\qquad v'_i = v_i^1,$$

elles deviendront quatre relations entre les quantités

$$\xi,\quad \xi',\quad \eta,\quad \eta'.$$

Ce sont ces quatre relations que nous appellerons les équations (13).

Nous tirerons ξ et η de ces équations (13) et les équations (9 *bis*) et (10 *bis*) nous feront connaître alors toutes les courbes B_0 et B_1.

Les premiers membres de toutes nos équations sont développés suivant les puissances de t; mais les équations (9) à (13) contiennent t en facteur et il convient de le faire disparaître; nous remplacerons donc les équations (9 *bis*), (10 *bis*) et (13) par les équations (9 *ter*), (10 *ter*) et (13 *bis*) obtenues en divisant les premières par t.

Si nous supposons $t = 0$ ces équations vont prendre une forme très particulière. On a, en effet, pour $t = 0$,

$$\frac{F - \alpha_1}{t} = \beta_{1,2}\frac{\theta'_2(u_2)}{\theta_2(u_2)} + \beta_{1,3}\frac{\theta'_3(u_3)}{\theta_3(u_3)}$$

et je puis observer que le second membre est la somme d'une fonction de u_2 et d'une fonction de u_3 que je puis écrire

$$f_2(u_2) + f_3(u_3).$$

Les premiers membres des équations (13 *bis*) sont alors des polynômes du deuxième degré au plus en ξ et η, du premier degré au plus en ξ' et η'.

Éliminant ξ' et η' entre les trois dernières équations (13 *bis*), il reste deux relations entre ξ et η, l'une du premier degré, l'autre du deuxième. Il semble donc que le problème comporte deux solutions. Mais ces deux solutions se confondent en une seule qui est

$$\xi = \eta = 0,\qquad \xi' = \eta' = 0.$$

Ainsi les équations (13 *bis*) comportent pour $t = 0$ une solution double et l'on en conclura que pour $t = 0$ le jacobien des premiers membres de ces équations par rapport aux quatre inconnues ξ, η, ξ', η' sera nul; d'où il résulte une petite difficulté.

Ne supposons plus $t = 0$; les premiers membres des équations (13 *bis*) sont développables suivant les puissances des inconnues et de t.

Si le jacobien dont je viens de parler n'était pas nul, nous pourrions, par un théorème bien connu de Cauchy, conclure que les inconnues ξ, η, ξ', η' sont développables suivant les puissances de t.

Ici je ne puis raisonner ainsi, mais comme la solution

$$\xi = \eta = \xi' = \eta' = 0$$

est *double* seulement, nous conclurons que ξ, η, ξ', η' sont développables suivant les puissances de $\sqrt{t}$; les développements commenceront par des termes du premier degré au moins en $\sqrt{t}$; et par conséquent infiniment petits au moins d'ordre $\frac{1}{2}$.

Un examen plus approfondi montrerait, je pense, que ξ, η, ξ', η' sont développables suivant les puissances de t, mais je ne l'ai pas vérifié. Cela ne m'est d'ailleurs pas nécessaire pour mon objet actuel.

Substituons la valeur de ξ ainsi trouvée dans l'équation (9 *ter*); le premier membre de cette équation sera développé suivant les puissances de $\sqrt{t}$ (le développement ne contiendrait vraisemblablement que des puissances paires).

Pour $t = 0$, ξ devient nul et l'équation (9 *ter*) se réduit à

$$\beta_{1\,2}\left[\frac{\theta'_2}{\theta_2}(u_2) - \frac{\theta'_2}{\theta_2}(u_2^0)\right] = 0$$

ou à

$$u_2 = u_2^0.$$

On peut alors, d'après le théorème de Cauchy, résoudre l'équation (9 *ter*); on trouve u_2 développé suivant les puissances croissantes de $\sqrt{t}$ et de $u_3 - u_3^0$; pour $t = 0$, u_2 se réduit à u_2^0.

D'où l'équation de la courbe B_0

$$(14)\qquad \begin{cases} u_1 = \alpha_1 + t\left[\beta_{1\,2}\dfrac{\theta'_2}{\theta_2}(u_2^0) + \beta_{1\,3}\dfrac{\theta'_3}{\theta_3}(u_3)\right] + ht\sqrt{t}, \\ u_2 = u_2^0 + h\sqrt{t}. \end{cases}$$

Je désigne par ht^k un ensemble de termes procédant suivant les puissances entières de $\sqrt{t}$ et commençant par un terme en t^k.

On aurait de même, pour l'équation de la courbe B_1,

$$(15)\qquad \begin{cases} u_1 = \alpha_1 + t\left[\beta_{1,2}\dfrac{\theta'_2}{\theta_2}(u_2) - \beta_{1,3}\dfrac{\theta'_3}{\theta_3}(u_3^0)\right] + ht\sqrt{t}, \\ u_3 = u_3^0 + h\sqrt{t}. \end{cases}$$

Considérons maintenant une courbe remarquable que je vais appeler B^* et qui a pour équation

$$u_i = 2v_i.$$

Supposons que le point u_i^0 soit un point de cette courbe; on aura alors

$$v_i^0 = v_i^1$$

et la courbe B_1 devra se confondre avec B_0. La comparaison des équations (14) et (15) montre que ces courbes ne peuvent se confondre; à moins toutefois que les développements (14) et (15) ne soient pas valables. Or nous avons vu qu'ils ne cessent de l'être que si u_2 est voisin de α_2 et u_3 de α_3.

Ainsi en un point de B^* la fonction Θ devant s'annuler, l'un des u_i devra être très voisin de α_i; soit par exemple u_1 très voisin de α_1, ce qui nous conduit à l'équation (8); alors, d'après ce que nous venons de voir, u_2 devra encore être très voisin de α_2 ou u_3 de α_3.

En un point de B^*, deux des u_i devront donc être très voisins de α_i; en résumé, dans le cas singulier elliptique, la courbe B^* se décompose en trois autres ayant respectivement pour équations

$$\begin{aligned} u_2 &= \alpha_2, & u_3 &= \alpha_3, \\ u_1 &= \alpha_1, & u_3 &= \alpha_3, \\ u_1 &= \alpha_1, & u_2 &= \alpha_2. \end{aligned}$$

Il est aisé d'en déduire ce qui arrive pour la courbe B qui a pour équation

$$u_i = v_i.$$

Elle se décompose en trois autres ayant respectivement pour équations

$$\begin{aligned} u_2 &= \frac{\alpha_2}{2}, & u_3 &= \frac{\alpha_3}{2}, \\ u_1 &= \frac{\alpha_1}{2}, & u_3 &= \frac{\alpha_3}{2}, \\ u_1 &= \frac{\alpha_1}{2}, & u_2 &= \frac{\alpha_2}{2}. \end{aligned}$$

Voyons maintenant quel est le degré de chacune d'elles.

Soit $p=3$, $n>2$; la courbe B est, en général, d'ordre $3n$ et de genre 3; dans le cas singulier elliptique, elle se décompose en trois courbes d'ordre n et de genre 1.

On arriverait au même résultat dans le cas de $p=4$. Si les *termes latéraux* tendent vers zéro, de façon que les fonctions abéliennes restent spéciales (je suis obligé d'ajouter cette restriction parce que, pour $p>3$, les fonctions ne sont pas toujours spéciales; d'ailleurs, si elles ne l'étaient pas, la courbe B cesserait d'exister), la courbe B se décompose à la limite en quatre autres qui sont de degré $n\,(n>2)$ et de genre 1 et qui ont respectivement pour équations

$$u_2=\frac{\chi_2}{3},\qquad u_3=\frac{\chi_3}{3},\qquad u_4=\frac{\chi_4}{3},$$

$$u_1=\frac{\chi_1}{3},\qquad u_3=\frac{\chi_3}{3},\qquad u_4=\frac{\chi_4}{3},$$

$$u_1=\frac{\chi_1}{3},\qquad u_2=\frac{\chi_2}{3},\qquad u_4=\frac{\chi_4}{3},$$

$$u_1=\frac{\chi_1}{3},\qquad u_2=\frac{\chi_2}{3},\qquad u_3=\frac{\chi_3}{3}.$$

VII. — Généralisation du théorème de Riemann.

Proposons-nous maintenant le problème suivant : Riemann a montré combien l'équation

$$\Theta(v_i-e_i)=0 \tag{1}$$

admet de solutions; proposons-nous les deux équations simultanées

$$\left\{\begin{aligned}&\Theta(v_i+v_i'-e_i)=0,\\&\Theta(v_i+v_i'-e_i')=0,\end{aligned}\right. \tag{2}$$

où les e_i et les e_i' sont $2p$ constantes quelconques et où nous avons deux inconnues, à savoir les points x et x' de la courbe C qui correspondent aux intégrales v_i et v_i'.

Cherchons combien ces équations admettent de solutions.

De même, considérons les trois équations simultanées suivantes (avec trois inconnues x, x' et x''),

$$\left\{\begin{aligned}&\Theta(v_i+v_i'+v_i''-e_i)=0,\\&\Theta(v_i+v_i'+v_i''-e_i')=0,\\&\Theta(v_i+v_i'+v_i''-e_i'')=0,\end{aligned}\right. \tag{3}$$

Plus généralement, envisageons q équations simultanées à q inconnues,

$$(4) \qquad \Theta(v_i - v_i' - \ldots - v_i^{(q-1)} - e_i^{(k)}) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, q).$$

Combien ces équations admettront-elles de solutions?

On peut, dans l'évaluation du nombre de ces solutions, se placer à deux points de vue différents.

Au premier point de vue, nous ne regarderons pas comme distinctes deux solutions que l'on déduit l'une de l'autre en permutant les q points inconnus de la courbe C,

$$x, \quad x', \quad \ldots, \quad x^{(q-1)},$$

et, par conséquent, les q intégrales correspondantes

$$v_i, \quad v_i', \quad \ldots, \quad v_i^{(q-1)}.$$

Au second point de vue, on regardera ces deux solutions comme distinctes.

Il est clair que le nombre des solutions, évalué au second point de vue, sera $q!$ fois plus grand que le nombre des solutions évalué au premier point de vue.

Il y a deux cas où nous savons faire cette évaluation.

C'est d'abord celui où $q = 1$, celui de l'équation (1) : c'est celui de Riemann. Le nombre des solutions est alors égal à p.

C'est ensuite celui où $q = p$; si l'on a les équations

$$(5) \qquad \Theta(u_i - e_i^{(k)}) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, p),$$

j'ai démontré, comme je l'ai rappelé au début de ce travail, que le nombre des solutions est égal à $p!$

D'un autre côté, les u_i peuvent toujours être mis sous la forme

$$u_i = v_i + v_i' + \ldots + v_i^{(p-1)},$$

et cela d'une seule manière (en général du moins d'après les théorèmes de Riemann); d'une seule manière, veux-je dire, si l'on se place au premier point de vue et de $p!$ manières différentes si l'on se place au second point de vue.

Si donc $q = p$, le nombre des solutions des équations (4) est égal à $p!$ au premier point de vue, à $(p!)^2$ au second point de vue.

Le problème est donc résolu dans les deux cas extrêmes $q = 1$, $q = p$; pour traiter les cas intermédiaires, je vais employer la même méthode dont j'ai fait usage pour les équations (5) dans le Mémoire cité du *Bulletin de la Société mathématique de France*. Cette méthode consiste à évaluer le nombre des solutions dans le cas singulier elliptique; ce nombre étant constant sera encore le même dans le cas général.

Soit d'abord $p = 3$, $q = 2$; dans le cas singulier elliptique on aura

$$\Theta = \theta_1(u_1)\,\theta_2(u_2)\,\theta_3(u_3).$$

Soient alors

$$e_1,\quad e_2,\quad e_3;\quad e'_1,\quad e'_2,\quad e'_3$$

six constantes quelconques; posons, pour abréger,

$$\theta_i(v_i - v'_i - e_i) = \theta_i,$$
$$\theta_i(v_i - v'_i - e'_i) = \theta'_i.$$

Les équations (4) s'écriront alors

$$(4\ bis)\qquad \begin{cases} \theta_1\,\theta_2\,\theta_3 = 0, \\ \theta'_1\,\theta'_2\,\theta'_3 = 0. \end{cases}$$

En général, on aura

$$e_1 \neq e'_1,\qquad e_2 \neq e'_2,\qquad e_3 \neq e'_3,$$

de sorte que θ_1 ne pourra pas s'annuler en même temps que θ'_1, ni θ_2 en même temps que θ'_2, ni θ_3 en même temps que θ'_3.

Un des facteurs θ_i devra s'annuler ainsi qu'un des facteurs θ'_i; mais ces deux facteurs ne pourront être de même indice.

Nous pourrons donc faire autant d'hypothèses qu'il y a d'arrangements de trois lettres, deux à deux, c'est-à-dire six. Adoptons une quelconque de ces hypothèses, par exemple

$$\theta_1 = \theta'_2 = 0.$$

Pour aller plus loin, il faut se rappeler ce que devient dans le cas singulier elliptique la courbe B qui a pour équation $u_i = v_i$; elle se décompose et l'on doit avoir : soit

$$v_2 = \frac{\alpha_2}{2},\qquad v_3 = \frac{\alpha_3}{2}\qquad \text{(hypothèse 1)},$$

soit

$$v_1 = \frac{\alpha_1}{2},\qquad v_3 = \frac{\alpha_3}{2}\qquad \text{(hypothèse 2)},$$

soit

$$v_1 = \frac{x_1}{2}, \qquad v_2 = \frac{x_2}{2} \qquad \text{(hypothèse 3)}.$$

De même en ce qui concerne v'_i, on doit avoir : soit

$$v'_2 = \frac{x_2}{2}, \qquad v'_3 = \frac{x_3}{2} \qquad \text{(hypothèse 4)},$$

soit

$$v'_1 = \frac{x_1}{2}, \qquad v'_3 = \frac{x_3}{2} \qquad \text{(hypothèse 5)},$$

soit

$$v'_1 = \frac{x_1}{2}, \qquad v'_2 = \frac{x_2}{2} \qquad \text{(hypothèse 6)}.$$

On peut combiner les hypothèses 1, 2, 3 avec les hypothèses 4, 5, 6, ce qui fait en tout neuf combinaisons; la plupart doivent être rejetées.

On ne peut pas avoir à la fois

$$v_2 = \frac{x_2}{2}, \qquad v'_2 = \frac{x_2}{2},$$

car alors

$$\theta'_2 = \theta_2(x_2 - v'_2)$$

ne serait pas nul en général. Cela exclut les combinaisons

$$(1, 4), \quad (1, 6), \quad (3, 4), \quad (3, 6).$$

On ne peut pas avoir non plus à la fois

$$v_1 = \frac{x_1}{2}, \qquad v'_1 = \frac{x_1}{2}.$$

Cela exclut les combinaisons

$$(2, 5), \quad (2, 6), \quad (3, 5).$$

Il ne reste que deux combinaisons

$$(1, 5) \quad \text{et} \quad (2, 4).$$

Adoptons la première, les équations

$$\theta_1 = 0, \qquad \theta'_2 = 0$$

deviennent

$$\theta_1\left(v_1 - \frac{\alpha_1}{2} - e_1\right) = 0,$$

$$\theta_2\left(v'_2 + \frac{\alpha_2}{2} - e'_2\right) = 0,$$

d'où, enfin,

$$v_1 = e_1 + \frac{\alpha_1}{2}, \qquad v_2 = \frac{\alpha_2}{2}, \qquad v_3 = \frac{\alpha_3}{2},$$

$$v'_1 = \frac{\alpha_1}{2}, \qquad v'_2 = e'_2 + \frac{\alpha_2}{2}, \qquad v'_3 = \frac{\alpha_3}{2}$$

(une solution et une seule). La combinaison (2. 4) nous donnerait une autre solution.

Chacune de nos six hypothèses nous donne donc deux solutions; cela fait douze solutions *au second point de vue* et six au premier point de vue.

Raisonnons de la même manière pour des valeurs quelconques de p et de q; plaçons-nous encore dans le cas singulier elliptique. Le premier membre de chacune des q équations (4) sera le produit de p facteurs.

Dans chacun de ces produits, un des p facteurs devra s'annuler; mais, pour la même raison que plus haut, les q facteurs qui s'annuleront devront être d'un indice différent.

Nous pouvons donc faire autant d'hypothèses qu'il y a d'arrangements de p lettres q à q, soit

$$\frac{p!}{(p-q)!}.$$

Adoptons une de ces hypothèses; les q équations (4) seront remplacées par q équations plus simples de la forme

$$(6) \qquad \theta_i(v_i - v_i^1 - \ldots - v_i^{k-1} - e_i^k) = 0,$$

où i prendra q valeurs différentes comprises entre 1 et p, pendant que k prendra les valeurs $1, 2, \ldots, q$; à chaque valeur de k correspond une valeur de i et une seule.

Cela posé, la courbe B se décompose; nous pouvons donc faire p hypothèses différentes au sujet des v_i; ces hypothèses peuvent se résumer dans la proposition suivante :

Les p quantités v_i devront être égales à $\frac{\alpha}{p-1}$, *excepté une d'entre elles.*

La même chose est vraie des quantités

$$v_i', \quad v_i'', \quad \dots, \quad v_i^{q-1}.$$

Les p quantités v_i^{k} (où k a une valeur donnée et où i prend les valeurs $1, 2, \dots, p$) devront être égales à $\frac{\alpha_i}{p-1}$, excepté une d'entre elles.

Formons un tableau à p colonnes et q lignes, de telle façon que l'élément de la $i^{\text{ième}}$ colonne et de la $k+1^{\text{ième}}$ ligne soit v_i^k ; dans chaque ligne un élément et un seul ne devra pas être égal à $\frac{\alpha_i}{p-1}$.

Il y a donc dans le tableau q éléments et il n'y en a que q qui ne sont pas égaux à $\frac{\alpha_i}{p-1}$.

Distinguons les colonnes de ce tableau en deux catégories; nous rangerons dans la première catégorie les colonnes dont l'indice figure parmi les indices i des équations (6). Il y aura donc q colonnes de la première catégorie et $p-q$ de la deuxième.

Je dis que dans une colonne de la première catégorie il y a un élément qui n'est pas égal à $\frac{\alpha_i}{p-1}$; car, s'il n'en était pas ainsi, on aurait

$$v_i + v_i' + v_i'' + \dots + v_i^{q-1} = \frac{q\,\alpha_i}{p-1},$$

et, en général, c'est-à-dire pour une valeur quelconque de e_i^{k}, on n'aurait pas

$$\theta_i(v_i + v_i' + \dots + v_i^{q-1} - e_i^{k}) = 0.$$

Dans chaque colonne de la première catégorie, il y a donc un élément différent de $\frac{\alpha_i}{p-1}$; je dis qu'il n'y en a qu'un dans chaque colonne; en effet, il y en a un dans chacune des q colonnes de la première catégorie et il n'y en a que q dans tout le tableau.

Ainsi, en supprimant les $p-q$ colonnes de la deuxième catégorie, il nous restera un tableau à q lignes et q colonnes; tous les éléments, sauf q éléments singuliers, seront égaux à $\frac{\alpha_i}{p-1}$; dans chaque ligne et dans chaque colonne il y aura un élément singulier et un seul.

Nous pouvons donc faire, au sujet de la position des éléments singuliers $q!$ hypothèses différentes.

A chacune d'elles correspond une solution des équations (6) et, par conséquent, une solution des équations (4).

Chacune des $\frac{p!}{(p-q)!}$ hypothèses faites au début avant la formation des équations (6) nous donnera donc $q!$ solutions des équations (4).

En résumé, les équations (4) admettent (aussi bien dans le cas général que dans le cas singulier elliptique)

$$\frac{p!\,q!}{(p-q)!} \text{ solutions.}$$

Cela au second point de vue. Au premier point de vue, le nombre des solutions est

$$\frac{p!}{(p-q)!},$$

autant que d'arrangements de p lettres q à q.

Dans le cas de $q = 1$ (cas de Riemann), ce nombre d'arrangements est égal à

$$\frac{p!}{(p-1)!} = p.$$

C'est le résultat de Riemann.

Dans le cas de $q = p$, ce nombre d'arrangements est celui des permutations de p lettres, c'est-à-dire $p!$ C'est le résultat que j'ai obtenu dans le Mémoire cité du *Bulletin de la Société mathématique de France*.

Ainsi se trouvent réunis dans une formule plus compréhensible le résultat de Riemann et le mien. Un chemin est frayé entre les deux domaines précédemment conquis et le but que je me proposais au début de ce travail est en partie atteint.

Considérons encore le cas de $q = p - 1$.

Les équations (4) sont alors équivalentes aux suivantes :

$$(7) \qquad \begin{cases} \Theta(u_i) = 0, \\ \Theta(u_i - e_i^{k}) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, p-1). \end{cases}$$

En effet, l'équation $\Theta(u_i) = 0$ équivaut à

$$u_i = v_i + v_i' + \ldots + v_i^{(p-2)}.$$

Or les équations (7) admettent $p!$ solutions.

Les équations (4) doivent donc avoir aussi, au premier point de vue, $p!$ solutions.

Et, en effet,

$$\frac{p!}{(p-q)!} = \frac{p!}{1!} = p!$$

VIII. — Décomposition de la courbe Λ.

Au paragraphe VI, j'ai défini par les équations (5) une certaine courbe que j'ai appelée Λ; je transcris ces équations en leur donnant le n° (1),

$$(1) \qquad \begin{cases} \Theta(u_i - e_i) = 0, \\ \Theta(u_i - e'_i) = 0. \end{cases}$$

J'ai dit que cette courbe doit se décomposer dans certains cas, et c'est sur ce point que je désire revenir.

Il est aisé de comprendre pourquoi cette décomposition doit avoir lieu.

Cherchons en effet le degré de la courbe Λ.

Je suppose $p = 3$, $n > 2$; la courbe Λ est alors tracée sur la variété V qui a été définie plus haut; la variété V est de degré $6n^3$ et est située dans l'espace à $n^3 - 1$ dimensions.

Pour évaluer le degré de Λ, il faut couper par une variété plane ayant $n^3 - 2$ dimensions et compter le nombre des points d'intersection.

Cette variété plane sera définie par une seule équation qui sera de la forme

$$\theta = 0,$$

θ étant l'une des fonctions d'ordre n qui donne naissance à la variété V.

Les trois équations

$$\Theta(u_i - e_i) = 0,$$
$$\Theta(u_i - e'_i) = 0,$$
$$\theta = 0$$

admettent $6n$ solutions; la courbe Λ est donc de degré $6n$.

Maintenant donnons des valeurs particulières aux six constantes e_i et e'_i.

Soient

$$e_i = -v_i^0, \qquad e'_i = -v_i^1.$$

x_0, x_1 étant deux points de la courbe C, et v_i^0, v_i^1 les valeurs correspondantes de v_i.

Il est clair qu'on satisfera aux équations

$$\Theta(u_i + v_i^0) = 0,$$

$$\Theta(u_i + v_i^1) = 0$$

en faisant

$$u_i = v_i.$$

La courbe B fait donc partie de A, et comme elle est de degré $3n$, il faut bien que A se décompose.

Étudions les circonstances de cette décomposition.

Plaçons-nous d'abord dans le cas singulier elliptique.

La courbe A se décompose alors toujours en six autres ayant respectivement pour équations

$$(2)\qquad \begin{cases} u_1 = \alpha_1 - e_1, & u_2 = \alpha_2 - e'_2, \\ u_2 = \alpha_2 - e_2, & u_1 = \alpha_1 + e'_1, \\ u_1 = \alpha_1 + e_1, & u_3 = \alpha_3 - e'_3, \\ u_3 = \alpha_3 + e_3, & u_1 = \alpha_1 - e'_1, \\ u_2 = \alpha_2 - e_2, & u_3 = \alpha_3 + e'_3, \\ u_3 = \alpha_3 - e_3, & u_2 = \alpha_2 - e'_2. \end{cases}$$

Celle de ces six courbes dont les deux équations occupent la $i^{\text{ème}}$ ligne dans ce tableau, je l'appellerai la courbe $(2, i)$.

Cela posé, supposons

$$e_i = -v_i^0, \qquad e'_i = -v_i^1.$$

On peut faire trois hypothèses différentes sur v_i^0; deux des v_i^0 doivent en effet être égaux à $\frac{\alpha_i}{2}$; on peut faire de même trois hypothèses sur v_i^1. Cela fait en tout neuf hypothèses différentes; je n'en examinerai que deux, toutes les autres s'en déduisant par permutation. Dans l'une comme dans l'autre, la courbe B se décomposant en trois courbes de degré n, nous devrons retrouver ces trois courbes parmi les six courbes (2).

Soient d'abord

$$v_2^0 = v_2^1 = \frac{\alpha_2}{2}, \qquad v_3^0 = v_3^1 = \frac{\alpha_3}{2}.$$

Les équations (2) deviendront

$$
(2\ bis)\quad \left\{
\begin{array}{ll}
u_1 = x_1 + e_1, & u_2 = \dfrac{x_2}{2}, \\[2ex]
u_2 = \dfrac{x_2}{2}, & u_1 = x_1 + e'_1, \\[2ex]
u_1 = x_1 + e_1, & u_3 = \dfrac{x_3}{2}, \\[2ex]
u_3 = \dfrac{x_3}{2}, & u_1 = x_1 + e'_1, \\[2ex]
u_2 = \dfrac{x_2}{2}, & u_3 = \dfrac{x_3}{2}, \\[2ex]
u_3 = \dfrac{x_3}{2}, & u_2 = \dfrac{x_2}{2}.
\end{array}
\right.
$$

On ne retrouve ainsi que l'une des trois courbes dans lesquelles se décompose B, à savoir

$$u_2 = \frac{x_2}{2}, \qquad u_3 = \frac{x_3}{2}.$$

La contradiction n'est qu'apparente. Si, en effet, nous nous plaçons dans le cas singulier elliptique et si nous faisons

$$e_2 = e'_2 = -\frac{x_2}{2}, \qquad e_3 = e'_3 = -\frac{x_3}{2},$$

les équations (1) de la courbe A ne sont plus distinctes; elles sont satisfaites toutes les fois que

$$u_2 = \frac{x_2}{2},$$

et toutes les fois que

$$u_3 = \frac{x_3}{2}.$$

Les équations ne définissent donc plus une courbe, mais une surface ou variété à deux dimensions. Les trois parties de la courbe B se trouvent sur cette surface.

Mais si, restant dans le cas singulier elliptique, on fait *tendre* e_2, e'_2, e_3, e'_3, vers $-\frac{x_2}{2}$ et $-\frac{x_3}{2}$, la *limite* de la courbe A ne contiendra pas la courbe B tout entière.

Si, au contraire, nous plaçant d'abord dans le cas général, nous faisons tendre les termes latéraux vers zéro, de façon à nous rapprocher indéfiniment du cas singulier elliptique, si nous prenons

$$e_i = \varepsilon e_i^0, \qquad e'_i = \varepsilon e_i^1,$$

et de telle manière que, à mesure qu'on se rapproche du cas singulier, e_2, e'_2, e_3, e'_3 tendent vers $-\frac{\alpha_2}{2}$ et $-\frac{\alpha_3}{2}$, alors, la *nouvelle limite* de A contiendra la courbe B tout entière.

Supposons maintenant

$$e_2^0 = \frac{\alpha_2}{2}, \qquad e_3^0 = \frac{\alpha_3}{2}, \qquad e_2^1 = \frac{\alpha_1}{2}, \qquad e_3^1 = \frac{\alpha_3}{2};$$

les équations (2) deviendront

$$(2\ ter)\quad \begin{cases} u_1 = \alpha_1 + e_1, & u_2 = \alpha_2 + e'_2, \\ u_2 = \frac{\alpha_2}{2}, & u_1 = \frac{\alpha_1}{2}, \\ u_1 = \alpha_1 + e_1, & u_3 = \frac{\alpha_3}{2}, \\ u_3 = \frac{\alpha_3}{2}, & u_1 = \frac{\alpha_1}{2}, \\ u_2 = \frac{\alpha_2}{2}, & u_3 = \frac{\alpha_3}{2}, \\ u_3 = \frac{\alpha_3}{2}, & u_2 = \alpha_2 + e'_2. \end{cases}$$

Nous retouvons ici les trois parties de la courbe B.

Ici encore les équations (2) ne sont pas distinctes.

Elles sont satisfaites par tous les points de la surface

$$u_3 = \frac{\alpha_3}{2},$$

et, en outre, par tous les points des deux courbes (2 *ter*, 1) et (2 *ter*, 2).

Seulement les choses ne se passent pas ici comme dans la première hypothèse, et c'est sur ce point que je désirerais attirer l'attention.

Si, restant dans le cas singulier elliptique, nous faisons tendre e_2, e_3, e'_2 et e'_3 vers les limites $-\frac{\alpha_2}{2}$, $-\frac{\alpha_3}{2}$, $-\frac{\alpha_1}{2}$, $-\frac{\alpha_3}{2}$, la limite de la courbe A contiendra la courbe B tout entière.

Étudions maintenant la décomposition de A dans le cas général.

Dans le cas de $p = 3$, on peut supposer que la courbe C est une courbe de quatrième degré sans point double.

Étudions la signification de l'équation

$$\Theta(u_i - e_i) = 0. \tag{3}$$

On peut toujours poser

$$-e_i = v_i^1 + v_i^2 + v_i^3,$$

v_i^1, v_i^2, v_i^3 étant les valeurs de l'intégrale v_i qui correspondent à trois points de C que j'appellerai les points x_1, x_2, x_3, ou, pour abréger encore, les points 1, 2, 3.

De même, nous pouvons toujours poser

$$u_i = v_i^4 + v_i^5 + v_i^6,$$

les intégrales v_i^4, ... correspondant à trois points de C que j'appellerai les points 4, 5, 6.

L'équation (3), en vertu du théorème de Riemann, peut être remplacée par la suivante :

$$u_i - e_i = -v_i^7 - v_i^8, \tag{4}$$

les points 7 et 8, qui correspondent aux deux intégrales du second membre de (4), étant deux points quelconques de C. Mais l'équation (4) peut s'écrire

$$v_i^1 + v_i^2 + v_i^3 + v_i^4 + v_i^5 + v_i^6 + v_i^7 + v_i^8 = 0;$$

elle signifie que les huit points 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 sont sur une même conique.

La signification géométrique de l'équation (3), c'est donc que les six points 1, 2, 3, 4, 5, 6 doivent être sur une même conique. Considérons maintenant l'équation

$$\Theta(u_i - e_i') = 0. \tag{3 bis}$$

Nous pourrons toujours poser

$$e_i' = v_i^9 + v_i^{10} + v_i^{11},$$

et l'équation (3 *bis*) signifiera que les six points 4, 5, 6, 9, 10, 11 sont sur une même conique.

La courbe A est définie par les équations simultanées (3) et (3 *bis*); si l'on veut satisfaire à la fois à ces deux équations, le problème se posera géométriquement de la manière suivante :

On se donne sur la courbe C six points 1, 2, 3, 9, 10, 11; *il faut faire* *passer par* 1, 2, 3 *une conique* K, *et, par* 9, 10, 11 *une conique* K', *et de telle façon qu'il y ait trois points* 4, 5, 6 *communs à* C *et aux deux coniques.*

A chaque solution de ce problème correspondra un point de A.

Supposons en particulier que deux des points 1, 2, 3 coïncident avec deux des trois points 9, 10, 11; par exemple, 2 avec 10 et 3 avec 11, de sorte que

$$v'_i = v_i^9 + v_i^2 + v_i^3.$$

Qu'arrivera-t-il alors ? Les équations (3) et (3 *bis*) de la courbe A deviendront

$$\Theta(u_i - v_i^1 + v_i^2 - v_i^3) = 0,$$
$$\Theta(u_i + v_i^9 - v_i' - v_i^3) = 0,$$

et elles admettront pour solution

$$u_i = v_i - v_i^2 - v_i^3.$$

C'est là l'équation d'une courbe B'; la courbe A se décompose donc, une des deux parties étant la courbe B'.

Examinons géométriquement les circonstances de cette décomposition. Les deux coniques K et K' ont déjà deux points communs 2 et 3; si elles doivent en avoir trois autres 4, 5, 6, elles se confondront à moins de se décomposer.

Examinons séparément ces deux hypothèses.

On obtiendra les valeurs de u_i (ou des points de A) qui correspondent à la première hypothèse de la manière suivante :

Par les quatre points 1, 2, 3, 9, faisons passer une conique; elle coupera la courbe C en quatre autres points, parmi lesquels j'en choisirai trois qui seront les points 4, 5, 6.

Ce choix peut se faire de trois manières différentes.

Les coniques qui passent par les quatre points 1, 2, 3, 9 forment un faisceau. A chaque conique du faisceau correspondent ainsi trois points de A.

Examinons maintenant la seconde hypothèse.

Pour que deux coniques aient cinq points communs, sans se confondre, il faut que chacune d'elles se décompose en deux droites et que deux de ces droites se confondent. Quatre des cinq points doivent alors se trouver en ligne droite. Les coniques K et K' ont cinq points communs, 2, 3, 4, 5, 6; quatre de ces points doivent être en ligne droite.

Cela peut se faire de deux manières, de sorte que la seconde hypothèse se subdivise en deux autres que j'appellerai, pour abréger, la *seconde* et la *troisième hypothèse*.

Ou bien, les points 2 et 3 sont en ligne droite avec deux des points 4, 5, 6; par exemple, avec les points 4, 5; ce sera là la deuxième hypothèse.

Ou bien, les points 4, 5 et 6 sont en ligne droite avec un des points 2 et 3; par exemple, avec le point 3; ce sera là la troisième hypothèse.

Examinons d'abord la deuxième hypothèse.

Les points 2, 3, 4, 5 étant en ligne droite, on aura

$$v_i^2 + v_i^3 + v_i^4 + v_i^5 = 0.$$

La conique K se réduira à la droite 2, 3, 4, 5 et à la droite 1, 6; la conique K′ se réduira à la droite 2, 3, 4, 5 et à la droite 9, 6.

Les points 4 et 5 sont fixes et le point 6 est seul mobile; on aura d'ailleurs

$$u_i = v_i^4 + v_i^5 + v_i^6 = v_i^6 - v_i^2 - v_i^3;$$

comme le point 6 est mobile, les points 2 et 3 fixes, je puis écrire cela sous la forme

$$u_i = v_i - v_i^2 - v_i^3,$$

le point x qui correspond à v_i étant un point mobile quelconque de C.

C'est là l'équation de la courbe B′ et l'on voit ainsi d'une autre manière qu'elle doit faire partie de la courbe A. Mais j'ajouterai qu'elle doit faire partie d'une infinité de courbes A; et en effet nous pouvons laisser les points 2, 3, 4, 5 fixes et en ligne droite et faire varier les deux autres points 1 et 9 (et par conséquent les quantités e_i et e_i'); nous ne cesserons pas d'avoir

$$u_i = v_i - v_i^2 - v_i^3.$$

Examinons maintenant la troisième hypothèse.

Les points 3, 4, 5, 6 étant en ligne droite, on aura

$$v_i^3 + v_i^4 + v_i^5 + v_i^6 = 0;$$

d'où

$$u_i = - v_i^3.$$

Comme les u_i sont des constantes, on voit qu'à la troisième hypothèse correspond seulement un point de A.

La courbe A se décompose donc en deux parties correspondant aux deux premières hypothèses; la partie qui correspond à la deuxième hypothèse est la courbe B'.

Nous n'obtenons pas ainsi tous les cas de décomposition de la courbe A.

Soient en effet

$$f_1,\quad f_2,\quad f_3$$

trois constantes quelconques, nous pourrons encore poser

$$u_i = f_i + v_i^4 + v_i^5 + v_i^6,$$
$$-v_i = f_i + v_i^1 + v_i^2 + v_i^3,$$
$$-v'_i = f_i + v_i^9 + v_i^{10} + v_i^{11}.$$

Les équations (3) et (3 *bis*) signifieront encore que les six points 1, 2, 3, 4, 5, 6 sont sur une conique K et les six points 4, 5, 6, 9, 10, 11 sur une conique K'.

Si deux des points 1, 2, 3 coïncident avec des points 9, 10, 11, ces deux coniques doivent se confondre ou se décomposer. Il en résulte que la courbe A se décomposera encore en deux parties; l'une de ces parties (celle qui correspond à l'hypothèse de la décomposition de K et de K') a pour équation

$$u_i = v_i - f_i - v_i^2 - v_i^3.$$

C'est encore une courbe B'. On a la courbe B elle-même si l'on suppose

$$f_i = v_i^2 + v_i^3.$$

IX. — Cas voisins du cas elliptique.

J'ai déjà eu l'occasion, au paragraphe VI, d'étudier les cas voisins du cas singulier elliptique. Nous avons vu que, pour les cas suffisamment voisins de ce cas singulier, la fonction Θ peut se développer suivant les puissances croissantes des *termes latéraux*.

C'est le développement (6) du paragraphe VI dont nous avons formé plus haut les premiers termes.

Il est aisé d'en former le terme général.

Soit par exemple à former le terme en

$$a'_{2,3}\, a'_{1,3}\, a'_{1,2},$$

en supposant d'abord $p = 3$.

Posons

$$\gamma_1 = \lambda' + \lambda'', \qquad \gamma_2 = \lambda + \lambda'', \qquad \gamma_3 = \lambda + \lambda',$$

le coefficient du terme cherché sera

$$(-1)^{\lambda+\lambda'+\lambda''} \frac{\theta_1^{\gamma_1}\theta_2^{\gamma_2}\theta_3^{\gamma_3}}{\lambda!\,\lambda'!\,\lambda''!}.$$

Je désigne toujours par $\theta_1\theta_2\theta_3$ le premier terme du développement (6) et par $\theta_1^{\gamma_1}$ la dérivée d'ordre γ_1 de la fonction θ_1.

Supposons maintenant $p = 4$ et soit à trouver dans le développement (6) le coefficient du terme général en

$$a'^{\lambda_{1,2}}_{1,2}\,a'^{\lambda_{1,3}}_{1,3}\,a'^{\lambda_{1,4}}_{1,4}\,a'^{\lambda_{2,3}}_{2,3}\,a'^{\lambda_{2,4}}_{2,4}\,a'^{\lambda_{3,4}}_{3,4}.$$

Soient

$$\gamma_1 = \lambda_{1,2} + \lambda_{1,3} + \lambda_{1,4},$$
$$\gamma_2 = \lambda_{2,1} + \lambda_{2,3} + \lambda_{2,4},$$
$$\gamma_3 = \lambda_{3,1} + \lambda_{3,2} + \lambda_{3,4},$$
$$\gamma_4 = \lambda_{4,1} + \lambda_{4,2} + \lambda_{4,3}.$$

Il va sans dire que je pose

$$\lambda_{i,k} = \lambda_{k,i}.$$

Le coefficient cherché sera alors

$$(-1)^{\Sigma\lambda} \frac{\theta_1^{\gamma_1}\theta_2^{\gamma_2}\theta_3^{\gamma_3}\theta_4^{\gamma_4}}{\lambda_{1,2}!\,\lambda_{1,3}!\,\lambda_{1,4}!\,\lambda_{2,3}!\,\lambda_{2,4}!\,\lambda_{3,4}!}.$$

Il est donc facile dans tous les cas de former le développement (6). Voici maintenant l'usage que j'en ferai.

Nous avons défini plus haut au paragraphe IV ce qu'on doit entendre par surface de translation et par équation *translative* et nous avons vu que l'équation

$$\Theta = 0 \tag{1}$$

est translative si la fonction Θ est une fonction *spéciale*.

Mais on peut se demander si cette équation est encore translative si la fonction Θ est une fonction *non spéciale*.

Pour résoudre cette question j'étudierai l'équation

$$\Theta = 0,$$

en me servant du développement (6) et en supposant que les *termes latéraux* sont assez petits pour qu'on puisse négliger les termes d'ordre supérieur de ce développement.

Mais cette étude peut se faire de plusieurs manières.

Nous pouvons d'abord supposer que u_1 est très voisin de z_1, mais que u_2, u_3, u_4 ne sont pas très voisins de z_2, z_3, z_4. C'est ainsi que nous avons obtenu le développement (8) du paragraphe VI dont nous avons formé les premiers termes.

Nous avons formé les termes du premier ordre et nous avons trouvé, pour $p = 3$,

$$u_1 = z_1 + \alpha_{1,2}\frac{\theta'_2}{\theta_2} + \alpha_{1,3}\frac{\theta'_3}{\theta_3}.$$

Dans le cas de $p = 4$, nous aurions trouvé

$$u_1 = z_1 + \alpha_{1,2}\frac{\theta'_2}{\theta_2} + \alpha_{1,3}\frac{\theta'_3}{\theta_3} + \alpha_{1,4}\frac{\theta'_4}{\theta_4}.$$

Cherchons maintenant à former les termes du deuxième ordre.

Soit

$$B = \frac{\theta''_1(z_1)}{\theta'_1(z_1)}.$$

Nous trouverons pour ces termes du deuxième ordre, dans le cas de $p = 4$,

$$(2)\quad u_1 = z_1 + \Sigma\alpha_{1,i}\frac{\theta'_i}{\theta_i} + \sum\frac{\alpha_{1,i}^2}{2}B\left(\frac{\theta''_i}{\theta_i} - \frac{\theta'^2_i}{\theta_i^2}\right) - \Sigma\alpha_{1,i}\alpha_{i,k}\frac{\theta'_k}{\theta_k}\left(\frac{\theta''_i}{\theta_i} - \frac{\theta'^2_i}{\theta_i^2}\right)\quad (i, k = 2, 3, 4).$$

Cette équation peut être remplacée par les suivantes, au même degré d'approximation, c'est-à-dire en négligeant les cubes des $\alpha_{1,i}$ et de $u_1 - z_1$.

Nous introduisons trois paramètres w_2, w_3, w_4 et nous posons

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} u_1 &= z_1 + \Sigma\,\alpha_{1,i}\frac{\theta'_i(w_i)}{\theta_i(w_i)} \\ u_i &= \frac{B\alpha_{1,i}}{2} + w_i + \Sigma\,\alpha_{i,k}\frac{\theta'_k(w_k)}{\theta_k(w_k)} \end{aligned}\right.\qquad (i, k = 2, 3, 4;\ i \gtrless k).$$

Les équations (3) peuvent remplacer l'équation (1) en négligeant les cubes des termes latéraux.

Or *les équations* (3) *ont un caractère manifestement translatif*. Il semblerait donc que l'équation (1) reste translative même pour les fonctions abéliennes non spéciales. Mais on ne doit pas oublier que les équations (3) ne sont qu'approchées et nous ne tarderons pas à voir que le caractère translatif ne subsiste pas à un degré supérieur d'approximation.

Une seconde hypothèse est celle où, p étant égal à 4 par exemple u_1 et u_2 sont très voisins de α_1 et α_2, u_3 et u_4 très différents de α_3 et α_4.

Posons alors

$$u_1 = \alpha_1 + t\xi_1, \qquad u_2 = \alpha_2 + t\xi_2,$$
$$u_{i\,k} = t^2 \eta_{i\,k},$$

t étant un paramètre très petit.

La fonction Θ, représentée par le développement (6), se trouvera alors développée suivant les puissances de t; si t est très petit, nous pourrons ne conserver que le premier terme qui est un terme en t^2 et qui s'écrit

$$t^2 \theta'_1 \theta'_2 \theta_3 \theta_4 (\xi_1 \xi_2 - \eta_{1\,2}).$$

Alors l'équation (1) se réduit à

$$\xi_1 \xi_2 = \eta_{1\,2}.$$

Dans le cas de $p = 3$, si u_1, u_2, u_3 représentent les coordonnées d'un point dans l'espace, cette équation représente un cylindre hyperbolique qui peut, d'une infinité de manières, être regardé comme une surface de translation.

Le caractère translatif est également évident pour $p > 3$.

Nous avons encore trois hypothèses à examiner :

$p = 3$; u_1, u_2 et u_3 très voisins de α_1, α_2, α_3;
$p = 4$; u_1, u_2 et u_3 très voisins de α_1, α_2, α_3; u_4 très différent de α_4;
$p = 4$; u_1, u_2, u_3, et u_4 très voisins de α_1, α_2, α_3 et α_4.

Nous nous en occuperons dans les paragraphes suivants.

X. — Étude d'une surface de translation.

Les surfaces de translation peuvent être engendrées par la translation d'une courbe gauche et c'est là l'origine du nom qu'on leur a donné. L'équation générale d'une surface de translation est, comme nous l'avons vu,

$$(1) \qquad \begin{cases} x = f_1(t) + f'_1(u), \\ y = f_2(t) + f'_2(u), \\ z = f_3(t) + f'_3(u). \end{cases}$$

t et u étant deux variables indépendantes; les f et les f' étant six fonctions quelconques.

La surface définie par l'équation (1) peut être, de deux manières différentes, engendrée par la translation d'une courbe gauche, à savoir par celle de la courbe

$$x = f_1(t), \qquad y = f_2(t), \qquad z = f_3(t)$$

et par celle de la courbe

$$x = f'_1(u), \qquad y = f'_2(u), \qquad z = f'_3(u).$$

On peut tracer sur la surface deux systèmes de lignes remarquables que j'appellerai *génératrices*.

Ce sont pour le premier système

$$\begin{aligned} x &= f_1(t) + f'_1(a), \\ y &= f_2(t) + f'_2(a), \\ z &= f_3(t) + f'_3(a), \end{aligned}$$

a étant une constante quelconque et t une variable, et pour le second système

$$\begin{aligned} x &= f'_1(u) + f_1(a), \\ y &= f'_2(u) + f_2(a), \\ z &= f'_3(u) + f_3(a), \end{aligned}$$

a étant une constante quelconque et u une variable.

Les génératrices d'un même système sont toutes égales entre elles.

Parmi les surfaces de translation, je distinguerai une classe remarquable de surfaces que j'appellerai *surfaces de translation distinguées*.

On les obtient quand les trois fonctions f'_1, f'_2, f'_3 sont identiques respectivement aux trois fonctions f_1, f_2, f_3. Les deux systèmes de génératices se confondent alors en un seul.

D'autre part, la surface peut être considérée comme le lieu des milieux des cordes d'une courbe gauche tracée sur la surface et que j'appellerai *courbe directrice*. Elle a pour équations

$$x = 2f_1(t), \qquad y = 2f_2(t), \qquad z = 2f_3(t).$$

Il suffit d'ailleurs, pour qu'une surface soit distinguée, que les différences

$$\begin{aligned} &f'_1(t) - f_1(t), \\ &f'_2(t) - f_2(t), \\ &f'_3(t) - f_3(t) \end{aligned}$$

se réduisent à des constantes; c'est-à-dire qu'une génératice du second système soit égale à une génératrice du premier système et semblablement orientée dans l'espace. Ce cas se ramène en effet au précédent d'une manière immédiate.

La surface

$$\Theta = 0,$$

où u_1, u_2, u_3 sont regardés comme les coordonnées rectangulaires d'un point dans l'espace, est une surface de translation distinguée.

On a effet

$$\Theta(v_1 + v'_1, v_2 + v'_2, v_3 + v'_3) = 0,$$

de sorte que l'équation de la surface peut se mettre sous la forme

$$u_i = v_i + v'_i,$$

où les v_i ne dépendent que de x et les v'_i de x'.

C'est donc bien une surface de translation distinguée dont les génératrices ont pour équation

$$u_i = v_i + v_i^0,$$

x_0 étant un point fixe de C et v_i^0 la valeur correspondante de v_i.

La directrice a pour equation

$$u_i = 2v_i.$$

Mais ce n'est pas tout. On a également

$$\Theta(-v_i - v'_i) = 0,$$

de sorte que l'équation de la surface peut se mettre encore sous la forme

$$u_i = -v_i - v'_i.$$

C'est donc encore le lieu des milieux des cordes de la courbe

$$u_i = -2v_i.$$

C'est donc, de deux manières différentes, une surface de translation distinguée qui a deux courbes directrices

$$u_i = 2v_i, \qquad u_i = -2v_i$$

et deux systèmes de génératrices

$$u_i = v_i + v_i^0, \qquad u_i = -v_i - v_i^0.$$

Avant d'aller plus loin, étudions les points à l'infini des surfaces de translation; ils correspondent évidemment aux points à l'infini des génératrices.

Considérons la courbe

$$x = f'_1(u), \qquad y = f'_2(u), \qquad z = f'_3(u)$$

et l'une des asymptotes de cette courbe. Supposons que l'on ait pris l'axe des z parallèle à cette asymptote, de telle façon que, pour une certaine valeur u_0 de u, $f'_3(u_0)$ devienne infinie, $f'_1(u_0)$ et $f'_2(u_0)$ restant finies.

Alors

$$x = f_1(t) - f'_1(u_0), \qquad y = f_2(t) + f'_2(u_0),$$

où t est une variable et u_0 une constante, sera l'équation d'un cylindre asymptotique à la surface.

La projection d'une génératrice quelconque sur le plan des xy sera égale à la section droite de ce cylindre.

Cela posé, voici où je voulais en venir.

Examinons l'hypothèse :

$$p = 3; \qquad u_1, u_2, u_3 \text{ très voisins de } z_1, z_2, z_3.$$

Posons

$$u_i = z_i - t\xi_i, \qquad a_{ik} = t^2\eta_{ik} \qquad (i \gtrless k);$$

la série (6) du paragraphe VI se trouve alors développée suivant les puissances de t et le premier terme, qui est en t^2, s'écrit

$$t^2\theta'_1\theta'_2\theta'_3(\xi_1\xi_2\xi_3 - \eta_{23}\xi_1 - \eta_{13}\xi_2 - \eta_{12}\xi_3).$$

Si je suppose t très petit, je pourrai négliger les autres.

Donc la surface algébrique du troisième ordre

$$(9) \qquad \xi_1\xi_2\xi_3 = \eta_{23}\xi_1 + \eta_{13}\xi_2 + \eta_{12}\xi_3$$

doit être une surface de translation.

C'est même une surface de translation distinguée.

Sur ce dernier point le passage à la limite que je viens d'opérer pourrait peut-être laisser des doutes.

Soit S une surface de translation distinguée *variable* ayant pour limite une certaine surface S' (quand le paramètre variable dont dépend la surface S tend vers une certaine limite). Soit M un point de S tendant vers un point M' de S'.

Par le point M passeront deux génératrices de S, que j'appellerai G et H; les deux courbes G et H tendront vers deux courbes limites G′ et H′ passant par le point M′; et la surface S′ pourra, à la limite, être regardée comme engendrée par la translation de G′ ou par celle de H′. C'est donc une surface de translation.

La surface S étant une surface de translation distinguée, les deux courbes G et H sont égales entre elles; s'ensuit-il que les deux courbes G′ et H′ soient égales entre elles ? Il n'en est pas forcément ainsi; il peut se faire qu'à la limite la courbe G se décompose et même que, dans cette décomposition, certaines parties de cette courbe soient rejetées à l'infini. De même la courbe H, égale à G, se décomposera; et il peut se faire que G′ soit la limite d'une partie de G et H′ celle d'une partie de H correspondant à une *autre* partie de G.

Pour mieux faire comprendre ma pensée, je vais essayer de fixer les idées; supposons que G et H soient deux cubiques gauches égales; on pourrait imaginer qu'à la limite G se décompose en une droite à distance finie (qui serait G′) et une conique rejetée à l'infini et H en une droite rejetée à l'infini et une conique à distance finie (qui serait H′).

C'est d'ailleurs ce qui arrive quand on passe à la limite d'une autre manière et comme nous l'avons fait au paragraphe VI; c'est-à-dire de telle sorte que $u_1 - x_1$ devienne infiniment petit et que $u_2 - x_2$, $u_3 - x_3$ restent finis.

La surface (2) est donc une surface de translation; mais on pourrait se demander si c'est une surface distinguée.

On peut faire de cette surface une transformation homographique très simple qui en simplifie un peu l'équation en lui conservant le caractère translatif.

Nous pouvons toujours trouver des quantités

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$$

définies par les équations

$$\varepsilon_1\varepsilon_2 = -\gamma_{1,2}, \qquad \varepsilon_2\varepsilon_3 = -\gamma_{2,3}, \qquad \varepsilon_1\varepsilon_3 = \gamma_{1,3};$$

nous poserons alors

$$\xi_1 = \varepsilon_1 x, \qquad \xi_2 = \varepsilon_2 y, \qquad \xi_3 = \varepsilon_3 z,$$

et l'équation (2) deviendra

$$xyz - x - y + z = 0. \tag{3}$$

La surface du troisième ordre (3) (où x, y, z sont regardés comme les coordonnées rectangulaires d'un point) est donc une surface de translation.

La surface (3) admet trois cylindres asymptotiques qui sont

$$xz - 1 = 0,$$
$$yz - 1 = 0,$$
$$xy + 1 = 0.$$

D'après une remarque faite plus haut sur les cylindres asymptotiques des surfaces de translation, la projection d'une génératrice sur l'un quelconque des plans de coordonnées est une hyperbole équilatère.

Toute génératrice est donc l'intersection de deux cylindres hyperboliques équilatères dont les plans asymptotiques sont parallèles aux plans de coordonnées, à savoir aux plans

$$x = 0, \qquad z = 0$$

pour le premier cylindre, et aux plans

$$y = 0, \qquad z = 0$$

pour le second. L'intersection de ces deux cylindres se décompose en une droite rejetée à l'infini dans la direction du plan $z = 0$ et en une cubique gauche.

Les génératrices de notre surface de translation sont donc des cubiques gauches dont les asymptotes sont parallèles aux axes de coordonnées.

Cela nous fait déjà prévoir que la surface sera une surface de translation distinguée; en effet, la projection d'une génératrice du second système sur le plan des xy doit être, comme celle d'une génératrice du premier système, égale à l'hyperbole

$$xy + 1 = 0$$

et semblablement orientée.

Les projections des génératrices des deux systèmes sur l'un des trois plans de coordonnées sont donc égales; donc les génératrices du second système sont égales à celles du premier et semblablement orientées. C. Q. F. D.

La surface a donc une directrice qui est aussi une cubique gauche, et les deux systèmes de systèmes de génératrices se confondent en un seul. Mais ce n'est pas tout; la surface admet un centre de symétrie qui est l'origine, et trois plans de symétrie qui sont les plans $x = y$, $x = z$, $y = z$. Elle admet en conséquence trois axes de symétrie binaire et un axe de symétrie ternaire.

Nous pouvons conclure de là que : ou bien la directrice admettra l'origine pour centre de symétrie; ou bien sa symétrique sera encore une directrice. Or une cubique gauche ne peut avoir de centre de symétrie; donc la surface admet *deux directrices*, symétriques l'une de l'autre par rapport à l'origine.

On pourrait raisonner de même avec l'un des trois plans de symétrie; car une cubique gauche ne peut pas non plus avoir de plan de symétrie. Les deux directrices sont donc aussi symétriques l'une de l'autre par rapport à l'un de ces trois plans.

On verrait de même que chacune des directrices admet trois axes de symétrie binaire et un axe de symétrie ternaire.

La surface (3) jouit donc de la même propriété que la surface $\Theta = 0$; je veux dire qu'elle sera *de deux manières différentes* une surface distinguée et qu'elle aura par conséquent deux directrices et deux systèmes de génératrices.

Nous sommes ainsi amené à rechercher les cubiques gauches que l'on peut tracer sur la surface.

Une cubique gauche est déterminée quand on en connaît six points et en particulier quand on connaît les trois asymptotes.

D'un autre côté une cubique gauche, qui a ses trois asymptotes sur les trois cylindres asymptotiques de la surface, rencontre cette surface en neuf points à l'infini. Elle ne peut donc la rencontrer encore en un point à distance finie sans être tout entière sur la surface.

Voici donc ce que je vais faire.

Je prendrai une droite sur chacun des trois cylindres asymptotiques. Je construirai une cubique ayant pour asymptotes ces trois droites qui seront respectivement parallèles aux trois axes de coordonnées. J'écrirai qu'un point, à distance finie, mais d'ailleurs quelconque de cette cubique est sur la surface; et la cubique sera tout entière sur la surface.

Soient

$$y = u, \qquad z = -\frac{1}{u},$$

$$z = v, \qquad x = -\frac{1}{v},$$

$$x = w, \qquad y = -\frac{1}{w}$$

ces trois asymptotes; u, v, w sont trois constantes quelconques.

On voit que les trois asymptotes sont bien sur les trois cylindres asymptotiques.

Pour qu'un point de la cubique soit sur la surface, il faut et il suffit que

$$uvw = \pm 1;$$

soit d'abord

$$uvw = 1. \tag{4}$$

Posons

$$\frac{1}{v} + w = \xi, \qquad \frac{1}{w} + u = \eta, \qquad \frac{1}{u} + v = \zeta. \tag{5}$$

La *forme* de la cubique gauche dépendra uniquement de ξ, η et ζ; de sorte que deux cubiques gauches, correspondant à un même système de valeurs de ξ, η et ζ seront égales.

Les trois paramètres u, v, w étant liés par la relation (4), on voit qu'il y a sur la surface une double infinité de cubiques gauches.

Les équations (5) deviennent, en tenant compte de (4),

$$1 + \frac{1}{u} = \xi v, \qquad 1 + \frac{1}{v} = \eta w, \qquad 1 + \frac{1}{w} = \zeta u. \tag{6}$$

Des équations (5) et (6) nous tirons

$$u = \frac{1+\eta}{1+\zeta}, \qquad v = \frac{1+\zeta}{1+\xi}, \qquad w = \frac{1+\xi}{1+\eta}, \tag{7}$$

avec la condition

$$\xi\eta\zeta = \xi + \eta + \zeta + 2. \tag{8}$$

Alors u, v et w étant fonctions rationnelles de ξ, η et ζ, à un système de valeurs de ξ, η, ζ correspondra *un seul* système de valeurs de u, v, w; deux de nos cubiques gauches ne peuvent donc être égales entre elles, *à moins que ces fonctions rationnelles ne se présentent sous une forme indéterminée*. C'est ce qui arrive si l'on fait

$$\xi = \eta = \zeta = -1,$$

valeurs qui satisfont d'ailleurs à la relation (8).

C'est donc ainsi que l'on obtient les génératrices de notre surface qui doivent, en nombre infini, être égales entre elles et semblablement orientées.

Pour obtenir les équations de ces génératrices, il faut donner à ξ, η, ζ non pas la valeur -1, qui rendrait les expressions de u, v, w indéterminées, mais des valeurs très voisines, en les choisissant de telle sorte que la relation (8) ne cesse pas d'être satisfaite, c'est-à-dire que l'on ait sensiblement (en négligeant les carrés de $1+\xi$, $1+\eta$, $1+\zeta$)

$$\xi + \eta - \zeta = -3. \tag{9}$$

On tire de là, en combinant les équations (7) et (9),

$$u = \frac{1}{t}, \qquad v = \frac{t}{1+t}, \qquad w = 1 + t,$$

t étant un paramètre arbitraire; telles sont les valeurs de u, v, w qui correspondent aux génératrices.

De $u^2 v^2 w^2 = 1$ on aurait pu déduire, au lieu de (4), la relation

$$uvw = -1. \tag{4 bis}$$

On peut donc tracer sur la surface deux familles de cubiques gauches, formées chacune d'une double infinité de courbes, et correspondant la première à (4), la seconde à (4 *bis*).

Si nous prenons (4 *bis*) au lieu de (4) et que nous écrivions (5), nous trouverons

$$u = \frac{1-\eta}{\zeta - 1}, \qquad v = \frac{1-\zeta}{\xi - 1}, \qquad w = \frac{1-\xi}{\eta - 1}, \tag{7 bis}$$

avec la condition

$$\xi\eta\zeta = \xi - \eta + \zeta - 2. \tag{8 bis}$$

Les génératrices du second système correspondent alors aux valeurs

$$\xi = \eta = \zeta = 1,$$

qui rendent les expressions (7 *bis*) indéterminées et qui satisfont à (8 *bis*).

Quant à la directrice correspondant au premier système, elle correspondra aux valeurs

$$\xi = \eta = \zeta = -2,$$

qui satisfont à (8 *bis*) et qui donnent

$$u = v = w = -1.$$

Enfin la directrice correspondant au deuxième système correspondra aux valeurs

$$\xi = \eta = \zeta = 2,$$

qui satisfont à (8) et qui donnent

$$u = v = w = 1.$$

Ainsi les génératrices du premier système et la directrice du second appartiendront à la première famille de cubiques; les génératrices du second système et la directrice du premier appartiendront à la seconde famille de cubiques.

Notre surface est donc le lieu des milieux des cordes de deux cubiques gauches qui ont respectivement pour asymptotes

$$(10) \qquad -y = z = 1, \qquad -z = x = 1, \qquad -x = y = 1$$

et

$$y = -z = 1, \qquad z = -x = 1, \qquad x = -y = 1.$$

Étant données trois droites quelconques dans l'espace, je puis toujours choisir des axes obliques tels que ces droites aient pour équations

$$(11) \qquad \begin{cases} y = -b, & z = c, & z = -c, \\ x = a, & x = -a, & y = b. \end{cases}$$

Il suffit ensuite d'une transformation homographique très simple $\left(\text{en changeant } x, y, z \text{ en } \frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\right)$ pour ramener les équations (11) aux équations (10).

Si nous nous rappelons qu'une cubique gauche est déterminée par ses asymptotes, nous conclurons que le lieu des milieux des cordes d'une cubique gauche quelconque est une transformée homographique de la surface (3) et par conséquent est une surface à centre.

On peut prendre la question par un autre côté.

Soient ξ_1, ξ_2, ξ_3 les coordonnées d'un point; soit une cubique gauche ayant ses asymptotes parallèles aux axes; les équations de la cubique pourront se mettre sous la forme

$$\xi_i = \frac{2\beta_i}{t - a_i} + b_i,$$

où t est un paramètre variable et les β, a et b des constantes.

La surface lieu des milieux de ses cordes aura pour équations

$$(12) \qquad \xi_i = \frac{\beta_i}{t - a_i} + \frac{\beta_i}{u - a_i} + b_i,$$

où t et u sont deux paramètres.

Soit P un polynôme du premier degré par rapport à chacune des trois variables ξ, et par conséquent du troisième degré par rapport à l'ensemble de ces variables; ce polynôme contiendra huit coefficients arbitraires.

Si nous y substituons à la place des ξ_i leurs valeurs (12), on obtiendra une fonction rationnelle R tant en t qu'en u et symétrique par rapport à ces variables. Si nous décomposons cette fonction rationnelle en éléments simples, d'abord par rapport à t, puis par rapport à u, nous pourrions obtenir seize éléments différents; on pourrait avoir en effet un terme

$$\frac{1}{t-a_1}\,\frac{1}{u-a_1},$$

où le premier facteur pourrait être remplacé par

$$\frac{1}{t-a_2},\quad \frac{1}{t-a_3}\quad \text{ou}\quad 1,$$

et le second par

$$\frac{1}{u-a_2},\quad \frac{1}{u-a_3}\quad \text{ou}\quad 1.$$

Mais on voit d'abord qu'il ne peut y avoir de terme en

$$\frac{1}{(t-a_i)(u-a_i)},$$

mais seulement en

$$\frac{1}{(t-a_i)(u-a_k)}\qquad (i \gtrless k).$$

Le développement de notre fonction rationnelle R en éléments simples comprendra donc treize termes; et si l'on observe que, par raison de symétrie,

$$\frac{1}{(t-a_i)(u-a_k)}\quad \text{et}\quad \frac{1}{(t-a_k)(u-a_i)},$$
$$\frac{1}{t-a_i}\quad \text{et}\quad \frac{1}{u-a_i}$$

doivent avoir même coefficient, on verra que le développement R contient sept coefficients.

En annulant ces sept coefficients, on impose sept conditions aux huit coefficients de P, mais il en reste encore un arbitraire; de sorte que l'équation de la surface (12) peut s'écrire

$$P = 0;$$

cette surface est donc du troisième degré.

Jusqu'ici l'origine est restée arbitraire; nous pourrons la choisir de façon à faire disparaître les trois termes du second degré; alors, comme la surface doit avoir un centre, le terme de degré zéro disparaîtra de lui-même.

Passons encore à une autre hypothèse; soit

$$p = 4;$$

u_1, u_2, u_3 très voisins de x_1, x_2, x_3; u_4 distinct de x_4.

Posons encore

$$u_i = x_i + t\xi_i \quad (i = 1, 2, 3), \qquad a_{i,k} = t^2\gamma_{i,k},$$

il viendra, en négligeant les termes en t^4,

$$\Theta = t^3\theta'_1\theta'_2\theta'_3\theta'_4(\xi_1\xi_2\xi_3 - \gamma_{2,3}\xi_1 - \gamma_{1,3}\xi_2 - \gamma_{1,2}\xi_3),$$

et l'équation $\Theta = 0$ s'écrira

$$\xi_1\xi_2\xi_3 = \gamma_{2,3}\xi_1 + \gamma_{1,3}\xi_2 + \gamma_{1,2}\xi_3.$$

Nous sommes ainsi ramené au cas précédent.

XI. — Extension au cas de $p = 4$.

Nous allons examiner une dernière hypothèse

$$p = 4;$$

u_1, u_2, u_3, u_4 très voisins de x_1, x_2, x_3, x_4.

Cette hypothèse va enfin nous permettre de montrer que les fonctions non spéciales, c'est-à-dire les fonctions abéliennes de genre p qui ne sont pas engendrées par une courbe algébrique de genre p, ne conservent pas le caractère translatif, c'est-à-dire que les théorèmes de Riemann ne sont plus vrais pour elles.

Posons encore

$$u_i = x_i + t\xi_i, \qquad a_{i,k} = t^2\gamma_{i,k} \qquad (i \neq k);$$

il viendra, en négligeant les termes en t^5,

$$\Theta = t^4\theta'_1\theta'_2\theta'_3\theta'_4(\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4 - \Sigma\gamma_{1,2}\xi_3\xi_4 + \Sigma\gamma_{1,2}\gamma_{3,4}).$$

La première somme

$$\Sigma\gamma_{1,2}\xi_3\xi_4$$

comprend six termes que l'on déduit les uns des autres en permutant les indices, de sorte que

$$\Sigma\gamma_{1,2}\xi_3\xi_4 = \gamma_{1,2}\xi_3\xi_4 + \gamma_{1,3}\xi_2\xi_4 + \gamma_{1,4}\xi_2\xi_3 + \gamma_{2,3}\xi_1\xi_4 + \gamma_{2,4}\xi_1\xi_3 + \gamma_{3,4}\xi_1\xi_2.$$

La seconde somme comprend trois termes déduits les uns des autres par permutations d'indices, de sorte que

$$\Sigma\gamma_{1,2}\gamma_{3,4} = \gamma_{1,2}\gamma_{3,4} + \gamma_{1,3}\gamma_{2,4} + \gamma_{1,4}\gamma_{2,3}.$$

L'équation $\Theta = 0$ peut donc, pour t très petit, être remplacée par la suivante :

$$(1) \qquad \xi_1\xi_2\xi_3\xi_4 - \Sigma\gamma_{1,2}\xi_3\xi_4 - \Sigma\gamma_{1,2}\gamma_{3,4} = 0.$$

C'est l'équation d'une variété à trois dimensions dans l'espace à quatre dimensions, si l'on regarde les ξ comme des coordonnées rectangulaires dans cet espace. J'appellerai cette variété V. Elle est algébrique et du quatrième degré; elle admet l'origine comme centre de symétrie.

La variété à trois dimensions qui a pour équation

$$\Theta = 0,$$

si l'on y regarde les u comme des coordonnées rectangulaires dans l'espace à quatre dimensions; cette variété dis-je, jouit, *si la fonction* Θ *est spéciale*, d'une propriété analogue à celle des surfaces de translation distinguées.

Considérons en effet la courbe (variété à une dimension) qui a pour équation

$$u_i = 3v_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Prenons trois points quelconques sur cette courbe; le lieu du centre de gravité de ces trois points sera, d'après les théorèmes de Riemann, la variété $\Theta = 0$.

Nous appellerons donc *variété de translation*, toute variété dont l'équation peut se mettre sous la forme

$$(2) \qquad \xi_i = f_i(t) + f'_i(t') + f''_i(t'') \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

t, t' et t'' étant trois paramètres.

En donnant à deux des paramètres t, t', t'' des valeurs constantes et faisant varier le troisième, on obtiendra trois systèmes de génératrices.

Si les trois fonctions f_i, f'_i, f''_i sont identiques, c'est-à-dire si les génératrices des trois systèmes sont égales et semblablement orientées, la variété sera dite *distinguée*; les trois systèmes de génératrices se confondront en un seul; et la courbe

$$\xi_i = 3f_i(t)$$

s'appellera *directrice*.

Étudions les points à l'infini, considérons une asymptote d'une des génératrices et prenons-la par exemple parallèle à l'axe des ξ_4. Soit t_4 une valeur de t'' telle que

$$f''_4(t_4) = \infty.$$

Posons alors, pour abréger,

$$f''_i(t_4) = a_i \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Nous voyons que, pour $t'' = t_4$, on a

$$(3) \qquad \xi_4 = \infty; \qquad \xi_i = f_i(t) + f'_i(t') + a_i \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Si donc dans l'équation de la variété (2), obtenue en éliminant t, t' et t'' entre les équations (2), on ne considère que les termes du degré le plus élevé en ξ_4 (ce qui revient à faire $\xi_4 = \infty$), on obtiendra une certaine équation en ξ_1, ξ_2, ξ_3 qui sera l'équation d'une surface de translation. Si la variété (2) est distinguée, il en sera de même de cette surface et sa directrice aura pour équation

$$\xi_i = 2f_i(t) + a_i \qquad (i = 1, 2, 3).$$

La variété V doit être de translation, au moins quand la fonction Θ est spéciale, et l'on peut supposer, par conséquent, qu'on ait mis ses équations sous la forme (2).

Donnons alors à t'' une valeur constante qui rende $f''_4(t'')$ infinie. On obtiendra les équations (3) qui (abstraction faite de l'équation $\xi_4 = \infty$) définissent une certaine surface S_4, qui sera de translation.

On obtiendra l'équation de cette surface S_4 en égalant à zéro le coefficient de la plus haute puissance de ξ_4 (c'est-à-dire de ξ_4) dans l'équation (1).

On définirait de la même manière les surfaces S_1, S_2 et S_3. L'équation de la surface S_4, ainsi obtenue, s'écrit

$$(4) \qquad \xi_1\xi_2\xi_3 - \gamma_{23}\xi_1 - \gamma_{13}\xi_2 - \gamma_{12}\xi_3 = 0.$$

C'est la surface que nous avons étudiée dans le numéro précédent.

Nous avons vu que c'était une surface de translation distinguée. Les équations (3) doivent donc être celles d'une surface distinguée, c'est-à-dire que l'on doit avoir

$$f_i = f'_i \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Comme j'aurais pu tout aussi bien raisonner sur f_4 ou f'_4 au lieu de f''_4, que rien ne distingue de f_4 et f'_4, je puis écrire

$$f_i = f'_i = f''_i \qquad (i = 1, 2, 3),$$

et comme j'aurais pu raisonner sur S_1, S_2, S_3 comme sur S_4, nous aurons

$$f_i = f'_i = f''_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

c'est-à-dire que V sera une variété de translation distinguée.

Quelle sera maintenant la nature de sa directrice? La directrice de la surface S_4, qui a pour équation

$$\xi_i = 2 f_i(t) + \alpha_i,$$

est, comme nous l'avons vu, une cubique gauche ayant ses asymptotes parallèles aux axes. Il en sera donc de même de la courbe

$$\xi_i = 3 f_i(t) \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Or, ce qui caractérise une cubique gauche, dont les asymptotes sont parallèles aux axes, c'est que deux quelconques des trois coordonnées sont liées par une relation homographique. Donc, deux quelconques des trois quantités $3f_1(t)$, $3f_2(t)$, $3f_3(t)$, ou (puisque j'aurais pu raisonner sur S_1 aussi bien que sur S_4) deux quelconques des quatre quantités $3f_1(t)$, $3f_2(t)$, $3f_3(t)$, $3f_4(t)$ sont liées par une relation homographique.

Donc la directrice de la variété V est une courbe de l'espace à quatre dimensions, analogue aux cubiques gauches; c'est une *quartique* que j'appellerai Q et dont l'équation est de la forme

$$(5) \qquad \xi_i = \frac{3\beta_i}{t - a_i} + b_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Soient donc

$$(6) \qquad \begin{cases} \xi_i = 3\lambda_1^i & (i = 2, 3, 4), \\ \xi_i = 3\lambda_2^i & (i = 1, 3, 4), \\ \xi_i = 3\lambda_3^i & (i = 1, 2, 4), \\ \xi_i = 3\lambda_4^i & (i = 1, 2, 3), \end{cases}$$

les asymptotes de la quartique Q.

La cubique qui sert de directrice à la surface S_4 aura pour asymptotes

$$\xi_i = 2\lambda_k^i + \lambda_4^i \qquad (i = 1, 2, 3;\ k = 1, 2, 3;\ i \neq k).$$

Or nous connaissons les asymptotes de la directrice de S_4; on peut les déduire de l'analyse du numéro précédent.

J'appellerai $k^{\text{ième}}$ *asymptote* ($k = 1, 2, 3$) de cette directrice celle qui correspond à $\xi_k = \infty$, et j'écrirai la première équation de la première asymptote sous la forme

$$(7) \qquad \xi_2 = \pm\sqrt{-\frac{\gamma_{1,2}\gamma_{2,3}}{\gamma_{1,3}}}.$$

La surface S_4 a deux directrices; le signe $+$ correspond à la première directrice, le signe $-$ à la seconde. Nous prendrons, par exemple, la première directrice et le signe $+$.

Les autres équations de la première asymptote et celles des autres asymptotes se déduiraient de l'équatiou (7) par permutations d'indices.

Nous aurons ainsi six équations analogues à (7); j'appellerai *équation* (k, h) celle des équations de la $k^{\text{ième}}$ asymptote qui donne ξ_h.

On verrait alors que dans l'équatiou (k, h) on doit prendre le signe $+$ si h succède à k dans l'ordre circulaire 1, 2, 3, 1, et le signe $-$ si c'est k qui succède à h.

On a donc

$$(8) \qquad 2\lambda_1^2 + \lambda_4^2 = +\sqrt{-\frac{\gamma_{1,2}\gamma_{2,3}}{\gamma_{1,3}}}$$

avec cinq autres équations analogues.

De ces six équations (8) on déduit d'ailleurs aisément

$$(9) \qquad \begin{cases} \lambda_2^1 + \lambda_3^1 - \lambda_4^1 = 0, \\ \lambda_1^2 - \lambda_3^2 - \lambda_4^2 = 0, \\ \lambda_1^3 - \lambda_2^3 + \lambda_4^3 = 0. \end{cases}$$

On peut, en considérant la directrice de S_1, de S_2, ou de S_3 au lieu de S_4, obtenir trois autres groupes de six équations analogues à (8).

Cela ferait en tout vingt-quatre équations; mais elles ne sont pas toutes distinctes. En effet, les équations (8) peuvent être remplacées par trois d'entre elles et par les trois équations (9). Chacun des quatre groupes de six équations peut être remplacé par trois de ces six équations et par un groupe de trois équations analogues à (9). Mais les quatre groupes de trois équations analogues à (9) ne contiennent en réalité que quatre équations distinctes, à savoir les trois équations (9) et l'équation

$$\lambda_1^4 + \lambda_2^4 + \lambda_3^4 = 0. \tag{9 bis}$$

Il y a donc seulement seize équations distinctes que j'appellerai *les équations* (10).

Il faut dire quelques mots au sujet des radicaux qui entrent dans ces équations. Il semble au premier abord que les six équations (8) contiennent trois radicaux distincts

$$\sqrt{-\frac{\gamma_{1,2}\gamma_{1,3}}{\gamma_{2,3}}}, \quad \sqrt{-\frac{\gamma_{1,2}\gamma_{2,3}}{\gamma_{1,3}}}, \quad \sqrt{-\frac{\gamma_{1,3}\gamma_{2,3}}{\gamma_{1,2}}};$$

mais ils s'expriment tous rationnellement en fonctions des γ et du radical unique

$$\rho_4 = \sqrt{-\gamma_{2,3}\gamma_{1,2}\gamma_{1,3}}.$$

Nous avons donc en tout dans nos équations (10) quatre radicaux ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4 que l'on peut déduire de ρ_4 par permutations d'indices. En réalité, ces quatre radicaux ne sont pas encore distincts; car le produit $\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4$ est égal au produit des six γ et, par conséquent, rationnel. D'ailleurs, il est impossible, si les γ sont regardés comme indépendants, d'exprimer ρ_3, par exemple, en fonction rationnelle de ρ_1, de ρ_2 et des γ.

Si donc on se donne les γ, il faudra encore *se donner* le signe de ρ_1, ρ_2, ρ_3; le signe de ρ_4 s'en déduira.

Nos seize équations (10) peuvent se répartir en quatre groupes de quatre. Le premier groupe contiendra les équations qui définissent les λ_i^1 et qui s'écrivent

$$\left\{\begin{aligned} \lambda_1^1 - \lambda_2^1 + \lambda_3^1 &= 0, \\ 2\lambda_1^1 - \lambda_1^1 &= \frac{\rho_4}{\gamma_{2,3}}, \\ 2\lambda_1^1 - \lambda_2^1 &= \frac{\rho_2}{\gamma_{1,3}}, \\ 2\lambda_2^1 + \lambda_3^1 &= -\frac{\rho_3}{\gamma_{2,3}}. \end{aligned}\right. \tag{11}$$

Voici comment ont été déterminés les signes des seconds membres.

Revenons à l'équation (7); le second membre, en prenant le signe + devant le radical, s'écrit $\frac{\rho_4}{\gamma_{1,2}}$; j'ai donc pris, pour la première équation (8),

$$2\lambda_1^2 + \lambda_1^2 = \frac{\rho_4}{\gamma_{1,2}}. \tag{8 bis}$$

Pour obtenir les cinq autres équations (8), il suffit de permuter les indices 1, 2, 3, de toutes les façons possibles, en conservant le signe + devant le second membre si la permutation appartient au groupe alterné et en lui donnant le signe — dans le cas contraire.

On obtiendra ensuite les trois autres groupes de six équations analogues à (8) en permutant *circulairement* les quatre indices 1, 2, 3, 4. Cette règle pourrait toutefois soulever une difficulté. Quand on permute circulairement 1, 2, 3, 4, pour les changer en 2, 3, 4, 1, le carré ρ_4^2 se change en ρ_1^2; mais on ne sait pas si ρ_4 se change en $+\rho_1$ ou en $-\rho_1$.

Pour tenir compte de cette difficulté j'écrirai la première équation (8), non plus sous la forme (8 *bis*), mais sous la forme

(8 *ter*) $$2\lambda_1^2 + \lambda_4^2 = \frac{\varepsilon_4\rho_4}{\gamma_{1,3}}.$$

où $\varepsilon_4 = \pm 1$ et dans les autres équations (8) je remplacerai de même ρ_4 par $\varepsilon_4\rho_4$. Je ferai ensuite une permutatiou circulaire d'indices, et j'obtiendrai trois autres groupes d'équations analogues à (8) où entreront trois nombres ε_1, ε_2, ε_3, tous égaux à ± 1.

Cela posé, nous avons vu que de nos quatre radicaux ρ, trois sont indépendants; je puis donc prendre arbitrairement le signe de trois d'entre eux; celui du quatrième s'en déduira; de même, je puis prendre arbitrairement le signe de trois des ε, celui du quatrième s'en déduira. Je puis donc faire

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 1.$$

Mais je ne sais pas si ε_1 est égal à $+1$ ou à -1.

C'est ainsi que j'ai obtenu les équations (11). Pour qu'elles soient compatibles, il faut et il suffit que

$$\frac{\rho_1}{\gamma_{2,3}} + \frac{\rho_2}{\gamma_{3,1}} = \frac{\rho_3}{\gamma_{2,4}}$$

ou que

(12) $$\sqrt{\gamma_{1,2}\gamma_{1,3}\gamma_{3,4}\gamma_{2,4}} + \sqrt{\gamma_{1,3}\gamma_{1,4}\gamma_{2,3}\gamma_{2,4}} = \sqrt{\gamma_{1,2}\gamma_{1,4}\gamma_{2,3}\gamma_{3,4}}.$$

Cette condition ne change pas quand on permute circulairement les quatre indices; les quatre groupes d'équations analogues à (11) seront donc compatibles si l'on suppose la condition (12) satisfaite et que l'on prenne $\varepsilon_1 = 1$.

La condition (12) est donc la condition nécessaire et suffisante pour que les seize équations (10) soient compatibles.

On peut encore se demander s'il existe une quartique Q admettant les asymptotes définies par ces seize équations et si la variété de translation distinguée, dont Q est la directrice, est bien la variété V.

Nous savons que les périodes $a_{i,k}$ sont au nombre de $\frac{p(p+1)}{2}$, c'est-à-dire, dans le cas de $p=4$, au nombre de 10. D'un autre côté, le nombre des modules d'une courbe de genre 4 est égal à $3p-3=9$. Il faut donc une condition et une seule pour qu'une fonction Θ de genre 4 soit spéciale; si cette condition unique est remplie, la variété $\Theta=0$ est une variété de translation distinguée.

Si les termes latéraux $a_{i,k}$ $(i \gtrless k)$ sont très petits, cette variété diffère très peu de V; il suffit donc d'une condition pour que V soit une variété de translation distinguée. Or nous venons de voir que, pour que V soit une variété de translation distinguée, il y a une condition nécessaire, c'est la condition (12); donc, comme d'ailleurs l'équation (12) est indécomposable, cette condition sera aussi suffisante.

Nous pouvons donc énoncer les résultats suivants :

1° *Si une fonction Θ n'est pas spéciale, c'est-à-dire si elle ne doit pas son origine à une courbe algébrique de même genre, l'équation $\Theta=0$ ne présente pas, en général, le caractère translatif* qu'elle présente, au contraire, d'après les théorèmes de Riemann si la fonction Θ est spéciale.

2° *Pour qu'une fonction Θ de genre 4 doive son origine à une courbe algébrique de genre 4, il faut et il suffit qu'il y ait une certaine relation entre les périodes $a_{i,k}$.*

Cette relation est transcendante et, en général, assez compliquée. *Mais si les périodes $a_{i,i}$ étant finies, les périodes $a_{i,k}$ $(i \gtrless k)$ sont très petites, cette relation se réduit à*

$$(12\ bis)\qquad \sqrt{a_{1,2}a_{1,3}a_{3,4}a_{2,4}}+\sqrt{a_{1,3}a_{1,4}a_{2,3}a_{2,4}}=\sqrt{a_{1,2}a_{1,4}a_{2,3}a_{3,4}}.$$

Pour l'étude de la variété V, on peut encore raisonner comme il suit :

Reprenons les équations de la quartique Q; la variété dont cette quartique est la directrice aura pour équations

$$(13)\qquad \xi_i=\frac{\beta_i}{t-a_i}+\frac{\beta_i}{u-a_i}+\frac{\beta_i}{v-a_i}+b_i \qquad (i=1, 2, 3, 4),$$

t, u et v étant trois variables auxiliaires.

Soit maintenant P un polynome entier du premier degré par rapport à chacune des quatre variables ζ_i (et, par conséquent, du quatrième degré par rapport à l'ensemble de ces quatre variables). Ce polynome contiendra seize coefficients arbitraires.

Substituons-y à la place des ζ_i leurs valeurs (13); P deviendra une fonction R rationnelle en t, u, v; décomposons cette fonction rationnelle R en éléments simples d'abord par rapport à t, puis par rapport à u, puis par rapport à v. Chaque élément sera le produit d'un coefficient numérique et de trois facteurs. Le premier facteur peut être

$$\frac{1}{t-a_i} \quad (i=1, 2, 3, 4) \qquad \text{ou} \quad 1,$$

le second

$$\frac{1}{u-a_i} \quad (i=1, 2, 3, 4) \qquad \text{ou} \quad 1,$$

le troisième

$$\frac{1}{v-a_i} \quad (i=1, 2, 3, 4) \qquad \text{ou} \quad 1.$$

A ce compte, le développement de R pourrait contenir $5^3=125$ éléments simples; mais il faut observer qu'aucun élément ne peut contenir deux des trois facteurs

$$\frac{1}{t-a_i}, \quad \frac{1}{u-a_i}, \quad \frac{1}{v-a_i},$$

avec le même indice i; le développement de R contient donc seulement soixante-treize éléments simples.

Si l'on observe ensuite que la fonction R doit être symétrique en t, u, v, on voit que plusieurs des coefficients de ces soixante-treize éléments doivent être égaux, de sorte qu'il ne reste que quinze coefficients distincts.

Si j'annule ces quinze coefficients, j'introduirai quinze relations entre les seize coefficients de P, de sorte qu'un de ces seize coefficients reste encore arbitraire.

L'équation de la variété dont Q est directrice sera donc de la forme

$$P=0.$$

Nous avons choisi les axes parallèles aux asymptotes de Q, mais les directions des axes sont seules ainsi déterminées, l'origine reste arbitraire; je puis en disposer de façon à faire disparaître les quatre termes du troisième degré du polynome P.

Je dis que les quatre termes du premier degré auront disparu du même coup.

Posons

$$P = P_4 \xi_4 + P'_4,$$

P_4 et P'_4 étant deux polynomes du premier degré par rapport à chacune des trois variables ξ_1, ξ_2, ξ_3 et, par conséquent, du troisième degré par rapport à l'ensemble de ces trois variables. L'équation $P_4 = 0$ doit être, comme nous l'avons vu plus haut, celle d'une surface de translation distinguée ayant pour équations

$$\xi_i = \frac{\beta_i}{t - a_i} + \frac{\beta_i}{u - a_i} + \frac{\beta_i}{a_4 - a_i} + b_i \qquad (i = 1, 2, 3)$$

et pour directrice

$$\xi_i = \frac{2\beta_i}{t - a_i} + \frac{\beta_i}{a_4 - a_i} + b_i.$$

C'est donc, d'après le paragraphe précédent, une surface à centre et, comme les termes du deuxième degré (qui donnent dans P des termes du troisième degré) manquent par suite du choix de l'origine, le centre ne peut être qu'à l'origine. Le terme de degré zéro doit donc manquer également.

Donc le terme en ξ_4 manque dans P, et l'on démontrerait de même que les autres termes du premier degré manquent également.

Le polynome P ne contient donc que des termes de degré pair et nous pouvons écrire

$$P = \xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4 + \Sigma \gamma_{12} \xi_3 \xi_4 + \delta.$$

Le polynome P contient donc encore sept coefficients, à savoir δ et les six γ.

L'équation de la quartique Q contient douze arbitraires, à savoir les quatre a_i, les quatre β_i et les quatre b_i; mais nous pouvons faire subir à t un changement linéaire en posant

$$t = \frac{\lambda t' + \mu}{\lambda_1 t' + \mu_1},$$

λ, μ, λ_1, μ_1 étant des constantes quelconques que nous pouvons choisir de telle façon que a_1, a_2 et a_3 aient des valeurs données; il reste $12 - 3 = 9$ arbitraires; de plus, nous avons choisi une origine particulière, ce qui revient à attribuer aux quatre b_i des valeurs particulières. Il reste donc $9 - 4 = 5$ arbitraires. Il faut donc $7 - 5 = 2$ conditions pour que $P = 0$ soit une variété admettant une quartique pour directrice.

L'une de ces conditions nous est déjà connue, c'est la condition (12). Nous savons, d'autre part, quand cette condition est remplie, déterminer les asymptotes de la quartique Q. C'est ce que les équations (10) nous permettent de faire.

Ces équations nous donnent en effet les λ en fonction des γ. Dans les équations (10) entrent trois irrationalités : nous avons en effet quatre radicaux ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4 dont le produit est rationnel, mais qui sont d'ailleurs indépendants. Mais, si l'on introduit entre les γ la relation (12), cette indépendance cesse. En tenant compte de la relation (12) on peut exprimer rationnellement, en fonction des γ, les produits des ρ_i deux à deux.

On obtiendra donc les λ en fonctions rationnelles des γ et de l'un des ρ, et l'on en déduira sous la même forme la valeur de a_4, celles des β_i et celles des b_i.

Toutes les constantes qui entrent dans les formules (13) sont alors déterminées en fonction des γ.

Substituons alors à la place des ξ_i leurs valeurs (13) dans l'équation $P = 0$; nous trouverons une équation qui nous donnera δ, et la valeur de δ ainsi trouvée devra être indépendante de t, u et v et dépendre seulement des γ.

On peut faire ce calcul en donnant à t, u, v des valeurs arbitraires ; mais le plus simple est de prendre $t = u = v$; le point qui correspond à $t = u = v$ est un point de la directrice. Voici comment on pourra diriger le calcul :

Nous pouvons, comme je l'ai dit plus haut, remplacer, dans les équations de la quartique Q, la variable t par une autre variable t' liée à la première par une relation homographique. Le plus simple est de prendre

$$t = \xi_4.$$

Les équations de la quartique Q se réduisent à

$$\xi_i = \frac{\delta\beta_i}{\xi_4 - a_i} + b_i. \tag{14}$$

Substituons les valeurs (14) dans l'équation $P = 0$; nous obtiendrons une équation qui nous donnera δ. La valeur trouvée devra être indépendante de ξ_4.

Supposons ξ_4 très grand et développons ξ_i suivant les puissances décroissantes de ξ_4, il viendra

$$\xi_i = b_i + \frac{\delta\beta_i}{\xi_4} + \ldots.$$

Substituons ces développements à la place de ξ_1, ξ_2, ξ_3.

Dans P, nous obtiendrons un développement procédant suivant les puissances décroissantes de ξ_4, et commençant par un terme en ξ_4; le premier terme du développement est

$$\xi_4[b_1 b_2 b_3 + b_1 - b_2 - b_3]$$

et le second

$$\begin{aligned}3\beta_1(b_2 b_3 - \gamma_{2,3}) + 3\beta_2(b_1 b_3 - \gamma_{1,3}) + 3\beta_3(b_1 b_2 - \gamma_{1,2})\\ - \gamma_{1,4} b_2 b_3 - \gamma_{2,4} b_1 b_3 - \gamma_{3,4} b_1 b_2 + \delta.\end{aligned}$$

Ces deux termes doivent s'annuler; le premier s'annule de lui-même quand on y remplace les β et les b par leurs valeurs en fonction des γ; en égalant le second à zéro, on aura une équation qui donnera δ.

On trouve aisément

$$\beta_i = -3\gamma_{i,4};$$

on obtient aussi, sans peine, les expressions des b_i et, en tenant compte de (12), on a finalement

$$(15) \qquad \delta = \gamma_{1,2}\gamma_{3,4} + \gamma_{1,3}\gamma_{2,4} - \gamma_{1,4}\gamma_{2,3}.$$

Les conditions (12) et (15) sont donc les deux conditions nécessaires pour que $P = 0$ soit l'équation de la variété dont Q est la directrice.

On peut, d'après ce qui précède, obtenir les λ en fonctions rationnelles des γ et de l'un des ρ, et comme ρ est susceptible de deux valeurs égales et de signe contraire, on trouvera pour chacun des λ deux valeurs.

La variété V admet donc deux directrices Q et elle sera, de deux manières différentes, une variété de translation distinguée.

Par raison de symétrie, il est évident qu'on passera d'une des directrices à l'autre en changeant ξ_i en $-\xi_i$.

Ce résultat ne doit pas nous surprendre; et en effet la variété

$$\Theta = 0$$

est aussi, de deux manières différentes, une variété distinguée et elle admet deux directrices qui ont respectivement pour équations

$$u_i = +3v_i, \qquad u_i = -3v_i.$$

Les mêmes considérations peuvent être étendues au cas de $p > 4$.

Le nombre des quantités $a_{i,k}$ est égal à

$$\frac{p(p+1)}{2}.$$

Celui des modules d'une courbe de genre p est $3p-3$.

Pour qu'une fonction Θ soit spéciale, il faut donc

$$\frac{p(p+1)}{2} - 3p + 3 = \frac{(p-2)(p-3)}{2}$$

conditions.

Supposons maintenant les termes latéraux très petits, u_i très voisin de x_i et posons

$$u_i = x_i + t\xi_i, \qquad a_{i,k} = t^2\gamma_{i,k}.$$

Conservons seulement dans le développement de Θ le premier terme qui est en t^p et négligeons les suivants.

L'équation $\Theta = 0$ devient alors celle d'une variété algébrique que j'appelle V et qui est de degré p; le premier membre de l'équation de V contient

$$\frac{p(p-1)}{2}$$

indéterminées qui sont les γ.

Si V est une variété de translation, ce sera une variété de translation distinguée et les équations de sa directrice seront de la forme

$$(16) \qquad \xi_i = \frac{t^2\beta_i}{t-\alpha_i} + b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

Les équations (16) contiennent $3p$ indéterminées qui sont les β, les α et les b. Si j'exprime que la variété dont la courbe (16) est la directrice admet l'origine pour centre, j'aurai déterminé les b et il me restera $2p$ indéterminées. D'autre part, je puis choisir le paramètre t de telle façon que α_1, α_2, α_3 aient telles valeurs que je veux. Il me reste encore $2p-3$ arbitraires. Donc, pour que V soit une variété distinguée, il faut

$$\frac{p(p-1)}{2} - (2p-3) = \frac{(p-2)(p-3)}{2}$$

conditions.

C'est le même nombre que plus haut. Quelles sont ces conditions? On voit d'abord que la condition (12) doit encore être remplie, ainsi que toutes celles qu'on en peut déduire par permutations d'indices. Le nombre des conditions ainsi obtenues est égal au nombre des combinaisons de p lettres 4 à 4. Ce nombre est plus grand que $\frac{(p-2)(p-3)}{2}$, d'où il suit que ces conditions ne sont pas toutes distinctes.

XII. — Cas voisins des cas singuliers abéliens.

Soit $p = 3$, et considérons la fonction Θ.

Si

$$a_{1,3} = a_{2,3} = 0,$$

on tombe sur le cas singulier abélien et l'on a

$$\Theta = \theta\theta_3,$$

θ étant une fonction Θ de genre 2 de u_1 et de u_2, et θ_3 une fonction Θ elliptique de u_3.

Supposons maintenant que $a_{1,3}$ et $a_{2,3}$ ne soient pas nuls, mais très petits, de façon qu'on se trouve dans un cas voisin du cas abélien. Posons

$$u_3 = \alpha + t\xi, \qquad a_{i,3} = t\gamma_i,$$

t étant un paramètre très petit, et développons suivant les puissances de t; il viendra, en négligeant t^2,

$$\Theta = t\theta'_3\left(\theta\xi - \gamma_1\frac{d\theta}{du_1} - \gamma_2\frac{d\theta}{du_2}\right).$$

Je désigne par θ'_3 ce que devient $\frac{d\theta_3}{du_3}$ quand on y remplace u_3 par α_3.

L'équation $\Theta = 0$ se réduit à

$$(1) \qquad \xi = \frac{\gamma_1}{\theta}\frac{d\theta}{du_1} + \frac{\gamma_2}{\theta}\frac{d\theta}{du_2}.$$

Si l'on regarde ξ, u_1, u_2 comme des coordonnées rectangulaires, l'équation (1) doit être celle d'une surface de translation.

Nous avons vu plus haut à plusieurs reprises, et notamment au paragraphe VI, qu'une génératrice d'une surface de translation

$$z = f(x, y)$$

doit avoir pour équation

$$\gamma = \alpha \frac{df}{dx} + \beta \frac{df}{dy},$$

α, β, γ étant des constantes.

Si donc nous posons

$$\frac{d^2 \log \theta}{du_1^2} = \mathrm{R}, \qquad \frac{d^2 \log \theta}{du_1\, du_2} = \mathrm{S}, \qquad \frac{d^2 \log \theta}{du_2^2} = \mathrm{T},$$

nous aurons pour l'équation d'une génératrice de la surface (1),

$$\beta = \alpha_1 \gamma_1 \mathrm{R} + (\alpha_2 \gamma_1 + \alpha_1 \gamma_2) \mathrm{S} + \alpha_2 \gamma_2 \mathrm{T},$$

α_1, α_2 et β étant trois constantes.

Ou bien

$$(2) \qquad \alpha_1 \gamma_1 \mathrm{R} \theta^2 + (\alpha_2 \gamma_1 + \alpha_1 \gamma_2) \mathrm{S} \theta^2 + \alpha_2 \gamma_2 \mathrm{T} \theta^2 - \beta \theta^2 = 0.$$

Or $\mathrm{R}\theta^2$, $\mathrm{S}\theta^2$, $\mathrm{T}\theta^2$, θ^2 sont des fonctions θ de genre 2 et du second ordre ayant mêmes multiplicateurs, appartenant, par conséquent, au même faisceau (toutes ces fonctions sont paires).

Il en est donc de même du premier membre de (2), que j'appellerai

$$\varphi(u_i).$$

Notre génératrice a donc pour équation

$$\varphi(u_i) = 0.$$

Une autre génératrice aura pour équation

$$(3) \qquad \varphi'(u_i) = 0,$$

φ' étant une fonction θ ayant mêmes multiplicateurs que φ. Mais, comme elle doit être égale à l'autre génératrice, elle devra aussi avoir pour équation

$$(4) \qquad \varphi(u_i - h_i) = 0,$$

h_1 et h_2 étant deux constantes. Or les fonctions $\varphi'(u_i)$ et $\varphi(u_i - h_i)$ n'ont pas mêmes multiplicateurs ; elles ne peuvent donc être identiques, d'où il résulte que les deux courbes (3) et (4) ne peuvent avoir une partie commune qu'à la condition de se décomposer.

Donc $\varphi'(u_i)$, $\varphi(u_i - h_i)$ et $\varphi(u_i)$ doivent se décomposer en deux facteurs, et l'on aura

$$\varphi(u_i) = c\,\theta(u_i - e_i)\,\theta(u_i + e_i).$$

c, e_1 et e_2 étant trois constantes. On obtiendra une génératrice en annulant l'un des deux facteurs, c'est-à-dire en faisant $u_i = v_i \pm e_i$; je dirai en faisant $u_i = v_i + e_i$, ce qui ne restreint pas la généralité, puisque rien ne distingue e_i de $-e_i$.

Donnons de tout cela une interprétation géométrique. Si R, S et T sont trois coordonnées rectangulaires, le point (R, S, T) sera sur une surface de Kummer; l'équation (2) représentera un plan et pour que la fonction η se décompose, il faut que ce plan soit un plan tangent.

Les génératrices de la surface (1) correspondront donc aux intersections de la surface de Kummer par ses plans tangents, ou plutôt à quelques-unes d'entre elles.

Observons que le plan défini par l'équation (2) est parallèle à la droite

$$(5) \qquad \gamma_1 R + \gamma_2 S = 0, \qquad \gamma_1 S + \gamma_2 T = 0.$$

Les courbes qui, sur la surface de Kummer, correspondent aux génératrices de la surface (1) *sont donc les intersections de cette surface de Kummer avec les plans tangents qui lui sont menés parallèlement à la droite* (5).

La droite (5) se trouve sur le cône du second degré

$$(6) \qquad RT - S^2 = 0.$$

Le plan $\eta = 0$ défini par l'équation (2) est donc tangent à la surface de Kummer en un point M dont les arguments abéliens u_1 et u_2 seront définis par les équations

$$\theta(u_i - e_i) = 0, \qquad \theta(u_i - e_i) = 0.$$

Il est tangent en outre au cylindre N qui est circonscrit à la surface et dont les génératrices sont parallèles à la droite (5).

Au point M je ferai correspondre le point M' qui a pour arguments abéliens e_1 et e_2 augmentés d'une des dix demi-périodes qui n'annulent pas Θ. Voici quelle en est la signification.

La surface de Kummer est sa propre polaire réciproque par rapport à une quadrique convenablement choisie (et cela de dix manières différentes). Le point M' sera, d'une de ces dix manières, le réciproque du plan (2), et quand le plan (2) enveloppera le cylindre N, le point M' décrira une certaine courbe plane Q dont le plan sera le réciproque du point à l'infini défini par les équations (5).

Étudions cette courbe Q.

Supposons que l'on ait mis les équations de la surface (1) sous la forme translative

$$u_i = f_i(t) + f_i'(t').$$

On aura l'équation d'une génératrice en donnant, soit à t soit à t', une valeur constante; mais nous avons trouvé pour l'équation d'une génératrice

$$\theta(u_i - e_i) = 0,$$

d'où

$$u_i = v_i + e_i.$$

On aura donc, si la génératrice a été obtenue en faisant $t' = \text{const.}$,

$$f_i(t) - v_i = e_i - f_i'(t') = \text{const.}$$

On trouverait de même, en considérant la génératrice obtenue en faisant $t = \text{const.}$,

$$f_i'(t') - v_i' = \text{const.},$$

d'où

$$u_i = f_i(t) + f_i'(t') = v_i + v_i' + \text{const.};$$

j'appellerai k_i la constante du second membre et j'écrirai

$$u_i = v_i + v_i' + k_i,$$

d'ou

$$e_i = v_i' + k_i.$$

Or la courbe Q a pour équation

$$u = e_i + \varpi_i,$$

ϖ_i étant une demi-période. Cette équation peut s'écrire

$$u_i = v' + k_i + \varpi_i.$$

$k_i + \varpi_i$ est une constante, v_i' est une fonction de x', x' étant un des points de la courbe C.

Donc la courbe Q est plane et son plan doit être tangent à la surface de Kummer.

Le point à l'infini dans la direction (5) qui est le réciproque de ce plan, doit se trouver sur cette surface.

La conique à l'infini, définie par l'équation (6), est donc sur la surface; c'est donc une des seize coniques singulières de la surface.

Pour achever l'étude des génératrices, reprenons la surface

$$(1) \qquad \xi = \frac{\varphi_1}{\theta}\frac{d\theta}{du_1} + \frac{\varphi_2}{\theta}\frac{d\theta}{du_2} = \Phi(u_i).$$

On obtiendra l'équation complète d'une génératrice en adjoignant à l'équation (1) l'équation

$$(7) \qquad \theta(u_i - e_i) = 0,$$

d'où l'on tire

$$u_i = v_i - e_i, \qquad \xi = \Phi(v_i + e_i).$$

Une autre génératrice aura pour équations

$$u_i = v_i - e'_i, \qquad \xi = \Phi(v_i + e'_i),$$

et, comme elles doivent être égales, on devra avoir

$$\Phi(v_i + e'_i) - \Phi(v_i + e_i) = k,$$

k étant une constante. Posons donc

$$\psi(u_i) = \Phi(e'_i + u_i) - \Phi(e_i + u_i) - k.$$

La fonction $\psi(u_i)$ est évidemment une fonction abélienne qui a pour dénominateur

$$\theta(u_i + e_i)\,\theta(u_i + e'_i).$$

Le numérateur doit évidemment être une fonction θ du deuxième ordre appartenant au même faisceau que le dénominateur.

D'autre part, le numérateur doit s'annuler pour $u_i = v_i$, c'est-à-dire pour $\theta(u_i) = 0$.

Il se décompose donc en deux facteurs : un de ces facteurs doit être $\theta(u_i)$ et il est aisé d'en déduire l'autre facteur. On aura donc

$$(8) \qquad \psi(u_i) = \frac{M\,\theta(u_i)\,\theta(u_i + e_i + e'_i)}{\theta(u_i + e_i)\,\theta(u_i + e'_i)},$$

M étant un facteur constant.

L'étude de cette identité conduirait sans doute à des résultats intéressants, mais je ne l'entreprendrai pas ; cela m'entrainerait trop loin.

Je me bornerai à résumer cette discussion ; pour avoir les équations des génératrices, on posera

$$u_i = v_i + v_i' - k_i,$$

k_i étant la constante définie plus haut; si sur la courbe C on envisage deux points x et x', l'intégrale v_i sera fonction de x et l'intégrale v_i' de x' ; on obtiendra alors toutes les génératrices en faisant, soit $x =$ const., soit $x' =$ const. On voit en même temps que la surface (1) est une surface de translation distinguée.

La conique définie par l'équation (6) est l'une des coniques singulières de la surface de Kummer et comme elle est rejetée à l'infini, si l'on considère R, S et T comme des coordonnées rectangulaires, elle est dans le plan

$$\theta^2 = 0.$$

Son équation se réduit donc à $u_i = v_i$, c'est-à-dire que, au point à l'infini dans la direction (5), on doit avoir

$$u_i = -v_i^0,$$

x_0 étant un point fixe de C et v_i^0 la valeur correspondante de l'intégrale v_i (je pourrais aussi bien écrire $u_i = +v_i^0$, car l'équation $\theta = 0$ est aussi bien équivalente à $u_i = +v_i$ qu'à $u_i = -v_i$).

D'autre part, l'équation de notre génératrice sera

$$u_i = v_i - v_i'.$$

La courbe qui correspond à cette génératrice sur la surface de Kummer devra passer par le point à l'infini dans la direction (5), puisque cette courbe est l'intersection à la surface avec un plan tangent passant par ce point.

Il existera donc sur la courbe C un point x_2, tel que

$$v_i^2 - v_i = -v_i^0 \qquad [v_i^2 = v_i(x_2)].$$

Il existera aussi sur C un point x', tel que

$$v_i' = -v_i^2 \qquad [v_i' = v_i(x')].$$

La courbe C est une courbe plane du quatrième degré à point double; la droite qui joint x' à x_2 va passer par ce point double. Il vient alors

$$v_i = v_i' - v_i^0$$

et pour l'équation de notre génératrice

$$u_i = v_i + v_i' - v_i''.$$

La quantité que nous avons appelée plus haut k_i est donc égale à $-v_i''$.

Soit maintenant $p = 4$ et considérons une fonction Θ spéciale. Si l'on avait

$$a_{1,4} = a_{2,4} = a_{3,4} = 0,$$

Θ serait le produit d'une fonction de genre 3 et d'une fonction de genre 1, et l'on aurait

$$\Theta = \theta\theta_4,$$

θ dépendant de u_1, u_2, u_3 et θ_4 de u_4.

Supposons maintenant que $a_{1,4}$, $a_{2,4}$, $a_{3,4}$ ne soient pas nuls, mais très petits, de façon qu'on se trouve dans un cas voisin du cas abélien. Posons

$$(9) \qquad u_4 = \alpha_4 + t\xi, \qquad a_{i,4} = t\gamma_i$$

et développons Θ en négligeant t^2, il viendra

$$\Theta = t\theta_4'\left(\theta\xi - \gamma_1 \frac{d\theta}{du_1} - \gamma_2 \frac{d\theta}{du_2} - \gamma_3 \frac{d\theta}{du_3}\right).$$

L'équation $\Theta = 0$ se réduit à

$$(10) \qquad \xi = \frac{\gamma_1}{\theta}\frac{d\theta}{du_1} + \frac{\gamma_2}{\theta}\frac{d\theta}{du_2} + \frac{\gamma_3}{\theta}\frac{d\theta}{du_3} = F(u_1, u_2, u_3);$$

ce doit être l'équation d'une variété de translation.

Mettons les équations de cette variété sous forme translative

$$u_i = f_i(t) - f_i'(t') - f_i''(t'') \qquad (i = 1, 2, 3),$$
$$\xi = f_4(t) - f_4'(t') - f_4''(t'').$$

t, t', t'' sont trois variables auxiliaires qui n'ont rien de commun, d'ailleurs, avec la variable t qui entre dans les équations (9). On obtiendrait une génératrice en donnant à t' et à t'' des valeurs constantes; si l'on donne à t'' seulement une valeur constante, on obtiendra un faisceau de génératrices dont l'équation peut être mise sous la forme suivante. Soit, pour cette valeur constante de t'',

$$\frac{df_i}{dt} = \beta_i,$$

les β_i seront des constantes.

L'équation du faisceau de génératrices pourra s'écrire

$$(11) \qquad \beta_1 \frac{dF}{du_1} + \beta_2 \frac{dF}{du_2} + \beta_3 \frac{dF}{du_3} - \beta_4 = 0.$$

Or

$$\theta^2, \qquad \frac{dF}{du_1}\theta^2, \qquad \frac{dF}{du_2}\theta^2, \qquad \frac{dF}{du_3}\theta^2$$

sont des fonctions θ qui ont mêmes multiplicateurs. Le produit du premier membre de (11) par θ^2 sera donc une fonction χ ayant mêmes multiplicateurs que θ^2. L'équation (11) devient donc

$$\chi(u_i) = 0.$$

Un autre faisceau de génératrices devrait avoir pour équation

$$\chi'(u_i) = 0,$$

χ' ayant mêmes multiplicateurs que χ. D'autre part, il devrait avoir pour équation

$$\chi(u_i + k_i) = 0,$$

les k_i étant des constantes. Il en résulte que χ doit se décomposer et qu'on doit avoir

$$\chi = \theta(u_i - e_i)\,\theta(u_i + e_i).$$

Comme rien ne distingue e_i de $-e_i$, je puis dire que l'équation d'un faisceau de génératrices s'écrit

$$(12) \qquad \theta(u_i - e_i) = 0.$$

On déduit de là

$$(13) \qquad u_i = v_i + v_i' + e_i$$

ou bien

$$(14) \qquad u_i = -v_i'' - v_i''' + e_i.$$

v_i, v_i', v_i'', v_i''' sont les valeurs de l'intégrale v_i qui correspondent à quatre points de la courbe C, que j'appelle x, x', x'', x'''.

On voit ainsi que la surface (12) est de deux manières différentes une surface de translation, et que ces deux manières sont définies respectivement par les équations (13) et (14).

D'autre part, on peut écrire les équations de la surface (12) sous la forme

$$u_i = f_i(t) + f_i'(t') + f_i''(t''), \tag{15}$$

où t'' et, par conséquent, $f_i''(t'')$ sont des constantes.

On peut alors faire trois hypothèses

Ou bien les équations (15) sont équivalentes aux équations (13), c'est-à-dire que l'on a

$$f_i(t) = v_i + \text{const.}, \qquad f_i'(t') = v_i' + \text{const.}$$

Ou bien les équations (15) sont équivalentes aux équations (14), c'est-à-dire que l'on a

$$f_i(t) = -v_i'' + \text{const.}, \qquad f_i'(t') = -v_i''' + \text{const.}$$

Ou enfin les équations (15) définissent une troisième manière pour la surface (12) d'être de translation.

Cette troisième hypothèse doit être rejetée; on pourrait sans doute démontrer que la surface (12) ne peut être de translation que de deux manières. Mais on peut se dispenser de cette vérification.

Rappelons-nous en effet notre point de départ. Nous avons envisagé d'abord une fonction Θ spéciale de genre 4. L'équation

$$\Theta = 0$$

représente alors une variété de translation dont les génératrices ont pour équations

$$u_i = v_i + \text{const.},$$

v_i étant une des intégrales abéliennes de première espèce afférentes à la courbe C de genre 4 qui engendre la fonction spéciale Θ.

Nous avons supposé ensuite que $a_{1,4}$, $a_{2,4}$, $a_{3,4}$ étaient des infiniment petits et, négligeant des termes d'ordre supérieur, nous avons réduit l'équation $\Theta = 0$ à la forme (10).

Mais, quand $a_{1,4}$, $a_{2,4}$, $a_{3,4}$ s'annulent, la courbe C qui était de genre 4 se décompose en deux autres, l'une de genre 3 correspondant à la fonction θ, l'autre de genre 1 correspondant à la fonction θ_4.

Rappelons-nous que θ dépend seulement de u_1, u_2, u_3 et θ_4 de u_4.

La variété $\Theta = 0$ reste de translation et l'équation de ses génératrices conserve la forme

$$u_i = v_i + \text{const.}$$

Si $i = 1$, 2 ou 3, v_i devra être l'une des intégrales abéliennes de première espèce qui se rapportent à l'une des composantes de la courbe C, à celle qui est de genre 3 et qu'engendre la fonction θ.

Ainsi la variété (10) peut être regardée comme de translation et de telle façon que ses génératrices aient pour équations

$$u_i = v_i + \text{const.}$$

La première hypothèse est donc réalisée.

Observons en passant que la seconde l'est également. En effet, la variété $\Theta = 0$ est *de deux manières différentes* une variété de translation. De la première manière ses génératrices ont pour équations

$$u_i = v_i + \text{const.}$$

De la seconde manière elles ont pour équations

$$u_i = -v_i + \text{const.}$$

A la limite, la variété (10) sera de translation de deux manières différentes. De la première manière ses génératrices ont pour équations

$$u_i = v_i + \text{const.} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

De la seconde elles ont pour équations

$$u_i = -v_i + \text{const.}$$

Nous nous en tiendrons à la première manière.

Alors les équations de la variété (10), mises sous forme translative, s'écriront

$$u_i = v_i + v'_i + v''_i + k_i \qquad (i = 1, 2, 3),$$
$$\xi = f_i(x) + f'_i(x') + f''_i(x'').$$

Les k_i sont des constantes: x, x', x'' sont trois points de la courbe C de genre 3 qui engendre θ; v_i, v'_i, v''_i sont les valeurs correspondantes de l'intégrale de première espèce v_i.

Puisque l'on a d'autre part

$$u_i = v_i + v'_i + e_i.$$

on aura donc

$$e_i = v''_i + k_i.$$

Comme rien ne distingue le point x'' du point x, nous pouvons supprimer les accents et écrire

$$e_i = v_i + k_i. \tag{16}$$

Nous avons dit plus haut que le premier membre de l'équation (11) peut se décomposer en deux facteurs et s'écrire

$$\theta(u_i - e_i)\,\theta(u_i + e_i).$$

Mais ce produit peut se mettre sous une forme particulière.

Posons, pour plus de symétrie dans les notations,

$$\theta^2(u_i) = \zeta_1(u_i).$$

Je désignerai d'autre part par $\zeta_k(u_i)$, ($k = 2, 3, \ldots, 7$) les six dérivées secondes de $\log\theta$ multipliées par $\theta^2(u_i)$.

Par exemple $\zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$ seront formées avec les dérivées secondes prises deux fois respectivement par rapport à u_1, à u_2 et à u_3; $\zeta_5, \zeta_6, \zeta_7$ seront formées avec les dérivées secondes prises respectivement par rapport à u_2 et u_3, à u_1 et u_3, à u_1 et u_2.

Les fonctions $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_7$ ont mêmes multiplicateurs et appartiennent au même faisceau.

Soit ζ_8 une huitième fonction quelconque linéairement indépendante des premières et appartenant aussi au même faisceau.

On démontre que

$$\theta(u_i - e_i)\,\theta(u_i + e_i) = \zeta_1(u_i)\zeta'_1(e_i) + \zeta_2(u_i)\zeta'_2(e_i) + \ldots + \zeta_8(u_i)\zeta'_8(e_i). \tag{17}$$

Les fonctions $\zeta'_1, \zeta'_2, \ldots, \zeta'_8$ sont des combinaisons linéaires de $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_8$; ce sont donc encore des fonctions appartenant au même faisceau que θ^2.

Quand on fait là-dedans

$$e_i = v_i + k_i,$$

l'expression (17) doit (à un facteur constant près qui, étant arbitraire, peut être supposé égal à 1) se réduire au premier membre de (11) multiplié par θ^2.

Or

$$\theta^2 \frac{dF}{du_1} = \gamma_1\zeta_2 + \gamma_2\zeta_7 + \gamma_3\zeta_6,$$

$$\theta^2 \frac{dF}{du_2} = \gamma_1\zeta_7 + \gamma_2\zeta_3 + \gamma_3\zeta_5,$$

$$\theta^2 \frac{dF}{du_3} = \gamma_1\zeta_6 + \gamma_2\zeta_5 + \gamma_3\zeta_4.$$

On a donc, pour $e_i = v_i + k_i$,

$$\zeta'_8 = 0, \quad \zeta'_2 = \beta_1\gamma_1, \quad \zeta'_3 = \beta_2\gamma_2, \quad \zeta'_4 = \beta_3\gamma_3,$$
$$\zeta'_5 = \beta_2\gamma_3 + \beta_3\gamma_2, \quad \zeta'_6 = \beta_1\gamma_3 + \beta_3\gamma_1, \quad \zeta'_7 = \beta_1\gamma_2 + \beta_2\gamma_1,$$

d'où

$$(18) \quad \begin{cases} \gamma_2^2\zeta'_2 - \gamma_1\gamma_2\zeta'_7 + \gamma_1^2\zeta'_3 = 0, \\ \gamma_3^2\zeta'_3 - \gamma_2\gamma_3\zeta'_5 + \gamma_2^2\zeta'_4 = 0, \\ \gamma_1^2\zeta'_4 - \gamma_3\gamma_1\zeta'_6 + \gamma_3^2\zeta'_2 = 0. \end{cases}$$

D'après le paragraphe V, quand on fait $e_i = v_i + k_i$, il y a

$$n^p + p - np - 1$$

fonctions du faisceau qui s'annulent identiquement. Ici $n = 2$, $p = 3$; il y a donc dans le faisceau quatre fonctions linéairement indépendantes qui s'annulent identiquement. Ces quatre fonctions doivent être ζ'_8 et les premiers membres des trois équations (18).

Nous définirons donc les trois constantes k_1, k_2, k_3 par la condition suivante :

$$\zeta'_8(v_i + k_i)$$

devra être nul quel que soit le point x de la courbe C auquel correspond l'intégrale v_i.

L'ensemble des valeurs de k_1, k_2, k_3 formera une certaine variété.

Cette variété ne peut avoir trois dimensions; sans cela ζ'_8 devrait être identiquement nul, ce qui ne peut avoir lieu. En effet, nous avons désigné par $\theta(u)$ la fonction

$$\sum e^{m_1u_1 + m_2u_2 + m_3u_3 + P},$$

où P est une certaine forme quadratique par rapport aux m_i dont les coefficients dépendent des périodes.

Considérons maintenant les séries

$$(19) \quad \sum e^{m_1u_1 + m_2u_2 + m_3u_3 + \frac{1}{2}P},$$

où je ne donnerai à m_1 que des valeurs paires ou que des valeurs impaires; de même je ne donnerai à m_2 que des valeurs paires, ou seulement des valeurs impaires; de même pour m_3.

Cela fait deux hypothèses pour m_1, deux pour m_2, deux pour m_3; en tout $2^3 = 8$ hypothèses. On peut donc former huit séries (19). Ce sont des fonctions θ du deuxième ordre ayant mêmes multiplicateurs.

Je les désignerai par

$$\eta_1, \quad \eta_2, \quad \ldots, \quad \eta_8.$$

On a alors

$$\theta(u_i - e_i)\theta(u_i + e_i) = \eta_1(u_i)\eta_1(e_i) + \eta_2(u_i)\eta_2(e_i) + \ldots + \eta_8(u_i)\eta_8(e_i).$$

Les $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_8$ s'exprimeront linéairement à l'aide des ζ et l'on aura

$$(19) \qquad \eta_k = G_{1,k}\zeta_1 + G_{2,k}\zeta_2 + \ldots + G_{8,k}\zeta_8$$

et l'on déduit de là

$$(20) \qquad \zeta'_8(e_i) = G_{8,1}\eta_1(e_i) + G_{8,2}\eta_2(e_i) + \ldots + G_{8,8}\eta_8(e_i).$$

Il ne peut pas arriver que l'on ait à la fois

$$G_{8,1} = G_{8,2} = \ldots = G_{8,8} = 0,$$

sans quoi les équations (19) montreraient que les η_k ne sont pas linéairement indépendants, ce qui n'a pas lieu.

Il ne peut pas arriver non plus, que les huit constantes $G_{8,k}$ n'étant pas nulles à la fois, ζ'_8 soit identiquement nul, sans quoi l'équation (20) exprimerait à son tour que les η_k ne sont pas linéairement indépendants.

Ainsi la variété formée par les k_i ne peut pas avoir trois dimensions : elle ne peut pas non plus en avoir deux.

Pour qu'elle en eût deux, il faudrait que les deux équations

$$\zeta'_8(v_i^0 + k_i) = 0, \qquad \zeta'_8(v_i^1 + k_i) = 0$$

(où v_i^0 et v_i^1 sont deux valeurs particulières de v_i) fussent identiques, ou au moins que les deux premiers membres de ces deux équations se décomposassent en plusieurs facteurs et qu'un facteur fût commun à ces deux premiers membres. Il faudrait donc que, si

$$\varphi(v_i^0 + k_i)$$

est ce facteur, ce facteur ne changeât pas quand on y remplace v_i^0 par une autre valeur de v_i.

Cela est évidemment impossible.

Supposons donc maintenant que la variété des k_i ait une dimension seulement. Nous regarderons par conséquent k_1, k_2 et k_3 comme des fonctions d'une variable unique que j'appellerai z. Comme les e_i dépendent de x, les $e_i + k_i$ sont des fonctions de x et de z.

Il y a, d'après ce que nous avons vu, trois combinaisons linéaires de ζ'_1, ζ'_2, …, ζ'_7 qui sont identiquement nulles quand on y remplace les e_i par $e_i + k_i$; expliquons le sens de cette proposition; si je regarde un instant z comme une constante, les k_i seront aussi des constantes; mais e_i dépendant de x, quand on aura remplacé e_i par $e_i + k_i$, les ζ' deviendront aussi des fonctions de x; il y aura entre ces sept fonctions de x trois relations linéaires à coefficients constants. Mais je veux dire par là que ces coefficients ne dépendent pas de x; ils dépendront, au contraire, de z.

Ces trois relations linéaires doivent être les équations (18). Nous voyons donc que $\gamma_1^2, \gamma_1\gamma_2, \gamma_2^2, \gamma_3^2, \ldots$ sont des fonctions de z.

Si l'on élimine z entre ces équations, on obtiendra une relation entre $\frac{\gamma_1}{\gamma_2}$ et $\frac{\gamma_1}{\gamma_3}$. *C'est cette relation qui exprime que la fonction Θ est spéciale.*

Il reste encore à examiner deux hypothèses; on pourrait supposer que la variété des k_i a zéro dimensions; c'est-à-dire que les k_i peuvent prendre un ou plusieurs systèmes déterminés de valeurs. Alors, en raisonnant comme nous venons de le faire, on verrait que les rapports $\frac{\gamma_1}{\gamma_2}$, $\frac{\gamma_1}{\gamma_3}$ devraient prendre aussi des valeurs déterminées. Cela ferait donc deux conditions nécessaires pour que la fonction Θ soit spéciale et nous savons qu'il ne doit y en avoir qu'une.

On pourrait supposer enfin qu'il n'existe pas, en général, de valeurs des k_i telles que

$$\zeta'_s(e_i + k_i)$$

soit identiquement nulle. Il faudrait donc, pour que la fonction Θ soit spéciale, qu'une certaine relation ait lieu entre les périodes

$$a_{i,k}\ (i, k = 1, 2, 3),$$

relation où les γ n'entrent pas. Mais comme il suffit d'une condition pour que la fonction Θ soit spéciale, lorsque la relation dont je viens de parler entre les $a_{i,k}$ serait satisfaite, la fonction Θ devrait être spéciale quels que soient les γ. Il faudrait donc que la relation entre les $a_{i,k}$ étant satisfaite, la variété des k_i ait deux dimensions et nous venons de voir que cela était impossible.

Les deux hypothèses doivent donc être rejetées l'une et l'autre.

Je m'arrête, quoique je n'aie fait qu'effleurer mon sujet; la considération des variétés de translation m'a donné un moyen d'exprimer la condition pour qu'une fonction soit spéciale, mais je ne l'ai appliqué qu'à des cas très particuliers.

Il y a lieu d'espérer qu'en l'appliquant au cas général on obtiendra des résultats dignes d'intérêt. De même, j'ai dû passer très rapidement sur le cas voisin du cas singulier abélien qui a fait l'objet du présent paragraphe; mais je crois qu'il y a là un joli sujet de thèse.

SUR LES FONCTIONS ABÉLIENNES

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 124, p. 1407-1411 (21 juin 1897).

Toute fonction uniforme de p variables, 2p fois périodiques, est le quotient de deux fonctions Θ.

Ce théorème fondamental dans la théorie des fonctions abéliennes parait avoir été connu de Riemann. Weierstrass en a découvert la démonstration, mais ne l'a pas publiée.

M. Picard et moi nous avons publié dans les *Comptes rendus* (1), en collaboration, une démonstration de ce théorème fondamental; mais nous devions nous appuyer sur un théorème auxiliaire, que nous admettions et qui peut s'énoncer ainsi :

Entre $p+1$ fonctions uniformes de p variables, 2p fois périodiques, sans point singulier essentiel à distance finie, il y a toujours une relation algébrique.

Ce théorème auxiliaire semble avoir été connu de Weierstrass, qui n'en a pas non plus publié la démonstration.

Depuis, M. Appell a publié, dans le *Journal de Liouville* (1891), une démonstration du théorème fondamental, fondée sur les propriétés d'une certaine équation fonctionnelle, et où il s'appuyait également sur un théorème relatif aux fonctions de deux variables que j'ai démontré dans le Tome II des *Acta mathematica* (2).

(1) *Voir* ce Tome IV, p. 307.
(2) *Voir* ce Tome IV, p. 147.

Je voudrais aujourd'hui :

1° démontrer le théorème auxiliaire :

2° donner une troisième démonstration du théorème fondamental.

La démonstration du théorème auxiliaire se divise en trois parties :

1° Soient p fonctions périodiques $F_1, F_2, \ldots, F_p$; les zéros communs à ces p fonctions qui sont à l'intérieur du prismatoïde des périodes sont en nombre fini, à moins qu'elles ne forment une infinité continue.

La démonstration est calquée sur celle qui montre que les zéros d'une fonction analytique d'une variable sont isolés.

2° Si les fonctions $F_1, F_2, \ldots, F_p$ dépendent de plusieurs paramètres, et si l'on fait varier ces paramètres d'une manière continue, le nombre des zéros communs, s'il reste fini, demeure constant.

On se sert, pour la démonstration, de l'intégrale de Kronecker, de la même façon que je m'en suis servi pour montrer que les zéros communs à p fonctions Θ sont au nombre de $p!$ (*Bull. Soc. math. France*, t. XI) [1].

Comme conséquence immédiate, si p quelconques des $p+1$ fonctions $F_1, F_2, \ldots, F_p, F_{p+1}$ ont q zéros communs, alors p polynomes entiers en $F_1, F_2, \ldots, F_{p+1}$, l'un de degré K, les autres du premier degré, auront Kq zéros communs, à moins que leurs zéros ne forment une infinité continue.

Soit $p = 3$ pour fixer les idées.

3° Soit S un polynome d'ordre K en F_1, F_2, F_3, F_4 ; il contient

$$\frac{1}{24}(K+1)(K+2)(K+3)(K+4)$$

coefficients arbitraires. Soient ensuite

$$P_1, \quad P_2, \quad \ldots, \quad P_n$$

n polynomes du premier degré en F_1, F_2, F_3, F_4. Considérons une combinaison quelconque de ces n polynomes deux à deux P_i et P_j. Considérons $(Kq+1)$ zéros communs à P_i et à P_j.

Nous pourrons disposer des coefficients de S de façon que, pour chacune des

(1) *Voir* ce Tome IV, p. 302.

combinaisons P_i, P_j, ces $(Kq+1)$ zéros annulent également S; cela sera possible pourvu que

$$(1)\qquad \frac{(K+1)(K+2)(K+3)(K+4)}{24} > \frac{n(n-1)(Kq+1)}{2}.$$

Alors S, P_i et P_j ayant plus de Kq zéros communs en auront une infinité. Il résulte de là que, si Q_1 est un polynome quelconque du premier degré en F_1, F_2, F_3, F_4, les quatre polynomes S, P_i, P_j et Q_1 auront au moins un zéro commun.

Mais alors S, P_i et Q_1 auront au moins $n-1$ zéros communs, et, si

$$(2)\qquad n-1 > Kq,$$

ils en auront une infinité.

Donc si Q_2 est un polynome quelconque du premier degré, S, P_i, Q_1 et Q_2 auront au moins un zéro commun. Donc S, Q_1 et Q_2 en auront au moins n et, par conséquent, une infinité.

Donc le polynome S présente une triple infinité de zéros; donc c'est une fonction uniforme qui s'annule, ainsi que ses dérivées de tous les ordres. Elle est donc identiquement nulle et il y a une relation algébrique entre les F.

Il est facile de voir qu'on peut choisir K et n de façon à satisfaire aux inégalités (1) et (2).

Le théorème auxiliaire est donc établi; passons à la démonstration nouvelle du théorème fondamental. J'ai dit que M. Appell s'était appuyé pour le démontrer sur une proposition que j'ai établie dans le Tome II des *Acta*. Mais il suffit de changer peu de chose à la démonstration de cette proposition elle-même pour que le théorème fondamental s'en déduise immédiatement.

Supposons $p=2$ pour fixer les idées. Soit F une fonction périodique.

Soient $x=\xi_1+i\xi_2$, $y=\xi_3+i\xi_4$, et considérons les ξ comme les coordonnées d'un point dans l'espace à quatre dimensions. Il y aura une variété V à deux dimensions le long de laquelle F s'annulera. Soient $d\omega'$ un élément de cette variété; ξ'_1, ξ'_2, ξ'_3, ξ'_4 le centre de gravité de cet élément; soit r la distance des deux points ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 et ξ'_1, ξ'_2, ξ'_3, ξ'_4. Développons $\frac{1}{r^2}$ suivant les puissances des ξ et soit H ce qui reste de ce développement quand on a supprimé les termes de degrés 0, 1 et 2. On aura

$$\Delta H = 0.$$

Soit maintenant l'intégrale

$$\Phi = \int H\,\varphi'\,d\omega'.$$

où μ' est une fonction des z' convenablement choisie et où l'intégrale est étendue à tous les éléments de la variété V.

1° Cette intégrale est finie.

2° Elle satisfait à l'équation $\Delta\Phi = 0$ et elle est finie, sauf dans le voisinage de la variété V où la différence

$$\Phi - \log F$$

est finie.

3° Quand les variables augmentent d'une période, la fonction Φ augmente d'un polynome du premier degré par rapport aux ξ.

Pour que Φ puisse être regardée comme la partie réelle d'une fonction imaginaire, il ne suffit pas que $\Delta\Phi$ soit nulle, mais Φ doit satisfaire à plusieurs autres équations du même genre

$$D_1\Phi = D_2\Phi = \ldots = 0.$$

Cela n'a pas lieu; mais, d'après le Mémoire cité (*Acta*, t. II), nous aurons

$$D_1\Phi = g_1, \qquad D_2\Phi = g_2, \qquad \ldots,$$

où g_1, g_2 sont des fonctions entières satisfaisant à l'équation de Laplace. Nous verrions ici que g_1, g_2, ... sont périodiques et nous en conclurions que ce sont des constantes.

Les équations sont d'ailleurs compatibles et il existera un polynome G du second degré, tel que

$$D_1 G = g_1, \qquad D_2 G = g_2, \qquad \ldots.$$

Alors $\Phi - G$ sera la partie réelle d'une fonction imaginaire

$$\Phi - G + i\Psi.$$

On verrait aisément qu'en augmentant les variables d'une période on augmente $\Phi - G$, et Ψ, de même que Φ, d'un polynome du premier degré par rapport aux ξ.

La fonction

$$e^{\Phi - G + i\Psi}$$

est donc une *fonction intermédiaire*. C. Q. F. D.

SUR LES FONCTIONS ABÉLIENNES

Acta mathematica, t. 26, p. 43-98 (1902).

I. Introduction.

Je voudrais, sur la demande de M. Mittag-Leffler, présenter ici un exposé d'ensemble de mes travaux sur les fonctions abéliennes, en y ajoutant les quelques résultats nouveaux que j'ai pu obtenir dans ces derniers temps.

Une courbe C de genre p admet p intégrales de première espèce

$$u_1, \quad u_2, \quad \dots, \quad u_p$$

et si cette courbe C est coupée par une autre courbe algébrique variable C', le théorème d'Abel nous apprend que la somme des valeurs de l'intégrale u_k aux divers points d'intersection est une constante.

Si la courbe C' est adjointe à C et de degré suffisant (j'appelle D ce degré) et que le nombre des points d'intersection de C et de C' autres que les points doubles soit égal à q, on sait que $q-p$ de ces points peuvent être choisis à volonté.

Prenons alors p points quelconques sur C; soient M_1, M_2, ..., M_p ces points et considérons d'une part les p sommes suivantes :

$$(1) \qquad v_k = u_{k,1} + u_{k,2} + \dots + u_{k,p} \qquad (k = 1, 2, \dots, p),$$

où $u_{k,i}$ représente la valeur de l'intégrale u_k au point M_i; et envisageons d'autre part un certain nombre de fonctions symétriques des coordonnées des p points M_1, M_2, ..., M_p et que j'appellerai les fonctions Φ.

Je pourrai choisir $p+1$ fonctions Φ de telle façon que toutes les autres fonctions symétriques des coordonnées des points M s'expriment rationnellement par le moyen de ces $p+1$ fonctions, c'est-à-dire qu'à un système de valeurs de ces $p+1$ fonctions ne puisse correspondre plus d'un système de p points M. Ces $p+1$ fonctions seront d'ailleurs liées par une relation algébrique.

Ces $p+1$ fonctions Φ seront des fonctions analytiques des v_k; et ces fonctions seront holomorphes, sauf peut-être en certains points singuliers. Je pourrai toujours trouver un système de points M dans le voisinage desquels les fonctions Φ soient holomorphes. Je puis d'ailleurs supposer que ce système particulier de points correspond aux valeurs $v_k = 0$; car les intégrales u_k ne sont définies qu'à une constante près et je puis disposer de cette constante arbitraire de façon que v_k s'annule pour ce système particulier de points. Dans ces conditions je puis dire que les fonctions Φ sont holomorphes pourvu que les modules des v soient suffisamment petits.

Cela posé, choisissons sur C un nombre $q-2p$ de points fixes que j'appellerai

$$A_1, \quad A_2, \quad \ldots, \quad A_{q-2p}.$$

Soit $\alpha_{k,i}$ la valeur de l'intégrale u_k au point A_i et soit

$$\beta_k = \alpha_{k,1} + \alpha_{k,2} + \ldots + \alpha_{k,q-2p}.$$

Par les p points M et par les $q-2p$ points A je puis faire passer une courbe adjointe C' de degré D et une seule. Cette courbe coupe C en tout en q points en dehors des points doubles, elle passera donc encore par p autres points que j'appelle

$$M'_1, \quad M'_2, \quad \ldots, \quad M'_p.$$

J'appelle $u'_{k,i}$ la valeur de u_k en M'_i et je pose

$$v'_k = u'_{k,1} + u'_{k,2} + \ldots + u'_{k,p}.$$

Soient $\Phi(v'_k)$ les valeurs des fonctions Φ correspondant au système des M'. A un système de points M correspond un système de points M' et un seul puisque par les points M et A je ne puis faire passer qu'une seule courbe C'. Il en résulte que les fonctions $\Phi(v'_k)$ s'expriment rationnellement par le moyen des fonctions $\Phi(v_k)$.

D'autre part le théorème d'Abel nous apprend que l'on a

$$v_k + \beta_k + v'_k = \gamma_k,$$

les γ_k étant des constantes. Donc les $\Phi(v'_k) = \Phi(\gamma_k - \beta_k - v_k)$ sont des fonctions rationnelles des $\Phi(v_k)$. Mais les points A ont été choisis arbitrairement sur C; donc les constantes β_k et par conséquent les $\gamma_k - \beta_k$ sont quelconques pourvu que le degré de C′ ait été pris assez grand pour que $q \geq 3p$. Donc quelles que soient les constantes λ_k, les $\Phi(\lambda_k - v_k)$ sont des fonctions rationnelles des $\Phi(v_k)$.

Donc quelles que soient les constantes λ et μ, les

$$\Phi(\lambda_k + v_k) = \Phi[(\lambda_k - \mu_k) + (\mu_k - v_k)]$$

sont des fonctions rationnelles des $\Phi(\mu_k - v_k)$, qui sont eux-mêmes des fonctions rationnelles des $\Phi(v_k)$. Les $\Phi(\lambda_k + v_k)$ sont donc des fonctions rationnelles des $\Phi(v_k)$; en permutant le rôle des quantités λ_k et v_k, on voit que ce sont aussi des fonctions rationnelles des $\Phi(\lambda_k)$. Les $\Phi(\lambda_k + v_k)$ sont donc fonctions rationnelles des $\Phi(v_k)$ et des $\Phi(\lambda_k)$. Si nous faisons $\lambda_k = v_k$, nous voyons que les $\Phi(2v_k)$ sont des fonctions rationnelles des $\Phi(v_k)$.

Or j'ai dit que les $\Phi(v_k)$ sont holomorphes si le module de v_k est suffisamment petit, plus petit que ρ par exemple. Alors les $\Phi(2v_k)$ qui sont rationnels par rapport aux $\Phi(v_k)$ seront holomorphes si $|v| < \rho$; donc les $\Phi(v_k)$ sont méromorphes si $|v| < 2\rho$. Mais alors les $\Phi(2v_k)$ étant rationnels par rapport aux $\Phi(v_k)$ seront méromorphes pourvu que $|v| < 2\rho$. Donc les $\Phi(v_k)$ seront méromorphes pourvu que $|v| < 4\rho$; et ainsi de suite.

En résumé, les Φ sont des fonctions uniformes et méromorphes des v *pour toutes les valeurs de ces variables.*

Quand l'un des points M décrit un cycle sur la surface de Riemann correspondant à la courbe C, les fonctions Φ reviennent à leurs valeurs primitives, et les intégrales u_k et par conséquent les v_k augmentent d'une période. Il en résulte que les fonctions Φ sont périodiques; ce sont des fonctions à p variables et à $2p$ périodes.

C'est ainsi qu'on a été conduit aux fonctions abéliennes, et Riemann a montré comment on peut les exprimer par le moyen des fonctions Θ.

Mais une courbe de genre p, dépend de $3p - 3$ paramètres, tandis qu'une fonction Θ de p variables dépend de $\frac{p(p+1)}{2}$ paramètres. Ce second nombre est plus grand que le premier sauf pour $p = 2$ et pour $p = 3$. Il y a donc des fonctions Θ de p variables qui ne peuvent pas être engendrées par une courbe de genre p de la façon que je viens de dire; aussi appellerai-je fonctions Θ *spéciales* et fonctions abéliennes *spéciales* celles qui sont susceptibles de ce mode de génération.

Une des premières questions à résoudre est donc de reconnaître les relations des fonctions abéliennes spéciales avec les fonctions abéliennes générales et les caractères qui les différencient les unes des autres.

Mais une autre question se pose. Riemann a démontré qu'il y a une certaine relation entre les périodes d'une fonction abélienne spéciale. Si cette relation a lieu, on peut former la fonction Θ, si elle n'a lieu, la fonction Θ n'existe pas. Nous venons de voir qu'il y a des fonctions Θ qui ne sont pas spéciales, et par conséquent des fonctions $2p$ fois périodiques qui ne sont pas spéciales et dont les périodes sont cependant liées par la relation de Riemann.

Mais ne peut-il pas exister aussi des fonctions $2p$ fois périodiques dont les périodes ne sont pas liées par une semblable relation et qui ne peuvent pas s'exprimer par les fonctions Θ? La réponse doit-être négative. Toute fonction à p variables et $2p$ périodes peut s'exprimer par les fonctions Θ.

C'est là un théorème que j'appellerai le théorème B et sur lequel je reviendrai dans la suite.

Mais je dois d'abord parler d'un autre théorème que j'appellerai le théorème A et d'après lequel entre $p+1$ fonctions à p variables et à $2p$ périodes, il y a toujours une relation algébrique.

II. — Démonstration du théorème A.

Théorème A. — *Si l'on a $p+1$ fonctions de p variables, méromorphes pour toutes les valeurs de ces p variables et admettant $2p$ périodes distinctes, ces fonctions sont liées par une relation algébrique.*

Dans la plupart des démonstrations du théorème B, on s'appuie sur le théorème A et l'on a déjà proposé plusieurs démonstrations de ce théorème A. On pourrait d'ailleurs s'en passer puisque je donnerai plus loin une démonstration du théorème B, indépendante du théorème A et que d'ailleurs rien n'est plus facile que de déduire le théorème A du théorème B.

Je ne crois pourtant pas inutile de développer ici une démonstration nouvelle du théorème A que je n'avais fait qu'esquisser dans les *Comptes rendus* en 1897 [1].

---

[1] *Voir ce* Tome IV, p. 469.

Soient $F_1, F_2, \ldots, F_p$, des fonctions des p variables v, méromorphes pour toutes les valeurs finies de ces variables et admettant $2p$ périodes. Je considère les zéros communs à ces p fonctions qui sont à l'intérieur du prismatoïde des périodes.

Première proposition. — Je dis d'abord que ces zéros communs, ou bien sont en nombre fini, ou bien forment un continuum.

Soit en effet

$$v_1 = \alpha_1, \quad v_2 = \alpha_2, \quad \ldots, \quad v_p = \alpha_p$$

un des zéros communs des fonctions F, c'est-à-dire un système de valeurs des v pour lequel on a

$$F_1 = F_2 = \ldots = F_p = 0.$$

D'après notre hypothèse, les fonctions F sont méromorphes pour toutes les valeurs des v; cela signifie que si l'on considère les parties réelles et imaginaires des v comme les coordonnées d'un point dans l'espace à $2p$ dimensions l'on peut construire dans cet espace une série de domaines $D_1, D_2, \ldots$ qui seront par exemple des hypersphères et cela de telle façon :

1° que tout point de l'espace à $2p$ dimensions appartienne au moins à l'un de ces domaines;

2° que si R est une région finie quelconque de cet espace, par exemple le prismatoïde des périodes, il n'y a qu'un nombre fini de domaines D qui soient en totalité ou en partie contenus dans la région R;

3° qu'à l'intérieur de chaque domaine D, on ait

$$F_1 = \frac{P_1}{Q_1}, \quad F_2 = \frac{P_2}{Q_2}, \quad \ldots, \quad F_p = \frac{P_p}{Q_p},$$

les fonctions $P_1, P_2, \ldots, P_p$; $Q_1, Q_2, \ldots, Q_p$ étant holomorphes dans tout le domaine D.

Si maintenant deux des domaines D et D_1 ont une partie commune (ce qui arrivera forcément, car, puisque nous voulons que tout point de l'espace soit intérieur au moins à l'un de nos domaines, il doit exister des régions de l'espace communes à plusieurs domaines) nous avons dans le domaine D :

$$F_1 = \frac{P_1}{Q_1},$$

dans le domaine D_1 :

$$F_1 = \frac{P''_1}{Q''_1},$$

et par conséquent dans la partie commune :

$$F_1 = \frac{P_1}{Q_1} = \frac{P'_1}{Q'_1}.$$

Il ne s'ensuit pas que dans cette partie commune P_1 est égal à P'_1 et Q_1 à Q'_1. J'ai démontré il est vrai dans le Tome 2 des *Acta mathematica* (1) un théorème d'après lequel toute fonction méromorphe dans tout l'espace peut toujours être considérée comme le quotient de deux fonctions holomorphes dans tout l'espace. Depuis M. Cousin a donné dans sa thèse une démonstration de ce même théorème.

Il en résulterait alors que les deux fonctions holomorphes P_1 et Q_1 pourraient être supposées les mêmes dans tous les domaines. Mais je voudrais éviter pour le moment de m'appuyer sur ce théorème.

Démonstration de la première proposition. — Il s'agit de démontrer qu'à l'intérieur du domaine D, les p fonctions holomorphes

$$P_1, \quad P_2, \quad \ldots, \quad P_p$$

ne peuvent avoir un nombre infini de zéros, à moins que l'ensemble de ces zéros ne forme un continuum analytique.

Si en effet ces fonctions possédaient un nombre infini de zéros communs, à l'intérieur de D, il devrait y avoir dans D un point

$$v_1 = \alpha_1, \qquad v_2 = \alpha_2, \qquad \ldots, \qquad v_p = \alpha_p$$

dans le voisinage duquel il y aurait une infinité de zéros communs à nos p fonctions. Cela posé, supposons que nos p équations

$$P_1 = P_2 = \ldots = P_p = 0 \tag{1}$$

ne se réduisent pas toutes à des identités; que par exemple P_1 ne soit pas identiquement nul. Je pourrai supposer que $P_1 = 0$ ne se réduit pas à une identité quand on fait

$$v_2 = \alpha_2, \qquad v_3 = \alpha_3, \qquad \ldots, \qquad v_p = \alpha_p.$$

(1) *Voir* ce Tome IV, p. 147.

Si en effet cela avait lieu on pourrait tourner la difficulté par un simple changement linéaire de variables. Comme P_1 n'est pas identiquement nul, il y a toujours un point

$$v_1 = \beta_1, \quad v_2 = \beta_2, \quad \dots, \quad v_p = \beta_p$$

pour lequel P_1 n'est pas nul. Soient alors $v'_1, v'_2, \dots, v'_p$, p combinaisons linéaires des v; $\alpha'_1, \alpha'_2, \dots \alpha'_p$ les combinaisons linéaires correspondantes des α; $\beta'_1, \beta'_2, \dots, \beta'_p$ les combinaisons linéaires correspondantes des β. Je pourrai choisir les cofficients de ces combinaisons linéaires de telle sorte que

$$\beta'_2 = \alpha'_2, \quad \beta'_3 = \alpha'_3, \dots, \quad \beta'_p = \alpha'_p.$$

Je prendrai alors les v' comme nouvelles variables et je verrai que l'équation $P_1 = 0$ ne se réduit pas à une identité pour

$$v'_2 = \alpha'_2, \quad v'_3 = \alpha'_3, \quad \dots, \quad v'_p = \alpha'_p.$$

Supposons donc que P_1 ne s'annule pas identiquement pour $v_2 = \alpha_2$, $v_3 = \alpha_3, \dots, v_p = \alpha_p$. Alors en vertu des lemmes que j'ai démontrés au début de ma Thèse inaugurale (¹), l'équation $P_1 = 0$ définira $v_1 - \alpha_1$ en fonction algébroïde de $v_2 - \alpha_2$, $v_3 - \alpha_3, \dots, v_p - \alpha_p$. Donc en vertu des mêmes lemmes P_2, $P_3, \dots, P_p$ seront aussi des fonctions algébroïdes de $v_2 - \alpha_2, \dots, v_p - \alpha_p$ et les équations

$$P_2 = P_3 = \dots = P_p = 0$$

pourront être remplacées par les suivantes :

$$(2) \qquad P'_2 = P'_3 = \dots = P'_p = 0,$$

où les P' sont des fonctions holomorphes de

$$v_2 - \alpha_2, \quad v_3 - \alpha_3, \quad \dots, \quad v_p - \alpha_p.$$

les équations (2) sont de même forme que les équations (1), seulement les nombre des équations comme celui des variables est diminué d'une unité.

Si ces équations (2) se réduisent à des identités, l'équation $P_1 = 0$ suffit pour définir les zéros communs qui formeront un continuum analytique à $p - 1$ dimensions.

(¹) *Voir* Tome I, p. XLIX-CXXIX.

Si les équations (2) ne se réduisent pas à des identités, on opérera sur elles comme sur les équations (1).

On ne sera arrêté que quand on arrivera à un système d'équations se réduisant à des identités, auquel cas l'ensemble des zéros formera un continuum analytique; ou quand le système se réduira à une équation à une inconnue. Mais pour une équation à une inconnue dont le premier membre est holomorphe et qui ne se réduit pas à une identité, on sait qu'il ne peut pas y avoir de point dans le voisinage duquel il y ait une infinité de zéros.

La proposition est donc démontrée.

Remarque. — Pour appliquer ce qui précède aux fonctions méromorphes $F_1, F_2, \ldots, F_p$, il faut préciser ce que nous devons entendre par un zéro de F_1. D'abord F_1 ne pourra pas s'annuler sans que P_1 s'annule. Tous les zéros de F_1 appartiennent donc à P_1; mais il peut arriver qu'un zéro de P_1 n'appartienne pas à F_1. Soit en effet $v_i = z_i$ un zéro de P_1; supposons que P_1 et Q_1 soient divisibles par une même fonction H, holomorphe dans le voisinage de $v_i = z_i$ et s'annulant pour $v_i = z_i$ de telle sorte que

$$P_1 = HP'_1, \qquad Q_1 = HQ'_1,$$

P'_1 et Q'_1 étant holomorphes pour $v_i = z_i$. Il pourrait se faire que P_1 et H s'annulant pour $v_i = z_i$, P'_1 ne s'annulât pas pour $v_i = z_i$. Dans ce cas $v_i = z_i$ serait un zéro de P_1, mais ne serait pas un zéro de

$$F_1 = \frac{P_1}{Q_1} = \frac{P'_1}{Q'_1}.$$

Reprenons alors la démonstration précédente et cherchons comme tout à l'heure les zéros communs à $F_1, F_2, \ldots, F_p$ et voisins de $v_i = z_i$. Je suppose que P_1 et Q_1 soient divisibles par H_1; P_2 et Q_2 par H_2; ...; P_p et Q_p par H_p; les fonctions $H_1, H_2, \ldots, H_p$ étant holomorphes, dans le voisinage de $v_i = z_i$ et nulles pour $v_i = z_i$. Nous remplacerons alors les équations (1) par les équations

$$\frac{P_1}{H_1} = \frac{P_2}{H_2} = \ldots = \frac{P_p}{H_p} = 0. \tag{1'}$$

Ce sont les équations (1') et non plus les équations (2) qui nous donneront les zéros communs à $F_1, F_2, \ldots, F_p$; mais les équations (1') étant de même forme que les équations (1) il n'y a rien à changer au raisonnement.

Supposons maintenant que l'on envisage la partie commune aux deux domaines D et D_1 et que dans cette partie commune on ait

$$F_k = \frac{P_k}{Q_k} = \frac{P'_k}{Q'_k},$$

que P_k et Q_k soient divisibles par H_k; P'_k et Q'_k par H'_k; les fonctions H_k et H'_k étant holomorphes pour $v_i = z_i$ et s'annulant pour $v_i = z_i$. Supposons enfin que $\frac{P_k}{H_k}$ et $\frac{Q_k}{H_k}$ ne soient divisibles à la fois par aucune fonction holomorphe s'annulant pour $v_i = z_i$ et qu'il en soit de même pour $\frac{P'_k}{H'_k}$ et $\frac{Q'_k}{H'_k}$. Alors le système des équations (1') est équivalent au système des équations

$$(1'') \qquad \frac{P'_1}{H'_1} = \frac{P'_2}{H'_2} = \ldots = \frac{P'_p}{H'_p} = 0.$$

Deuxième proposition. — Si les fonctions $P_1, P_2, \ldots, P_p$ qui sont holomorphes dans le domaine D dépendent d'un ou plusieurs paramètres λ que l'on peut faire varier d'une manière continue; si l'on considère ceux des zéros communs aux p fonctions P qui sont à l'intérieur d'un domaine Δ intérieur lui-même à D; si quand on fait varier les paramètres λ entre certaines limites, le nombre des zéros communs reste fini; ce nombre ne peut varier que si un des zéros se déplaçant d'une manière continue *sort* du domaine Δ ou y *entre*, en traversant la frontière de ce domaine.

Nous savons en effet que Cauchy a exprimé le nombre des zéros de $f(z)$ situés à l'intérieur d'un contour par l'intégrale définie

$$\frac{1}{2i\pi}\int \frac{f'\,dz}{f}$$

prise le long de ce contour, et que Kronecker, généralisant le théorème de Cauchy, a exprimé le nombre des zéros communs à $P_1, P_2, \ldots, P_p$ à l'intérieur de Δ par une intégrale multiple prise le long de la frontière de Δ.

La fonction sous le signe $\int$ reste d'ailleurs finie et continue sauf pour les zéros communs aux fonctions P, de sorte que si aucun de ces zéros ne se trouve sur la frontière de Δ, l'intégrale de Kronecker reste finie et est une fonction continue des λ.

Si le nombre des zéros communs est infini, il y en a en général sur la frontière de Δ et l'intégrale est dans ce cas dépourvue de sens. Mais si ce nombre est fini, il n'y en aura pas en général sur la frontière de Δ; s'il y en avait, il suffirait pour tourner la difficulté de déformer infiniment peu le domaine Δ.

L'intégrale de Kronecker est une fonction continue des λ, tant qu'il n'y a pas de zéros communs sur la frontière de Δ, et comme sa valeur est toujours un nombre entier elle doit être constante. Le nombre de ces zéros communs ne peut donc varier que quand l'un d'eux vient sur la frontière de Δ.

C. Q. F. D.

Remarque. — Le théorème s'applique d'ailleurs immédiatement aux fonctions méromorphes $F_1, F_2, \ldots, F_p$, puisque les zéros communs de ces fonctions sont ceux des fonctions holomorphes que nous appelions plus haut $\frac{P_1}{H_1}, \frac{P_2}{H_2}, \ldots, \frac{P_p}{H_p}$.

Considérons maintenant un domaine Δ formé de plusieurs domaines partiels $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_p$; et supposons que dans chacun de ces domaines partiels la fonction F_i puisse se mettre sous la forme $\frac{P_i}{Q_i}$, le théorème s'applique au domaine total Δ.

En effet le nombre des zéros intérieurs à l'un des domaines partiels Δ_q ne peut varier que si un zéro franchit la frontière de ce domaine; alors de deux choses l'une, ou bien la partie de la frontière de Δ_q franchie par le zéro appartient à la frontière du domaine total Δ, et alors notre zéro a franchi la frontière de Δ; ou bien cette partie de la frontière de Δ_q sépare Δ_q d'un autre domaine partiel Δ_p et alors le nombre des zéros intérieurs à Δ_q aura diminué d'une unité; mais en même temps celui des zéros intérieurs à Δ_p aura augmenté d'une unité; le nombre *total* des zéros intérieurs à Δ n'aura pas changé.

En résumé le nombre des zéros intérieurs à Δ ne peut varier que si un zéro franchit la frontière de Δ.

C. Q. F. D.

Corollaire. — Ce que nous avons dit jusqu'ici s'applique à toutes les fonctions méromorphes; nous allons voir maintenant ce qui est particulier aux fonctions abéliennes.

Je prendrai pour le domaine Δ le prismatoïde des périodes.

Je vois que le nombre des zéros communs aux p fonctions F intérieurs à ce prismatoïde est fini, à moins que leur ensemble ne forme un continuum analytique; et que, quand on fait varier les λ, ce nombre, s'il reste fini, ne peut varier que quand un zéro franchit la frontière du prismatoïde. Il augmente d'une unité toutes les fois qu'un zéro entre dans le prismatoïde, et il diminue d'une unité toutes les fois qu'un zéro en sort.

Mais, à cause de la périodicité supposée de nos fonctions, un zéro ne peut entrer dans le prismatoïde sans qu'un autre en sorte; le nombre de nos zéros, s'il reste fini, demeure donc constant.

Troisième proposition. — Soient $F_1, F_2, \ldots, F_{p+1}$, $p+1$ fonctions abéliennes à p variables. Soient

$$\Phi_1, \quad \Phi_2, \quad \ldots, \quad \Phi_p$$

p combinaisons linéaires de ces $p+1$ fonctions de telle sorte que

$$\Phi_q = \alpha_{q,1} F_1 + \alpha_{q,2} F_2 + \ldots + \alpha_{q,p+1} F_{p+1} + \alpha_{q,p+2};$$

le nombre des zéros communs aux p fonctions Φ, tant qu'il reste fini, est indépendant des coefficients α.

C'est là une conséquence immédiate des propositions précédentes.

Le résultat peut s'énoncer dans le langage géométrique.

Considérons $F_1, F_2, \ldots, F_{p+1}$ comme les coordonnées d'un point dans l'espace à $p+1$ dimensions; comme ces fonctions dépendent seulement de p variables, ce point sera sur une certaine variété à p dimensions que j'appellerai V; notre but est précisément de démontrer que cette variété est algébrique et nous voyons déjà d'après l'ensemble des résultats obtenus, que le nombre des points d'intersection de cette variété avec une droite quelconque est fini, à moins que la droite ne soit tout entière sur la variété et que ce nombre est constant pour toutes les droites qui ne sont pas tout entières sur la variété. *Soit q ce nombre.*

Considérons maintenant, au lieu d'une droite, une courbe algébrique quelconque C d'ordre n; je dis que le nombre des points d'intersection de cette courbe avec V sera nq à moins que la courbe ne soit tout entière sur la variété ou qu'elle se décompose en plusieurs composantes, une de ces composantes étant tout entière sur la variété.

Il me suffira de démontrer cela pour les courbes planes, c'est-à-dire pour les courbes situées sur une variété plane à deux dimensions. L'équation générale d'une pareille courbe est

$$\Theta = 0, \qquad \Phi_1 = \Phi_2 = \ldots = \Phi_{p-1} = 0;$$

Θ étant un polynôme entier d'ordre n et les Φ des polynômes du premier ordre par rapport aux F. Le nombre des points d'intersection, tant qu'il reste fini, est indépendant des coefficients du polynôme Θ; or quand ce polynôme Θ se décompose en n facteurs linéaires, ce nombre est évidemment nq. Et d'un autre côté ce nombre ne peut devenir infini que si l'ensemble des points d'intersection forme un continuum analytique, c'est-à-dire qu'il doit être formé de tous les points de l'une au moins des composantes de notre courbe C.

La même démonstration s'appliquerait sans changement à une courbe qui serait une *intersection complète*, c'est-à-dire dont l'équation s'écrirait

$$\Theta_1 = \Theta_2 = \ldots = \Theta_p = 0,$$

les Θ étant des polynômes de degré quelconque. Pour étendre enfin le résultat à une courbe C qui ne serait pas une intersection complète, il suffit d'observer que l'on peut toujours trouver une intersection complète qui se compose de C et d'un certain nombre de droites.

Quatrième proposition. — La variété V est algébrique.

Soit en effet Θ un polynôme entier quelconque d'ordre n en $F_1, F_2, \ldots, F_{p+1}$. Il contient

$$\frac{\lfloor(n+p+1)}{\lfloor n \lfloor(p+1)}$$

coefficients arbitraires.

Soit

$$v_1 = \alpha_1, \qquad v_2 = \alpha_2, \qquad \ldots, \qquad v_p = \alpha_p$$

un système quelconque de valeurs des v; nous allons chercher à annuler la fonction Θ et ses dérivées d'ordre $1, 2, \ldots, q$ par rapport aux p variables v pour le point $v_i = \alpha_i$. Ces dérivées étant au nombre de

$$\frac{\lfloor(nq+p)}{\lfloor nq \lfloor p}$$

cela sera possible pourvu que

$$\frac{\lfloor(n+p+1)}{\lfloor n \lfloor(p+1)} > \frac{\lfloor(nq+p)}{\lfloor nq \lfloor p}.$$

Or on peut toujours prendre n assez grand pour satisfaire à cette inégalité, puisque le premier membre est un polynôme d'ordre $p+1$ en n et le second membre un polynôme d'ordre p.

La variété $\Theta = 0$, aura alors avec la variété V un contact d'ordre nq au point $v_i = \alpha_i$. Un plan quelconque à 2 dimensions passant par le point $v_i = \alpha_i$ coupera la variété $\Theta = 0$ suivant une courbe C algébrique d'ordre n qui aura avec V un contact d'ordre nq. Cette courbe C coupera donc V en $nq + 1$ points confondus avec le point $v_i = \alpha_i$.

Il en résulte qu'elle sera tout entière sur V ou qu'elle se décomposera, l'une de ses composantes C' étant tout entière sur V.

L'ensemble des courbes C' engendrera une variété V' à p dimensions. En effet, une droite quelconque D de l'espace à $p+1$ dimensions rencontrera V'; car par D et par le point $v_i = \alpha_i$ je puis faire passer un plan. Dans ce plan se trouvera d'après ce qui précède une des courbes C' et cette courbe C' rencontrera D; car une droite et une courbe algébrique situées dans un même plan se rencontrent toujours, soit à distance finie, soit à l'infini. Donc D rencontre V', puisque cette courbe C' est sur V'. C. Q. F. D.

Toutes les courbes C' étant sur la variété $\Theta = 0$, la variété V' sera tout entière sur la variété algébrique $\Theta = 0$. Donc ou bien ces deux variétés à p dimensions sont identiques, ou bien la variété algébrique $\Theta = 0$ se décompose et V' est l'une de ses composantes; V' est donc algébrique.

Toutes les courbes C' étant sur V, la variété V' sera tout entière sur V et comme la variété V ne se décompose pas puisqu'à chaque système de valeurs des v correspond un point de V et un seul: ces deux variétés doivent être identiques.

Donc V est algébrique. C. Q. F. D.

Le théorème A est donc démontré.

Il pourrait y avoir une difficulté si la variété V avait moins de p dimensions, c'est-à-dire s'il y avait une relation entre les p fonctions $F_1, F_2, \ldots, F_p$; mais je dis qu'on peut toujours trouver p fonctions abéliennes qui ne soient liées par aucune relation.

Soit en effet $F(v_i)$ une fonction abélienne quelconque; considérons avec M. Wirtinger les p fonctions

$$F_k(v_i) = F(v_i + \alpha_{i,k}),$$

les α étant des constantes quelconques. Si entre ces p fonctions il y avait une relation, leur déterminant fonctionnel serait nul, et comme les $z_{i,k}$ sont quelconques, le déterminant où le $i^{\text{ième}}$ élément de la $k^{\text{ième}}$ ligne est

$$\frac{d}{dz_{i,k}} F(z_{1,k}, z_{2,k}, \ldots, z_{p,k})$$

serait identiquement nul quelles que soient les valeurs attribuées aux p^2 quantités z. Si nous considérons les p quantités

$$u_1 = z_{1,1}, \quad u_2 = z_{2,1}, \quad \ldots, \quad u_p = z_{p,1}$$

comme des variables et les $p^2 - p$ autres z comme des constantes, cela veut dire que la fonction $F(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ satisfait à une équation de la forme

$$A_1 \frac{dF}{du_1} + A_2 \frac{dF}{du_2} + \ldots + A_p \frac{dF}{du_p} = 0,$$

c'est-à-dire que F ne dépend que de $p - 1$ combinaisons linéaires des variables u, ce que nous ne supposerons pas.

III. — Démonstration du théorème B.

Théorème B. — *Toute fonction $2p$ fois périodique de p variables peut s'exprimer par le moyen des fonctions* Θ.

Riemann parait avoir connu ce théorème; en tout cas, Weierstrass l'avait démontré et je crois qu'il avait dû dans son cours exposer les principes de sa démonstration ; quoi qu'il en soit, cette démonstration n'avait pas été publiée et ses élèves, s'ils l'avaient connue, ne l'avaient communiquée à personne. C'est ce qui nous décida, M. Picard et moi, à aborder la question et nous donnâmes une démonstration de ce théorème dans les *Comptes rendus* en 1883 ([1]). Cette première démonstration, dont nous reparlerons plus loin, était-elle identique à celle de Weierstrass, nous l'ignorions. Ce n'est que longtemps après, au moment de la publication des œuvres complètes du grand géomètre que nous avons su que les deux méthodes ne différaient pas essentiellement.

M. Appell donna ensuite (*Journal de Liouville*, 1891) une deuxième démonstration du théorème B entièrement différente de la première; puis vinrent deux autres démonstrations, l'une de M. Picard (*Comptes rendus*,

---

([1]) *Voir ce Tome* IV, p. 307.

t. 124, p. 1490) et l'autre de moi (*Comptes rendus*, t. 124, p. 1407 et *Acta Mathematica*, t. 22) [1].

Cette démonstration du Tome 22 n'était autre chose qu'une adaptation à un but nouveau de la démonstration que j'avais donnée au Tome 2 d'un théorème général sur les fonctions méromorphes; j'ai énoncé plus haut un théorème général d'après lequel toute fonction méromorphe est le quotient de deux fonctions entières, et j'ai dit qu'outre ma démonstration, il en existe une autre qui a été développée par M. Cousin dans sa thèse (*Acta Mathematica*, t. 19).

Eh bien, si ma démonstration peut être adaptée au théorème B, il en est probablement de même de celle de M. Cousin, ce qui nous fournirait une cinquième démonstration du théorème B, entièrement différente des quatre premières. Cependant quand j'ai cherché à développer cette démonstration en lui conservant sa forme primitive, j'ai rencontré certaines difficultés. J'ai donc dû y introduire certaines modifications, et c'est cette démonstration modifiée, qui tient pour ainsi dire le milieu entre celle de M. Cousin et la mienne que je vais chercher à adapter à l'étude du théorème B. Rappelons d'abord les hypothèses que nous faisons. Nous avons dans l'espace à $2p$ dimensions une infinité de domaines.

$$D_1, \quad D_2, \quad \ldots,$$

tels que tout point de l'espace appartienne au moins à l'un de ces domaines et que dans le domaine D_i par exemple, la fonction abélienne F qu'il s'agit d'étudier soit égale à

$$F = \frac{P_i}{Q_i}, \tag{1}$$

P_i et Q_i étant holomorphes dans le domaine D_i.

Nous pouvons supposer qu'en aucun point M de D_i, les deux fonctions P_i et Q_i ne soient divisibles par une même fonction H, holomorphe dans le voisinage de M et s'annulant en M, de telle façon que l'on ait

$$P_i = HP'_i, \qquad Q_i = HQ'_i,$$

P'_i et Q'_i étant holomorphes dans le voisinage de M.

[1] *Voir* ce Tome IV, p. 469 et 482.

On pourrait dire que si cela avait lieu on diviserait P_i et Q_i par H, et que dans la partie D'_i du domaine D_i où H est holomorphe, on écrirait

$$F = \frac{P'_i}{Q'_i}$$

au lieu de $F = \frac{P_i}{Q_i}$. Mais ce raisonnement serait insuffisant, parce qu'on pourrait craindre que dans le domaine D'_i, qui est une partie de D_i, ne se trouvent des points où P'_i et Q'_i fussent eux-mêmes divisibles par une même fonction holomorphe, qu'on soit par conséquent obligé de détacher du domaine D'_i un domaine plus petit D''_i où l'expression de F devrait encore être modifiée, et qu'on ne soit forcé de poursuivre cette opération indéfiniment.

Nous raisonnerons donc de la manière suivante :

Soit $v_i = \alpha_i$ un point situé dans le domaine D_k et où

$$P_k = 0.$$

De l'équation $P_k = 0$, on pourra tirer v_1 par exemple en fonction algébroïde de $v_2, v_3, \ldots, v_p$. L'équation comportera d'ailleurs plusieurs solutions

$$(2) \qquad v_1 = \varphi_1, \quad v_1 = \varphi_2, \quad \ldots, \quad v_1 = \varphi_q;$$

$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_q$ étant des fonctions algébroïdes de $v_2, v_3, \ldots, v_p$ se réduisant à α_1 pour $v_2 = \alpha_2, v_3 = \alpha_3, \ldots, v_p = \alpha_p$,

Nous pourrons autour du point $v_i = \alpha_i$, trouver un domaine Δ_k intérieur à D_k dans lequel les fonctions φ restent algébroïdes et dans lequel enfin l'équation $P_k = 0$ n'admette pas d'autre solution que les solutions (2).

Les fonctions algébroïdes φ pourront se répartir en groupes de la façon suivante ; si

$$(v_1 - \varphi_1)(v_1 - \varphi_2)\ldots(v_1 - \varphi_m)$$

est une fonction holomorphe de $v_1, v_2, \ldots, v_p$ dans le voisinage de $v_i = \alpha_i$ (ce sera bien entendu un polynôme entier d'ordre m en v_1), et si cette fonction holomorphe est irréductible, c'est-à-dire n'est pas le produit de deux fonctions holomorphes de même forme, nous dirons que les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ forment un même groupe.

D'ailleurs les dimensions du domaine Δ_k restant finies quel que soit le point $v_i = \alpha_i$, nous pourrons diviser le domaine D_k en un nombre *fini* de domaines analogues à Δ_k.

Supposons maintenant qu'en faisant $v_1 = \varphi_1$, on annule identiquement non seulement P_k mais encore Q_k ; il en sera évidemment de même quand on fera $v_1 = \varphi_2$, $v_1 = \varphi_3$, ..., $v_1 = \varphi_m$; les fonctions φ_2, φ_3, ..., φ_m étant les autres fonctions du même groupe. Supposons pour fixer les idées qu'il y ait un second groupe de fonctions $\varphi'_1, \varphi'_2, \ldots, \varphi'_n$ qui substituées à la place de v_1 annulent identiquement P_k et Q_k et qu'il n'y en ait pas d'autre.

Alors P_k et Q_k seront divisibles dans le domaine Δ_k par la fonction holomorphe

$$H_k = (v_1 - \varphi_1)(v_1 - \varphi_2)\ldots(v_1 - \varphi_m)(v_1 - \varphi'_1)(v_1 - \varphi'_2)\ldots(v_1 - \varphi'_n),$$

de sorte qu'on aura

$$P_k = H_k P'_k, \qquad Q_k = H_k Q'_k;$$

les fonctions H_k, P'_k et Q'_k resteront holomorphes dans tout le domaine Δ_k et l'on aura dans le domaine Δ_k

$$F = \frac{P'_k}{Q'_k},$$

P'_k et Q'_k n'ayant plus de facteur commun s'annulant à l'intérieur de Δ_k.

En résumé nous pouvons toujours supposer que P_k et Q_k ne sont jamais divisibles par un même facteur H, holomorphe dans le voisinage d'un point intérieur à D_k et s'annulant en ce point.

Cela posé supposons que l'on ait $F = \frac{P_i}{Q_i}$ dans le domaine D_i et $F = \frac{P_k}{Q_k}$ dans le domaine D_k. Si les deux domaines ont une partie commune, on aura dans cette partie commune

$$\frac{P_i}{P_k} = \frac{Q_i}{Q_k};$$

P_i ne peut s'annuler sans que P_k s'annule; car alors on aurait

$$Q_i = \frac{P_i}{P_k} Q_k$$

et Q_i s'annulerait en ce même point. Alors Q_i serait divisible par P_i, car $\frac{1}{P_k}$ est holomorphe puisque P_k ne s'annule pas. Donc P_i et Q_i seraient divisibles par un même facteur P_i, ce qui est contraire à l'hypothèse que nous venons de faire.

Donc $\frac{P_k}{P_i}$ ne peut devenir infini et par conséquent est holomorphe dans toute la partie commune aux deux domaines et il en est de même de $\frac{P_i}{P_k}$.

Maintenant la fonction F étant périodique, chaque prismatoïde des périodes sera divisé en un certain nombre de domaines D_k ; et l'on pourra supposer que tous ces prismatoïdes sont divisés de la même manière, c'est-à-dire que si l'un d'eux comprend n domaines

$$D_1, \quad D_2, \quad \ldots, \quad D_n,$$

l'autre comprendra n domaines

$$D'_1, \quad D'_2, \quad \ldots, \quad D'_n$$

correspondant respectivement à D_1, D_2, ..., D_n, de telle façon que l'on passe d'un domaine au domaine correspondant en augmentant les variables d'une période.

De plus, dans deux domaines correspondants D_k et D'_k les fonctions P et Q reprendront les mêmes valeurs; de telle sorte que l'on aura dans D_k :

$$F = \frac{P_k}{Q_k},$$

et dans D'_k :

$$F = \frac{P'_k}{Q'_k},$$

et que

$$P'_k(v_1, v_2, \ldots, v_p) = P_k(v_1 + \beta_1, v_2 + \beta_2, \ldots, v_p + \beta_p),$$
$$Q'_k(v_1, v_2, \ldots, v_p) = Q_k(v_1 + \beta_1, v_2 + \beta_2, \ldots, v_p + \beta_p);$$

$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$ étant la période par laquelle on passe de D_k et D'_k.

Les domaines D_1, D_2, etc. empiètent les uns sur les autres, mais je puis considérer une infinité de domaines Δ_1, Δ_2, etc., de telle façon : 1° que le domaine Δ_k soit intérieur à D_k; 2° que tout point de l'espace appartienne à un des domaines Δ et à un seul, à moins qu'il n'appartienne à la frontière qui sépare deux de ces domaines.

Il est clair que les domaines Δ restent encore arbitraires dans une certaine mesure et que je puis leur faire subir de petites déformations pourvu que Δ_k reste intérieur à D_k.

Considérons deux domaines D_n et D_q ayant une partie commune; nous aurons respectivement dans ces deux domaines

$$F = \frac{P_n}{Q_n}, \qquad F = \frac{P_q}{Q_q}.$$

Soient Δ_n et Δ_q les domaines Δ correspondant à D_n et à D_q, et soit $S_{n\,q}$ la frontière qui sépare Δ_n de Δ_q.

Je considère une fonction Φ définie de la façon suivante. Dans le domaine Δ_k on aura

$$\Phi = \log P_k.$$

Ce n'est pas une fonction qui jouit de la continuité analytique, car quand en franchissant $S_{n,q}$ on passe de Δ_n dans Δ_q, cette fonction subit un saut brusque égal à

$$\log \frac{P_q}{P_n}.$$

On peut dire encore que si l'on appelle Φ' la continuation analytique de Φ au delà de $S_{n,q}$ quand ayant franchi cette coupure on a passé de Δ_n dans Δ_q, on aura dans Δ_q :

$$\Phi' - \Phi = \log \frac{P_q}{P_n}.$$

Ce qui nous intéresse c'est que dans la partie commune à D_n et à D_q cette fonction $\log \frac{P_q}{P_n}$ sera holomorphe, car le rapport de P_q à P_n ne peut ni s'annuler ni devenir infini.

Posons

$$z_k = x_k + i y_k,$$

de telle façon que les parties réelles et imaginaires, c'est-à-dire les x et les y soient les coordonnées d'un point dans notre espace à $2p$ dimensions.

Soit M' un point situé sur la variété $S_{n,q}$ qui a $2p - 1$ dimensions, et dont les coordonnées seront x'_k et y'_k.

Soit M le point de coordonnées courantes x_k et y_k. Soit

$$r = \sqrt{\Sigma(x_k - x'_k)^2 + \Sigma(y_k - y'_k)^2}$$

la distance de ces deux points. Soit $d\omega'$ un élément de la variété $S_{n,q}$ ayant pour centre de gravité le point M'. Soit δ' une fonction quelconque des coordonnées du point M' et envisageons l'intégrale

$$V = \int \frac{\delta' \, d\omega'}{r^{2p-2}}$$

étendue à tous les éléments $d\omega'$ de la variété $S_{n,q}$. C'est ce qu'on appelle le potentiel d'une *simple couche*. Pour tous les points situés en dehors de $S_{n,q}$, c'est une fonction holomorphe des x et des y; cette fonction reste finie ainsi que ses dérivées quand le point M vient sur $S_{n,q}$. Si la variété $S_{n,q}$ est analytique et si d'autre part δ' est une fonction analytique des coordonnées de M', il arrivera que la fonction V pourra être continuée analytiquement au delà de la coupure $S_{n,q}$. Soit alors M_1 et M_2 deux points voisins l'un de l'autre, mais situés de part et d'autre de cette coupure. Soient V_1 et V_2 les valeurs de l'intégrale V en ces deux points; soit V' la continuation analytique de la fonction V quand partant du point M_1 on franchit la coupure et soit V'_2 la valeur de V' en M_2.

Alors V'_2 comme V_2 seront des fonctions analytiques des coordonnées de M_2, mais V'_2 ne sera pas en général égal à V_2. Nous devons observer que dans le cas d'une simple couche, la fonction V ne subit pas un saut brusque quand on franchit la coupure; de sorte que sur la coupure même

$$V_2 = V'_2.$$

Il n'en est pas de même des dérivées, et si l'on représente en particulier par $\frac{dV}{dn}$ la dérivée estimée suivant la normale à la coupure $S_{n,q}$, la différence

$$\frac{dV_2}{dn} - \frac{dV'_2}{dn}$$

sur la coupure même ne sera pas nulle, mais elle sera égale à δ' à un facteur constant près qui ne dépendra que du nombre $2p$ des dimensions.

Soit maintenant ε' une autre fonction analytique des coordonnées de M', et considérons l'intégrale

$$W = \int \varepsilon'\, d\omega' \frac{dr^{2-2p}}{dn},$$

c'est ce qu'on appelle le potentiel d'une *double couche*. Alors si nous appelons encore W_1 et W_2 les valeurs de W aux points M_1 et M_2, nous verrons que W_1 est une fonction analytique des coordonnées de M_1, comme W_2 de celles de M_2. De plus W peut être continué analytiquement au delà de la coupure, et si l'on appelle W' cette continuation et W'_2 la valeur de W' en M_2, alors W'_2 sera fonction analytique de M_2.

Sur la coupure même on aura $\frac{dW_2}{dn} = \frac{dW'_2}{dn}$, mais la différence $W_2 - W'_2$ ne sera pas nulle, elle sera égale à ε' à un facteur constant près ne dépendant que du nombre $2p$ des dimensions.

Nous reprendrons maintenant notre fonction holomorphe

$$\Phi - \Phi = \log \frac{P_q}{P_n}$$

et nous considérerons sa partie réelle que j'appellerai $R_{n,q}$

$$R_{n,q} = \log \left| \frac{P_q}{P_n} \right|.$$

Nous prendrons alors

$$\delta = \frac{dR_{n,q}}{dn}, \qquad \varepsilon' = R_{n,q}$$

et j'envisagerai l'intégrale

$$J_{n,q} = a V + b W,$$

les a et les b étant des constantes.

J'appellerai $J'_{n,q}$ le prolongement analytique de $J_{n,q}$ par delà la coupure. Si les coefficients constants a et b sont convenablement choisis (c'est-à-dire s'ils sont les inverses des coefficients constants dont je parlais tout à l'heure et qui ne dépendent que du nombre $2p$ des dimensions), nous aurons

$$J'_{n,q} - J_{n,q} = R_{n,q}.$$

Soit en effet Ψ une fonction qui soit égale à $J_{n,q}$ d'un côté de la coupure et à $J_{n,q} + R_{n,q}$ de l'autre côté de la coupure. Des deux côtés de la coupure Ψ sera une fonction *harmonique* des $2p$ variables x et y; je veux dire par là qu'elle sera holomorphe et satisfera à l'équation de Laplace $\Delta \Psi = 0$; nous ne savons pas encore s'il en sera de même sur la coupure même; mais sur cette coupure la fonction Ψ est continue (si nos coefficients a et b sont convenablement choisis) et il en est de même de $\frac{d\Psi}{dn}$. On en conclut que la fonction Ψ reste holomorphe sur la coupure même et que $J_{n,q} + R_{n,q}$ est la continuation analytique de $J_{n,q}$.

Si donc on a une fonction qui soit égale à $\log |P_q| - J_{n,q}$ dans le domaine Δ_q et à $\log |P_n| - J_{n,q}$ dans le domaine Δ_n, cette fonction restera analytiquement continue quand on franchira la coupure $S_{n,q}$; elle sera harmonique dans l'ensemble des deux domaines Δ_q et Δ_n (sauf pour les points de Δ_n ou de Δ_q où P_n ou P_q s'annulent; en ces points c'est la différence $\Psi - \log |P_n|$ ou $\Psi - \log |P_q|$ qui est harmonique).

L'intégrale $J_{n,q}$ joue le rôle que joue dans la démonstration de M. Cousin l'intégrale de Cauchy

$$\frac{1}{2\pi i}\int\frac{(f_n-f_p)\,dz}{z-\lambda},$$

mais c'est une intégrale multiple.

Une propriété importante rapproche encore notre intégrale de celle de Cauchy. Soit $S'_{n,q}$ une coupure peu différente de $S_{n,q}$; je suppose que la frontière complète de $S'_{n,q}$ soit la même que celle de $S_{n,q}$ de façon que l'ensemble des deux coupures forme une variété fermée enfermant un certain domaine Δ'. Soit $K_{n,q}$ la même intégrale que $J_{n,q}$ mais prise le long de $S'_{n,q}$. On aura alors en dehors de Δ':

$$J_{n,q} = K_{n,q}$$

et à l'intérieur de Δ':

$$J_{n,q} = K_{n,q} - R_{n,q}.$$

Il en résulte que si ψ est une fonction égale à $\log|P_q| - J_{n,q}$ dans Δ_q et à $\log|P_n| - J_{n,q}$ dans Δ_n et si d'autre part ψ' est une fonction égale à $\log|P_q| - K_{n,q}$ dans le domaine $\Delta_q + \Delta'$, à $\log|P_n| - K_{n,q}$ dans le domaine $\Delta_n - \Delta'$, on aura

$$\psi = \psi'.$$

En d'autres termes on aura pu déplacer et déformer un peu la coupure $S_{n,q}$ sans changer la fonction ψ.

Cela posé, considérons quelques-uns de nos domaines en nombre fini

$$(3)\qquad \Delta_1,\ \Delta_2,\ \ldots,\ \Delta_q$$

et les coupures qui séparent ces domaines (3). Soit ψ une fonction qui est égale dans Δ_n [Δ_n étant l'un des domaines (3)] à

$$\psi = \log|P_n| - \Sigma J_{n,q}$$

la sommation étant étendue à toutes les intégrales $J_{n,q}$ relatives aux coupures qui séparent les domaines (3).

La fonction ψ est harmonique, dans l'ensemble des domaines (3) sauf *peut-être* pour les points qui appartiennent à plus de deux de ces domaines (et sauf *certainement* pour les points où l'un des P_n s'annule, car en ce point c'est $\psi - \log|P_n|$ qui est harmonique).

Soit donc N un des points qui appartiennent à plus de deux des domaines (3). De ce point comme centre décrivons une hypersphère H; déformons ensuite les coupures de façon qu'elles ne changent pas ni en dehors de l'hypersphère, ni sur l'hypersphère elle-même, mais seulement dans l'intérieur de l'hypersphère et qu'après la déformation, le point N ne soit plus sur une coupure.

Je dis que *la fonction ψ n'a pas changé*. Nous avons vu plus haut que cette fonction ne change pas quand une des coupures est déformée sans que sa frontière complète varie. Ici les choses ne se passent pas tout à fait comme cela, puisque le point N se trouvant sur la frontière commune de plusieurs coupures, nous sommes obligés de déformer ces frontières si nous voulons que le point N cesse d'être une coupure. C'est seulement en dehors de l'hypersphère H que les frontières ne varient pas.

Soit alors $S_{n,q}$ l'une des coupures, $S'_{n,q}$ la coupure déformée; ce sont des variétés à $2p-1$ dimensions; soit F la frontière de $S_{n,q}$, F' celle de $S'_{n,q}$; ce sont des variétés à $2p-2$ dimensions; quand pendant sa déformation continue, cette frontière va de sa position initiale F à sa position finale F', elle engendre une variété à $2p-1$ dimensions que j'appelle $T_{n,q}$. Alors la frontière de $T_{n,q}$ est formée de F et de F'; et la variété $S''_{n,q} = S'_{n,q} + T_{n,q}$ a pour frontière F, c'est-à-dire même frontière que $S_{n,q}$.

La fonction ψ ne change donc pas quand on remplace les coupures $S_{n,q}$ par les coupures $S''_{n,q}$. Qu'est-ce à dire ? Soit C une variété à $2p-2$ dimensions appartenant à plus de deux domaines (3); par exemple aux domaines Δ_1, Δ_2, ..., Δ_h; ces domaines doivent être contigus deux à deux, par exemple Δ_1 à Δ_2, Δ_2 à Δ_3, ..., Δ_{h-1} à Δ_h, Δ_h à Δ_1. Alors C fera partie de la frontière de h coupures, à savoir $S_{1,2}$, $S_{2,3}$, ..., $S_{h-1,h}$, $S_{h,1}$. Pendant la déformation, C ira de sa position initiale C à sa position finale C' et engendrera ainsi une variété U à $2p-1$ dimensions. D'après sa définition même, U fera partie de $T_{1,2}$, $T_{2,3}$, ..., $T_{h,1}$.

Cela posé si nous appelons ψ' et ψ'' ce que devient ψ quand on remplace les coupures $S_{n,q}$ par les coupures $S'_{n,q}$ et $S''_{n,q}$; nous avons déjà vu que $\psi = \psi''$. Quelle est la différence entre ψ' et ψ''. Ces deux fonctions ne peuvent différer que par les intégrales $j_{n,q}$ c'est-à-dire par des intégrales de même forme que les $J_{n,q}$ mais prises le long des variétés $T_{n,q}$, nous aurons donc

$$\psi'' - \psi' = \Sigma j_{n,q},$$

la sommation étant étendue à tous les $j_{n,q}$, c'est-à-dire à tous les $T_{n,q}$, mais nous pouvons écrire

$$j_{n,q} = \Sigma j'_{n,q},$$

en appelant $j''_{n.q}$ la même intégrale étendue à l'une des variétés telles que U dont se compose $T_{n.q}$. Il vient alors

$$\psi'' - \psi' = \Sigma\Sigma j''_{n.q},$$

l'un des signes Σ se rapportant aux différentes variétés telles que U et l'autre aux différents $T_{n.q}$ dont une de ces variétés fait partie. Or si je considère l'une de ces variétés, par exemple U, et que j'étende la sommation à tous les $T_{n.q}$ dont U fait partie, c'est-à-dire à $T_{1.2}$, $T_{2.3}$, ..., $T_{h.1}$, il viendra

$$\Sigma j''_{n.q} = j''_{1.2} + j''_{2.3} + \ldots + j''_{h.1}.$$

Nous nous rappelons comment a été définie l'intégrale $J_{n.q}$ et le rôle que jouait la fonction que j'ai appelée $R_{n.q}$. Nous voyons que l'intégrale totale $\Sigma j''_{n.q}$ se calculera de la même manière en remplaçant $R_{n.q}$ par

$$R_{1.2} + R_{2.3} + \ldots + R_{h.1},$$

l'intégration étant d'ailleurs étendue à U. Mais on a

$$R_{1.2} + R_{2.3} + \ldots + R_{h.1} = \log\left|\frac{P_2}{P_1}\right| + \log\left|\frac{P_3}{P_2}\right| + \ldots + \log\left|\frac{P_1}{P_h}\right| = 0.$$

Donc on aura

$$\psi' - \psi'' = 0, \qquad \psi = \psi'.$$

C. Q. F. D.

Or le point N n'est pas un point singulier pour ψ' puisqu'il n'est pas sur les coupures S'; ce n'est donc pas non plus un point singulier pour ψ.

D'où nous concluons que ψ est harmonique dans l'ensemble des domaines (3), sauf pour les points de D_n où P_n s'annule et où c'est $\psi - \log|P_n|$ qui est harmonique.

Reprenons les intégrales V, W, $J_{n.q}$; on se rappelle le rôle que jouait dans la définition de ces intégrales la fonction

$$r^{2-2p}$$

qui dépend des x, des y, des x' et des y'. Développons-la suivant les puissances des x et des y et soit

$$r^{2-2p} = \rho_0 + \rho',$$

où ρ_0 représente l'ensemble des termes de degré 0, 1 ou 2 par rapport aux x et aux y et ρ' l'ensemble des termes de degré supérieur.

Soit maintenant $L_{n.q}$ une intégrale analogue à $J_{n.q}$, mais où r^{2-2p} est remplacé par ρ'; soit maintenant χ une fonction définie comme ψ, mais où les $J_{n.q}$ sont remplacées par les $L_{n.q}$, de telle façon que dans Δ_n on ait

$$\chi = \log|P_n| - \Sigma L_{n.q};$$

la fonction χ jouira des mêmes propriétés que la fonction ψ, dont elle ne différera d'ailleurs que par un polynôme du second degré en x et y.

Mais supposons que l'on prenne un nombre de plus en plus grand de domaines (3) de façon que l'ensemble de ces domaines tende à embrasser l'espace tout entier; de sorte enfin qu'à la limite la fonction χ (resp. $\chi - \log|P_n|$) soit harmonique dans tout l'espace.

Pour que ce passage à la limite soit légitime, il faut que la série $\Sigma L_{n.q}$ converge; or c'est ce qu'il est aisé de constater, tandis que la série $\Sigma J_{n.q}$ aurait été divergente. Nous n'avons qu'à reproduire ici la démonstration du Tome 22 (p. 167 et 168). La fonction χ jouissant d'ailleurs des mêmes propriétés que la fonction V du Tome 22, la démonstration s'achèverait de la même manière.

IV. Autre forme de la démonstration.

Mais on aura avantage à mettre la démonstration sous une forme un peu différente.

Nous pourrons supposer d'abord que dans un certain domaine D, assez grand pour qu'un prismatoïde des périodes II y soit contenu tout entier, notre fonction abélienne F peut être mise sous la forme du quotient $\frac{P}{Q}$ de deux séries entières convergeant dans tout le domaine D.

Cela peut s'établir aisément en partant des hypothèses du paragraphe précédent, et cela de plusieurs manières, soit par la méthode de M. Cousin, soit par ma méthode du Tome 2, soit par la méthode mixte du paragraphe précédent.

D'ailleurs P et Q n'auront pas de facteur commun s'annulant à l'intérieur de D.

Si nous augmentons nos variables d'une période fondamentale α_i, $P(v_i)$ et $Q(v_i)$ deviendront $P(v_i + \alpha_i)$ et $Q(v_i + \alpha_i)$. Les séries $P(v_i)$ et $Q(v_i)$ convergent dans le domaine D; les séries $P(v_i - \alpha_i)$ et $Q(v_i - \alpha_i)$ convergeront dans un domaine D' que l'on obtiendra en faisant subir à D une translation représentée en grandeur et direction par la période α_i. Les deux domaines D et D' ont une partie commune puisque D est plus grand qu'un prismatoïde des périodes. Dans cette partie commune, les deux séries $P(v_i)$ et $P(v_i + a_i)$ convergent et leur rapport

$$\frac{P(v_i)}{P(v_i - a_i)}$$

ne peut devenir ni nul ni infini. Si en effet il s'annulait par exemple, les deux séries

$$P(v_i), \qquad Q(v_i) = P(v_i)\frac{Q(v_i - a_i)}{P(v_i - a_i)}$$

auraient un facteur commun $P(v_i)$ s'annulant à l'intérieur de D.

Nous allons maintenant définir une fonction auxiliaire que nous appellerons W. Soient M et M' deux points ayant pour coordonnées, le premier x_k, y_k, le second x'_k, y'_k; soit

$$r = \sqrt{\Sigma(x_k - x'_k)^2 + \Sigma(y_k - y'_k)^2}$$

leur distance.

Soit M'' un point ayant pour coordonnée $x'_k + b'_k$, $y'_k + c'_k$ en désignant par b'_k et c'_k les parties réelle et imaginaire d'une des périodes a'_k de notre fonction abélienne (je veux dire, soit d'une période fondamentale, soit d'une des combinaisons en nombre fini de ces périodes fondamentales, c'est-à-dire d'une période quelconque).

Soit ρ la distance des points M et M''.

On sait que r^{2-2p} est une fonction harmonique des x et des y, et il en est évidemment de même de ρ^{2-2p}. Supposons qu'on développe ρ^{2-2p} suivant les puissances des x et des y et que l'on écrive

$$\rho^{2-2p} = \sigma + \tau,$$

en représentant par σ l'ensemble des termes de degré 0, 1 et 2 et par τ l'ensemble des termes de degré supérieur. En envisageant la période zéro, on aura en particulier

$$r^{2-2p} = \sigma_0 + \tau_0.$$

Il est clair que τ est encore une fonction harmonique. Nous poserons alors

$$W = \Sigma\tau,$$

la sommation étant étendue à toutes les périodes, en y comprenant la période zéro.

Il est aisé de voir que la série $\Sigma\tau$ converge uniformément et l'on en conclut que W est une fonction harmonique des x et des y satisfaisant à l'équation de Laplace $\Delta W = 0$, sauf quand le point M se confond avec le point M'', c'est-à-dire quand le vecteur MM' représente une période quelconque en grandeur et direction.

Soient maintenant φ et ψ deux *faces* opposées du prismatoïde II; soit a la période fondamentale correspondante, de telle sorte qu'on passe de ψ à φ en changeant v_i en $v_i + a_i$. La face φ appartient alors à la fois aux domaines D et D'. Dans la partie commune à ces deux domaines, qui comprend la face φ, la fonction

$$\log P(v_i - a_i) - \log P(v_i)$$

est holomorphe ainsi que nous l'avons vu. Nous appellerons $U + iV$ cette fonction holomorphe, et sa partie réelle U sera évidemment une fonction harmonique des x et des y.

Soit $d\omega'$ un élément de la face φ et supposons que le point M' défini plus haut soit au centre de gravité de $d\omega'$. Soit U' la valeur de U au point M'.

Considérons alors l'intégrale

$$J = \int \left(W \frac{dU'}{dn} - \frac{dW}{dn} U' \right) d\omega'$$

étendue à tous les éléments $d\omega'$ de la face φ. Je désigne, bien entendu, par $\frac{dU'}{dn} dn$ et $\frac{dW}{dn} dn$ les accroissements que subissent les fonctions U' et W quand le point M' subit un déplacement dn, normalement à la face φ.

Il est clair que J est une fonction harmonique des x et des y, sauf quand le point M se trouve sur la face φ ou sur l'une de ses transformées par l'addition d'une période. Et en effet quand le point M coïncide avec le point M' (qui est sur la face φ) ou avec l'un des points M'' (c'est-à-dire avec un des transformés de M' par l'addition d'une période), la fonction W devient infinie.

La face φ jointe à ses transformées par l'addition d'une période forme une suite indéfinie de variétés planes à $2p - 1$ dimensions, parallèles et équidistantes. Soient S ces variétés.

Alors la fonction J est analytique, sauf quand on franchit l'un des S. Qu'arrive-t-il maintenant quand le point M franchit l'un des S? Soit N'' un point de l'un des S, et N' le point correspondant de φ. Déformons alors légèrement la face φ dans la partie voisine du point N' et soit φ' le résultat de la déformation. Nous pourrons supposer que N' n'est pas sur φ', et que toute la partie de φ qui n'est pas voisine de N' n'a pas subi de déformation et coïncide par conséquent avec la partie correspondante de φ'.

Alors entre φ et φ' il y aura un petit domaine Δ dont la frontière se composera de la partie de φ qui n'appartient pas à φ' et de la partie de φ' qui n'appartient pas à φ.

Nous considérerons également les transformés de φ, de φ' et de Δ par l'addition d'une période. Le point N'' se trouve sur l'un des transformés de φ, mais non pas sur l'un des transformés de φ'; il est donc sur la frontière de l'un des transformés de Δ, que j'appellerai Δ'.

Cela posé, considérons l'intégrale J' qui est formée comme J, mais étendue à φ' et non plus à φ. Elle sera analytique sauf quand le point M sera sur φ' ou sur l'un de ses transformés.

La différence des deux intégrales est égale à

$$J - J' = \int \left(W \frac{dU}{dn} - \frac{dW}{dn} U \right) d\omega,$$

l'intégration étant étendue à la frontière du domaine Δ. Elle reste analytique sauf quand le point M est sur la frontière de Δ ou de l'un de ses transformés. Voyons par exemple ce qui se passe quand le point M est voisin de la frontière de Δ' et plus particulièrement voisin de N''.

Quand le point M vient en N'' et le point M' en N', la fonction $W = \Sigma\sigma$ devient infinie mais un seulement des termes de la somme $\Sigma\sigma$ devient infini; soit ρ_1^{2-2p} le ρ^{2-2p} correspondant. Alors $W - \rho_1^{2-2p}$ reste finie. Posons

$$W - \rho_1^{2-2p} = H.$$

Nous aurons

$$J - J' = K - K_1,$$

avec

$$K = \int \left(H \frac{dU}{dn} - U \frac{dH}{dn} \right) d\omega,$$

$$K_1 = \int \left(\rho_1^{2-2p} \frac{dU}{dn} - U \frac{d\rho_1^{2-2p}}{dn} \right) d\omega,$$

les deux intégrales étant étendues à la frontière de Δ.

La fonction H est une fonction harmonique des x' et des y' (nous avons déjà vu qu'elle est harmonique par rapport aux x et aux y, mais je la considère maintenant comme fonction des x' et des y'). Elle reste analytique à l'intérieur de Δ, que le point M soit intérieur ou extérieur à Δ' ou qu'il soit sur la frontière de Δ', pourvu toutefois que ce point M, restant voisin de Δ' comme nous le supposons, ne soit intérieur à aucun des autres transformés de Δ.

De même la fonction U' est harmonique et analytique à l'intérieur de Δ. Dans ces conditions le théorème de Green nous enseigne que l'intégrale K est nulle. En ce qui concerne l'intégrale K_1, ce même théorème nous enseigne qu'elle est nulle si le point M est extérieur à Δ'. Si le point M est intérieur à Δ', notre intégrale K_1 est égale, toujours d'après le même théorème, à

$$\alpha U'_0,$$

α étant un coefficient numérique qui ne dépend que du nombre $2p$ des dimensions et U_0 la valeur que prend U' quand la distance ρ_1 s'annule.

Or quand la distance ρ_1 s'annule, c'est que le point M' vient au point de l'intérieur de Δ qui correspond à la position du point M à l'intérieur de Δ'. Or soit $a'_k = b'_k + ic'_k$ la période dont l'addition transforme le point N' en N'' et Δ en Δ'. Quand les points M et M' occuperont les positions que j'ai dites, on aura

$$x_k = x'_k + b'_k, \qquad y_k = y'_k + c'_k;$$

on aura donc

$$U'_0 = U'(x_k - b'_k, y_k - c'_k)$$

et

$$K_1 = \alpha U'(x_k - b'_k, y_k - c'_k).$$

Donc quand M est extérieur à Δ', on a

$$J = J'.$$

Quand le point M franchit la coupure S dans le voisinage de N'', pour pénétrer dans Δ, l'intégrale J n'est pas continue, mais l'intégrale J' l'est. Donc J' est la continuation analytique de J au delà de la coupure S.

Quand M est intérieur à Δ', on a

$$J = J' + \alpha U'(x_k - b'_k, y_k - c'_k).$$

Donc la continuation analytique de J au delà de la coupure est

$$J + \alpha U'(x_k - b'_k, y_k - c'_k).$$

C'est la conclusion finale à laquelle je voulais arriver.

Le prismatoïde a $2p$ couples de faces opposées, φ_1 et ψ_1, φ_2 et ψ_2, $\dots$, φ_{2p}

et ψ_{2p}. Soient U_q et J_q la fonction analogue à U et l'intégrale analogue à J, relatives à la face φ_q.

Soit Φ une fonction qui dans le prismatoïde II est égale à

$$\log|P(v_i)|$$

et qui dans le prismatoïde II' transformé de II par l'addition de la période $a'_k = b'_k + ic'_k$ est égale à

$$\log|P(v_i - a'_i)|.$$

La fonction Φ est donc harmonique dans chacun des prismatoïdes, sauf aux points pour lesquels F s'annule ou devient indéterminée. Mais elle est discontinue quand on passe d'un prismatoïde dans l'autre. De plus elle est périodique par définition.

Si nous désignons par $a_{i,q}$ la période fondamentale qui correspond à la face φ_q et par $b_{i,q}$ et $c_{i,q}$ ses parties réelle et imaginaire, nous voyons d'abord que quand le point M franchit la face φ_q pour sortir de II, la fonction Φ subit un saut brusque égal à

$$\log|P(v_i - a_{i,q})| - \log|P(v_i)| = U_q(v_i).$$

Lorsque le point M franchit la transformée de la face φ_q par l'addition de la période a'_i, la fonction Φ subit un saut brusque égal à

$$\log|P(v_i - a'_i - a_{i,q})| - \log|P(v_i - a'_i)| = U_q(v_i - a'_i).$$

Considérons maintenant la fonction

$$\Omega = \Phi + \frac{1}{\chi}(J_1 + J_2 + \ldots + J_{2p}).$$

Nous voyons tout de suite que cette fonction est harmonique sauf en deux sortes de points :

1° Ceux où F s'annule; en ces points ce n'est pas Ω, mais

$$\Omega - \log|P(v_i)| \quad \text{ou} \quad \Omega - \log|P(v_i - a'_i)|$$

qui est harmonique.

2° Ceux qui sont sur la frontière de deux ou plusieurs prismatoïdes, points pour lesquels les fonctions Φ et J subissent une discontinuité analytique.

Parmi ces points nous distinguerons : 1° ceux qui n'appartiennent qu'à deux prismatoïdes et qui forment des variétés à $2p - 1$ dimensions, variétés qui ne sont autre chose que les faces φ_q et leurs transformées; et 2° ceux qui appartiennent à plus de deux prismatoïdes et qui forment des variétés à $2p-2$ dimensions ou à moins de $2p-2$ dimensions.

En ce qui concerne les premiers, on voit tout de suite que la fonction Ω reste analytique, et en effet Φ subit un saut brusque égal à U_q, J_q un saut brusque égal à $-\alpha U_q$; de sorte que le saut est nul pour $\Phi-\frac{1}{\alpha}J_q$ et par conséquent pour Ω, et que Ω coïncide avec son prolongement analytique.

Il est aisé d'en conclure qu'il en est encore de même en ce qui concerne les autres points qui font partie de plus de deux prismatoïdes.

Soit en effet A l'un de ces points; il appartiendra également à plusieurs des faces φ_q ou de leurs transformées. Reprenons l'intégrale

$$J=\int\left(W\frac{dU'}{dn}-\frac{dW}{dn}U'\right)d\omega'$$

étendue à la face φ. D'après l'hypothèse, le point A appartient à plusieurs des transformées de φ, par exemple aux transformées de φ par l'addition des périodes $a_i^{(1)}$, $a_i^{(2)}$, ..., $a_i^{(m)}$, transformées que je désignerai par $\varphi^{(1)}$, $\varphi^{(2)}$, ..., $\varphi^{(m)}$. Si je représente alors par $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, ..., $A^{(m)}$ les points qui se déduisent de A par la soustraction des périodes $a_i^{(1)}$, $a_i^{(2)}$, ..., $a_i^{(m)}$, ces m points seront tous sur φ, ou plutôt sur la frontière de la face φ.

Quand le point M viendra en A et le point M' en $A^{(k)}$, celle des expressions ρ^{2-2p} qui correspond à la période $a_i^{(k)}$ et que je représenterai par ρ_k^{2-2p} deviendra infinie. Nous avons donc m de ces expressions à savoir

$$\rho_1^{2-2p},\qquad \rho_2^{2-2p},\qquad \ldots,\qquad \rho_m^{2-2p}$$

qui peuvent devenir infinies quand M est en A et que M' est sur la face φ ou sur la frontière de cette face. Toutes les autres expressions ρ^{2-2p} restent finies.

Posons alors

$$\rho_1^{2-2p}+\rho_2^{2-2p}+\ldots+\rho_m^{2-2p}=w,$$

$$W=W^*+w;\qquad J=J^*+j,$$

$$J^*=\int\left(W^*\frac{dU'}{dn}-\frac{dW^*}{dn}U'\right)d\omega',$$

$$j=\int\left(w\frac{dU'}{dn}-\frac{dw}{dn}U'\right)d\omega'.$$

Comme la fonction W^* reste régulière, quelle que soit la position de M' sur φ, quand le point M est voisin de A, nous devons conclure que l'intégrale J' est régulière dans le voisinage de A.

Quant à j, elle est égale à l'intégrale

$$(1) \qquad \int \left(r^{2-2p} \frac{dU'}{dn} - \frac{dr^{2-2p}}{dn} U' \right) d\omega'$$

étendue, non plus à φ, mais à l'ensemble des transformées $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \ldots, \varphi^{(m)}$. Soit E cet ensemble. Il est clair que le point A appartient à la variété E et qu'il n'est pas sur la frontière de E (car dans ce dernier cas, il y aurait de l'autre côté de cette frontière une transformée de φ dont A devrait faire partie et d'après notre hypothèse $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \ldots, \varphi^{(m)}$ sont *toutes* les transformées de φ dont A fait partie).

L'intégrale (1) est une fonction holomorphe des x et des y, sauf quand le point M est sur E. Quand le point M vient en A, la fonction j éprouve donc une discontinuité analytique. Soit maintenant E' une autre variété à $2p-1$ dimensions, ayant même frontière que E, de telle façon que E et E' limitent un domaine δ. Comme A n'appartient pas à la frontière de E, nous pouvons supposer que A ne fait pas partie de E'.

Soit j' l'intégrale analogue à l'intégrale (1) étendue à E'. Ce sera une fonction holomorphe des x et des y sauf quand M est sur E'. *Elle sera donc holomorphe dans le voisinage du point* A.

Or en vertu du théorème de Green, les deux intégrales j et j' sont égales entre elles en dehors du domaine δ. *Donc l'intégrale j, et par conséquent aussi l'intégrale* J, *est susceptible d'être prolongée analytiquement au delà de la coupure dans le voisinage du point* A.

C'est là ce que je voulais d'abord démontrer.

Revenons maintenant à la fonction Ω. D'après ce qui précède, cette fonction pourrait admettre pour coupures les diverses transformées des faces φ_q; mais elle est toujours susceptible d'être prolongée analytiquement au delà de ces coupures, même dans le voisinage de A. De plus nous avons vu que quand on franchit l'une de ces coupures, la fonction Ω coïncide avec son prolongement analytique. La fonction Ω reste donc analytique et harmonique en A.

Il y aurait exception évidemment si au point A la fonction F s'annulait; ce serait alors $\Omega - \log|P(v_i)|$ ou $\Omega - \log|P(v_i - a'_i)|$ qui serait analytique et harmonique.

La fonction Ω jouissant des mêmes propriétés que la fonctions χ du paragraphe précédent et la fonction V du tome **22**, p. 169 et suivantes, pourra jouer le même rôle.

D'après la définition même de la fonction W, ses dérivées secondes sont des fonctions périodiques des x et des y. Soit en effet DW une des dérivées secondes de W par rapport aux variables x et y; plus généralement D sera un signe de dérivation par rapport aux x et aux y, et D' sera la dérivée correspondante prise par rapport aux variables x' et y'.

Si alors D est une dérivée seconde, nous aurons

$$\mathrm{D}W = \Sigma\, \mathrm{D}\tau, \qquad \mathrm{D}\rho^{2-2p} = \mathrm{D}\sigma + \mathrm{D}\tau.$$

Comme σ est un polynôme du second degré, $\mathrm{D}\sigma$ se réduit à une constante; d'autre part comme ρ est une fonction des différences $x - x'$, $y - y'$, nous aurons

$$\mathrm{D}\rho^{2-2p} = \mathrm{D}'\rho^{2-2p}.$$

Comme τ ne contient que des termes du troisième degré au moins, $\mathrm{D}\tau$ est du premier degré au moins et s'annule avec les x et les y; nous avons

$$\mathrm{D}'\rho^{2-2p} = \mathrm{D}\sigma + \mathrm{D}\tau.$$

Soit ρ_0 ce que devient ρ quand les x et les y s'annulent. La formule précédente devient donc pour $x = y = 0$:

$$\mathrm{D}'\rho_0^{2-2p} = \mathrm{D}\sigma.$$

Comme nous savons que $\mathrm{D}\sigma$ est une constante, cette formule nous donne la valeur de $\mathrm{D}\sigma$ et nous pouvons écrire

$$\mathrm{D}\tau = \mathrm{D}'\rho^{2-2p} - \mathrm{D}'\rho_0^{2-2p}.$$

La série

$$\mathrm{D}W = \Sigma(\mathrm{D}'\rho^{2-2p} - \mathrm{D}'\rho_0^{2-2p})$$

est absolument convergente. Quand x et y augmentent d'une période l'expression ρ^{2-2p} se transforme en une autre expression ρ'^{2-2p}. Quand x' et y' diminuent de la même période ρ^{2-2p} se change encore en ρ'^{2-2p}, mais en même temps ρ_0^{2-2p} se change en $\rho_0'^{2-2p}$. Nous pouvons écrire

$$\mathrm{D}W = \Sigma(\mathrm{D}'\rho'^{2-2p} - \mathrm{D}'\rho_0'^{2-2p}),$$

car les deux séries ne diffèrent que par l'ordre des termes.

Si maintenant x et y augmentent de la période en question, alors DW devient

$$\Sigma(D' \rho'^{\,2-2p} - D' \rho_0^{2-2p}),$$

donc DW a augmenté de

$$\Sigma(D' \rho_0'^{\,2-2p} - D' \rho_0^{2-2p}).$$

Cette série est absolument convergente, et il est aisé de vérifier que la somme en est nulle. Donc DW est une fonction périodique.

C. Q. F. D.

Si DW est périodique, il en sera de même de

$$DJ = \int \left(DW \frac{dU'}{dn} - U' \frac{dDW}{dn} \right) d\omega'.$$

D'ailleurs DΦ est périodique par définition et il doit en être de même de

$$D\Omega = D\Phi + \frac{1}{\chi} \Sigma DJ_q.$$

Ainsi les dérivées secondes de DΩ *sont des fonctions périodiques des* x *et des* y.

Nous allons introduire une autre fonction analogue à Ω et que j'appellerai Ω'. A cet effet je commence par définir une intégrale analogue à J et que j'appelle

$$J' = \int \left(W \frac{dV'}{dn} - \frac{dW}{dn} V' \right) d\omega'.$$

Cette intégrale diffère de J parce que U' y est remplacé par V'; V' est la valeur de la fonction V au point M', et je rappelle que V est la partie imaginaire de la fonction

$$\log P(v_i - a_i) - \log P(v_i),$$

dont U est la partie réelle.

On voit que dans le voisinage du champ d'intégration envisagé, la fonction V reste holomorphe.

Je définirai la fonction Φ' comme il suit: dans le prismatoïde Π' (*vide supra*) elle sera égale à

$$\arg P(v_i - a'_i).$$

Elle ne sera donc définie qu'à un multiple près de 2π.

Je poserai

$$\Omega' = \Phi' + \frac{1}{\alpha} \Sigma J'_q ;$$

et il est clair que la fonction Ω' jouira des mêmes propriétés que la fonction Ω, à cette différence près qu'elle ne sera déterminée qu'à un multiple près de 2π.

Quelles relations aurons-nous maintenant entre Ω et Ω'; la fonction J étant analytique et harmonique sauf sur les coupures, et ayant pour prolongement analytique

$$J - \alpha U(x_k - b'_k),$$

la dérivée DJ sera analytique et harmonique sauf sur les coupures et aura pour prolongement analytique

$$DJ - \alpha DU(x_k - b'_k).$$

De même la dérivée DJ′ sera analytique et harmonique sauf sur les coupures et aura pour prolongement analytique

$$DJ' - \alpha DV(x_k - b'_k).$$

Mais U et V sont les parties réelle et imaginaire d'une même fonction analytique des variables complexes v. On en conclut que chacune des dérivées secondes de U est égale à une des dérivées secondes de V. On aura par exemple

$$DU = D_1 V.$$

Comparons maintenant DJ et $D_1 J'$. Toutes deux sont harmoniques et analytiques sauf sur les coupures et elles ont respectivement pour prolongement analytique

$$DJ - \alpha DU(x_k - b'_k), \quad D_1 J' - \alpha D_1 V(x_k - b'_k) = D_1 J' - \alpha DU(x_k - b'_k).$$

Ainsi la différence $DJ - D_1 J'$ reste analytiquement continue sur les coupures; elle est donc analytique et harmonique dans tout l'espace.

De plus DJ de même que $D_1 J'$ est périodique; notre différence est donc analytique, harmonique et périodique dans tout l'espace; *c'est dire qu'elle se réduit à une constante* (*cf.* Appell, *Acta*, t. 3).

Il résulte de là que les dérivées de DJ sont égales aux dérivées correspondantes de $D_1 J'$

$$(2) \qquad \frac{d}{dx_k} DJ = \frac{d}{dx_k} D_1 J' ; \qquad \frac{d}{dy_k} DJ = \frac{d}{dy_k} D_1 J'.$$

Quelle est maintenant la signification des équations

$$\text{(3)} \qquad DH = D_1 H',$$

H et H′ désignant deux fonctions quelconques des x et des y. Pour nous en rendre compte formons explicitement nos équations

$$\text{(4)} \qquad DU = D_1 V.$$

Nous avons

$$\frac{dU}{dx_k} = \frac{dV}{dy_k}, \qquad \frac{dU}{dy_k} = -\frac{dV}{dx_k},$$

d'où

$$\frac{d^2U}{dx_k\,dx_j} = \frac{d^2V}{dy_k\,dx_j}, \qquad \frac{d^2U}{dx_k\,dy_j} = \frac{d^2V}{dy_k\,dy_j},$$
$$\frac{d^2U}{dy_k\,dx_j} = -\frac{d^2V}{dx_k\,dx_j}, \qquad \frac{d^2U}{dy_k\,dy_j} = -\frac{d^2V}{dx_k\,dy_j}.$$

Ce sont là nos équations (4). Pour avoir les équations (3), il suffit de remplacer U et V par H et H′. Ces équations peuvent donc s'écrire

$$\text{(5)} \qquad \frac{d}{dx_k}\frac{dH}{dx_j} = \frac{d}{dy_k}\frac{dH'}{dx_j}, \qquad \frac{d}{dy_k}\frac{dH}{dx_j} = -\frac{d}{dx_k}\frac{dH'}{dx_j}$$

avec les équations qu'on en déduirait en remplaçant x_j par y_j.

Ces équations signifient que

$$\frac{dH}{dx_j} + \sqrt{-1}\,\frac{dH'}{dx_j}, \qquad \frac{dH}{dy_j} + \sqrt{-1}\,\frac{dH'}{dy_j},$$

c'est-à-dire les dérivées premières de $H + \sqrt{-1}\,H'$, sont des fonctions analytiques des variables complexes v.

Nos équations (2) qui peuvent s'écrire

$$D\frac{dJ}{dx_k} = D_1\frac{dJ'}{dx_k}, \qquad D\frac{dJ}{dy_k} = D_1\frac{dJ'}{dy_k}$$

signifient alors que *les dérivées secondes de* $J + \sqrt{-1}\,J'$ *sont des fonctions analytiques des variables complexes* v.

Donc $J + \sqrt{-1}\,J'$ sera égal à une fonction analytique des v, plus un polynôme du second degré par rapport aux x et aux y.

Comme $\Phi + \sqrt{-1}\,\Phi'$ est par définition une fonction analytique de v, nous devons conclure que $\Omega + \sqrt{-1}\,\Omega'$ est égal à une fonction analytique des v, plus un polynôme du second degré par rapport aux x et aux y; toutefois cette fonction devient logarithmiquement infinie aux points où F s'annule.

Soit ϖ le polynôme du second degré dont il vient d'être question; alors

$$\Omega+\sqrt{-1}\,\Omega'-\varpi \quad \text{et} \quad \Theta=e^{\Omega+\sqrt{-1}\,\Omega'-\varpi}$$

sont des fonctions analytiques des variables complexes v; la dernière Θ est une fonction entière; en effet elle ne pourrait cesser d'être holomorphe qu'aux points où F s'annule, en ces points

$$\Omega+\sqrt{-1}\,\Omega'-\varpi-\log P(v_i-a'_i)=\Lambda$$

est holomorphe et par conséquent

$$\Theta=P(v_i-a'_i)e^{\Lambda}$$

est holomorphe également.

Les dérivées secondes de $\Omega+\sqrt{-1}\,\Omega-\varpi$ sont périodiques; nous l'avons vu pour Ω; nous le verrions de la même manière pour Ω', et les dérivées secondes de ϖ se réduisent à des constantes.

Il résulte immédiatement de là que Θ se reproduit multiplié par une exponentielle dont l'exposant est un polynôme du premier degré, quand les variables augmentent d'une période.

C'est une *fonction intermédiaire* pour employer l'expression assez mal justifiée de Briot et Bouquet. Notre fonction F est donc le quotient de deux fonctions intermédiaires.

V. Des fonctions intermédiaires.

L'étude des fonctions abéliennes se trouve ainsi naturellement ramenée à celle des *fonctions intermédiaires*, c'est-à-dire des fonctions entières qui se reproduisent par l'addition d'une période, à un *multiplicateur* près qui est une exponentielle du premier degré.

C'est principalement dans le Tome 8 de l'*American Journal of Mathematics* (1886) (1), que se trouvent exposées mes recherches sur ces fonctions intermédiaires.

(1) *Voir* ce Tome IV, p. 318.

On reconnaît tout de suite que les périodes et les multiplicateurs ne peuvent être quelconques.

Supposons que quand v'_i, augmentant d'une période, se change en $v'_i + a_{i.k}$, le logarithme de la fonction intermédiaire augmente de

$$P_k = \Sigma \alpha_{i.k} v_i + \beta_k,$$

de telle façon que le multiplicateur correspondant à la période $a_{i.k}$ soit e^{P_k}; on voit que le nombre

$$M_{k.j} = \sum_{i=1}^{p} (\alpha_{i.j} a_{i.k} - \alpha_{i.k} a_{i.j})$$

doit être égal à un entier multiplié par $2\pi\sqrt{-1}$. Il suffit pour s'en rendre compte d'exprimer que l'on obtient le même résultat en ajoutant d'abord la période $a_{i.k}$, puis la période $a_{i.j}$, ou en ajoutant ces deux mêmes périodes dans l'ordre inverse.

Ces nombres $M_{k.j}$ et les relations précédentes ont été étudiées par M. Frobenius dans le Tome 97 de *Crelle* dans son Mémoire sur les fonctions jacobiennes. J'ai repris cette étude à un autre point de vue dans le Mémoire cité de l'*American Journal*.

Les fonctions intermédiaires se ramènent immédiatement aux fonctions Θ; c'est-à-dire à celles où tous les nombres (pour un choix convenable des périodes) $M_{k.j}$ sont nuls, sauf p d'entre eux qui sont d'ailleurs tous égaux entre eux. En général cette réduction ne peut pas se faire de plusieurs manières essentiellement différentes; mais il n'en est pas de même quand les fonctions abéliennes considérées peuvent par une transformation convenable être ramenées soit aux fonctions elliptiques, soit à des fonctions abéliennes de rang moindre, c'est-à-dire dans les cas de réduction dont je parlerai plus loin.

Depuis M. Humbert a reconnu qu'il existe d'autres systèmes de périodes pour lesquelles, bien qu'on ne soit pas dans un des cas de réduction, il existe des fonctions intermédiaires singulières réductibles de plusieurs manières aux fonctions Θ. Les fonctions de M. Humbert ont une grande importance.

Il est aisé de voir quelle est la signification de ces nombres $M_{k.j}$.

Prenons le prismatoïde des périodes Π; c'est un domaine de l'espace à $2p$ dimensions. A chacune des

$$\frac{|\underline{(2p)}}{|\underline{q}\,|\underline{(2p-q)}}$$

combinaisons des $2p$ périodes q à q, correspond un système de polyèdres en forme de *parallélotopes* ou de *prismatoïdes* de l'espace à q dimensions, qui sont tous parallèles et égaux entre eux et qui sont au nombre de

$$2^{2p-q}.$$

C'est ainsi que dans l'espace ordinaire ($2p = 3$), un parallélépipède a six faces ($q = 2$) parallèles deux à deux ($2^{2p-q} = 2$) et réparties par conséquent en trois systèmes $\left(\dfrac{|\underline{2p}}{|\underline{q}\,|\underline{2p-q}} = 3\right)$, et que d'autre part il a douze arêtes ($q = 1$) parallèles quatre à quatre ($2^{2p-q} = 4$) et réparties par conséquent en trois systèmes $\left(\dfrac{|\underline{2p}}{|\underline{q}\,|\underline{2p-q}} = 3\right)$.

Parmi ces variétés nous avons considéré dans les paragraphes précédents celles qui correspondent à $q = 2p - 1$ et que nous avons appelées les *faces* du prismatoïde. Nous envisagerons maintenant plus particulièrement celles qui correspondent à $q = 1$ et que nous appellerons les *arêtes*, et celles qui correspondent à $q = 2$ et que nous appellerons, non pas les faces, mais les *parallélogrammes* (en abrégé prlg) du prismatoïde.

A chaque arête correspond donc une période, à chaque prlg un des nombres $M_{k,j}$.

Soit alors Θ une fonction intermédiaire quelconque et considérons l'intégrale

$$\int d\log\Theta$$

que nous prendrons le long du périmètre de l'un de nos prlg, correspondant par exemple au nombre $M_{k,j}$.

Le long du premier côté, l'intégrale sera

$$\Sigma\,\alpha_{i,k}v_i^0 + \beta_k$$

si les coordonnées du premier sommet sont v_i^0; le long du deuxième côté, elle sera

$$\Sigma\,\alpha_{i,j}(v_i^0 + a_{i,k}) + \beta_j,$$

le long du troisième

$$-\Sigma\,\alpha_{i,k}(v_i^0 + a_{i,j}) - \beta_k,$$

et enfin le long du quatrième

$$-\Sigma\,\alpha_{i,j}v_i^0 - \beta_j.$$

L'intégrale totale est donc

$$\Sigma(\alpha_{i,j}a_{i,k} - \alpha_{i,k}a_{i,j}) = \mathrm{M}_{k,j}.$$

Nous pouvons décomposer la surface de notre prlg en une infinité de contours plans fermés infiniment petits; la somme des intégrales

$$\int d\log\Theta$$

prises le long de ces différents contours sera égale à $\mathrm{M}_{k,j}$. Comme la quantité sous le signe $\int$ est une différentielle exacte, l'intégrale prise le long de l'un de ces contours sera nulle à moins que la fonction sous le signe $\int$ ne devienne infinie à l'intérieur du contour, c'est-à-dire que Θ ne s'annule à l'intérieur du contour.

Nous sommes donc conduit à rechercher les zéros de Θ situés sur la surface des prlg; c'est-à-dire les intersections de la variété à $2p-2$ dimensions $\Theta = 0$ avec le plan du prlg.

Je supposerai que nous n'avons que des intersections simples, c'est-à-dire que ce plan et la variété $\Theta = 0$ ne sont pas tangents l'un à l'autre. Il est clair que sauf des cas exceptionnels, il suffira de déplacer d'une façon convenable le prismatoïde parallèlement à lui-même pour qu'un pareil contact n'ait pas lieu. D'ailleurs dans ces cas exceptionnels, où ce contact ne peut être évité, les résultats que je vais démontrer s'appliquent encore, grâce à une généralisation presque immédiate.

Quelle est la condition pour que ce contact ait lieu? Soient Θ_0 et Θ_1 les parties réelle et imaginaire de Θ, x_i et y_i celles de v_i; alors Θ_0 et Θ_1 sont des fonctions des x et des y; soient $b_{i,k}$ et $c_{i,k}$ celles de $a_{i,k}$.

La condition cherchée peut s'écrire

$$\begin{aligned}\mathrm{D}_{k,j} = {} & \sum_i\left(b_{i,k}\frac{d\Theta_0}{dx_i} + c_{i,k}\frac{d\Theta_0}{dy_i}\right)\sum_i\left(b_{i,j}\frac{d\Theta_1}{dx_i} + c_{i,j}\frac{d\Theta_1}{dy_i}\right)\\ & -\sum_i\left(b_{i,j}\frac{d\Theta_0}{dx_i} + c_{i,k}\frac{d\Theta_0}{dy_i}\right)\sum_i\left(b_{i,k}\frac{d\Theta_1}{dx_i} + c_{i,k}\frac{d\Theta_1}{dy_i}\right) = 0.\end{aligned}$$

Nous supposerons donc que l'expression D n'est pas nulle en même temps que Θ à l'intérieur du prlg. Considérons donc un des zéros de Θ à l'intérieur de notre prlg. Notre intégrale prise le long d'un contour entourant ce zéro sera évidemment égal à

$$\pm 2\pi\sqrt{-1}.$$

Quant au signe il dépendra évidemment de celui de $D_{k,j}$. Nous pouvons faire des conventions telles que ce signe soit celui de $D_{k,j}$.

Nous sommes ainsi amené à distinguer les zéros pour lesquels $D_{k,j}$ est positif de ceux pour lesquels $D_{k,j}$ est négatif: je les appellerai pour abréger les *zéros positifs* et les *zéros négatifs*; et j'arrive à cette conclusion que le *nombre entier*

$$\frac{M_{k,j}}{2\pi\sqrt{-1}} \tag{1}$$

est égal à l'excès du nombre des zéros positifs sur celui des zéros négatifs. Quand on permute les indices k et j, le nombre $M_{k,j}$ change de signe; il en est de même de $D_{k,j}$; le prlg reste le même, mais il est parcouru en sens contraire.

Ce résultat est le même que celui que j'avais obtenu par une tout autre voie dans le Tome 9 des *Acta mathematica*, pages 369 et suiv. [1].

Considérons un segment de droite quelconque dont la projection sur l'axe des x_i soit ξ_i et dont la projection sur l'axe des y_i soit η_i. Posons

$$\xi_i = \sum_1^{2p} \mu_k b_{i,k}; \qquad \eta_i = \sum_1^{2p} \mu_k c_{i,k};$$

les coefficients μ ainsi définis pourront s'appeler les *coefficients caractéristiques* du segment considéré.

La longueur du segment est la racine carrée de

$$\Sigma\xi_i^2 + \Sigma\eta_i^2 = \psi(\mu),$$

$\psi(\mu)$ étant une forme quadratique définie positive par rapport à $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{2p}$.

Lorsque les μ sont entiers, le segment représente en grandeur, direction et sens une période, $\Sigma\mu_k a_{i,k}$, et les quantités α correspondantes seront $\Sigma\mu_k\alpha_{i,k}$.

Cela posé, envisageons deux segments ayant respectivement pour coefficients caractéristiques μ_k et μ'_k, et pour projections sur les axes ξ_i, η_i et ξ'_i, η'_i. La surface du parallélogramme construit sur ces deux segments sera la racine carrée de

$$\Omega(\mu, \mu') = \psi(\mu)\psi(\mu') - \frac{1}{4}\left(\Sigma\mu'_k \frac{d\psi}{d\mu_k}\right)^2.$$

Si les μ et les μ' sont des entiers, et que les deux segments soient des périodes,

---

[1] *Voir* Tome III, p. 440-489.

nons pouvons nous proposer de calculer le nombre M correspondant; pour cela dans l'expression de $M_{k,j}$, il faut remplacer

$$a_{i,k}, \quad \alpha_{i,k}, \quad a_{i,j}, \quad \alpha_{i,j}$$

par

$$\Sigma \mu_i a_{i,k}, \quad \Sigma \mu_i \alpha_{i,k}, \quad \Sigma \mu'_i a_{i,k}, \quad \Sigma \mu'_i \alpha_{i,k}.$$

On trouve ainsi

$$M(\mu, \mu') = \Sigma M_{k,j}(\mu_k \mu'_j - \mu'_k \mu_j),$$

la sommation étant étendue à toutes les combinaisons des deux indices k et j. On voit que M est une forme bilénaire par rapport aux coefficients μ et μ'.

De même pour calculer le nombre D correspondant à notre parallélogramme, il faut dans l'expression de $D_{k,j}$, remplacer $b_{i,k}$, $c_{i,k}$, $b_{i,j}$, $c_{i,j}$ par

$$\Sigma \mu_i b_{i,k}, \quad \Sigma \mu_i c_{i,k}, \quad \Sigma \mu'_i b_{i,k}, \quad \Sigma \mu'_i c_{i,k},$$

ce qui donne

$$D(\mu, \mu') = \Sigma D_{k,j}(\mu_k \mu'_j - \mu'_k \mu_j).$$

Si nous distinguons encore les zéros positifs ou négatifs suivant le signe de $D(\mu, \mu')$, nous verrons que l'excès du nombre des zéros positifs sur le nombre des zéros négatifs, est sur notre parallélogramme

$$\frac{M(\mu, \mu')}{2\pi\sqrt{-1}}.$$

Considérons maintenant une aire quelconque dans le plan de ce parallélogramme qui soit limitée par des segments représentant des périodes en grandeur et direction. Cette aire sera décomposable en un certain nombre n de parallélogrammes égaux, et l'on aura

$$n = \frac{S}{\sqrt{\Omega(\mu, \mu')}},$$

S *étant la surface de l'aire.*

L'excès du nombre des zéros positifs sur les zéros négatifs sera

$$n\frac{M(\mu, \mu')}{2\pi\sqrt{-1}} = \frac{S}{2\pi\sqrt{-1}} \frac{M(\mu, \mu')}{\sqrt{\Omega(\mu, \mu')}}.$$

On remarquera que le rapport

$$\frac{M(\mu, \mu')}{\sqrt{\Omega(\mu, \mu')}}$$

ne change pas, ni quand on multiplie tous les μ par un même facteur constant, ni quand on multiplie tous les μ' par un même facteur constant. Il ne change pas non plus quand on fait subir à μ_1 et à μ'_1 une substitution linéaire, et en même temps à μ_k et μ'_k la même substitution linéaire.

Ce rapport dépend donc seulement au moins en valeur absolue de la direction du plan du parallélogramme; cependant il changerait de signe si la substitution linéaire dont je viens de parler avait un déterminant négatif.

Considérons maintenant une aire qui ne soit plus plane, mais qui soit limitée par des segments de droite représentant en grandeur et direction des périodes.

Considérons les zéros de Θ qui sont sur cette aire; nous distinguerons les zéros positifs et négatifs d'après le signe de $D(\mu, \mu')$, en appelant μ_k et μ'_k les coefficients caractéristiques de deux droites menées dans le plan tangent à l'aire au point envisagé. Nous remarquerons que $D(\mu, \mu')$ ne change pas quand on fait subir à μ_1 et à μ'_1 une substitution linéaire de déterminant $+1$, et en même temps à μ_k et μ'_k la *même* substitution linéaire.

Je me propose alors de démontrer que l'excès N du nombre des zéros positifs sur celui des zéros négatifs est égal à

$$N = \int \frac{d\sigma}{2\pi\sqrt{-1}} \frac{M(\mu, \mu')}{\sqrt{\Omega(\mu, \mu')}}, \tag{2}$$

$d\sigma$ représentant un élément de l'aire, et μ et μ' les coefficients caractéristiques de deux droites menées dans le plan tangent.

Je diviserai la démonstration en trois parties :

1° Je suppose d'abord que l'aire se décompose en un certain nombre de parallélogrammes construits sur des périodes; la formule est alors une conséquence immédiate de celle que nous venons d'établir.

2° Je suppose que l'aire soit fermée.

Dans ce cas je remarque d'abord que N est nul. En effet l'aire étant fermée peut être considérée comme la frontière complète d'une variété V à 3 dimensions. Les points de cette variété où $\Theta = 0$ formeront une ligne; les points où cette ligne percera la frontière pour entrer dans V seront les zéros positifs, ceux où elle percera la frontière pour sortir de V seront les zéros négatifs. Il en résulte immédiatement que le nombre des zéros des deux espèces est le même.

D'autre part, je dis que l'intégrale double du second membre est nulle; on peut l'écrire en effet

$$\sum \frac{M_{k,j}}{2\pi\sqrt{-1}} \int d\mu_k^0\, d\mu_j^0$$

en désignant par μ_k^0 les coefficients caractéristiques du vecteur qui va de l'origine au centre de gravité de l'élément $d\sigma$.

L'aire étant fermée, on voit aisément que chacune des intégrales $\int d\mu_k^0\, d\mu_j^0$ est nulle.

3° Je suppose enfin que l'aire A soit quelconque, mais limitée par des segments représentant des périodes.

Dans ce cas je puis construire une aire A' ayant même frontière que A et décomposable en parallélogrammes construits sur des périodes. Le théorème est vrai pour A', il est vrai pour l'aire totale A + A' qui est fermée; il est donc vrai pour A.

Supposons enfin que l'aire A soit tout à fait quelconque et ne soit plus limitée par des segments représentant des périodes. Dans quelle mesure l'équation (2) restera-t-elle vraie? Supposons que l'aire A soit très grande, que par exemple ses dimensions linéaires soient des infinis grands du premier ordre et sa surface un infini du second ordre. Je dis alors que l'égalité (2) dont les deux membres sont des infinis grands du second ordre, reste vraie à des quantités près infiniment grandes du premier ordre.

Nous pouvons en effet construire une ligne brisée fermée, composée de segments représentant des périodes, et s'écartant peu du périmètre de l'aire A; je veux dire par là que la distance de cette ligne brisée à ce périmètre restera plus petite que la plus grande diagonale du prismatoïde II. Nous pourrons alors construire une aire A', limitée d'une part par le périmètre de A, d'autre part par cette ligne brisée, et dont la surface sera du même ordre que le périmètre de A, c'est-à-dire du premier ordre.

Soient alors N et J la valeur des deux membres de l'égalité (2), (c'est-à-dire de l'excès de l'intégrale double) pour l'aire A, soient N' et J' les deux quantités correspondantes pour l'aire A'; N + N' et J + J' les deux quantités correspondantes pour l'aire A + A'.

Comme l'aire A + A' est limitée par des segments représentant des périodes, on a

$$N + N' = J + J'.$$

D'autre part N′ et J′ sont du même ordre que la surface de A′, c'est-à-dire du premier ordre. Donc

$$N = J$$

aux quantités près du premier ordre. C. Q. F. D.

Si en particulier l'aire A est plane, mais quelconque, on aura aux quantités près du premier ordre

$$N = \frac{S}{2\pi\sqrt{-1}} \frac{M(\mu, \mu')}{\sqrt{\Omega(\mu, \mu')}}.$$

Les μ_k et les μ'_k sont les coefficients caractéristiques de deux droites quelconques du plan ; nous n'avons plus besoin de supposer qu'ils sont entiers ou même commensurables.

Mais parmi les plans possibles, nous distinguerons ceux qui sont parallèles à un plan P donné par les équations

$$(3) \qquad \frac{v_1}{\beta_1} = \frac{v_2}{\beta_2} = \ldots = \frac{v_p}{\beta_p},$$

les β étant des coefficients *complexes* quelconques.

Soient γ_i et δ_i les parties réelle et imaginaire de β_i, nous pourrons envisager en particulier deux droites du plan P parallèles respectivement aux deux droites

$$\frac{x_i}{\gamma_i} = \frac{x_k}{\gamma_k} = \frac{y_i}{\delta_i} = \frac{y_k}{\delta_k}, \qquad \frac{x_i}{-\delta_i} = \frac{x_k}{-\delta_k} = +\frac{y_i}{\gamma_i} = +\frac{y_k}{\gamma_k}.$$

Ce sont les coefficients caractéristiques de ces deux droites que nous appellerons respectivement μ_k et μ'_k, de sorte que nous aurons

$$(4) \qquad \begin{cases} \gamma_i = \Sigma b_{i,k} \mu_k, & \delta_i = \Sigma c_{i,k} \mu_k, \\ -\delta_i = \Sigma b_{i,k} \mu'_k, & \gamma_i = \Sigma c_{i,k} \mu'_k, \end{cases}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} D = {} & \sum \left(\gamma_i \frac{d\Theta_0}{dx_i} + \delta_i \frac{d\Theta_0}{dy_i} \right) \sum \left(-\delta_i \frac{d\Theta_1}{dx_i} + \gamma_i \frac{d\Theta_1}{dy_i} \right) \\ & - \sum \left(\gamma_i \frac{d\Theta_1}{dx_i} + \delta_i \frac{d\Theta_1}{dy_i} \right) \sum \left(-\delta_i \frac{d\Theta_0}{dx_i} + \gamma_i \frac{d\Theta_0}{dy_i} \right). \end{aligned}$$

Or il est aisé de voir que

$$\Sigma \beta_i \frac{d\Theta}{dv_i}$$

a pour partie réelle

$$\sum\left(\gamma_i\frac{d\Theta_0}{dx_i}-\delta_i\frac{d\Theta_0}{dy_i}\right)=\sum\left(-\delta_i\frac{d\Theta_1}{dx_i}-\gamma_i\frac{d\Theta_1}{dy_i}\right)$$

et pour partie imaginaire

$$\sum\left(\gamma_i\frac{d\Theta_1}{dx_i}+\delta_i\frac{d\Theta_1}{dy_i}\right)=-\sum\left(-\delta_i\frac{d\Theta_0}{dx_i}+\gamma_i\frac{d\Theta_0}{dy_i}\right)$$

de sorte que

$$P=\left|\sum\zeta_i\frac{d\Theta}{dv_i}\right|^2$$

est essentiellement positif.

Il n'y a plus alors que des zéros positifs.

Le rapport $\frac{N}{S}$ représente alors la *densité moyenne* des zéros dans un plan parallèle à P, c'est-à-dire la limite vers laquelle tend le rapport du nombre des zéros contenus dans une aire située dans ce plan, à la surface de cette aire, quand cette surface croît indéfiniment. Cette densité moyenne est donc égale à

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\,\frac{M(\mu,\mu')}{\sqrt{\Omega}},$$

les coefficients μ et μ' étant déterminés par les équations (4).

Il résulte de là que pour ces valeurs des μ et μ', l'expression

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}M(\mu,\mu')$$

est essentiellement positive.

Ce résultat peut se mettre encore sous d'autres formes.

Posons

$$\xi_i=\sum b_{ik}\mu_k,\qquad \xi_{i+p}=\sum c_{ik}\mu_k,$$
$$\xi'_i=\sum b_{ik}\mu'_k,\qquad \xi'_{i+p}=\sum c_{ik}\mu'_k,$$

alors notre expression

$$\frac{M(\mu,\mu')}{2\pi\sqrt{-1}}$$

deviendra une forme bilinéaire des ξ et des ξ' que je puis écrire

$$\sum A_{kj}(\xi_j\xi'_k-\xi_k\xi'_j).$$

Cette forme devra être essentiellement positive si l'on y fait

$$\xi_i = \gamma_i, \qquad \xi_{i+p} = \delta_i, \qquad \xi'_i = -\delta_i, \qquad \xi'_{i+p} = \gamma_i.$$

Or par cette substitution notre forme doit devenir une forme quadratique par rapport aux γ et aux δ; cette forme quadratique doit être définie positive.

Posons maintenant

$$\mu_k + \sqrt{-1}\,\mu'_k = x_k, \qquad \mu_k - \sqrt{-1}\,\mu'_k = x^0_k,$$

les équations (4) nous donneront

$$\Sigma a_{i,k} x_k = 0, \qquad \Sigma a_{i,k} x^0_k = 2\beta_i.$$

Il vient alors

$$\mu_k \mu'_j - \mu_j \mu'_k = (x_k x^0_j - x_j x^0_k)\frac{-1}{2\sqrt{-1}},$$

de sorte que

$$\frac{M}{2\pi\sqrt{-1}} = \frac{1}{4\pi}\Sigma M_{k,j}(x_k x^0_j - x_j x^0_k).$$

La forme à variables conjuguées qui figure dans le second membre est donc essentiellement positive, si $\Sigma a_{i,k} x_k$ est assujetti à être nul.

On reconnaît là l'inégalité de Riemann, généralisée par Frobenius (*Crelle*, t. 97, p. 21). Mais la voie par laquelle nous y sommes parvenu diffère beaucoup à la fois de celle de Riemann et de celle de Frobenius.

Je crois que les considérations qui précèdent sont de nature à mieux faire comprendre la signification des nombres $M_{k,j}$, et les relations de ces nombres avec la répartition des zéros des fonctions Θ.

VI. — Cas de réduction.

Dans quels cas une intégrale abélienne appartenant à une courbe de genre p peut-elle être réduite à une intégrale abélienne appartenant à une courbe de genre moindre ?

Dans quels cas une courbe de genre p admettra-t-elle q intégrales abéliennes de première espèce, admettant seulement $2q$ périodes ? Ou, ce qui revient au même, dans quels cas une intégrale abélienne appartenant à une courbe de genre p peut-elle être calculée à l'aide de systèmes de fonctions abéliennes de *rang* moindre que p, c'est-à-dire admettant moins de p variables ?

Enfin dans quels cas des fonctions abéliennes de rang p peuvent-elles être réduites à des fonctions abéliennes de rang moindre ?

Telles sont les questions qui ont occupé d'abord Weierstrass et M. Picard et que j'ai abordées à mon tour, d'abord dans le *Bulletin de la Société mathématique de France* (t. 12), puis dans le Tome 8 de l'*American Journal* [1].

Nous trouvons d'abord le cas où la fonction Θ peut être regardée comme le produit de p fonctions Θ elliptiques. C'est ce que j'appelle le *cas singulier elliptique*.

Puis nous avons le cas où la fonction Θ est le produit de plusieurs fonctions Θ abéliennes de rang moindre. C'est ce que j'appelle le *cas singulier abélien*.

Nous avons ensuite les cas, qui par une transformation d'ordre convenable, peuvent être ramenés soit au cas singulier elliptique, soit au cas singulier abélien.

Il n'y a pas d'autres cas de réduction.

Mais, circonstance remarquable, un système quelconque de périodes, diffère toujours infiniment peu d'une infinité de systèmes correspondant à des cas de réduction, de la même façon qu'un nombre réel quelconque diffère toujours infiniment peu d'une infinité de nombres rationnels.

Enfin si un système de fonctions abéliennes peut *de deux manières différentes* être ramené par une transformation, au cas singulier elliptique, cette réduction peut se faire *d'une infinité de manières différentes*. C'est ce qu'avait déjà remarqué M. Picard dans certains cas particuliers.

Je me borne à énoncer succinctement ces résultats; mais je dois cependant expliquer le parti qu'on en peut tirer pour l'étude des fonctions abéliennes les plus générales.

On peut les utiliser de trois manières différentes :

1° On peut résoudre un problème dans le cas singulier elliptique, et montrer ensuite que le résultat ne peut être différent dans ce cas singulier de ce qu'il est dans le cas général.

C'est ainsi par exemple que j'ai déterminé le nombre des zéros communs à p fonctions Θ; et M. Wirtinger a également tiré un grand parti de ce procédé.

2° On peut profiter de cette circonstance signalée plus haut qu'étant donnée

---

[1] *Voir* Tome III, p. 333-351 et ce Tome IV, p. 318.

une fonction abélienne quelconque, on peut toujours trouver une infinité de fonctions abéliennes réductibles qui en diffèrent aussi peu qu'on le veut.

C'est comme cela que j'ai déterminé la somme des zéros communs à p fonctions Θ.

3° On peut étudier spécialement les cas qui diffèrent peu du cas singulier elliptique, ou du cas singulier abélien.

C'est ce que j'ai fait dans le *Journal de Liouville* 1895 (¹) quand j'ai voulu étudier les conditions auxquelles une fonction Θ de rang p doit satisfaire pour être une fonction Θ spéciale, c'est-à-dire une fonction Θ de Riemann engendrée par une courbe algébrique de genre p.

Enfin c'est sur l'étude des cas de réduction qu'est fondée la démonstration du théorème B qui a été imaginée d'abord par Weierstrass et que nous avons retrouvée, M. Picard et moi, et publiée dans les *Comptes rendus* (²).

VII. Zéros des fonctions Θ.

Les fonctions intermédiaires peuvent toujours se ramener aux fonctions Θ, soit immédiatement, soit après un changement de périodes. J'appelle fonctions Θ les fonctions intermédiaires pour lesquelles p des multiplicateurs se réduisent à des constantes, et les p autres à des exponentielles. La plupart des auteurs ont attribué une importance prépondérante et presque exclusive à celles de ces fonctions où les nombres appelés caractéristiques sont des entiers. J'ai toujours trouvé beaucoup plus commode de m'affranchir de cette restriction et d'attribuer à ces caractéristiques des valeurs quelconques. En revanche j'ai supposé le plus souvent que les p premiers multiplicateurs étaient égaux à 1, ce qui ne restreint pas la généralité d'une façon essentielle.

Quoi qu'il en soit, on sait que le nombre des fonctions Θ d'ordre m, linéairement indépendantes et ayant mêmes multiplicateurs est égal à m^p ; si on les regarde comme les coordonnées homogènes d'un point dans l'espace à $m^p - 1$ dimensions, ce point engendrera une variété à p dimensions. J'ai étudié cette variété principalement dans le *Journal de Liouville*, 1895 et j'ai en particulier déterminé son degré de deux manières différentes.

(¹) *Voir* ce Tome IV, p. 384.
(²) *Voir* ce Tome IV, p. 307.

Le nombre des zéros communs à p fonctions Θ d'ordre

$$m_1, m_2, \ldots, m_p$$

est égal à

$$(1) \qquad m_1 m_2 \ldots m_p . p!.$$

C'est ce que j'ai démontré dans le Tome II du *Bulletin de la Société mathématique de France* (1).

Dans le *Journal de Liouville*, j'ai abordé un problème qui contient à la fois comme cas particulier celui dont je viens d'énoncer la solution, et une question résolue autrefois par Riemann.

Soit un système de fonctions abéliennes *spéciales* au sens du paragraphe précédent. Soient $\Theta_1(v_i)$, $\Theta_2(v_i)$, $\ldots$, $\Theta_q(v_i)$ q fonctions Θ. Soit $u_i(x)$ l'intégrale abélienne de première espèce qui sur la courbe de genre p qui engendre ces fonctions Θ correspond à la variable v_i. Combien les équations

$$\Theta_k[u_i(x_1) + u_i(x_2) + \ldots + u_i(x_q)] = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, q),$$

où x_1, x_2, $\ldots$, x_q sont les inconnues, admettent-elles de solutions ?

La solution de cette question est donnée par une formule qui contient comme cas particuliers la formule (1) et celle de Riemann.

VIII. — Fonctions spéciales.

Quelle est la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction abélienne soit spéciale ?

Riemann a démontré que pour les fonctions spéciales, la variété à $p-1$ dimensions

$$\Theta = 0$$

est une *variété doublement de translation*.

Sophus Lie a établi ensuite que cette condition n'est pas seulement nécessaire mais qu'elle est aussi suffisante pour qu'une fonction Θ soit spéciale.

J'ai donné dans le *Bulletin de la Société mathématique de France*, 1901 (2), une nouvelle démonstration du théorème de Lie qui me semble plus simple et plus synthétique que celle de ce géomètre.

---

(1) *Voir* ce Tome IV, p. 502.
(2) *Voir* Tome VI.

D'autre part j'ai cherché dans le *Journal de Liouville*, 1895, à approfondir cette condition.

J'ai cherché à l'exprimer en fonction des périodes, et dans les cas voisins du cas singulier elliptique je suis parvenu à former les premiers termes du développement de la fonction des périodes qui, égalée à zéro, exprime que cette condition est remplie.

J'ai d'ailleurs étudié la courbe qui engendre cette variété de translation; cette courbe satisfait à $p-1$ équations de la forme

$$\Theta(v_i - e_{i,k}) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, p-1),$$

les e étant des constantes. Mais ces équations ne suffisent pas pour déterminer cette courbe; elles définissent une courbe *décomposable* dont la courbe envisagée n'est qu'une composante. Tous ces points étant presque évidents, j'ai cherché à me rendre compte des circonstances de cette décomposition.

IX. Somme des zéros.

Dans le Tome 8 de l'*American Journal*, j'ai démontré, en m'appuyant sur une généralisation du théorème d'Abel, que la somme des zéros communs à p fonctions intermédiaires est une constante, et ne dépend que des multiplicateurs de ces fonctions.

J'ai ensuite, en remarquant qu'on est toujours infiniment près d'un cas de réduction, déterminé la valeur de cette constante.

Je voudrais déduire de là une conséquence.

Soient

$$\Theta, \quad \Theta_1, \quad \Theta_2, \quad \ldots, \quad \Theta_p$$

$p+1$ fonctions Θ ayant mêmes multiplicateurs.

Considérons maintenant les zéros communs aux p dernières fonctions; ces zéros seront donnés par les équations

$$(1) \qquad \Theta_1(v_i) = \Theta_2(v_i) = \ldots = \Theta_p(v_i) = 0.$$

Soit

$$v_i = z_{ik}$$

une de ces solutions; l'indice i varie de 1 à p, l'indice k de 1 à N,

$$N = m^p \underline{|p}$$

étant le nombre des solutions des équations (1) et m l'ordre des fonctions Θ considérées.

Formons maintenant les équations suivantes :

$$(2)\qquad \Theta_1(v_i)+\varepsilon_1\Theta(v_i)=\Theta_2(v_i)+\varepsilon_2\Theta(v_i)=\ldots=\Theta_p(v_i)+\varepsilon_p\Theta(v_i)=0,$$

les ε étant des constantes. Ces équations auront N solutions; soit

$$v_i=g'_i,$$

l'une de ces solutions. Les fonctions $\Theta_k+\varepsilon_k\Theta$ ont mêmes multiplicateurs que les fonctions Θ_k. On aura donc

$$(3)\qquad \Sigma g_{i,k}=\Sigma g'_{i,k}.$$

Si les ε sont très petits, nous pourrons poser

$$g'_{i,k}-g_{i,k}=\delta g_{i,k},$$

et les δg_{ik} seront très petits de l'ordre des ε; on aura donc en négligeant les quantités de l'ordre de ε^2 :

$$\Theta_1(g'_{i,k})=\Theta_1(g_{i,k})+\Sigma\,\delta g_{j,k}\frac{d\Theta_1}{dv_j}=\Sigma\,\delta g_{j,k}\frac{d\Theta_1}{dv_j},$$
$$\varepsilon_1\Theta(g'_{i,k})=\varepsilon_1\Theta(g_{i,k}).$$

Dans les dérivées $\frac{d\Theta_1}{dv_j}$, les v_i doivent être remplacés par $g_{i,k}$.

Les équations (2) peuvent donc s'écrire

$$(4)\qquad \Sigma\,\delta g_{j,k}\frac{d\Theta_q}{dv_j}+\varepsilon_q\Theta(g_{i,k})=0.$$

Soit $\Delta(v_i)$ le déterminant des $\frac{d\Theta_q}{dv_i}$, c'est-à-dire le déterminant fonctionnel des Θ_q par rapport aux v. Soit $\Delta_{q,j}(v_i)$ le mineur de ce déterminant correspondant à l'élément $\frac{d\Theta_q}{dv_j}$; les équations (4) nous donnent

$$\delta g_{j,k}=-\frac{\Theta(g_{i,k})}{\Delta(g_{i,k})}\Sigma\,\varepsilon_q\Delta_{q,j}(g_{i,k}).$$

En vertu de l'équation (3) on a $\Sigma\delta g_{ik}=0$; on aura donc aussi quels que soient les indices q et j :

$$(5)\qquad \Sigma\,\Theta(g_{i,k})\frac{\Delta_{q,j}(g_{i,k})}{\Delta(g_{i,k})}=0.$$

La sommation doit être étendue aux N solutions des équations (1).

Pour nous rendre compte de la signification de ce théorème, voyons ce qu'il devient dans le cas des fonctions elliptiques ($p = 1$); on a alors

$$\Delta_{j,j} = 1, \qquad \Delta(v_1) = \Theta'_1(v_1),$$

et notre équation devient

$$(6) \qquad \sum \frac{\Theta(g_{1,k})}{\Theta'_1(g_{1,k})} = 0.$$

La fonction

$$\frac{\Theta}{\Theta_1}$$

est alors une fonction doublement périodique admettant pour pôles les points $g_{1,k}$; le résidu correspondant est précisément

$$\frac{\Theta(g_{1,k})}{\Theta'_1(g_{1,k})}.$$

L'équation (6) exprime donc le théorème bien connu d'après lequel la somme des résidus d'une fonction doublement périodique est nulle.

A ce point de vue, *l'équation (5) peut être regardée comme la généralisation du théorème des résidus.*

Nous avons supposé jusqu'ici que les $p+1$ fonctions $\Theta, \Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_p$ avaient mêmes multiplicateurs. Supposons maintenant que Θ et Θ_1 aient mêmes multiplicateurs; mais ne supposons plus que les autres fonctions aient mêmes multiplicateurs, ni même qu'elles soient de même ordre.

Reprenons les équations (1) et (2) mais en faisant

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \ldots = \varepsilon_p = 0.$$

Les fonctions

$$\Theta_1 + \varepsilon_1 \Theta, \quad \Theta_2, \quad \ldots, \quad \Theta_p,$$

ayant mêmes multiplicateurs que

$$\Theta_1, \quad \Theta_2, \quad \ldots, \quad \Theta_p,$$

les équations (3) subsistent, et par conséquent aussi l'équation (5), *mais pour $q = 1$ seulement.*

Soit

$$F = \frac{\Theta}{\Theta_1}.$$

Regardons F comme une fonction de v_j, les autres v étant supposés exprimés en fonction de v_j par les équations

$$\Theta_2 = \Theta_3 = \ldots = \Theta_p = 0.$$

Notre fonction F admettra comme infinis

$$v_j = g_{j,k}.$$

Quel sera le résidu correspondant? C'est la limite de

$$H = (v_j - g_{j,k})F$$

quand v_j tend vers $g_{j,k}$, de façon que $\Theta_2, \Theta_3, \ldots, \Theta_p$ restent nuls.

Soit

$$\delta v_i = v_i - g_{i,k},$$

nous aurons

$$\Sigma\, \delta v_i \frac{d\Theta_q}{dv_i} = 0 \qquad (q = 2, 3, \ldots, n),$$

$$\Theta_1 = \Sigma\, \delta v_i \frac{d\Theta_1}{dv_i} = \frac{H}{\Theta}\, \delta v_j.$$

De cette équation nous tirons

$$\Delta' = 0,$$

Δ' étant le déterminant fonctionnel Δ où $\frac{d\Theta_1}{dv_j}$ est remplacé par $\frac{d\Theta_1}{dv_j} - \frac{H}{\Theta}$. De là nous tirons

$$H = \Theta(v_i)\frac{\Delta'(v_j)}{\Delta(v_j)},$$

et à la limite pour le résidu

$$\Theta(g_{i,k})\frac{\Delta'(g_{i,k})}{\Delta(g_{i,k})}.$$

L'équation (5) exprime donc bien que *la somme des résidus* (entendus au sens que nous venons de préciser) *est nulle*.

ANALYSE

DE SES

TRAVAUX SUR DIVERSES FONCTIONS

FAITE PAR H. POINCARÉ.

Acta Mathematica, t. 38, p. 86-88 (1921).

XI. Fonctions diverses.

Les fonctions fuchsiennes sont des fonctions uniformes d'une variable, inaltérées par certaines substitutions linéaires. On est naturellement conduit à se poser le problème suivant : Former des fonctions uniformes de deux variables qui demeurent inaltérées par certaines substitutions linéaires. C'est, comme on le sait, ce que M. Picard a fait avec un plein succès par l'invention des fonctions hyperfuchsiennes.

Le premier problème à résoudre était évidemment de trouver les groupes discontinus contenus dans le groupe linéaire à deux variables. M. Picard est parvenu à en former un grand nombre par des considérations arithmétiques. J'ai moi-même [25] démontré l'existence de deux classes de ces groupes. La première classe comprend les substitutions semblables des formes quadratiques ternaires indéfinies quand les coefficients de ces formes et de ces substitutions sont des entiers complexes. La seconde classe ne diffère pas essentiellement des groupes fuchsiens.

Si z désigne en effet une variable imaginaire

$$z = \xi + i\eta,$$

et si l'on pose

$$x = \frac{2\xi}{1 + \xi^2 + \eta^2}, \qquad y = \frac{2\eta}{1 + \xi^2 + \eta^2},$$

à tout groupe fuchsien appliqué à z et admettant pour cercle fondamental

$$\xi^2 + \eta^2 = 1$$

correspondra un groupe discontinu appliqué aux deux variables x et y. Ce groupe est discontinu lorsque x et y sont imaginaires ou bien réels, mais de telle façon que

$$x^2 + y^2 < 1;$$

il n'est plus proprement discontinu si x et y sont réels et si

$$x^2 + y^2 > 1.$$

C'est cette circonstance qui explique ce fait remarquable : qu'il est impossible d'imposer à une forme quadratique binaire indéfinie des conditions de réduction, telles que chaque classe contienne une réduite unique.

Mais les groupes de cette nature sont beaucoup moins importants que les groupes hyperfuchsiens proprement dits. J'appelle ainsi ceux qui n'altèrent pas l'hypersphère

$$xx_0 + yy_0 = 1.$$

(Je désigne ici par x_0 et y_0 les quantités imaginaires conjuguées de x et y.)

Cette hypersphère joue dans cette théorie tout à fait le même rôle que le cercle fondamental dans la théorie des fonctions fuchsiennes.

J'ai voulu contribuer à l'étude de ces groupes et j'ai commencé par m'occuper des substitutions elles-mêmes. J'ai reconnu [45] que la classification en substitutions elliptiques, paraboliques et hyperboliques s'étendait aux substitutions hyperfuchsiennes.

La classification des groupes fuchsiens en familles est également applicable aux groupes hyperfuchsiens. Si nous laissons de côté les familles mixtes, nous distinguerons les groupes de la première famille qui contiennent des substitutions elliptiques, ceux de la deuxième famille qui n'en contiennent pas d'elliptiques, mais en contiennent de paraboliques, ceux de la troisième famille qui n'en admettent que d'hyperboliques.

Tous les groupes antérieurement découverts par M. Picard appartenant à la seconde famille, je signalai alors l'existence de toute une catégorie de groupes de la troisième famille et des fonctions hyperfuchsiennes correspondantes que plusieurs propriétés importantes distinguaient des fonctions déjà connues.

On se trouve ici en présence des mêmes difficultés que dans le problème de la formation des groupes fuchsiens. Il faut d'abord former un groupe tel que la fonction correspondante soit uniforme dans le voisinage de chaque point. Il faut ensuite reconnaître si ce groupe est effectivement discontinu. La première difficulté, bien que très grande, est d'ordre purement algébrique. La seconde exige, pour être résolue, l'emploi de considérations étrangères à l'Algèbre. On peut l'éviter tant que l'on se borne aux groupes de la deuxième et de la troisième famille; il est nécessaire de l'aborder, au contraire, si l'on veut étudier les groupes de la première famille.

Je l'avais résolue, dans le cas des groupes fuchsiens, par l'emploi de la pseudogéométrie de Lowatschevski; j'avais reconnu en effet que certaines quantités (analogues à ce que Lowatschevski aurait appelé *longueur* ou *surface*) étaient des invariants par rapport aux substitutions d'un groupe fuchsien quelconque. Je me suis donc demandé si les substitutions hyperfuchsiennes admettaient de semblables invariants [46]. J'ai reconnu qu'il en était ainsi : par conséquent *tout groupe, tel que la fonction correspondante soit uniforme dans le voisinage de chaque point, sera discontinu*.

La recherche des groupes hyperfuchsiens est donc ramenée à un pur problème d'Algèbre; mais ce problème reste extrêmement difficile et il n'a été résolu par M. Picard que dans un cas particulier. J'ai cherché à généraliser d'une autre manière les transcendantes uniformes qui se reproduisent par des substitutions simples. J'ai cherché s'il n'existait pas des fonctions uniformes possédant un « théorème de multiplication », c'est-à-dire subissant une transformation algébrique, quand la variable est multipliée par un facteur constant. J'ai trouvé [106, 192] qu'il existe une classe étendue de pareilles transcendantes. Ce qui est intéressant, c'est le mode de raisonnement dont je me suis servi et qui peut être appliqué avec avantage à quelques questions relatives aux fonctions abéliennes.

BIBLIOGRAPHIE SPÉCIALE AUX FONCTIONS DIVERSES

[46] (¹) *Sur les groupes hyperfuchsiens* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 98, 1884, p. 503-504).

[106] *Sur une classe étendue de transcendantes uniformes* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 103, 1886, p. 862-864).

[192] *Sur une classe nouvelle de transcendantes uniformes* (*J. Math.*, 4ᵉ série, t. 6, 1890, p. 313-365).

(¹) A été inséré Tome II, p. 62-63.

SUR LES SUBSTITUTIONS LINÉAIRES

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 98, p. 346-352 (11 février 1884)

On sait quelle importance a, dans la théorie des substitutions linéaires de la forme $\left(x, \dfrac{ax+b}{a'x+b'}\right)$ et dans celle des groupes fuchsiens et kleinéens qu'elles peuvent former, la classification de ces substitutions en substitutions loxodromiques, hyperboliques, elliptiques et paraboliques.

Cette classification peut s'étendre aux substitutions linéaires à deux variables

$$(1) \qquad \left(x, y;\ \frac{ax+by+c}{a''x+b''y+c''},\ \frac{a'x+b'y+c'}{a''x+b''y+c''}\right),$$

et spécialement à celles qui conservent l'hypersphère

$$(2) \qquad xx_0+yy_0=1,$$

et qui, par conséquent, peuvent engendrer ces groupes hyperfuchsiens dont M. Picard a donné des exemples. Dans l'équation (2), comme dans tout ce qui va suivre, j'ai représenté, à l'exemple de M. Hermite, par u_0 la quantité imaginaire conjuguée de u. Mettons la substitution (1) sous la forme homogène

$$(1\,bis) \qquad (x, y, z;\ ax+by+cz,\ a'x+b'y+c'z,\ a''x+b''y+c''z).$$

On peut, par un changement convenable de variables, amener cette substitution à l'une des formes suivantes, que l'on peut appeler *formes canoniques*

$$(\mathrm{A}) \qquad (x, y, z;\ \alpha x, \beta y, \gamma z), \qquad (\alpha \neq \beta \neq \gamma),$$

$$(\mathrm{B}) \qquad (x, y, z;\ \alpha x, \beta y+z, \beta z), \qquad (\alpha \neq \beta),$$

$$(\mathrm{C}) \qquad (x, y, z;\ \alpha x, \beta y, \beta z), \qquad (\alpha \neq \beta),$$

$$(\mathrm{D}) \qquad (x, y, z;\ \alpha x+y, \alpha y+z, \alpha z),$$

$$(\mathrm{E}) \qquad (x, y, z;\ \alpha x, \alpha y+z, \alpha z).$$

Ne nous occupons pour le moment que de la forme (A); car toutes les autres, qui sont analogues aux substitutions paraboliques, n'en sont que des cas particuliers.

Les quantités α, β, γ sont appelées *multiplicateurs*. De plus, la substitution (1) admet trois *points doubles* qu'elle laisse inaltérés. Quand on connaît les points doubles et les multiplicateurs d'une substitution, elle est entièrement déterminée. Quand elle est ramenée à la façon canonique, ces trois points doubles sont

$$x = y = 0, \qquad y = z = 0, \qquad x = z = 0;$$

à la substitution (A) correspond la substitution conjuguée

$$(x_0, y_0, z_0; \alpha_0 x_0, \beta_0 y_0, \gamma_0 z_0).$$

On voit aisément que toute substitution de la forme (1 *bis*) change toute forme quadratique du faisceau

$$\text{(3)} \qquad A x x_0 + B x y_0 + B_0 y x_0 + C y y_0 + D x z_0 + D_0 z x_0 + E y z_0 + E_0 z y_0 + F z z_0$$

en une autre forme du même faisceau.

Pour que la substitution (A) reproduise, à un facteur constant près, une des formes (3) dont le discriminant ne soit pas nul, il faut que trois au moins des quantités

$$\alpha\alpha_0, \quad \alpha\beta_0, \quad \beta\alpha_0, \quad \beta\beta_0, \quad \alpha\gamma_0, \quad \gamma\alpha_0, \quad \beta\gamma_0, \quad \gamma\beta_0, \quad \gamma\gamma_0$$

soient égales entre elles. Or, si l'on suppose, comme nous l'avons fait, que les trois multiplicateurs soient différents, cela ne peut arriver que des trois manières suivantes :

$$\text{(4)} \qquad \alpha\alpha_0 = \beta\beta_0 = \gamma\gamma_0,$$

$$\text{(5)} \qquad \alpha\alpha_0 = \beta\gamma_0 = \gamma\beta_0,$$

$$\text{(6)} \qquad \alpha\beta_0 = \beta\gamma_0 = \gamma\alpha_0.$$

L'hypothèse (6) doit être rejetée, parce que la forme (3) qui serait reproductible par la substitution (A) serait imaginaire. L'hypothèse (4) signifie que les trois multiplicateurs ont même module : nous dirons alors que la substitution est *elliptique*. L'hypothèse (5) signifie que la quantité $\frac{\beta}{\gamma}$ est réelle et égale au carré du module de $\frac{\alpha}{\gamma}$. Nous dirons alors que la substitution est *hyperbolique*.

Cherchons maintenant quelles sont les substitutions elliptiques ou hyperboliques (que je ne suppose plus réduites à la forme canonique) qui reproduisent l'hypersphère (2), c'est-à-dire la forme

$$x x_0 + y y_0 - z z_0.$$

Cherchons d'abord les substitutions elliptiques; soient

$$\frac{x}{\lambda_1} = \frac{y}{\mu_1} = \frac{z}{\nu_1}, \qquad \frac{x}{\lambda_2} = \frac{y}{\mu_2} = \frac{z}{\nu_2}, \qquad \frac{x}{\lambda_3} = \frac{y}{\mu_3} = \frac{z}{\nu_3}$$

les trois points doubles. Nous trouverons les six relations suivantes :

$$\lambda_i \lambda_{k0} + \mu_i \mu_{k0} - \nu_i \nu_{k0} = 0,$$

qui définissent les conditions auxquelles doivent satisfaire les points doubles.

Ces conditions peuvent être satisfaites d'une infinité de manières; en effet, le premier point double peut être choisi d'une façon arbitraire, le second peut encore être choisi d'une infinité de manières, car il n'est assujetti qu'aux relations

$$\lambda_1 \lambda_{20} + \mu_1 \mu_{20} - \nu_1 \nu_{20} = \lambda_2 \lambda_{10} + \mu_2 \mu_{10} - \nu_2 \nu_{10} = 0.$$

Le troisième point double est alors entièrement déterminé. Il résulte de là qu'il entre dans les substitutions hyperfuchsiennes elliptiques *huit* paramètres arbitraires.

Passons aux substitutions hyperboliques : nous trouvons les conditions

$$\lambda_2 \lambda_{20} + \mu_2 \mu_{20} - \nu_2 \nu_{20} = \lambda_3 \lambda_{30} + \mu_3 \mu_{30} - \nu_3 \nu_{30} = 0,$$
$$\lambda_1 \lambda_{20} + \mu_1 \mu_{20} - \nu_1 \nu_{20} = \lambda_2 \lambda_{10} + \mu_2 \mu_{10} - \nu_2 \nu_{10} = 0,$$
$$\lambda_1 \lambda_{30} + \mu_1 \mu_{30} - \nu_1 \nu_{30} = \lambda_3 \lambda_{10} + \mu_3 \mu_{10} - \nu_3 \nu_{10} = 0,$$

de sorte que l'hypersphère (2) est encore conservée par une infinité de substitutions hyperboliques dépendant de huit paramètres arbitraires.

Disons encore quelques mots de la substitution canonique (B), qui est la plus générale après celles que nous venons d'étudier. Supposons $\beta = 1$ pour simplifier. Pour que cette substitution reproduise la forme (3), il faut d'abord que l'on ait

$$C = B = B_0 = 0.$$

Il faut ensuite que l'on ait

$$\alpha\alpha_0 = 1 \qquad \text{ou} \qquad \alpha = \alpha_0,$$

ce qui montre que les substitutions (B) peuvent se répartir en deux classes qui peuvent être regardées comme des cas particuliers des substitutions elliptiques et hyperboliques.

SUR UNE CLASSE ÉTENDUE

DE

TRANSCENDANTES UNIFORMES

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 103, p. 862-864 (8 novembre 1886).

Soient

$$x_1 = \varphi_1(u), \qquad x_2 = \varphi_2(u), \qquad \ldots, \qquad x_n = \varphi_n(u)$$

n fonctions uniformes d'une variable u. Soit m un nombre quelconque, mais de module plus grand que 1. Soient ensuite

$$x'_1 = \varphi_1(mu), \qquad x'_2 = \varphi_2(mu), \qquad \ldots, \qquad x'_n = \varphi_n(mu).$$

Nous disons que ces fonctions φ admettent un théorème de multiplication, si l'on a

$$(1) \qquad \begin{cases} x'_1 = F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ x'_2 = F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x'_n = F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{cases}$$

les fonctions F étant rationnelles.

Donnons-nous arbitrairement les fonctions F et proposons-nous de rechercher s'il existe des fonctions uniformes φ qui satisfassent aux relations (1). Pour cela les fonctions F devront satisfaire à certaines conditions qui s'aperçoivent immédiatement. Imaginons que les fonctions φ doivent toutes s'annuler avec u. Alors les fonctions F s'annuleront avec les x. Si donc on développe les F suivant les puissances croissantes des x, le développement commencera par des termes du premier degré. On peut toujours supposer que les termes du premier degré de F_i se réduisent à $\lambda_i x_i$; car, si cela n'était pas, on n'aurait qu'à faire subir aux x un changement linéaire de variables. Nous écrirons donc

$$(2)\qquad x'_1 = \lambda_1 x_1 + \Theta_1, \quad x'_2 = \lambda_2 x_2 + \Theta_2, \quad \ldots, \quad x'_n = \lambda_n x_n + \Theta_n,$$

les Θ étant des fonctions rationnelles des x dont le développement commence par des termes du second degré.

Il faut alors qu'un au moins des λ, λ_1 par exemple, soit égal à m.

1° Supposons d'abord que tous les λ soient égaux à m,

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = m,$$

et proposons-nous de trouver n séries

$$(3)\qquad \begin{cases} x_1 = \alpha_1 u + \beta_1 u^2 + \gamma_1 u^3 + \ldots, \\ x_2 = \alpha_2 u + \beta_2 u^2 + \gamma_2 u^3 + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n = \alpha_n u + \beta_n u^2 + \gamma_n u^3 + \ldots, \end{cases}$$

qui satisfassent formellement aux équations (2).

On reconnaîtrait sans peine qu'il en existe une infinité et que l'on peut même choisir arbitrairement les n coefficients de u,

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_n.$$

Comparons maintenant ces séries aux séries (3 *bis*), auxquelles conduisent les équations

$$(2\,bis)\qquad \begin{cases} x'_1 = |m| x_1 + \dfrac{|m| bS^2}{1-bS}, \\ x'_2 = |m| x_2 + \dfrac{|m| bS^2}{1-bS}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x'_n = |m| x_n + \dfrac{|m| bS^2}{1-bS}, \end{cases}$$

$$S = x_1 + x_2 + \ldots + x_n.$$

On pourra prendre b assez grand pour que chaque terme du développement de $\dfrac{|m| bS^2}{1-bS}$ soit positif et plus grand que les termes correspondants de Θ_1, de Θ_2, ..., de Θ_n. Dans ces conditions, chaque terme des séries (3) sera plus petit que le terme correspondant des séries (3 *bis*). Or il est aisé d'obtenir ces dernières, qui sont des fonctions rationnelles très simples.

Les séries (3 *bis*) et, par conséquent, les séries (3) sont donc convergentes. Il existe donc des fonctions qui satisfont aux équations (2); je dis qu'elles sont uniformes. En effet, si elles le sont dans un cercle de rayon ρ, elles le seront dans un cercle de rayon $|m|\rho$ et, par conséquent, dans tout le plan.

2° λ_1 est égal à m, les autres λ sont différents de m; je suppose, de plus, qu'aucun d'eux n'est une puissance entière de m.

Il existe encore ici des séries (3) qui satisfont formellement aux équations (2) mais on ne peut plus choisir arbitrairement les coefficients α. Le premier d'entre eux, α_1, reste seul arbitraire, les $n-1$ autres doivent être nuls.

Pour en démontrer la convergence, il faut comparer, comme plus haut, les équations (2) à des équations (2 *bis*) convenablement choisies. Nous prendrons

$$(2\,bis) \qquad x'_i = h x_i + \Theta',$$

$$\Theta = \frac{hbS^2}{1-bS}, \qquad S = x_1 + x_2 + \ldots + x_n.$$

On pourra prendre le nombre positif b assez grand pour qu'un terme quelconque de Θ' soit positif et plus grand que le terme correspondant de Θ_i, et le nombre positif h assez petit, quoique plus grand que 1, pour que

$$h^p - h < |\lambda_i^p - m|.$$

On démontrera ensuite, comme plus haut, que les séries (3) sont convergentes et définissent des fonctions uniformes dans tout le plan.

Nous sommes donc conduits à une classe très étendue de transcendantes uniformes qui admettent un théorème de multiplication où les fonctions rationnelles F restent arbitraires dans une très large mesure. On reconnaîtrait sans peine qu'une pareille fonction uniforme peut toujours être regardée comme le quotient de deux fonctions entières jouissant de propriétés analogues.

Ces transcendantes contiennent comme cas particuliers les fonctions elliptiques, les fonctions Θ et les transcendantes obtenues en égalant à zéro toutes les variables, moins une, dans une fonction abélienne.

SUR UNE CLASSE NOUVELLE

DE

TRANSCENDANTES UNIFORMES

Journal de Mathématiques, 4e série, t. 6, p. 313-365 (1890).

Définition.

Nous dirons qu'un système de fonctions d'une variable u

$$(1) \qquad \varphi_1(u), \quad \varphi_2(u), \quad \ldots, \quad \varphi_n(u)$$

possède un *théorème d'addition* quand

$$\varphi_1(u+v), \quad \varphi_2(u+v), \quad \ldots, \quad \varphi_n(u+v)$$

pourront s'exprimer en fonctions rationnelles de

$$\varphi_1(u), \quad \varphi_2(u), \quad \ldots, \quad \varphi_n(u)$$

et

$$\varphi_1(v), \quad \varphi_2(v), \quad \ldots, \quad \varphi_n(v).$$

Soit maintenant m un nombre quelconque réel ou imaginaire, mais tel que

$$|m| > 1.$$

Nous dirons que le système

$$(1) \qquad \varphi_1(u), \quad \varphi_2(u), \quad \ldots, \quad \varphi_n(u)$$

admet un *théorème de multiplication*, si

$$\varphi_1(mu), \quad \varphi_2(mu), \quad \ldots, \quad \varphi_n(mu)$$

peuvent s'exprimer en fonctions rationnelles de

$$\varphi_1(u), \quad \varphi_2(u), \quad \ldots, \quad \varphi_n(u).$$

Il est clair, d'après ces définitions, que si le système (1) possède un théorème d'addition, et si p est un entier quelconque,

$$\varphi_1(pu), \quad \varphi_2(pu), \quad \ldots, \quad \varphi_n(pu)$$

s'expriment rationnellement par rapport à

$$\varphi_1(u), \quad \varphi_2(u), \quad \ldots, \quad \varphi_n(u).$$

Tout système qui possède un théorème d'addition possédera donc également une infinité de théorèmes de multiplication.

Les mêmes définitions peuvent facilement s'étendre aux fonctions de plusieurs variables.

Par exemple, le système

$$\sin u, \quad \cos u$$

ou le système

$$\operatorname{sn} u, \quad \operatorname{cn} u, \quad \operatorname{dn} u,$$

possède un théorème d'addition et une infinité de théorèmes de multiplication.

Considérons maintenant un système complet de fonctions abéliennes quadruplement périodiques de deux variables

$$F_1(u, u'), \quad F_2(u, u'), \quad \ldots, \quad F_n(u, u');$$

ce système admettra un théorème d'addition, c'est-à-dire que les

$$F_i(u + v, u' + v')$$

s'exprimeront rationnellement à l'aide des

$$F_i(u, u') \quad \text{et des} \quad F_i(v, v').$$

Si nous faisons $u' = v' = 0$, nous aurons un système de fonctions d'une seule variable

$$F_1(u, 0), \quad F_2(u, 0), \quad \ldots, \quad F_n(u, 0),$$

qui admettra un théorème d'addition et une infinité de théorèmes de multiplication; car

$$F_1(u + v, 0), \quad F_2(u + v, 0), \quad \ldots, \quad F_n(u + v, 0)$$

s'expriment rationnellement à l'aide des

$$F_i(u, \omega) \quad \text{et des} \quad F_i(v, \omega).$$

Il y a aussi des fonctions qui admettent un théorème de multiplication sans admettre un théorème d'addition.

Considérons en effet la fonction $\Theta(u)$, et soit

$$\varphi_1(u) = \Theta^2\left(u - \frac{\omega'}{2}\right), \qquad \varphi_2(u) = \Theta(u - \alpha)\Theta(u + \alpha - \omega'),$$

α étant une constante quelconque.

Soit ensuite p un entier quelconque, et envisageons les expressions suivantes

$$\varphi_1(pu), \quad \varphi_2(pu), \quad \varphi_1^q(u)\varphi_2^{p^2-q}(u),$$

q étant un autre entier plus petit que p^2.

Ces diverses expressions admettront la période ω et seront multipliées par un certain facteur exponentiel quand u se changera en $u + \omega'$.

Soit

$$\Theta\left(u + \frac{\omega'}{2}\right) = e^{au}\Theta\left(u - \frac{\omega'}{2}\right);$$

il vient

$$\varphi_1^q(u + \omega')\varphi_2^{p^2-q}(u + \omega') = e^{2p^2au}\varphi_1^q(u)\varphi_2^{p^2-q}(u).$$

Cherchons le facteur exponentiel relatif à

$$\varphi_1(pu) \quad \text{et à} \quad \varphi_2(pu).$$

Il vient

$$\varphi_1[p(u + \omega')] = \varphi_1(pu + p\omega') = e^{2p^2au}e^{\frac{p(p-1)}{2}a\omega'}\varphi_1(pu).$$

Et de même

$$\varphi_2[p(u + \omega')] = e^{2p^2au}e^{\frac{p(p-1)}{2}a\omega'}\varphi_2(pu).$$

Il sort de là que

$$\varphi_1(pu)e^{-\frac{p(p-1)}{2}au} \quad \text{et} \quad \varphi_2(pu)e^{-\frac{p(p-1)}{2}au}$$

ont même multiplicateur que les fonctions

$$\varphi_1^q(u)\varphi_2^{p^2-q}(u)$$

et par conséquent s'expriment linéairement à l'aide de ces fonctions.

Donc $\varphi_1(pu)$ et $\varphi_2(pu)$ sont des fonctions linéaires des diverses quantités $e^{p(p-1)\frac{au}{2}}\varphi_1^q(u)\varphi_2^{p-q}(u)$. Ce sont donc des fonctions entières rationnelles et homogènes de

$$e^{\frac{au}{2}},\quad \varphi_1(u)\quad \text{et}\quad \varphi_2(u).$$

D'autre part $e^{\frac{apu}{2}}$ est également une fonction entière de $e^{\frac{au}{2}}$. Donc le système

$$e^{\frac{au}{2}},\quad \varphi_1(u),\quad \varphi_2(u)$$

admet une infinité de théorèmes de multiplication; je dis une infinité, car on peut donner à p telle valeur entière que l'on veut.

Je me propose de rechercher quelles sont les fonctions qui admettent un théorème de multiplication et qui ne présentent pas pour $u = 0$ de point singulier essentiel.

J'exclus ainsi de très nombreuses catégories de transcendantes, par exemple celle-ci. Soit la fonction $\varphi(u)$ qui se rattache aux fonctions Θ

$$\varphi(u) = \Sigma q^{m^2} u^{2m} \qquad (m \text{ variant de } -\infty \text{ à } +\infty),$$

où

$$|q| < 1.$$

Il vient

$$\varphi\left(\frac{u}{q}\right) = \frac{u^2}{q}\varphi(u),$$

ce qui montre que le système

$$u,\quad \varphi(u)$$

admet un théorème de multiplication. Mais le point $u = 0$ est pour $\varphi(u)$ un point singulier essentiel.

Considérons donc un système

$$\varphi_1(u),\quad \varphi_2(u),\quad \ldots,\quad \varphi_n(u),$$

admettant un théorème de multiplication et tel qu'aucune des fonctions du système n'ait un point singulier essentiel en $u = 0$.

Je puis toujours supposer que

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \ldots = \varphi_n(0) = 0.$$

En effet, supposons qu'il n'en soit pas ainsi. Si φ_i est fini, je pourrai toujours poser

$$\varphi'_i(u) = \varphi_i(u) - \varphi_i(0),$$

et si $\varphi_i(0)$ est infini, je poserai

$$\varphi'_i(u) = \frac{1}{\varphi_i(u)}.$$

Il est clair qu'on aura

$$\varphi'_1(0) = \varphi'_2(0) = \ldots = \varphi'_n(0) = 0,$$

et que le système $\varphi'_i(u)$ admettra comme le système $\varphi_i(u)$ un théorème de multiplication.

Je ferai une hypothèse de plus; je supposerai d'abord que le développement des fonctions $\varphi_i(u)$ suivant les puissances croissantes de u commence, pour l'une au moins de ces fonctions, par un terme en u.

Si de pareilles fonctions existent, elles sont nécessairement uniformes.

En effet, comme le point $u = 0$ n'est pas un point singulier essentiel, on peut trouver une quantité positive ρ, telle qu'à l'intérieur du cercle

$$|u| = \rho$$

les fonctions $\varphi_i(u)$ restent uniformes.

Mais les fonctions $\varphi_i(mu)$ s'expriment rationnellement à l'aide des fonctions $\varphi_i(u)$; si donc $|u| < \rho$, les fonctions $\varphi_i(mu)$ sont encore uniformes.

Donc les fonctions $\varphi_i(u)$ sont uniformes, pourvu que

$$|u| < m\rho.$$

On démontrerait de même successivement qu'elles sont uniformes, pourvu que

$$|u| < m^2\rho, \quad |u| < m^3\rho, \quad \ldots, \quad |u| < m^p\rho,$$

c'est-à-dire pour toutes les valeurs de u.

Ce raisonnement peut servir à démontrer que les fonctions elliptiques et abéliennes sont uniformes. C'est même la seule démonstration rigoureuse qui ait été proposée jusqu'ici, à l'exception des démonstrations indirectes où l'on commence par définir la fonction Θ. La démonstration de Riemann dans sa théorie des fonctions abéliennes est une de ces démonstrations indirectes; la démonstration de Clebsch et Gordan (*Theorie der Abelschen Functionen*.

8e Partie) n'est pas rigoureuse. Quant aux démonstrations d'Abel et de Jacobi, elles sont en réalité fondées sur l'existence d'un théorème de multiplication.

Il peut se faire que le théorème de multiplication soit tel que les $\varphi_i(mu)$ s'expriment en fonctions non seulement rationnelles, mais encore *entières* des $\varphi_i(u)$.

Dans ce cas, les fonctions $\varphi_i(u)$ sont des transcendantes entières.

En effet, si les fonctions $\varphi_i(u)$ sont holomorphes à l'intérieur du cercle

$$|u| = \rho,$$

il en est de même des fonctions $\varphi_i(mu)$, de sorte que les fonctions $\varphi_i(u)$ sont holomorphes à l'intérieur du cercle

$$|u| = |m|\rho.$$

Par un raisonnement tout pareil à celui qui précède, on démontrerait qu'elles sont holomorphes dans tout le plan.

Forme des équations fondamentales.

Nous appellerons *équations fondamentales* les équations qui définissent le théorème de multiplication et qui peuvent s'écrire

$$(2)\quad \begin{cases} \varphi_1(mu) = R_1[\varphi_1(u), \varphi_2(u), \ldots, \varphi_n(u)], \\ \varphi_2(mu) = R_2[\varphi_1(u), \varphi_2(u), \ldots, \varphi_n(u)], \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_n(mu) = R_n[\varphi_1(u), \varphi_2(u), \ldots, \varphi_n(u)], \end{cases}$$

$R_1, R_2, \ldots, R_n$ étant des fonctions rationnelles.

Je dis d'abord que l'on a

$$R_i(0, 0, \ldots, 0) = 0.$$

En effet, par hypothèse,

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \ldots = \varphi_n(0) = 0.$$

Si donc on fait dans les équations (2) $u = 0$, le premier membre s'annule et le second se réduit à $R_i(0, 0, \ldots, 0)$; donc la fonction R_i s'annule quand tous ses arguments s'annulent. C. Q. F. D.

Les fonctions rationnelles R_i doivent satisfaire encore à une autre condition.

Posons

$$\frac{d\varphi_i(u)}{du} = A_i, \qquad \frac{dR_i}{d[\varphi_k(u)]} = B_{i,k},$$

pour $u = 0$.

Si, dans les équations (2), on substitue le développement des fonctions $\varphi_i(u)$ suivant les puissances croissantes de u, puis qu'on égale dans les deux membres les coefficients de u, il viendra

$$m A_i = B_{i,1} A_1 + B_{i,2} A_2 + \ldots + B_{i,n} A_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

D'après une hypothèse que nous avons faite plus haut, tous les A_i ne sont pas nuls à la fois. Si donc nous posons

$$F(S) = \begin{vmatrix} B_{1,1} - S & B_{1,2} & \ldots & B_{1,n} \\ B_{2,1} & B_{2,2} - S & \ldots & B_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ B_{n,1} & B_{n,2} & \ldots & B_{n,n} - S \end{vmatrix},$$

on devra avoir

$$F(m) = 0.$$

En d'autres termes, l'équation en S, $F(S) = 0$ a une racine égale à m.

Posons

$$\varphi'_i(u) = \alpha_{i,1}\varphi_1(u) + \alpha_{i,2}\varphi_2(u) + \ldots + \alpha_{i,n}\varphi_n(u) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

les $\alpha_{i,k}$ étant des constantes.

On peut se servir de ce changement linéaire de variables pour ramener les fonctions R à une expression plus simple.

Voici comment nous nous servirons de cette faculté : je me contente d'indiquer ici le résultat et j'omets la démonstration, que le lecteur retrouvera sans peine, car elle est fondée sur les principes les plus simples de la théorie des substitutions linéaires.

Si l'équation en S a toutes ses racines distinctes, on pourra supposer que, après le changement de variables, on a

$$B_{i,k} = 0 \quad (i \gtrless k), \qquad B_{i,i} = S_i;$$

$S_1, S_2, \ldots, S_n$ sont alors les diverses racines de l'équation en S, et l'on aura, par exemple,

$$S_1 = m.$$

Supposons maintenant que toutes les racines ne soient pas distinctes. On pourra encore supposer qu'après le changement de variables

$$B_{i,i} = S_i$$

et que les $B_{i,k}$ sont nuls si $i < k$ ou si, i étant plus grand que k, S_i est différent de S_k. Quant aux $B_{i,k}$, pour lesquels on a

$$i \geq k, \qquad S_i = S_k,$$

nous n'en pouvons rien dire.

Si, en particulier, l'équation en S a toutes ses racines égales à m, il vient

$$B_{i,k} = 0 \quad (i < k), \qquad B_{i,i} = m.$$

Formation des séries fondamentales.

Cherchons à satisfaire aux équations (2) par des séries de la forme suivante

$$(3) \qquad \varphi_i(u) = A_i^1 u + A_i^2 u^2 + A_i^3 u^3 + \ldots,$$

où les A_i^p sont des coefficients constants, et tout d'abord cherchons à y satisfaire formellement. Pour cela nous n'avons qu'à appliquer la méthode des coefficients indéterminés.

Substituons les séries (3) dans les équations (2) et égalons dans les deux membres les coefficients de u^p, il viendra

$$(4) \qquad m^p A_i^p = B_{i,1} A_1^p + B_{i,2} A_2^p + \ldots + B_{i,n} A_n^p + C_i^p \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

les C_i^p représentent un ensemble de termes dépendant des

$$A_i^1, \quad A_i^2, \quad \ldots, \quad A_i^{p-1},$$

mais ne dépendant pas des A_i^p ni des A_i^q, où $q > p$.

On peut supposer qu'on ait déterminé par un calcul préalable les

$$A_i^1, \quad A_i^2, \quad \ldots, \quad \text{et les} \quad A_i^{p-1}.$$

On aura alors, pour calculer les A_i^p, le système des équations linéaires (4). Ce système pourra toujours être résolu, pourvu que son déterminant ne soit pas nul. Or ce déterminant est égal à $F(m^p)$.

Si aucun des déterminants $F(m^2)$, $F(m^3)$, $\ldots$, n'est nul, on pourra alors calculer de proche en proche les coefficients des séries (3), pourvu qu'on ait commencé par calculer les A_i^1; or les A_i^1 nous sont donnés par les équations

$$(4\ bis) \qquad m A_i^1 = B_{i,1} A_1^1 + \ldots + B_{i,n} A_n^1,$$

qui ne diffèrent pas de celles qui ont été envisagées dans le paragraphe précédent; or ce système (4 *bis*) peut toujours être résolu si $F(m)$ est nul.

Si donc on a

$$F(m) = 0, \qquad F(m^2) = 0, \qquad F(m^3) = 0, \qquad \ldots, \qquad F(m^p) = 0,$$

on pourra toujours trouver des séries de la forme (3), *que nous appellerons séries fondamentales et qui satisferont formellement aux équations* (2).

Il nous reste à chercher combien ces séries contiennent de constantes arbitraires.

J'observe d'abord que, si $F(m^p)$ n'est pas nul, le système ne comporte qu'une solution unique.

Pour savoir combien les séries fondamentales contiennent de constantes arbitraires, il nous suffit donc de savoir combien le système (4 *bis*) comporte de solutions linéairement indépendantes.

Je suppose que l'équation

$$F(S) = 0$$

admette q racines égales à m.

On aura alors

$$B_{1,1} = B_{2,2} = \ldots = B_{q,q} = m, \qquad B_{i,i} \gtrless m \qquad (\text{si } i > q).$$

D'autre part,

$$B_{i,k} = 0,$$

si $i < k$ ou bien encore si $i > q$, $k \leqq q$.

Dans ce cas les $n - q$ dernières équations (4 *bis*) ne contiennent que les $n - q$ variables

$$A_{q+1}^1, \quad A_{q+2}^1, \quad \ldots, \quad A_n^1,$$

et leur déterminant par rapport à ces $n - q$ variables est égal à

$$(B_{q+1,q+1} - m)(B_{q+2,q+2} - m)\ldots(B_{n,n} - m) \gtrless 0.$$

On tirera donc de ces équations

$$A_{q+1}^1 = A_{q+2}^1 = \ldots = A_n^1 = 0.$$

ce qui montre que les équations (4 *bis*) ne pourront en aucun cas comporter plus de q solutions linéairement indépendantes.

Les q premières équations (3 *bis*) ne contiennent que les $q-1$ variables

$$A_1^1, \quad A_2^1, \quad \dots, \quad A_{q-1}^1.$$

J'ajouterai même que la première de ces équations se réduit à une identité; si nous la laissons de côté, il nous restera $q-1$ équations et $q-1$ variables, et leur déterminant sera égal à

$$\Delta = B_{21} B_{32} B_{43} \dots B_{q,q-1}.$$

Si ce déterminant n'est pas nul, on aura

$$A_1^1 = A_2^1 = \dots = A_{q-1}^1 = 0,$$

de sorte qu'il n'y aura plus qu'un coefficient arbitraire, à savoir A_q^1.

Supposons maintenant que ce déterminant soit nul; dans ce cas, il est aisé de voir que le système (4 *bis*) comporte au moins deux solutions linéairement indépendantes.

Appelons (5) le système d'équations linéaires formé par les

$$2^{\text{ième}}, \quad 3^{\text{ième}}, \quad 4^{\text{ième}}, \quad \dots, \quad q^{\text{ième}}$$

équations (4 *bis*) et où les variables sont

$$A_1^1, \quad A_2^1, \quad \dots, \quad A_{q-1}^1.$$

Considérons le déterminant Δ de ce système (5). Si Δ est nul, ainsi que ses mineurs des $h-2$ premiers ordres, le système (5) aura $h-1$ solutions linéairement indépendantes; et, comme A_q^1 reste arbitraire, le système (4 *bis*) en admettra h.

Donc les séries (3) contiendront des constantes arbitraires.

Soient $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_h$ ces constantes. On voit que

$$A_1^1, \quad A_2^1, \quad \dots, \quad A_h^1$$

seront des fonctions linéaires et homogènes des β_i.

Les A^p seront des polynomes entiers par rapport aux β. Supposons en effet que cela soit vrai des A_i^1, des A_i^2, ..., des A_i^{p-1}, cela sera vrai également des C_i^p et par conséquent aussi des A_i^p.

Si le système

$$\varphi_1(u), \quad \varphi_2(u), \quad \dots, \quad \varphi_h(u)$$

admet un théorème de multiplication, il en sera de même évidemment du système

$$\varphi_1(\gamma u), \quad \varphi_2(\gamma u), \quad \ldots, \quad \varphi_n(\gamma u),$$

où γ est une constante quelconque.

Si donc dans les séries (3) on remplace u par γu, ces séries ne cesseront pas de satisfaire aux équations (2); changer u en γu, cela revient à changer les valeurs des constantes β.

Or changer u en γu c'est changer A_i^1 en γA_i^1 et, par conséquent,

$$\beta_1, \quad \beta_2, \quad \ldots, \quad \beta_h$$

en

$$\gamma\beta_1, \quad \gamma\beta_2, \quad \ldots, \quad \gamma\beta_h.$$

Quand on change u en γu, A_i^p se change en $\gamma^p A_i^p$.

Donc, quand on change β_i en $\gamma\beta_i$, A_i^p se change en $\gamma^p A_i^p$.

Donc A_i^p est un polynôme entier *homogène et de degré* p par rapport aux β.

Donc les séries (3) sont ordonnées suivant les puissances croissantes de

$$\beta_1 u, \quad \beta_2 u, \quad \ldots \quad \text{et} \quad \beta_h u.$$

Si nous posons

$$\beta_i u = u_i,$$

nous aurons un système de n fonctions

$$\varphi_1, \quad \varphi_2, \quad \ldots, \quad \varphi_n$$

dépendant de h variables

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_h$$

et admettant un théorème de multiplication; car on aura

$$\varphi_i(mu_1, mu_2, \ldots, mu_h) = R_i[\varphi_1(u_1, u_2, \ldots, u_h), \varphi_2(u_1, u_2, \ldots, u_h), \ldots, \varphi_n(u_1, u_2, \ldots, u_h)]$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Cas particuliers.

Supposons, en particulier, que l'on ait

$$R_i = m\varphi_i(u) + \frac{MS^2}{1 - \rho S};$$

M et α sont deux constantes et l'on a posé pour abréger

$$S(u) = \varphi_1(u) + \varphi_2(u) + \ldots + \varphi_n(u).$$

J'observe d'abord que le déterminant des équations (4 *bis*) a tous ses éléments nuls, ce qui me permet de conclure que les séries (3) contiennent n constantes arbitraires; je puis donc me donner arbitrairement les n coefficients

$$A_1^1, \quad A_2^1, \quad \ldots, \quad A_n^1.$$

Je remarque ensuite que l'on a

$$\varphi_i(mu) - \varphi_k(mu) = m[\varphi_i(u) - \varphi_k(u)];$$

d'où

$$\varphi_i(u) - \varphi_k(u) = (A_i^1 - A_k^1)u.$$

Nous avons, d'autre part,

$$S(mu) = mS(u) - \frac{nMS^2(u)}{1 - \alpha S(u)}.$$

Si l'on suppose, en particulier,

$$M = \frac{1}{n} m\alpha,$$

il vient

$$S(mu) = \frac{mS(u)}{1 - \alpha S(u)}$$

ou

$$\frac{S(mu)}{m - 1 + \alpha S(mu)} = \frac{mS(u)}{m - 1 + \alpha S(u)};$$

d'où

$$\frac{S(u)}{m - 1 + \alpha S(u)} = \frac{\Sigma}{m - 1} u,$$

en posant, pour abréger,

$$\Sigma = A_1^1 + A_2^1 + \ldots + A_n^1.$$

Il vient donc finalement

$$S(u) = \frac{u\Sigma}{1 - u\dfrac{\alpha\Sigma}{m - 1}}.$$

Ainsi, dans le cas de $M = \frac{1}{n} m\alpha$, les fonctions $\varphi_i(u)$ existent et sont rationnelles en u.

Donc, dans ce cas particulier, les séries (3) convergent.

Je vais examiner plus particulièrement le cas où m et α sont réels positifs et où

$$A_1^1, \quad A_2^1, \quad \dots, \quad A_n^1$$

sont réels positifs.

Je dis que dans ce cas tous les coefficients des séries (3) sont réels positifs.

En effet, supposons que cela soit vrai des

$$A_i^1, \quad A_i^2, \quad \dots, \quad A_i^{p-1},$$

je dis que cela sera vrai des A_i^p.

En effet, les équations (4) s'écrivent

$$(m^p - m) A_i^p = C_i^p.$$

C_i^p est manifestement un polynôme entier à coefficients entiers positifs par rapport à m, à α, aux A_i^1, A_i^2, $\dots$, A_i^{p-1}. Donc C_i^p est réel et positif.

D'autre part $m^p - m$ est réel positif.

Donc il en est de même de A_i^p. C. Q. F. D.

Convergence des séries fondamentales.

Reprenons les équations fondamentales

$$(2) \qquad \varphi_i(mu) = R_i[\varphi_k(u)],$$

et les séries fondamentales

$$(3) \qquad \varphi_i(u) = \sum A_i^p u^p.$$

Je vais chercher à former d'autres équations fondamentales

$$(2') \qquad \varphi_i'(m'u) = R_i'[\varphi_k'(u)],$$

qui seront satisfaites formellement par les séries fondamentales

$$(3') \qquad \varphi_i'(u) = \sum A_i'^p u^p.$$

Je vais chercher à m'arranger de façon que les équations (2') soient de la forme particulière qui a été intégrée dans le paragraphe précédent et que chacun des coefficients $A_i'^p$ soit réel positif et plus grand en valeur absolue que le coefficient correspondant A_i^p.

La convergence des séries (3') et par conséquent celle des séries (3) sera ainsi établie.

J'observe d'abord que l'on peut toujours trouver deux nombres réels et positifs, M et z, tels que, si l'on considère le développement des deux fonctions

$$B_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) - B_{i,1}x_1 - B_{i,2}x_2 - \ldots - B_{i,n}x_n$$

et

$$\frac{M(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2}{1 - z(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)},$$

suivant les puissances croissantes de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, tout terme du second développement soit réel positif et plus grand en valeur absolue que le terme correspondant du premier.

Il importe d'observer que ces deux développements ne contiennent ni terme indépendant des x, ni termes du premier degré par rapport aux x_i.

Soient q et β deux nombres positifs que je me réserve de déterminer plus complètement dans la suite. Je prendrai $m' = q$.

Posons, pour abréger,

$$S = \varphi_1'(u) + \varphi_2'(u) + \ldots + \varphi_n'(u).$$

Nous prendrons

$$B_i = q\varphi_i(u) + \frac{\frac{1}{n}q\beta S^2}{1 - \beta S},$$

de sorte que les équations (2') s'écriront

$$(4') \qquad \varphi_i'(qu) = q\varphi_i'(u) + \frac{\frac{1}{n}q\beta S^2}{1 - \beta S}.$$

Pour achever de déterminer les séries (3'), il faut encore se donner les n coefficients

$$A_1'^1, \quad A_2'^1, \quad \ldots, \quad A_n'^1.$$

Nous prendrons

$$A_1'^1 = A_2'^1 = \ldots = A_n'^1.$$

De plus, $A_1'^1$ devra être réel positif et plus grand en valeur absolue que A_1^1, A_2^1, $\ldots$, A_n^1.

Il résulte de là que l'on aura également

$$\varphi'_i(u) = \varphi'_k(u), \qquad A'^p_1 = A'^p_2 = \ldots = A'^p_n.$$

De plus toutes ces quantités A'^p_i seront réelles et positives. Elles satisferont à des équations analogues aux équations (4) et qui s'écriront

$$(4') \qquad (q^p - q) A'^p_i = C'^p_i,$$

C'^p_i sera un polynôme entier à coefficients réels et positifs par rapport aux quantités

$$A'^1_i, \quad A'^2_i, \quad \ldots, \quad A'^{p-1}_i,$$

et l'on aura d'ailleurs

$$C'^p_1 = C'^p_2 = \ldots = C'^p_n.$$

Je supposerai

$$(6) \qquad q > 1, \qquad \frac{1}{n} q\beta > M, \qquad \beta > \alpha.$$

Dans ce cas, si l'on envisage les deux fonctions

$$R_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad R'_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

qu'on les développe suivant les puissances des x, chacun des termes de degré 2 ou de degré supérieur à 2 du développement de R'_i aura son coefficient plus grand en valeur absolue que le coefficient correspondant de R_i. (Je répète que ce que je dis là ne s'applique qu'aux termes de degré au moins égal à 2 et ne s'applique pas aux termes du premier degré.) On peut conclure de là que la quantité appelée plus haut C'^p_i jouit de la propriété suivante.

Nous avons vu que C^p_i est un polynôme entier par rapport aux $A^h_i (h \quad p-1)$ et que C'^p_i est de même un polynôme entier par rapport aux $A'^h_i (h \quad p-1)$.

Eh bien, chaque coefficient du polynôme C'^p_i est plus grand en valeur absolue que le coefficient correspondant de C^p_i.

Cela posé, écrivons les équations (4)

$$(4) \qquad m^p A^p_i - \sum_{h=1}^{h=n} B_{i,h} A^p_h = C^p_i.$$

Le déterminant de ces équations est égal à $F(m^p)$; appelons

$$F_{i,k}(m^p)$$

les divers mineurs du premier ordre de ce déterminant.

On tirera des équations (4) les équations suivantes :

$$F(m^p)X_i^p = F_{i,1}(m^p)C_1^p + F_{i,2}(m^p)C_2^p + \ldots + F_{i,n}(m^p)C_n^p.$$

Par hypothèse, $F(m^p)$ ne s'annule pour aucune valeur de p plus grande que 1. D'autre part,

$$\frac{F_{i,k}(m^p)}{F(m^p)}$$

considérée comme fonction de m^p est une fonction rationnelle dont le numérateur est un polynôme de degré $n-1$ et le dénominateur un polynôme de degré n. Donc, quand p tend vers l'infini, cette fonction rationnelle tend vers zéro, et $\frac{m^p F_{i,k}}{F}$ tend vers une limite finie.

On peut donc trouver un nombre positif H, tel que

$$\left|\frac{m^p F_{i,k}(m^p)}{F(m^p)}\right| < H,$$

et cela pour toutes les valeurs de i, k et p, sauf pour $p=1$.

On a alors

$$|m^p|\,|X_i^p| < H\left[|C_1^p| + |C_2^p| + \ldots + |C_n^p|\right]. \tag{7}$$

Je supposerai que l'on choisisse q de telle sorte que

$$q^p > q\,\frac{|m|^p}{nH}. \tag{8}$$

Il est toujours possible de choisir q et β de façon à satisfaire aux conditions (6) et (8).

Soit q_0 un nombre compris entre 1 et $|m|$.

Soit

$$p_0 = \frac{\log(nH)}{\log|m| - \log q_0}.$$

L'équation en q

$$q^{p_0} - q\,\frac{|m|}{nH} = 0$$

admet une racine supérieure à 1. Comme elle n'a qu'une variation, elle n'en admet qu'une. Il est vrai que p_0 n'est pas en général un entier, mais Laguerre a montré que la règle de Descartes s'applique encore quand les exposants ne sont pas entiers.

D'ailleurs il est aisé de voir que, pour $q > 1$,

$$q^{p_0} - q$$

est constamment croissant.

Soit donc q_1 cette racine plus grande que 1.

Je dis que, si l'on fait

$$1 < q < q_0 < m, \qquad 1 < q < q_1,$$

l'inégalité (8) sera satisfaite tant pour les exposants p supérieurs à p_0 que pour les exposants p inférieurs à p_0.

En effet, pour $p > p_0$, on a

$$\frac{q^p - q}{m^p} < \frac{q^p}{m^p} < \left(\frac{q_0}{m}\right)^p < \left(\frac{q_0}{m}\right)^{p_0} = \frac{1}{nH},$$

et pour $p < p_0$, on a

$$q^p - q < q_1^p - q_1 < q_1^{p_0} - q_1 = \frac{m}{nH} < \frac{m^p}{nH}.$$

Une fois q déterminé, il reste, pour satisfaire aux inégalités (6), à faire

$$\beta > \frac{nM}{q-2}, \qquad \beta > \alpha.$$

Cela posé, je dis que

$$A_i^p < A_i'^p.$$

En effet, supposons que cela soit vrai des

$$A'^1, \quad A'^2, \quad \dots, \quad A'^{p-1},$$

je dis que cela sera vrai des A_i^p.

En effet, les coefficients du polynôme $C_i'^p$ étant plus grand que ceux du polynôme C_i^p, on aura

$$C_i^p < C_i'^p,$$

d'où

$$C_1^p + C_2^p + \dots + C_n^p < C_1'^p + C_2'^p + \dots + C_n'^p = nC_i'^p$$

puisque

$$C_1'^p = C_2'^p = \dots = C_n'^p.$$

L'inégalité (7) devient alors

$$A_i^p < \frac{nH}{m^p} C_i'^p.$$

D'autre part, l'équation (4') donne

$$A_i'^p = \frac{C_i'^p}{q^p - q}$$

ou, en tenant compte de (8),

$$(9) \qquad |A_i^p| < A_i'^p. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

D'après le paragraphe précédent, les séries (3') convergent et, si l'on a égard à l'inégalité (9), on verra que les séries (3) convergent également. Elles définissent donc des transcendantes qui jouissent d'un théorème de multiplication et *qui par conséquent sont uniformes.*

Donc il existe des transcendantes uniformes qui admettent un théorème de multiplication quelconque, pourvu que $F(m)$ [déterminant des équations (4 *bis*)] *soit nul et que* $F(m^p)$ *ne soit pas nul pour* $p > 1$.

Si le déterminant des équations (4 *bis*) est nul, ainsi que ses mineurs des $h - 1$ premiers ordres, ces transcendantes contiendront h constantes arbitraires $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_h$.

Elles en contiendront donc n, si tous les éléments du déterminant sont nuls, c'est-à-dire si

$$B_{ii} = m, \qquad B_{ik} = 0, \qquad (i \neq k).$$

Fonctions entières.

Nous avons vu que, si les fonctions R_i se réduisent à des polynômes entiers, les fonctions $\varphi_i(u)$ sont des transcendantes entières.

Si, au contraire, les fonctions R_i ne sont pas des polynômes entiers, les fonctions $\varphi_i(u)$ sont méromorphes, mais non holomorphes dans tout le plan.

Mais, dans ce cas, on peut regarder chacune des fonctions $\varphi_i(u)$ comme le quotient de deux fonctions entières qui admettent un théorème de multiplication.

Supposons, en effet, que les fonctions R_i soient des fractions rationnelles et réduisons ces fractions au même dénominateur. Posons

$$R_1 = \frac{P_1}{P_{n+1}}, \qquad R_2 = \frac{P_2}{P_{n+1}}, \qquad \ldots \qquad R_n = \frac{P_n}{P_{n+1}},$$

$P_1, P_2, \ldots, P_n, P_{n+1}$ sont des polynômes entiers par rapport à $\varphi_1(u), \varphi_2(u), \ldots$

$\varphi_n(u)$; les n premiers s'annulent quand $\varphi_1(u), \varphi_2(u), \ldots, \varphi_n(u)$ s'annulent, et il est permis de supposer que P_{n+1} se réduit à 1 pour

$$\varphi_1(u) = \varphi_2(u) = \ldots = \varphi_n(u) = 0.$$

Soit q le plus grand des degrés des polynômes $P_1, P_2, \ldots, P_{n+1}$.

Dans nos polynômes remplaçons $\varphi_1(u), \varphi_2(u), \ldots, \varphi_n(u)$ par $\frac{z_1}{z_{n+1}}, \frac{z_2}{z_{n+1}}, \ldots, \frac{z_n}{z_{n+1}}$ et multiplions les ensuite par z_{n+1}^q; il viendra

$$z_{n+1}^q P_k\left(\frac{z_1}{z_{n+1}}, \frac{z_2}{z_{n+1}}, \ldots, \frac{z_n}{z_{n+1}}\right) = Q_k(z_1, z_2, \ldots, z_{n+1}).$$

Q_k sera un polynôme homogène de degré q en $z_1, z_2, \ldots, z_{n+1}$ qui pourra contenir en facteur une puissance de z_{n+1} si le degré de P_k est inférieur à q.

Posons maintenant

$$\varphi_i(u) = \frac{\psi_i(u)}{1+\psi_{n+1}(u)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

les équations (2) deviendront

$$(9) \qquad \frac{\psi_i(mu)}{1+\psi_{n+1}(mu)} = \frac{Q_i[\psi_1(u), \psi_2(u), \ldots, \psi_n(u), 1+\psi_{n+1}(u)]}{Q_{n+1}[\psi_1(u), \psi_2(u), \ldots, \psi_n(u), 1+\psi_{n+1}(u)]}.$$

Nous pouvons les remplacer par les suivantes :

$$(10) \quad \begin{cases} \psi_i(mu) = Q_i[\psi_1(u), \psi_2(u), \ldots, \psi_n(u), 1+\psi_{n+1}(u)] \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \\ \psi_{n+1}(mu) = Q_{n+1}[\psi_1(u), \psi_2(u), \ldots, \psi_n(u), 1+\psi_{n+1}(u)] - 1. \end{cases}$$

S'il existe des fonctions $\psi_i(u)$ qui admettent le théorème de multiplication exprimé par les équations (10), les fonctions

$$\varphi_i(u) = \frac{\psi_i(u)}{1+\psi_{n+1}(u)}$$

admettront le théorème de multiplication exprimé par les équations (2).

Or nous avons vu qu'il existe des fonctions uniformes qui admettent un théorème de multiplication quelconque, pourvu que certaines conditions très simples soient satisfaites.

Voyons si ces conditions sont remplies par les équations (10).

J'observe d'abord que

$$Q_1, \quad Q_2, \quad \ldots, \quad Q_n \quad \text{et} \quad Q_{n+1} - 1$$

s'annulent pour

$$\psi_1 = \psi_2 = \ldots = \psi_n = \psi_{n+1} = 0.$$

Développons alors les seconds membres des équations (10) suivant les puissances croissantes des ψ et examinons les termes du premier degré.

De même que nous avons appelé plus haut $B_{i,k}$ le coefficient de φ_k dans le développement de R_i, nous appellerons $B'_{i,k}$ le coefficient de ψ_k dans le développement de Q_i. On aura manifestement

$$
\begin{aligned}
B'_{i,k} &= B_{i,k} && (i, k = 1, 2, \ldots, n),\\
B'_{i,k} &= 0 && (i = 1, 2, \ldots, n;\ k = n+1),\\
B'_{n+1,n+1} &= q.
\end{aligned}
$$

Nous avons posé plus haut

$$
F(S) = \begin{vmatrix}
B_{1,1} - S & B_{1,2} & \ldots & B_{1,n} \\
B_{2,1} & B_{2,2} - S & \ldots & B_{2,n} \\
\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\
B_{n,1} & B_{n,2} & \ldots & B_{n,n} - S
\end{vmatrix}.
$$

Nous poserons de même

$$
F'(S) = \begin{vmatrix}
B'_{1,1} - S & B'_{1,2} & \ldots & B'_{1,n+1} \\
B'_{2,1} & B'_{2,2} - S & \ldots & B'_{2,n+1} \\
\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\
B'_{n+1,1} & \ldots\ldots & \ldots & B'_{n+1,n+1} - S
\end{vmatrix}.
$$

Les conditions qui doivent être remplies pour que le théorème de multiplication (10) soit possible sont les suivantes :

$$
(11) \qquad F'(m) = 0, \qquad F'(m^p) \gtrless 0 \quad (p > 1).
$$

Or on a

$$
F'(S) = F(S)(q - S).
$$

De plus, les conditions fondamentales étant supposées remplies pour les équations (2), on aura

$$
F(m) = 0, \qquad F(m^p) \gtrless 0.
$$

Les conditions (11) seront donc remplies pourvu que q ne soit pas égal à une puissance entière de m (la première puissance exceptée).

Les fonctions $\psi_i(u)$ existent donc ; ce sont des fonctions entières, et l'on a

$$
\varphi_i(u) = \frac{\psi_i(u)}{1 + \psi_{n+1}(u)},
$$

ce qui montre que les fonctions $\varphi_i(u)$ sont bien égales au quotient de deux transcendantes entières admettant un théorème de multiplication.

C'est ainsi que les fonctions elliptiques, par exemple, sont égales au quotient de deux fonctions Θ, qui admettent, comme nous l'avons vu, un théorème de multiplication.

Il n'y a de difficulté que si q est une puissance entière de m; mais nous pouvons prendre pour q soit le plus grand des degrés des polynômes P_k, soit tout nombre entier plus grand; nous pouvons donc toujours éviter que q soit une puissance entière de m.

Théorèmes crémoniens.

Un cas particulier digne d'intérêt est celui où le théorème de multiplication défini par les équations (3) est *crémonien*. Voici ce que j'entends par là :

Considérons les équations (2)

$$\varphi_i(mu) = R_i[\varphi_1(u), \varphi_2(u), \dots, \varphi_n(u)].$$

Résolvons ce système d'équations par rapport à

$$\varphi_1(u), \quad \varphi_2(u), \quad \dots, \quad \varphi_n(u),$$

il viendra

$$\varphi_i(u) = S_i[\varphi_1(mu), \varphi_2(mu), \dots, \varphi_n(mu)].$$

Si les fonctions S_i sont rationnelles, la substitution

$$[\varphi_1(u), \varphi_2(u), \dots, \varphi_n(u); \varphi_1(mu), \varphi_2(mu), \dots, \varphi_n(mu)]$$

est une substitution Cremona; je dirai alors que le théorème de multiplication est crémonien.

Plaçons-nous dans le cas où les quantités appelées plus haut $B_{i,k}$ ont les valeurs suivantes :

$$B_{i,i} = m, \qquad B_{i,k} = 0 \qquad (i \gtrless k).$$

Dans ce cas les séries fondamentales (3) dépendent de n constantes arbitraires

$$\beta_1, \quad \beta_2, \quad \dots, \quad \beta_n.$$

Si le théorème défini par les équations (2) est crémonien et si de plus on a

$$B_{i,i} = m, \qquad B_{i,k} = 0, \qquad (i \gtrless k),$$

je dirai, pour abréger, que les fonctions

$$\varphi_1(u), \quad \varphi_2(u), \quad \ldots, \quad \varphi_n(u)$$

sont crémoniennes. Les fonctions crémoniennes méritent par leurs curieuses propriétés de retenir quelque temps notre attention.

Le cas le plus simple est évidemment celui où la substitution Cremona se réduit à une simple substitution linéaire, c'est-à-dire celui où les fonctions R_i se réduisent au quotient de deux polynômes du premier degré, le dénominateur étant le même pour toutes les fonctions R_i. Mais ce cas ne présente pas d'intérêt; car il est aisé de vérifier que les fonctions $\varphi_i(u)$ se réduisent alors à la forme

$$\frac{\beta_i u}{1 - \alpha u},$$

les α et les β étant des coefficients constants.

Nous ne nous occuperons donc que des fonctions crémoniennes correspondant à des substitutions Cremona d'ordre au moins égal à 2. Ces fonctions sont caractérisées par ce fait que

$$\varphi_1(m^p u), \quad \varphi_2(m^p u), \quad \ldots, \quad \varphi_n(m^p u)$$

sont des fonctions rationnelles de

$$\varphi_1(u), \quad \varphi_2(u), \quad \ldots, \quad \varphi_n(u),$$

quand p est un entier *positif ou négatif*.

Je me poserai d'abord la question suivante :

Peut-on disposer des n constantes

$$\beta_1, \quad \beta_2, \quad \ldots, \quad \beta_n$$

qui entrent dans nos séries fondamentales, de telle sorte que les fonctions

$$\varphi_1(u), \quad \varphi_2(u), \quad \ldots, \quad \varphi_n(u)$$

puissent prendre tel système de valeurs que l'on veut ?

Soit, par exemple,

$$\varphi_1(u) = a_1, \quad \varphi_2(u) = a_2, \quad \ldots, \quad \varphi_n(u) = a_n$$

ce système.

Considérons alors le système

$$\varphi_1\left(\frac{u}{m^p}\right), \quad \varphi_2\left(\frac{u}{m^p}\right), \quad \ldots, \quad \varphi_n\left(\frac{u}{m^p}\right).$$

Si nous appelons, pour abréger,

$$a_1 C, \quad a_2 C, \quad \ldots, \quad a_n C,$$

ce que devient le système

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n$$

quand on lui applique la transformation Cremona envisagée; si nous appelons de même

$$a_1 C^p, \quad a_2 C^p, \quad \ldots, a_n C^p,$$

ce que devient ce même système quand on lui applique p fois cette même transformation Cremona; si nous appelons

$$a_1 C^{-1}, \quad a_2 C^{-1}, \quad a_n C^{-1},$$

ce que devient ce système quand on lui applique la transformation Cremona renversée; si nous appelons

$$a_1 C^{-p}, \quad a_1 C^{-p}, \quad a_n C^{-p},$$

ce que devient ce système quand on lui applique p fois cette transformation renversée, il est clair que l'on aura

$$\varphi_1\left(\frac{u}{m^p}\right) = a_1 C^{-p},$$

$$\varphi_2\left(\frac{u}{m^p}\right) = a_2 C^{-p},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi_n\left(\frac{u}{m^p}\right) = a_n C^{-p}.$$

Si p est entier positif et qu'on le fasse croître au delà de toute limite, les premiers membres de ces égalités tendront vers zéro, car les fonctions $\varphi_i(u)$ s'annulent avec u; on aura donc

$$\lim a_1 C^{-p} = \lim a_2 C^{-p} = \ldots = \lim a_n C^{-p} = 0 \quad (p = \infty).$$

Cette condition est donc nécessaire pour que l'on puisse disposer des β, de telle sorte que

$$\varphi_1(u) = a_1, \quad \varphi_2(u) = a_2, \quad \varphi_n(u) = a_n.$$

Je dis que cette condition est suffisante.

En effet, nous avons vu que $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ sont des fonctions de $\beta_1 u$, $\beta_2 u, \ldots, \beta_n u$ qui peuvent se développer suivant les puissances croissantes de ces variables pourvu que leurs modules soient assez petits.

Posons donc

$$(12) \qquad \left\{\begin{array}{l} z_1 = \varphi_1(\beta_1 u, \beta_2 u, \ldots, \beta_n u), \\ z_2 = \varphi_2(\beta_1 u, \beta_2 u, \ldots, \beta_n u), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_n = \varphi_n(\beta_1 u, \beta_2 u, \ldots, \beta_n u), \end{array}\right.$$

le déterminant fonctionnel des φ par rapport aux $B_i(u)$ ne s'annule pas pour $u = 0$. On peut donc tirer des équations (12)

$$(13) \qquad \left\{\begin{array}{l} \beta_1 u = \psi_1(z_1, z_2, \ldots, z_n), \\ \beta_2 u = \psi_2(z_1, z_2, \ldots, z_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \beta_n u = \psi_n(z_1, z_2, \ldots, z_n), \end{array}\right.$$

les fonctions ψ pouvant se développer suivant les puissances des z_i pourvu que l'on ait

$$|z_1| < \rho, \quad |z_2| < \rho, \quad \ldots, \quad |z_n| < \rho.$$

Cela posé, des équations

$$(14) \qquad \varphi_i(u) = a_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

nous pouvons tirer

$$\varphi_i\left(\frac{u}{m^p}\right) = a_i C^{-p}.$$

Si les conditions énoncées plus haut sont satisfaites, c'est-à-dire si l'on a

$$\lim a_i C^{-p} = 0 \qquad \text{pour} \quad p = \infty,$$

on pourra prendre p assez grand pour que

$$|a_i C^{-p}| < \rho \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

et alors on aura, en vertu des équations (13),

$$\beta_i u = m^p \psi_i(a_1 C^{-p}, a_2 C^{-p}, \ldots, a_n C^{-p});$$

on aura donc trouvé des valeurs de $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ qui satisfont aux équations (14). C. Q. F. D.

Appelons point analytique un système de n quantités quelconques, par exemple le système $a_1, a_2, \ldots, a_n$; appelons domaine un ensemble quelconque de points analytiques.

La question que nous nous sommes posée est la suivante :

Quand on donne à $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ toutes les valeurs possibles, $\varphi_1(u)$, $\varphi_2(u), \ldots, \varphi_n(u)$ peuvent-ils prendre toutes les valeurs possibles, ou bien le point analytique $\varphi_1(u), \varphi_2(u), \ldots, \varphi_n(u)$ reste-t-il compris dans un certain domaine ?

Il résulte évidemment de ce qui précède que, si l'on a

$$\lim a_i C^{-p} = 0,$$

quel que soit le point analytique $a_1, a_2, \ldots, a_n$; les fonctions $\varphi_1(u)$, $\varphi_2(u), \ldots, \varphi_n(u)$ pourront prendre toutes les valeurs possibles.

Si, au contraire, les points analytiques qui jouissent de la propriété

$$\lim a_i C^{-p} = 0,$$

appartiennent à un certain domaine D, le point analytique $\varphi_1(u), \varphi_2(u), \ldots, \varphi_n(u)$ restera compris dans ce domaine D.

Tout dépend donc des propriétés de la substitution Cremona. Je ne crois pas que les substitutions Cremona aient été étudiées jusqu'ici d'une manière approfondie à ce point de vue spécial; d'autre part, les bornes de ce travail ne me permettent pas d'y insérer une étude aussi délicate et aussi complexe. Je laisserai donc sans solution la question suivante :

Comment peut-on reconnaître si une substitution Cremona, appliquée une infinité de fois à un point analytique, fait tendre ce point analytique vers un même point limite quel que soit le point analytique qui ait servi de point de départ ?

Il est clair d'abord qu'un point limite ne peut être qu'un des points doubles de la substitution Cremona, c'est-à-dire un point analytique satisfaisant à la condition

$$a_1 C = a_1, \quad a_2 C = a_2, \quad \ldots \quad a_n C = a_n.$$

Soit $a_1^0, a_2^0, \ldots, a_n^0$ un point double quelconque.

Mais tous les points doubles ne sont pas des points limites. Formons l'équation suivante en S :

$$\begin{vmatrix} \dfrac{d(a_1 C)}{da_1} - S & \dfrac{d(a_2 C)}{da_1} & \cdots & \dfrac{d(a_n C)}{da_1} \\ \dfrac{d(a_1 C)}{da_2} & \dfrac{d(a_2 C)}{da_2} - S & \cdots & \dfrac{d(a_n C)}{da_2} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \dfrac{d(a_1 C)}{da_n} & \dfrac{d(a_2 C)}{da_n} & \cdots & \dfrac{d(a_n C)}{da_n} - S \end{vmatrix} = 0,$$

et faisons, dans le premier membre de cette équation,

$$a_1 = a_1^0, \qquad a_2 = a_2^0, \qquad \ldots, \qquad a_n = a_n^0,$$

nous aurons une équation algébrique de degré n en S.

Ou bien les modules des racines de cette équation seront tous plus grands que 1.

Dans ce cas, on aura

$$\lim a_i C^{-p} = a_i^0 \qquad \text{pour} \quad p = \infty,$$

pourvu que $|a_i - a_i^0|$ soit suffisamment petit et le point analytique $a_1^0, a_2^0, \ldots, a_n^0$ sera un point limite de la substitution inverse C^{-1}.

Ou bien les modules des racines seront tous plus petits que 1, et l'on aura

$$\lim a_i C^p = a_i^0 \qquad \text{pour} \quad p = \infty,$$

pourvu que $|a_i - a_i^0|$ soit suffisamment petit et le point $a_1^0, a_2^0, \ldots, a_n^0$ sera un point limite de la substitution directe C.

Ou bien les modules des racines seront les uns plus grands et les autres plus petits que 1, et le point $a_1^0, a_2^0, \ldots, a_n^0$ ne sera pas un point limite, ni pour C ni pour C^{-1}.

Il y a lieu, en outre, de considérer les points limites oscillants. J'appelle ainsi les points qui sont des points limites pour une puissance entière positive C^q de C sans être des points limites pour C.

Il est clair que, si une substitution C^{-1} possède plusieurs points limites ou plusieurs points limites oscillants, on ne pourra pas avoir

$$\lim a_i C^{-p} = 0 \qquad (p = \infty),$$

quel que soit le point analytique initial $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Il doit être facile de construire des substitutions Cremona qui admettent plusieurs points limites. Si l'on appelle $\varphi_1(u), \varphi_2(u), \ldots, \varphi_n(u)$ les fonctions crémoniennes correspondantes, le point analytique $\varphi_1(u), \varphi_2(u), \ldots, \varphi_n(u)$ restera compris dans un certain domaine D.

Il est à remarquer que ce domaine D reste le même quel que soit u, car il est défini par la condition

$$\lim a_i C^{-p} = 0,$$

où u n'intervient pas.

Je suis parvenu également à former des substitutions Cremona C^{-1} qui n'ont qu'un point limite $0, 0, \ldots,$ et qui sont telles que

$$\lim a_i C^{-p} = 0,$$

quel que soit le point analytique $a_1, a_2, \ldots, a_n$, sauf pour des points ou des lignes exceptionnels. Les fonctions crémoniennes correspondantes sont donc telles que $\varphi_1(u), \varphi_2(u), \ldots, \varphi_n(u)$ peuvent prendre toutes les valeurs possibles. On trouvera ces exemples plus loin.

Dans le doute, je me bornerai à appeler D le domaine où le point analytique $\varphi_1(u), \varphi_2(u), \ldots, \varphi_n(u)$ reste compris sans exclure le cas où le domaine D comprendrait tous les points analytiques possibles, sauf quelques points exceptionnels.

Propriétés des fonctions crémoniennes.

Reprenons les équations

$$(12) \qquad \begin{cases} z_1 = \varphi_1(\beta_1 u, \beta_2 u, \ldots, \beta_n u), \\ z_2 = \varphi_2(\beta_1 u, \beta_2 u, \ldots, \beta_n u), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ z_n = \varphi_n(\beta_1 u, \beta_2 u, \ldots, \beta_n u), \end{cases}$$

d'où nous avons tiré

$$(13) \qquad \begin{cases} \beta_1 u = \psi_1(z_1, z_2, \ldots, z_n), \\ \beta_2 u = \psi_2(z_2, z_2, \ldots, z_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \beta_n u = \psi_n(z_1, z_2, \ldots, z_n), \end{cases}$$

et proposons-nous d'étudier les fonctions ψ.

Nous avons vu d'abord que, si

$$z_i \qquad \beta_i$$

ces fonctions peuvent se développer suivant les puissances croissantes des z : ce sont donc des fonctions uniformes des z.

En second lieu, ces fonctions ψ, d'après leur définition, n'existent qu'à l'intérieur du domaine D.

Je dis qu'à l'intérieur de ce domaine tout entier, c'est-à-dire *partout où elles existent, elles sont uniformes.*

On a, en effet,

$$\beta_i u = \psi_i(z_1, z_2, \ldots, z_n) = m^p \psi_i(z_1 C^{-p}, z_2 C^{-p}, \ldots, z_n C^{-p}).$$

Si le point analytique $z_1, z_2, \ldots, z_n$ appartient au domaine D, on pourra prendre p assez grand pour que

$$z_k C^{-p} < \rho \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Alors $\beta_i u$ est une fonction uniforme de $z_1 C^{-p}, z_2 C^{-p}, \ldots, z_n C^{-p}$. Mais $z_1 C^{-p}, z_2 C^{-p}, \ldots, z_n C^{-p}$ sont des fonctions rationnelles de $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Donc $\beta_i u$ est une fonction uniforme de $z_1, z_2, \ldots, z_n$.

Ainsi *les fonctions ψ_i sont uniformes.*

Cherchons quels sont les points où ces fonctions ψ_i deviennent indéterminées.

Si p est assez grand pour que

$$z_k C^{-p} < \rho \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

$\beta_i u$ est une fonction uniforme et *déterminée* des $z_k C^{-p}$. Pour que $\beta_i u$ soit une fonction indéterminée des z_k, il faut donc que les $z_k C^{-p}$ soient des fonctions indéterminées des z_k, ce qui peut arriver :

1° Si les $z_k C^{-p}$ sont fonctions indéterminées des $z_k C^{-p+1}$;
2° Si les $z_k C^{-p+1}$ sont fonctions indéterminées des $z_k C^{-p+2}$;
. . . . ;
p° ou enfin si les $z_k C^{-1}$ sont fonctions indéterminées des z_k.

Or la substitution C étant une substitution Cremona, les $z_k C$ sont des fonctions rationnelles de $z_1, z_2, \ldots, z_n$; ces fonctions rationnelles ne peuvent devenir indéterminées que si leur numérateur et leur dénominateur s'annulent à la fois.

Or cela arrive en certains points qui sont connus sous le nom de *points fondamentaux* de la substitution C.

Si pour

$$z_1 = x_1, \qquad z_2 = x_2, \qquad \ldots, \qquad z_n = x_n,$$

le numérateur et le dénominateur de l'une au moins des n fonctions rationnelles

$$z_1 C, \quad z_2 C, \quad \ldots, \quad z_n C$$

s'annulent à la fois, le point analytique $x_1, x_2, \ldots, x_n$ est un point fondamental de la substitution C.

De même, si, pour

$$z_1 = \gamma_1, \qquad z_2 = \gamma_2, \qquad \ldots, \qquad z_n = \gamma_n,$$

le numérateur et le dénominateur de l'une au moins des n fonctions rationnelles

$$z_1 C^{-1}, \quad z_2 C^{-1}, \quad \ldots, \quad z_n C^{-1},$$

s'annulent à la fois, le point analytique $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ est un point fondamental de C^{-1}.

Pour que les $z_k C^{-p+h}$ soient fonctions indéterminées des $z_k C^{-p+h-1}$, il faut donc et il suffit que l'on ait

$$z_k C^{-p+h-1} = \gamma_k,$$

le point analytique $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ étant l'un des points fondamentaux de C^{-1}, ou bien

$$z_k = \gamma_k C^{p-h+1}.$$

Pour que les $z_k C^{-p}$ soient fonctions indéterminées des z_k, il faut donc que l'on ait

$$z_k = \gamma_k$$

ou

$$z_k = \gamma_k C,$$

ou

$$z_k = \gamma_k C^2, \qquad \ldots$$

ou

$$z_k = \gamma_k C^{p-1}.$$

Enfin, pour que les fonctions ψ_i soient indéterminées, il faut que l'on ait ou bien

$$z_1 = \gamma_1, \qquad z_2 = \gamma_2, \qquad \ldots, \qquad z_n = \gamma_n,$$

ou bien

$$z_1 = \gamma_1 C^q, \qquad z_2 = \gamma_2 C^q, \qquad \ldots, \qquad z_n = \gamma_n C^q,$$

q étant un entier positif.

En d'autres termes, les points d'indétermination des fonctions ψ_i sont les points fondamentaux $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ de C^{-1} et leurs transformés par les diverses puissances entières positives de C.

Je terminerai ce qui regarde les fonctions ψ en disant qu'elles ne peuvent avoir de point singulier essentiel à l'intérieur même du domaine D, mais seulement sur les limites de ce domaine. Dans le cas particulier que nous n'avons pas exclu, où le domaine D comprend tous les points analytiques possibles, sauf quelques points exceptionnels, ce sont ces points exceptionnels qui serviront de limite au domaine D et qui seront les points singuliers essentiels des fonctions ψ_i.

Cherchons maintenant quelle relation il y a entre

$$\varphi_1(u_0), \quad \varphi_2(u_0), \quad \ldots, \quad \varphi_n(u_0)$$

et

$$\varphi_1(u_1), \quad \varphi_2(u_1), \quad \ldots, \quad \varphi_n(u_1),$$

u_1 et u_0 étant deux valeurs quelconques de u.

Je dis que $\varphi_i(u_1)$ est une fonction uniforme de $\varphi_1(u_0), \varphi_2(u_0), \ldots, \varphi_n(u_0)$ tant que le point analytique $\varphi_1(u_0), \varphi_2(u_0), \ldots, \varphi_n(u_0)$ sera compris dans le domaine D.

En effet, d'après ce qui précède,

$$\beta_1 u_0, \quad \beta_2 u_0, \quad \ldots, \quad \beta_n u_0$$

sont des fonctions uniformes de

$$\varphi_1(u_0), \quad \varphi_2(u_0), \quad \ldots, \quad \varphi_n(u_0).$$

D'autre part,

$$\beta_1 u_1, \quad \beta_2 u_1, \quad \ldots, \quad \beta_n u_1$$

sont fonctions uniformes de

$$\beta_1 u_0, \quad \beta_2 u_0, \quad \ldots, \quad \beta_n u_0 \quad \text{et} \quad \frac{u_1}{u_0}.$$

Enfin

$$\varphi_1(u_1), \quad \varphi_2(u_1), \quad \ldots, \quad \varphi_n(u_1)$$

sont fonctions uniformes de

$$\beta_1 u_1, \quad \beta_2 u_1, \quad \ldots, \quad \beta_n u_1.$$

Donc

$$\varphi_1(u_1), \quad \varphi_2(u_1), \quad \ldots, \quad \varphi_n(u_1)$$

sont fonctions uniformes de

$$\varphi_1(u_0), \quad \varphi_2(u_0), \quad \ldots, \quad \varphi_n(u_0), \quad \frac{u_1}{u_0}.$$

Appelons P_0 le point analytique

$$\varphi_1(u_0), \quad \varphi_2(u_0), \quad \ldots, \quad \varphi_n(u_0)$$

et P_1 le point analytique

$$\varphi_1(u_1), \quad \varphi_2(u_1), \quad \ldots, \quad \varphi_n(u_1).$$

Nous voyons d'abord que, si l'un des deux points P_0 et P_1 appartient au domaine D, il en est de même de l'autre; d'autre part, les coordonnées de P_1 sont fonctions uniformes de celles de P_0, et les coordonnées de P_0 fonctions uniformes de celles de P_1.

En d'autres termes, la correspondance entre P_0 et P_1 définit une transformation biuniforme du domaine D en lui-même.

Cette transformation biuniforme devient birationnelle quand $\frac{u_1}{u_0}$ est une puissance entière positive ou négative de m. Il n'en est pas de même en général si $\frac{u_1}{u_0}$ est quelconque; car les points d'indétermination des coordonnées de P_1 considérées comme fonctions des coordonnées de P_0 sont en général les mêmes que les points d'indétermination des fonctions ψ.

Tout me porte à croire que les transcendantes qui définissent les coordonnées de P_1 en fonctions des coordonnées de P_0 n'existent en général que dans le domaine D. Toutefois je n'ai pu le démontrer rigoureusement; il y a certainement au moins un cas d'exception, puisque, si $\frac{u_1}{u_0}$ est une puissance de m, les coordonnées de P_1 sont fonctions rationnelles de celles de P_0. Mais il est possible (et même probable) qu'il n'y en ait pas d'autre.

Cherchons maintenant à exprimer

$$\varphi'_1(u), \quad \varphi'_2(u), \quad \ldots, \quad \varphi'_n(u)$$

en fonctions de

$$\varphi_1(u), \quad \varphi_2(u), \quad \dots, \quad \varphi_n(u)$$

et de u.

En premier lieu,

$$\beta_1 u, \quad \beta_2 u, \quad \dots, \quad \beta_n u$$

sont fonctions uniformes de

$$\varphi_1(u), \quad \varphi_2(u), \quad \dots, \quad \varphi_n(u).$$

D'ailleurs $\varphi'_1(u)$, $\varphi'_2(u)$, ..., $\varphi'_n(u)$ sont fonctions uniformes de

$$\beta_1, \quad \beta_2, \quad \dots, \quad \beta_n \quad \text{et} \quad u.$$

Donc

$$\varphi'_1(u), \quad \varphi'_2(u), \quad \dots, \quad \varphi'_n(u)$$

sont fonctions uniformes de

$$\varphi_1(u), \quad \varphi_2(u), \quad \dots, \quad \varphi_n(u), \quad u.$$

D'autre part, si nous posons

$$\beta_1 u = u_1, \qquad \beta_2 u = u_2, \qquad \dots, \qquad \beta_n u = u_n,$$

$\varphi_i(u)$ devient une fonction des n variables u_1, u_2, ..., u_n, et l'on a

$$\varphi_i(u) = \varphi_i(u_1, u_2, \dots, u_n);$$

d'où

$$\varphi'_i(u) = \beta_1 \frac{d\varphi_i}{du_1} + \beta_2 \frac{d\varphi_i}{du_2} + \dots + \beta_n \frac{d\varphi_i}{du_n};$$

d'où

$$u\varphi'_i(u) = u_1 \frac{d\varphi_i}{du_1} + u_2 \frac{d\varphi_i}{du_2} + \dots + u_n \frac{d\varphi_i}{du_n},$$

ce qui montre que $u\varphi'_i(u)$ est une fonction de u_1, u_2, ..., u_n ou, ce qui revient au même, de $\beta_1 u$, $\beta_2 u$, ..., $\beta_n u$.

Mais

$$\beta_1 u, \quad \beta_2 u, \quad \dots, \quad \beta_n u$$

sont fonctions de

$$\varphi_1(u), \quad \varphi_2(u), \quad \dots, \quad \varphi_n(u).$$

Donc $u\varphi'_i(u)$ est une fonction de

$$\varphi_1(u), \quad \varphi_2(u), \quad \dots, \quad \varphi_n(u).$$

Ainsi les fonctions $\varphi_i(u)$ satisfont à un système d'équations différentielles de la forme suivante :

$$\begin{aligned} u\varphi'_1(u) &= F_1[\varphi_1(u), \varphi_2(u), \ldots, \varphi_n(u)], \\ u\varphi'_2(u) &= F_2[\varphi_1(u), \varphi_2(u), \ldots, \varphi_n(u)], \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u\varphi'_n(u) &= F_n[\varphi_1(u), \varphi_2(u), \ldots, \varphi_n(u)], \end{aligned}$$

les fonctions F_i étant des transcendantes *uniformes dans le domaine* D.

Ces transcendantes uniformes admettront mêmes points d'indétermination que les fonctions ψ.

J'ai dit plus haut que les fonctions ψ n'existent que dans le domaine D. Cela demande quelques mots d'explication. Supposons, par exemple, que

$$\psi_1, \quad \psi_2, \quad \ldots, \quad \psi_n$$

existent dans le domaine δ défini par les inégalités

$$|z_1 - z_1^0| < \rho_1, \qquad |z_2 - z_2^0| < \rho_2, \qquad \ldots, \qquad |z_n - z_n^0| < \rho_n,$$

$z_1^0, z_2^0, \ldots, z_n^0, \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ étant des constantes.

Les ψ_i devraient être développables à l'intérieur de ce domaine suivant les puissances des $z_k - z_k^0$.

Supposons que le domaine δ soit situé en partie à l'intérieur de D, en partie à l'extérieur de D.

C'est là ce qui devrait arriver si les fonctions ψ pouvaient être prolongées au delà du domaine D.

Reprenons les fonctions

$$\begin{aligned} &\varphi_1(\beta_1 u, \beta_2 u, \ldots, \beta_n u), \\ &\varphi_2(\beta_1 u, \beta_2 u, \ldots, \beta_n u), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\varphi_n(\beta_1 u, \beta_2 u, \ldots, \beta_n u), \end{aligned}$$

et substituons-y $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ à la place de $\beta_1 u, \beta_2 u, \ldots, \beta_n u$; nous verrons $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ devenir fonctions de $z_1, z_2, \ldots, z_n$.

Dans le domaine δ, nous savons que $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ sont fonctions holomorphes de $z_1, z_2, \ldots, z_n$; donc $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ restent finis dans ce domaine.

D'autre part, nous savons que, quelles que soient les quantités $\beta_1 u, \beta_2 u, \ldots$ $\beta_n u$, pourvu qu'elles soient finies, les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ sont méromorphes et le point analytique $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ reste dans le domaine D.

Donc, quand le point $z_1, z_2, \ldots, z_n$ restera dans le domaine δ, les quantités φ_i seront fonctions méromorphes des z, et le point $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ restera dans le domaine D.

Mais, d'après la définition des fonctions φ et ψ, on aura, dans la partie de δ qui appartient à D et par conséquent dans tout le domaine δ,

$$\varphi_1 = z_1, \quad \varphi_2 = z_2, \quad \ldots, \quad \varphi_n = z_n.$$

Le point $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ ne sortant pas de D, il doit en être de même du point $z_1, z_2, \ldots, z_n$.

Donc il est impossible qu'une partie de δ soit extérieure à D.

Donc les fonctions ψ n'existent pas en dehors de D. C. Q. F. D.

Les fonctions ψ sont donc uniformes partout où elles existent.

Nous avons donc des fonctions uniformes de n variables $z_1, z_2, \ldots, z_n$ qui sont multipliées par un facteur constant m quand ces variables subissent une substitution Cremona donnée.

Le rapport de deux fonctions ψ, par exemple $\frac{\psi_i}{\psi_k}$, demeure inaltéré par la substitution Cremona.

Tout me porte à croire que la fonction $\frac{\psi_i}{\psi_k}$ n'existe pas en dehors de D et est par conséquent uniforme partout où elle existe; je n'en ai pas toutefois de démonstration rigoureuse.

Toutes les fois qu'on pourra le démontrer, on saura construire une fonction uniforme qui n'est pas altérée par la substitution Cremona.

C'est ce qui arrivera en particulier toutes les fois que le domaine D comprendra tous les points analytiques possibles, sauf quelques points exceptionnels.

Je dis que toute fonction uniforme F des z, n'existant que dans le domaine D et inaltérée par la substitution Cremona, est une fonction rationnelle des rapports des quantités $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$, si elle est méromorphe dans le domaine D.

En effet, nous avons

$$F(z_1, z_2, \ldots, z_n) = F[\varphi_1(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n), \varphi_2(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n), \ldots, \varphi_n(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)].$$

Cette égalité montre que F est une fonction uniforme de $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$.

Quand les z subissent la substitution Cremona,

$$\psi_1, \quad \psi_2, \quad \ldots, \quad \psi_n$$

se changent en

$$m\psi_1, \quad m\psi_2, \quad \ldots, \quad m\psi_n$$

et F ne change pas.

Si F est une fonction méromorphe des z, ce sera aussi une fonction méromorphe des ψ, et nous aurons, dans le voisinage du point

$$\psi_1 = \psi_2 = \ldots = \psi_n = 0,$$

nous aurons, dis-je,

$$F = \frac{S_1}{S_2},$$

S_1 et S_2 étant des séries ordonnées suivant les puissances croissantes des ψ.

Le quotient $\frac{S_1}{S_2}$ ne doit pas changer quand on change

$$\psi_1, \quad \psi_2, \quad \ldots, \quad \psi_n$$

en

$$m\psi_1, \quad m\psi_2, \quad \ldots, \quad m\psi_n.$$

Et cela ne peut arriver que si les deux séries S_1 et S_2 se réduisent à des polynômes entiers homogènes de même degré en $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$.

C. Q. F. D.

Exemples particuliers.

J'ai cherché à former des exemples pour lesquels le domaine D comprend tous les points analytiques possibles, sauf quelques points exceptionnels.

Les premiers exemples que j'ai obtenus m'ont été fournis par des substitutions Cremona qui peuvent être ramenées à la forme

$$\left(z_1, z_2, \ldots, z_n; \frac{\alpha_1 z_1 + \beta_1}{\gamma_1 z_1 + \delta_1}, \frac{\alpha_2 z_2 + \beta_2}{\gamma_2 z_2 + \delta_2}, \ldots, \frac{\alpha_n z_n + \beta_n}{\gamma_n z_n + \delta_n} \right),$$

les α, β, γ, δ étant des constantes, ou dont une puissance peut être ramenée à cette forme.

Les fonctions φ_i correspondantes sont rationnelles; ce cas ne présente donc aucun intérêt.

J'ai réussi ensuite à former un exemple un peu plus général.

Considérons deux variables seulement et, afin d'éviter les indices, représentons-les par x et y et non plus par z_1 et z_2.

Envisageons ensuite la substitution Cremona

$$\left(x, y; \frac{mx}{1-\beta x}, \frac{ay+b}{cy+d}\right);$$

m est le nombre que nous avons toujours appelé ainsi; β est une constante; enfin a, b, c, d sont des polynômes entiers en x; je suppose que, pour $x = 0$, on ait

$$b = 0, \qquad a = m, \qquad d = 1, \qquad c = c_0.$$

Si je désigne par C cette substitution et que je pose, pour abréger,

$$x' = x\mathrm{C}, \qquad y' = y\mathrm{C},$$

nous aurons

$$x' = \frac{mx}{1-\beta x}, \qquad y' = \frac{ay+b}{cy+d}.$$

Nous tirerons de là

$$x = \frac{x'}{m-\beta x'}, \qquad y = \frac{dy'-b}{-cy'+a}.$$

Or a, b, c, d sont fonctions entières de x et par conséquent fonctions rationnelles de x'. Donc x et y sont fonctions rationnelles de x' et y'.

Notre substitution est donc bien *birationnelle*.

Je dis que cette substitution admet quatre points doubles.

En effet, pour que l'on ait

$$x = x', \qquad y = y',$$

il faut d'abord que l'on ait

$$x = x'.$$

Or la substitution homographique

$$\left(x, \frac{mx}{1-\beta x}\right)$$

admet deux points doubles, qui sont

$$x = 0, \qquad x = \frac{1-m}{\beta}.$$

Si l'on fait $x = 0$, il vient

$$y' = \frac{my}{1+c_0 y}$$

et la substitution homographique

$$\left(y, \frac{my}{1+c_0 y}\right)$$

a deux points doubles qui sont

$$y = 0, \qquad y = \frac{m-1}{c_0}.$$

Si l'on fait $x = \frac{1-m}{\beta}$, les quatre polynômes a, b, c, d prennent certaines valeurs a_1, b_1, c_1, d_1, et la substitution homographique

$$\left(y, \frac{a_1 y + b_1}{c_1 y + d_1}\right)$$

admet deux points doubles, que j'appellerai

$$y = y_1, \qquad y = y_2.$$

Notre substitution Cremona a donc quatre points doubles

$$x = y = 0, \qquad x = 0, \qquad y = \frac{m-1}{c_0},$$

$$x = \frac{1-m}{\beta}, \qquad y = y_1, \qquad x = \frac{1-m}{\beta}, \qquad y = y_2.$$

Avant d'aller plus loin, examinons ce qui se passe dans le voisinage du point double

$$x = 0, \qquad y = \frac{m-1}{c_0}.$$

Posons, pour abréger,

$$\xi = \frac{x}{x - \frac{1-m}{\beta}}, \qquad y = \eta + \frac{m-1}{c_0}.$$

Soient ξ' et η' ce que deviennent ξ et η après qu'on leur a appliqué la substitution Cremona; il vient

$$\xi' = m\xi, \qquad \eta' = f(\xi, \eta),$$

$f(\xi, \eta)$ étant une fonction rationnelle de ξ et de η, s'annulant avec ξ et η.

Existe-t-il deux fonctions uniformes $\theta_1(u)$ et $\theta_2(u)$ admettant le théorème de multiplication suivant

$$(15) \qquad \theta_1(mu) = m\theta_1(u), \qquad \theta_2(mu) = f[\theta_1(u), \theta_2(u)].$$

Pour le reconnaître, formons l'équation définie plus haut

$$F(S) = 0,$$

de telle façon que $F(m^p)$ soit le déterminant des équations (4).

Si l'on fait $\xi = 0$, il vient

$$f(\xi, \eta_1) = \frac{\eta_1}{m + c_0 \eta_1}.$$

J'en conclus que

$$F(S) = (S - m)\left(S - \frac{1}{m}\right).$$

Donc $F(m) = 0$, $F(m^p) \neq 0$ si p est un entier positif plus grand que 1.

Il existe donc des fonctions uniformes $\theta_1(u)$ et $\theta_2(u)$ qui satisfont aux conditions (15). Ces fonctions, d'après les principes exposés plus haut, dépendront d'un seul paramètre arbitraire que j'appellerai β_1.

On a d'ailleurs

$$\theta_1(u) = \beta_1 u,$$

et je puis, sans restreindre la généralité, supposer $\beta_1 = 1$; d'où

$$\theta_1(u) = u.$$

Cela posé, si l'on a

$$\eta_1 = \theta_2(\xi),$$

on aura aussi

$$\eta_1 = \theta_2(\xi)$$

et, plus généralement,

$$\eta_1 C^p = \theta_2(\xi C^p),$$

en désignant par ξC^p et $\eta_1 C^p$ ce que deviennent ξ et η_1 quand ces quantités ont subi la substitution C^p et en supposant que p soit un entier quelconque, positif ou négatif.

Lorsque p croît indéfiniment, on a

$$\lim \xi C^{-p} = \lim m^{-p} \xi = 0 \qquad (\text{puisque } |m| > 1),$$

et, si $\eta_1 = \theta_2(\xi)$, on a

$$\lim \eta_1 C^{-p} = \lim \theta_2(\xi C^{-p}) = \theta_2(0) = 0.$$

Posons

$$\frac{m-1}{c_0}\,\theta_2\left(\frac{x}{x - \frac{1-m}{\beta}}\right) = \theta(x).$$

Quand on aura

$$y = \theta(x),$$

on aura

$$\eta = \theta_2(\xi)$$

et, par conséquent,

$$y\,C^p = \theta(x\,C^p) \qquad (p \text{ entier positif ou négatif}).$$

On aura d'ailleurs, pour $p = \infty$,

$$\lim x\,C^{-p} = 0, \qquad \lim y\,C^{-p} = \frac{m-1}{c_0};$$

donc, si

$$y = \theta(x),$$

on n'a pas

$$\lim x\,C^{-p} = \lim y\,C^{-p} = 0.$$

Il en est encore de même si

$$x = \frac{1-m}{\beta};$$

car on a alors

$$x\,C^{-p} = \frac{1-m}{\beta}, \qquad \lim x\,C^{-p} = \frac{1-m}{\beta}.$$

Mais je dis que, dans tous les autres cas, c'est-à-dire toutes les fois qu'on n'a pas

$$y = \theta(x) \qquad \text{ou} \qquad x = \frac{1-m}{\beta},$$

on a

$$\lim x\,C^{-p} = \lim y\,C^{-p} = 0.$$

En effet, le point $x = y = 0$ est un point limite de C^{-1} dans le sens que nous avons donné plus haut à ce mot (les racines de l'équation en S sont en effet toutes deux égales à m et $|m| > 1$). Si donc les modules de x et de y sont assez petits, $x\,C^{-p}$ et $y\,C^{-p}$ tendront vers zéro quand p croîtra au delà de toute limite.

On pourra donc trouver une quantité ρ telle que, si

$$|x| < \rho, \qquad |y| < \rho,$$

on ait

$$\lim x\,C^{-p} = \lim y\,C^{-p} = 0.$$

Supposons maintenant que l'on ait

$$|x| < \rho, \qquad |y| > \rho.$$

J'observe que, si l'on regarde x comme donné, la substitution

$$\left(y, \frac{ay + b}{cy + d}\right) \tag{16}$$

sera une substitution homographique.

Soient donc

$$(x, y), \quad (x, y_1), \quad (x, y_2), \quad (x, y_3)$$

quatre points analytiques ayant même abscisse x.

Leurs transformés par C^{-1}

$$(xC^{-1}, yC^{-1}), \quad (xC^{-1}, y_1C^{-1}), \quad (xC^{-1}, y_2C^{-1}), \quad (xC^{-1}, y_3C^{-1})$$

auront même abscisse xC^{-1} et il en sera de même de leurs $p^{\text{ièmes}}$ transformés

$$(xC^{-p}, yC^{-p}), \quad (xC^{-p}, y_1C^{-p}), \quad (xC^{-p}, y_2C^{-p}), \quad (xC^{-p}, y_3C^{-p}),$$

qui auront même abscisse xC^{-p}.

De plus, la substitution (16) étant homographique, on aura

$$\frac{yC^{-1} - y_1C^{-1}}{yC^{-1} - y_2C^{-1}} \, \frac{y_3C^{-1} - y_2C^{-1}}{y_3C^{-1} - y_1C^{-1}} = \frac{y - y_1}{y - y_2} \, \frac{y_3 - y_2}{y_3 - y_1}$$

et de même

$$\frac{yC^{-p} - y_1C^{-p}}{yC^{-p} - y_2C^{-p}} \, \frac{y_3C^{-p} - y_2C^{-p}}{y_3C^{-p} - y_1C^{-p}} = \frac{y - y_1}{y - y_2} \, \frac{y_3 - y_2}{y_3 - y_1}. \tag{17}$$

Le second membre ne pourrait être égal à 1 que si $y_1 = y_2$ ou si $y = y_3$.

Prenons

$$|y_1| < \rho, \qquad |y_2| < \rho, \qquad y_1 \gtrless y_2, \qquad y_3 = \theta(x).$$

Si l'on n'a pas $y = \theta(x)$, le second membre de (17) sera égal à $M \gtrless 1$.

Si $p = \infty$, on a

$$\lim y_1C^{-p} = \lim y_2C^{-p} = 0, \qquad \lim y_3C^{-p} \gtrless 0.$$

et l'équation (17) devient

$$\frac{\lim yC^{-p}}{\lim yC^{-p}} = M$$

ou, puisque $M \gtrless 1$,

$$\lim yC^{-p} = 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

On a d'ailleurs

$$\lim x C^{-p} = 0,$$

toutes les fois que x n'est pas égal à $\frac{1-m}{\beta}$.

Supposons enfin

$$|x| > \rho.$$

Si x n'est pas égal à $\frac{1-m}{\beta}$, on a

$$\lim x C^{-p} = 0;$$

on peut donc prendre q assez grand pour que

$$|x C^{-q}| < \rho.$$

On a alors soit

$$|x C^{-q}| < \rho, \qquad |y C^{-q}| < \rho,$$

soit

$$|x C^{-q}| < \rho, \qquad |y C^{-q}| > \rho,$$

et l'on retombe sur l'un des deux cas précédents.

Donc on a

$$\lim x C^{-p} = \lim y C^{-p} = 0,$$

à moins que $y = \theta(x)$ ou $x = \frac{1-m}{\beta}$. C. Q. F. D.

Donc le domaine D comprend tous les points analytiques possibles, sauf les lignes exceptionnelles $y = \theta(x)$ et $x = \frac{1-m}{\beta}$. Rappelons que la fonction $\theta(x)$ est uniforme.

Formons alors les fonctions

$$x = \varphi_1(u) = \varphi_1(\beta_1 u, \beta_2 u),$$
$$y = \varphi_2(u) = \varphi_2(\beta_1 u, \beta_2 u),$$

qui admettent le théorème de multiplication suivant

$$(18) \qquad \varphi_1(mu) = \frac{m\varphi_1(u)}{1-\beta\varphi_1(u)}, \qquad \varphi_2(mu) = \frac{a[\varphi_1(u)]\,\varphi_2(u) + b[\varphi_1(u)]}{c[\varphi_1(u)]\,\varphi_2(u) + d[\varphi_1(u)]},$$

où j'ai désigné par la notation $a[\varphi_1(u)]$ le polynôme a où x a été remplacé par $\varphi_1(u)$.

La fonction $\varphi_1(u)$ est manifestement rationnelle; il ne saurait en être de même, en général, de la fonction $\varphi_2(u)$. En effet, la seconde des équations (18) peut s'écrire

$$\varphi_2(mu) = \frac{\lambda\varphi_2(u) - \mu}{\varpi\varphi_2(u) + \omega},$$

λ, μ, ϖ et ω étant des polynômes entiers en u. Ces polynômes peuvent être quelconques, de même que les polynômes a, b, c, d sont quelconques; la seule condition à laquelle ces polynômes soient assujettis, c'est que l'on ait pour $u = 0$,

$$\mu = 0, \qquad \lambda = m\omega.$$

Je puis donc prendre, par exemple,

$$\mu = 0, \qquad \varpi = 0, \qquad \omega = 1, \qquad \lambda = m\left(1 - \frac{u}{u_0}\right).$$

Il vient alors

$$\varphi_2(mu) = m\left(1 - \frac{u}{u_0}\right)\varphi_2(u),$$

d'où l'on tire aisément

$$(19) \qquad \varphi_2(u) = \varphi_2' u\left(1 - \frac{u}{mu_0}\right)\left(1 - \frac{u}{m^2 u_0}\right)\left(1 - \frac{u}{m^3 u_0}\right)\cdots (ad\ inf.).$$

La fonction $\varphi_2(u)$ est donc transcendante et il me suffit évidemment d'avoir établi qu'elle est transcendante dans un cas particulier pour être certain qu'elle n'est pas rationnelle en général.

La parenté de la fonction $\varphi_2(u)$, définie par l'équation (19), avec les fonctions Θ elliptiques, est évidente. On a, en effet,

$$(20) \qquad \varphi_2(mu) = m\left(1 - \frac{u}{u_0}\right)\varphi_2(u),$$

d'où

$$\varphi_2(u) = m\left(1 - \frac{u}{mu_0}\right)\varphi_2\left(\frac{u}{m}\right);$$

d'où

$$\varphi_2\left(\frac{u}{m}\right) = \frac{\varphi_2(u)}{m}\,\frac{1}{1 - \frac{u}{mu_0}}$$

ou, en changeant u en $\frac{mu_0^2}{u}$,

$$(21) \qquad \varphi_2\left(\frac{u_0}{u}\right) = \frac{\varphi_2\left(\frac{mu_0^2}{u}\right)}{m}\,\frac{1}{1 - \frac{u_0}{u}}.$$

Si nous multiplions (20) par (21) et si nous posons

$$\tau(u) = \varphi_2(u)\,\varphi_2\left(\frac{mu_0^2}{u}\right),$$

il viendra

$$\tau(mu) = -\frac{u}{u_0}\,\tau(u).$$

Cette équation prouve que

$$\varphi_2(e^z)\,\varphi_2\left(\frac{mu_0^2}{e^z}\right)$$

est une fonction Θ elliptique dont les périodes sont $2i\pi$ et $\log m$.

Revenons au cas général où les polynômes λ, μ, ϖ et ω sont quelconques.

J'observe d'abord que nous pouvons, sans restreindre la généralité, simplifier beaucoup les équations (18). Je dis que l'on peut toujours supposer que β est nul, de sorte que la première des équations (18) se réduise à

$$\varphi_1(mu) = m\,\varphi_1(u).$$

Si, en effet, il n'en était pas ainsi, on remplacerait la fonction $\varphi_1(u)$ par la fonction

$$\varphi_1^*(u) = \frac{\varphi_1(u)}{\varphi_1(u) - \dfrac{1-m}{\beta}},$$

et l'on aurait

$$\varphi_1^*(mu) = m\,\varphi_1^*(u).$$

Je supposerai donc désormais $\beta = 0$; il vient alors

$$\varphi_1(u) = \beta_1 u,$$

β_1 étant l'une des deux constantes définies plus haut qui entrent dans les séries (3).

Alors on obtiendra les polynômes λ, μ, ϖ et ω en remplaçant tout simplement x par $\beta_1 u$ dans les polynômes a, b, c, d.

Cela posé, nous savons que $\varphi_1(u_1)$ et $\varphi_2(u_1)$ sont fonctions uniformes de $\varphi_1(u_0)$ et de $\varphi_2(u_0)$.

Si nous supposons $\beta_1 = 1$, par exemple, il en résultera que $\varphi_2(u_1)$ est fonction uniforme de $\varphi_2(u_0)$; car $\varphi_1(u_0) = u_0$ est une donnée de la question.

De même, $\varphi_2(u_0)$ est une fonction uniforme de $\varphi_2(u_1)$.

Si donc on suppose que $\beta_1 = 1$, et si u_1 et u_0 sont deux constantes données, il y aura entre $\varphi_2(u_0)$ et $\varphi_2(u_1)$ une relation homographique.

Nos séries (3) dépendant des deux constantes β_1 et β_2, je puis écrire, comme je l'ai déjà fait bien des fois,

$$y = \varphi_2(u) = \varphi_2(\beta_1 u, \beta_2 u).$$

Si nous faisons $\beta_1 = 1$; il vient

$$y = \varphi_2(u, \beta_2 u).$$

On voit que y est une fonction uniforme de β_2. D'autre part, nous avons

$$\beta_1 u = \psi_1(x, y),$$
$$\beta_2 u = \psi_2(x, y).$$

On a évidemment

$$\psi_1(x, y) = x,$$

car

$$\beta_1 u = \varphi_1(u) = x.$$

D'autre part, si l'on fait $\beta_1 = 1$, il vient

$$x = u$$

et

$$\beta_2 = \frac{1}{u}\psi_2(u, y),$$

ce qui montre que, quand $\beta_1 = 1$, et que u est regardé momentanément comme une constante, β_2 est fonction uniforme de y.

Si donc $\beta_1 = 1$ et si u est regardé comme une constante, il y a une relation homographique entre β_2 et y.

La fonction $\varphi_2(u)$ est donc de la forme suivante :

$$\varphi_2(u) = \frac{\beta_2 u \sigma_1(\beta_1 u) + \tau_1(\beta_1 u)}{\beta_2 u \sigma_2(\beta_1 u) + \tau_2(\beta_1 u)},$$

σ_1, τ_1, σ_2, τ_2 étant des fonctions uniformes de $\beta_1 u$ que nous pouvons toujours supposer entières.

Ces fonctions σ et τ jouissent des propriétés suivantes :

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} m\,.\,q_1(u)\,\sigma_1(mu) &= a\,\sigma_1(u) + b\,\sigma_2(u),\\ q_1(u)\,\tau_1(mu) &= a\,\tau_1(u) + b\,\tau_2(u),\\ m\,.\,q_1(u)\,\sigma_2(mu) &= c\,\sigma_1(u) + d\,\sigma_2(u),\\ q_1(u)\,\tau_2(mu) &= c\,\tau_1(u) + d\,\tau_2(u).\end{aligned}\right.$$

Dans ces équations (22), nous désignons par $\eta(u)$ une fonction entière de u, et nous supposons qu'on a remplacé x par u dans les polynômes a, b, c, d.

Si l'on pose

$$ad - bc = \delta(u), \qquad \sigma_1(u)\tau_2(u) - \sigma_2(u)\tau_1(u) = D(u),$$

il viendra

$$m\eta^2(u) D(mu) = \delta(u) D(u). \tag{23}$$

Cette équation (23) met en évidence le lien qui relie les fonctions σ et τ à la fonction φ_2 définie par l'équation (19) et par conséquent aux fonctions Θ elliptiques.

On en peut encore tirer une autre conclusion.

Si la fonction φ_2 est rationnelle, σ_1, τ_1, σ_2, τ_2, η, D et δ sont des polynômes, et l'équation (23) montre que le polynôme δ doit jouir de propriétés très particulières. Sans entrer dans le détail de la discussion, on voit que la fonction φ_2 ne pourra être rationnelle si le polynôme $\delta = ad - bc$ ne satisfait pas à certaines conditions et, en particulier, s'il n'est pas de degré pair.

La fonction

$$\frac{\psi_2(x, y)}{\psi_1(x, y)} = \frac{\psi_2(x, y)}{x}$$

est uniforme pour toutes les valeurs de x et de y et elle demeure inaltérée par notre substitution Cremona.

Elle admet comme lignes singulières essentielles

$$y = \theta(x)$$

et

$$x = \frac{1 - m}{\beta}$$

(ou $x = \infty$ si, comme nous l'avons supposé, $\beta = 0$). La substitution Cremona

$$\left(x, y, z; \frac{mx}{1 - \beta x}, \frac{ay + b}{cy + d}, \frac{Az + B}{Cz + D}\right)$$

(où a, b, c, d sont des polynômes entiers en x, et A, B, C, D des polynômes entiers en x et y) jouit de propriétés analogues.

Les fonctions dont il a été question dans ce Mémoire et qui demeurent inaltérées par une substitution Cremona et ses puissances, ne sont peut-être que des cas extrêmement particuliers d'une classe plus générale de fonctions uniformes qui demeureraient inaltérées par un *groupe* de substitutions Cremona et qui se présenteraient comme la généralisation la plus naturelle des fonctions hyperfuchsiennes et hyperabéliennes de M. Picard.

EXTRAIT DE L'ANALYSE

SUR SES

TRAVAUX D'ASTRONOMIE (QUESTIONS DIVERSES)

FAITE PAR H. POINCARÉ.

Acta mathematica, t. 38, p. 114-115 (1921).

XXII. — Astronomie. Questions diverses.

On a vu plus haut quel rôle jouent en Astronomie les séries trigonométriques. J'ai donc au point de vue de ces applications été amené pour contribuer à la solution de cette question à étudier les conditions de convergence des séries trigonométriques [43, 93]. J'ai reconnu ainsi deux faits principaux :

1° Si une pareille série est absolument convergente pour certaines valeurs du temps, elle l'est éternellement; il n'en est plus de même quand la convergence n'est plus absolue.

2° Une même fonction ne peut pas être représentée par deux séries différentes absolument convergentes.

Je n'ai pu résoudre, de façon à me mettre à l'abri de toute objection, la question de la convergence des séries particulières de M. Lindstedt; cependant, j'ai tout lieu de penser que ces séries ne convergent pas absolument, mais que, en ordonnant convenablement les termes, on peut les rendre semi-convergentes. La convergence pourrait alors ne subsister que pendant un intervalle de temps limité.

On croit d'ordinaire qu'une fonction représentée par une série trigonométrique absolument convergente ne peut croître au delà de toute limite. C'est même cette croyance qui sert de fondement aux démonstrations anciennes de la stabi lité du système solaire et qui, depuis, a conduit les astronomes à faire tant d'efforts pour faire rentrer le temps sous les signes sinus et cosinus. Cette croyance est erronée ; j'ai montré [31, 93] qu'une pareille fonction devient aussi grande que l'on veut si la convergence n'est pas uniforme. Mais il y a deux manières de croître au delà de toute limite : une fonction peut *tendre vers l'infini*. Il arrive alors qu'elle finit par dépasser une quantité quelconque, si grande qu'elle soit, pour rester ensuite constamment supérieure à cette quantité. Une fonction peut encore subir une infinité d'oscillations successives, de façon que l'amplitude des oscillations croisse indéfiniment. J'ai montré [58] que les deux cas peuvent se présenter, en ce qui concerne la somme d'une série purement trigonométrique. En résumé, quand même on arriverait à représenter les coordonnées des astres par des séries trigonométriques convergentes, on n'aurait pas démontré la stabilité du système solaire.

J'ai ensuite [202] étudié des procédés destinés à augmenter la convergence de certaines séries trigonométriques dont divers astronomes et en particulier M. Gylden avaient fait usage dans les quadratures mécaniques.

BIBLIOGRAPHIE SPÉCIALE AUX QUESTIONS DIVERSES.

[31] *Sur les séries trigonométriques* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 95, 1882, p. 766-768).

[43] *Sur les séries trigonométriques* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 97, 1883, p. 1471-1473).

[58] (1) *Sur les séries trigonométriques* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 101, 1885, p. 1131-1134).

[93] *Sur la convergence des séries trigonométriques* (*Bull. Astron.*, t. 1, 1884, p. 319-327).

[202] *Sur un moyen d'augmenter la convergence des séries trigonométriques* (*Bull. Astron.*, t. 3, 1886, p. 521-528).

(1) A été inséré, Tome I, p. 164-166.

SUR LES SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 95, p. 766-768 (30 octobre 1882).

On sait quel est le rôle joué en Mécanique céleste par les séries de la forme

$$\Sigma A_p \sin(\mu m_p + \nu n_p)t, \quad \Sigma B_p \cos(\mu m_p + \nu n_p)t,$$

où μ et ν sont des nombres indépendants de p et où m_p et n_p sont des entiers positifs ou négatifs. C'est ce rôle qui donne un grand intérêt à l'étude de ces expressions et plus généralement à celle des suites infinies de la forme

$$\sum_{p=0}^{\infty} A_p \sin \alpha_p t + \sum_{p=0}^{\infty} B_p \cos \beta_p t.$$

Voici un fait qui concerne ces séries et sur lequel je désirerais attirer l'attention. Je choisirai pour l'exposer un exemple particulier. Considérons la fonction

$$\varphi(t) = \Sigma A_p \sin \alpha_p t. \tag{1}$$

Je suppose que les nombres A_p et α_p sont positifs et que $\frac{1}{A_p}$ et α_p tendent vers zéro quand p augmente indéfiniment. La série du second membre est convergente, pourvu que la suite infinie $\Sigma A_p \alpha_p$ le soit elle-même. Le nombre A_p, par hypothèse, peut croître au delà de toute limite. Mais on ne saurait en conclure sans démonstration que le module de $\varphi(t)$ peut également devenir aussi grand que l'on veut. C'est là le fait que je me propose d'établir.

Je dis que ce module peut devenir plus grand que $\frac{A_m}{4}$, A_m étant un des coefficients de la série (1). Supposons, en effet, que l'on ait constamment

$$\bmod \varphi(t) < \frac{A_m}{4};$$

on en conclurait

$$\operatorname{mod} \int_0^t \varphi(t) \sin \alpha_m t \, dt < \frac{A_m t}{4}, \qquad \operatorname{mod} [\varphi(t) \cos \alpha_m t] < \frac{A_m}{4};$$

or on a, en intégrant par parties,

$$\int_0^t \varphi(t) \sin \alpha_m t \, dt = -\frac{\varphi(t) \cos \alpha_m t}{\alpha_m} + \int_0^t \frac{d\varphi}{dt} \frac{\cos \alpha_m t}{\alpha_m} dt.$$

On devrait donc avoir

$$\operatorname{mod} \int_0^t \frac{d\varphi}{dt} \frac{\cos \alpha_m t}{\alpha_m} dt < \frac{A_m}{4} \left(t + \frac{1}{\alpha_m} \right).$$

Or on a

$$\frac{d\varphi}{dt} = \Sigma A_p \alpha_p \cos \alpha_p t,$$

d'où

$$\frac{d\varphi}{dt} \cos \alpha_m t = \sum \frac{A_p \alpha_p}{2} \cos(\alpha_m - \alpha_p) t + \sum \frac{A_p \alpha_p}{2} \cos(\alpha_m + \alpha_p) t$$

et

$$(2) \quad \int_0^t \frac{d\varphi}{dt} \cos \alpha_m t \, dt = \frac{A_m \alpha_m t}{2} + \sum \frac{A_p \alpha_p \sin(\alpha_m - \alpha_p) t}{2(\alpha_m - \alpha_p)} + \sum \frac{A_p \alpha_p \sin(\alpha_m + \alpha_p) t}{2(\alpha_m + \alpha_p)}.$$

Les deux séries

$$\sum \frac{A_p \alpha_p}{2 \operatorname{mod}(\alpha_m - \alpha_p)} \qquad \text{et} \qquad \sum \frac{A_p \alpha_p}{2(\alpha_m + \alpha_p)}$$

sont convergentes, et j'appellerai leurs sommes B et C. Les deux séries du second membre de l'équation (2) sont évidemment, en valeur absolue, leurs sommes inférieures à B et à C. On aura donc

$$\operatorname{mod} \left(\int_0^t \frac{d\varphi}{dt} \cos \alpha_m t \, dt - \frac{A_m \alpha_m t}{2} \right) < B + C,$$

de sorte qu'on devrait avoir

$$\frac{A_m t}{2} < \frac{A_m}{4} \left(t + \frac{1}{\alpha_m} \right) + \frac{B}{\alpha_m} + \frac{C}{\alpha_m}.$$

Or cette inégalité ne peut subsister pour de grandes valeurs de t. Donc $\varphi(t)$ *peut devenir plus grand que* $\frac{A_m}{4}$ *et, par conséquent, que toute quantité* *donnée*, puisque A_m croît indéfiniment avec m. Le même résultat serait encore vrai si les nombres A_p et α_p n'étaient pas assujettis à être positifs; il le serait encore (pourvu que A_p puisse croître au delà de toute limite) de la série

$$(3) \qquad \Sigma A_p(1 - \cos \alpha_p t)$$

qui est convergente, pourvu que la suite infinie $\Sigma \bmod A_p \alpha_p^2$ le fût également.

Voici comment cela peut s'appliquer aux séries que l'on a à envisager en Mécanique céleste. On sait que, si t est le temps et a le grand axe, par exemple, on a pour la dérivée de ce grand axe une expression de la forme

$$\frac{da}{dt} = \Sigma A_p \sin \alpha_p t + \Sigma B_p \cos \beta_p t,$$

les deux séries $\Sigma \bmod A_p$ et $\Sigma \bmod B_p$ étant convergentes. En négligeant les carrés des masses, on en conclut, pour la variation δa du grand axe, l'expression

$$(4) \qquad \delta a = \sum \frac{A_p}{\alpha_p}(1 - \cos \alpha_p t) + \sum \frac{B_p}{\beta_p} \sin \beta_p t.$$

On serait tenté de conclure que δa reste toujours compris entre certaines limites. Cela a lieu en fait pour certaines valeurs incommensurables du rapport des moyens mouvements. Mais il est d'autres valeurs *également incommensurables* de ce même rapport pour lesquelles les séries du second membre de l'équation (4) se comportent comme les séries (1) et (3), et peuvent croître indéfiniment.

Cela n'a pas d'importance au point de vue *pratique* du calcul des perturbations, puisque le rapport des moyens mouvements ne peut être connu qu'approximativement et que nous ne pouvons reconnaître par conséquent si les séries (4) restent finies ou croissent indéfiniment; puisque d'ailleurs l'équation (4) ne représente la variation du grand axe que si l'on néglige les termes d'ordre supérieur par rapport aux masses, et que nous ignorons si ces termes ne peuvent pas eux-mêmes croître au delà de toute limite.

Néanmoins, il y a peut-être quelque intérêt à signaler ce fait, car il montre qu'il est impossible d'accepter certaines conséquences *théoriques* qu'on serait tenté de tirer de l'expression (4).

SUR LES SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 97, p. 1471-1473 (24 décembre 1883).

M. Lindstedt a publié récemment, dans les *Comptes rendus* et dans les *Astronomische Nachrichten*, une solution nouvelle du problème des trois corps, qui lui permet d'exprimer les coordonnées des trois masses par des séries purement trigonométriques. Cet important résultat donne quelque intérêt à une remarque que j'avais faite dans une Note que j'ai eu l'honneur de présenter à l'Académie le 30 octobre 1882. J'avais montré, dans cette Note, qu'une série purement trigonométrique et toujours convergente peut cependant croître au delà de toute limite. Ainsi, même en supposant vaincues toutes les difficultés provenant des questions de convergence, le résultat de M. Lindstedt ne permettrait pas de conclure à la stabilité du système solaire, dans le sens rigoureux du mot.

Je voudrais faire quelques observations au sujet de la belle méthode de M. Lindstedt. Ce savant astronome s'exprime comme il suit (1) :

« Sans entrer ici dans des discussions sur des conditions de convergences, nous supposerons que nos constantes aient des valeurs telles que nos développements soient *toujours* convergents. »

Dans les *Astronomische Nachrichten*, au contraire, M. Lindstedt dit qu'il choisira ses constantes de telle façon que ses séries convergent *au moins pendant un certain intervalle de temps*.

(1) *C. R. Acad. Sc.*, t. 97, 1883, p. 1278.

Je me propose de faire voir :

1° que si ces séries convergent pendant un intervalle de temps, si petit qu'il soit, elles convergeront toujours;

2° qu'il n'est pas sûr qu'on puisse choisir les constantes de telle façon que les séries convergent;

3° que les séries, même lorsqu'elles ne convergent pas, peuvent donner une solution du problème avec une approximation indéfinie.

M. Lindstedt dit aussi qu'il a trouvé le véritable nombre des arguments qu'il faut introduire dans les expressions des coordonnées des masses. Cela n'a de sens que si les coordonnées ne peuvent se développer que d'une seule manière en séries trigonométriques convergentes, et c'est certainement là la supposition du géomètre de Dorpat. Je me propose de montrer que cette supposition est fondée, ce qui n'est pas évident *a priori*.

Les séries de M. Lindstedt sont de la forme

$$\Sigma\, A_m \cos(\alpha_m t + \varpi_m) = \Sigma(B_m \cos \alpha_m t + C_m \sin \alpha_m t).$$

Je les suppose convergentes pendant un petit intervalle de temps de part et d'autre de l'époque zéro. Il en résulte que les deux séries

$$\Sigma\, B_m \cos \alpha_m t, \quad \Sigma\, C_m \sin \alpha_m t$$

sont séparément convergentes; et il s'agit évidemment d'une convergence *absolue*, puisque M. Lindstedt ne tient aucun compte de l'ordre des termes. Je dis que les deux séries sont toujours convergentes. C'est évident pour la première, puisque la série $\Sigma\, B_m$ doit converger. Si maintenant la seconde converge pour une certaine valeur de t, il en sera de même de

$$\Sigma(C_m \sin \alpha_m t \times 2 \cos \alpha_m t) = \Sigma\, C_m \sin 2\alpha_m t.$$

Ainsi, si la série converge dans un certain intervalle de temps, elle convergera dans un intervalle double; il s'ensuit qu'elle convergera toujours.

Il arrive quelquefois qu'une série trigonométrique, quoique toujours convergente, ne représente une fonction donnée que dans un intervalle limité. C'est ainsi que la série $\sum \frac{\sin nt}{n}$ ne représente la fonction $\frac{\pi - t}{2}$ que quand t est compris entre zéro et 2π. Mais ce ne saurait être ici le cas, car les séries de M. Lindstedt, substituées dans les équations du problème, y satisfont identiquement en admettant qu'elles convergent.

Enfin, il ne peut pas y avoir deux solutions du problème; une même fonction ne peut pas être représentée par deux séries trigonométriques, sans quoi l'on aurait identiquement

$$\Sigma B_m \cos \alpha_m t + \Sigma C_m \sin \alpha_m t = 0. \tag{1}$$

Mais j'ai démontré (*Comptes rendus*, t. 95, p. 766) [1] que la valeur absolue d'une série telle que celle du premier membre peut devenir au moins égale à $\frac{B_m}{4}$ ou à $\frac{C_m}{4}$. La démonstration ne s'appliquait, il est vrai, qu'à une série particulière, mais il est facile, par un artifice assez simple, de l'étendre au cas général. Ainsi une équation telle que (1) est impossible.

Toutes ces suppositions de M. Lindstedt sont donc confirmées. Je ne crois pas qu'il puisse en être de même d'une autre hypothèse faite dans ce même Mémoire. Le savant astronome suppose que l'on pourra choisir les constantes de façon que ces développements soient convergents. Il est vrai que, pour certaines valeurs *particulières* des constantes, les distances mutuelles des trois corps peuvent être développées en séries trigonométriques convergentes (ne contenant même qu'un argument), ainsi que je l'ai démontré dans une Note du 23 juillet 1883 [2]. Mais il n'est pas évident, il est même improbable, que la convergence subsiste lorsque les valeurs des constantes sont suffisamment voisines de ces valeurs particulières. Je connais, en effet, des problèmes tout à fait analogues où la convergence n'a pas lieu.

Mais, même si elles divergent, les séries de M. Lindstedt peuvent fournir une solution du problème avec une approximation indéfinie, c'est-à-dire que l'on peut trouver des séries convergentes dont les cofficients diffèrent aussi peu que l'on veut de ceux des séries de M. Lindstedt et dont la somme diffère aussi peu que l'on veut des distances mutuelles que l'on cherche à exprimer. C'est dans ce sens que la méthode de M. Lindstedt nous fournit une véritable solution du problème.

(1) *Voir* ce Tome IV, p. 585.
(2) *Voir* le Tome VII.

SUR LA
CONVERGENCE DES SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES

Bulletin Astronomique, t. I, p. 319-327 (1884).

Pour qu'une série puisse être utilisée en Astronomie, il n'est pas nécessaire, comme l'a remarqué M. Tchebichef, qu'elle soit convergente, au sens donné à ce mot par les géomètres : il suffit que l'erreur commise, en s'arrêtant à un certain terme de la série, reste pendant quelque temps inférieure à une quantité suffisamment petite. C'est grâce à cette circonstance que les séries habituellement employées en Mécanique céleste, qui presque toutes sont divergentes, représentent très sensiblement le mouvement des astres. Cependant, il est souvent utile, si l'on veut se rendre compte du temps pendant lequel on pourra compter sur une approximation donnée, de rechercher les conditions de convergence des séries qu'on emploie. C'est pourquoi il ne sera peut-être pas sans intérêt d'étudier ici les différentes circonstances que peut présenter la convergence de séries trigonométriques.

Considérons une série de la forme suivante :

$$\Sigma A_n \sin(\alpha_n t + \beta_n) = \varphi(t), \tag{1}$$

que nous supposerons convergente pour certaines valeurs de t. Elle peut être ou bien absolument convergente ou semi-convergente.

Laissons d'abord de côté les cas de semi-convergence et supposons que, toutes les fois que t satisfait aux inégalités

$$-\pi < t < \pi, \tag{2}$$

la série (1) soit absolument convergente, de façon qu'on puisse changer l'ordre des termes sans en altérer la somme.

Il en résultera que les deux séries

$$(3)\qquad \Sigma A_n \cos\beta_n \sin\alpha_n t = \frac{1}{2}[\Sigma A_n \sin(\alpha_n t + \beta_n) - \Sigma A_n \sin(-\alpha_n t + \beta_n)],$$

$$(4)\qquad \Sigma A_n \sin\beta_n \cos\alpha_n t = \frac{1}{2}[\Sigma A_n \sin(\alpha_n t + \beta_n) + \Sigma A_n \sin(-\alpha_n t + \beta_n)]$$

seront séparément convergentes et que l'on pourra écrire

$$\Sigma A_n \sin(\alpha_n t + \beta_n) = \Sigma A_n \cos\beta_n \sin\alpha_n t + \Sigma A_n \sin\beta_n \cos\alpha_n t.$$

Si dans la série (1) on fait $t = 0$, on voit que la série $\Sigma A_n \sin\beta_n$ est absolument convergente, ce qui entraîne la convergence de la série (4) elle-même pour toutes les valeurs de t.

Considérons maintenant la série (3). Si nous multiplions le $n^{\text{ième}}$ terme de cette série par le facteur $2\cos\alpha_n t$, qui est plus petit que 2 en valeur absolue, nous obtiendrons la série

$$2\Sigma A_n \cos\beta_n \sin\alpha_n t \cos\alpha_n t = \Sigma A_n \cos\beta_n \sin 2\alpha_n t,$$

qui sera forcément convergente; ce qui montre que la série (3) converge toutes les fois que

$$-2\pi < t < 2\pi.$$

Si donc la série (3) converge pendant un certain intervalle de temps, elle convergera également pendant un intervalle double. En répétant indéfiniment ce raisonnement, on verrait qu'elle doit converger pour toutes les valeurs du temps.

Ainsi, *si la série* (1) *est absolument convergente dans un intervalle de temps si petit qu'il soit, elle le sera pour toutes les valeurs du temps.*

Mais il y a encore une distinction à faire. La convergence peut être *uniforme*, si l'erreur commise, lorsqu'on s'arrête au $n^{\text{ième}}$ terme de la série, reste pour toutes les valeurs du temps inférieure à une certaine quantité ρ_n ne dépendant que de n et tendant vers zéro quand n croît indéfiniment. Il peut arriver aussi que la série converge absolument sans converger uniformément.

Si la série (4) converge absolument, il en est de même de la série $\Sigma A_n \sin\beta_n$, et par conséquent de la série

$$(5)\qquad \Sigma |A_n \sin\beta_n|.$$

où j'ai adopté la notation habituelle $|X|$ pour représenter la valeur absolue de X. Le reste de la série (4) est évidemment plus petit en valeur absolue que le reste ρ_n de la série (5), lequel tend lui-même vers zéro, puisque nous venons d'en démontrer la convergence. La série (4) ne peut donc converger qu'uniformément.

Il n'en est pas de même de la série (3) où je poserai, pour abréger,

$$A_n \cos \beta_n = C_n, \qquad A_n \sin \beta_n = B_n.$$

On voit aisément en effet que la série

$$2 \sin \frac{t}{3} + 4 \sin \frac{t}{9} + \ldots + 2^n \sin \frac{t}{3^n} + \ldots \tag{6}$$

converge absolument pour toutes les valeurs de t, mais ne converge pas uniformément.

Voici d'ailleurs quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes de la convergence d'une série de la forme (3). Écrivons-la sous la forme

$$\Sigma C_n \sin \alpha_n t = \Sigma C_p \sin \alpha_p t + \Sigma C_q \sin \alpha_q t,$$

la première des séries partielles du second membre comprenant tous les termes pour lesquels le coefficient α_p est supérieur à une quantité donnée λ et la seconde tous les termes pour lesquels le coefficient α_q est inférieur à cette même quantité. Il faut alors et il suffit que les deux séries

$$\Sigma |C_p| \quad \text{et} \quad \Sigma |C_q \alpha_q|$$

soient convergentes.

On voit, par l'énoncé de ces conditions, que la série (3) peut converger, bien que la série $\Sigma |C_q|$ diverge ou même bien que le coefficient C_q puisse croître au delà de toute limite; c'est ce qui arrive en particulier dans les circonstances suivantes; soit α un élément quelconque du mouvement elliptique d'un astre; on est conduit à l'équation différentielle

$$\frac{d\alpha}{dt} = F,$$

F étant une série trigonométrique du temps dont les coefficients dépendent des divers éléments du mouvement. On trouvera alors comme première approximation pour la variation $\delta\alpha$ de l'élément α, en négligeant les carrés des masses,

$$\delta\alpha = \int_0^t \mathrm{F}\, dt.$$

Le second membre se compose, en général, d'un terme séculaire et d'une série trigonométrique. Pour certaines valeurs *incommensurables* du rapport des moyens mouvements, cette série présente une convergence qui n'est pas uniforme. On peut toujours trouver dans un intervalle quelconque, si petit qu'il soit, une infinité de valeurs de ce rapport qui donnent une convergence non uniforme et une infinité de valeurs qui donnent une convergence uniforme.

Lorsqu'une fonction $\varphi(t)$ peut être représentée par une série trigonométrique *uniformément* convergente, on est certain que sa valeur absolue $|\varphi|$ restera finie quand le temps croîtra indéfiniment. Il n'en est plus de même lorsque la convergence n'est pas uniforme. On peut démontrer seulement que, quand t croît indéfiniment, le rapport $\frac{\varphi}{t}$ tend vers zéro.

Si une série $\varphi(t)$ n'est pas uniformément convergente, mais que la série obtenue en la différentiant terme à terme converge uniformément, cette série représentera la dérivée $\frac{d\varphi}{dt}$ et le rapport $\frac{\varphi}{t}$ tendra vers zéro quand t croîtra indéfiniment.

Nous pourrons écrire en effet

$$\varphi = \sigma_q + \rho_q,$$

σ_q désignant la somme des q premiers termes de cette série φ. On aura

$$\sigma_q < s_q, \qquad \left|\frac{d\rho_q}{dt}\right| < r_q,$$

s_q et r_q étant des constantes ne dépendant que de q. De plus, par hypothèse, on peut prendre q assez grand pour que r_q soit aussi petit que l'on veut. On aura alors

$$\varphi < s_q + r_q t,$$

ce qui montre que la limite du rapport $\frac{|\varphi|}{t}$ pour t infini est certainement plus petite que r_q et par conséquent qu'elle est nulle, puisque r_q peut être pris aussi petit que l'on veut.

Il en sera encore de même si la série $\varphi(t)$ est la somme de deux autres dont l'une est uniformément convergente et dont l'autre a sa dérivée uniformément convergente. Comme exemple de pareilles séries, je puis citer la série (1) elle-même, que je puis écrire

$$\varphi(t) = \Sigma B_n \cos \alpha_n t + \Sigma C_p \sin \alpha_p t + \Sigma C_q \sin \alpha_q t, \tag{7}$$

en supposant que les coefficients α_p sont tous plus grands qu'une quantité λ et les coefficients α_p tous plus petits que λ. Il arrive alors que les deux premières séries du second membre de l'identité (7) convergent uniformément ainsi que la dérivée de la troisième.

Comme second exemple citons la série

$$\varphi_1(t) = \Sigma C_q \sin^2 \alpha_q t,$$

en supposant que $\Sigma |C_q|$ diverge et que $\Sigma |C_q \alpha_q|$ converge.

La dérivée $\frac{d\varphi_1}{dt} = \Sigma C_q \alpha_q \sin 2\alpha_q t$ convergera uniformément.

Dans l'un et dans l'autre cas, le rapport $\frac{\varphi}{t}$ et $\frac{\varphi_1}{t}$ tend vers zéro pour t infini.

Posons maintenant

$$\psi(t) = \int_0^t \varphi(t) \sin \alpha_m t \, dt, \qquad \theta(t) = \int_0^t \varphi(t) \cos \alpha_m t \, dt.$$

Nous supposerons que la série $\varphi(t)$ contient des termes en $\sin \alpha_m t$ et en $\cos \alpha_m t$ et que α_m soit plus grand que λ, de telle sorte que ce coefficient se trouve parmi ceux que nous avons appelés plus haut α_p. Il viendra

$$\begin{aligned} 2\psi(t) = {} & 2 \sum \frac{B_n}{\alpha_n \pm \alpha_m} \sin^2 \frac{\alpha_n \mp \alpha_m}{2} t \\ & + \sum \frac{\pm C_p}{\alpha_m \mp \alpha_p} \sin(\alpha_m \mp \alpha_p) t + C_m t + \frac{\cos \alpha_m t}{\alpha_m} \Sigma C_q \sin \alpha_q t \\ & + \sum \frac{\mp C_q \alpha_q}{\alpha_m(\alpha_q \pm \alpha_m)} \sin(\alpha_m \pm \alpha_q) t. \end{aligned}$$

Toutes les séries qui entrent dans le second membre de cette relation sont des séries trigonométriques dont les dérivées sont uniformément convergentes. Si donc on divise par t un quelconque des termes de ce second membre (à l'exception du terme séculaire $C_m t$), la limite du quotient est nulle pour t infini. On déduit de là l'égalité

$$\lim \frac{\psi}{t} = \frac{C_m}{2} \qquad \text{pour} \quad t = \infty.$$

On trouverait de même

$$\lim \frac{|\theta|}{t} = \frac{|B_m|}{2};$$

d'où la conséquence suivante :

Il est impossible que la valeur absolue $|\varphi|$ de la série $\varphi(t)$ reste constamment inférieure à $\frac{|C_m|}{2}$ ou à $\frac{|B_m|}{2}$.

On peut tirer de là quelques conclusions importantes. Parmi les séries de la forme (3), il peut y en avoir qui, quoique convergentes, ont des coefficients plus grands que toute quantité donnée.

Telle est par exemple la série (6) dont le $n^{\text{ième}}$ coefficient est égal à 2^n. Il en résulte que la somme de ces séries peut croître avec le temps *au delà de toute limite*. Ainsi, pour démontrer qu'un système de k corps est *stable*, il ne suffit pas de faire voir que les distances mutuelles de ces corps peuvent être représentées par des séries trigonométriques convergentes, il faut encore que la convergence soit *uniforme*.

Une autre conséquence, c'est que la somme d'une série trigonométrique ne peut être constamment nulle, sans que tous les coefficients soient nuls, puisque cette somme ne peut rester constamment inférieure en valeur absolue à la moitié d'un quelconque des coefficients. Il en résulte encore qu'une même fonction ne peut être représentée par deux séries trigonométriques différentes, sans quoi la différence de ces deux séries aurait une somme nulle sans que tous les coefficients soient nuls.

Il peut se faire qu'une série trigonométrique, après avoir représenté une fonction dans un intervalle donné, représente une fonction toute différente dans un autre intervalle. C'est ce qui arrive, par exemple, aux séries que M. Callandreau a employées pour le calcul du mouvement de (103) Héra; mais une pareille difficulté n'est pas à craindre avec les séries habituellement employées, qui sont généralement choisies de façon à satisfaire formellement aux équations différentielles du mouvement. C'est ainsi que les séries de M. Lindstedt, en les supposant absolument convergentes, représenteraient les distances mutuelles des astres pour toutes les valeurs du temps.

Jusqu'ici nous avons supposé que les séries que nous considérions étaient absolument convergentes. Il reste à examiner le cas de la semi-convergence qui peut se présenter dans des circonstances trop variées pour que je les énumère toutes ici. Je me bornerai au cas suivant qui me paraît être le seul qu'on puisse rencontrer dans des applications. Soit

$$s_1 + s_2 + \ldots + s_n + \ldots$$

une série *absolument* convergente dont chaque terme est lui-même la somme d'une série trigonométrique absolument convergente. Il peut arriver que, lorsqu'on a affaire à une série de cette forme, il soit impossible de changer l'ordre des termes sans altérer la convergence; il y a alors semi-convergence.

On peut être conduit à une pareille série dans l'application de la méthode des approximations successives. Supposons qu'en négligeant les carrés des masses on soit conduit à une série trigonométrique s_1. Quand on tiendra compte ensuite des carrés, en négligeant les cubes, on verra qu'il faut ajouter à la série s_1 une autre série trigonométrique s_2, et ainsi de suite. On sera ainsi amené à une série

$$s_1 + s_2 + \ldots + s_n + \ldots,$$

qui devra converger si la méthode peut donner une approximation indéfinie. C'est ce qui arrive dans la méthode de M. Lindstedt et dans d'autres analogues.

Ces séries peuvent converger dans un petit intervalle de temps sans converger pour toutes les valeurs de t. Je citerai comme exemple la série

$$2 \sin^2 t - 4 \sin^4 t + 8 \sin^6 t + \ldots + (-1)^{n+1} 2^n \sin^{2n} t + \ldots,$$

dont chaque terme peut manifestement s'écrire sous forme de série trigonométrique et qui n'est convergente que si

$$t < \log \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

J'ai lieu de penser que les séries de M. Lindstedt sont semi-convergentes de la façon que je viens de dire, mais non absolument convergentes, d'où il résulterait qu'elles ne représenteraient les distances mutuelles que pendant un intervalle de temps limité.

En résumé :

La convergence d'une série trigonométrique peut être ou ne pas être *absolue*. Si elle est absolue, elle a lieu pour toutes les valeurs du temps. Si, au contraire, la série n'est que semi-convergente, cette semi-convergence ne subsistera en général que pendant un certain intervalle de temps.

Si la convergence est absolue, elle peut être ou ne pas être uniforme. Si elle est uniforme, la fonction représentée par la série restera inférieure à une certaine limite; dans le cas contraire, cette fonction pourra croître indéfiniment.

Enfin une même fonction ne peut être représentée que d'une seule manière par une série trigonométrique absolument convergente.

SUR UN MOYEN D'AUGMENTER

LA

CONVERGENCE DES SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES

Bulletin Astronomique, t. 3, p. 521-528 (1886).

M. Gyldén a donné, dans les *Astronomische Nachrichten*, un moyen d'augmenter la convergence des séries trigonométriques, et M. Callandreau a appliqué cette méthode au calcul des perturbations d'Héra. Dans l'un des derniers numéros du *Bulletin Astronomique* (III, p. 378), M. Charlier, assistant à l'observatoire d'Upsal, a repris la même question. La lecture de son travail m'a inspiré quelques réflexions, qu'il ne sera peut-être pas inutile de publier.

Soit une série trigonométrique

$$\Sigma A_m \sin mx + \Sigma B_m \cos mx.$$

Nous dirons, pour abréger, que la convergence de cette série est d'ordre p si l'on a, en désignant d'une manière générale par $|X|$ la valeur absolue du nombre X,

$$|m^p A_m| < K, \qquad |m^p B_m| < K,$$

K étant une quantité positive indépendante de m.

Soit maintenant une fonction $f(x)$ périodique et de période 2π. Je suppose qu'elle soit finie et continue, ainsi que toutes ses dérivées pour toutes les valeurs de x comprises entre 0 et 2π, sauf pour un nombre fini de valeurs exceptionnelles.

Je dirai que la fonction $f(x)$ présente, pour une valeur donnée de x, une discontinuité d'ordre p, si, dans le voisinage de cette valeur, la fonction et ses $p-2$ premières dérivées sont finies et continues, et si la $(p-1)^{\text{ième}}$ dérivée est finie, mais discontinue.

Soit alors $f(x) = \Sigma A_m \sin mx + \Sigma B_m \cos mx$.

Je dis que, si la fonction $f(x)$ ne présente que des discontinuités d'ordre p, elle sera représentée par une série trigonométrique dont la convergence sera d'ordre p.

Je vais démontrer d'abord que cette convergence sera au moins d'ordre $p-1$, et pour cela je commencerai par examiner le cas où la fonction $f(x)$ n'a que des discontinuités du second ordre. Cela veut dire qu'elle a une dérivée finie, mais discontinue. Supposons donc que sa dérivée soit toujours plus petite que K en valeur absolue. On aura alors, quel que soit h,

$$|f(x+h) - f(x)| < Kh.$$

Or

$$f(x+h) - f(x) = \Sigma A_m \sin mh \cos mx - 2\Sigma A_m \sin^2\frac{mh}{2} \sin mx$$
$$- 2\Sigma B_m \sin^2\frac{mh}{2} \cos mx - \Sigma B_m \sin mh \sin mx.$$

Or, une propriété bien connue des séries trigonométriques, c'est que tout coefficient est plus petit en valeur absolue que le double du maximum de la valeur absolue de la fonction représentée. En appliquant ce théorème à la fonction $f(x+h) - f(x)$, on obtient

$$\left| A_m \sin mh - 2B_m \sin^2\frac{mh}{2} \right| < 2Kh, \qquad \left| 2A_m \sin^2\frac{mh}{2} + B_m \sin mh \right| < 2Kh$$

ou, en divisant par mh,

$$\left| A_m \frac{\sin mh}{mh} - B_m \frac{2\sin^2\frac{mh}{2}}{mh} \right| < \left| \frac{2K}{m} \right|, \qquad \left| A_m \frac{2\sin^2\frac{mh}{2}}{mh} + B_m \frac{\sin mh}{mh} \right| < \left| \frac{2K}{m} \right|.$$

Cela est vrai quel que soit h. Or, si l'on fait tendre h vers zéro, les premiers membres tendent respectivement vers A_m et B_m; on a donc

$$|m A_m| < 2K, \qquad |m B_m| < 2K. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Si maintenant $f(x)$ ne présente que des discontinuités d'ordre p, sa dérivée d'ordre $p-2$ n'aura que des discontinuités d'ordre 2. Or, cette dérivée s'écrit

$$\Sigma m^{p-2} A_m \sin\left[mx + (p-2)\frac{\pi}{2} \right] + \Sigma m^{p-2} B_m \cos\left[mx + (p-2)\frac{\pi}{2} \right].$$

Cette dérivée n'ayant que des discontinuités du second ordre, sa convergence doit être au moins du premier ordre, c'est-à-dire que l'on a

$$m^{p-1} A_m < 2K, \qquad m^{p-1} B_m < 2K.$$

Ces inégalités expriment que la série qui représente $f(x)$ a une convergence d'ordre $p-1$ au moins.

Je vais maintenant démontrer que cette convergence est d'ordre p.

Pour cela, je vais me proposer le problème suivant :

Construire une fonction périodique qui admette des discontinuités données.

Premier cas. — Les discontinuités sont du premier ordre.

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, n valeurs de x classées par ordre de grandeur croissante et comprise entre 0 et 2π. Ce seront les valeurs pour lesquelles la fonction à construire $\varphi(x)$ devra être discontinue. Soient $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ les sauts que devra subir la fonction $\varphi(x)$ quand x passera par ces diverses valeurs. On aura alors

$$\lim[\varphi(\alpha_i + \varepsilon) - \varphi(\alpha_i - \varepsilon)] = \beta_i,$$

quand ε tendra vers zéro par valeurs positives.

Soit enfin β_{n+1} le saut que subira la fonction φ quand x passera par les valeurs 0 ou 2π, de telle sorte que

$$\lim[\varphi(\varepsilon) - \varphi(2\pi - \varepsilon)] = \beta_{n+1}$$

(β_{n+1} pourra être nul si la fonction est continue pour $x = 0$).

Telles sont les données de la question. Comme on doit avoir

$$\varphi(x + 2\pi) = \varphi(x),$$

il suffira de construire $\varphi(x)$ pour toutes les valeurs de x comprises entre 0 et 2π. Nous prendrons

Entre 0 et α_1 … $\varphi(x) = \lambda x + h$,

Entre α_1 et α_2 … $\varphi(x) = \lambda x + h + \beta_1$,

Entre α_2 et α_3 … $\varphi(x) = \lambda x + h + \beta_1 + \beta_2$,

. . . .

Entre α_{n-1} et α_n … $\varphi(x) = \lambda x + h + \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_{n-1}$,

Entre α_n et 2π … $\varphi(x) = \lambda x + h + \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_{n-1} + \beta_n$.

On doit d'ailleurs avoir

$$h = -\frac{1}{2\pi}(\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n + \beta_{n+1}).$$

Il est clair que la fonction $\varphi(x)$ satisfait aux conditions que nous nous sommes imposées.

On pourra la développer en série trigonométrique

$$\varphi(x) = \Sigma A_m \sin mx + \Sigma B_m \cos mx.$$

Il est aisé de constater, par un calcul direct, que la convergence de cette série est du premier ordre (et non pas du second ordre).

Nous choisirons la constante h, de telle façon que B_0 soit nul.

Deuxième cas. — Les discontinuités sont d'ordre p.

Nous voulons construire une fonction $\varphi_p(x)$ qui admette des discontinuités données d'ordre p. Cela veut dire que la dérivée $(p-1)^{\text{ième}}$ de cette fonction doit avoir des discontinuités données de premier ordre.

D'après ce qui précède, on pourra toujours construire une fonction

$$\varphi(x) = \Sigma A_m \sin mx + \Sigma B_m \cos mx:$$

1° qui admet les discontinuités du premier ordre que nous imposons à la dérivée $(p-1)^{\text{ième}}$ de $\varphi(x)$;

2° qui soit telle que $B_0 = 0$;

2° qui soit représentée par une série dont la convergence soit du premier ordre. Nous ferons alors

$$\varphi_p(x) = \sum \frac{A_m}{m^{p-1}} \sin\left[mx - (p-1)\frac{\pi}{2}\right] + \sum \frac{B_m}{m^{p-1}} \cos\left[mx - (p-1)\frac{\pi}{2}\right].$$

Cette fonction aura $\varphi(x)$ pour dérivée $(p-1)^{\text{ième}}$. Elle satisfera donc aux conditions du problème; de plus elle sera représentée par une série convergente d'ordre p (et non pas d'ordre $p+1$).

Cela posé, reprenons notre fonction $f(x)$ dont les discontinuités sont d'ordre p, et la série qui la représente. Je dis que la convergence de cette série sera d'ordre p. En effet, nous pourrons construire une fonction périodique $\varphi_p(x)$, offrant les mêmes discontinuités d'ordre p que $f(x)$ et qui sera représentée par une série convergente d'ordre p (et non pas d'ordre $p+1$).

Alors la différence $f(x) - \varphi_p(x)$ n'aura plus que des discontinuités d'ordre $p+1$, et sera donc représentée par une série dont la convergence sera au moins d'ordre p.

Or, il en est de même de $\varphi_p(x)$.

Il en sera donc encore de même de $f(x)$. C. Q. F. D.

Je dis maintenant que la série qui représente $f(x)$ ne peut pas avoir une convergence d'ordre $p+1$.

En effet, la différence $f(x) - \varphi_p(x)$, n'ayant que des discontinuités d'ordre $p+1$, sera représentée par une série convergente d'ordre $p+1$. Si donc il en était de même de $f(x)$, il en serait encore de même de $\varphi_p(x)$, ce qui n'a pas lieu.

Donc la convergence de la série qui représente $f(x)$ est du $p^{\text{ième}}$ ordre [et non pas du $(p+1)^{\text{ième}}$ ordre]. C. Q. F. D.

On peut appliquer les principes qui précèdent au problème de M. Gyldén. Ce problème consiste, comme on l'a vu, à trouver une série trigonométrique dont la convergence soit d'ordre p et qui représente une fonction $f(x)$ pour toutes les valeurs de x comprises entre 0 et π. Je supposerai que cette fonction $f(x)$ soit finie et continue ainsi que toutes ses dérivées.

Imaginons donc une nouvelle fonction $\varphi(x)$ qui soit également finie et continue ainsi que toutes ses dérivées, mais qui est d'ailleurs complètement arbitraire. Il existera une série trigonométrique

$$\Sigma A_m \sin mx + \Sigma B_m \cos mx,$$

qui représentera $f(x)$ quand x est compris entre 0 et π, et $\varphi(x)$ quand x est compris entre $-\pi$ et 0. Il suffit pour cela de faire

$$2\pi B_0 = \int_0^{\pi} f(x)\,dx + \int_{-\pi}^{0} \varphi(x)\,dx,$$

$$\pi B_m = \int_0^{\pi} f(x)\cos mx\,dx + \int_{-\pi}^{0} \varphi(x)\cos mx\,dx,$$

$$\pi A_m = \int_0^{\pi} f(x)\sin mx\,dx + \int_{\pi}^{0} \varphi(x)\sin mx\,dx.$$

Il s'agit de choisir la fonction arbitraire $\varphi(x)$ de telle façon que la série soit convergente d'ordre p.

Or, d'après les principes exposés plus haut, il faut et il suffit pour cela que l'on ait

$$f(0) = \varphi(0), \qquad f'(0) = \varphi'(0), \qquad f''(0) = \varphi''(0), \qquad \ldots,$$
$$f^{(p-1)}(0) = \varphi^{(p-1)}(0),$$

$$f(\pi) = \varphi(-\pi), \qquad f'(\pi) = \varphi'(-\pi), \qquad f''(\pi) = \varphi''(-\pi), \qquad \ldots,$$
$$f^{(p-1)}(\pi) = \varphi^{(p-1)}(-\pi),$$

$f', f'', \ldots, f^{(p-1)}$ désignant les dérivées successives de f, et $\varphi', \varphi'', \ldots, \varphi^{(p-1)}$, celles de φ.

On peut évidemment satisfaire à ces conditions d'une infinité de manières. La fonction $\varphi(x)$ reste arbitraire dans une large mesure. Cette fonction et ses $p-1$ premières dérivées sont seulement assujetties à prendre des valeurs déterminées pour $x = 0$ et pour $x = -\pi$.

Appliquons les principes qui précèdent au cas particulier dont s'est occupé M. Charlier, c'est-à-dire au cas où

$$f(x) = x.$$

Il s'agit de développer la fonction x en une série de la forme

$$\sum_{m=0}^{r} A_m \cos mx + \sum_{n=1}^{2r} 2\beta_n \sin nx.$$

Cela revient à prendre

$$\varphi(x) = -x + \sum_{n=1}^{2r} 4\beta_n \sin nx.$$

Cela posé, écrivons les conditions pour que la convergence soit d'ordre p :

$$\begin{array}{ll}
1 = -1 + \Sigma 4n\beta_n, & 1 = -1 + \Sigma 4n\beta_n(-1)^n, \\
0 = \Sigma 4n^3\beta_n, & 0 = \Sigma 4n^3(-1)^n\beta_n, \\
0 = \Sigma 4n^5\beta_n, & 0 = \Sigma 4n^5(-1)^n\beta_n, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
0 = \Sigma 4n^q\beta_n, & 0 = \Sigma 4n^q(-1)^n\beta_n,
\end{array}$$

où q est le plus grand entier impair qui ne dépasse pas p.

Le nombre des inconnues, les β_n, est de $2r$; pour que le nombre des équations soit égal à celui des inconnues, il suffit de prendre

$$p = 2r, \qquad q = 2r - 1.$$

Les équations nous donnent alors

$$\sum_{n=1}^{n=r} 4(2n-1)^h \beta_{2n-1} = 0 \qquad (h = 1, 3, 5, \ldots, 2r-1),$$

d'où l'on tire

$$\beta_{2n-1} = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots, r).$$

Il vient ensuite

$$2 = \sum_{n=1}^{r} 4(2n)\beta_{2n}, \qquad 0 = \sum_{n=1}^{r} 4(2n)^h \beta_{2n} \qquad (h = 3, 5, \ldots, 2r-1),$$

d'où l'on peut tirer les valeurs des r coefficients restants

$$\beta_2, \quad \beta_4, \quad \ldots, \beta_{2r}.$$

On verrait aisément que l'on retombe sur les valeurs trouvées par M. Gyldén et par M. Charlier.

Passons maintenant au cas général, et soit une fonction quelconque $f(x)$ qu'il s'agit de représenter entre o et π par une série de la forme

$$\sum_{m=0}^{r} A_m \cos mx + \sum_{n=1}^{2r} 2\beta_n \sin nx,$$

et dont la convergence soit d'ordre p. Nous prendrons encore ici $p = 2r$. Cela revient à faire

$$\varphi(x) = f(x) - \Sigma 4\beta_n \sin nx.$$

Nous serons ainsi conduit aux équations suivantes :

$$\begin{aligned}
f'(0) &= 2\Sigma n\beta_n, & f'(\pi) &= 2\Sigma n(-1)^n \beta_n,\\
-f'''(0) &= 2\Sigma n^3 \beta_n, & -f'''(\pi) &= 2\Sigma n^3(-1)^n \beta_n,\\
f^{V}(0) &= 2\Sigma n^5 \beta_n, & f^{V}(\pi) &= 2\Sigma n^5(-1)^n \beta_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots & &\ldots\ldots\ldots\ldots\\
f^{p-1}(0) &= 2\Sigma n^{p-1} \beta_n, & \pm f^{p-1}(\pi) &= 2\Sigma n^{p-1}(-1)^n \beta_n.
\end{aligned}$$

On tirera de ces équations les $2r$ coefficients,

$$\beta_1, \quad \beta_2, \quad \ldots, \quad \beta_{2r},$$

en fonctions linéaires des $2r$ quantités,

$$\begin{gathered}
f'(0), \quad f'''(0), \quad f^{V}(0), \quad \ldots, \quad f^{p-1}(0),\\
f'(\pi), \quad f'''(\pi), \quad f^{V}(\pi), \quad \ldots, \quad f^{p-1}(\pi).
\end{gathered}$$

Il est clair, d'ailleurs, que la solution précédente, qui contient celle de M. Gyldén, peut être variée à l'infini, puisque la fonction $\varphi(x)$ reste presque complètement arbitraire.

Qu'on me permette une dernière remarque au sujet de l'application que M. Callandreau a faite des méthodes de M. Gyldén. Rappelons d'abord sommairement en quoi consiste cette application. On prend pour variable indépendante x l'anomalie excentrique de la planète troublée; et l'on exprime les diverses quantités qui s'introduisent dans le calcul en fonction de cette variable. Soit $F(x)$ une de ces quantités; ce sera une fonction finie et continue ainsi que toutes ses dérivées. On exprime ensuite x par la série de M. Gyldén,

$$x = \Sigma A_m \cos mx + \Sigma B_m \sin mx,$$

dont la convergence est d'ordre p.

La somme $f(x)$ de cette série sera une fonction périodique, finie et continue ainsi que ses $p-1$ premières dérivées, et qui se confondra avec x dans l'intervalle $0 - \pi$.

M. Callandreau développe ensuite $F[f(x)]$ en séries trigonométriques dont la somme est $F(x)$ dans l'intervalle $0 - \pi$.

Il se trouve que la convergence de ces séries est encore d'ordre p.

Le succès de cette méthode s'explique aisément grâce aux propositions que je viens de démontrer. Si, en effet, $f(x)$ est finie et continue ainsi que ses $p-1$ premières dérivées, il est clair qu'il en sera de même de $F[f(x)]$.

SUR LA SÉRIE DE LAPLACE [1]

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 118, p. 497-501 (5 mars 1894).

On sait que Dirichlet a le premier démontré d'une façon rigoureuse le résultat énoncé par Laplace qu'une fonction arbitraire des coordonnées d'un point sur une sphère peut être développée en une série de fonctions sphériques. Il n'a pas défini les conditions auxquelles doit satisfaire cette fonction arbitraire avec autant de précision que dans son Mémoire sur la série de Fourier; aussi ne faudrait-il pas croire que sa démonstration s'applique à des cas aussi étendus et qu'il ne faut pas faire des hypothèses plus restrictives. A un moment de sa démonstration, en effet, il procède à une intégration par parties, ce qui l'oblige à différentier la fonction qu'il appelle $\Theta(\psi)$.

Cependant sa démonstration s'applique sans difficulté au cas suivant qui est le plus important : supposons que la surface de la sphère soit partagée en un certain nombre de régions

$$R_1, \quad R_2, \quad \ldots, \quad R_q$$

et que chacune de ces régions soit limitée par un polygone curviligne formé d'un nombre fini d'arcs de courbes analytiques; supposons que dans chacune de ces régions la fonction arbitraire V à développer soit analytique, mais qu'elle éprouve des discontinuités quelconques, quoique en restant finie, quand on passe d'une région à l'autre. Elle peut même être étendue à des cas plus généraux sur lesquels je reviendrai plus loin, mais que je laisse de côté pour le moment.

Je ferai la même hypothèse; car le but de cette Note n'est pas de généraliser

[1] Dans l'analyse de Poincaré, cette Note figure sous la rubrique : Physique mathématique.

la démonstration de Dirichlet, mais de la présenter sous une forme nouvelle qui me paraît plus simple.

Soit donc une sphère S de centre O et de rayon 1; passons aux coordonnées polaires en posant

$$x = r \sin\theta \cos\varphi, \qquad y = r \sin\theta \sin\varphi, \qquad z = r \cos\theta.$$

Soit sur cette sphère un élément de surface $d\omega'$ ayant pour centre de gravité un point M′ dont les coordonnées rectangulaires sont x', y', z' et les coordonnées polaires 1, θ' et φ'.

Soit à l'intérieur de la sphère un point M dont les coordonnées rectangulaires sont x, y, z et les coordonnées polaires r, θ et φ.

Soit V la fonction à développer qui deviendra V′ quand on y changera θ et φ en θ' et φ'.

Soit ρ la distance MM′ et γ l'angle MOM′ de sorte que

$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi - \varphi'),$$
$$\rho^2 = 1 - 2r\cos\gamma + r^2.$$

Introduisons la fonction

$$W = \int \frac{V'(1 - r^2)\,d\omega'}{4\pi\rho^3},$$

l'intégration étant étendue à tous les éléments $d\omega'$ de la sphère.

On sait que cette fonction satisfait à l'équation de Laplace, qu'elle tend vers V quand r tend vers 1; que quand le module de r est plus petit que 1 elle est développable en série convergente sous la forme

$$(1) \qquad W = \Sigma X_n r^n.$$

Il s'agit de savoir si cette série converge encore pour $r = 1$ et si elle représente alors V.

Je vais regarder θ et φ comme des constantes et r comme une variable à laquelle je donnerai des valeurs réelles ou imaginaires. Si θ et φ sont des constantes, la droite OM est fixe; j'appelle β l'angle du plan MOM′ avec un plan fixe passant par OM. Alors V′ peut être regardé comme fonction de γ et de β, et l'on a

$$d\omega' = \sin\gamma\,d\gamma\,d\beta.$$

Posons

$$F(\gamma) = \int_0^{2\pi} V\,d\beta;$$

d'où

$$4\pi W = \int_0^{\pi} F(\gamma)(1-r^2)\frac{\sin\gamma}{\rho^3}\,d\gamma.$$

On voit d'abord que $F(\gamma)$ est une fonction continue; il n'y a d'exception que si le contour de l'une des régions R comprend un arc du petit cercle $\gamma = \gamma_0$. Dans ce cas $F(\gamma)$ est discontinue pour $\gamma = \gamma_0$. De plus $F(\gamma)$ a une dérivée finie, sauf pour les valeurs singulières $\gamma_1, \gamma_2, \ldots,$ qui sont telles que le petit cercle $\gamma = \gamma_i$ est tangent au contour de l'une des régions R. Pour ces valeurs singulières, qui d'après nos hypothèses sont en nombre fini, la dérivée $F'(\gamma)$ est infinie, généralement d'ordre $\frac{1}{2}$, d'ordre $\frac{p-1}{p}$ si le contact est d'ordre $p-1$.

L'intégration par parties nous donne

$$(2)\qquad 4\pi W = -F(\gamma)\frac{1-r^2}{r}\frac{1}{\rho} + \int F'(\gamma)\frac{1-r^2}{r}\frac{d\gamma}{\rho}.$$

Il s'agit de savoir ce que devient cette expression quand le module de r tendant vers l'unité, r tend vers $e^{i\psi}$; on trouve alors

$$\rho = e^{\frac{i\psi}{2}}\sqrt{2(\cos\psi - \cos\gamma)}.$$

Le signe du radical est toujours parfaitement défini, puisqu'on sait qu'on doit faire tendre le module de r vers l'unité par valeurs plus petites que 1.

On voit alors que W reste fini quand $\pm\psi$ n'est pas égal à l'une des valeurs singulières γ_i qui rendent $F'(\gamma)$ infini. Si $\psi = \pm\gamma_i$, W devient infini, en général logarithmiquement, d'ordre $\frac{p-2}{2p}$ si le cercle $\gamma = \gamma_i$ a un contact d'ordre $p-1$ avec le contour d'une des régions R, d'ordre $\frac{1}{2}$ si la fonction $F(\gamma)$ est discontinue.

Dans tous les cas, et c'est là le point essentiel, l'intégrale

$$\int |W|\,d\psi$$

reste finie.

D'autre part, si ψ est compris entre ψ_0 et ψ_1, et que dans cet intervalle ne se trouve aucune des valeurs singulières $\pm\gamma_i$, si $r = |r|e^{i\psi}$ et que $|r|$ tende vers l'unité, la fonction W tendra *uniformément* vers sa limite, ce qui prouve que l'intégrale

$$(3)\qquad \int W r^{\pm n}\,dr$$

prise le long du cercle de rayon 1 est la limite vers laquelle tend cette même intégrale prise le long d'un cercle de rayon $r < 1$, lorsque r tend vers 1, et, par conséquent, en vertu du théorème de Cauchy, que ces deux intégrales sont égales.

Cela posé, il s'agit de savoir si la fonction W peut être représentée pour $\rho = e^{i\psi}$, c'est-à-dire, sur le cercle de rayon 1, par la série de Fourier. Il est clair qu'il en est ainsi, car l'intégrale de Dirichlet

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{W}{2\pi} \frac{\sin \frac{2n+1}{2}(\psi - \alpha)}{\sin \frac{\psi - \alpha}{2}} d\psi$$

conserve sa propriété caractéristique, qui est de tendre vers la valeur de W pour $\psi = \alpha$ quand n croît indéfiniment. Ainsi W est développable par la série de Fourier, et les coefficients sont les mêmes que ceux de la série (1), puisqu'ils sont les uns et les autres exprimés à l'aide de l'intégrale (3).

On a donc pour $r = e^{i\psi}$:

$$W = \Sigma X_n e^{ni\psi},$$

et pour $r = 1$:

$$V = \Sigma X_n. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Bien que presentée sous une forme notablement plus simple, cette démonstration ne diffère pas essentiellement de celle de Dirichlet; elle s'applique donc, comme celle-ci, à des cas fort étendus.

Pour qu'elle ne soit pas en défaut, il suffit que l'intégrale

$$\int W \, d\psi$$

reste finie et que les parties réelle et imaginaire de W soient la différence de deux fonctions n'ayant qu'un nombre fini de maxima et de minima.

Il suffira pour cela, par exemple, que la fonction V ait ses dérivées des deux premiers ordres finies dans chacune des régions R; il n'est donc pas nécessaire qu'elle reste analytique.

La démonstration de Bonnet est valable dans les mêmes conditions.

SUR LES INTÉGRALES IRRÉGULIÈRES

DES

ÉQUATIONS LINÉAIRES [1]

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 101, p. 939-941 (9 novembre 1885).

Supposons qu'on veuille étudier les intégrales d'une équation linéaire dans le voisinage d'un point singulier; nous pouvons toujours supposer que ce point a été rejeté à l'infini et qu'on étudie les intégrales de l'équation

$$(1) \qquad P_n \frac{d^n y}{dx^n} + P_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + P_1 \frac{dy}{dx} + P_0 y = 0$$

pour les valeurs très grandes de x. Nous supposerons que les coefficients P sont des polynômes entiers en x. Si les degrés de ces polynômes vont constamment en croissant avec leur indice, les intégrales sont régulières et peuvent se développer suivant les puissances décroissantes de x, entières ou non entières. Il n'y a pas alors de difficultés, mais il n'en est plus de même lorsque les intégrales deviennent irrégulières.

Il peut arriver aussi que l'équation (1) admette une intégrale de la forme suivante :

$$(2) \qquad e^{Q_p} x^{\lambda} \varphi(x),$$

Q_p étant un polynôme de degré p en x, λ étant une constante et $\varphi(x)$ une série ordonnée suivant les puissances décroissantes de x. On dit alors que l'équation possède une intégrale normale d'ordre p.

---

[1] Cette Note et la suivante ont été omises dans le Tome I où elles auraient dû figurer.

Il arrive, en général, que l'équation est satisfaite *formellement* par n séries de la forme (2), mais que ces séries, étant divergentes, ne peuvent représenter des intégrales. On peut dire que ces séries divergentes sont des séries normales d'ordre p. L'objet de la présente Note est de montrer quelle est la véritable signification de ces séries divergentes.

Lorsque tous les polynômes P sont de même degré, ou si aucun d'eux n'est de degré plus élevé que P_n, l'équation est satisfaite par n séries normales du premier ordre. C'est à ce cas simple que s'appliquent les résultats d'un Mémoire que j'ai fait imprimer dans l'*American Journal of Mathematics*. On peut alors, par la transformation de Laplace, mettre l'intégrale de (1) sous la forme

$$y = \int e^{zx} v\, dz,$$

v étant une fonction de z qui satisfait à une équation linéaire (3) de même forme que (1).

Des résultats du Mémoire que je viens de citer on déduit aisément les propositions suivantes :

1° Pour que l'une des séries normales soit convergente, c'est-à-dire pour que l'équation (1) admette une intégrale normale, il faut et il suffit que l'équation (3) admette une intégrale égale à une puissance de $z - a$ multipliée par une fonction entière transcendante.

2° Si S est une des séries normales divergentes, si λ_n en est le $n^{\text{ième}}$ terme, et si S_n est la somme des n premiers termes, l'équation (1) admettra une intégrale J, telle que

$$\lim \frac{1}{\lambda_n}(J - S_n) = 0,$$

quand x tend vers l'infini avec un argument donné. Cette intégrale existera quel que soit cet argument; mais il pourra se faire que l'intégrale J, qui jouit de cette propriété, ne soit pas la même pour les différents arguments.

Ce fait analytique est tout à fait analogue à celui qui se présente dans l'étude de la série de Stirling.

Le cas le plus simple, après celui que nous venons d'étudier, est celui où toutes les séries normales sont du second ordre au plus, c'est-à-dire où le degré de chacun des polynômes P n'est jamais supérieur de plus d'une unité au degré du polynôme qui le précède immédiatement.

Soit $\psi(x)$ une intégrale quelconque de l'équation (1). Posons

$$u = \psi(x)\psi(-x), \qquad x^2 = t.$$

Il arrive alors que u, regardée comme fonction de t, satisfait à une équation linéaire d'ordre n^2, qu'il est aisé de former, et dont les coefficients sont des polynômes entiers en t. On s'assure facilement que les séries normales qui y satisfont formellement sont toutes du premier ordre. On est donc ainsi ramené au cas précédent, et l'on peut exprimer u, grâce à la transformation de Laplace, par une intégrale définie.

Quant à $y = \psi(x)$, cette fonction se calculera à l'aide de l'équation

$$y' = y\,\mathrm{F},$$

F étant une fonction rationnelle de x, de u et de ses premières dérivées; on obtiendra donc y, dès que l'on connaîtra u, par de simples quadratures.

Il resterait à étendre ces résultats au cas général et à examiner divers cas d'exception; ce sera, si l'Académie veut bien le permettre, l'objet d'une autre Communication.

SUR LES INTÉGRALES IRRÉGULIÈRES

DES

ÉQUATIONS LINÉAIRES

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 101, p. 990-991 (16 novembre 1885).

Dans une Note que j'ai eu l'honneur de communiquer à l'Académie le 9 novembre dernier, j'ai montré que, si les séries normales qui satisfont formellement à une équation linéaire sont toutes du premier ordre, elles présentent, lors même qu'elles sont divergentes, les mêmes particularités que la série de Stirling. J'ai fait voir ensuite par quelle transformation on peut ramener le cas où ces séries sont toutes du second ordre à celui où elles sont toutes du premier.

L'emploi de cette transformation et l'application de certains principes relatifs à l'usage légitime des séries analogues à celle de Stirling permettent de démontrer les résultats suivants :

1° Pour que l'une des séries normales soit convergente, il faut et il suffit qu'une équation auxiliaire, facile à former, admette une intégrale égale à une puissance de $z-a$ multipliée par une fonction holomorphe dans tout le plan.

2° Si S_n désigne la somme des n premiers termes d'une série normale divergente et si λ_n désigne le $n^{\text{ième}}$ terme, l'équation linéaire à laquelle cette série normale satisfait formellement admettra une intégrale J telle que

$$\lim \frac{J - S_n}{\lambda_n} = 0$$

quand x tend vers l'infini avec un argument donné.

Les résultats sont, comme on le voit, tout à fait analogues à ceux que nous avons obtenus lorsque les séries sont toutes du premier ordre. Ils peuvent d'ailleurs s'étendre au cas général.

Soit, en effet, $y = \varphi(x)$ une fonction définie par une équation d'ordre n à laquelle satisfont formellement n séries normales d'ordre p. Nous poserons

$$u = \varphi(x)\varphi(\alpha x)\ldots\varphi(\alpha^{p-1}x), \qquad t = x^p,$$

α étant une racine $p^{\text{ième}}$ de l'unité. Alors u, regardé comme fonction de t, satisfera à une équation linéaire facile à former et à laquelle ne satisferont que des séries normales du premier ordre. On pourra alors exprimer u par une intégrale définie à l'aide de la transformation de Laplace.

Quant à y, on l'obtiendra à l'aide de l'équation

$$\frac{dy}{dx} = y\,\mathrm{F},$$

F étant une fonction rationnelle de x, de u et de ses premières dérivées.

On retrouve donc dans le cas général les résultats que nous avons rencontrés dans les cas particuliers déjà examinés.

Il peut cependant y avoir un cas d'exception : c'est celui où l'ordre de l'équation auxiliaire qui donne u en fonction de t s'abaisserait d'une ou de plusieurs unités. Il arriverait alors que $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}$ ne serait plus égal à une fonction rationnelle, mais à une fonction algébrique de x, de u et de ses dérivées. L'analyse se poursuivrait d'ailleurs comme dans le cas général.

Ce cas exceptionnel se rencontre en particulier dans les circonstances suivantes : il arrive quelquefois qu'on ne peut pas trouver n séries normales satisfaisant formellement à une équation linéaire donnée. M. Fabry, dans une Thèse remarquable récemment soutenue devant la Faculté des Sciences de Paris, a montré qu'on peut alors, par une transformation simple, ramener l'équation proposée à une autre susceptible d'être satisfaite par n séries normales. L'équation, ainsi transformée, présentera alors la particularité que je viens de signaler.

Il résulte donc des considérations qui précèdent que les séries de M. Thomæ, qui satisfont formellement à une équation différentielle linéaire, représentent, même lorsqu'elles sont divergentes, les intégrales de cette équation absolument de la même façon que la série de Stirling représente la fonction $\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$.

NOTES ET COMMENTAIRES

Les Notes et Mémoires de Poincaré figurant dans ce Volume ont été reimprimés sans modifications autres que la correction des erreurs typographiques. Les notations de Poincaré pour les dérivées partielles ont été conservées.

Page 9. — Cette Note ne semble pas avoir été connue des auteurs qui se sont occupés ultérieurement de cette question ou de problèmes analogues.

Dans son Mémoire *Sur les équations fonctionnelles* (*Bull. Soc. math. France*, t. 47, 1919 et t. 48, 1920), P. Fatou a cherché les fonctions invariantes par une substitution rationnelle $[z, R(z)]$ uniformes dans un domaine contenant un point double attractif de multiplicateur non nul. Ce sont les fonctions invariantes par les substitutions d'un groupe de substitutions algébriques définies par $R_n(z') = R_n(z)$, $z' \neq z$, où $R_n(z) = R(R_{n-1})$, $n > 1$, est la $n^{\text{ième}}$ itérée de $R(z) = R_1(z)$. Fatou a déterminé ces fonctions en faisant une transformation conforme utilisant la fonction de Kœnigs; ce sont les transformées des fonctions loxodromiques [fonctions invariantes par la substitution (z, sz), où s est une constante de module différent de 1]. Fatou étudie aussi le problème analogue dans le cas où le multiplicateur ne satisfait pas à la condition envisagée ci-dessus. Ce problème de Fatou, inverse de celui traité par Poincaré dans sa Note ne se rattache pas directement à la théorie des fonctions fuchsiennes.

Le problème même de Poincaré a été repris indépendamment par F. Marty et T. Shimizu en 1931 dans le cas où la fonction $F(z)$ est une fonction méromorphe [Marty, *Recherches sur la répartition des valeurs des fonctions méromorphes* (Thèse soutenue le 7 novembre 1931 et *Ann. Fac. Toulouse*, t. 23, 1931); *Sur l'itération de certaines fonctions algébriques* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 193, 1931); *Sur le groupe d'automorphie de certaines fonctions entières* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 195, 1932); Shimizu, *On the fundamental domains and the groups for meromorphic functions*, I, II (*Jap. J. of math.*, t. 8, 1931); *On the iteration of algebraic functions* II (*Proc. Phys. Math. soc. Japan*, t. 13, 1931); *On the existence of meromorphic functions which are automorphic with respect to some functions groups* (*Ibid.*, t. 15, 1933); *On the linear functions of automorphism for meromorphic functions* (*Tohoku math. J.*, t. 38, 1933)].

Dans sa thèse, Marty considère une fonction $F(z)$ méromorphe dans un domaine D, si z' et z'' sont deux points distincts de D tels que $F(z') = F(z'')$, il appelle fonction d'automorphie de $F(z)$ une fonction $H(z)$ définie au voisinage du point z''

par $H(z) = \varphi[F(z)]$ où $\varphi(u)$ est la fonction inverse de $F(z)$ prenant la valeur z' au point $F(z'')$. Il y a en général plusieurs fonctions d'automorphie distinctes, et, dit Marty, ces fonctions forment un groupe. Il étudie les propriétés des fonctions de ce groupe.

Dans le premier des Mémoires cités, Shimizu appelle domaine fondamental d'une fonction $F(z)$ méromorphe sauf au plus au point à l'infini, l'image d'un feuillet de la surface de Riemann décrite par les valeurs de $F(z)$. Les frontières des domaines fondamentaux sont transformées les unes dans les autres, dit-il, par les substitutions $z' = \psi(z)$ définies par $F(z') = F(z)$. Un nombre fini ou infini de telles substitutions forment évidemment un groupe, dit Shimizu, c'est le groupe de la fonction $F(z)$.

Dans son analyse de la Thèse de Marty, Ullrich observe qu'il n'est pas toujours certain que les substitutions envisagées forment un groupe (*Fortsch. der Math.*, t. 57, II). Dans des publications ultérieures [*Sur une généralisation de la notion de groupe* (8e *Congrès des math. scandinaves*, 1934); *Sur la notion d'hypergroupe dans l'étude des groupes non abéliens* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 201, 1935); *Structure des fonctions rationnelles et autoprojections des recouvrements topologiques*, (*C. R. Acad. Sc.*, t. 201, 1935); *Sur les groupes et hypergroupes attachés à une fraction rationnelle* (*Ann. Éc. Norm.*, t. 53, 1936)] Marty est revenu sur ces questions et a introduit la notion d'hypergroupe qui est applicable aux fonctions $H(z)$.

Dans des travaux récents, Gunnar af Hällström a poursuivi les travaux de Marty dans le cas où $F(z)$ est une fraction rationnelle [*Über Substitutionen, die eine rationale Funktion invariant lassen; Zur Reduzibilität der Automorphiefunktionen rationaler Funktionen* (*Acta Acad. Abo.*, t. 15, 1946; *On the study of algebraic functions of automorphism by help of graphs* (10e *Congrès math. scandinaves*, 1946); *Rationale Funktionen mit Automorphiefunktionen gleicher Vieldeutigkeit* (*Acta Acad. Abo.*, t. 16, 1948)].

Page 11. — Dans un Mémoire intitulé *Sulle funzioni analitiche polidrome* (*Atti Reale Acad. Lincei, Rendiconti*, t. 4), V. Volterra donne aussi cette proposition.

La portée du résultat final est mise en évidence par Poincaré lui-même dans ses publications ultérieures. *Voir* également les *Leçons sur la théorie des fonctions* de E. Borel (1re édition, 1898, p. 53-57) et la plupart des Traités d'analyse parus après 1900.

Page 17. — Les théorèmes de Poincaré sur les fonctions entières ont été complétés d'abord par J. Hadamard dans son célèbre Mémoire *Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann* [*J. Math.*, (4), t. 9, 1893]. Si $\sum a_n z^n$ est une fonction entière, $M(r)$ le maximum de son module pour $|z| = r$, Hadamard étudie d'une façon directe et précise la relation entre la croissance de $M(r)$ et la décroissance de la suite des $|a_n|$, ainsi que la relation entre la décroissance des $|a_n|$ et le genre de la fonction. Il résout partiellement les deux questions posées par Poincaré (p. 17).

Dans son Mémoire fondamental *Sur les zéros des fonctions entières* (*Acta math.*, t. 20, 1897), E. Borel introduisit à la place de la notion de genre de Laguerre, la notion plus précise d'ordre et se proposa de donner la relation entre l'ordre, fini ou non, et la distribution asymptotique des modules des points où la fonction entière prend une valeur donnée arbitraire. Le point de vue surtout formel de Laguerre, Poincaré et en partie d'Hadamard, fut ainsi dépassé et l'étude du cas exceptionnel de Picard intégrée dans la théorie générale. Il n'est pas question de donner ici un aperçu du développement considérable de cette théorie nouvelle, étendue par Borel au cas des fonctions méromorphes. Nous renverrons aux monographies et Ouvrages suivants :

E. Borel, *Leçons sur les fonctions entières* (Paris, Gauthier-Villars, 1900).

E. Borel, *Leçons sur les fonctions méromorphes* (*Ibid.*, 1903).

O. Blumenthal, *Principes de la théorie des fonctions entières d'ordre infini* (*Ibid.*, 1910).

A. Denjoy, *Sur les produits canoniques d'ordre infini* (*J. Math.*, 1910).

E. Borel, *Leçons sur les fonctions entières* (2e édition, Paris, Gauthier-Villars, 1921).

G. Valiron, *Lectures on the general theory of integral functions* (1923).

G. Julia, *Leçons sur les fonctions uniformes à point singulier essentiel isolé* (Paris, Gauthier-Villars, 1923).

G. Valiron, *Fonctions entières et fonctions méromorphes* (*Mém. Sc. math.*, t. 2, 1925).

A. Bloch, *Fonctions holomorphes et fonctions méromorphes dans le cercle unité* (*Ibid.*, t. 20, 1926).

R. Nevanlinna, *Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes* (Paris, Gauthier-Villars, 1929).

P. Montel, *Leçons sur les fonctions entières ou méromorphes* (*Ibid.*, 1932).

L. Ahlfors, *Zur Theorie der Überlagerungsfläche* (*Acta math.*, t. 65, 1935).

R. Nevanlinna, *Eindeutige analytische Funktionen* (Berlin, Springer, 1936).

G. Valiron, *Directions de Borel des fonctions méromorphes* (*Mém. Sc. math.*, t. 89, 1938).

G. Valiron, *Fonctions entières* (*Revista Union math. Argentina*, t. 12, 1946-1947).

Pour les nouvelles extensions de la théorie, *voir* :

S. Stoïlow, *Leçons sur les principes topologiques de la théorie des fonctions analytiques* (Paris, Gauthier-Villars, 1938).

M. Morse, *Topological methods in the theory of functions of a complex variable* (*Princeton Univ. Press*, 1947).

En ce qui concerne les questions traitées par Poincaré et en particulier celle du genre, citons les Mémoires suivants :

A. Wiman, *Sur le cas d'exception dans la théorie des fonctions entières* (*Arkiv for math.*, t. 1, 1902).

P. Boutroux, *Sur quelques propriétés des fonctions entières* (*Acta math.*, t. **28**, 1903).

E. Lindelöf, *Sur les fonctions entières d'ordre entier* (*Ann. Éc. Norm.*, t. **22**, 1905).

G. Valiron, *Sur les fonctions entières d'ordre entier* (*C. R. Acad. Sc.*, t. **174**, 1922); *Le théorème de Laguerre-Borel dans la théorie des fonctions entières* (*Bull Sc. math.*, t. **46**, 1922).

M. Alander, *Sur le genre de la dérivée d'une fonction entière* (*Arkiv for math.*, t. **17**, 1923).

J. Hadamard, *Sur la théorie des fonctions entières* (*Bull. Soc. Math.*, t. **55**, 1927).

J. Hadamard et E. Landau, *Sulle funzioni intere di genere finito* (*Rend. Acad. Lincei*, t. 6, 1927).

Page 25. — Cette Note a été reprise et développée par Poincaré dans la troisième Partie du Mémoire de l'*American Journal* donné plus loin (p. 36 de ce Tome).

Page 28. — Ce Mémoire, qui date en réalité de 1881, est réimprimé, avec un complément élargissant les propriétés de la courbe C, dans la première Partie du Mémoire de l'*American Journal* donné ci-dessous p. 36.

Page 36, ligne 1. — L'existence de fonctions analytiques présentant des lignes de singularités était connue antérieurement au travail de Weierstrass cité ici par Poincaré; les fonctions modulaires donnaient des exemples de telles fonctions. Mais Weiertrass donna le premier exemple dans lequel cette circonstance résulte de l'examen de la série de Taylor.

Page 38, lignes 6 à 10. — Ces lignes précisant la nature du contour C ont été ajoutées dans cette nouvelle publication du Mémoire des *Acta scientiarum fennicae*. Entre temps avait paru une Note de E. Goursat (*C. R. Acad. Sc.*, t. **94**, 1882) qui, ignorant le travail de Poincaré, obtenait des résultats analogues par une méthode à peu près semblable. E. Goursat développa sa Note dans le *Bulletin des Sciences mathématiques* (t. 11, 1887) en reconnaissant la priorité de Poincaré et en précisant soigneusement les hypothèses afin de faire tomber des objections que M. Lerch avait adressées au premier exposé de Poincaré.

Le problème général de l'existence d'une fonction analytique uniforme admettant pour domaine naturel d'existence un domaine arbitraire donné dans le plan simple a été résolu par Runge (*Acta math.*, t. 6, 1885). Plus tard Osgood (*N. Y. Bulletin*, t. 5, 1898) a étendu le résultat de Poincaré au cas de domaines riemanniens non simples très généraux.

A. Pringsheim [*Zur Theorie der Taylorschen Reihe* (*Math. Ann.*, t. **42**, 1893)] est revenu sur cette question, son but étant d'étudier sur le contour C la fonction construite par des séries de fractions rationnelles analogues à celles de Poincaré et de montrer qu'elle peut y admettre des dérivées de tous les ordres. La démonstration du fait que, moyennant ses hypothèses, la ligne C est une ligne singulière a été justement critiquée par E. Borel dans sa Thèse (*Sur quelques points de la théorie des fonctions*, Paris, 1894 et *Ann. Éc. Norm.*, t. 12, 1895). Ultérieurement, A. Pringsheim a justifié ses conclusions dans un cas particulier (*Math. Ann.*, t. 44, 1894); des généralisations de ses résultats ont été données par G. Julia (*Bull. Soc. Math.*, t. 41, 1913).

D'autres méthodes de construction d'une fonction admettant des coupures essentielles données, ne se rattachant pas comme celle de Poincaré à la considération d'une série de fractions rationnelles, ont été données ultérieurement, notamment en définissant la fonction au moyen de ses zéros.

Page 43. — Cette partie du Mémoire, entre la page 43, ligne 27 et la page 48, ligne 21, est la partie nouvelle.

Pages 26 et 53. — La possibilité du développement de F(θ) en série de Fourier ne semble pas résulter des seules hypothèses faites et il conviendrait aussi de justifier les transformations ultérieures.

Page 48. — Dans sa Thèse citée plus haut, E. Borel, se proposant de définir une méthode de prolongement non weierstrassien au delà d'une ligne singulière d'une fonction analytique définie par une série de fractions rationnelles, s'exprime en ces termes :

Il est, en effet, indispensable de dire quelques mots d'une objection que M. H. Poincaré a faite par avance à toute tentative de prolongement d'une fonction au delà d'une ligne singulière essentielle fermée. M. H. Poincaré considère une fonction $\varphi(z)$ admettant une ligne singulière essentielle L et donnée à l'intérieur de cette ligne, et une autre fonction $\psi(z)$ assujettie à la seule condition d'être donnée à l'extérieur de L et d'admettre aussi L comme ligne singulière essentielle. Cela posé, il démontre qu'il est possible de trouver deux fonctions $f(z)$ et $g(z)$ admettant respectivement pour lignes singulières essentielles deux arcs différents de L (formant à eux deux le contour L tout entier), pouvant, par suite, être prolongées analytiquement dans tout le plan, et telles que l'on ait

$$f+g=\varphi \quad \text{à l'intérieur de L},$$
$$f+g=\psi \quad \text{à l'extérieur de L}.$$

M. H. Poincaré conclut de là que la notion de prolongement analytique d'une fonction en dehors d'un espace limité par une ligne singulière essentielle est nécessairement dénuée de sens.

Les résultats que nous avons obtenus sur les fonctions $\varphi(z)$ semblant indiquer que, pour certaines fonctions tout au moins, il existait une sorte de prolongement ayant des propriétés fort simples et bien déterminées j'ai cherché la cause du fait singulier signalé par M. Poincaré.

E. Borel a d'abord poursuivi ses recherches dans son Mémoire *Sur les séries de polynômes et de fractions rationnelles* (*Acta math.*, t. 24, 1900). Dans la conclusion de ce Mémoire, relevons les deux phrases suivantes :

J'espère que les résultats de ce Mémoire convaincront tous les lecteurs que la généralisation de la théorie du prolongement analytique s'impose nécessairement à l'attention des géomètres : l'observation attentive des faits analytiques y conduit naturellement; on voit la fonction analytique traverser par des passages infiniment étroits, la coupure qui paraissait infranchissable.

Au point de vue des variables réelles, nous avons appris à connaître une catégorie peut-être intéressante de fonctions de variables réelles pourvues de dérivées de tout ordre : ce sont les fonctions (M) qui comprennent comme cas particulier les fonctions analytiques et qui, comme ces dernières, sont complètement déterminées lorsqu'on connaît, en un point, leur valeur et celles de leurs dérivées.

Les efforts de E. Borel, provoqués à l'origine par la critique féconde de la pensée de Poincaré, devait le conduire à sa théorie des fonctions monogènes non analytiques, tandis que, dans le cas réel, Denjoy suivi par Carleman, devait aboutir à la théorie des fonctions quasi analytiques.

Page 57. — Dans ce premier Mémoire, Poincaré ne donne que les grandes lignes de sa méthode. On se reportera au Mémoire de 1907 (*Voir* ce tome IV, p. 70) où Poincaré répond aux objections qu'avait soulevées ce premier exposé.

Page 70. — Le travail de W. F. Osgood : *On the existence of the Green's function for the most general simply connected plan region*, se trouve dans *American math. soc. Transactions*, t. I, 1900.

Page 71. — Indépendamment de Poincaré, P. Koebe résolut le problème de l'uniformisation en 1907 [*Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven* (*Gött. Nachr.*)]. Koebe a poursuivi ses recherches dans un grand nombre de publications, notamment :

Über die Hilbertsche Uniformisierungsmethode (*Gött. Nachr.*, 1910). *Die zentralen Uniformisierungsprobleme* (*J. fur die Math.*, t. 139, 1911). *Zur Theorie der konformen Abbildung und Uniformisierung* (*Leipzig Ber.*, t. 66, 1914).

Des méthodes différentes de celle de Poincaré ont été données tout d'abord par P. Koebe : *Über eine neue Methode der Konformen Abbildung und Uniformisierung* (*Gött. Nahr.*, 1912); *Begründung der Kontinuitätsmethode im Gebiete der konformen Abbildung und Uniformisierung* (*Ibid.*, 1912-1916).

La méthode de Hilbert, basée directement sur le principe de Dirichlet a été developpée par R. Courant [*Über die Anwendung des Dirichletschen Prinzips auf die Probleme des konformen Abbildung* (*Diss. Gött.*, 1910); *Über die Methode des Dirichletschen Prinzips* (*Math. Ann.*, t. 72, 1912); *Über die Exis-*

tenztheoreme der Potential und Funktionentheorie (*J. für die Math.*, t. 144, 1911)]. Cette méthode est exposée dans la *Funktionentheorie* de Hurwitz et Courant (1^re^ édition, 1922); elle a été adoptée par P. Fatou dans son exposé (*Théorie des fonctions algébriques d'une variable et des transcendantes qui s'y rattachent*, t. II du Traité d'Appell et Goursat, *Fonctions automorphes*, 1930).

Aux travaux de Poincaré se rattachent directement des travaux de L. Lichenstein : *Intégration de l'équation* $\Delta u = ke^u$ *sur une surface fermée* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 157, 1913 et *Acta math.*, t. 40, 1915); *Die Methode des Bogenelementes in der Theorie der Uniformisierungstranszendenten mit Grenz oder Hauptkreis* (*Gött. Nachr.*, 1917).

L. Bieberbach adaptant des méthodes de Kœbe a donné un exposé n'utilisant plus les fonctions harmoniques, mais reposant sur les méthodes de la théorie des fonctions d'une variable complexe [*Über die Einordnung des Hauptsatzes der Uniformisierung in die Weierstrassische Funktionentheorie* (*Math. Ann.*, t. 78, 1918). Il suit cette marche dans son *Lehrbuch der Funktionentheorie*, t. II (1^re^ édition, 1927).

La considération par Poincaré des surfaces de Riemann correspondant aux fonctions analytiques les plus générales a conduit à approfondir le concept même de surface de Riemann et à donner des définitions indépendantes de la notion de la fonction analytique, comme Riemann l'avait fait pour les surfaces closes correspondant aux fonctions algébriques. Le livre de H. Weyl, *Die Idee der Riemannschen Fläche* (Berlin, 1913) et le Mémoire de T. Rado (*Acta Szeged*, t. 2, 1925) donnent une définition axiomatique des variétés de Riemann abstraites. Mais de telles conceptions existent déjà dans Poincaré et en 1909, Kœbe avait aussi considéré de telles variétés (*C. R. Acad. Sc.*, t. 148) et montré que, à toute variété convenablement définie correspond des fonctions analytiques dont cette variété est la surface de Riemann. Toute la théorie est présentée sous cette forme générale dans le grand Mémoire couronné de Kœbe : *Allgemeine Theorie der Riemannschen Mannigfaltigkeiten* (*Konforme Abbildung und Uniformisierung*) écrit en 1917 et publié dans le Tome 50 des *Acta Mathematica* (1927).

Parmi les travaux plus récents se rattachant à la théorie générale, signalons ceux de P. Myrberg : *Über die Existenz der Greenschen Funktionen auf einer gegebenen Riemannschen Fläche* (*Acta Math.*, t. 61, 1923) et sur le même sujet H. Selberg : *Ein Existenzsatz der Potentialtheorie und seine Anwendung* (*Norske V. Akad.*, Oslo, 1935), de S. Stoïlow, *Leçons sur les principes topologiques de la théorie des fonctions analytiques* (Paris, Gauthier-Villars, 1938), de L. Ahlfors : *Die Begründung des Dirichletschen Prinzips* (*Soc. sc. Fennicæ*, Comm., XI, t. 15, 1943).

Ajoutons que l'École mathématique finlandaise, sous l'impulsion de R. Nevanlinna, P. Myrberg et L. Ahlfors étudie d'une façon approfondie les propriétés des surfaces de Riemann générales. On trouvera dans le livre de R. Nevanlinna, *Eindeutige analytische Funktionen* (Berlin, Springer, 1936) un exposé des résultats déjà obtenus à cette époque. Une grande partie des travaux les plus récents se trouve dans les *Annales Acad. sc. Fennicæ*, séries A.

Page 144. — Poincaré a développé sa méthode dans le Mémoire des *Acta mathematica* portant le même titre (*voir* ce Tome IV, p. 147).

Page 147. — Dans son Mémoire du Tome 22, des *Acta mathematica*, Poincaré observe que la démonstration de ce premier travail contient un détour inutile (*Voir* ce Tome IV, p. 164, lignes 5-7).

Page 161. — Dans sa thèse *Sur les fonctions de variables complexes* (Paris, 1894 et *Acta math.*, t. 19, 1895), P. Cousin a donné une démonstration simple du théorème de Poincaré : Une fonction méromorphe en tout point à distance finie est le quotient de deux fonctions entières. P. Cousin ne se borne pas aux fonctions de deux variables; il s'est efforcé d'autre part d'étendre ce théorème au cas où la fonction $f(z, z')$ est méromorphe lorsque z appartient à un domaine B du plan des z et z' à un domaine B' du plan des z', mais sa démonstration ne vaut que si B et B' sont simplement connexes (Gronwall, *Bull. Am. math. soc.*, t. 20, 1914). Dans ses recherches sur ce sujet, P. Cousin, a formulé deux problèmes plus généraux :

Premier problème. — On suppose qu'un domaine D est recouvert à l'*aide* d'une infinité dénombrable de domaines partiels D_i intérieurs à D et que, dans chaque D_i on a défini une fonction méromorphe f_i; on suppose en outre que, chaque fois que deux domaines D_i, D_j ont une portion commune $D_{i,j}$, la différence $f_i - f_j$ est holomorphe dans $D_{i,j}$. On se propose de trouver une fonction F, méromorphe dans D et telle que, dans chaque D_i la différence $F - f_i$ soit holomorphe.

Deuxième problème. — Les fonctions f_i sont remplacées par des fonctions g_i holomorphes dans les D_i et l'on suppose que, dans $D_{i,j}$, le quotient $\frac{g_i}{g_j}$ est holomorphe et jamais nul. On se propose de trouver G holomorphe dans D telle que, dans chaque D_i le quotient $\frac{G}{g_i}$ soit holomorphe et non nul.

Dans une Note *Sur les problèmes de Poincaré et de Cousin pour les fonctions de plusieurs variables complexes* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 199, 1934), H. Cartan a indiqué des catégories de domaines pour lesquels les problèmes de Cousin sont possibles; lorsque le deuxième problème est possible, le théorème de Poincaré est vrai pour ce domaine. H. Cartan est revenu sur le premier problème de Cousin (*C. R. Acad. Sc.*, t. 207, 1938), puis, moyennant une légère modification de l'énoncé, l'a résolu dans des cas très généraux (on sait qu'il n'est pas toujours possible) dans son Mémoire *Idéaux de fonctions analytiques de n variables complexes* (*Ann. Éc. Norm.*, t. 61, 1944). *Voir* aussi sur ce sujet Oka (*J. of sc. Hirosima Univ.*, t. 6, 1936 et t. 7, 1937) et Behnke (*J. der Deuts. Ver.*, t. 47, 1937). Au second problème de Cousin se rattache un Mémoire de H. Cartan *Sur les matrices holomorphes de n variables complexes* (*J. Math.*, t. 19, 1940).

Page 161. — Poincaré n'a pas donné de démonstration détaillée de ce théorème. Signalons que, dans un Mémoire *Sur les variétés définies par une relation entière* (*Bull. Sc. math.*, t. 55, 1931), H. Cartan a étudié les variétés définies par $F(x, y) = 0$, F étant une fonction entière de x et y. De son côté, G. Julia avait considéré le domaine d'existence de la fonction $y(x)$ définie par une telle équation (*Bull. Soc. math.*, t. 54, 1926).

Page 163. — Voici ce que dit Poincaré à la page 117 de l'Analyse de ses travaux au sujet de la théorie du potentiel :

Je me suis occupé d'abord de l'équation de Laplace. La théorie de cette équation est intimement liée à celle du potentiel. Mais les propriétés du potentiel n'avaient pas toujours été démontrées ni avec assez de généralité, ni avec assez de rigueur. Je m'en suis aperçu quand j'ai voulu les enseigner et aussi quand j'ai voulu les appliquer à des questions d'analyse. J'ai cherché [295] à perfectionner ces démonstrations et j'ai eu besoin également [190] de les étendre à l'espace à plus de trois dimensions.

Le Mémoire [190] est celui reproduit ici; le n° 295 désigne l'Ouvrage aujourd'hui classique : *Théorie du potentiel newtonien* (Carré et Naud, 1899).

La théorie générale du potentiel a pris un nouveau développement considérable à la suite des travaux de Lebesgue et de ses successeurs sur la mesure des ensembles et l'intégration. On trouvera dans un Mémoire de H. Cartan intitulé *La théorie du potentiel newtonien. Énergie Capacité. Suites de potentiels* (*Bull. Soc. math.*, t. 73, 1945) un exposé de l'état actuel de cette question et quelques indications bibliographiques.

Page 183. — Parmi les travaux consacrés ultérieurement aux fonctions biharmoniques signalons ceux de F. Severi : *Il problema di Dirichlet per le funzioni biarmoniche* (*Mem. Reale Acad. d'Italia*, t. 2, 1931); *Contributi alla teoria delle funzioni biarmoniche* (*Ibid.*); *Risoluzione generale del problema di Dirichlet per le fuzioni biarmonica* (*Rend. Reale Acad. Lincei*, t. 13, 1931); *Les fonctions biharmoniques et la théorie des fonctions analytiques de deux variables complexes* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 192, 1931). *Voir* aussi l'exposé général du même auteur : *Risultati vedute e problemi nella teoria delle fuzioni analitiche di due variabili complesse* (*Seminario Mat. di Milano*, t. 5, 1931). Notons que Severi se borne au cas de quatre variables réelles et que Lelong dans le Mémoire signalé ci-dessous propose d'appeler fonctions pluriharmoniques celles relatives à plus de quatre variables.

Page 219, ligne 7. — Dans cette formule figure le coefficient numérique C qui prévient de ce que, page 218, l'aire de Σ était égale à $K_n \varepsilon^{n-1}$, K_n étant un coefficient numérique, C est donc égale à $(n-2)K_n$.

Page 225. — D'après la Note précédente, la densité de la matière attirante sur la variété C est $\frac{\pi \delta}{(n-1)K_{2n}}$; comme $\delta = 1$ et $K_{2n} = \frac{2\pi^n}{(n-1)!}$, on voit que la densité est non pas 1, mais $\frac{(n-2)!}{2\pi^{n-1}}$.

Dans son Mémoire sur *Les fonctions plurisousharmoniques* (*Ann. Éc. Norm.*, t. 62, 1945), P. Lelong donne par une méthode plus simple que celle de Poincaré des propositions plus générales, qui comprennent le résultat de Poincaré. Il corrige l'erreur numérique qui vient d'être signalée.

Page 245. — Ce Mémoire qui pose le difficile problème de la possibilité de la correspondance analytique entre deux domaines à quatre dimensions, a été le point de départ de toute une partie de la théorie nouvelle des fonctions de deux ou plusieurs variables complexes, qui s'est développée depuis 1921.

En 1921, K. Reinhard a défini une catégorie de domaines pour lesquels la correspondance analytique est possible [*Über Abbildungen durch analytische Funktionen zweier Veränderlichen* (*Math. Ann.*, t. 83)], puis C. Carathéodory [*Über die Geometrie der analytischen Abbildungen* (*Math. Sem. Hamburg Univ.*, t. 6, 1928)] a introduit des domaines plus généraux, les domaines cerclés, enfin S. Bergmann [*Über die Existenz von Repräsentantenbereichen in der Theorie der Abbildung durch paare von Funktionen zweier komplexen Veränderlichen* (*Math. Ann.*, t. 102, 1929)] a indiqué une méthode d'étude basée sur l'existence de systèmes orthogonaux de fonctions.

Dans un travail intitulé *Les fonctions de deux variables complexes et le problème de la représentation analytique* (*J. Math.*, t. 10, 1931), H. Cartan a résolu dans une certaine mesure le problème en question pour tous les domaines bornés qui admettent une infinité de transformations analytiques en eux-mêmes laissant fixe un point intérieur. On trouvera en outre dans ce Mémoire de nombreuses indications bibliographiques sur l'état du problème à cette époque (travaux de Reinhardt, Bergmann, Behnke, Thullen, Welke). H. Cartan a poursuivi ces recherches, notamment dans les Mémoires suivants : *Sur les transformations analytiques des domaines cerclés et semi cerclés bornés* (*Math. Ann.*, t. 106, 1932); *Sur les groupes de transformations pseudo-conformes* (deux Notes : *C. R. Acad. Sc.*, t. 196, 1933); *Sur les transformations pseudo-conformes du produit topologique de deux domaines* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 199, 1934); *Sur la possibilité d'étendre aux fonctions de plusieurs variables complexes la théorie des fonctions univalentes* (Note dans les *Leçons sur les fonctions univalentes ou multivalentes* de Paul Montel, Paris, Gauthier-Villars, 1933); *Sur les groupes de transformations analytiques* (*Actualités sc. Hermann*, t. 198, 1935). A ces travaux se rattachent des recherches de E. Cartan, notamment *Sur les domaines bornés homogènes de l'espace de n variables complexes* (*Abh. Math. Sem. Hamburg Univ.*, t. 11, 1935).

S. Bergmann a donné sa méthode et ses résultats dans de nombreux Mémoires pour lesquels on pourra se reporter à ses exposés récents : *Sur les fonctions orthogonales de plusieurs variables complexes avec les applications à la théorie des* *fonctions analytiques* (*Mem. Sc. math.*, t. **106**, 1947) et *Sur la fonction noyau d'un domaine et ses applications dans la théorie des transformations pseudo-conformes* (*Ibid.*, t. **108**, 1948), où l'on trouvera une bibliographie complete.

Page 299. — La première de ces remarques est développée dans le *Bulletin de la Société mathématique* (*Voir* ce Tome IV, p. 302).

Page 302. — Cette étude des zéros des fonctions Θ joue un rôle fondamental dans les travaux ultérieurs de Poincaré sur les fonctions abéliennes.

Page 307. — Au sujet de la démonstration de Weierstrass, *voir* ci-dessus l'Analyse des travaux (ce Tome IV, p. 292). Poincaré est revenu sur sa démonstration en 1897 et en 1902 (*Voir* ce tome IV, p. 469 et 486). D'autres démonstrations ont été données par E. PICARD (*C. R. Acad. Sc.*, t. **124**, 1897) et par P. PAINLEVÉ (*C. R. Acad. Sc.*, t. **122**, 1896; t. **134**, 1902).

Page 312. — Les fonctions introduites ici sous le nom de fonctions intermédiaires sont appelées fonctions de Jacobi par FROBENIUS (*J. für die Math.*, t. **97**, 1884). Au sujet de ces fonctions, *voir* G. HUMBERT (*J. Math.*, t. **5**, 1899) et BAGNERA et DE FRANCHIS (*Rend. Circ. Palermo*, t. **30**, 1910).

Page 314. — Le théorème signalé ici par Poincaré est donné dans le *Bulletin de la Société mathématique*, t. **12**, 1884, et est inséré dans le Tome III, p. 333-351.

Page 315. — On rapprochera de cette Note où Poincaré se borne à étudier quelques exemples, le Mémoire *Sur la réduction des intégrales abéliennes et les fonctions fuchsiennes* (*Rend. Circ. Palermo*, t. **27**, 1909) inséré dans le Tome III, (p. 362-428) et la Conférence faite en Allemagne sur le même sujet (T. III, p. 429-436).

Page 337. — De cette proposition on peut rapprocher des travaux de SCORZA (*Rend. Acad. Lincei*, t. **24**, 1915).

P. 340. — Ce paragraphe III développe la Note *Sur une généralisation du théorème d'Abel* (*C. R. Acad.*, t, **100**, 1895) insérée dans le Tome III (p. 357-359).

Page 367. — Pour la bibliographie relative aux théorèmes généraux sur la réduction des intégrales abéliennes, on pourra consulter l'Encyclopédie (*Encyk. Math. Wis.*, *Analysis*, II, B, t. **7**, 1921).

Page 367, ligne 20. — Ces résultats ont été étendus par W. WIRTINGER (*Wien. Anz.* t. **32**, 1895; *Acta math.*, t. **26**, 1902).

Page 379. — Cette Note est développée dans le Mémoire du *Journal de mathématiques* qui la suit dans ce Tome.

Page 448. — La relation entre les périodes dans le cas du genre 4 avait déjà été donnée par F. SCHOTTKY (*J. für die Math.*, t. 102, 1888).

Page 456. — Pour la bibliographie des surfaces de Kummer, on pourra se reporter au n° 68 de l'article de KRAZER et WIRTINGER : *Abelsche Funktionen und allgemeine Thetafunktionen* (*Encyk. Math. Wis.*, *Analysis*, II, B, t. 7, 1921). G. Humbert a étudié géométriquement certaines de ces surfaces.

Page 469. — Cette Note est développée dans le paragraphe II du Mémoire qui la suit dans ce Tome.

Page 526. — Pour les développements récents de la théorie des fonctions abéliennes et des théories qui s'y rattachent, on pourra se reporter aux Ouvrages suivants :

S. LEFSCHETZ, *L'analysis situs et la géométrie algébrique*, Paris, Gauthier-Villars, 1924.

A. WEIL, *Généralisation des fonctions abéliennes* (*J. de Math.*, t. 17, 1938).

F. SEVERI, *Funzioni quasi abeliane* (*Pontif. Acad. sc.*, Roma, 1947.

A. WEIL, *Variétés abéliennes et courbes algébriques* (*Actualités sc. Hermann*, t. 1064, 1948).

Page 537. — Les résultats de ce Mémoire ont été développés ou utilisés par plusieurs auteurs. Tout d'abord E. PICARD dans deux Mémoires *Sur une classe de transcendantes nouvelles* (*Acta math.*, t. 18, p. 189 et t. 23, p. 189) et dans son travail *Sur une classe de transcendantes généralisant les fonctions elliptiques et abéliennes* (*Ann. Éc. Norm.*, t. 10, 1913) a repris les démonstrations de Poincaré par sa méthode d'approximations successives en ne se bornant plus au cas où les solutions cherchées sont holomorphes au point double de la substitution. Il a donné un exposé d'une partie de ses recherches sur les transcendantes de Poincaré et les transcendantes de Picard dans ses *Leçons sur quelques équations fonctionnelles et applications* (Paris, Gauthier-Villars, 1928).

L'étude de la distribution des valeurs et de la croissance des fonctions entières d'une variable définies par certaines équations fonctionnelles qui se ramènent à celles de Poincaré a été faite par G. VALIRON (*Ann. Fac. Sc. Toulouse*, 1913 et *Acta math.*, t. 47, 1925). Ces mêmes fonctions ont été rencontrées et étudiées par P. FATOU dans ses études sur l'itération (Mémoire cité plus haut, p. 617, ligne 7). Les transcendantes méromorphes de Poincaré s'introduisent d'autre part dans les travaux de G. JULIA sur les équations fonctionnelles qui se présentent dans l'étude du problème de la semi-permutabilité : *Sur les solutions méromorphes de* *certaines équations fonctionnelles* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 173, 1921); *Sur une classe d'équations fonctionnelles* (*Ann. Éc. Norm.*, t. 40, 1923).

Dans ses *Leçons sur les fonctions automorphes de n variables* (Paris, Gauthier-Villars, 1920), G. Giraud a utilisé le théorème d'existence des fonctions de Poincaré dans l'étude des groupes automorphes.

Un problème assez semblable à celui de Poincaré est celui de la recherche de fonctions analytiques admettant un théorème d'addition, problème traité par P. Myrberg (*Preisschriften Jablonowskischen Ges.*, 1922).

Page 552. — Le nombre p_0 du bas de cette page est supposé supérieur à 1, ce qui est réalisé en supposant H assez grand.

Page 583. — Ces Notes et Mémoires sur les séries trigonométriques ont été provoquées par des questions d'Astronomie, aussi Poincaré les a-t-il fait figurer dans son analyse sous la rubrique Astronomie. Mais il a paru qu'elles intéressaient plus spécialement les analystes puisqu'on y trouve le germe de méthodes qui ont été développées beaucoup plus tard dans la théorie des fonctions quasi périodiques et presque périodiques.

Page 591. — Dans toute la première Partie du Mémoire, il s'agit de convergence absolue.

Page 593, ligne 18. — Cette assertion de Poincaré a été démontrée par G. Valiron : *Sur un théorème de Poincaré* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 228, 1949).

Page 597, ligne 22. — La série converge absolument pour t réel compris entre $-\frac{\pi}{2}+\varepsilon$ et $\frac{\pi}{2}-\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, mais Poincaré considère la série obtenue en développant les $\sin^{2n} t$ en polynômes trigonométriques et en prenant la somme de leurs valeurs absolues.

TABLE DES MATIÈRES

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES

135022 IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS, 55, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, PARIS

Dépôt légal Imprimeur, 1950, *n°* 615 | *Dépôt légal*, *Éditeur*, 1950, *n°* 323

ACHEVÉ D'IMPRIMER LE 15 OCTOBRE 1950