VERSLAGEN EN MEDEDEELINGEN

DER

KONINKLIJKE AKADEMIE

VAN

WETENSCHAPPEN.

Afdeeling NATUURKUNDE.

TWEEDE REEKS.

NEGENTIENDE DEEL.

AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER.
1884.

VERSLAGEN EN MEDEDEELINGEN

DER

KONINKLIJKE AKADEMIE

VAN

WETENSCHAPPEN.

VERSLAGEN EN MEDEDEELINGEN

DER

KONINKLIJKE AKADEMIE

VAN

WETENSCHAPPEN.

Afdeeling **NATUURKUNDE.**

TWEEDE REEKS.

NEGENTIENDE DEEL.

AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER.
1884.

GEDRUKT BIJ DE ROEVER KRÖBER - BAKELS.

INHOUD

VAN HET

NEGENTIENDE DEEL

TWEEDE REEKS.

VERSLAGEN.

Rapport over de verhandeling van den Heer Dr. A. A. W. HUBRECHT: Over de voorouderlijke stamvormen der Vertebraten; uitgebracht in de Vergadering van 27 April 1883. . blz. 76.

Verslag omtrent de door Dr. J. D. R. SCHEFFER aangeboden verhandeling; „Onderzoekingen over de diffussie van eenige anorganische en organische verbindingen"; uitgebracht in de Vergadering van 26 Mei 1883. . . . . „ 85.

Verslag omtrent de door den Heer T. J. STIELTJES JR. aangeboden verhandeling: „Over de quadratische ontbinding van priemgetallen in den vorm $3n+1$"; uitgebracht in de Vergadering van 26 Mei 1883. . . . . „ 105.

Verslag omtrent de wenschelijkheid en uitvoerbaarheid van het instellen eener geregelde waarneming van verschijnselen van aardbeving in Nederland; uitgebracht in de Vergadering van 30 Juni 1883 . . . . „ 296

Tweede verslag omtrent de wenschelijkheid en uitvoerbaarheid van het instellen eener geregelde waarneming van verschijnselen van aardbeving in Nederland; uitgebracht in de Vergadering van 27 October 1883. . . . . blz. 303.

Verslag over eene verhandeling des Heeren BEIJERINCK: „Onderzoekingen over de besmettelijkheid der gomziekte bij de planten"; uitgebracht in de Vergadering van 27 October 1883 . . . . „ 307.

Rapport over eene verhandeling des Heeren C. LE PAIGE: „Sur les surfaces du troisième ordre"; uitgebracht in de Vergadering van 27 October 1883 . . . . „ 312.

Rapport over eene bijdrage van den Heer P. H. BROCX, Luit. t/zee 2e klasse: „Waarneming van den overgang van Venus over de Zon, volbracht te Curaçao op 6 December 1882"; uitgebracht in de Vergadering van 24 November 1883 . „ 364.

Verslag over eene verhandeling des Heeren Dr. F. DE BOER: „Uitbreiding van het theorema van Rolle"; uitgebracht in de Vergadering van 29 December 1883. . . . . „ 381.

Verslag over de door den Heer Dr. P. H. SCHOUTE aangeboden verhandeling: „Over eene bijzondere kromme van den vierden graad met drie dubbelpunten"; uitgebracht in de Vergadering van 26 Januari 1883. . . . . „ 417.

Voorloopig rapport der Huygens-Commissie aan de Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam . . . „ 432.

MEDEDEELINGEN.

D. Bierens de Haan. Bouwstoffen voor de geschiedenis der wis- en natuurkundige wetenschappen in de Nederlanden . . . . blz. 1, 78 en 249.

R. D. M. Verbeek. Over het voorkomen van gesteenten der krijtformatie in de residentie Westerafdeeling van Borneo. 〃 39.

C. H. C. Grinwis. De bewegingsvergelijkingen van het electromagnetische veld, in verband met de theorie van Maxwell . . . . 〃 44.

Dr. E. H. von Baumhauer. Over de op 17 Maart 1883 te Haarlem en in de omstreken waargenomen aardschudding. 〃 60.

Behrens. Ueber eigenthuemliche Krystallgebilde in einem vulkanischen Gestein von der insel Timor . . . . 〃 72.

J. D. R. Scheffer. Onderzoekingen over de diffusie van eenige anorganische en organische verbindingen . . . . . 〃 89.

T. J. Stieltjes Jr. Over de quadratische ontbinding van priemgetallen van den vorm $3n+1$. . . . . 〃 105.

A. C. Oudemans Jr. Over rhizopogonzuur . . . . 〃 112.

——————— Bijdrage tot de kennis van kinovazuur, kinovine en kinoviet . . . . 〃 117.

R. A. Mees. Uitkomsten van waarnemingen met den piëzometer. (Met twee platen) . . . . 〃 137.

E. Mulder. Over een effluve-ozonometer en ontledingssnelheid von ozon. (Met plaat) . . . . 〃 194.

H. A. Lorentz. De door Hall ontdekte werking van een magneet op een electrischen stroom en de electromagnetische draaiing van het polarisatievlak van het licht . . . . . . 〃 217.

Dr. Hugo de Vries. Vorläufige Mittheilung ueber die Anziehung zwischen gelösten Stoffen und Wasser in verdünnten Lösungen . . . . blz. 314.
Dr. C. le Paige. Sur les surfaces du troisième ordre. . . „ 328.
C. A. J. A. Oudemans. Revisio Perisporiacearum in regno Batavorum hucusque detectarum . . . . „ 349.
P. H. Brocx. Verslag aangaande de waarneming van den overgang van Venus over de Zon op 6 December 1882 te Curaçao. (Met plaat). . . . . „ 372.
Dr. F. de Boer. Uitbreiding van het theorema van Rolle. „ 384.
Dr. P. H. Schoute. Over eene bijzondere kromme van den vierden graad met drie dubbelpunten. (Met plaat) . . „ 420.
J. A. C. Oudemans. Het problema van Snellius opgelost door Ptolemaeus . . . . „ 436.

VERSLAGEN EN MEDEDEELINGEN

DER

KONINKLIJKE AKADEMIE

VAN

WETENSCHAPPEN.

Afdeeling NATUURKUNDE.

TWEEDE REEKS.

Negentiende Deel. — Eerste Stuk.

AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER.
1883.

BOUWSTOFFEN VOOR DE GESCHIEDENIS

DER

WIS- EN NATUURKUNDIGE WETENSCHAPPEN

IN DE NEDERLANDEN.

DOOR

D. BIERENS DE HAAN.

N°. XXIII. CORNELIS SACKERS VAN LEEUWEN. — CLAES HEYNDERICHSZ. GIETERMAKER. — CHRISTIAAN MARTINII ANHALTIN.

1. In het vroegere Nummer XXI dezer Bouwstoffen heeft men gezien, hoe ABRAHAM DE GRAAF, veelal op schersenden toon, den »Bril" van VAN LEEUWEN wederlegt; laat ons thans zien, hoe GIETERMAKER daarbij een geheel anderen toon aanslaat.

Wij willen daartoe eerst weder den »Bril" opnemen, dien wij verlaten hebben bij de twee Questiën, die SR. BOS ook aan VAN LEEUWEN had voorgesteld.

Deze BOS, eigenlijk JACOB BOSCH, was een ingenieur, die uit Breda te Amsterdam was gekomen, en aldaar 21 Juni 1672 tot landmeter en geadmitteert ingenieur van de stad Amsterdam aangesteld werd op een tractement van 1500 guldens. Hij bouwde of verbeterde de vestingwerken van Weesp en Uithoorn, en bestuurde eene der groote uitbreidingen van de stad Amsterdam. Den 22sten October 1688 werd hij gegensioneerd met 750 gulden. Hij overleed 27 November 1705; den 6den November 1659 huwde hij LEONORA VAN OTTEREN, dochter van LAURENS VAN OTTEREN, Makelaar en Poorter tc Amsterdam; op die wijze was BOSCH mede poorter geworden. Er worden van hem twee werken aangehaald, een over »fortificatie" en een »van landmeeterije", maar deze zijn mij nimmer onder de oogen gekomen.

Omtrent het voorstellen van deze Questiën zegt VAN LEEUWEN „in 't Jaer 1660 den 20 || May/ ... doen hy my dese Questie bracht om te || demonstreeren/ doen swetste hy soo lustigh op/ dat hyse hadt voorgestelt || de Professer Schooten, de Ingenieur Koeck en Rusius, en ick weet niet || wat al gheleerde Luyden hy met dese Questie de mont kon stoppen."

[De ingenieur KOECK (misschien COCK?) is onbekend; maar HENDRICK RUSE niet. Deze werd in 1624 te Sawerd, bij Groningen, geboren, waar zijn vader schoolmeester was; zijne moeder was FEMINA VAN KATWIJK uit de adelijke familie der BESTENS; hij zelf huwde SUSANNE Barones van Rusenstein. Hij diende in ons leger, maar vertrok in 1659 in Deensche dienst; als Luitenant-Generaal overleed hij aldaar den 4den Maart 1679. Zijn strijd met GERARD MELDER, over vestingbouwkunde, vond plaats voor zijn vertrek naar Denemarken (stond die daarmede in verband?). Onder een goed portret van hem leest men zijn titels »Henrich, Vrijheer van Rusenstein, in dienst van zijne Conincklyke Majesteyt tot Denemarken en Noorwegen, der Gothen en Wenden, hoog- en verordnete Generaal Majoor en Gouverneur der Coninckl yke vestingh Gluckstadt en onderhoorige vestingen, overste over een Regiment Hoogduitschen te voet, Assessor int Coninckl yke Kryghs-Collegie, Baron van de Baronie Rusenstein, heer tot Sauwert, Aburg, Uetrop, en Glut, Ridder van zijn Coninck-lyke Majesteyts order. Anno 1673"].

VAN LEEUWEN vervolgt daarop: „Nu de reden/ waerom Bos my dese Questien heeft || voorgestelt/ is dese: Ick was daeghs te vooren met Sr. Christiaen Striep, || een treffelyck Schilder in stil leven tot dito Bos in Huys/... omdat hy nieuws-gierigh was/ om Bos en my eens te hoo- || ren discoureren van de Konst/ om dieswille dat Bos altydt soo teeghens de || voor-noemde Striep swetste en raesde/ datter niemandt syns ghe-lyck en || was in de Mathematicus [sic]/ in de Lantmeterye en Fortificatie/... ick eyschte syn Exempelaren van de Lantmee-terye ende || Fortificatie van hem/ om eens te sien wat voor rari-teyten het al wae- || ren/... en (ik) hiel || my wonderlyck slecht...

doen kreegh || hy syn Kramery voor den dagh/ en ick... sagh dat het maer een || wisje met een wasje was/ niet waert om af te spreecken/... nu doen ick dese aperye ghe- || sien hadde/ toen vroegh ick Bos na Geometrische Questien/... Hy ant- woor- || de van ja/ soude ick geen Liefhebber wesen in Geometri- sche Questien/ || ick proponeerse by honderden/ doen konde ick my niet langer bedwingen || om te swygen/ want hy spon al te grof/ en ick haelde hem doen lustigh || over den heeckel/ dat hy roode koonen kreegh/... Nu daeghs daer aen quam hy || alleen tot mijnent met dese voorgaende Questien/... en ick hebse hem twee dagen daer na gedemonstreert ge- || toont/... doen gaf ick hem we- || der twee Questien die hy soude demonstreeren/ || 't is al drie jaren geleeden || en noch heeft hyse niet gemaeckt ge- toont/... hy heeft my gheantwoort in presentie van || Sr. Johannes van Baden en Sr. vande Velde en Sr. Striep, treffe- lycke Schil- || ders/ dat ickse selver niet konde maecken/ en Claes Hendricksz. Gieter- || maecker my die voor-ghestelt hadde/... dat ick Claes Hendricksz. Gietermaecker || niet gheleert hadde/ maer de Gietermaecker hadde myn gheleert/... Bos, hier hebt ghy u rechte Maet aen dese Gietermaecker: ick || weet niet van u beyden de beste broddelaer is; (Goede vrienden) dat ick || dese... tituleer voor Broddelaers en Belachelycke || Geometris- ten/ is om dese navolgende klucht/ daer uyt genoegh blyckt/ || datse beyde ghebrilde Broeders zyn: 't Is ghebeurt in 't Jaer 1661. in || October/ dat dese voornoemde twee tot mynent qua- men/ op een Sater- || dagh des achtermiddaghs/ doen ick noch woonde buyten de Sint Antho- || nis Poort, op de hoeck van't Raem en Moolen-padt/ en versochten my || met haer per Com- pagnie wat te gaen wandelen/... sy brachten my voort in 't Doolhof buyten dito || Poort [het nu opgeheven oude Panopticum, dat een halve eeuw geleden nog steeds strekte tot vermaak van jong en oud]... en sy stelden || malkanderen Questien voor/... in 't kort sy kregen harde woorden/ || doen sprack ick/ wat is hier soo te knorren/ ick hebbe noch een Questie in || myn hooft/ ick wil wel wedden dat ghyse geen van beyden kont maecken/ || ... sy speculeerden een poos/ ende || spraken geen van beyden/ doen tradt ick Bos met myn voet op syn voet/ || on- der de tafel... om dito Bos wat moedt || te gheven/ ick woude daer mede te kennen geven dat ickse voor hem soude || maecken...

doen . . . tradt ick Gietermaecker || met de ander voet op een van syn voeten/om hem moet te geven/... doen... wedden sy met malkanderen om vier || Ryckdaelders/ wiense niet gemaeckt kon leveren des Saterdaeghs daer || aen... en daeghs daer aen/ 't welcke was || Sondagh na vier uren/ doen quam Gietermaecker tot mynent/ en vroegh my of ick hem de Questie wou wysen... op de selve manier is my Bos oock aen boort gekomen/ om || de Questie te wysen/ en ick hebbe hem geantwoort op de selve manier als || Gietermaecker. doen zynse gramsteurigh elck van my gheschceyden; nu de || Saterdagh daer aen heb ickse met haer beyden tot mynent verwacht/ || maer zyn geen van beyden gekomen... 't Is geen wonder/ want de schorfste Schapen 't meest blaten/ en de slechste || Snyders de meeste lappen maecken/ hier aen heeft Gietermaeker wel ge- || seyt/ soo hy hem selver meent/ in de wederleggingc van Karseboom" [het boekje van Noot 40 in Bouwstoffen XXI].

[Deze Pieter Karseboom was boekhandelaar te Amsterdam en had een boekje uitgegeven tegen Gietermaker's Vergulde Licht der Zeevaert in 1661].

2. Hierop begint van Leeuwen zijn aanval tegen Gietermaker. Vooreerst geeft hij twee contracten, het eene van 14 May 1660, waarbij hij zich verbindt, tegen ses en dartigh guldens aan Gietermaker »te leeren, de nootsaeckelyckste Pro- || positien van de ses eerste Boecken Euclidus [sic], die tot de Turi van nooden zijn"; het tweede van 21 Julij 1660, waarbij de Gietermaker zich verbindt twee Questien uyt Ludolf van Ceulen, »niet te mogen aenslaen ofte in Druck uyt te geven/ ofte niet te mogen aen || sijn deur te stellen... Waer voor ick hem de Fluyt vereere." Waaraan van Leeuwen toevoegt: „Waerde Liefhebbers/ daer waren geen twee dagen gepasseert/ oft dese || Questien stonden alle beyde wel netjens met groene verf afgeset/ aen syn || deur gestelt/ en acht dagen daer na stondense door de heele Stadi in Placa- || ten/ en heeftse in druck oock al uytgegeven; en noch wat meer is/ hy steltse || yeder een voor/... Ick hebbe hem noch geleert/ dit Boeckjen van 't Wijnroeyen [het werk in Noot 6 van Bouwstoffen N°. XXI] voor de || somme van 25 guldens/ inde maent van January 1663. En noch wil dese || Man niet weten dat hy myn Discipel is!"

Nu haalt van Leeuwen, ten bewijze van zijn onkunde,

„want dat verstaet hy ter wereldt || niet" vooreerst aan zijn „kleyne Tractaetjen, dat hy van het Italiaensch || Boeckhouden heeft uytgegeven" [1]); vervolgens „het tweede || deel van syn Reecken-boecxjens [het werk van Noot 42 van Bouwstoffen N°. XXI] bestaende in 350 Questien/... is het vijfde Boeckje van || Mr. Sybrandt Hansz. Cardinael. Zal." [2]) in alles „'t selfde"; en „Wat aengaet het eerste deel van syn Arithmetica, [het werk van Noot 41 van Bouwstoffen N°. XXI], dat heeft hy verdeelt in || negentien deelen/ is mede heel konstigh na-geaept na Verschueren [3]) Daniel || van Hoecken [4]) en andere Autheuren"; en hierbij geeft hij aan, waar GIETERMAKERS Questien 155 tot 164 bij VAN HOECKEN te vinden zijn, evenzoo de 165^e en 166^e Questie: verder bespreekt hij de 182^e, 199^e, 201^e en 216^e, die men bij Euclides terugvindt, en de 220^e, „daer hy my het Fluytjen || met het zilvere Montstuck voor vereert heeft/ daer syn naem opgesneden || staet". Wegens de 219^e, door hem zelven voorgesteld, verwijst VAN LEEUWEN naar „het 17 Voorstel in 't Meetkonstigh Passer-werck van Mr. Pieter Wils [5])"; terwijl „de twee laetste Questien zijn uyt || Mr. Sybrandt 100 Questien [6])" en wel N°. 67 en 74. Hij eindigt aldus:

»Hoe deftigh kan dees Man zyn Boecken proncken op
Met ander lien haer werck, en geeft de schaemt de schop:
Besteelt soo vroegh en laet, een yeder van het heur,
Want al sijn eygen doen, dat deught niet eenen leur."

[JACOB VAN DER SCHUERE, Menenaer, werd in 1576 te Menen geboren; hij was Francoyschen Schoolmeester tot Haerlem, zijn motto was »Doorsiet den grondt. — DANIEL VAN HOUCKE was geboren te Londen, en werd onderwijzer te Rotterdam. — PIETER WILS woonde te Haarlem, en was daar onderwijzer en landmeter; hij zelf gaf niets in het licht. GERARD KINCKHUYSEN, schreef daaromtrent in de voorrede van diens »Wiskonstighe wercken", die hij uitgaf, »Voor de Weduwe van den Autheur Sal., woonende voor aen in de Dam-straet" »*Nu alsoo den Autheur van dit || Werck (mijn Meester goeder ghedachte) || overleden is*, (heb ik)... *dese Schriften uyt-gekosen: alhoewel || de selve meestendeel voor lange van hem zijn || geschreven geweest, also syn andere Schrif- || ten, (door dien hem tijdt* *ghebrack*) *meest* || *niet vol en waren. Heb die ten besten, moge-* || *lyck zynde by malkander gevoeght.*"]

Dit laatste wil VAN LEEUWEN bewijzen door zijn „proeven die hy op syn Additio en Multi- || plicatio [later ook op zijn Divisio] in 't geheel is makende ... die niet goet zijn en || dese Man een Broddelaer is." Deze proef is de gewone proef door 3: en nu toont VAN LEEUWEN, dat eene vergissing van 83 in plaats van 38 niet gevonden wordt, hetgeen trouwens bekend genoeg is. Thans [blz. 28] gaat hij over tot „Dese twee navolgende Geometrische Questien"/ ... van „de yvoorsn Handt-fluyt." De eerste betreft een vierhoek met gegeven zijden, in een cirkel beschreven, waarbij eene middellijn, uit een der hoekpunten getrokken, de zijde rationeel verdeelt; dit vraagstuk, de 135e Questie van het Vergulde Licht der Zeevaert [zie Noot 33 van Bouwstoffen N^0. XXI], is de 1e „in 't Boeck van de Cirkel van Ludolf van Ceu- || len" [zie Noot 12 en 16 van Bouwstoffen N^0. XIII]; zie ook achter in 't Boeckjen/ van de 15 boecken van Euclidus door C. V. Nienro- || de, [zie Noot 2 van Bouwstoffen X] en Sybrandt Hansz. || Cardinael in de 68ste zijner 100 Questien. De tweede questie betreft een driehoek met gegeven zijden, in een cirkel beschreven; door ieder hoekpunt trekt men eene koorde, die de overstaande zijde middendoor deelt; den driehoek te bepalen, dien men verkrijgt door de eindpunten dezer drie koorden te verbinden. Nog voegt VAN LEEUWEN hier twee andere vraagstukken bij, de eene N^0. 142 van 't Vergulde Licht der Zeevaert: „die hy hem mede ghe-leert en onder- || wesen heeft ... in 't Jaer 1663. in January."

3. »Volgt de solutie van drie Placaten, door Claes Hendricksz. || Gietermaecker openbaer aengeslagen" [blz. 36]. Daar slechts zeer enkele van zulke plakkaten tot ons zijn gekomen, zal het de moeite loonen deze, — en zulks des te eerder, daar zij in haar geheel voorhanden zijn, — hier af te schrijven.

„Solutie op de eerste Brief. || 1 QUESTIE.

EEn Schipper zeylende een onbekende Coers/ tot dat de breedte en || veerheit t'samen verandert is 64 mylen/ ende de langhte 16 mylen. || Vrage nae de veranderde breedte en veerheyt elck be-sonder/ en oock na de || gezeylde Coers.

Tweede Questie van de eerste Brief.

EEn Stuyrman de Son geschooten hebbende boven den Hori= sont 39 || graden 13 minuten / hebbende op dien tydt 16 graden 23 minuten || Noorder declinatie/ op Noorder Polus hooghte van 53 graden 11 mi= || nuten. Vrage hoe laet het aldaer was doen dese Observatie ghesciede?

Derde Questie van de eerste Brief.

EEn Stuyrman op 10 graden Zuyder breete wesende/ zeylt van daer || eenighe mylen/ alwaer hy syn coers verandert: alsoo dat hy met de || eerste coers maeckt een hoeck van 30 graden 31 minuten/ zeylende dan || met deze tweede coers soo lange/dat hy weer op de selve breete komt daer || hy eerst is afgevaren/ende als dan heeft hy in alles ghezeylt 330 mylen/|| dan is de langhte 7 graden 20 minuten verandert; nu is de vraghe hoe= || veel mylen de Stuyrman dan op yder coers ghezeylt heeft?

Tweede Brief, eerste Questie.

DAer is een seeckere Tooren staende over een Revier/als in dese ne= || venstaende Figuer *) AB, welck men begeert ghemee= ten te hebben/ || nu by geval ick daer seeckere veerte van synde als in C, so bevinde ick || dat de spitse des Toorens boven den Horizont verheven was 24 gra= || den 30 minuten/ ende uyt C gaende 28 roeden/ tot in D, aldaer syn= || de/ ende den hoeck ACD waergenomen hebbende/ en bevinde de selve || 48 graden 12 minuten/ ende de hoeck ADC 117 graden 48 minuten. || Vra= ge na de hooghte des Toorens AB/ ende hoe veer men in C en in D || van de selve gestaen heeft?

Tweede Brief, de tweede Questie.

EEn voorgegeven Driehoeck ABC, wordt bekent aegeven den Per= || pendiculeer BD 40 roeden/ ende den Basis AC 48 roeden/ met den || hoeck ABC 48 graden 0 minuten. De vrage is na de zyde AB en BC || en d'andere twee hoecken/en in wat form de Driehoeck sal vallen?

Tweede Brief, derde Questie.

Daer zyn drie Schepen als ABC, yeder op een bysonder plaets zynde/ || en A is van B 460 mylen/ en B is van C 504 mylen/ en C van A 572 || mylen. De vrage is hoeveel mylen yeder Schip sal moeten zeylen om in || een punt te komen by malkanderen als elck even veel mylen zeylt?

---

*) De figuren kan de lezer gemakkelijk zelf teekenen.

Tweede Brief, de vierde Questie.

Daer is een Driehoeck ABC, in een Cirkel beschreven/soo dat A || staet van B 50 voeten/ en B van C 30 voeten/ en C van A 72 voeten. || Vrage nae de langhte des Diameters?

Vierde Brief, de vierde [lees: vijfde] Questie.

Daer zyn 2 getallen/ soomense t'samen nultipliceert soo komt er 100/ en || somen 't een door 't ander divideert/ soo komt-er 6. Vrage na de getallen?

Tweede Brief, seste Questie.

Een Stuurman zeylende bewesten de Meridiaen/een onbekende koers/ || tot dat de breete en veerheyt verandert is te zamen 128 mylen/ ende de langhte 32 mylen. Vrage na de veranderde breete en veerheyt elck byson- || der/en oock na de gezeylde koers?

Derde Brief, eerste Questie.

Voorgegeven een Driehoeck ABC, daer in beschreven is een Ront soo || groot als 't mogelyck is/ uyt wiens middel-punt D ghetrocken is ED, || rechthoeckigh op de zyde BC, soo dat DC doet 36 en BD 16 roeden/ || ende den hoeck A doet 50 graden. Vrage na de lenghte der zyde AB en || AC, als mede den in-houdt des Triangels?

Derde Brief, tweede Questie.

Een Stuurman leggende op een seecker plaets met een Schip ten anc- || ker/ als in dese navolgende Figuer D, daer hy drie Toorens in een rech- || te Linie siet staen als ABC, soo dat A is van B 200/ ende B van C || 350 roeden/ en bevinde dat den hoeck ADB doet 30 graden/ en den || hoeck BDC 56 graden. Vrage hoe verre dito Stuurman van yeder || voorsz. Toorens geweest heeft/ dat is A van B van D, en C van D?

Omtrent deze Questien merkt van Leeuwen op, dat de eerste van den eersten Brief is »de 32e in sijn Boeckje het Ver- || maeck der Stuyrluyden" 7); de tweede is „het negentiende Voor- || stel/ in 't Vergulde Licht der Zeevaert"; de derde „staet in het Vermaeck der Stuerluyden [aldaar N⁰. 35] en in het Vergul- || de Lichts Vermeerderingh... op folio 10" 8). Evenzoo geeft van Leeuwen aan, waar de zes Questiën van de tweede Brief in de drie voornoemde werken, hetzij ongemaeckt of gemaeckt te vinden zijn; omtrent de tweede Questie merkt hij nog op „dese heeft hy geschildert uyt het boeckje van de Fortificatie van Melder || tot Utrecht 9) en is de 13 Questie op fol. 166. Bij den derden Brief, de eerste Questie, verwijst hij naar 't Vergulde Licht der Zeevaert en 't Vermaeck der Stuurluyden: en bij de tweede Questie verwijst hij weder naar de Fortificatie van Melder, de 30 Questie.

[Deze GERARD MELDER was Fortificatie- en Bataillon-Meester der stadt Utrecht. Hij is bekend door zijn twist met HENDRIK RUSE zie § 1. Het was zijn broeder CHRISTIAAN, die 26 November 1687 als Hoogleeraar in de Wiskunde te Leiden overleed, en eene uitgave van Euclides bezorgde in 1673].

4. Vervolgens behandelt VAN LEEUWEN (blz. 45—64) „eenige Questien met haer Solutien/ uyt het Vergulde Licht der Zeevaert van de Gietermaecker, en met eenen oock aengewesen || uyt wat Boecken hyse geschildert en geplundert en na-geaept heeft, namelijk N⁰. 46—55, 57—79, 82, 91—95, 100—103, 105—114, 120—123, 127, 128, 132, 134, 135, 141, 142. Behalve de reeds vroeger aangehaalde werken, worden hier nog genoemd „de Fundamenten van Ludolf van Keulen" [het werk van Bouwstoffen N⁰. VIII, Noot 17]. Aenhangh door Mr. Adriaen Jacobsz. Cops tot Delfshaven [10]) achter in 't Boeck van Decker [het boek van Noot 16, Bouwstoffen I], Joannes van Loon, Plaetsnyder/ [11]) en die heeft hem de Navigatie oock geleert."

[LUDOLF VAN CEULEN (ook VAN COLLEN, en VAN CUELEN) werd 18 Januari 1540 te Hildesheim geboren, en overleed 31 December 1610 te Leiden, waar hij Hoogleeraar in Wiskunde was aan de Ingenieurschool, die aldaar naast de Akademie opgericht werd. Zijne weduwe Hester de Roode gaf zijne nagelaten geschriften ten deele uit. Zie verder Bouwstoffen VIII, IX en XVII. — ADRIAEN JACOBUS COPS of KOPS, van Delfshaven, schreef over Zeevaartkunde in 1659. — EZECHIEL DE DECKER was landmeter, woonde in 1626 te Gouda, in 1659 te Rotterdam; hij speelde eene rol bij de uitgave der eerste hollandsche Logarithmentafels; zie verder Bouwstoffen N⁰. I].

VAN LEEUWEN laat daarop twee vraagstukken volgen uit het boek van Noot 8, met de oplossing, en besluit „De Gietermaecker heeftse daer gemaeckt gestelt door de Tafel Sinus/ gelijck || hy altijd broddelt/ wanneer hy een Geometrische Questie sal maken/ ofse anders niet || gemaeckt kon worden/ daerom ben ick hem dese Demonstratie vereerende om hem || te vrient te houden: want anders sal hy myn volck die ick de Konst van de Zee-vaert || leere niet willen examineren ofte voort helpen na Oost-Indien/ want hy die geene || dat belooft die tegen hem schrijven/ en die hem de waerheydt seggen."

5. Hiertegen nu schreef GIETERMAKER het boekje in Noot 3 van Bouwstoffen XXI, in gansch niet malschen zin. „Gheen Papegaey gheloof ick soude men soo konnen leeren klap-pen/ als onsen || van Leeuwen dit de Quacksalvers nabootst soo aerdigh/ als ofte hy van jonghs || af op by een Quacksal-ver ghewoont ende de konst gheleert hadde; jae als of hy || van jonghs af op een Quacksalver geweest hadde... Ick hadde dese bladeren een ander naem ghegeven; maer om onsen van Leeuwen || te vriendt te houden/ ende hem van dees sijn roem in 't maecken van soo konstighe || Brillen niet t' ontrooven ofte de selve installigh te maecken/ bedacht ick ter deser || instantie/ de meer gemelde tegenwoordige/ hem de aengenaemste. || Dus verre soo veel aengaet de uytlegginge over den tytel deser bladeren."

Daarop „sal [hy] beantwoor- || den/ vooreerst het gene hy ontrent het leeren aen myn naer syn swetsen/ by brenght. || On-der welck hy folio 20. aenmerckt. 1. dat hy my geleert heeft. 2. en wat hy my || geleert heeft."

Het eerste erkent hij volmondig „door 't aenraden van sekeren goeden Vrient" gedaan te hebben „niet om dat ick 't geen van || hem begeerde niet en wist ofte verstont/ want ick het selve al eenige jaren van te || vooren hadde beschreven/... ick schame my niet te leeren 't geene ick niet en || kan/ alwaert oock maer van een kindt..."

En wat het tweede betreft „indien syn Leerlingen door haer gedurige oeffening en lust tot || de Konst niet meerder toe-nemen/ weynigh sullen sy van syn onderwijs vergeten." || Dit betreft zoowel de „Propositien Euclidis,... die deselve waren... als naer 't onderwys van Zal. F. Schooten || Professor," als »'t Wijnroeyen," dat hetzelfde was als dat van Sybrant Han-sen Cardinael [12]), W. Raets Maestriechter [13]), A. Metius [zie Bouwstoffen XII, Noot 1, 2] R. de la Rose [14]), C. F. Evers-dijck [15]) en andere."

[WILLEM RAETS moet wijnroeier te Maastricht zijn geweest;

ik ontmoette nimmer een werk van zijne hand. — ADRIAEN METIUS, tweede zoon van ADRIAAN ANTHONISZ werd 9 December 1570 te Alkmaar geboren, en overleed 16 September 1635 als Hoogleeraar te Franeker; hij was Med. Dr. en huwde met Jetske Andreae, later met Cecilia Vertest; zie verder Bouwstoffen N⁰. XII. — R. DE LA ROSE, die zich naar den toenmaligen trant ROSAEUS noemde, was een Fries. — CORNELIS FRANSZ. EVERSDIJCK geboren te Goes 20 Mei 1586, overleed 19 December 1666 te Middelburg. Hij was een zoon van FRANCISCUS EVERDINGE, en leerling van JOH. COUTEREELS; hij gaf verschillende werken in het licht].

6. Ten tweede spreekt hij over de beschuldiging „Dat ick (al) mijn werck uyt... andere Autheuren hael" en ontkent niet, evenmin als DE GRAAF zulks deed [in Bouwstoffen XXII, N⁰. 7], dat hij zulks gedaan had bijv. in „'t tweede Deel van de Arithmetica", maar daarom had hij ook „tot besluyt van den selven Tytel geschreven by || een gestelt door..." Maar vervolgt hij, heeft »Euclidus... waer na wy alle onse Geometrische voorstellen richten,... niet zyn Boecken uyt d'oude t'samen vergadert?... [uit] Eudoxo en... Pythagora Samio... wat || sullen wy seggen van Thales Milesius,... Plato, Hypocrates Chius, || Archita Tarentius, ende voorts van alle geleerde Geometristen haer doen:... Maer; ||

Der Vliegen aert hy heeft, en doet oock insgelijcken,
Hy gaet door enckel nydt sijn boose tonge strijcken;
Het adderen fenijn op syne lippen sit,
Vol lasteren is sijn mondt en knarst het met gebit."

7. „Tot de veranzwoordinge/ dat ick niet een Questie kan demonstreren/ daer || van onsen van Leeuwen/ in sijnen Bril &c. zeer wintbuylt/ te komen; soo sal ick || toonen met het volgende het tegendeel." De „geheele Historie van het || geen in den Jare 1661. tusschen hem/ my en Jacob Boss soude zyn geschiedt... is (alles) onwaerachtigh/ en een ver- || cierde leugen. Dat nu onsen van Leeuwen geen werck en maeckt van een leugen/ || te vercieren/ sal in 't navolghende verder ghetoont en bewesen werden." Daarentegen herinnert hij hem een bezoek, dat hij „in de maent May 1660... tot synen huyse" bracht, waar

eenige persoonen waren, die „hem (van Leeuwen) || eenige slechte vragen van de Navigatie voorgestelt (hebben): welcke vragen hy niet konnende || oplossen/ eyndelyck seyde; siet Gietermaeker, wat sy my hier hebben voorgestelt; || ick antwoorde/ kont ghy die niet maken? waer op hy stil sweegh; doen hebb' ickse || voor hem gesolveert tot contentement van de voornoemde persoonen; dusdanighe || wintbuylt hy uyt syn hooft." Wat betreft de beide questien, die hij aan zijn deur gestelt zoude hebben, is „mede een vercierde leugen." Wel had hij eene andere „Questie alwaer een vierkant || in den Circkel beschreven"... voor zijn deur gesteld, maar in het geheel geene omtrent een driehoek. Nu gaat Gietermaker aan het tellen der leugens: het vorige is 3 L.; als beschuldiging van het overschrijven van Cardinael's vijfde Boek is 4 L.

Thans gaat hij tot beiden Questien van »het Fluytjen met het Silvere Montstuk", waaromtrent hij zegt: „Hy (van Leeuwen) maeckt noch onderscheydt tusschen manier noch onderscheydt tusschen || werck/ het is niet vreemt: want die gheen onderscheydt tusschen werck en werck || kan sien/ hoe sal die onderscheydt tusschen stellinghen en wercken/ konnen ver- || staen: 't is enckel wevers en broddelaars doen." Omtrent de 219e Questie, die van Leeuwen gezegd had zelf te hebben voorgesteld, zegt hij dat zij „Is de 25e || der Geometrische Questien van Theodorum Hoen, voorgestelt in syn natuerlycke || Astrology ghedruckt in den jare 1659 [16]). Wat sal ick segghen van soo een leugen? || Nota: 5 L."

[Theodores Hoen was landmeter, Ingenieur en sterrekundige te Leeuwarden, en leverde o. a. de Almanacken, die door Gillis Joosten Saeghman uitgegeven werden].

Daarop behandelt hij van Leeuwen's veroordeeling van de negen-proef „Ick verwonder my/ dat onsen || van Leeuwen, Soo een meester/... hem met sulcke slechte || en geringhe kinder-wetenschappen/ bemoeyt: Hy pronckt daer meede onder de || Geometrye/ even als een Aep de welcke met een vuyl gelapt kleet onder 't gesel- || schap van een deel Joffrouws praelt... bytende op myn als den hont na den steen/ niet || eens siende/ van waer (hem) de selve kömt. Maer merckt; hy die soo grooten || meester als hy hem roemt wil wesen/ kan noch niet begrijpen den aert en waerheyt || van soo eene slechte saeck."

Dat „hy... schriift my geleert hebben/ is alles onwaerachtigh || en opgheraepte leugens; het welck ick om kort te zijn/ aanteeckenen voor een || 6 L." Evenzeer omtrent het onderwijs door JOHANNES VAN LOON, en eene beschuldiging van ANHALTIN [waarop wij straks zullen terugkeeren]. „Dese is beyde een opgeraepte valsche leugen... Ick teecken dese leugens/ al om kort te zijn/ (maer) voor een || 7. L."

„Eindelyck seydt hy (Fol. 65). Daerom ben ick hem de Demonstratie vereerende om hem te vriendt te houden,... Aengaende de Demonstratie deser Questie alhier/ is de selve als de achtste Que- || stie in mijne Verguldens-Licht vermeerderingh,"... en „Aengaende dat ick soude ghesendt hebben/ die haer volck niet voort te helpen die || tegens my schryven ofte my de waerheydt segghen/ is een leughen (8 L.). 't Staet in || myn macht niet yemandt te willen of niet te willen examineren... 't is mijn Heeren-Meesters werck aen te ne- || men die 't haer ghelieft."

Hij eindigt aldus:

„Ick hebbe alsoo in 't kort voor my beantwoort den Bril voor de Amsterdamsche || Belachelycke Geometristen, ende getoont dat al het gene hy in de zelve tot myn na- || deel (soo hy meent) by-brenght/ maer een deel vuyle en opgeraepte leughens mits- || gaders opgeblasen Quacksalvers discoursjens zijn/ voorkomende uyt... een vileynen haet."

Dit stuk is gedateerd »den 7 Augustus" en daarom konde DE GRAAF, in het boekje in Noot 2 van Bouwstoffen XXI, waarvan de voorrede gedateerd is 25 November, het werk van GIETERMAKER aanhalen.

8. Thans komt CHRISTIAEN ANHALTIN aan de benrt in VAN LEEUWEN's Bril; dien wij zullen opnemen, waar wij hem straks N⁰. 4 verlaten hebben.

VAN LEEUWEN begint (blz. 65) met het verhaal, hoe hij „een maent 5 a 6 geleden [dus in het einde van 1662] een Bortjen voor zyn deur gestelt (heeft) waer in ik || drie Geometrische Questies gedemonstreert gestelt hebbe met de namen van wien- || se zyn... Jacob Bos,... Abraham de Graef... Claes Hen- || dricksz. Gietermaecker,... geen acht || dagen daer na/ ofte daer stont op een morgen/ een Pasquil aen myn Deur geplackt || van d'eene Belachelycke Geometrist of d'ander/ luydende als volght: Hier woont || Cornelis Labbekack... en noch wat meer is/ gaen onder myn deur steecken Geomeetersche || en andere Questien/en dat sonder den naem/... en ick houde haer voor Schel- || men en voor Eer-dieven/ die sulcks gaen doen achter myn rugh." Het waren deze Questiën, waarvan DE GRAAF in zijn »Ontleding" [zie Bouwstoffen N^{0}. XXI] bewees, dat ze van niemand anders dan VAN LEEUWEN zelven konden zijn, daar niet alleen de vraagstukken zelve, maar ook de gegeven oplossingen, waren nageschreven naar STAMPIOEN DE JONGE en MAROLOIS.

De eerste betreft een rechthoekigen driehoek met de loodlijn op de hypotenusa. Gegeven is die hypotenusa en de verhouding van een der segmenten tot de tegenoverstaande rechthoekszijde. De tweede luidt in letterschrift: van drie getallen x, y, z, is bekend $(x + y)\, z$, $(y + z)\, x$ en $(x + z)\, y$. De derde betreft een vraagstuk uit den vestingbouw.

Tot besluyt geeft VAN LEEUWEN nu blz. 70—76. BYVOEGHSELS, || Bestaende in eenige (7) Questien, met haer So- || lutie, der Liefhebberen geschoncken"; vervolgens nog drie Questien niet ghedemonstreert.

Ten slotte blz. 77—79 twee Questien over in een cirkel ingeschreven vierhoeken „Dese/ (eerste) Questie is affkomstigh van || Mr. Christiaen Anhaltin ... Dese (tweede) Qüestie is den slapenden Oost- en West-vinder voorgestelt/ door || Hendricus Andriesz. in Spere Mundi op de Brouwersgracht." Met dezen titel van „Slapenden Oost- en West-vinder' wordt bedoeld Mr. Christiaan Anhaltin, zoo als reeds op blz. 59 blijkt. VAN LEEUWEN verhaalt daar van hem, dat hij „in || het jaer 1661. in de maent April/ om deze Questie aen boort geweest/ (is)... en hy seyde ick hebbe geen tydt omse te maken/ om dieswille ick || soo veel volcks hebbe te onderwysen/... en hy durft schryven/ dat hy een trap hoogher gekomen is/ in ghe- || leert-heyt/ als alle de gheleertste luyden van de wereld/ als blyckt aen de || Voor-reden van syn Slot en Sleutel." Omtrent de gemelde twee Questiën zegt hij dat ANHALTIN „heeftse [de tweede] || tot noch toe niet konnen solveeren" en de eerste aan „niemand woude || ghedemonstreert toonen/ ofte hy most || daer eerst honderdt Ryckdaelders voor || genieten."

9. En daarop verschenen de twee boekjes van Noot 4 en 7 van Bouwstoffen XXI.

In het tweede boekje, dat door ANHALTIN werd opgedragen aan JAN PIETERSZ. BACKER, DIRCK van HELMONDT, BARENT WICHMANS, FRANS BEX, CORNELIS van RHIJN, FEYNTE PIETERSZ. en HENDRICK BANIER, Kooplieden en Wijnhandelaers... geeft hij eerst blz. 1—26 een handboek van wijnroeien, waarin hij begint met het trekken »der Quadraat- en Cubiek-wortel." Hiervoor geeft hij blz. 11 en 12 tafels, blz. 11 »Den Quadrat-Tafel" van 0.1 tot 12.0 bij tiende deelen, van 12.0 tot 20 bij vijfde, van 20 tot 25 bij halven, van 25 tot 120 bij eenheden en van 121 tot 200 bij vijftallen; blz. 12 »Den Cubicq-tafel" van $^1/_{16}$ tot 1 bij zestiende deelen, van 1 tot 4 bij vierde deelen, van 4 tot 38 bij $^4/_{10}$ deelen, van 38 tot 100 bij eenheden, van 100 tot 200 bij vijftallen, van 200 tot 300 bij tientallen. Daarop volgen zijne regels voor het roeien, en worden van tijd tot tijd de misslagen van VAN LEEUWEN aangetoond; eene »Tafel van 't meeten der Wannigheyt" (blz. 22, 23) komt geheel overeen met die van VAN LEEUWEN in het boekje van Noot 6 in Bouwstoffen XXI.

En nu volgt de »half slapende AENSPRAECKE over den BRIL" het werk in Noot 4 van Bouwstoffen XXI, die naar den aart dier tijden begint met eene menigte aanhalingen uit den Bijbel en Grieksche en Latijnsche schrijvers over »sotten en grootspreeckers." Daarop gaat hij dadelijk over tot de Questie vau de „hondert Ryckxdaelders", waaromtrent hij aanmerkt dat „dese syne van Leeuwens reden || ten deele met waerheyt en ten deele met leughen vermenght [is]/ doorsteecken door || het verswiighen van waerheyt... Aengaende dese questie/ so is het daerom aldus/ verleden herfst [dus 1662] is voor de eerste || reys dese questie van my in seker boecxjen gestelt/ maer om seecker reden niet voor || den dagh gekomen. [het is mij niet bekend, dat er later een boekje van dien inhoud het licht heeft gezien, ten zij het ware zijn Konstrijck Handboeckjen [17])]. Voor de tweede reys is dese questie voornoemt/ van my uytghekomen om deser || oorsaeck." Hij had ze namelijk door een zijner leerlingen „seecker Monsieur uyt Sweeden/ ghenaemt »Ancker- || helm" aan drie andere Zweden laten opgeven, voor hun leermeester »Jacob Bossen" zoo als Anhaltin hem steeds noemt. „Indien nu den wyntbuydel Jacob Bossen syn eer had willen boven houden waer- || om heeft hy die niet ghemaeckt/ maer laet die van de een tot de ander komen; was || hy een verstandigh eerbaer Geometrist, sekerlyck hy soude selve swyghen/ en 't ge- || ne hem gesonden voor hem alleen houden/ en niet lasteren/ soo hadt misschien soo || veel labbekackerye daer niet afgekomen." Daarop wendt hij zich verder tot Bosch „U Jacob Bossen, . . . waer zijn u linien om plaetsen te fortificeren/ toontse || als een man/ hebt gy die beter als Marolois [Sterktebouwing, zie Noot 53 Bouwstoffen XXI], Freytagh [18]), Cellarius [19]), Faulhaber [20]), D, A- || drian Metius [Fortificatie ofte Sterckten Bouwinghe, zie Noot 29 van Bouwstoffen XII] . . . 't laetste werck van de Professor Schoten [Mathematische Oeffeningen Boek V, in Noot 13 van Bouwstoffen XIII] . . . Boven onse Professoren/ de- || ser Nederlanden geeft hier in deser Stede Mannen/ die in Mathesi soo hoogh ghe- || komen zyn/ dat haer glants en eer streckt soo verre als der Son- en Mane-stralen || schynen; als daer is Sr. Joannes Hudde [21]), Sr. Joannes Foens en Sr. Willem Gerritz. || welcker persoonen wy met malkanderen niet waerdigh zijn haer de schoenen te ont- || binden/ en kinderen tegen haer groote verstandt in Mathesi te vergelycken zyn." Het is leerzaam op te merken, dat beide laatste mannen volstrekt niet meer bekend zijn en in het geheel geen spoor meer hebben achtergelaten. Evenmin zoude men het volgende oordeel onderschrijven, althans in den geest, waarin Anhaltin het bedoelt „En soo 't ghebeurt dat men omtrent yets nieuws noch kryght/ soo is || het te reeckenen een groote toeval van Godt/ ende niet onze verstandt toe te schry- || ven."

[Andreas Cellarius was Rector van de Latijnsche School te Hoorn. — Adam Fritach, een Rus van geboorte, diende in ons leger en gaf ten onzent een boek over krijgsbouwkunde, dat in onderscheiden talen werd overgezet. — Johan Hudde, geboren te Amsterdam 1633 (of 1640?) overleed aldaar 16 April 1704; hij was de zoon van Gerard Hudde en Maria Witsen, en huwde met Debora Blaauw. Hij was Burgemeester van Amsterdam].

»Aengaende de Slot-questie die van Leeuwen stelt, my door Hendricus Andriesz. || voorgestelt. Anno 1644. den 8/18 May." zegt hij dat deze is „een eerlyck Godtvreesent || en zeer ootmoedig man", en toont hij aan, hoe VAN LEEUWEN ook hier onwaerheydt verkondigt.

Omtrent deze beide vraagstukken vindt men eenige belangrijke en leerzame opmerkingen van ABRAHAM DE GRAAF in diens »Ontleding van den Bril" blz. 28 tot 35 en 36 tot 45, waar hij niet alleen onderscheidene oplossingen geeft, maar telkens bij iederen stap aantoont, op welke onderling verschillende manieren men verder gaan kan.

ANHALTIN eindigt dit gedeelte met de vrij naïve verklaring. „Hier uyt siet Cornelis van Leeuwen met alle mijne andere Lasteraers/ Faemro- || vers/ grootspreeckers en wintbuydels/ in wat ondersoeckinghe en practijck ick || mijnen tijdt tot profijt van Landen en Steden/ als particuliere persoonen toeghe- || bracht hebbe/ sulcks behoort een Geometrist/ gheadmitteert Lantmeter en Inge- || nieur mede te weten ofte ten minsten yet daer van verstaen."

En laat dan volgen blz. 40: »Bewijs met fondamentale reeden, || DAT || CORNELIS van LEEUWEN || Een Broddelaer en windtbuydel is, met alle de geene || die by hem geleert hebben, en noch leeren." Hierin toont hij het ongerijmde in de regels van VAN LEEUWEN, in bepaalde gevallen, verder de fouten in zijne uitkomsten, die zelfs soms onderling in strijd zijn [bijv. „de eene reys 187½ ton/ en voor de || tweede reys 154 tonnen 6 mengelen."] »Nota, gelijck Cornelis van Leeuwen soms een nieuwe ordre heeft in de Roeykonst/ dat || hem past ghelyck een blinde die na 't ey slaet... en nochtans vermeet en spreeckt soo groot/ sekerlyck || en buyten twijffel is het dat hy effen dierghelijcke practijck ende verstandt heeft || in sijn Boeckhouden en Landtmeeten; yeghelyck vroom Borgher wacht hem || voor desen geleerden Broddelaer (fol. 21) en Breeckebeen/ laet u niet verleyden || met sijn zwetsen en wintbuylen/ daer sal weynigh leeringhe en onderwijs by hem te || halen syn/ als maer swetsen en grootspreecken/ || ... alsoo dat ick oordeele recht en eerbaer te sijn/ dat || desen onverstandighen wintbuy- del van Leeuwen, 't gelt dat hy genooten heeft van || Mr. Claes Hendricksz. Gietermaker, met alle syne andere Scholieren/ schul- digh is || wederom te geven/ want hy door syn valsche broddel- achtige onderwysinge aen haer/ || haer 't geldt ontstolen/ en niet met rechte verdient heeft."

10. Blz. 51. »Aengaende Oost- en West-vindinge, daer schrijft || *Cornelis van Leeuwen* aldus van" ... „Daer teghen sal ick oock sommighe conditiones en bedingh bespreecken/ waer-van || ick hier drie sal stellen/ die meerder in 't beschryven van 't contract ... My nu keerende te spreken met wyse, verstandige, achtbare en || der waerheyt toegedane persoonen" verhaelt Anhaltin, waarom hij „dus langhe geen mentie daer af gemaeckt/ en daer van geschre- || ven" heeft, en beklaagt hij zich dat men met hem „alsoo nauw wil sien, ... men siet immers met volgende Autheuren en man- || nen soo nauw niet/ als die schryven en verschillen wanneer de Son in Aries en Li- || bra komt/ namelyck || Op het jaer 1613 oude stijl"

Landsbergius [22]) 9 Maert 23 uyr 25 min. $27\frac{1}{4}$ sec. en 12 September 15 uren 40 min. $24\frac{1}{2}$ secund.

Phocilid [23]) 9 Meert 21 uren 28 min. 18 sec. en 12 September 16 uren 20 min. 4 secund.

Dirck Rembrandts [24]) 9 Meert 23 uren 43 min. en 12 September 14 uren 48 min.

Argoli 9 Meert 21 uren 40 min. en 12 September 15 uren 58 min.

En volgens Muler: Tab. Fris. [25]).

Ptolomeus 17 Meert 7 uren en 21 September 2 uren 30 min.

Alphonsus 9 Meert 15 uren 42 min. en 12 September 16 uren 7 min.

Copernicus 10 Meert 13 uren 43 min en 12 September 21 uren 6 min.

Tychoni 9 Meert 21 uren 39 min. en 12 September 16 uren 3 min."

„en met my || soude men sien op een oghenblick/ al hoewel ick gheen uren of daghen en soude be- || geeren || ... De tweede reden en oorsaeck/ dat ick niet meer daer van gedacht en ghe-schreven || hebbe/ is dese/ nademael ick verstaen en bemerke/ hoe ick sulckes in persoon op || Zee soude goet doen/ het welcke myn ghelegenheyt niet is/ oock groote en sware || kosten door my daer op te doen niet voor goet uyt vinde."

[Philippus Lansbergen werd 1561 te Gent geboren en overleed 8 November 1632 te Middelburg. Zijn ouders waren Daniel Lansbergen en Paulina van den Honingh; hij was Medicus te Middelburg en was beroemd sterrekundige, met velen in briefwisseling. — JOHAN PHOCYLIDES HOLWARDA, wiens gewone naam was JAN FOKKENS HOLWARDA, werd 19 Februari 1618 te Holwerd geboren en overleed 21 Januari 1651 te Franeker. Hij was de zoon van den predikant Focco JOANNIS en MARIA WILLEMS; hij huwde met MARIA PYBINGA, en was Hoogleeraar te Franeker. Zijn boek »*Πανσεληνου* id est Dissertatio Astronomica, quae occasione ultimi Lunaris Anni 1638. Deliqui Maauductio est. Franeker *Idsard Albertus Joannis Fabianus Theunisz.* 1640, 12°." bezorgde hem den toenaam van »Frisiae Lumen" en gaf aanleiding, dat er eene ster naar hem werd gedoopt. — NICOLAUS DES MULIERS, gewoonlijk bekend als MULERIUS, zag 25 December 1569 het levenslicht en stierf te Groningen 5 September 1630. Zijn ouders waren PIERRE DU MULIERS en CLAUDIA LA VETTRE; hij huwde met CHRISTINA SIX, die hem twee zonen schonk. In 1624 werd hij te Groningen tot Hoogleeraar in de Geneeskunde benoemd.]

11. »Volght 't Roeyen van Regenbacken, Brouwers-kuypen,|| en Beeckers &c." (blz. 54), en »de swaerte van Yser en Ysere kogels" (blz. 64) waarin ANHALTIN verschillende regels daarvoor geeft, en tegelijkertijd de regels en de uitkomsten van VAN LEEUWEN behandelt en verbetert. Op blz. 68 eindigt hij met het vers:

»Ick sal doen t'aller tijdt het mijne,
Door Godes genaden hulp en gonst;
Een ander doe mede het sijne
Soo sal vermeerdert worden de Konst.
Voor onse Stadt en het Vaderlandt,
Op dat Amsterdam sie met twee oog'n,
En Broddelaers werck gemaeckt tot schandt
Uyt Embd'n en Amsterdams Borsten gesoogen,
Heb ick 't en niet uyt hoogheyt en eer,
Want ick een Scholier ben in 't A. B.:
Maer tot myns naesten onderwijs en leer:
O Godt! zyt ghy my leermeester mee."

Daarop volgt als bericht (of reclame):

»Aen alle en yeghelycke, soo hooge als lage Stands-persoonen, ontbiede mijnen onder- || danigen dienst, en doe in aller ootmoedigheyt te weten: Dat ick School-houde in || alle oprechte onderwijsinge en leeringe, Cyfferen, Italiaens en Scheeps Boeckhouden. || Geometrie, Lantmeten, hooghten, diepten, verscheyden Fortification, soo wel door || Theorie met Linien, als oock door Praxi in 't Velt af te steecken, Roeykonst, Archi- || tectur, Artelerye of Bosschieterye, Navigation ofte Konst der Stuerluyden ende Astro- || nomie, &c. alles met goeden gront en fondament door Godts genaden en hulp. | *UE. Ootmoedigen seer willigen Dienaer* || Christianus Martini Anhaltin. || Tot Amsterdam. || Op d: Zeedijck daer de Konst-Schoole uythanght en de Stuerman || op de Stock staet. || Oock houd' ick Jonghmans en Scholiers in de kost."

Men ziet hieruit, dat Anhaltin niet alleen onderwijs gaf in alle deelen van theoretische en praktische wetenschappen, maar er ook een soort van internaat voor zijne scholieren op na hield.

AANTEEKENINGEN.

[1]) C. H. Gietermaker. Italiaansch Boekhouden. Dit werk ontmoette ik nergens.

[2]) Mr. Sibrand Hansz. Cardinael. Schoolboeken van de Arithmetica zijn vier in getal; zij werden veel gebruikt en van ieder afzonderlijk, soms ook van alle gezamenlijk, bestaan vele herdrukken.

Deel I. Amsterdam. *Everhard Cloppenburgh* 1644. 8°.; *ib. *Michiel de Groot,* Boek-Verkoper op de Nieuwendyck tusschen de Oude en Nieuwe Haarlemmersluys in de groote Bijbel. 1650, 140 blz. 8°.

Deel II. *ib. *Jan Jacobsz. Bouman,* Boeckverkooper op 't Water by de Kapel-Steegh/ inde Salvator. 1648. 142 blz.; *ib. *Weduwe van Theunis Jacobsz.* Boeck–verkoopster op 't Water/ in de Loots-man. 1674.

Deel III. *ib. *Jan Jacobsz. Bouman.* 1647. 120 blz.; *ib. *Jan Bouman.* 1661; *ib. *Jacobus Konynenberg,* Boekverkooper in de Nieuwe Hoog–straet by de Suyder–Kerk. 1674. 119 blz. 8°.

Deel IV. *ib. *Jan J. Bouman.* 1647. 96 blz.; *ib. *Weduwe van Theunis Jacobsz.* 1674. 96 blz. 8°.

Verder alle vier bijeen bij *Jan Bouman.*

[2a])* Arithmetica, || *ofte,* || Reecken-Konst, || Beschreven door || Mr. Sybrand Hansz. || Cardinael. || Reecken-meester tot Amsterdam, || vignette: een vierkant op de zijde AB ($= \sqrt{2}$), met de diagonalen 2 (en de halve diagonaal 1), langs de zijden staat „*Wie cant Telle.* || *Tis meer als een.* || *Minder als twee.* || *Gheen Ghebroockē.*" || t'Amsterdam. || Gedruckt by Jan Bouman, Boeckverkooper op || 't Water/ in de Celye onder de Doornen/ 1670. 8°.

Daarna de afzonderlijke titels.

Het eerste || School-Boeck/ || van Mr. Sybrand Hansz. || Cardinaels || Arithmetica. || Vande Fondamenten deser Konste, || bestaende in het tellen, ende der voornaemste || Rationale Rekeninge, ende den Regel van || Dryen, als een Gront-regel, ende dat || van 't gene hier in voorvalt te || doen, alleenlick inde ge- || heele getallen. || Vignette: een rechte balk, waarvan de lengte, breedte en hoogte in 10 deelen verdeeld is. || t'Amsterdam, enz. 1670. [144] blz. 8°. 30, 40, 90, 90, 30, 40, 80, 50, 100, 50, 150, 150 voorstellen.

Het tweede || School–Boeck || van Mr. Sibrand Hansz: || Cardinaels ||

ARITHMETICA. || Daer in geleert worden de voornaemste Ratio- || nale Rekeningen, de welcke daer voorvallen, om || te doen in het gebroken ; Mitsgaders oock || hoemen den Regel van Dryen sal || wercken inde gebroken ge- || talen. || Vignette : meetkundige figuur voor het bewijs dat $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$] || enz. 1669. blz. 1—142. 8°. 60, 70, 160, 160, 30, 40, 130, 100, 100, 20, 150, 150 voorstellen.

Het derde || School-Boeck || van Mr. Sibrand Hansz: || Cardinaels || *ARITHMETICA.* || In 't welcke tot meerder oeffeninge in || deser konst geleert wort allerlye konstige pro- || portionale Rekeningen te beantwoorden, so || in de geheele als gebroken getallen, door || de Regel van Dryen, ofte Gront- || regel ; Mitsgaders oock de ver- || keerde Regel van Dryen. || Vignette : meetkundige constructie van eenen regel van drieën || enz. 1661. blz. 1—119. 8°. 300, 10, 50 Voorstellen.

Het vierde || School-Boeck || van Mr. Sibrand Hansz: || Cardinaels || *ARITHMETICA.* || Van 't vergaren ende aftrecken der pro- || portien, zy zijn dan Recht ofte Verkeert. Oock || om eenigh getal te verdeelen, na alsulcke || voor-gestelde Proportie ofte Reden, || als men begeert. Ende van de || Regula Alligationis. || Vignette : meetkundige constructie van de regel van menging || enz. 1660. blz. 1—96. 8°. ; 100, 40, 80, 60, 20 voorstellen.

Het zij opgemerkt, dat in het 3e boek blz. 91, ten opzichte van interest-rekening verwezen wordt naar „*ons Seste School–boeck.*"

2b)* Een andere is bij *Michiel de Groot.* De hoofdtitel heeft tot datum 1678; de vier kleine titels 1678, 1674, 1674, 1674. De vignetten zijn gedeeltelijk verschillend.

Het eerste schoolboek van 1648 is „op 't nieuw gecorrigeert, door || Mr. JOANNES DAUMANN" ; dit vindt men reeds in 1659 ; en zelfs in 1640 gaf deze de drie eerste Schoolboeken.

3) Deze Arithmetica oft Rekenkonst van JACOB VAN DER SCHUERE, Menenaer beleefde vele herdrukken. De eerste verscheen te Haarlem bij *Adriaen Rooman.* 1600. 8°. ; de tweede ib. *id.* 1611 : de derde volgt dan.

3a)* ARITHMETICA. || Oft Reken-konst. || Verciert met veel schoone || Exempelen/ zeer nut voor alle vlijtige || Oeffenaers ende leergierige aenvangers || dezer Konst/ etc. Ghemaeckt./ Door || IACOB VAN DER SCHUERE. Meenenaer. || Nu ter tijd Françoyse School-meester || tot HAERLEM. || Ende nu int herdrukken by hem oversien/ gebeterd || ende vermeerderd. || Vignette : een portret van den schrijver op jeugdigen leeftijd (24 ? jaar zijn ouderdom in 1600 ?) waarbij in de rondte zijn spreuk „Door || siet || den || grond." || Gedruckt t'Haerlem, by Adriaen Rooman. || Voor Daeniel de Keyzer. Boeckverkooper/ woonende op 't || Zant/ in 't vergulden A/ B/ C. Anno 1615. 8°.

Folio 1—208, alleen in recto gepagineerd.

Vooraan een gedicht „Aen Const-lievende Juegd. || Die leerbaer tracht nae Duegd" en „Tot den Leser" (1 blz.); dan „DEN MAKER TOT || ZYNEN BOEK (4 blz.), alles van den Schrijver; daarop „SONNET" geteekend „NIET SONDER DAT" (1 blz.) „ODE || OP HET TAL-KONST- || BOEK WTGEGEVEN || DOOR || *MR. IACOB VAN DER SCHUERE*" geteekend „EEN IS NOODIG (2 blz.). Achteraan „LIER-DICHT || Op de || REKEN-KONST" (1 blz.), „Af-scheyd" (1 blz.) mede van den schrijver. De laatste blz. bevat een vignet, voorstellende een ovaal in versierde lijst, waarop een drukkerswinkel met het randschrift „INT SWEET WS AENSICHTS SVLDI V BROOT ETEN: *Gene.* 3. 19." Onder deze vignette staat: TOT HAERLEM. || Gedruckt by Adriaen Rooman, Boeck || drukker/ woonende in de Koningstraet/ inde || vergulde Parsse. Anno 1615." 8°.

Er is nog eene uitgave, ib. *id.* 1625. 8°.; ook Rotterdam, 1624, 219 blz. die nog bevat „Rabat der Kustinghen" met herdruk van 1653. Dan een uitgaaf te Gouda.

3b)* Gegraveerde titel; op een schild bovenaan staat:

Arithmetica || *OFT* || REKEN-KONST. || *Door Jakob vander Schuere Meenenaer.* || *Eertyts Françoysche Schoolmeester* || *tot Haerlem.* || *En in 't herdrucken by hem ouersien* || *verbetert en vermeerdert, en noch by-* || *geuoecht een kort onderricht van* || *'t Italiaens Boeck-houden.*" || Daaronder een goed portret „*aet:* 50 van *W. Akersl-(oot)*" en verder onderscheidene attributen. || Daaronder „TER GOUDE || *By* Pieter Rammeseyn, *Boeckverkooper* || *in de Korte Groenen-dal, in 't Vergult* A. B. C.". *a*°. 1630. 8°.

Verso van den titel wit. De „VOOR-REDEN || Aende Lief-hebbers || der REKEN-KONST" door „DENYS vander SCHVERE", zijn zoon; uit welke blijkt, dat dit „de vierde maal gedrukt is" en „dat mijn Vader soo verre || buyten 's Lands woonde." Daarop volgen de zes gedichten en de „Inhoud des Boeks." „Den Drucker tot den || Const-lievenden Leser" alles 16 blz. niet genummerd.

Dan het werk folio 1—203 (alleen in recto gepagineerd) en 204—208 Twee Brieven aen Robbert Robbertsz., waarin hij de benamingen „eerste lidt duysend, tweede lidt duysend, enz." in plaats van „millioen, billioen enz." voorslaat.

Daarop volgt, hetwelk ook wel afzonderlijk voorkomt,

3c)* Kort onderricht || over het || ITALIAENS || Boek-houden; || Nu int licht gebracht || DOOR || *JACOB vander SCHVERE.* || eertyds || *Françoysche School-meester* || tot || HAERLEM. || Vignette: Abraham offert Isaac met het randschrift „DOE HIEF ABRAHAM ZYN OOGEN OP ENDE SACH EENEN RAM. GEN. 22." || TER GOVDE. || By *Pieter Rammasegn,* Boeck-vercoo- || per int vergult A. B. C./ 1630. 8°. Folio 1—46 (alleen in recto gepagineerd).

Van deze uitgaef weder een herdruk (de 6 de). ib. *id.* 1639.

Verder verscheen er een druk te Amsterdam van 1630, en later van 1643.

3d)* Een gegraveerde titel.

Arithmetica || *oft* || Reken-konst || *En een kort onderricht vant Italiaens Boeckhoudē.* || *Door* Iacob vander Schvere Meenenaer. || *By den Autheur oversien, verbeetert en vermeerdert.* || Vignette: portret „*Out* 67 *Iaer*" || Tot Amsterdam, || *voor* Denys vander Schuere *Boeckverkooper* || *op de Nieuwendijk inde Biestkens Bybel.* 1643. 8°.

Verso van den titel wit. Dan „*voor-reden aen de leer-lievende* || Reken-konst-beminders", nu van den schrijver zelven. Daarop de verzen, alles 16 blz.

Folio 1—219, het boek en de brieven van Robbert Robbertsz., waarvoor nog over „Rabat der Kustinghen." Daarop

3e)* Kort onder-richt || over het || Italiaens || Boek-houden; || In 't licht gebracht || Door || *Jacob vander Schuere.* || Vignette: Vos met takken. || *Gedruct tot Haerlem by Hans Passchiers van Wesbusch.* || Voor Denys van der Schuere, Boeck-verkooper || tot Amstelredam, op den Nieuwen Dijck/ || in de Biesthens Bybel./ Anno 1643." 8°.

Folio 1—52, alleen recto gepagineerd.

Er is nog een druk te Amsterdam van 1675.

4)* Cyffer-Boek/ || Inhoudende de Fundamenten van || d'Arithmetica. || Met vele verscheide fraye Regels/ Ques- || tien/ en diversche Rekeningen/ seer dienstig || voor alle Kooplieden/ Thresoriers/ Rente- || niers/ Ambachtslieden/ &c. Alles voor || desen gecomposeerd in de Francoische || sprake. En nu op een nieuw over- || geset in het Neder-duitsch. || *Door* Daniel van Houcke, *van Londen.* || In desen laetsten Druk || Op nieuws oversien, alle Quaestien na-gerekend, en || van meenigte fauten gesuiverd; en vermeerderd met || verscheide fraye Quaestien, en nodige Annotatien || *Door Mr. Cornelis de Herder.* || Vignette: een schild met het randschrift „Josephus Joodtsch Histori-Schrijver", waarbinnen Josephus aan den arbeid. || Tot Rotterdam, || By Bastiaen Wagens, Boek-verkooper op 't Steyger. 1676. 8°.

In verso van den titel „Kort Inhoud van dit Boek"; dan „*Aen den Konst-lievenden Leser*" gedateerd „In Rotterdam den 2. Martij 1676. U. E. Dienstw. Cornelis de Herder" (1 blz.). „Sonnet || *op de* || Arithmetica || Van || *Daniel van Hoecke, zaliger* [waaruit blijkt, dat deze toen reeds overleden was] (1 blz.). Daarop het werk:

A—T. Blz. 1—292.

5)* *Mr. Pieter Wils* || Wis-konstighe Wercken: || *Bestaende in eenighe Meet-konstighe ende* || *Hemel-klootsche aen-teyckeningen, elck met hare* || *verklaringhen ende bewijsen.* || Tot dienst van de Liefhebberen der selver konst || t'samen gestelt, || Vignette: eene boekdrukkerij. || *t'Haerlem,* Gedruckt by *Thomas Fonteyn:* || Voor de Weduwe van den Autheur Sal. woonende voor || aen in de Dam-straet. 1648. 4°.

Verso van den titel is wit. Dan „Tot den Leser" geteekend „GERARD KINCKHUYSEN. || *Haerlem den* 12 *Septemb.* 1648" (2 blz.), waarin deze schrijft „*Nu alsoo den Autheur van dit* || *Werck* (*myn Meester goeder ghedachte*) || *overleden is*" zoodat WILS toen niet meer leefde.

A—V. Blz. 1—255. Men vindt hier de volgende verzameling:

Blz. 1—5. Meet-konstighe || Vertooghen || *In hoeck-lijnen, der Boogen.*

Blz. 6—19. Meet-konstighe || Vertooghen || *In recht-linische Formen.*

Blz. 20—63. Meet-konstigh || PASSER-WERCK.

Blz. 64—82. Aenhangh, || *Bestaende in eenige Wis-konstighe stucken.*

Blz. 83—92. Rekeningh || *Der* || Krom-streecken.

Blz. 93—152. Hemel-klootsche || WERCK-STUCKEN. || *Sonder kennis der Klootsche drie-* || *hoecken af te veerdighen.*

Blz. 153—155. *Aenteykeningh,* || op de Metael-waegh.

Onderaan op blz. 155 staat nog:

„TOT HAERLEM || Ghedruckt by THOMAS FONTEYN, Boeck- || drucker woonende in de Bartel-Joris-straet in de ghe- || kroonde Druckerye. 1648."

5a) Hiervan een herdruk „Amsterdam 1654. IV en 156 blz. 4°. met een Voorrede van KINCKHUYSEN, gedateerd „*Haerlem* 28 Febr. 1654." Gedrukt „Tot AMSTERDAM || By Thomas Fonteyn, Boeck-drucker op de || Nieuwezijds Voor-Burghwal, by de Deventer Hout- || markt in de Gekroonde Druckerye. 1654." Hieruit blijkt, dat THOMAS FONTEYN sedert 1648 zijn drukkerij van Haarlem naar Amsterdam had verplaatst.

6)* Hondert || Geometrische questien || met hare solutien. || *DOOR* || Sybrandt Hansz. van Harlinghen, || Reeckenmeester tot Amsterdam. || Vignette: meetkundige figuur voor de stelling van Pythagoras. || t'AMSTERDAM, || Ghedruckt by Willem Jansz. op het Water/ || in de vergulde Sonnewijser. [1620]. 8°.

Verso van den titel wit. Dan VOORREDEN (1 blz.) en verso wit.

A—H. Blz. 1—127.

Blz. 128, niet gepagineerd, bevat het drukkersmerk, een weegschaal; op de eene schaal eene aard-, op de andere eene hemelglobe, deze weegt het zwaarst. Daar onder staat „PRAESTAT."

Dit werk vindt men na de twee volgende en voor het derde, waarbij de titel van het laatste den voormelden datum bepaalt.

6a)* **Practijck des landme-** || **tens; Leerende alle rechte ende** || **kromzydige Landen/ Bosschen/ Boom-** || **gaerden/ ende andere Velden meten/** || **soo wel met behulp des Qua-** || **drants/ als sonder het selve.** || Mitsgaders alle Landen deelen in ghelycke ende on- || ghelijcke deelen op verscheyden manieren, || met eenighe nieuwe ghecalculeerde || Tafelen daer toe dienende. || **Gecomponeert door** Iohan Sems **ende** Ian Pietersz. Dou, || **gheadmitteerde Landtmeters.** || *Vermeerdert met hondert Geometrische Questien met* || *haer*

Solutien. Door SYBRANT HANSZ. || *Rekenmeester tot Amsterdam.* || Vignette: landmeters aan hun arbeid met wiskundige figuren en landmeterswerktuigen. || Ghedrukt tot Amsterdam by Willem Jansz. op het || Water/ in de vergulde Sonnewyser. [1620]. 8⁰.

Verso van den titel is wit. Dan de Opdracht aan „Vorst ende || Heere Mauritz . . . || MITSGADERS || *De . . . Staten van Hollandt, Zeelandt ende* || *West-Frieslandt*" gedateerd „in Leyden desen elfsten October anno 1600" (6 blz.) „*Tot de* verstandighe Lesers" (3 blz.)

A—V.

Blz. 1—74. Dat eerste deel.

Blz. 75—238. „Dat tweede deel . . . Leerende meten alle pley- || ne figueren ende formen der landen/ hoe || die gheleghen moghen wesen." [bevat „Tafelen der Circkel-boghen blz. 126—185"].

Blz. 239—294. „Het derde deel/ . . . Leerende deelen alle formen der || landen in gelijcke ende ongelijcke deelen/ met rech- || te ofte kromme scheydlinien loopende/ even- || wydich of onevenwydigh/ eñ mede uyt || punten staende binnē ofte buyten || 't land/ eñ komende oock aen || diversche weghen."

Blz. 295—303. APPEDDIX.

Dan „BESLUYT" (1 blz.). Register (2 blz.). VOORSTELLINGHE (2 blz.) ongepagineerd.

6b)* Van het ghebruyck der || Geometrische instrumenten. || Leerende alle onghenaeckelycke lengten/ breetten/ || wijtten/ hoochten/ ende diepten/ met behulp van som- || mighe Geometrische instrumenten afmeten/ || soo wel sonder calculatie/ als met behulp der selvighen. || Desghelycx Caerten maecken, soo wel van eenighe || Landschappen met hare behoorlycke Steden, Dorpen, || Casteelen ende Sloten, als van eenighe particuliere Velden, || ende hoemen een gantsche Provintie, mitsgaders de Middel- || linie ende ommeloop des Aerdbodems sal afmeten, ende een || Stadt, Stercte ofte Casteel inde grondt leggen, met meer an- || dere konstighe stucken der Geometrie belanghende. || Door *Iohan Sems* ende *Ian Pietersz. Dou,* || [Vignette: dezelfde als in het vorige boek]. || Ghedruckt by Willem Jansz inde Sonnewyser." [1620]. 8⁰.

Verso van den titel wit. Dan opdracht aan „Wilhelm Ludwich Grave tot Nassauw, || . . . || MITSGADERS || . . . *Heeren Ghedeputeerden* || *Staten van Vrieslandt,*" gedateerd „Uyt Leeuwaerden desen vijfden September ANNO || 1600." (5 blz.). Dan „Tot den konstlievenden Lesers" (3 blz.).

A—I. Blz. 1—131. Drie deelen. Daarop „BESLUYT" (1 blz.) Register (2 blz.) ongepagineerd. Daarop volgt nu het werk van Noot 6) en daarna weder:

6c)* TRACTAET || Vant maken ende Ge- || bruycken eens nieu gheor- || donneerden Mathematischen || Instruments. || In welcke verscheyden konstighe stucken (de || Geometrie betreffende) vervatet ende || begrepen zyn. ||

Beschreven ende in druck uytghegeven || DOOR || IAN PIETERSZOON DOV, || *Der Stadt Leyden Landtmeter ende Wijnroeyer.* || Vignette: dezelfde als op de laatste bladzijde van het werk in noot 6) || TOT AMSTERDAM. || By Willem Janssen op 't Water/ inde ver- || gulde Sonnewyser. Anno 1620. 8°.

Verso van den titel is wit. Dan opdracht „AEN DEN || .. Vorst ende Heere || MAVRITS," gedateerd „uyt || Leyden desen 2en Februarij 1612 || ... *J. Pieterszoon Dou*" (blz. 2—6), dan „Aende Leser" (blz. 7—8).

A—E. Het werk in 4 Hooftstucken, blz. 9—70.

6d)* Een tweede druk kwam uit, tusschen 1617 en 1650, van de drie voorgaande werken. 6a, 6b en 6 „Ghedruckt tot Amsterdam/ by Jan Jansz. op het Water/ inde Pas-Caert."

De twee werken 6a) 6b) kwamen echter eerst in 4°. uit.

6e)* Practyck des Landmetens || ... Van nieus ghecomponeert ende in druck uyt ghegheven door || Iohan Sems geadmitteert Lantmeter by den Hove van Vrieslandt/ eñ || Ian Pietersz. Dou, gheadmitteert Lantmeter by den Hove van Holland. || Vignette: als boven bij Noot 6a), maar anders. || Ghedruckt tot Leyden by Jan Bouwensz. Anno 1600. VIII, 303, (5) blz. 4°.

6f)* Van het gebruyck .... || Vignette: hetzelfde als in Noot 6e). || Gedruckt tot Leyden by Jan Bouwensz. Anno 1600. (VIII), 126, (2) blz. 4°.

Van dit laatste werk verscheen ook een hoogduitsche uitgaaf.

6g)* Von dem gebrauch der || Geometrischen Instrumenten. || Durch welchen gelehrt wird alle lengen/ braiten/ wei- || ten/ höch vnd tieffe/ so wol ohne calculation/ || als mit hulff der selben abmässen. || Auch Carten machen/ so wol von gantze Landschaften || mit jhren zugehörigen Stätten/ Dörffern/ Castellen vnd || Schlössen/ als particular Feldern: Deszgleichen wie man eine || gantze Provintz/ sampt dem Diametro vnd Circumfe- || rentia des Erdbodens solle abmässen/ vñ ein Statt/ || Vestung oder Castell in grund legen: mit || andern kunstlichen stucken || der Geometrie. || Alles durch Iohan Sems vnd Iohan Pietersz. Dou, in Nider- || ländischer Sprach beschrieben. || Nun aber dem gemeinen Vatterland zu nutz/ vnd allen || Liebhabern dieser edlen kunst zu dienstlichem gefallen ausz- || gemelter Niderlandischen Sprach in Hochteutsch vertiert || Durch || Sebastianum Curtium Arithmeticum, Burgern || vnd verordneten Visitatorn der Teutschen || Schulen zu Nurnberg. || Getruckt zu Ambsterdam bey Wilhelm Jansz. auff || dem Wasser in dem vergulten Sonnenweyser. 4°.

Verso van den titel wit. Dan opdracht „Den ... Herrn Meistern vnd Rath des || Heiligen Reichs freyen statt || Strassburg || ... Herrn Burgermaistern || vnd Rath des Hеyligen Reichsstatt Ulm." Gedateerd „den 20 Februarii/ Anno 1616. || ... Sebastianus Cvrtius Arithmeticus, || Burger vnd verordneter

Visitator der Teutschen schulen daselbsten. || 2 + $\sqrt{}$ 3." (6 blz.). Dan „Prefation" (6 blz.).

Het werk blz. 1—121 en 3 blz. ongepagineerd.

Ook van het boek in Noot 6 vindt men eene hoogduitsche vertaling.

6*h*) Tractatus Geometricus. Darinnen Hundert schöne... Quaestiones. Durch Sebastianum Curtium. Ambsterdam. Wilhelm Jansz. 1617. (32), 127 blz. 4°.

7) GIETERMAKER. Vermaeck der Stuyrluyden.

8) GIETERMAKER. Vergulde Lichts Vermeerderingh.

Beide werken heb ik nimmer gezien.

9)* Korte en klare || INSTRUCTIE || VAN || REGULARE en IRREGULARE || FORTIFICATIE, || *met hare* || BUYTEN-WERCKEN, || te gebruycken || *DEFENSIVE* en *OFFENSIVE.* || Een Compagnie, een Regiment, een || Leger te Voet en te Peert te logeren, en || in verscheyde soorte van Bataillons te stellen. || *Tot dienst van alle jonge Ingenieurs en militaire Officieren.* || Met een korte weder-legginge der sustenu van de Heer || *Henrick Ruse,* over de hedendaagsche *Fortificatie.* || Bij-gevoegt || 50 *Lustige QUESTIEN,* || *met hare SOLUTIEN.* || Door GERARD MELDER. || Tot AMSTERDAM, || By JOHANNES van WAESBERGE, || ANNO. 1664. 8°.

Voor dezen titel staat een gegraveerde. Tusschen allerlei attributen van den oorlog met de woorden: *Arte, Marte* staat op een schild: GERARD MELDER || van de || FORTIIFICATIE || en || BATAILLONS &c. || t'UTRECHT, || *by* Jan van Waesberge. || A°. 1658. 11 platen.

In verso van den titel twee bijbelteksten: PROVERB. 21 : 30 en LUC. 3 : 14. Dan opdracht aan „*de Regerende en Oudt-Borgemeesteren*" gedateerd „Actum Utrecht, den 6den May Anno 1658" (4 blz.); waaruit, even als uit den gegraveerden titel, zoude volgen, dat er reeds een druk van 1658 te Utrecht bestond; en dit is ook noodig voor het aanhalen van dit werk in 1663. Dan „Tot den Leser" (2 blz.) geteekend „*Sonder Voor-oordeel*". Dan HEXAMETRUM door zijn broeder CHRISTIANUS MELDER (1 blz.).

A—N. 208 blz.

Blz. 1—36. Eerste Deel. *Oude manieren van Fortificeren.*

Blz. 37—65. Tweede Deel. *Irregulare Fortificatie, met haer Buyten-wercken.*

Blz. 66—144. Derde Deel. *Offensiven en Defensiven Oorlogh.*

Blz. 145—208. VYFTIGH || LUSTIGE || QUESTIEN || met haere || SOLUTIEN.

Daarachter komt voor

9*a*)* APPENDIX || *Aen de Instructie vande* || Fortificatie en Bataillons, || *met een korte wederlegginge der Sustenu van* || H. RUSE. || Over de Hedendaegsche || FORTIFICATIE. || *Uyt-gegeven door* || G. MELDER. || Waer in alleenlyck gerefuteert wort RUSII aenwy-||singe der misverstanden van G. MELDER. || *Door den selven* || G. MELDER, Fortificatie en Bataillon Meester || der Stadt UTRECHT. || *Ten profiite en grondige kennisse der oprechte Lief-hebbers* || *deser Konst wederleyt.* || Vignette: Minerva onder een boom. || Tot AMSTERDAM, || *By* JAN *van* WAESBERGE. *Anno* 1664. || 8°.

Verso van den titel is wit. Dan „*Tot den* || LESER" (blz. 3—7) gedateerd „Actum Utrecht den 14. Augusti 1658. || Citissimé."

Blz. 8—40 het werk. REGISTER (4 blz.) 2 platen.

10) *Practyck der Stierluyden* bestaende || in de *Kromstreecks-reeckening*, ende eenighe *Astronomische* || *Werckstucken*, aengaende de *Groote Zeevaert.* || Beschreven door ADRIAEN JACOBSZ. KOPS, in syn leven residerende tot Delfshaven. || TOT ROTTERDAM. || Gedruckt by *Bastiaen Wagens*, Boeckverkooper op || 't Steyger in Josephus. Anno 1659. 4°.

A—D. Blz. 1—31.

Dit werk komt voor in

10a) Practijck Vande Groote Zee-Vaert ... Rotterdam ... 1659. 4°. Zie Noot 16 van Bouwstoffen N°. I.

11) JOHANNES VAN LOON. Klaer-Lichtende Noort-star ofte Zee-atlas. Amsterdam. 1661. folio. 39 kaarten.

12) SYBRANDT HANSZ. CARDINAEL. Over het Wyn-roeien.

13) WILLEM RAETS. Practycque der Wynroede.

Waarvan herdruk

13a) Door MICHIEL COIGNET, te Antwerpen.

Geene van deze drie werken is mij onder de oogen gekomen:.

14)* Meet- en Pegel-Const. || Om het in-houd || van allerhande ronde Vaten || perfectelyck te meten ende te pe- || gelen / op driederhande manieren. || *Geneuchlyck en profijtlijck voor yder een.* || Met noch een vergelyckinge der || natter Maten op verscheyden Plaetsen ghe- || bruycklyck, tegen 10 Friesche halve Kannen. || *Gestelt door* R. de la Rose, *Mathem.* || Vignette: een ton met roeilijnen (zie blz. 27). || *Gedruckt tot Leeuwarden,* || By CLAVDE FONTEYNE, Boeckdruc- || ker Ordinaris der Heeren Staten van Frieslandt. 1639. 8°.

Verso van den titel is wit. Dan VOOR-REDE (4 blz.).

A—E. Blz. 7—80.

Blz. 7—35. Eerste Capitel.

Blz. 36—76. Tweede Capitel.

Blz. 76—79. By-voeghsel. blz. 80. *TOE-MAET* in vers.

15)* TAFELEN, || VANDE || WANNE-MATE, || WAER DOOR || Met weynigh moeyte, ghevonden kan werden || de *Reste* en *Wannigheydt* van alle || Kantighe Vaten. || *Door* || Cornelis Fr. Eversdyck, Reken-meester 'sLandts || ende Graeffelyckheydts van Zeelandt. || Vignette: een wiskundige school. || Tot Middelburgh, || Ghedruckt, by Jaques Fierens, Boeckverkooper, woonende || inde Gist-straet, inde Globe. Anno MDCLV. 4°.

Verso van den titel is wit. Dan „Tot den Leser" (blz. 3—5).

A—D. Blz. 6—28. Verklaringhe vande Orde en Natuere en Gebruyck der twee soorten van Tafelen.

In den bundel, in mijn bezit, gaat hiervoor

15*a*)* Pacht-Tafelen. || Waer door alle On-ervarene || inde Reken-konste seer veerdigh en ghereedt/ || konnen calculeren de Pacht, Huere, Onkost, en Koop van || Lande; ten advenante vau alle voor-ghestelde Prijs, || 't Gemet, de Morgen, ofte Bunder, || Midtsgaders || Eene grondighe Instructie, om oock door de voorsz. || Pacht-tafelen te vinden eeu yeders competentie/ in alle Verhueringen || van Tienden, Molens, Dyck-ettingen, Visscheryen, &c. Item in alle || Besterffenissen, Handelingen van Compagnie of Geselschap/ als || oock mede in 't Bedijcken van nieuwe Dijckagien, &c. || naer advenant datmen uyte Ponde is treckende. || Voorders || om te berekenen de weerde van alle Goude en Zilvere Specien van || Gelde. Item van alle soorten van Coopmanschappen, die by || de Stucke, Elle, Ponde, Mate &c. verkocht worden. || Hier achter syn noch byghevoeght de Proportien van ver- || scheyden Landt-maten. || Midtsgaders eenighe speculative Mathematische Questien. || Alles door C. F. E. || Vignette: een griffiioen bestuurd door een man en getrokken door twee duiven. || Tot Middelburgh, || Gedruckt by *Anthony de Later*, Ordinaris Stadts || Drucker/ woonende op de Groote Markt. Anno. 1649. 4°,

NB. Alles wat geen duitschen letter is, werd rood afgedrukt.

Verso van den titel is wit.

a, e, i, o. 30 blz. ongepagineerd. Van 't vermogen, Forme ende Ordre in 't Gebruycke der Tafelen. In het *„kort begryp van 't vermogen deser Pacht-tafelen"* spreekt Schr. over de onderscheidene toepassingen, waaruit volgt, dat zij eigenlijk als Produkten-tafels kunnen dienen.

A—Zz. 413 blz. ongepagineerd, de Tafelen zelve.

Aaa—Bbb. 19 blz. ongepagineerd, bevatten iets over „verscheyden Landt-Maten" en dan [40] Arithmetische *en* Geometrische || *Questien, voorgestelt tot oeffeninge van aen-komende Lief-hebbers* || *der* Mathematische *Konsten.*"

Daarop volgt:

15*b*)* Tafelen || *Van* || Interest. || *Waer door* || Seer licht gerekent kan werden de ge- || reede weerde van alle uytstaende penninghen. || *Als oock mede* || Wat yemant voor eene uyt-geleende somme gelts, t'eynden || zekeren besproken tijt, voor Capitael en Wins-gewin ontfangen || moet. Niet alleen van volle Termijnen of geheele jaren, maer oock || op alle voorgestelde Tijt en deelen des jaers, tot eenen dach toe: || veel zekerder en preçyser als tot noch toe is geschiet. || Gecalculeert tegen 48 derley Interesten. || *Waer by gevoeght zijn verscheyden noodighe en speculative Questien, tot verklaringhe* || *van 't gebruyck der selver Tafelen.* || Nu nieuwelicx vermeerdert met een APPENDIX, houdende noch 9 derley || leege Interesten beneden de 4 ten 100; sijnde t'samen 57 derley || bysondere Interesten. || Mitgaders noch eene nieuwe Methode, om den Regel der valsche positien, || veel corter te solveren als voor desen. || DOOR || CORNELIS FR. EVERSDYCK, Reken-Meester, || 's Landts ende Graeffelyckheyts van Zeelant. || Vignette: Meetkundige figuur, behoorende bij de XLIV Questie. || *TOT MIDDELBVRGH* || By *Iaques Fierens,* Boeck-verkooper. ANNO. MDCLXIII. 4°.

Verso van den titel is wit. Dan „Tot den Const-lievenden Leser" geteekend, „In Middelb. desen 20 *Meye* 1652." (9 blz.) „*Korte verklaringe*" (3 blz.). Dan de Tafels.

B—N. (98 blz.). Daarop „*'t gebruyck der Tafelen van Interest*", L QUESTIEN.

N—S. (80 blz.).

Verder.

15c)* APPENDIX || OF || *Aen-hangh, der* Interest-Tafelen *vanden* || *Reken-meester* Corn: Fr: Eversdijck, || *Anno* 1652 *gedruckt.* || Alsoo mits de meerder ruimte en overvloet van Gelt, || boven voorgaende Eeuwe, de Interesten jegenwoordich tot || minder prijs werden gerekent als wel voor desen, en mis- || schien by vervolgh van tijt noch meer souden connen ver- || minderen; hebben goet-gevonden de voor-gaende Tafelen || vanden jare 1652, by forme van APPENDIX met eenige || noodige Interesten te amplieren en vermeerderen; te weten || met de Tafelen van 2 en 3 ten honderde, en met die || vanden Penninck 30 in 't jaer; soo wel op winninge || als verlies, Mitsgaders noch de Tafelen vande || gebroken Interesten, te weten, tegen || $2\frac{1}{4}$, $2\frac{1}{2}$, $2\frac{3}{4}$, $3\frac{1}{4}$, $3\frac{1}{2}$ en $3\frac{3}{4}$ ten honderde || in 't jaer, op verlies. || Waer mede de voorsz. Tafelen in 't geheele, sullen || behelsen 57 derley bysondere Interesten. || Zijnde alle dese by-gevoegde, door den selven Autheur, gecalculeert, || met soo groote sorgvuldigheit en toeversicht, als voor desen, met de || voorgaende is geschiet; waer op de gebruyckers hun mogen verlaten. || Vignette: Boekdrukkers-ornement. || *Tot Middelburgh.* || By JAQUES FIERENS, Boeck-verkooper; Anno 1663. 4°.

In verso van den titel beginnen de Tafels (12 blz.); en daarop

Nieuwe Methode van positie, waer || door den Regel Falsy, veel korter || gesolveert can werden, als wel voor || desen (3 blz.).

Nu komt het boek van Noot 15). Dan

15d)* PASTE-BOECK || *VANDEN* || BROODE, || *WAER DOOR* || Seer licht te vinden is, 't gewicht op alderley prijs, || of de prijs op alderley gewicht van BROOT; door twee by- || sondere Tafelen; gedresseert na 't gewicht en mate van alle || Steden en plaetsen, hoedaenigh die wesen moghen. || *MIDTSGADERS* || Noch eene derde Tafel, waer door terstont, sonder || eenighen Calculatie, gevonden wert de prijs van 1 ℔ ghe- || backen BROOT; berekent na 't gewicht en Coren-mate || der Stede *Goes*, of alle soodanige andere plaetsen, daer een || Sack Terwen-meel, vande Mole komende weegt, niet || minder als 130, of meer als 144 ℔. || *Seer dienstigh en nut,* || *Voor alle Magistraten en Regenten, om goede Ordres te stellen op 't* || *Backen en verkoopen van 't Broot.* || *UYT-GEGEVEN* || Door Ordre en last vande Ed. Achtbare Heeren Burgemeesters en || Schepenen der Stede *Goes* voornoemt. || *Gecalculeert door CORN: FR: EVERSDYCK.* || Vignette: wapen van Goes. || Tot MIDDELBURG. || Gedrnckt by *Jaques Fierens*, Boeckverkooper; ANNO 1663. 4°.

Verso van den titel is wit. Dan „Tot den goed-willigen Leser" (blz. 3—21).

„*Proeve op-de Paste vanden Broode, gedaen* || *binnen der Stede GOES, in Zeelant inde* || *maent Febr. den Jaers* 1622" (blz. 22—26). Dan TAFELEN (blz. 27—98) „*Exempels*" I—X, enz. (blz. 99—108).

Aan het eind staat

Gedruckt door Aldert van Schuylenburgh, *ter Druckerye van* || Jaques Fierens, Anno 1663, met Privilegie.

15e) Ook gaf hij reeds vroeger uit

CORN. FR. EVERSDYCK Tractaat vande Wijn-roede. Middelburg. *Symon Moulert.* S. 1643. 4°.

16)* NATUERLYCKE || ASTROLOGY, || *DAT IS* || **De verthooninge/ van de Aert/ Natuer/ || ende kracht der Planeten/ Aspecten met haer || werckinge in 's Menschen Lichaem.** || Door THEODORUM HOEN, || Landt-meeter Ingenieur en Astronomus || in Leeuwarden. || Vignette: eene astrologische figuur. || *Tot Leeuwarden.* || **By** GYSBERT SYBES **Boeck-Drucker/ woo- || nende inde Klock-straet.** Anno. 1659. 8°.

Verso van den titel wit. Dan **Toe-eygeninge** *Aen* ... de STATEN van FRIESLANDT enz. (4 blz.). Daaronder een vignet, eene vrouw waarboven VIRGO FRIESIA, en waaronder „LIBROS NON LIBEROS PARIENS." Dan „VOOR-REDEN || *AEN DEN* || BEMINDEN LESER" (10 blz.). INHOUDT (4 blz.). Dan

B—H. Blz. 1—108. Eerste Deel.

I—M. Blz. 109—167. Tweede Deel.

M—P. Blz. 168—220. APPENDIX || OFTE || By-voeghsel. 28 Exempels (Questien) met hare soluties.

17) C. M. ANHALTIN. Konstryck Handboekjen.

Dit heb ik nimmer gezien.

18)* Een gegraveerde titel. Aan de zijden twee vrouwen, LABORE en INDUSTRIA, boven Mars, onder wapentuig en werktuigen. Op een schild in het midden staat: L'AR- || CHITECTVRE || MILITAIRE || ou || LA FORTIFICATION || NOVVELLE. || *Augmentée et enrichie de forte-* || *resses regulieres, Irregulieres,* || *et de dehors, le tout a la* || *practique moderne.* || Par || ADAM FRITACH || *Mathematicien.* ||

Daaronder eene kaart van verschansingen en vesting, met de woorden „*Jouxte la Coppie imprimée à Leide.*" Geheel onder aan

A PARIS. || *Chez* GVILLAVME DE LVYNE, *au Palais.* 1657. folio.

Verso van den titel is wit. Opdracht aan „MONSIEUR || DE MONCEAUX" door „TOUSSAINCT QVINET" (2 blz.). Dan een gedicht van DANIEL HEINSIVS (1 blz.). Dan TABLE DES CHAPITRES (3 blz.).

A—I. Blz. 1—68. PREMIER LIVRE. Planches A—M.

18a)* SECOND LIVRE || DE || L'ARCHITECTVRE || MILITAIRE, || OV DE LA || FORTIFICATION || NOVVELLE. || ENRICHIE DES FORTERESSES IRREGVLIERES, || & Ouurages exterieurs. || *Où il est enseigné le moyen & la vraye methode de fortifier tous lieux* || *Irreguliers, en quelque lieu qu'ils soient assis & situez, & comment* || *il les faut rendre forts par ouurages exterieurs, comme sont, Raue-* || *lins, Demy-lunes, Ouurages à cornes, Ouurages couronnez, Te-* || *nailles: Comment les Trauerses se font; & comment il faut asseoir* || *les Citadelles aux Villes.* || Vignette: het wapen van Louis XIII. || A PARIS, || M . DC . XXXIX . folio.

I—O. Blz. 71—112. SECOND LIVRE. Planches N—X.

18b)* TROISIESME LIVRE || DE || L'ARCHITECTVRE || MILITAIRE, || OV DE LA || FORTIFICATION || NOVVELLE. || ENRICHIE DE LA PRACTIQVE OFFENSIVE, || Et deffensiue. || *Traittant de la maniere de marcher en campagne, de la mesure du* || *Camp, des Sieges, Retranchemens, Forts de campagne à demy* || *boulevarts, Redoutes, Estoilles, Batteries, Approches, Galleries,* || *Mines, Ponts fäits de joncs, Pallissades, Gabions, Fortifications* || *interieures, & Moulins à eau.* || Vignette: hetzelfde wapen als in noot 18a). || A PARIS, || M . DC . XXXIX . folio.

P—Z. Blz. 115—179. TROISIESME LIVRE. Planches Z—Mm.

19) Gegraveerde titel, boven de „VICTORIA", links de vestingbouwkunst als vrouw en rechts Mars, waaronder „ARTE ET MARTE". Zij houden een schild, waarboven de „VICTORIA", en waarop

ARCHITECTVRA || MILITARIS, || Oder || Gründtliche Underweisung der || heuttiges tages so wohl in Nieder- || landt als andern örttern gebräuch- || lichen Fortification oder Vestungsbau. || Auss den besten Authoribus zusammen || getragen und in ein volkommen || werck gebracht || Durch || ANDREAM CELLARIUM || Der Mathematischen Kunst || Liebhabern. || Vignette: eene sphaera armillaria met de woorden: SEMPER IN MOTV. || AMSTELODAMI. || Apud Iodocum Janssonium. || Anno

1645. || Het benedeneinde gaat over de geheele breedte: in het midden eene kaart van eene vesting en verschansingen; rechts eenige wapens, links werktuigen. || *J. van Meurs Sculptor.* folio.

Verso van den titel is wit. Opdracht aan „Fräwlein CHRISTINA" (2 blz.) en aan vijf Zweedsche Edelen (2 blz.)

Generale Beschreibung der Fortification/ vnd Einleitung zu diesem Werck, blz. 1—6.

A—X. Blz. 7—162. Das erste Buch.

X—Ee. Blz. 163—224. Das zweite Buch.

Ff—Pp. Blz. 225—298. Das dritte Buch.

Pp—Yy. Blz. 299—364. Das vierdte Buch.

Platen A—XXXX, Tafels I—XIII.

Men vindt hiervan een herdruk.

19a) Ib. 1656. VI, 364 blz., 98 pl., 13 Tafels. folio.

20)* JOH. FAULHABER Geometria et Mechanica. Een ten deele gegraveerde titel, waarboven Wahre Contrafactur || Desz Ehrnvesten/ Hochachtbaren vnd Kunstreichen || Herrn Johan Faulhabers/ weitberühmbten Ingenieurs zu || Vlm omnigenae Matheseos peritissimi.

En waaronder volgt:

In desz Münsteri Cosmography welche Anno 1574, zu Basel ge- || truckt/ im 450. Cap. am 1036. blat. Item folio 1045. vnd 1053 werden die || Faulhaber angezogen dasz sie mehr als vor 400. Jahren sich in Turnieren || Ritterlich gehalten.

En daaronder een gedicht van 20 regels.

Daartusschen een vierkant, waarin een fraai ovaal portret „*Sebastian Furck. sculpsit E. Kieser exc.*" Langs den rand:

EFFIGIES IOANNIS FAULHABERI CIVIS ULMENSIS (DEUS ADJUTOR MEUS) ARCHITECTI ET MATHEM: INSIGNIS. AET.: 50 Ao. 1630.

In de hoeken staat, boven rechts, *Architectonica Miraculorum,* links *Mysterium,* onder aan links, *Geometria Miraculorum,* en rechts *Mechanica Miraculorum*", telkens met overeenkomstige wiskunstige figuren.

Daaronder het gedicht:

Hic est qui toto cluit Ingeniarius orbe
Faulhaber ingenij fertilitate sui
Hic solum vultus, clarum sed clarius Ulmae
In vallis validis cernitur ingenium.

Geene tekst, maar platen A—Ff. 212 figuren.

21)* JOHAN HUDDE schreef in Fr. van Schooten, Geometria Descartes. 1659.

p. 401—502. Epistola I. De reductione aeqnationum, dd. Amstelod. 1657.

p. 503—516. Epistola. II. De maximis et minimis, dd. Amstelod. 1658.

22)* PHIL. LANSBERGEN. Tabulae Motuum Coelestium. Zie Bouwstoffen. III. Noot 25.

23)* FRIESCHE || STERRE-KONST || *Ofte* || Een korte/ doch volmaeckte || ASTRONOMIA, || met de Nuttigheden van dien. || Eerste Boeck. || *Vyt eygene Speculatien uytgewerckt,* || DOOR || JOH. PHOCYLIDES HOLWARDA, || Medicus, Mathematicus en Philosophiae Professor tot Franeker. || Vignette: Eene sphaera armillaria. || Tot HARLINGEN, || Gedruckt by JAN HESSELS, Geoctroy- || eerde Boeck-Drucker der selver Stede. 1652. 8°.

In verso van titel begint de opdracht „Aen ... EXCELLENTIE || WILHELM || FREDERICH, || GRAVE || TOT NASSOU ... Governuer || VAN FRIESLANT ... ALS MEDE || *De Edele Hoogh-Mogende Heeren Gedepu-* || *teerde Staten van Frieslandl.* [10]||... „TEN LAESTEN. || *De Achtbare Voorsienighe Heeren Reecken-* || *Meesters van Frieslandt* (5) —" geteekend „U.U. EE. || *onderdanichste Dienaer,* || NICOLAUS AB AMAMA. S. F." (13 blz.). Dan „LOFF-DICHT" van H. L. (2 blz.). Dan fraai gegraveerd portret van *C. de Pas, Jan Alb. excud,* met het randschrift „JOHANNES PHOCYLIDES HOLWARDA, MEDICUS, MATHEMATICUS AC PHILOSOPHIAE PROFESSOR NATUS. A°. C cIɔIɔcxVIII. DIE XIX Febr." waaronder een zesregelig vers van *H. Lamminga.* Dan Tafel der Zeilstreken.

A—O. Blz. 1—224. Eerste Boeck. Dan titel.

Tweede Boeck/ || Der || FRIESCHER || STERRE-KONST. || Vervatende/ || De Ware Loop van yder Sterre || in 't besonder; met verscheyden nut- || tigheden daer uyt spruyttende. || Vignette: dezelfde sphaera als boven. || Tot HARLINGEN. || Gedruckt by JAN HESSELS, Boeckdruc- || ker woonende aen de Voor-straet. 1651.

[Uit dezen datum, even als uit de opdracht van het eerste boek, blijkt dat het tweede boek het eerst gedrukt is].

P—Z. Blz. 225—366. Tweede Boeck.

Aa—Pp. Blz. 1—228. 't Tweede Deel des tweeden Boecks. Begrypende Alle de Tafelen.

Qq—Zz. Blz. 229—360. 't Derde Deel des tweeden Boeks. Begrypende Verscheyden Rare Tafelen.

REGISTER 7 blz. ongepagineerd. Op de achtste:

Tot HARLINGEN || By JAN HESSELS, woonende aen || de breede Plaets in de Stuyr Man.

24)* D. REMBRANDS VAN NIEROP. Astronomia. Zie Bouwstoffen XXI Noot 49.

25) Gegraveerde titel. Boven aan zit Hipparchus, tusschen de Zon in den Leeuw, en de Maan in de Kreeft, links Ptolemeus en daaronder Nic. Copernicus; rechts R. Alfonsus en daaronder Tycho Brahe. Tus-

schen deze personen een zerk, op den rand „*Consiliorum* || *naturae* || *participes*" Op de zerk zelf staat:

TABVLAE || FRISICAE || Lunae-Solares || quadruplices; || *è fontibus* || Cl. Ptolemaei, || Regis Alfonsi || Nic. Copernici, & || Tychonis Brahe, || *recens constructae* || Operâ et studio NICOLAI || MVLERI Doct. Medici et || Gymnasiarchae Leowardiani. || *Quibus accessere Solis tabulae totidem; hypo-* || *theses Tychonis illustratae: Kalendarium Rom.* || *vetus cum methodo Paschali emendatâ.*" || ALCMARIAE. || Excudebat Iacobus Meesterus || Typographus ordinarius. || *Veneunt Amstelrodami* || *apud Wilhelmum Janszonium, año* 1611. || *Cum privilegio ad decennium.* 4°.

Verso van titel is wit. Dan A—nnn, blz. 3—464.

Blz. 3—7 opdracht D. WILHELMO LUDOWICO... GUBERNATORI;... IX-VIRIS Ordinum Frisiae delegati;... INCLYTAE VRBIS LEOWARDIAE Consulibus Senatoribusque", geteekend „Leowardiae, anno aerae Christianae mil- || lesimo sexcentesimo undecimo: quarto Kal. Septem- || bris. *qui dies Divo Joanni Baptistae sacer, annum ape-* || *rit Christianis in Aegypto & Abissinis.*

Blz. 8. Het wapen van Friesland met het omschrift „*Armorum Legumque potens* || *ut* FRISIAE *priscum* || *Nomen, ita antiquas Tucor* || *liberima sedes.*

Blz	9— 12.	UBBO EMMIVS || Lectori salutem.
Blz.	13— 15.	*AUTHOR LECTORI* || *Salutem.*
Blz.	16— 24.	DIVI AMBROSII || Epistola 83. Lib. 10.
Blz.	25— 27.	*In praecedentem Epistolam Notae breviores.*
Blz.	28— 34.	CALCVLVS LVNAE || perpetuus, || *Methodo Coperniciana.*
Blz.	35— 36.	DE MERIDIANORVM || *differentia.*
Blz.	37— 42.	Tabulae.
Blz.	43— 46.	INDEX || IN TABVLAS FRISICAS.
Blz.	47.	*Veterum Superstitio in Lunae defectu.*
Blz.	48.	*Nota Lector.*
Blz.	49—136.	TABVLAE E PTOLEMAEO.
Blz.	137—214.	TABVLAE E COPERNICO.
Blz.	215—248.	TABVLAE EX ALFONSO.
Blz.	249—316.	TABVLAE E TYCHONE BRAHE.
Blz.	317—386.	ISAGOGE IN TABVLAS FRISICAS.
Blz.	387—421.	ISAGOGE IN TAB. FRISICAS pars posterior.
Blz.	422—459.	DE ECLIPSIBVS.
Blz.	460—464.	APPENDIX AD TAB. FRISICAS.
26 bladz.		CALENDARIVM ROMANVM VETVS.
Blz.	1— 54.	ISAGOGE IN KALENDARIVM.
Blz.	55— 77.	EXAMEN TEMPORVM.
Blz.	78	*Index Capitum.*
Blz.	79.	Privilegium.

KLAPPER OP ENKELE BIOGRAFISCHE OPGAVEN VOORKOMENDE IN DE BOUWSTOFFEN, ENZ.

N°. XXI en XXIII.

B.	XXI.	§	6.	Christiaen Martinii Anhaltin.
»	XXI.	»	7.	Alexander de Bie.
»	XXIII.	»	1.	Jacob Bosch.
»	XXI.	»	7.	Jacob R. Brasser.
»	XXI.	»	3.	Johannes Buinga.
»	XXI.	»	7.	Sybrand Hansz. Cardinael.
»	XXIII	»	9.	Andreas Cellarius.
»	XXIII.	»	4.	Ludolf van Ceulen.
»	XXIII.	»	4.	Adriaen Jacobus Cops.
»	XXIII.	»	4.	Ezechiel de Decker.
»	XXIII.	»	5.	Cornelis Fransz. Eversdyck.
»	XXIII.	»	9.	Adam Fritach.
»	XXI.	»	5.	Claes Hendriksz. Gietermaker.
»	XXI.	»	4.	Abraham de Graaf.
»	XXIII.	»	7.	Theodorus Hoen.
»	XXIII.	»	10.	Johannes Phocylides Holwarda.
»	XXIII.	»	2.	Daniel van Houcke.
»	XXIII.	»	9.	Johannes Hudde.
»	XXIII.	»	1.	Pieter Karsseboom.
»	XXI.	»	7.	Gerard Kinckhuysen.
»	XXIII.	»	10.	Philippus Lansbergen.
»	XXI.	»	3.	Cornelis Saskersz. van Leeuwen.
»	XXI.	»	8	Johannes van Loon.
»	XXI.	»	8.	Samuel Marolois.
»	XXIII.	»	3.	Gerard Melder.
»	XXIII.	»	5.	Adriaen Metius.

B.	XXIII.	§	10.	Nicolaus Mulerius.
»	XXI.	»	8.	Cornelis van Nienrode.
»	XXIII.	»	5.	Willem Raets.
»	XXI.	»	9.	Dirck Rembrandtsz. van Nierop.
»	XXIII.	»	5.	R. de la Rose.
»	XXIII.	»	1.	Hendrik Ruse.
»	XXI.	»	7.	Franciscus van Schooten.
»	XXI.	»	7.	Franciscus van Schooten, de Zoon.
»	XXI.	»	8.	Jan Olfersz. Schooten.
»	XXIII.	»	2.	Jacob van der Schuere.
»	XXI.	»	7.	Johan Jansz. Stampioen.
»	XXI.	»	8.	Simon Stevin.
»	XXI.	»	7.	Abel W. Wassenaer.
»	XXIII.	»	2.	Pieter Wils.

OVER HET VOORKOMEN VAN GESTEENTEN

DER

KRIJTFORMATIE IN DE RESIDENTIE WESTER-AFDEELING VAN BORNEO.

DOOR

R. D. M. VERBEEK.

Mijningenieur in Nederlandsch Oost-Indië.

Kort geleden ontving ik van den mijningenieur C. J. VAN SCHELLE te Singkawang, die sedert eenige jaren belast is met een geologisch onderzoek ter Westkust van Borneo, een kistje met versteeningen, door hem verzameld op twee plaatsen, het dorp Noa en de rivier Toengoe bij Kroab, aan de rivier Melawi, en op ééne plaats, het dorp Sajor, aan de rivier Seberoeang. Beide rivieren zijn linkerzijtakken van den grooten Kapoeas-stroom, die bij Pontianak in zee valt. De Melawi mondt bij Sintang, de veel kleinere Seberoeang tusschen Sintang en Salimbouw in de Kapoeas.

De versteeningen van de Melawi-rivier waren weinig talrijk en niet al te best bewaard. Onder de fossielen van Noa werden door Dr. BÖTTGER te Frankfurt am Main gevonden: Cyrena-(Batissa) Corbicula- en Melania-soorten. Ofschoon de bepaling eenigszins onzeker blijft, komt het hem waarschijnlijk voor, dat de lagen van Noa tot de étage α Eoceen der Zuid- en Ooster Afdeeling van Borneo behooren, de eenige étage, waaruit tot nog toe van Borneo zoet- of brakwater-lagen bekend zijn.

Nog minder zeker moest de bepaling blijven van den ouderdom der lagen bij Kroab. *Wellicht* behooren deze tot de étage β Eoceen, maar zeker was dit niet uit te maken.

De versteeningen van Sajor aan het riviertje Seberoeang komen voor in een tamelijk zachten, groenachtig grijzen, zanderigen mergel, die zeer talrijke patellina's bevat. Bovendien komen daar nog donkere, bijna zwarte, hardere kalksteenen voor; of deze eene afzonderlijke étage vormen, dan wel als meer kalkhoudende lagen tusschen de mergels voorkomen, is mij niet bekend.

De mijningenieur Everwijn, die in de jaren 1853—1857 verscheidene reizen door West-Borneo deed, noemt reeds het riviertje Seberoeang in zijn verslag: »*Wester Afdeeling van Borneo*", Nat. Tijdschr. voor Nederl. Indië. Deel XVII, blz. 285 e. v. Een »*overzicht*" van zijne onderzoekingen gaf hij ook in het Jaarb. van het Mijnwezen, 1879. Deel I, blz. 3—116. Bij beide verslagen is dezelfde kaart gevoegd, waarop het riviertje Seberoeang is aangegeven. Op blz. 25 van het genoemde »overzicht" noemt hij groenachtig grauwe kleizandsteenlagen en ook een grauwen mergelkalksteen, welke veel nummulieten bevat, die optreden aan de oevers van de Seberoeang.

In 1878 verscheen in de Palaeontographica eene beschrijving van de fossiele echiniden, koralen, crustaceeën en foraminiferen, uit de eoceene formatie van Zuid-Oostelijk Borneo, door Prof. K. von Fritsch, welke verhandeling overgenomen werd in het Jaarb. van het Mijnwezen, 1879. Deel I, blz. 127—258. Behalve eenige orbitoïden van Zuid-Oost Borneo, worden op blz. 246—249 van laatstgenoemd tijdschrift ook twee patellina-soorten van de rivier Seberoeang in West-Borneo beschreven. Deze versteeningen komen voor in een donkergrauwen zeer onzuiveren kalksteen, en werden in 1872 door Dr. Schneider verzameld. Prof. v. Fritsch ontving ze door tusschenkomst van Prof. F. Roemer uit het Breslauer museum. Op blz. 246 bemerkt hij ten opzichte dezer merkwaardige versteeningen: »Of het gesteente (waarin de patellinen voorkomen) werkelijk tertiair en wel eoceen is, is onzeker, daar de patellinen meer in cretaceïsche, dan in jongere gesteenten optreden", enz.

Daar nu de mijningenieur van Schelle onder de foraminiferen der Seberoeang-lagen geen enkelen nummuliet, maar wel zeer talrijke patellinen aantrof, zoo berust de oudere opgave van nummulieten in de Seberoeang-mergels wel waarschijnlijk op eene verwisseling van de patellina's met nummulieten.

Sedert bovenvermelde uitspraak van v. Fritsch was ook de eoceene ouderdom dezer lagen twijfelachtig geworden en werden ze met een wantrouwend oog beschouwd, ofschoon men op grond van de patellina's alleen, het zeker niet wagen kon, ze tot eene oudere formatie te rekenen, daar tot nog toe mesozoïsche gesteenten op de eilanden van onzen archipel nergens waren ontdekt.

Het onderzoek van de nu door v. Schelle gevonden versteeningen heeft echter bewezen, dat de patellina-mergels van de Seberoeang werkelijk ouder dan tertiair zijn, en waarschijnlijk tot de bovenste krijtperiode behooren.

Reeds Dr. Böttger, die de versteeningen vluchtig onderzocht, vond daaronder soorten van de geslachten Goniomya, Trigonia (uit de uitsluitend cretaceïsche groep der Scabrae), Vola, geheel van het karakter der Vola quadricostata Bronn; hij hield daarom de formatie voor senonisch. Daarna werden de Sajor-petrefacten aangeboden aan Prof. H. B. Geinitz te Dresden. Deze geleerde, die door zijne bekende onderzoekingen der Saksische krijtformatie als eene autoriteit op het gebied van cretaceïsche versteeningen moet beschouwd worden, had de bijzondere goedheid de Sajor-versteeningen aan een voorloopig onderzoek te onderwerpen, en mij het resultaat van dat onderzoek te schrijven, waarvan ik het voornaamste hieronder laat volgen.

Onder de versteeningen zijn de volgende voor de ouderdomsbepaling het belangrijkst:

Vola cf. quadricostata Bronn.
Modiola cf. capitata Zittel.
Lyonsia cf. Germari Gein.
Trigonia cf. limbata d'Orb.
Panopaea cf. Gurgitis Bgt.
Panopaea cf. mandibula Sow.
Pholadomya (*Goniomya*) cf. designata Goldf.
Natica cf. Gentii Sow.
Natica cf. lamellosa Röm.

Avellana 2 spec.
Hemiaster cf. sublacunosus GEIN.
Hemiaster cf. Regulusanus D'ORB. *)

De versteeningen, waarmede deze Sajor-petrefacten vergeleken worden, zijn alle karakteristiek voor de *onder-senonische formatie* (Gosauschichten, Quadratenkreide, etc.). Alleen ontbreken nog sommige inoceramen. Of er onder deze versteeningen enkele zijn, die werkelijk overeenstemmen met de genoemde, of met andere krijtpetrefacten uit Europa, moet een nader gedetailleerd onderzoek leeren. Intusschen wijst het voorkomen van zoo talrijke geslachten, die of uitsluitend cretaceïsch zijn, of verreweg hun meeste soorten in de krijt- (en jura-) formatie bezitten, zoo duidelijk op een hoogeren ouderdom dan tertiair, dat men de Sajorformatie (zooals ik de patellina-mergels wil noemen), wel met recht tot de senonische (bovenste krijt-) formatie mag stellen.

Behalve de genoemde, werden nog soorten van de volgende geslachten aangetroffen:

Ostrea, 1 spec.
Spondylus, 1 spec
Pecten, 1 spec.
Lima (*Radula*), 1 spec.
Avicula, of *Gervillia*, 1 spec.
Arca, 2 spec.
Trigonia, 1 spec.
Tapes (*Baroda*), 1 spec.
Cyprina, 1 spec.
Cardium, 1 spec.
Astarte, 1 spec.
Venus, 1 spec.
Goniomya, 2 spec.
Natica, 3 spec.
Patellina 1 spec.

---

*) Volgens latere schriftelijke mededeeling van Prof. GEINITZ, ook te vergelijken met Hemiaster plebejus Novak (A. FRIČ, Studien d. böhm. Kreideform. III. Iserschichten Prag. 1883. pag. 131. Fig. 120.

benevens nog eenige onbepaalde en gedeeltelijk ook onbepaalbare soorten (meestal gebroken exemplaren).

De Sajor-lagen zijn de *eerste* gesteenten, niet alleen van de krijtformatie, maar zelfs van de geheele mesozoïsche groep, die op de eilanden van onzen Indischen Archipel zijn aangetroffen. Deze ontdekking brengt nu natuurlijk verscheidene wijzigingen in onze meeningen over de Indische geologie mede. Wel waarschijnlijk komen de patellinamergels niet alleen aan het riviertje Seberoeang voor, maar behoort een gedeelte van de tusschen Sintang en Salimbouw optredende heuvels, die op de kaart van den heer EVERWIJN als tertiair zijn aangegeven, tot de senonische formatie. Hoe ver de formatie zich uitstrekt, is nog geheel onbekend.

Ook de in verschillende mijner vroegere geschriften te vinden verklaring, dat gesteenten van mesozoïschen ouderdom op de eilanden van onzen Indischen Archipel ontbreken, is nu niet juist meer. Evenzoo kan men nu niet langer aannemen, dat de *geheele* Indische Archipel van de kolenkalkperiode tot aan het begin van den eoceenen tijd boven water geweest is. Voor sommige gedeelten van Borneo moet ten minste de onderdompeling reeds in de laatste afdeeling der krijtformatie geschied zijn.

Amsterdam, 30 Maart 1883.

DE BEWEGINGSVERGELIJKINGEN

VAN HET

ELECTROMAGNETISHE VELD, IN VERBAND MET DE THEORIE VAN MAXWELL,

DOOR

C. H. C. GRINWIS.

1. Het is in hooge mate waarschijnlijk, dat de voortplanting der electrische werking, zoowel in eene volmaakt isoleerende, als in eene niet volkomen geleidende middenstof, verklaard moet worden door het optreden van electrische stroomen in de elementen der ruimte, waardoor die voortplanting plaats heeft. Stellen wij voor drie onderling rechthoekige assen x, y, z door u, v, w de composanten van zoodanigen stroom voor, zoodat deze laatste grootheden de hoeveelheden electriciteit aangeven, die in de tijdseenheid door de eenheid van oppervlakte, loodrecht op die assen, gaan.

Duiden wij de composanten der magnetische werking van zulk een gesloten stroom in eenig punt der ruimte door α, β, γ aan, zoo volgt voor het verband tusschen deze magnetische krachten en de ontbondenen der stroomsterkte het bekende stelsel vergelijkingen:

$$\begin{aligned} 4\pi u &= \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} \\ 4\pi v &= \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ 4\pi w &= \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} \end{aligned}$$

α, β, γ zelve worden uitgedrukt door de vergelijkingen,

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{1}{\mu}\left(\frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}\right)\\ \beta &= \frac{1}{\mu}\left(\frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)\\ \gamma &= \frac{1}{\mu}\left(\frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy}\right)\end{aligned}$$

waarin μ het magnetisch inductievermogen en F, G, H de composanten van het electromagnetisch moment voorstellen.

(1) en (2) geven het stelsel vergelijkingen,

$$\begin{aligned}-4\pi\mu u &= \frac{d\left(\frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx}\right)}{dz} - \frac{d\left(\frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy}\right)}{dy}\\ -4\pi\mu v &= \frac{d\left(\frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy}\right)}{dx} - \frac{d\left(\frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}\right)}{dz} \quad \ldots \quad (3)\\ -4\pi\mu w &= \frac{d\left(\frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}\right)}{dy} - \frac{d\left(\frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx}\right)}{dx}\end{aligned}$$

2. Zijn P, Q, R de composanten der electromotorische kracht, K het specifiek induceerend vermogen, C de geleidingscoëfficiënt der middenstof, zoo volgen voor de stroomcomponenten de betrekkingen,

$$\begin{aligned}u &= CP + \frac{1}{4\pi}K\frac{dP}{dt}\\ v &= CQ + \frac{1}{4\pi}K\frac{dQ}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)\\ w &= CR + \frac{1}{4\pi}K\frac{dR}{dt}\end{aligned}$$

De eerste termen van het tweede lid gelden, ingevolge de wet van Ohm voor de electrische stroomen, die in den min of meer geleidende middenstof tot stand komen; de tweede termen van het tweede lid geven de overeenkomstige uitdrukkingen voor de electrische polarisatie, die in die middenstof plaats vindt; zij duiden de zoogenaamde »*displacement currents*" van MAXWELL aan.

De composanten P, Q, R staan, wanneer de middenstof geene zelfstandige beweging heeft en wanneer wij de vrije electriciteit der middenstof, die voor de te bespreken verschijnselen buiten invloed is, weglaten, tot de composanten F, G, H in zeer eenvoudige betrekking.

Wij hebben toch,

$$P = -\frac{dF}{dt}$$

$$Q = -\frac{dG}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

$$R = -\frac{dH}{dt}$$

dien ten gevolge geven de vergelijkingen (4)

$$-4\pi\mu u = \mu K \frac{d^2 F}{dt^2} + 4\pi\mu C \frac{dF}{dt}$$

$$-4\pi\mu v = \mu K \frac{d^2 G}{dt^2} + 4\pi\mu C \frac{dG}{dt} \quad \ldots \quad (6)$$

$$-4\pi\mu w = \mu K \frac{d^2 H}{dt^2} + 4\pi\mu C \frac{dH}{dt}$$

3. De betrekkingen (3) en (6) geven nu voor de bewegingsvergelijkingen van een electromagnetisch veld, dat zoowel polarisatievermogen K, als vatbaarheid voor geleiding van electrische stroomen, d. i. eene geleidbaarheid C bezit, ten gevolge eener electrische verstoring,

$$\begin{aligned}
\mu K\frac{d^2F}{dt^2}+4\pi\mu C\frac{dF}{dt}&=\frac{d\left(\frac{dF}{dz}-\frac{dH}{dx}\right)}{dz}-\frac{d\left(\frac{dG}{dx}-\frac{dF}{dy}\right)}{dy}\\
\mu K\frac{d^2G}{dt^2}+4\pi\mu C\frac{dG}{dt}&=\frac{d\left(\frac{dG}{dx}-\frac{dF}{dy}\right)}{dx}-\frac{d\left(\frac{dH}{dy}-\frac{dG}{dz}\right)}{dz}\quad\ldots(7)\\
\mu K\frac{d^2H}{dt^2}+4\pi\mu C\frac{dH}{dt}&=\frac{d\left(\frac{dH}{dy}-\frac{dG}{dz}\right)}{dy}-\frac{d\left(\frac{dF}{dz}-\frac{dH}{dx}\right)}{dx}
\end{aligned}$$

Stellen wij $\frac{1}{\mu K}=i^2$ en $\frac{4\pi}{K}=r$, zoo volgt,

$$\begin{aligned}
\frac{d^2F}{dt^2}+rC\frac{dF}{dt}&=i^2\left(\frac{d\left(\frac{dF}{dz}-\frac{dH}{dx}\right)}{dz}-\frac{d\left(\frac{dG}{dx}-\frac{dF}{dy}\right)}{dy}\right)\\
\frac{d^2G}{dt^2}+rC\frac{dG}{dt}&=i^2\left(\frac{d\left(\frac{dG}{dx}-\frac{dF}{dy}\right)}{dx}-\frac{d\left(\frac{dH}{dy}-\frac{dG}{dz}\right)}{dz}\right)\ldots(8)\\
\frac{d^2H}{dt^2}+rC\frac{dH}{dt}&=i^2\left(\frac{d\left(\frac{dH}{dy}-\frac{dG}{dz}\right)}{dy}-\frac{d\left(\frac{dF}{dz}-\frac{dH}{dx}\right)}{dx}\right)
\end{aligned}$$

De ontwikkeling der tweede leden geeft, wanneer wij

$$\frac{dF}{dx}+\frac{dG}{dy}+\frac{dH}{dz}=I$$

stellen en Δ^2 de bekende bewerking aanduidt,

$$\begin{aligned}
\frac{d^2F}{dt^2}+rC\frac{dF}{dt}&=i^2\left(\Delta^2F-\frac{dI}{dx}\right)\\
\frac{d^2G}{dt^2}+rC\frac{dG}{dt}&=i^2\left(\Delta^2-G\frac{dI}{dy}\right)\quad\ldots\ldots(9)\\
\frac{d^2H}{dt^2}+rC\frac{dH}{dt}&=i^2\left(\Delta^2H-\frac{dI}{dz}\right)
\end{aligned}$$

dit zijn de bedoelde bewegingsvergelijkingen in den meest eenvoudigen vorm, en wel voor eene onvolkomen polariseerende en geleidende middenstof, waarmede zich MAXWELL bij zijne lichttheorie niet opzettelijk inliet en die wij in dit opstel nader willen onderzoeken.

Differentieeren wij de vergelijkingen (9) respectievelijk ten opzichte van x, y en z, zoo volgt na optelling, dat de veranderingen van I bepaald zijn door de vergelijking

$$\mu K \frac{d^2 I}{d t^2} + 4 \pi \mu C \frac{d I}{d t} = 0$$

of in symbolischen vorm,

$$\mu \left(4 \pi C + K \frac{d}{d t}\right) \frac{d I}{d t} = 0. \qquad (10)$$

Hieruit blijkt, dat voor geval de middenstof volkomen isoleert, en dus $C = 0$ is, $\frac{d^2 I}{d t^2} = 0$, derhalve $I = A + Bt$. Wil men dus de verstoring eener volmaakt isoleerende middenstof onderzoeken, die, zooals straks blijken zal *periodiek* is, zoo kan men den term met I weglaten; met andere woorden, men kan aannemen, dat de composanten F, G, H van het electromagnetisch moment aan de voorwaarde

$$\frac{d F}{d x} + \frac{d G}{d y} + \frac{d H}{d z} = 0$$

voldoen.

De vergelijkingen (9) gaan dan over in,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 F}{d t^2} &= i^2 \Delta^2 F \\ \frac{d^2 G}{d t^2} &= i^2 \Delta^2 G. \qquad (11) \\ \frac{d^2 H}{d t^2} &= i^2 \Delta^2 H \end{aligned}$$

4. Staan wij echter meer bepaaldelijk stil bij de vergelijkingen (8); deze geven voor het geval van volmaakte isolatie, of $C = 0$, na omzetting der termen in het tweede lid, de merkwaardige betrekkingen

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2 F}{d t^2} &= i^2 \left\{ \frac{d\left(\frac{d F}{d y} - \frac{d G}{d x}\right)}{d y} - \frac{d\left(\frac{d H}{d x} - \frac{d F}{d z}\right)}{d z} \right\} \\
\frac{d^2 G}{d t^2} &= i^2 \left\{ \frac{d\left(\frac{d G}{d z} - \frac{d H}{d y}\right)}{d z} - \frac{d\left(\frac{d F}{d y} - \frac{d G}{d x}\right)}{d x} \right\} \\
\frac{d^2 H}{d t^2} &= i^2 \left\{ \frac{d\left(\frac{d H}{d x} - \frac{d F}{d z}\right)}{d x} - \frac{d\left(\frac{d G}{d z} - \frac{d H}{d y}\right)}{d y} \right\}
\end{aligned}\right\} \; . \quad (12)$$

Zij stemmen volkomen overeen met de vergelijkingen voor de kleine inwendige bewegingen van een vast lichaam van constante elasticiteit (zie LAMÉ, *Leçons sur la théorie mathematique de l'Elasticité des corps solides* 11e Leçon N^0. 60) en wel voor het geval dat er geene dilatatie plaats vindt. Onze vergelijkingen (12) wijzen derhalve, evenals die in de leer der elasticiteit, op trillingen zonder dichtheids-veranderingen, loodrecht op de richting van voortplanting (transversale vibratiën).

Hunne voortplantingssnelheid is $i = \frac{1}{\sqrt{\mu K}}$, eene snelheid overeenkomende, zooals door MAXWELL is aangetoond, met de snelheid, waarmede zich het licht in de isoleerende middenstof verbreidt. Wij zullen die snelheid van voortplanting der transversale bewegingen, welke blijkbaar de snelheid is, waarmede de door MAXWELL aangewezene »displacement-currents" zich voortbewegen, door V_i aanduiden, zoodat dan

$$V_i = \frac{1}{\sqrt{\mu K}} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13)$$

5. Voor het geval dat de middenstof volkomen geleidt,

dat is, geene vatbaarheid voor polarisatie bezit, wordt K het specifiek induceerend vermogen *nul* en de bewegingsvergelijkingen gaan over in,

$$
\begin{aligned}
4\,\pi\,\mu\,C\frac{d\,F}{d\,t} &= \Delta^2\,F - \frac{d\,I}{d\,x} \\
4\,\pi\,\mu\,C\frac{d\,G}{d\,t} &= \Delta^2\,G - \frac{d\,I}{d\,y} \qquad \ldots\ldots \quad (14) \\
4\,\pi\,\mu\,C\frac{d\,H}{d\,t} &= \Delta^2\,H - \frac{d\,I}{d\,z}
\end{aligned}
$$

of, zoo wij aannemen, dat de composanten F, G, H, aan de voorwaarde voldoen, dat

$$\frac{d\,F}{d\,x} + \frac{d\,G}{d\,y} + \frac{d\,H}{d\,z} = 0$$

in

$$
\begin{aligned}
4\,\pi\,\mu\,C\frac{d\,F}{d\,t} &= \Delta^2\,F \\
4\,\pi\,\mu\,C\frac{d\,G}{d\,t} &= \Delta^2\,G, \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (15) \\
4\,\pi\,\mu\,C\frac{d\,H}{d\,t} &= \Delta^2\,H
\end{aligned}
$$

welke vergelijkingen van denzelfden vorm zijn als die, welke door Fourier voor de verbreiding der warmte in vaste lichamen zijn gegeven.

6. Ten einde na te gaan, welke de gevolgen zijn eener periodieke verstoring in eene middenstof, die zoowel vatbaarheid voor geleiding als voor electrische polarisatie bezit, eene middenstof, voor welke derhalve zoowel C als K eindige waarden hebben, is het van belang het geval nader te beschouwen, dat eene vlakke, electrische golf zich in die middenstof voortplant in eene richting, die wij met de x-as zullen doen zamenvallen.

Daar bij die voortplanting alle voorkomende grootheden functiën van x en t zijn, onafhankelijk van y en z, geven de bewegingsvergelijkingen (7), omdat wij alsdan bij het wegvallen der beide eerste vergelijkingen, alleen de derde hebben na te gaan, terwijl

$$\frac{dF}{dz} = \frac{dG}{dz} = \frac{dH}{dy} = 0$$

$$\mu K \frac{d^2 H}{dt^2} + 4\pi\mu C \frac{dH}{dt} = \frac{d^2 H}{dx^2} \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

Deze vergelijking werd door ons in de bijdrage »*Over lichtabsorptie volgens de theorie van* MAXWELL" *) onderzocht en wel voor een bundel rechtlijnig gepolariseerd licht, waarbij de richting der electrische beweging (richting der electromotorische kracht) evenwijdig aan de z-as loopt, dus de daardoor ontwikkelde magnetische kracht evenwijdig aan de y-as werkt, zoodat beide in het golfvlak liggen.

Stellen wij ook nu om aan (16) te voldoen, voor H de periodieke functie

$$H = Ae^{-px} \cos k(x - Vt)$$

waarin $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, λ de golflengte zijnde, terwijl p eene nader te bepalen constante aanduidt. V is dan de snelheid van voortplanting der verstoring in de onvolkomen geleidende en polariseerende middenstof.

Substitutie dezer waarde in (16) leidt dadelijk tot de waarden:

$$p = 2\pi\mu C V, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

en

$$V^2 = \frac{1}{\mu K + \mu^2 C^2 \lambda^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

*) *Verslagen en Mededeelingen der Kon. Ak. van Wetens.* 2e Reeks. Deel X. blz. 371. *Archives Neërlandaises* XII. p. 177. Beiblätter zu dem *Annalen Phys. u. Chem.* 1877. S. 409. *Phil. Magaz.* 5 Serie 4. Oct. 1877. p. 313.

7. Onderzoeken wij deze voortplanting-snelheid thans nader en wel voor het geval, dat de straks genoemde bundel rechtlijnig gepolariseerd licht uit de lucht of uit eenige andere, volmaakt isoleerende middenstof komende, binnen een lichaam dringt, waarvan de geleidbaarheid C en het specifiek induceerend vermogen K is.

De snelheid van voortplanting die vóór het binnentreden, wanneer K' het specifiek induceerend vermogen der isoleerende middenstof (wel te onderscheiden van dat van het lichaam) $= \frac{1}{\sqrt{\mu K'}}$ was, wordt binnen het lichaam ingevolge (18)

$$V = \frac{1}{\sqrt{\mu K + \mu^2 C^2 \lambda^2}}.$$

Noemen wij de snelheid, waarmede de golf zich binnen het lichaam zou voortplanten, wanneer $C = 0$ werd en K hare zelfde waarde behield, eene snelheid dus, die alleen aan het electrisch induceerend vermogen is toe te schrijven, V_i, zoo is ingevolge (18)

$$V_i = \frac{1}{\sqrt{\mu K}} \qquad (19)$$

Noemen wij tevens V_c de snelheid, waarmede het lichaam eene verstoring zou voortplanten, zoo het bij dezelfde geleidbaarheid C, zijn polarisatievermogen verloor, K dus nul werd, zoo hebben wij voor de snelheid van voortplanting door geleiding

$$V_c = \frac{1}{\mu C \lambda} \qquad (20)$$

Wegens onze geheele onbekendheid met de inwendige zamenstelling der gebrekkig polariseerende, gebrekkig geleidende middenstof, en ook om andere redenen, is het onmogelijk aan deze in (20) bedoelde snelheid, eene bevredigende physische beteekenis te geven.

Zonder hier dan ook nader in te dringen, vatten wij haar eenvoudig als eene *wiskundige grootheid* op en komen door de vergelijkingen (18), (19) en (20) te verbinden, tot de belangrijke betrekking

$$\frac{1}{V^2} = \frac{1}{V_i^2} + \frac{1}{V_c^2} \dots\dots\dots\dots (21)$$

Hieruit blijkt, dat V kleiner dan V_i en kleiner dan V_c is, waaruit volgt, dat eene onvolkomene isoleering de voortplanting der trillingen vertraagt, evenals vatbaarheid voor electrische polarisatie de voortplanting-snelheid door geleiding kleiner maakt.

De resulteerende, dus gewijzigde snelheid V volgt uit de afzonderlijke snelheden V_i en V_c op de door vergelijking (21) aangegevene wijze; waarbij het misschien van belang is op te merken, dat V^2 uit V_i^2 en V_c^2 op dezelfde wijze wordt afgeleid als de resulteerende weerstand van twee verbondene geleiders uit de afzonderlijke weerstanden dier geleiders volgt.

Uit de formule (20) voor V_c blijkt, dat een groot geleidend vermogen de voortplanting eener periodieke verstoring vertraagt; — de snelheid van voortplanting is omgekeerd evenredig aan dit geleidend vermogen, zoodat eene middenstof van zeer groote geleidbaarheid de verbreiding van magnetische kracht volledig belet.

Zulks komt overeen met het feit, dat de magnetische inductie zich niet door een geleidend oppervlak voortplant, zoodat een goed geleidend omhulsel den voortgang der magnetische inductie tegenhoudt.

Verder blijkt uit (20), dat hoewel wij bij geleidingsstroomen dit niet zouden verwachten, V_c toch afhankelijk is van de golflengte, die overeenstemt met de oorspronkelijke periodieke verstoring.

De resulteerende snelheid V, waarmede zich die periodieke bewegingen (displacements currents) voortplanten, welke het essentieële bestanddeel der lichtbeweging uitmaken, blijkt alzoo ingevolge (18) in eene volmaakt isoleerende middenstof onafhankelijk van de golflengte; die snelheid is voorts in eene middenstof, die tevens in meerdere of mindere mate electrische geleidbaarheid bezit, *geringer*.

Deze gevolgtrekking is echter dan alleen juist, wanneer, wat waarschijnlijk is, het specifiek induceerend vermogen K niet alleen onafhankelijk is van het magnetisch inductief vermogen μ, maar ook door eene verandering in geleidbaarheid C der middenstof niet, of weinig, gewijzigd wordt. Dan alleen hebben de in deze paragraaf verkregene resultaten, omtrent de wijziging, die de snelheid van voortplanting der trillingen door onvolkomene isoleering ondergaat, recht van bestaan. Dat echter met de vatbaarheid voor geleiding van electrische stroomen de voortplanting der trillingen *vertraagd* wordt, is in hooge mate waarschijnlijk; en zoo deze aanname nog te gewaagd voorkomt, onbekend als wij zijn met de onderlinge afhankelijkheid van K, C en μ, eene *wijziging* dier voortplantingsnelheid schijnt uit de verandering van geleidings- en polarisatievermogen onwederlegbaar te volgen, tenzij men zeer speciale hypothesen omtrent de veranderingen der genoemde grootheden aanneemt.

Verder zou uit (18) volgen, (en dit is wel van het uit form. (21) afgeleide resultaat te onderscheiden), dat de voortplantingsnelheid der periodieke beweging afhankelijk is van de golflengte, en wel is die snelheid te grooter, naarmate de golflengte kleiner is.

In hoeverre zoodanig resultaat met de leer der dispersie overeenstemt, schijnt op het tegenwoordige standpunt der electromagnetische theorie nog niet tot beslissing te kunnen worden gebracht. Daartoe zou vooraf met zekerheid moeten worden uitgemaakt, door welke omstandigheden de waarden der grootheden K, C en wellicht ook μ gewijzigd worden en in hoeverre tusschen die grootheden eenig onderling verband bestaat. — Van dit onderzoek hangt de verdere ontwikkeling der electromagnetische lichttheorie af en het is reeds eene belangrijke stap voorwaarts, dat op eene zeer waarschijnlijke betrekking tusschen die grootheden kan gewezen worden.

8. Dit bezwaar treedt niet zóó beslissend op den voor-

grond, wanneer wij nagaan, hoe in eene onvolmaakt polariseerende middenstof de energie der aanvankelijke verstoring zich in potentieële en actueele energie verdeelt.

Wij hebben voor E de electrostatische of potentieële energie en voor T de electromagnetische of actueele energie van het veld per eenheid van volume de uitdrukkingen:

$$E = \frac{1}{2} (Pf + Qg + Rh)$$

$$T = \frac{1}{8\mu} (a\alpha + b\beta + c\gamma)$$

waarin f, g, h, de composanten der electrische verplaatsing, a, b, c, die der magnetische inductie voorstellen, waarbij

$$f = \frac{K}{4\pi} P, \qquad g = \frac{K}{4\pi} Q, \qquad h = \frac{K}{4\pi} R$$

$$a = \mu\alpha, \qquad b = \mu\beta, \qquad c = \mu\gamma.$$

Dus wordt met het oog op de formulen (2) en (5)

$$\left.\begin{aligned} E &= \frac{K}{8\pi} \left\{ \left(\frac{dF}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dG}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dH}{dt}\right)^2 \right\} \\ T &= \frac{1}{8\pi\mu} \left\{ \left(\frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy}\right)^2 \right\} \end{aligned}\right\} \ldots (22)$$

Bij onze in N°. 6 gemaakte onderstelling, waarbij F en G nul zijn, terwijl

$$H = Ae^{-px} \cos k (x - Vt) \ldots\ldots\ldots (23)$$

volgen voor de waarden (22) nu de meer eenvoudige,

$$\left.\begin{aligned} E &= \frac{K}{8\pi} \left(\frac{dH}{dt}\right)^2 \\ T &= \frac{1}{8\pi\mu} \left(\frac{dH}{dx}\right)^2 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (24)$$

Is de exponent p, die blijkens (17) $= 2\pi\mu CV$, *nul*, d. w. z. is $C = 0$ of de middenstof *volmaakt isoleerend*, zoo volgt uit (23)

$$\left(\frac{dH}{dt}\right) = -V\left(\frac{dH}{dx}\right)$$

of wegens (19),

$$K\left(\frac{dH}{dt}\right)^2 = \frac{1}{\mu}\left(\frac{dH}{dx}\right)^2,$$

zoodat uit (24) volgt

$$E = T \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

In eene isoleerende middenstof zijn dus de beide energiën ieder oogenblik tot gelijk bedrag aanwezig, zooals bij trillende stelsels steeds het geval is, wanneer geene andere invloeden gelden.

Is echter de middenstof niet volkomen isoleerend, zoodat C en dus ook p niet verdwijnen, zoo volgt uit (23), dat E en T niet meer gelijk blijven.

Dan blijkt, zooals wij t. a. p. aantoonden, dat

$$T = E + \Delta, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

waarin Δ eene positieve grootheid, zoodat steeds T grooter dan E is.

De totale energie

$$W = T + E = 2E + \Delta,$$

bestaat dan in het gedeelte $2E$ uit *lichtenergie*, waarbij actuele en potentiele energie gelijkelijk aanwezig zijn, en uit een gedeelte Δ, aan *geleidingstroomen* toe te schrijven, welk deel zich ten slotte in het algemeen in warmte omzet. — Daaruit laat zich dan verklaren dat geleiders, die de lichtbeweging gedeeltelijk absorbeeren, ondoorschijnend zijn, isolatoren in het algemeen het licht doorlaten.

9. Zoeken wij thans voor het in N°. 6 behandelde geval,

waarbij eene rechtlijnig gepolariseerde lichtstraal zich volgens de X-as voortplant, eene betrekking tusschen

R, de electromotorische kracht,
w, de stormsterkte,
β, de magnetische kracht.

Gaan wij daartoe van de in (23) gegevene bijzondere integraal der vergelijking (16) uit, namelijk

$$H = A e^{-px} \cos k (x - Vt)$$

en stellen wij ter bekorting

$$H' = A e^{-px} \sin k (x - Vt)$$

zoo volgt terstond

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\,H}{d\,x}\right) &= -p\,H - k\,H' \\ \left(\frac{d^2 H}{d\,x^2}\right) &= p^2\,H + 2\,p\,k\,H' - k^2\,H \quad \ldots\ldots \quad (27) \\ \left(\frac{d\,H}{d\,t}\right) &= k\,V\,H' \end{aligned}$$

Nu geven de betrekkingen (2), (3) en (5)

$$\begin{aligned} \mu\,\beta &= -\left(\frac{d\,H}{d\,x}\right) = p\,H + k\,H' \\ -4\,\pi\,\mu\,w &= \left(\frac{d^2 H}{d\,x^2}\right) = (p^2 - k^2)\,H + 2\,p\,k\,H' \quad \ldots \quad (28) \\ R &= -\left(\frac{d\,H}{d\,t}\right) = -k\,V\,H' \end{aligned}$$

de eliminatie van H en H' uit deze vergelijkingen zal ons de verlangde betrekking geven.

De eliminatie van H' leidt tot

$$\begin{aligned} 4\,\pi\,\mu\,w\,V - 2\,p\,R &= (k^2 - p^2)\,V\,H \\ \mu\,\beta\,V + R &= p\,V\,H \end{aligned}$$

waaruit dan volgt

$$p\,(4\,\pi\,\mu\,w\,V - 2\,p\,R) = (k^2 - p^2)\,(\mu\,\beta\,V + R)$$

voor p hare waarde, $2\,\pi\,\mu\,C V$ schrijvende en opmerkende, dat

$$k^2 - p^2 = k^2 - 4\,\pi^2 C^2\,V^2 = k^2 - \frac{4\,\pi^2\,\mu^2\,C^2}{\mu K + \mu^2 C^2 \lambda^2} = \mu\,K\,.\,k^2\,V^2,$$

zoo gaat ons resultaat over in

$$2\,\lambda^2\,\mu\,C\,(w - CR) = K\,(\mu\,\beta\,V + R) \;.\;.\;.\;.\; (29)$$

welke vergelijking de verlangde betrekking geeft.

Voor de twee *uiterste* gevallen, 1e volmaakte geleiders, zonder polarisatie, $K = 0$, 2e volmaakte isolatoren, $C = 0$, geeft (29) de beide betrekkingen

$$w - C\,R = 0$$
$$\mu\,\beta\,V + R = 0$$

of, wanneer wij opmerken, dat in de tweede vergelijking $V^2 = \frac{1}{\mu K}$, gaan de beide vergelijkingen over in

$$w = C\,R$$
$$\text{en}\quad \mu\,\beta^2 = K\,R^2 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (30)$$

voor de beide uiterste gevallen van geleidbaarheid en polarisatie.

Bij volkomen geleidbaarheid volgt in de eerste vergelijking (30) niet anders dan *de wet van* Ohm.

Bij volkomene polarisatie volgt in de tweede vergelijking (30) eene zeker even belangrijke wet, al is zij niet zoo bekend, doordien de betrekking tusschen magnetische en electromotorische kracht minder is onderzocht.

Zij laat zich schrijven onder den vorm

$$\frac{R}{\beta} = \sqrt{\frac{\mu}{K}} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (31)$$

en zegt dan, dat de verhouding tusschen electromotorische en magnetische kracht (die in onderling rechthoekige richtingen werken) gelijk is aan den vierkantswortel uit de verhouding van magnetisch en electrisch induceerend vermogen.

Regelmatiger wordt zij welligt voorgesteld onder den vorm

$$R\sqrt{K}=\beta\sqrt{\mu} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (32)$$

Doch de beteekenis dezer vergelijking wordt terstond klaar, wanneer wij opmerken, dat in gevolge (28),

$$\mu\beta=-\left(\frac{dH}{dx}\right), \qquad R=-\left(\frac{dH}{dt}\right)$$

en de tweede vergelijking (30) gaat dan over in:

$$\frac{1}{\mu}\left(\frac{dH}{dx}\right)^2=K\left(\frac{dH}{dt}\right)^2,$$

dat is ingevolge (24),

$$T=E.$$

gelijke verdeeling der beide energiën.

Deze beide betrekkingen, gelijke verdeeling van energie en de wet van Ohm, m. a. w. ongestoorde trillingen en geleidingstroomen vertegenwoordigen dus respectievelijk eene middenstof met *volmaakte* polarisatie, zonder geleiding, en een lichaam van *volkomene* geleidbaarheid.

De electrische bewegingen, die volgens de nieuwe theorie het wezenlijke der lichtverschijnselen vormen, blijken dus begrensd te worden: aan de eene zijde door eene beweging met gelijke energie-verdeeling, aan de andere zijde door eene beweging volgens de wet van Ohm. Daartusschen ligt het algemeene, zeer uitgebreide, geval eener meer zamengestelde beweging van licht, dat gedeeltelijk geabsorbeerd wordt.

Voor dit algemeene geval blijft dan de vergelijking (29) van toepassing, die, o. a. wat den factor λ^2 betreft, tot meer gevolgen leidt, waarmede wij ons thans niet kunnen inlaten.

Utrecht, Maart 1883.

OVER DE OP 17 MAART 1883

TE HAARLEM EN IN DE OMSTREKEN

WAARGENOMEN AARDSCHUDDING

DOOR

Dr. E. H. VON BAUMHAUER.

Een in ons vaderland zeer ongewoon natuurverschijnsel had op 17 Maart j.l. plaats. Des morgens om 5 uren tien minuten, toen de dageraad reeds was aangebroken, werden de inwoners vooral van Haarlem, Heemstede, Hillegom, Bloemendaal, IJmuiden en een gedeelte van den Haarlemmermeerpolder, plotseling uit den slaap wakker geschud door een hevige trilling der huizen, die eenige seconden aanhield en ieder met schrik vervulde, zoodat menigeen angstig uit zijn woning vluchtte, uit vrees dat bij een volgende schudding het huis zoude instorten. De zoo kort te voren voorgevallen ontploffing van de kruitfabriek te Muiden, de schandelijke pogingen in Engeland en andere landen tot algemeene verwoesting door dynamiet, vervulden velen met de gedachte dat ook hier, of mogelijk op een schip dicht bij de kust, een ontploffing van kruit of dynamiet had plaats gehad. Het in de lucht vliegen van geheel Londen en het meer bescheiden ontploffen van een der groote gasketels te Amsterdam deden ook de ronde; doch de lieden, die in onze Oost-Indische bezittingen aardbevingen hadden bijgewoond, verklaarden hetgeen wij hier hadden gevoeld voor een aardbeving.

Een vrij hevige aardbeving, ik spreek uit ondervinding, waarbij de slapenden niet alleen onzacht werden gewekt, maar het gevoel hadden als werden zij door een sterken arm in hun bed geschud, en dat wel in Noord-Holland, op een terrein, verre verwijderd van tertiaire lagen en alleen uit alluvium en diluvium bestaande, in welke men bij de diepste boringen nog nimmer tot een tertiaire laag is kunnen komen; de omstandigheid daarbij, dat die schudding slechts op een relatief kleine oppervlakte van het land is gevoeld (de uiterste grenzen toch zijn de steden Utrecht en Leiden, waar de schokken weinig merkbaar zijn geweest) kwam mij zoo opmerkelijk voor, dat ik een onderzoek naar dit natuurverschijnsel niet ondienstig oordeelde, en hoewel dit weinig heeft opgeleverd, acht ik de verkregen resultaten toch gewichtig genoeg om ze aan de Natuurkundige Afdeeling der Akademie mede te deelen.

De Natuur heeft al een zeer ongelukkig oogenblik uitgekozen om ons met dit verschijnsel te verrassen: een uur waarop ieder ter ruste is en zelfs de vroegst opstaanders in dit (vooral dit jaar) zoo gure jaargetijde nog geen lust gevoelden hunne legerstede te verlaten; de goede waarnemers van natuurverschijnselen, dus de competente getuigen, ontbraken bijna ten eenemale. De reeds vrij sterk aangebroken dageraad verhinderde daarenboven het waarnemen van een mogelijk lichtverschijnsel. Ik ben dus in de instructie dezer zaak niet zeer gelukkig geweest, daar ik beperkt was tot nachtwachts (de torenwachters hadden reeds om half vijf hun post verlaten), eenige tuinlieden en nog minder talrijke personen, die toevallig op dat oogenblik wakker waren en dus het verschijnsel van zijn begin af hebben kunnen waarnemen.

Onder de door mij gehoorde getuigen was een koetsier, wonende op de Gasthuisvest te Haarlem, die mij mededeelde dat hij, 's morgens om drie uren wakker zijnde, door zijn op het noorden uitziend venster een sterke roode lucht zag; dat hij, opgestaan, op de binnenplaats dat roode schijnsel in het noorden is blijven waarnemen, terwijl de hemel in het zuiden helder en volkomen donker was; dat hij op het roode hemelgedeelte snel voortgaande golvende bewegingen zag, en zich voorstelde dat geheel Amsterdam in brand stond. Dat hij, zich weder ter ruste begeven hebbende, 's morgens na vijf uren door schokken is wakker geschud en dat zijn klok is blijven stilstaan.

Een tweede getuige, agent van politie, die dien nacht de ronde deed, had van het zooeven vermelde roode licht, evenmin als alle andere door mij gehoorde getuigen, iets waargenomen, zoodat ik op die waarneming geen volkomen vertrouwen kan stellen. Na vijf uren op den Zijlweg zijnde, hoorde hij een hem geheel ongewoon geraas, alsof zware wagens op een afstand over een harden steenweg reden, en een oogenblik daarna had hij een gevoel gehad alsof de grond onder hem wegzonk; naar zijn meening was het een horizontale en geen vertikale schudding geweest; hij had van personen, op de daarbij gelegen Brouwersvaart wonende, vernomen dat hunne klokken waren blijven stilstaan.

Een ander agent van politie, die eveneens dien nacht, dienst deed, had evenmin om drie uren het roode lichtverschijnsel gezien, maar, na vijf uren langs het Spaarne gaande, een suizing vernomen, die hij met het loeien van een stormwind of met een boven zijn hoofd warrelende hoos vergeleek; dit geluid duurde zeer kort, en daarop voelde hij schokken, maar geen zeer sterke.

De meeste waarde hecht ik aan de getuigenis van een Heer, wonende op den Jansweg te Haarlem, die bij zijn ziek kind waakte en dus het verschijnsel van het eerste oogenblik af had waargenomen. Z.E. had de goedheid mij het volgende mede te deelen: juist 10 minuten na vijf uren hoorde ik een geraas, alsof een zware met ijzerstaven beladen wagen over de brug kwam rollen; verschrikt opstaande om uit het venster op straat te zien, werd ik dadelijk door een golvende beweging in mijne kamer zoodanig geslingerd, dat ik, om niet te vallen, mij aan een tafel moest vasthouden, en den aan den wand hangenden ovalen spiegel zag slingeren. Terwijl ik den ganschen nacht een volmaakte windstilte had waargenomen, hadden dadelijk na de schudding drie hevige windrukken plaats, zoodat de gasvlammen van mijn gaskachel naar buiten in de kamer sloegen; uit het venster ziende, heb ik niets dan een grauwe lucht waargenomen; het daglicht was reeds vrij helder. — Volgens dien Heer was het een golvende beweging, bepaaldelijk van het Z.O. naar het N.W. voortgaande, en die 5 à 6 seconden geduurd had. Later bemerkte hij dat in zijn slaapkamer op de tweede verdieping de muur en het behangsel een golvende horizontale scheur vertoonden, die zich langs den schoorsteen voortzette.

Deze getuigenis werd volkomen bevestigd door een anderen Heer, wonende in de Zijlstraat te Haarlem, die, herstellende van een zware ziekte, wakker was; in die dagen werd een nieuwe hoofdlijn voor de waterleiding in die straat gemaakt, en bij het huis was een groote hoop zware ijzeren pijpen opgestapeld. Z. E. dacht niet anders dan dat die hoop uit elkander viel, zoodanig was 't geraas; dadelijk daarna voelde hij de golvende schudding en eveneens kort daarop een hevigen windstoot. Door dien windstoot zijn zoowel te Haarlem als te Amsterdam eenige gaslantaarnen op straat uitgedoofd.

In de bloemisterij van den Heer Krelage aan den kleinen Houtweg te Haarlem stortte een ijzer dak van vrij groote spanning, dat op vier muren, die reeds lang bouwvallig waren, rustte, naar beneden, terwijl de Heer Krelage, die aan den kleinen Houtweg woont, maar gelijkvloers sliep, niets van de aardschudding waarnam.

Uit Hillegom werd mij medegedeeld, dat aldaar de brandklok een slag had doen hooren, en op de Badhoeve van den Heer Mr. Amersfoordt in den Haarlemmermeerpolder vielen porceleinen pullen van een kast naar beneden.

Ook van andere personen, die toevallig wakker waren geweest, vernam ik dat zij een geraas hadden gehoord vóór dat zij de schokken gevoeld hadden; persoonlijk heb ik het geluid niet waargenomen, daar ik eerst door den eersten schok wakker werd geschud; toen dadelijk op mijn horologie ziende, bleek het 5^u 10^m te zijn, welke tijdsbepaling ook door anderen, alsook door tot stilstand gebrachte klokken is bevestigd. Hoeveel schokken of schommelingen er geweest zijn en hoe lang die geduurd hebben, is mij niet met zekerheid gebleken; ik schatte het op 3 à 4 schokken en

2 à 3 seconden; anderen op meer schokken en 5 à 6 seconden; doch vertikale schokken schijnen het niet geweest te zijn, maar een golvende beweging, en, volgens de meeste getuigen, in de richting van Z.O. naar N.W.

De schudding heeft zich veel sterker doen gevoelen boven in de huizen, waar de ramen gerinkeld hebben en voorwerpen aan het trillen en slingeren geraakt zijn, dan op den beganen grond; zoo werd mij het geval medegedeeld dat een dame te Haarlem, uit schrik haar bed verlatende en het raam openschuivende, aan een voorbijgaanden nachtwacht toeriep: »man, wat is er toch gebeurd?" waarop deze, die niets had gemerkt, leuk antwoordde: »Jufvrouw, u hebt stellig gedroomd, er is niets gebeurd." Hetzelfde is mij uit Heemstede medegedeeld: bij het raadhuis aldaar was een arbeider bezig de sneeuw weg te vegen, en aan de daarbij wonenden, die met schrik uit hunne woningen vlogen en hem naar de oorzaak vroegen, antwoordde hij dat hij niets gevoeld had, maar dat het geraas kwam van den stoomtram, die op de brug stond; N.B. de stoomtram stond wel bij de brug, maar was in dat vroege morgenuur nog niet in gebruik. Eerst op den 20sten Maart, dus drie dagen daarna, ontving ik een schrijven van den eigenaar van het landgoed Groenendaal en Bosbeek, te Heemstede, die mij mededeelde dat de vrouw van zijn tuinbaas het verschijnsel in zijn geheel had waargenomen, daar zij toevallig wakker was; ook zij had een geraas gehoord, hetwelk zij vergeleek met een snel opkomenden storm, en eerst daarna had zij de schokken gevoeld. De tuinbaas, 's morgens om 6 uren naar buiten gaande om het volk aan het werk te zetten, merkte met verwondering dat al de versch gevallen sneeuw met zwarte stippen was bedekt, en niet alleen op een beperkte ruimte, maar over de geheele plaats, die ruim 150 bunders groot is; bij het wegnemen van het bovenste laagje sneeuw was de oppervlakte van het even daaronder liggende volkomen wit. Ofschoon ik betreurde dat ik niet vroeger daarvan kennis had gekregen, daar sedert dien de sneeuw weggesmolten en de verzameling van een groote hoeveelheid dier zwarte stof daardoor onmogelijk was geworden, dank ik echter aan de welwillendheid van dien Heer een menigte dorre bladeren, stukken versch gehakt hout en een paar scherven aardewerk, die, aan de lucht blootgesteld geweest zijnde, alle die zwarte vlekken vertoonden. De tuinbaas betwijfelde de afkomst dier zwarte stippen van de schoorsteenen van de pomptoestellen der Duinwaterleiding ten Westen of van die van den Cruquius ten Oosten, beiden op vrij aanzienlijken afstand gelegen, vooral dewijl de nacht van den 16den op den 17den Maart zich, volgens hem, door groote windstilte had gekenmerkt, en de slechts oppervlakkige bedekking der versch in die nacht gevallen sneeuw de zekerheid gaf dat die zwarte stofdeeltjes kort te voren daarop waren gestrooid.

Van hevige bewegingen van het water op zee heb ik niets kunnen te weten komen; alleen meldde mij een beurtschipper, dat hij met zijn vaartuig aan de losplaats van den Vijfhuizerweg, in de gemeente Haarlemmermeer, vastgemeerd, even na 5 uren een plotselingen schok gevoelde, die, zich nog eens herhalende, zijn vaartuig vrij onzacht tegen de palen deed stooten, en het kaarsje, dat hij brandend voor zich had staan, deed omvallen; tevens hoorde hij een gedreun, dat hij het best kon vergelijken met het voorbijrijden van een zwaren wagen. Daar zijn vaartuig O—W lag en de wal Z, achtte hij dat de schok uit het Noorden kwam. Ter bepaling van de richting der beweging moge nog het volgende feit dienen, dat een student te Amsterdam, die aan het schrijven was, door den schok een streep met de pen op het papier maakte, die van WNW ten W naar OZO liep.

Volgens de meteorologische waarnemingen te Oude-Wetering, opgenomen in het *Weekblad van Haarlemmermeer* van 23 Maart, was de windrichting op 16 en 17 Maart ZZW., de barometerstand op Hoofddorp den 16den 's avonds te 8 uren 749,3, den 17den 's morgens te 8 uren 750,8 en de thermometerstand op die beide oogenblikken 32^0 4 en 33^0 8 F.; tusschen beide genoemde tijdstippen had de regenmeter te Hoofddorp 10,3 cm. sneeuw aangetoond.

Welke is nu de oorzaak dezer voor ons land hevige aardschudding? Is zij voortgebracht door een onderaardsche werking, of wel door eene, die, van buiten aangebracht, aan de oppervlakte der aarde een krachtigen stoot heeft medegedeeld? De oplossing dier vraag ligt zoo maar niet voor de hand, daar de waargenomen verschijnselen volgens beide zienswijzen min of meer verklaard kunnen worden. Een ontploffing van kruit of dynamiet hier te lande kan het niet geweest zijn; die zoude ons reeds dadelijk zijn medegedeeld, evenzoo die in het buitenland; een ontploffing van dynamiet op een schip bij de kust behoort evenzeer tot de groote onwaarschijnlijkheden; dynamiet-ontploffingen toch verspreiden hare werking niet op verren afstand. De geheel lokale Haarlemsche aardschudding in verband te brengen met de dezer dagen plaats hebbende uitbarstingen van de Etna en de Hekla, gaat naar mijn oordeel ook niet op, dewijl de nieuwsbladen ons niets mededeelen van aardbevingen op de groote uitgestrektheid lands tusschen deze beide vuurspuwende bergen.

Het door den Heer Mr. P. J. Amersfoordt in het Handelsblad van 20 Maart j. l. geopperde denkbeeld, dat de door ons waargenomen aardschudding voortgebracht zoude zijn doordien in de laatste jaren groote hoeveelheden zand, veen en water, hier in den omtrek verplaatst en in en om Amsterdam op den veengrond zware gebouwen zijn verrezen, en dat dientengevolge een verschuiving van den ondergrond zoude ontstaan zijn, komt mij niet zeer aannemelijk voor; die geringe verplaatsing van den druk kan hoogstens een lichte verschuiving van den ondergrond veroorzaken, zooals tijdens het leegmalen van de Haarlemmermeer heeft plaats gehad, toen ook in de gemeente Heemstede eene, hoewel lichte, aardschudding is waargenomen, maar tot de hevige aardschudding, die 17 Maart heeft plaats gevonden, is naar mijn oordeel een aanzienlijker kracht noodig geweest.

Dr. T. C. Winkler, die in het *Nieuws van den Dag* van 23 Maart j. l. evenzeer het denkbeeld van den Heer Amersfoordt onaannemelijk acht, houdt het hier waargenomen verschijnsel voor een aardbeving, voortgebracht door een instorting, die ergens in de tertiaire crag van onder Auvergne of onder den Eifel zoude hebben plaats gevonden;

Z.E. veronderstelt dat die tertiaire formatie onder Noord-Holland doorloopt, en dat wij onze aardschudding aan zulk eene instorting te danken hebben. Dat menige aardbeving ontstaan is door de instorting van daarboven gelegen lagen in groote, door onderaardsche rivieren gevormde, holen in de tertiaire formatie, wordt tegenwoordig vrij algemeen door de geologen aangenomen en heeft alle waarschijnlijkheid voor zich. Ons medelid Buijs Ballot vermeldt een dergelijke aardschudding, die nog weinige jaren geleden in ons vaderland op 26 Augustus 1878 plaats vond (opgeteekend in het Meteorologisch Jaarboek van 1878), doch die voornamelijk langs de Maas en aan de oostelijke grenzen van Nederland werd waargenomen, en waarvan de oorzaak toen gezocht werd in neerploffingen in het Eifelgebergte (zie *Algemeen Handelsblad* van 20 Maart 1883). Eveneens werden de vroeger in Nederland gevoelde aardbevingen niet op eene bepaalde kleine ruimte in Holland, maar over het geheele land en het sterkst aan de oostelijke en zuidelijke grenzen waargenomen, zooals die van 1756; deze schijnt vrij hevig geweest te zijn, zooals blijkt uit de beschrijving daarvan in de *Vaderlandsche Historie* van Marinus Stuart 1821, pag. 291, waarbij tot opheldering twee fraaie staaletsen gevoegd zijn, waarvan de eene de godsdienstoefening voorstelt in de Luthersche Oude Kerk te Amsterdam, met slingerende lichtkronen en personen die uit angst zich langs de pilaren van de galerijen naar beneden laten afglijden, en de andere een op de Haarlemmermeer door de golven geslingerd schip. In die beschrijving wordt nadrukkelijk vermeld: »In Staats »Braband en naar den kant van Maastricht scheen de aard»beving het sterkst geweest te zijn". De omstandigheden van toen en van nu zijn geheel verschillend. De bewuste aardschuddingen hadden het hevigst plaats op of aan den rand van het aan de oppervlakte verschijnend tertiair gebied; nu in Noord-Holland op een zeer grooten afstand daarvan, terwijl nergens op het daar tusschen gelegen terrein, dat evenzeer uit diluvium en alluvium bestaat, noch in de omstreken van Winterswijk, Antwerpen of Maastricht, waar de tertiaire formatie aan de oppervlakte komt, eenige trilling is bespeurd. Het geheele verschijnsel heeft zich vertoond op een zeer kleine oppervlakte, waarvan de gemeenten Haarlem en Heemstede het middelpunt schijnen geweest te zijn, terwijl reeds in Utrecht en Leiden de schudding van veel minder beteekenis was, zooals blijkt uit het geringe aantal menschen, die er iets van hebben gevoeld. In Amsterdam is de schudding gevoeld, maar ook in betrekkelijk geringere mate. De Heer Winkler tracht deze moeilijkheid op te lossen door aan te nemen dat waarschijnlijk een rug of bergtop van de tertiaire crag van Antwerpen en Winterswijk zich onder Hillegom, Haarlem en IJmuiden verheft, en dat dus aldaar de dikte der diluviale en alluviale nederzettingen geringer zoude zijn. Maar vinden bij die veronderstelling het waargenomen geluid en de dadelijk na de schudding opgemerkte luchtstooten bij overigens bijna volkomen windstilte hunne verklaring? Zouden niet in die veronderstelling de schokken op den beganen grond veel sterker hebben moeten gevoeld worden dan op de bovenste verdiepingen der huizen, en hoe komt zoo plotseling na de schudding de geheele oppervlakte van Groenendaal en Bosbeek met zwarte stippen bedekt, daar het alleen de kort vóór 6 uren 's morgens gevallen sneeuw was, die dit verschijnsel vertoonde?

Zouden wij niet eerder moeten denken aan een geweldigen luchtstoot, die de aarde op een kleine oppervlakte in de buurt van Haarlem van buiten heeft gekregen; wanneer wij toch de verhalen van de getuigen bij meteorieten-vallen lezen, zoo komen de meeste der door hen vermelde verschijnselen overeen met die, welke men hier heeft waargenomen, zooals het geluid van zwaar geladen voortrollende wagens, van sterke lucht- en aardschuddingen; maar wij missen het lichtverschijnsel, hetwelk de meteorieten veelal bij hun loop door de lucht vertoonen, vooral wanneer het nacht is, maar door de onverwachte verschijning overdag meestal niet wordt waargenomen, hetgeen ook hier het geval geweest kan zijn, daar het reeds vrij licht was en zoo weinig menschen in de open lucht waren; de mededeeling in de *Leidsche Courant*, dat te Warmond twee lichtslagen (?) waren waargenomen, heb ik door het hooren van getuigen aldaar niet bevestigd gevonden. De hoofdgetuige echter missen wij tot nu toe, namelijk de op de aarde gevallen meteoriet; de door mij in de *Haarlemsche Courant* gedane uitnoodiging om naar zwarte steenen te zoeken, heeft ook nog geen resultaat opgeleverd; Haarlem heeft in zijn omgeving zooveel weinig bezochte duingronden en de zee zoo dicht bij zich. Daarenboven weten wij dat ook vuurbollen in onzen dampkring zich vertoonen, waaruit geen meteoorsteenen op onze aarde vallen, maar die door de samengeperste lucht als door een elastiek kussen worden teruggestooten en het verschijnsel van ricocheteeren vertoonen; sommige vuurbollen schijnen ook geheel uit gassen en dampen te bestaan, zooals b. v. die welke op 4 Maart 1863 in ons geheele vaderland werd waargenomen en in den omtrek van Eindhoven uiteenspatte (zie *Album der Natuur* 1863). Ik had gehoopt dat de zwarte vlekken op de voorwerpen bij Bosbeek mij meteoorstof zouden hebben doen ontdekken, doch een nauwkeurig microchemisch onderzoek heeft mij overtuigd dat zij uit roetzwart en fijne coaksdeeltjes bestonden en dus uit de schoorsteenen van den Cruquius of van de Duinwatermaatschappij afkomstig waren; het feit echter dat dit neervallen van roetzwart in eene korte tijdsruimte schijnt gebeurd te zijn na een volkomen windstilte, is, in verband met de waargenomen luchtstooten, toch van groot gewicht.

Ofschoon ik er bepaald op drukken moet, dat ik alleen een vermoeden uitspreek, waarvoor voldoende bewijsgronden nog ontbreken, waag ik het de volgende verklaring van het verschijnsel te geven: een meteoriet is den 17den Maart tot onze aarde gekomen, en wel in de nabijheid van Haarlem, en heeft daar de lucht- en aardschudding voortgebracht, die allen zoozeer met angst en schrik heeft vervuld. Wat een meteoorsteen of een meteoorijzermassa is, die wij na den val van de aarde oprapen, weten wij; ten minste wij hebben ze gezien, gewogen en zoo goed mogelijk scheikundig onderzocht; maar wat die meteoriet in de hemelruimte is, vóór dat hij in onzen dampkring komt, en wat daarmede in onzen dampkring gebeurd is vóórdat hij op onze aarde valt, daarvan weten wij niets. Uit een massa, die volgens benaderde parallax-waarnemingen vele mijlen boven de oppervlakte der aarde verwijderd schijnt en daarbij een lichtbol vertoont van de grootte der maan, zoodat men volgens die gegevens aan die massa een volumen van vele kubieke mijlen moet toekennen, valt op de aarde een steen- of ijzermassa, van de grootte van een kippenei tot eenige weinige kubieke palmen. Zulk een val gaat altijd gepaard met één of meer hevige slagen, met een geraas, hetwelk de getuigen vergelijken met het rollen van zware wagens over een harden weg en op de plaats van den val met een gefluit als van een door de lucht vliegenden kanonkogel. Daarbij heeft men steeds sterke luchtstooten en trillingen van de huizen waargenomen, die de waarnemers zoozeer met angst en schrik vervulden, dat de meesten aan het vergaan der aarde geloofden; ook de dieren werden hierbij zeer onrustig; de Heer Amersfoordt vermeldt dat ook op 17 Maart de toen juist gemolken koebeesten op de Badhoeve zeer onrustig werden, anderen dat hunne honden verschrikkelijk te weer gingen, en een dame in Haarlem deelde mij mede dat hare kippen op het oogenblik der schudding uit het hok in den tuin vlogen en toen op een voor haar nog te vroegtijdig uur begonnen te kakelen.

Bij zulk een indringen van een meteoriet in onzen dampkring moet een plotselinge, hoewel kortstondige, sterke verandering in den luchtdruk plaats vinden; en om te weten of zulks den 17^{den} Maart 's morgens om 5 ^{u} 10 ^{m} gebeurd was, schreef ik daarover aan ons geacht medelid Buijs Ballot, in de veronderstelling dat op het meteorologisch Observatorium te Utrecht een doorloopend zelfregistreerende barometer voorhanden was; deze zoude daarover licht hebben kunnen verspreiden; doch ik werd in mijn verwachting teleurgesteld door de mededeeling, dat de zelfregistreerende barometer alleen elke vijf minuten aanteekende, en het geheele verschijnsel had slechts vijf seconden geduurd. Doch de door velen waargenomen luchtstooten, het oogenblikkelijk uitzuigen van roet en sintels uit de schoorsteenen te Heemstede en het nederstorten daarvan op Bosbeek, schijnen op zulk een sterke kortstondige luchtverdichting en verijling te wijzen, welke natuurlijk aan onzen weeken alluvialen grond een golvende beweging heeft kunnen mededeelen.

Indien wij ten slotte nagaan, welke schudding een eenvoudige bliksemslag in onze woningen kan veroorzaken zonder ze nog te treffen, en wij de nietigheid van dit verschijnsel vergelijken met het grootsche van een met planetarische snelheid tot onze aarde komenden meteoriet, behoeven wij ons waarlijk niet te verwonderen over een daardoor voortgebrachte lucht- en aardschudding, zooals wij die in Haarlem en omstreken op 17 Maart j.l. hebben waargenomen.

UEBER EIGENTHUEMLICHE KRYSTALLGEBILDE

IN EINEM

VULKANISCHEN GESTEIN VON DER INSEL TIMOR.

VON

BEHRENS.

Die untersuchten Gesteinsproben sind von zweierlei Art: ellipsoïdische Rapilli von schwarzem Obsidian und Pechstein und ein graues feinporöses Gestein, mit aufsitzendem schwarzem Pechstein. Beide stammen aus dem mittleren Theil der Nordküste von Timor, theils von Batoe Penoe bei Mambessie, theils aus der Nähe von Niti.

Die glasigen Rapilli sind einem Conglomerat entnommen, das hinter Atapoepoe mit mauerähnlich steilem Absturz den Serpentin (verwitterten Gabbro) dieses Theiles der Küste begrenzt.

Sie erweisen sich beim Schleifen ausserordentlich bröcklich, sind faserig entglast und perlitisch zerklüftet. Ausnahmsweise finden sich darin auch die weiter unten zu beschreibenden kranzförmigen Entglasungsprodukte, in vereinzelten Exemplaren. An Salzsäure geben sie ein wenig Ca und Al neben viel Fe ab.

Das graue Gestein von der Felsmasse Batoe Penoe und die damit übereinstimmenden Stücke von Niti zeigen einen allmähligen Uebergang von schwarzer halb glasiger Masse, die eine Schicht von 3– 4 Cm. bildet, zu aschgrauem, feinporösem Andesit, auf dessen Bruchfläche von Einsprenglingen nur vereinzelte matte Feldspate zu erkennen sind. Der Wunsch, den Uebergang von der glasigen zu der »steinigen"

Variëtät zu studiren veranlasste die Untersuchung des schwer zu präparirenden Gesteins, bei welcher sich das Hauptaugenmerk alsbald auf die höchst sonderbaren Entglasungsprodukte richtete.

Die Glasbasis ist von ähnlicher Beschaffenheit, tritt in ähnlichen Flecken und mit derselben Umwandlung auf, wie in der glasreichen Lava vom Telaga Bodas, Java (*Beitr. z. Petrog. d. J. Arch.* 2 Stück, S. 20 in Werk. d. Ak. z. Amsterd. 1882). Aetzversuche zeigten, dass Salzsäure die grösseren Feldspatkryställchen und die Glasbasis angreift. Die Lösung enthält neben viel Eisen Calcium und Aluminium in erheblicher, Natrium und Kalium in geringer Menge.

Das Gestein ist ein Augit-Andesit mit mikrolitisch entglaster Grundmasse.

Die Feldspatmikroliten sind sehr dünn, spiessförmig, sie bieten übrigens nichts bemerkenswerthes. Die Augitmikroliten zeigen in verschiedenen Scherben so ungleichen Habitus, dass ein glücklicher Zufall dazu gehört, alle Formen in einem und demselben Präparat zu vereinigen. Bald sind sie kurz und dick, wie zerbröckelt, bald stabförmig und dann gewöhnlich gegliedert. Bisweilen zeigt diese Gliederung noch die Eigenthümlichkeit dass die einzelnen Stücke, aus denen sich das Stäbchen zusammensetzt, mit Vorsprüngen übereinandergreifen, wie die Schuppen einer Panzerkette. Ich habe nicht ermitteln können, ob es sich hierbei um körperliche Vorsprünge oder nur um einen eigenthümlichen Lichteffect handelt.

In einem Präparat treten die Stäbchen zu Dendriten zusammen, deren Winkel auf die gewöhnliche Zwillingsbildung nach dem Orthopinakoïd schliessen lassen.

Eben so häufig als die graden sind krumme Stäbchen und beide, grade wie krumme haben Neigung, zu sternförmigen Aggregaten zu verwachsen.

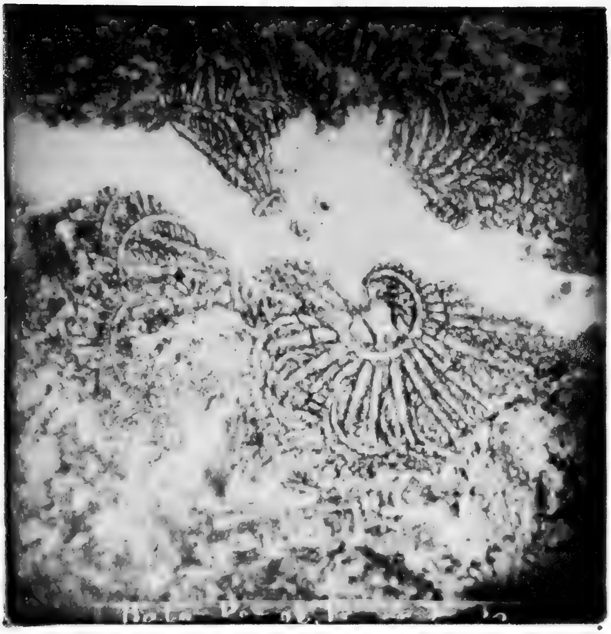
Die auffallendsten Gebilde entstehen durch Dendritenbildung an krummen Stäbchen, wovon die beigefügte Photographie ein besonders gut ausgebildetes Exemplar darstellt. Leider hat dasselbe bei dem Auflegen des Deckglases auf den ungewöhnlich dünnen Schliff einen Riss bekommen und war in einem halben Dutzend Präparaten kein zweites von solcher Grösse und Regelmässigkeit aufzufinden.

Durch gelindes Glühen und durch Digestion der Präparate mit Salzsäure werden diese sonderbaren Dinge nicht verändert, durch schwache Flussäure lassen sie sich isoliren und dann zerfallen, bei beginnender Auflösung die Arme sowohl wie das Centrum in länglich runde Stückchen, den oben erwähnten kurzen Augitmikroliten entsprechend, denen sie auch in ihrem Verhalten zu polarisirtem Licht gleichen.

Wenn man den Gedanken an organischen Ursprung dieser Ophiurenähnlichen Gebilde hat fallen lassen, wird man an die Spinnen ähnlichen Aggregate von Trichiten in manchen Obsidianen und Pechsteinen erinnert und sucht unwillkürlich im Centrum eine solide Scheibe, dem centralen Knötchen jener entsprechend. Genauere Untersuchung zeigt indessen, dass die gegliederten Arme aus einem ebenfalls gegliederten *Ring* entspringen, der nicht allemal geschlossen ist, und weiter, dass im Innern dieses Ringes auch radiale Verzweigungen vorhanden sind, den nach Aussen sich ausbreitenden »Armen" gegenüber gestellt. Freilich sind dieselben rudimentär geblieben und nicht immer auf den ersten Blick richtig zu deuten. Nach diesen Befunden sind die fraglichen seltsamen Objecte den Dendriten zuzuordnen. Sie gehören in einerlei Kategorie mit den borstigen Trichiten des glasigen Liparits vom Theresienhügel bei Tarczal, den Vogelsang beschrieben und abgebildet hat (in: Die Krystalliten, herausg. v. Zirkel), mit gewissen geschlossenen Formen von Eisblumen, die bei anhaltendem Frost an den Fenstern unbewohnter Räume zu Stande kommen und mit kranzförmigen Dendriten, die ich durch schnelle Sublimation kleiner Quantitäten von Indigo erhielt.

Den Trichitspinnen dürften vielmehr die weiter oben erwähnten sternförmigen Drusen grader und krummer Stäbchen zu vergleichen sein.

Auffallend ist noch dass in dem besprochenen Gestein geschlossene Formen häufiger vorkommen als offene, bogen- und spiralförmige, im Gegensatz zu den Objecten, die als Analoga herangezogen wurden.



Batoe Penoe, Timor. 1:180.

Auf der Grenze zwischen der grauen und der schwarzen, halbglasigen Substanz nimmt die Zahl der Feldspatspiesse und der graden Augitstäbcheu ab, dafür treten Körnchen von Magnetit auf, die in dem grauen Gestein vermisst werden. Mit zunehmendem Glasgehalt werden die Magnetitkörnchen in dem Maasse feiner und zahlreicher, dass erst bei äusserster Dünne des Schliffes genügende Durchscheinendheit erzielt wird.

Ob aus der grauen Varietät in Folge ihrer porösen Structur das Eisenerz ausgelaugt wurde? Die ziemlich weit fortgeschrittene Verwitterung lässt das als möglich erscheinen. Jedenfalls gehört die schwarze glasige Schicht nicht einer andern Eruption an, und ebensowenig die schwarzen glasigen Rapilli und die Gesteinsproben von Niti, in denen allen sich die sonderbaren kranzförmigen Dendriten finden, in dem Gestein von Niti in gleicher Weise wie in dem beschriebenen, in den Rapilli neben überwiegenden faserigen Entglasungsprodukten.

RAPPORT

OVER DE VERHANDELING VAN DEN HEER

Dr. A. A. W. HUBRECHT

GETITELD:

OVER DE VOOROUDERLIJKE STAMVORMEN DER VERTEBRATEN.

(Uitgebracht in de Vergadering van 27 April 1883).

De Commissie, benoemd om over bovengenoemde verhandeling advies uit te brengen, heeft de eer U dienaangaande het volgende te berichten.

Naar des Schrijvers meening, zijn de stamouders der gewervelde dieren bij de Nemertinen te zoeken. Hij tracht die meening op de volgende gronden te staven.

In de slurp der Nemertinen, die ontstaat als een voor instulping vatbaar orgaan (geheel afkomstig, zoowel phylo- als ontogenetisch, uit het epiblast) en zijn weg neemt door het hersenganglion, ziet hij het homologon van het rudimentaire orgaan, dat men in de geheele reeks der gewervelde dieren aantreft: »de hypophysis cerebri." De slurpscheede der Nemertinen is volgens hem vergelijkbaar in ligging (en in ontwikkeling?) met de chorda dorsalis der gewervelde dieren.

De Heer Hubrecht gaat dan over om uitvoerig de gronden te ontvouwen en de feiten aan te voeren, welke de homologie tusschen slurp en hypophyse eenerzijds, en tusschen slurpscheede en chorda anderenzijds aannemelijk maken. Zoo wordt de onto- en phylogenetische ontwikkeling van de slurp uitvoerig besproken, de hersenen en de hersenzenuwen der gewervelde dieren met het zenuwstelsel der gewervelde dieren vergeleken, de verhoudingen der slurpscheede nauwkeurig uiteengezet en op punten van overeenkomst tusschen de embryonale chorda en de slurpscheede gewezen.

Ofschoon de Schrijver zelf uitdrukkelijk verklaart, dat de beide bovenvermelde gronden hem het gewichtigst toeschijnen, gaat hij in het tweede gedeelte zijner verhandeling na, of er nog andere punten in het maaksel der Nemertinen worden aangetroffen, waardoor de bewijsvoering ten gunste der stelling, dat de Nemertinen meer dan eenige andere groep der ongewervelde dieren naderen tot de type, waaraan de voorouders der Protochordata beantwoorden, vóórdat de gewervelde dieren zich van de primitieve ongewervelde stamouders afgesplitst hadden, gesteund zou kunnen worden. Zoo wijst hij er op, dat de darm-uitstulpingen der Nemertinen misschien als voorloopers van coelomzakken te beschouwen zijn, welke dan weder met die der Amphioxuslarve vergelijkbaar zouden wezen. Verder worden de Nemertinen en de primitief gewervelde dieren met betrekking tot het respiratorisch-olfactorisch apparaat vergelijkenderwijze beschouwd, enz.

Uit het aangevoerde blijkt derhalve, dat de Heer Hubrecht een loffelijke poging heeft gedaan om nieuwe gezichtspunten te openen, waardoor het mogelijk kan worden de schakels te vinden, die de ongewervelde dieren aan de gewervelde verbinden. Volgaarne adviseert daarom Uwe commissie om de verhandeling van den Heer Hubrecht in de werken der Akademie op te nemen.

C. K. HOFFMANN.
M. FÜRBRINGER.

Leiden en *Amsterdam*, April 1883.

BOUWSTOFFEN VOOR DE GESCHIEDENIS

DER

WIS- EN NATUURKUNDIGE WETENSCHAPPEN

IN DE NEDERLANDEN.

DOOR

D. BIERENS DE HAAN.

N°. XXIV. Twee zeldzame werken van Benedictus Spinoza.

1. Reeds vele jaren had ik in mijn bezit een kwarto-boekje »Stelkonstige Reeckening van den Regenboog. 1687 [1])"; en was ik er door onzen bibliograaf Frederik Muller op gewezen, dat de ongenoemde schrijver Benedictus de Spinoza was. Onlangs kwam dit werkje weder ter sprake, toen de Hoogleeraar Land, bezig de werken van Spinoza uit te geven, mij een ander exemplaar toonde, dat afkomstig was van de Koninklijke Bibliotheek in den Haag. Maar achter dit laatstgenoemde kwam nog een ander werkje voor, met geheel andere letter gedrukt, en van geheel anderen inhoud »Reeckening van Kanssen [2])". Konde dit misschien dan ook van Spinoza zijn? De eerst opkomende gedachte was ontkennend; hoogstwaarschijnlijk was het een zeker niet zeldzaam verschijnsel van een verzamelband van twee boeken, in hetzelfde formaat, misschien van ongeveer denzelfden tijd, hier nog (hetgeen trouwens niet zelden geheel pleegt te ontbreken) beide van wiskundigen inhoud. Meermalen heb ik mijzelven veroorloofd, zulke verzamelbanden, van zeer verschillenden inhoud somwijlen, weder uiteen te nemen en ieder afzonderlijk daarin voorkomend werk telkens zijne eigene plaats te geven. Toen ik die Reeckening van kanssen zag, kwam

zij mij niet onbekend voor; en werkelijk vond ik haar dan ook terug in mijne portefeuille van brochuren in 4^0 over de theorie der waarschijnlijkheidsrekening; zij droeg de duidelijke sporen van af te stammen uit een verzamelband, even als dit bij mijn exemplaar van het andere werk ook het geval was. Het te trekken besluit was duidelijk aangewezen. Van de, zoover mij bekend is, twee eenige exemplaren van beide zeldzame werken, waren die uit de Haagsche Bibliotheek bijeen; derhalve vereenigde ik spoedig weder mijne beide exemplaren, als werkelijk bijeen behoorende.

2. En nu volgde dadelijk even zeker, dat beide werken in der daad bijeen behoorden; en vervolgens, dat als N^0. 1 van Spinoza was, dit ook van N^0. 2 moest gelden, indien althans daartegen geene onoverkomelijke bezwaren bestonden. En werkelijk, een nader onderzoek leerde, dat die bezwaren ontbraken, en er van dien kant geen tegenspraak te duchten viel: integendeel, dat er in het vaderschap van Spinoza volstrekt niets ongerijmds te vinden was.

Laat ons daartoe kortelijk het een en ander uit beide werkjes aanhalen.

3. In het *Aen den lezer* van het eerste boekje herinnert hij »*de goede voorbeelden van de Heer Hudde, Burgemeester van || Amsterdam, in zijne verkortinge der vergelijckingen* [3]), *en || vaste en algemeene Regels der grootste en der kleynste* [4]); *van || de Heer Huygens, voorwaer den Ooghappel van alle die || geene, die deze Konsten beminnen, in verscheyde van || zyne geestige en nogtans zeer doorwerkte Schriften; en van || de Heer de Witt, in zijn leven Raedtpensionaris van Hol- || landt, in zijne klare beschrijvinge der Kegelsneden* [5]) *en || waardye van Lijfrenten tegens Losrenten* [6]).''

Deze voorbeelden »*om de on- || geleerde te hulp te komen*'' wil hij navolgen, »*en met den Regenboogh als van den || grondt... beginnen.*''''

In het boekje zelf zegt hij »Dewijle dan den Regenboogh, dat heer- || lijck teecken des Verbonts voor de Godtsge- || leerde, by de natuurkundige volgens de gront- || wetten door Godt de Heere de geschapene || dingen medegedeelt, wert geoordeelt veroor- || zaeckt te werden door de refractie en reflexie || van de stralen van de Zon, vallende op een || ontallijcke menighte van kleyne droppelen || waters; zoo is het zeer aanmerkens weerdigh || voor de jonge liefhebbers der Wiskonsten, || dat haeren groten voorganger de Heer Des- || cartes niet alleen aanwijst, dat de onderste en || voornaemste Regenboogh wert gezien door || middel van twee refractien, en een reflexie, || en de bovenste door twee refractien en twee reflexien, en daerom zigh flaeuwer vertoont," waarbij hij later voegt dat »zijn halven mid- || dellijn (van den kleynsten) niet groter kan zyn als 41 graden 47 || minuten, en . . . zyn halven middellyn (van den grootsten) niet klynder kan zyn || als 51 graden, 37 minuten."

En deze verschillende stellingen bewijst hij dan meetkundig.

En dit is dan het boekje waarvan de uitgever van de Nagelaten Geschriften van B. D. S. [7]) gewaagt in zijn VOORREDEN, 4e blz. »'t en || waar misschien een klein Geschrift van de Regenboog, || 't welk hy, gelijk men weet, gemaakt heeft, en dat || zo hy 't niet verbrant heeft, gelijk gelooft word, || noch by d'een, of d'ander, zonder dat men weet by || wie, berust."

4. In het tweede boekje komen voor V. VRAEG-STUCKEN (blz. 1—4): en daarop de kloving (ontbinding) van het EERSTE VRAEG-STUCK in een EERSTE en TWEEDE VOORSTEL met hun WERKING EN BEWIJS. Het laatste gedeelte is met veel kleinder letter gedrukt, om het nog op die 8ste bladz. te krijgen: ten bewijze, naar ik meen, dat dit hier het werk eindigt, en wij niet slechts het eerste blad van een grooter werk voor ons hebben Dit eerste Vraeg-stuck luidt aldus (blz. 4):

A. en B. speelen tegens malkande- || ren met 2 *steenen op dese Conditie, dat || A. zal winnen als hy* 6 *oogen werpt, || maar B. zal winnen als hy* 7 *oogen || werpt. A zal eerst eene werp doen, || daer na B twee werpen achtervolgens || dan weder A twee werpen, en zoo || voorts* (namelijk telkens twee werpen) *tot dat d'een of d'ander zal win- || nen. De vrage is in wat reden de kans || van A staet tegens die van B? Ant- || woort als* 10355. *tot* 12276.

Nu komt in de Nagelate Schriften van B. D. S. onder zijne Brieven op bladz. 582 de »DRIEENVEERTIGSTE BRIEF" voor van B. D. S. *aan* J. v. M.; en daarin worden eenige zeer eenvoudige gevallen van wiskundige hoop behandeld met dezelfde manier van redeneeren en betoogen.

Zonder nu te willen beweren, dat uit deze vergelijking zoude blijken, dat het boekje van Noot 2 zeker aan SPINOZA moet worden toegeschreven, besluit ik echter alleen, dat in zulk toeschrijven niet de minste ongerijmdheid is: en deze vergelijking derhalve het vroeger genomen besluit in geen opzicht kan verzwakken.

5. Vraagt men, hoe komen beide werkjes zoo bijeengevoegd, en alsdan zoo los in de wereld gezonden, dan behoeft dit niet te verwonderen. Hoe dikwerf toch komt het niet voor bij de schrijvers van dien tijd, dat achter een werk van bepaalden inhoud over zeevaartkunde. roei- en peilkunde, busschieterij, enz., een of meer aanhangsels gevonden worden, die met het werk volstrekt in geen opzicht verbonden zijn, maar slechts dienen tot vermaak en oefening van den lezer.

AANTEEKENINGEN.

---

1)* STELKONSTIGE || REECKENING || VAN DEN || REGENBOOG, || *Dienende tot naedere samenknoping* || *der Natuurkunde met de Wiskonsten.* || Vignette: een sphaera armillaria. || IN 'SGRAVENHAGE, || Ter Druckerye van LEVYN VAN DYCK, || M.DC.LXXXVII. 4°.

Verso van den titel eene aanhaling uit „*Cicero Tusculanarum quaestionum* || *Lib.* 1. *in princ.* || In summo apud illos honore Geometria || fuit, itaque nihil Mathematicis illustrius. || At nos metiendi rationandique utilitate hujus || artis terminavimus modum. || DAT IS || " en dan volgt eene Hollandsche vertaling.

Het „*AEN DEN LEZER,*" (2 blz.). Dan A—C. Blz. 1—20 het werk zelf.

2)* REECKENING || VAN || KANSSEN. Signatuur A, blz. 1—8. 4°.

3)* In de uitgave (tweede) van de „Geometria a Renato des Cartes" door FRANCISCUS VAN SCHOUTEN in 4° (zie Bouwstoffen XIII Noot 9) komen voor in het eerste deel.

Blz. 401—405. Een brief van Johannes Hvdde aan Franciscus a Schooten gedateerd „Amstelaedami ipsis Calendis Aprilis 1658" ter geleide van

Blz. 406—506. JOHANNIS HUDDENII || EPISTOLA PRIMA || DE || REDVCTIONE || AEQVATIONVM.

4)* Blz. 507—516. JOHANNIS HUDDENII || EPISTOLA SECVNDA || DE || MAXIMJS ET || MINIMIS.

5)* En in het tweede deel.

Blz. 153—340 met den titel

JOHANNIS DE WITT || ELEMENTA || CURVARUM || LINEARUM || Edita || Operâ FRANCISCI à SCHOOTEN, || in Academia Lugduno-Batava Matheseos || Professoris. || Vignette: Een boom met Minerva en haar uil, met het bijschrift NE EXTRA OLEAS. || *AMSTELAEDAMI,* || Apud Ludovicum & Danielem Elzevirios, || CIↃIↃCLIX. 4°.

Verso van titel wit. Dan de opdracht „*Clarissimo, Doctissimoque Viro,* || Do. FRANCISCO à SCHOOTEN. || IOHANNES DE WITT || " gedateerd „*Hagae Com. VIII Octobr. An-* || *ni* M.DC.LVIII." (3 blz.). Verso 4 figuren.

Dan
X—Hh. Blz. 159—242. LIBER PRIMVS. CAPVT I—IV.
Hh—Vu. Blz. 243—340. LIBER SECVNDVS. CAPVT I—IV.

6)* WAERDYE || Van || LIJF-RENTEN || Naer proportie van || LOS-RENTEN || Boekdrukkers-ornament. || IN 's GRAVEN-HAGE || By JACOBUS SCHELTUS, Ordinaris Druc- || ker van de Edele Groot Mog. Heeren Staten || van Hollandt en West-Vrieslandt, woo- || nende op het Binnen-Hof. || Anno 1671. in folio.

A—F. Blz. 1—24.

Van dit zeldzame werk werd ter gelegenheid van het Eeuwfeest van het Genootschap Een onv. Arbeid enz. door mij een fac-simile herdruk bezorgd onder den titel:

6a) FEEST-GAVE || VAN HET || WISKUNDIG || GENOOTSCHAP || TE || AMSTERDAM || ONDER DE ZINSPREUK: „Een onvermoeide Arbeid komt Alles te Boven." || TER GELEGENHEID DER VIERING || VAN ZIJN || HONDERDJARIG BESTAAN. || Boekdrukkers-ornament, || HAARLEM || JOH. ENSCHEDÉ EN ZONEN. || 1879. folio.

Na het VOOR-WOORD (blz. 1—4) komt daarin nog eerst voor

6b)* Corte onderrichtinghe die- || nende tot het maecken vande re- || ductien vande Iaer-custingen tot gereede || penningen, om dien-volgende te eysschen eñ || ontfangen den veertichsten penning op alle || vercochte of vervreemde onroerende || goeden, volgende tplacaet der Hee- || ren Staten vanden xxij. De- || cembris vijftienhondert || achtentnegentich. || Vignette: het wapen van Leiden met randschrift HAEC LIBERTATIS ERGO. || Gedruct opt raedhuys der stadt || Leyden, inden Iare 1599. 4°.

A—C. 20 blz. ongenummerd.

Met

6c)* Aenhang totte voorgaende corte on- || derrichtinge, dienende tot het maken vande || reductien.

A. 8 blz. ongenummerd.

7)* *De Nagelate* || SCHRIFTEN || *van* || B. D. S. || *Als* || ZEDEKUNST, || STAATKUNDE, || VERBETERING van 't Verstant. || BRIEVEN en ANTWOORDEN. || *Uit verscheide Talen in de Neder-* || *landsche gebragt.* || Boekdrukkersornement. || Gedrukt in 't Jaar M.DC.LXXVIII. 4°.

Verso van titel wit. VOORREEDEN 44 blz. ongenummerd. Daarop fransche titel.

ZEDEKUNST || In vijf delen onderscheiden; || *Daar in gehandelt werd* || I. Van GOD. || II. Van de Menschelijke ZIEL. || III. Van de Natuur en Oorsprong der HARTSTOCHTEN. || IV. Van de Menschelijke DIENSTBAARHEIT. || V. Van de Menschelijke VRIJHEIT. || *Alles op een Meetkundige orde ge-* || *schikt en betoogt.*

Verso van dezen titel wit; dan goed portret van JACOBUS AMINIUS door *Evert van Swynen*, in folio, dus ingevouwen.

A—Pp. Blz. 1—300 het werk.

Daarop nieuwe titel:

STAATKUNDIGE || VERHANDELING ; || Daar in getoont werd hoe een || Staat, in de welk *d'Eenhoofdige Heerschappy* || plaats heeft, gelijk ook de geen, daar in *de Voor-* || *naamsten* 't gezach hebben, ingestelt moet || worden, op dat de zelfde in geen Tyran- || nie zou vervallen, en de Vrede en || Veiligheit der Burgeren daar in || ongeschonden blijven.

In verso van den titel „Brief." Dan

Pp—Eee. Blz. 303—403. Hooftdeel I—XI. *„Het overige ontbreekt"*.

Vervolgens de titel

HANDELING || *Van de* || VERBETERING || *Van* || 'T VERSTANT. || En te gelijk van de Middel om het zelf- || de volmaakt te maken.

In verso „BERICHT || *Aan de* || LEZER."

Fff—Kkk. Blz. 407—446 het werk.

Ten slotte de titel

BRIEVEN || van verscheide geleerde Mannen || *Aan* || B. D. S. || Met des zelfs Antwoort; || *Grotelijks tot Verklaring van des zelfs andere Wer-* || *ken dienende.*

Verso van dien titel wit.

Lll—Ppp. Blz. 449—669 [met een verbeterblad van blz. 511, 512].

„Misstellingen" (2 blz.) ongenummerd.

VERSLAG

OMTRENT DE DOOR

Dr. J. D. R. SCHEFFER

AANGEBODEN VERHANDELING:

ONDERZOEKINGEN OVER DE DIFFUSIE VAN EENIGE ANORGANISCHE EN ORGANISCHE VERBINDINGEN.

(Uitgebracht in de Vergadering van 26 Mei 1883).

De verhandeling, door Dr. SCHEFFER aan de Akademie aangeboden ter plaatsing in de Verslagen en Mededeelingen, bevat een vervolg op zijn onderzoek omtrent de diffusie-constante van zuren en zouten in waterige oplossing, hetwelk in Deel II Stuk III reeds is afgedrukt.

Naar dezelfde methode heeft Dr. SCHEFFER thans de diffusie-constante bepaald van zoutzuur, van vier minerale zouten ($NaCl$, $NaNO_3$, $AgNO_3$, $Na_2S_2O_3$), bij verschillende oplossings-sterkte, en tevens die van vijf organische stoffen (Ureum, Wijnsteenzuur, Druivenzuur, Natriumformiaat en Natriumsulphobenzoaat).

In de eerste plaats geeft de schrijver een uitgebreid stel waarnemingen omtrent de diffusie van keukenzout, bij temperaturen tusschen $5^1/_2$ en 8^0, en bij verschillende sterkten. Zooals wij in ons vorig verslag opmerkten, scheen ons het keukenzout het best geschikt, om de uitkomsten naar Dr. SCHEFFER's methode te vergelijken met die van vorige waarnemers. De diffusieproeven zijn thans door Dr. SCHEFFER verricht, en daaruit blijkt, dat dezelfde waarde voor de diffusie-constante verkregen is als door GRAHAM volgens eene min of meer overeenkomstige, en door SCHUHMEISTER volgens eene andere methode *). De uitkomsten van anderen (zooals BEILSTEIN en ook LONG) zijn van minder waarde, en kunnen dus niet ter vergelijking en controle dienen

De nauwkeurigheid, door Dr. SCHEFFER bij zijne proefnemingen bereikt, is even groot als die zijner voorgangers GRAHAM en SCHUHMEISTER. De cijfers verdienen hetzelfde zoo niet nog grooter vertrouwen.

Voorts heeft de schrijver in dit onderzoek voornamelijk den invloed nagegaan der oplossingssterkte op de diffusieconstante. Zooals wij in ons vorig verslag opmerkten, was men omtrent dien invloed nog geheel in onzekerheid. De meeste bepalingen waren niet nauwkeurig genoeg om dien aan te toonen. Slechts twee waarnemers (WEBER en SCHUHMEISTER) hebben gemeend dien invloed uit hunne waarnemingen betreffende enkele zouten te mogen afleiden, maar hunne uitkomsten zijn in tegengestelden zin uitgevallen.

Dr. SCHEFFER vindt thans bij zoutzuur eene zeer sterke vermindering van k met de vermindering in sterkte, — bij keukenzout weinig of geene verandering, daarentegen bij twee nitraten (inzonderheid bij zilvernitraat) en bij natriumhyposulphiet eene vermeerdering van k. Die laatste uitkomst stemt overeen met WEBER's ervaring omtrent zinksulphaat.

Terecht, naar ons inzien, knoopt Dr. SCHEFFER aan deze feiten de onderzoekings-hypothese vast, dat de invloed der oplossingssterkte op k is toe te schrijven aan moleculaire veranderingen, welke bij de oplossing en de verdunning der oplossing tot stand komen, en deelt hij zijn voornemen mede om dat belangrijke verschijnsel bij deze nitraten en andere zouten nog uitvoeriger te onderzoeken.

Het komt ons hoogst waarschijnlijk voor, dat de vermindering

---

*)

GRAHAM	vond	bij	5^0	K	=	0.76^5	(Berekend door STEFAN).
SCHEFFER	»	»	$5\frac{1}{2}^0$	»	»	0.71	tot 0.76 (in 10 proefn. bij verschillende sterkte).
Id.	»	»	6^0	»	»	0.75	» 0.76
Id.	»	»	7^0	»	»	0.75	» 0.78
Id.	»	»	8^0	»	»	0.82	
SCHUHMEISTER	»	»	10^0	»	»	0.84—0.92	
GRAHAM	»	»	10^0	»	»	0.91	

van het diffusievermogen van het zoutzuur bij afnemende sterkte in verband staat met de hydraatvorming. Het is daarom wenschelijk, dat de schrijver de sterkte van zijn zoutzuur berekene en uitdrukke in moleculen. Naar eene door ons gemaakte berekening waren die sterkten ongeveer:

1 mol. H Cl op 8 mol. water
1 » H Cl » 44 » »

Nu ligt de zamenstelling $HCl \cdot 8\, H_2O$ misschien nog buiten de grens, waarbij het chloorwaterstof met water bij de gewone temperatuur een *niet* dissociabel hydraat vormt *). Een dissociabel hydraat moet enkele vrije of althans lager gehydrateerde zoutzuurmoleculen bevatten, welke sneller diffundeeren dan de moleculen van een hooger en standvastig hydraat. Daaruit volgt dat aan sterker zoutzuur eene grootere diffusieconstante moet toekomen, dan aan meer verdund; en daarom achten wij het van belang, dat deze proefneming met nog sterker zoutzuur herhaald worde.

Zeer merkwaardig is het, dat zilvernitraat zulk eene sterke vermindering van diffusievermogen vertoont, wanneer de oplossing sterker wordt, en in mindere mate natriumnitraat. Voorzeker mag hieraan de hypothese vastgeknoopt worden, dat bij meerdere verdunning de moleculairaggregaten van het zout verdere afbreking ondergaan, en dat de zoutmoleculen zich sneller kunnen bewegen of minder weerstand bieden aan de aantrekking van het water. Die meening kan een steun ontleenen aan het feit, dat sommige zoutoplossingen bij sterker verdunning nog afkoeling, dus een warmteverbruik vertoonen, even als gesmolten (dus dichtere) zouten eene grootere oplossingskoude vertoonen dan dezelfde in gekristalliseerden

---

*) Volgens BERTHELOT vormt H Cl bij 12° met 6,5 mol. H_2O een hydraat, waaruit een stroom koolzuur bijna geen gasvormig H Cl medeneemt; waarschijnlijk ligt die grens zelfs nog hooger (bij meer water). Hij zegt: Cependant la composition $HCl \cdot 6{,}5\ H_2O$ ne présente pas encore la fixité absolue d'une composition définie; c'est seulement lorsque l'eau surpasse 8 ou 9 H_2O, que l'acide chlorhydrique volatilisé dans le courant gazeux cesse d'agir d'une manière appréciable sur l'azotate d'argent. (*Essai de mécanique chimique* II, p. 149).

toestand. Eene sterke oplossing van kalisalpeter ondergaat door verdunning eene aanmerkelijke daling in temperatuur *). Proefnemingen omtrent de diffusie van dit zout bij afnemende oplossings-sterkte zullen waarschijnlijk evenzoo eene toeneming van k aantoonen.

In de formule, naar welke Dr. SCHEFFER de diffusieconstante k berekend heeft, wordt de diffusie evenredig aan het sterkteverval, maar onafhankelijk van de sterkte zelve aangenomen. Thans blijkt het, dat k bij sommige zouten voor alle sterkten niet dezelfde waarde heeft. Bij de proefnemingen met sterkere zoutoplossingen komen echter in de diffusiecylinders alle sterkten der oplossing in de verschillende lagen voor — van de aanvangssterkte tot de sterkte nul toe. Voor de berekening van k schijnt het dus in die gevallen wenschelijk aan de formule eene wijziging aan te brengen, van dien aard dat de grootheid k daarin als eene functie van de sterkte voorkomt. Wij geven den schrijver in overweging om bij de voortzetting van zijn onderzoek naar eene uitdrukking daarvoor te zoeken, en met behulp der gewijzigde formule de waarde van k te berekenen voor die stoffen, welker diffusievermogen met de sterkte der oplossing merkbaar verandert.

Aangezien wij blijkens bovenstaande uiteenzetting meenen, dat Dr. SCHEFFER door zijn onderzoek eenige nieuwe en belangrijke feiten op het gebied der diffusie van stoffen in waterige oplossing aan 't licht heeft gebracht, welke hem bovendien tot verder onderzoek zullen leiden, zoo hebben wij de eer der Akademie voor te stellen, deze verhandeling in hare Verslagen en Mededeelingen op te nemen.

Leiden en *Utrecht*, 24 Mei 1883.

J. M. VAN BEMMELEN.
H. C. DIBBITS.

*) Omtrent kalisalpeter spreekt LOTHAR MEIJER reeds bovenstaande hypothese uit in de 2de uitgave van zijne *Moderne Theorien der Chemie* (Bladz. 235) namelijk: dass beim Auflösen zuerst noch grössere Gruppen von Molekeln ihren Zusammenhang bewahren, bei grösserer Verdünnung der Lösung aber auch dieser durch die Wirkung des Lösungmittels aufgehoben und dabei Wärme verbraucht werde.

ONDERZOEKINGEN

OVER DE

DIFFUSIE VAN EENIGE ANORGANISCHE EN ORGANISCHE VERBINDINGEN.

DOOR

J. D. R. SCHEFFER.

De mededeeling in de volgende bladzijden vervat, geeft een verslag van mijne voortgezette onderzoekingen naar de diffusiesnelheid van in water opgeloste organische en anorganische verbindingen. De proeven werden daartoe op dezelfde wijze ingericht als in mijne vorige verhandeling *) beschreven is; alleen maakte ik thans gebruik van kleiner cilinders, om daardoor den duur der proefnemingen zelve te bekorten en de kans op temperatuurwisselingen gedurende den duur der proef geringer te maken.

De buret, die telkens tot het vullen der cilinders werd gebezigd, was zoodanig verdeeld dat 1 gram water door 0.994 CC. der buret werd aangewezen; de hieronder geplaatste tabel geeft de afmetingen der gebezigde cilinders aan, waarvan de waarden op de wijze, in mijne vorige mededeeling beschreven, waren bepaald.

Cil.	vol. uit gewicht in CC.	vol. naar buret in CC.	$\sqrt{h^2+4r^2}$ in cM.	h in cM.	h^2.	r^2.	Cil. te vullen met
1.	55.70	55.31	6.08	4.66	21.72	3.805	36.9 CC. der buret.
2.	51.70	51.34	6.00	4.70	22.09	3.501	34.2 » » »
3.	53.18	52.81	6.04	4.71	22.18	3.594	35.2 » » »
4.	48.69	48.35	5.85	4.53	20.52	3.421	32.2 » » »
5.	53.70	53.32	6.115	4.82	23.23	3.546	35.5 » » »
6.	49.29	48.94	5.86	4.53	20.52	3.464	32.6 » » »
7.	53.46	53.09	6.03	4.67	21.81	3.644	35.4 » » »
8.	50.90	50.54	5.94	4.60	21.16	3.522	33.7 » » »
11.	47.96	47.62	5.83	4.53	20.52	3.370	31.7 » » »

*) *Verslagen en Mededeelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen*, Afdeeling Natuurkunde, 2de Reeks, Deel XVII.

Chloornatrium.

Uit het gewone zout werd het zuivere naar de methode van MARGUÉRITTE (door leiden van zoutzuurgas in eene verzadigde zoutoplossing) bereid, en vervolgens in water tot oplossingen van verschillende sterkte opgelost. De sterkten der oplossingen werden bepaald door indampen van een bepaald volumen in een kroes op het waterbad, drogen (zwak gloeien) en wegen van de rest. De onder A en B vermelde proeven werden gelijktijdig in het werk gesteld en verkeerden dus onder geheel dezelfde omstandigheden gedurende den geheelen duur der diffusie.

A. 100 CC. der oplossing bevatten 5.45 gram NaCl, nabij overeenkomende met NaCl. 58.1 H_2O.

Cil.	gevuld met	25 CC. tot 125 verdund, bevatten	rest diff.cil. tot 126.05 verdund, bevatten	duur der diff.	in den diff. cil. teruggebleven deel.	hoogte des watersp. boven den diff cil.	temp.	k.
3.	35.2	15 CC. = 0.1635 gr.	15 CC. = 0.1568 gr.	$5^d 3^u$	0.6869	13 mM.	$5^1/_2{}^\circ$	0.74
4.	32 2	15 » = 0.1635 »	15.05 » = 0.1380 »	$5^d 2^5/_6{}^u$	0.6586	9 »	$5^1/_2{}^\circ$	0.76

B. 100 CC. der oplossing bevatten 26.3 gram NaCl, nabij overeenkomende met NaCl. 11 H_2O.

Cil.	gevuld met	25 CC. tot 260 verdund, bevatten	rest diff.cil. tot 260 verdund, bevatten	duur der diff.	in den diff. cil. teruggebleven deel.	hoogte des watersp. boven den diff cil.	temp.	k.
6.	32.6	15 CC. = 0.3793 gr.	15 CC. = 0.3342 gr.	$5^d 2^2/_3{}^u$	0.6757	15 mM.	$5^1/_2{}^\circ$	0.72
11.	31.7	15 » = 0.3793 »	15 » = 0.3203 »	$5^d 3^1/_4{}^u$	0.6660	13 »	$5^1/_2{}^\circ$	0.74

C. 100 CC. der oplossing bevatten 3.22 gram NaCl, nabij overeenkomende met NaCl. 99.4 H_2O.

Cil.	gevuld met	25 CC. tot 125 verdund, bevatten	rest diff.cil. tot 125 verdund, bevatten	duur der diff.	in den diff. cil. teruggebleven deel.	hoogte des watersp. boven den diff cil.	temp.	k.
5.	35.5	15 CC. = 0.0965 gr.	15 CC. = 0.0876 gr.	$6^d 1/_6{}^u$	0.6393	22 mM.	7°	0.78
6.	32.6	15 » = 0.0965 »	16 » = 0.0811 »	$6^d 1/_4{}^u$	0.6042	16 »	7°	0.76
7.	35.4	15 » = 0.0965 »	15 » = 0.0858 »	$5^d 23^5/_6{}^u$	0.6279	12 »	7°	0.76
11.	31.7	15 » = 0.0965 »	15 » = 0.0749 »	$5^d 23^5/_6{}^u$	0.6121	18 »	7°	0.75

D. 100 CC. der oplossing bevatten 3 gram NaCl, nabij overeenkomende met NaCl. 106.7 H_2O. De sterkte der oplossing werd bepaald door titreeren met eene zilvernitraatoplossing (kaliumchromaat als indicator).

Cil.	gevuld met	25 CC. opl. tot 125 ververdund, was		rest diff cil. tot 125 verdund, was		duur der diff.	in den diff. cil. teruggebleven deel.	hoogte des watersp. boven den diff cil.	temp.	k.
		NaCl opl.	$AgNO_3$ opl.	NaCl opl.	$AgNO_3$ opl.					
2.	34.2	1 CC, =	1.019 CC.	1 CC. =	0.972 CC.	$4^d 22^u$	0.6973	14 mM.	6°	0.75
4.	32.2	1 » =	1.019 »	1 » =	0.883 »	$4^d 22^1/_4{}^u$	0.6728	12 »	6°	0.75

E. 100 CC. der gebruikte oplossing bevatten 6.10 gram Na Cl. nabij overeenkomende met Na Cl. 51.5 H_2O.

il.	gevuld met	25 CC. opl. tot 125 verdund, bevatten	rest diff.cil. tot 125 verdund, bevatten	duur der diff.	in den diff. cil. terug-gebleven deel.	hoogte des watersp. boven den diff.cil.	temp.	k.
	34.2	25 CC. = 0.3052 gr.	25 CC. = 0.2633 gr.	6^d —	0.6306	11 mM.	$5^1/_2°$	0.725
	32.2	25 » = 0.3052 »	25 » = 0.2409 »	$6^d\ ^1/_2{}^u$	0.6128	11 »	$5^1/_2°$	0.748

F. 100 CC. der oplossing bevatten 12.53 gram Na Cl, nabij overeenkomende met Na Cl. 24.7 H_2O.

		25 CC. opl. tot 125 verdund, bevatten	rest diff cil. tot 125 verdund, bevatten					
	35.5	20 CC. = 0.5014 gr.	20 CC. = 0.4998 gr.	$5^d\ 5^u$	0.7020	11 mM.	$5^1/_2°$	0.733
	32.6	20 » = 0.5014 »	20 » = 0.4417 »	$5^d 5^5/_{12}{}^u$	0.6756	20 »	$5^1/_2°$	0.707
	35.4	20 » = 0.5014 »	20 » = 0.4850 »	$5^d\ 5^1/_6{}^u$	0.6831	13 »	$5^1/_2°$	0.733
	31.7	20 » = 0.5014 »	20 » = 0.4233 »	$5^d\ 4^1/_6{}^u$	0.6658	8 »	$5^1/_2°$	0.737

G. 100 CC. der gebruikte oplossing bevatten 26.02 gram NaCl. nabij overeenkomende met Na Cl. 11.1 H_2O.

		25 CC. tot 125 verdund, bevatten	rest diff cil. tot 125 verdund, bevatten					
	34.2	10 CC. = 0.5205 gr.	10 CC. = 0.4320 gr.	$5^d 23^2/_3{}^u$	0.6067	15 mM.	8°	0.825
	32.2	10 » = 0.5205 »	10 » = 0.3899 »	5^d —	0.5816	18 »	8°	0.823

Natriumnitraat.

Het gebruikte zout werd eenige malen uit kokend water omgekristalliseerd en daarmede twee oplossingen van zeer uiteenloopende sterkte bereid. De hoeveelheid in oplossing voorhanden zout werd bepaald door indampen van een bepaald volumen der oplossing op het waterbad, drogen in een luchtbad en wegen van de rest. Alle onder A en B vermelde proeven vonden gelijktijdig plaats.

A. 100 CC. der gebruikte oplossing bevatten 10.35 gram $NaNO^3$, nabij overeenkomende met $NaNO_3$. 43.6 H_2O.

		25 CC. tot 220 verdund, bevatten	rest diff. cil. tot 220 verdund, bevatten					
	32.2	15 CC. = 0.1764 gr.	15 CC. = 0.1521 gr.	$6^d\ 3^u$	0.6694	8 mM	$2^1/_2°$	0.615
	32.6	15 » = 0.1764 »	15 » = 0.1536 »	$6^d\ 2^3/_4{}^u$	0.6677	10 »	$2^1/_2°$	0.620
	31.7	15 » = 0.1764 »	15 » = 0.1484 »	$6^d\ 2^1/_6{}^u$	0.6634	16 »	$2^1/_2°$	0.631

B. 100 CC. der gebruikte oplossing bevatten 49.09 gram $NaNO^3$, nabij overeenkomende met $NaNO_3$. 7.7 H_2O.

		25 CC. gebruikte opl. tot 1 Liter verdund, bevatten	rest diff.cil. tot 1 Liter verdund, bevatten					
	34.2	15 CC. = 0.1841 gr.	15 CC. = 0.1778 gr.	$6^d\ 2^1/_4{}^u$	0.7060	6 mM.	$2^1/_2°$	0.587
	35.2	15 » = 0.1841 »	15 » = 0.1873 »	$6^d\ 2^u$	0.7226	8 »	$2^1/_2°$	0.556
	33.7	15 » = 0.1841 »	15 » = 0.1763 »	$6^d\ 2^1/_2{}^u$	0.7104	13 »	$2^1/_2°$	0.553

Natriumhyposulfiet.

Het zout werd eenige malen uit water omgekristalliseerd, en daarmede twee oplossingen van zeer uiteenloopende sterkte bereid, die in 100 CC. oplossing bevatten 5.6 en 26.88 gram van het gekristalliseerde zout. De hoeveelheid van het in de oplossingen voorhanden zout werd door titreeren met een jodium- en stijfseloplossing bepaald De onder A en B vermelde proeven werden gelijktijdig in het werk gesteld, en alle cilinders verkeerden dus gedurende den geheelen gang der proef onder dezelfde omstandigheden met betrekking tot de temperatuur enz.

A. 100 CC. der oplossing bevatten 5.6 gram $Na_2S_2O_3 . 5$ aq., nabij overeenkomende met $Na_2S_2O_3 . 5$ aq 240 H_2O.

Cil.	gevuld met	25 CC. tot 200 verdund, was J. opl.	rest diff. cil. tot 200 verdund, was J. opl.	duur der diff.	in den diff. cil. teruggebleven deel.	hoogte des watersp. boven den diff. cil.	temp.	k.
1.	36.9	1 CC. = 0.661 CC.	1 CC. = 0.5028 CC.	9d 21¼u	0.5154	10 mM.	10½°	0.63
6.	32.6	1 » = 0.661 »	1 » = 0.4208 »	9d 21u	0.4882	13 »	10½°	0.64
7.	35.4	1 » = 0.661 »	1 » = 0.511 »	9d 1u	0.5460	11 »	10½°	0.64
8.	33.7	1 » = 0.661 »	1 » = 0.4909 »	9d 1u	0.5509	5 »	10½°	0.61

B. 100 CC. der oplossing bevatten 26.88 gram $Na_2S_2O_3 . 5$ aq., nabij overeenkomende met $Na_2S_2O_3$ 5 aq. 43.7 H_2O.

		25 CC. tot 1 Liter verdund, was J. opl.	rest diff cil. tot 1 Liter verdund, was J. opl.					
3.	35.2	1 CC. = 0.6346 CC.	1 CC. = 0.549 CC.	8d 23½u	0.6144	14 mM.	10½°	0.53
4.	32.2	1 » = 0.6346 »	1 » = 0.4795 »	9d 1½u	0.5866	7 »	10½°	0.53
5.	35.5	1 » = 0.6346 »	1 » = 0.5667 »	9d —	0.6289	10 »	10½°	0.53
11.	31.7	1 » = 0.6346 »	1 » = 0.464 »	9d —	0.5766	15 »	10½°	0.55

Zilvernitraat.

Van het zuivere zout werden drie oplossingen van verschillende sterkte bereid. De onder A, B en C vermelde proeven werden alle gelijktijdig in het werk gesteld, en verkeerden dus gedurende den geheelen gang der proef alle onder dezelfde omstandigheden. De hoeveelheid opgelost zout werd òf als chloorzilver òf door titreeren met chloornatrium-oplossing (kaliumchromaat als indicator) bepaald.

A. 100 CC. der oplossing bevatten 4.96 gram $AgNO^3$, nabij overeenkomende met $AgNO_3$. 189 H_2O.

gevuld met	25 CC oorspr. opl. tot 125 verdund, is Na Cl opl.	rest diff. cil. tot 125 verdund, is Na Cl opl.	duur der diff.	in den diff. cil. teruggebleven deel.	hoogte des watersp. boven den diff. cil.	temp.	k.
36.9	1 CC. = 0.668 CC.	1 CC. = 0.677 CC.	$4^d\ 3^u$	0.6866	13 mM.	$7\frac{1}{2}°$	0.913
32.2	1 » = 0.668 »	1 » = 0.580 »	$4^d\ 3\frac{1}{2}^u$	0.6741	13 »	$7\frac{1}{2}°$	0.895
33.6	1 » = 0.668 »	1 » = 0.619 »	$4^d\ 2\frac{1}{2}^u$	0.6874	15 »	$7\frac{1}{2}°$	0.890

B. 100 CC. der oplossing bevatten 35.97 gram $AgNO^3$, nabij overeenkomende met $AgNO_3$. 25 H_2O.

	25 CC. oorspr. opl. tot 260 verdund, is Na Cl opl.	rest diff. cil. tot 260 verdund, is Na Cl opl.					
34.2	1 CC. = 1.132 CC.	1 CC. = 1.133 CC.	$4^d\ 6\frac{1}{2}^u$	0.7316	14 mM.	$7\frac{1}{2}°$	0.763
35.2	1 » = 1.132 »	1 » = 1.156 »	$4^d\ 6\frac{1}{2}^u$	0.7253	9 »	$7\frac{1}{2}°$	0.785

C. 100 CC. der oplossing bevatten 68.58 gram $AgNO_3$, nabij overeenkomende met $AgNO_3$ 11.8 H_2O.

	25 CC. oorspr. opl. tot 1 Liter verdund, bevatten Ag Cl.	rest diff. cil. tot 1 Liter verdund, bevatten Ag Cl.					
35.5	15 CC. = 0.2171 gr.	15 CC. = 0.2432 gr.	$4^d\ 7\frac{1}{3}^u$	0.7889	9 mM.	$7\frac{1}{2}°$	0.631
35,4	15 » = 0.2171 »	15 » = 0.2339 »	$4^d\ 7\frac{1}{2}^u$	0.7609	13 »	$7\frac{1}{2}°$	0.666

Ureum.

Het uit alcohol omgekristalliseerde ureum werd in water opgelost tot eene oplossing van 3.33 gram in 100 CC. De hoeveelheid opgelost ureum werd door indampen van een bepaald volumen der oplossing op het waterbad en drogen van de rest bij 100^0 tot constant gewicht bepaald.

	26 CC. tot 220 verdund, bevatten	rest diff. cil. tot 220 verdund, bevatten					
32.2	15.05 CC. = 0.0592 gr.	15 CC. = 0.0519 gr.	$4^d\ \frac{1}{4}^u$	0.7103	6 mM.	$7\frac{1}{2}°$	0.816
32.6	15.05 » = 0.0592 »	15 » = 0.0528 »	4^d —	0.7137	8 »	$7\frac{1}{2}°$	0.809
33.7	15.05 » = 0.0592 »	15 » = 0.0550 »	$4^d\ \frac{1}{4}^u$	0.7192	6 »	$7\frac{1}{2}°$	0.815
31.7	15.05 » = 0.0592 »	15.5 » = 0.0535 »	4^d —	0.7197	8 »	$7\frac{1}{2}°$	0.791

Wijnsteenzuur en Druivenzuur.

Beide zuren werden eenige malen uit water omgekristalliseerd en daarmede oplossingen van ongeveer 5 $^0/_0$ bereid. De hoeveelheid in oplossing voorhanden zuur werd door titreeren met natriumhydroxyde en phenolphtaleïne als indicator vastgesteld. De onder A en B vermelde proeven hadden gelijktijdig plaats.

A. Wijnsteenzuur.

Cil.	gevuld met	24.95 CC. opl. tot 200 verdund, was Na OH.	rest diff cil. tot 200 verdund, was Na OH.	duur der diff.	In den diff. cil. terug-gebleven deel.	hoogte des watersp. boven den diff cil.	temp.	k.
6.	32.6	1 CC. = 0.617 CC.	1 CC. = 0.705 CC.	$4^d\ 4^5/_6{}^u$	0.8745	8 mM.	5°	0.367
8.	33.7	1 » = 0.617 »	1 » = 0.727 »	$4^d\ 5^1/_2{}^u$	0.8723	10 »	5°	0.381

B. Druivenzuur.

Cil.	gevuld met	25 CC. oorspr. opl. tot 200 verdund, was Na OH.	rest diff.cil. tot 220 verdund, was Na OH.	duur der diff.	In den diff. cil. terug-gebleven deel.	hoogte des watersp. boven den diff cil.	temp.	k.
4.	32.2	1 CC. = 0.612 CC.	1 CC. = 0.619 CC.	$4^d\ 5^2/_3{}^u$	0.8638	13 mM.	5°	0.388
11.	31.7	1 » = 0.650 » *)	1 » = 0.713 »	$4^d\ 5^u$	0.8651	10 »	5°	0.388

Natriumsulphobenzoaat.

Het gebruikte zout werd uit kokenden alcohol omgekristalliseerd. De sterkte der gebruikte oplossing was 5.16 gr. zout in 100 CC. oplossing. De hoeveelheid in oplossing voorhanden zout werd door indampen van een bepaald volumen der oplossing op het waterbad en drogen van de rest tot constant gewicht bij 100^0 bepaald.

Cil.	gevuld met	25 CC. opl. tot 220 verdund, bevatten	rest diff.cil. tot 220 verdund, bevatten	duur der diff.	In den diff. cil. terug-gebleven deel.	hoogte des watersp. boven den diff cil.	temp.	k.
1.	36.9	15 CC. = 0.0879 gr.	15 CC. = 0.0739 gr.	$8^d\ 4^1/_4{}^u$	0.5696	9 mM.	$14^1/_2$°	0.661
5.	35.5	15 » = 0.0879 »	15 » = 0.0714 »	$8^d\ 4^2/_3{}^u$	0.5720	11 »	$14^1/_2$°	0.701
6.	32.6	15 » = 0.0879 »	15 » = 0.0636 »	$7^d\ 22^2/_3{}^u$	0.5549	15 »	$14^1/_2$°	0.670
11.	31.7	15 » = 0.0879 »	15 » = 0.0624 »	$7^d\ 23^1/_5{}^u$	0.5598	10 »	$14^1/_2$°	0.659

Natriumformiaat.

Het gebruikte zout werd uit water eenige malen omgekristalliseerd. Het gehalte der oplossingen werd door indam-

*) Was verdund tot 220 CC.; deze oplossing is dus iets sterker.

pen van een bepaald volumen met zoutzuur op het waterbad, drogen en wegen van de rest bepaald.

A. 100 CC. der oplossing bevatten 2.47 gram H COO Na.

gevuld met	30 CC. tot 125 verdund, bevatten Na Cl.	rest diff.cil. tot 125 verdund, bevatten Na Cl.	duur der diff.	in den diff. cil. teruggebleven deel.	hoogte des watersp. boven den diff.cil.	temp.	k.
32.2	15 CC. = 0.0765 gr.	15 CC. = 0.0436 gr.	$8^d\ ^{11}/_{12}{}^u$	0.5310	6 mM.	8°	0.708
31.7	15 » = 0.0765 »	15 » = 0.0445 »	$8^d\ ^{5}/_{12}{}^u$	0.5505	18 »	8°	0.673

B. 100 CC. der gebruikte oplossing bevatten 5.56 gram H COO Na.

	25 CC. tot 220 verdund, bevatten Na Cl.	rest diff.cil. tot 220 verdund, bevatten Na Cl.					
34.2	15 CC. = 0.0816 gr.	15 CC. = 0.0671 gr.	$6^d\ 23^1/_2{}^u$	0.6011	15 mM.	$9^1/_2$°	0.719
32.2	15 » = 0.0816 »	15 » = 0.0605 »	$6^d\ 23^1/_6{}^u$	0.5756	16 »	$9^1/_2$°	0.721
35.4	15 » = 0.0816 »	15 » = 0.0725 »	$6^d\ 4^5/_{12}{}^u$	0.6275	20 »	$9^1/_2$°	0.740

Zoutzuur.

De vulling der cilinders verrichtte ik hier op eene andere wijze: eene buret, waarvan het onderste vernauwde gedeelte was weggenomen, werd gesloten door een kurk, waarin een tweemaal rechthoekig (eens naar beneden en eens naar boven) omgebogen buis, in 't midden van een kraan voorzien, was aangebracht; het naar beneden omgebogen deel dezer buis was tot een lang, nauw buisje uitgetrokken. De cilinders werden in de glazen geplaatst, deze geheel met water gevuld, daarop het uiteinde van de capillaire buis der buret voorzichtig tegen den bodem van den cilinder aangebracht, en door openen van de kraan voorzichtig zooveel zoutzuuroplossing toegevoegd als voor het vullen van de cilinders tot $^2/_3$ hunner hoogte noodig was. De onder A. en B. vermelde proeven werden gelijktijdig in het werk gesteld. Bij die onder C. beschreven, trachtte ik de diffusieconst. bij 0^0 te bepalen; de cilinderglazen, waarin de diffusiecilinders zich bevonden, werden daartoe elk geplaatst in een emmer en vervolgens de vrijblijvende ruimte geheel met sneeuw aangevuld. Het water, waarin de diffusie zou plaats hebben, en het te gebruiken zoutzuur waren vierentwintig uren te voren reeds in sneeuw geplaatst. Nadat de cilinders waren gevuld, werden de groote cilinderglazen door een glazen plaat bedekt en daarop een groot met sneeuw gevuld bekerglas geplaatst, om de cilinderglazen zooveel mogelijk van de omringende warmere ruimte af te sluiten. Dit is mij bij de proef met cilinder 6 beter gelukt dan bij die met cilinder 4, en het uit 6 verkregen cijfer verdient daardoor dan ook meer vertrouwen.

A. 100 CC. der oplossing bevatten 4.55 gr. HCl, nabij overeenkomende met $HCl . 44 H_2O$.

Cil.	gevuld met	30 CC. gebr. opl. tot 200 verdund, is K OH.	rest diff.cil. tot 200 verdund, is K OH.	duur der diff.	in den diff. cil. terug-gebleven deel.	hoogte des watersp boven den diff cil.	temp.	k.
2.	34.2	50 CC. = 27.10 CC.	50 CC. = 19.4 CC.	$2^d\,21^u$	0.6279	11 mM.	$3^1/_2{}^\circ$	1.61
7.	35.4	50 » = 27.10 »	50 » = 19.9 »	$2^d\,21\,^1/_6{}^u$	0.6223	12 »	$3^1/_2{}^\circ$	1.61
11.	31.7	50 » = 27.10 »	50 » = 17.15 »	$2^d\,20^1/_2{}^u$	0.5989	12 »	$3^1/_2{}^\circ$	1.644

B. 100 CC. der oplossing bevatten 22.7 gr. HCl, nabij overeenkomende met $HCl . 8 H_2O$.

		30 CC. tot 1 Liter verdund, is K OH.	rest diff cil. tot 1 Liter verdund, is K OH.					
5.	35.5	50 CC. = 17.6 CC.	50 CC. = 11.45 CC.	$2^d\,23^1/_4{}^u$	0.5498	14 mM.	$3^1/_2{}^\circ$	2.061
6.	32.6	50 » = 17.6 »	50 » = 9.9 »	$2^d\,23^u$	0.5176	10 »	$3^1/_2{}^\circ$	1.997
8.	33.7	50 » = 17.6 »	50 » = 10.55 »	$2^d\,23^1/_6{}^u$	0.5336	13 »	$3^1/_2{}^\circ$	1.966

C. 100 CC. der oplossing bevatten 13.57 gr. HCl, nabij overeenkomende met $HCl . 14 H_2O$.

		30 CC. tot 200 verdund, is K OH.	rest diff.cil. tot 200 verdund, is K OH.					
4.	32.2	50 CC. = 27.95 CC.	50 CC. = 21.15 CC.	$1^d\,22^2/_3{}^u$	0.7050	9 mM.	0°	1.716
6.	32.6	50 » = 27.95 »	50 » = 21.85 »	$1^d\,22^7/_{12}{}^u$	0.7194	6 »	0°	1.633

De voorgaande onderzoekingen stelde ik in het werk, eensdeels om voor deze verbindingen de diffusieconstante te bepalen, ten andere om, gebruik makende van oplossingen van uiteenloopende sterkte, een mogelijken invloed van de sterkte op de waarde der diffusieconstante op te sporen.

Graham *) heeft reeds in 1850 uitgebreide onderzoekingen omtrent den invloed der oplossingssterkte begonnen. Hij gebruikte daartoe verschillende glazen fleschjes, allen aan elkaar gelijk, vulde die tot den hals met de te onderzoeken zoutoplossing, plaatste ze in een grooter glazen vat en vulde dit, evenals de fleschjes, voorzichtig met het water, waarin de diffusie zou plaats hebben. Na zekeren tijd werd de hoeveelheid zout bepaald, die uit het fleschje in het omringende water was overgegaan. Blijkbaar moeten nu, indien de diffusiecoëfficienten werkelijk onafhankelijk zijn van de sterkten der oplossingen, de gediffundeerde hoeveelheden in een zelfden tijd evenredig zijn aan de sterkten der gebezigde oplossingen. Zijne proeven strekken zich uit over oplossingen van 1, 2, 4 en 8 $^0/_0$. d. i. over oplossingen, waarin 1, 2, 4 of 8 gewichtsdeelen in 100 volumen oplossing bevat zijn. De door hem verkregen uitkomsten heb ik in 't volgende Tafeltje samengevat. De cijfers drukken de verhoudingen van de telkens gediffundeerde hoeveelheden uit — die, welke uit de 2 $^0/_0$ oplossing diffundeert, = 2 gesteld —:

*) Philos. Transact. 1850. 805.

Sterkte opl.	HCl.	HNO_3.	H_2SO_4.	$C_2H_4O_2$.	H_2SO_3.	NH_3.	$Ba(NO_3)_2$.	$Ca(NO_3)_2$.	$BaCl_2$.	$SrCl_2$.
1	0.97	0.95	1.03	—	0.954	1.029	1.026	1.021	1.047	1.045
2	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00
4	4.08	3.90	4.01	3.83	3.891	4.117	3.936	3.872	3.97	4.041
8	9.00	7.86	8.16	7.26	7.827	8.605	7.247	7.334	7.608	7.626

Sterkte opl.	$CaCl_2$.	$AgNO_3$.	$NaNO_3$.	$NaCl$.	KCl.	$Al_2(SO_4)_3$.	$KHCO_3$.	$NH_4.HCO_3$.	$NaHCO_3$.
1	1.032	—	—	1.023	1.005	1.074	1.029	1.013	1.059
2	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00
4	4.01	3.87	3.82	4.036	3.895	3.780	3.806	3.959	3.869
8	8.021	7.62	7.73	7.832	8.054	6.572	7.408	7.346	7.590

Sterkte opl.	$MgSO_4$	$ZnSO_4$
1	1.144	1.091
2	2.00	2.00
4	3.671	3.784
8	6.701	6.916
8	1.—	1.—
16	1.759	1.878
24	2.340	2.560

De uitkomsten door Schuhmeister *) met betrekking tot de sterkte verkregen stel ik samen in nevensstaand tafeltje:

Sterkte opl.	K Cl.	K Br.	KJ.	Na Cl.	Na J.	Li Br.
0.1	k = 1.10	1.13	1.12	0.84	—	—
0.15	—	—	—	—	0.8	—
0.2	—	—	—	—	—	0.8
0.30	k = 1.27	1.24	1.25	0.92	0.9	—
0.38	—	—	—	—	—	0.9
0.9	—	—	1.45	—	—	—

*) *Wiener Akad. Ber.* Bd. 79. S. 603.

terwijl eindelijk nog WEBER *) vond, dat voor zinksulfaat de invloed der sterkte op de waarde der diffusieconstante wordt aangegeven door:

sterkte = 21.4 gr. $ZnSO_4$ in 100 CC. opl. temp. $17^0.9$ k = 0.2403
» = 31.8 » » » » » » » » 18^0 k = 0.2289

De door mij gevonden waarden heb ik in het volgende tafeltje samengevat.

Temperatuur.	$3^1/_2{}^0$.	$5^1/_2{}^0$.	$2^1/_2{}^0$.	$7^1/_2{}^0$.	$10^1/_2{}^0$.
Sterkte opl.	HCl.	$NaCl$.	$NaNO_3$.	$AgNO_3$.	$Na_2S_2O_3$.
4.55	1.622				
4.96				0.899	
5.45		0.756			
5.6					0.635
6.1		0.756			
10.35			0.622		
12.53		0.727			
22.7	2.008				
26.3		0.732			
26.88					0.543
35.97				0.774	
49.09			0.565		
68.58				0.649	

Overzien wij de aldus verkregen uitkomsten, dan blijkt voor zoutzuur eene beslist sterke vermeerdering van de diffusieconstante met de sterkte der oplossing, zooals ook GRAHAM die staven kon bij oplossingen, waarin het gehalte tusschen 1 en 8 % afwisselde; hiermede is volkomen in overeenstemming de uitkomst, bij mijn vorig onderzoek ver-

*) *Vierteljahrsschrift der Züricher naturforschenden Gesellschaft.* Nov. 1878; ook in WIEDEMANN's *Annalen.* Bd. 7. 550.

kregen. De proeven N^0 10, 11, 12 en 13 *) van zoutzuur werden toen gelijktijdig in het werk gesteld bij $8^1/_2{}^0$; in cil. O was de sterkte van het gebezigde zuur dus 2.51 maal grooter dan in den cil. H, F en G. Deze bevatten dus eene zoutzuuroplossing van ruim 8, die in O van ruim 20 $^0/_0$; het gemiddelde van de waarden uit H, F en G is k = 2.08, uit O echter k = 2.45. Verder is daarmede in overeenstemming het feit, dat ik hier voor de waarde van den diffusiecoefficient van zoutzuur bij 0^0 vind k = 1.633, terwijl ik uit mijne vorige proeven berekende $k_0 = 1.35$. Deze waarde is berekend uit $k_8 = 2.07$ en $k_{15\cdot5} = 2.57$ welke gelden voor eene oplossing, bevattende ruim 8 pCt. H Cl bij de hierboven onder C medegedeelde proeven was de oplossing echter sterker, en moest de te vinden waarde dus ook grooter zijn dan de boven berekende †).

Het blijkt verder, dat de invloed der sterkte op de diffusiesnelheid gering is bij 't chloornatrium. SCHUHMEISTER leidt uit zijne proeven af, dat de diffusieconstante voor deze stof met de sterkte toeneemt. Ook GRAHAM's proeven wijzen op eene hoogst geringe verandering van den diffusiecoefficient met de sterkte. Uit de vergelijking van eene 2 en 4 $^0/_0$ oplossing zou eene toeneming, uit die van 2 en 8 $^0/_0$ oplossing eene afneming van de voor k te vinden waarde voortvloeien. Uit de voor KCl gevonden waarde blijkt voor een 2 en 4 $^0/_0$ oplossing eene afneming, voor de 2 en 8 $^0/_0$ oplossing eene zwakke toeneming met

---

*)

Cil. O	1	CC. zuur	= 5.30	CC.	KOH	$8^1/_2{}^\circ$	k = 2.45	
» H	1	» »	= 2.11	»	»	$8^1/_2{}^\circ$	k = 2.14	gemidd.
» F	1	» »	= 2.11	»	»	$8^1/_2{}^\circ$	k = 2.03	k = 2.08.
» G	1	» »	= 2.11	»	»	$8^1/_2{}^\circ$	k = 2.07	

†) De voor zoutzuur verkregen uitkomsten zijn dus:

Cil. H. F. G. .	sterkte	ongeveer	HCl. 22 H_2O	bij $8^1/_2{}^\circ$	k = 2.08	
„ O	„	„	„ 79 „	„ $8^1/_2{}^\circ$	k = 2.45	
„ 5, 6, 8. (B)	„	nabij	„ 8 „	„ $3^1/_2{}^\circ$	k = 2.008	
„ 2, 7, 11. (A)	„	„	„ 44 „	„ $3^1/_2{}^\circ$	k = 1.622	
„ 6. (C)	„	„	„ 14 „	„ 0°	k = 1.633	
„ H. F. G.; H. D.	„	ongeveer	„ 22 „	„ 0°	k = 1.35	(ber.)

de sterkte. Evenmin als voor Na Cl, vinden wij dus bij Graham de door Schuhmeister voor K Cl waargenomen toeneming van den diffusiecoefficient met de sterkte.

Bij natriumnitraat, maar vooral bij zilvernitraat en natriumhyposulfiet, blijkt de invloed der sterkte grooter te zijn. Bij alle wordt door toeneming in sterkte de diffusiesnelheid geringer. Ook deze uitkomst is met die van Graham in overeenstemming. Hij deelt mede dat voor zoutzuur en salpeterzuur de hoeveelheden, die uit eene 1 en 2°/0 oplossing diffundeeren — in denzelfden tijd en bij dezelfde temperatuur — vrij wel met elkander overeenkomen, maar niet meer bij eene 4 en vooral niet bij eene 8°/0 oplossing van beide zuren; de diffusie van het zoutzuur is in deze laatste veel grooter geworden. Ook de vergelijking van de diffusie van chloorcalcium- en calciumnitraat-oplossingen leert hem, dat evenals voor zoutzuur en salpeterzuur, met eene toeneming in sterkte der oplossing, de betrekkelijke hoeveelheden der gediffundeerde zouten veranderen, die van 't nitraat kleiner wordt, terwijl het chloruur zijn diffusievermogen van verdunde oplossingen behoudt. Insgelijks wijzen, blijkens de tafel, zijne voor de nitraten van Ba, Ca, Ag en Na gevonden waarden op eene besliste vermindering.

Overeenkomstig met Graham, vindt ook Weber voor het zinksulfaat met toeneming in sterkte eene afneming van de diffusieconstante.

De eenige stof dus, voor welke toeneming van de diffusieconstante met de sterkte tot nog toe met zekerheid is aangewezen, is het zoutzuur, en volgens Graham's proeven insgelijks het zwavelzuur; voor alle tot nog toe onderzochte zouten blijkt òf (zooals voor chloornatrium en misschien ook andere chloruren) de afneming van de diffusieconstante met eene toenemende sterkte zeer gering te zijn, òf (zooals voor de nitraten) aanmerkelijk grooter.

De veranderingen welke gevonden zijn in de waarden van k, voor eene zelfde stof bepaald, maar in vloeistoffen van verschillende sterkte, zijn hoogstwaarschijnlijk het gevolg van moleculaire veranderingen, welke bij het oplossen der vaste stoffen en het verdunnen dezer oplossingen tot stand komen, en welke bij vaste zouten daarin bestaan, dat door verder voortgezette verdunning de molecuulaggregaten zich telkens meer ontleden en tot kleinere groepen van moleculen uiteenvallen. Met het oog hierop stel ik mij voor bij eenige verbindingen, zooals magnesiumsulfaat, natriumnitraat, zilvernitraat enz., den invloed van de sterkte op de diffusieconstante zeer uitvoerig te onderzoeken.

Veendam, April 1883.

VERSLAG

OMTRENT DE DOOR DEN HEER

T. J. STIELTJES Jr.

AANGEBODEN VERHANDELING:

OVER DE QUADRATISCHE ONTBINDING VAN PRIEMGETALLEN VAN DEN VORM $3n+1$.

(Uitgebracht in de Vergadering van 26 Mei 1883).

De verhandeling van den Heer T. J. Stieltjes Jr., »over de quadratische ontbinding van priemgetallen van den vorm $3n + 1$", in de laatste vergadering in onze handen gesteld, sluit zich aan bij eene vroegere, die opgenomen is in de Verslagen en Mededeelingen, Deel 17.

Voor elk priemgetal $p = 3n + 1$, heeft men:

$$p = c^2 + 3d^2 \quad \text{en} \quad 4p = A^2 + 27B^2.$$

In het aangehaalde stuk bewees hij, dat $A + 1$ door 3 deelbaar is, en A de rest is van de deeling van $\dfrac{(n+1)^{n/1}}{1^{n/1}}$ door p. Thans bewijst hij, dat c de rest is van de deeling van $2^{n-1} \dfrac{(n+1)^{n/1}}{1^{n/1}}$ door p, en dat $c - 1$ door 3 deelbaar is.

Stellende $a + b\varrho$ een primitieve factor van p, waarin ϱ een primitieve derdemachtswortel van de eenheid is, onderscheidt hij drie gevallen:

b even, dan is $p = a^2 - ab + b^2 = (a - \frac{1}{2} b)^2 + 3 (\frac{1}{2} b)^2$;
a even, $p = \qquad = (\frac{1}{2} a - b)^2 + 3 (\frac{1}{2} a)^2$;
a en b oneven, $p = \qquad = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + 3 \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$;

en bewijst alzoo eenvoudig de gestelde waarheid.

Ten slotte leidt hij nog een anderen vorm voor c af.

Uwe verslaggevers hebben de eer tot opneming van dit stuk in de Verslagen en Mededeelingen aan te raden, waarin het eene eervolle plaats zal bekleeden.

Mei 1883.

D. Bierens de Haan.
C. H. C. Grinwis.

OVER DE QUADRATISCHE ONTBINDING

VAN

PRIEMGETALLEN VAN DEN VORM $3n+1$.

DOOR

T. J. STIELTJES Jr.

Elk priemgetal $p = 3\,n + 1$ kan voorgesteld worden als de som van een volkomen tweede macht en het drievoud van een andere volkomen tweede macht:

$$p = cc + 3\,dd \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (1)$$

Het viervoud van zulk een priemgetal kan verder steeds aldus voorgesteld worden:

$$4\,p = AA + 27\,BB \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (2)$$

Elk dezer ontbindingen is slechts op ééne wijze mogelijk. Dit alles valt gemakkelijk uit de algemeene theorie der quadratische vormen af te leiden.

In het tweede deel van CRELLE's *Journal* heeft JACOBI, in de verhandeling »de residuis cubicis commentatio numerosa" zonder bewijs aangegeven, dat de waarde van A in (2) gelijk is aan de rest die men verkrijgt bij de deeling van het geheele getal

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(2n)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots n}$$

door p, waarbij men deze rest tusschen $-\frac{1}{2}p$ en $+\frac{1}{2}p$ te kiezen heeft. Hierbij doet zich dan nog de merkwaardige omstandigheid voor dat $A+1$, bij deze bepaling van A, steeds door 3 deelbaar is.

Voor de eerste priemgetallen verkrijgt men bijv.:

$p = 7$	$n = 2$	$A = -1$	$28 = 1^2 + 27.1^2$
$p = 13$	$n = 4$	$A = +5$	$52 = 5^2 + 27.1^2$
$p = 19$	$n = 6$	$A = -7$	$76 = 7^2 + 27.1^2$
$p = 31$	$n = 10$	$A = -4$	$124 = 4^2 + 27.2^2$
$p = 37$	$n = 12$	$A = +11$	$148 = 11^2 + 27.1^2$
$p = 43$	$n = 14$	$A = +8$	$172 = 8^2 + 27.2^2$
$p = 61$	$n = 20$	$A = -1$	$244 = 1^2 + 27.3^2$

Het bewijs van deze eigenschap, die in een nauw verband staat met de eigenschappen der algebraïsche vergelijking van welke de verdeeling van den cirkelomtrek in p deelen afhangt, is te vinden in »CAUCHY's Mémoire sur la théorie des nombres. (*Mém. de l'Acad. d. Sc.* vol. 17 1840) en bij LEBESQUE in het *Journal de Liouville* Bd 2, pag. 279. Voor verdere bijzonderheden hieromtrent is te verwijzen naar »BACHMANN: Die Lehre von der Kreistheilung" pag. 144.

Op andere wijze is dit theorema van JACOBI ook afgeleid in de verhandeling »Bijdrage tot de theorie der derde- en vierdemachtsresten" in het 17[de] Deel der *Verslagen en Mededeelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen* en wel aldaar in art. 40, pag. 416.

Aanknoopende aan de ontwikkelingen daar voorkomende, wensch ik hier, uit het theorema van JACOBI, een directe bepaling van den wortel c van het enkelvoudige quadraat in (1) af te leiden, — het zal blijken dat c de tusschen $-\frac{1}{2}p$ en $+\frac{1}{2}p$ gelegen rest is die men verkrijgt bij de deeling van het geheele getal:

$$2^{n-1}\frac{(n+1)(n+2)\,.\,.\,(2n)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,n}$$

door p, en verder is dan $c-1$ door 3 deelbaar. Bijv.:

$$\begin{array}{llll}
p = 7 & n = 2 & c = -2 & 7 = 2^2 + 3.1^2 \\
p = 13 & n = 4 & c = +1 & 13 = 1^2 + 3.2^2 \\
p = 19 & n = 6 & c = +4 & 19 = 4^2 + 3.1^2 \\
p = 31 & n = 10 & c = -2 & 31 = 2^2 + 3.3^2 \\
p = 37 & n = 12 & c = -5 & 37 = 5^2 + 3.2^2
\end{array}$$

Zij dan, evenals in de aangehaalde verhandeling: ϱ een primitieve derdemachtswortel der eenheid, $a + b\,\varrho$ een primaire factor van p, dus

$$p = (a + b\,\varrho)\,(a + b\,\varrho^2) = a^2 - ab + b^2$$

$a + 1$ en b beiden door 3 deelbaar; verder f een der beide wortels van de congruentie:

$$1 + x + x^2 \equiv 0 \text{ mod. } p$$

en wel f zóó gekozen, dat $a + b\,f$ door p deelbaar is.

Volgens het boven aangehaalde theorema van JACOBI is dan:

$$2\,a - b \equiv - \frac{(n + 1)\,(n + 2)\,.\,.\,(2\,n)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,n} \text{ mod. } p \,.\;.\;. \quad (3)$$

en verder is volgens de criteria voor het cubisch karakter van 2

$$\begin{array}{ll}
2^n \equiv 1 \text{ mod. } p & \text{wanneer } b \text{ even is,} \\
2^n \equiv f & \text{wanneer } a \text{ even is,} \\
2^n \equiv f^2 & \text{wanneer } a \text{ en } b \text{ beiden} \\
 & \quad \text{oneven zijn.}
\end{array}$$

(Zie t. a. p. pag. 398.)

Deze drie gevallen moeten nu afzonderlijk behandeld worden.

I $\qquad b$ even.

In dit geval leiden wij uit

$$\begin{aligned}
p &= a^2 - ab + b^2 \quad \text{af} \\
4\,p &= (2a - b)^2 + 3\,b^2 \\
&= (a - \tfrac{1}{2}\,b)^2 + 3\,(\tfrac{1}{2}\,b)^2
\end{aligned}$$

In de vergelijking (1) kan dus genomen worden:

$$c = -(a - \tfrac{1}{2} b)$$

Uit (3) volgt dan:

$$c \equiv \tfrac{1}{2} \cdot \frac{(n+1)(n+2)\ldots(2n)}{1.2.3\ldots n} \text{ mod. } p$$

of wel daar in dit geval $2^n \equiv 1$ is:

$$c \equiv 2^{n-1} \frac{(n+1)(n+2)\ldots(2n)}{1.2.3\ldots n.} \text{ mod. } p \quad \ldots (4^a)$$

Uit $a \equiv 2$, $b \equiv 0$ mod. 3 volgt verder

$$c \equiv 1 \text{ mod. } 3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5^a)$$

II $\qquad a$ even.

In dit geval schrijven wij in plaats van

$$p = a^2 - ab + b^2$$

$$16\, p = (2\,a - 4\,b)^2 + 3\,(2\,a)^2 \quad \text{of}$$

$$p = (\tfrac{1}{2}\,a - b)^2 + 3\,(\tfrac{1}{2}\,a)^2$$

zoodat wij in (1) kunnen nemen:

$$c = \tfrac{1}{2}\,a - b.$$

Nu is

$$(a+bf)(1+2f) \equiv a-2b+(2a-b)f \equiv -a-b-(2a-b)f^2 \text{mod.} p \quad . . (6)$$

en $a + b\,f \equiv 0$ mod. p, derhalve:

$$a - 2\,b \equiv -f\,(2\,a - b)$$

zoodat uit (3) volgt:

$$a - 2b \equiv f \frac{(n+1)(n+2)\ldots(2n)}{1.2.3\ldots n}$$

of wel, daar nu $f \equiv 2^n$ is:

$$c \equiv 2^{n-1} \frac{(n+1)(n+2)\ldots(2n)}{1.2.3\ldots n} \text{ mod. } p \quad \ldots\ldots (4^b)$$

Uit $a \equiv 2$, $b \equiv 0$ mod. 3 volgt verder:

$$c \equiv 1 \text{ mod. } 3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5^b)$$

III a en b oneven.

In dit laatste geval bedenke men dat

$$16p = (2a + 2b)^2 + 3(2a - 2b)^2 \text{ is, of}$$

$$p = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

zoodat genomen kan worden:

$$c = \frac{a+b}{2}$$

Uit (6) volgt nu $a + b \equiv -f^2(2a - b)$ dus geeft (3):

$$a + b \equiv f^2 \frac{(n+1)(n+2)\ldots(2n)}{1.2.3\ldots n} \text{ mod. } p$$

Daar nu in dit geval $2^n \equiv f^2$ is, zoo volgt:

$$c \equiv 2^{n-1} \frac{(n+1)(n+2)\ldots(2n)}{1.2.3\ldots n} \text{ mod. } p \quad \ldots (4^c)$$

terwijl gemakkelijk te zien is:

$$c \equiv 1 \text{ mod. } 3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5^c)$$

Uit de vergelijkingen 4^a, 4^b, 4^c, 5^a, 5^b, 5^c blijkt nu dat men in elk geval heeft:

$$c \equiv 2^{n-1} \frac{(n+1)(n+2)\,..\,(2n)}{1\,.\,2\,.\,3\,..\,n} \text{ mod. } p \quad \ldots \quad (4)$$

$$c \equiv 1 \text{ mod. } 3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

hetgeen dus het boven reeds uitgesproken theorema geeft. De congruentie (4) kan men nog een anderen vorm geven. Daar n even is, schrijve men $2m$ voor n, dan is:

$$c \equiv 2^{\,2m-1} \frac{(2m+1)(2m+2)\,..\,(4m)}{1\,.\,2\,.\,3\,...\,(2m)}$$

Nu is:

$$2m + 1 \equiv -(4m),\ 2m + 3 \equiv -(4m - 2),$$
$$2m + 5 \equiv -(4m - 4)\ ...\ \text{enz.}$$

met behulp waarvan men verkrijgt:

$$c \equiv (-1)^m\, 2^{\,2m-1} \frac{[(2m+2)(2m+4)\,...\,(4m)]^2}{1\,.\,2\,.\,3\,...\,(2m)}$$

of na een kleine herleiding:

$$c \equiv (-1)^m\, 2^{\,4m-1} \frac{(m+1)(m+2)\,..\,(2m)}{1\,.\,2\,.\,3\,...\,m.}$$

Nu is verder:

$$2^{3m} = 2^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$$

en

$$\frac{p^2 - 1}{8} = \frac{9m^2 + 3m}{2}.$$

Van dezen exponent het even getal $\frac{8m^2 + 4m}{2}$ aftrekkende, kan men eenvoudiger schrijven:

$$2^{3m} \equiv (-1)^{\frac{m^2 - m}{2}}$$

dus ten slotte:

$$c \equiv (-1)^{\frac{m^2 + m}{2}} 2^{m-1} \frac{(m+1)(m+2)\,..\,(2m)}{1\,.\,2\,.\,3\,...\,m.} \text{mod.}\, p = 6m + 1\,..(7)$$

Deze laatste congruentie ter bepaling van c is zonder bewijs, en zonder de hier verkregen nadere bepaling van het teeken van c, gegeven door Oltramare in het 87ste deel der *Comptes rendus de l'Acad. d. Sciences* pag. 735, te gelijk met meer soortgelijke.

Leiden, April 1883.

OVER RHIZOPOGONZUUR.

DOOR

A. C. OUDEMANS Jr.

In een voor eenige jaren door Jhr. Dr. F. A. Hartsen *) uitgegeven geschrift wordt melding gemaakt van eene kristallijne stof, die uit een fungus van zuidelijk Frankrijk, namelijk *Rhizopogon rubescens* Tulasne, door hem was bereid en waaraan hij den naam van rhizopogonine gegeven had.

Na het overlijden van den Heer F. A. Hartsen, werd mij door zijn broeder, Jhr. J. Hartsen, eene kleine hoeveelheid van eene in een glazen stopflesch besloten roode kristallijne stof toegezonden. Het opschrift van deze flesch luidde:

»Rhizopogonine (à purifier) extraite du fonge rhizopogon provençale.''

Hoogst waarschijnlijk heeft men hier te doen met de stof, door den Heer Hartsen uit Rhizopogon rubescens bereid; de naam der fungussoort is wel niet dezelfde, maar de Heer Hartsen kan dien om de eene of andere reden hebben gewijzigd.

Uit hoofde van onze gebrekkige kennis omtrent de scheikundige bestanddeelen der zwammen besloot ik, het mij toevertrouwde praeparaat, voor zoover de kleine voorraad (van iets meer dan 3 gram) zulks toeliet, te onderzoeken en in

*) *Neue chemische Untersuchungen* von Dr. F. A. von Hartsen. Nordhausen Fred. Förstemann's Verlag 1875.

dat voornemen werd ik versterkt door de belangrijke onderzoekingen, die voor weinige jaren door C. Stahlschmid aangaande eene dergelijke stof, *polyporuszuur*, zijn verricht *). De mededeelingen, die ik over de door den Heer Hartsen ontdekte stof zal doen, hoe gebrekkig ook, kunnen wellicht strekken, eensdeels om hen, die daartoe in de gelegenheid mochten zijn, tot verder onderzoek omtrent die stof aan te sporen, anderdeels om haar als scheikundig lichaam met genoegzame zekerheid aan te duiden.

Hetgeen door Hartsen in het boven aangehaalde werkje (p. 32) omtrent zijn rhizopogonine en de zwam, waarin dit voorkomt, wordt gezegd, is tamelijk kort.

»*Rhizopogon rubescens*, (gastromycetes)" zoo heet het, »ist »ein Pilz, welcher während den Herbstregen in den Wäldern »von Pinus halepensis zu Cannes, Nizza, etc. sich entwick»elt. Er kommt nur halb aus dem Boden hervor und wird in »dieser Gegend wilde Trüffel genannt. Wir fanden in dem»selben einen neuen Stoff, der näher untersucht zu werden »verdient.

»*Bereitung*. Man zerschneidet die Pilze, entwässert sie mit »Alcohol, presst aus, macerirt sie 48 Stunden in Aether »und presst wieder aus. Man destillirt den Aether bis auf »alcoholischen Rückstand und lässt abkühlen. Man erhält »Krystallnadeln eines Stoffes, welcher an der Luft bald zin»noberroth wird. Man entfettet ihn mittelst Filtrirpapier und »Umkrystallisiren aus Alcohol, den man spontan verdampfen »lässt.

»Auch in anderen Species des Genus Rhizopogon dürfte »dieser Stoff vorkommen."

Ofschoon de zelfstandigheid, die mij was ter hand gesteld, alle kenteekenen vertoonde van eene zuivere stof, zoo achtte ik het toch niet onnoodig, haar nog een paar maal uit al-

*) *Ann. der Chem. u. Pharm.* 187. bl. 177 en verv.

kohol om te kristalliseeren. Bij bekoeling van de heet verzadigde oplossing zetten zich prachtige lange roode naalden af, die, zoolang ze vochtig op het filtrum lagen, bloedrood waren, maar bij het drogen eene meer oranjeroode tint aannamen, die eenigzins aan die van gesublimeerde alizarine herinnert, maar daarbij in gloed achterstaat.

In water is de stof geheel onoplosbaar. Evenals het polyporuszuur van Stahlschmid geeft de geringste hoeveelheid van een in water opgelost zout bij toevoeging van zuur een nederslag, die zich door zijne groote verdunning als eene witte troebeling voordoet.

In aether, chloroform, zwavelkoolstof en ligroïne wordt de stof gemakkelijk opgelost; in kouden alkohol wordt zij slechts in geringe, in kokenden alkohol daarentegen in vrij aanzienlijke hoeveelheid opgenomen.

5.3094 gram van eene bij 16^0 C. verzadigde oplossing van rhizopogonzuur in alkohol van 90^0 gew. proc. lieten na verdamping 0.1058 gr. overschot achter. Hieruit vindt men voor de oplosbaarheid 2.03 d. op 100 d. alcohol.

In alkaliën lost de stof met eene donkerpaarse kleur op, die veel overeenkomst toont met die eener oplossing van alizarine in alkali. Koolzure alkaliën worden door koken met de stof onmiddellijk violet gekleurd en aan het ontwijken van CO_2 is duidelijk te bemerken, dat het lichaam het karakter van een zuur bezit, reden waarom het mij verkieselijk voorkomt, aan de stof den naam van rhizopogonzuur dan dien van rhizopogonine te geven.

Het uit vrij sterken alkohol gekristalliseerde rhizopogonzuur bevat geen kristalwater en bestaat alleen uit kool-, water- en zuurstof. Het smelt bij 127^0 C. tot eene bruinroode vloeistof, die bij bekoeling tot eene amorphe harsachtige massa stolt, welke hier en daar sporen van kristallisatie vertoont. Bij hooge temperatuur (boven 300^0 C.), ontleedt het zich onder het uitstooten van zwak riekende, eenigzins zure dampen, terwijl eene betrekkelijk groote hoeveelheid moeilijk brandbare kool terug blijft.

De analysen van het zuur leverden de volgende uitkomsten op:

1)	0.2156 gr.	der	stof	gaven	0.6040 gr.	CO_2	en	0.1621 gr.	H_2O
2)	0.2170 »	»	»	»	0.6080 »	»	»	0.1668 »	»
3)	0.1974 »	»	»	»	0.5482 »	»	»	0.1510 »	»

Hieruit berekent men de volgende procenten kool- en waterstof:

	1.	2.	3.
C	76.4	76.4	75.7
H	8.4	8.5	8.5

Uit deze cijfers kan men een groot aantal formulen berekenen, zooals uit onderstaande opgaaf blijkt:

	$n\,(C_{14}H_{18}O_2)$	$n\,(C_{20}H_{26}O_3)$
C	77.0	76.4
H	8.3	8.3

waarvan de laatste het best met de gevondene cijfers overeenstemt.

ZOUTEN VAN HET RHIZOPOGONZUUR.

Het rhizopogonzuur heeft een zeer zwak zuur karakter; het ontleedt wel is waar koolzure alkaliën, maar de ontstane verbindingen zijn niet zeer standvastig en worden door het koken met veel water of slappen alkohol onder afscheiding van rhizopogonzuur ontleed. Ammonia lost het insgelijks op, maar het gevormde zout verliest bij het liggen aan de lucht ammonia en ten slotte blijft er niets anders dan vrij zuur over. Het is mij gelukt, eene bepaalde kalium- en natriumverbinding te bereiden, door het zuur in eene overmaat van koolzuur alkali, onder toevoeging van een weinig alkohol, op te lossen en deze oplossing op het waterbad zachtjes te verdampen. Bij zekeren concentratiegraad beginnen zich op het oppervlak der vloeistof microscopische kristallen der alkalizouten af te scheiden, die in eene overmaat van eene sterke oplossing van alkalicarbonaat onoplosbaar zijn. Laat

8*

men de vloeistof nu bekoelen, zoo zet zich eene onduidelijk kristallijne violet-zwarte massa af, die zich onder den mikroskoop als eene samenhooping van vedervormige kristalletjes voordoet. Men brengt de kristalbrij op een filtrum en spoelt haar met water af. Het eerst afloopende vocht is tamelijk donker gekleurd, maar naarmate de oplossing van het alkalicarbonaat door water wordt vervangen, wordt de tint van het afloopende vocht lichter en eindelijk is het, wanneer het niet meer op rood lakmoespapier reageert, nagenoeg kleurloos. Dit zout, dat bij drogen op 120^0 C. geen water verloor, bevatte volgens eene analyse 7.6 proc. K. De formule $C_{28}H_{35}KO_4$, die, in verband met de uitkomsten van de analyse van het vrije zuur, niet onwaarschijnlijk is, vordert 8.2 proc. K. Wellicht is door de behandeling met water een weinig alkali van het zout verwijderd.

Zonderling is het, dat behalve dit zout, door afscheiding uit oplossingen die vrij alkali bevatten, andere zouten werden verkregen, welke op 1 molecule zuur 9.9; 23.5; 35.7 en zelfs 37.0 proc. kalium bevatten.

Deze verhouding werd opgemaakt uit bepalingen van het in water onoplosbaar rhizopogonzuur en van het kalium in den vorm van K Cl. Enkele dezer zouten bevatten kristalwater; dat, hetwelk 9.9 proc. K bevatte, zelfs 43.5 proc. H_2O.

De wisselvalligheid van deze uitkomsten toont de onbestendigheid der bedoelde zouten aan en bewijst tevens de moeilijkheid, uit de analyse daarvan tot de kennis van het ware moleculairgewicht van rhizopogonzuur te komen.

BIJDRAGE

TOT DE KENNIS

VAN KINOVAZUUR, KINOVINE EN KINOVIET.

DOOR

A. C. OUDEMANS Ir.

Eene onlangs in het licht verschenen verhandeling van C. LIEBERMANN en F. GIESEL *) geeft mij aanleiding, de uitkomsten bekend te maken, welke ik voor eenige jaren bij een onderzoek omtrent het vooral door HLASIWETZ onderzochte kinovine en omtrent de daaruit afgeleide splitsingsproducten heb verkregen; ik gevoel mij daartoe te eer genoopt, omdat mijne resultaten die der genoemde Duitsche scheikundigen grootendeels bevestigen, doch op sommige punten belangrijk daarvan afwijken.

Kinovine.

Het praeparaat, waarvan ik gebruik maakte, ontving ik door de vriendelijke bemiddeling van Dr. J. E. DE VRIJ van Dr. KERNER te Sachsenhausen; het bedroeg iets meer dan $^1/_2$ kilogram. Het was een *wit* poeder en alzoo reeds gezuiverd van het vrij lastige kinarood, dat het ruwe praeparaat vergezelt. Om hieruit zoo veel mogelijk zuivere kinovine te

*) Ueber Chinovin und Chinovasäure. Ber. der deutschen chem. Gesellsch. XVI. 926 en verv.

verkrijgen, trok ik het uit met alkohol van 90 gew. proc.; de geconcentreerde oplossing werd daarop gefiltreerd en aan het heldere filtraat zooveel water toegevoegd, dat ongeveer $^5/_6$ van het opgeloste kinovine was neergeslagen. Nu werd het vocht weder gefiltreerd en met gedestilleerd water verdund. Het aldus verkregen praeparaat werd nog een paar malen door oplossen in sterken alkohol en neerslaan met water gezuiverd; het deed zich voor als een amorph wit, tamelijk hygroscopisch poeder, zoodat bij de analyse daarvan bijzondere voorzorgen *) werden genomen, om aantrekken van vocht bij het overbrengen in de verbrandingsbuis te verhinderen.

De analysen van de op 110° C. gedroogde stof leverden de volgende uitkomsten op:

1)	0.2552	Gr.	gaven	0.6178	Gr.	CO_2	en	0.2070	Gr.	H_2O
2)	0 1979	»	»	0.4776	»	»	»	0.1566	»	»
3)	0.2962	»	»	0.7144	»	»	»			
4)	0.2069	»	»	0.5037	»	»	»	0.1644	»	»
5)	0.2414	»	»	0.5837	»	»	»	0.1884	»	»
6)	0.2799	»	»	0.6736	»	»	»	0.2124	»	»

Hieruit berekent men de volgende procenten aan kool- en waterstof:

	1.	2.	3.	4.	5.	6.
C	66.0	65.8	65.8	66.4	65.9	65.7
H	9.0	8.8	—	8.8	8.7	8.5

Werd de stof langeren tijd bij 130° C. gedroogd, zoo verkreeg ik, in overeenstemming met Hlasiwetz †), een hooger koolstofgehalte, zooals blijkt uit de volgende cijfers:

*) Het platina scheepje met stof werd nog heet in een glazen buisje overgebracht, dat met glazen platen door middel van een schroef geheel kon worden afgesloten. Na bekoeling werd het geheel gewogen en het scheepje zoo spoedig mogelijk in de verbrandingsbuis geschoven.

†) *Ann. der Chem. u. Pharm.* 79. 129—155.

1) 0.2045 Gram gaven 0.5032 Gr. CO_2 en 0.1662 Gr. H_2O
2) 0.2532 » » 0.6221 » » » 0.1994 » »

Hieruit berekent men de volgende procenten aan kool- en waterstof:

	1.	2.
C	67.1	67.0
H	9.0	9.1

Ik ben van oordeel, dat de eerst verkregen cijfers zich het best aan de waarheid aansluiten en dat het lang verhitten van kinovine bij 130° C. moet worden vermeden.

Mijne uitkomsten stemmen, zooals men ziet, over het geheel vrij wel met die van LIEBERMANN en GIESEL overeen; het door mij gevonden koolstofgehalte is doorgaans iets grooter en de onderlinge afwijkingen van mijne uitkomsten zijn geringer.

Ten aanzien van het door mij gebezigde praeparaat, veroorloof ik mij nog het volgende op te merken. De oplossing in alkohol droogde steeds bij verdamping tot eene gomachtige massa uit en zette nimmer bij lang staan kristallen af; daaruit maak ik, in overeenstemming met LIEBERMANN en GIESEL op, dat ik steeds α-kinovine onder handen heb gehad. Hiermede komt ook het S. V. D. der stof overeen, waarvoor ik met den polaristrobometer de volgende uitkomsten verkreeg:

1) 0.8081 Gr. op 110° gedroogde kinovine in 19 CC. absoluten alkohol opgelost, gaven bij 16° C. in eene buis van 302.8 m.M. eene rechtsche draaiing van 7° 35′. Hieruit vindt men $(\alpha)_D = 58^0.9$.

2) De zooeven genoemde vloeistof, door verdunning met absoluten alkohol tot het dubbele volumen gebracht, gaf bij 16° C., en in dezelfde buis onderzocht eene rechtsche draaiing van 3° 48′5. Hieruit berekent men voor $(\alpha)_D$: + 59°.2.

LIEBERMANN en GIESEL vonden + 56°.6, maar geven niet op bij welke concentratie zij de stof hebben onderzocht. Dr.

DE VRIJ verkreeg voor $(\alpha)_j$ eene waarde van $+ 52^0.4$ *) (2.675 gram kinovine op 26 CC. alcohol), hetgeen ten naasten bij met mijne uitkomst overeenstemt; de waarden van het S. D. V. voor de beide gele strepen j (jaune moyen) en D staan ongeveer tot elkaar als 23 tot 30 en rekent men in die onderstelling het cijfer $52^0.4$ om, dan verkrijgt men $+ 60^0$ voor $(\alpha)_D$.

Mijne ervaringen ten aanzien van de eigenschappen van α-kinovine komen overigens zeer goed met die van LIEBERMANN en GIESEL overeen.

Kinovazuur.

α-kinovine splitst zich onder den invloed van zuren in kinovazuur en eene suikersoort, welke ik kortheidshalve kinoviet zal noemen. Deze ontleding geschiedt gemakkelijk door verwarming van de alkoholische oplossing met zuren; zelfs azijnzuur werkt krachtig genoeg om die tot stand te brengen.

ROCHLEDER beweert, dat kinovine ook door de werking van natrium-amalgama in kinovazuur en kinoviet wordt gesplitst. Herhaaldelijk heb ik er de proef van genomen, maar zonder resultaat; ik meen daarom te mogen aannemen, dat de bewering van ROCHLEDER op eene dwaling berust; waarschijnlijk heeft hij kinovine gebezigd, die reeds van den aanvang veel kinovazuur bevatte.

Het doorvoeren van zoutzuurgas door eene alkoholische oplossing van kinovine, zooals dit door HLASIWETZ wordt aanbevolen, leidt wel is waar tot eene vrij snelle afscheiding van kinovazuur, maar kwam mij overigens niet doelmatig voor, wanneer men het tweede splitsingsproduct, de suiker, tevens wil winnen. De vloeistof toch wordt sterk met zoutzuur beladen, is zeer donker gekleurd en moeilijk te ont-

---

*) *De kinakultuur op Java op het einde van het jaar* 1859. Batavia. H. M. VAN DORP 1860.

kleuren. Daarom sloeg ik ter bereiding van de beide splitsingsproducten een anderen weg in. Ik verhitte namelijk de alkoholische oplossing van kinovine in toegesmolten glazen kolven met betrekkelijk weinig sterk zoutzuur eenige uren op 100°. Het witte aldus ontstane kinovazuur werd met slappen alkohol afgewasschen, daarna in sterke ammonia opgelost; nadat deze alkalisehe oplossing met veel sterken alkohol was vermengd, werd de vloeistof tot kookhitte gebracht en plotseling met eene hoeveelheid zoutzuur vermengd, iets meer dan voldoende om de ammonia volkomen te verzadigen. Zoo verkreeg ik een kristallijn poeder, dat door afspoelen met sterken alkohol gemakkelijk was te zuiveren.

Bij het analyseeren van deze stof viel het mij, evenals Liebermann en Giesel, op, dat het koolstofgehalte ongeveer één procent lager uitkwam, dan door Hlasiwetz *), Rochleder †) en door Rembold §) (bij zijne onderzoek omtrent de bestanddeelen van den tormentillawortel) wordt opgegeven. Het is licht verklaarbaar, dat ik daardoor aanvankelijk aan de juistheid van mijne uitkomsten twijfelde en na de methoden van zuivering zooveel mogelijk gewijzigd te hebben, de analysen herhaalde. Steeds echter kreeg ik dezelfde uitkomst, zoodat ik thans overtuigd ben, dat door de bovengemelde Duitsche scheikundigen om de eene of andere reden (wellicht ten gevolge van het bezigen van gewone kurken bij de analyse) een te hoog koolstofgehalte is verkregen.

Ik laat nu de resultaten volgen van eenige der meest betrouwbare door mij verrichte analysen. (De stof werd op 110° C. gedroogd.)

Kinovazuur.

1)	0.2008 Gr.	gaven	0.5337 Gr.	CO_2	en	0.1730 Gr.	H_2O
2)	0.2218 »	»	0.5920 »	»	»	0.1870 »	»
3)	0.2219 »	»	0.5902 »	»	»	0.1886 »	»

*) *Ann. der Chemie u. Pharm.* CXI. 182 en verv.

†) J. f. p. C. 102. 17 en verv.

§) *Ann. der Chemie u. Pharm.* 145. 5 en verv.

	Kinovazuur.								
4)	0.2129 Gr.	gaven	0.5710 Gr.	CO_2	en	0.1822 Gr.	H_2O		
5)	0.1682 »	»	0.4474 »	»	»	0.1460 »	»		
6)	0.1998 »	»	0.5374 »	»	»	0.1700 »	»		
7)	0.2054 »	»	0.5462 »	»	»	0.1737 »	»		
8)	0.2041 »	»	0.5485 »	»	»	0.1760 »	»		
9)	0.2233 »	»	0.5935 »	»	»	0.1867 »	»		
10)	0.2026 »	»	0.5418 »	»	»	0.1734 «	»		
11)	0.2262 »	»	0.6022 »	»	»	0.1880 »	»		

Het praeparaat, bij de analysen 9, 10 en 11 gebezigd, was verkregen door oogenschijnlijk zuiver kinovazuur bij kookhitte in absoluten alkohol op te lossen en daarna het grootste deel van den alkohol af te destilleeren, zooals dit door Hlasiwetz ter zuivering van het praeparaat wordt aanbevolen

Uit de bovenstaande cijfers berekent men de volgende procenten aan kool- en waterstof:

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.
C.	72.5	72.8	72.6	73.1	72.5	72.9	72.5	72.8	72.5	72.9	72.6
H.	9.6	9.4	9.4	9.5	9.6	9.4	9.4	9.6	9.3	9.5	9.3

Hlasiwetz gaf voor zijn kinovazuur de naar de nieuwe atoomgewichten gewijzigde formule $C_{24}H_{38}O_4$. De door mij verkregen cijfers stemmen echter beter overeen met de formule $C_{22}H_{34}O_4$, welke 72.9 pCt. koolstof en 9.4 pCt. waterstof verlangt. Daar het verschil tusschen beide formulen juist C_2H_4 bedraagt, vermoedde ik dat Hlasiwetz den aethylaether van het kinovazuur had geanalyseerd in plaats van het zuur zelf; dit kwam mij te aannemelijker voor, omdat Hlasiwetz zijn praeparaat vervaardigde door zoutzuurgas te voeren in eene oplossing van kinovine in sterken alkohol en het verkregen product uit alkohol om te kristalliseeren. Bij de eerste reactie heeft eene zeer aanzienlijke warmteontwikkeling plaats en het kwam mij niet onmogelijk voor, dat die op de vorming van den kinovazuren aether gunstig kon hebben gewerkt. Om het al of niet gegronde van mijn vermoeden te toetsen, leidde ik chloorwaterstof door eene verzadigde alkoholische oplossing van zuiver kinovazuur; onder sterke verwarming scheidde zich allengs een kristallijn poeder af, maar dit bleek bij de analyse niets anders te zijn dan kinovazuur, dat in alkohol beter wordt opgenomen dan in eene oplossing van zoutzuur in die vloeistof.

Deze uitkomst strookt dus volkomen met de ervaring, door LIEBERMANN en GIESEL opgedaan ten aanzien van de onmogelijkheid, om langs den aangegeven weg een samengestelden aether te krijgen.

Vergelijkt men het midden der door mij gevonden cijfers met dat van LIEBERMANN en GIESEL, zoo merkt men op, dat ik gemiddeld een iets grooter C- en H-gehalte verkreeg dan de genoemde scheikundigen

	LIEBERMANN en GIESEL.	OUDEMANS.
C.	72.5	72.7
H.	9.4	9.5

Daarbij moet ik opmerken, dat ik gebruik gemaakt heb van eene methode van analyseeren, welke het waterstofgehalte gewoonlijk zeer *juist*, maar in elk geval eerder iets te klein dan te groot aangeeft *). Naar de uitkomsten, door LIEBERMANN en GIESEL verkregen ten aanzien van de hoeveelheid kinovazuur, die uit een bepaald gewicht aan kinovine kan worden afgescheiden, nemen zij de formule voor het zuur ongeveer anderhalfmaal zoo groot als die van HLASIWETZ. Zij twijfelen echter tusschen de uitdrukkingen $C_{32}H_{48}O_6$ en $C_{33}H_{48}O_6$, die de volgeude procenten C en H vorderen:

$C_{32}H_{48}O_6$.	$C_{33}H_{48}O_6$.
72.73	73.33
9.09	8.89

Ik meen te mogen aannemen, dat beide formulen het aantal waterstof-atomen te laag aangeven en geloof dat de formule $C_{33}H_{52}O_6$, ook in verband met later te bespreken

---

*) De half met koperoxyd gevulde buis is op den Glaserschen oven reeds op die plaats waar dit zich bevindt, roodgloeiend, en aan de buizen voor absorptie van H_2O en CO_2 verbonden, wanneer het platinscheepje met de stof achter in het ledige deel van de buis wordt geschoven.

ontledingsproducten, de samenstelling van het zuur juister voorstelt. Zij komt overeen met de volgende proeenten aan C eu H:

C.	72.8
H.	9.6

Ten aanzien van de eigenschappen van kinovazuur, zijn mijne resultaten geheel overeenkomstig met die, welke door Liebermann en Giesel zijn verkregen.

Voor het S. D. V. van kinovazuur in alkalische oplossing, waaromtrent ik bij Liebermann en Giesel geene opgave vind, verkreeg ik de volgende uitkomsten met den polaristrobometer:

1) 0.5988 Gr. zuur, opgelost in 4 CC. normale kali-oplossing, en met water verdund tot 22 CC., gaven in eene buis van 302.8 mM. en bij 16^0 C. eene rechtsche draaiing van 7^0 10′. Hieruit berekent men $(\alpha)_D = + 86^0.9$.

2) De zooeven genoemde vloeistof, door verdunning met water tot haar dubbel volumen gebracht, leverde onder dezelfde omstandigheden eene rechtsche draaiing op van 3^0 37′. Hieruit berekent men $(\alpha)_D = + 87^0.8$.

Kinoviet.

Ter bereiding van kinoviet verzadigde ik de zoutzuurhoudende oplossing, door ontleding van kinovine verkregen, met zuiver baryumcarbonaat en trok ik, na uitdampen tot droogwordens op het waterbad, het overschot met een mengsel van absoluten alkohol en aether uit. Somtijds werd in plaats van baryumcarbonaat natriumcarbonaat gebezigd; ik meen intusschen het eerste boven het tweede te moeten verkiezen. De bruinachtig gekleurde oplossing werd na eenigen tijd van het chloorbaryum afgefiltreerd, op een waterbad verdampt en daarna met veel water vermengd en gekookt. Het vocht werd nu door filtratie van eene geringe hoeveelheid kinovine en kinovazuur, die zich hadden afgezonderd, door filtratie gescheiden, door dierlijke kool zooveel mogelijk ontkleurd en voorts na uitdamping tot extractdikte met absoluten aether uitgetrokken, althans wanneer het er om te doen was, een zuiver praeparaat voor de uit te voeren analyses te verkrijgen; zoo een gering aschgehalte geen bezwaar maakte werd in plaats van aether, waarin de kinoviet langzaam en moeilijk oplost, absolute alkohol gebezigd *). Uit de zuivere aetherische oplossing verkreeg ik, evenals LIEBERMANN en GIESEL somtijds een geheel kleurloos praeparaat, dat geheel vrij van asch was.

De uitkomsten der analysen, die ik van de zooveel mogelijk gezuiverde kinoviet heb verricht, onder inachtneming van alle voorzorgen (zie blz. 117) om opneming van waterdamp te verhoeden, waren de volgende:

1) 0.3196 Gr. kinoviet 5 uren op 105^0 C. gedroogd, gaven 0.5734 Gr. CO_2 en 0.2495 Or. H_2O.

2) 0.2708 Gr. kinoviet, 5 uren op 105^0 C. verhit, gaven 0.4836 Gr. CO_2 en 0.2056 Gr. H_2O.

Hieruit berekent men de volgende procenten aan koolstof en waterstof:

	1.	2.
C	48.9	48.7
H	8.7	8.4

Uit deze uitkomsten volgt reeds, dat het product geenszins identiek is met mannitaan, zooals door BERTHELOT †) zonder nader bewijs is aangenomen. Toen ik mijne onderzoekingen over dit onderwerp aanving en in het denkbeeld verkeerde, dat de kinoviet de samenstelling $C_6 H_{12} O_5$ had, heb ik een deel daarvan met een weinig water gemengd laten staan en daaruit na verloop van vier jaar geene mannite kunnen verkrijgen.

Mijne resultaten stemmen met die van LIEBERMANN en GIESEL zeer goed overeen; ik vond het waterstofgehalte iets

*) In strijd met de ervaring van LIEBERMANN en GIESEL kon ik door uittrekken van het ruwe praeparaat met absoluten alkohol, ja zelfs met een mengsel van absoluten alkohol en aether geen geheel aschvrije kinoviet verkrijgen.

†) *Traîté de Chimic organique fondée sur la synthèse*, (Paris, MALLET BACHELIER, 1860.) II. p. 198.

grooter dan zij. Ik meen mij dan ook voorloopig bij de formule $C_6\,H_{12}\,O_4$ te moeten neerleggen, welke mij met het oog op het waterstofgehalte en op de meer aannemelijke splitsingsformule waarschijnlijker voorkomt dan de tweede, door LIEBERMANN en GIESEL voorgeslagen formule $C_{12}\,H_{22}\,O_8$ en, zoo als uit het volgende blijkt, zeer goed op de door mij verkregen cijfers sluit.

		OUDEMANS.		LIEBERMANN en GIESEL	
	Berekend.	1).	2).	1).	2).
C_6	48.7	48.9	48.7	49.0	48.9
H_{12}	8.1	8.7	8 4	8.1	8.2
O_4	43.2				
	100.0				

Zooals LIEBERMANN en GIESEL terecht opmerken, geven deze uitkomsten nog geen recht om te besluiten, dat kinovine als een samengestelde aether van de kinoviet als zoodanig mag worden aangemerkt, daar bij de splitsing door zoutzuur de te verwachten alkohol (analoog aan esters van mannite) in een anhydride kan zijn overgegaan.

Ofschoon ik mij geene duidelijke voorstelling kan maken van eene suikersoort van de door mij en LIEBERMANN en GIESEL aangegevene formule, zoo meen ik evenwel te mogen opmerken, dat er licht eene uitdrukking kan worden gevonden, die dergelijke verbinding voorstelt en daarbij aanwijst, dat de stof althans met zeswaardige alkoholen, zooals mannite en met de bekende suikersoorten, in verband staat. De volgende formulen, die natuurlijk overigens geene de minste beteekenis hebben, kunnen daarvan ten bewijze strekken.

$CH_2\,.\,OH$	COH	CH_2OH	$CH_2\,.\,OH$	
CH_2	CH_2	CO	CH_2	
$CH\,.\,OH$	CH_2	CH_2	CH_2	enz.
$CH\,.\,OH$	$CH\,.\,OH$	CH_2	CO	
CH $>O$	$CH\,.\,OH$	$CH\,.\,OH$	$CH\,.\,OH$	
CH_2	CH_2OH	$CH_2\,.\,OH$	$CH_2\,.\,OH$	

Tot mijne verwondering gaven mijne waarnemingen omtrent het S. D. V. van de suiker eene geheel andere uitkomst, dan die van LIEBERMANN en GIESEL.

Ten einde van het gewicht der stof zeker te zijn, droogde ik eene kleine hoeveelheid zeer zuivere kinoviet gedurende 5 uur in een klein dunwandig glazen stopfleschje, en wel bij 105^0 C. Nadat het fleschje uit het luchtbad was genomen, werd het dadelijk gesloten en onder een droogklok geplaatst. Na volledige bekoeling werd nu de inhoud in absoluten alkohol opgelost en het geheel tot een volumen van 19 CC. gebracht.

0.3604 Gr. kinoviet gaven alzoo bij 18^0 C. in eene buis van 302.8 mM. eene rechtsche draaiing van $3^0 29'$, waaruit men berekent $(\alpha)_D = + 60^0.5$. LIEBERMANN en GIESEL vonden een S. D. V. dat *nog* hooger was dan dat van de suiker uit β-kinovine ($+ 78^0.1$).

Evenals LIEBERMANN en GIESEL, vond ik dat kinoviet door salpeterzuur zeer gemakkelijk wordt geoxydeerd en dat daardoor veel zuringzuur wordt gevormd.

Ontleding van kinovazuur door geconcentreerd zwavelzuur.

Door mijn broeder C. A. J. A. OUDEMANS is voor vele jaren waargenomen *), dat kinabasten onder den invloed van geconcentreerd zwavelzuur in bijzondere cellen eene roode kleuring vertoonen. Aanvankelijk in het onzekere verkeerende omtrent de oorzaak van dit verschijnsel en geneigd zijnde, het aan het voorkomen van een bijzonder alkaloïde in de bastvezels van de onderzochte kinasoorten toe te schrijven, helt hij later over tot de meening †), dat deze kleuring veroorzaakt wordt door de ontleding van kinalooizuur, waarvan de vorming van kinarood het gevolg zou zijn. Intusschen is

---

*) *Aanteekeningen op het systematisch-pharmacognostisch-botanische gedeelte der Pharmacapaea Neerlandica.* bl. 223 (Rotterdam. O. PETRI. 1854—1856).

†) *Handleiding tot de pharmacognosie van het planten- en dierenrijk.* 2e druk, bl. 72. (Amsterdam C. L. BRINKMAN. 1880).

in 1859 door Dr. J. E. DE VRIJ *) aangetoond, dat de kleuring het gevolg is van eene eigenaardige omzetting, die het *kinovazuur* onder den invloed van zwavelzuur ondergaat.

Zonderling is het, dat deze ontleding geheel aan de aandacht van HLASIWETZ is ontsnapt. Deze scheikundige toch deelt in zijne reeds hierboven aangehaalde verhandeling mede, dat kinovazuur door zwavelzuur wordt opgelost maar door water uit deze oplossing weder wordt nedergeslagen. Daar hieraan verder niets wordt toegevoegd, meen ik het er voor te mogen houden, dat, naar de meening van HLASIWETZ, het kinovazuur daarbij geene verandering ondergaat. De zaak draagt zich intusschen geheel anders toe en het schijnt dat uit het kinovazuur, naarmate van de toegevoegde hoeveelheid zwavelzuur en van andere nog niet juist bekende omstandigheden, geheel verschillende producten kunnen ontstaan,

LIEBERMANN en GIESEL hebben reeds de verschijnselen beschreven †), welke bij de werking van zwavelzuur op kinovazuur worden waargenomen. Ik heb daaraan slechts dit toe te voegen, dat, wanneer men de massa, na de ontwikkeling van kooloxyde, in vlakke schalen laat staan, op die plaatsen waar de lucht kan toetreden (wellicht ten gevolge van het opnemen van waterdamp of ammonia) allengs eene zwakke wijnroode verkleuring wordt waargenomen. Bij allengs toevoegen van *kleine* hoeveelheden water, kan men somtijds hetzelfde waarnemen, maar bij verdere toevoeging is de roode kleur zeer spoedig verdwenen en men houdt slechts eene schijnbaar amorphe stof over, die vaalgrijs is gekleurd.

Bij den aanvang van mijn onderzoek omtrent de werking van zwavelzuur op kinovazuur was het mij voornamelijk daarom te doen, het kleurende beginsel af te zonderen en de eigenschappen daarvan na te gaan; ik ben daarin evenwel slechts in zooverre geslaagd, dat ik eene zeer kleine hoe-

---

*) *De kinakultuur op Java op het eind van het jaar* 1859, (Batavia, H M. VAN DORP. 1860).

†) *Ber. der deutsche Chem. Gesellschaft.* XVI. 937.

veelheid van de zelfstandigheid heb kunnen afzonderen, welke door Liebermann en Giesel chinochromin wordt genoemd en daaraan de oorzaak der bedoelde kleuringsverschijnselen kon toeschrijven. Een verder onderzoek werd mij door de geringe hoeveelheid, die ik er van bezat, onmogelijk gemaakt.

Keeren wij intusschen tot ons onderwerp terug. Omtrent den oorsprong van het uit kinovazuur door de werking van zwavelzuur ontstane kooloxyde wensch ik in de eerste plaats op te merken, dat dit een ontledingsprodruct is van aanvankelijk gevormd en verder door zwavelzuur ontleed mierenzuur. Neemt men het zwavelzuur zoo geconcentreerd, dat het bij de gewone temperatuur der lucht nog juist op kinovazuur kan werken, en heeft alzoo de ontwikkeling van kooloxyde slechts langzaam plaats, dan overtuigt men zich gemakkelijk, door den reuk en de reactie op lakmoespapier, dat er een vluchtig vetzuur ontwijkt; dat dit mierenzuur is, wordt hoogst waarschijnlijk door den eigenaardigen reuk en door de reactie die de in water gevoerde dampen tegenover ammoniacale zilveroplossing vertoonen.

Ik heb getracht, de hoeveelheid kooloxyde te bepalen, die bij de ontleding ontstaat en verkreeg daarbij uitkomsten, welke slechts weinig verschillen vau die, welke door Liebermann en Giesel zijn vermeld. Deze scheikundigen verkregen van 10 gram kinovazuur ongeveer 210 CC. kooloxyd; d. i. ongeveer 2.4 pCt. in gewicht. Mijne proeven gaven de volgende uitkomsten:

1) 1.618 gram zuiver droog kinovazuur werden in een klein kolfje gebracht, waarvan de monding gesloten was door een caoutchouc-kurk met 3 openingen; door de middelste kon met behulp van een kleinen kraantrechter zuiver zwavelzuur worden toegevoegd; van de zijdelingsche, met eene glazen buis voorziene openingen, diende de eene om door middel van een aspirator lucht toe te voeren en de andere om het gevormde kooloxyd en de dampen van mierenzuur af te leiden en over gloeiend koperoxyde te voeren, zoodat daardoor koolzuur ontstond, dat op bekende wijze quantitatief kon worden bepaald.

Zoodoende verkreeg ik:

$0.0698 Gr. CO_2 = 0.0729 Gr. CH_2O_2 = 0.0527 Gr. CO$ (2.7 pCt.)

2) 6.342 gram kinovazuur op gelijke wijze behandeld, gaven

$0.2914 Gr. CO_2 = 0.3046 Gr. CH_2O_2 = 0.1854 Gr. CO_2$ (2.9 pCt.)

Neemt men voor het kinovazuur de formule aan, die hierboven door mij, of die welke door LIEBERMANN en GIESEL is voorgesteld, zoo zou voor het vormen van 1 molecule mierenzuur vereischt worden eene hoeveelheid van 5.2 procent aan kooloxyde.

Uit het verschil tusschen dit cijfer en het werkelijk verkregene, zou men gerechtigd zijn om één van de volgende besluiten te trekken:

1) Het moleculair gewicht van kinovazuur is tweemaal zoo groot als wij het boven hebben aangenomen, en de molecule $C_{66}H_{104}O_{12}$ verliest onder de werking van zwavelzuur 1 molecule mierenzuur.

2) Twee moleculen van het kinovazuur $C_{33}H_{52}O_6$ verliezen te samen één molecule mierenzuur.

3) Het zich aanvankelijk vormende mierenzuur of het door ontleding daarvan ontstaande kooloxyde wordt onder den invloed van het zwavelzuur ten deele verbruikt tot de secundaire vorming van eene of andere scheikundige verbinding. Voor de formule van kinovazuur kan volgens deze onderstelling $C_{33}H_{52}O_6$ behouden worden.

Van de gemaakte onderstellingen komt mij de tweede in het geheel niet aannemelijk, de laatste daarentegen de waarschijnlijkste voor.

Nemen wij nu intusschen verder de vaste producten in oogenschouw, die door mij bij de werking van zwavelzuur zijn verkregen.

LIEBERMANN en GIESEL merken op, dat het wenschelijk is, de werking van het zwavelzuur op kinovazuur zoodanig te regelen, dat de ontleding langzaam voortgaat. De ervaring, die ik daaromtrent heb, strookt met die der Duitsche scheikundigen. Doch mij is het toch altijd voorgekomen, dat bij gebruik van *zuiver* zwavelzuur (zoo mogelijk nog eenigszins verdund) toch reeds na de reactie van de twee lichamen op elkander, de reuk van zwaveligzuur merkbaar werd nevens een anderen, die aan vluchtige vetzuren herinnert en haar ontstaan moet te danken hebben aan eene of andere organische verbinding. Bij eene enkele proef, waarin ik kinovazuur met een mengsel van kaliumdichromaat en zwavelzuur trachtte te oxydeeren, en waarbij bleek dat genoemde verbinding zeer bestendig was, meen ik duidelijk den reuk van boterzuur te hebben kunnen bespeuren; daar de oxydatie echter na dagen tijds weinig vorderde, heb ik deze proef afgebroken en geene gelegenheid gehad, daarop terug te komen.

Kinochromine.

Van de veronderstelling uitgaande, dat het door werking van zwavelzuur op kinovazuur verkregene product een mengsel van verschillende verbindingen kon zijn, heb ik eene approximatieve scheiding beproefd, door de geheele massa in alkohol op te lossen (hetgeen uiterst gemakkelijk geschiedde in tegenstelling met kinovazuur) en dan aan het verkregen vocht zooveel water toe te voegen als het zonder blijvend troebel te worden verdragen kon.

Daarna liet ik dit in eene gesloten kolf aan zich zelf over. Allengs scheidde zich eene geringe hoeveelheid van eene in naalden kristalliseerende stof af, welke ik meen te moeten beschouwen als identisch met het kinochromine van LIEBERMANN en GIESEL, en wel omdat het 1° in samenstelling nagenoeg daarmede overeenkomt, en 2° dezelfde kleuringsreacties vertoont, welke door de genoemde onderzoekers zijn beschreven. De hoeveelheid daarvan was echter zoo gering, dat ik van ongevner 30 gram kinovazuur nauwelijks zooveel kon verzamelen als tot het uitvoeren van eene analyse en voor het bestudeeren van de voornaamste eigenschappen noodig was.

Bij de analyse van deze stof verkreeg ik de volgende uitkomst.

0.1962 Gram gaven 0.5762 Gr. CO_2 en 0 1717 Gr. H_2O. Hieruit berekent men 80.1 pCt. C. en 9.7 pCt H.

De stof bleek evenwel een weinig asch te bevatten, welke gedeeltelijk in het bij de analyse gebezigde platina scheepje was teruggebleven, deels ook in de glazen verbrandingsbuis was verstoven.

Ik mag niet verzuimen te vermelden, dat ik, door het oxydeeren van kinovazuur door een mengsel van kalium dichromaat en zwavelzuur, eenmaal een in alkohol moeilijk oplosbaar kristallijn product verkreeg, dat mij voorkwam met het voornoemde lichaam identiek te zijn en bij de analyse de volgende cijfers gaf:

0.2496 Gr. gaven 0.6746 Gr. CO_2 en 0.2173 Gr. H_2O.

Hieruit berekent men 81.1 pCt. C. en 9.7 pCt. H_2O.

Ongelukkig bezat ik ook van dit praeparaat zeer weinig en moest ik alzoo het verder onderzoek opgeven.

Kinoveen.

Eene enkele maal verkreeg ik door de werking van een overvloed van zwavelzuur op kinovazuur eene geringe hoeveelheid van een lichaam, dat ik aanvankelijk voor kinochromine hield, maar dat bij nader onderzoek daarvan bleek te verschillen en niet vatbaar was om de kleurenreacties te geven, welke door LIEBERMANN en GIESEL uitvoerig zijn beschreven. De analyse van dit lichaam gaf de volgende uitkomst:

0.1644 Gr. gaven 0.5394 Gr. CO_2 en 0.1354 Gr. H_2O.

Hieruit berekent men voor C. 89.5 pCt. en voor H. 9.8 pCt., waaruit alzoo blijkt, dat de stof een koolwaterstof was. Op de verkregen cijfers kunnen zeer verschillende formules worden toegepast, zooals blijkt uit het volgende overzicht:

	$C_{33}H_{42}$	$C_{33}H_{44}$	$C_{33}H_{46}$	$C_{32}H_{40}$	$C_{32}H_{42}$
C.	90.4	90.0	89.6	90.6	90.0
H.	9.6	10.0	10.4	9.4	10.0

Nemen wij evenwel in aanmerkiug, dat kinovazuur bij verhitting met zwavelzuur eerst eene molecule mierenzuur schijnt te verliezen en onderstelt men, dat de overblijvende atomen zuurstof door het zwavelzuur onder den vorm van water worden onttrokken, dan zou men komen tot de laatstgenoemde formule $H_{32}H_{42}$.

Nadere onderzoekingen zullen omtrent het al of niet juiste van deze onderstelling moeten beslissen.

Apokinovazuur.

Liebermann en Giesel hebben onder de produkten welke bij de werking van zwavelzuur op kinovazuur ontstaan, eene verbinding ontdekt, bevattende 76.4 pCt. C. en 9.16 pCt. H. Zij geven daaraan den naam van novazuur. Zij hebben geene formule voor het lichaam voorgesteld en ook geene analysen van novazure zouten uitgevoerd.

Mijne ondervinding omtrent de splitsingsproducten van kinovazuur onder den invloed van zwavelzuur verkregen, wijken zeer af van die der Duitsche scheikundigen. Ik vond namelijk, dat wanneer de van kinochromine afgezonderde alkoholische vloeistof met water werd neêrgeslagen en de aldus verkregene harsachtige massa met eene oplossing van natriumcarbonaat werd verhit, het grootste deel onveranderd bleef, maar een deel oploste en dat daarbij een natronzout werd gevormd van een zuur, dat geenszins identiek is met novazuur en dat ik derhalve, ter onderscheiding daarvan, apokinovazuur wil noemen. Aanvankelijk wilde het mij niet gelukken, dit zout in zuiveren toestand te isoleeren, daar kleverige bijprodukten de kristallisatie verhinderden. Na lang staan vormde zich evenwel toch eene verward kristallijne massa, die door afzuigen op een filtrum door middel van de Bunsensche pomp kon worden gereinigd en na eenige malen te zijn omgekristalliseerd, eene homogene in naalden kristalliseerde verbinding opleverde.

De oplossing van dit zout gaf door neêrslaan met zoutzuur een witten geleiachtigen neêrslag, die, na goed te zijn uitgespoeld, bij 110^0 werd gedroogd en aan de analyse werd onderworpen.

	Gram.		Gram.		Gram.
1)	0.1132	van het zuur gaven	0.2815 CO_2	en	0.0956 H_2O
2)	0.1846	» » » »	0.4607 »	»	0.1511 »

Hieruit berekent men de volgende procenten aan kool- en waterstof:

	1.	2.
C.	67.8	68.3
H.	9.4	9.1

Eene analyse van het op 135^0 gedroogde natronzout leverde de volgende uitkomsten:

0.3451 Gr. zout met $PbCrO_4$ verbrand gaven 0.7960 Gr. CO_2 en 0.2734 Gr. H_2O.

Verder leverden 0.5348 Gr. van dit gedroogde zout 0.1250 Gr. Na_2SO_4 = 8.1 pCt.

Bij het verhitten van het uit water versch gekristalliseerde zout ontweken aan 0.1860 Gr. = 11.5 pCt.

Uit het samenstel van de verkregene uitkomsten kan men als eenvoudigste uitdrukking voor het apokinovazuur afleiden de formule $C_{16}H_{26}O_4$, zooals uit het volgende overzicht blijkt:

	Gevonden.		Berekend.
	1)	2)	
C_{16}	67.8	68.3	68.1
H_{26}	9.4	9.1	9.4
O_4	—	—	22.5

	Gevonden.	Berekend.
C_{16}	62.9	62.7
H_{25}	8.8	8.8
Na	8.1	7.5
O_4	—	21.2

	Gevonden.	Berekend.
$3^1/_2 H_2O$	17.5	17.2

Wellicht evenwel moet de formule verdubbeld worden, waardoor zij de gedaante zou verkrijgen van $C_{32}H_{52}O_8$. In verband met het vormen van 1 molecule mierenzuur uit 1 molecule kinovazuur $C_{33}H_{52}O_6$, mag, zoo ik meen, wel worden aangenomen dat het aantal koolstof-atomen in de beide verbindingen waarschijnlijk juist is aangegeven.

Behalve de stoffen, die ik als goed te onderscheiden verbindingen bij de splitsing van kinovazuur door zwavelzuur kon afzonderen, verkreeg ik als hoofdmassa eene schijnbaar amorphe harsachtige stof, welke ik niet nader heb onderzocht, maar waarvan ik door een voorloopig onderzoek het koolstofgehalte vrij aanzienlijk vond. Eenmaal verkreeg ik 77.4 pCt. C en 8.9 pCt. H en een ander maal 81.5 pCt. C en 8.2 pCt. H. Het komt mij niet onwaarschijnlijk voor, dat van dit mengsel het novazuur van LIEBERMANN en GIESEL een deel uitmaakte.

Ten slotte kom ik tot het besluit, dat de waarschijnlijkste formule, die voor kinovine, voor zoover men alleen de cijfers van de voor dit lichaam verkregene procenten kool- en waterstof in aanmerking neemt, zou wezen $C_{39}H_{64}O_{11}$, welke, zooals uit het onderstaande blijkt, zeer goed met mijne uitkomsten sluit.

	Berekend.	Gevonden als midden.
C_{39}	66.1	66.0
H_{64}	9.0	8.8
O_{11}	24.9	
	100.0	

Neemt men aan, dat bij de splitsing kinoviet als anhydride is afgescheiden, dan zou de ontleding van kinovine, analoog aan de veronderstelling van LIEBERMANN en GIESEL, aldus moeten worden voorgesteld:

$$C_{39}H_{64}O_{11} = C_{33}H_{50}O_6 + C_6H_{12}O_4 + H_2O$$

maar daaruit zou dan onmiddellijk volgen, dat de door mij voor kinovazuur voorgeslagen formule $C_{33}\,H_{52}\,O_6$ een te hoog waterstofgehalte aangeeft. Mijne analysen van het kinovazuur zijn daarmede ook niet in strijd, zooals blijkt uit het volgende:

	Berekend.	Gevonden als midden.
C_{33}	73.1	72.7
H_{50}	9.2	9.5
O_6	17.7	
	100.0	

Delft, 28 Mei 1882.

INHOUD

VAN

DEEL XIX. — STUK 1.

bladz

Bouwstoffen voor de geschiedenis der wis- en natuurkundige wetenschappen in de Nederlanden. Door D. Bierens de Haan....... 1.

Over het voorkomen van gesteenten der krijtformatie in de residentie Westerafdeeling van Borneo; door R. D. M. Verbeek.......... 39.

De bewegingsvergelijkingen van het electromagnetische veld, in verband met de theorie van Maxwell; door C. H. C. Grinwis..... 44.

Over de op 17 Maart 1883 te Haarlem en in de omstreken waargenomen aardschudding; door Dr. E. H. von Baumhauer......... 60.

Ueber eigenthuemliche Krystallgebilde in einem vulkanischen Gestein von der Insel Timor; von Behrens........................ 72.

Rapport over de verhandeling des heeren Dr. A. A. W. Hubrecht, getiteld: Over de voorouderlijke stamvormen der Vertebraten; uitgebracht in de Vergadering van 27 April 1883................. 76.

Bouwstoffen voor de geschiedenis der Wis- en Natuurkundige Wetenschappen in de Nederlanden; door D. Bierens de Haan........ 78.

Verslag omtrent de door Dr. J. D. R. Scheffer aangeboden verhandeling: Onderzoekingen over de diffusie van eenige anorganische en organische verbindingen; uitgebracht in de Vergadering van 26 Mei 1883.. 85.

Onderzoekingen over de diffusie van eenige anorganische en organische verbindingen; door J. D. R. Scheffer........................ 89.

Verslag omtrent de door den Heer T. J. Stieltjes Jr. aangeboden verhandeling: Over de quadratische ontbinding van priemgetallen in den vorm $3n+1$; uitgebracht in de Vergadering van 26 Mei 1883. 103.

Over de quadratische ontbinding van priemgetallen van den vorm $3n+1$; door T. J. Stieltjes Jr........................ 105.

Over rhizopogonzuur; door A. C. Oudemans Jr................. 112.

Bijdrage tot de kennis van kinovazuur, kinovine en kinoviet; door A. C. Oudemans Jr...................................... 117.

Overzicht der boekwerken, door de Koninklijke Akademie van Wetenschappen ontvangen en aangekocht.......................... 113—139.

GEDRUKT BIJ DE ROEVER KRÖBER - BAKELS.

VERSLAGEN EN MEDEDEELINGEN

DER

KONINKLIJKE AKADEMIE

VAN

WETENSCHAPPEN.

Afdeeling NATUURKUNDE.

TWEEDE REEKS.

Negentiende Deel. — Tweede Stuk.

AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER.
1883.

UITKOMSTEN

VAN

WAARNEMINGEN MET DEN PIËZOMETER.

DOOR

R. A. MEES.

De door mij gebruikte piëzometer is in fig. 1 afgebeeld *). Een glazen vat van ongeveer cilindrieken vorm met halfbolvormige uiteinden *aa*, hetwelk van boven uitloopt in een nauwe glazen buis met verdeeling *bb*, dient als piëzometervat. Nadat de uit- en inwendige afmetingen van dit vat door middel van metingen en wegingen bepaald zijn en de buis nauwkeurig in hare verschillende deelen gecalibreerd is, wordt het met water gevuld en dit onder lagen druk zeer zorgvuldig uitgekookt. Het vat wordt vervolgens gebracht binnen een omgekeerde, hooge glazen klok *ccc*, waarvan het opene, naar boven gekeerde einde met een massieven, geelkoperen ring *dd* omgeven is, welks bovenkant vlak is afgeslepen. Op den bovenkant van dien ring rust het van onderen vlak afgeslepen, zeer massieve geelkoperen deksel *ee*. Nadat tusschen ring en deksel een kleine hoeveelheid zeer fijne menie is gebracht, worden beiden door

*) De afmetingen van den toestel stemmen niet allen volmaakt overeen met die van de figuur. Duidelijkheidshalve hebben enkele deelen van den toestel een kleine wijziging in de figuur ondergaan; ook zijn om dezelfde reden sommige deelen van den toestel niet in de figuur opgenomen.

middel van zes schroeven luchtdicht op elkander bevestigd. Met behulp van drie lange stalen stangen *f* kan verder het deksel vastgeschroefd worden aan het op drie stelschroeven rustende geelkoperen voetstuk *g*, dat tot steun van de omgekeerde glazen klok *ccc* dient. Door de schroeven der stangen *f* stevig aan te zetten, verkrijgt men een zeer vast samenhangend geheel, dat door middel van de stelschroeven gemakkelijk verticaal te stellen is.

Het deksel *ee* heeft vier openingen. De middelste *h* dient tot het doorlaten van de buis des piëzometers, die daar ter plaatse met een koperen band omgeven is.

De tweede opening *i* dient tot het doorlaten van den thermometer *kk*, met zeer lang, cilindrisch vat, ter bepaling van de temperatuur van het in de glazen klok den piëzometer omgevende water.

De derde opening *l* leidt door middel van een kort, gebogen, metalen buisje naar de verticale glazen buis *mm*. Het metalen buisje eindigt in de opening in een kraan, zoodat door het omdraaien van de buis *mm* deze opening gesloten of geopend kan worden.

De vierde opening *n* leidt door middel van een koperen buisje naar de kraan *o*. Boven deze is vast bevestigd de glazen, meermalen omgebogen buis *pppp*, waarover later meer.

De in deze openingen passende stukken kunnen met schroeven vast en luchtdicht aan het deksel bevestigd worden.

Boven op het deksel staat ten slotte nog de metalen stang *qq*. Langs deze verschuifbaar en op alle hoogten vast te zetten is het bewegelijke stuk *r*. Dit stuk draagt een paar horizontale ringen *s*, die doorgang geven aan de buis des piëzometers, welke daar ter plaatse voorzien is van een koperen bandje. De horizontale ringen *s* zijn ten opzichte van elkander en van het stuk *r* eenigszins in horizontalen zin verplaatsbaar, maar kunnen door middel van door de ringen gaande schroefjes vastgezet worden. Men kan die ringen zulk een stand geven, dat de buis des piëzometers er zonder eenige wringing of buiging te ondergaan doorheengaat. Schroeft men dan de ringen vast, dan vormen zij een stevigen steun voor het bovendeel der piëzometerbuis.

De ruimte om het piëzometervat *aa*, begrensd door de wanden van de glazen klok *ccc*, is geheel gevuld met water, dat door de openingen *l* en *n* in verband kan gesteld worden met het water in de buizen *mm* en *pppp*. Het was zeer wenschelijk dat ook dit water zooveel mogelijk luchtvrij was, en dat zich onder het deksel *ee* alleen water en in het geheel geen lucht bevond. Daartoe moest dat water in de klok *ccc*, nadat het deksel er vast op bevestigd was, kunnen worden uitgekookt. De bovenkant van het deksel heeft hiertoe aan zijn rand een cirkelvormige groef. Hierin kan luchtdicht gezet worden een verticale koperen ring en hierop weder een glazen klok met twee openingen, waarvan de eene luchtdicht doorgang geeft aan de piëzometerbuis, de andere leidt naar een luchtpomp. De glazen buis *pppp*, de stang *qq* en de buis *mm* waren toen nog niet op haar plaats gebracht, anders hadden de ring en glazen klok natuurlijk niet op de beschreven wijze kunnen zijn geplaatst. Men vulde nu de glazen klok *ccc* tot boven het deksel met water, terwijl de openingen *l* en *n* wijd open waren. De lucht boven dit water in de op het deksel staande klok werd vervolgens door middel van de luchtpomp sterk verdund en het water door zachte verwarming bij lage temperatuur aan het koken gebracht en geruimen tijd aan de kook gehouden. Op deze wijze werd zeker de lucht bijna volkomen uit de het piëzomervat omgevende ruimte verdreven.

De glazen buis *pppp* moest dienen, om de veranderingen van het uitwendig volumen van het piëzometervat te meten, wanneer binnen dat vat een druk werd uitgeoefend. Het lange, rechte, eenigszins ten opzichte van den horizon hellende gedeelte van de buis, droeg daartoe een verdeeling. Dit gedeelte was nauwkeurig gecalibreerd en had een wijdte ongeveer juist overeenkomende met die van de buis des piëzometers. Het gebogen gedeelte der buis *pppp* bezat van boven een fijne opening *t*, welke luchtdicht kon gesloten worden door een glazen dopje *u*. De buis *pppp* werd tot de fijne opening met water gevuld en dan werd het vooraf met water gevulde dopje *u* er opgezet; op deze wijze werd verkregen, dat bij het opzetten van het dopje in het geheel geen lucht binnen de buis *pppp* kwam. De opening *t* diende om de geheele buis met water te kunnen vullen, terwijl men het door haar verder geheel in zijn macht had om op elk oogenblik het niveau van het water in het rechte, verdeelde gedeelte der buis *pppp* elken gewenschten stand te geven *).

De druk, die achtereenvolgens of gelijktijdig op de vloeistof in de buizen *bb* en *mm* moest worden aangebracht, werd evenals bij mijne vroegere proeven met den piëzometer †) uitgeoefend door in een grooten koperen bol samengeperste lucht. Door middel van een metalen buis, die zich in twee takken splitste, welke naar de buizen *bb* en *mm* leidden, konden deze buizen met den bol in verband gebracht worden. Een kraan op de plaats van splitsing maakte het mogelijk dit verband voor elk der buizen afzonderlijk of voor beide gezamenlijk te vormen. Door een tweede kraan met dubbele doorboring, vóór de plaats van splitsing in de metalen buis aangebracht, konden de buizen *bb* of *mm*, hetzij met den bol met samengeperste lucht, hetzij met den atmospheer in verbinding worden gesteld, en dus achtereenvolgens druk op de vloeistof in de buizen *bb* en *mm* worden toegelaten en weder worden weggenomen. De grootte van den aangewenden druk werd gemeten op

---

*) Het verwijde verticale gedeelte van de buis *pppp* was aangebracht, omdat bij sommige hier niet beschreven proeven met den piëzometer het lange gedeelte der buis kwik bevatte. Dit kwik reikte tot in het wijde gedeelte en was daar van boven begrensd door water, dat door de kraan *o* met het water om den piëzometer communiceerde. Eene verandering in stand van het niveau van het kwik in het nauwe, verdeelde gedeelte der buis had dan in het wijde gedeelte bijna geen niveau-verandering van het kwik ten gevolge. Daar bij de bedoelde proeven het verdeelde gedeelte der buis horizontaal gesteld was, werd door eene verandering van het niveau van het kwik in de buis geen merkbare verandering van de door het kwik uitgeoefende drukking teweeggebracht.

†) Zie Verslagen en Mededeelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen, Afdeeling Natuurkunde, 2e Reeks, Deel XIV, blz. 108—134.

dezelfde wijze en met denzelfden manometer als bij mijn boven aangehaalde vroegere proeven.

Wilde men den druk alleen toelaten binnen den piëzometer, dan was alleen de buis *bb* met den bol verbonden. De buis *mm* was dan zoover omgedraaid, dat de opening *l* in het deksel gesloten was. De kraan *o* stond daarentegen open, zoodat de ruimte om den piëzometer met de buis *pppp* in verband stond, en de niveau-veranderingen in deze buis de vermeerdering van het uitwendig volumen van het piëzometervat ten gevolge van den inwendigen druk konden aantoonen.

Wilde men den druk in de ruimte om den piëzometer aanwenden, dan had de buis *mm* zulk een stand, dat de opening *l* in het deksel open was, terwijl de buis *mm* met de naar den bol leidende metalen buis verbonden was. Al naarmate men den druk al of niet gelijktijdig binnen den piëzometer wilde laten werken, stond de buis *bb* in verbinding met de naar den bol leidende buis of mondde zij onmiddellijk uit in de buitenlucht. De kraan *o* bleef dan voortdurend gesloten, zoodat alleen niveau-veranderingen in de buis *bb*, niet zoodanige in de buis *pppp*, konden worden waargenomen.

Deze niveau-veranderingen werden afgelezen met denzelfden kijker met oculair-mikrometer als bij mijn vroegere proeven door mij gebruikt was. Dezelfde kijker diende tevens tot het aflezen van den manometer.

Om temperatuurs-veranderingen binnen den piëzometer zooveel mogelijk te voorkomen, stond de toestel in een grooten houten bak van ongeveer 280 liters inhoud, die tot boven het deksel van den toestel met water gevuld was. De bak was zooveel mogelijk bedekt met houten planken. Een thermometer gaf de temperatuur van het water in den bak aan, die gedurende de waarnemingen meestal niet merkbaar afweek van de temperatuur binnen den toestel.

Die groote bak met water om de temperatuur constant te houden was zeer noodig, omdat de piëzometer een uiterst gevoeligen thermometer vormde. Bij 15^0 zou een temperatuursverhooging van 1^0 een rijzing van het waterniveau in de piëzometerbuis van 144 buisdeelen ten gevolge hebben; en in de buis, die met de ruimte om den piëzometer in verband staat, zou dezelfde temperatuursverhooging van 1^0 een nog grootere verplaatsing moeten teweegbrengen. Daar wegens de elastische nawerking de met elkander te vergelijken waarnemingen ver in tijd van elkander moesten afliggen, werd daarom voor de nauwkeurigheid der te verkrijgen uitkomsten bepaald vereischt, dat de temperatuur zoo goed mogelijk constant gehouden werd. Door gebruik te maken van den bovengenoemden bak met water, en door verder nooit waarnemingen te doen, tenzij de temperatuur van de lucht in het vertrek ongeveer juist dezelfde was als die van het water in den piëzometer, is het mij dan ook gelukt de temperatuur buitengewoon constant te houden. Dit blijkt wel hieruit, dat, niettegenstaande gedurende de proeven altijd twee personen in de nabijheid der toestellen waren, toch een verandering van het niveau in de piëzometerbuis om 2 buisdeelen per uur een zeldzaamheid was; somtijds bleven gedurende de proeven de niveau-veranderingen in de piëzometerbuis in den tijd van 2 à 3 uren binnen één enkel buisdeel beperkt, en was dus gedurende al dien tijd de temperatuur in den piëzometer om geen $0^0{,}01$ gestegen of gedaald *). Wilde het niveau zulk een vasten stand behouden, dan moest natuurlijk niet alleen de temperatuur in den piëzometer, maar ook de barometerstand gedurende dien tijd uiterst constant zijn.

Om echter alle storende invloeden van eene verandering in temperatuur of luchtdruk, hoe klein deze ook zijn mogen, zooveel mogelijk te elimineeren, werd bij de berekening der proeven eene waarneming bij druk altijd gecombineerd met het gemiddelde van twee waarnemingen bij geen druk, waar-

*) Een deel der waargenomen niveau-verandering is waarschijnlijk niet het gevolg van een temperatuursverandering van het water in den toestel, maar van een zoodanige van het water in de beide boven den bak uitstekende aflezingsbuizen, die natuurlijk aan grootere temperatuursveranderingen onderhevig waren dan het ondergedompelde gedeelte van den toestel.

van de eene in tijd evenveel vroeger had plaats gehad als de andere later plaats greep dan de eene waarneming bij druk.

Met den beschreven toestel zijn de volgende waarnemingen gedaan.

In de eerste plaats werd de druk alleen binnen het piëzometervat toegelaten, en de verandering van den stand van het water waargenomen zoowel in de buis des piëzometers als in die van het den piëzometer omringende vat. De uitkomsten der waarnemingen zijn vervat in tabel 1.

TABEL I.

Druk binnen.

N^o.	Temperatuur.	Druk.	uitzetting uitwendig volumen per atmospheer.	schijnbare uitzetting inwendig volumen per atmospheer.
1.	15^0.5	1258^{mm}.	141.81	326.03
2.	15^0.5	1258	140.55	324.80
3.	15^0.5	1254	140.46	325.72
4.	15^0.5	1250	140.76	324.73
1—4.	15^0.5	1255	140.90	325.32
5.	15^0.9	2384	141.20	326.29
6.	15^0.9	2374	140.68	327.94
7.	15^0.9	2367	140.29	325.58
8.	15^0.9	2351	140.62	326.08
5—8.	15^0.9	2369	140.70	326.47
20.	13^0.9	3666	142.96	
21.	13^0.9	3655	142.32	
22.	13^0.9	3643	141.51	
20—22.	13^0.9	3654	142.26	
algemeen gemiddelde	15^0.2	2315	141.20	
1—8	15^0.7	1812	140.80	325.90

De eerste kolom geeft het nummer der proef aan; de tweede de temperatuur des piëzometers; de derde de hoegrootheid, waarom de druk binnen den piëzometer grooter is dan daarbuiten, in millimeters kwik; de vierde de uit de niveau-verandering in de met de ruimte om den piëzometer in verbinding staande buis afgeleide vergrooting van het uitwendig volumen van het piëzometervat per atmospheer; de vijfde de uit de niveau-verandering in de buis des piëzometers afgeleide schijnbare vergrooting van het inwendig volumen van het piëzometervat per atmospheer. Deze schijnbare vergrooting van het inwendig volumen van het piëzometervat is gelijk aan diens ware vergrooting, vermeerderd met de inkrimping van het in den piëzometer bevatte water. Als éénheid van volumen is in den regel aangenomen het volumen van 1 mgr. kwik van 0^0.

Bij proeven 20—22 was de druk te groot, om de schijnbare uitzetting van het inwendig volumen des piëzometers te kunnen waarnemen: de buis des piëzometers was daartoe te kort. Bij die proeven bleef het water in het wijdere bakje, waarin het boveneinde van de piëzometerbuis uitloopt; de toelating van den druk had hier daarom geen niveau-verandering van het water in de piëzometerbuis ten gevolge, ten minste slechts zulk een geringe, dat zij niet in rekening behoefde gebracht te worden. Bij proeven 1—8, waarbij het niveau van het water wel daalde bij het toelaten van den grooteren druk, moest de daardoor veroorzaakte drukvermindering in rekening worden gebracht. Als drukvermeerdering binnen de piëzometerbuis werd bij deze proeven genomen de door den manometer aangegeven drukvermeerdering, verminderd met de door de daling van het waterniveau teweeggebrachte vermindering van druk.

Aan de waarden voor de volumen-veranderingen verkregen, moest nog een kleine correctie worden aangebracht. De buis, verbonden aan de ruimte, die den piëzometer omgeeft, waarop de verandering van het uitwendig volumen des piëzometers wordt afgelezen, had namelijk een helling van ruim 12^0 ten opzichte van den horizon. Dit had ten gevolge, dat, wanneer de druk binnen den piëzometer om één atmospheer toenam, de druk in de ruimte om den piëzometer wegens het stijgen van het water in de hellende buis ook iets toenam, en wel om ongeveer 0,6 mm. kwikdruk. Deze vermeerdering van den druk buiten op den piëzometer heeft ten gevolge, dat het piëzometervat zich iets minder uitzet, dan wanneer die vermeerdering van druk niet bestond. Dat te min kan voor het inwendig volumen van den piëzometer gemakkelijk berekend worden uit de bij latere proeven waargenomen vermindering van dat volumen, wanneer de buitendruk om één atmospheer toeneemt. De berekening geeft daarvoor 0,12. Om zooveel moest dus de schijnbare uitzetting van het inwendig volumen per atmospheer vermeerderd worden.

Diezelfde correctie moest aan de uitzetting van het uitwendig volumen worden aangebracht. Eigenlijk is de correctie voor het uitwendig volumen een iets grootere dan voor het inwendig volumen, maar het verschil is zoo klein, dat voor beiden wel dezelfde correctie kan worden genomen.

Doch de uitzetting van het uitwendig volumen vereischte nog een tweede correctie. Door de vermeerdering van den buitendruk wordt namelijk ook het water in de ruimte, die den piëzometer omringt, iets samengedrukt. De waargenomen uitzetting zal om die samendrukking van het water kleiner zijn dan de ware uitzetting. Daar de ruimte om den piëzometer ongeveer 530 $cm.^3$ groot is, vindt men voor deze correctie ongeveer 0,28. De geheele correctie is dus $0,12 + 0,28 = 0,40$.

De in tabel 1 opgenomen waarden zijn de met de gemiddelde waarde der correctie verbeterde waarden. Deze zijn, zooals gezegd, voor de vierde kolom 0,40 en voor de vijfde kolom 0,12 grooter dan de ongecorrigeerde waarden.

In de tweede plaats werd de druk alleen in de ruimte buiten het piëzometervat toegelaten, terwijl de ruimte binnen den piëzometer in voortdurend verband bleef met den atmospheer. De verandering van den stand van het water in de piëzometerbuis werd afgelezen en daaruit afgeleid de inkrimping van het inwendig volumen van het piëzometervat, welke het gevolg is van de vermeerdering van den uitwendigen druk. De uitkomsten dezer waarnemingen zijn vervat in tabel 2.

TABEL II.

Druk buiten.

N°.	Temperatuur.	Druk.	Inkrimping inwendig volumen per atmospheer.
9.	15°.9	1485mm.	142.65
10.	15°.9	1479	142.21
11.	15°.9	1473	141.66
12.	15°.9	1466	141.94
9—12.	15°.9	1476	142.12
13.	15°.6	2191	142.00
14.	15°.6	2185	142.00
15.	15°.6	2178	142.38
16.	15°.6	2169	142.50
13—16.	15°.6	2181	142.22
17.	15°.1	3782	142.30
18.	15°.1	3769	142.42
19.	15°.1	3751	143.00
17—19.	15°.1	3767	142.57
algemeen gemiddelde 9—19.	15°.5	2357	142.28

De twee eerste kolommen geven weder het nummer der proef en de temperatuur aan. In de derde kolom staat de vermeerdering der uitwendige drukking, in de vierde de daardoor veroorzaakte vermindering van het inwendig volumen des piëzometers per atmospheer.

De toename van den uitwendigen druk is die door den manometer aangegeven, daar het niveau van het water in de ruimte om den piëzometer bij het toelaten van den druk bijna niet verandert en daarvoor dus geen correctie is aan te brengen.

De inkrimping van het inwendig volumen vereischte daarentegen wel eene correctie. Door het aanbrengen van den grooteren uitwendigen druk stijgt het niveau van het water in de piëzometerbuis en daardoor de druk binnen het piëzometervat. Die vermeerdering van den inwendigen druk heeft een schijnbare uitzetting van het inwendig volumen des piëzometers ten gevolge, en om die schijnbare uitzetting wordt de inkrimping van den piëzometer te klein gevonden. Deze correctie laat zich nu echter gemakkelijk berekenen uit de waarnemingen der eerste proevenreeks. Volgens die waarnemingen bedroeg de schijnbare uitzetting van het inwendig volumen des piëzometers 325,9 bij een toeneming van den inwendigen druk om één atmospheer. Hieruit laat zich nu die schijnbare uitzetting berekenen bij een toeneming van den inwendigen druk om den druk van de in de piëzometerbuis door het aanbrengen van den uitwendigen druk opgeheven waterkolom. Aan de in de vierde kolom van tabel 2 gegeven waarden is aan allen, zoowel aan de waarde voor elke proef als aan de middelwaarden, die correctie aangebracht. De grootte dier correctie per atmospheer bedroeg 1,23.

In de derde plaats werd de druk gelijktijdig binnen en buiten het piëzometervat toegelaten, en werd de door den verhoogden druk teweeggebrachte schijnbare volumenvermindering van het water in het piëzometervat waargenomen. De uitkomsten dezer waarnemingen zijn vervat in tabel 3.

TABEL III.

Druk binnen en buiten.

N°.	Temperatuur.	Druk.	Schijnbare inkrimping water in den piëzometer per atmospheer.
23.	12°.1	3484mm.	185.43
24.	12°.1	3471	185.33
25.	12°.1	3459	185.35
26.	12°.1	3446	187.19
23—26.	12°.1	3465	185.83
23—25.	12°.1	3471	185.37

De beide eerste kolommen bevatten weder nummer der proef en temperatuur; de derde de vermeerdering der drukking; de vierde de schijnbare inkrimping per atmospheer van het water in den piëzometer, dus in wezenlijkheid de ware inkrimping van het water verminderd met de inkrimping van het vat.

De toeneming der drukking is hier binnen en buiten het piëzometervat niet volkomen dezelfde. Buiten is zij gelijk aan de door den manometer aangegeven toeneming der drukking; binnen is zij kleiner om den druk van de bij het toelaten der drukking in de piëzometerbuis naar beneden geperste waterkolom. Die kleinere inwendige druk is bij de berekening gebruikt en in de tabel aangegeven. Door dit te doen wordt echter de schijnbare inkrimping van het water in den piëzometer per atmospheer druktoeneming te klein gevonden, tenzij daaraan een correctie wordt aangebracht voor de inkrimping, die het inwendig volumen van den piëzometer ondergaat, omdat de druk buiten den piëzometer meer toeneemt dan daarbinnen. Die correctie is gemakkelijk te berekenen, daar men uit de daling van het niveau in de piëzometerbuis weet, hoeveel de druk uitwendig meer toeneemt dan inwendig, en de inkrimping van het inwendig volumen des piëzometers bij een drukverschil tusschen binnen en buiten van één atmospheer uit de tweede proevenreeks bekend is. De bedoelde correctie bedraagt voor een toeneming van den inwendigen druk om één atmospheer gemiddeld 0,70. Aan al de cijfers in de vierde kolom van tabel 3 is die correctie aangebracht.

De gevonden waarden kunnen wij tot de volgende doeleinden gebruiken.

In de eerste plaats kunnen zij tot bevestiging dienen van de theorie der elasticiteit van vaste lichamen. Lamé heeft formules gegeven voor het in- en uitwendig volumen van een hollen bol, een hollen cilinder met platte eindvlakken en een hollen cilinder met halfbolvormige eindvlakken, wanneer het in- en het uitwendig oppervlak dier lichamen onderworpen zijn aan een verschillenden druk *). De stof, waaruit de holle lichamen bestaan, nemen wij aan te zijn homogeen en van constante elasticiteit in alle richtingen. Haar lineaire elasticiteitscoëfficiënt zij E, terwijl μ de verhouding moge zijn tusschen de verkorting per éénheid van lengte van de dwarse lineaire afmetingen eener staaf uit deze stof vervaardigd en de verlenging per éénheid van lengte dierzelfde staaf, wanneer zij door krachten, die aan haar uiteinden aangrijpen, wordt uitgerekt.

Noemen wij van den hollen bol R_0 en R_1 de in- en uitwendige stralen, V_0 en V_1 het in- en uitwendig volumen, voor het geval, dat in- en uitwendig dezelfde aanvangsdruk heerscht, dan is:

$$V_0 = {}^4/_3\, \pi\, R_0^3, \qquad V_1 = {}^4/_3\, \pi\, R_1^3.$$

De inwendige druk worde verhoogd om P_0, de uitwendige om P_1, dan zullen daardoor de in- en uitwendige volumina toenemen om:

$$\triangle\, V_0 = 3\, \varphi_0\, V_0, \qquad \triangle\, V_1 = 3\, \varphi_1\, V_1,$$

wanneer gesteld worden:

$$\varphi_0 = b + \frac{c}{R_0^3}, \qquad \varphi_1 = b + \frac{c}{R_1^3},$$

*) Over deze formules handelde ik reeds in een opstel, opgenomen in de Verslagen en Mededeelingen, Afd. Natuurkunde, 2de Reeks, Deel 15, blz. 218. In dat opstel toonde ik aan, dat de methode van JAMIN niet geeft de ware maar de schijnbare samendrukbaarheid der vloeistoffen, en daarom niet de voorkeur verdient boven de door REGNAULT en GRASSI gebruikte methode. Het schijnt, dat JAMIN daarvan tot heden nog geen kennis genomen heeft, of van de juistheid mijner opmerkingen niet overtuigd is, want in de laatste editie van zijn Cours de Physique de l'Ecole polytechnique, waarvan het eerste deel door hem in vereeniging met BOUTY is uitgegeven in 1882, vind ik JAMIN's methode nog op dezelfde manier beschreven als vroeger en weder als voordeel dezer methode aangegeven, dat zij zonder onzekere, op de theorie der elasticiteit berustende, correcties te behoeven onmiddelijk de ware samendrukbaarheid der vloeistoffen levert. JAMIN et BOUTY, Cours de Physique de l'Ecole polytechnique, 3e édition, Tome I, fascicule 2, pag. 132.

$$b = \frac{1-2\mu}{E} \cdot \frac{P_0 R_0^3 - P_1 R_1^3}{R_1^3 - R_0^3}, \; c = \frac{1+\mu}{2E} \cdot \frac{R_0^3 R_1^3 (P_0 - P_1)}{R_1^3 - R_0^3}.$$

Voor $P_0 = P$ en $P_1 = 0$ verkrijgen wij:

$$\Delta V_1 = P\, V_1 \,.\, {}^9/_2 \,.\, \frac{1-\mu}{E} \cdot \frac{R_0^3}{R_1^3 - R_0^3} =$$

$$= P \,.\, 6\,\pi \,.\, \frac{1-\mu}{E} \cdot \frac{R_0^3\, R_1^3}{R_1^3 - R_0^3};$$

voor $P_0 = 0$ en $P_1 = P$:

$$\Delta V_0 = -P\, V_0 \,.\, {}^9/_2 \,.\, \frac{1-\mu}{E} \cdot \frac{R_1^3}{R_1^3 - R_0^3} =$$

$$= -P \,.\, 6\,\pi \,.\, \frac{1-\mu}{E} \cdot \frac{R_0^3\, R_1^3}{R_1^3 - R_0^3}.$$

Dus:

$$\Delta V_1 = = - \Delta V_0.$$

Noemen wij eveneens van den hollen cilinder met platte eindvlakken R_0 en R_1 de in- en uitwendige stralen van het cilindrieke oppervlak, H diens hoogte, V_0' en V_1' het in- en uitwendig volumen bij den gelijken aanvangsdruk binnen en buiten, zoodat is:

$$V_0' = \pi\, R_0^2\, H \qquad V_1' = \pi\, R_1^2\, H.$$

Dan zullen, wanneer de inwendige druk wordt verhoogd om P_0, de uitwendige om P_1, daardoor de in- en uitwendige volumina toenemen om:

$$\Delta V_0' = V_0' (\delta + 2\,\varphi_0'), \qquad \Delta V_1' = V_1' (\delta + 2\,\varphi_1'),$$

wanneer gesteld worden:

$$\varphi_0' = b' + \frac{c'}{R_0^2}, \qquad \varphi_1' = b' + \frac{c'}{R_1^2}, \qquad \delta = b',$$

$$b' = \frac{1-2\mu}{E} \cdot \frac{R_0^2 P_0 - R_1^2 P_1}{R_1^2 - R_0^2}, \; c' = \frac{1+\mu}{E} \cdot \frac{R_0^2\, R_1^2 (P_0 - P_1)}{R_1^2 - R_0^2}.$$

Voor $P_0 = P$ en $P_1 = 0$ verkrijgen wij:

$$\triangle V_1' = P V_1' . \frac{5 - 4\mu}{E} . \frac{R_0^2}{R_1^2 - R_0^2} =$$

$$= P . \pi . \frac{5 - 4\mu}{E} . \frac{R_0^2 R_1^2}{R_1^2 - R_0^2} H;$$

voor $P_0 = 0$ en $P_1 = P$:

$$\triangle V_0' = - P V_0' \frac{5 - 4\mu}{E} . \frac{R_1^2}{R_1^2 - R_0^2} =$$

$$= - P . \pi . \frac{5 - 4\mu}{E} . \frac{R_0^2 R_1^2}{R_1^2 - R_0^2} H.$$

Dus ook hier:

$$\triangle V_1' = - \triangle V_0'.$$

Een holle cilinder met halfbolvormige eindvlakken kan beschouwd worden als een vereeniging van een cilinder met platte eindvlakken en twee halve bollen, dus als een vereeniging van de beide eerstbehandelde lichamen. Noemen wij weder R_0 en R_1 de in- en uitwendige stralen zoowel van het cilindrieke gedeelte als van de beide halfbolvormige eindvlakken, H de hoogte van het cilindrieke gedeelte, U_0 en U_1 het in- en uitwendig volumen, dan is:

$$U_0 = V_0 + V_0', \qquad U_1 = V_1 + V_1'.$$

Voor $P_0 = P$ en $P_1 = 0$, verkrijgen wij hier:

$$\triangle U_1 = \triangle V_1 + \triangle V_1';$$

voor $P_0 = 0$ en $P_1 = P$:

$$\triangle U_0 = \triangle V_0 + \triangle V_0'.$$

Dus ook hier:

$$\triangle U_1 = - \triangle U_0 =$$

$$= P \pi \left\{ 6 \frac{1 - \mu}{E} . \frac{R_0^3 R_1^3}{R_1^3 - R_0^3} + \frac{5 - 4\mu}{E} . \frac{R_0^2 R_1^2}{R_1^2 - R_0^2} H \right\}.$$

Bij alle drie de lichamen komen wij dus tot dezelfde uitkomst. Wanneer den eenen keer de inwendige druk om een zeker bedrag verhoogd wordt, terwijl de uitwendige druk de aanvankelijke waarde blijft behouden, en een anderen keer daarentegen de uitwendige druk om hetzelfde bedrag verhoogd wordt, terwijl nu de inwendige druk de aanvankelijke waarde blijft behouden, dan zal den eersten keer het uitwendig volumen om evenveel toenemen, als den tweeden keer het inwendig volumen afneemt.

Deze uitkomst van de mathematische theorie der elasticiteit kunnen wij nu toetsen aan de uitkomsten van het experiment.

Het door ons gebruikte piëzometervat was toch ongeveer een holle glazen cilinder met halfbolvormige uiteinden. Voor de vermeerdering van diens uitwendig volumen bij een verhooging van den inwendigen druk om één atmospheer, vonden wij als gemiddelde:

141,20.

Voor de vermindering van het inwendig volumen bij een verhooging van den uitwendigen druk om één atmospheer, vonden wij als gemiddelde:

142,28.

Deze beide waarden moesten volgens de theorie aan elkander gelijk zijn; zij zijn het dan ook zeer bijna. Het verschil tusschen beide bedraagt toch slechts $^3/_4$ $^0/_0$, een verschil dat bij deze soort proeven zeker als zeer onbeteekenend kan beschouwd worden; zoodat ik de uitkomsten mijner waarnemingen als een zeer voldoende bevestiging van de theorie der elasticiteit meen te mogen beschouwen. Vooral wanneer ik bedenk, dat dit verschil slechts klein is ten opzichte van het verschil, dat volgens de theorie behoort te bestaan tusschen de veranderingen van de in- en uitwendige volumina van het piëzometervat, wanneer dit hetzij inwendig, hetzij uitwendig aan drukking onderworpen is.

Zooals in een vroeger opstel *) door mij is aangetoond, zet bij inwendigen druk het buitenoppervlak van den wand des piëzometers zich meer uit dan het binnenoppervlak om een hoegrootheid, die juist gelijk is aan de volumenvermindering welke een massieve kern van hetzelfde volumen als het inwendig volumen van den piëzometer en van dezelfde stof als de wand zou ondergaan, wanneer zij over haar geheele oppervlak aan den bedoelden druk onderworpen werd.

Bij uitwendigen druk krimpt het buitenoppervlak meer in dan het binnenoppervlak om een hoegrootheid gelijk aan de volumenvermindering van een massieve kern van hetzelfde volumen als het uitwendig volumen van den piëzometer, wanneer deze over haar geheele oppervlak aan den bedoelden druk onderworpen wordt.

Stellen wij den samendrukbaarheidscoëfficiënt van glas gelijk 0,000.002, dan bedraagt, daar het inwendig volumen van het piëzometervat ruim 4.000.000 bedraagt, het verschil tusschen de uitzetting van het binnen- en buitenoppervlak des piëzometers bij inwendigen druk per atmospheer ongeveer 8 volumen-éénheden en het verschil tusschen de inkrimping van beiden bij uitwendigen druk nog iets meer, namelijk bijna 10 volumen-éénheden. Het door mij gevonden verschil bedraagt slechts één, en is dus klein ten opzichte van de bovengenoemde verschillen. Ik geloof dat verschil daarom gerust hetzij aan waarnemingsfouten, hetzij aan storende invloeden te kunnen toeschrijven.

Ik kan echter niet verhelen, dat de waarnemingen wel wijzen op een kleine constante fout. De waarden voor de uitzetting van het uitwendig volumen volgens tabel 1 zijn voor het groote meerendeel allen kleiner dan die voor de inkrimping van het inwendig volumen volgens tabel 2. Vooral is dit met de beide eerste proefreeksen het geval. De latere proefreeks bij hoogeren druk geeft in beide gevallen meer overeenstemmende uitkomsten. Voor dat verschil kunnen zeer verschillende oorzaken bestaan hebben.

---

*) Verslagen en Mededeelingen, 2e Reeks. Deel XV.

Het zou bijv. het gevolg kunnen zijn van eene afwijking van den vorm van het piëzometervat van den theoretischen vorm, of hiervan, dat ons piëzometervat niet volkomen voldoet aan de voorwaarde der theorie van te zijn homogeen en van constante elasticiteit in alle richtingen. Er zou ook een fout kunnen begaan zijn bij de calibratie der beide buizen, die de volumenveranderingen aangeven. Wellicht is het ook toe te schrijven aan kleine toevallige temperatuursveranderingen gedurende de proeven, of hieraan, dat de ruimte, welke den piëzometer omgeeft, niet geheel en al gevuld was met water, maar misschien nog een zeer geringe hoeveelheid lucht bevatte. Wel is waar was het water, zooals reeds vroeger door mij vermeld is, zoowel in den piëzometer als in de ruimte die dezen omgeeft met veel zorg onder lage drukking uitgekookt, om alle lucht zooveel mogelijk te verdrijven, maar toch is het niet onmogelijk, dat in de ruimte om den piëzometer nog eene kleine hoeveelheid lucht is achtergebleven. Die lucht zou geen invloed gehad hebben op de uitkomsten, indien de druk bij de proeven van tabel 1 in de buitenste ruimte volkomen constant bleef. Dit was echter, zooals wij zagen, niet het geval. Daarvoor moest een correctie worden aangebracht, en die correctie zou grooter hebben moeten zijn, wanneer nog lucht aanwezig was. Nu acht ik het niet onmogelijk, dat wegens de aanwezigheid van een kleine hoeveelheid lucht de uitkomsten van proeven 1—8 iets te klein gevonden zijn. Tusschen de 8 eerste en de 3 laatste proeven van tabel 1 verliepen eenige dagen, waarin met den piëzometer andere proeven genomen werden, en in de buitenste ruimte meermalen een groote druk werd toegelaten. Het is niet onmogelijk dat, hetzij ten gevolge dezer manipulaties, hetzij door eenvoudige oplossing in het omringende water, de voorhanden lucht tusschen de proeven 8 en 20 verdwenen is, en dat daaraan moet worden toegeschreven, dat de drie laatste proeven van tabel 1 iets grootere en daarom betere uitkomsten hebben opgeleverd. Dat dit de ware oorzaak zou geweest zijn is echter onmogelijk met zekerheid te zeggen, het aantal bronnen van fouten en storende invloeden is te groot, als dat wij tot zulk een uitspraak gerechtigd zouden zijn.

De gevonden waarden kunnen nog tot een tweede bevestiging van de theorie der elasticiteit dienen, op dezelfde wijze als dit ook reeds door Regnault en Grassi bij hun piëzometrische proeven geschied is. Tabel 1 geeft ons in de laatste kolom de schijnbare uitzetting van het inwendig volumen des piëzometers, wanneer de inwendige druk om één atmospheer toeneemt. Dezelfde tabel geeft ons in de voorlaatste kolom, of waarschijnlijk nog nauwkeuriger tabel 2 in de laatste kolom, de uitzetting van het uitwendig, respectieve de inkrimping van het inwendig volumen van het piëzometervat, wanneer de inwendige, respectieve de uitwendige druk om één atmospheer toeneemt. Het verschil van beide waarden moet volgens de theorie gelijk zijn aan de in de laatste kolom van tabel 3 voorkomende waarde voor de schijnbare inkrimping van het water in den piëzometer, wanneer de in- zoowel als de uitwendige druk om één atmospheer toeneemt. Nu vindt men voor het bedoelde verschil uit tabellen 1 en 2:

$$325{,}90 - 142{,}28 = 183{,}62$$

en uit tabel 3:

$$185{,}37.$$

Deze waarden zijn niet volkomen aan elkander gelijk. Zij mogen dat echter ook niet zijn, omdat zij niet behooren bij dezelfde temperatuur. Deze waarden stellen namelijk voor de inkrimping van een volumen water gelijk aan het inwendig volumen van den piëzometer bij een verhooging van druk om één atmospheer, verminderd met de inkrimping van eenzelfde volumen glas bij dezelfde verhooging van druk. Nu is deze laatste inkrimping waarschijnlijk slechts weinig afhankelijk van de temperatuur. Volgens Grassi's proeven is de veranderlijkheid van den samendrukbaarheidscoëfficiënt van glas met de temperatuur zoo gering, dat zij tusschen de enge temperatuursgrenzen van onze proeven verwaarloosd kan worden. Met de inkrimping van het water is dat echter niet het geval. De samendrukbaarheidscoëfficient van water vermindert namelijk volgens GRASSI vrij sterk wanneer de temperatuur toeneemt. Nu geldt de waarde 185,37, het gemiddelde der proeven 23—25 van tabel 3, voor een temperatuur van ongeveer $12^0,1$; de waarde 183,62, het gemiddelde der proeven 1—8 van tabel 1, bij een gemiddelde temperatuur van ongeveer $15^0,7$. De kleinere waarde van tabel 1 laat zich dus verklaren uit de hoogere temperatuur en daarom geringere samendrukbaarheid van het water. Het verschil tusschen beide waarden bedraagt 1,75, terwijl het temperatuursverschil gelijk $3^0,6$ is. Daar het inwendig volumen van het piëzometervat iets meer dan 4 millioen milligrammen kwik van 0^0 groot is, wijst de waarde van 1,75 op een verandering van den samendrukbaarheidscoëfficient van water van 4 à 5 tienmillioensten bij een temperatuursverandering van $3^0,6$; een waarde van dezelfde orde van grootte als die welke GRASSI voor de veranderlijkheid van den samendrukbaarheidscoëfficient van water met de temperatuur gevonden heeft.

Het gemiddelde der getallen 185,37 en 183,62 is 184,50, terwijl het gemiddelde der temperaturen $12^0,1$ en $15^0,7$ is $13^0,9$. De inhoud van het piëzometervat bedraagt ongeveer 4.019.200. Dus is volgens onze waarnemingen de schijnbare samendrukbaarheidscoëfficient van water in een glazen vat:

$$0,000 . 045.9$$

bij een temperatuur van $13^0,9$.

Van de waarnemingen vervat in tabel 3 heb ik het gemiddelde genomen der drie eerste waarnemingen, en niet het weinig daarvan afwijkende gemiddelde van alle vier waarnemingen, omdat ik de uitkomst der laatste waarneming zeker voor te groot houd. De oorzaak daarvan is de volgende. De druk werd bij mijn proeven altijd slechts zeer langzaam toegelaten en weder weggenomen. Bij proef 26 had echter door een toeval de druktoelating vrij snel plaats. Daardoor daalde het waterniveau in de buis des piëzometers lager dan in overeenstemming met de voorafgaande proeven het geval had mogen zijn. Als het niveau van het water zich snel in de nauwe buis terugtrekt, blijft er namelijk aan de wanden der buis meer water hangen, en trekt het waterniveau zich daarom verder terug, dan wanneer dit langzaam gebeurt. Na afloop der proeven is dit door mij door opzettelijk daartoe verrichte waarnemingen bevestigd. Een der beide nauwe buizen, waarvan ik mij bij de piëzometerproeven bediend had, werd na inwendig goed gedroogd te zijn door er langen tijd drooge lucht door te laten stroomen gewogen. Vervolgens werd er een zuiltje water ingebracht; men liet dit zuiltje eenige malen door de buis heen en weêr gaan, en liet dan het water uit de buis wegloopen; door het eene uiteinde der buis tegen een stuk filtreerpapier aan te drukken kon men al het water uit de buis wegzuigen, behalve dat wat aan de wanden bleef hangen. De buis werd, na uitwendig afgedroogd te zijn, weder gewogen, en het verschil tusschen de gewichten van de nu inwendig vochtige en van de straks droge buis gaf het gewicht van het water, dat aan de wanden was blijven hangen. Dat gewicht werd nu zeer verschillend gevonden, 0,7, 1,9, ja tot 2,5 milligram toe, al naarmate men het water langzamer of sneller uit de buis had laten wegloopen. Liet men het zeer snel wegloopen, dan bleef zooveel water aan de wanden hangen, dat dit zich later tot een of meer korte waterzuiltjes vereenigde.

De geheele buis had een lengte van 475 millimeters, de buis had een inhoud van ongeveer 3,6 milligram kwik per millimeter lengte; de inhoud der geheele buis bedroeg dus ongeveer 125,7 milligram water of kubiek-millimeters.

2,5 milligram water bedraagt dus ongeveer 2 $^0/_0$ van den inhoud der geheele buis, 0,7 milligam tusschen de 0,5 en 0,6 $^0/_0$.

Deze waarnemingen waren voornamelijk verricht om te onderzoeken, of bij het gebruik maken van zulke nauwe buizen, wegens het aanhangen van het water aan de wanden, voor den samendrukbaarheidscoëfficient van het water en voor de volumenveranderingen van het piëzometervat niet te groote waarden door mij gevonden waren. De waarnemingen toonen aan, dat dit zeker eenigszins het geval is, maar slechts in zeer geringe mate. Bij mijn piëzometerproeven werd de druk zoo langzaam toegelaten en weder weggenomen, bewogen de waterniveaux zich zoo langzaam door de buizen, dat bij die proeven het water, dat aan de wanden bleef hangen, zeer waarschijnlijk minder bedraagt dan de kleinste waarde bij de latere waarnemingen daarvoor gevonden. Ik houd het daarom voor waarschijnlijk, dat de door mij gevonden waarden bij de piëzometerproeven, wegens deze oorzaak van fout, niet meer dan 0,5 % te groot zullen zijn, niet onwaarschijnlijk zelfs nog minder.

De formule voor $\Delta U_1 = -\Delta U_0$ kan dienen om een betrekking te vinden tusschen E en μ. Daartoe is het dan echter noodig nauwkeurig te kennen de verschillende afmetingen R_0, R_1 en H van het piëzometervat. Om deze te leeren kennen, was de piëzometer, voordat de nauwe buis er aan gezet was, gewogen in de lucht en in water van bekende temperatuur. Deze beide wegingen gaven het volumen van den glazen wand des piëzometers of $U_1 - U_0$ en het soortelijk gewicht van het glas. Uit het gewicht van het water, dat den piëzometer vult, leidde men het inwendig volumen af U_0. Men kende dan dus U_0 en U_1.

Gevonden werd in kubiek-millimeters:

$$U_0 = 295.780, \qquad U_1 = 359.622,$$
$$U_1 - U_0 = 63.842;$$

soortelijk gewicht glas = 2,516.

Deze waarden voor de volumina U_0 en U_1 gelden bij de temperatuur der wegingen, die 19° à 20° bedroeg. De kubiek-millimeters zijn echter, daar voor het gewichtsverlies in de lucht en voor de van de éénheid afwijkende dichtheid van het water de noodige correcties waren aangebracht, ware kubiek-millimeters.

Later, nadat de buis aan den piëzometer gezet was, werd door weging met water voor het inwendig volumen van den piëzometer met een deel der nauwe buis gevonden bij 0^0 temperatuur:

$$295.616 \text{ mm.}^3$$

Daar van dit getal nog geen 100 mm.^{3} op de nauwe buis komen, ziet men, dat het aanzetten der buis in den vorm en het volumen van den piëzometer geen verandering heeft gebracht.

De meting van de lengte van het cilindrieke deel des piëzometers of van H gaf: $H = 370,2$ millimeters. Deze waarde kan echter geen aanspraak maken op groote nauwkeurigheid, daar niet met juistheid zijn aan te geven de plaatsen, waar het cilindrieke deel aan weêrszijden in de halfbolvormige uiteinden overgaat. Uit de totale lengte van den piëzometer zou zich H laten vinden door daarvan de middellijn der halfbolvormige uiteinden af te trekken, maar dit zou tot een nog veel minder nauwkeurige uitkomst leiden, omdat de beide uiteinden slechts zeer bij benadering als halve bollen kunnen beschouwd worden.

De uitwendige diameter van het cilindrieke gedeelte was niet overal even groot; de buis bleek bij meting zwak konisch te zijn. De uitwendige middellijnen aan de beide uiteinden verschilden ongeveer 1 millimeter, terwijl die in het midden ongeveer juist het gemiddelde van die aan de uiteinden was. De gemiddelde uitwendige middellijn bedroeg ruim 34 millimeters. Daar deze meting der middellijnen echter weinig nauwkeurig is, werden R_1 en R_0 uit U_1, U_0 en H afgeleid door middel van de formule:

$$\pi R^2 H + {}^4/_3 \pi R^3 = U.$$

Men vindt dan:

$$R_1 = 17,068, \qquad R_0 = 15,520,$$
$$R_1 - R_0 = 1,548.$$

De vroeger gevonden vergelijking voor $\Delta U_1 = -\Delta U_0$ schrijven wij nu als volgt:

$$\frac{\Delta U}{P} . E = 6\pi(1-\mu)\frac{R_0^3 R_1^3}{R_1^3 - R_0^3} + \pi(5 - 4\mu) . \frac{R_0^2 R_1^2}{R_1^2 - R_0^2} H;$$

of, als wij

$$6\,\pi\,.\,\frac{R_0^3\,R_1^3}{R_1^3 - R_0^3} = X \text{ en } \pi\,\frac{R_0^2\,R_1^2}{R_1^2 - R_0^2}\,H = Y$$

stellen:

$$\frac{\Delta\,U}{P}\,.\,E = X + 5\,Y - (X + 4\,Y)\,\mu.$$

In deze vergelijking zijn E en μ de onbekenden; de overige grootheden zijn bekend uit de afmetingen van den piëzometer en de in tabel 2 te vinden waarde van $\Delta\,U$.

De boven aangegeven waarden voor R_0, R_1 en H geven:

$$X = 283.875 \qquad\qquad Y = 1.617.222.$$

$\Delta\,U$ vonden wij in tabel 2 gelijk 142,28 mgr. kwik van 0^0 of

$$\Delta\,U = \frac{142,28}{13,596} \text{ kubiek-millimeters.}$$

P is daarbij de drukking van één atmospheer of van 0,010333 kilogram per kwadraat-millimeter, dus:

$$P = 0,010333.$$

Hieruit vindt men:

$$log.\,\frac{\Delta\,U}{P} = 3,00.550.$$

Uit deze gegevens zou men nu, E bekend zijnde, μ, of, μ bekend zijnde, E kunnen berekenen, en dan vervolgens uit E en μ den kubieken samendrukbaarheidscoëfficient C van de stof, waaruit de wand des piëzometers bestaat, door middel van de formule:

$$C = \frac{3\,(1 - 2\,\mu)}{E},$$

wanneer per éénheid van druk wordt aangenomen de druk van één kilogram per kwadraat-millimeter, of:

$$C = \frac{3(1 - 2\mu)}{E} \times 0,010333,$$

wanneer, zooals door mij, per éénheid van druk wordt aangenomen één atmospheer.

Nu zijn echter μ en E in het algemeen niet bekend. Voor μ zijn, zooals bekend is, zeer uiteenloopende waarden gevonden voor eenzelfde stof zooals glas. WERTHEIM en op zijn voetspoor ook GRASSI bij de berekening zijner proeven nemen $\mu = 1/3$ aan; uit de proeven van REGNAULT met een glazen piëzometer berekent WÜLLNER door bovenstaande formules op die proeven toe te passen en $E = 6040$ te stellen $\mu = 0,319$. Anderen willen haar waarde op theoretische gronden op 0,25 stellen; tot deze waarde naderen zeer de waarden door CORNU uit waarnemingen bij buiging van glazen prisma's afgeleid; deze waren namelijk tusschen 0,224 en 0,257 ingelegen. Een nog kleinere waarde vond VOIGT *). Uit waarnemingen omtrent de buiging en wringing van glazen staafjes leidt hij af $E = 6480$ en $\mu = 0,213$. Voor spiegelglas vond hij zelfs een nog iets kleinere waarde voor μ.

De waarden van E zijn voor gewoon glas ook verre van gelijk. WERTHEIM vond o. a. voor wit soda-glas de waarden 6040 en 6722 †).

---

*) *Wied. Ann.* Bd. 15, S. 497. (1882.)

†) *Ann. de Chim. et de Phys.* 3e série, t. 19, p. 137. (1847.) De beide glassoorten, waarvoor deze beide waarden gelden, hebben slechts een zeer gering verschil in soortelijk gewicht; het eene wordt echter *fijn*, het andere *gewoon* glas genoemd.

De bepaling van den lineairen elasticiteitscoëfficient van glas door uitrekkingsproeven, zooals dit door WERTHEIM gedaan is, houd ik voor weinig nauwkeurig en daarom de daardoor verkregen uitkomsten voor weinig betrouwbaar. De in de *Ann. de Chim. et de Phys.* 3e sér, t. 23, p. 71 door WERTHEIM medegedeelde waarden van E voor 5 buizen van dezelfde soort kristal kunnen voor de juistheid mijner meening ten bewijze strekken.

Noch E, noch μ zijn dus voor glas nauwkeurig bekend. Zij zijn het daarom ook niet voor de door mij gebruikte glassoort, waaruit de piëzometer bestond. Het is dan ook niet wel mogelijk om met eenige zekerheid C of den kubieken samendrukbaarheidscoëfficient te berekenen. Want stellen wij met WERTHEIM $\mu = {}^1/_3$, dan geeft bovenstaande formule $E = 6042$, toevallig bijna juist het getal, dat door WERTHEIM voor een van zijn glassoorten gevonden is, en dat ook bijna overeenstemt met de waarde door GRASSI uit zijn proeven met piëzometers van gewoon glas afgeleid door $\mu = {}^1/_3$ te stellen. Die overeenstemming met de door WERTHEIM gevonden waarde is echter zeer waarschijnlijk niets dan een toeval, want de door mij gebruikte glassoort heeft een soortelijk gewicht van ongeveer 2,52, terwijl dit bij het glas van WERTHEIM slechts 2,43 bedroeg, zoodat de beide glassoorten zeker niet identiek waren. De waarden $\mu = {}^1/_3$ en $E = 6042$ geven voor C: 0,000.001.71 ongeveer dezelfde waarde, welke GRASSI voor zijn piëzometers van gewoon glas meent gevonden te hebben.

Neemt men daarentegen voor μ de door VOIGT gevonden waarde: $\mu = 0,213$, dan vindt men $E = 6844,5$ en $C =$ 0,000.002.60.

De ware waarde van C zal waarschijnlijk wel tusschen deze beide waarden van 17 en 26 tienmillioensten ingelegen zijn, maar deze grenswaarden loopen te ver uiteen, als dat men met eenige zekerheid de juiste waarde van C zou kunnen aangeven.

E voor het glas mijns piëzometers direct te bepalen door middel van uitrekkingsproeven, daartoe ontbraken mij de hulpmiddelen. Wel heb ik E trachten te vinden, door de voortplantingssnelheid van het geluid in het glas te bepalen volgens de methode van KUNDT *). Een buis van dezelfde glassoort als die, waaruit het piëzometervat ver-

---

*) POGG. *Ann.* Bd. 127, S. 497 (1866) en Bd. 135, SS. 337 u. 527 (1868).

vaardigd was, en van ongeveer dezelfde wijdte en wanddikte, van een lengte van 1805,5 millimeters, werd aan de beide uiteinden met een paar lichte, dunne kurken gesloten. In het midden werd zij vastgeklemd en daarna werd zij door haar te strijken met een vochtigen wollen doek in longitudinale trilling gebracht. In de buis was een fijn, droog poeder gebracht, hetgeen zich, wanneer de glazen buis een goeden toon gaf, in scherpe afdeelingen verdeelde. Van die afdeelingen, waarvan er zich in de buis ruim 15 vormden, werd de lengte gemeten. Niet gemeten werden de beide uiterste en de drie middelste. De overige 10 gaven als gemiddelde waarde harer lengte of de halve golflengte van den toon in de lucht 115,85 mm. De voortplantingssnelheid in het glas was dus volgens deze waarneming $\frac{1805,5}{115,85}$ of 15,58 maal grooter dan in de lucht. Daar de lengte der verschillende door het poeder gevormde afdeelingen vrij veel verschilde, de uiterste waarden waren namelijk 112 en 122 mm., besloot ik, evenals KUNDT gedaan had, de buis, waarin door de longitudinale trilling der lucht de afdeelingen van het poeder zich moesten vormen, te scheiden van de buis, die door haar trilling den toon moest voortbrengen.

Ik gebruikte dezelfde buis als vroeger om den toon voort te brengen. Er was echter door een toeval een stuk afgebroken, zoodat hare lengte nog slechts 1486,2 mm. bedroeg. Zij was weder aan haar beide uiteinden door lichte kurken gesloten. Haar midden was vast bevestigd in een wijdere glazen buis van zulk een lengte, dat de eene helft der buis geheel door de wijdere buis omgeven was, terwijl haar andere helft vrij in de lucht zich bevond en met een wollen doek kon worden aangestreken. Van een derde glazen buis van ruim $1^1/_2$ meter lengte kon het eene open uiteinde door middel van een caoutchouc band luchtdicht met de wijde buis verbonden worden, zoodat het inwendige dezer buis vrij met het inwendige der wijde buis communiceerde. In het andere einde dezer derde buis stak een verplaatsbare stop, die dat einde van de buitenlucht afsloot. In deze buis werd een kleine hoeveelheid fijn droog poeder gebracht en zoo regelmatig mogelijk door de buis verdeeld. Werd nu de eerste buis gewreven, zoodat zij een goeden toon gaf, dan kwam de lucht in de laatste buis in trilling, en verdeelde zich het poeder in afdeelingen. Bij een bepaalden stand van den verplaatsbaren stop was de beweging van het poeder het krachtigst, en de verdeeling in afdeelingen zeer scherp. Verschillende poeders werden door mij gebruikt, lycopodium-, ivoor-, hout- en kurkpoeder. De beide laatste bevielen mij het best en gaven mij de scherpste figuren. Ik verkreeg altijd de figuur met de oogen (de Löcher van Kundt) op de plaats der knoopen en met krachtige dwarsribben van poeder tusschen de oogen in. Deze dwarsribben waren meestal afwisselend dikker en dunner; tusschen twee dikkere bevond zich één dunnere of ook wel twee. De ribben kwamen, tijdens dat een toon zich deed hooren, in zeer krachtige trilling. De stop was zoo diep in de buis geschoven, dat zich 14 goed te meten afdeelingen vormden. Hadden door één enkelen krachtigen streek met den wollen doek zich scherpe afdeelingen gevormd, dan werd de buis met het poeder voorzichtig van de wijdere buis losgemaakt en verplaatst, en werden de lengten der afdeelingen zoo nauwkeurig mogelijk afgemeten. Tot het meten der afdeelingen bediende ik mij van een toestelletje van Duboscq, dat eigenlijk bestemd is tot het meten van de breedte der interferentie-franjes bij de spiegelproef van Fresnel, en hetgeen mij bij het calibreeren van nauwe buizen ook reeds goede diensten bewezen heeft. Op een stevigen voet bevindt zich een horizontale in millimeters verdeelde schaal, waarlangs een loupe door middel van een getand raadje kan worden heen en weêrbewogen. De stand van de loupe op de schaal kan door middel van een nonius tot op tienden van millimeters nauwkeurig worden afgelezen. Aan het bewegelijke stuk met de loupe werd voor het hier beoogde doel een beugel van metaaldraad bevestigd, waartusschen twee horizontale draden evenwijdig aan elkander en in een zelfde verticaal vlak loodrecht op de richting der schaal gespannen waren. De onderste dezer draden was wit, de bovenste zwart gekleurd, en wanneer men er verticaal van boven opkeek, kon men aan het oog zulk een stand geven, dat de witte draad achter den zwarten verdween. De beide draden waren op zulk een afstand van elkander verwijderd, dat de buis met de poederafdeelingen er goed vrij tusschen kon liggen. De buis werd nu tusschen de beide draden horizontaal nedergelegd, zoo nauwkeurig mogelijk evenwijdig aan de schaal. Door middel van het getande raadje, werden, terwijl men er verticaal opkeek, de draden gesteld op het midden van een oog der poeder-afdeelingen, zoodat het oog door de draden in twee gelijke symmetrische helften verdeeld werd, hetgeen vrij scherp kon geschieden, omdat men het geheele oog gelijktijdig vrij kon overzien. De draden werden vervolgens gesteld op het midden van het volgende oog, en de afgelezen verplaatsing van het bewegelijke stuk langs de schaal gaf dan de lengte van een poeder-afdeeling. Drie waarnemingen werden verricht. Elke afdeeling werd bij de eerste waarneming driemaal, bij de twee laatste waarnemingen viermaal gemeten. De verschillende metingen eener zelfde afdeeling kwamen immer zeer na overeen, een verschil van 1 mm. was een groote uitzondering. Dat er zulke verschillen somtijds voorkwamen, moet hieraan geweten worden, dat de afscheiding der op elkander volgende afdeelingen niet volkomen scherp was aan te geven, omdat de oogen niet altijd geheel symmetrisch waren. Rekent men de eerste afdeeling, die tegen den stop is aangelegen, niet mede, dan vindt men tusschen de gemiddelde waarden voor de 13 overige afdeelingen slechts kleine verschillen. De uiterste waarden bedroegen bij de eerste waarneming: 96,4 en 97,9, bij de tweede 95,5 en 97,0, bij de derde 95,4 en 97,3. Als gemiddelde van deze gemiddelde waarden voor de 13 afdeelingen vond ik:

bij de	eerste	waarneming	: 97,12
» »	tweede	»	: 96,28
» »	derde	»	: 96,38.

Deze waarden gedeeld op 1486,2 of de lengte der trillende glazen buis geven voor de voortplantingssnelheid in het glas, die in lucht gelijk één gesteld, respectievelijk:

$$15{,}30, \quad 15^0{,}436 \text{ en } 15{,}42,$$

waarden, die onderling weinig verschillen, en die ook weinig afwijken van de vroeger gevonden waarde 15,58.

Bij deze waarden voor de voortplantingssnelheid in glas is die in de lucht, zooals deze in de buis, waarin zich de poeder-afdeelingen vormden, voorhanden was, gelijk één gesteld. Maar die lucht had de temperatuur van het vertrek en was niet droog. Wil men de voortplantingssnelheid in glas hebben, die in drooge lucht van 0^0 gelijk één gesteld, dan vereischen bovenstaande waarden nog een correctie. Wij zullen bij het aanbrengen dier correctie ons bepalen tot de beide laatste waarnemingen, omdat bij deze de grootste voorzorg gebruikt was, om temperatuur en dampspanning der aan de proef onderworpen lucht nauwkeurig te kennen. Daartoe werd eenigen tijd, vóórdat de definitieve proef genomen zou worden, het poeder regelmatig door de buis verdeeld. De buis bleef dan open liggen, en eerst even vóór het oogenblik, dat de toon werd voortgebracht, met de wijdere buis verbonden. Men was er op die wijze zeker van, dat de lucht binnen de buis dezelfde temperatuur, drukking en vochtigheid bezat als de omgevende lucht, zoodat voor deze grootheden die der omgevende lucht op het oogenblik der proef konden genomen worden.

Bij de voorlaatste waarneming bedroegen temperatuur, dampspanning en barometerstand:

$$14^0{,}25 \qquad \overset{\text{mm.}}{9{,}8} \qquad \overset{\text{mm.}}{749{,}9};$$

bij de laatste waarneming:

$$16^0{,}2 \qquad \overset{\text{mm.}}{10{,}6} \qquad \overset{\text{mm.}}{747{,}5}.$$

Gebruik makende van deze waarden vindt men voor de voortplantingssnelheid in glas, die in drooge lucht van 0^0 gelijk één gesteld, uit de beide laatste waarnemingen:

$$15{,}87 \text{ en } 15{,}91,$$

en dus gemiddeld:

$$15{,}89.$$

Nemen wij nu voor de voortplantingssnelheid in drooge lucht van 0^0 volgens Regnault

$$330{,}7 \text{ meters,}$$

dan vinden wij, daar het soortelijk gewicht van de door ons gebruikte glassoort ongeveer 2,52 bedraagt, voor den lineairen elasticiteitscoëfficient van het glas:

$$E = 7091.$$

Dit is dus de waarde voor E, die uit de longitudinale trillingen is afgeleid. De waarde van E, die uit de verlenging der glazen buis bij uitrekking zou verkregen zijn geworden, ware het mogelijk geweest die verlenging nauwkeurig te meten, zou echter zeker aanmerkelijk kleiner geweest zijn, en het is die laatste waarde, welke in de formule voor ΔU voorkomt. De proeven van Wertheim *) hebben namelijk aangetoond, dat bij alle vaste stoffen de uit de longitudinale of transversale trillingen afgeleide waarde van E bijna zonder uitzondering grooter is dan de waarde van E uit de verlenging bij uitrekking verkregen. Bij glas †) vooral is het verschil tusschen beide waarden dikwijls zeer aanmerkelijk, en voor verschillende glazen staven vond Wertheim dat verschil zeer verschillend. Bij staven van verschillend glas vond hij verschillen tusschen de beide waarden van E, die van $^1/_{15}$ tot ruim $^2/_5$ van de bij uitrekking verkregen waarde bedroegen. Die groote verschillen bij glas en ook de kleinere verschillen bij andere stoffen zijn door Clausius §) toegeschreven aan de elastische na-

---

*) *Ann. de Chim. et de Phys.* 3e série, t. 12, p. 385. (1844.)

†) *Ann. de Chim. et de Phys.* 3e série, t. 19, p. 137 (1847); t. 23, pp. 71 et 72 (1848).

§) Pogg. *Ann.* Bd. 76, SS. 61 u. fgll. (1849.)

werking, die zich bij de uitrekkingsproeven wel, bij de trillingsproeven wegens den korten duur van elke trilling daarentegen slechts zeer weinig zou laten gelden. Die verklaringsgrond van CLAUSIUS komt mij zeer aannemelijk voor, en ik meen reden te hebben om te gelooven, dat die elastische nawerking ook bij de door mij gebruikte glassoort sterk optreedt, zoodat wanneer ik E door uitrekkingsproeven had kunnen bepalen, ik waarschijnlijk een aanmerkelijk kleinere waarde zou gevonden hebben dan de boven aangegeven waarde, door mij uit de trillingsproeven afgeleid.

Met deze waarde $E = 7091$ geeft de formule voor onzen piëzometer $\mu = 0{,}176$ en vervolgens $C = 0{,}000 . 002 . 8$. Deze waarde van μ is nog kleiner dan de reeds zoo kleine waarde van μ door VOIGT gevonden; de waarde van C is daarentegen nog grooter dan die, behoorende bij de waarde van μ van VOIGT. Nu werd het door mij voor niet waarschijnlijk gehouden, dat μ voor de door mij gebruikte glassoort kleiner zou zijn dan de reeds zoo kleine waarde 0,213 van VOIGT, en dus evenmin dat C grooter zou zijn dan de daarbij behoorende waarde van C: 0,000.002.6. Ik had daarom gehoopt voor E uit de trillingsproeven zulk een waarde te vinden, dat de daarmede correspondeerende waarde van $\mu > 0{,}213$ en die van $C < 0{,}000.002.6$ zouden geweest zijn. Ik had dan ten minste de grenzen, binnen welke μ en C moeten begrepen zijn, eenigszins enger kunnen stellen dan boven op bladz. 162 door mij gedaan is kunnen worden, daar de bij de E der trillingsproeven behoorende waarde van μ wegens de elastische nawerking zeker een minimumwaarde, die van C daarentegen een maximumwaarde moesten zijn. In die hoop ben ik echter, zooals uit het bovenstaande blijkt, teleurgesteld. Omtrent de grenzen binnen welke μ en C gelegen moeten zijn, ben ik door de trillingsproeven niets wijzer geworden.

Het voorafgaande onderzoek, ingesteld met het doel om te onderzoeken met welken graad van nauwkeurigheid piëzometrische proeven van de soort als boven beschreven de kubieke samendrukbaarheid van het glas des piëzometers kunnen leeren kennen, leidt dus tot een weinig gunstig besluit. Die graad van nauwkeurigheid is ons namelijk gebleken een uiterst geringe te zijn, omdat noch E noch μ voor de gebruikte glassoort nauwkeurig bekend zijn, en verschillende mogelijke veronderstellingen omtrent de waarde van E of van μ tot zeer verschillende waarden voor den kubieken samendrukbaarheids-coëfficient C leiden, waarden, die wel om één millioenste kunnen verschillen. Voor weinig samendrukbare vloeistoffen, zooals voor kwik, kan daarom ook de bepaling van haar samendrukbaarheid bij gebruik van glazen piëzometers tot slechts weinig zekere uitkomsten leiden, omdat men op die wijze altijd slechts het verschil bepaalt tusschen de samendrukbaarheid der vloeistof en die van het glas, en deze laatste dus nauwkeurig bekend moet zijn, om tot een juiste waarde voor de samendrukbaarheid van de vloeistof te kunnen komen.

Men zou echter kunnen meenen, dat bij de proeven van Grassi C voor de door hem gebruikte glazen piëzometers wel met nauwkeurigheid door hem gevonden was. Voor drie zijner piëzometers, uit dezelfde glassoort vervaardigd, die door hem zijn aangeduid door de letters B, C en D, vindt hij namelijk uit zijn proeven, bij de veronderstelling $\mu = {}^1/_3$, voor C ongeveer juist dezelfde waarde, namelijk ongeveer 0,000.001.7 *). Dat de proeven bij verschillende piëzometers, door van de Wertheim'sche veronderstelling omtrent μ gebruik te maken, tot dezelfde waarde voor C leiden, zou men kunnen aanzien als een bevestiging van de juistheid der veronderstelling, en daarom ook van de juistheid der daardoor verkregen waarde van C. Maar bij nader inzien blijkt dit niet het geval te zijn; want de drie genoemde piëzometers van Grassi wijken in hun vorm en afmetingen zoo weinig van elkander af, dat men bij hen met elke veronderstelling omtrent μ tot gelijke waarden voor C moet komen. Wel zal een andere waarde van μ een andere waarde van C geven, maar voor elk der drie piëzometers

*) *Ann. de Chimie et de Physique* 3e série, t. 31, p. 437. (1851.)

weder dezelfde waarde, omdat zij uit dezelfde glassoort bestaan en bijna geheel dezelfde afmetingen bezitten.

Maar ook de door REGNAULT gebruikte glazen piëzometer *), die zeer waarschijnlijk uit dezelfde glassoort bestond als de drie piëzometers van GRASSI, want de proeven van dezen laatsten zijn slechts eene voortzetting van de proeven van REGNAULT en hebben onder diens toezicht en met diens instrumenten plaats gehad, leidt bij de WERTHEIM'sche veronderstelling omtrent μ tot ongeveer dezelfde waarde voor C als GRASSI gevonden heeft. Uit REGNAULT's proeven vind ik namelijk, als $\mu = {}^1/_3$ gesteld wordt, $C = 0{,}000.001.7$ ongeveer. De afmetingen van den piëzometer van REGNAULT verschilden echter aanmerkelijk van die van de piëzometers van GRASSI. De piëzometer van REGNAULT had een grootere lengte, een grootere wanddikte en een kleinere doorsnede. Dat niettegenstaande het verschil in afmetingen de proeven van REGNAULT tot ongeveer dezelfde waarde van C leiden als die van GRASSI, kan echter weder niet als een bewijs voor de WERTHEIM'sche veronderstelling omtrent μ gelden. Om dit in te zien stellen wij de volgende betrekking op tusschen C en μ. Vroeger zijn wij gekomen tot de formule:

$$\frac{\Delta U}{P} \cdot E = (X + 5\,Y) - (X + 4\,Y)\,\mu.$$

waarin X en Y grootheden zijn, die alleen van de verschillende afmetingen van het piëzometervat afhangen, en waarvan wij de beteekenis vroeger hebben aangegeven.

Verder is:

$$C = \frac{3\,(1 - 2\,\mu)}{E}.$$

Uit deze beide formules verkrijgen wij door eliminatie van E:

$$C = \frac{\Delta U}{P} \cdot \frac{3\,(1 - 2\,\mu)}{(X + 5\,Y) - (X + 4\,Y)\,\mu},$$

---

*) *Mémoires de l'Académie des sciences de l'Institut de France*, t. 21, p. 429. (1847.)

of ook:

$$C = \left(\frac{\Delta U}{P} \cdot \frac{1}{X + 5\,Y}\right) \cdot \frac{3\,(1 - 2\mu)}{1 - A\mu},$$

als $\dfrac{X + 4\,Y}{X + 5\,Y} = A$ gesteld wordt.

Door middel van deze formule kan men uit de bij een bepaalden druk P waargenomen verandering van het volumen van het piëzometervat ΔU de waarde van C berekenen bij elke veronderstelling omtrent μ, wanneer de afmetingen van het piëzometervat bekend zijn. C is volgens bovenstaande formule een produkt van twee factoren, waarvan de eerste $\dfrac{\Delta U}{P} \cdot \dfrac{1}{X + 5\,Y}$ onafhankelijk is van μ, terwijl de tweede factor μ bevat en tevens een grootheid A, die afhangt van de verschillende afmetingen des piëzometers. Wanneer men nu echter lang gestrekte cilindervormige piëzometers gebruikt, dan is A bijna onafhankelijk van de afmetingen des piëzometers en heeft voor verschillende piëzometers een weinig verschillende waarde. De reden hiervan is, dat bij zulke lange cilindrische piëzometers Y veel grooter is dan X, en A daarom een grootheid is, die slechts weinig grooter is dan $^4/_5$. Zoo leverde mij de berekening, dat bij piëzometer B van Grassi, den piëzometer van Regnault en dien door mij gebruikt, $^1/A$ de volgende, zeer weinig van elkander afwijkende waarden bezit:

1,2298 (Grassi).
1,2371 (Regnault).
1,2395 (Mees).

De tweede factor van C is dus voor de verschillende piëzometers gelijk, ten minste ongeveer. Wanneer dus voor één waarde van μ de waarde van C voor verschillende piëzometers gelijk gevonden wordt, dan moeten ook andere waarden van μ voor C ongeveer gelijke waarden opleveren.

Dat dus voor $\mu = 1/_3$ voor C dezelfde waarde gevonden wordt bij den piëzometer van Regnault en bij de drie piëzometers van Grassi, bewijst niets voor de juistheid van de Wertheim'sche veronderstelling omtrent μ, want bij elke andere veronderstelling omtrent μ zou hetzelfde gevonden zijn. Dat dus de samendrukbaarheidscoëfficient van Regnault's en Grassi's piëzometers juist de op de veronderstelling $\mu = 1/_3$ gegronde waarde 0,000.001.7 zou bezitten, daarvoor kan de bovengenoemde bewijsgrond niet worden aangevoerd. Het eenige wat er voor te zeggen valt is dit, dat deze waarden van μ en C voor den lineairen elasticiteitscoëfficient E van het glas een waarde opleveren, die weinig verschilt van de waarde $E = 6040$ door Wertheim voor een staaf van soortgelijk glas uit proeven omtrent de verlenging dier staaf bij uitrekking afgeleid. Maar ook aan die overeenstemming is niet veel waarde te hechten, omdat Wertheim, zooals reeds vroeger door mij werd opgemerkt, voor glazen staven van bijna dezelfde samenstelling en bijna dezelfde eigenschappen zeer verschillende waarden vindt *) voor den elasticiteitscoëfficient bij uitrekking, en het daarom volstrekt niet zeker is, dat de lineaire elasticiteitscoëfficient van het door Regnault en Grassi gebruikte glas juist de waarde had, door Wertheim voor één van zijn glazen staven gevonden.

Grassi heeft nog een anderen piëzometer van kristalglas gebruikt, dien hij met de letter A aanduidt, en waarvoor hij uit zijn proeven voor $\mu = 1/_3$ $C = 0,000.002.1$ vindt †). Deze piëzometer levert hem voor den samendrukbaarheidscoëfficient van water waarden, die goed overeenstemmen met

*) *Ann. de Chim. et de Phys.* 3e série, t. 19, pp. 133 et 137.

†) Uit deze waarde vau C leidt Grassi (l. c. p. 475) voor E de waarde af: $E = 4862$ ongeveer, een getal, dat, zooals hij zegt, zeer weinig verschilt van dat, hetgeen de directe waarneming geeft. De directe waarnemingen, die hij hier op het oog heeft, zijn zeker die van Wertheim, voorkomende in de *Ann. de Chim. et de Phys.* 3e série, t. 23. Wertheim bepaalde E voor 5 buizen van kristal uit dezelfde fabriek afkomstig als het kristal door Grassi gebruikt. Hij bepaalde E zoowel

die met de andere piëzometers verkregen. Die overeenstemming is echter niet zoo volkomen, dat daaruit tot de juistheid der samendrukbaarheidscoëfficienten der piëzometervaten zou kunnen besloten worden. De tienmillioensten zijn namelijk bij den samendrukbaarheidscoëfficient van water nog geheel onzeker, en de verschillende waarden, die men aan den samendrukbaarheidscoëfficient van glas zou kunnen toekennen, verschillen juist in de tienmillioensten. De waarde van dien coëfficient voor het glazen piëzometervat moet echter tot tienmillioensten toe nauwkeurig bekend zijn, wil men daarmede den samendrukbaarheidscoëfficient van kwikzilver eenigszins nauwkeurig kunnen bepalen *).

Om voor zoo weinig samendrukbare vloeistoffen als kwikzilver tot een nauwkeurige bepaling van den samendrukbaarheidscoëfficient te geraken, zal men òf op meer directe en daarom meer nauwkeurige wijze den kubieken samendrukbaarheidscoëfficient van het piëzometervat moeten leeren meten, òf men zal een methode moeten uitdenken, waardoor men niet de schijnbare maar direct de absolute samendrukbaarheid der vloeistoffen kan bepalen. Kende men dan door zulk een methode slechts voor één enkele vloeistof, bijv. kwik, de absolute samendrukbaarheid, dan zou men voor alle andere vloeistoffen door middel van de gewone methode met piëzometers de absolute samendrukbaarheid

---

door middel van de methode der longitudinale trillingen als bij directe uitrekking der buizen. De eerste methode gaf hem voor E voor de vijf buizen vrij overeenstemmende waarden, die begrepen waren tusschen 5354 en 5630 (l. c. p. 72). Bij uitrekking verkreeg hij grootere verschillen; voor E vond hij daarbij waarden, begrepen tusschen 3481 en 4429 (l. c. p. 71). Op deze laatste waarden voor E doelt nu zeker Grassi. De overeenstemming is echter niet groot. De waarde voor E van Grassi is toch aanmerkelijk grooter dan de grootste der door Wertheim gevonden waarden. Dat de door Grassi aangenomen waarde van C de ware waarde voor zijn piëzometer A zou zijn, acht ik daarom volstrekt niet bewezen.

*) Het gebruik maken van piëzometers uit andere stof als glas, zal, geloof ik, om verschillende redenen tot niet veel betere uitkomsten leiden.

kunnen bepalen en tevens diezelfde grootheid voor de piëzometervaten kunnen leeren kennen.

Of de methode door J. Y. Buchanan *) bij een glazen staaf gebruikt, waarbij hij de kubieke samendrukbaarheid afleidt uit de lineaire contractie, die de staaf ondergaat, wanneer zij overal op haar oppervlak aan een grooten druk is onderworpen, ook voor de bepaling van de samendrukbaarheid van glazen piëzometervaten zal kunnen worden gebruikt, is eenigszins onzeker, omdat bij die methode verondersteld wordt, dat de elasticiteit in alle richtingen in de vaste stof gelijke waarden heeft, de stof dus volkomen isotroop is, en dit bij een glazen piëzometervat slechts bij benadering als juist kan worden aangezien.

Een methode ter bepaling van de absolute samendrukbaarheid der vloeistoffen laat zich *theoretisch* wel aangeven. Wanneer men achtereenvolgens bepaalde den druk op eenzelfden bodem uitgeoefend door twee kolommen kwik, waarvan de eene bijvoorbeeld juist de dubbele hoogte had van den anderen, dan zou men bij volkomen onsamendrukbaarheid van het kwik den eenen keer voor den druk juist het dubbele van den anderen keer moeten vinden, wanneer men ten minste het afnemen van de zwaartekracht en van den op het bovenoppervlak van het kwik werkenden luchtdruk met de hoogte boven den grond buiten rekening laat. Daar nu echter het kwik samendrukbaar is, zal men den eenen keer voor den druk iets meer dan het dubbele moeten vinden, en uit dat meer zal men dan de absolute samendrukbaarheid van het kwik kunnen afleiden. *Praktisch* houd ik die methode voor het oogenblik echter nog voor niet uitvoerbaar. Een uiterst groote nauwkeurigheid bij de waarnemingen zou daartoe noodig zijn en tal van voorzorgen zouden moeten worden genomen om storende invloeden te weren. Het allermoeielijkst lijkt mij echter toe de bepaling van den druk op den bewegelijken bodem. Drukkingen worden toch het nauwkeurigst bepaald uit de hoogte der vloeistofkolommen, die zij kunnen ophouden, maar dit zou

*) *Nature*, vol. 22, p. 377 (1880).

hier natuurlijk niet mogen geschieden. Tot het meten van den bodemdruk zou men zich in dit geval hetzij van gewichten, hetzij van elastische krachten van vaste lichamen moeten bedienen, en om op deze wijze met voldoende nauwkeurigheid den bodemdruk te meten, komt mij vooralsnog bijna niet mogelijk voor.

Boven werd door mij gezegd, dat ik reden had om te gelooven, dat bij het glas van mijn piëzometervat het verschijnsel der elastische nawerking vrij krachtig optrad.

Hierop was reeds geruimen tijd mijne aandacht gevestigd. Reeds in mijne verhandeling over de bepaling van de samendrukbaarheid van water volgens de methode van JAMIN heb ik toch vermeld, dat een zekere elastische nawerking van het glazen piëzometervat door mij werd waargenomen. Bij het aanbrengen der grootere drukking binnen den piëzometer verkreeg het waterniveau in de beide buizen niet terstond zijn definitieven stand, maar het bleef in de piëzometer-buis nog een geruimen tijd nadalen, in de andere buis nastijgen, om eerst na eenigen tijd in beide buizen een vasten stand te verkrijgen. Bij het wegnemen van den druk werd omgekeerd waargenomen, dat het niveau in de piëzometerbuis eenigen tijd bleef stijgen, in de andere buis dalen. Die na-bewegingen van de beide niveau's hadden dus in zulk een zin plaats, dat het scheen, alsof bij het aanbrengen der grootere drukking het piëzometervat niet plotselings maar eerst allengs zijn grootste volumen verkreeg, en bij het wegnemen der drukking niet plotselings zijn oorspronkelijk volumen hernam, maar eerst na eenigen tijd dat oorspronkelijk volumen terug kreeg. Van blijvende veranderingen van volumen was daarbij echter geen spoor te ontdekken. Diezelfde nawerking vertoonde zich ook bij al mijn latere piëzometrische proeven, ook bij die boven beschreven. Somtijds, vooral bij de geringere drukkingen, namen de waterniveau's in de beide buizen binnen een kwartier een vrij vasten stand aan, maar het kwam ook voor, vooral bij de hoogere drukkingen, dat een kwartier daartoe niet voldoende was, ja somtijds zelfs tot een half uur toe gewacht moest worden, eer een eenigszins vaste stand bereikt werd. Daar het de definitieve stand der waterniveau's was, waarop het bij de verdere berekening eigenlijk aankwam, moest daarom tusschen de waarnemingen bij drukking en die na het wegnemen dier drukking geruime tijd verloopen. Bij de eerste proeven bij kleinere drukking liet ik altijd met tusschentijden van een kwartier de waarnemingen der niveau's bij druk en zonder druk op elkander volgen. Bij de latere proeven bij grootere drukking liet ik die tusschentijden tusschen de opvolgende waarnemingen tot 20 of 25 minuten, ja zelfs somtijds tot een half uur stijgen.

Omtrent de grootte en den gang dier nawerking heb ik gedurende de proeven vele waarnemingen gedaan. Zoo spoedig mogelijk nadat ik den druk binnen of buiten den piëzometer voorzichtig had toegelaten, nam ik den stand van het niveau in een der buizen waar en teekende die op, en volgde dan de beweging van het niveau, telkens diens stand opteekenende, in den aanvang elke 1 of 2 minuten, op het einde der nawerking bij grootere tusschenpoozen. Eveneens werd de nawerking door mij waargenomen bij het wegnemen van den druk. Het bleek daaruit, zooals ook te verwachten was, dat de beweging der niveau's, aanvankelijk groot, langzamerhand afnam, om eindelijk onmerkbaar te worden.

Dit bewijzen bijv. de volgende cijfers:

$12^u\,15^m$ ongev.	druk toegelaten.	$11^u\,31^m$ ongev.	druk toegelaten
$15^1/_4$	26,10	31,5	248,00
17,5	25,73	33,0	249,00
19,5	25,54	36,0	249,45
20,5	25,33	38,0	249,63
21,5	25,24	41,0	249,80
26	25,00	45,0	250,00
28	24,87	50,0	250,13
30	24,87	51,5	250,13
		55,0	250,13

Het eerste tabelletje geeft de verandering van het niveau in de buis des piëzometers, nadat de druk buiten den piëzometer om $2169^{m/m.}$ verhoogd was; het tweede tabelletje de verandering van het niveau in de andere buis, die communiceert met de ruimte om den piëzometer, nadat men den druk binnen den piëzometer om 3655 millimeters had doen toenemen. De temperatuur was in de twee gevallen $15^0,6$ en $13^0,9$.

De nawerking vertoonde zich immer, en altijd in denzelfden zin; zij werd echter voor een deel overdekt door andere invloeden, vooral door een algemeene langzame temperatuursverhooging of verlaging van den toestel. Daaraan was wellicht ook toe te schrijven, dat de nawerking niet altijd even groot scheen bij het toelaten en bij het wegnemen van den druk. Bij stijgende temperatuur moest de eene, bij dalende temperatuur de andere grooter schijnen, omdat, wanneer bij het toelaten van den druk de verandering van het niveau wegens de temperatuursverandering en die wegens de nawerking in dezelfde richting plaats hebben, zij bij het wegnemen van den druk juist in tegengestelde richting zullen plaats hebben, en omgekeerd. Uit de richting van de temperatuursverandering kon men voorspellen, welke verandering van niveau, die bij het toelaten of die bij het wegnemen van den druk, bijzonder groot zou zijn, en die voorspelling werd door de waarneming altijd bevestigd. Ik zou echter niet met zekerheid durven beweren, dat de nawerking bij het toelaten en die bij het wegnemen van den druk juist even groot waren, want ook al hield men rekening met den invloed der algemeene temperatuursverandering, ook dan nog schenen de beide nawerkingen niet altijd aan elkander gelijk te zijn. De tijd, die er verliep tusschen het tijdstip van het toelaten of wegnemen van den druk en dat der eerste waarneming was daarop natuurlijk ook van grooten invloed, en die tijd kon onmogelijk elken keer juist even groot genomen worden. Ook werd waarschijnlijk nooit het einde der elastische nawerking waargenomen. Had de algemeene temperatuursverandering een beweging van de waterniveau's in denzelfden zin ten gevolge als de elastische nawerking, dan kwamen de niveau's in het geheel niet tot rust, maar vertraagden slechts in hun beweging; in het tegenovergestelde geval komen zij wel tot rust, maar reeds vóór dat de nawerking geheel is afgeloopen, om dan vervolgens dikwijls zich in tegengestelden zin te gaan bewegen.

Maar hebben wij recht om die waargenomen nawerking als een elastische nawerking van het glas des piëzometers te beschouwen? Is het niet mogelijk haar aan andere oorzaken toe te schrijven?

In de eerste plaats zou men kunnen meenen, dat zij het gevolg was van de wrijving van de vloeistof tegen den wand der nauwe buizen. Een voorloopige proef heeft echter aangetoond, dat de wrijving tusschen het water en den wand der buizen kon verwaarloosd worden. De buis, die met de ruimte om den piëzometer communiceert, was bij die voorloopige proef met haar eene uiteinde luchtdicht bevestigd in een vat, dat, nadat het geheel met water gevuld was, volkomen gesloten was; het water reikte een eind in de horizontaal liggende buis. Werd nu aan het open einde der buis geblazen of gezogen, dan verplaatste het waterniveau zich in de eene of de andere richting. Hield men dan op met blazen of zuigen, dan keerde het niveau weder volkomen tot den oorspronkelijken stand terug, en dat gebeurde zoowel wanneer men het niveau snel als wanneer men het langzaam tot den oorspronkelijken stand liet terugkeeren *). Dat het niet de wrijving is, die de nawerking kan verklaren, blijkt ook hieruit, dat die nawerking niet constant is maar ongeveer evenredig aan de aangewende drukking, en dat zij bij proeven 23—26, waarbij de druk zoowel binnen als buiten den piëzometer werkte, bijna niet werd waargenomen †).

*) Bevond zich in de nauwe buis bij deze proef kwik in plaats van water, dan werd daarentegen wel een zeer geringe invloed der wrijving bespeurd op den stand van het kwik-niveau in de buis.

†) Het bijna volkomen ontbreken der nawerking in dit geval bewijst

In de tweede plaats zou men de nawerking kunnen toeschrijven aan een tijdelijke temperatuursverandering van het water binnen of buiten het piëzometervat bij het toelaten en wegnemen van den druk. Het is toch bekend, dat de theorie eischt en de proeven van Joule ook hebben aangetoond, dat water bij samendrukking iets in temperatuur stijgt, en dus bij het wegnemen van de drukking evenveel in temperatuur daalt. Die temperatuursveranderingen moeten nu ook bij mijn proeven eenigen invloed hebben gehad en moeten een nawerking hebben teweeggebracht in den door mij waargenomen zin. Wordt bijv. de druk in de ruimte om den piëzometer toegelaten, dan zal de temperatuur van het water in die ruimte wegens de samendrukking iets stijgen. Die temperatuursverhooging wordt niet gedeeld door het water binnen den piëzometer, omdat dit niet aan drukking is onderworpen. Langzamerhand zal echter de hoogere temperatuur van het buitenwater zich door geleiding ook aan het water binnen den piëzometer mededeelen, en het zichtbare gevolg hiervan moet zijn, dat het niveau van het water in de piëzometerbuis, dat wegens de inkrimping van het vat gestegen is, nog eenigen tijd stijgende blijft, dat dus eene nawerking optreedt in den waargenomen zin.

Gemakkelijk is echter aan te toonen, dat deze temperatuursveranderingen van het water wellicht een gedeelte der waargenomen nawerking kunnen verklaren, maar dat zij geen rekenschap kunnen geven van de totale waargenomen nawerking. Daartoe is deze veel te groot. Om dat aan te toonen, nemen wij bijv. de nawerking bij proeven 17—19 door mij waargenomen.

De gemiddelde nawerking, het gemiddelde van de nawerkingen bij het toelaten en het wegnemen van den druk

ook, dat deze niet het gevolg is van een verschil in temperatuur van het in het water van den grooten bak ingedompelde gedeelte van den toestel en van de boven dat water uitstekende waarnemingsbuizen. De waargenomen nawerking was trouwens in den regel veel te groot en duurde veel te lang, als dat zij aan zulk een oorzaak kon worden toegeschreven.

waargenomen, en dus vrij van uitwendige temperatuursinvloeden, bedroeg 1,97.

De temperatuur was $15^0,1$; de druk buiten nam toe om gemiddeld 3767 millimeters of bijna 5 atmospheren.

Bij $15^0,1$ is de schijnbare uitzettingscoëfficient van water in glas ongeveer: 0,000.13.

Daar de inhoud van den piëzometer ongeveer 4 millioen mgr. kwik bedraagt, de inhoud van één buisdeel 3,6 mgr., zal dus de schijnbare uitzetting van het water bij een temperatuursverhooging van 1^0 520 mgr. kwik of 144 buisdeelen bedragen.

Volgens de theorie en de proeven van Joule bedraagt de temperatuursverhooging van water bij 15^0 bij een samendrukking door 25 atmospheren $0^0,03$, dus bij een samendrukking door 5 atmospheren $0^0,006$, correspondeerende met 0,864 buisdeel.

Het water in de ruimte om den piëzometer wordt dus bij de toelating van den druk bij proeven 17—19 om $0^0,006$ in temperatuur verhoogd. Stel nu, dat die hoogere temperatuur zich in het geheel niet mededeelt aan de omgeving en ook niet aan de vaste deelen van den piëzometer, maar alleen aan het water binnen den piëzometer. Nu bedraagt het volumen van het water in den piëzometer iets minder dan 300 $cm.^3$, dat van het water om den piëzometer ongeveer 530 $cm.^3$. Wanneer dus de warmte door samendrukking opgewekt aan niets anders werd medegedeeld dan aan het water in den piëzometer, dan zou dit water in temperatuur stijgen om minder dan $^2/_3 \times 0^0,006$, of om minder dan 0,6 buisdeel.

De ware nawerking wegens de door de samendrukking veroorzaakte temperatuursverhooging van het water zal echter natuurlijk zeer veel kleiner zijn dan de hier berekende van 0,6 buisdeel, terwijl een gemiddelde nawerking van 1,97 is waargenomen. Hieruit volgt dus ten duidelijkste dat, moge ook al een klein deel der nawerking door de temperatuursveranderingen wegens de samendrukking van het water verklaard kunnen worden, verreweg het grootste gedeelte dier nawerking een andere oorzaak moet hebben.

Voor de proeven 20—22 geldt het gezegde nog in meerdere mate. De aangewende druk was hier iets kleiner dan bij proeven 17—19; de druk werd alleen binnen den piëzometer aangewend, dus op een kleinere watermassa; de temperatuur was lager, $13^0,9$ in plaats van $15^0,1$, en hoe lager de temperatuur is, hoe kleiner de temperatuursverhooging is, die, zoowel volgens de theorie als volgens Joule's proeven, door de samendrukking van het water wordt voortgebracht; toch was de nawerking, zooals die werd waargenomen in de met de ruimte om den piëzometer in verbinding staande buis slechts weinig kleiner dan bij proeven 17—19; zij bedroeg gemiddeld 1,745 buisdeel tegen 1,97 bij proeven 17—19.

Om met zekerheid aan te toonen, dat de nawerking niet aan de genoemde oorzaak moet worden toegeschreven, deed ik nog eenige waarnemingen bij een temperatuur, waarbij die oorzaak haar invloed niet kan doen gelden. Volgens de theorie is de temperatuursverhooging bij samendrukking van een vloeistof evenredig aan diens uitzettingscoëfficiënt. Voor water is deze nul bij de temperatuur van het maximum van dichtheid, onder die temperatuur negatief. De temperatuursverandering wegens samendrukking van water moet daarom bij ongeveer 4^0 nul zijn, onder die temperatuur moet zij een temperatuursverlaging zijn. Door de proeven van Joule is dit volkomen bevestigd.

Ik deed daarom eenige waarnemingen bij een temperatuur in de nabijheid van 4^0, namelijk bij 3^0, 3. De druk die in het inwendige van den piëzometer werd toegelaten bedroeg slechts 855^{mm}, en toch werd in de buis des piëzometers een zeer merkbare nawerking waargenomen, zoowel bij het toelaten als bij het wegnemen van den druk. In beide gevallen was zij ongeveer even groot, zij bedroeg als gemiddelde van 4 waarnemingen: 0,66 buisdeel. Ook hier was de nawerking van langen duur, zij was in een half uur nog niet afgeloopen; daar niet langer werd waargenomen is daarom de daarvoor opgegeven waarde nog te klein.

Een merkbare temperatuursverandering van het glas des piëzometers als gevolg der veranderingen van drukking is niet aan te nemen. De eenige oorzaak van het grootste gedeelte der waargenomen nawerking kan daarom wel in niets anders dan in een elastische nawerking van het glas gezocht worden *).

De grootte dier nawerking was bij mijn proeven verschillend. In percenten uitgedrukt van de totale volumenverandering van het piëzometervat bedroeg zij bij

3°,3	temperatuur	en	855	milimeters	druk	0,66 pct.
13°,9	»	»	3654	»	»	0,92 »
15°,1	»	»	3767	»	»	1,02 »
15°,6	»	»	2169	»	»	0,78 »

In de drie laatste gevallen moet echter een klein deel der nawerking worden toegeschreven aan de tijdelijke temperatuursveranderingen wegens het samendrukken en het vervolgens weder ontlasten van het water.

Zeer zeker echter is de geheele elastische nawerking van mijn glazen piëzometervat veel grooter dan hier is aangegeven. Een zeer groot gedeelte dier nawerking zal zeer waarschijnlijk toch reeds hebben plaats gegrepen, gedurende de periode van het toelaten en het wegnemen van den druk, en deze periode duurde dikwijls wel een minuut, somtijds zelfs meer, en verder gedurende den tijd, die er verliep tusschen het oogenblik, waarop de druk ten volle was toegelaten of weggenomen, en het oogenblik der eerste waarneming. Bedenkt men verder, dat ook de nawerking waarschijnlijk in geen enkel geval door mij tot het einde toe is waargenomen en in de verschillende waarnemings-

*) Bij het toelaten van den druk der samengeperste lucht is het niet onmogelijk, dat het waterniveau, waarop die druk wordt toegelaten, langzamerhand iets van die samengeperste lucht opneemt en dit vervolgens weder afgeeft na het wegnemen van den druk. Dat een zoodanig opnemen en weder afgeven van lucht van de waargenomen nawerking niet de oorzaak kan zijn, blijkt behalve uit andere omstandigheden het duidelijkst hieruit, dat de nawerking even goed optreedt bij het waterniveau, waartoe de samengeperste lucht niet is toegelaten, als bij dat waarbij dit wel heeft plaats gehad.

reeksen niet gedurende denzelfden tijd *), dan kan men aan de absolute grootte der opgegeven percenten slechts een zeer geringe waarde hechten.

F. KOHLRAUSCH heeft indertijd een groot aantal waarnemingen gepubliceerd omtrent de elastische nawerking bij wringing van draden van glas, messing, zilver en caoutchouc, bij uitrekking van een draad van laatstgenoemde stof en bij buiging van een staaf eboniet †). Hij heeft daarbij getracht zijn waarnemingen door een half theoretische, half empirische formule voor te stellen, en hij vond, dat hij dat doen kon door middel van de formule:

$$x = C\, e^{-a\, t^m}$$

en in de meeste, maar niet in alle, gevallen ook wel door de eenvoudiger formule:

$$x = \frac{c}{t^\alpha},$$

welke een bijzonder geval is van de eerste meer algemeene formule, namelijk voor $m = 0$. In deze formules zijn C, a en m, c en α constanten; t is de tijd verloopen sedert het begin der nawerking, d. i. sedert het oogenblik, waarop de wringende, uitrekkende of buigende kracht begint, respectieve ophoudt te werken §); x is de op den tijd t nog voorhanden afwijking van den na volkomen afloop der nawerking optredenden evenwichtstoestand.

---

*) De tijd, gedurende welken de nawerking werd waargenomen, bedroeg voor de temperatuur van:

3°,3 : 27 minuten
13°,9 : 21,5 „
15°,1 : 19 „
15°,6 : 15 „ .

†) Zie Pogg. Ann. Bd. 119 (1863), S. 337; Bd. 128 (1866), SS. 1, 207, 399; Bd. 158 (1876), S. 337.

§) Bij KOHLRAUSCH was bijna altijd alleen het laatste het geval, d. i. hij nam de nawerking waar, nadat de draad of staaf eenigen tijd gewrongen, uitgerekt of gebogen geweest was, en de wringende, uitrekkende of buigende kracht dan ophield te werken.

Ook de uitrekkingsproeven van Weber met een zijden cocondraad bleken aan Kohlrausch door zijne formule te kunnen worden voorgesteld.

Ik wenschte nu na te gaan, of ook de door mij waargenomen nawerking aan de door Kohlrausch opgestelde formule voldeed. Daarbij deden zich echter groote bezwaren op. Vooreerst, dat het toelaten en wegnemen van den druk niet oogenblikkelijk gebeurde, en daarom niet met juistheid was aan te geven van welk tijdstip t moet worden afgerekend. In de tweede plaats, en dit was erger, dat de temperatuur niet constant genoeg was, en dat door de daardoor veroorzaakte veranderingen in den stand der waterniveau's het onmogelijk was met eenige zekerheid de evenwichtsstanden aan te geven, die de niveau's na geheelen afloop der nawerking zouden aangenomen hebben, indien de temperatuur constant gebleven was. Het nulpunt der t, maar vooral der x, was dus onzeker. Alleen bij de waarnemingen bij een temperatuur van $3^0,3$ waren de niveauveranderingen, onafhankelijk van de nawerking, klein genoeg om ongeveer ten minste de evenwichtsstanden te kunnen aangeven en een poging te wagen, of die waarnemingen in overeenstemming te brengen zijn met de formule van Kohlrausch. Die poging is in het volgende te vinden.

Ik begin met in de eerste plaats te geven de volledige waarnemingen bij $3^0,3$.

TABEL IV.

Waarnemingstijd.	Afgelezen stand.	t	y	y'	x	x'	$x' - x$	
$10^u 43^m$	16,35							
51	16,20							
57,5	16,20							
11^u 2	druk langzaam toegelaten.							
6	251,20	0^m	47	47	66	69,2	+ 3,2	
9	251,37	3	30	30	49	52,9	+ 3,9	
13	251,46	7	21	20	39	39,7	+ 0,7	fig.
18	251,55	12	12	10,5	29,5	29,3	— 0,2	5.
24	251,66	18	1	2,5	21,5	21,4	— 0,1	
28,5	251,67	22,5	0	0	19	17,3	— 1,7	

Waarnemingstijd.	Afgelezen stand	t	y	y'	x	x'	$x'—x$	
11^{u}29^m	druk weggenomen.							
30	17,00	0^m	64	64	80	89,3	+ 9,3	
32	16,77	2	41	43	59	59,2	+ 0,2	
34,5	16,70	4,5	34	31	47	45,6	— 1,4	fig.
40	16,53	10	17	17	33	32,4	— 0,6	
45,5	16,46	15,5	10	10	26	25,8	— 0,2	3.
51	16,41	21	5	5	21	21,4	+ 0,4	
59,5	16,36	29,5	0	0	16	17,5	+ 1,5	
12^{u}11	16,29							
1^u 8	16,13							
2^{u}30	16,09							
druk langzaam toegelaten.								
2^{u}33,^{m}5	250,00	0^m	83	83	100	94,8	— 5,2	
34,5	250,20	1	63	63	80	82,0	+ 2,0	
36,5	250,36	3	47	47	64	65,8	+ 1,8	
38,5	250,45	5	38	38	55	55,1	+ 0,1	
40,5	250,52	7	31	31	48	47,2	— 0,8	
42,5	250,58	9	25	25	42	41,1	— 0,9	fig.
45	250,63	11,5	20	18,5	35,5	35,0	— 0,5	
48	250,71	14,5	12	12	29	29,3	+ 0.3	4.
51	250,75	17,5	8	8	25	24,9	— 0,1	
53	250,78	19,5	5	5	22	22,5	+ 0,5	
55	250,80	21,5	3	3	20	20,4	+ 0,4	
57	250,82	23,5	1	1	18	18,5	+ 0,5	
3^u 0	250,83	26,5	0	0	17	16,2	— 0,8	
druk weggenomen.								
3^u 1,^{m}5	16,98	0^m	71	71	89	89,2	+ 0,2	
2,75	16,75	1,25	48	48	66	66,2	+ 0,2	
3,5	16,69	2	42	41	59	59,2	+ 0,2	
4,75	16,64	3,25	37	34	52	51,2	— 0,8	fig.
6,5	16,55	5	28	27	45	43,8	— 1,2	
9	16,47	7,5	20	19	37	37,0	0	2.
14,5	16,36	13	9	10	28	28,4	+ 0,4	
20,5	16,33	19	6	4	22	23,0	+ 1,0	
25,5	16,28	24	1	2	20	20,0	0	
30	16,27	28,5	0	0	18	17,9	— 0,1	

De temperatuur bedroeg 3^0,3, de toegelaten druk ongeveer 855 millimeters; de laatste was bij de tweede toelating iets kleiner dan bij de eerste. De druk werd aangewend binnen den piëzometer; de waargenomen niveauveranderingen hadden plaats in de met den piëzometer verbonden buis.

De eerste kolom geeft den tijd der waarnemingen, de tweede de afgelezen standen van het waterniveau in de piëzometerbuis, de derde den tijd t der waarneming afgerekend van het tijdstip der eerste waarneming na het toelaten of wegnemen der drukking, de vierde de afwijking y van den waargenomen stand van den laatsten stand, die bij elke toelating of wegneming van druk werd afgelezen *). Mijn y is dus de x van KOHLRAUSCH verminderd om een constante b, welke aanduidt om hoeveel de laatst waargenomen stand nog afwijkt van den evenwichtsstand, dien het niveau na den volkomen afloop der nawerking zou aangenomen hebben; mijn t is de t van KOHLRAUSCH, verminderd om den tijd τ, die er op het oogenblik der eerste waarneming verloopen was sedert het oogenblik, waarop de druk was toegelaten of weggenomen.

De bij elkander behoorende waarden van t en y zijn als abscissen en ordinaten eener kromme lijn in figuren 2—5 graphisch voorgesteld; fig. 2 heeft betrekking op de reeks waarnemingen tusschen $3^u\ 1^m,5$ en $3^u\ 30^m$, fig. 3 op die tusschen $11^u\ 30^m$ en $11^u\ 59^m,5$, fig. 4 op die tusschen $2^u\ 33^m,5$ en 3^u, fig. 5 op die tusschen $11^u\ 6^m$ en $11^u\ 28^m,5$. De krommen in figg. 2 en 3 geven dus een deel van het verloop der nawerking aan bij het wegnemen der drukking, de krommen in figg. 4 en 5 hetzelfde bij het toelaten der drukking. De geteekende krommen hebben een vrij regelmatig verloop en geven de waarnemingen vrij goed weêr. Zij vertoonen een onmiskenbare overeenkomst met de krommen, door welken KOHLRAUSCH zijn waarnemingen omtrent de nawerking bij wringing graphisch heeft voorgesteld †); zoodat het niet onwaarschijnlijk was, dat de door mij waargenomen nawerking aan dezelfde wet voldoet en dus door dezelfde formule kan worden uitgedrukt als die door KOHL-

*) De éénheid, waarin y is uitgedrukt, is $^1/_{100}$ buisdeel.

†) Men vergelijke bijv. mijne krommen met die van fig. 1, Taf. IV, Bd. 119 en van figg. 2 en 5, Taf. IV, Bd. 128 van POGG. *Ann.*

RAUSCH waargenomen. Om dit te onderzoeken heb ik in de eerste plaats de waarnemingen na het wegnemen van den druk behandeld, omdat bij deze de definitieve evenwichtsstand ten minste ongeveer bekend is, daar daarvoor bij benadering de stand van het niveau vóór het aanbrengen van druk kan worden aangenomen. Van de beide hierop betrekking hebbende waarnemingsreeksen heb ik mij aanvankelijk tot de laatste, die door fig. 2 wordt voorgesteld, bepaald, omdat deze uit een veel grooter aantal waarnemingen bestond dan de andere. Ik ben begonnen met aan sommige der waarden van y een correctie aan te brengen, zoodat zij beter met de ordinaten der getrokken krommen overeenkomen. Die correctiën zijn altijd slechts zeer klein en zeker niet grooter dan de mogelijke waarnemingsfouten, want de waarden van y zijn wat de éénheden betreft onzeker, en voor de waarnemingstijden gaat de nauwkeurigheid niet boven een kwart minuut. De aldus volgens de kromme gecorrigeerde waarden zijn onder y' opgegeven *). Nemen wij als definitieven evenwichtsstand 16,09, den stand te $2^u\,30^m$ waargenomen, dan is bij de laatste waarneming te $3^u\,30^m$ het niveau nog om 18 deelen van den evenwichtsstand verwijderd; b is

*) De graveur heeft in de figuren 2—7 de door mij geteekende krommen vrij goed maar toch niet volkomen weêrgegeven. Dit blijkt o. a. wanneer men de plaatsen der punten, die de waarnemingen in de figuren aangeven, vergelijkt met de correspondeerende waarden van y en t in tabellen IV en V. Men vindt dan, dat sommige punten in de figuren een streepje te hoog of te laag, te veel rechts of te veel links staan. De gevallen, waarbij dat voorkomt, zijn echter gelukkig niet velen. Ook het beloop der krommen in de figuren komt niet volkomen met dat der door mij geteekende krommen overeen. In fig. 6 bijv. springt terstond in het oog, dat het bovenste gedeelte der kromme een te steil verloop heeft; maar ook op andere plaatsen, waar dat niet zoo terstond in het oog valt, wijken de krommen eenigszins van de door mij geteekende krommen af. In het algemeen was het beloop mijner krommen iets regelmatiger dan in de figuren het geval is. Ik meen hierop vooral opmerkzaam te moeten maken wegens de door mij aan de krommen ontleende waarden y'. Als men deze vergeleek met de figuren, zou men in sommige gevallen geneigd kunnen zijn te meenen, dat ik niet de goede waarden daarvoor heb aangenomen. Men vergete dan echter niet, dat de waarden der y' natuurlijk ontleend zijn aan de door mij geteekende krommen en niet aan die van den graveur.

dus gelijk 18. Onder x zijn de waarden $y' + b$ opgenomen. De formule, die geverifieerd moest worden, heeft den vorm:

$$x = Ce'^{-a(t+\tau)^m} \text{ of: } log.\, x = log.\, C - a'(t+\tau)^m.$$

De constanten m, a of a' en C moesten zoodanig worden aangenomen, dat de x volgens deze formule zoo goed mogelijk overeenkwamen met die volgens de waarneming, terwijl voor τ, den tijd verloopen bij de eerste waarneming sedert het wegnemen van de drukking, een waarde moest worden aangenomen, die tot de mogelijke waarden van τ kon gerekend worden. Het bleek na vele beproevingen, dat de volgende waarden van de constanten vrij goed voldeden:

$$\tau = 0{,}75,\ m = 0{,}25,\ a' = 0{,}5,\ C = 260{,}7.$$

Met deze waarden zijn de onder x' aangegeven waarden van x berekend, terwijl onder $x' - x$ het verschil tusschen berekening en waarneming voorkomt. De overeenstemming is een zeer bevredigende.

Nu moest onderzocht worden, of de eerste waarnemingsreeks, die in fig. 3 is afgebeeld, door dezelfde formule met dezelfde waarden voor m, a' en C kon worden voorgesteld *). Voor deze waarnemingsreeks werd $b = 16$ aangenomen, het verschil tusschen den laatst waargenomen stand te $11^u\ 59^m{,}5$ en den stand te $10^u\ 57^m{,}5$ vóór het eerste toelaten van den druk. Onder y' vindt men weder de volgens de kromme van fig. 3 gecorrigeerde waarden van y; onder x de waarden $y' + b$; onder x' de volgens de formule berekende waarden van x, waarbij $\tau = 0{,}75$ gesteld is; onder $x' - x$ de verschillen tusschen berekening en waarneming. Deze laatste kolom toont niet zulk een goede overeenstemming aan als boven, maar de overeenstemming is toch behalve voor de eerste waarneming goed genoeg. En ook voor de eerste waarneming is het verschil niet van dien aard, dat men daarom alleen er toe zou moeten besluiten, dat voor deze waarnemingen niet dezelfde formule met dezelfde waarden

*) Het verschil in C bij beide waarnemingsreeksen wegens het niet volkomen gelijk zijn van de in beide gevallen gewerkt hebbende drukking heb ik gemeend te mogen verwaarloozen.

der constanten zou gelden als voor die, waarvoor de formule door mij is opgesteld. Men behoeft toch slechts aan te nemen een fout van één kwart minuut in het tijdstip der eerste waarneming om ook deze aan de formule te laten voldoen, en zulk een fout is volstrekt niet onmogelijk te achten.

Wellicht ware het mogelijk door kleine wijzigingen in de waarden der constanten de formule nog iets beter gelijktijdig aan beide waarnemingsreeksen te laten voldoen. In allen gevalle schijnt het mij toe, dat mijne waarnemingen na het wegnemen van de drukking zich door de formule van KOHLRAUSCH vrij goed laten voorstellen.

Wij gaan nu over tot de waarnemingen na het toelaten van de drukking; wij vangen weder aan met de tweede reeks waarnemingen, die tusschen $2^u\ 33^m,5$ en 3^u, omdat deze veel talrijker zijn dan die der eerste reeks. De kromme van fig. 4 komt zoo goed met die waarnemingen overeen, dat ik slechts één waarde van y een correctie heb laten ondergaan, zoodat op één enkele na de y' met de y overeenstemmen. Het is hier tamelijk onzeker welk waarde wij voor b moeten aannemen. Daar de veranderlijkheid van het niveau op het einde dezer waarnemingsreeks ongeveer even groot is als op het einde der waarnemingsreeksen na het wegnemen van den druk, heb ik aangenomen, dat bij de laatste waarneming thans de afwijking van den definitieven evenwichtsstand ongeveer even groot zal geweest zijn als straks, en heb ik daarom voor b aangenomen 17, het gemiddelde der straks gebruikte waarden. Met deze waarde 17 van b heb ik de x gevormd.

Bij de pogingen om deze waarnemingsreeks met de formule van KOHLRAUSCH in overeenstemming te brengen, bleek spoedig, dat hier voor m een veel grootere waarde moest worden aangenomen dan bij het wegnemen van de drukking. De volgende waarden voor de constanten gaven een vrij goede overeenstemming tusschen waarneming en berekening:

$$\tau = 1,\ m = 0{,}6,\ a' = 0{,}1219,\ C = 125{,}48.$$

Met deze waarden zijn volgens de formule de x' berekend;

en dat de overeenstemming, ofschoon niet volkomen, toch voldoende is, blijkt uit de waarden van $x' - x$.

Wanneer men voor de waarnemingsreeks na het eerste toelaten der drukking, waarop fig. 5 betrekking heeft, aanneemt $\tau = 3{,}5$ en $b = 19$, dan geeft de formule met dezelfde waarden voor m, a' en C als boven, de in de voorlaatste kolom aangegeven waarden van x', terwijl de laatste kolom dan de verschillen tusschen waarneming en berekening aangeeft. Deze verschillen vertoonen een iets grootere regelmatigheid, daar de eerste drie termen positief, de drie laatste negatief zijn. Dit bewijst, dat de nawerking hier eenigszins andere constanten eischt, dan door mij is aangenomen. De waarnemingen zijn echter zoo weinig in aantal, dat een zeker besluit niet uit haar getrokken kan worden, zoodat ik het dan ook niet de moeite waard achtte, om door wijziging der constanten een formule te vinden, die beter aan beide waarnemingsreeksen na het toelaten der drukking voldeed. Vooral omdat het niet geheel zeker is, dat beide waarnemingsreeksen door éénzelfde formule met dezelfde waarden der constanten moeten worden uitgedrukt. De aanvankelijke toestand van het piëzometervat bij het toelaten van den druk was namelijk in beide gevallen niet volkomen gelijk. Bij het eerste toelaten van druk te $11^u\ 2^m$ was het piëzometervat een paar maanden aan zich zelven overgelaten en gedurende al dien tijd niet aan druk onderworpen geweest; bij het tweede toelaten van druk te $2^u\ 30^m$ was daarentegen 3 uren te voren gedurende een half uur het piëzometervat aan druk blootgesteld geweest. Nu is het bekend, dat de elastische nawerking zeer afhankelijk is van de krachten, die vroeger gewerkt hebben, zoodat zij in de beide door mij waargenomen gevallen niet volkomen gelijk behoefde te zijn.

In allen gevalle meen ik echter te hebben aangetoond, dat mijn waarnemingen zich door dezelfde formule laten weêrgeven als die van Kohlrausch; dat die formule beider waarnemingen ten minste bij benadering weêrgeeft, want dat die formule het geheele verloop der nawerking, van den eersten aanvang tot het einde toe, volkomen juist zou weêrgeven, acht ik niet zeer waarschijnlijk, evenmin als Kohlrausch die meening schijnt te zijn toegedaan *).

De constante m der formule is bij mijne waarnemingen grooter dan in den regel bij Kohlrausch. Bij dezen is zij in vele gevallen nul, heeft meestal slechts een kleine waarde, en stijgt bijv. bij den door hem gebruikten zilverdraad slechts in één geval, namelijk nadat deze 9 uren lang in gewrongen toestand verkeerd had voordat hij aan de proef onderworpen werd, tot de waarde 0,3478 †). Bij mij zou m bij het wegnemen der drukking de waarde 0,25, bij het toelaten der drukking daarentegen de veel grootere waarde 0,6 bezitten. Ik constateer slechts dit verschil tusschen de uitkomsten van Kohlrausch en van mij, zonder daarom te beweren, dat tusschen die uitkomsten strijd zou bestaan. Daartoe bestaat, geloof ik, geen reden, omdat ook Kohlrausch voor zijn zilverdraad in verschillende omstandigheden zeer uiteenloopende waarde voor m vond §).

De nawerkingen bij hoogere temperaturen waargenomen zijn niet door mij berekend, omdat een, zij het dan ook waarschijnlijk slechts klein, gedeelte dier nawerkingen niet aan elastische nawerking van het glazen piëzometervat, maar aan door de drukveranderingen voortgebrachte tijdelijke temperatuursveranderingen van het water moet worden toegeschreven, en in de tweede en voornaamste plaats, omdat wegens toevallige temperatuursveranderingen van den piëzometer de definitieve evenwichtsstand na geheelen afloop der nawerking niet met juistheid is aan te geven. Ik bepaal mij daarom, wat deze waarnemingen betreft, er toe, om één enkele waarnemingsreeks, die waarbij de toevallige temperatuursveranderingen het geringst waren, in tabel V volledig weêr te geven.

*) Hij wijst er ten minste somtijds op, dat de constante m niet voor het geheele verloop der nawerking volkomen dezelfde waarde blijft behouden; zie bijv. Pogg. Ann., Bd. 128, S. 215. Gold de formule $x = C e^{-at^m}$ voor het geheele verloop der nawerking, dan zou de constante C in elk geval de totale nawerking zijn. Ik geloof echter niet, dat men recht heeft dit aan te nemen.

†) Pog . *Ann.*, Bd. 128, S. 410.

§) Pogg. *Ann.*, Bd. 128, SS. 213—6.

TABEL V.

Waarnemingstijd.	Afgelezen stand.	t	y
10^u50^m	60,76		
druk toegelaten.			
10^u51^m	iets beneden 250,00		
51,5	250,00	0^m	107
53	250,37	1,5	70
54,5	250,61	3	46
57	250,84	5,5	23
11^u 0,5	250,93	9	14
4,5	251,00	13	7
8	251,04	16,5	3
10	251,07	18,5	0
druk vrij snel weggenomen.			
11^u11^m	± 62,30	0^m	214
11,5	62,00	0,5	184
14	61,25	3	109
18,5	60,77	7,5	61
21,5	60,50	10,5	34
24,5	60,36	13,5	20
28	60,20	17	4
30	60,16	19	0
druk toegelaten.			
$11^u31,^m5$	248,00	0^m	213
33	249,00	1,5	113
36	249,45	4,5	68
38	249,63	6,5	50
41	249,80	9,5	33
45	250,00	13,5	13
50	250,13	18,5	0
51,5	250,13	20	0
55	250,13	23,5	0

Waarnemingstijd.	Afgelezen stand.	t	y
druk langzaam weggenomen.			
$11^u57,^m5$	63,58	0^m	188
59,5	63,00	2	130
12^u 4,5	62,39	7	69
7	62,19	9,5	49
10,5	62,00	13	30
15,5	61,82	18	12
18	61,74	20,5	4
20	61,70	22,5	0
druk toegelaten.			
$12^u21,^m5$	247,41	0^m	159
23	248,00	1,5	100
25	248,27	3,5	73
28	248,55	6,5	45
33	248,82	11,5	18
38,5	248,93	17	7
45	249,00	23,5	0
druk zeer langzaam toegelaten. bij de eerste waarneming stand boven 63,00.			
$12^u47,^m5$	63,00	0^m	166
53	61,93	5,5	59
56,5	61,70	9	36
1^u 0,5	61,54	13	20
4,5	61,41	17	7
8	61,34	20,5	0
10	61,34	22,5	0

Deze waarnemingen behooren tot de proeven vroeger vermeld als N°. 20—22. De temperatuur bedroeg 13°,9. De toegelaten druk was gemiddeld 3654 millimeters kwik, en nam van den eenen keer tot den volgenden iets af. De druk werd binnen den piëzometer toegelaten; de afgelezen

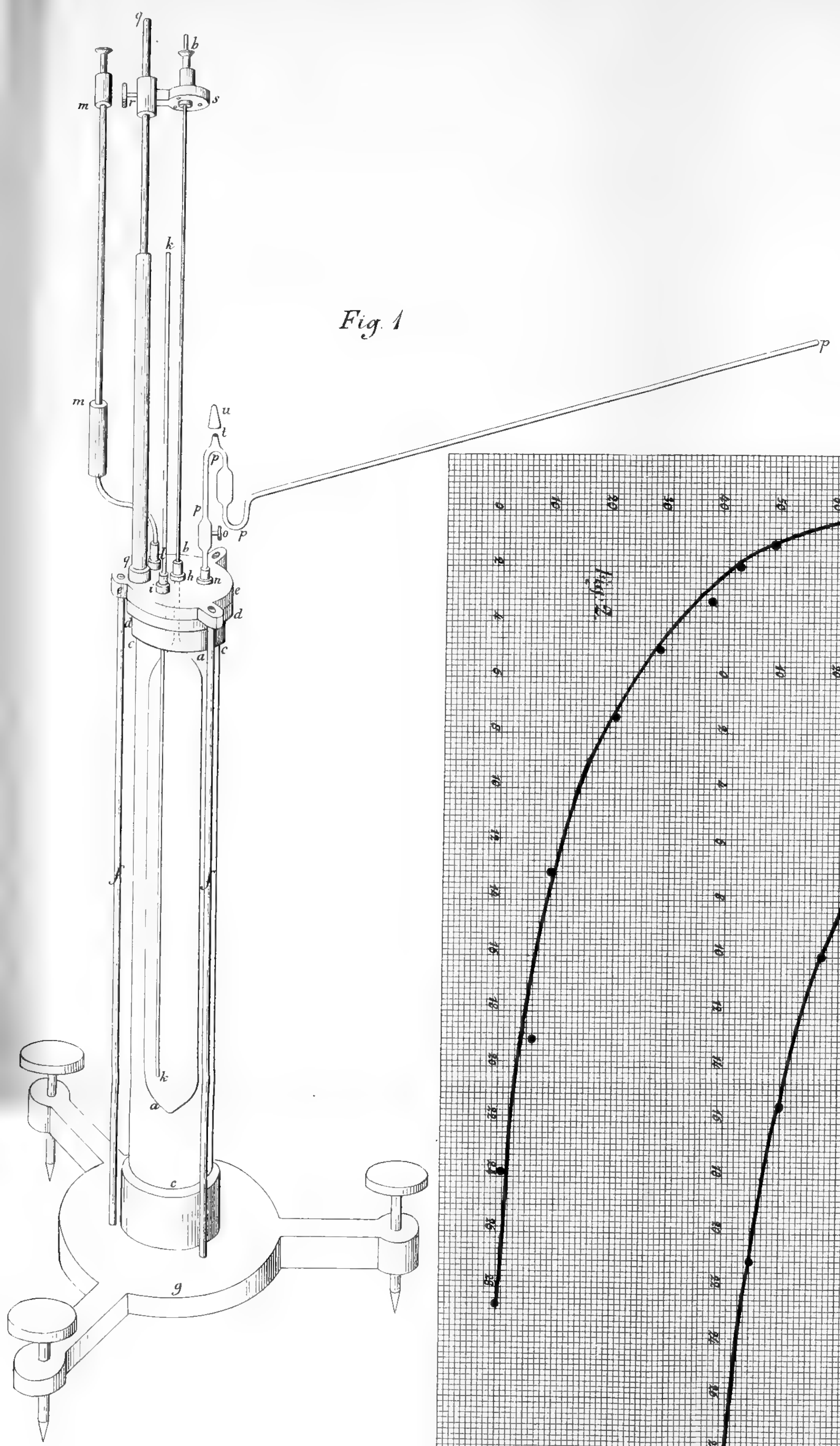
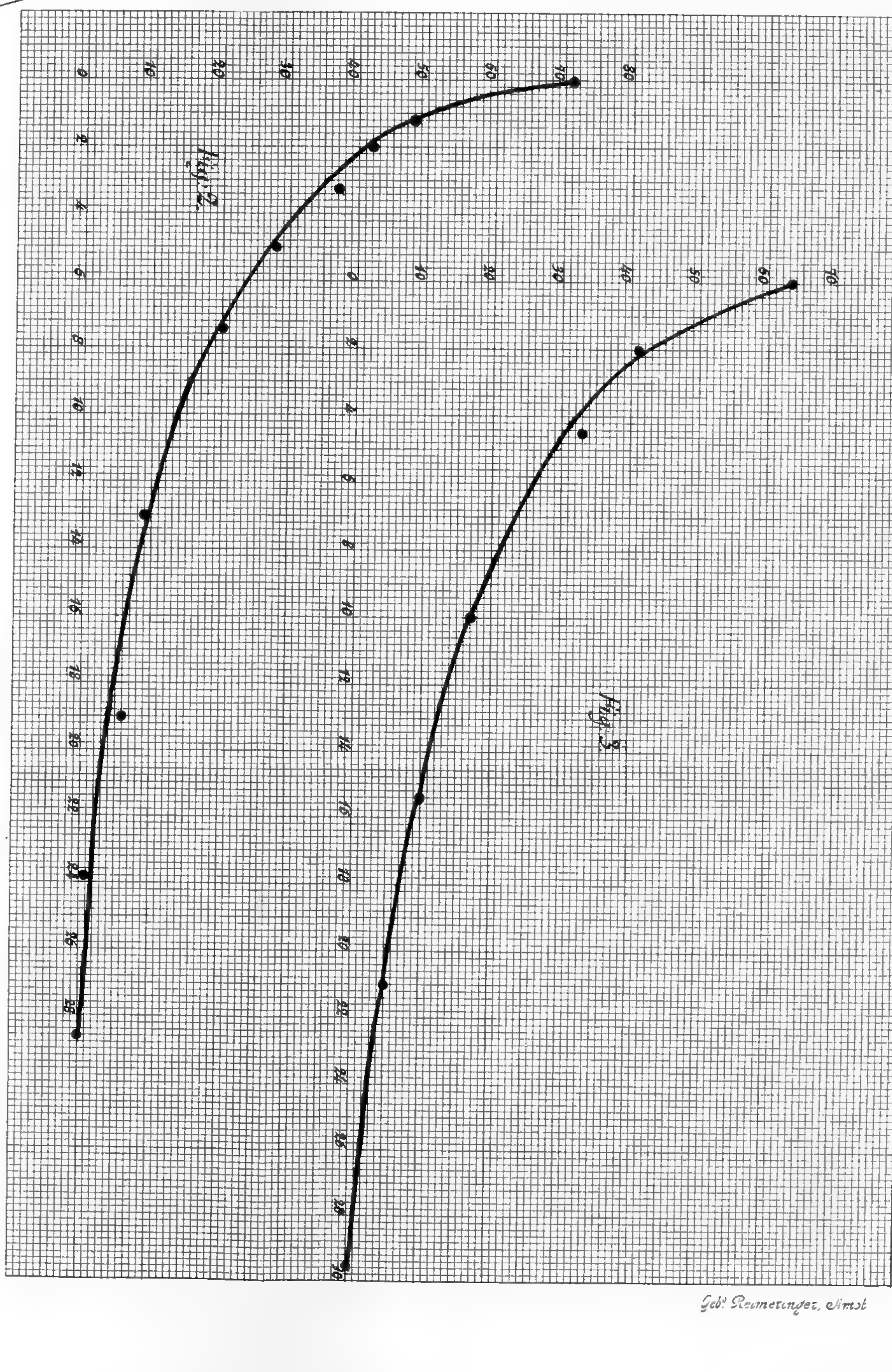
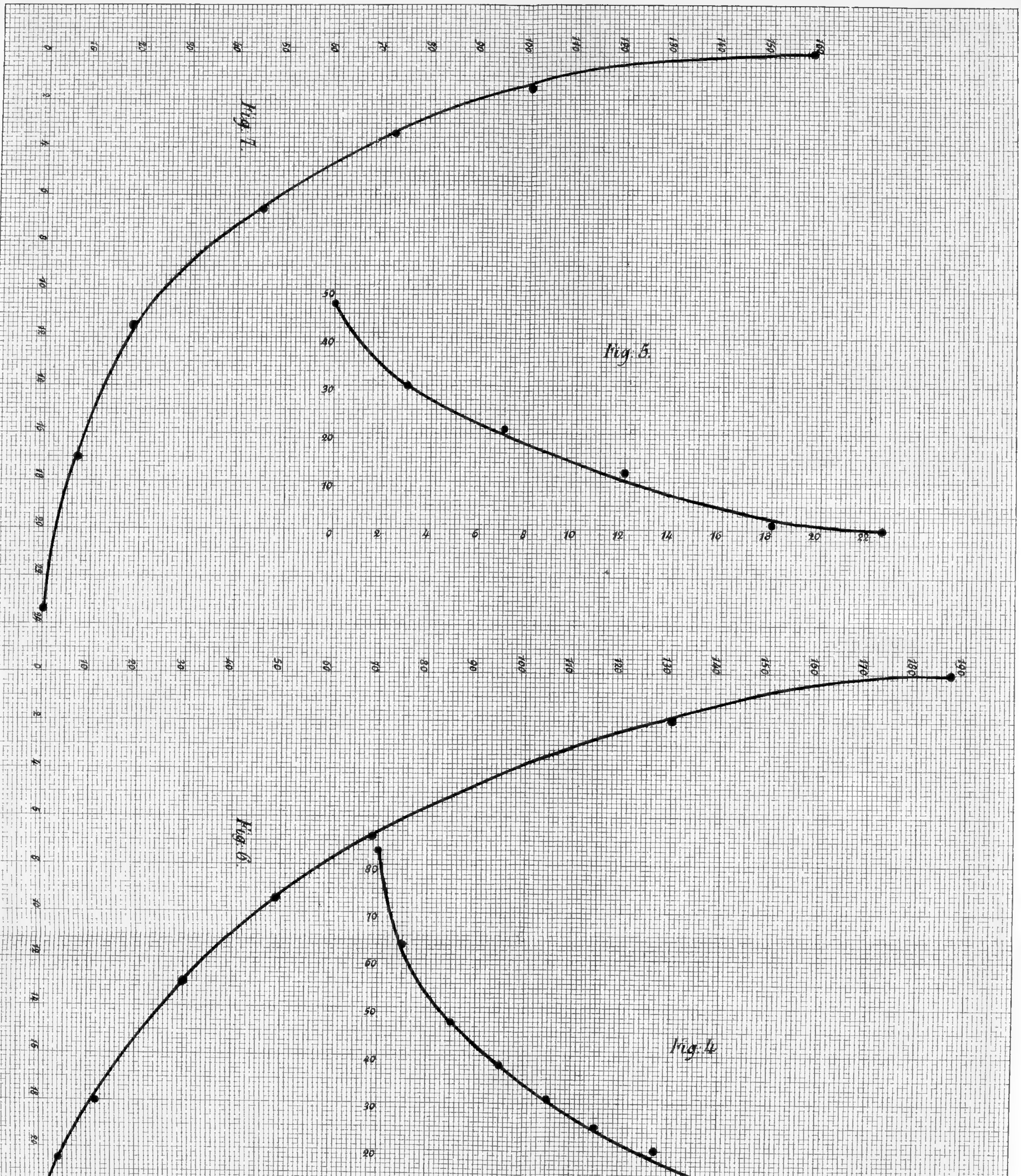


Fig. 1



Gebr. Rennetinger, Amst.



Gebr. Reimeringer, Amst.

niveau-veranderingen hadden plaats in de buis, die met de ruimte om den piëzometer communiceerde.

De waarnemingsreeks tusschen $11^u57,^m5$ en 12^u20^m na het wegnemen van de drukking en die tusschen $12^u21,^m5$ en 12^u45^m na het toelaten van de drukking zijn in figuren 6 en 7 graphisch voorgesteld *). Ook de krommen dezer figuren hebben een groote gelijkenis met mijne vroegere krommen en met die van Kohlrausch, zoodat zeer waarschijnlijk ook bij hoogere temperaturen en grootere drukkingen de formule van Kohlrausch, zij het ook dan wellicht met andere waarden der constanten, de elastische nawerking van het glazen piëzometervat kan weêrgeven.

Van blijvende vormveranderingen van den piëzometer, of m. a. w. van een overschrijding van de grens der elasticiteit kan bij mijne proeven, zelfs bij de hoogste door mij aangewende drukking, meen ik, geen sprake zijn.

Groningen, Mei 1883.

*) Ook andere waarnemingsreeksen, die hier niet zijn medegedeeld, zijn door mij graphisch voorgesteld en gaven voor het verloop der nawerking kromme lijnen van soortgelijken vorm als die van figuren 6 en 7.

OVER EEN

EFFLUVE-OZONOMETER

EN

ONTLEDINGSSNELHEID VAN OZON,

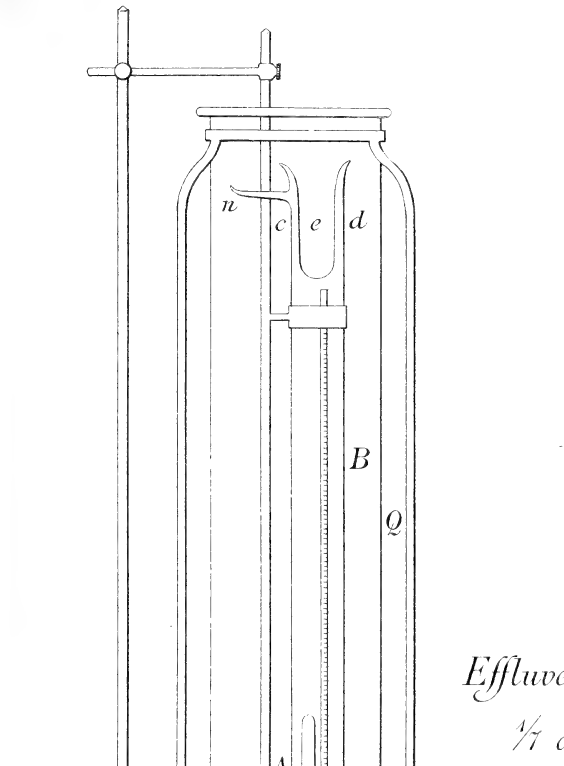
DOOR

E. MULDER.

EERSTE GEDEELTE.

De toestel van bovengemelden naam kan zoowel strekken tot het verrichten van wetenschappelijke waarnemingen, als dienst doen bij het onderwijs. Het doel daarmede beoogd is, om de omzetting van gewone zuurstof in ozon — en omgekeerd — *quantitatief* te kunnen volgen onder verschillende omstandigheden. Het grondbeginsel berust hierop, dat in een gesloten glazen buis, gevuld met zuurstof, een luchtthermometer is gebracht, die dus optreedt als manometer, terwijl deze buis aan het eene einde is voorzien van een effluve-inrichting, zoodat de zuurstof ten deele in ozon kan worden omgezet. Blijft de temperatuur in de verschillende deelen van den toestel dezelfde, dan verandert de stand van den manometer niet, al mocht de temperatuur worden gewijzigd *); daarentegen zal, bij omzetting van gewone zuurstof in ozon of omgekeerd, deze stand een andere worden door

*) Verondersteld, dat buis en manometer zijn gemaakt van dezelfde glassoort, en niet medegerekend verandering in het s.g. der vloeistof van den manometer.



Effluve-Ozonometer.

1/7 der grootte.

vermindering of vermeerdering in druk. Laat men dan ook effluve-electriciteit doorgaan, dan stijgt de vloeistof in den manometer als gevolg eener vermindering in druk daar buiten.

Ter betere beoordeeling van den toestel zal in 't kort aanvankelijk mededeeling worden gedaan van eenige voorloopige proeven, die leidden tot de inrichting ten slotte daartoe gekozen.

Voorloopige proeven. De manometer bevatte water, en derhalve was de ozonhoudende zuurstof niet droog. In den toestel was geplaatst een buisje met water, ten einde den gasinhoud zooveel mogelijk verzadigd te houden met waterdamp. Ter contrôle had men een tweede buis ingericht op overeenkomstige wijze, maar gevuld met lucht. Het bleek nu na eenige maanden, dat de stand van den manometer zeer merkbaar was veranderd, zoodat moest verondersteld worden, dat eenig water van den manometer was verplaatst. Bij deze voorloopige proeven was de buis nog niet voorzien van een effluve-inrichting, en moest deze gevuld worden met ozonhoudende zuurstof. Tot dit laatste werd een vrij samengestelde constructie vereischt. Aan het eene einde was de (groote) buis gesmolten aan een glazen buis met glazen kraan, in gemeenschap staande met een glazen gashouder, terwijl het andere einde was verbonden met een **T** stuk, voorzien van twee glazen kranen. De lucht werd dan verdreven door ozonhoudende zuurstof in groote hoeveelheid doorgevoerd, daarna geleid door een absorptie-toestel met arsenigzuur-oplossing (ter bepaling van het gehalte aan ozon), en ten slotte de (groote) buis aan de uiteinden toegesmolten.

Manometer. De luchtthermometer, die later als manometer dienst heeft te doen, werd na de opgedane ondervinding eerst gevuld met gewoon zwavelzuur, maar de beweging was buiten verwachting traag, zoodat daarmede niets goeds was aan te vangen. Toen werd op één maat gewoon zwavelzuur genomen $^1/_8$ maat water; en met deze vloeistof was de snelheid van beweging zeer voldoende.

De luchtthermometer heeft een betrekkelijk groot luchtreservoir en is voorzien van twee kamers, om redenen gemakkelijk in te zien; terwijl het uiteinde der bovenste kamer in een haarbuis is uitgetrokken. Het lumen der thermometerbuis is betrekkelijk groot van diameter, ten einde de snelheid van beweging te bevorderen. De verdeeling is in millimeters. Het calibreeren geschiedde op deze wijze, dat de stand van het vocht in de thermometerbuis werd afgelezen bij verschillende temperaturen, waarbij de luchtthermometer in eenzelfde vat met water was geplaatst met een gevoeligen kwikthermometer. Het calibreeren geschiedde zoo snel mogelijk en werd ter contrôle herhaald.

Effluve-ozonometer. De voorloopige proeven brachten mij al spoedig op de eenvoudige gedachte, om den ozonometer te voorzien van een effluve-inrichting. In de figuur is de geheele toestel met watervat en al (zie later) voorgesteld. De aanvankelijk luchtthermometer, thans *manometer*, A rust op een soort glazen voetstuk. De buisjes *l* en *n*, bij het vullen van buis B met zuurstof open, zijn daarna dicht gesmolten. De effluve-inrichting *e* maakt het mogelijk (zie later), om tusschen *e* en *c* en *e* en *d* effluve-electriciteit te laten doorgaan. De effluve-ozonometer is geplaatst in een glazen vat *Q*, gevuld met water, welk vat van onder kan verhit worden met een gaskomfoor *Z*.

Vullen van den effluve-ozonometer. Volledigheidshalve deelen wij de wijze mede van vullen. De buis B wordt ondersteld nog open te zijn bij *g*; de luchtthermometer wordt dan eerst hierdoor ingebracht met het glazen voetstukje en vervolgens bij *g* toegesmolten. Door *l* wordt zuurstof (droog) geleid, daarna bij *l* en *n* eenigermate gesloten met glaswol, en effluve-electriciteit doorgeleid, waardoor de zuurstof ten deele wordt omgezet in ozon; daarmede laat men dan den toestel eenigen tijd staan, ten einde den mogelijk storenden invloed van stofdeeltjes op te heffen. Thans worden eenige liters zuurstof (droog) geleid door den toestel, en ten slotte bij *l* en *n* dicht gesmolten. Alvorens tot gemelde bewerkingen over te gaan, wordt in buis B gedurende eenige dagen geplaatst een buisje met zwavelzuur; bij *g* wordt dan de buis gesloten met een caoutchouc kurk, bij *l* en *n* de buisjes met kapjes.

De zuurstof werd gemaakt uit kaliumchloraat en koperoxyde, en geleid door zwavelzuur en natronkalk, het laatste vooral om sporen van chloor te verwijderen.

Bij de zuurstof kon wel een weinig stikstof wezen. Maar de invloed daarvan zou al spoedig opgeheven zijn, daar steeds met denzelfden gasinhoud werd gewerkt in onzen toestel (zie later). Naar DÉHÉRAIN *) zou stikstof op zuurstof kunnen werken onder den invloed van effluve-electriciteit bij aanwezigheid van water (deze electriciteit bevat namelijk gewoonlijk ten deele genoegzame spanning tot deze synthese). Ozon schijnt niet te reageeren op stikstof (CARIUS en BERTHELOT), waarvan ik mij eenigermate overtuigde, door in een glazen gashouder ozonhoudende zuurstof (van ongeveer 3 pCt.) vermengd met lucht, in gelijke maat te laten staan; na acht dagen was nog ozon aan te toonen.

Grondbeginsel der methode nader ontwikkeld. Veronderstellen we, dat gebruik wordt gemaakt van een toestel zonder effluve-inrichting, en deze werd gevuld met ozonhoudende zuurstof, zooals bij de voorloopige proeven het geval was, waarbij dan tevens met arsenigzuur bepaald werd het gehalte aan ozon. Laat verder de stand van den manometer zijn afgelezen, het ozon daarna langzamerhand worden omgezet in gewone zuurstof, en de waargenomen daling van den manometer (als gevolg der verandering in druk door omzetting van al het ozon in gewone zuurstof) overeenkomen met b^0 C., bij het calibreeren gevonden, dan zal de vermindering in maat der lucht van het manometer-reservoir dezelfde zijn als de vermindering, welke zou worden veroorzaakt (bij constanten druk) door een verlaging in temperatuur van b^0, in geval namelijk de manometer fungeert als luchtthermometer. Deze vermindering in maat van de lucht in den manometer bedraagt dan $\frac{b}{273}$. de oorspronkelijke maat $= 1$ genomen. De *vermindering* in maat der lucht van den manometer moet overeenkomen met de be-

*) *Compt. rend.* 1881, Dec..

trekkelijke *vermeerdering* in maat van het gas in buis B, die dan tevens moet bedragen $\frac{b}{273}$, de oorspronkelijke maat van het gas in B genomen $= 1$. De waarde $\frac{b}{273}$ nu is te beschouwen als de *gevonden* vermeerdering in maat van het gas in buis B. Deze moet dan vergeleken worden met de vermeerdering in maat *berekend*, uitgaande van het oorspronkelijk gehalte aan ozon, dat verondersteld was bekend te zijn. Laat dit gehalte bedragen p milligr. ozon op één liter ozonhoudende zuurstof bij 0^0 en $760^{mm.}$. Neemt men aan, dat het mol. gewone zuurstof is O_2 en ozon O_3, en derhalve ozon een s. g. bezit, dat $1\frac{1}{2}$ maal grooter is dan dat van gewone zuurstof, dan bedraagt het gew. van één liter ozon (bij 0^0 en $760^{mm.}$): $1{,}4298 \times 1\frac{1}{2} = 2{,}1447$ gr.. De p milligr. ozon nemen dan een ruimte in van: $\frac{p}{2144{,}7}$ liter, en bij omzetting in gewone zuurstof: $\frac{p}{2144{,}7} \times 1\frac{1}{2}$ liter (bij 0^0 en $760^{mm.}$). De vermeerdering in maat is derhalve: $\frac{p}{2144{,}7} \times \frac{1}{2} = \frac{p}{4289{,}4}$ liter, berekend op één liter van het oorspronkelijk gasmengsel (bij 0^0 en $70^{mm.}$). De waarde nu van $\frac{p}{4289{,}4}$ is onafhankelijk van den gas-inhoud van buis B, deze laatste $= 1$ genomen, en $\frac{p}{4289{,}4}$ zal kunnen genoemd worden de *berekende* vermeerdering in maat. Eenvoudigheidshalve werd maar aangenomen, dat de vulling van B geschiedde bij 0^0 en $760^{mm.}$; op de werkelijke uitkomsten heeft dit geen invloed.

Alvorens verder te gaan, wenschten we eenigermate te ontwikkelen, in hoeverre deze methode zou kunnen strekken, om langs indirecten weg het s. g. van ozon te leeren kennen. Daartoe worde in de eerste plaats verondersteld, dat het mol. ozon is O_4 en dus het s. g. $= 32$. Bij de bepaling van het gehalte van ozon met arsenigzuur zou dan aangenomen moeten worden, dat O_4 afstaat 2 O ter omzetting van $As_2 O_3$ in $As_2 O_5$ (terwijl van ozon, beschouwd als O_3, noodig zijn 2 O_3 ter omzetting van $As_2 O_3$ in $As_2 O_5$), afgaande op de proef, dat ozonhoudende zuurstof door oxydatiemiddelen, als arsenigzuur enz., *niet* in maat vermindert. Op eenzelfde hoeveelheid gevormd arsenikzuur zal dan *minder* aan ozon in gew. worden gevonden en wel $1\frac{1}{2}$ minder, dan berekend op ozon als O_3, en derhalve: $p \times \frac{2}{3}$ (p behoudt dan de vroeger daaraan gegeven beteekenis). Een liter ozon zou in dat geval wegen: $1{,}4298 \times 2 = 2{,}8596$ gr. (gewone zuurstof steeds beschouwd als O_2) of 2859,6 milligr. $= 2144{,}7 \times \frac{4}{3}$ (het aantal atomen in O_4 en O_3 staat namelijk tot elkander 4 : 3; zie vroeger). Deze $p \times \frac{2}{3}$ milligr. ozon nemen een ruimte in van $\dfrac{p \times \frac{2}{3}}{2144{,}7 \times \frac{4}{3}} p = 4289{,}4$ liter (bij 0^0 en $760^{\text{mm.}}$), en bij overgang in gewone zuurstof van $\dfrac{p}{4289{,}4} \times 2$ liter, zoodat de vermeerdering in maat zou bedragen $\dfrac{p}{4289{,}4}$ liter, dus *evenveel* als werd gevonden daarvan uitgaande, dat het s. g. van ozon is $= 24$ (of het mol. O_3).

Het medegedeelde kan in minder woorden worden uitgedrukt. Eenzelfde hoeveelheid arsenigzuur, b. v. $As_2 O_3$, heeft ter omzetting in $As_2 O_5$ van O_3 *twee* moleculen en van O_4 *één* mol. noodig. Bij overgang van 2 O_3 in 3 O_2 gaan $2 \times 2 = 4$ maten over in $3 \times 2 = 6$ maten; bij omzetting van O_4 in 2 O_2 geven 2 maten ozon aan gewone zuurstof: $2 \times 2 = 4$ maten, terwijl $6 - 4 = 4 - 2$.

Onze methode is derhalve niet meer dan eenigermate een middel ter contrôle, wat betreft het s. g. van ozon.

Grondbeginsel van den effluve-ozonometer nader ontwikkeld. Deze toestel gevuld met zuurstof is en blijft gesloten, en door effluve-electriciteit wordt deze zuurstof gedeeltelijk omgezet in ozon; het gehalte van ozon kan dus met arsenigzuur niet bepaald worden. Daarentegen kan de hoeveelheid ozon door berekening worden gevonden, indien als s. g. van ozon wordt genomen 24 en b bekend is; de *gevonden* vermeerdering in maat moet in dat geval gelijk wezen aan die *berekend*. Vroeger werd verondersteld, dat aanwezig ozon werd ontleed; het is duidelijk, dat even goed het geval kan worden genomen (en dit zal worden gedaan), dat gewone zuurstof overgaat in ozon, want de vermindering in maat bij dit laatste is gelijk aan de vermeerdering in maat bij de ontleding van het ozon. Men heeft alzoo:

$$\frac{b}{272} = \frac{p}{4289{,}4} \ (M).$$

De stijging b (aangegeven in graden) leert dan kennen door formule M de waarde van p of het gehalte in milligr. ozon in een liter genomen bij 0^0 en $760^{\mathrm{mm.}}$; bekend wordt verondersteld met hoeveel verdeelingen één graad overeenstemt. Bij ontleding van ozon wordt dan b kleiner en ten slotte $= o$ (en zoo ook p), indien de manometer den oorspronkelijken stand aanwijst.

Proeven met den effluve-ozonometer.

Bepaling van het vaste punt. De stand van den manometer zou eenzelfde blijven, ingeval namelijk de temperatuur in verschillende deelen van den toestel eenzelfde bleef (zie pag. 194). Maar dit laatste is niet het geval, indien de toestel in de lucht is geplaatst zonder bijzondere voorzorgsmaatregelen, vooral daar de manometer betrekkelijk gevoelig moet zijn. Het scheen dus aangewezen, om den ozonometer te plaatsen in een betrekkelijk groot glazen vat onder water. Aanvankelijk bleef dit vat open, bij latere proeven werd het overdekt (zie later). Het verwarmen had niet weinig bezwaar, want de wand van het vat kon wel niet anders dan van betrekkelijk dik glas zijn; men moest dan ook beginnen met groote omzichtigheid te verwarmen. Onder het vat was een gaskomfoor geplaatst, dat, om gemelde reden, gedurende eenigen tijd bedekt bleef met kopergaas, dat eerst later werd verwijderd. De vloeistof in den manometer klom hierbij aanvankelijk als gevolg van eenig verschil in temperatuur op verschillende plaatsen in den ozonometer, maar na bekoeling was de stand nagenoeg als vóór de verwarming, en bleef hij bij staan tevens ongeveer dezelfde. In de volgende opgave vindt men onder:

a. de temperatuur tot welke werd verhit;
b. het aantal uren daartoe noodig;
c. den stand van den manometer (in zijn verdeeling in strepen) op het oogenblik van het sluiten der gaskraan;
d. het aantal uren na verhitten tot aan het volgend aflezen van den manometer:
e. den stand van den manometer in het laatste geval;
f. de temperatuur van het water, waarin de ozonometer was geplaatst, bij de laatste aflezing van den manometer.

a. Verhit tot.	*b.* Aantal uren.	*c.* Stand man.	*d.* Aantal uren.	*e.* Stand man.	*f.* Temp. water.
40^0	2	108	22	78,5	11^0
50^0	4	133	21	79	12^0

Eerst later kunnen waarnemingen volgen betreffende het vaste punt na ontleding van ozonhoudende zuurstof.

Voorloopige waarnemingen aangaande de ontledingssnelheid van ozon. De eerste proeven werden genomen met waterhoudend ozon (zie vroeger). Hierbij bleek, dat de inhoud van een buis nog na 5 maanden een sterken reuk had naar ozon en de reactie op ozon gaf met ioodkalium (het water daarin aanwezig vertoonde geen reactie op H_2O_2). BERTHELOT *) deed eenige bepalingen met ozonhoudende zuurstof van een bekend gehalte gedaan in verschillende ballons, terwijl van tijd tot tijd de vermindering in ozongehalte werd nagegaan. Deze geleerde deelt daaromtrent het volgende mede:

---

*) *Essai de Mécanique chimique*, Tom. II, pag. 370.

Aanvankelijk		gehalte	2,2	pCt.	ozon	bij	een	temp.	van	12^0
na	24 uren	»	2,1	»	»	»	»	»	»	»
»	5 dagen	»	1,2	»	»	»	»	»	»	»
»	12 »	»	0,4	»	»	»	»	»	»	»

Na 51 dagen waren nauwelijks meer sporen ozon waar te nemen, en na 60 dagen was alles ontleed.

De ontledingssnelheid van ozon in ozonhoudende zuurstof zal afhankelijk zijn van:

1^0. het gehalte der ozonhoudende zuurstof aan ozon;

2^0. de temperatuur;

3^0. den druk waaronder de ontleding geschiedt.

Voorloopig zal de invloed van eenig verschil in druk buiten rekening worden gelaten. Door verschil in temperatuur van verschillende deelen heeft men verschil in druk, bij hoogere temperatuur tevens verhoogden druk buiten en in den manometer, terwijl bij maken en ontleden van ozon verschil in druk moet optreden.

De reeksen van waarnemingen, die in dit gedeelte en andere gedeelten onzer bijdrage zullen voorkomen, hebben in hoofdzaak betrekking op:

1^0. de ontledingssnelheid van ozonhoudende zuurstof van eenzelfde gehalte aan ozon bij verschillende temperaturen, en

2^0. de ontledingssnelheid van ozonhoudende zuurstof met een verschillend gehalte aan ozon bij eenzelfde temperatuur.

Bij ontleding van ozon in onzen toestel heeft men niet te doen met dissociatie, dat alleen het geval zou wezen, indien men bij ontleding door warmte tevens de ozonhoudende zuurstof onderwierp aan effluve-electriciteit, waardoor ook *vorming* van ozon zou kunnen plaats hebben. Ozon is namelijk een endothermische verbinding (de vorming is wel te verstaan endothermisch), derhalve exothermisch wat betreft de wijze van ontleding (waarbij alzoo energy vrij komt).

Het laden van den toestel met ozon geschiedde aldus. Uit het vat, waarin de effluve-ozonometer was geplaatst, wordt eenig water genomen, om de effluve-inrichting boven water te doen komen, en de holte van boven geledigd. Om het effluve-gedeelte der buis wordt een stuk linnen gebonden, dit laatste bevochtigd met verdund zwavelzuur en om het linnen gedaan platinablik. In de effluve-holte wordt verdund zwavelzuur gegoten, daarin platinablik geplaatst en de twee polen in gemeenschap gebracht met den inductie-stroom. Van den oorspronkelijken stand, ongeveer 79 (zie vroeger), klom de manometer betrekkelijk snel tot 147. Men trachtte niet het maximum te erlangen (zie later); integendeel scheen het raadzaam, niet te beginnen met den toestel te veel op de proef te stellen. Bij deze bewerking scheen weder duidelijk uit te komen, dat er niet te veel electriciteit moet worden aangewend in eenzelfden tijd (er werd gebruik gemaakt van een chroomzuur batterij), anders neemt het gehalte van ozon langzaam of niet toe. Na effluve wordt het platinablik verwijderd, het zwavelzuur genomen uit de effluve-holte (het linnen liet men maar zitten; bij latere proeven niet, met 't oog op de helderheid van het water) en wederom de noodige hoeveelheid water in het vat gedaan. Na korten tijd te hebben gestaan, werd afgelezen (dit geschiedde zoowel met een kijkertje als met het ongewapende oog). De manometer was van ongeveer 79 geklommen (zie boven):

					Temp. water.
aanvankelijk			tot	147,5	12°
na	1	uur	»	148	»
»	»	»	»	148	»
»	»	»	»	147,5	»
»	17	»	»	146	11,5.

Hierna werd verhit tot een bepaalde temperatuur, om vervolgens den toestel te laten afkoelen en staan tot den volgende dag; dezelfde bewerking werd dan onder genoegzaam dezelfde omstandigheden herhaald. Nu en dan kwam er een rustdag, aangegeven bij den stand van den manometer (na verwarming en afkoeling) door een sterretje, tevens geplaatst bij een aflezing, omdat toevallig een klein deel van den ozonometer buiten het water was gekomen. De invloed van een en ander zal evenwel betrekkelijk zeer gering zijn geweest (zie wat aangaat de snelheid van ontleding bij gewone temperatuur de volgende en andere reeksen van waarnemingen).

De volgende tabel bevat een opgave van:

a. het getal dagen besteed tot de proef van den aanvang af;

b. den stand van den manometer bij het begin;

c. de temperatuur van het water bij den aanvang;

d. de temperatuur der lucht (eerst later begonnen op te teekenen);

e. de temperatuur waartoe werd verhit;

f. het aantal uren gedurende welke werd verhit;

g. den stand van den manometer op het oogenblik van het *sluiten* der gaskraan (waarna nog eenige stijging intreedt, zie later);

h. het aantal uren van afkoeling tot de aflezing van den manometer;

i. stand van den manometer;

j. zie *c*;

k. zie *d*.

REEKS I.

a. Aantal dagen.	*b.* Stand manometer.	*c.* Temp. water.	*d.* Temp. lucht.	*e.* Verhit tot	*f.* Aantal uren verhit.	*g.* Stand manometer.	*h.* Aantal uren gestaan na verhitten.	*i.* Stand manometer.	*j.* Temp. water.	*k.* Temp. lucht.
	146	11,5°	--	50°	3	297	21	134	11,5°	—
1	134	11,5	—	〃	〃	186	45	122*	9	—
3	122*	9	—	〃	〃	175	21	115,5	9	—
4	115,5	9	—	〃	〃	163	21	110	11,5	—
5	110	11,5	—	〃	〃	149	21	105	12,5	—
6	105	12,5	—	〃	〃	153	21	100	13	—
7	100	13	--	〃	〃	148	21	96	12,5	—
8	96	12,5	—	〃	〃	143	45	91,5	10	—
10	91,5	10	—	〃	〃	139	21	90	11,5	11°
11	90	11,5	11°	〃	〃	138	21	87,7*	12	12,5
12	87,7*	12	12,5	〃	〃	136	21	86	12,5	11
13	86	12,5	11	〃	〃	134	21	84	11,5	10,5
14	84	11,5	10,5	〃	〃	132	21	82	10,5	11
15	82	10,5	11	〃	〃	130	45	80,7*	7,5	7,5
17	80,7*	7,5	7,5	〃	〃	129	21	80,7	10	9
18	80,7	10	9	〃	〃	129	21	80	9,5	10
19	80	9,5	10	〃	〃	128	21	79	9	8
20	79	9	8	〃	〃	127,5	21	78,2	7,5	7
21	78,2	7,5	7	〃	〃	127,5	21	78	7,5	6,5
22	78	7,5	6,5	〃	〃	127,5	21	78	7	6
23	78	7	6	gew. temp.	—	—	24	77,8	5	7
24	77,8	5	7	50°	3	128	21	78	8	7
25	78	8	7	〃	〃	127	21	78,8	9	8
26	78,8									

Zoowel manometer als thermometer werden afgelezen gedurende eenige uren, ten einde eenigermate te leeren kennen het verloop. De volgende opgave betreft een onderdeel van reeks I; de manometer stond op 105 en de thermometer wees aan 12,5⁰. Bij het verhitten werd eerst metaalgaas gedaan op het komfoor, dit gaas er later afgenomen (een en ander geschiedde op gezette tijden), daarna verhit tot 50⁰ en dan de gaskraan gesloten. Er werd waargenomen:

Tijd in uren.	Stand manometer.	Temp. water.
10	105	12,5⁰
10—30	107	19
11	111	23
11—30	116	27,5 (het gaas werd er afgenomen)
12	120	34
12—30	136	44
1	153	50 (de gaskraan werd gesloten).
1—15	159	49
1—45	146	45
2—15	135	41
2—45	129	37
3—15	124	35
3—35	121	33,5.

Het opteekenen werd niet voortgezet. De stand van den manometer was den volgenden dag 100 (er was ozon in de buis).

Nadat de gaskraan gesloten is, heeft nog een rijzing plaats, zooals uit gemelde cijfers blijkt. De manometer rees dus niet minder dan 59 verdeelingen. Bij een lageren aanvankelijken stand is deze rijzing betrekkelijk dezelfde (zie tabel).

Kolom *b* in de tabel van Reeks I bevat noodwendig het voornaamste; het andere dient meer, om met den manometer wat nader in kennis te komen. De manometer is zoo ongeveer teruggekeerd tot den oorspronkelijken stand (zie vroeger: 78,5 en 79). Onder gemelde omstandigheden werden ongeveer 17 dagen, vereischt (er waren 2 dagen, dat de toestel bij gewone temp. stond), tot een genoegzame ontleding van het ozon, hetgeen blijkt uit den eindstand van den manometer. Men mag wel als waarschijnlijk aannemen, dat de toestel geen groote bronnen van fouten heeft. Het behoeft wel niet gezegd, dat in onzuiverheid van de zuurstof, door dissociatie van het zwavelzuur, door de effluve-electriciteit, ongelijkmatige verwarming enz. bronnen van fouten konden gelegen zijn van een dusdanigen aard, dat met den toestel bezwaarlijk quantitatief kon worden gewerkt. Hoe minder het verschil bedraagt tusschen de temperatuur van water en omgeving, des te nauwkeuriger zullen de uitkomsten zeker zijn; in ieder geval zal men er later meer op bedacht zijn te maken, dat de temperatuur en het water (en omgeving) bij de laatste aflezing genoegzaam constant zijn. Voorloopig is het reeds veel, dat het *vaste* punt na effluve en ontleding zoo ongeveer weder werd bereikt, het punt namelijk, dat vroeger alleen bij verhitten na bekoeling was erlangd.

Dat er een paar malen een rustdag in viel, zal op de uitkomst van betrekkelijk geringen invloed wezen, zooals uit latere opgaven kan volgen. Bij andere bepalingen is er echter voor gezorgd, dat werd afgelezen, alvorens men den toestel liet staan bij gewone temp., ten einde geen bezwaar te hebben bij de berekening. Reeks I en zoo ook de volgende reeks moeten in ieder geval meer beschouwd worden als inleiding tot de vele reeksen van waarnemingen, die men later hoopt te verrichten.

De effluve-toestel werd onder genoegzaam dezelfde omstandigheden iederen dag verwarmd, en het schijnt dus geoorloofd aan te nemen, dat de gemiddelde temperatuur ongeveer iederen dag dezelfde was met uitzondering noodwendig van de dagen van rust. *De achtereenvolgende verschillen van kolom a zullen dan overeenkomen met de betrekkelijke vermindering in maat* (en alzoo in gewicht) *van het ozon*, nagenoeg onder overigens gelijke omstandigheden. Dat de vermindering in betrekkelijk gehalte aan ozon niet zoo regelmatig verloopt, is wellicht ten deele toe te schrijven aan het gering gehalte aan ozon (zie later), waardoor de storende invloeden meer uitkomen. Dit gehalte laat zich berekenen door formule *M*, indien 146 wordt genomen als hoogste stand en 79 als overeenkomende met een gehalte aan ozon $= 0$. In dit geval is voor onzen manometer $b = 6{,}09$, waardoor wordt $p = 95{,}6$ milligr. ozon in één liter genomen bij 0^0 en $760^{\mathrm{mm.}}$ (aldus berekend is dit gehalte wellicht iets te hoog, in zooverre de toestel niet werd toegesmolten bij 0^0 en $760^{\mathrm{mm.}}$, noch eenige correctie werd aangebracht). Dit ozon neemt een ruimte in van 0,0445 liter, dat afgetrokken van één liter voor de gewone zuurstof geeft: 0,9555 liter, en berekend op 100 maten van het mengsel:

4,45	maten ozon
95,55	» gewone zuurstof
100	maten van het mengsel.

Dit aangenomen zijnde, komen dan 67 verdeelingen daling van den manometer overeen met een ontleding van 4,45 pCt. ozon. We kunnen ons evenwel houden aan den betrekkelijken stand van den manometer om reden reeds boven vermeld en daarenboven door deze berekening nog nader opgehelderd. In de volgende tabel, ontleend aan Reeks I, is toch duidelijkheidshalve onder A opgegeven het pCt.-gehalte in maat aan ozon, onder B de afname in pCt.-gehalte en onder C het aantal verdeelingen van den manometer hiermede overeenstemmende.

A	B	C
4,45	0,79	12
3,66*	0,79*	12*
2,87	0,42	6,5
2,44	0,36	5,5
2,08	0,33	5

A	B	C
1,75	0,33	5
1,42*	0,26*	4*
1,16	0,29	4,5
0,87	0,09	1,5
0,78*	0,15*	2,3*
0,63	0,11	1,7
0,52*	0,23*	2*
0,39	0,13	2
0,26	0,09	1,3
0,17	0	0
0,17	0,04	0,7
0,13	0,06	1 .

Deze getallen geven zoo den indruk, alsof de ontledingssnelheid van ozon in rechte reden staat tot het gehalte aan ozon, onder overigens gelijke omstandigheden. Hiervan uitgaande, zullen we daaraan de waarneming toetsen. De beteekenis der getallen onder A, B en C met betrekking tot elkander, komt hierop neder, om een voorbeeld te kiezen, dat bij een gehalte van 4,45 pCt. (in maat) na gedurende 24 uren (waarbij de ozonometer tijdelijk werd verhit tot 50^0) het gehalte is gedaald met 0,79 pCt. welke daling overeenkomt met die van 12 verdeelingen van den manometer $\left(4,45 : \frac{x}{0,97} = 67 : 12\right)$. Nu kan worden *berekend*, met welke vermindering dan zou overeenstemmen een gehalte van 2,08 pCt. en 1,16 pCt. ozon, en dit worden vergeleken met de betreffende waarden door de proef gevonden:

A	B	
	Gevonden.	Berekend.
4,45	0,79	0,79
2,08	0,33	0,36
1,16	0,26	0,20.

Mocht gemelde wet bestaan, dan zou het vergund wezen de *som* te nemen van eenige achtereenvolgende dalingen, duidelijk gemaakt door het volgende voorbeeld:

0,79	0,33
0,79	0,33
0,42	0,26
0,36	0,29
2,36	1,21.

En inderdaad heeft men: $4{,}45 : 2{,}08 = 2{,}36 : \frac{x}{1{,}1}$.

Laat de som nog wat grooter worden genomen:

0,79	0,26
0,79	0,29
0,42	0,09
0,36	0,15
0,33	0,11
0,33	0,13
3,02	1,03.

Berekend moet worden erlangd: $4{,}45 : 1{,}42 = 3{,}02 : \frac{x}{0{,}94}$.

In verdeelingen van den manometer gerekend (dat volkomen op hetzelfde neêrkomt, zie vroeger) heeft men in het laatste geval, daar: $12 + 12 + 6{,}5 + 5{,}5 + 5 + 5 = 46$ en $4 + 4{,}5 + 1{,}5 + 2{,}3 + 1{,}7 + 2 = 16$ is: $146 - 79 : 100 - 79 = 46 : \frac{x}{14{,}4}$, dus een verschil van: $16 - 14{,}4 = 1{,}6$ verdeeling.

Onder nagenoeg dezelfde omstandigheden werd Reeks II der bepalingen gedaan. Na effluve liet men den ozonometer een nacht staan. Het glazen vat werd bedekt met twee halfronde koperen platen, voorzien van buiten van een dikke wollen stof. Voorloopig een enkel woord over de toename van het ozongehalte bij effluve. Hierbij komt een goed deel van den ozonometer buiten het water, vandaar dat later na onderdompeling de stand van den manometer zeer merkbaar verandert (er is dan namelijk meer aanleiding tot verschil in temperatuur). De inductie-stroom in den aanvang betrekkelijk zwak, werd eerst tegen het einde versterkt, ten einde daardoor meer ozon te erlangen, dat echter zoo goed als niet gelukte:

Tijd in uren.	Stand manometer, dus stijging.		
—	79	—	
0u—30mm.	87	8	verdeelingen
»	105	18	»
»	117	12	»
»	125	8	»
»	133	8	»
»	148	15	»
»	149	1	»
»	151	2	»

Na indompeling kwam de manometer eerst te staan op 162; den volgenden dag was de stand 160. Er werd aangevangen met den ozonometer vele dagen te laten staan bij gewone temperatuur, daarna werd verwarmd tot 50^0 (eenmaal tot 53^0) als bij Reeks I, waarna men den toestel andermaal geruimen tijd liet staan bij gewone temperatuur enz., zooals uit de volgende tabel kan blijken.

REEKS II.

a. Aantal dagen.	*b.* Stand manometer.	*c.* Temp. water.	*d.* Temp. lucht.	*e.* Verhit tot	*f.* Aantal uren verhit.	*g.* Stand manometer.	*h.* Aantal uren gestaan.	*i.* Stand manometer.	*j.* Temp. water.	*k.* Temp. lucht.
	160	8°	7°	gew. temp.	—	—	24	157,5	6,5°	6°
1	157,5	6,5	6	〃	—	—	24	157	8	7
2	157	8	7	〃	—	—	24	156	8	8
3	156	8	8	〃	—	—	24	154,8	7	6,5
4	154,8	7	6,5	〃	—	—	24	154	7,5	7
5	154	7,5	7	〃	—	—	24	152,8	7,5	7
6	152,8	7,5	7	〃	—	—	24	151	7	6
11	151	7	6	〃	—	—	120	146	4	5
12	146	4	5	50°	4	198	20	132,5	7	6
13	132,5	7	6	〃	3^{u}—30^{m}	186	20^{u}—30^{m}	122	8	7
14	122	8	7	〃	〃	173	〃	112,8	8,5	7,5
15	112,8	8,5	7,5	〃	〃	163,5	〃	106	9	10
16	106	9	10	gew. temp.	—	—	48	105	8	8,5
18	105	8	8,5	〃	—	—	24	105	10	10
19	105	10	10	〃	—	—	24	105	11	11
20	105	11	11	〃	—	—	24	105	11,5	11,5
21	105	11,5	11,5	〃	—	—	24	104,5	11,5	11
22	104,5	11,5	11	〃	—	—	24	103,8	11,5	12
23	103,8	11,5	12	〃	—	—	48	102	10	10
25	102	10	10	〃	—	—	24	102	11	11
26	102	11	11	〃	—	—	24	101,2	11	11,
27	101,2	11	11,5	〃	—	—	24	101	11	11
28	101	11	11	50°	3^{u}—30^{m}	149	20^{u}—30^{m}	95,8	12,5	12
29	95,8	12,5	12	〃	〃	143,5	〃	92,2	13	12,
30	92,2	13	12,5	gew. temp.	—	—	48	92,2	12	12
32	92,2	12	12	53°	3^{u}—30^{m}	148	20^{u}—30^{m}	89	13	12,
33	89	13	12,5	50	3	136,5	21	87,8	14	14
34	87,8	14	14	50	3	134	20^{u}—30^{m}	87,5	15,5	15
35	87,5									

Ten einde den invloed *eenigermate* te leeren kennen van eenig verschil in de temperatuur der lucht op die van het water in het vat (met effluve-ozonometer), van de temperatuur van het water op den manometer, en tevens de mate van verandering der temperatunr van het water, diene de volgende opgave (betrekking hebbende op een onderdeel van Reeks II):

Tijd in uren.	Manometer.	Temp. water.	Temp. lucht.
9^u 's morgens	157,5	6,5	6
10^u—30^m	157,5	6,5	9,5
11—30	157,5	7	10,5
1	157,2	7,5	11,5
1—30	157	8	11
2—30	157,2	8	10,5
4	157	8,5	12,5
9^u 's morgens volgenden dag	157	8	7
10—30	157	8	10,5
11	157	8	10,5
11—30	157	8	10,5
12	157	8,5	12,5
1	157	8,5	12,5
2	157	9	11,5
9^u 's morgens volgenden dag	156	8	8

Hierbij is niet te vergeten, dat verandering in stand van den manometer ten deele is toe te schrijven aan ontleding van eenig ozon.

De uitkomsten van Reeks II komen in hoofdzaak neder op het volgende (zie vroeger).

A.	B.	C.	
5,38 vol. proc.	0,16 vol. proc.	2,5 verdeelingen	12 dagen gewone temperatuur.
5,22 "	0,03 "	0,5 "	
5,19 "	0,06 "	1,0 "	
5,13 "	0,07 "	1,2 "	
5,06 "	0,05 "	0,8 "	
5,01 "	0,07 "	1,2 "	
4,94 "	0,11 "	1,8 "	
4,83 "	0,33 "	5 " (vijf dagen)	

A.	B.	C.	
4,50 vol. proc.	0,89 vol. proc.	13,5 verdeelingen	tot 50° verhit
3,61 〃	0,69 〃	10,5 〃	
2,92 〃	0,61 〃	9,2 〃	
2,31 〃	0,45 〃	6,8 〃	
1,86 〃	0,06 〃	1 〃	(twee dagen)
1,80 〃	0 〃	0 〃	12 dagen gewone temperatuur.
1,80 〃	0 〃	0 〃	
1,80 〃	0 〃	0 〃	
1,80 〃	0,03 〃	0,5 〃	
1,77 〃	0,04 〃	0,7 〃	
1,73 〃	0,11 〃	1,8 〃	(twee dagen)
1,62 〃	0 〃	0 〃	
1,62 〃	0,53 〃	0,8 〃	
1,09 〃	0,13 〃	0,2 〃	
0,96 〃	0,34 〃	5,2 〃	tot 50° verhit.
0,62 〃	0,23 〃	3,6 〃	
0,39 〃	0 〃	0 〃	2 dagen gewone temp.
0,39 〃	0,21 〃	3,2 〃	was gestegen tot 53°
0,18 〃	0,07 〃	1,2 〃	verhit tot 50°
0,11 〃	0,01 〃	0,3 〃	

Bij gewone temperatuur bedroeg de daling van den manometer aanvankelijk in 12 dagen: $2,5 + 0,5 + 1,0 + 1,2 + 0,8 + 1,2 + 1,8 + 5 = 14$, en later in eenzelfden tijd: $1,0 + 0,5 + 0,7 + 1,8 + 0,8 + 0,2 = 5$, terwijl naar gemelde evenredigheid dit zou hebben moeten bedragen 4,6 verdeelingen $\left(160-79 : 106-79 = 81 : \frac{x}{4,6}\right)$, dat dus vrij wel sluit. Gedurende de twee eerste dagen van verwarmen had een daling plaats van $13,5 + 10,5 = 24$ en daarna van $9,2 + 6,8 = 16$ verdeelingen, terwijl de berekening geeft 15,4 verdeelingen

$\left(146 - 79 : 122 - 79 = 24 : \frac{x}{15,4}\right)$. Wordt het gehalte van ozon betrekkelijk laag, dan is deze overeenkomst minder goed, wellicht daar in dat geval de storingen te groot zijn.

Uit het voorgaande zou dan met eenige waarschijnlijkheid volgen, dat in geval de ontledingssnelheid voor een zeker aantal moleculen ozon in een onbepaalde maat van een gasmengsel van ozon en gewone zuurstof is $= g$, deze voor m maal meer moleculen ozon, onder overigens gelijke omstandigheden, zal wezen :

$$s = mg.$$

Uit den aard der zaak kan het medegedeelde niet meer worden beschouwd dan een inleiding tot dit belangrijke onderzoek, waarmede nog geruimen tijd zal worden voortgegaan.

---

*De effluve-ozonometer *) voor het onderwijs.* Een onmisbare proef bij het onderricht in de scheikunde is zeker wel het quantitatief omzetten van gewone zuurstof in ozon en omgekeerd. Het laatste vereischt evenwel veel tijd, zooals genoegzaam blijkt uit de waarnemingen gedaan betreffende de ontledingssnelheid van ozon, en dit bracht er mij toe door de eigenschap van ozon van te worden ontleed door platinazwart, om in den ozonometer te doen een fleschje gedeeltelijk gevuld met platinazwart en voorzien van een glazen knikker, die bij een kleine beweging het fleschje opent of sluit. Voor het onderwijs is het tevens zeer leerzaam een effluvetoestel te vullen met eenig ander gas. Wij kozen tot dit doel chloor, dat de bekende eigenschap van zuurstof niet bezit (mogelijk is dit wel het geval bij een *lage* temperatuur). Het behoeft wel niet gezegd, dat met den effluvetoestel nog vele andere proeven kunnen genomen worden, maar voor vele is het dan beter van een meer eenvoudige

---

*) Deze toestel is te verkrijgen bij den Heer H. J. HARTING-BANK, Phys. instrumentmaker te Utrecht.

inrichting gebruik te maken en wel van *glazen buizen aan het eene einde open en het andere voorzien van een effluve-inrichting* *), waarmede tal van leerzame proeven kunnen gedaan worden, zooals die betreffende de verhouding van ozon tot stikstof, van ozon tegenover kwik en zoo meer.

Utrecht, 26 Mei 1883.

---

*) Eveneens te bekomen bij den Heer H.—B..

DE DOOR HALL ONTDEKTE WERKING

VAN EEN

MAGNEET OP EEN ELECTRISCHEN STROOM

EN DE

ELECTROMAGNETISCHE DRAAIING VAN HET POLARISATIEVLAK VAN HET LICHT,

DOOR

H. A. LORENTZ.

§ 1. Uitgaande van de overweging, dat wellicht een magneet niet alleen op den drager van een electrischen stroom zou werken, maar ook rechtstreeks op den stroom zelf in een geleider, deed HALL te Baltimore in 1879 eene merkwaardige ontdekking *). Na eenige proeven, die tot geen resultaat leidden, plaatste hij tusschen de beide polen van een sterken electromagneet een dun goudblad, op eene plaat spiegelglas bevestigd, zoo, dat het loodrecht stond op de magnetische krachtlijnen. Door het goudblad, dat de gedaante had van een rechthoek, ging van de eene korte zijde naar de andere de stroom van eenige elementen van BUNSEN (de *hoofdstroom*), en twee punten, op de lange zijden tegenover elkander liggende, waren met een gevoeligen galvanometer verbonden.

*) Eene eerste verhandeling in *American Journal of Science a. Arts* XIX, p. 200 en *Phil. Mag.* 5th Series, IX, p. 225; eene tweede in *American Journal*, XX, p. 161 en *Phil. Mag.* X, p. 301.

Vóórdat de electromagneet werkte waren deze beide punten zoo bepaald, dat zij aequipotentiaal waren en dat dus bij het sluiten of openen van den hoofdstroom geene standverandering van de galvanometernaald werd waargenomen. Werd nu een stroom in de windingen van den electromagneet toegelaten, dan volgde eene afwijking der naald, die bleef bestaan, zoolang de magnetische kracht bestond en dus niet aan eene inductiewerking kon worden toegeschreven. M. a. w., zoodra het goudblad door den hoofdstroom wordt doorloopen en in een magnetisch veld loodrecht op de krachtlijnen is geplaatst, treedt eene electromotorische kracht in transversale richting op, loodrecht zoowel op de richting van den hoofdstroom als op die der magnetiseerende kracht.

§ 2. Het verschijnsel was in elk geval slechts zwak; de transversale electromotorische kracht wisselde bij verschillende proeven af tusschen $^1/_{3000}$ en $^1/_{6500}$ van de electromotorische kracht die, als oorzaak van den hoofdstroom, in longitudinale richting werkt. Bovendien bleek het, dat het verschijnsel alleen in zeer dunne metaalbladen kon worden waargenomen, en het materiaal was dus voor nauwkeurige metingen niet geschikt. Toch gelukte het HALL, eenige quantitatieve bepalingen te geven, waardoor kon worden aangetoond, dat in een zelfde metaalblad de transversale electromotorische kracht evenredig is zoowel met de intensiteit van den hoofdstroom (of met de electromotorische kracht, die dezen onderhoudt) als met de sterkte van het magnetisch veld. Door latere metingen van v. ETTINGSHAUSEN *) werd dit bevestigd en ook wat de grootte van het effect betreft stemmen deze proeven voldoende met die van HALL overeen. Zoo vond v. ETTINGSHAUSEN voor de verhouding der electromotorische kracht in transversale en in longitudinale richting in verschillende gevallen $^1/_{7700}$ en $^1/_{2500}$.

HALL heeft behalve met goud ook met zilver, ijzer, nik-

---

*) *Wiener Sitzungsberichte*, 2th Abth. LXXXI, p. 441.

kel, platina en tin gewerkt en daarin hetzelfde verschijnsel waargenomen, met eene enkele afwijking, wat de richting daarvan betreft.

§ 3. Deze laatste kan in goud op de volgende wijze worden aangegeven. Wanneer men op de gewone wijze de richting van een stroom opvat als die, waarin de positieve electriciteit stroomt, dan zal, wanneer men de richting van den hoofdstroom over een hoek van 90^0 doet draaien in den zin, waarin de stroom de windingen van den electromagneet doorloopt, de richting der transversale electromotorische kracht worden verkregen. Zijn, zooals bij de proeven van HALL, de beide tegenover elkaâr gelegen punten der lange zijden van het metaalblad met den galvanometer verbonden, dan bepaalt deze regel de richting van den in dit instrument waargenomen stroom. Bestaat de verbinding met den galvanometer niet, dan zal natuurlijk de transversale electromotorische kracht zoolang eene opeenhooping van positieve electriciteit aan den eenen, van negatieve aan den anderen rand van het metaalblad te weeg brengen, tot de daaruit voortvloeiende electromotorische kracht evenwicht maakt met de van den magneet afkomstige. In dit geval wordt door den gegeven regel de richting bepaald van de negatieve naar de positieve zijde van het metaalblad.

Dezelfde regel als voor goud geldt ook voor de andere door HALL onderzochte metalen, met uitzondering van het ijzer; bij dit metaal vertoont zich het verschijnsel in omgekeerde richting.

§ 4. Zonder eene *verklaring* van de beschreven werking te willen geven kunnen wij die in verband beschouwen met eenige algemeene stellingen omtrent den aard der natuurkrachten.

Eene eerste dergelijke stelling heeft betrekking op de beweging van twee stoffelijke stelsels A en A', die als elkanders spiegelbeeld ten opzichte van een vast vlak kunnen beschouwd worden. Men vatte dit zoo op, dat stoffelijke punten van A en A', die elkaârs spiegelbeeld zijn, ook van denzelfden physischen aard zijn, en dat de punten van A volgens dezelfde wetten op elkander werken als die van A'.

De bedoelde stelling zegt dan, dat indien in A (onder den invloed der inwendige krachten) een zekere bewegingstoestand bestaat, in A' een bewegingstoestand mogelijk is, waarbij A' het spiegelbeeld van *A blijft.* Alle verschijnselen, die wij kennen, pleiten voor dit theorema; het zou alleen niet waar zijn, wanneer men gelijktijdig electrische en magnetische stoffen wilde onderstellen. Zoodra men echter de theorie van AMPÈRE omtrent het wezen van het magnetisme aanneemt wordt het spiegelbeeld van een magneetpool een tegengestelde pool en dan kan de stelling ook op het gebied van het electromagnetisme worden aangenomen.

Denkt men zich nu bij de proef van HALL van den magnetiseerenden stroom, den hoofdstroom en den stroom in de galvanometergeleiding (of, als die ontbreekt, van de vrije electriciteit aan de randen van het metaalblad) de spiegelbeelden genomen, dan verkrijgt men eene tweede proef, waarbij, zooals men gemakkelijk inziet, de richting van het verschijnsel op nieuw door den regel der vorige § bepaald wordt. Men heeft zich nu bij de toepassing van deze stelling der spiegelbeelden voor te stellen, dat van alle stoffelijke punten tot in de kleinste bijzonderheden het spiegelbeeld wordt genomen en het blijkt, dat het aldus verkregen spiegelbeeld van een stuk metaal geheel dezelfde eigenschappen (althans voor zoover zij hier in aanmerking komen) heeft als dat metaal zelf.

Gelijk men weet kan niet van alle lichamen dit laatste gezegd worden; er bestaan stoffen, waarvan het spiegelbeeld andere eigenschappen bezit dan de stof zelve, en waarvan de samenstellende deelen zoodanige rangschikking moeten bezitten dat ook al wordt van elk stoffelijk punt het spiegelbeeld genomen, het geheele beeld niet *congruent* maar alleen *symmetrisch* is met het oorspronkelijke. Dit zijn de stoffen, die de *natuurlijke* draaiing van het polarisatievlak vertoonen, want uit de stelling, in het begin dezer § vermeld, volgt gemakkelijk, dat het spiegelbeeld eener rechts draaiende stof links draaiend moet zijn. In stoffen als rechts- en linksdraaiend bergkristal heeft men werkelijk lichamen, die aldus, wat hun inwendigen bouw betreft, gelijk- en gelijkvormig bij tegenoverstand moeten zijn, een onderscheid, dat zich dan ook in den uitwendigen kristalvorm openbaart. Uit de boven meêgedeelde redeneering blijkt nu, dat in elk geval het door Hall waargenomen verschijnsel geheel onafhankelijk is van de oorzaken, die de natuurlijke draaiing van het polarisatievlak te weeg brengen.

§ 5. Eene tweede stelling is deze, dat, indien in eenig stoffelijk stelsel de snelheid van elk punt plotseling omgekeerd wordt, geheel dezelfde banen met dezelfde snelheden doorloopen zullen worden als voor die omkeering, alleen in tegengestelde richting. Deze stelling kan slechts waar zijn voor bepaalde kategoriën van krachten. Zonder nu te onderzoeken, of alle bekende natuurkrachten tot die kategoriën behooren, merken wij hier op, dat in de electriciteitsleer het genoemde theorema doorgaat, wanneer men een electrostatischen toestand als werkelijken toestand van rust opvat, een electrischen stroom daarentegen als een bewegingsverschijnsel, bij welks omkeering de richting van den stroom wordt omgekeerd, en wanneer men slechts krachten onderstelt als aantrekkingen en afstootingen, die functiën van den afstand zijn of door de wet van Weber of die van Clausius bepaald worden, of eindelijk drukkingen en spanningen, die niet van de snelheden afhangen.

Verbeelden wij ons nu de proef van Hall zoo ingericht, dat geene verbinding van de randen der plaat met den galvanometer bestaat en dat men dus aan die randen eene opeenhooping van vrije electriciteit heeft. Keeren wij dan alle bewegingsrichtingen om, dan verkrijgt de hoofdstroom tegengestelde richting, de magneet tegengestelde polariteit, terwijl aan de electrostatische lading van het metaalblad niets verandert. Men verkrijgt derhalve een toestand, die evenzeer als de oorspronkelijke aan den regel van § 3 voldoet; deze laatste toch brengt meê, dat bij gelijktijdige omkeering van de magneetpolen en van den hoofdstroom het effect hetzelfde teeken behoudt. Wij kunnen derhalve besluiten, dat het door Hall waargenomen verschijnsel met de in deze § besproken stelling geheel in overeenstemming is.

Neemt men deze stelling aan, dan leert eene eenvoudige redeneering, dat eene andere proef, die HALL met een isolator nam *), tot geen resultaat kon leiden. Van uit de vier zijden van eene plaat spiegelglas waren kanalen geboord evenwijdig aan de zijvlakken, welke kanalen elkander in het midden bijna ontmoetten, zoodat daar slechts een klein deel van de glasmassa ertusschen overbleef. In de vier kanalen waren goed geisoleerde electroden aangebracht en terwijl twee daarvan, die tegenover elkaâr stonden, met de bekleedselen van een geladen condensator waren verbonden, stonden de beide anderen in verband met een quadrant-electrometer. De glasplaat was, evenals vroeger het metaalblad, tusschen de polen van een electromagneet geplaatst en het bleek nu, dat eene omkeering dier polen geen invloed had op de aanwijzing van den electrometer. HALL had verwacht, dat dit misschien wel het geval zou zijn, als een gevolg hiervan, dat even als in het metaal de stroomlijnen, hier de krachtlijnen gedraaid konden worden, hetgeen inderdaad eene verandering van het potentiaalverschil tusschen de twee met den electrometer verbonden electroden ten gevolge zou hebben.

Wanneer intusschen eene dergelijke werking bestond, zouden bij eene omkeering van alle bewegingsrichtingen in het geheele systeem alleen de magneetpolen verwisseld worden, maar in de glasplaat, waar alles in rust is, zou niets veranderen. Daar het nu onmogelijk is, dat bij omkeering der magneetpolen de werking dezelfde blijft, moet òf de stelling, die wij hier bespraken, onjuist zijn, of het resultaat, dat HALL zocht, is onmogelijk.

§ 6. Bij vele electrische verschijnselen kan worden aangenomen — en dit is de derde stelling, die wij bedoelden — dat positieve en negatieve electriciteit (wij vatten die hierbij als stoffen op) zich op dezelfde wijze gedragen, dus niet alleen dezelfde krachten van gelijknamige of ongelijknamige electriciteit, maar ook van de zijde der gewone stof ondervinden. De meeste electrostatische verschijnselen zijn hiermede

*) *American Journal* XX, *Phil. Mag.* X, p. 304.

in overeenstemming en hetzelfde geldt ook van vele werkingen, die zich bij den galvanischen stroom voordoen; het is vaak onverschillig, of men dezen laatsten als eene beweging van positieve electriciteit naar de eene, dan wel van negatieve naar de andere zijde opvat. Dat intusschen de genoemde stelling niet in het algemeen juist is, wordt o. a. door de ontladingsverschijnselen, de electrolyse en door het potentiaalverschil bij contact bewezen. Het verdient nu opmerking, dat de proef van Hall eveneens tegen de stelling pleit. Immers, wanneer deze juist was, zou men uit elken bewegingstoestand van electrische deeltjes in een systeem van lichamen een tweeden, eveneens mogelijken toestand kunnen afleiden, door eenvoudig elk positief electrisch deeltje door een even groot negatief deeltje te vervangen en omgekeerd; daarbij zou uit een electrischen stroom een tegengestelde stroom ontstaan. Past men dit toe op de proef van Hall in den vorm b. v., waarin aan de randen van het metaalblad eene opeenhooping van vrije electriciteit plaats heeft, dan zou men bij eene omkeering van de magneetpolen en van den hoofdstroom ook eene tegengestelde uitwerking verkrijgen, terwijl in werkelijkheid het effect daarbij hetzelfde teeken behoudt.

Voor alle theoriën derhalve, die de verschijnselen uit bewegingen van electrische deeltjes trachten te verklaren, volgt uit de proef van Hall, dat òf in een electrischen stroom de beide electriciteiten zich niet op dezelfde wijze bewegen (zoodat eene verwisseling van beide iets doet ontstaan, dat geen gewone electrische stroom is), òf dat er eenig ander onderscheid in het gedrag der positieve en negatieve electriciteit bestaan moet.

Toen Boltzmann *) korten tijd na het bekend worden der proeven van Hall daarop eene methode baseerde, om de snelheid der electriciteit in een galvanischen stroom te bepalen, nam hij dan ook aan, dat zich in het metaalblad slechts de eene electriciteit verplaatst. Tegen die hypothese

*) *Phil. Mag.* IX. p. 308.

levert, zooals HALL opmerkte *), de richting van het verschijnsel in ijzer, tegengesteld aan die in de andere metalen, een belangrijk bezwaar op. Wil men echter de onderstelling van BOLTZMANN niet aannemen, een of ander onderscheid tusschen de beide electriciteiten zal steeds noodig zijn om de proef van HALL te verklaren.

§ 7. Zonder eene dergelijke *verklaring* te beproeven kan men van het verschijnsel eene *wiskundige beschrijving* geven. HOPKINSON †) merkte op, dat die beschrijving reeds bevat is in een stel vergelijkingen, dat MAXWELL vroeger had afgeleid §).

Inderdaad kan alles, wat HALL waarnam, worden berekend, wanneer men aan de vergelijkingen

$$X = \varkappa u, \quad Y = \varkappa v, \quad Z = \varkappa w,$$

die in gewone gevallen het verband tusschen de electromotorische kracht (X, Y, Z) en den stroom (u, v, w) uitdrukken, eene kleine wijziging aanbrengt, wanneer men nl. voor een geleider, die in een homogeen magnetisch veld met de krachtlijnen in de richting der z-as geplaatst is, stelt:

$$X = \varkappa u + h v, \quad Y = \varkappa v - h u, \quad Z = \varkappa w \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Daarbij moet dan (X, Y, Z) de electromotorische kracht zijn, die onafhankelijk van het verschijnsel van HALL bestaat (dus uit electrostatische werkingen en inductie voortspruit), terwijl h een coëfficient is, evenredig met de magnetische kracht.

Men verkrijgt de vergelijkingen (1) gemakkelijk, wanneer men in aanmerking neemt, dat de totale electromotorische kracht in de richting der x-as bestaat uit X en uit de electromotorische kracht, die volgens den regel van § 3

---

*) *American Journal*, XX. p. 52 en *Phil. Mag.*, X. p. 136.

†) *Phil. Mag.*, X. p. 430.

§) *Electricity a. Magnetism*, I. p. 349.

aan den »hoofdstroom" v en aan de magnetische kracht haar ontstaan te danken heeft. Deze *bijkomende* electromotorische kracht kan door $h\,v$ worden voorgesteld, en de geheele kracht, waaraan de stroom u evenredig moet zijn, wordt dan $X \pm h\,v$, terwijl men op dezelfde wijze evenwijdig aan de y-as de electromotorische kracht $Y \mp h\,u$ heeft. De keus der teekens hangt samen met den aard van het gebezigde assenstelsel. Wij zullen aannemen, dat eene wenteling van de positieve x- naar de positieve y-as (over een rechten hoek) voor een beschouwer, die aan de zijde der positieve z-as geplaatst is, met de beweging der wijzers van een uurwerk overeenstemt. Dan volgt uit het in § 3 gezegde, dat in (1) h voor ijzer positief, voor de andere onderzochte metalen negatief is.

Overigens volgt uit de zwakke werkingen, die bij de proef van Hall werden waargenomen, dat zelfs in een zeer sterk magnetisch veld, de grootheid h zeer klein is in vergelijking met $\varkappa$. Wij zullen dan ook bij alle volgende berekeningen de tweede en hoogere machten van h verwaarloozen.

§ 8. De vergelijkingen (1) kunnen vooreerst worden gebezigd, om hetgeen Hall waarnam in bijzonderheden na te gaan. Daarbij merken wij op, dat wij in het dunne metaalblad, dat loodrecht op de z-as geplaatst is, Z en $w = 0$ mogen stellen, en dus alleen met de beide eerste vergelijkingen te doen hebben. Valt nu de x-as samen met de lengte van het metaalblad, dan is u de hoofdstroom, en indien de randen *niet* met den galvanometer verbonden zijn, treedt evenwicht in, wanneer $v = 0$, en dus gelijktijdig

$$X = \varkappa\, u \quad \text{en} \quad Y = -\, h\, u$$

is. De grootheid

$$Y = -\frac{h}{\varkappa} X$$

bepaalt de electromotorische kracht, die in den evenwichtstoestand ten gevolge van de electrostatische lading der randen bestaat en, als b de breedte der plaat is, wordt het potentiaalverschil tusschen de randen

$$\frac{h}{\varkappa} b X.$$

De intensiteit i echter van den stroom, die in den galvanometer kan worden waargenomen, wordt gegeven door

$$i = \frac{h}{\varkappa} \cdot \frac{b X}{r},$$

als r de weerstand van de galvanometergeleiding is.

Wanneer wij de intensiteit van den hoofdstroom I en de dikte van het metaalblad δ noemen, is

$$X = \frac{\varkappa I}{b \delta},$$

dus

$$i = \frac{h I}{\delta r}.$$

In plaats van I kunnen wij hier de electromotorische kracht E invoeren van de batterij, die ons den hoofdstroom levert. Verstaan wij onder α eene grootheid, die van de lengte en breedte van het metaalblad en van de plaats der electroden afhangt, dan kan voor den weêrstand, dien het metaalplaatje aan den hoofdstroom biedt, worden geschreven $\frac{\alpha}{\delta}$, zoodat, wanneer R de weêrstand in den hoofdstroom buiten het metaalblad is,

$$I = \frac{E}{R + \frac{\alpha}{\delta}}$$

wordt. Op dezelfde wijze is

$$r = r_g + \frac{\alpha'}{\delta},$$

wanneer r_g de weerstand is in de galvanometergeleiding buiten het metaalblad en α' eene dergelijke grootheid als α. De formule

$$i = \frac{h\,E}{\delta\left(R + \frac{\alpha}{\delta}\right)\left(r_g + \frac{\alpha'}{\delta}\right)}$$

doet ons zien, hoe de stroom in den galvanometer met de dikte δ verandert. Die stroom wordt een maximum, wanneer

$$\frac{\alpha}{\delta}\frac{\alpha'}{\delta} = R\,r_g$$

is, wanneer dus het product van de beide weerstanden van het metaalblad, die in aanmerking komen, gelijk is aan dat der uitwendige weerstanden. Natuurlijk vereischt dit een zeer kleine dikte.

§ 9. Wij onderzoeken nog nader, in hoeverre in den loop van electrische stroomen door de termen $+\,h\,v$ en $-\,h\,u$, die in de vergelijkingen (1) voorkomen, eene wijziging kan worden teweeggebracht. Bepalen wij ons tot een dun metaalblad van willekeurigen vorm, langs het $x\,y$-vlak geplaatst, en begrensd deels door randen, waar geene electriciteit kan uit- of intreden (*vrije* randen), deels door randen (of randdeelen), waar electriciteit wordt aan- of afgevoerd, en die daardoor, zooals wij zullen aannemen, elk op eene constante potentiaal gehouden worden. Laat er twee dergelijke *electroden* s_1 en s_2 zijn, met de potentialen φ_1 en φ_2, en trachten wij de stroomverdeeling in de plaat te bepalen.

Wanneer er geene magnetische kracht werkt, hebben wij, de potentiaalfunctie in een willekeurig punt φ noemende,

$$u = -\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial \varphi}{\partial x},\quad v = -\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial \varphi}{\partial y} \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

en in den stationairen toestand

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

terwijl aan de electroden

$$\varphi = \varphi_1 \text{ en } \varphi = \varphi_2$$

en aan den vrijen rand

$$u \cos \alpha + v \sin \alpha = 0,$$

of

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$$

moet zijn. Hierbij stelt n de normaal aan den omtrek der plaat voor, en α den hoek $(n\, x)$. Wij denken ons de normaal naar buiten getrokken.

Is φ uit de verschillende voorwaarden bepaald, dan wordt de hoeveelheid electriciteit, die per tijdseenheid van s_1 op de plaat, en van deze op s_2, overgaat, (wij stellen $\varphi_1 > \varphi_2$) gegeven door

$$e = -\delta \int (u \cos \alpha + v \sin \alpha)\, d\, s_1,$$

waar langs de geheele electrode moet geïntegreerd worden.

Onderstellen wij thans, dat eene magnetische kracht werkt en dus de vergelijkingen (1) gelden. Wanneer wij aan φ, u, v de vroegere beteekenis blijven toekennen, kunnen wij in dit nieuwe vraagstuk voor de potentiaalfunctie en de stroomcomponenten schrijven $\varphi + \varphi'$, $u + u'$, $v + v'$; φ', u', v' zijn dan kleine grootheden evenals h.

De eerste der vergelijkingen (1) geeft nu

$$-\frac{\partial (\varphi + \varphi')}{\partial x} = \varkappa (u + u') + h (v + v'),$$

of, wanneer men grootheden van de tweede orde weglaat en op (2) let,

$$u' = -\frac{1}{\varkappa} \frac{\partial \varphi'}{\partial x} + \frac{h}{\varkappa^2} \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

terwijl eveneens

$$v' = -\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial \varphi'}{\partial y} - \frac{h}{\varkappa^2}\frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

is. Deze vergelijkingen geven voor den stationairen toestand in verband met

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0$$

de voorwaarde

$$\frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial y^2} = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Daar verder aan de electroden reeds φ de voorgeschreven waarden aannam, moet daar

$$\varphi' = 0$$

zijn, terwijl wij aan den vrijen rand de conditie

$$u' \cos \alpha + v' \sin \alpha = 0,$$

of blijkens (4) en (5)

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial n} = \frac{h}{\varkappa}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\cos \alpha - \frac{\partial \varphi}{\partial x}\sin \alpha\right)$$

verkrijgen. Voor de laatste vergelijking mag men schrijven

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial n} = \frac{h}{\varkappa}\frac{\partial \varphi}{\partial s}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

wanneer s langs den rand wordt gerekend en wel positief in zoodanige richting, dat eene wenteling van de normaal n naar de richting s met eene wenteling van de x — naar de y-as overeenstemt.

Terwijl nu φ' van 0 verschilt, gelijk door de proeven van Hall bevestigd wordt, is het de vraag, of de hoeveelheid electriciteit, die per tijdseenheid van s_1 op de plaat stroomt, is veranderd. Schrijven wij voor die hoeveelheid thans $e + e'$, dan is

$$e' = - \delta \int (u' \cos \alpha + v' \sin \alpha)\, d\, s_1,$$

dus volgens (4) en (5)

$$e' = \frac{\delta}{\varkappa} \int \frac{\partial \varphi'}{\partial n}\, d\, s_1,$$

daar toch langs s_1

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = 0$$

wordt. In elk geval moet, daar de toestand stationair ondersteld werd, de hoeveelheid e' de plaat aan de tweede electrode weer verlaten, zoodat ook

$$e' = - \frac{\delta}{\varkappa} \int \frac{\partial \varphi'}{\partial n}\, d\, s_2$$

is.

Wij zullen nu bewijzen, dat $e' = 0$ is. Daartoe maken wij gebruik van de bekende formule

$$\int \varphi \left(\frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial y^2} \right) d\, \omega - \int \varphi' \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) d\, \omega =$$
$$= \int \varphi \frac{\partial \varphi'}{\partial n}\, d\, s - \int \varphi' \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, d\, s,$$

waarin $d\, \omega$ een vlakte-element van het metaalblad voorstelt en de beide eerste integralen over dit blad, de beide laatste over den vrijen rand en de electroden moeten genomen worden. Ten gevolge van (3) en (6) verdwijnen nu de beide eerste integralen en ook de vierde is 0, omdat aan de electroden $\varphi' = 0$ en aan den vrijen rand $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$ is. Wij verkrijgen derhalve

$$\int \varphi \frac{\partial \varphi'}{\partial n} ds = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Over de eerste electrode uitgestrekt geeft de hier voorkomende integraal:

$$\varphi_1 \int \frac{\partial \varphi'}{\partial n} d s_1 = \frac{\varkappa}{\delta} \varphi_1 e', \ldots\ldots\ldots (9)$$

over de tweede electrode eveneens

$$\varphi_2 \int \frac{\partial \varphi'}{\partial n} d s_2 = -\frac{\varkappa}{\delta} \varphi_2 e' \ldots\ldots\ldots (10)$$

Voor het derde deel der integraal van (8), dat over den vrijen rand moet worden genomen, mogen wij blijkens (7) schrijven:

$$\frac{h}{\varkappa} \int \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial s} ds = \frac{h}{2\varkappa} \int \frac{\partial (\varphi^2)}{\partial s} ds$$

en wij kunnen hier de integratie ook over den geheelen omtrek uitstrekken, daar toch langs de electroden $\frac{\partial \varphi}{\partial s} = 0$ is. Houdt men nu in het oog, dat de omtrek uit ééne of meer gesloten lijnen bestaat, langs elke waarvan men bij de integratie moet rondgaan (verg. het boven omtrent de positieve richting langs s gezegde) dan blijkt de laatste integraal te verdwijnen. De vergelijking (8) reduceert zich dus hiertoe, dat de som van (9) en (10) verdwijnt, en daaruit volgt $e' = 0$.

Zijn derhalve de vergelijkingen (1) juist, dan zal onder het potentiaalverschil $\varphi_1 - \varphi_2$ ook in het magnetisch veld dezelfde hoeveelheid electriciteit door de plaat stroomen als daarbuiten; m. a. w. de magnetische kracht zal geene verandering in den *weerstand* der plaat teweeg brengen. De proeven door Hall en anderen *) ondernomen om zulk eene

---

*) *Phil. Mag.* IX, p. 226 en X, p. p. 301 en 326.

verandering op te sporen, konden derhalve geen resultaat opleveren, of althans slechts eene weerstandsverandering van de orde h^2.

§ 10. Onmiddellijk, nadat Hall zijne eerste proeven verricht had, merkte Rowland *) op, dat de door die proeven aangetoonde werking tot eene verklaring kan leiden van de electromagnetische draaiing van het polarisatievlak van het licht. Inderdaad, wanneer onder den invloed van een magneet de richting van een stroom door het optreden van eene transversale component gedraaid wordt, laat het zich begrijpen, dat ook de lichttrillingen, die volgens Maxwell's theorie bewegingen van denzelfden aard zijn als de electrische stroomen, in een magnetisch veld eene rotatie ondergaan. Rowland †) heeft in eene uitvoerige verhandeling deze zaak nader onderzocht, zich daarbij tot isolatoren bepalende. Wel is waar kon door Hall bij zijne proef met een isolator geene draaiing der krachtlijnen worden aangewezen en scheen ons ook op theoretische gronden zulk eene werking niet waarschijnlijk, maar niets belet ons, op andere wijze in isolatoren eene werking te onderstellen, die analoog is met die, welke door Hall bij metalen werd waargenomen. Wij kunnen nl. aannemen, dat in een magnetisch veld elke *electriciteitsbeweging* in den isolator (de *displacement-current* van Maxwell) eene transversale electromotorische kracht ten gevolge heeft. Dit was de hypothese, waarvan Rowland in zijne laatstgenoemde verhandeling uitging.

Daar de proeven van Hall het nieuwe verschijnsel alleen bij metalen hebben aangetoond, scheen het mij wenschelijk, juist bij deze lichamen den invloed van het magnetisme op de lichtbeweging te onderzoeken. Te meer scheen mij deze vraag van belang, daar de proeven van Kerr over het door magneetpolen gereflecteerde licht verschijnselen hebben doen kennen, die zonder twijfel nauw verwant zijn met de draaiing van het polarisatievlak in doorschijnende lichamen.

---

*) *Phil. Mag.* IX, p. 432.

†) *Amer. Journ. of Math.* III, p. 89. Ik ken van deze verhandeling alleen het uittreksel in *Beiblätter zu Wied. Ann.* V, p. 313.

§ 11. Denken wij ons eene willekeurige — al of niet geleidende — middenstof, waarin het effect, dat HALL waarnam, bestaat, geplaatst in een homogeen magnetisch veld, met de krachtlijnen evenwijdig aan de z-as. Wanneer in dit lichaam electrische bewegingen plaats hebben zal de electromotorische kracht (X, Y, Z), die op den tijd t in een punt (x, y, z) werkt, uit twee deelen bestaan, nl. uit de kracht (X, Y, Z), die aan electrostatische werking en aan de inductie is toe te schrijven en de bijkomende electromotorische kracht, die door HALL werd ontdekt. Daar wij, om ook in isolatoren de draaiing van het polarisatievlak te kunnen verklaren, moeten aannemen, dat ook de displacement-current eene dergelijke werking teweeg brengt als de geleidingsstroom, zullen wij onderstellen, dat de transversale electromotorische kracht op de in § 7 besproken wijze van de totale stroomcomponenten afhankelijk is. Noemen wij deze u, v, w, dan stellen wij dus

$$\mathsf{X} = X - h\,v,\ \mathsf{Y} = Y + h\,u,\ \mathsf{Z} = Z\ \ldots\ldots \quad (11)$$

§ 12. Aan de wijze, waarop de electromotorische kracht (X, Y, Z) samenhangt met de stroomcomponenten, de verdeeling van vrije electriciteit en de magnetische momenten, die door de electrische strooming kunnen worden opgewekt, alsmede aan het verband tusschen de laatstgenoemde grootheden wordt door het optreden der nieuwe werking niets veranderd.

Verstaan wij dus onder φ en χ de electrische en magnetische potentiaalfunctie, onder L, M, N de componenten der magnetische kracht, de vier laatste grootheden, voor zoo ver zij aan de electriciteitsbeweging te wijten zijn, dus met uitsluiting van de permanente magnetische kracht, waaraan het lichaam is onderworpen, eindelijk onder ϑ de magnetische constante, dan gelden de gewone vergelijkingen *).

---

*) HELMHOLTZ, Ueber die Bewegungsgleichungen der Electricität in ruhenden Leitern, CRELLE's *Journal*, LXXII. Ook in mijne „Theorie der terugkaatsing en breking van het licht," Hoofdstuk II. A en k zijn de

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}&=(1+4\pi\vartheta)A\frac{\partial L}{\partial t},\\ \frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}&=(1+4\pi\vartheta)A\frac{\partial M}{\partial t},\\ \frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}&=(1+4\pi\vartheta)A\frac{\partial N}{\partial t},\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\quad(\mathrm{I})$$

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=-\Delta\varphi+A^2k\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\ldots\quad(\mathrm{II})$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial N}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial z}&=A\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial t}-4\pi u\right),\\ \frac{\partial L}{\partial z}-\frac{\partial N}{\partial x}&=A\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial t}-4\pi v\right),\\ \frac{\partial M}{\partial x}-\frac{\partial L}{\partial y}&=A\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\,\partial t}-4\pi w\right),\end{aligned}\right\}\ldots\quad(\mathrm{III})$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}+\frac{\partial M}{\partial y}+\frac{\partial N}{\partial z}=-\Delta\chi\ldots\ldots\quad(\mathrm{IV})$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}(\Delta\varphi)\ldots\ldots\quad(\mathrm{V})$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}+\frac{\partial M}{\partial y}+\frac{\partial N}{\partial z}=\frac{1}{4\pi\vartheta}\Delta\chi,\ldots\ldots,\quad(\mathrm{VI})$$

welke met (11) de lichtbeweging bepalen, wanneer wij er nog de vergelijkingen bijvoegen, die het verband tusschen u, v, w en **X**, **Y**, **Z** uitdrukken.

§ 13. Ofschoon ons dat verband niet geheel bekend is kunnen wij de zaak toch zeer eenvoudig behandelen, wanneer wij het onderzoek beperken tot lichtbundels van een bepaalden trillingstijd en alle vraagstukken, die tot de dispersietheorie behooren, ter zijde laten.

---

constanten, die in de formule voor de inductie van stroomelementen voorkomen.

Vooreerst mogen wij aannemen, dat in een isotroop medium u alleen met X, v met Y, w met Z samenhangt en dat de vorm dezer drie betrekkingen dezelfde is. Verder zullen wij mogen stellen, dat het verband tusschen X en u door eene vergelijking wordt uitgedrukt, waarin deze grootheden zelf en een of meer hunner differentiaalquotienten naar t lineair met constante coëfficiënten voorkomen, dat dus

$$A\,\mathsf{X} + B\frac{\partial\,\mathsf{X}}{\partial\,t} + \text{enz.}\ldots\ldots = A'\,u + B'\frac{\partial\,u}{\partial\,t} + \text{enz}\,. \quad (12)$$

is, waarbij A, B, ..., A', B', ... van den aard van het lichaam afhangen *).

Gemakkelijk kan men hieruit afleiden, dat, wanneer X door eene goniometrische functie van den tijd wordt gegeven, ook u door eene dergelijke functie wordt voorgesteld, die echter in het algemeen tegenover X een zeker phaseverschil zal vertoonen. Nog eenvoudiger wordt de zaak, wanneer men, zooals bij een systeem lineaire vergelijkingen geoorloofd is, eerst eene oplossing zoekt, waarin exponentiëele functiën optreden en waaruit men dan later de werkelijke oplossing verkrijgt, door de exponenten onbestaanbaar te stellen, en alleen de reëele deelen te nemen.

Bevatten nu u en X den tijd alleen in den factor

$$e^{\gamma t}\,,$$

*) Deze vergelijking omvat bijv. het geval, dat in een isolator de componenten der diëlectrische polarisatie $= \varepsilon\,\mathsf{X}$, $\varepsilon\,\mathsf{Y}$, $\varepsilon\,\mathsf{Z}$ zijn en dus $u = \varepsilon\frac{\partial\,\mathsf{X}}{\partial\,t}$ is. Eveneens het geval van een gewonen geleidingsstroom, waarbij $\mathsf{X} = \varkappa\,u$ is. Maar ook, wanneer men aanneemt (verg. mijne „Theorie der terugkaatsing en breking van het licht”, Hoofdstuk V, ook Schlömilch's *Zeitschrift*, Bd. XXII, p. 1 en 205, Bd. XXIII, p. 197) dat in een metaal eene electrische polarisatie der moleculen bestaat en dat bij een electrischen stroom eene zekere massa in beweging verkeert, geraakt men tot formules, die in (12) begrepen zijn. De algemeene vorm dezer laatste vergelijking heeft het voordeel, onafhankelijk te zijn van bijzondere onderstellingen over het mechanisme, waardoor u uit X ontstaat.

(waarbij γ imaginair $= - i \frac{2\pi}{T}$ zal gesteld worden), dan reduceeren zich de vergelijking (12) en de beide daarmede overeenkomstige tot

$$u = p\,\mathbf{X}, \quad v = p\,\mathbf{Y}, \quad w = p\,\mathbf{Z} \; . \; . \; . \; . \; (13)$$

De grootheid p is in het algemeen complex en bevat in zich de *twee* grootheden (b. v. voortplantingssnelheid en absorptiecoëfficiënt, of hoofdinvalshoek en hoofdazimuth), waardoor de optische eigenschappen van het medium gekarakteriseerd kunnen worden. Het is duidelijk, dat p van γ, dus van den trillingstijd T zal afhangen, maar de nadere beschouwing dezer afhankelijkheid in verband met het mechanisme der lichtbeweging, is niet noodig, zoolang wij ons tot eene enkele waarde van T bepalen.

§ 14. Beschouwen wij nu het geval, dat zich een lichtbundel in de richting der z-as, dus langs de magnetische krachtlijnen, in het medium voortplant. Wij zullen aantoonen, dat transversale trillingen mogelijk zijn, dat daarbij echter zoowel volgens de x-, als volgens de y-as eene electriciteitsbeweging moet plaats hebben. M. a. w., wij zullen bewijzen, dat de uitdrukkingen

$$u = e^{\gamma(t - Rz)}, \quad v = a\,e^{\gamma(t - Rz)}, \quad w = 0$$

aan de bewegingsvergelijkingen voldoen, wanneer a en R behoorlijk gekozen worden.

Stellen wij kortheidshalve:

$$e^{\gamma(t - Rz)} = P,$$

dus

$$u = P, \quad v = a\,P, \quad w = 0,$$

dan volgt uit (13):

$$\mathbf{X} = \frac{1}{p}\,P, \quad \mathbf{Y} = \frac{a}{p}\,P, \quad \mathbf{Z} = 0,$$

uit (11)

$$X = \left(\frac{1}{p} + a\,h\right) P, \quad Y = \left(\frac{a}{p} - h\right) P, \quad Z = 0,$$

en uit (I)

$$L = \frac{R}{(1 + 4\,\pi\,\vartheta)\,\Delta}\,Y, \quad M = -\frac{R}{(1 + 4\,\pi\,\vartheta)\,\Delta}\,X, \quad N = 0.$$

Aan (II), (IV), (V) en (VI) wordt voldaan door

$$\varphi = 0 \quad \text{en} \quad \chi = 0,$$

terwijl dan verder de derde der vergelijkingen (III) $0 = 0$ geeft en uit de beide eersten twee voorwaarden volgen. Stelt men

$$4\,\pi\,\Delta^2\,(1 + 4\,\pi\,\vartheta) = B, \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

dan zijn die voorwaarden

$$\gamma\left(\frac{1}{p} + a\,h\right) R^2 = B$$

en

$$\gamma\left(\frac{a}{p} - h\right) R^2 = a\,B.$$

Daaruit volgt dan ten slotte:

$$a = \pm\, i$$

en

$$R^2 = \frac{B\,p}{\gamma\,(1 \pm i\,h\,p)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

§ 15. Uit het optreden der dubbele teekens volgt, dat *twee* trillingstoestanden, zooals wij die onderstelden, mogelijk zijn en dat deze bij de voortplanting verschillende wetten volgen.

Bij den eersten is

$$u = P, \quad v = i\,P,$$

waaruit, wanneer men

$$\gamma = - i \frac{2\pi}{T}$$

en

$$R = S_1 + i S_2$$

stelt (R is toch in het algemeen complex), en eindelijk alleen de reëele deelen neemt, verkregen wordt

$$u = e^{-\frac{2\pi S_2}{T} z} \cos \frac{2\pi}{T}(t - S_1 z),$$

$$v = e^{-\frac{2\pi S_2}{T} z} \sin \frac{2\pi}{T}(t - S_1 z).$$

Deze vergelijkingen stellen een bundel circulair gepolariseerd licht voor, die zich met de snelheid $\frac{1}{S_1}$ voortplant, terwijl hij eene absorptie ondergaat, waarvan het bedrag door S_2 bepaald wordt.

Neemt men de onderste teekens, dan verkrijgt men een dergelijken, maar thans tegengesteld circulair gepolariseerden bundel, waarbij andere waarden, zoowel van S_2 als S_1 optreden.

De vergelijking (15), waardoor voor de beide bewegingstoestanden de grootheid R bepaald wordt, kan nog in geschikter vorm worden gebracht, wanneer men de waarde R_0 invoert, die betrekking heeft op het geval, dat geene magnetische kracht op het lichaam werkt. Klaarblijkelijk is

$$R_0^2 = \frac{Bp}{\gamma},\ p = \gamma \frac{R_0^2}{B},$$

zoodat (15) wordt

$$R^2 = \frac{R_0^2}{1 \pm i\gamma \frac{R_0^2 h}{B}},$$

of, wegens de kleine waarde van h

$$R = R_0 \left(1 \mp \tfrac{1}{2}\, i\, \gamma \frac{R_0^2\, h}{B}\right) \ldots \ldots \ldots (16)$$

In een isolator is p zuiver imaginair, dus, daar ook γ dit is, R_0 reëel, en blijkens (16) verkrijgt dan ook R eene bestaanbare waarde. Geen der beide circulair gepolariseerde lichtbundels ondergaat hier dus eene absorptie; alleen hunne voortplantingssnelheden behoeven beschouwd te worden, en uit het verschil daarvan concludeert men op bekende wijze tot de draaiing van het polarisatievlak. Na het onderzoek van ROWLAND behoeven wij ons intusschen met dit vraagstuk niet verder bezig te houden.

§ 16. Bij metalen is tot nog toe van de verschillende voortplantingssnelheid en absorptie der beide boven besproken lichtbundels rechtstreeks niet gebleken. Maar, gelijk elke eigenaardigheid in de wijze, waarop het licht zich in een lichaam voortplant, zich afspiegelt in de eigenschappen van het teruggekaatste licht, zoo is uit de bekende proeven van KERR gebleken, dat ijzer, in een magnetisch veld geplaatst, het licht op andere wijze reflecteert dan niet-gemagnetiseerd ijzer.

De theorie, die wij boven opstelden, maakt het mogelijk, ook de terugkaatsing in een magnetisch veld te behandelen *). Wij zullen daarbij aannemen, dat alleen in het tweede medium het door HALL waargenomen verschijnsel bestaat, dat dus in het eerste — dat bovendien doorschijnend zal zijn — het polarisatievlak niet gedraaid wordt. Verder bepalen wij ons tot het eenvoudigste geval, dat namelijk het grensvlak loodrecht op de magnetische krachtlijnen staat en dat het licht loodrecht invalt. Dan zal in het tweede medium slechts eene voortplanting langs de kracht-

*) Voor dat HALL zijne proeven had genomen, werd reeds door FITZGERALD (*Phil. Trans*, CLXXI, p. 691) eene theorie der proeven van KERR gegeven, waarbij intusschen de absorptie buiten rekening werd gelaten.

lijnen plaats hebben, en wanneer wij de positieve z-as naar de zijde van dit medium trekken, gelden daarvoor onmiddellijk de formules, die wij in de laatste §§ hebben afgeleid.

Om nu te vinden, hoe eene gegeven invallende beweging teruggekaatst wordt, beginnen wij met een eenvoudiger vraagstuk; wij stellen namelijk de vraag: hoe moet het invallende licht geconstitueerd zijn, opdat in het tweede medium slechts een der circulair gepolariseerde bundels, die wij leerden kennen, tot stand komt en welke zijn dan de eigenschappen van het gereflecteerde licht? Dit vraagstuk is tweeledig, al naarmate wij verlangen, dat in de tweede middenstof alleen de rechts of alleen de links gepolariseerde bundel zal tot stand komen; daar intusschen de formules, die op deze beide gevallen betrekking hebben, slechts door enkele teekens van elkaâr verschillen, kunnen wij de beide gevallen gelijktijdig behandelen. Door combinatie van de verkregen uitkomsten kunnen wij dan naderhand de oplossing afleiden voor het geval, dat de invallende beweging gegeven is.

§ 17. Wanneer in geen der beide middenstoffen het effect van Hall bestaat zijn de electromotorische krachten X, Y en de magnetische krachten L, M, evenwijdig aan het grensvlak doorloopend *). Daar deze continuiteit een gevolg is van de wijze, waarop de genoemde grootheden van de electrische bewegingen en de magnetische momenten afhangen, zullen ook thans dezelfde grensvoorwaarden gelden, mits wij aan X en Y de in § 11 aangegeven beteekenis toekennen. Deze grensvoorwaarden zijn bovendien de eenige, waarop wij te letten hebben, want het is duidelijk, dat in het eenvoudige geval, waartoe wij ons bepalen, een zuiver transversale bewegingstoestand optreden zal, waarbij in de richting der z-as geenerlei electriciteitsbeweging of magnetische momenten en ook geene electrische of magnetische kracht zal ontstaan.

---

*) Helmholtz, t. a. p. Ook in mijne „Theorie der terugkaatsing en breking", p.p. 66 en 158.

§ 18. Onderscheiden wij nu door de indices 1 en 2 de grootheden, die op de eerste en de tweede middenstof betrekking hebben, dan kunnen wij voor de beweging in de laatste schrijven (§ 14)

$$u_2 = P_2, v_2 = \pm\, i\, P_2,$$

$$X_2 = \left(\frac{1}{p_2} \pm i\, h\right) P_2, Y_2 = \left(\pm \frac{i}{p_2} - h\right) P_2,$$

$$L_2 = \frac{R_2}{(1 + 4\,\pi\,\vartheta_2)\,A}\, Y_2, M_2 = -\frac{R_2}{(1 + 4\,\pi\,\vartheta_2)\,A}\, X_2,$$

$$P_2 = e^{\gamma\,(t - R_2\, z)}$$

Wij hebben hier bij v_2 geen onbepaalden factor (amplitudo) gevoegd, daar wij natuurlijk de intensiteit van den bundel, dien wij wenschen te doen ontstaan, willekeurig kunnen kiezen. Dan wordt echter de intensiteit niet alleen van het teruggekaatste, maar ook van het invallende licht onbekend.

Evenals in het tweede medium zal nu ook in het eerste eene beweging zoowel in de richting der x — als in die der y-as moeten plaats hebben. De invallende beweging zal dus uit twee componenten u_1 en v_1 bestaan, die wij kunnen voorstellen door

$$u_1 = s\, P_1, \; v_1 = \sigma\, P_1,$$

$$P_1 = e^{\gamma\,(t - R_1\, z)}.$$

Daarbij behoort dan, blijkens de bewegingsvergelijkingen voor het eerste medium

$$X_1 = \frac{s}{p_1}\, P_1, Y_1 = \frac{\sigma}{p_1}\, P_1,$$

$$L_1 = \frac{R_1}{(1 + 4\,\pi\,\vartheta_1)\,A}\, Y_1, M_1 = -\frac{R_1}{(1 + 4\,\pi\,\vartheta_1)\,A}\, X_1.$$

De grootheden s en σ zijn onbekende constanten.

Het teruggekaatste licht zal eene dergelijke geaardheid bezitten als het invallende licht. Wij onderscheiden de grootheden, die bij dezen bundel voorkomen, door accenten van die, welke op het invallende licht betrekking hebben en stellen dus — onder s' en σ' twee nieuwe constanten verstaande — de teruggekaatste beweging voor door

$$u_1' = s' P_1', \; v_1' = \sigma' P_1',$$

$$X_1' = \frac{s'}{p_1} P_1', \; Y_1' = \frac{\sigma'}{p_1} P_1',$$

$$L_1' = -\frac{R_1}{(1 + 4\pi\vartheta_1) A} Y_1', \; M_1' = +\frac{R_1}{(1 + 4\pi\vartheta_1) A} X_1$$

$$P_1' = e^{\gamma(t + R_1 z)}.$$

§ 19. Wanneer aan het grensvlak $z = 0$ is wordt daar

$$P_1 = P_1' = P_2$$

en de doorloopendheid van X, Y, L en M geeft achtereenvolgens

$$\frac{s + s'}{p_1} = \frac{1}{p_2} \pm i\,h, \qquad \text{(17)}$$

$$\frac{\sigma + \sigma'}{p_1} = \pm \frac{i}{p_2} - h,$$

$$\frac{R_1}{1 + 4\pi\vartheta_1} \cdot \frac{\sigma - \sigma'}{p_1} = \frac{R_2}{1 + 4\pi\vartheta_2}\left(\pm \frac{i}{p_2} - h\right),$$

$$\frac{R_1}{1 + 4\pi\vartheta_1} \cdot \frac{s - s'}{p_1} = \frac{R_2}{1 + 4\pi\vartheta_2}\left(\frac{1}{p_2} \pm i\,h\right), \qquad \text{(18)}$$

Uit deze vergelijkingen volgt vooreerst

$$\sigma = \pm i\,s, \; \sigma' = \pm i\,s',$$

zoodat, als slechts één lichtbundel in het tweede medium ontstaan zal, het invallende licht circulair gepolariseerd moet zijn, terwijl dan ook het teruggekaatste licht dezelfde eigenschap zal bezitten.

Verder verkrijgt men uit (17) en (18)

$$s' = \frac{\dfrac{R_1}{1 + 4\pi\vartheta_1} - \dfrac{R_2}{1 + 4\pi\vartheta_2}}{\dfrac{R_1}{1 + 4\pi\vartheta_1} + \dfrac{R_2}{1 + 4\pi\vartheta_2}} s,$$

terwijl ook de waarde van s en s' elk afzonderlijk gemakkelijk wordt gevonden.

§ 20. Kennen wij thans aan de amplitudo s van het invallende licht de waarde 1 toe, dan wordt die van het teruggekaatste licht,

$$a = \frac{s'}{s} = \frac{\dfrac{R_1}{1 + 4\pi\vartheta_1} - \dfrac{R_2}{1 + 4\pi\vartheta_2}}{\dfrac{R_1}{1 + 4\pi\vartheta_1} + \dfrac{R_2}{1 + 4\pi\vartheta_2}} \quad \ldots\ldots \quad (19)$$

en de geheele beweging in het eerste medium wordt voorgesteld door

$$u_1 = P_1, \quad v_1 = \pm i P_1,$$
$$u_1' = a P_1', \; v_1' = \pm i a P_1'.$$

Wanneer wij de waarden van R_2 en a voor het geval, dat geene magnetische kracht werkt, met $R_{2(0)}$ en a_0 aanduiden, is volgens (16)

$$R_2 = R_{2(0)} \mp \tfrac{1}{2} i \gamma \frac{R^3{}_{2(0)} h}{B_2}$$

en volgens (19)

$$a = a_0 \pm \delta,$$

wanneer

$$\delta = i \frac{h\gamma}{B_2} \frac{\dfrac{R_1 R^3{}_{2(0)}}{(1 + 4\pi\vartheta_1)(1 + 4\pi\vartheta_2)}}{\left[\dfrac{R_1}{1 + 4\pi\vartheta_1} + \dfrac{R_{2(0)}}{1 + 4\pi\vartheta_2}\right]^2} \quad \ldots\ldots \quad (20)$$

is.

Scheiden wij eindelijk de beide tot nu toe gemeenschappelijk behandelde vraagstukken, dan verkrijgen wij twee bewegingstoestanden, voorgesteld door

$$u_1 = P_1, \; v_1 = + i P_1,$$

$$u_1' = (a_0 + \delta) P_1', \; v_1' = + i (a_0 + \delta) P_1'$$

en

$$u_1 = P_1, \; v_1 = - i P_1,$$

$$u_1' = (a_0 - \delta) P_1', \; v_1' = - i (a_0 - \delta) P_1'.$$

Men kan nu door combinatie hiervan een toestand afleiden, waarbij het invallende licht lineair gepolariseerd is. Zullen de trillingen daarvan in het $x\,z$-vlak geschieden, en wil men ook dan nog het invallende licht de amplitudo 1 laten behouden, dan heeft men slechts de halve som der twee oplossingen te nemen. Er komt dan

$$u_1 = P_1, \; v_1 = 0,$$

$$u_1' = a_0 P_1', \; v_1' = i \delta P_1'.$$

§ 21. Terwijl buiten het magnetisch veld een loodrecht invallende en lineair gepolariseerde lichtbundel slechts aanleiding geeft tot een teruggekaatsten bundel met dezelfde trillingsrichting treedt thans ook eene loodrecht op het invallende licht gepolariseerde component (v_1') op. Deze is het, die bij de proeven van Kerr werd waargenomen. Men zal dezen bundel slechts geheel kunnen karakteriseeren door uit (20) zijne amplitudo en phase in vergelijking met het invallende licht, of in vergelijking met de component u_1' af te leiden. Bepalen wij ons thans tot de amplitudo; is deze berekend, dan kan men eenigszins een oordeel vellen over het verschijnsel, dat door Kerr werd waargenomen. Die amplitudo wordt, gelijk men weet, verkregen, wanneer men van de complexe uitdrukking, die wij boven voor v_1' vonden, den modulus neemt, waarbij met goed gevolg de stelling kan worden toegepast, dat de modulus van het produkt van eenige complexe grootheden het produkt is der moduli van elk der factoren.

§ 22. Men geraakt hierbij tot eene vrij eenvoudige uitkomst, wanneer men aanneemt, dat in het metaal de waarde van ϑ gelijk gesteld mag worden aan de waarde in het eerste medium. Dan wordt

$$\delta = i \frac{h \gamma}{B} \frac{R_1 \, R^3{}_{2(0)}}{[R_1 + R_{2(0)}]^2},$$

en wanneer men

$$\frac{R_{2(0)}}{R_1} = \sigma \, e^{i \tau}$$

stelt (σ en τ bestaanbaar) *), vindt men achtereenvolgens

$$\text{Mod. } [R_{2(0)}] = \sigma \, R_1,$$

$$\text{Mod. } [R^3{}_{2(0)}] = \sigma^3 \, R_1{}^3,$$

$$\text{Mod. } [R_1 + R_{2(0)}]^2 = R_1{}^2 \, (1 + 2 \, \sigma \cos \tau + \sigma^2),$$

dus daar

$$\text{Mod. } (\gamma) = \frac{2 \pi}{T}$$

is,

$$\text{Mod. } (\delta) = \frac{2 \pi \, h \, R_1{}^2}{B \, T} \cdot \frac{\sigma^3}{1 + 2 \, \sigma \cos \tau + \sigma^2} \quad . \; . \; (21)$$

Dit is de amplitudo van de beschouwde component in het teruggekaatste licht.

§ 23. Het is nu de vraag, of deze uitkomst ook voor ijzer en staal mag worden aangenomen. Bij deze stoffen is de magnetische constante ϑ in het geval van magnetische krachten, die gedurende vrij langen tijd werken, zeer van de constante ϑ_1 voor de lucht verschillend $\left(\frac{1 + 4 \pi \vartheta}{1 + 4 \pi \vartheta_1}\right.$ verkrijgt zelfs de waarde 400) en het lijdt geen twijfel, of de formule (21) zou ten eenemale onjuist zijn, wanneer ook tegenover snel afwisselende magnetische krachten, zooals

---

*) σ heeft thans eene andere beteekenis dan in § 18.

die bij de lichttrillingen voorkomen, het metaal dezelfde magnetische constante had.

Houdt men echter in het oog, dat bij het magnetiseeren van ijzer de moleculen gedraaid worden en dus eene zekere massa in beweging gebracht wordt, dan schijnt het zeer goed mogelijk, dat bij de lichttrillingen de moleculen geen tijd hebben om de magnetische krachten merkbaar te volgen en dat dus bij deze bewegingen ϑ in het metaal niet merkbaar grooter is, dan in de lucht. Inderdaad is ook bij de gewone terugkaatsing door staal, zoover mij bekend is, niets gebleken van den invloed, dien eene groote waarde van ϑ ook daar zou hebben *), maar volgt de terugkaatsing door dit metaal dezelfde wetten als die door elk ander.

In het vraagstuk, waarmede wij ons hier hebben bezig gehouden, komt er nog eene omstandigheid bij, die eene kleine waarde van ϑ tengevolge zal hebben. Het metaal was nl. in een sterk magnetisch veld geplaatst en nu ziet men gemakkelijk in, dat wanneer ijzer in eene zekere richting reeds geheel of bijna het maximum van magnetisch moment heeft verkregen, kleine bijkomende krachten daarnevens kleinere momenten zullen opwekken dan wanneer de eerste magnetisatie niet bestond.

Terwijl ik later hoop in staat te zijn, op deze vragen terug te komen, schijnt mij voorloopig de geldigheid der formule (21) ook voor ijzer en staal niet onwaarschijnlijk.

§ 24. Het verdient nog opmerking, dat in de berekening van §§ 16—22 niet als noodzakelijke onderstelling is ingevoerd, dat het tweede medium een metaal is. Ook een doorschijnend lichaam moet een dergelijk verschijnsel vertoonen, als door Kerr bij ijzer werd waargenomen, en uit de algemeene formule (21) kan men gemakkelijk Mod. (δ) voor een dergelijk lichaam afleiden. Daarbij is nl. $\dfrac{R_{2(0)}}{R_1}$ be-

*) Die invloed zou daarin bestaan, dat de eigenschappen van het gereflecteerde licht bij verschillende invalshoeken bij ijzer niet op dezelfde wijze uit hoofdinvalshoek en hoofdazimuth berekend konden worden als bij andere metalen.

staanbaar en gelijk aan den brekingsindex n, zoodat $\tau = 0$ en $\sigma = n$ wordt en de laatste factor in (21) overgaat in

$$\frac{n^3}{(1+n)^2}$$

§ 25. Blijkens de formule (21) is Mod. (δ) bij verschillende stoffen evenredig, vooreerst met de waarde, die h voor deze stoffen heeft, ten tweede met de breuk

$$F = \frac{\sigma^3}{1 + 2\,\sigma \cos \tau + \sigma^2}.$$

Deze kan uit de optische eigenschappen van elk lichaam (bij een metaal uit den hoofdinvalshoek A en het hoofdazimuth H) worden berekend *). Zoo vind ik voor staal ($A = 76^0\,40'$, $H = 16^0\,48'$) $F = 2{,}83$, voor zilver ($A = 72^0\,30'$, $H = 40^0\,9'$) $F = 2{,}09$, terwijl voor zwavelkoolstof ($n = 1{,}6$) $F = 1{,}15$ wordt.

Ik heb de waarde van F ook voor zilver berekend, daar dit metaal na het ijzer bij de proeven van Hall de sterkste werking vertoonde en wij dus mogen verwachten, dat, wanneer eenig metaal, behalve ijzer, bij de proef van Kerr een merkbaar effect kan vertoonen, dit het zilver zal zijn. Hall geeft op †), dat de waarde van h bij ijzer tot die bij zilver staat als 78 tot 8,6 en verbindt men dit met de uitkomsten, die wij voor F vonden, dan blijkt het, dat Mod. (δ) bij zilver ongeveer 12 maal kleiner zal zijn dan bij ijzer.

§ 26. Van het meeste belang is nu de vraag, of, wat de absolute grootte betreft, de verschijnselen, die Kerr bij de terugkaatsing waarnam, in overeenstemming zijn met de waarde, die Hall voor h vond. Om die vraag te beantwoorden moet men vooreerst de formule (21) nog eene kleine wijziging doen ondergaan. De werkelijke waarden der grootheden h en A — deze laatste komt nl. blijkens (14) in B voor —

---

*) Verg. mijne „Theorie der terugkaatsing en breking", p. 168.

†) *Phil. Mag.* X, p. 323.

zijn namelijk, wegens de diëlectrische en magnetische polarisatie der lucht, waarin de metingen geschieden, niet gelijk aan de waargenomen waarden h' en A'. Vooreerst is *)

$$A^2 = \frac{A'^2}{(1 + 4\pi \varepsilon_1)(1 + 4\pi \vartheta_1)},$$

wanneer ε_1 de constante der diëlectrische polarisatie in de lucht is. Ten tweede is blijkens (1) h eene dergelijke grootheid als de weerstand $\varkappa$ (nl. de verhouding van eene electromotorische kracht en een stroomcomponent) en heeft men dus †)

$$h = \frac{h'}{1 + 4\pi \varepsilon_1}.$$

Neemt men eindelijk in aanmerking, dat R_1 de omgekeerde waarde der voortplantingssnelheid in de lucht is, en dus $= A'$ gesteld mag worden, dan gaat (21) over in

$$\text{Mod.}\,(\delta) = \frac{h'}{2\,T} \cdot \frac{\sigma^3}{1 + 2\,\sigma\cos\tau + \sigma^2}$$

en thans is de formule geschikt voor vergelijking met absolute metingen.

Daar Kerr de intensiteit van het door hem waargenomen verschijnsel niet heeft gemeten, heb ik getracht eene bepaling daarvan te verrichten. Wanneer het licht eenige malen tusschen twee evenwijdige gemagnetiseerde staalspiegels gereflecteerd wordt, bleek mij eene, zij het dan ook ruwe meting mogelijk te zijn, terwijl men dan tevens tusschen de spiegels een tamelijk homogeen magnetisch veld heeft, waarvan de sterkte kan bepaald worden. De Heer W. van Loghem, phil. nat. cand. te 's Gravenhage heeft gelijktijdig de noodzakelijke uitbreiding der boven gegeven theorie tot het geval van scheef invallend licht ondernomen. Weldra hoop ik omtrent de resultaten dezer onderzoekingen iets naders te kunnen meêdeelen.

*) „Theorie der terugkaatsing en breking", p. 69.

†) Ibidem, p. 44.

BOUWSTOFFEN VOOR DE GESCHIEDENIS

DER

WIS- EN NATUURKUNDIGE WETENSCHAPPEN

IN DE NEDERLANDEN.

DOOR

D. BIERENS DE HAAN.

N°. XXV. De Thiende. — Simon Stevin's werken.

1. Reeds in N°. I dezer Bouwstoffen werd »de thiende" [1]) van Simon Stevin ter loops aangehaald; dit boekje verdient echter wel eene meer opzettelijke behandeling. Hij draagt het boek op aan »Den sterrekiickers, || landtmeters, tapiitmeters, || Wijnmeters, Lichaemmeters int ghemeene, Munt- || meesters, ende allen Cooplieden, wenscht Simon || Stevin Gheluck." Hij zegt daarvan »*Sij* [de Thiende] *leert* (*op dat ick met een || woort vele segge*) *alle rekeningen die onder de Menschen noodich || vallen, afveerdighen sonder gebroken getalen. Inder voegen dat || der Telkunstens vier eerste slechte beginselen, diemen noemt Ver- || gaderen, Aftrecken, Menighvuldighen, ende Deelen, met heele || getallen tot desen genoegh doen.... Nu of hier deur ghewonnen sal wor- || den... dat stelle ick || geerne tot u lieden oordeel. Aengaende my yemant seggen moch- || te, dat vele saecken int eerste aensien dicmael besonder gelaten; || maer alsmense int werc wil stellen, so en kanmen daer mede niet || uytrechten, ende gelijck 't met de Vonden der Roersoeckers dick- || wils toegaet, welcke int kleene goet zijn, maer int groote en deu- || gen sy niet. Dien verantwoorden wij alsulck twijfel* *hier geen- ‖ sins te wesen, overmits . . . verscheyden ervaren Lantmeters alhier in Hollant, die wy dat ‖ verklaert hebben, . . . dit ‖ ghebruycken tot hun groote vernoeginge, ende met sulcke vruchten ‖ ten als de Natuere wijst daer uyt nootsaeckelicken te moeten ‖ volghen: 't Selve sal yeghelycken van u lieden mijne* E. HEE- ‖ REN *wedervaren, die doen sullen als sij lieden. Vaert daeren- ‖ tusschen wel, en daer naer niet qualick.*"

Een duidelijk bewijs van het vertrouwen, dat STEVIN in zijne methode stelde, en dat ook aan het slot van dit boekske nader zal blijken. Onder de hier aangehaalde landmeters behoort voorzeker EZECHIËL DE DECKER, die in zijn »Eerste deel van de nievwe Telkonst, ter Govde, 1626, 4⁰" [zie Bouwstoffen I, Noot 4], en wel bijzonder in het gedeelte »van Coopmans Rekeningen, Leerende door thiendeelighe voortgangh zonder gebrokens met wonderlicke lichtigheyt afveerdighen alle ghemeene Rekeninghen" (aldaar, blz. 149—195), daarvan een ruim gebruik maakt. Daarom ook achtte DE DECKER het van belang, om van het werk van STEVIN een herdruk te leveren.

Na een »CORT BEGRIIP" (blz. 6) volgt »HET EERSTE DEEL DER ‖ THIENDE VANDE BEPALINGHEN" (blz. 7, 8), waarin kort en duidelijk des schrijvers bedoeling wordt uitgedrukt.

»I. BEPALINGHE. THIENDE *is eene specie der Telkunsten.* Thans zegt men: Decimaalrekening.

II. BEPALINGHE. *Alle voorghestelde heel ghetal, noemen wij* BEGIN, *sijn ‖ teecken is sodanigh* (**0**).

III. BEPALINGHE. *Ende elck thiendedeel vande eenheyt des* BEGINS, *noemen ‖ wy* EERSTE, *syn teecken is* (**1**). *Ende elck thiendedeel ‖ vande eenheydt der Eerste, noemen wy* TWEEDE, *syn ‖ teecken is* (**2**). *Ende so voort elck thiendedeel der eenheyt ‖ van sijn voorgaende, altijd in d'orden een meer.*

IV. BEPALINGHE. *De getallen der voorgaender tweeder en derder Bepalinge, ‖ noemen wij int ghemeen* THIENDETALEN."

Men ziet het, deze bepalingen zijn kort en volkomen scherp wetenschappelijk; zij laten aan duidelijkheid niets te wenschen over.

Nu komt »HET ANDER DEEL ‖ DER THIENDE VAN DE ‖ Werckinghe (blz. 5—15), waar in vier »VOORSTELLEN" de vier species worden behandeld. Het eerste getal, volgens onze schrijfwijze 27, 847, wordt nu hier aldus geschreven 27 (**0**) 8 (**1**) 4 (**2**) 7 (**3**). Al spoedig haalt hij hier »onze Fransche Arith.'' aan, waarover later meer. Zijne regels, de ons bekende natuurlijk, bewijst hij eenvoudig door de tiendeelige breuk te herleiden tot gewone, hier duizendste deelen. Hij besluit met een paar opmerkingen.

I. Merckt. Geval, dat de deeler meer decimalen bevat dan het deeltal.

II. Merckt. Toepassing op de worteltrekking.

Ten slotte het »Aenhanghsel'' (blz. 16—27). »*Wy... sullen nu commen tot het ghebruyck van dien, betoonende* || *door* 6 *Leden, hoe alle rekeninghen ter Menschelicker* || *nootlickheydt ontmoetende, door haer lichtelick ende slechtelick* || *konnen afgheveerdight worden met heele ghetallen.*''

Deze zes Leden betreffen de toepassing bij Lantmeterie, Tapijtmeterie, Wiinmeterie, Lichaemsmetery int Ghemeen, Sterrekunst Rekeninghen, Rekeningen der Muntmeesters, Cooplieden, ende allen Staten van Volck int ghemeen.

En bij dit laatste blijkt weder, hoe goed Stevin het wetenschappelijke merk van zijne methode inzag, in het volgende voorstel.

»Wij achtent oock nut dat elc onderdeel van wat Stoffe || zijn Gront zy, genoemt worde met name *Eerste*, *Tweede*, || *Derde*, &c. Ende dat overmits ons kennelick is *Tweede* || Vermenigvuldight met *Derde*, te geven Wtbreng, *Vijfde*, (want 2 ende 3 maecken 5, als voren geseyt is , 't welc door || ander namen soo merckelick niet en soude connen ghe- || schieden... so meugen wy die heeten *Marcx-eerste*, *Marcx-* || *tweede*. . . .''

Het vertrouwen, dat Stevin in zijne methode stelt, — en dat dan ook later ditmaal niet beschaamd is geworden — blijkt wel uit hetgeen daarna volgt (blz. 27).

»Maer of dit al schoone niet so haest int werck ghestelt || en wierde, ghelijck wel te wenschen waer, daer in sal ons || ten eersten vernoeghen, dat het ten minsten onsen Nae- || comers voorderlick zijn sal, want het is seecker, dat by || aldien de Menschen in toecomenden tijdt, van sulcker || aert sijn als sij in den voorleden gheweest hebben, dat sy || soodanighen voordeel niet altijt versuymen en sullen."

2. Nu wij ons met SIMON STEVIN bemoeien, wil ik, als meer in deze Bouwstoffen geschiedde, zijne verdere werken nagaan. En dit kan thans met te beter hoop op goeden uitslag geschieden, nu de Heer FERD. VANDER HAEGHEN in zijne Bibliotheca Belgica, Livraisons XXXI en XXXII, daartoe zulk eene belangrijke, bijna volledige verzameling schonk van bibliographische opgaven omtrent deze werken.

Het eerste werk, door STEVIN uitgegeven, is zijne »Tafelen van Interest"[2]). Daaromtrent leest men in het boek van Noot 5[a]), blz. 47.

»PARCE que les comptes de l'Interest, sont calcula- || tions qui se rencontrent iournellement aux affai- || res des Hommes,... Telles comptes se || faisoient communement a tastons. Mais puis apres || quelques autres [Jean Trenchant]... ont preparé certaines tables pour cest affaire, || ... Ces ta- || bles estoient en vse par aucuns au païs bas; mais ceux || qui les auoient, les tenoient cachez comme grand se- || cret & principalement la composition d'icelles estoit || cognue à peu de personnes. || Or... ie diuulgeois il y a enuiron deux annees || quelque traicté particulier de l'Interest en nostre vul- || gaire langage Flameng, auquel nous declarames la || construction & vsage d'icelles tables."

3. Het tweede »PROBLEMATVM GEOMETRICORVM LIBRI V"[3]), opgedragen »ILLVSTRISSIMO || HEROI, D. MAXIMILIANO, || DOMINO CRVNINGAE, CREVECOEVR, || HEENVLIET, HASERWOVDE, STEENKERCKEN, || VICECOMITI ZELANDIAE, &C. || SVPREMO MACHINARVM BELLICARVM || INFERIORIS GERMANIAE || PRAEFECTO."

Dit zeldzame boekje geeft ons:

LIBER PRIMVS || IN QVO DEMONSTRABITVR QVO || modo à dato puncto in latere cuiuscunque rectili- || nei, recta linea Geometricè ducenda sit ver- || sus partem petitam, quae rectilineum || diuidat secundum rationem || datam. || ITEM QVOMODO IN QVOCVNQVE RECTI- || lineo ducenda erit linea recta & parallela cum latere ipsius quaesito, || qua rectilineum diuidat versus partem petitam secun- || dum rationem datam" (blz. 5—37) met 24 Definitiones en PROBLEMA I—VIII; waarachter telkens volgt Explicatio dati, Explicatio quaesiti, Constructio, Demonstratio, Distinctiones, Conclusio, Notae. Met 28 houtsneefiguren in de tekst.

LIBER SECVNDVS || DE CONTINVAE QVANTITATIS || regvla Falsi (blz. 38—45), met een PROBLEMA en vier Exempla, 4 figuren.

LIBER TERTIVS || DE QVINQVE REGVLARIVM, QVIN- || que auctorum Regularium & nouem Trun- || catorum regularium corporum eidem || sphaerae inscriptibilium de- || scriptione (blz. 46—83) met 22 Definitiones. Dan »PROBLEMA I. Dato maximo circulo sphaerae: latera... (19) corporum... invenire" (blz. 55—66). »PROBLEMA II. Datis lateribus... (19) corporum... plana construere ac dispo- || nere, quae si ritè complicentur, efficiant ipsa corpora." (blz. 66—83) met 20 in de tekst afgedrukte houtsneefiguren.

LIBER QVARTVS || IN QVO DEMONSTRABITVR QVO- || modo datis duobus corporibus Geometricis, || tertium corpus describi potest, alteri da- || torum simile, alteri vero aequale." (blz. 84—101) PROBLEMA I—III, 9 figuren.

LIBER QVINTVS || IN QVO DEMONSTRABITVR QVOMO- || do datis quibuscunque duorum similium Geome- || tricorum corporum homologis lineis, tertium || corpus construi potest datis duobus aequa- || le & alteri datorum simile." (blz. 102—118). Problema I—III, 12 figuren.

Als datum wordt opgegeven 1583.

4. Het derde is zijn »DIALECTIKE OFTE BEWIJSCONST. Leerende van allen saecken recht ende constelick Oirdeelen... Beschreven in 't Neerduytsch" [4]). In zijn opdracht »DEN NEERDUYTSCHEN" zegt STEVIN »hebbe nochtans die (de Materie) der Mathe- || matiken, onghelijck veel dieper, || ende onbegrijpelicker bevonden, || dan der Dialectiken, || want die een || Mirakel, ja een moeder der Mira- || kelen, dese soo slecht (als Plato en- || de ander betuyghen) dat de Na- || ture schijnt den menschen by cans || al ghemaecte Dialecticienen voort || te brenghen, want inde argumen- || ten der ongheleerden, hooren wy || volcommentlick der Dialectiken || Materie, an de welcke niet en ghe- || breect dan een geschickter Forme." En daarom heeft hij, op aandringen van »som-

mighe || mijn seer ghemeene vrienden ende Landtslieden" besloten »deze Duyt | sche Dialectike af te veerdighen." In het »CORT BEGRYP" geeft hij een overzicht van de twee Boecken van dit werk: het eerste boeck van de definitien (blz. 1—51), het tweede van de werckinghe in toepassing (blz. 52—103). In het Aenhangsel (blz. 104—133) worden nog enkele punten nader toegelicht. Dan volgt blz. 134—140 »de Tsamenvoeghinghe der duytscher ende latynscher eygene woorden," dat is de hollandsche vertaling der gewone latijnsche kunstwoorden, in de Logica voorkomende. Ten slotte geeft STEVIN in de Dialectikelcée tsamenspraeck (blz. 141—152) een voorbeeld van dialectisch disputeeren. Een inhoudstafel (blz. 167—172) besluit het werk.

Hier is de uitgaaf van 1621 beschreven: de eerste uitgaaf is van 1565 [4a]).

5. Het vierde is de ARITHMETIQVE DE SIMON STEVIN DE BRUGES [5]). Men vindt daarin een opdracht »AV TRESDOCTE || ET VERTVEVX || SEIGNEVR Monsr. IEHAN || CORNETS DE GROOT (3 blz.); daarop eenige verzen van Dominicus Baudius Insulensis (1 blz.) Franciscus Bertie Anglus (2 blz.) IAGIVS TORNVS ΦΙΛΟΜΑΘΗΣ (4 blz.) en een fransch van Darie Togon (1 blz.). De beide laatste namen zijn anagrammes van Janus Grotius en Jan de Groot. Daarop volgt »AV LECTEVR" (2 blz.) en ARGVMENT (3 blz.); alles te zamen 18 blz., niet gepagineerd. In de opdracht blijkt, dat JAN DE GROOT (geb. 8 Maart 1554, gest. 3 Mei 1640, vader van HUIG DE GROOT) zich op velerlei wetenschappen toelegde, o. a. »*preparant & faisant preparer en toute diligence, les appareils necessaires* (*aux Problemes & Theoremes Catoptriques*). *En la || Musique... voire de la Composition, en laquelle ||* (*si l'on peut croire l'effect*) *vous n'estes pas des || moindres: vous vous estes encore diligemment || exercé en la Thérorie* [sic] *d'icelle, nous en proposant || & resoluant argumens non vulgaires.*"

»LE PREMIER LIVRE || D'ARITHMETIQVE || DES DEFINITIONS. || PREMIERE PARTIE DES || DEFINITIONS; DE L'ARITHME- || *tique & des nombres Arithmetiques*" blz. 1—8 (maar, daar de 6 eerste bladen slechts in recto genummerd zijn, te zamen 14 bladz.) met XIII Definitions.

»La seconde partie, ‖ des definitions des ‖ nombres geometriqves" (blz. 9—54), met Definitions XIII—LVII.

»Troisiesme partie ‖ des definitions de la ‖ raison et proportion ‖ *Arithmetique, & de leurs dependances* (blz. 55—70). Definitions LVIII—LXXXV.

»Qvatriesme partie ‖ des definitions de ‖ compvtations rationnelles, ‖ *comme Aiouster, Substraire, Multiplier,* ‖ *Diviser & leurs dependances*" (blz. 70—74). Definitions LXXXVI—C.

»Cincqviesme partie des definitions des compv- ‖ *tations proportionnelles*" (blz. 74—80). Definitions CI—CIII.

Dit boek bevat in zekeren zin de theorie, waarvan het volgende de toepassing zal geven. Het eindigt met eene »Collection des characteres," waarvan hier, ter wille van de oorspronkelijkheid, eenige mogen volgen.

(0) Commencement de quantité, Nombre Arithm.

(1) Prime quantité (eerste macht, orde).

(2) Seconde quantité (tweede macht, orde), enz.

$\sqrt{}$ 9)(**(2)** beteekent [$\sqrt{}$ 9] (2), dus = 3 (2).

$\sqrt{}$ 9 (2) beteekent $\sqrt{}$ [9 (2)], dus = 3 (1).

$\sqrt{}$ **(3)** bino $\sqrt{}$ 2 + $\sqrt{}$ 3 beteekent $\sqrt[3]{}$ [$\sqrt{}$ 2 + $\sqrt{}$ 3].

Le second livre ‖ d'arithmetiqve ‖ de l'operation. ‖ *Premiere partie de l'operation des nombres* ‖ *Arithmetiques*" (blz. 81—105). Problemes I—XVII.

Seconde partie ‖ de l'operation des ‖ nombres radicavx" (blz. 105—227). Problemes XVIII—XLVIII.

»Troisiesme partie ‖ de l'operation des ‖ nombres algebraiqves" (blz. 228—430). Problemes XLIX—LXXXI, met daarop volgende Questions I—XXVII.

Daarop volgt

»Les qvatre ‖ premiers livres ‖ d'algebre de ‖ Diophante ‖ D'Alexandrie ‖ *Traduicts en langue Françoise: &* ‖ *expliquez par* Simon Stevin ‖ *De Bruges.*" In de »Preface" (blz. 432—434) zegt Stevin

»*Il m'a semble bon de* ‖ *conioindre à ce* 81 *probleme, comme pour exem-* ‖ *ples du mesme, les quatre premiers liures de* ‖ *Diophante, tant pour leurs tressubtiles & ha-* ‖ *biles operations, comme aussi qu'ilz n'ont enco-* ‖ *res este diuulgez, que ie sçache, en langue* ‖ *Françoise.*"

PREMIER LIVRE. XLIII Questions (blz. 435—476); SECOND LIVRE XXXVI Questions (blz. 477—516); TROISIESME LIVRE. XXIII Questions (blz. 517—557); QVATRIESME LIVRE, XLVI Questions (blz. 558—642). TABLE DES CHOSES etc. 9 blz. TABLES selon l'ordre de l'ABC, 5 blz. [niet gepagineerd.]

Daarop volgt, als tweede deel:

LA PRATIQVE || D'ARITHMETIQVE [5a]). Nadat STEVIN, in het »AV LECTEVR" (blz. 3—5) »*l'ordre de la Pratique d'A- || rithmetique*" had verdedigd (met verwijzing naar »*nostre Dialectique*"), nader uiteengezet in het ARGVMENT blz. (6), geeft hij

PREMIERE PARTIE || DES QVATRE COMPVTA- || TIONS RATIONELLES (blz. 7—27).

SECONDE PARTIE DE LA || COMPVTATION PROPOR- || TIONELLE (blz. 28—48).

LA || REGLE D'INTEREST || AVEC SES TABLES || CALCVLEES PAR || SIMON STEVIN || *de Bruges* (blz. 49—121), eene eenigzins vermeerderde vertaling van het boekje in Noot 2.

Reigle de faux (blz. 121—131).

LA || DISME. || Enseignant facilement expedier || par nombres entiers sans rom- || puz, tous comptes se rencontrans || aux affaires des Hommes. || *Premierement descripte en Flameng,* || *& maintenant conuertie en Fran- || çois, par* SIMON STEVIN || *de Bruges*" (blz. 132—148) met APPENDICE (blz. 149—160). Dit is de vertaling van het boekje in Noot 1. In het »ARGVMENT" (blz. 6) noemt hij dit »l'vn de la Dixaine, qui se || pourroit dire par autre nom, *La Pratique des* || *Pratiques.*"

TRAICTE DES || INCOMMENSVRABLES || GRANDEVRS. || Auec vne Appendice de l'explica- || tion du Dixiesme liure d'Euclide. || *Descript par* SIMON STEVIN || *de Bruges*" (blz. 161—200), waarin »AV LECTEVR" (blz. 162—170); PREMIERE PARTIE, met V Definitions (blz. 171—173); SECONDE PARTIE met Problemes III (blz. 174—180) en APPENDICE (blz. 187—200). Op blz. 201 volgt de »*Conclusion de ceste oeuure*", waarin hij aankondigt »vne autre pour le || present plus rare, nommée la WEEGCONST, c'est à dire || la *Science de peser*, ensemble telles experiences comme || sont deuenu en effect, par l'assistence & continuelle || diligence, du tresdocte Seigneur Meur. Iehan

Cornets || de Groot, lequel comme Philosophe louable, aiouste || volontiers à toute theorie sa Pratique." STEVINS betrekking tot dezen werd reeds boven besproken; maar nu komt ook die tot LUDOLF VAN CEULEN ter sprake, als hij vervolgt.

»Attendez aussi auec moi, & cela de bref, les oeuures || Mathematiques que divulguera nostre tresfamillier || Mtre Ludolf van Collen; Personnage certes (si ie puis || iuger par les experiences de noz continuelles commu- || nications en l'Agebre [sic], Incommensurables Grandeurs, || Centre de grauité, & autres de semblable estouffe) || tant exerce en ceste discipline, & principalement en || l'Algèbre, que ses escripts ne prouffiteront pas seule- || ment aux apprentifs, mais donneront aussi con- || tentement aux doctes."

Dan vindt men »THESES || MATHEMATIQVES" (VII): »l'heure & lieu de leur expedition se de- || clairera à temps oportun" (blz. 202, 203); of hij die werkelijk ooit heeft verdedigd?

Ten slotte TABLE DES CHOSES (4 blz.) en TABLE ... selon l'ordre de l'ABC (2 blz.) FAVTES (3 blz.) *Extraict du Priuilege*, gedateerd »Fontainebleau || le cincquiesme iour d'Aoust. Lan de grace M.D.LXXXII" (2 blz.) en Extracte van de Privilegie, gedateerd „Delft den XXen De- || cembris/ Anno XVc vierendetachtigh."

Deze uitgave heeft »Leiden 1585". Er kwam later eene uitgaaf »Reueuë, corrigée et augmentée de plusieurs Traictez." Leiden, 1625 [6]). Hier was bijgevoegd het 5e en 6e Boek van Diophantes (blz. 609—677), bewerkt door ALBERT GIRARD.

Het vijfde werk van STEVIN is »De Thiende", reeds in No. 1 behandeld.

6. Het zesde werk is een bundel van drie werken, met afzonderlijke titels en afzonderlijke pagineering; maar niet alleen, dat zij alle drie te Leiden bij FRANÇOYS VAN RAPHELINGHEN, uit de Drukkerij van CHRISTOFFEL PLANTIJN in 1586 zijn uitgekomen, ook een vers van JAN DE GROOT aan het begin, *de feylen des drucx* in 't midden, en de inhoud van den »Anhang" aan het einde van den bundel, bewijzen genoegzaam, dat zij bijeen behooren [7]).

Het eerste dan is DE BEGHINSELEN DER WEEGHCONST. Voorop gaan twee gedichten van JAN DE GROOT, een in 't latijn, de ander in het grieksch »OM DE WEEGHCONST, || WATERWICHT, ENDE || LOCHTWICHT"; bij dit laatste is aangeteekend »Liber hic hodieq. lucifuga. paucorumq. ad-huc testium." Dan de opdracht »Simon Steuin wenscht || RVDOLF DEN IIen || ROOMSCH KEYSER || VEEL GHELVCX", gedateerd »Uyt Leyden || in Oogstmaent des 1586e Iaers" (2 bladz.); en daarop »SIMON STEVINS || VYTSPRAECK (*Elogium*) || VANDE WEERDICHEYT || DER DUYTSCHE TAEL (24 blz.). Hierin tracht hij aan te toonen, dat het Fransch uit het Duitsch (het Nederlandsch) afgeleid is; geeft dan eene lijst van woorden van eene lettergreep; 742 werkwoorden, en 1428 andere woorden, alle zeer geschikt voor zamenstelling; en bewijst dan de voortreffelijkheid en geschiktheid van onze taal ook voor wetenschappelijke werken; hij zal dus daarvan in het vervolg gebruik maken.

Het »CORT BEGRYP" (1 blz.), »*de feilen des drucx verbetert aldus*" (1 blz.), en twee witte bladz. vullen de signatuur aA—dD. Daarop A—M, blz. 1—95.

»HET EERSTE BOVCK || VANDE BEGHINSELEN || DER WEEGCONST, || *Beschreuen door Simon Steuin.* || TEERSTE DEEL || vande Bepalinghen (blz. 1—10). XIII Bepalingen. V Begheerten. HET ANDER DEEL || VANDE VOORSTELLEN" (blz. 11—64). XXVIII Voorstellen.

HET TWEEDE BOVCK || VANDE BEGHINSELEN || DER WEEGHCONST, DWELCK IS || VANDE VINDING DER SWAER- || HEYDTS MIDDELPVNTEN || (EN VANDE PLATTEN) (blz. 65—83). Voorstel I—XIII. NV VANDE VINDING DER || SWAERHEYTSMIDDELPVNTEN VANDE LICHAMEN (blz. 83—95). Voorstel XIIII—XXIIII.

Het tweede stuk »DE WEEGHDAET" [7a]) heeft eene andere opdracht. »Simon Steuin wenscht || DEN BVRGMEESTERS || ENDE REGIERDERS DER || STADT NVRRENBERG VEEL GHELVCX" Als een der redenen, waarom hij juist deze personen koos, geeft hij aan »dat ick my duer sulcx toecommende voorthelpers hoopte te || bereyden, tot seker daden mijns voornemens" (2 blz.). Het »ANDEN LESER" (2 blz.) verklaart de bedoeling van het werk [behandeling der enkelvoudige werktuigen]. »*Ick seg dat de Weeghdaet leert, . . . hoe groote macht || met die waghen (bekender swaerheyt te trecken op een berch ofte hoochde bekender steylheyt) euestaltwichtich, ofte euemachtich sal staen,* ||

sonder t'ansien roersel met siin belet, als assen teghen de bussen, || raeyers teghen de straet, waghen teghen de locht, etc. welcke macht des beletsels [de wrijving] *de Weeghconst niet en leert vinden, om dat sulcke beletselen ende haer gheroerden in gheen everedigheyt en || bestaen*".

Den inhoud vinden wij in het CORT BEGRYP. »DESE Weeghdaet sal veruaten de wercklicke vinding des swaer- || heyts middelplats, swaerheyts middellinien, swaerheyts middel- || punts: Voort de making der alderuolmaecsten Waeghs met verclaring || van etlicke huer ghedaente. Oock den aldervolmaecsten onsel. Wy- || der, de ghedaenten der steerten [hefboomen] daermen ghewelt me doet. De ghedaen- ten der gedreghen ghewichten; Der Windassen; Der ghetrocken ghe- || wichten; Ende des Almachtichs [kaapstander] (blz. 7—43)."

Het derde stuk eindelijk heet »DE BEGHINSELEN DES WATERWICHTS" 7)[7]; de opdracht luidt »Simon Steuin Wenscht || DEN STATEN DER || VEREENICHDE || NEERLANDEN VEEL GHELVCX" (2 blz.), daarop het ANDEN LESER (4 blz.) en CORT BEGRYP.

EERST DE BEPALINGHEN (XI) en BEGHEERTEN (VII) (4 blz.).

NV DE VOORSTELLEN (XXI) (42 bladz.).

Daarop volgt nog:

ANVANG DER || WATERWICHTDAET; ANDEN LEZER en III Voorstellen (9 blz.).

ANHANG, || IN DE WELCKE ONDER || ANDEREN WEERLEYDT WORDEN || ETLICKE DWALINGHEN DER || wichtighe ghedaenten." HOOFTSTIC I—V (18 blz.). In dit laatste blijkt weder van de zamenwerking met JAN DE GROOT »soo den hoochgheleerden H. IAN CORNETS || DE GROOT vlietichste ondersoucker der Naturens verborghenthe- || den, ende ick ghedaen hebben," in »d'eruaringh teghen Aristoteles."

7. Het zevende werk is:

De motu coeli. Leyden, 1589. 8°.

Dit heb ik echter nimmer gezien, noch ergens beschreven gevonden.

8. Het achtste werk daarentegen »VITA POLITICA [8]), Het Burgherlick leven", is des te meer bekend. In het »Goetwillig Leser", in verso van den titel, behandelt hij weder zijn geliefkoosd onderwerp, het misbruik van vreemde woor-

den. »Twaer wel te wenschen, dat het de ghewoonte daer toe ghebrocht || hadde, dat ettelicke Duytsche woorden gheen verclaringhe en be- || houfden deur Griecksche ende Latijnsche... Doch alsoo dit niet ghe- || beurt en is, wij zullen ons ghevoughen nae t'gheval des teghenwoordi- || gen tijdts, stellende in de canten der volghende bladeren, neven sommi- || ghe goede Duytsche woorden, haer ergher ghewonelicke Grieksche || ende Latijnsche."

Dan volgt »SIMON STEUIN VVENSCHT || D'HEER || GOUERT BRASSER || BVRGH-MEESTER DER || STADT DELF VEEL || GHELVCKS" (3 blz.), »waarin hij tot ontschuldiging van de cleenheyt des wercks, ook aanvoert, ten anderen tegenwoordige oeffeninghe || in Wisconstige daet (Praxi Mathematica) daer mede wy hopen te || doen nutten dienst an t'gemeene Landt." Dan »CORT BEGRIP" over de verdeeling in 8 Hooft-stucks.

Blz. 1. Eerste Hooft-stick van de bepalinghe des || Burgherlicks leuens.

Blz. 2. Tweede Hooft-stick welcke eens Burgerlick persoons || rechte Overheydt sy.

Blz. 6. Derde Hooft-stick hoemen inde binne-landtsche || twisten de eerlickste sijde sal kennen ende || kiesen.

Blz 11. Vierde Hooft-stick hoemen hem inde reghieringe || Burgherlick draghen sal.

Blz. 19. Vijfde Hooft-stick hoemen hem Burgherlick dra- || gen sal inde wetten die wy achten ons niet || te verbinden, die twijfelachtigh sijn, ende || teghen malcander strijden.

Blz. 23. Zesde Hooft-stick of de Religie || noodigh is.

Blz. 27. Zevende Hooft-stick hoemen hem in de Religie || Burgherlick draghen sal.

Blz. 32. Achtste Hooft-stick van het Burgherlick || leven in 't ghemeen.

Blz. 35. BESLVYT.

De hier beschreven uitgaaf is van 1611; de eerste druk is reeds van 1590 [9]); later verscheen er een druk van 1684 [10]). Bovendien is het nog afgedrukt in 1646 [11]) achter een boekje Van de Last en Waerdigheyt eener Ambassadeurs. Door Mons. DE VILLIERS HOTMAN [12]).

9. Het negende werk is de zeldzame »Appendice Alge-

braique" [13]), waarschijnlijk bestemd als supplement op zijne Arithmetique. Het handelt over de oplossing van hoogere machts-vergelijkingen, en deelt ons mede, dat LUDOLF VAN CEULEN ook datzelfde onderwerp met vrucht had behandeld.

10. Het tiende werk is »DE STERCTENBOVWING" [14]). Eerst de opdracht aan »*Joncker* HENDRICK *van* BRIENEN" (4 blz.) »CORTBEGRIP" (2 blz.), niet genummerd. Daarop

1e HOOFTSTICK || *Inhoudende de bepalinghen der eyghen na- || men ende woorden die tot desen || handel behooren* (blz. 1—7).

2e HOOFTSTICK || *Inhoudende voorbeeltsche teyckening, van een || seshouckige sterckte int cleen* (blz. 7–27).

3e HOOFTSTICK || *Vande grontteyckening der wesentlicke sterc- ten || int groot, ende van t' ghebou dat || daer op commen moet* (blz. 27—32).

4e HOOFTSTICK || *Hoemen de anderhouckighe dan seshouckighe || stercten soo int groot als int cleen || teyckenen sal* (blz. 33—34).

5e HOOFTSTICK || *Inhoudende het wit ofte voornaemlick op- sicht, || datmen behouft tot de veroirdening || der sterckten deses tijts* (blz. 35—39).

6e HOOFTSTICK || *Van ettelicke* [17] *verschillen op een vol- commen || stercte als de voorgaende* (blz. 39—71).

7e HOOFTSTICK, VAN || *sommighe* [12] *verschillen der onvol- commen sterckten, te || weten diemen veroirdenen moet na gele- ghentheyt || der plaetsen, ende ander omstandighen* (blz. 71—91).

In het »BESLUYT" zegt hij: »Angaende alle dwalinghen die den || ervaren Leser daer in vinden sal, ick wilde wel dat hyse met teghenscrijven || ... an yghelick openbaer || maeckte."

Ten slotte »VERBETERT DE FAVTEN ALDVS."

Inde { } *sydens* { } *reghel, voor* { } *stelt* {. Tusschen de haakjes op elf regels, de verschillende fouten; eene zeer praktische voorstelling.

11. Het elfde werk is zijn »Haven-vinding" [15]), hoezeer zijn naam daarbij voorloopig niet voorkomt. In het »*Priuilegie*" wordt vermeld, dat RAPHALENGIUS „van meyninghe is, [het] soo int Latyn als int Francohois, ende Duytsch, ofte oyck in ander spraken || te laten uytgaen."

Het doel van dit boekje is om de plaats op zee te bepalen door middel van het kompas; hij zegt daaromtrent (blz. 3).

»Want sommighe verhopende || die te vinden deur de verscheenwysing der zeylnael- || de, hebben de selve verscheenwysing een aspunt || toeghescreven, die noemende seylsteens aspunt, maer || men bevint na wyder ervaringhen, dat die afwijckin- || ghen sich na gheen aspunt en schicken. Doch so heeft || nochtans het soucken van dien, middel veroirsaect om tot een begheerde hauen te gheraken."

En laat daarop volgen (blz. 7).

»Nu alsoo Sijn Excellentie de voorgaen- || de saken rijpelick overdocht hadde, . . . heeft . . . se- || ker oirden ghestelt, ende onderwijs ghegheven, . . . Namelick datse || van nu voortaen tot veel plaetsen daerse commen, || metter daet ende wel sorchvuldelick ondersoucken || de afwijckinghen der seylnaelde vant noorden, ne- || mende daer toe reetschap wel bequaem. Ende van || haer reysen weerghekeert sijnde, daer af ghetrouwe- || lick verwittingh doen. . . ende ten ghemeenen oirboire an yghelicken || openbaer maken, || . . . Maer . . . soo sullen wy hier stellen een begin, van t'ghene men || deur breeder ervaringhen in wille is voorder te ver- || volghen, tafelwys vervatende de naeldwysighen die- der alree gagheslaghen sijn, welck den hoochgeleer- || den Eertrycxschrijver Heer Petrus Plancius, deur || langhdeurighen arbeyt, en niet sonder groote costen by || een vergaert heeft, uijt verscheyden houcken des eert- || bodems."

In een »Byvovgh" (blz. 28) zegt Stevin: »Ghemerckt de ghegheven naeldwysing || en breede tsamen een seker punt anwijsen, soo || wel op zee als te lande; Soo volght daer uyt meughe- || lick te sijn, dat schepen op een bestemde plaets in zee, || verre van landt malcander vinden connen."

Van dit werk verscheen nog in hetzelfde jaar eene latijnsche vertaling van Hugo de Groot, »*ΛΙΜΕΝΕΥΡΕΤΙΚΗ* sive portuum investigandorum ratio" [16]) mede zonder des schrijvers naam, hoezeer op de 5^{de} bladz. der opdracht »Dvci || senatvi, popvloqve || veneto" voorkomt »*à Mathematico suo || stevino conscriptam*". Op deze opdracht volgt een »Amice lector", een lijstje van uitdrukkingen, met de latijnsche en grieksche vertaling.

Verder kwam er in 1597 eene fransche vertaling »Le Trouve-port" [17]) en een engelsche van EDMUND WRIGHT »The Haven finding Art" [18]).

12. Achter het beschreven exemplaar van het boek in noot 15), dat aan de Kon. bibliotheek te 's Hage behoort, komt voor »Een corte onderrichtinge van ALBERT HAYEN" [19]), welk werk tegen het vorige geschreven werd. In de opdracht »ALLEN DEN GENEN ‖ DIE DAT OOST ENDE WEST ‖ SEGGEN GEVONDEN TE HEB- ‖ ben, wenscht Albert Haeyen een on- ‖ partydigh oordeel, int geen zy ‖ voor handen genomen ‖ hebben", blijkt de reden aldus. »Ende dewyle my wel bewust is, dat daer vele zijn, ‖ die haer dat Leermeesterschap der Stuerluyden onderwinden, die haer daghen noyt by der Zee ghevaren en hebben; veel min daer in van jonghs op gheoeffent zijn. Soo heeft dat my (ghelijck menigh Zeevarent man) ‖ verwondert, wat haer beweeght heeft, om dusdanighe Zeevarende din- ‖ gen ter handt te nemen, niet alleen om Stuerluyden te leeren oft te Au- ‖ ctoriseren...ende dewyle daer in hoe langher hoe meer geprocedeert wordt, alst blijckt aen een boecxken ‖ gheintituleert die Havenvindinge, waer door die swarigheyt by der Zee ‖ hoe langher hoe grooter wordt. Soo heeft dat mijn raedtsaem gedocht, ‖ met raedt van goede vrienden, een boecxkē daer tegē te schrijvē, om den ‖ Zeevarende luyden te openbaren, wat perickel daer van by der zee te ver- ‖ wachten is"

Men ziet het, dat hier dezelfde jaloerschheid in het spel is, waartegen JAN HENDRIK JARICHS VAN DER LEY, vijftien jaren later zoo hard te strijden had (zie Bouwstoffen, N^o^. XXII). Maar dit boekje bevat toch veel merkwaardigs, en komt de schrijver op voor de, naar zijne meening, gekrenkte rechten van de zeevaartkunst en van de stuurlieden; hij doet dit evenzeer voor de matrozen, en de extra-voordeelen, die hun voortijds toekwamen „om dat sy wilden dat een Bootman wat int Schip hebben soude... dan heeft hij dat Schip lief/ ende soo wordt haer goedt te beter bewaert/ daer sy wel in ghehandelt hebben."

Overigens moge „Het inhout van desen Boeck" doen zien wat het bevat.

't Eerste Deel/ begrijpt in hem/ hoemen den Octroy van myn Caertboeck || verstaen sal. Fol. 1.

't Weede Deel/ wordt ghehandelt teghens een boecxken/ geintituleert die Havenvindinghe. Fol. 7.

't Derde Deel/ wordt bewesen hoe ongestadigh dese Havẽ vinders in haer || voorgheven syn. Fol. 16.

't Vierde Deel, bewyst/ hoemen deze Naeldt-wysinghe vercregen hebben. || Fol. 20.

't Vyfde Deel/ wordt bewesen/ dat den byvough op een stroo ghebout is || Fol. 24.

't Seste Deel handelt/ hoemen dat werck der Naeldt-wysinghe noch ver- || der sullen laten ondersoecken. Fol. 26.

't Sevenste Deel handelt/ wat moyten om die Noorden aen-ghevanghen || is om China te soecken/ ende wat uytcomst 'tselfde ghehadt heeft || Fol. 27.

't Achste Deel bewyst/ dat daer niet weynigh aen die Zee-vaert eñ Leer- || meesters van dien gheleghen is. Fol. 39.

't Neghende Deel handelt van die Pascaerten ende Graedt-boogen/ wat || swarigheyt daer uyt te verwachten is. Fol. 41.

't Tiende Deel handelt/ hoe Godt die Heer/ door die handelingh eñ Kunst- || vindingh alle dingh onderhoudt. Fol. 44.

't Elfde Deel bewyst/ hoe een arbeyder syn loon waert is. [Fol. 45].

't Waelfde Deel/ wat swarigheyt door die ryckdommen in dese landen || voorgevallen syn. Fol. 49.

't Derthiende Deel wordt verandtwoordt/ dat wy al te hart hier in zyn || voort ghevaren. Fol. 51.

't Veerthiende Deel/ wat swarigheydt dat by der Zee daegelicks voorvalt/ || door de swelgery ende dronkenschap. Fol. 53.

Doch ook Albert Haeyen bleef niet in het rustig bezit van het door hem (naar zijn eigene meening althans) herwonnen terrein, maar moest daarop een aanval van Robbert Robbertz, le canu, verduren in diens »Breeder verklaringh op de waerschouwingh tegen Albert Haeyen'' [20]).

13. Het twaalfde zijner werken heet »Wisconstige Gedachtenissen'', en is reeds in Noot 52 van Bouwstoffen XXI uitvoerig beschreven. Men zag daar, dat het de wetenschappen betreft, waarin Prins Maurits »hem gheoeffent heeft''. Daaronder vindt men de werken van N⁰. 6 en 11, ten deele veranderd, ten deele vermeerderd.

Dit werk werd door den Leidschen Hoogleeraar WILLEBRORDUS SNELLIUS in het latijn vertaald, onder den titel »HYPOMNEMATA MATHEMATICA" in 2 deelen, folio [21]). Zij zijn verdeeld in 5 Tomi, waarvan Tomus I het eerste deel, en Tomi II—V het tweede deel vormen. Zij behandelen:

Primus. De Cosmographia.

Secundus. De Praxi Geometrica.

Tertius. De Statica.

Quartus. De Optica.

Quintus. De Miscellaneis.

TOMUS I. DE COSMOGRAPHIA wordt verdeeld in 3 Partes.

PARS I. *De doctrina Triangulorum*, blz. 1—343.

Liber I. De Fabrica Canonis sinuum, blz. 1—140.

Liber II. De Triangulis planis, blz. 141—178.

Liber III. De Tripleuris sphaericis, blz. 179—309. Appendix, blz. 311—323.

Liber IV. De sphaerarum coelestium problematis, quae sphaericorum triangulorum ratiocinio expediuntur, blz. 325—343.

PARS II. *De Geographia*, blz. 1—188.

Liber I. De Geographiae definitionibus generatim, blz. 1—45.

Liber II. De ejus Hylocinesi, blz. 47—67.

Liber III. De Atmaeoresi, blz. 69—81.

Liber IV. De Nausiporia (Histiodromia), blz. 83—159.

Liber V. De Limeneuretica, blz. 161—173.

Liber VI. De Aestibus marinis, blz. 175—188.

PARS III. *De Astronomia seu orbium coelestium conversione et motu*, blz. 1—335.

Liber I. De planetarum, syderumque coelo affixorum motu ex observationum Ephemeridis, terra immota deducto, blz. 1—114.

Liber II. De motus planetarum investigatione ex ratiocinio mathematico terra stabili, & hypothesi anomaliae primae, blz. 115—231.

Liber III. De anomalia secunda: ubi Coperniceae hypotheses in terrae conversione, & motu exprimuntur, blz. 233—296. Additamentum, blz 297—309. Appendix, blz. 310—335.

Het tweede deel [22]) bevat:

Tomvs II. De Geometriae praxi, blz. 1—184.

Liber I. De Magnitvdinvm descriptione, blz. 5—40.

Liber II. De Magnitvdinvm dimensione, blz. 41—89.

Liber III. De Magnitvdinvm Additione, Subductione, Multiplicatione & Divisione, blz. 91—109.

Liber IV. De Magnitvdinvm proportione, blz. 111—122.

Liber V. De sectione proportionali, blz. 123—153.

Liber VI. De Magnitvdinvm in alias *ΟΜΟΓΕΝΕΑΣ* transformatione, blz. 155—184.

Tomvs III. De optica, blz. 1—100.

Liber I. De Sciagraphia, blz. 3—76. Additamentum, blz. 77—85.

Liber II. De primis elementis catoptricae, blz 87—97. Additamentvm, blz. 98—100.

Tomvs IV. De statica, blz. 1—196.

Liber I. De Staticae elementis, blz. 3—51.

Liber II. De inveniendo gravitatis centro, blz 53—77.

Liber III. De Staticae praxi, blz. 79—108.

Liber IV. De Hydrostatices elementis, blz. 109—141.

Liber V. De initiis praxis Hydrostatices, blz. 143—149. Appendix, blz. 150—155. Additamentum (IV partes), blz. 157—196.

Tomvs V. De miscellaneis, blz. 1—214; hoezeer onderscheidene stukken, meest tabellen, nog daarenboven eene afzonderlijke paginatuur hebben.

Pars I. De Annotationibus Arithmeticis, blz. 3—9.

Pars II. De Apologistica Principvm ratiocinio italico, blz. 1—204.

Indices enz., blz. 205—214, waaronder blz. 205 »De iis qvae hic etiamnvm deside- || *rantur & quorum tituli quamvis in argumentis & bre- || viariis inscripti sint, postea tamen descripta non sunt.*" Uit deze opgave blijkt, dat hier hetzelfde voorkomt, en ook evenzeer hetzelfde ontbreekt, als in het oorspronkelijke werk.

14. Nog is er van dit werk eene fransche vertaling verschenen door Jean Tuning, Secretaris van Prins Frederik Hendrik [23]); vier volumes in een deel. Folio. Deze is echter verre van volledig.

Van de »Cosmographie" komt alleen voor het 1ste gedeelte »Traicte des Triangles". Van »la Practique de Geometrie" komen alleen de vier eerste boeken voor. Van »des Perspectives" heeft men alleen het 1ste boek.

Het vierde stuk ontbreekt geheel, en van het vijfde vindt men alleen het tweede gedeelte.

15. Als afzonderlijke herdrukken verschenen nog de Vorstelijcke Boeckhouding [24]) en de Livre de compte de Prince [25]). Naar het schijnt is dit ook het geval met de »Practicque de la Géométrie".

Maar zeker met de »Calculation der Tabularum Sinuum, Tangentium und Secantium" [26]), uitgegeven door den Hoogleeraar DANIEL SCHWENTER. Na de opdracht „Dem WolEdlen vnd || Gestrengen Vrbano-Casparo || von Failtsch vff Fürbaw/ Kürbitz vnd || Schwärtzenbach bey der Saal/ ec. Fürstl || Brandb. geheimsten Raht/ wolverordneten || Canzlern vnd Lehen-Richtern/ Oberhalb || Gebirgs zu Bayreuth/ ec." gedateerd „Datum Nürnberg/ am Tag Jo- || hannis desz Tauffers/ als unsers Se- || ligmachers Vorlauffer/ den 24. Ju- || nii/ dieses 1628. Jahrs." van „Simon Halbmayer Bür- || ger vnd Buchhändler || daselbsten." (6 blz.) volgt de „Vorrede an den Kunst- || liebenden Leser" gedateerd „Altdorf den || 20 Junii Anno 1628. || M. Daniel Schwen- || ter Professor Altdor- || phinus" (16 bladz.). Hierin zegt SCHWENTER na een overzicht van de geschiedenis van trigonometrische tafels gegeven te hebben, „Es were ferrner zu wünschen/ || Simon Stevin hätte in diesem seinem lob- || würdigen Werck/ avch etwas von Sphe- || rischen Triangeln geschrieben" en daarom voegt hij een viertal AXIOMATA van PITISCUS in, om daarin te voorzien. Het blijkt dus, dat hij of een niet volledig exemplaar van de Wisconstighe Gedachtenissen heeft gehad, of bij de vertaling van het eerste en tweede Bouck, het daaropvolgende derde Bouck over het hoofd heeft gezien. Nu volgt (blz. 1—84).

„Der erste Theil dieses || Tractats/ darinnen die Calcu- || lation der Tabularum Sinuum, || Tangentium vnd Secantium, aufs Geo- || metrischen Funtament geleh- || ret vnd demonstrirt wird" en (blz. 85—154) Der ander Theil dieses || Tractats/ darin̄ der Gebrauch || der Tabularum Sinuum Tangen- || tium vnd Secantium, in auszrech= || nung der flachen Triangeln ge= || wiesen wird." Ten slotte het „Register vnd Innhalt || dieses Tractats" (8 blz.).

Daarop volgen de »TABULAE SINUUM TANGENTIUM und SECANTIUM", die, naar de voorrede, berekend zijn door Herr M. JOHAN PRAETORIUS »Mathe- || maticorum sui seculi lumen, p. m. mein || trewer gewesener Praeceptor."

16. Als het dertiende zijner werken zoude nu volgen »Gemeene Reghel op Gesanterie, 1605"; dat ik echter nimmer gezien heb. Later zal men dit terugvinden in de Materiae Politicae.

17. Omtrent het veertiende werk is meer bekend.

De eerste uitgave te Rotterdam bij Jan van Waesberghe 1617, folio, bevat vooreerst de »CASTRAMETATIO. *Dat is* LEGERMETING" 27) en vervolgens »de NIEUWE MANIERE VAN STERCTEBOV door SPILSLUYZEN" 27a). De opdracht »ERNTFESTE, EERSAME || HOOCH-GHELEERDE, VOOR- || ZIENIGHE ENDE ZEER DISCRETE HEE- || REN || MYNE HEEREN BAILLI, BVRGEMEESTEREN, || PENSIONARIS, SCHEPENEN ENDE GHEMEE- || NE VROETSCHAP DER STADT ROTTERDAM || van IAN van WAESBERGHE" »dewelcke ic tot mynen koste gedruct hebbe" (2 blz.). Daarop »LOFDIGHT OP DE || LEGHERMETINGH door A. S. (1 blz.)." In verso een fraai portret van Prins MAURITS; de volgende blz. bevat zijne wapens en in verso EER-DIGHT op MEESTER SIMON STEVIN, mede van A. S.

A—G, blz. 1—55, bevatten KORTBEGRYP (blz. 1, 2) en het werk in Hooftstvc 1—4, met de volgende titels.

Blz. 3—15. 1 HOOFTSTVC. *Vande bepaling of beschryving der || Leghermeting.*

Blz. 15—32. 2 HOOFTSTVC. *Vande Lysten inhoudende tghene in || een teghenwoordich Legher moet ghelogeert worden.*

Blz. 32—42. 3 HOOFTSTVC. *Vande Teeckening of meting des || Leghers.*

Blz. 42—55. 4 HOOFTSTVC. *Van tghene myns ghevoelens oorboor || ende noodigh zoude zijn totte gheduerighe form eens Leghers || die altijt de zelve mocht blijven.*

Het tweede werk, A I, blz. 1—59, bevat KORTBEGRYP (blz. 1) en het werk in Hooftstvc 1—4 [blz. 33 en 34 zijn ingevouwen omdat zij, wegens de figuur, op grooter formaat zijn gedrukt] met de titels.

Blz. 2—12. 1 HOOFTSTVC. *Vande nieuwe vondt der schuerende Spil- || sluysen.*

Blz. 12—21. 2 HOOFTSTVC. *Vande verstijving der gronden van Sluyzen en || Beeren.*

Blz. 21—49. 3 HOOFTSTVC. *Inhoudende ghemeenen reghel, van de steden nieu || manier van versterking, door schuerende Spilsluysen.*

Blz. 49 - 59. 4 HOOFTSTVC. *Inhoudende voorbeelden, hoemen eenighe Steden || die dadelic in wesen zyn, door de ghemeene reghelen des 3 Hooftstuck || kan verstercken.*

Ten slotte INHOVT (1 blz.), AENHANG (2 blz.) niet genummerd. Dit laatste bevat de toepassing op eene »groote vierhoeckige schans."

Van dit werk verscheen een herdruk te Leyden 1633 in folio [28]). Na den eenigzins verschillenden titel volgt het LOF-DICHT (1 blz.) tot EER-DICHT (1 blz.) beide van A. S.; nu een opdracht »AEN DE HOOCH MOGEN- || DE HEEREN DE GENERALE || STATEN DER VEREENICHDE NEDER- || LANDEN" gedateerd »inden HAEGH, den 4 November, 1617 || door Uwe *Hooghmogentheden* Leghermeter en onderdani- || ghen Dienaer || *Symon Stevyn*" (2 blz.), (welke opdracht soms ook bij de uitgave van noot 27 voorkomt). Daarop KORT BEGRYP (2 blz.) alle ongenummerd. Dan het werk blz. 1—52. Dan met nieuwen titel het tweede werk »Nieuwe manier enz." [28a]). Hier een opdracht aan dezelfde gedateerd, »21 December 1617" van *Symon Stevyn* (blz. 3, 4), die ook wel voorkomt in de eerste uitgaaf. Dan KORT BEGRYP (blz. 5) en het werk met INHOVT en AENHANG (blz. 1—66).

18. Van dit belangrijke werk verscheen er al dadelijk eene fransche vertaling LA CASTRAMETATION [29]) en NOVVELLE MANIERE *DE* FORTIFICATION PAR ESCLVSES [29a]). Beide à LEYDEN chez Matthieu & Bonaventure Elzevier, 1618, folio. Beide hebben een opdracht »AVX TRES-PUISSANTS || SEIGNEVRS LES ESTATS GENERAVX || DES PROVINCES VNIES, gedateerd. »Escrit à la HAYE, le 12 de Mars 1618, par le || Castrametateur & humble Serviteur de voz || *Seigneuries Illustrissimes.* || SYMON STEVIN"; zoodat deze uitgaaf van STEVIN zelven is.

De inhoud is in beide tevens verdeeld in Chapitres 1 à 4, even als in de oorspronkelijke uitgave.

Deze is echter een herdruk van een andere uitgaaf in datzelfde jaar te Rotterdam »chez JEAN WAESBERGE" [30]). En van deze bestaat weder een uitgaaf te Leiden, chez Matthieu & Bonaventure Elzevier [30a]); deze was echter evenzeer gedrukt bij Jan van Waesbergen te Rotterdam. Er bestaan eenige wijzigingen in ornamenten, enz.

19. En verder zijn deze werken ook in het hoogduitsch vertaald »Festing-Bauung" [31]), 1618, met een herdruk, 1623 [31a]) en Wasserbau, 1631 [32]). Beide in 4⁰.

20. Gaan wij thans over tot het vijftiende werk »Les oeuvres Mathematiques de SIMON STEVIN DE BRUGES, Augmentées par ALBERT GIRARD. 1634 [33]). De opdracht »*A Tres-hauts & Tres-puissants Seigneurs*, || Messeigneurs les || ESTATS GENERAUX || DE PAÏS BAS UNIS || ET || *A Tres-haut & Tres-illustre Prince*, || Monseigneur le || PRINCE D'AURENGE, || Gouverneur desdites Provinces, General || par Mer & par Terre, &c." is geteekend »les Tres-humbles & Tres-obeissants subjets servi- || teurs & servantes, la vefve & les enfans orphe- || lins de feu || ALBERT GIRARD." Deze begint aldus: »Voici une pauvre vefve avec onze || enfans orphelins, ausquels le mari || & pere, decedé il y a un an, n'a laissé || qu'une bonne reputation... quelques monuments...il ne nous en reste rien || de complet, que la version des oeuvres du feu sieur || STEVIN, ausquelles il a adjousté plusieurs beaux es- || clarcissemens."

In verso hiervan volgt de inhoud van deze verzameling.

»Le contenu du present oeuvre, || divisé en six Volumes. || *Assavoir:* ||

I. L'ARITHMETIQUE, *Contenant:* Les Computations des nombres Arithmetiques || ou vulgaires: aussi l'Algebre, avec les equations des cinq quantitez.

[Blz. 1—19. LE PREMIER LIVRE D'ARITHMETIQVE.

Blz. 20—101. LE SECOND LIVRE DE L'OPERATION].

Les six livres D'ALGEBRE DE DIOPHANTE D'ALEXANDRIE: dont les || quatre premiers sont de la traduction de *Simon Stevin;* et les deux derniers sont nouvel- || lement traduicts par *Albert Girard*, *Samielois*.

[Blz. 102—152. LIVRE I—IV. D'ALGEBRE *DE* DIOPHANTE D'ALEXANDRIE.

Blz. 153—170. LIVRE V, VI. D'ALGEBRE *DE* DIOPHANTE D'ALEXANDRIE.

Blz. 170—174. TABLES DES CHOSES PRINCIPALES »selon l'ordre qu'elles sont descriptes" en »selon l'ordre de l'ABC"].

La PRACTIQVE D'ARITHMETIQVE de *Simon Stevin*, contenant: LES TABLES || D'INTEREST, LA DISME: Item un Traicté des Incommensurables grandeurs: || avec l'Explication du dixiesme livre d'Euclide."

[Blz. 175—185. LA PRACTIQVE D'ARIHMETIQVE [sic].

Blz. 185—206. LA REIGLE D'INTEREST AVEC SES TABLES CALCVLÉES.

Blz. 206—213. LA DISME.

Blz. 213—218. TRAICTE DES INCOMMENSVRABLES GRANDEVRS.

Blz. 218—222. APPENDICE. *En laquelle est sommairement declaré, le contenu du Dixiesme Livre d'Euclide.*

2 Blz. ongenummerd. Twee TABLES als boven.].

Het volgende begint weder met blz. 1.

Suivent les Memoires Mathematiques du PRINCE || MAVRICE DE NASSAV. ||

II. [DEVXIESME VOLVME]. LA COSMOGRAPHIE, *Contenant:* LA DOCTRINE DES TRIAN- || GLES, LA GEOGRAPHIE, & L'ASTRONOMIE.

[Blz. 1—103. DOCTRINE DES TRIANGLES. 4 Livres. De la Construction des Tables. Des Triangles Plans. Des Triangles Spheriques. Des Problemes Sphériques Celestes.

Blz. 104—183. GEOGRAPHIE. 6 Livres. Des Definitions en general — du changement & mouvement de sa matiere — de la hauteur des nuees & vapeurs — des rombs — de la maniere de trouver les havres & ports de mer — de la Theorie du flux & reflux de la marée.

Blz. 183—340. ASTRONOMIE. 3 Livres. l'Invention du cours des Planetes, & des estoiles fixes, par les Ephemerides observées: le tout fondé sur la supposition que la terre est stable ou fixe; c'est en un mot, sur l'hypothese de terre immobile. De l'invention du cours des Planetes par voye Mathematique, avec l'hypothese de terre immobile, & de la premiere inegalité. De la seconde inegalité, où se trouve l'hypothese de terre mobile de Copernique.].

III. [TROISIESME VOLVME]. LA PRACTIQVE DE GEOMETRIE.

[Blz. 341—432. Livres I à VI.].

IV. [QVATRIESME VOLVME]. L'ART PONDERABLE, OU LA STATIQVE.

[Blz. 433—500. Livres I à V.

Blz. 501—503. APPENDICE.

Blz. 504—520. ADJONCTION. Parties I—VI.].

V. [CINQVIESME VOLVME]. L'OPTIQVE.

[Blz. 521—571. Livre I et II.

Blz. 571—572 APPENDICE.].

Et apres les susdites Memoires || .

VI. [SIXIESME VOLVME]. LA CASTRAMETATION, || LA FORTIFICATION PAR ESCLUSES, || LA FORTIFICATION.

[Blz. 573—600. LA CASTRAMETATION. 4 Chapitres.

Blz. 601—643. NOUVELLE MANIERE DE FORTIFICATION PAR ESCLUSES. 4 Chapitres.

Blz. 644—678. LA FORTIFICATION.].

Men ziet hieruit, dat GIRARD werkelijk alle werken van STEVIN heeft opgenomen, behalve die van Noot 3, 4, 8, 13, 24.

21. Ten slotte het zestiende werk »MATERIAE POLITICAE BVRGHERLICKE STOFFEN"... *Beschreven deur* SIMON STEVIN... *en uyt zyn naegelate Hantschriften by een gestelt door Syn Soon* HENDRICK STEVIN... Leyden (1649). 4°. 34). Van dit werk kwamen er twee deelen uit. De opdracht van het eerste daarvan luidt »*An den* || DOORLVCHTICHSTEN || Hooghstgheboren Vorst en Hee- || re WILHEM bij den Gratien Gods Prince van || Orangien, Grave van Nassau, &c, &c [veel meer titels dan vroeger voorkwamen]. *Als mede an den* || WELGHEBOREN GENA- || dighen Heere, JOHAN WOL- || PHERD Heere van Brederode, Souverain van Via- || ne, Ameyde, &c. Erffburchgraeft tot Vtrecht, Heere van || Cloetingen, Haesten, Herwynen, Noordeloos, der Landen en de Heerlic- || heden van Vosholl &c. &c." gedateerd. »Geschreven in Alphen in Sprockel des Iaers 1649. Hendrick Stevin" (12 blz.). Dan »*Hendrick Stevin* || Aenden || LESER" (5 blz.). Dan »CORTBEGRYP || *Deser* || BVRGHERLICKE || STOFFEN. || Deser Burgherlicke Stoffen sullen eerst beschreven wor- || den acht Onderscheytsels, daer af ||

Het 1 Onderscheyt handelt vande Oirdening der Steden heb- || bende tot een Byvoug de Huysoirdening. [blz. 1—128].

Het 2 Onderscheyt van het Burgherlick leven in 't Iaer 1590 || eerst uytghegheven; en nu vermeerdert met een Anhang || teghen het 18 Cap: der Prince van Machiavel; waer by || ghevought is Des Keyzers Octaviaens ghevoelen en ander || ghetuyghenissen angaende Phalaris [blz. 1—45]; vooraan eene opdracht van SIMON STEVIN aan D'HEER || GOVERT BRASSER || BURGH-MEESTER DER STADT || DELF. (2 blz.).

Het 3 Onderscheyt van der Raden oirden. [blz. 47—86].

Het 4 Onderscheyt vande Amptlienkiesing en ghemeene an- || clevinghen der Ampten. [blz 87—121].

Het 5 Onderscheyt vande Ghemeene reghel op Ghesanterie || en Ghesantsverhael. [blz. 123—141].

Het 6 Onderscheyt vande Verdrucking, (Represalie) [blz. 143—152].

Het 7 Onderscheyt vande Gheduerighe verlegging des || Crychsvolcx. [blz. 153—173].

Het 8 Onderscheyt vande Crychspiegheling. [blz. 175—173] [lees 273]. [VERVANGENDE *D'OIRDEN* DER AMPT || *lien eens Legers met haer en ander eyghen Cryghwoordens Bepalinghen. Mitsgaders ettelicke ghemeene reghelen en noodtwendighe ghebruycken in Crijch vereyscht, die men meest alle nu ter tydt niet en gebruyckt";* waarbij een afzonderlijke opdracht aan LODEWYCK VAN NASSAU (2 blz.) en »*An den Lezer*" (1 blz.) door *Hendrick Stevin*; *Vande Beteyckeningh des woordts Cryghspiegelingh.* (2 blz.); CORTBEGRIP (2 blz.).]

Hier achter sal volgen Verrechting van Domeyne mette || Contrerolle en ander behouften van dien, waer onder mede || begrepen is, om redenen t'seynder plaets daer af te gheven, de || Vorstelicke Bouckhouding Op de Italiaensche wijse int || Iaer 1608 eerst uytghegheven" [een tweede deel met nieuwen titel].

Onder al deze onderwerpen vinden wij een drietal, dat reeds vroeger voorkwam; de overigen zijn nu voor 't eerst uit de handschriften van SIMON STEVIN verzameld. De noten van zijn zoon zijn telkens door de letters H. S. gemerkt, Deze heeft hier, achter het uitgeschreven Kort Begryp, een stukje van zich zelven ingevoegd, met het opschrift:

»Het heeft my goet gedacht, om reden 'tsijnder plaets ‖ te geven, hier voor dese *Burgerlicke stoffen* ‖ in te vougen mijne ‖ LOCHENING VAN ‖ EEN EWICH ROERSEL ‖ *Gesecht* ‖ PERPETVVM MOBILE. Ende ‖ *Bevestiging dat in yder eerts dinck seker eenich punt sy,* ‖ *'twelck allerley stants syn swaerheyts midpunt is.* ‖ Met een wonderlick Geschil" (8 blz. ongenummerd). Wat het laatste betreft, eindigt hij »Ende den eer- ‖ sten die ons hier op na de waerheyt sal connen en willen ant- ‖ woorden, eer wy die ons selven laten ontvallen, dien belo- ‖ ven wy ter gedachtenis, een boeck deser *Burgherlicke Stoffen* ‖ ten prijse, indien hij des begeert. ‖ *Wonder en is geen wonder. En geen wonder is wonder.* ‖ *Vyt missen en merken volght de* Wisconst."

22. Het voormelde tweede deel [34a]) geeft, na een opdracht aan »*Me-vrouwe* DE PRINCESSE VAN ORANGE &c DOUAGIERE", van H. Stevin, eene TSAEMSPRAECK tusschen St(EVIN) en s(YN) v(ORSTELICKE) G(ENADE) over het ontstaan van dit werk (blz. 1 – 14). Daarop EERSTE DEEL, inhoudende verbeteringh ‖ van eenighe insettinghen die in reke- ‖ ningh van Domeine verbete- ‖ ringh vereysschen" (blz. 15—39). TWEEDE DEEL van de maniere der Contre- ‖ rolle in Rekeningh van ‖ Domeine" (blz. 41—125). Dan ANHANGH, *sal drie deelen hebben.* I. GEMEENE REGEL ‖ Vande weerde der Granen ‖ en Landen in 't ansien ‖ der maten" (blz. 127—136). II. Verclaringh op de oirden der ‖ maendelicke rekeninghen ‖ vande Garde (blz. 137—145). III. Van ettelicke anteyckeninghen ‖ de stoff van Finance en Do- ‖ meine angaende (blz. 146—156). Daarop de »VORSTELICKE ‖ BOUCKHOUDING ‖ IN ‖ DOMEINE EN FINANCE ‖ EXTRAORDINAIRE. ‖ Op de ‖ Italiaensche Wijse." Na de opdracht » AN MYN HEER ‖ MAXIMILIAEN DE BETHVNE, gedateerd inden ‖ Haech inde maent van Augustus 1607," door SIMON STEVIN (blz. 3—9) en het ANDEN LESER (blz. 10—12) volgt »COOPMANS- BOVCKHOVDING ‖ OP DE ITALIAEN- ‖ SCHE WYSE" in X Hooftsticken (blz. 14—26, 1—6, 1— 51). Dan »BOUCKHOUDING ‖ IN DOMEINE ‖ OP DE ITALIAEN- ‖ SCHE WYSE. X Hooftsticken (blz. 54—75, 1—8, 1—57). BOUCKHOUDING ‖ IN VOR-

STELICKE || DISPENSE op de ita- || liaensche wyse" in VIII Hooftsticken (blz. 59—104). BOUCKHOUDING || IN FINANCE EXTRA- || ORDINAIRE OP DE ITA- || LIAENSCHE WYSE in II Hooftsticken (blz. 105—112). NU VANDE | BOUCKHOUDING || DER DISPENSE VANDE EXTRAORDINAIRE || FINANCE" in VII Hooftsticken (blz. 113—138).

Aan het slot »TYTEL || EN CORTBEGRYPEN" (blz. 139—154), bevattende de inhoudsopgave »der Stucken welcke ghehooren totte wis-konstighe gedachtenissen."

23. De hier beschreven uitgave is eigenlijk een herdruk »voor *Adryaen Rosenboom*, Schout tot Alphen", maar evenzeer ter Druckerye van IVSTVS LIVIVS. *In 't tweede Iaer des Vredes.* De eerste uitgave is van deze onderscheiding, vooral door de opdrachten, die bij ieder Onderscheyd voorkomen.

Het is later in 1686 nog eens herdrukt, echter met anderen titel [35]).

24. Nog komt er een werk voor op zijn naam: »Grondsteen van een vaste regeering", waarvan er in 1754 een tweede druk moet verschenen zijn.

25. Dezelfde zoon HENDRICK STEVIN gaf in 1667 zijn »WISCONSTIGH FILOSOFISCH BEDRYF in 14 Boecken in 4°." [36]). Dit werk behoort nog tot ons onderwerp, omdat het, al zij het niet op den titel vermeld, verschillende stukken van SIMON STEVIN bevat. Bovendien leeren wij daaruit onderscheidene bijzonderheden omtrent beide mannen kennen.

In het I BOEC || »VANT || AENLEGGEN TER || WISCONTIGE [sic] FILOSOFI", 1 Voorstel, zegt hij, dat hij »op het seste jaer des levens Vaderloos werd," dus in 1614 geboren werd; dat hij »ooc nu en dan... aen- || geprickelt geworden [is] tottet lesen synder gedructe boecken en hantschrif- || ten"; dat hij, »als inmiddels den krych te || Lande opgeoffert wordende" [dus tegen zijn zin in dienst geweest?] eerst later »de hantschriften, welke nu deur onachtsaemheyt, al veel jaren || onder verscheyden geleerde handen waren vertrout, sonder yets anders, || onses wetens, daer me verricht te zyn...en sulx || de rest heel ongeret, wyt en zyt deur malcander verstroyt waren) naer || ons de saec genoegsaem docht te mogen lyen, tot sekere by eencomsten brachten: Ende eyntlic daer uyt een boec schifteden, dat wy al over || achtien jaren onder den naem van Burgerlicke stoffen lieten drucken: || ". Dat zijn vader »die wõderbaerlic Ver- || rechting van Domeynen... inden jare 1606 op een cort ingevoert; Ende, immers totden ja- || re 1620 des overlydens onses Vaders als syn Superintendent, in seltsamer || vermeerdering der Casse onverschroken doen vastgaen", dat dezelfde »ooc een Nederduytsche || Dichtconst beschreven [heeft] die noch onder de pers niet geweest en is; En || daer by een verhael van Letterconstige Geschillen."

In het II. Boec, || van der eertsche || stoffen || *sterctecons*t, 1 Voorstel. Hier verhaalt hij dat »ons Broeder Fredric Stevin zal. in syn joncheyt, gele- || den ontrent dertich jaren [dus omstreeks 1637], ter studi gelegen, by enen Heer Abra- || ham Beecman, doen Rector tot Rotterdam, en groot liefhebber || der Wisconsten; hadde hy Beecman, by die gelegentheyt, de || hantschriften onses Vaders Simon Stevin, die onder ons Moeder || doen noch overich waren (zijnde deur haer onbedacht toelaten te || voren al van vele der voornaemste gesift) ooc in hande gekregen: En || daer uyt verscheyde stoffen in een boec... overgedragen: En onder anderen ettelicke gedachte- || nissen van watermolens en ander cam en staefwerc, dat wy t'zynder tijt || en plaets hier of elders menen op te geven", en daarop volgt een aanteekening van Beecman over een voorstel van Simon Stevin.

In het IV. Boec, || van der || eertsche stoffen || beweging-const, 20 Voorstel. »Van het Ewichroersel. Hebbende ons Vader by het 19 Voorstel vande Beginselen der || Weegconst, syn handel der Scheefwichten gegront op... Voorstel: || Inde natuer geen Ewich roersel te wesen." Daarop volgt eene briefwisseling van Simon Stevin met J. L. Hoste, »in sijn tijt Wiscon- || stenaer van syn Hoocheyt den Hartoch van Lotteringen", dd. »*den Haech den* 26 *Octob.* 1618" en »*Nancy den* 21 *November* 1618". Dit blijkt nu de aanleiding geweest te zijn tot het stukje over dit onderwerp door

HENDRICK STEVIN »ontrent het meergedachte boec der Bur- ‖ gherlicke stoffen gevougt."

Het III. BOEC ‖ VAN ENIG WEEGCONSTIG ‖ *DER* ‖ SCHEEFWICHTEN en het V BOEC ‖ VANDE ‖ SCHAMPIGE BEWEGING. ‖ Wesende het 2 Deel vant 4 Boec" bevatten eene uitbreiding van de overeenkomstige werken van SIMON STEVIN.

In het VI. BOEC, ‖ VAN ALDERVOLMAECSTE ‖ CAMMEN EN STAVEN ‖ bevatten het 2e en het 12e voorstel de beloofde aanteekeningen van SIMON STEVIN.

Het VII. BOEC, ‖ VAN RECHTSCHAPE REET- ‖ SCHAP VAN GEWELT ‖ En van onoirdentlicke [lees: oirdentlicke] doening, van wiggen, pylaers, vijsen, seulberrien, catrol, gepers, raden, rosmolens, klander, glaslootwindt, waech, windas; en het VIII. BOEC ‖ VANT ‖ ONFEYLBAER UYRWERC ‖ Te water en te Lande. ‖ *En daer me het Wisconstigh bevaren van* ‖ OOST en WEST. ‖ Of anders geseyt: ‖ *Een aldervolmaecsten gront totter rekeningen vande* ‖ EERTCLOOT LANGDEN, naar de uitvinding van *den Heer Christiaen Huygens van Zulichem*, bevatten alleen den arbeid van HENDRIK STEVIN.

In het IX. BOEC, ‖ VAN DE ‖ WISCONSTIGE SCHEEP- ‖ VAERT, ‖ *Dat is* ‖ SCHIP EN ZEEBOU. ‖ Sonder gevaer van lijf en goet, gelijc de Landsreyse", geeft hy, in het 9 Voorstel, eene »aenteykening onses vaders. .. Doch hoe de Vader dit eyntlic verstaen hebbe, is ons onbekent."

Het X. BOEC, ‖ *VANDEN HANDEL* ‖ Der ‖ WATERMOLENS ‖ Onses Vaders SIMON STEVIN" en het XI. BOEC, ‖ VANDEN HANDEL ‖ *DER* ‖ WATERSHUYRING [sic] ‖ Onses Vaders SIMON STEVIN, zijn beide uit zijne nagelaten aanteekeningen zamengesteld. Het eerste geeft eenige contracten van watermolens dd. 26 July 1591, 13 Martii 1591, 29 Augusti 1590, 26 Martii 1590, 25 April 1590, 24 Juny 1594; daarop het »overslach" van de Zuyt Nootdorpsche Mole, van de Ginste Mole in Sarlois, van de Theeus Mole te Soeterwoude, van de Molen tot Escamp, van de Stolwycsche Mole, van de Broucsche Molen bij Ysel-steyn, van de Cralinger Molen, van de Robbenoirtsche Molen, van de Molen tSoeterwoude, van de Altenasche Bonavontuersche Molen, van de Watermolen binnen Delft. Het laatste geeft in het 1e onderscheyt vande Waterschuyring int

AANTEEKENINGEN.

---

1)* Den titel vindt men in Noot 4 der Bouwstoffen N°. I.

Het boekje komt daar voor als aanhangsel van het werk van EZECHIEL DE DECKER, Eerste Deel van de Niev || we Telkonst. Ter Goude. 4°. [zie diezelfde Noot]: maar men vindt het ook achter diens „Nieuwe Rabat-Tafels. Ter Govde. 1630. 4°. [zie Noot 2 van de Nalezingen op de Bouwstoffen, N°. I—XVII]. De titel van de oorspronkelijke uitgaaf luidt aldus:

1a) De || Thiende || Leerende door onghehoorde lichticheyt || allen rekeningen onder den Menschen || noodich vallende, afveerdighen door || heele ghetalen sonder ghebrokenen. || Beschreven door Simon Stevin || van Brugghe. || Vignette: de hand met den passer en het opschrift: LABORE ET CONSTANTIA. || Tot Leyden, || By Christoffel Plantijn. || M.D.LXXXV. 8°.

Blz. 1—36. Bevat Voorrede, blz. 1—9; de Thiende, blz. 10—21; Aanhangsel, blz. 22—36.

Het Privilegie is gedateerd te Delft, 20 December 1584.

2) Tafelen van || Interest, || Midtsgaders || de Constructie der sel- || uer, ghecalculeert || Door || Simon Steuin Brugghelinck. || Vignette: een hand met passer en het randschrift: LABORE ET CONSTANTIA. || T'Antwerpen || By Christoffèl Plantijn in den || gulden Passer. || M.D LXXXII. 8°.

Verso van den titel is wit. Blz. 3—8 de opdracht aan Burgemeesteren van Leyden, gedateerd Leiden 16 July 1582; het werk zelf (blz. 19—34) en daarop de tafels (blz. 35—59) met hare toepassing (blz. 60—92).

3)* PROBLEMATVM || GEOMETRICORVM || In gratiam D. MAXIMILIANI, DOMINI A || CRVNINGEN &c. editorum, Libri V. || *Auctore* || SIMONE STEVINIO BRVGENSE. || Vignette: De handel in een vaartuig met het randschrift: IN DIES ARTE ET FOR-TVNA. || ANTVERPIAE, || Apud Ioannem Bellerum ad insigne || Aquilae aureae. 4°.

Verso van titel bevat „IN GEOMETRICA PROBLE- || MATA SIMONIS STEVINII, || Lucae Belleri J. F. Carmen" en „IN EIVSDEM GEOMETRICA

PROBLE- || mata Henricus Vuithemius." Dan 2 blz. opdracht, te zamen 4 blz. ongepagineerd.

A 3—P 4, blz. 5—118. Het werk, in V Boeken. Daarop eene bladzijde, niet genummerd, met de „Epilogus" en „ERRATA."

4)* DIALECTIKE || OFTE || BEVVYSCONST. || Leerende van allen saecken recht || ende constelick Oirdeelen; Oock o- || penende den wech tot de alderdiepste || verborgentheden der Natueren. || *Beschreven in 't Neerduytsch door* || SIMON STEVIN *van Brugge.* || Van de voorige druckfauten verbetert. || Vignette: Een staande leeuw aan een zuil met het randschrift INGENIO, SUPERATUR. || TOT ROTTERDAM, || By Ian van Waesberge de Ionge, op de || Koren-Merct, Anno 1621. 8°.

Verso van titel is wit; dan „DEN NEERDVYT- || SCHEN WENSCHT || SIMON STEVIN || GHELVCK" (18 blz.); „CORT BEGRYP" (4 blz.); alles ongepagineerd, waarvan de laatste een schema der verdeeling bevat, en als inhoudsopgave kan gelden.

A—L, blz. 1—172. Het werk, twee Boecken, blz. 1—103; AENHANGSEL, blz. 104—133; TSAMEVOECHINGHE || DER DVYTSCHER ENDE || LATYNSCHER EYGENE || WOORDEN, || VANDE DIALECTIKE, blz. 134—140; DIALECTIKELICKE || TSAMESPRAECK, blz. 141—166; TAFEL OFTE || AENVVYS DER VOORNA- || MELICKSTE DINGHEN || DESER BEWYSCONST || NAER DE OIRDEN || vanden A, B, C., blz. 167—172. Daaronder leest men: Gedruct tot Leyden, By JanClaesz. vā Dorp, 1621. || *Voor Ian van Waesberge de Ionge, Boeckver-* || *cooper, woonende tot Rotterdam.*

4a) Dialectike || ofte || Bevvysconst. || Leerende van allen saecken recht ende || constelick Oirdeelen; Oock openende || den wech tot de alderdiepste verbor- || ghentheden der Natueren. || Beschreven int Neerduytsch door || Simon Stevin van Brugghe. || Vignette: de hand met den passer en opschrift: LABORE ET CONSTANTIA. || Tot Leyden, || By Christoffel Plantijn. || M.D.LXXXV. 8°.

De indeeling is geheel dezelfde als in den voornoemden druk.

5) L'ARITHMETIQVE || DE SIMON STEVIN || DE BRVGES: || Contenant les computations des nombres || Arithmetiques ou vulgaires: || *Aussi l'Algebre, auec les equations de cinc quantitez.* || Ensemble les quatre premiers liures d'Algebre || de Diophante d'Alexandrie, maintenant pre- || mierement traduicts en François. || *Encore vn liure particulier de la Pratique d'Arithmetique,* || *contenant entre autres, Les Tables d'Interest, la Disme,* || *Et vn traicté des Incommensurables grandeurs:* || *Auec l'Explication du Dixiesme Liure d'Euclide.* || Vignette: de hand met passer en opschrift: LABORE ET CONSTANTIA. || A LEYDE, || De l'Imprimerie de Christophle Plantin. || CI.Ↄ.IↃ.LXXXV. 8°.

18 blz. ongenummerd, bevatten verso van titel wit; opdracht (3 blz.); verzen van Dominicus Baudius Insulensis (1 blz.), Franciscus Bertie

Anglus (2 blz.), IAGIVS TORNVS ΦΙΛΟΜΑΘΗΣ (4 blz.), Darie Togon (1 blz.); AV LECTEVR (2 blz.); ARGVMENT (3 blz.).

Dan 6 bladz., in recto genummerd 1—6; daarop A—Z, a—r, blz. 7—642, 14 blz. niet genummerd.

Blz. 1—80. LE PREMIER LIVRE.

Blz. 81—104. LE SECOND LIVRE. PREMIERE PARTIE; blz. 105—227. SECONDE PARTIE; blz. 228—430. TROISIESME PARTIE.

Blz. 431—642. LES QVATRE || PREMIERS LIVRES || D'ALGEBRE DE || DIOPHANTE D'ALEXANDRIE.

Dan TABLES DES CHOSES (9 blz.) en alphabetisch register (5 blz.), niet genummerd.

Hierachter, als tweede deel:

5a) LA PRATIQVE || D'ARITHMETIQVE || DE || SIMON STEVIN || *De Bruges.* || Vignette: andere vorm van den passer, enz. || A LEYDE, || En l'Imprimerie de Christophle Plantin. || CIϽ.CI.[sic]LXXXV. 8°.

Aa—Nn. Verso van titel wit, blz. 3—203, 13 blz. ongenummerd. Deze bevatten:

Blz. 3—5 AV LECTEVR.

Blz. 6. ARGVMENT.

Blz. 7—27. PREMIERE PARTIE.

Blz. 28—47. SECONDE PARTIE.

Blz. 49—121. LA REGLE D'INTEREST.

Blz. 121—131. Regle de faux.

Blz. 132—160. LA DISME; en APPENDICE.

Blz. 161—200. TRAICTE DES || INCOMMENSVRABLES || GRANDEVRS, met APPENDICE.

Blz. 201. *Conclusion de ceste oeuure.*

Blz. 202, 203. THESES || MATHEMATIQVES.

Daarop TABLE DES CHOSES (4 blz.) en alphabetisch register (2 blz.); FAVTES (3 blz.); fransch Privilegie (2 blz.) en hollandsch dito (1 blz.); laatste bladz. is wit.

6) Van voorgaand werk een herdruk.

L'Arithmetiqve De Simon Stevin De Bruges, Reueüe, corrigée & augmentee de plusieurs traictez, et annotation par Albert Girard Samielois Mathematicien. A Leide, de l'Imprimerie des Elzeviers. CIϽIϽCXXV. 8°.

12 blz. ongepagineerd; blz. 1—885, 14 blz. niet genummerd.

7)* Een bundel bevattende

DE || BEGHINSELEN || DER WEEGHCONST || BESCHREVEN DVER || SIMON STEVIN || van Brugghen. || Vignette: een rechthoekige driehoek, waarvan de eene rechthoekszijde het dubbel van de andere is, en waarover een snoer hangt, met veerthien gelijke clooten, zoo dat er langs de eene rechthoekszijde twee, langs de andere vier vallen, zoodat er evenwicht is (zie bladz.

41): met het opschrift „WONDER EN IS GHEEN WONDER" || TOT LEYDEN, || Inde Druckerye van Christoffel Plantijn, || By Françoys van Raphelinghen. || CIↃ.IↃ.LXXXVI. 4°.

aA—dD bevatten: verso titel, is wit. Dan „OM DE WEEGHCONST, || WATERWICHT, ENDE || LOCHTWICHT; twee verzen (latijn en grieksch) van IAN DE GROOT (4 blz.); opdracht „aan RVDOLF DEN IIden || ROOMSCH KEYSER" (2 blz.); VYTSPRAECK || VANDE WEERDICHEYT || DER DVYTSCHE TAEL" (24 blz.); „CORT BEGRYP" (1 blz.). *De feilen des drucx verbetert aldus* (1 blz.); 2 bladz. wit; alles niet genummerd.

A—M. Blz. 1—95. II BOUCKEN. 1 blz. wit. Daarop volgt de titel

7a)* DE || WEEGHDAET || (*Praxis artis ponderariae*) || BESCHREVEN DVER || SIMON STEVIN || van Brugghe. || Vignette, en verder als in het vorige.

a—f, blz. 1—43. Verso van den titel, wit; opdracht „DEN BVRGMEESTERS || ENDE REGIERDERS DER || STADT NVRRENBERG" (2 blz.) „AN DEN LESER" (2 blz.). Het werk begint blz. 7.

En daarop volgt weder

7b)* DE || BEGHINSELEN || (*Elementa*) || DES WATERWICHTS || BESCHREVEN DVER || SIMON STEVIN || van Brugghe. || Vignette, en verder, als in de beide vorige.

Aa—Ii. Blz. 1—69, 80, 81, 1 blz. wit.

Verso van titel is wit. Opdracht „DEN STATEN DER || VEREENICHDE || NEERLANDEN" (blz. 3, 4). Al deze drie opdrachten zijn gedateerd „Vyt Leyden in Oogstmaent des 1586e Jaers." ANDEN LESER (blz. 5, 8), waaronder „CORT BEGRYP". Daarop het werk (blz. 9—54). Dan als toevoegsel: „ANVANG DER || WATERWICHTDAET, || BESCHREVEN DVER || SIMON STEVIN || van Brugghe (blz. 55—63); „ANHANG, || IN DE WELCKE ONDER || ANDEREN WEERLEYDT WORDEN || ETLICKE DWALINGHEN DER || wichtighe ghedaenten" (blz. 64—81 [lees 71]).

8)* VITA || POLITICA || HET || Burgerlick leven/ || Anno 1590. Beschreven deur Symon Stevin. || ENDE NV || Alle Menschen/ van hogen ende legen Sta- || te/ in desen beroerlicken tijdt seer || nuttelick ghelesen ||. Vignette: boekdrukkers ornament. || TOT DELF, || Ghedruckt by Ian Andriesz. Boeck-vercooper/ woonen- || de aen 't Marckt-veldt/ in 't Gulden A. B. C. || ANNO 1611. 4°.

A—F. Blz. 1—35. Het werk zelf voorafgegaan door 5 ongenummerde bladz. In verso van den titel het Goedwillighe Leser". Opdracht aan „D'HEER || GOVERT BRASSER || BVRGH-MEESTER DER || STADT DELF" (3 blz.), waaronder „CORT BEGRIP."

9) VITA POLITICA. || HET || Burgherlick || leven. || Beschreuen deur || SIMON STEVIN. || Vignette: hand met passer. || TOT LEYDEN. || By Franchoys van Ravelenghien. || CIↃ.IↃ.XC. 8°.

A—D. Verso van den titel: „Goedwillighe Leser". Dezelfde opdracht als boven (blz. 3—6); „CORT BEGRIP" (blz. 7, 8); het werk zelf (blz. 9—56).

10) Vita Politica. Het Burgerlyk Leven. Beschreven door Simon Stevin. In syn leven Raad, ende Ingenieur syner Prinselicke Excellentie Maurits Grave van Nassau, &c. Stadthouder van Holland. Seer noodig om in alle Houkse ofte Cabeljaawse Tyden; ende bysonderlick gedurende onse binnen-Landse verschillen in Holland, geleesen te werden. || Vignette: boekdrukkersornament. || t'Amsterdam, By Abraham Olofsz. 1684. 4°.

Blz. 1—20.

11) *VITA POLITICA.* || Het || BURGERLYCK || LEVEN. || *Beschreven door* || Mr. SIMON STEVIN. || *In sijn leven Leger-meeter en Leer-meester in de* || *Wiskonst van wylen den Doorluchtighsten Hoogh-* || *gheboren Vorst Hooghloffelicker memorie,* || Maurits Prince van Orangien, || Grave van Nassauw, &c. || Vignette: ornament. || T'AMSTELREDAM, || By NICOLAES van RAVESTEYN. || Anno 1646. 12°.

A—e. Blz. 1—67.

12) *Van de* || Last en Waerdigheyt || *eenes* || AMBASSADEVRS || *Door Monsr. de* || VILLIERS HOTMAN. || *Alle voor 't ghemeene beste, en hun Meesters* || *buyten-lands handelende persoonen seer dienstigh.* || Nieuwlycks uyt 't Fransch vertaelt. || *Midtsgaders* || VITA POLITICA. || *Het* || Burgherlick Leven, || Door SIMON STEVIN. || *Als mede* || Een Brief van den Ed. Heer *Laurens Reael;* || uyt Weenen, aen Mr. *Ioannes* van || *Walbeeck,* in Oost-Indien. || Vignette: hetzelfde ornament als boven. || t'AMSTELREDAM. || Gedruckt by *Nicolaes* van *Ravesteyn.* 1646. 12°.

Verso van den titel bevat aanhaling uit XENOPHON. Opdracht „Aen myn || *HEERE* || du || *VILLE-ROY*" (4 blz.). „Aen den *LESER*" (6 blz.). „VOORREDENEN" (8 blz.). Dan

A—H. Blz. 21—171.

Achter de Vita Politica komt dan

12a) BRIEF || *Van den* || Wel-edelen en Gestrengen Heere || LAURENS REAEL, || Ridder en eertijdts Gouverneur || Generael || *in* || OOST-INDIEN. || *Geschreven aen Monsr* || IOANNES van WALBEECK; || *Uyt Weenen in Oostenryck,* || *den* 6. *September,* 1628. || Vignette: dezelfde als boven. || t'AMSTELREDAM, || By NICOLAES van RAVESTEYN, || op de S. Anthonis Marckt. 1646 || 12°.

A—C. Blz. 1—69, bevattende een menigte latijnsche spreuken, met de hollandsche vertaling, en opmerkingen.

13) Appendice || Algebraiqve, || De Simon Stevin de Bruges; contenant regle generale de toutes Equa- || tions. 1594. 8°.

6 blz. niet genummerd, 2 blz. wit.

14)* DE || STERCTENBOVWING, || Beschreuen || door || SIMON STEVIN || *van Brugghe.* || Vignette: de hand met passer en opschrift: LABORE ET CONSTANTIA. || TOT LEYDEN, || By Françoys van Ravelenghien. || CIↃ.IↃ.XCIV. 4o.

8 blz. Verso van titel wit; opdracht „DEN EDELEN || Erntfesten, Hoochgheleerden || *Joncker* HENDRICK *van* BRIENEN, || ghedeputeerde van wegen des Vorstendoms van || Gelderlant, ter vergaderinge vande Heeren || Generale Staten," gedateerd „*Uyt Delf den* 25en *van* || *Sporckel int* 1594e *Jaer*" (4 blz.); „CORTBEGRIP" (2 blz.); te zamen 8 blz. ongenummerd.

A—M. Blz. 1—91 het werk in 7 HOOFTSTICKEN. Dan BESLUYT en „VERBETERT DE FAVTEN ALDVS."

Van dit werk bestaat een latere uitgaaf.

14a)* STERCKTEN-BOUWINGH || Beschreven door || SIMON STEVIN || VAN || BRVGGE. || Vignette: Elia, gevoed door de raven met het randschrift PERFER ET OBDVRA. || t'AMSTELREDAM, || Voor *Ian Iansz.* Boeck-verkooper, woonende op 't Water || inde Pascaert. Anno 1624. 4°.

Verso van den titel wit; dan „Kort begryp" (2 blz.) ongenummerd.

A—M. Blz. 1—91. Het werk als boven, zonder de Errata.

15) DE || HAVEN- || VINDING. || Vignette: Nederlandsche Maagd in omtuining met 4 wapens; daarvoor de passer met „LABORE ET CONSTANTIA". || TOT LEYDEN, || IN DE DRVCKERYE VAN PLANTIIN. || BY CHRISTOFFEL VAN RAVELENGHIEN, || *Gesworen drucker der Vniuersiteyt tot Leyden.* || CIↃ.IↃ.IC. || Met Priuilegie. || 4°.

In verso van den titel het „*Priuilegie* van den achthienden Martii anno XVe negenentne- || gentich.

Daarop A—D. Blz. 3—28 het werk: aan het einde „BYVOUGH" en „*De feylen verbetert aldus.*"

Van dit boek vindt men twee herdrukken aangehaald.

15a) De Havenvinding. Leyden. 1621. 4°.

15b) De Havenvinding. Leyden. 1624. 4°.

16) ΛΙΜΕΝΕΥΡΕΤΙΚΗ, || sive, || PORTVVM || INVESTIGANDORVM || RATIO. || *Metaphraste Hug. Grotio Batavo.* || Vignette: de passer in een lauwerkrans met het „LABORE ET CONSTANTIA". || *Ex Officina Plantiniana,* || APVD CHRISTOPHORVM RAPHELENGIVM, || Academiae Lugduno-Batauae Typographum. || CIↃ.IↃ.IC. 4°.

Verso van den titel is wit; dan de opdracht „DVCI, || SENATVI, POPVLOQVE || VENETO", gedateerd „*Delph. Bat.* || *An.* CIↃ.IↃ.IC. *Kal. Aprilibus*" (8 blz.). Dan „AMICE LECTOR", lijstje van grieksche en latijnsche vertaling van hollandsche uitdrukkingen (2 blz.); te zamen 14 bladz. ongenummerd.

A—C. Blz. 1—21. Blz. 22 (niet genummerd) geeft „SVMMA PRIVILEGII," gedateerd „*Hagae Comitis* XVIII. *Martij*, *An.* CIↃ || IↃ.IC."

17) Le Trouve-Port. Leyden. 1599. 4°.

18) The Haven finding Art. Ed. Edmund Wright. London. 1599. 4°. Waarvan een herdruk.

18a) London. 1657. 4°.

19) Een corte onderrichtinge/ || belanghende die kunst vander Zeevaert/ waer || in ghehandelt wordt/ hoemen die selfde sullen moghen || verbeteren/ ende oock met een wederlegt/ die abuysen || die daghelicks door onbequame Leer-mee- || sters, om Havens te vinden, was- || sen ende toenemen. || Allen die ter Zee handelen tot een ghetrouwe waerschouwinghe. || door Aelbert Hendricksz, anders Aelbert Haeyen. || CATO, LIB. III. || Leest en herleest: want ten is niet al waer wat die Poeten dichten. || APELLES. || Doch geen Schoenmaker verder dan van zijn Leest. || Wat hier in dit Boeck ghehandelt wordt salmen op die rugghe || van dit bladt moghen vinden. || Boekdrukkers-ornament. || T'AMSTELREDAM, || By Herman de Buck, inde Mol-steegh, voor Aelbert || Hendricksz. anders Haeyen. Ao 1600. 4°.

Verso van den titel bevat „Het inhout van desen Boeck" in 14 Deelen: daar onder „Namen der [22] gheleerde luyden ende Historici, waer uyt dit || werck ghesocht ende voort gebrocht is." Daarop „COPYE" van de privilege, gedateerd „Opten xvij. Decembris Ao 1599." Dan opdracht „ALLEN DEN GENEN || DIE DAT OOST ENDE WEST || SEGGEN GEVONDEN TE HEB- || ben, wenscht Albert Haeyen een on- || partydigh oordeel, int geen zy || voor handen genomen || hebben" (2 blz.); te zamen 4 bladz. ongenummerd.

A—H. Blz 1—64.

20) Robbert Robbertsz. le Canu, onder verbeteringhe. Breeder verbeteringh op de Waerschouwing tegen Aelbert Haeyen. Een 0 in 't cijfer. 1600.

21) HYPOMNEMATA || MATHEMATICA, || *Hoc est eruditus ille pulvis, in quo se exercuit* || ILLVSTRISSIMVS, ILLVSTRIS- || simo & antiquissimo stemmate ortus Princeps, ac Dominus || MAURITIUS || Princeps Auraïcus, Comes Nassoviae, Cattimoe- || libocorum, Viandae, Moersii, &c. Marchio Verae, & Vlissingae, &c. Dominus || civitatis Gravae, & ditonis Cuyc, civitatum Uyt, Daesburgh, &c. || Gubernator Geldriae, Hollandiae, Zelandiae, Westfrisiae, || Zutphaniae, Vltrajecti, Transisalanae, &c. Imperator || exercitus Provinciarum foedere consocia- || tarum Belgii, Architalassus || Generalis, &c. || *A* SIMONE STEVINO *conscripta, & è Belgico in* || *Latinum à* WIL. SN. *conversa.* || Vignette: dezelfde als in Noot 7. || LVGDVNI BATA-

VORVM. || Ex Officina Ioannis Patii, Academiae Typographi. || Anno CIƆ.IƆ.C.VIII. folio.

Verso van den titel is wit. Dan opdracht „*Illustrissimo Principi,* || MAURITIO PRINCIPI || AVRAICO, COMITI NASSOVIO, &c || GVBERNATORI, et ΑΡΧΙΣΤΡΑΤΗΓΩ || Belgii ΑΥΤΟΝΟΜΟΥ, &c." van WILL. SN. (6 blz.). Daarop nieuwe titel.

TOMVS || PRIMVS || MATHEMATICORVM || HYPOMNEMATVM || DE || COSMOGRAPHIA || *Quo comprehenduntur ea in quibus se exercuit* || enz.

In verso het BREVIARIVM || COSMOGRAPHIAE. Dan PRAEFATIO (1 blz.) „MATHEMATICORVM HY- || POMNEMATVM ARGVMENTVM || ET ORDO."

PARS PRIMA COSMOGRAPHIAE || DE || TRIANGVLORVM || DOCTRINA. A—F. Blz. 1—343.

SECVNDA || PARS COSMO- || GRAPHIAE || DE || GEOGRAPHIA. || *Quae comprehenduntur* enz. LVGODINI BATAVORVM || ... CIƆ.IƆ.CV. A—Q. Blz. 1—188.

COSMOGRAPHIAE || PARS TERTIA || DE || COELI MOTV. A—F. Blz. 1—335.

22) TOMVS || SECVNDVS || MATHEMATICORVM || HYPOMNEMATUM || DE || GEOMETRIAE || PRAXI. || *Quo comprehenduntur* enz. . . . Anno CIƆIƆCV. A—P. Blz. 1—184.

TOMVS || TERTIVS || enz. DE || OPTICA || enz. CIƆIƆCV. A—K. Blz. 1—100.

TOMVS || QUARTVS || enz. DE || STATICA || enz. CIƆIƆCV. A—Q. Blz. 1—196.

TOMVS || QVINTVS || enz. DE || MISCELLANEIS || enz. CIƆIƆCV. A—S. Blz. 1—204.

Waarna op blz. 205 „DE IIS QUAE HIC ETIAMNVM DESIDE- || *rantur* . . ."; blz. 206—210 „INDEX RERUM" en blz. 211—214 „Errata,"

23) Memoires Mathematiqves, Contenant ce en quoy s'est exercé Le Tres-Illvstre, Tres-excellent Prince & Seigneur Mavrice Prince d'Orange, Conte de Nassau, Catzenellenboghen, Vianden, Moers, &c.... Chef General de l'armee des Provinces unies du Païs bas, Admiral general de la Mer, &c. Descrit premierement en Bas Alleman par Simon Stevin de Bruges, translaté en François par Iean Tvning, Licentié és Loix, & Secretaire de Monseigneur le Prince Henry, Conte de Nassou, &c. Vignette (als bij het boek van Noot 7). A Leyde. Chez Ian Paedts Iacobsz. Marchand Libraire, & Maistre Imprimeur de l'Vniversité de laditte Ville. l'An CIƆ.IƆ.C.VIII. folio. IV Deelen in een Band.

Dl. I (X, 21), blz. 1—360; Dl. II, blz. 1—132; Dl. III, blz. 1—82; Dl. IV, blz. 1—21 (2), 1—6, 1—58 (2) 1—8, 1—106.

24) Vorstelijcke Bouckhouding In Domeinen en Finance Extraordinaire op de Italiaense Manier. Leiden. Jan Paedts. Bij L. Elzevier. 1605. folio.

25) Livre de compte de Prince à la maniere d'Italie, en domaine et finance extraordinaire...descrit par Simon Stevin de Bruges. A Leyde. Chez Jan Paedts Iacobsz. Marchand Libraire & Maistre Imprimeur de l'Vniversité de laditte Ville. L'an CIƆ.IƆ.CVIII. On les trouve à vendre chés Louys Elzevier. folio.

Blz. 1—21 (3), 1—6, 1—58 (2), 1—8, 1—106.

26)* SIMON STEVINI || Kurtzer doch gründlicher || Bericht/ von || Calculation der Ta- || bularum Sinuum, Tan- || gentium vnd Secan- || tium. || Sampt deroselben gebrauch/ || in Solvierung oder auszrechnung al- || ler flachen Tri- angel: in zweyen Thei- || len begriffen || Allen Liebhabern Mathe- || matischer Künsten zu guten/ || ausz dem Niderländischen transferirt, || vnd mit einem nohtwendigen Register an || Tag gegeben/ || Sampt einer Vorrede M. Danielis || Schwenters Professoris Norici, vnd auge- || hefften Tabulis Sinuum, Tan- gentium vnd Se- || cantium, in theilen/ deren der halbe diame- || ter 10000000. begreifft. || Nürnberg/ || Gedruckt vnd verlegt durch Simon || Halbmayern/ || CIƆ.IƆC.XXVIII. 8°.

Verso van den titel wit; opdracht „Dem WolEdlen vnd || Gestrengen Vrbano-Casparo || von Failtsch vff Furbaw/ Kürbits vnd || Schwärtzenbach bey der Saal/ rc. Fürstl. || Brandb. geheimsten Raht/ wolverordneten || Cantzlern vnd Lehen-Richtern/ Oberhalb || Gebirgs zu Bayreuth/ rc." van Simon Halb- mayern, gedateerd „den 24. Junii dieses 1628. Jahrs". (6 blz.). „Dan „Vorrede an den Kunst- || liebenden Leser" van Daniel Schwenter" gedateerd Altdorf den 20 Junii. Anno 1628 (16 blz.); alles ongepagineerd.

A—G. Blz. 1—154, dan Register vnd Innhalt (8 blz.), niet genummerd. Dan

26a) Folgen die || TABULAE || SINUUM, TAN- || GENTIUM vnd SECAN- || TIUM. auffs fleissigst auszge- || rechnet vnd corrigiret/ in Theilen/ || welcher der halbe Diameter || 10000000 in sich be- || greifft. || Auff vorhergehenden Be- || richt der Calculation gemeldter || Tafeln/ Simonis Stevini/ rc. || gerichtet. || Nürnberg/ || Gedruckt vnd verlegt || durch Simon Halb- || mayern/ || Im Jahr || M.DC.XXVIII. 8°.

H—P. 138 blz. ongenummerd. In verso der laatste het drukker- vignet: Een arend met hemelbol en omschrift „SIMON HALBMAYER BIBLIOP.: GLORIA VIRTVTE PARATUR.

27) CASTRAMETATIO, || *Dat is* || LEGERMETING. || Beschreven door *Symon Stevin* van Brugghe, || *Na d'oordening en 't ghebruyc* || VANDEN DOOR- LVCHTICHSTEN || Hoochgheboren Vorst ende Heere MAVRITS PRINCE van Oraen- || gien, Grave van Nassau, Catzenelleboghen, Vianden, Moers, &c. Marcgraef || vander Vere, ende Vlissinghen, &c. Heere der Stadt Grave, ende 's Landts van || Cuyc, StVyt, Daesborch &c. Gouverneur van Ghel- derlandt, Hollant, Zeelant, || Westfrieslant, Zutphen, Vtrecht, Overyssel,

&c., Opperste Veltheer vande ver- || eenichde Nederlanden, Admirael generael vander Zee, &c. || Vignette: de faam met randschrift „LITTERAE || IMMORTA || LITATEM || PARIVNT"; rondom de negen muzen, muziek makende. || TOT ROTTERDAM. || By Jan van Waesberghe, inde Fame. || ANNO 1617. folio.

Verso van den titel wit. Dan opdracht door IAN van WAESBERGHE (2 blz.). LOFDIGHT van A. S. (1 blz.); fraai portret van Prins Maurits met randschrift „MAURITIUS PRINC, AURAICAE, COM. NASSAVIAE, MURSAE MARCH. VERAE ET FLISS. GUB. PROV. UNIT. *etc.*"; daaronder zijne gewone titels en nog *„ende Ridder der Conneckłike* [sic] *Ordre der Jartiere"* (1 blz.), zijn wapen met randschrift „HONI SOIT QVI MAL Y PENSE"; in de hoeken vier engelen FORTITVDO, PRVDENTIA, IUSTITIA, SAPIENTIA; onder, op een socle, een uitbottende oranjestronk, waarbij TANDEM FIT || SVRCV LVS ARB. en waarboven IE MAINTIENDRAY (1 blz.). Dan EER-DIGHT van A. S. (1 blz.); alles ongenummerd.

A—G. Blz. 1—55. KORTBEGRYP (2 blz. 1, 2), dan het werk in HOOFDSTVC 1—4.

Blz. 56 wit. Daarop nieuwe titel.

27*a*) NIEVVVE MANIERE || *VAN* || STERCTEBOV, || door Spilsluysen. || Beschreven door *Symon Stevin* van Brugghe. || Vignette: als bij Noot 27. || TOT ROTTERDAM || By Ian van Waesberghe, in de Fame. || ANNO 1617. folio.

Verso van titel wit.

A—I. Blz. 1—59. KORT BEGRYP (blz. 2); dan het werk HOOFTSTVC 1—4 [blz. 33 en 34 wegens grooter formaat ingevouwen].

Dan INHOVT DESES BOECX (1 blz.). AENHANG (2 blz.), ongenummerd.

28)* CASTRAMETATIO || DAT IS || LEGERMETING. || Beschreven door *Symon Stevyn* van Brugghe, || *Na d'oordening en 't ghebruyc* || VANDEN DOORLVCHTICHSTEN || Hooghgheboren PRINCE MAVRITS, || door de gratie Godts || Prince van Oraengien, Grave van Nassau, Catzenellebogen, Vianden, || Diets, Lingen, Moers, Bure, Leerdam, &c. Marckgraef vander Vere || ende Vlissingen &c. Heere ende Baron der Stadt Breda, Grave, ende 's Landts van Cuyc, Diest, Grimbergen, Arlay, Noseroy, &c. Burchgrave || van Antwerpen ende Besançon, Gouverneur van Gelderlant, Hollant, || Zeelant, VVestvrieslant, Zutphen, Vtrecht, Overijssel, Groeningen, &c. || Opperste veltheer van de Vereenichde Nederlanden, Admirael Generael || vander Zee, Ridder vande ordre van den Cousebandt, &c. || Vignette: een boom met wijngaardrank en tuinier; met bijschrift NON SOLUS. || TOT LEYDEN || By Bonaventuer ende Abraham Elzevier. || ANNO 1633. folio.

Verso van den titel wit; dan LOF-DICHT (1 blz.) en EER-DICHT (1 blz.), beide van A. S. Opdracht „AEN DE HOOCHMOGEN || DE HEEREN DE GENERALE || STATEN DER VEREENICHDE NEDER- || LANDEN. || Gedateerd 4 November 1617 ... *Symon Stevyn*" (2 blz.). KORT BEGRYP (2 blz.).

A—F. Blz. 1—52. Het werk, Hoofstvc 1—4.

Dan nieuwe titel.

28a)* Als in Noot 27a), behalve vignet en het daaropvolgende, dat hetzelfde is als in Noot 28).

A—H. Blz. 1—66 bevat „AEN DE || HOOCHMOGHENDE || HEEREN DE GENERALE || STATEN DER VEREENICHDE NE- || DERLANDEN, gedateerd 21 December 1617 ... *Symon Stevyn* (blz. 3, 4); KORT BEGRYF (blz. 5). Het werk zelf, Hooftstvc 1—4, (blz. 6—63); INHOVT (blz. 64); AENHANG (blz. 65, 66).

29)* LA || CASTRAME- || TATION, || Descrite par *Symon Stevin* de Bruges, || selon l'ordonnance & vsage || DE || TRES-ILLVSTRE, TRES || EXCELLENT PRINCE ET || Seigneur MAVRICE, par la grace de Dieu PRINCE d'Orange, || COMTE de Nassau, Catzenellenbogen, Vianden, Diets, Lingen, Moers, || Bure, Leerdam, Marquis de la Vere, & de Flissingues, Seigneur & Baron de Breda, de la Ville de Grave, & du Païs de Cuyck, Diest, Grimbergues, Arlay, || Noseroy, &c. Viconte Hereditaire d'Anvers, & Besançon, Gouverneur || Capitaine Generals & Admirael des Provinces vnies, chevalier de l'Ordre || de la Iartiere, &c. || *Seconde Edition reveuë & corrigée.* || Vignette: een arend op piedestal, die in den bek houdt eeu bundel van zeven pijlen, met het randschrift „CONCORDIA RES PARVAE CRESCUNT" || A LEYDEN. || Chez Matthieu & Bonaventure Elzevier. 1618. folio.

Verso van den titel wit. Dan hetzelfde portret van Prins Maurits (met hollandsch onderschrift); daarop „SONET || à MONSIEUR STEVIN (1 blz.) SONET || AVQVEL EST FAIT || jugement de ceux qui ont || bien campé" (1 blz.), beide van DE NEREE; daarop weder hetzelfde wapen van Prins Maurits, enz. als in de hollandsche uitgaaf. Dan opdracht „AVX TRES-PVISSANTS || SEIGNEVRS LES ESTATS GENERAVX || DES PROVINCES VNIES" gedateerd „Escrit à la HAYE, le 12 de Mars 1618, par le || Castrametateur & humble Serviteur de voz || *Seigneuries Illustrissimes.* || SYMON STEVIN". ||

A—G. Blz. 1—2, Argument (blz. 1, 2).

Blz. 3—54 het werk zelf. Chapitre 1 à 4.

Daarop nieuwe titel.

29a)* NOVVELLE MANIERE || *DE* || FORTIFICA- || TION PAR || ESCLVSES. || Descrite par *Symon Stevin* de Bruges. || Vignette als bij Noot 29. || A LEYDEN. || Chez Matthieu & Bonaventure Elzevier. || l'AN. 1618. folio.

Verso van den titel is wit. Dan een opdracht aan dezelfde Staten en met denzelfden datum als bij noot 29) (2 blz.).

A—I. Blz. 1. ARGVMENT DE CE || TRAICTE.

Blz. 2—59 het werk zelf. Chapitre 1 à 4 [ook weer blz. 33 en 34 op grooter formaat gedrukt, en dientengevolge ingevouwen.]

Blz. 60, 61. APPENDICE.

30) Dezelfde titels als in Noten 29) en 29a), maar met de vignette van Noot 27), en daaronder: A Rotterdam, chez Jean Waesbergen au Marché, à l'enseigne de la Fame. 1618. folio.

30a) Wederom dezelfde titels, maar met de vignette van Noot 29), en daaronder: A Leyden, chez Matthieu & Bonaventure Elzevier. 1618. folio.

31) Festung-Bauung dasz ist Beschreibung, wie man Festungen bawen vnd sich wider allen gewaltsamen Anlauff der Feinde zu Kriegszeiten auffhalten, sichern und verwahren möge. In Hochteutscher Sprach beschrieben, durch Gothardum Arthus. Franckfurt am Mayn. 1618. 4^{0}.

31a) Id. opus. Zum andern mahl wiederumb auffgeleget und verbessert. Franckfurt am Mayn. 1623. 4^{0}.

32) Wasser-Baw: dasz ist Eygentlicher vnd vollkommener Bericht, von Befestigung der Stätte, durch Spindel-Schleussen.... Franckfurt am Mayn. 1631. 4^{0}.

33)* LES || OEUVRES || Mathematiques || DE || SIMON STEVIN de Bruges. || Ou sont inserées les || MEMOIRES MATHEMATIQVES, || Esquelles s'est exercé le Tres-haut & Tres-illustre Prince MAURICE || de NASSAU, Prince d'Aurenge, Gouverneur des Provinces des || Païs-bas unis, General par Mer & par Terre, &c || *Le tout reveu, corrigé, & augmenté* || Par ALBERT GIRARD Samielois, Mathematicien. || Vignette: Een boom, waarlangs wijngaard, met een tuinman en het opschrift „NON SOLUS". || A LEYDE || Chez Bonaventure & Abraham Elsevier, Imprimeurs ordinaires || de l'Université, ANNO CIƆIƆCXXXIV. in folio.

Voor deze een fransche titel (de versos van beidere zijn wit).

LES || OEUVRES || Mathematiques || DE || SIMON STEVIN || Augmentées || Par ALBERT GIRARD.

Dan opdracht aan „ESTATS GENERAUX || DE PAÏS BAS UNIS || . . . LE || PRINCE D'AURENGE," || geteekend door „la vefue & les [11] enfan orphe- || lins de feu || ALBERT GIRARD (3 blz.). Daarop „Le contenu du present oeuvre" (1 blz.); alles ongenummerd.

A—T. Blz. 1—122 en 2 blz. ongepagineerd, het Premier volvme, bevat L'ARITHMETIQUE in 2 Livres.

Les six Livres D'ALGEBRE DE DIOPHANTE D'ALEXANDRIE.

La PRACTIQVE D'ARITHMETIQVE.

Dan TABLES (twee).

a—lll. Blz. 1—678 bevatten:

Blz. 1—340. II. LA COSMOGRAPHIE. III Parties met 4, 6, 3 Livres.

Blz. 341—432. III. LA PRACTIQVE DE GEOMETRIE in 6 Livres.

Blz. 433—520. IV. L'ART PONDERABLE OV LA STATIQVE in 5 Livres.

Blz. 521—572. V. L'OPTIQVE in 2 Livres.

Blz. 573—678. VI. LA CASTRAMETATION || LA FORTIFICATION PAR ESCLUSES, LA PORTIFICATION.

34)* MATERIAE POLITICAE. || BVRGHERLICKE || STOFFEN. || Vervanghende Ghedachtenissen der Oeffeninghen || des Doorluchtichsten || PRINCE MAVRITS van ORANGIE, &c. || Gouverneur, Opperste Velt-Heer, Admirael-Generael || vande Vereenichde Nederlanden, &c. || *Beschreven deur* SIMON STEVIN van Brugge, *Superinten- || dent van zijne Finance, Quartiermeester Generael van 't Leger &c. En uyt || sijn naegelate Hantschriften by een gestelt door Syn Soon* HENDRICK || STEVIN, *Heere van Alphen, van Schrevelsrecht &c.* || Vignette, als in Noot 7. || Ghedruckt tot LEYDEN, || Voor *Adryaen Rosenboom*, Schout tot Alphen. || *Met Privilegie.* 4°.

Verso van titel bevat „WAERSCHOUWINGE || aen den Boeckbinder." Dan opdracht *An den* || DOORLVCHTICHSTEN || ... WILHEM by der Gratien Godts Prince van || Orangien... || *Als mede an den* || WELGHEBOREN GENA- || dighen Heere JOHAN WOL- || PHERD, Heere van Brederode" gedateerd „Alphen in Sprockel des Iaers 1649. Hendrick Stevin" (12 blz.). Dan van denzelfden „Aenden || LESER" (5 blz.), verso wit. „KORTBEGRYP" (1 blz.), verso wit. Dan „HENDRICK STEVIN. LOCHENING VAN || EEN EWICH ROERSEL || *gesecht* || PERPETVVM MOBILE. || Ende || *Bevestiging dat in yder eerts dinck seker eenich punt sy* || *'t welck allerley stants syn swaerheyts midpunt is.* || Met een wonderlick Geschil" (8 blz.). Alles ongenummerd.

A—L. Blz. 1—128. Onderscheyt 1.

a—Mm. Blz. 1—173 [lees 273]. Onderscheyt 2—8 [blz. 243, 244 is omgevouwen, omdat die op grooter formaat zijn gedrukt].

Daarop nieuwe titel.

34a)* VERRECHTING || VAN || DOMEINE. || Mette CONTREROLLE en ander behouften van dien. || *'t Welck is* || *Verclaring van ghemeene Regel, waer deur ver-* || *hoet worden alle abuysen mette swaerichheden uytte selve spruytende, die-* || *men tot nogh toe uyt geen Rekencamers van Domeine en Finance* || *heeft connen weren.* || Wesende Oeffeninghen des Doorluchtichsten Hoogstghe- || boren Vorst en Heere MAVRITS by Gods Ghe- || nade Prince van Orange, &c. Ho: Loff: Memorie. || Beschreven deur SIMON STEVIN van Brugghe, in sijn leven des Hooghghemelten Heere || PRINCEN Superintendent vande Finance, &c. En uyt sijn naghelaten || Hantschriften by een ghestelt deur syn Soon HENDRICK || STEVIN Ambachtsheere van Alphen. || Vignette als bij Noot 7. || TOT LEYDEN. || Ter Druckerye van IVSTVS LIVIVS. || *In 't tweede Iaer des Vredes.* 4°.

Verso van den titel wit. Opdracht van H. Stevin AN HARE || HOOGHEYDT || *Me-vrouwe* || DE || PRINCESSE || VAN ORANGE, &c. || DOUAGIERE (6 blz.).

A—V. Blz. 1—156 bevat CORT BEGRYP en TSAEMSPRAEK (blz. 1—14); 1e Deel (blz. 15—39); 2e Deel (blz. 40—123); Anhangh (blz. 127—156).

A—Ll bevat „VORSTELICKE || BOUCKHOUDING || IN || DOMEINE EN FINANCE || EXTRAORDINAIR. Op de || Italiaensche Wijse." Verso van den titel CORT BEGRYP. Dan de opdracht „AN MYN HEER || MAXIMILIAEN DE BETHUNE, || *Hertoch van Seully*, enz." „Geschreven inden || Haech inde maent van Augustus 1607 || . . . SIMON STEVIN" [blz. 3—9] „ANDEN LESER" (blz. 10—12). Dan

COOPMANS || BOVCKHOVDING || OP DE ITALIAEN- || SCHE WYSE. blz. 14. CORTBEGRYP; blz. 15—26, Hooftstuk 1, 2; blz. 1—6, 1—19, Hooftstuk 3; blz. 21—51, Hooftstuk 4—10; blz. 52 wit; blz. 53

BOVCKHOVDING || IN DOMEINE || OP DE ITALIAEN— || SCHE WYSE. blz. 54, CORTBEGRYP; blz. 55—75, Hooftstuk 1—6; blz. 1—8, 1—39, Hooftstuk 7; blz. 45—57, Hooftstuk 8—10.

BOUCKHOUDING || IN VORSTELICKE || DISPENSE OP DE ITA— || LIAENSCHE WYSE. blz. 60, CORTBEGRYP; blz. 61—104, Hooftstuk 1—8.

BOUCKHOUDING || IN FINANCE EXTRA— || ORDINAIRE OP DE ITA- || LIAENSCHE WYSE. blz. 106, CORTBEGRYP; blz. 107—112, Hooftstuk 1, 2.

BOUCKHOUDING || DER DISPENSE VANDE || EXTRAORDINAIRE FINANCE. blz. 114, CORTBEGRYP; blz. 115—158, Hooftstuk 1—7.

TYTELS EN CORTBEGRYPEN, blz. 139—150.

Blz. 151—154 „ANDEN BOECK- || BINDER".

35) Verhandeling van de voornaemste hoofdstucken specterende tot de politie, finance en architecture. Hage. *Abraham Troyel* en *Cornelis de Graaff*. 1686. 4°.

36)* WISCONSTICH || FILOSOFISCH || BEDRYF, || van *Hendric Stevin* Heer van Alphen, || van Schrevelsrecht, &c. || BEGREPEN || In veertien Boeken. || Vignette: een phenix, die zijn drie jongen voedt met het bloed uit zijne borst, met het opschrift VIVIMVS EX VNO. || *TOT LEYDEN*, || Gedruct by PHILIPS DE CRO-Y, in 't Jaer 1667. 4°.

Verso van den titel is wit. Dan opdracht „DEN HOOG ENDE GROOT- || MOGENDEN HEEREN GENERALE || EN PARTICULIERE STATEN VAN— || DE VEREENICHDE NEDERLAN- || DEN"; gedateerd: „*Uyt Alphen in Oestmaend* || *des* 1667 *Iaers*. || HENDRIC STEVIN" (4 blz.). „DEN HEER PRINCE || WILHEM || Dies naems den III van Orange;" met hetzelfde onderschrift (2 blz.); „totten Leser" en „CORT BEGRYP" (2 blz.); alles ongepagineerd.

Dan A—D. Blz. 1—28. I BOEC, || VANT || AENLEGGEN TER || WISCONTIGE [sic] FILOSOFI.

A—E. Blz. 1—40. II. BOEC, || VAN DER EERTSCHE || STOFFEN || *STERCTECONST*, a—c. Blz. 1—24. III. BOEC, || VAN ENIG WEEGCONSTIG || *DER* || SCHEEFWICHTEN.

a—g. Blz. 1—45 [lees 55]. IV. BOEC, || VAN DER || EERTSCHE STOFFEN || BEWEGINGSCONST, || En levendiger dieren machtelic vermogen ter || dadelicke geweltoeffening. [Reeds op blz. 53 staat „*Eynt vant* 4 *boec*"; waarna dit echter herhaald wordt blz. 45 [55] achter het 37 voorstel].

A—H. Blz. 1—62. V. BOEC, || VANDE || SCHAMPIGE BEWEGING. || Wesende het 2 Deel vant 4 Boec [met AENHANG].

A—G. Blz. 1—52. VI. BOEC, || VAN ALDERVOLMAECSTE || CAMMEN EN STAVEN.

A—E. Blz. 1—32. VII. BOEC, || VAN RECHTSCHAPEN REET- || SCHAP VAN GEWELT. || En van onoirdentlicke [lees: oirdentlicke] doening.

A—E. Blz. 1—34. VIII. BOEC, || VANT || ONFEYLBAER UYRWERC || Te water en te Lande. || *En daer me het Wisconstich bevaren van* || OOST en WEST: || Of anders geseyt: || *Een aldervolmaecsten gront totter rekeninghen vande* || EERTCLOOT LANGDEN. 2 blz. wit.

A—G. Blz. 1—56. IX. BOEC, || VANDE || WISCONSTIGE SCHEEP- || VAERT. || *Dat is* || SCHIP EN ZEEBOU || Sonder gevaer van lijf en goet, gelijc de Lantreyse.

A—E. Blz. 1—34. X. BOEC, || *VANDEN HANDEL* || Der || WATERMOLENS || Onses Vaders SIMON STEVIN.

E—L. Blz. 35—84. XI. BOEC, || VANDEN HANDEL || *DER* || WATERSHUYRING [sic] || Onses Vaders SIMON STEVIN.

A—G. Blz. 1—52. XII BOEC, || VANT || UYTERST MENSCHEN || CONSTICH VERMOGEN || Tot gebruyc en verhering des || waters te lande.

A—D. Blz. 1—30. XIII BOEC, || *VAN* || ENIG FILOSOFICH [sic] || Dat sich inde voorgaende Boeken || niet wel en heeft willen schicken laten, of on- || voordachtich en met voordacht verby || gegaen is. 2 blz. wit.

A—D. Blz. 1—32. XIV BOEC, || *VANDE* || WISCONSTIGE BURGER EN || CRYCHVOLCSTIER. Op blz. 32 komt het drukkersmerk van DE CRO-Y, een opengeslagen boek, op de verso PHI- || LIPS, op de recto DE || CROY. Daarna echter nog

A—H. Blz. 1—61. AENHANG. || *VAN* || EENIG SYN GEMIS EN EYGEN || GEMERC, EN WAT RAEC || DAER TOE.

Aan het einde van bladz. 61 staat

„*Vyt missen en merken volgt de Wisconst.* || Aenhangs Eynt. || Ic ende het Boec der Burgerlicke stoffen, syn te be- || komen tot Alphen by Mr. Dirric vander Snoec."

Daarop volgt het Privilegie van de Staten Generaal, en het extract uit dat van de Staten van Hollant en West-Vrieslant. Daarop „*de drucfouten*". Te zamen 3 blz. ongenummerd.

37)* PLAETBOEC. || Vervangende de || FIGUREN of FORMEN || Gehorig totter || WISCONTICH [sic] || FILOSOFISCH BEDRYF || Van HENDRIC STEVIN, Heer van Alphen || van Schrevelsrecht &c. || *Begrepen in XIV Boeken* *met een Aenhang.* || Vignette als bij Noot 36 [dus gedrukt te Leyden bij Philips de Cro-Y?]. Gedruct int Jaer MDCLXVIII. folio.

Verso van titel is wit, even als van de volgende blz, waarop VANT BESTEL EN GEBRUYC || *Deses* || PLAETBOEX.

Dan dubbel openslaande platen 1—29. Geldende:

Plaat 1 voor BOEC 2, 3.
Plaat 2 voor BOEC 3.
Plaat 3 voor BOEC 3, 4.
Plaat 4 voor BOEC 4.
Plaat 5, 6, 7 voor BOEC 5.
Plaat 8 voor BOEC 5, 6.
Plaat 9, 10, 11, 12 voor BOEC 6.
Plaat 13 voor BOEC 6, 14.
Plaat 14, 15, 16 voor BOEC 7.
Plaat 17 voor BOEC 7, 8.
Plaat 18 voor BOEC 8, 9.
Plaat 19, 20 voor BOEC 9.
Plaat 21 voor BOEC 10, 11.
Plaat 22, 23, 24 voor BOEC 11.
Plaat 25, 26, 27, 28 voor BOEC 12.
Plaat 29 voor AENHANG.

VERSLAG

OMTRENT DE

WENSCHELIJKHEID EN UITVOERBAARHEID VAN HET INSTELLEN EENER GEREGELDE WAARNEMING VAN VERSCHIJNSELEN VAN AARDBEVING IN NEDERLAND.

(Uitgebracht in de vergadering van 30 Juni 1883).

De brief van ons geacht rustend medelid Dr. P. HARTING van 22 Mei 1883, waarin de meening geuit wordt, dat de aardschudding van 17 Maart aan eene plaatselijke beweging van den bodem zou kunnen worden toegeschreven, zooals er in den omtrek van Haarlem meer zouden zijn voorgekomen, en eene geregelde waarneming door middel van daarvoor ingerichte werktuigen wordt aanbevolen, heeft aan de Afdeeling aanleiding gegeven, aan eene Commissie op te dragen: in de eerste plaats te dienen van advies omtrent de *wenschelijkheid* en de *uitvoerbaarheid* van den aanbevolen maatregel.

De ondergeteekenden, bij een schrijven van 31 Mei N^{0} 51, mededeeling ontvangen hebbende, dat zij als leden dier Commissie waren aangewezen, hebben de eer de volgende beschouwingen als hunne zienswijze aan het oordeel der Afdeeling te onderwerpen.

Door de bewoordingen van de opdracht is de beantwoording niet gevorderd van de vraag, of er grooter of geringer waarschijnlijkheid bestaat voor de juistheid van eene der uiteenloopende onderstellingen omtrent de oorzaak van het verschijnsel, dat den 17^{den} Maart is waargenomen;

eene beantwoording, die zou moeten gegrond zijn op een diep ingaand onderzoek naar de oorzaken en het wezen van aardbevingen in het algemeen, en van die in Nederland in het bijzonder, en naar de verschijnselen, die niet alleen hier, maar ook elders met aardbevingen gepaard zijn gegaan.

Voor zoodanig onderzoek zouden de ondergeteekenden zich ook niet aangewezen achten, daar zij zich niet dagelijks bewegen op het gebied der wetenschap, waartoe dat onderzoek behoort.

Op dit gebied is in den laatsten tijd bovendien een nieuwe richting ontstaan, ten doel hebbende: het waarnemen van verschijnselen in de dampkringslucht uit te breiden tot die, welke onder de aarde plaats vinden, ten einde het verband te leeren kennen, dat tusschen beide verschijnselen ondersteld wordt te bestaan. Nog dezer dagen werd in Amsterdam door den graaf M. E. DE ROSSI, in een openbare voordracht, daarop de aandacht gevestigd.

Bij de beantwoording der aan de Commissie gestelde vragen, wordt dus eenvoudig uitgegaan van de stelling, dat, op grond van de waarnemingen en mededeelingen van Dr. HARTING, de mogelijkheid niet schijnt te moeten worden uitgesloten, dat soms, door de eene of andere oorzaak, in eene alluviale laag schudding wordt te weeg gebracht.

Is nu inderdaad de streek rondom Haarlem blootgesteld aan aardschuddingen, dan mag het zeker *wenschelijk* worden geacht dat natuurverschijnsel zoo mogelijk aan geregelde waarnemingen te onderwerpen, ten einde iets meer van het verschijnsel, en van zijne oorzaak en gevolgen te weten te komen.

Voornamelijk uit een wetenschappelijk oogpunt moet die waarneming dan wenschelijk worden geheeten. — Ten behoeve van de veiligheid of van eenig ander practisch belang, wordt die wenschelijkheid niet gevoeld. In de geschiedenis van ons land toch is rampvolle uitwerking eener aardschudding gelukkig onbekend.

Ten dienste eener grondige beoordeeling van den omvang der werking, zal voorts de gewenschte waarneming zich verder dienen uit te strekken dan tot de streek rondom

Haarlem, en een groot deel van het alluvium benoorden en bezuiden de lijn Haarlem—Amsterdam moeten omvatten.

Er moeten waarneming-stations, op een voldoend aantal kilometers van elkander verwijderd, worden opgericht; daardoor kan bepaald worden, waar zich het middelpunt van den stoot heeft bevonden, met welke snelheid en intensiteit en over welke oppervlakte zich de stoot heeft voortgeplant.

Bovendien is het van belang, zoo niet noodzakelijk, te onderzoeken, of eene schudding, die vroeger of later weder mocht plaats hebben, eene eigen beweging is in de alluviale lagen van Holland, dan wel met eene beweging daarbuiten in verband staat. Het lijdt geen twijfel of de uitkomsten der waarnemingen zullen dan meer zekerheid erlangen en belangrijker worden, wanneer zij met gelijktijdige of in het algemeen met seismographische waarnemingen in de aangrenzende Rijken worden verbonden. Men zal dus moeten trachten zich met wetenschappelijke inrichtingen of personen in het buitenland te verstaan, ten einde eene internationale regeling en uitvoering der waarnemingen te verkrijgen.

Aan de *uitvoerbaarheid* behoeft, wat de technische inrichting betreft, naar het inzien van de ondergeteekenden, niet te worden getwijfeld. Wel is waar zijn de schuddingen, die ondersteld worden veelvuldig voor te komen, van zoo gering vermogen, dat zij door de menschelijke zintuigen niet worden bespeurd. Er gaan tientallen van jaren voorbij, zonder dat men van een gevoelden aardschok hoort gewagen; doch het ontbreekt niet aan werktuigen van genoegzame gevoeligheid om de geringste beweging aan te geven, zooals blijkt uit de verscheidenheid van toestellen van eenvoudige en meer zamengestelde inrichting, waarvan beschrijvingen gevonden worden o. a. in de werken van graaf Rossi en in de werken van het seismologisch genootschap van Japan.

Is er dus geen reden voor vrees, dat eene slechts geringe aardschudding aan de waarneming ontsnappen zal — het tegenovergestelde is eerder te duchten, namelijk: dat onze slappe bodem naar het gevoelige werktuig zal overbrengen bewegingen, die haren oorsprong niet in de grondlaag vinden, maar daarbuiten. Ten einde dit bezwaar zooveel mogelijk te ontgaan, moeten de punten van waarneming gevestigd worden binnen gebouwen, die op voldoenden afstand zich bevinden van wegen, waarover zware vrachten vervoerd worden, en van werkplaatsen of stoomwerktuigen, die dreuning kunnen teweeg brengen.

De werktuigen moeten registreerend zijn, of althans zoo ingericht, dat zij onveranderd in den toestand gevonden worden, waarin zij door eene aardschudding gebracht zijn. Daarenboven moeten zij onder dagelijksch toezicht staan en nagezien worden; niet alleen opdat men zoo spoedig mogelijk eene beweging, die heeft plaats gehad, bemerke, maar ook om te voorkomen dat zij onklaar worden en in de enkele gevallen van werking haperen. Misschien zou het ook, ter besparing van kosten, wenschelijk wezen, een chronometer daarbij te gebruiken, die reeds voor waarneming van dagelijks voorkomende verschijnselen bestemd was; voor het onafgebroken loopen bestond dan meer zekerheid, dan wanneer hij uitsluitend voor waarneming van aardschudding moest worden opgesteld en in gang gehouden, en het groote voordeel werd verkregen, dat eventueele werkingen van den seismograaf konden worden aangeteekend door personen, met gelijksoortig werk vertrouwd. Indien men de genoemde eischen zamenvat, dan komt men tot het besluit, dat voor de oprichting van seismografische stations de bestaande meteorologische en sterrekundige observatoria, als meest geschikt voor het beoogde doel, zich van zelf in de eerste plaats aanwijzen.

Naar onze meening zou de verwezenlijking van het denkbeeld van ons geacht medelid verzekerd zijn, indien de directeuren van de genoemde observatoria in Nederland tot medewerking de handen wilden ineenslaan, en zich met de aanschaffing van de noodige toestellen, die naar wij ons voorstellen aanvankelijk beknopt en weinig kostbaar kunnen zijn, wilden bezig houden. Zij toch zijn niet alleen vertrouwd met de leiding van wetenschappelijke waarnemingen, maar door hunne betrekking met ambtgenooten in het buitenland in de gelegenheid, de oprichting van stations, waar die buiten het Rijk mocht gewenscht zijn, te bevorderen.

Wel worden daardoor aanvankelijk weinig punten van waarneming in het Hollandsche alluvium verkregen, maar als, na voorafgaande studie en overleg, de wijze van onderzoek op de meteorologische en astronomische observatoria eenmaal is vastgesteld en ingericht, dan is de tijd daar om op andere gunstig gelegen punten meer of minder eenvoudige seismographische toestellen te plaatsen, en daartoe de hulp in te roepen van genootschappen en van bijzondere personen.

Ongetwijfeld zullen er belangstellenden gevonden worden, die zich met de voortdurende zorg en het toezicht daarop willen belasten, en zoo mogelijk aan de waarnemingen medewerken. Hunne zorg en medewerking kan echter alleen dan vruchtbaar en van waarde zijn, als zij geschiedt naar de voorschriften van de Directeuren der meteorologische observatoria, en wanneer de toestellen door deze worden gekozen en geplaatst.

Onder de observatoria zouden wij ook de Polytechnische School wenschen gerekend te zien. Ook raden wij aan, terstond betrekking aan te knoopen met het bestuur van Rijnland, dat een meteorologisch observatorium bezit aan de Oude Wetering, en met het bestuur van den Haarlemmermeerpolder, dat weerkundige waarnemingen laat doen te Kruisdorp.

Wij zijn van gevoelen, dat zamenwerking in den zoo even geschetsten zin de meeste kans van slagen aanbiedt, en dat er niet aan moet gedacht worden, de uitvoering der waarneming tot de bemoeijingen der Akademie te brengen. De taak der Akademie moet, naar onze meening, beperkt blijven tot het aanwijzen van den weg, die kan worden ingeslagen. Mocht de bedoeling van den Heer Harting wezen, dat de Akademie tot deelneming aan de uitvoering werkzaam optrad door zelve waarnemingen te laten doen, dan verschillen wij hierin met ons geacht medelid van gevoelen, omdat wij van oordeel zijn, dat dit niet op den weg der Akademie ligt.

Kan de Afdeeling zich met ons gevoelen vereenigen, dan zou eene briefwisseling moeten worden geopend met Directeuren der meteorologische en astronomische observatoria te

Amsterdam,
Leiden,
Utrecht,
Groningen,
Den Helder en
Vlissingen;

met den Directeur der Polytechnische school te
Delft;

met het Hoogheemraadschap van
Rijnland en

met het bestuur van den Haarlemmermeerpolder;

in de eerste plaats tot inroeping hunner medewerking.

Wordt die medewerking toegezegd, dan kan de Akademie, naar gelang van den inhoud der ontvangen antwoorden, beoordeelen in hoeverre het noodig is, dat zij nog aan eene nieuwe Commissie uit haar midden opdrage een plan tot uitvoering te ontwerpen, dan wel of zij hare taak in deze aangelegenheid als geëindigd kan beschouwen.

Uwe Commissie meent te hebben voldaan aan de haar verstrekte opdracht, door, bij de beknopte mededeeling van haar gevoelen over de wenschelijkheid en uitvoerbaarheid, tevens aan de hand te doen, hoe, op eenvoudige wijze, een stelsel van waarnemingen zou kunnen worden geregeld.

Wij hebben daarbij niet gewaagd van inroeping van hulp bij de Regeering. Hiertoe zagen wij geen noodzakelijkheid, omdat de kosten, vermoedelijk gering, naar het ons voorkwam, de observatoria, reeds voor andere doeleinden bestaande, niet zouden bezwaren.

Er bestond hiervoor echter nog een andere reden. Wilde men de Regeering over de zaak aanspreken, dan zou men niet mogen nalaten daarbij tegelijker tijd te wijzen op het zeer groote belang, dat gelegen zou zijn in de invoering van geregelde waarnemingen van aardbevingen in onze Oost-Indische bezittingen. Op den vulkanischen bodem, waarop men daar leeft, zou de invoering van een stelsel van seismografie, dat in staat stelde eene naderende aardbeving of uitbarsting te voorspellen, zooals Palmieri in Italië doet, en waarschijnlijk ook in Japan gebeurt, een ware weldaad en bovendien van groot wetenschappelijk belang kunnen wezen. Het vestigen van de aandacht der Regeering op dat belang, te gelegener tijd, achten wij zeer aanbevelenswaardig.

Het tot stand komen der zaak, waarover door de Afdeeling ons advies werd gevraagd, zou naar onze meening echter niet worden bevorderd door een aanzoek bij de Regeering, waarbij de aanbeveling van het eene belang aan die van het andere zou moeten worden vastgeknoopt.

30 Juni 1883.

VAN DIESEN.
J. M. VAN BEMMELEN.
E. H. VON BAUMHAUER.

INHOUD

VAN

DEEL XIX. — STUK 2.

bladz.

Uitkomsten van waarnemingen met den piëzometer; door R. A. MEES. (*Met twee platen*) 137

Over een effluve-ozonometer en ontledingssnelheid van ozon; door E. MULDER. (*Met Plaat*) .... 194.

De door HALL ontdekte werking van een magneet op een electrischen stroom en de electromagnetische draaiing van het polarisatievlak van het licht; door H. A. LORENTZ .... 217.

Bouwstoffen voor de geschiedenis der Wis- en Natuurkundige Wetenschappen in de Nederlanden; door D. BIERENS DE HAAN .... 249.

Verslag omtrent de wenschelijkheid en uitvoerbaarheid van het instellen eener geregelde waarneming van verschijnselen van aardbeving in Nederland; uitgebracht in de Vergadering van 30 Juni 1883. 296.

Overzicht der boekwerken, door de Koninklijke Akademie van Wetenschappen ontvangen en aangekocht .... 1—56.

GEDRUKT BIJ DE ROEVER KRÖBER - BAKELS.

VERSLAGEN EN MEDEDEELINGEN

DER

KONINKLIJKE AKADEMIE

VAN

WETENSCHAPPEN.

Afdeeling NATUURKUNDE.

TWEEDE REEKS.

Negentiende Deel. — Derde Stuk.

AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER.
1884.

TWEEDE VERSLAG

OMTRENT DE

WENSCHELIJKHEID EN UITVOERBAARHEID VAN HET INSTELLEN EENER GEREGELDE WAARNEMING VAN VERSCHIJNSELEN VAN AARDBEVING IN NEDERLAND.

(Uitgebracht in de Vergadering van 27 October 1883).

De inzage van de antwoorden der personen en ligchamen, aan welke de vraag was gedaan of men zou willen medewerken aan het doen van waarnemingen omtrent de in Nederland voorkomende verschijnselen van aardbeving, naar het denkbeeld van ons geacht medelid HARTING, geeft ons aanleiding tot het volgende tweede verslag.

De Hoogleeraar R. A. MEES te Groningen acht zich niet bij machte de zaak te ondernemen, voornamelijk wegens de ongeschiktheid der lokaliteit, die daartoe te zijner beschikking staat, welke lokaliteit bovendien zeer aan dreuning onderhevig is.

Het bestuur van den Haarlemmermeerpolder heeft bezwaar tegen het voldoen aan het verlangen, doch stelt zijne meteorologische waarnemingen, die trouwens in het *Haarlemmermeer Weekblad* worden opgenomen, ter inzage.

De Directeur van het meteorologisch instituut te Utrecht, Dr. C. H. D. BUIJS BALLOT, meent, dat men niet mag aannemen, dat de noodige toestellen aanvankelijk beknopt en weinig kostbaar kunnen zijn, indien de waarnemingen wetenschappelijke waarde zullen hebben, Worden echter te Leijden, in den Haarlemmermeerpolder, in Rijnland en in Amsterdam waarnemingen gedaan, dan zullen ook de observatoria van Utrecht en den Helder zich daarmede bezighouden, zoo slechts de noodige gelden kunnen gevonden worden.

Op medewerking van Vlissingen zou niet moeten worden gerekend. Zonder de medewerking van de vier zoo even genoemde zijden, zou de Heer Buijs Ballot evenwel de groote opoffering van tijd en geld daaraan niet gaarne ten koste leggen.

De Hoogleeraar, bestuurder der Sterrenwacht te Leijden, Dr. H. G. van de Sande Bakhuijzen, maakt zijn antwoord op de vraag afhankelijk van de inlichting, die hij omtrent twee zaken verzoekt: 1°. in hoeverre de bij hem aanwezige instrumenten voor de waarnemingen kunnen worden gebruikt, dan wel, of afzonderlijke toestellen moeten worden aangekocht; 2°. of het volbrengen van de waarnemingen niet hinderlijk zal zijn aan de gewone werkzaamheden, die op de Sterrenwacht verricht worden.

De Direkteur der Polytechnische school, Dr. J. Bosscha, verzoekt eveneens inlichting omtrent de vereischt wordende seismografische zelfregistrerende toestellen en omtrent het bedrag der daarvoor noodige uitgaven.

Hij deelt daarbij al dadelijk mede, dat naar zijn oordeel het terrein der Polytechnische school, door de nabijheid van den Hollandschen Spoorweg aan de achterzijde en door het voorbijtrekken van zware voertuigen aan de voorzijde, te zeer aan schudding zal zijn blootgesteld.

De Direkteur van de filiaalinrichting van het K. N. Meteorologisch instituut, de Heer W. van Hasselt, verklaart zich bereid tot medewerking, indien de gelden voor den seismograaf verstrekt en de plannen tot verplaatsing van de inrichting naar de Handelskade verwezenlijkt worden. Ook hij vreest voor last van dreuning, omdat de plaats waar het nieuwe gebouw is ontworpen, in de onmiddellijke nabijheid zich zal bevinden van een laad- en loskraan, waarmede zware vrachten worden in- en ontscheept.

De Hoogleeraar, Directeur der Sterrenwacht te Utrecht, Dr. J. A. C. OUDEMANS, meent, dat de nabijheid van den Spoorweg, waarover onophoudelijk treinen loopen, die den grond in trilling brengen, zijn observatorium niet geschikt doet zijn voor het doen van seismografische waarnemingen, en dat die waarnemingen bovendien overbodig zouden wezen, indien zij aan het in de onmiddellijke nabijheid gelegen meteorologisch instituut zullen geschieden.

De dijkgraaf van Rijnland, de Heer DE CLERCQ, verklaart zich bereid de voorstellen bij het bestuur van het hoogheemraadschap te steunen en, zoo dit tot medewerking bereid bevonden wordt, de uitvoering van de vereischte waarnemingen te bevorderen, waarvoor Rijnlands observatorium aan de Oude Wetering hem de meest geschikte plaats voorkomt. Hij verwacht daartoe de nadere opgaven, ten einde blijke o. a. welke kosten aan de aanschaffing van instrumenten enz. verbonden zullen zijn. Hij meent dat het van zelf spreekt, dat de zaak van genoegzaam nut moet worden erkend, om de daaraan verbonden moeite en kosten te kunnen rechtvaardigen, en dat die waarnemingen ook zullen behooren te geschieden op de overige in den brief genoemde observatoria.

Uit het medegedeelde blijkt alzoo dat van vier plaatsen: Groningen, Haarlemmermeerpolder, Sterrenwacht te Utrecht en Vlissingen, geen waarnemingen te wachten zijn, en dat van de zes andere: Meteorologisch Instituut te Utrecht, den Helder, Leijden, Delft, Amsterdam en Rijnland, slechts zeer voorwaardelijk uitzicht bestaat op medewerking.

Van de vier medewerkers, die Dr. BUIJS BALLOT aan het werk wenscht te zien, indien hij zich aan de zaak zal kunnen toewijden, heeft een: het Bestuur van den Haarlemmermeerpolder, zich geheel teruggetrokken, en maken de andere drie het uitzicht op hun hulp afhankelijk van het ontvangen van nadere inlichtingen of van tegemoetkoming in de kosten; deze drie zijn Leijden, Amsterdam en Rijnland.

Daaruit volgt dus, dat misschien ook bij den Heer Buijs Ballot bezwaar zal bestaan de zaak aan te vatten.

Ofschoon dus de kans op de verwezenlijking van het denkbeeld van den Heer Harting zeer klein is, meenen wij toch te mogen adviseeren, de brieven uit Leijden, Delft, Amsterdam en van Rijnland aan den Heer Buijs Ballot toe te zenden.

Wellicht kan hij zich tevreden stellen met meer eenvoudige inrichtingen dan die hij wel zou wenschen, en kunnen daardoor de ontvangen antwoorden nog leiden tot het verkrijgen der medewerking van hen, die deze van de nadere inlichting afhankelijk stelden.

Van de volharding van den Heer Buijs Ballot, waar het geldt de doorzetting van wenschelijk bevonden wetenschappelijke waarnemingen, mag worden verwacht, dat hij ook in deze zaak, mocht hij haar willen ondernemen, zal zegevieren.

Hem zou dan beleefdelijk moeten worden verzocht, de gevraagde antwoorden rechtstreeks naar Leijden, Delft, Rijnland en Amsterdam te zenden, en de regeling op zich te willen nemen, indien hij ook zonder Haarlemmermeer het onderzoek zou willen aanvatten.

Mocht onverhoopt bij hem de genegenheid daartoe thans niet meer bestaan, of verloren gaan bij zijne verdere onderhandelingen met de anderen, dan zal de Afdeeling, naar onze meening, hare taak in deze als geëindigd kunnen beschouwen en van verdere pogingen moeten afzien.

27 October 1883.

VAN DIESEN.
J. M. VAN BEMMELEN.
E. H. VON BAUMHAUER.

VERSLAG

OVER EENE VERHANDELING DES HEEREN

Dr. M. W. BEIJERINCK:

ONDERZOEKINGEN OVER DE BESMETTELIJKHEID DER GOMZIEKTE BIJ DE PLANTEN.

(Uitgebracht in de Vergadering van 27 October 1883).

De ondergeteekenden, aan wie in Uwe vergadering van 29 Sept. j.l. werd opgedragen, van voorlichting en raad te dienen omtrent eene verhandeling des Heeren Dr. M. W. BEIJERINCK, leeraar aan 's Rijks Landbouwschool te Wageningen, getiteld: »*Onderzoekingen over de besmettelijkheid der gomziekte bij planten*," hebben de eer bij deze zich van den hun verstrekten last te kwijten.

De verhandeling, opgeluisterd door een vijftal platen, vangt aan met een overzicht, waarin de schrijver den gedachtengang blootlegt, welke aan het nemen van proeven, waaruit de besmettelijkheid der gomziekte zou moeten blijken, is voorafgegaan, en verder uit een 1e Hoofdstuk, waarin de besmettingsproeven uitvoerig worden beschreven; een 2e, gewijd aan eene bijzondere beschouwing van *Coryneum Beyerinckii*, den fungus van de gomziekte bij de Amygdalaceeën; een 3e, waarin de verschijnselen der gomziekte nauwkeurig worden nagegaan en in het licht gesteld; een 4e, waarin *Pleospora gummipara* als de verwekster van den gomvloed uit Acacia-heesters wordt aangewezen, en eindelijk een 5e, gewijd aan eene uitvoerige beschouwing van het roode pigment van bladeren en stengels bij hoogere planten.

Het uitgangspunt der besmettingsproeven vormde de Perzik, als zijnde de Steenvrucht, die meer dan andere Amygdalaceeën door de gomziekte bezocht wordt. Naar aanleiding van de uitkomsten, bij die proeven verkregen, werden later ook de Abrikoos, de Pruim en de Kers, en eindelijk nog een tiental andere boomen of heesters, niet tot de Amygdalaceeën behoorend, aan het experiment onderworpen. Het bleek daarbij dat Perzikgom haar verderfelijken invloed wel op den Abrikoos, den Pruim en den Kers, doch niet op vreemde — d. i. niet tot de Steenvruchten te rekenen — gewassen kan uitoefenen, en verder, dat de gom, door infectie bij welke Steenvrucht ook verwekt, steeds in staat is andere Steenvruchten dan de getroffene ziek te maken.

Bij het verrichten van al deze proeven was het, door microscopisch onderzoek, hoe langs zoo duidelijker gebleken, dat een fungus uit de reeks der Pyrenomyceten — hoewel dan ook slechts in den conidiënvorm — als de naaste oorzaak van het besmettend vermogen moest worden aangemerkt, waarom die plant, tot hiertoe onbeschreven, door den eerst ondergeteekende, ter eere van den ontdekker, met den naam van *Coryneum Beyerinckii* begiftigd werd (*Hedwigia* a°. 1883).

De vraag: of de besmettende kracht der *Coryneum*-sporen, in overeenstemming met feiten, aan de infectieziekten van het dierlijk organisme ontleend, ook voor verzwakking vatbaar ware, wordt in het 1e Hoofdstuk eveneens aan de orde gesteld en voorloopig bevestigend beantwoord, in dien zin, dat een besmet individu, met zijne eigene uitgestooten gom, die elders buitengewone smetkracht bleek te bezitten, na eenigen tijd ingeënt, op gezonde plaatsen slechts in zeer geringe mate werd aangedaan, niettegenstaande gom van andere voorwerpen, op andere gezonde takken van hetzelfde individu overgebracht, uiterst hevige verschijnselen van infectie te weeg bracht.

Controleproeven, waarbij allerhande vreemde voorwerpen, zooals stukjes hout, gomziek cambium en gomziek phloëem — beiden zonder myceliumdraden —, stukjes van vreemde fungi, zooals *Cladosporium herbarum* en *Fusisporium*, in de gemaakte wonden werden binnengebracht, met het doel om eenig aan de gomziekte eigen ziekteverschijnsel te voorschijn te roepen, bleven zonder eenig gevolg. De schrijver leidt uit de uitkomsten, met gomziek weefsel verkregen, af, dat de aanraking van een ziek met een gezond weefsel op zich zelve niet voldoende is om gomziekte te veroorzaken, maar weerspreekt het denkbeeld, dat uit het negatieve zijner resultaten zou voortvloeien, dat de zieke weefsels geene vloeibare smetstof zouden kunnen afzonderen, om reden de mogelijkheid bestaat dat de stukjes, voor de inoculatieproeven gebezigd, spoedig gedroogd en gestorven zijn.

Het 2e Hoofdstuk, aan de beschrijving van den ontwikkelingsgang van *Coryneum Beyerinckii* gewijd, met stilzwijgen voorbijgaand, veroorloven wij ons nog even stil te staan bij Hoofdstuk III, waarin de verschijnselen der gomziekte beschreven worden. Hierin toch wordt achtereenvolgens gehandeld: »Over den dood als gevolg der *Coryneum*-infectie"; »de uiterlijk zichtbare verschijnselen der gomziekte bij den Perzik"; »de anatomie der gomvorming" en »de physiologie der gomvorming". De inhoud dezer onderdeelen is zeer belangrijk. De groote mate van waarschijnlijkheid, dat er van het *Coryneum* een vloeibaar ferment uitgaat, wordt hier door duidelijk sprekende voorbeelden in het licht gesteld, en verder, in overeenstemming met vroeger door Prillieux verkregen uitkomsten, bewezen, dat de gom van gomzieke Amygdalaceeën voor het grootst gedeelte uit een weefsel ontstaat, dat, onder den invloed der infectie door het cambium voortgebracht, den naam van »pathologisch houtparenchym" behoort te dragen. Vervloeiing van dit parenchym tot gom is het einde van de reeks der waargenomen veranderingen; en even zooals er voor den tegennatuurlijken arbeid der cambiumcellen — het voortbrengen nl. van houtparenchym, waar secundair hout had behooren gevormd te worden — geene andere verklaring te vinden is als deze: dat het protaplasma dier cambiumcellen onder den invloed van het *Coryneum*-ferment tot een gewijzigd leven geprikkeld werd, evenzoo kan ook de vervloeiing van dat parenchym tot een structuurloos slijm niet anders gedacht worden, dan door de werking van datzelfde ferment op het protaplasma der parenchymcellen te zijn voortgesproten.

Deze beschouwingen leiden van zelf tot het besluit, dat het vinden van gomzieke weefsels, gomzieke takken, enz., zonder eenig spoor van myceliumdraden of eenigen daarbij behoorenden fungus, zeer goed mogelijk is, doch dat hieruit nog geenszins behoeft voort te vloeien, dat er geene infectie heeft plaats gehad. De schrijver der verhandeling is althans van oordeel, dat in al zoodanige gevallen het *Coryneum*-ferment vroeger in de cellen of in de voorouders, misschien zelfs de verwijderde voorouders, der cellen is binnengedrongen; zich met het protoplasma vereenigd heeft; daarmede is voortgegroeid, en ten slotte de pathologische verschijnselen heeft teweeggebracht. Hoe lang het ferment in de cellen vertoeven kan; of het in latenten toestand kan verkeeren, enz., zijn vragen, wier beantwoording voor de toekomst is weggelegd.

In het 4e Hoofdstuk worden de uitkomsten medegedeeld van het onderzoek naar den fungns, aan welks werking de gomvloed der Acaciaheesters — m. a. w. de wording der Arabische gom — zou behooren te worden toegeschreven. De schrijver was zoo gelukkig, ook hier eene soort van *Coryneum* als de — op grond der analogie waarschijnlijk — ziektemakende oorzaak te vinden, en daarenboven den ascusdragenden vorm te ontdekken, die, met tweeërlei soort van pycnidiën, tot dit *Coryneum* in een genetisch verband moest staan. Deze ascusvorm werd door den eerst ondergeteekende onder den titel van *Pleospora gummipara* beschreven (*Hedwigia* 1883).

In het 5e Hoofdstuk worden, naar aanleiding van de roode verkleuring, welke, kort na de infectie, aan de oppervlakte van Perziktakken wordt waargenomen, tal van gevallen opgesomd, waarbij eveneens een rood pigment in de cellen van eenig weefsel wordt voortgebracht, terwijl daarna de anatomische bijzonderheden dier weefsels wordt nagegaan, om ten slotte te komen tot de beantwoording der vraag: aan welke verwijderde oorzaak de kleursverandering moet worden toegeschreven, en in hoeverre de plant, waartoe zij behoort, daardoor eenig voordeel deelachtig geworden kan zijn. Het geheele hoofdstuk is, zoowel om de massa feiten, daarin vermeld, als om de waardeering, aan elk dier feiten ten deel gevallen, zeer lezenswaard, en wel in staat de overtuiging te vestigen, dat de schrijver, door veelvuldig eigen onderzoek, een diepen blik in het leven der planten heeft geslagen.

Toch komt het ons voor, dat dit hoofdstuk, wat de rangschikking der feiten en denkbeelden — dus de redactie — betreft, minder gelukkig dan het overige is uitgevallen, en voor den lezer de klaarheid mist, welke de vroegere hoofdstukken kenmerkt. Bovendien is de samenhang van dit gedeelte met het voorafgaande, ofschoon aanwezig, niet van dien aard, dat de plaatsing er van als »Hoofdstuk" onder den algemeenen titel »Onderzoekingen over de besmettelijkheid der gomziekte bij planten" geheel gemotiveerd schijnt. Wij wenschten dus aan den schrijver in bedenking te geven, de redactie van dit gedeelte nog eens te herzien, en dan tevens den hoofdtitel uit te breiden, of het laatste hoofdstuk onder een afzonderlijken titel als aanhangsel te geven. In het eerste geval zou het opschrift der verhandeling bijv. kunnen luiden: »Onderzoekingen over de besmettelijkheid der gomziekte, en over de beteekenis van het roode pigment bij planten"; in het tweede: »Onderzoekingen over de besmettelijkheid der gomziekte bij planten, gevolgd door eene beschouwing over de beteekenis van het roode pigment in stengels en bladeren".

Zoowel om de merkwaardige ontdekking, in de verhandeling beschreven, als om de denkbeelden daarin neêrgelegd, en die zonder twijfel beschouwd kunnen worden als uitgangspunten voor nieuwe onderzoekingen, niet enkel voor de kennis der plantenwereld, maar voor die der gansche organische schepping van belang, nemen de ondergeteekenden de vrijheid U voor te stellen, de verhandeling des Heeren Beijerinck in de werken der Akademie op te nemen.

Amsterdam en *Leiden*, October 1883.

C. A. J. A. OUDEMANS.
W. F. R. SURINGAR.

RAPPORT OVER EENE VERHANDELING

DES HEEREN

C. LE PAIGE

SUR LES SURFACES DU TROISIÈME ORDRE.

(Uitgebracht in de Vergadering van 27 October 1883).

De schrijver, die zich reeds herhaaldelijk met de meetkunde van de derde orde bezig hield, — men vindt een goed deel zijner stukken in deze verhandeling aangehaald — heeft in deze beschouwing zich tot taak gesteld: de constructie van een oppervlak van de derde orde, bepaald door negentien punten.

Ten einde in het tweede gedeelte van zijn stuk daartoe te kunnen geraken, geeft schrijver in het eerste gedeelte een zamenstel van meer of minder bekende stellingen en werkstukken, die hij later noodig heeft; zij betreffen de scheeve en vlakke krommen der derde orde, de cubiques, en behooren te huis in de theorie der involutie en homographie van de derde orde en den tweeden rang.

Schrijver bepaalt alzoo op eenige scheeve cubique de punten, die zij of met eene rechte en eene kegelsnede, of met eene rechte en eene andere, vlakke, cubique overeenstemmend gemeen heeft. Vervolgens construeert hij eene vlakke cubique, die door drie gegeven punten gaat, en behoort tot een drievoudig oneindig stelsel van cubiques, dat door vier gegevene, vlakke cubiques bepaald wordt; om daarna nog te behandelen de constructie van een oppervlak van den tweeden graad, bepaald door negen punten, of van een van de tweede klasse, bepaald door negen raakvlakken.

Met deze wapenen treedt hij, in het tweede gedeelte, op tegen de oppervlakken van de derde orde, en komt alzoo tot de gewenschte constructie, indien er gegeven zijn:

1°. 3 rechten en 7 punten;

2°. 1 rechte en 3 groepen van 3 punten, telkens op de zelfde rechte gelegen, en nog 6 andere punten;

3°. 1 rechte en 3 punten, op eene rechte gelegen, en nog 12 andere punten;

4°. 3 punten, op eene rechte gelegen, en nog 16 andere punten;

5°. 19 punten;

En dan nog, naar eene eenigzins verschillende methode voor hetzelfde doel, als er gegeven zijn:

6°. 4 groepen van 3 punten, telkens op dezelfde rechte gelegen, en nog 7 andere punten;

7°. 3 punten, op eene rechte gelegen, en nog 16 andere punten; welk laatste geval weder met dat, onder N°. 4 voorkomende, overeenstemt.

Het zoude ons te ver voeren, als wij tot meer bijzondere beschouwingen opklommen; daarbij zouden wij trouwens vreezen, in deze vergadering groot gevaar te loopen van niet of slechts gedeeltelijk begrepen te worden. Maar de stelselmatige en keurige behandelingswijze van dit moeielijke vraagstuk doet ons niet aarzelen, tot de opname van de toegezonden Verhandeling te adviseeren.

D. BIERENS DE HAAN.
F. J. VAN DEN BERG.

UEBER DIE ANZIEHUNG

ZWISCHEN

GELÖSTEN STOFFEN UND WASSER IN VERDÜNNTEN LÖSUNGEN,

Vorläufige Mittheilung

VON

Dr. HUGO DE VRIES.

Engelmann's Untersuchungen über die Sauerstoff-ausscheidung aus grünen Pflanzentheilen nach seiner Bacterienmethode haben der Ueberzeugung festen Boden gewonnen, dass zur Lösung mancher physikalischer oder chemischer Probleme physiologische Methoden nicht nur denselben, sondern in bestimmten Fällen sogar einen grösseren Werth haben können, als rein physikalische oder chemische. Seine Methode gestattet eine viel schärfere Beobachtung der fraglichen Processe und führt zu einer klareren Einsicht in ihre ursächlichen Beziehungen, als mittelst der früheren Verfahrungsweisen erreicht werden konnte.

Auf den folgenden Seiten mache ich den Versuch ein anderes physikalisches Problem nach einer physiologischen Methode zu behandeln.

Es handelt sich um die Frage nach der relativen Affinität in Wasser gelöster Stoffe zu ihrem Lösungsmittel, in verdünnten Lösungen und bei gewöhnlicher Temperatur.

Die Beantwortung dieser so zugespitzten Frage war für die Fortsetzung meiner Studien über den Turgor *) und dessen Bedeutung für das Wachsthum der Pflanzen durchaus unerlässlich. Die Physik hat bis jetzt auf diese Frage keine für meine Zwecke ausreichende Antwort gegeben, und somit war ich gezwungen, selbst die erforderlichen Methoden auszubilden, um die genannten Affinitäten messen zu können.

Ehe ich zur Beschreibung meiner Methoden und zur Mittheilung meiner Resultate schreite, sei es mir erlaubt, zu erörtern, weshalb es für mich nothwendig war, jene Affinitäten zu kennen. Es wird sich daraus die Berechtigung meiner Frage ergeben, zugleich aber die Wahl der von mir untersuchten Stoffe, und die Grenze, welche ich mir gesteckt habe, erklären. Denn ich habe meine Aufgabe nur soweit gelöst, als grade für jenen Zweck erforderlich war.

Die typische Pflanzenzelle besteht, wenn sie das allererste Jugendstadium verlassen hat, aus dem Protoplasma, dem Zellsaft und der Wand. Letztere ist allseitig geschlossen, und auf ihrer Innenseite lückenlos vom Protoplasma, das meist nur eine dünne Schicht bildet, ausgekleidet. Wand und Protoplasma sind, wenigstens solange die Zelle noch wächst, sehr dehnbar und elastisch. Der Zellsaft ist eine wässerige Flüssigkeit, welche verschiedene Substanzen, wie Zucker, pflanzensaure Salze, anorganische Bestandtheile u. s. w. gelöst hält. Diese ziehen Wasser aus der Umgebung der Zelle an sich, vergrössern das Volumen des Inhaltes und versetzen die Wandungen in den gespannten Zustand: den Turgor. Fortwährend scheidet das Protoplasma in den Zellsaft osmotisch wirksame Stoffe ab, oder vermittelt es chemische Umwandlungen, durch welche häufig Körper mit geringer Affinität zu Wasser in solche mit grosser Wasseranziehender Kraft umgesetzt werden. Diese Thätigkeit des Protoplasma regelt die Geschwindigkeit des Wachsthums, und vermittelt, wie ich früher zeigte, die Reizbewegungen †)

---

*) Turgor heisst bekanntlich die osmotische Spannung zwischen Wand und Inhalt in der lebendigen Pflanzenzelle.

†) Over de bewegingen der ranken van Sicyos. *Verslagen en Mededeelingen der K. Akad. v. Wetensch.* Amsterdam. 2de Reeks. XV. 1880. S. 51.

wachsender Organe, sie gehört somit zu den wichtigsten Processen des Pflanzenlebens.

Um aber diesen äusserst complicirten Vorgang in seine einzelnen Factoren zerlegen, und dadurch einem tiefer eindringenden Studium zugänglich machen zu können, war es selbstverständlich in erster Linie nothwendig, zu wissen, welche Verbindungen in den Zellsaft gebracht, oder darin gebildet werden, und welchen Antheil diese an der gesammten Wasser-anziehenden Kraft des Zellsaftes nehmen. Die Statik muss der Dynamik vorausgehen. Das Studium der Bedeutung der einzelnen Inhaltsstoffe für Wachsthum und Bewegungen ist ohne die Kenntniss der Affinität jener Stoffe zu Wasser einfach unmöglich.

Die chemische Analyse des Zellsaftes lehrt uns die darin gelösten Stoffe in ihren relativen und absoluten Mengen kennen. Um daraus aber auf ihren Antheil an der Turgorkraft, d. h. an der gesammten Wasser-anziehenden Kraft dieses Zellsaftes schliessen zu können, muss für jede Verbindung ein Coëfficient gegeben sein, der ihre Affinität zu Wasser anweist. Diese Coëfficienten für die wichtigsten in den Säften der Pflanzenzellen gelösten Stoffe zu bestimmen, war also meine Aufgabe. Sind diese bekannt, so braucht man offenbar nur die durch die chemische Analyse gegebenen Zahlen für jede Substanz mit ihrem eigenen Coëfficienten zu multipliciren um deren Antheil an der Turgorkraft zu finden.

Beschreibung der methoden.

I. *Plasmolytische Methode.* Im Jahre 1854 hat Pringsheim *) gelehrt, dass wenn man schwache Lösungen unschädlicher Substanzen langsam auf lebendige Pflanzenzellen einwirken lässt, das Protoplasma sich langsam von der Zellhaut zurückzieht. Bedingung dazu ist selbstverständlich, dass die eindringende Lösung der Zelle Wasser entziehe, das Volum ihres Inhaltes kleiner mache, und diese Bedingung

*) N. Pringsheim, Untersuchungen über den Bau und die Bildung der Pflanzenzelle. Berlin 1854.

wird erfüllt sein, wenn die äussere Lösung eine grössere Affinität zu Wasser hat, als der Zellsaft. Pringsheim betonte die Vortheile der Anwendung verdünnter Lösungen, und der langsamen Einwirkung; nur diese gestatteten die Erscheinung von Anfang an zu verfolgen; die bis dahin übliche Anwendung stärkerer Reagentien liess nur den Endzustand erkennen. Grade diese langsame Einwirkung schwacher Lösungen auf lebende Zellen, und die dadurch hervorgerufene, seitdem *Plasmolyse* genannte Abhebung des lebendigen Protoplasten von der Zellhaut, bildet die Grundlage für die Eine unserer Methoden. Ich nenne diese deshalb die plasmolytische Methode.

Das Protoplasma lässt während der Plasmolyse zwar das Wasser durch sich hindurchgehen, nicht aber die gelösten Stoffe des Zellinhaltes oder der umgebenden Lösung, vorausgesetzt, dass diese für das Leben der Zelle unschädlich ist. Naegeli's bahnbrechende Untersuchungen über diesen Gegenstand sind jedem bekannt *). In Zellen mit gefärbtem Zellsaft, zumal solchen mancher Oberhäute, ist es nun leicht, bei etwa 100-facher Vergrösserung den allerersten Anfang der Plasmolyse, wo das Protoplasma nur an einer kleinen Stelle die Wand verlässt, mit Sicherheit zu beobachten. Sucht man nun für dieselben Zellen diejenige Concentration der Lösungen verschiedener Stoffe aus, welche grade diesen Anfang der Plasmolyse bedingen, so entziehen diese den Zellen offenbar mit genau derselben Kraft Wasser. Ich nenne diese Concentrationen derhalb *isotonische* (ἰσος gleich, τονος Spannung).

Es gilt nun aus diesen, durch die Versuche direct zu ermittelnden Werthen, die gewünschten Coëfficienten abzuleiten. Dazu ist in erster Linie erforderlich, die Concentrationen nicht nach Gewichtsprocenten, sondern nach Molecülen berechnet, anzuwenden. Es ist also anzugeben, wie viele Molecüle (H = 1 Gramm) jede Lösung im Liter enthält. In dieser Weise geben also die isotonischen Concentrationen ohne Weiteres an, wie viele Molecüle der einen Substanz

*) C. Naegeli, Primordialschlauch, in dessen Pflanzenphys. Unters. Heft I, 1855, S. 1.

mit derselben Kraft Wasser anziehen, wie eine bestimmte Anzahl Molecüle einer anderen Verbindung. Die Verhältnisse zwischen jenen Concentrationen sind also ein Maass für die Anziehung der fraglichen Substanzen für je Ein Molecül. Wählt man dabei als Einheit die Affinität einer zehntelnormalen Lösung von Oxalsäure, wie sie nach Mohr die Grundlage der Alcalimetrie bildet, so weisen jene Verhältnisse die Grösse der Affinität zu Wasser für je Ein Molecül der betreffenden Körper an, wenn jene Grösse für Ein Aequivalent Oxalsäure = 1, also für Ein Molecül Oxalsäure = 2 gesetzt wird. Es braucht zu diesen Berechnungen nur der Annahme, dass diese Affinitäten innerhalb der Grenzen der Versuche und der Berechnungen der Concentration proportional sind, und von der Richtigkeit dieses Satzes habe ich mich durch besondere Experimente überzeugt.

Aus diesen Erwägungen geht nun die folgende Definition hervor:

Isotonische Coëfficienten nenne ich diejenigen Zahlen, welche die Affinität je eines Molecüles einer gelösten Substanz zu Wasser in verdünnter wässiger Lösung angeben, wenn die Affinität eines halben Molecüles Oxalsäure als Einheit angenommen wird.

Diese Einheit kommt, nach einigen vorläufigen, jedoch nur annähernden, Berechnungen, nahezu einer Atmosphere gleich. Das heisst, dass eine Zelle, wenn ihr Zellsaft mit derselben Kraft Wasser anzieht, wie die Lösung von 0.1 Aeq Oxalsäure, eine osmotische Spannung der Wandung von etwa einer Atmosphere hervorrufen kann.

II. *Methode der Gewebespannung.* Spaltet man wachsende Sprossgipfel der Länge nach in vier gleiche Theile, so krümmen sich diese im Augenblicke der Trennung nach aussen. Legt man nun einen solchen Kreuzstreifen in Wasser, und einen anderen in eine starke Salzlösung, so nimmt jener Wasser auf, und erhöht den Grad seiner Biegung bedeutend, während dieser Wasser verliert, und seine Krümmung einbüsst. Bringt man Streifen in Lösungen verschiedener Concentration, so ist es leicht, jene aufzusuchen, in der weder zu, noch Abnahme der Krümmung stattfindet. In dieser Stärke zieht das Salz also mit derselben Kraft Wasser an, wie das Schwellgewebe des Streifens. Bestimmt man diese Concentration für verschiedene Salze, so stellen sie offenbar isotonische Concentrationen dar, und ihre in obiger Weise berechneten Verhältnisse geben uns somit die isotonischen Coëfficienten.

Diese Methode giebt genau dieselben Resultate wie die erstere, so lange man mit relativ rasch diffundirenden Stoffen arbeitet. Bei geringer Diffusionsgeschwindigkeit dringt die gelöste Substanz nicht rasch genug in das Gewebe ein, und die isotonischen Coëfficienten fallen dann dementsprechend etwas zu niedrig aus. Solche Verbindungen sollten also nur nach der ersten Methode untersucht werden.

Versuche und Resultate.

Nach beiden Methoden habe ich eine Reihe von Versuchen ausgeführt, um für die wichtigsten Inhaltsstoffe der Pflanzenzellen die isotonischen Coëfficienten zu ermitteln.

Indem ich für die Einzelheiten der Ausführung der Methoden, sowie für die Détails der Versuche auf eine ausführliche Abhandlung verweise, welche demnächst in Pringsheim's Jahrbüchern (Bd. XIV) veröffentlich werden soll, theile ich hier nur die erhaltenen Resultate mit. Die folgende Tabelle enthält die nach beiden Methoden ermittelten isotonischen Coëfficienten. Diese gelten für Lösungen von etwa 1—2 pCt., bei stärkeren Concentrationen können merkliche Abweichungen eintreten.

Isotonische Coëfficienten.

Gruppe I.

		Isoton. Coëff. nach der plasm. Meth.
Rohrzucker	$C_{12}H_{22}O_{11}$	1.9
Invertzucker	$C_6H_{12}O_6$	1.9
Aepfelsäure.	$C_4H_6O_5$	2.0
Weinsäure	$C_4H_6O_6$	2.0
Citronensäure	$C_6H_8O_7$	2.0

Gruppe II.

		Isoton. Coëff. nach der plasm. Meth.	Isoton. Coëff. nach d. Meth. d. Gewebespannung
Salpetersaures Kalium.	KNO_3	3.0	
Salpetersaures Natrium	$NaNO_3$	3.0	
Chlorkalium	KCl	3.0	
Chlornatrium	$NaCl$		3.05
Chlorammonium.	NH_4Cl	3.0	
Essigsaures Kalium	$KC_2H_3O_2$	3.0	
Doppeltsaures Citron. Kalium.	$KH_2C_6H_5O_7$	3.05	

Gruppe III.

Oxalsaures Kalium	$K_2C_2O_4$		3.9
Schwefelsaures Kalium	K_2SO_4	3.9	3.9
Phosphorsaures Kalium	K_2HPO_4		4.0
Weinsaures Kalium	$K_2C_4H_4O_6$		4.0
Aepfelsaures Kalium.	$K_2C_4H_4O_5$		4.1
Einfachsaures Citron. Kalium.	$K_2HC_6H_5O_7$	4.1	

Gruppe IV.

Citronensaures Kalium	$K_3C_6H_5O_7$	5.0	

Gruppe V.

Aepfelsaures Magnesium. . . .	$MgC_4H_4O_5$	1.9	
Schwefelsaures Magnesium . .	$MgSO_4$	2.0	

Gruppe VI.

Citronensaures Magnesium . .	$Mg_3(C_6H_5O_7)_2$	3.9	
Chlormagnesium.	$MgCl_2$	4.3	
Chlorcalcium.	$CaCl_2$	4.3	

Die Zahlen sind, mit wenigen Ausnahmen, Mittelzahlen aus einer grösseren oder kleineren Reihe von Versuchen. Die Differenzen zwischen den einzelnen Versuchen einer Reihe sind in der Regel nur klein, jedoch so, dass sie einen Fehler von etwa 0.1 im Resultate nicht ausschliessen. Eine grössere Genauigkeit beanspruchen unsere Coëfficienten also nicht*). Trägt man diesem Umstande Rechnung, so lässt sich das Ergebniss unserer Tabelle in folgende drei Sätze zusammenfassen:

1er *Satz. Die isotonischen Coëfficienten haben für die Glieder einer nähmlichen chemischen Gruppe nahezu denselben Werth.*

2er *Satz. Die isotonischen Coëfficienten der einzelnen chemischen Gruppen verhalten sich zu einander nahezu wie* 2 : 3 : 4 : 5.

Zwischen der chemischen Zusammensetzung und dem isotonischen Coëfficienten einer Verbindung besteht ferner eine sehr einfache Beziehung, wie sich am leichtesten ergeben wird, wenn wir den gemeinsamen Character der Glieder einer und derselben Gruppe kurz hervorheben.

Wir finden dann folgende Eintheilung:

	Isot. Coëff.
1e Abtheilung. Eine Gruppe. Organische metallfreie Verbindungen	2
2e Abtheilung. Salze der Alcali-metalle:	
2e Gruppe. Mit je einem Atom Alcali im Molecül.	3
3e » Mit je zwei Atomen » » »	4
4e » Mit je drei » » » »	5
3e Abtheilung. Salze der Erd-alcaliën:	
5e Gruppe. Mit je einem Atom Säure im Molecül.	2
6e » Mit je zwei Atomen » » »	4

Die Ursache dieser äusserst einfachen Beziehung ist offenbar die folgende:

3er *Satz. Jede Säure und jedes Metall hat in allen Salzen denselben partiellen isotonischen Coëfficienten; der Coëfficient des Salzes ist gleich der Summe der partiellen Coëfficienten aller seiner Theile.*

---

*) Die grössere Abweichung der beiden zuletzt genannten Chloride kann nicht einem Beobachtungsfehler zugeschrieben werden; ich komme später auf diesen Punkt zurück.

Diese partiellen isotonischen Coëfficienten sind:

für jedes Atom Säure	2
für jedes Atom eines Alcali-metalles . . .	1
für jedes Atom eines Erd-alcali-metalles . .	0

Innerhalb der Grenzen meiner Untersuchung kann man hieraus für jedes beliebige Salz den isotonischen Coëfficienten ableiten. Zum Beispiel für:

$$K_2SO_4 = 1 \times 2 + 2 = 4$$
$$MgSO_4 = \quad 0 + 2 \quad = 2$$

In derselben Weise für Salze, welche offenbar zu denselben chemischen Gruppen gehören, welche ich aber nicht untersucht habe, z. B. für:

$$(NH_4)_2SO_4 = 1 \times 2 + 2 = 4$$

Die Regel gilt nicht nur für neutrale, sondern auch für saure Salze z. B. für saures oxalsaures Kalium:

$$KHC_2O_4 = 1 + 2 = 3$$

Eine wichtige Frage ist diese, ob der partielle isotonische Coëfficient einer Säure oder eines Metalles derselbe ist wie der isotonische Coëfficient derselben Säure oder der betreffenden Basis im freien Zustande. Für die organischen Säuren ist dies der Fall, wie ein Blick auf die Tabelle lehrt. Für den Kalk und die Magnesia ist dem aber offenbar nicht so, weil diese Basen im freien Zustande unmöglich eine Affinität zu Wasser = 0 haben können. Für die fixen Alcalien und die stärkeren Säuren vermuthe ich ebenfalls eine grössere Anziehung zu Wasser im freien Zustande als in ihren Verbindungen; jedoch habe ich bis jetzt keine Pflanze finden können, welche diese dem Leben so äusserst gefährlichen Stoffe hinreichend lange ertrüge, um deren Coëfficienten bestimmen zu können.

Aus unserem dritten Satze folgt, *dass bei sämmtlichen* *kreuzweisen Umsetzungen zwischen neutralen Salzen, sauren organisch-sauren Salzen und freien organischen Säuren, die Summe der Affinitäten zu Wasser eine unveränderliche ist.* Sind starke Säuren oder Basen im freien Zustande mit im Spiele, so gilt der Satz nicht mehr. In Pflanzensäften ist dieses aber nicht der Fall, und auf sie hat der Satz also volle Anwendung. Diese liegt zumal darin, dass es für die Berechnung der Affinitäten von gemischten Stoffen zu ihrem Losüngswasser gleichgültig ist, wie die vorhandenen Basen über die verschiedenen Säuren vertheilt sind; die chemische Analyse braucht also nur die Mengen der Säuren und der Basen, jede für sich, nachzuweisen.

Zum Schlusse habe ich noch Einiges über die bei dem Chlorcalcium und dem Chlormagnesium beobachtete Abweichung nachzutragen. Ich vermuthe, dass sie von der Concentration der angewandten Flüssigkeiten abhängt und bei bedeutend stärkerer Verdünnung verschwinden würde. Meine Methode liess nicht zu dieses direct zu prüfen; dagegen habe ich mich überzeugt, dass bei bedeutend stärkeren Lösungen dieser Salze jene Abweichung eine viel grössere wird, und dass die Concentration somit jedenfalls nicht ohne Einfluss auf sie ist.

Beziehungen der isotonischen Coëfficienten zu den molecularen Gefrierpunktserniedrigungen.

Die Erniedigung des Gefrierpunktes von Wasser durch darin gelöste Substanzen beruht offenbar auf derselben Affinität dieser Stoffe zu Wasser, wie die Erscheinungen, auf welche sich meine Methoden gründen. Es ist deshalb zu erwarten, dass beide im Allgemeinen von denselben Gesetzen beherrscht werden, und es lohnt sich somit beide hier mit einander zu vergleichen.

Durch die schönen Untersuchungen van Rüdorff, De Coppet und Raoult *) sind die Gefrierpunkts-erniedrigungen für

*) Rüdorff. Pogg. *Ann.* CXIV p. 63, CXVI p. 55, CXXII p. 337 (1861—1864) De Coppet. *Ann. d. chimie et de physique,* 4e Serie XXIII

eine grosse Reihe von Lösungen bekannt, und die beiden letztgenannten Forscher haben über die sogenannten molecülaren Gefrierpunktserniedrigungen, d. h. über die Erniedrigungen, welche Ein Molecül in 100 Gramm Wasser gelöst, verursacht, allgemeine Gesetze abgeleitet, mit denen unsere Sätze der isotonischen Coëfficienten in sehr befriedigender Weise übereinstimmen *). De Coppet fand, *dass für die Glieder derselben chemischen Gruppe die moleculare Gefrierpunktserniedrigung nahezu dieselbe ist.* De Coppet arbeitete nur mit anorganischen Körpern, und Raoult zeigte, *dass sämmtliche organische Verbindungen pro Molecül dieselbe Erniedrigung des Gefrierpunktes verursachen.* Damit ist unser ersterer Satz ganz im Einklang, und unsere Gruppen stimmen mit den von De Coppet aufgestellten in befriedigender Weise überein. Nur die Chloride machen auch hier eine Ausnahme.

Einfache Beziehungen zwischen den verschiedenen Gruppen hat De Coppet nicht aufgestellt, und Raoult fasst sämmtliche Stoffe in zwei Gruppen zusammen. Zu der ersteren gehören die organischen Stoffe, die schwachen anorganischen Säuren und das schwefelsaure Magnesium; zur letzteren die

---

p. 366, XXV p. 502, XXVI p. 98, (1871—1872). Raoult. *Comptes rendus* T. 90 p. 865, T. 94 p. 1517, T. 95 p. 187, p. 1030, T. 96 p. 560, p. 1653, (1880—1883).

*) Meine Methode hat vor der der Ermittelung der Gefrierpunktserniedrungen den Vorzug, dass sie mit stärker verdünnten Lösungen zu arbeiten erlaubt. Meine Lösungen hatten meist eine Concentration von 0,1—0,4 Aeq.; die von Raoult meist eine von 1 Aeq. und De Coppet arbeitete mit viel stärkeren, häufig sogar mit übersättigten Lösungen. Je verdünnter aber die Lösung, um so klarer treten die Beziehungen hervor. Ferner habe ich meine Stoffe zu einem bestimmten Volum der Lösung aufgelöst, während De Coppet und Raoult die festen Stoffe jedesmal in dieselbe Menge Wasser lösten. Endlich suchte ich die isotonischen Concentrationen auf, während die genannten Forscher nicht direct jene Lösungen aufsuchten, welche gleiche moleculare Gefrierpunktserniedrigungen hatten, sondern für Lösungen bestimmter Concentration den Gefrierpunkt ermittelten. Die Unterschiede zwischen den Gliedern derselben Gruppe werden nach meiner Methode bedeutend kleiner gefunden als sie z. B. Raoult angiebt.

übrigen Salze, die starken Säuren und die fixen Alcalien. Die moleculäre Gefrierpunktserniedrigung für die erste Gruppe ist etwa 17—20, im Mittel 18.5, für die zweite 33—43, im Mittel etwa 37. Die Zahlen für die einzelnen, zur zweiten Gruppe gehörenden Stoffe hat RAOULT bis jetzt nicht mitgetheilt.

Nach meinen Versuchen unterscheide ich mehr Gruppen als RAOULT, aber abgesehen davon bestätigen meine Resultate die von beiden Physikern erhaltenen Ergebnisse auch in diesem Punkte, so weit meine Versuche gehen, völlig. Denn das schwefelsaure Magnesium hat denselben isotonischen Coëfficienten wie die organischen Körper (2), und wenn man die Salze meiner 2en, 3en, 4en und 6en Gruppe zusammenfasst, stehen ihre isotonischen Coëfficienten (3, 4 und 5) zu dem der organischen Stoffe (2) etwa in derselben Beziehung wie die entsprechenden Gefrierpunktserniedrigungen (33—43 zu 17—20).

Auch in besonderen Fällen findet für mehrere Verbindungen dieselbe Beziehung zwischen den isotonischen Coëfficienten wie zwischen den Gefrierpunktserniedrigungen statt. So weichen z. B. die Chloride in den Versuchen von DE COPPET und RAOULT in derselben Weise, jedoch stärker, von den verwandten Verbindungen ab, wie das Chlorcalcium und das Chlormagnesium in meiner Tabelle.

Ich darf also die Uebereinstimmung in den beiderseitigen Resultaten als eine sehr befriedigende betrachten, und die Ursache der noch nicht aufgeklärten Differenzen in den so sehr verschiedenen Methoden suchen.

ANWENDUNG DER ISOTONISCHEN COËFFICIENTEN AUF DIE ANALYSE DER TURGORKRAFT.

Es erübrigt mir jetzt noch, durch ein Beispiel zu zeigen, wie die mitgetheilten Erfahrungen uns nun zur Lösung des Hauptproblemes, der Zerlegung der Turgors in seine einzelnen Factoren, behülflich sein können.

Die quantitativ-chemische Analyse eines Pflanzensaftes pflegt keine vollständige zu sein; wohl immer giebt es einige Stoffe, welche sich bis jetzt der Bestimmung entziehen. Es ist deshalb erforderlich, die Affinität eines Zellsaftes zu Wasser direct messen zu können; dieses kann aber mit ausgepressten Zellsäften offenbar in derselben Weise geschehen wie mit chemisch reinen Lösungen. Ich habe dazu die oben beschriebene plasmolytische Methode angewandt, und die wasseranziehende Kraft der zu analysirenden Zellsäfte stets mit den Lösungen eines bestimmten Salzes, und zwar des Kalisalpeters verglichen.

Ist die chemische Analyse nach der titrimetrischen Methode ausgeführt, so giebt sie den Gehalt des Zellsaftes an den einzelnen Bestandtheilen in Aequivalenten, und also direct oder mittelst einer einfachen Umrechnung in Molecülen an. Eine Berechnung in Gewichtsprocenten ist dann nicht nöthig, da unsere isotonischen Coëfficienten ja grade für Molecüle gelten.

Als Beispiel wähle ich das Mark eines nahezu ausgewachsenen Blattstieles von *Rheum hybridum*. Der ausgepresste Saft hatte dieselbe Affinität zu Wasser wie eine Salpeterlösung von 0.22 Aeq. Die chemische Analyse ergab folgendes:

	In Aeq.	In Mol.	In Gewichtsprocenten.
Glucose	—	0.0078	1.4
Freie Oxalsäure . . .	0.277	0.1885	1.25
Saures oxals. Kalium . .	0.078	0.039	0.5
Oxalsaures Magnesium. .	0.017	0.0085	0.1
Kaliphosphat.	0.015	0.005	0.03

Die Zahlen der ersten Reihe wurden bei der titrimetrischer Messung direct gefunden; aus ihnen sind die der beiden anderen Reihen berechnet. Die Glucose wurde nach Fehling titrirt, es waren 2.8 c.c. der Fehling'schen Lösung auf 1 c.c. des Saftes erforderlich. Die Oxalsäure wurde acidrimetrisch bestimmt, ihre Salze als kohlensaure Salze in der Asche titrirt, und aus den gefundenen Zahlen der Gehalt an freier Oxalsäure und saurem oxalsaurem Kali abgeleitet. Magnesium und Calcium wurden nicht getrennt, sondern zusammen als Magnesium berechnet. Es ist dieses deshalb erlaubt, weil die isotonischen Coëfficienten für die

Salze beider Metalle dieselben sind. Das Kaliphosphat wurde gleichfalls in der Asche bestimmt.

Um aus diesen Zahlen den Antheil der einzelnen Stoffe an der Turgorkraft zu berechnen, haben wir also den in Molecülen ausgedrückten Gehalt mit dem zugehörigen isotonischen Coëfficienten zu multipliciren, und durch die in derselben Weise für die totale Turgorkraft berechnete Zahl ($0.22 \times 3 = 0.66$) zu dividiren. Die fraglichen isotonischen Coëfficienten nun sind für Oxalsäure 2, für saures oxalsaures Kalium 3, für oxalsaures Magnesium 2, für Kaliphosphat 4 und für Glucose 2. Wir erhalten in dieser Weise folgendes Schlussresultat:

	Proc. Antheil an der Turgorkraft.
Glucose	23.7
Oxalsäure	42.0
Saures oxals. Kalium	17.7
Oxals. Magnesium	2.6
Kaliphosphat	3.0
Summa	89.0

Es fallen somit noch 11 pCt. auf unbestimmte Stoffe des Zellsaftes.

In dieser Weise lässt sich nun stets der Antheil entweder eines einzigen, oder mehrerer Bestandtheile des Zellsaftes an der Turgorkraft bestimmen. Dazu ist jedesmal nur die Ermittelung der gesammten Affinität des Saftes zu Wasser, und seines Gehaltes an den fraglichen Substanzen erforderlich.

Für manche Zwecke reicht es hin, einzelne Bestandtheile des Zellsaftes in Bezug auf ihren Antheil an dem Turgor vergleichen zu können, ohne dass es nöthig wäre sie auf die gesammte Kraft zu berechnen. In diesen Fällen ist die Ermittelung der totalen Affinität des Saftes zu Wasser überflüssig, und es erfordert das Studium der Turgorkraft dann weiter nichts, als eine chemische Analyse, und eine Umrechnung ihrer Resultate mittelst der isotonischen Coëfficienten.

Amsterdam, 27 October 1883.

SUR LES SURFACES DU TROISIÈME ORDRE;

PAR LE

Dr. C. LE PAIGE.

Professeur de Géométrie Supérieure à l'Université de Liége.

Nous nous proposons, dans ce mémoire, de développer les méthodes de construction d'une surface du troisième ordre, définie par dix-neuf points, que nous avons indiquées rapidement dans deux Notes insérées aux *Comptes-rendus de l'Académie des Sciences de Paris* *).

Ces méthodes reposent sur l'emploi de l'involution et de l'homographie du troisième ordre et du second rang que nous avons étudiées avec détail dans des travaux antérieurs †). Les propriétés de l'involution doivent néanmoins être exposées d'une manière spéciale pour permettre d'arriver, le plus aisément possible, au but que nous nous proposons; aussi, afin de ne pas interrompre plus loin notre solution, nous diviserons cette étude en deux parties: dans la première nous ferons connaître les propriétés et nous résoudrons les problèmes, relatifs aux cubiques planes ou gauches, que nous devrons employer; dans la seconde, nous aborderons, à l'aide de ces méthodes, la construction de la surface du troisième ordre §).

---

*) t. XCVII, p. 34 et 158.

†) V. nos Essais de Géométrie Supérieure du troisième ordre. *Mém. de la Société Roy. des Sciences de Liége,* 2de Série, t. X.

§) Depuis que ce travail a été écrit, Mr. le Dr. C. von Escherich, Professeur à Graz, a bien voulu nous communiquer ses recherches sur la construction des surfaces d'ordres supérieurs à l'aide de systemes

La première partie contiendra donc peu de choses nouvelles, au moins quant au fond: nous l'avons jugée utile pour dispenser le lecteur de recourir à des mémoires dus à d'autres Géomètres ou à nous-même.

Première partie.

Observons tout d'abord que la cubique gauche R_3 étant rationnelle ou unicursale, il suffit, pour définir une involution quadratique sur R_3, de construire tous les plans d'un faisceau dont l'axe a un point commun avec la courbe.

Cette simple remarque conduit à la description d'une R_3 par points.

En effet, imaginons que l'on se donne six points A, B, A', B'; M, M' de la courbe.

Les plans $\overline{A\,B\,M}$, $\overline{A'\,B'\,M}$ se coupent suivant une droite x qui caractérise l'involution donnée par les deux couples $A\,B$, $A'\,B'$.

De même $\overline{A\,B'\,M}$, $\overline{A'\,B\,M}$ donneront une droite y.

Soit $\varpi \equiv \overline{x\,y}$.

Ce plan, qui coupe déja R_3 en M, rencontre la cubique en deux autres points qui marquent le couple commun aux deux involutions $A\,B$, $A'\,B'$; $A'\,B$, $A\,B'$.

Si nous faisons les constructions analogues en nous servant du point M', nous obtenons un plan ϖ'.

ϖ et ϖ' se coupent suivant une droite d, toujours réelle, qui passera par les deux points communs aux involutions quadratiques.

Tout autre point M'' de R_3 aurait donné un plan ϖ'' passant par d.

Il en résulte que, pour construire de nouveaux points de R_3, il suffit de mener, par la droite d, définie comme il vient d'être dit, un plan ϖ''.

---

réeiproques. Ses deux mémoires sur cette question contiennent un aperçu rapide des résultats auxquels sa méthode peut conduire et laissent entrevoir des applications extrémement curieuses. l'Auteur nous fait espérer qu'il publiera bientôt des recherches plus détaillées (*Voir*. *Wiener Berichte*, LXXXV, p. 526 et 893).

Ce plan ϖ'' rencontre les droites $\overline{A\,B}$, $\overline{A'\,B'}$ en des points C, D, et les droites $\overline{A\,B'}$, $\overline{A'\,B}$, en des points C', D'.

Les droites $\overline{C\,D}$, $\overline{C'\,D'}$ se coupent en un point M'' de R_3.

Cette construction de la cubique gauche se justifie d'ailleux aisément par de simples considérations géométriques.

Il est facile, d'après cela, de construire les éléments doubles d'une involution définie par deux couples $A\,A'$, $B\,B'$; il suffira, en effet, de construire le couple commun aux deux involutions définies par les couples $A\,B'$, $A'\,B$; $A\,B$, $A'\,B'$.

Si les couples $A\,A'$, $B\,B'$ étaient imaginaires, on pourrait employer l'artifice suivant.

Par un point O de R_3, on mène une droite s'appuyant sur les deux droites réelles $\overline{A\,A'}$, $\overline{B\,B'}$. Soit r cette droite. Tous les plans du faisceau r coupent R_3 en des couples de l'involution donnée: en construisant des couples réels de cette involution, on pourra appliquer la solution précédente.

On peut encore se proposer de déterminer les éléments unis de deux séries homographiques dont on connait trois couples $A\,A'$, $B\,B'$ $C\,C'$.

Il suffira, evidemment, de chercher le couple commun aux involutions $A\,B'$, $A'\,B$; $A\,C'$, $A'\,C$.

On pourra, comme on l'a vu, construire la sécante de R_3 qui marque ce couple sur la courbe.

Résolvons maintenant, à l'aide d'une R_3, les principaux problèmes relatifs à une I_2^3 *).

Tous les plans d'une gerbe P coupent R_3 en des ternes de points qui appartiennent à une I_2^3. Chaque couple de points, pris sur R_3, détermine avec P un plan qui permet de contruire le troisième point du terne.

D'un autre coté, une I_2^3 étant définie par trois groupes de trois points, caractérise une gerbe dont le sommet est l'intersection des trois plans contenant les ternes.

---

*) On peut voir à ce sujet: Appell, Ann. de l'Ecole normale sup., t. V., p. 245. R. Sturm, *Journal de Borchardt*, t. LXXXVI, p. 716. Emile Weyr, *Sitzb. der K. Akademie in Wien*, t. LXXXIV, p. 1264.

D'après ce que nous avons vu, ces ternes peuvent être composés d'un point défini individuellement et d'un groupe de deux points qui peuvent être imaginaires.

En effet, un couple de points peut toujours être regardé comme le couple commun à deux I_1^2, ou comme points doubles d'une I_1^2, ou enfin comme points unis d'une H_1^2: dans ces trois cas, nous avons appris a construire la sécante de R_3 qui les contient.

Cette sécante et le point donné déterminent un plan.

L'involution I_2^3 possède un couple d'éléments neutres: ce couple est marqué par la sécante de R_3, issue de P.

Or, pour construire celle-ci, il suffit d'observer que les éléments neutres constituent le couple commun à toutes les involutions quadratiques qui, dans une I_2^3, correspondent à tous les points du support.

Prenons, sur R_3, des points M, M'.

Ensuite, menons des plans $\overline{PMAB}$, $\overline{PMA'B'}$; $\overline{M'AB}$, $\overline{M'A'B'}$ se coupent suivant une droite $M'X$.

Par PM', menons des plans $PM'A_1B_1$, $PM'A_1'B_1'$. $\overline{MA_1B_1}$, $\overline{MA_1'B_1'}$ se coupent suivant une droite MY.

L'intersection PZ des plans $\overline{PM'X}$ $\overline{PMY}$ est la sécante cherchée.

Il faudra encore, pour ce qui va suivre, déterminer un groupe de trois points, sur une R_3, sans les construire individuellement.

Or un pareil groupe peut toujours être considéré comme le terne commun à trois I_2^3.

Nous pourrons déterminer les sommets des gerbes qui caractérisent les involutions données et le plan de ces sommets est le plan cherché.

Quelques problêmes se traitant aisément en prenant pour support une droite ou une conique, il est nécessaire d'établir la correspondance entre les points d'une R_3 et ceux de la droite ou de la conique.

Dans le premier cas, cette correspondance s'établit à l'aide d'un faisceau de plans dont l'axe est une sécante de R_3, et dans le second, à l'aide d'un faisceau dont l'axe, sécante de R_3, rencontre la conique en un point.

L'on aura souvent à définir les deux points d'intersection d'une R_3 avec un plan, lorsque l'on connaît un point de R_3 situé dans ce plan. Ce couple peut être regardé comme le groupe commun à deux involutions quadratiques dont les axes, situés dans le plan, passent par le point d'intersection connu à priori.

Ces involutions se déterminent facilement et, par un des problêmes résolus précédemment, il est alors facile de construire la droite qui contient les deux intersections inconnues.

Cette détermination est nécessaire parceque, à l'aide du mode de représentation que nous avons indiqué, on pourra définir, sur une droite, les deux points d'intersection qui viennent d'être caractérisés.

On devra faire usage de ces procédés chaque fois qu'il s'agira des involutions I_1^3. En effet, tous les plans qui passent par une droite, ne s'appuyant pas sur R_3, coupent cette courbe en des ternes de points appartenant à une involution cubique du premier rang.

Il est inutile que nous nous étendions davantage sur ce sujet; les problêmes que nous venons d'aborder sont à peu près les seuls que nous aurons à employer.

Problême I. — *Représenter, sur* R_3, *les points communs à une droite et une conique.*

Pour cela, il suffira de considérer la conique comme engendrée par deux faisceaux projectifs de rayons qui coupent la droite suivant deux ponctuelles projectives: les points unis sont les intersections. On n'aura donc qu'à transporter les ponctuelles sur R_3 et à déterminer les éléments unis.

Pour ne rien laisser de côté, supposons que la conique soit donnée par cinq points $A\,\alpha\,\beta\,\alpha_1\,\beta_1$, dont les quatre derniers définis par couples.

Soit Q, le point d'intersection des droites $\overline{\alpha\,\beta}$, $\overline{\alpha_1\,\beta_1}$.

Il est facile de construire les conjugués harmoniques R et S de Q par rapport aux points $\alpha\,\beta$, $\alpha_1\,\beta_1$. $R\,S \equiv q$ est la polaire de Q.

$\overline{Q\,A}$ coupe q en X et si B est le conjugué harmonique de A par rapport à $Q\,X$, B appartient à la conique.

Le pôle de $\overline{A\,B}$ est situé sur q.

Maintenant il est facile d'obtenir les points $E F$ où q rencontre la courbe. Si de E, F on projetait tous les points de la courbe sur $\overline{Q \alpha \beta}$, on obtiendrait une involution dont les points doubles sont $\alpha \beta$. De même pour $Q \alpha_1 \beta_1$.

Donc si de A, on projette sur q les involutions dont les points doubles sont $\alpha \beta$, $\alpha_1 \beta_1$, le groupe commun sera $E F$.

Il n'est pas nécessaire de construire les éléments doubles $E F$ pour construire des couples de cette involution.

Il suffit de projeter ces points de A et de B pour obtenir deux faisceaux projectifs dont les intersections engendrent la conique.

Problême II. — *Représenter, sur R_3, les points communs à une droite et à une cubique.*

Nous supposerons d'abord que la cubique soit définie par neuf points, et pour aborder le problême dans toute sa généralité que, parmi ces neuf points, il y en ait huit: $\alpha_1 \beta_1$, $\alpha_2 \beta_2$, $\alpha_3 \beta_3$, $\alpha_4 \beta_4$, donnés comme éléments doubles de quatre involutions quadratiques sur quatre droites l_1, l_2, l_3, l_4. Nous désignerons par Q le neuvième point.

Soit encore L la droite donnée.

Si nous considérons les cubiques décomposables

$$l_1 (Q \alpha_2 \beta_2 \alpha_3 \beta_3), \; l_2 (Q \alpha_3 \beta_3 \alpha_1 \beta_1), \; l_3 \, Q (\alpha_1 \beta_1 \alpha_2 \beta_2),$$

ces cubiques marquent, sur L, des ternes de points caractérisant une I_2^3. Cette involution sera aisément représentée sur R_3, en employant les procédés qui précédent.

Si nous répétons les constructions analogues pour les groupes

$$Q \alpha_1 \beta_1 \alpha_2 \beta_2 \alpha_4 \beta_4, \; Q \alpha_1 \beta_1 \alpha_3 \beta_3 \alpha_4 \beta_4,$$

nous obtiendrons, sur R_3, deux autres involutions cubiques du second rang: le groupe commun à ces involutions donne les points d'intersection de la cubique avec L.

Comme on le voit, ces points sont caractérisés par le plan que coupe R_3 aux images des points cherchés: pour la solution des questions ultérieures, ce plan, déterminé linéairement, doit seul être employé.

Cette solution ne s'applique pas au cas où les quatre droites l_1, l_2, l_3, l_4, supports des points imaginaires $\alpha_1 \beta_1$, $\alpha_2 \beta_2$, $\alpha_3 \beta_3$, $\alpha_4 \beta_4$, passeraient par le point réel Q.

Dans ce cas particulier on construit les conjugués harmoniques de Q par rapport à chacun de ces couples $\alpha \beta$; soient D_1, D_2, D_3, D_4 les points ainsi déterminés.

Pas $Q\,D_1\,D_2\,D_3\,D_4$ passe une conique, polaire de Q par rapport à la cubique à construire; la tangente en Q à cette conique est la tangente à la cubique. Soit $Q\,X$ cette tangente, sur laquelle nous allons déterminer le point tangentiel de Q.

Par les huit points imaginaires et deux autres points α, β on peut faire passer des cubiques C_3' et C_3'' par la construction précédente.

C_3' et C_3'' sont en involution I_1^3 avec la cubique à construire C_3; $Q\,X$ coupe ces trois cubiques en des points en involution I_1^3. Les deux ternes marqués par C_3' et C_3'' se définissent comme il a été dit. Il suffira donc de construire, celui qui est marqué par C_3. Or, ce dernier se compose du point double Q connu et du point de ramification correspondant, qui se détermine linéairement.

Soit O ce point. On pourra construire de même on point tangentiel O_1, et ainsi de suite. D'ailleurs il sera facile, à l'aide de O_1, d'achever le courbe.

La question que nous venons de resoudre nous permet d'aborder la suivante.

Problème III. — *Construire une cubique passant par trois points donnés et appartenant à un système triplement infini de cubiques, caractérisé par quatre cubiques données.*

Soient $C_3, C_3', C_3''\,C_3'''$, les cubiques définissant le système et A, B, C les trois points donnés.

Toutes les cubiques du système, qui passent par A, appartiennent à un système doublement infini, qui sera caractérisé par trois courbes *).

---

*) Si ce court raisonnement ne semblait pas suffire, la démonstration suivante justifierait la construction.

On peut choisir, pour cela, les trois courbes passant par A et respectivement par les intersections de C_3 avec chacune des trois autres.

Or chacune de ces courbes se construira aisément: par A, menons une droite $A X$. Elle coupe C_3 et C'_3 en deux ternes de points qui définissent une I_1^3. Dans cette involution, au point A, il correspond un couple sur $A X$. On aura donc, sans difficulté, les éléments suffisants pour construire la courbe cherchée.

Les trois cubiques étant déterminées, une transversale quelconque les coupe en des points appartenant à une I_2^3. En particulier, l'involution sur $\overline{B C}$ permettra de compléter le terne dont on connaît B, C.

La répétition de ce procédé donnera les éléments nécessaires à la construction de la cubique satisfaisant aux conditions proposées.

Nous aurons encore à résoudre une question d'une autre nature qui nous sera utile par la suite.

Problême IV. — *Construire une surface du second ordre définie par neuf points ou de la seconde classe définie par neuf plans tangents.*

Représentons par $C_3{}^i = 0$, l'équation de la courbe $C_3{}^i$ et désignons par $(C_3{}^i)_0$ le premier membre de l'équation quand on y substitue les coordonnées du point A.

Toutes le courbes du système triplement infini auront une équation de la forme:

$$\lambda\, C_3 + \lambda'\, C_3' + \lambda''\, C_3'' + \lambda'''\, C_3''' = 0.$$

Pour celles qui passeront par A, on aura, de plus, la condition:

$$\lambda\, (C_3)_0 + \lambda'\, (C'_3)_0 + \lambda''\, (C_3'')_0 + \lambda'''\, (C_3''')_0 = 0.$$

En éliminant λ, par exemple, on aura l'équation de celles des courbes du système qui passent par A.

Cette équation sera:

$$\lambda' [C_3' (C_3)_0 - C_3\, (C_3')_0] + \lambda'' [C_3'' (C_3)_0 - C_3\, (C_3'')_0]$$
$$+ \lambda''' [C_3''' (C_3)_0 - C_3\, (C_3''')^0] = 0.$$

Or il est visible qu' en égalant à zéro chacune des parties entre crochets on a l'équation d'une cubique passant par A, et respectivement, par les intersections de C_3 avec chacune des autres courbes.

Nous ne ferons que rappeler notre solution, exposée antérieurement *), et qui repose sur ces théorèmes;

I. Soient A, B, C, trois points d'une surface du second ordre S_2, σ leur plan. A, B, C déterminent trois plans tangents α, β, γ qui se coupent en un point P. Les jonctions de P avec $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ sont trois plans α', β', γ'.

$\alpha\,\beta\,\gamma$, $\alpha'\,\beta'\,\gamma'$ sont deux trièdres homologiques dont nous désignerons l'axe d'homologie par l'.

Les jonctions des points de S_2 avec les droites $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ forment trois faisceaux qui coupent l' suivant trois ponctuelles en $I_2{}^3$.

I'. Soient α, β, γ trois plans tangents à une surface de la seconde classe Σ_2, S leur intersection. α, β, γ déterminent trois points de contact A, B, C situés dans un plan ϖ. Les intersections de ϖ avec $\overline{\beta\gamma}$, $\overline{\gamma\alpha}$, $\overline{\alpha\beta}$, sont trois points A' B' C'.

$A\,B\,C$, $A'\,B'\,C'$ sont deux triangles homologiques dont nous désignerons l'axe d'homologie par l.

Les intersections des plans tangents à Σ_2 avec $\overline{\beta\gamma}$, $\overline{\gamma\alpha}$, $\overline{\alpha\beta}$ sont trois ponctuelles dont les jonctions avec l forment trois faisceaux en $I_2{}^3$.

II. Si l'on joint, de toutes les manières possibles, les cotés a, b, c d'un triangle à trois points P, Q, R d'une droite l non située dans le plan du triangle, on obtient six points A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, situés dans un plan. Ces six points appartiennent à une conique.

II'. Si l'on coupe, de toutes les manières possibles, les arêtes a, b, c d'un trièdre par trois plans ϖ, k, ϱ, menés par une droite l ne passant pas par le sommet du trièdre, on obtient six plans α_1, α_2, α_3, α_4, α_5, α_6, passant par un point. Ces six plans sont tangents à un cône du second degré.

A l'aide des neuf points donnés, on construit aisément les trièdres $\alpha\,\beta\,\gamma$, $\alpha'\,\beta'\,\gamma'$ dont il est question au théorème I, et, par suite, la droite l'.

Alors chaque point M de la surface, joint à $\overline{BC}$, $\overline{CA}$,

*) Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, 3me Série, t. V., p. 618.

$\overline{AB}$ donne trois plans qui coupent l' en trois points P, Q, R de l'involution I_2^3.

L'involution étant formée de groupes symétriques, on peut permuter de toutes les manières les points P, Q, R sans que les différentes permutations cessent de donner des points de la surface.

On en trouve six qui, d'après le théorème II, sont situés sur une conique et, par suite, donnent une section plane de la surface.

Chaque point de S_2 donne ainsi naissance à une section plane et il est bien facile de faire voir que toutes ces sections sont situées dans des plans passant par une droite fixe (la droite l du théorème II').

La construction tout à fait analogue s'applique aux surfaces de la seconde classe.

Pour montrer comment on peut, par ce procédé, construire autant de points qu'on le veut de la surface, il reste à faire connaitre la détermination de nouveaux ternes de l'involution I_2^3 marquée sur l'.

Or, cette involution a évidemment pour points triples les points où l' perce le plan σ et la surface S_2.

De plus, il est visible que le point de rencontre de σ avec l' et le point P compté deux fois constituent un terne de l'involution.

En outre, chaque point connu de la surface donne un terne.

On se trouve donc en présence de ce problème:

Construire des ternes d'une involution I_2^3 dont on connait un point triple a_1, un groupe composé de a_1 et du point α_1 conjugué harmonique de a_1, par rapport aux deux autres points triples a_2, a_3 et un terne quelconque $x\ y\ z$.

Si l'involution est marquée sur une R_3, on construit le plan osculateur en a_1, le plan mené par a_1 et par la tangente en α_1, et le plan $x\,y\,z$.

Mais, dans le cas actuel, il vaut peut-être mieux de prendre comme support une conique C_2.

Les tangentes à C_2 en a_1 et α_1 se coupent en un point t. Si nous menons $\overline{x\,t}$ qui rencontre C_2 en p, les deux droites $\overline{a_1\,p}$, $\overline{y\,z}$ se coupent en un point k.

La droite $\overline{t\,k}$ est la hessienne des points triples.

On est ramené à construire des ternes d'une I_2^3 dont on connait un point triple a_1 et les éléments neutres.

Soit, par exemple, $x'\,y'$ le couple qu il s'agit de compléter. $\overline{x'\,t}$ coupe C_2 en p', $\overline{a_1\,p'}$ coupe $\overline{t\,k}$ en k', et $\overline{k'\,y'}$ coupe C_2 en z'.

Pour justifier ces construction, il suffira de se rapporter à nos *Essais de Géométrie supérieure du troisième ordre* (p. 80 et ss).

Nous aborderons maintenant les questions qui sont relatives aux surfaces du troisième ordre.

Seconde partie.

Comme on le sait depuis longtemps, ces surfaces peuvent être engendrées par les intersections de trois faisceaux de plans, liés par une relation homographique du troisième ordre et du second rang.

Cette méthode, qui peut être regardée comme un cas particulier de la seconde de celles qui ont été données par Steiner, a été développée d'abord par M. August, puis employée par M. Cremona dans son célébre Mémoire et enfin reprise récemment par M. Schubert.

Cependant aucun de ces savants géomètres ne l'a appliquée à la construction de la surface du troisième ordre, dans le cas général, même lorsque l'on en connaît trois droites.

Soient x, y, z, les axes des trois faisceaux de plans: ces trois droites appartiennent à la surface. L'homographie H_2^3 étant caractérisée par sept ternes, il suffit de connaitre sept points de la surface S_3 pour définir cette dernière.

Désignons par $\xi_i\,\eta_i\,\zeta_i$ ($i = 0,\ 1,\ 2, \ldots 6$) les sept ternes de plans appartenant aux trois faisceaux x, y, z, et par A_i les points d'intersection des ternes.

Si par A_0, nous menons trois droites arbitraires x', y', z', les plans ξ_i, η_i, ζ_i marquent, sur ces droites, des points X_i, Y_i, Z_i.

Nous obtenons ainsi six plans $\overline{X_i Y_i Z_i} \equiv \beta_i$.

Les six plans β_i et les trois faces du trièdre $x' y' z'$ sont neuf plans qui caractérisent une surface de la seconde classe.

Tous les plans tangents à cette surface marquent, sur x', y', z' des ternes de points appartenant à une $H_2{}^3$. En effet, deux points quelconques X_k, Y_k, pris respectivement sur x', y' déterminent un plan tangent, et, par suite, un troisième point Z_k.

Or cette homographie est identique avec celle qui est marquée, sur ces mêmes droites, par les ternes de plans qui joignent tous les points de S_3 aux trois axes $x\, y\, z$.

En effet ces homographies ont en commun les sept ternes $(A_0\, A_0\, A_0)$ $(X_i\, Y_i\, Z_i)$.

Nous avons donc cette propriété:

Si, par un point A_0 d'une surface du troisième ordre, on mène trois droites arbitraires x' y' z', les ternes de plans qui joignent tous les points de la surface à trois droites de celle-ci, x, y, z, ne se rencontrant pas deux à deux, marquent sur x' y' z' des ternes de points dont les jonctions enveloppent une surface de la seconde classe tangente aux faces du trièdre $A_0\, x'\, y'\, z'$.

En d'autres ternes:

Si un tétraèdre se déforme de telle façon que trois de ses faces passent par trois droites fixes tandis que la quatrième reste tangente à une surface de la seconde classe Σ_2, et que trois arêtes d'une face s'appuient sur trois droites concourantes formant un trièdre dont les faces sont tangentes à Σ_2, le quatrième sommet décrit une surface du troisième ordre passant par les trois droites fixes et par le sommet du trièdre.

Il résulte de là, et de la construction que nous avons rappelée plus haut, de la surface du second ordre ou de la seconde classe, que nous pourrons construire autant de points qu'on le veut de la surface du troisième ordre.

Chaque plan tangent à Σ_2 donne naissance à six plans tangents passant par un point fixe et circoncrits à une cône du second degré qui touche Σ_2.

Par conséquent nous pouvons observer que chaque point que l'on détermine de la surface S_2 donne naissance à une courbe gauche G_6 de genre 0, puisque chacun de ses points correspond à un plan tangent du cône du second degré.

Nous avons signalé tantôt les deux droites l et l', employées dans la construction des surfaces du second ordre.

Il est facile de voir que tous les cônes dont il s'agit ici ont leurs sommets sur la droite l' et que, par suite, les plans des courbes de contract avec Σ_2 passent par l.

Nous pouvons observer encore que si l'on considère une génératrice rectiligne quelconque de Σ_2, il lui correspond une cubique gauche R_3 située sur S_3 et passant par A_0.

Les génératrices des deux modes de Σ_2 donnent donc deux systèmes de R_3, qui toutes passent par A_0.

Deux R_3 du même système n'ont que A_0 commun; deux R_3, de systèmes différents se coupent en un second point correspondant au plan tangent de Σ_2, passant par les deux génératrices rectilignes.

Nous ne faisons qu'indiquer ce sujet pour montrer combien facilement en arriverait à étudier les cubiques gauches situées sur S_3..

Les trois plans du trièdre A_0 tangents à Σ_2, coupent celle-ci suivant deux génératrices. Les six génératrices forment un hexagone inscrit et circonscrit à Σ_2.

Cet hexagone permet de construire les éléments neutres des faisceaux x, y, z et, par suite, six droites de S_3 *).

De cette manière on obtient deux trièdres conjugués à la surface S_3.

Soient P et Q les sommets des deux trièdres.

Ceux-ci se coupent suivant neuf droites. On peut, comme on sait, former avec ces neuf droites six ternes de droites qui ne se rencontrent pas deux à deux.

Nous apellerons un pareil groupe *terne d'arêtes conjuguées* de deux trièdres.

Remarquons maintenant que si l'on joint tous les points de S_3 à un terne d'arêtes conjuguées, on obtient trois faisceaux qui coupent une droite quelconque d suivant des points en H_2^3.

---

*) Voir, pour plus de détails, nos *Essais* etc., p. 111.

Cette H_2^3 devient une I_2^3 lorsque $d \equiv \overline{P\,Q}$.

Il en résulte que si l'on connaît un point M_1 de S_3, en le joignant à $x\,y\,z$, on obtient sur $\overline{P\,Q}$ un terne d'une I_2^3.

On peut donc permuter les trois points obtenus A, B, C de toutes les manières possibles, ce qui donne cinq autres points $M_2, M_3 \ldots M_6$ de S_3.

Mais ce n'est pas tout: l'involution marquée sur $\overline{P\,Q}$ a évidemment pour points neutres P et Q et pour points triples les intersections de $\overline{P\,Q}$ avec S_3.

Cette involution ne dépend donc en rien du terne d'arêtes conjuguées choisi parmi ceux des deux trièdres P et Q.

En conséquence, si l'on joint $A\;B\;C$ à un autre terne quelconque, on obtient six nouveaux points de S_3.

Donc chaque point de S_3 permet d'en déterminer trente-cinq autres.

Il est évident que ces points en donneront une infinité d'autres.

Si, au lieu de connaitre les deux trièdres P et Q, on ne connaissait que le terne $x\,y\,z$ et la droite $\overline{P\,Q}$, il est visible que, pour caractériser l'involution marquée sur $\overline{P\,Q}$ et, par suite, la surface S_3, il faudrait connaitre trois points de celle-ci.

La connaissance de la droite $\overline{P\,Q}$ équivaut donc à quatre conditions.

On déduit de ce qui précède une propriété curieuse:

Si l'on joint de toutes les manières possibles trois droites $x\;y\;z$, ne se coupant pas deux à deux, à deux groupes de trois points $A\;B\;C$, $A'\;B'\;C'$, situés sur une droite d, on obtient deux groupes de six points $M_1\,M_2 \ldots M_6$, $M_1'\,M_2' \ldots M'_6$.

Ces douze points sont sur une courbe gauche G_6 de genre un, ayant les trois droites $x\;y\;z$ comme sécantes quadruples.

Une pareille courbe est en général déterminée par trois quadrisécantes et six points.

Mais il est temps d'abandonner ces questions incidentes pour nous occuper de celle qui fait l'objet de ce travail.

Il sera d'abord nécessaire de résoudre le problème suivant:

Construire la section, par un plan quelconque, de le surface S_3 définie par trois droites et sept points.

Or rien n'est plus aisé, d'après ce qui précède.

En effet, soit ϖ un plan quelconque.

Ce plan est rencontré par $x\,y\,z$ en trois points A, B, C qui appartiennent à la section.

Tout plan passant par x coupe ϖ suivant une droite m.

Or, à ce plan correspond, dans $H_2{}^3$, une $H_1{}^2$ facile à déterminer, comme nous l'avons vu, et dont les plans engendrent, par leurs intersections, une surface réglée du second ordre. Celle-ci coupe ϖ suivant une conique qui correspond à m.

On obtient donc, sur m, deux points réels ou imaginaires.

Comme on le voit, la section est une cubique engendrée par le méthode de Chasles. Néanmoins, on peut en construire linéairement autant de points que l'on veut, en faisant usage des procédés que nous avons indiqués au commencement de ce Mémoire.

Mais il résulte encore de ce dernier problême et de celui que nous avons traité d'abord que l'on peut, sans difficulté, trouver la représentation du groupe de trois points où une droite rencontre la surface définie comme il vient d'être dit: il suffira, en effet, de mener, par la droite, un plan qui coupe la surface suivant une cubique plane, et d'applique le problême II de la première partie.

Supposons maintenant que *la surface soit définie par une droite, trois groupes de trois points en ligne droite et six autres points.*

Nous devons construire les intersections d'une droite l avec une telle surface.

Or soient δ_1 la droite donnée,

$P\,P'\,P''$, trois points situés sur une droite . δ_2,
$Q\,Q'\,Q''$, ... δ_3,
$R\,R'\,R''$, ... , ... δ_4,

et $A\,B\,C\,D\,E\,F$ les six autres points.

Considérons successivement les surfaces définies par les éléments

δ_1, δ_2, δ_3, $R\,R'\,R''\,A\,B\,C\,D$, et appelons cette surface S_3,
δ_1, δ_2, δ_4, $Q\,Q'\,Q''\,A\,B\,C\,D$, ... S_3,
δ_1, δ_3, δ_4, $P\,P'\,P''\,A\,B\,C\,D$, ... S_3''.

Ces surfaces sont définies comme dans le premier cas. Il est donc facile de construire les plans α, α', α'' qui rencontrent la courbe R_3 en des points représentant les intersections de ces surfaces avec la droite l.

Or S_3, S_3' S_3'' caractérisent une I_2^3 à laquelle appartient la surface Σ_3 à construire

Soit Q_1 le point où se coupent $\alpha, \alpha', \alpha''$.

Si, au lieu des éléments $A\,B\,C\,D$, nous employons les éléments $C\,D\,E\,F$, $E\,F\,A\,B$, nous pourrons, en répétant les constructions précédentes, déterminer des points Q_2, Q_3.

Or, comme la surface Σ_3 appartient aux trois groupes de surfaces caractérisées par ces choix successifs d'éléments, et, par conséquent, est en involution I_2^3 avec chacun de ces groupes, il est visible que le plan $Q_1\,Q_2\,Q_3$ rencontre R_3 aux trois points correspondant aux intersections de la surface et de l.

S'il s'agissait d'appliquer ce qui vient d'être dit non pas au problème qui suivra, mais à la construction de Σ_3, on voit qu'en représentant sur R_3, en $E_1\,F_1$ les deux points $E\,F$ (et supposant $l \equiv \overline{E\,F}$), le plan $Q\,E_1\,F_1$ rencontrerait R_3 en un point qui donnerait la troisième intersection de $\overline{E\,F}$ avec la surface.

Par exemple en prenant le plan $\overline{A\,B\,C}$, on construira aisément la section plane puisque $B\,C$, $C\,A$, $A\,B$ donneront de nouveaux points A', B', C' et ceux-ci, à leur tour, des points A'', B'', C'', et ainsi de suite.

Nous pouvons même observer que, en général, les trois groupes $A\,B\,C$, $A'\,B'\,C'$, $A''\,B''\,C''$, suffisent pour déterminer la section, à l'aide d'une des méthodes que nous avons fait connaître, ou par la méthode de Chasles, ou par celle de Grassmann, dont nous avons précisément ici les éléments constitutifs.

Nous aborderons maintenant la question suivante;

Construire une surface du troisième ordre dont on connaît une droites trois points en ligne droite et douze autres points.

Soit δ_1 la droite donnée, $P P' P''$ les trois points situés sur une droite δ_2, enfin $A B C D E F G H I K L M$, les douze autres points.

Considérons les droites δ_1, δ_2, $\overline{AB} \equiv \delta_3$, $\overline{CD} \equiv \delta_4$, et les points $E F G H I K$ comme définissant une surface S_3, ainsi que nous l'avons vu au problème précédent.

Nous pourrons construire les points d'intersection de cette surface avec une droite l, ou ce qui est seul nécessaire dans le cas actuel, construire le plan qui coupe R_3 aux points correspondant à ces intersections.

Deux autres combinaisons des quatre points $A B C D$, par exemple

$$\overline{AC} \equiv \delta_3', \quad \overline{BD} \equiv \delta_4'; \quad \overline{AD} \equiv \delta_3'', \quad \overline{BC} \equiv \delta_4'',$$

nous donneront des surfaces S_3' S_3''.

La surface à construire Σ_3 appartient au système, en involution I_2^3, caractérisé par les surfaces S_3, S_3', S_3''.

Sur la courbe R_3, nous obtenons, à l'aide de ces surfaces, des groupes de trois points marqués par des plans α, α', α'' qui se rencontrent en un point Q_1.

Au lieu de faire usage des points $E F G H I K$, nous pourrons employer successivement $E F G H I L$, $E F G H I M$.

Nous aurons ainsi deux autres points Q_2, Q_3, et le plan $Q_1 Q_2 Q_3$ rencontrera R_3 en trois points qui représentent les intersections de l avec Σ_3.

Bien entendu, il n'est pas nécessaire, pour ce qui va suivre, de déterminer ces points individuellement.

S'il s'agissait de construire la surface déterminée par les éléments donnés, on pourrait, après avoir construit Q_1, déterminer la troisième intersection de $\overline{LM}$ avec la surface. Une seconde détermination analogue ramènerait le problême au précédent, ou bien comme tantôt, ou déterminerait une section plane de la surface.

Le problême peut donc être regardé comme résolu linéairement.

Nous sommes conduit maintenant à nous poser cette autre question :

Construire une surface du troisième ordre dont on connaît trois points en ligne droite et seize autres points.

Soient $Q\,Q'\,Q''$, trois points situés sur une droite δ_1, et $A\,B\,C\,D\,E\,F\,G\,H\,I\,K\,L\,M\,N\,O\,P\,R$, les autres points donnés.

En considérant $Q\,Q'\,Q'' \equiv \delta_1$ comme une droite de la surface et $\overline{A\,B} \equiv \delta_2$ comme une droite contenant trois points de cette surface, puis les douze points $C\,D\,E\,F\,G\,H\,I\,K\,L\,M\,N\,O$, on est ramené au problême précédent.

On sait donc déterminer, sur une droite l, les points où cette droite rencontre la surface S_3 ainsi définie (ou plutôt le plan α qui coupe R_3 aux images de ces intersections).

D'autres combinaisons donneront des surfaces S_3', S_3''.

Σ_3 appartient au système caractérisé par ces trois surfaces.

On répète alors les considérations précédentes, que nous ne reproduirons pas pour ne pas fatiguer le lecteur, et l'on détermine facilement le plan qui coupe R_3 aux points correspondant à ceux où l perce Σ_3, s'il s'agit d'arriver à la solution du problême qui va suivre, ou bien on achève une section plane de la surface, s'il s'agit de construire cette dernière.

Nous arrivons finalement à la question énoncée au commencement de ce mémoire :

Construire une surface du troisième ordre déterminée par dix-neuf points.

Soient $A_1\,A_2\,A_3\,A\,B\,C\,D\,E\,F\,G\,H\,I\,K\,L\,M\,N\,O\,P\,Q$, les dix-neuf points donnés. Désignons par Γ le groupe formé des seize derniers points et convenons de représenter par $(\Gamma - X + Y)$ un groupe de seize points obtenu en retranchant de Γ un certain nombre de points qui y entrent et en y ajoutant d'autres points.

Alors en considérant successivement les éléments

$$\overline{A\,B} \equiv \delta_1,\ (\Gamma - A\,B + A_1\,A_2),$$
$$\overline{C\,D} \equiv \delta_1',\ (\Gamma - C\,D + A_1\,A_2),$$

On peut, par ce qui précède, construire deux surfaces $S_3\,S_3'$.

Ces surface déterminent un système en involution I_2^3 avec la surface à construire Σ_3.

En conséquence, si, par A_3, on fait passer une droite l, on pourra construire les plans marquant, sur R_3, les intersections de l avec S_3, S_3'.

Ces plans se coupent suivant une droite g. Si de plus on a marqué, sur R_3, le point A_3' correspondant à A_3, le plan $g\,A_3'$ coupe R_3 en deux points qui correspondront aux deux autres intersections de l avec Σ_3.

Il est bien évident que ces points pourront alors se définir, sur l, comme points doubles d'une I_1^2.

Par suite, si l'on fait pivoter l autour de A_3, dans un plan ϖ, on obtient aisément les éléments nécessaires pour construire, d'après le cas particulier du problême II, 1re partie, la section de Σ_3 par ϖ.

Un autre procédé reviendrait à employer le groupe $\Gamma' = (\Gamma - Q)$, par exemple, et à construire, à l'aide des éléments restants, trois surfaces S_3, S_3', S_3'', définissant un système en I_2^3 avec Σ_3. Alors la droite $\overline{A_3\,Q}$ rencontrerait Σ_3 en un troisième point que l'on peut déterminer linéairement.

On serait ramené, de cette manière, au cas précédent, à moins qu'il ne parût préférable d'achever la solution par des constructions linéaires de sections planes.

La solution qui vient d'être exposée, n'exige, on le voit, que l'emploi du plan. En effet, chaque fois que, dans l'exposition de la méthode, nous avons fait usage d'un groupe de deux ou de trois points, ces groupes ont été définis par la sécante de R_3, ou par le plan qui les contient et qui coupe R_3 aux points correspondants, et nous n'avons jamais eu à faire usage des points de ces groupes, considérés individuellement.

On peut encore aborder la question d'une autre manière.

Nous supposerons résolu le premier problême : déterminer une surface Σ_3, dont on connaît trois droites et sept points.

Nous résoudrons alors le problême suivant :

Construire une surface du troisième ordre dont on connaît quatre groupes de trois points en ligne droite et sept points quelconques.

Soient $P\,P'\,P''$, trois points situés sur une droite d_1,
$Q\,Q'\,Q''$, ... d_2,
$R\,R'\,R''$, ... d_3,
$S\,S'\,S''$, ... d_4,

et $A_1\,A_2\,A_3\,A\,B\,C\,D$, les sept autres points.

En considérant d_1, d_2, d_3 comme trois droites d'une surface, et les sept points $S\,S'\,S''\,A\,B\,C\,D$, on peut, à l'aide de ces éléments construire une surface S_3.

Nous aurons, en combinant différemment ces mêmes éléments, trois autres surfaces S_3', S_3'', S_3''', caractérisant un système triplement infini.

Ces surfaces coupent le plan $A_1\,A_2\,A_3$ suivant quatre cubiques définissant un système également infini.

Il suffira d'appliquer le problême III, 1re partie, et de construire la cubique du système passant par $A_1\,A_2\,A_3$.

D'autres sections planes se construiraient facilement par la répétition du même procédé.

Mais, pour ce qui va suivre, il est nécessaire de construire les intersections d'une droite quelconque l avec la surface Σ_3.

Or, si nous prenons deux points arbitraires $B'\,C'$ sur l, nous pourrons construire la surface définie par $d_1\,d_2\,d_2\,d_4$ $A\,B\,C\,D\,A_1\,B'\,C'$.

De cette façon, il sera possible de marquer sur l, l'involution I_2^3 caractérisée par les surfaces définies par $d_1\,d_2\,d_3\,d_4$ $A\,B\,C\,D\,A_1$.

On pourra agir de même avec A_2, A_3 et le groupe commun aux trois involutions, marquera l'intersection de l avec la surface.

Supposons maintenant que l'on ait ce problême:

Construire une surface du troisième ordre dont on connaît trois points en ligne droite et seize autres points.

Soient $P\,P'\,P''$ les points situés sur une droite d_1, $A\,B$ $C\,D\,E\,F\,G\,H\,I\,K\,L\,M\,N\,A_1\,A_2\,A_3$, les seize autres points.

En les conbinant de la manière suivante:

$P\,P'\,P'' \equiv d_1$, $\overline{A\,B} \equiv d_2$, $\overline{C\,D} \equiv d_3$, $\overline{E\,F} \equiv d_4$, $G\,H\,I\,K$ $L\,M\,N$, on obtient, par ce qui précéde une surface S_3.

D'autres arrangements des éléments donneront des surfaces

S_3', S_3'', S_3'''. Alors, en procédant comme précédemment, on obtient la section de la surface Σ_3 par le plan $A_1 A_2 A_3$.

Il ne resterait qu' à répéter ce que nous avons dit plus haut pour montrer comment on achève la surface, ou comment on peut déterminer les intersections de Σ_3 par une droite quelconque l (ou plutôt les images de ces points sur R_3, à l'aide d'un plan).

Comme on le voit nous sommes ramené à l'avant dernier problême que nous avons traité par la première méthode.

Ce mémoire justifie, croyons-nous, ce que nous avons dit dans nos deux Notes insérées aux Comptes-rendus.

Il est possible, en suivant les méthodes que nous venons d'exposer, de construire, à l'aide du plan seul, la surface du troisième ordre définie par dix-neuf points.

Les constructions sont assez nombreuses et un peu compliquées, malgré leur simplicité théorique. Peut être quelque Géomètre, plus heureux, parviendra-t-il à une solution moins longue. Nous ne donnons la nôtre que pour faire connaitre une application des méthodes qui nous ont servi déjà à la détermination des courbes planes des degrés supérieurs. Nous avons dû, au surplus, nous borner aux méthodes de construction : plus tard, nous espérons reprendre ces questions et en déduire d'autres résultats.

Liége, le 10 Août 1883.

REVISIO PERISPORIACEARUM

IN REGNO BATAVORUM HUCUSQUE DETECTARUM.

AUCTORE

C. A. J. A. OUDEMANS.

ENUMERATIO LIBRORUM

QUI IN DIGERENDIS HISCE PAGINIS PRAESTO FUERUNT, SIMUL ABBREVIATIONUM INTERPRETATIO.

Tijdschrift voor Natuurlijke Geschiedenis en Physiologie, uitgegeven door **J. van der Hoeven** en **W. H. de Vriese**; T. XI et XII. — Amsterdam, 1844 en 1845.

Nederlandsch Kruidkundig Archief. Tweede Serie. — Nijmegen, 1871—1883.

Prodromus Florae Batavae IV, pars 2. — Lugd. Bat., 1866.

F. Dozij en **J. H. Molkenboer,** Bijdrage tot de Flora Cryptogamica van Nederland. — Leyden, 1846.

Jean Kickx, Flore Cryptogamique des Flandres. — Gand et Paris, 1867.

A. P. de Candolle, Flore Française II et VI. — Paris, 1815.

J. B. H. J. Desmazières, Plantes Cryptogames du Nord de la France. — Lille 1825—1860.

J. H. Léveillé, Organisation et disposition méthodique des espèces qui composent le genre Erysiphé (Annales des Sciences naturelles, 3e Série, XV. — Paris, 1851).

Dirieu de Maisonneuve, Flore d'Algérie. Cryptogamie. — Paris, 1847—1849.

J. F. C. Montagne, Sylloge generum specierumque Cryptogamarum. — Parisiis, 1861.

P. H. Karsten, Mycologia Fennica II. — Helsingfors, 1873.

E. Fries, Summa Vegetabilium Scandinaviae. — Holmiae et Lipsiae, 1846.

J. M. Berkeley, Outlines of British Fungology. — London, 1860.

J. M. Berkeley et **J. B. H. J. Desmazières,** On some moulds referred by authors to Fumago and on certain allied and analogous forms. (Ephemerid. Soc. horticult. Londin. IV, 1849).

J. M. Berkeley, An enumeration of the fungi collected in Portugal 1842—1850 by Dr. Welwitsch. — London, 1853.

M. C. Cooke, Handbook of British fungi. — London, 1871.

H. F. Link, Species Plantarum, VI. — Berolini, 1824—1825.

G. Kunze und **J. C. Schmidt,** Mycologische Hefte. — Leipzig, 1817—1823.

F. G. Wallroth, Flora Cryptogamica Germaniae. — Norimbergae, 1833.

L. Fuckel, Symbolae Mycologicae. — Wiesbaden, 1869.

A. de Bary, Systematische Uebersicht der Erysipheen, in Hedwigia 1871.

W. Zopf, Zur Entwicklungsgeschichte der Ascomyceten. Chaetomium. — Halle, 1881.

de Thümen, Mycotheca universalis.

P. A. Saccardo, Michelia. Commentarium mycologicum. Tom. I et II. — Patavii, 1879—1882.

P. A. Saccardo, Sylloge Fungorum omnium hucusque cognitorum. — Patavii, 1882.

V. Trevisan, Notae diversae de Oidio Tuckeri. 1851—1853.

REVISIO.

I. ERYSIPHEAE.

CLAVIS ANALYTICA GENERUM *).

I.	Perithecia monoasca; asci 8-spori; carpogonia atropa.	
	1. Fulcra apice pluries refracto-dichotoma.	*Podosphaera.*
	2. Fulcra simplicia vel vage ramosa, hyphoidea.	*Sphaerotheca.*
II.	Perithecia polyasca; asci 2—8-spori; carpogonia campylotropa.	
	1. Fulcra acicularia, basi saepe inflata.	*Phyllactinia.*
	2. Fulcra apice uncinata; asci globoso-ovoidei.	*Uncinula.*
	3. Fulcra pluries refracto-dichotoma.	*Microsphaera.*
	4. Fulcra simplicia vageve ramosa.	*Erysiphe.*

PODOSPHAERA.

Fulcra perithecii diametrum aequantia.	*P. Oxyacanthae.*
Fulcra perithecii diametro triplo longiora, radiatim divergentia.	*P. myrtillina.*

*) Ad exemplum SACCARDOI in Sylloge Fungorum. I, 1.

[Fulcra perithecii diametro triplo longiora, erecto-fasciculata] *).	[*P. tridactyla*].
[Fulcra perithecii diametro senies ad decies longiora, cirrhosa].	[*P. Schlechtendalii*].

1. **Podosphaera Oxyacanthae** (D.C.) de Bary, Syst. Uebers. der Erys. in Hedwigia 1871, p. 68. — Erysiphe clandestina in Tijds. v. Nat. Gesch. en Phys. XII, 273. — Podosphaera clandestina in Prodr. Fl. Bat. n^0. 2960.
   In foliis *Crataegi monogynae* et *Oxyacanthae.* — Amsterdam. — Goes.
2. **Podosphaera myrtillina** Kunze in Kunze u. Schmidt Mykolog. Hefte II, 111. — Podosphaera tridactyla Oud. in Nederl. Kruidk. Archief, 2, I, 181.
   In foliis *Vaccinii Myrtilli.* — Beek (in Gelria).
3. [**Podosphaera tridactyla** (Wallr.) de Bary, in Hedwigia 1871, p. 68.
   In foliis variarum specierum generis *Pruni*].
4. [**Podosphaera Schlechtendalii** Lév. Ann. des Sc. nat. 3, XV, 137.
   In foliis *Salicis albae* et *viminalis*].

SPHAEROTHECA.

Fulcra coloris expertia.	*S. pannosa.*
Fulcra fuliginea:	
vage ramosa	*S. Castagnei.*
[setiformia, simplicia, copiosa]	[*S. Epilobii*].
parcissima vel nulla	*S. detonsa.*

1. **Sphaerotheca pannosa** (Wallr.). Lév. Ann. des Sc. nat. 3, XV, 138. -- Erysiphe pannosa in Tijds. v. Nat. Gesch.

---

*) Diagnoses parenthesibus inclusae species spectant intra limites patriae nondum observatae, licet plantae quibus aluntur revera ad floram patriae pertineant.

en Phys. XI, 400. — Sphaerotheca pannosa in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 2961.

In foliis aliisque partibus virentibus *Rosarum*. Apud nos status conidiiferus (Oidium leucoconium Desm.) tantum observatus. Glandulae partium sessiles nonnumquam pro peritheciis habitae. — Amsterdam. — Rotterdam. — Leiden. — Nijmegen. — Goes.

2. **Sphaerotheca Castagnei** Lév. Ann. des Sc. nat. 3, XV, 139. — Erysiphe macularis in Tijds. voor Nat. Gesch. en Phys. XI, 400; Sphaerotheca Castagnei in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 2962.

a. in foliis *Humuli Lupuli*. — Leiden. 'sGravenhage. Zwijndrecht. — Almelo. — Nijmegen. — Goes. — Maastricht.

b. in foliis *Veronicae longifoliae*. — Naaldwijk. — Maastricht.

c. in foliis *Plantaginis lanceolatae*. — Maastricht.

d. in foliis *Cucumeris sativi*. — Naaldwijk. — Harderwijk.

e. in foliis *Senecionis vulgaris*. — Amsterdam.

3. [**Sphaerotheca Epilobii** (Link) de Bary, in Hedwigia 1871, p. 68.

In foliis *Epilobii parviflori*].

4. **Sphaerotheca detonsa** (Fr.) Kickx, Flore Crypt. des Flandres I, 375.

In foliis *Erigerontis canadensis*. — Hilversum; m. Aug. a⁰. 1879. Oudemans.

PHYLLACTINIA.

1. **Phyllactinia suffulta** (Rebentisch), Saccardo in Michelia II, 50. — Phyllactinia guttata in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 2963.

a. in foliis *Alni glutinosae*. — Culemborg.

b. in foliis *Betulae albae*. — Maastricht.

c. in foliis *Fagi sylvaticae*. — Beek (in Gelria). Renkum. — Maastricht.

d. in foliis *Coryli Avellanae.* — Leiden. — Beek (in Gelria). Zutphen. — Maastricht.
e. in foliis *Aceris campestris.* — Leiden.
f. in foliis *Fraxini excelsioris.* — Maastricht.

UNCINULA.

[Asci bispori].	[*U. Bivonae*].
Asci tetraspori.	*U. adunca.*
Asci sexspori.	*U. Prunastri.*
Asci octospori.	
Conidia ovoidea.	
[Fulcra flexuosa].	[*U. flexuosa*].
Fulcra stricta.	*U. Aceris.*
[Conidia globosa].	[*U. Tulasnei*].

1. [**Uncinula Bivonae** Lév. Ann. des Sc. nat. 3, XV, **151.**
In foliis *Ulmi campestris*].

2. **Uncinula adunca** (Wallr.) Lév. Ann. des Sc. nat. 3, XV, 151. — Uncinula adunca Prodr. Fl. Bat. n°. 2964.
a. in foliis *Salicum.* — Maastricht.
b. in foliis *Populorum.* — Maastricht.

3. **Uncinula Prunastri** (D.C.) Saccardo Sylloge Fung. I, 7. — Uncinula Wallrothii in Prodr. Fl. Bat. n°. 2965.
In foliis *Pruni spinosae.* — Maastricht.

4. [**Uncinula flexuosa** Peck, Transact. Albany. Inst. VII, 215.
In foliis *Aesculi Hippocastani*].

5. **Uncinula Aceris** (D.C.) Saccardo Sylloge Fung. I, 8. — Erysiphe bicornis in Tijds. voor Nat. Gesch. en Phys., XI, 401. — Uncinula bicornis in Prodr. Fl. Bat. n°. 2966.
In foliis *Aceris campestris* et *Aceris Pseudoplatani.* — Leiden. Rotterdam. — Naaldwijk. — Utrecht. Doorn. — Kampen. — Goes. — Maastricht.

6. **Uncinula Tulasnei** Fuck. Symb. Mycol. 81.
In foliis *Aceris Platanoidis.*

MICROSPHAERA.

(Léveillé in Disp. méthod. des Erysiph. in Ann. des Sc. nat. 3e Série, XV, 381, ubi nomen Calocladiae, paulo ante a se ipso propositum [l. c. p. 154] sed ineptum, quia jamdudum a Grevilleo pro Algarum genere usurpatum, in Microsphaeram mutandum declarat).

Asci 4-spori.	*M. Dubyi.*
	[*M. Hedwigii*].
	[*M. divaricata*].
	[*M. Evonymi*].
Asci 2-spori.	[*M. Lycii*].
Asci 4—6-spori.	*M. Grossulariae.*
	M. Astragali.
	[*M. Russellii*].
Asci 6-spori.	[*M. Friesii*].
Asci 6—8-spori.	*M. Berberidis.*
Asci 8-spori.	*M. penicillata.*
	M. Ehrenbergii.

Citantur praeterea, quamvis imperfecte cognitae, M. Platani (in foliis Pl. occidentalis) et M. Symphoricarpi (in foliis Symphoricarpi racemosae).

1. [**Microsphaera Lycii** (Lasch) Saccardo et Roumeguère in Michelia II, 310; Sacc. Syll. Fung. I, 10.

   In foliis *Lycii barbari* et aliorum].

2. **Microsphaera Dubyi** Lév. Ann. des Sc. nat. 3, XV, 158. — Erysiphe penicillata γ. Lonicerae in Tijds. voor Nat. Gesch. en Phys. XI, 401. — Calocladia Dubyi in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 2969.

   In foliis *Lonicerae Xylostei* et *Lonicerae Caprifolii.* — Goes.

3. [**Microsphaera Hedwigii** Lév. Ann. des Sc. nat. 3, XV, 155.

   In foliis *Viburni Lantanae*].

4. **Microsphaera divaricata** (Wallr.) Lév. Ann. des Sc. nat. 3, XV, 155.

   In foliis *Rhamni Frangulae*].

5. [**Microsphaera Evonymi** (D.C.) Saccardo Syllogė Fung. I, 11.

   In foliis *Evonymi europaei*].

6. **Microsphaera Grossulariae** Lév. in Ann. des Sc. nat. 3, XV, 160. — Calocladia Grossulariae in Prodr. Fl, Bat. n^0. 2972.

   In foliis *Ribis Grossulariae.* — Goes. — Maastricht.

7. **Microsphaera Astragali** (D.C.) Trevisan; Saccardo Sylloge Fung. I, 12. — Calocladia holosericea in Prodr. Fl. Bat. n^0. 2970.

   In foliis *Astragali glycyphylli.* — Ubbergen en Weurt.

8. [**Microsphaera Russellii** Clinton in Peck 26th Report, 80; Saccardo Sylloge Fung. I, 12.

   In foliis *Oxalidis strictae*].

9. **Microsphaera Berberidis** Lév. Ann. des Sc. nat. 3, XV, 159. — Erysiphe penicillata α Berberidis in Tijds. v. Nat. Gesch. en Phys. XI. 401. — Calocladia Berberidis in Prodr. Fl. Bat. n^0. 2971.

   In foliis *Berberidis vulgaris.* — Amsterdam. — Rotterdam. Leiden. — Culemborg. Hees. — Goes. — Maastricht.

10. [**Microsphaera Friesii** Lév. Ann. des Sc. nat. 3, XV, 156.

    In foliis *Betulae albae* et *Betulae verrucosae* et *Rhamni catharticae*].

11. **Microsphaera penicillata** Lév. Ann. des Sc. nat. 3, XV, 155. — Erysiphe penicillata β. Viburni Opuli in Tijds. v. Nat. Gesch. en Phys. XI, 401. — Calocladia penicillata in Prodr. Fl. Bat. n^0. 2968.

    a. in foliis *Alni glutinosae.* — Naaldwijk.

    b. in foliis *Viburni Opuli.* — Amsterdam. — Rotterdam. Wassenaar. Naaldwijk. — Goes.

12. **Microsphaera Ehrenbergii** Lév. Ann. des Sc. nat. 3, XV, 155. — Calocladia Ehrenbergii in Prodr. Fl. Bat. n^0. 2967.

    In foliis *Lonicerae ataricae.* — Leiden. Rotterdam.

ERYSIPHE.

Asci 2-spori.	*E. Linkii.*
	[*E. taurica*].
	E. lamprocarpa.
	E. Galeopsidis.
Asci 2—3-spori.	*E. Montagnei.*
Asci 3—4-spori.	*E. tortilis.*
	E. horridula.
	E. Umbelliferarum.
Asci 4—8-spori.	*E. communis.*
	[*E. gigantasca*].
	E. Martii.
Asci 8-spori.	*E. graminis.*
	[*E. vernalis*].
	E. Ulmariae.
	[*E. Erodii*].

Citantur praeterea, quamvis minus bene cognitae: E. Rubi (in fol. R. fruticosi), E. Syringae (in fol. Syringae et Cydoniae), caet.

Erysiphe Tuckeri, cujus perithecia ignota, apud nos quoque in statu conidiophoro (*Oidium Tuckeri*) viget.

1. **Erysiphe Linkii** Lév. Ann. des Sc. nat. 3, XV, 161. — Uncinula adunca *a.* Artemisiae in Prodr. Fl. Bat. n°. 2964.
   In foliis *Artemisiae vulgaris.* — Maastricht.
2. [**Erysiphe taurica** Lév. Ann. des Sc. nat. 3, XV, 161.
   In foliis *Eryngii campestris*, *Cirsii eriophori*, *Ptarmicae vulgaris*].
3. **Erysiphe lamprocarpa** Lév. Ann. des Sc. nat. 3, XV, 163. — Erysiphe communis χ. Plantaginearum in Tijds. v. Nat. Gesch. en Phys. XI, 401 et ζ. Cichoriacearum ibid. XII, 273. — Erysiphe lamprocarpa in Prodr. Fl. Bat. n°. 2973.
   a. in foliis *Scorzonerae hispanicae.* — Amsterdam. — Leiden. — Weurt. — Goes. — Maastricht.
   b. in foliis *Hieracii Sabaudi.* — Leiden.
   c. in foliis *Sonchi arvensis.* — Rotterdam.

d. in foliis *Ballotae nigrae.* — Leiden.
e. in foliis *Verbasci thapsiformis.* — Haarlem.
f. in foliis *Plantaginis majoris.* — Leiden, Dordrecht. — Maastricht.
g. in foliis *Plantaginis maritimae.* — Amsterdam.

4. **Erysiphe Galeopsidis** D.C. Flore de France VI, 108. — Erysiphe communis *φ*. Labiatarum in Tijds. v. Nat. Gesch. en Phys. XI, 401. — Erysiphe lamprocarpa *b*. Labiatarum in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 2973.

a. in foliis *Galeopsidis Tetrahit.* — Haarlem. — Harderwijk. — Ommerschans.
b. in foliis *Lamii purpurei.* — Haarlem. — Harderwijk. — Goes.
c. in foliis *Stachydis palustris.* — Harderwijk

5. **Erysiphe Montagnei** Lév. Ann. des Sc. nat. 3, XV, 169. — Erysiphe communis *δ*. Carduacearum et Erysiphe depressa in Tijds. voor Nat. Gesch. en Phys. XI, 410. — Erysiphe Montagnei *α*. Bardanae in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 2976.

a. in foliis *Lappae majoris* et *Lappae tomentosae.* — Amsterdam. — Leiden. Dordt. — Goes. — Maastricht.
b. in foliis *Senecionis sylvatici.* — Haarlem.

6. **Erysiphe tortilis** (Wallr.) Fr. — Lév. Ann. des Sc. nat. 3, XV, 170. — Erysiphe tortilis in Prodr. Fl. Bat, n⁰. 2977.

In foliis *Corni sanguineae;* Rotterdam. — *Corni albae;* Maastricht.

7. **Erysiphe horridula** Lév. in Ann. des Sc. nat. 3, XV, 170. — Erysiphe communis *ε*. Asperifoliarum in Tijds. v. Nat. Gesch. en Phys. XI, 401. — Erysiphe tortilis Prodr. Fl. Bat. n⁰. 2978.

a. in foliis *Symphyti officinalis*
b. in foliis *Echii vulgaris*
c. in foliis *Myosotidis intermediae*
Amsterdam. — Leiden. Dordt. — Ewijk. — Goes.

8. **Erysiphe Umbelliferarum** de Bary in Hedwigia 1871, p. 69. — Erysiphe communis *i*. Umbelliferarum in Dozij et Molkenboer, Bijdragen a⁰. 1846, p. 9. — Erysiphe Martii d. Umbelliferarum in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 2975.

a. in foliis *Anthrisci sylvestris.* — Amsterdam. — Naaldwijk. — Harderwijk.

b. in foliis *Heraclei Sphondylii.* — Amsterdam. — Nijmegen.

9. **Erysiphe communis** Fr. Summa Vegetab. Scandinaviae 406. — Erysiphe communis in Tijds. v. Nat. Gesch. en Phys. XI, 400 et XII, 273, et in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 2979.

a. in foliis *Clematidis Vitalbae.* — Lochem.

b. in foliis *Aquilegiae vulgaris.* — Apeldoorn.

c. in foliis *Ranunculi acris*, *R. Philonotis* et *R. repentis.* — Naarden. — Leiden. — Culemborg. Beuningen. — Goes. — Maastricht.

d. in foliis *Delphinii azurei.* — Naaldwijk. — Harderwijk.

e. in foliis *Pisi sativi.* — Leiden. — Driebergen. — Beek (in Gelria).

f. in foliis *Lathyri Nissoliae.* — Elslo.

g. in foliis *Geranii mollis.* — Haarlem.

h. in foliis *Polygoni avicularis.* — Amsterdam. Naarden. — Doorn. Nijmegen.

i. in foliis *Rumicis Acetosellae.* — Naarden. — Harderwijk.

k. in foliis *Verbasci Thapsi.* — Leiden.

10. [**Erysiphe gigantasca** Sorokin et Thümen in Thümen Mycotheca universalis n⁰. 615.

In foliis *Euphorbiae dulcis*].

11. **Erysiphe Martii** Lév. Ann. des Sc. nat. 3, XV, 166. — Erysiphe communis γ. Rubiacearum in Tijds. v. Nat. Gesch. en Phys. XI, 401. — Erysiphe Martii in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 2975.

a. in foliis *Alyssi calycini.* — Weurt.

b. in foliis *Hyperici perforati.* — Harderwijk.

c. in foliis *Pisi sativi.*
d. in foliis *Meliloti macrorhizae.*
e. in foliis *Meliloti albae.*
f. in foliis *Lupini lutei.*
g. in foliis *Viciarum.*
h. in foliis *Trifoliorum.*
} Amsterdam. — Rotterdam. Leiden Heerjansdam. — Culemborg. Harderwijk. — Kampen. — Nijmegen. — Goes. — Maastricht.

i. in foliis *Galii Aparines.* — Leiden.
h. in foliis *Urticarum.* — Amsterdam.

12. **Erysiphe Graminis** D.C. Flore de France VI. 106. — Erysiphe graminis Prodr. Fl. Bat. n⁰. 2974.
a. in foliîs *Aperae Spicae Venti.* } Amsterdam. —
b. in foliis *Agrostidis albae.* } Leiden. — Arhem.

13. [**Erysiphe vernalis** Karsten, Mycologia Fennica II, 193.
In foliis *Alni incanae*].

14. **Erysiphe Ulmariae** Persoon in Herb. Lugd. Batav. — Kickx Crypt. des Flandres I, 381. — Erysiphe Martii ε. Ulmacearum in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 2975.
In foliis *Spiraeae Ulmariae.* — Goes.

15. [**Erysiphe Erodii** Durieu et Montagne Flora Alger. I, 567.
In foliis *Erodii moschati*].

II. PERISPORIEAE.

CLAVIS ANALYTICA GENERUM.

I. Sporidia globosa vel oblonga, continua, coloris expertia vel flavida.	
A. Perithecia laete colorata, flava vel rufa.	*Eurotium.*
B. Perithecia matura nigra.	
1. Asci polyspori.	*Apiosporium.*
2. Asci octospori.	*Anixia.*
II. Sporidia globosa vel oblonga, continua, fusca.	
A. Perithecia appendicibus pluries furcatis basi cincta	*Ascotricha.*
B. Perithecia exappendiculata sed undique setosa vel pilosa.	*Chaetomidium.*
III. Sporidia oblonga, 2-pluriseptata, coloris expertia vel fusca.	*Perisporium.*

EUROTIUM.

1. **Eurotium herbariorum** (Wigg.) Link Species Plant. 1, 79. — Tijdschr. v. Nat. Gesch. en Phys. XI, 402. — Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3349.

   In plantarum partibus humiditate corruptis et suffocatis ubique.

2. **Eurotium Coriorum** Wallr. Flora Crypt. Germ. 331.

   Ad lorum e corio factum. — Naaldwijk.

3. **Eurotium epixylon** Kze u. Schmidt exsicc. n⁰. 83; Wallr. Fl. Crypt. Germ. 331. — Tijds. v. Nat. Gesch. en Phys. XII, 273. — Eurotium herbariorum α epixylon Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3349.

   Ad ligna humiditate et suffocatione corrupta. — Leiden. — Goes.

APIOSPORIUM.

1. **Apiosporium pinophilum** Fuckel Symb. Mycol. 87. — Apud nos hucusque status ejus conidiophorus (= *Antennaria pinophila* Nees) tantum observatus. — Cf. Ned. Kruidk. Arch. 2, I, 181.

   In ramis foliisque *Abietis pectinatae* (Zilverspar). — Tijdschr. v. Nat. Gesch. en Phys. XI, 400. — Naarden. — Leiden.

2. **Apiosporium quercicolum** Fuckel Symb. Mycol. 87. — Apud nos hucusque status ejus conidiophorus (Fumago) tantum repertus.

   In foliis vivis *Quercus Roboris.* — Leiden.

3. **Apiosporium Brassicae** (Lib.) Fuckel Symb. Myc. 86. — Perisporium Brassicae in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 2981.

   In caule putrido *Brassicae oleraceae.* — Leiden. — Goes. — Maastricht.

ANIXIA.

1. **Anixia cyclospora** (Cooke) Saccardo Syll. Fung. I, 36. — Orbicula cyclospora Cooke Handb. n^0. 2788; Oudemans in Ned. Kruidk. Archief 2, II, 187.

Legi exempla mea in ligno quercino humiditati per longius tempus exposito, non vero in charta murali vernicea, uti ex explicatione Saccardoi (l. c.) facile crederes.

ASCOTRICHA.

1. **Ascotricha chartarum** Berkeley Outlines 405.

Legi in charta typographica corrupta. Perithecia non inveni, omnino vero reticulum hypharum repentium iteratim dichotomarum, ad latera sua corpusculis globosis minutis, a Berkeleyo pro conidiis habitis, onustarum.

Quae ipse vidi a descriptione auctoris Anglici in eo insuper recedunt, quod rami cujuscumque divisionis longitudinem semper eandem nec diversam exhibent singulatimque in appendicem pyriformem desinunt omnis coloris expertem, prorsus diaphanam, eoque ipso non facile cum asco commutandam. — Hyphae meae prorsus continuae colore atrofusco indutae erant, conidia (?) vero dilutius tincta.

CHAETOMIDIUM.

1. **Chaetomidium fimeti** (Fuckel) Zopf in Entwickl. der Ascomyceten. Chaetomium; p. 280.

In fimo cuniculorum a^0 1883 detexit van Ledden Hulsebosch.

PERISPORIUM.

1. **Perisporium nitidum** Berkeley Enum. Fung. collect. in Portugal, 8; Saccardo Syll. Fung. I, 57.
   In foliis putridis *Agaves Americanae* l. in horto botanico Amstelodamensi a⁰ 1883.
2. **Perisporium Arundinis** Desm. in Champ. du Nord de la France, 1e Série, 1e Edition, n⁰. 329; Saccardo Syll. Fung. I, 59.
   In foliis *Phragmitidis vulgaris*. — Goes.

III. CAPNODIEAE.

CAPNODIUM.

1. **Capnodium salicinum** Mont. Syll. 256; Saccardo Syll. Fung. I, 57.
   In foliis *Salicis cinereae*. — Brielle (legi m. Sept. a⁰ 1871 in statu perfecto).
2. **Capnodium Tiliae** (Fuckel) Saccardo Syll. Fung. I, 74.
   In foliis *Tiliae europaeae*. — Apud nos hucusque nonnisi sterile repertum. — Amsterdam. — Leiden.
3. **Capnodium quercinum** (Pers.) Berk. et Desmaz. Black moulds referred to Fumago, 11. — Saccardo Syll. Fung. I, 79.
   In foliis *Quercus Roboris*. — Apud nos hucusque nonnisi sterile repertum.

Scripsi Amstelodami m. Nov. a⁰ 1883.

RAPPORT

OVER EENE

BIJDRAGE VAN DEN HEER

P. H. BROCX, *Luit. t/zee 2e klasse:*

„WAARNEMING VAN DEN OVERGANG VAN VENUS OVER DE ZON, VOLBRACHT TE CURAÇAO OP 6 DECEMBER 1882".

(Uitgebracht in de Vergadering van 24 Nov. 1883).

De Heer P. H. Brocx, Luitenant ter zee 2e klasse, was door Z. E. den Minister van marine belast, den overgang van Venus over de zon in Curaçao waar te nemen, en het verslag door genoemden zee-officier, met goedkeuring van Z. E., aan de natuurkundige afdeeling der Akademie aangeboden, is een uittreksel uit het verslag door hem aan den Minister van marine uitgebracht.

Omtrent de aanleiding tot, en de voorbereiding voor de wetenschappelijke zending van den Heer Brocx, is een en ander medegedeeld in het »Verslag van den staat der sterrenwacht te Leiden en van de aldaar volbrachte werkzaamheden in het tijdvak van den 1en Juli 1881 tot den 18en September 1882", uitgebracht door den 2en ondergeteekende; wij ontleenen daaraan het volgende.

»De goede waarneming van het zoo zeldzame verschijnsel, dat ook in Nederland bij helderen hemel op 6 December gedeeltelijk zal zichtbaar zijn, is hoogst belangrijk, maar sedert de ervaring in 1874 opgedaan, is men teruggekomen van het denkbeeld dat eene juiste bepaling van den afstand van de zon tot de aarde voornamelijk op de waarneming van dien overgang moet berusten. Het bleek aan de eene zijde dat al de methoden van waarneming, die men bij den overgang in 1874 had toegepast, onderhevig zijn aan grootere of kleinere standvastige fouten, welke eene systematische fout in de bepaling van de zonsparallaxe teweeg brengen; aan de andere zijde bleek het uit uitgebreide onderzoekingen, dat waarnemingen van Mars, doch vooral van de kleine planeetjes tusschen Mars en Jupiter, bij hun geringsten afstand tot de aarde, zeer geschikt zijn voor eene juiste bepaling van de afmetingen van ons zonnestelsel, vooral daar de gelegenheid om die waarnemingen te volbrengen betrekkelijk dikwijls voorkomt.

De overweging van deze feiten heeft den Heer Oudemans en mij er toe geleid geene voorstellen te doen om eene Nederlandsche expeditie te organiseeren gelijksoortig aan die welke in 1874 naar Réunion is vertrokken. Wij meenden dat de groote uitgaven en de opoffering van tijd van hen, die aan deze zending zouden deelnemen, niet opwogen tegen het nut dat daaruit wellicht voor de sterrenkunde zou voortvloeien.

Op eenvoudiger schaal kon echter, meenden wij, zonder groot bezwaar, van Nederlandsche zijde aan de waarneming van den overgang worden deelgenomen, zoo die taak werd opgedragen aan een der zee-officieren van het oorlogschip, hetgeen zich gewoonlijk in onze West-Indische bezittingen bevindt.

Het eiland Curaçao is namelijk als waarnemingsplaats tamelijk gunstig gelegen, en biedt ook tegen 6 December vrij goede kansen voor helder weder op, zoodat een geoefend persoon, voorzien van een goeden kijker en van hulpmiddelen voor de nauwkeurige tijdsbepaling, aldaar hoogst waarschijnlijk waarnemingen zal kunnen volbrengen, die voor de wetenschap nuttig zullen zijn.

De Minister van marine, wien ik met het bovenstaande in kennis stelde, was dadelijk bereid den Heer Luitenant ter zee D. J. Heyning, bestemd om naar Curaçao te vertrekken, op te dragen den overgang van Venus aldaar waar te nemen, en hem gedurende ruim een maand te Leiden te detacheeren, ten einde zich voor zijne taak voor te bereiden. In December 1881 vertrok de Heer Heyning, en ik was juist voornemens hem de benoodigde instrumenten toe te zenden, toen ik het bericht ontving dat die zee-officier, tot herstel van gezondheid, naar het vaderland zou terugkeeren en vervangen zou worden door den Heer P. H. Brocx, die nu met de waarneming van den overgang werd belast. Daar die zee-officier 16 October uit Nederland moest vertrekken, en hij eerst medio September op de sterrenwacht werd gedetacheerd, was hem slechts weinig tijd tot oefening en voorbereiding gegeven; zooveel mogelijk heeft hij echter hiervan partij getrokken, gelijk, naar ik hoop, op 6 December zal blijken.

De instrumenten welke de Heer Brocx, met toestemming van den Minister van Binnenlandsche Zaken, van de sterrenwacht in gebruik heeft ontvangen, zijn: een lange kijker van ongeveer 3 meters, met een objectief van 110 millimeters. Deze kijker, oorspronkelijk voorzien van een objectief van Steinheil, is in 1874 met de expeditie, ter waarneming van den Venus-overgang, naar Réunion medegenomen. Ongelukkigerwijs is evenwel daar het objectief gebroken, en later is dit vervangen door een niet minder voortreffelijk glas van Schröder.

Voor de waarneming van de zon is bij dezen kijker gevoegd een prisma in de nabijheid van het oculair, hetwelk op zijn voorvlak slechts een klein deel van de invallende zonnestralen naar het oog reflecteert; om de helderheid van het zonnebeeld, die nog altijd te groot is, te verminderen, zijn de beide positieve achromatische oculairen voorzien van een wigvormig geslepen stuk gekleurd glas, waardoor men naar verkiezing het zonnebeeld helderder of zwakker kan maken.

Ten einde tijdens de waarneming van den overgang het oculair dadelijk dien stand te geven, bij welken men de zon het scherpst ziet, is de groote oculairbuis van eene verdeeling voorzien en bij het reflecteerend prisma een kruis van spinragdraden aangebracht. Door die oculairbuis op de juiste verdeeling te stellen, en het oogglas zooveel in of uit te schuiven tot men de kruisdraden scherp ziet, is men zeker ook een scherp beeld van de zon in het oog te ontvangen.

Bij dezen kijker is een stevige houten drievoet gevoegd, waarop hij met stangen in horizontale en vertikale richting beweegbaar is.

Voor de tijdsbepaling zal de Heer Brocx kunnen beschikken over de reflexie-instrumenten aan boord van de »Alkmaar" en vermoedelijk ook over de daar aan boord zijnde chronometers. Daar het echter mogelijk is dat dit laatste bezwaar zou opleveren, is aan den Heer Brocx uit het depôt der verificatie te Leiden een chronometer en een waarnemingshorloge verstrekt."

De Heer Brocx heeft de hem gedane opdracht met veel toewijding uitgevoerd, en blijkens de door hem medegedeelde beschrijving van hetgeen hij gezien heeft, schijnen zijne waarnemingen zeer goed geslaagd te zijn.

Zooals was overeengekomen, heeft hij zich alleen bepaald tot de vier aanrakingen van Venus met den zonsrand; natuurlijk hebben de waarnemingen van de beide uitwendige rakingen, vooral van de eerste, slechts eene geringe waarde, maar de bepaling van de tijdstippen, waarop de inwendige aanrakingen hebben plaats gegrepen, zal zeker haar gewicht in de schaal leggen bij de afleiding der uitkomsten uit den Venusovergang af te leiden.

Omtrent het tijdstip, waarop de Heer Brocx het tweede inwendige contact meent gezien te hebben, kan geen twijfel bestaan. Voor het tijdstip van het eerste inwendige contact heeft men echter twee opgaven: de eerste van het oogenblik, waarop de Heer Brocx oordeelt dat aanraking tusschen de omtrekken van zon en Venus zou plaats gevonden hebben, indien men die omtrekken in de gedachte had doorgetrokken; de tweede, 14.5 secunde later, van het oogenblik waarop hij aanraking in een enkel punt zag, terwijl hij onmiddellijk daarna eene zeer duidelijke lichtstreep tusschen de beide randen waarnam. Bij de berekening van al de waarnemingen zal de vraag, welk tijdstip te kiezen is, natuurlijk uitvoerig moeten worden behandeld. Het schijnt ons echter toe, dat op het laatste der beide tijdstippen de eigenlijke aanraking al had plaats gegrepen.

Zoowel op de dagen voor den overgang als op den 6den

December zelven heeft de Heer Brocx duidelijk de granulatie op de oppervlakte van de zon gezien. Dit bewijst dat hij scherp zag, en dat de voorwaarden, waaronder hij waarnam, zeer gunstig waren, zoowel wat betreft den toestand van de lucht als dien van den kijker. De opening van dezen laatsten was wel niet aanzienlijk, maar door den zeer grooten brandpuntsafstand, ongeveer dubbel zoo groot als bij gewone kijkers, waren de gebreken van spherische aberratie en kleurschifting tot een zeer gering bedrag herleid.

De Heer Brocx geeft in zijn verslag de correctiën van zijnen chronometer ten opzichte van den middelbaren tijd te Greenwich. Dit komt ons minder doelmatig voor. Uit zijne tijdsbepalingen toch leidde hij de tijdmeter-correctie met betrekking tot den lokalen tijd af, en door hierbij het aangenomen lengteverschil met Greenwich op te tellen, verkreeg hij de medegedeelde getallen. Dit lengteverschil is niet absoluut nauwkeurig bekend, zoodat die getallen ook slechts eene betrekkelijke waarde hebben, en telkens als men een ander lengte-verschil aanneemt, wederom moeten gewijzigd worden. Om deze reden hebben wij de opgave der chronometer-correctiën veranderd, zoodat zij nu geldt voor den lokalen tijd.

Bij de herleiding der waarnemingen is de juiste kennis van de lengte en breedte der waarnemingsplaats een eerste vereischte. De Heer Brocx neemt voor de lengte westelijk van Greenwich $68^0\ 56'\ 17''$ aan en voor de breedte $12^0\ 7'\ 30''$, en gaat hierbij uit van de door de Amerikanen bepaalde lengte en breedte van het Riffort, van de door hem zelven volbrachte peiling van dat punt en van de uitmeting van den afstand van Riffort tot fort Nassau op de kaart.

Volgens nadere opgaven van den Heer Brocx, is de door hem gebruikte kaart vrij juist. Zij is gebaseerd op de trigonometrische opneming van het Schottegat van Curaçao door officieren der Nederlandsche Marine in 1874, zoodat de afstand van 1640 meters als voldoende nauwkeurig kan beschouwd worden. De peiling of de bepaling van de richting van Riffort uit de waarnemingsplaats te Fort Nassau, heeft de Heer Brocx volbracht met behulp van een Gilbert's azimuth-kompas, waarvan de miswijzing op 4^0 Noord ten Oosten is aangenomen. Deze onderstelde miswijzing is echter niet juist; volgens eene ons welwillend door onzen voorzitter den Heer BUYS BALLOT verstrekte mededeeling, is de declinatie der magneetnaald te Curaçao $2^1/_4{}^0$ N. t. O., en volgens deze waarde zou dus het azimuth van Riffort uit Fort Nassau $40^1/_4{}^0$ zijn, waaruit volgt voor het verschil in breedte van beide punten $40''.7$ en voor het verschil in lengte $35''.0$.

Omtrent de lengte en breedte van Riffort zelf, deelde de chef der Afdeeling hydrografie aan het departement van marine, de Kapitein ter zee BUYSKES, ons het volgende mede.

In de Annales hydrographiques, 2e Série, tome premier, Dépôt des cartes et plans de la marine, Paris 1879, vindt men op pag. 170:

Détermination des positions géographiques de quelques points de la côte ferme et de la mer des Antilles par M. HANUSSE, ingénieur hydrographe.

Bij de hierin opgenomene lengtebepalingen zijn 4 tijdmeters gebezigd, en als uitgangspunt is aangenomen de vlaggestok van Fort Saint Louis, Fort de France, op Martinique. $4^u13^m38^s,90$ westelijk van Parijs.

Deze bepalingen geven voor den lichtopstand te Curaçao:

lengte westelijk van Parijs. . . . $71^0\,16'\,51''$,
noordelijke breedte . . . . $12^0\;\;6'\,36''$,

en daar de vlaggestok te Riffort $1'',2$ noordelijker en $3'',6$ oostelijker ligt, vindt men voor Riffort vlaggestok:

lengte westelijk van Greenwich. . . $68^0\,56'\,33'',4$,
noordelijke breedte. . . . . $12^0\;\;6'\,37'',2$.

In het door het Ministerie van marine uitgegeven weekblad »Bericht aan zeevarenden", komt in N^0. 37/580 van 1877 het volgende voor, overgenomen uit het:

Hydragraphic notice N^0. 39, United States hydrographic office, Washington 1877.

Door »Commander" GEO. P. RYAN, U. S. N. kommandant van het Noord-amerikaansche oorlogschip »Huron", zijn in April, Mei en Juni 1877, de geographische ligging en de magnetische miswijzing van de navolgende plaatsen bepaald.

De waarnemingen zijn geschied met behulp van vijf tijdmeters, welke voor de waarnemingen te Port Spain en daarna te Aspinwall waren geregeld, terwijl is aangenomen:

Port Spain, vlaggestok waterbatterij		
	61° 30′ 38″,4	West van Greenwich
Aspinwall lichttoren	79° 54′ 44″,7	» » »

De breedte-bepalingen hadden plaats door waarnemingen van stershoogten dicht bij den meridiaan, de lengtebepalingen geschiedden door middel van correspondeerende hoogten, en de magnetische miswijzing is afgeleid uit het azimuth en de peiling van de zon met het compas.

Onder N°. 12 vindt men:

Curaçao, Westhavenkant, 3/4 zeemijl benoorden Riffort en peilende Belvedere West:

lengte westelijk van Greenwich .	68° 56′ 44″
noordelijke breedte.	12° 6′ 45″
magnetische afwijking. . . , . . .	2° 28′ N. t. Oosten.

Op de kaart is de waarnemingsplaats van Ryan niet met zekerheid aan te geven, zoodat slechts bij benadering zijne ligging met betrekking tot Riffort is te bepalen. Vermoedelijk is de afstand van den vlaggestok op Riffort tot de waarnemingsplaats van Ryan 802 Meter, en het azimuth van het tweede punt uit het eerste gezien 42°,5, waaruit volgt voor vlaggestok Riffort:

lengte westelijk van Greenwich. . .	12° 6′ 25″,6
noordelijke breedte	68° 57′ 1″,9

Men heeft dus voor de geographische ligging van den vlaggestok te Riffort de volgende opgaven:

		Lengte westelijk van Greenwich.	Noordelijke breedte.
Volgens	Ryan	68° 57′ 2″	12° 6′ 26″
»	Hanusse	68° 56′ 33″	12° 6′ 37″
»	Brocx	68° 56′ 53″	12° 6′ 50″

Uit deze samenstelling blijkt dat eene hernieuwde bepaling van de lengte en breedte der waarnemingsplaats voor eene goede herleiding van de waarnemingen van den Venusovergang noodig is.

Het belangrijke verslag van den Heer Brocx vermindert hierdoor echter geenszins in waarde, en de commissie aarzelt dan ook niet aan de vergadering voor te stellen, het in de *Verslagen en Mededeelingen* op te nemen, met de kleine verandering waarvan boven is melding gemaakt, en welke bij voorbaat door den Heer Brocx is goedgekeurd.

Utrecht, Leiden.

J. A. C. OUDEMANS.

H. G. VAN DE SANDE BAKHUIJZEN.

VERSLAG

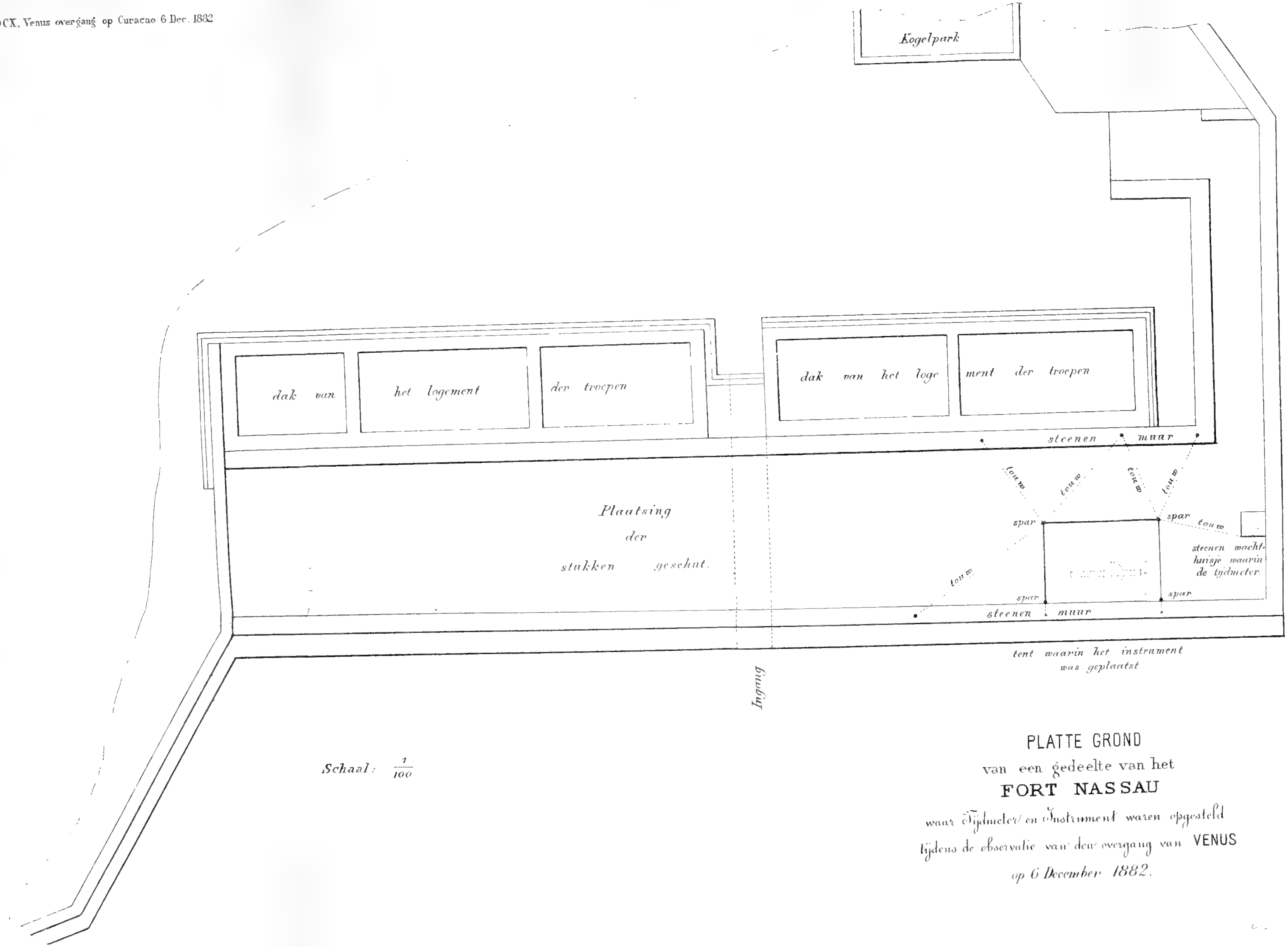
AANGAANDE DE

WAARNEMING VAN DEN OVERGANG VAN VENUS OVER DE ZON OP 6 DECEMBER 1882 TE CURAÇAO.

DOOR

P. H. BROCX.

Den 19den November 1882 te Curaçao aangekomen, werd den 21sten November begonnen met de opstelling van het instrument, nadat ik eerst rondgezien had, welke plaats mij de beste en geschiktste voor de waarneming toescheen. Eenige plaatsen, die daarvoor in aanmerking konden komen, werden door mij bezocht, doch waren, naar mijn oordeel, minder goed. Ik wilde toch, zooveel zulks mogelijk was, een geheel vrij uitzicht hebben om de voorloopige waarnemingen en de waarnemingen van hoogten voor de tijdsbepalingen op ieder tijdstip van dag te kunnen doen, en bovendien vrij in mijne beweging zijn. Ook achtte ik het raadzaam, den tijdmeter zoo dicht mogelijk in mijne nabijheid te hebben, beschut tegen den invloed der zonnestralen. Aan deze verschillende eischen voldeed Fort Nassau op uitstekende wijze, daar ik den tijdmeter in een steenen wachthuisje kon plaatsen, op ongeveer vijf meter van het instrument. Dat wachthuisje was open aan den kant, die den geheelen dag van de zon afgekeerd was, zoodat de temperatuur, waarin de tijdmeter



PLATTE GROND
van een gedeelte van het
FORT NASSAU
waar Tijdmeter en Instrument waren opgesteld
tijdens de observatie van den overgang van VENUS
op 6 December 1882.

stond, vrij wel dezelfde bleef en niet te hoog was. Behalve deze redenen, die oorzaak waren dat het Fort Nassau door mij was uitgekozen, was er nog eene reden, die minder voornaam kan genoemd worden: de kijker kon namelijk op de andere plaatsen moeielijk gesteld worden, zonder dat zulks veel tijd en geld zou kosten.

Het Fort Nassau is gelegen op eene hoogte van 65 M. boven de oppervlakte der zee, zoodat ook aan de voorwaarden van een vrij uitzicht en vrij in mijne bewegingen te zijn, kon worden voldaan.

Dit fort is gebouwd op en van klipsteenen, zoodat als het instrument eenmaal daar geplaatst was, ik volstrekt geen last kon hebben van trillingen ten gevolge van eene onvaste standplaats.

Van den vlaggestok van het Riffort, waarvan de Amerikanen de geographische ligging bepaald hebben, wordt het Fort Nassau gepeild N. 42^0 O. op een afstand van 1640 meter, zoodat de waarnemingsplaats op het Fort Nassau gelegen is op $12^0\,7'\,30''$ N. breedte en $68^0\,56'\,17''$ W. lengte, daar de vlaggestok van het Riffort, door de Amerikanen bepaald, gelegen is op $12^0\,6'\,50''$ N. breedte en $68^0\,56'\,53''$ W. lengte.

Ten overvloede voeg ik hier nog bij eene schetskaart van het Fort Nassau, met de plaatsen waar kijker en tijdmeter opgesteld waren.

Toen de tijdmeter *Marine* N⁰. 1, *Hohwü* N⁰. 421 den 21sten November in het steenen wachthuisje geplaatst was, begon ik zoo spoedig mogelijk met het nemen van tijdsbepalingen ter berekening van stand en gang, voor welke tijdsbepalingen ik eerst uurhoeken gebruikte, maar later, toen de lucht in den namiddag, juist op de oogenblikken dat ik observeeren moest, niet bewolkt was, gelukte het mij vijf tijdsbepalingen door middel van correspondeerende hoogten op vijf verschillende dagen te nemen.

Zoo vond ik voor de correctie van den chronometer met betrekking tot den middelbaren tijd Curaçao, van 23 Nov. tot 27 Nov. door middel van zonsuurhoeken, van 29 Nov. tot 5 Dec. door middel van correspondeerende zonshoogten:

	Midd. tijd Curaçao.	Correctie van den chronometer.	Dag. gang.
23 Nov.	$20^u\,54^m\,31^s.1$	— $4^u 48^m 3^s.20$	
24 »	21 0 54 .5	— 4 48 2 .61	+ $0^s.59$
25 »	20 53 2 .1	— 4 48 2 .41	+ 0 .20
27 »	20 20 9 .4	— 4 48 0 .31	+ 1 .06
29 »	23 48 56 .1	— 4 47 57 22	+ 1 .44
30 »	23 49 18 .6	— 4 47 57.10	+ 0 .12
2 Dec.	23 50 5 .4	— 4 47 56.98	+ 0 .06
4 »	23 50 44 .7	— 4 47 56.68	+ 0 .15
5 »	23 51 20 .2	— 4 47 55.78	+ 0 .90

De verschillende hoogten werden geobserveerd met een prismacirkel op een artificiëelen kwikhorizon.

De dagelijksche temperatuur werd niet geregeld waargenomen. In het begin werd de temperatuur alleen 'smiddags opgenomen en later ook des avonds om te zien of zij ook veel veranderde. Het bleek toen dat zij gemiddeld variëerde tusschen 28 en 29 graden Celsius.

Het was niet doenlijk den kijker in eene kamer op te stellen, zoodat met eigene middelen eene tent opgericht moest worden. Daarvoor werden loodrecht op den steenen vloer vier sparren opgesteld, waarvan twee aan den steenen muur van het fort werden bevestigd, terwijl de beide andere op dezelfde wijze daartegenover werden aangebracht en nog onderling, van boven, door dwarssparren aan elkander werden verbonden.

Tusschen de sparren liet ik nu zeilen ophijschen, zoodanig dat ik deze naar willekeur één voor één kon laten wegnemen, wanneer ik wilde observeeren. Ook was tusschen de sparren aan de boveneinden een zeil gespannen, dat het dak vormde en gedeeltelijk kon weggenomen worden, wanneer zulks noodig was. De kijker werd nu in deze tent geplaatst op den steenen vloer, waarop de tent zelve was opgesteld.

Moest er geobserveerd worden, dan werd een der zeilen weggenomen en dit dadelijk na iedere observatie weder opgeheschen, terwijl het objectief met den koperen dop gedekt werd, om het instrument zoo min mogelijk aan de zonnestralen bloot te stellen. Ik maakte bovendien nog over het geheele instrument, wanneer het niet gebruikt werd, een licht stuk zeildoek vast, om het tegen doordringende regendroppels te beveiligen.

Daar het dak evenwel schuins afliep, liep het regenwater er langs af, zoodat de kijker gedurende al dien tijd in het geheel niet nat geworden is.

Het spreekt van zelf dat de temperatuur van de lucht, binnen en buiten de tent, ongeveer dezelfde was, terwijl de lucht vrij door de tent kon heenstroomen.

De kijker bewoog zich met zijne horizontale as in een ijzeren beugel, waaraan een stevige ijzeren stang was bevestigd, die om eene vertikale as kon draaien. Het geheel rustte op een zwaren houten drievoet; twee koperen stangen met verlengstukken, die ieder door middel van een rondsel konden worden in- of uitgeschoven, waren èn aan een poot van den drievoet èn aan het einde van den kijker bij het oculair bevestigd, zoodat, bij het in- of uitdraaien van de stangen, de kijker in alle richtingen kon bewogen worden. Bij het in- of uitdraaien der stangen trilde de kijker niet, zoodat ik zeer gemakkelijk de zon in hare beweging kon volgen, zonder dat het beeld in den kijker op en neêrging.

De kijker, toebehoorende aan de sterrewacht te Leiden, is N^0. 1 van de rubriek *E.* »Fernröhre" in den instrumenten-catalogus, voorkomende in het 1^e deel van de Annalen der sterrenwacht te Leiden. Vroeger was hij voorzien van een objectief van Steinheil, maar nadat dit in 1874 gebroken was, werd er een uitmuntend objectief voor vervaardigd door Dr. H. Schroeder met eene vrije opening van 110 m.M. en een brandpuntsafstand van 2.65 Meters. Het oculair, zooals het bij de observatie gebruikt is, bestaat uit een reflecteerend prisma, met sterrenkundige oogbuis, dat op de verschuivende oogbuis van den kijker geschroefd wordt. De vergrooting was eene 113-voudige.

Op de verschuivende oogbuis van den kijker, die met een rondsel in- of uitgedraaid kan worden, is eene verdeeling aangebracht, zoodat men bij iedere observatie aflezen kan, hoever men de oogbuis heeft uitgedraaid.

Zooveel mogelijk nam ik iederen dag focus-instellingen, voornamelijk op de zonnevlekken. Daarvoor schoof ik eerst de sterrenkundige oogbuis zoo veel uit, dat het dradenkruis, hetgeen zich tusschen het reflecteerend prisma en het oculair bevindt, zeer scherp te zien was. Vervolgens werd de kijker op de zon gericht, op eene der aanwezige zonnevlekken, en de verschuivende oogbuis, nadat het gekleurde glas was aangebracht, zooveel uitgedraaid, totdat ik de zonnevlek in haar geheel, tot in de kleinste bijzonderheden zeer scherp zag. Tegelijk nam ik dan de nevelachtige oppervlakte van de zonneschijf waar, en zag ik duidelijk de witte stipjes of melkachtige oppervlakte. Ik las nu telkens de verdeeling in millimeters op de rechterzijde der oogbuis af, en vond dat deze variëerde tusschen 23,8 en 24,2, zoodat ik besloot 24,0 als gemiddelden stand van de oogbuis aan te nemen.

Het gekleurde glas bestaat uit twee gekleurde prisma's (neutraaltint), die in een koperen raampje zijn vastgeklemd, dat zich in eene sponning van de sterrenkundige oogbuis heen en weder laat schuiven. Om nu de tint van het gekleurde glas voor de observatie te bepalen, ging ik aldus te werk: ik schoof het gekleurde glas zooveel uit dat ik het zonnebeeld bijna niet meer door de donkere tint zag, en schoof het weder terug totdat ik het zonnebeeld schel door de lichte tint zag, te schel om te blijven waarnemen. Van deze beide standen nam ik het gemiddelde, dat mij als eene vrij goede tint voorkwam; ik zag den zonsrand met de zonnevlekken zeer scherp begrensd en toch zacht verlicht, zoowel op de dagen dat ik het focus bepaalde als op den dag der observatie van den overgang.

De rand van de zon was altijd buitengewoon scherp te zien, zoodat het geheele beeld zich prachtig mooi en duidelijk in den kijker vertoonde, met scherp begrensde zonnevlekken, terwijl de granulatie der oppervlakte of de melkachtige witte stipjes, zeer duidelijk zichtbaar waren.

Op den 6^{den} December, den dag van den overgang van Venus, begaf ik mij 's morgens te 7 uren naar het Fort Nassau, om alles op mijn gemak gereed te kunnen maken voor de observatie, die ongeveer te $9^u 30^m$ midd. tijd Curaçao moest plaats hebben.

Ik onderzocht nog objectief en oculair, bevrijdde ze van mogelijke stofdeeltjes, en zag de verschillende schroeven van de koperen stangen, die de beweging aan den kijker geven, na, opdat deze zoo geleidelijk mogelijk zou bewogen kunnen worden. Dit onderzoek had natuurlijk plaats onder de tent, zonder dat een der zeilen weggenomen was, om het instrument niet meer dan noodig aan de zonnestralen bloot te stellen, om welke reden ook de koperen dop weder voor het objectief geplaatst werd. Hierna ging ik over tot het observeeren van de eerste hoogten voor de tijdsbepaling, door middel van correspondeerende hoogten op den artificiëelen horizon.

Ik richtte nu den kijker op de zon, waarvoor een der zeilen werd weggetrokken, nam den koperen dop van het objectief af en ging over tot het bepalen van de tint van het gekleurde glas, die ik zou gebruiken, op dezelfde wijze als ik dit bij het bepalen van het focus op de vorige dagen gedaan had. Ik stelde nu de sterrenkundige oogbuis scherp op het dradenkruis, totdat ik de stofjes en vezeltjes op de draden zeer duidelijk zag, en draaide de verschuivende oogbuis van den kijker zooveel in of uit, totdat ik de zonnevlekken en de melkachtige stipjes zeer scherp waarnam.

Deze observatie deed ik driemalen en verkreeg hetzelfde resultaat als bij de vorige focusbepalingen; de aflezing op de verschuivende oogbuis was driemaal dezelfde en wel 24,0. Ik liet nu gekleurd glas en oculair in dezen stand blijven en richtte den kijker ongeveer op de plaats, waar de zon bij den overgang zou staan, nadat het zeil weder voorgehangen en de koperen dop voor het objectief geplaatst was.

Het weder was goed; nu en dan maakten enkele kleine wolken de zon wel voor een korten tijd onzichtbaar, doch gelukkig had zulks juist niet plaats op de oogenblikken van contact.

De wind was oostelijk en zeer flauw.

Ongeveer een kwartier voordat het eerste contact moest plaats hebben, werd het zeil weggenomen en nadat het objectief van den koperen dop bevrijd was, richtte ik den kijker op de zon, die ik nu in hare beweging begon te volgen, op een stoel in eene gemakkelijke ongedwongen houding gezeten en met beide handen aan de schroeven van de koperen stangen, die de beweging aan den kijker gaven. Het zonnebeeld unduleerde zeer weinig, bijna niet, de rand was zeer duidelijk en scherp te zien.

De Luitenant ter zee 2e klasse P. C. Swaan en de 3e Stuurman H. Lelyveld begaven zich bij den tijdmeter, gereed om op mijn »stop" roepen, de aanwijzing waar te nemen en op te teekenen.

Ik had mijne aandacht gevestigd op het gedeelte van den zonsrand, dat zich in het veld van den kijker links bovenaan bevond, vlak boven of liever in de onmiddellijke nabijheid eener zonnevlek. Werkelijk zag ik ook op dat gedeelte den zonsrand even indeuken, en wel toen de tijdmeter aanwees $2^u\,15^m\,17^s,0$.

Eerst dacht ik dat het zinsbedrog of iets anders was, doch langzamerhand werd die indeuking grooter, die wel degelijk een gedeelte van de Venusschijf bleek te zijn. Ik beschouwde dan ook dat de eerste uitwendige aanraking tusschen Venus en de zonneschijf op genoemde aanwijzing had plaats gehad.

De rand van de Venusschijf was zeer scherp begrensd, terwijl de oppervlakte van de planeet zich gitzwart aan mij vertoonde. Ik bleef nu de zon in hare bewegingen volgen, mijne geheele aandacht op de Venusschijf gevestigd. Na eenigen tijd zag ik den buitenrand van Venus flauw verlicht, zoodat de geheele omtrek van de planeet zichtbaar werd. De Venusschijf zelve was gitzwart, evenals dat gedeelte van het veld van het objectief, dat buiten den zonsrand gelegen was; om het stuk der Venusschijf dat buiten de zon was, zag ik een ronden flauw verlichten kring. Toen ik dien flauw verlichten boog voor het eerst zag, wees de tijdmeter aan $2^u\,24^m\,8^s,5$.

Steeds bleef ik het verschijnsel volgen, totdat ik op aanwijzing van den tijdmeter $2^u\,34^m\,34^s,0$ den Venusrand in gedachte doortrekkende, meende contact te hebben, denkende dat een zwarte band of drop zou volgen. Dit contact was niet in een enkel punt, doch over een boog van geringe lengte, naar schatting waarschijnlijk een achttiende of twintigste gedeelte van den Venusomtrek. De lengte van dezen contactboog is naar mijne meening zeer moeielijk te schatten, zoodat ik geene groote waarde hecht aan deze schatting, doch zeker is het dat de contactboog van geringe lengte was en niet meer dan 20 graden van den Venusomtrek bedroeg.

Op aanwijzing van den tijdmeter $2^u\,34^m\,48^s,5$ was het contact bepaald in een enkel punt, en dadelijk daarop, na eene halve seconde tijds, zag ik eene lichtstreep om de planeet, zoodat Venus zich geheel en al gitzwart of donkerzwart op het zonnebeeld vertoonde. Deze lichtstreep ontstond plotseling zonder dat de Venusschijf hoegenaamd iets van kleur veranderde, terwijl hare randen scherp zichtbaar waren.

Van eene lichte vlek in het midden van de Venusschijf heb ik niets bespeurd. De lichtstreep tusschen Venus en de zon werd nu breeder, zonder dat zich daarin eene schaduw vertoonde, zonder dat de randen van de zon en van Venus iets werden uitgerekt of van vorm veranderden; de Venusschijf bleef haren cirkelvorm behouden, terwijl haar rand zeer scherp begrensd was.

Ik bleef voor alle zekerheid nog eenige minuten het verschijnsel volgen, doch nam niets bijzonders meer waar; Venus bleef dezelfde donkere kleur behouden. Ik plaatste nu den koperen dop weder voor het objectief en liet het zeildoek optrekken, om het instrument te dekken tegen de zonnestralen.

Den kijker werd nu ongeveer de stand gegeven, noodig om het tweede inwendige contact waar te nemen.

Een half uur vóór de tweede observatie, toen de tijdmeter aanwees $7^u\,25^m$, liet ik het zeildoek weder optrekken en richtte nu het instrument op de zon, nadat de koperen dop was weggenomen. Venus was nog even donker op de zonneschijf te zien. Van tijd tot tijd, om de oogen niet te veel te vermoeien, keek ik nu door den kijker. Volgens berekening moest het tweede contact plaats hebben op aanwijzing van den tijdmeter $7^u\,55^m\,31^s,0$.

Vijf minuten van te voren begon ik weder mijne geheele aandacht op het verschijnsel te vestigen, terwijl men bij den tijdmeter gereed was om de aanwijzing waar te nemen. De Venusschijf bleef even donker met scherpe randen te zien, totdat ik op aanwijzing van den tijdmeter $8^u\,0^m\,1^s,0$ eene zeer lichte, bijna niet te noemen schaduw tusschen Venus en den zondsrand zag, of liever de lichtstreep tusschen Venus en den zonsrand zag ik niet meer zoo helder.

Op aanwijzing van den tijdmeter $8^u\,0^m\,5^s,5$ raakte de rand van Venus dien van de zon in een enkel punt aan, zonder dat beide randen eenige vervorming of verandering hoegenaamd ondergingen, zonder dat de Venusschijf van kleur veranderde.

Op dat oogenblik was de lichtstreep verbroken en de zeer lichte schaduw totaal verdwenen. Venus bewoog zich nu verder van de zonneschijf af, met dezelfde kleur, die zij gedurende haar geheelen overgang heeft behouden, totdat zij op aanwijzing van den tijdmeter $8^u\,20^m\,7^s,5$ voor het eerst geheel verdwenen was, en het laatste uitwendige contact plaats had.

Het instrument werd daarna van den bok afgenomen, de tent afgetuigd en alles medegenomen om voorloopig aan boord van Z. M. schroefstoomschip *Alkmaar* opgeborgen te worden, nadat ik nog eerst de namiddaghoogten voor de tijdsbepaling met correspondeerende hoogten waargenomen had.

Indien men met de chronometercorrectie, bepaald op 5 December, $23^u\,51^m\,20^s,2$ namelijk — $4^u\,47^m\,55^s,78$ en den dagelijkschen gang $+\ 0^s,90$, de correctiën van den chronometer berekent voor de waarnemingsoogenblikken, vindt men:

		Chron. tijd.	Midd. tijd Curaçao.
Eerste uitwendige raking . . .		$2^u\,15^m\,17^s.0$	$21^u\,27^m\,21^s.13$
Eerste inwendige raking	Schijnbare aanraking zoo men de omtrekken van zon en Venus in gedachte doortrok.	2 34 34 .0	21 46 38 .14
	Aanraking in een enkel punt	2 34 48 .5	21 46 52 .64
Tweede inwendige raking . . .		8 0 5 .5	3 12 9 .85
Tweede uitwendige raking . . .		8 20 7 .5	3 32 11 .86

VERSLAG

OVER EENE

VERHANDELING DES HEEREN **Dr. F. DE BOER**:

UITBREIDING VAN HET THEOREMA VAN ROLLE.

(Uitgebracht in de Vergadering van 29 December 1883).

De Commissie, in Uwe vergadering van 24 November l.l. benoemd, ten einde rapport uit te brengen omtrent de aangeboden verhandeling van den Heer F. DE BOER, getiteld: »*Uitbreiding van het theorema van Rolle,*" heeft de eer het volgende mede te deelen.

De schrijver stelt zich ten doel, de ligging zóó van de reëele als van de imaginaire wortels van de oorspronkelijke hoogere machtsvergelijking ten opzichte van de wortels van de oorspronkelijke hoogere machtsvergelijking, waarin ook imaginaire coëfficienten kunnen voorkomen, aan te wijzen en daardoor het theorema van ROLLE, waarbij alleen van reëele wortels sprake is en waarbij in de vergelijking alleen reëele coëfficienten voorkomen, uit te breiden.

Door de hoogere machtsvergelijking $f(z) = 0$, na daarin de veranderlijke z door de complexe uitdrukking $x + y\sqrt{-1}$ vervangen te hebben, onder de vormen $X + Y\sqrt{-1} = 0$ en $R\,e^{\Phi\sqrt{-1}} = 0$ te brengen, verkrijgt hij vier functiën: X, Y, R en Φ, die, ieder aan eene constante gelijk gesteld, de vergelijkingen van vier stel lijnen opleveren, welke hij met de namen van X-, Y-, R- en Φ-lijnen bestempelt.

Na de algemeene eigenschappen van deze lijnen te hebben behandeld, gaat de schrijver den loop der verschillende lijnen in bijzonderheden na en komt daardoor tot onderscheiden stellingen, waarvan de meesten als eene uitbreiding van het theorema van ROLLE beschouwd kunnen worden. De verhandeling wordt besloten met eenige beschouwingen over de derde machtsvergelijkingen.

In een vervolg, ons door den schrijver toegezonden en dat wij gemeend hebben bij de verhandeling te mogen voegen, omdat het zich daar onmiddellijk aan aansluit, worden de verschillende stellingen op zeer eenvoudige wijze met behulp van het Riemanische vlak opgehelderd.

De zeer korte beredeneering van de verschillende gevallen, gevoegd bij het totale gemis van ophelderende figuren, maakt de studie der verhandeling eenigszins moeielijk, maar geeft tevens het bewijs, dat de schrijver zijn onderwerp goed meester is en zich met gemak op dit gebied der analyse beweegt.

Hoewel het behandelde niet geheel nieuw is, daar het beloop der verschillende door den schrijver behandelde lijnen reeds door den Heer LUCAS *) langs statischen en analitischen weg en door den Heer HOLZMÜLLER †) met behulp van het Riemanische vlak is nagegaan, blijft de verhandeling van den Heer DE BOER, ook naast deze onderzoekingen, hare waarde behouden. Beide schrijvers toch bepalen zich hoofdzakelijk tot het onderzoek van het algemeene beloop der lijnen, terwijl de Heer DE BOER tevens in détail nagaat de verschillende afwijkende vormen, die zich in bijzondere gevallen in het beloop dier lijnen moeten voordoen.

Om deze reden nemen wij de vrijheid aan de afdeeling

---

*) F. LUCAS. Géométrie des polynomes. *Journal de l'École polytechnique.* T. XXVIII. 1879.

†) G. HOLZMÜLLER, Einführung in die Theorie der isagonalen Verwandtschaften und der conformen Abbildungen. Leipzig 1882. Zehntes Capitel. Die Abbildung mittels ganzer rationaler Functionen und ihrer Umkehrungen.

voor te stellen, de verhandeling in de werken der Akademie op te nemen, nadat de schrijver in de gelegenheid zal zijn gesteld om enkele kleine onjuistheden, die daarin voorkomen, te veranderen.

Delft, 11 December 1883.

De Commissie voornoemd:

G. F. W. BAEHR.
CH. M. SCHOLS.

UITBREIDING VAN HET THEOREMA VAN ROLLE. *)

DOOR

Dr. F. DE BOER.

1. Wanneer een hoogere machtsvergelijking reëele coëfficienten heeft, en twee of meer reëele wortels bezit, dan ligt tusschen elk paar reëele wortels van die vergelijking een reëele wortel van de afgeleide vergelijking, dat is van de vergelijking, die men bekomt, door de afgeleide van het eerste lid der gegeven vergelijking gelijk aan nul te stellen. Er kunnen ook meer dan één wortel van de afgeleide tusschen twee wortels van de gegeven vergelijking liggen, maar het aantal van die wortels is altijd oneven.

Deze betrekkelijk zeer eenvoudige waarheid, bekend onder den naam van het theorema van ROLLE, laat zich gemakkelijk onder anderen op de volgende wijze aantoonen.

Zij

$$f(x) = 0$$

eene vergelijking in x van den n^{den} graad; laten x_1 en x_2 twee wortels van die vergelijking zijn, waartusschen geen andere wortels gelegen zijn, dan is $f(x_1) = f(x_2) = 0$. Daar $f(x)$ niet oneindig groot of ondoorloopend kan worden, moet deze grootheid voor minstens éene waarde van x tusschen x_1 en x_2 gelegen een maximum of minimum worden. Komen er meer dan een maximum of minimum voor, dan moet het geheele aantal oneven wezen, daar $f(x)$, zoolang

*) Omtrent de litteratuur over dit onderwerp, zie men het hierachter gevoegde naschrift..

x tusschen x_1 en x_2 ligt, steeds hetzelfde teeken behoudt. Daar nu elk maximum en elk minimum van $f(x)$ overeenkomt met een wortel van

$$f'(x) = 0,$$

is hiermede het gestelde bewezen. Men zou misschien nog kunnen twijfelen of de stelling ook doorging voor het geval, dat twee of meer wortels van de afgeleide vergelijking samenvielen, maar als men opmerkt, dat $f(x)$ voor zulke waarden van x al of niet een maximum of minimum is, naarmate het aantal samenvallende wortels oneven of even is, ziet men, dat ook in dit geval de stelling doorgaat, mits p samenvallende wortels van de afgeleide ook voor p geteld worden.

2. Let men nu niet alleen op de reëele maar ook op de imaginaire wortels der vergelijking, en sluit men ook niet vergelijkingen met imaginaire coëfficiënten uit, dan doet zich de vraag voor: Bestaat er wellicht een uitgebreider theorema, eene eigenschap van al de wortels der hoogere machtsvergelijking in verband met de wortels van de afgeleide vergelijking, waarvan het theorema van Rolle slechts een bijzonder geval is? Oppervlakkig beschouwd zou men dit niet verwachten. Immers, stelt men de gezamenlijke wortels eener hoogere machtsvergelijking en van hare afgeleide op de bekende wijze in een plat vlak voor door de reëele deelen en imaginaire deelen als coördinaten van punten te beschouwen, dan zou zulk een theorema de ligging van $n - 1$ punten ten opzichte van n punten moeten uitdrukken, waaraan wel in bijzondere gevallen, maar niet in het algemeen een bepaalde volgorde valt op te merken.

Toch zal uit het volgende blijken, dat er wel degelijk zulk een algemeener theorema bestaat, maar dat er dan ook wel degelijk zoo iets als eene volgorde bij de wortels der vergelijking valt op te merken. De omstandigheid dat dit laatste a priori zeer onwaarschijnlijk moest voorkomen is wellicht de oorzaak, dat eene zoo eenvoudige eigenschap, als in het vervolg bewezen zal worden, nog door niemand schijnt te zijn opgemerkt.

3. Zij

$$f(z) = f(x + iy) = X + iY = Re^{i\Phi} = 0 \quad . \; . \; . \quad (1)$$

eene willekeurige vergelijking van den n^{den} graad, waarbij wij voorloopig zullen aannemen, dat noch de vergelijking zelve, noch de afgeleide vergelijking

$$f'(z) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

gelijke wortels hebben.

Stellen wij ons voor, dat de waarde van z op de bekende wijze in een plat vlak worden voorgesteld, namelijk door x en y te beschouwen als rechthoekige coördinaten van een beweegbaar punt, dan zullen de vier door de vergelijking (1) gedefinieerde functiën van x en y n.l X, Y, R en Φ in elk punt van het platte vlak slechts ééne maar ook steeds ééne waarde hebben, mits wij nog bepalen, dat Φ steeds tusschen 0 en 2π genomen zal worden, de waarde 2π zelve daarbij uitsluitend maar de waarde 0 niet.

4. Wij zullen in het volgende de eigenschappen nagaan van de lijnen:

$$R = \alpha, \quad \Phi = \beta, \quad X = \gamma, \quad Y = \delta,$$

waarin α, β, γ en δ constanten zijn, die als veranderlijke parameters beschouwd kunnen worden. De waarden, die α kan aannemen, liggen tusschen 0 en ∞, die van β tusschen 0 en 2π, en die van γ en δ tusschen $-\infty$ en $+\infty$. Wij zullen deze lijnen kortheidshalve R-, Φ-, X- en Y-lijnen noemen. De R-lijnen zijn van den $2n^{\mathrm{den}}$, de Φ-, X- en Y-lijnen van den n^{den} graad.

5. Door de vergelijking:

$$f(z) = f(x + iy) = X + iY.$$

te differentieeren ten opzichte van x en y vindt men:

$$f'(z) = \frac{dX}{dx} + i\frac{dY}{dx}, \qquad i f'(z) = \frac{dX}{dy} + i\frac{dY}{dy};$$

dus

$$i\frac{dX}{dx} - \frac{dY}{dx} = \frac{dX}{dy} + i\frac{dY}{dy},$$

of

$$\frac{dX}{dx} = \frac{dY}{dy},\ \frac{dX}{dy} = -\frac{dY}{dx} \dots\dots\dots (3)$$

Door deze vergelijkingen ten opzichte van x en y te differentieëeren heeft men verder:

$$\frac{d^2X}{dx^2} = \frac{d^2Y}{dx\,dy} = -\frac{d^2X}{dy^2},\ \frac{d^2Y}{dx^2} = -\frac{d^2X}{dx\,dy} = -\frac{d^2Y}{dy^2} \dots (4)$$

Op nieuw differentieerende vindt men:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d^3X}{dx^3} = \dfrac{d^3Y}{dx^2dy} = -\dfrac{d^3X}{dxdy^2} = -\dfrac{d^3Y}{dy^3}, \\ \dfrac{d^3Y}{dx^3} = -\dfrac{d^3X}{dx^2dy} = -\dfrac{d^3Y}{dxdy^2} = \dfrac{d^3X}{dy^3}, \end{array}\right\} \dots\dots (5)$$

en zoo vervolgens.

Verder heeft men, daar

$$R^2 = X^2 + Y^2,\ \Phi = bg\,tg\frac{Y}{X}$$

is,

$$\frac{dR}{dx} = \frac{X\dfrac{dX}{dx} + Y\dfrac{dY}{dx}}{R},\ \frac{dR}{dy} = \frac{X\dfrac{dX}{dy} + Y\dfrac{dY}{dy}}{R},$$

$$\frac{d\Phi}{dx} = \frac{X\dfrac{dY}{dx} - Y\dfrac{dX}{dx}}{R^2},\ \frac{d\Phi}{dy} = \frac{X\dfrac{dY}{dx} - Y\dfrac{dX}{dx}}{R^2},$$

waaruit met behulp van het bovenstaande gemakkelijk volgt:

$$\frac{dR}{dx} = R\frac{d\Phi}{dy},\ \frac{dR}{dy} = -R\frac{d\Phi}{dx} \dots\dots\dots (6)$$

Uit deze vergelijkingen vindt men door differentieeren:

$$\frac{d^2R}{dx^2} = \frac{dR}{dx}\frac{d\Phi}{dy} + R\frac{d^2\Phi}{dx\,dy},\ \frac{d^2R}{dx\,dy} = \frac{dR}{dx}\frac{d\Phi}{dy} + R\frac{d^2\Phi}{dy^2},$$

$$\frac{d^2R}{dx\,dy} = -\frac{dR}{dx}\frac{d\Phi}{dx} - R\frac{d^2\Phi}{dx^2},\ \frac{d^2R}{dy^2} = -\frac{dR}{dy}\frac{d\Phi}{dx} - R\frac{d^2\Phi}{dx\,dy}.$$

Ingeval

$$\frac{dR}{dx}=\frac{dR}{dy}=\frac{d\Phi}{dx}=\frac{d\Phi}{dy}=0$$

mocht zijn, gaan deze vergelijkingen over in:

$$\frac{d^2R}{dx^2}=R\frac{d^2\Phi}{dxdy}=-\frac{d^2R}{dy^2},\quad R\frac{d^2\Phi}{dx^2}=-\frac{d^2R}{dxdy}=-R\frac{d^2\Phi}{dy^2}\,..\,(7)$$

Op dezelfde wijze vindt men gemakkelijk, dat, *wanneer de afgeleide van* R *en* Φ *ten opzichte van* x *en* y *van de eerste en tweede orde alle verdwijnen*,

$$\frac{d^3R}{dx^3}=R\frac{d^3\Phi}{dx^2dy}=-\frac{d^3R}{dxdy^2}=-R\frac{d^3\Phi}{dy^3}\ \text{en}$$

$$R\frac{d^3\Phi}{dx^3}=-\frac{d^3R}{dx^2dy}=-R\frac{d^3\Phi}{dxdy^2}=\frac{d^3R}{dy^3},\ \dots\dots\ (8)$$

en zoo vervolgens.

Al deze betrekkingen zullen ons in het vervolg van dienst zijn.

6. Daar in elk punt van het vlak waarop de waarden van z zijn afgebeeld, X, Y, R en Φ, ééne maar ook slechts éene waarde heeft, zal door elk punt éene van ieder van de vier genoemde soorten van lijnen gaan, en de gelijknamige zullen elkaar nergens kunnen snijden.

Gaan wij thans na of, en zoo ja waar, deze lijnen bijzondere punten hebben. Beschouwen wij in de eerste plaats de X- en Y-lijnen. Zullen deze in eenig punt van het vlak een bijzonder punt vertoonen, dan moet in dat punt

$$\frac{dX}{dx}=\frac{dX}{dy}=0\ \text{ of }\ \frac{dY}{dx}=\frac{dY}{dy}=0$$

zijn, of, wat volgens (3) op hetzelfde neerkomt,

$$\frac{dX}{dx}=\frac{dY}{dx}=\frac{dY}{dy}=\frac{dY}{dy}=0.$$

Deze vergelijkingen zijn, zoo als gemakkelijk is in te zien, gelijkwaardig met

$$f'(z) = 0.$$

De punten, waar de X- en Y-lijnen bijzondere punten vertoonen zijn dus die, welke overeenkomen met de wortels der afgeleide vergelijking of, zoo als wij kortheidshalve zullen zeggen, zijn de wortels dier vergelijking.

De bijzondere punten der Φ-lijnen liggen daar, waar voldaan is aan de vergelijkingen

$$\frac{d\Phi}{dx} = \frac{d\Phi}{dy} = 0, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

maar daar is blijkens (6) ook

$$\frac{dR}{dx} = \frac{dR}{dy} = 0, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

zoodat diezelfde punten ook bijzondere punten der R-lijnen zijn.

Uit (9) volgt, daar R steeds eindig is,

$$\frac{X\dfrac{dY}{dx} - Y\dfrac{dX}{dx}}{R} = 0, \qquad \frac{X\dfrac{dY}{dy} - Y\dfrac{dX}{dy}}{R} = 0.$$

Neemt men de som der vierkanten van deze vergelijkingen, dan vindt men, in aanmerking nemende (3)

$$\left(\frac{dX}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dX}{dy}\right)^2 = 0,$$

waaruit blijkt, dat ook de R- en Φ-lijnen in de wortels der afgeleide vergelijking bijzondere punten hebben.

Aan de vergelijkingen (10) wordt ook voldaan voor $R = 0$, dat is in de wortels der vergelijking zelve. Deze bijzondere punten hebben echter alle betrekking op eene zelfde R-lijn n.l. $R = 0$, die uit niets anders dan deze n punten bestaat. Al de andere R-lijnen hebben, even als de Φ-lijnen, nergens anders dan in de wortels der afgeleide een bijzonder punt *).

7. Zij ψ de hoek, dien de raaklijn in het punt $x\ y$ aan de door dat punt gaande X-lijn met de x-as maakt, dan is

$$\frac{d\,X}{d\,x} + tg\,\psi\,\frac{d\,X}{d\,y} = 0.$$

Heeft ψ_1 dezelfde beteekenis voor de door datzelfde punt gaande Y-lijn, dan is

$$\frac{d\,Y}{d\,x} + tg\,\psi_1\,\frac{d\,Y}{d\,y} = 0,$$

waaruit in verband met (3) volgt

$$tg\,\psi\;tg\,\psi_1 + 1 = 0.$$

Evenzoo vindt men als χ en χ_1 een overeenkomstige beteekenis hebben voor de R- en Φ-lijnen.

$$tg\,\chi\;tg\,\chi_1 + 1 = 0.$$

De X- en Y-lijnen, evenals de R- en Φ-lijnen, snijden elkaar dus overal (behalve in de wortels der vergelijking) rechthoekig. Doorloopt dus de parameter γ der X-lijnen zijne verschillende waarden, dan zijn de Y-lijnen de wegen door de punten der X-lijn doorloopen, en omgekeerd beschrijven de punten der Y-lijnen de X-lijnen, wanneer de parameter δ verandert. Dezelfde wederkeerige betrekking bestaat tusschen de R- en Φ-lijnen †).

---

*) Zooals de Φ-lijnen boven zijn bepaald eindigen zij plotseling in de wortels der vergelijking. In analytischen zin zijn dit echter geen bijzondere punten, daar de Φ-lijnen algebraische krommen zijn, dien voortgezet worden in andere Φ-lijnen, wier parameter π grooter of kleiner is.

†) De X- en Y-lijnen, zoowel als de R- en Φ-lijnen, vormen een stelsel isometrisehe lijnen, zooals blijkt uit de vergelijkingen

$$(d\,X)^2 + (d\,Y)^2 = \left\{ \left(\frac{d\,X}{d\,x}\right)^2 + \left(\frac{d\,Y}{d\,x}\right)^2 \right\} (d\,x^2 + d\,y^2)$$

$$\left(\frac{1}{R}\,d\,R\right)^2 + (d\,\Phi)^2 = \frac{1}{R^2}\left\{ \left(\frac{d\,X}{d\,x}\right)^2 + \left(\frac{d\,Y}{d\,x}\right)^2 \right\} (d\,x^2 + d\,y^2)$$

8. In de wortels der afgeleide vergelijking heeft men

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2X}{dx^2}+2\,tg\,\psi\,\frac{d^2X}{dx\,dy}+tg^2\,\psi\,\frac{d^2X}{dy^2}=0,\\ \frac{d^2Y}{dx^2}+2\,tg\,\psi_1\frac{d^2Y}{dx\,dy}+tg^2\,\psi_1\frac{d^2Y}{d^2y}=0.\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ (11)$$

De wortels van deze beide vergelijkingen zijn altijd reëel, en die van dezelfde vergelijking zijn steeds elkaars omgekeerden met het omgekeerde teeken, zoodat de bijzondere punten der X- en Y-lijnen reëele dubbelpunten zijn, waar twee takken der kromme elkaar loodrecht snijden. Dit besluit zou niet meer gelden, wanneer al de drie tweede afgeleiden van Y of van X verdwenen, maar dit geval kan zich bij de gemaakte onderstellingen niet voordoen, daar dan twee wortels van de afgeleide zouden samenvallen.

Uit de vergelijkingen (11) volgt in verband met (4)

$$tg\,2\,\psi=-\frac{d^2X}{dx^2}:\frac{d^2X}{dx\,dy},$$

$$tg\,2\,\psi_1=-\frac{d^2Y}{dx^2}:\frac{d^2Y}{dx\,dy},$$

waaruit men met behulp van (4) gemakkelijk afleidt

$$tg\,2\,\psi\;tg\,2\,\psi_1+1=0.$$

Hieruit blijkt, dat de takken der X-lijn in een bijzonder punt de hoeken tusschen die der Y-lijn midden doordeelen.

Geheel hetzelfde geldt weer voor de R- en Φ-lijnen, zooals geheel op dezelfde wijze blijkt.

9. Laten wij de onderstelling, dat de afgeleide vergelijking geen gelijke wortels heeft, voor een oogenblik varen, en onderzoeken wij hoe de X- en Y-lijnen zich in een dubbelen wortel van de afgeleide gedragen. In zulk een punt is

$$\frac{d^2X}{dx^2}=\frac{d^2X}{dx\,dy}=\frac{d^2X}{dy^2}=\frac{d^2Y}{dx^2}=\frac{d^2Y}{dx\,dy}=\frac{d^2Y}{dy^2}=0,$$

Dit blijkt als men opmerkt, dat in zulk een punt

$$f'(z) = 0$$

moet zijn, En verder heeft men daar.

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^3 X}{dx^3} + 3\,tg\,\psi \frac{d^3 X}{dx^2 dy} + 3\,tg^2\,\psi \frac{d^3 X}{dx dy^2} + tg^3\,\psi \frac{d^3 X}{dy^3} = 0 \\ \frac{d^3 Y}{d\,x^3} + 3\,tg\,\psi_1 \frac{d^3 Y}{dx^2 dy} + 3\,tg^2\,\psi_1 \frac{d^3 Y}{dx dy^2} + tg^3\,\psi_1 \frac{d^3 Y}{dy^3} = 0 \end{aligned}\right\} \ldots (12)$$

Neemt men (5) in aanmerking, dan vindt men uit deze vergelijkingen

$$tg\,3\,\psi = -\frac{d^3 X}{dx^2\,dy} : \frac{d^3 X}{d\,x^3},$$

$$tg\,3\,\psi_1 = -\frac{d^3 Y}{dx^2\,dy} : \frac{d^3 Y}{d\,x^3},$$

en hieruit met behulp van (5)

$$tg\,3\,\psi\,tg\,3\,\psi_1 + 1 = 0.$$

Men ziet dus, dat de X- en Y-lijnen uit drie takken bestaan, die elkaar onder hoeken van 60^0 snijden, en dat de takken van de eene lijn de hoeken door die der andere gevormd middendoordeelen.

Hetzelfde geldt ook weer voor de R- en Φ-lijnen.

Het is gemakkelijk te voorzien, hoe de toestand zal zijn, als drie of meer wortels van de afgeleide vergelijking samen vallen.

10. Doet men de substitutie $z = a + bi + z' e^{i\omega}$, dan bekomt men eene nieuwe vergelijking in z'. Neemt men nu in de beide vergelijkingen overeenkomstige waarden van z en z', dan zullen X en Y in beide vergelijkingen natuurlijk dezelfde waarde hebben, maar, als men de waarden van z' in een ander vlak afbeeldt, zal de ligging der overeenkomstige punten ten opzichte van de x'- en y'-as eene andere

zijn. Hunne betrekkelijke ligging zal echter dezelfde gebleven zijn. Men heeft namelijk

$$x = a + x' \cos \omega - y' \sin \omega,$$

$$y = b + y' \cos \omega + x' \sin \omega,$$

waaruit blijkt, dat deze substitutie neerkomt op eene verplaatsing van het coördinatenstelsel, en wel zoo, dat men een willekeurig punt $a + bi$ als oorsprong en eene willekeurige lijn als x-as aanneemt.

De X-, Y-, R- en Φ-lijnen zijn dus in gedaante en onderlinge ligging door deze substitutie niet veranderd. Had men aan den term $z' e^{i\omega}$ nog een coëfficiënt c gegeven, dan zou niet alleen eene verplaatsing van het coördinatenstelsel, maar ook nog eene evenredige vergrooting of reductie van al de afmetingen der figuur hebben plaats gehad.

Vermenigvuldigt men de gegeven vergelijking met een complexen factor $f + gi$, dan veranderen de waarde van X, Y, R en Φ.

De X- en Y-lijnen zullen daardoor veranderen, maar de R- en Φ-lijnen niet. De waarden van R worden namelijk alle met eene constante vermenigvuldigd en die van Φ met eene constante vermeerderd. Dit blijkt onmiddellijk, als men $f + gi = \varrho (\cos \nu + i \sin \nu)$ stelt; X wordt dan vervangen door $\varrho X \cos \nu - \varrho Y \sin \nu$, Y door $\varrho X \sin \nu + \varrho Y \cos \nu$, maar R door $R \varrho$ en Φ door $\Phi + \nu$.

11. Gaan wij nu na, wat er met de lijnen $R = \alpha$ gebeurt, als α de waarden van 0 tot ∞ doorloopt. Voor zeer kleine waarde van α bestaat de R-lijn uit n gesloten takken ieder een van de wortels der vergelijking (1) omgevende, want voor $\alpha = 0$ bestaat zij uit die n-punten zelf. Neemt α toe, dan zal er eindelijk eene waarde van α bereikt worden, waarvoor de R-lijn door een van de wortels der afgeleide vergelijking gaat. Dit zal alleen kunnen plaats hebben, als twee van de gesloten takken elkaar genaderd zijn, want twee punten van eenzelfden gesloten tak kunnen nooit tot elkaar naderen daar elke nieuwe R-lijn al de vroegere moet omgeven, omdat geen twee R-lijnen door

eenzelfde punt kunnen gaan. Op het oogenblik dat α eene waarde bereikt heeft, waarbij de R-lijn door eene van de wortels der afgeleide gaat, zijn dus twee gesloten takken elkaar genaderd en vormen nu een doorloopenden, gesloten, zich zelf doorsnijdenden tak. Wordt α nog iets grooter dan gaat deze lijn over in een eenvoudig gesloten tak, die nu twee wortels van (1) en één wortel van de afgeleide omgeeft. Groeit α nu verder aan, dan wordt eindelijk een tweede wortel van de afgeleide bereikt, en daar gaan weer twee andere takken of ook een der andere met de reeds vroeger samengevallene in een enkelen tak over. Men heeft dus nu twee takken, die ieder twee wortels van $f(z) = 0$ en een van $f'(z) = 0$, of een tak die drie wortels van (1) en twee van hare afgeleide omgeeft.

Zoo gaat het voort, tot dat voor zeer groote waarde van α de R-lijn uit een enkelen tak bestaat, die al de wortels van (1) en al de wortels van (2) omgeeft. Het kan ook gebeuren, dat voor eene zelfde waarde van α de R-lijn door twee of meer wortels van de afgeleide gaat. Dit verandert echter aan de bovenstaande beschouwingen niets, behalve dat dan gelijktijdig kan gebeuren, wat in het algemeen op verschillende tijdstippen geschiedt. Dit zou slechts dan niet het geval zijn, als een zelfde paar takken elkander in twee verschillende punten bereikte; dit is echter niet mogelijk, daar dan een deel van het vlak volkomen zou zijn ingesloten, waarin geen wortel van de vergelijking (1) lag. Binnen zulk een afgesloten deel moet echter altijd een maximum of een minimum van R liggen, en deze functie heeft nergens een maximum, en alleen in de wortels der vergelijking een minimun. Men ziet dit gemakkelijk in, als men opmerkt, dat aan de eerste voorwaarde voor een maximum of minimum,

$$\frac{dR}{dx} = \frac{dR}{dy} = 0,$$

behalve in de wortels der vergelijking, alleen nog voldaan is in de wortels der afgeleide, maar dat in die punten een tweede noodzakelijk vereischte voor een maximum of minimum ontbreekt, namelijk dat $\frac{d^2 R}{dx^2}$ en $\frac{d^2 R}{dy^2}$ gelijke teekens hebben. *)

Ter loops zij opgemerkt, dat voor de functiën X, Y en Φ hetzelfde geldt, behalve dat deze ook geen minima hebben in de wortels der gegeven vergelijking; X en Y worden daar gelijk aan 0 en Φ onbepaald.

Uit het bovenstaande volgt nu deze eigenschap:

I. *Elke gesloten tak van eene R-lijn, die p wortels van de vergelijking* (1) *omvat, omgeeft $p-1$ wortels van hare afgeleide.*

Want gesteld, dat dit op een oogenblik het geval is — en dit is zoo voor zeer kleine waarden van α, waarbij elke tak één wortel van de vergelijking en geen enkelen wortel van de afgeleide omgeeft —, dan zal het steeds zoo blijven. Op het oogenblik namelijk, dat twee takken hun inhoud samenvoegen, nemen zij eenen wortel van de afgeleide in zich op. Bevatte nu de eerste p, en de tweede q wortels van de vergelijking (1), dan zou het aantal wortels van de afgeleide, dat zij te samen bevatten $p+q-2$ zijn, hetwelk met de nieuw opgenome vermeerderd weer $p+q-1$ geeft, zoo als behoort, zal de stelling waar blijven.

12. De stelling I kan reeds als eene uitbreiding van het

---

*) Mochten ook de tweede afgeleiden alle verdwijnen, zoo als in een dubbelen of meervoudigen wortel der afgeleide, dan is de voorwaarde voor een maximum of minimum, dat de eerste afgeleide, die niet verdwijnen, van evene orde zij en als die orde $2p$ is, dat de vergelijking in λ

$$\frac{d^{2p}R}{dy^{2p}}\lambda^{2p}+(\overset{1}{2p})\frac{d^{2p}R}{dy^{2p-1}dx}\lambda^{2p-1}+(\overset{2}{2p})\frac{d^{2p}R}{dy^{2p-2}dx^2}\lambda^{2p-2}+\text{enz.}\ldots\ldots\frac{d^{2p}R}{d^{2p}x}=0$$

geen enkelen reëlen wortel heeft. Blijkens het bovenstaande heeft deze vergelijking hier echter altijd enkel reëele wortels, zoodat van een maximum of minimum ook dan geen sprake kan zijn.

Daar R op oneindigen afstand overal $+\infty$ is, moet er ergens een minimum van R zijn. Uit het bewezene volgt, dat zulk een minimum alleen mogelijk is voor $R=0$, waarmede de hoofdeigenschap der hoogeremachtsvergelijkingen bewezen is.

theorema van ROLLE worden opgevat. Immers, zijn al de coëfficiënten der vergelijking $f(z) = 0$ reëel, dan is de figuur door de R-lijnen gevormd symmetrisch ten opzichte van de x-as. De wortels van de afgeleide kunnen alleen op de x-as of symmetrisch ten opzichte van die as liggen, met andere woorden, zij kunnen alleen reëel of geconjugeerd imaginair zijn. Beschouwen wij nu twee reëele wortels van de vergelijking (1). Aanvankelijk worden deze ieder door een gesloten kromme omgeven, die de x-as tusschen de beide wortels moet snijden. Deze twee takken zullen vroeg of laat, hetzij direct, hetzij nadat zij andere takken in zich hebben opgenomen, elkander moeten naderen, en daar dit niet in twee punten tegelijk geschieden kan, moet het punt waar dit plaats heeft, op de x-as liggen. Er kunnen ook meer wortels van de afgeleide tusschen twee wortels van (1) op de x-as gelegen zijn. Het kan namelijk gebeuren, dat de kromme, die aanvankelijk ieder één van twee geconjugeerde wortels van $f(z) = 0$ omgaven, elkaar op de x-as ontmoeten, waardoor zich een gesloten kromme tusschen de twee oorspronkelijk naast elkaar gelegen wortels in plaatst. Er moeten dan, behalve de ontmoeting, die reeds heeft plaats gehad, nog twee andere ontmoetingen voorvallen, vóór de beschouwde wortels binnen dezelfde kromme lijn liggen. Men ziet gemakkelijk, dat in elk geval het aantal tusschen gelegen wortels van de afgeleide oneven moet zijn. Zijn al de wortels reëel, dan kan zulk een tusschenschuiven van eene gesloten kromme niet plaats hebben, en kan er dus tusschen elk paar wortels van de vergelijking (1) slechts één wortel van de afgeleide liggen.

13. Met meer recht kan noch een andere eigenschap als eene uitbreiding van het theorema van ROLLE worden beschouwd. Deze eigenschap gaan wij nu afleiden, waartoe wij de Φ-lijnen nader gaan beschouwen.

Elke Φ-lijn bestaat uit n takken, die, als zij geen wortel van de afgeleide ontmoeten, elk van een wortel van de vergelijking (1) uitgaan en, zonder zichzelf of elkaar te snijden, zich tot in het oneindige uitstrekken. Alleen van de Φ-lijnen, die door een wortel van de afgeleide gaan, snijden in dat punt twee takken elkaar onder een rechten hoek. De Φ-lijnen zijn de wegen, die de punten der R-lijnen bij de uitbreiding dier lijnen doorloopen. Als nu twee punten van verschillende takken der R-lijnen samen komen te vallen, dan komen die twee punten in tegenovergestelde richting in den wortel van de afgeleide, waar dit plaats heeft, aan, en verwijderen zich in daarop loodrechte richting naar weerszijden, volgens den anderen tak der Φ-lijnen. De twee Φ-lijnen, die uit verschillende wortels van (1) in een zelfden wortel van (2) uitkomen, kunnen dus als elkaars voortzettingen beschouwd worden, terwijl de twee andere takken. die loodrecht op deze staan, ook als een doorloopenden tak kunnen worden aangemerkt, die zich naar weerskanten in het oneindige uitstrekt, tenzij een van de beide helften ergens een anderen wortel van de afgeleide mocht ontmoeten. Er is dus eene Φ-lijn, die twee wortels van $f(z) = 0$ verbindt, en waarop een wortel van de afgeleide gelegen is. Deze Φ-lijn is echter in één opzicht van de andere Φ-lijnen onderscheiden. Terwijl op de andere Φ-lijnen de waarde van R van het beginpunt af tot in het oneindige geregeld toeneemt, neemt die waarde hier toe, tot dat de wortel van (2) bereikt is, heeft in dat punt een maximum en is, in den anderen wortel van (1) weer, even als bij het begin, gelijk aan nul. Op den anderen tak daarentegen, die dezen snijdt, heeft R in datzelfde punt een minimum. Wil men ook hier langs de Φ-lijn de waarde van R van 0 tot ∞ laten toenemen, dan moet men van een der wortels van (1) uitgaande, de Φ-lijn volgen tot aan den wortel van (2), en dan volgens een der loodrechte takken verder gaan. Dit is dan ook de weg, die een punt van de R-lijn bij het toenemen van α beschrijft.

Neemt bij het verder toenemen van α de gesloten tak der R-lijn, weer een nieuwen in zich op, dan herhalen zich dezelfde verschijnselen. Is het punt van de R-lijn, waar deze den nieuwen tak ontmoet niet hetzelfde dat vroeger reeds met een ander is samengevallen, dan heeft het zich van een der binnen de kromme gelegen wortels langs een Φ-lijn naar het aanrakingspunt begeven, en deze Φ-lijn zet zich weer door dat punt heen voort tot aan een nieuwen wortel van de vergelijking (1). Het kan echter ook gebeuren, dat het wel een van de punten is, die vroeger reeds door een wortel van de afgeleide gegaan zijn, en dan is het een tak van dezelfde Φ-lijn, die nu van den vroeger gepasseerden wortel van $f'(z) = 0$ uitgaande, door een tweeden wortel van die vergelijking heen zich naar een nieuwen wortel van $f(z) = 0$ begeeft, echter niet zonder weer aan weerskanten in loodrechte richting een nieuwen tak uit te zenden, die zich in het algemeen tot in het oneindige zal uitstrekken.

Uit dit alles blijkt nu de volgende eigenschap:

II. *Er zijn* $n-1$ *Φ-lijnen, die in het algemeen telkens twee wortels van de vergelijking* $f(z) = 0$ *verbinden, zoodanig, dat al die punten samenhangen, en nergens een gesloten keten wordt gevormd. Op ieder van die Φ-lijnen ligt een wortel van* $f'(z) = 0$. *Het kan echter ook gebeuren, dat een of meer uiteinden van deze verbindende Φ-lijnen niet in een wortel van* $f(z) = 0$, *maar in een wortel van* $f'(z) = 0$ *liggen, in welk geval deze Φ-lijn loodrecht staat op die, waarop deze wortel van* $f'(z) = 0$ *gelegen is.*

14. Men kan deze eigenschap ook zoo uitdrukken:

III. *Er zijn* $2n-2$ *begrensde Φ-lijnen, die telkens een wortel van* $f(z) = 0$ *met een wortel van* $f'(z) = 0$ *of ook wel twee wortels van deze laatste vergelijking met elkaar verbinden, zoodanig, dat al de punten tot een samenhangend geheel zijn verbonden, maar nergens een gesloten keten gevormd wordt. In de wortels van* $f'(z) = 0$ *liggen er steeds twee in elkaars verlengde. Komt in zulk een punt nog een derde lijn uit, dan staat deze loodrecht op de beide anderen, en is er nog een vierde, dan vormen zij een rechthoekig kruis. Meer dan vier kunnen er bij de gemaakte onderstellingen niet in een zelfden wortel van de afgeleide samenkomen. Liggen eenige van deze* $2n-2$ *verbindingslijnen in elkaars verlengde, zoodat zij beschouwd kunnen worden als eene doorloopende lijn, dan ligt tusschen elke twee wortels van de oorspronkelijke vergelijking een oneven aantal wortels van de afgeleide.*

Om dit laatste in te zien, merke men op, dat R in de beide wortels van (1) een minimum is, er moeten dus daartusschen één maximum, of b. v. q maxima en $q-1$ minima liggen, terwijl aan elk maximum of minimum een wortel van $f'(z)=0$ beantwoordt en omgekeerd. In elken wortel van de afgeleide, waar R een minimum is, moet een kruispunt van verbindingslijnen liggen.

Zijn al de coëfficiënten van de vergelijking reêel, dan is de x-as een tak van de kromme $\Phi = 0$. Het laatste gedeelte van III gaat dus over in het theorema van Rolle. Liggen er $2q+1$ wortels van de afgeleide tusschen twee op elkaar volgende wortels van (1), dan zijn er daar q onder, waar R in de richting van de x-as een minimum is, en door elk van die q punten gaat de verbindingslijn van twee imaginaire wortels. Uit deze omstandigheid volgt dus ook onder anderen op deze wijze het bestaan van $2q$ imaginaire wortels.

15, Ook nog op de volgende wijze laat zich de bewezen eigenschap formuleeren:

IV. *Van elken wortel der vergelijking $f(z)=0$ kan een beweegbaar punt op ééne wijze een anderen willekeurigen wortel dier vergelijking bereiken, zonder de Φ-lijnen te verlaten. Het zal daarbij tusschen elke twee wortels van de vergelijking, die het passeert, minstens één wortel van de afgeleide ontmoeten.*

Het aantal van de wortels der afgeleide, waardoor het beweegbare punt tusschen twee wortels van de vergelijking zelve moet heengaan, zonder daar plotseling van richting te veranderen, is altijd oneven.

16. Tot nog toe hebben wij ondersteld, dat noch de vergelijking, noch hare afgeleide gelijke wortels hadden. Heeft echter de vergelijking twee gelijke wortels, dan blijft het bovenstaande toch doorgaan, alleen bestaat de R-kromme dan aanvankelijk uit $n-1$ takken, waarvan er één de beide samenvallende wortels omgeeft en tevens den wortel van (2), die, zooals bekend is, daarmede samenvalt. Wel gaan er van dit punt twee takken van iedere Φ-lijn uit, maar dit verandert niets aan de redeneering.

De stellingen I, II, III en IV blijven dus in dit geval waar, mits men in II en III n door $n-1$ vervangt. Ook wanneer meer paren gelijke wortels voorkomen, of drie of meer wortels samenvallen, blijft alles met eene dergelijke wijziging doorgaan.

17. Anders is het, wanneer de afgeleide vergelijking twee gelijke wortels heeft. Wel blijven ook dan de stellingen met eene geringe wijziging waar, maar de bewijzen vorderen eenige aanvulling.

Gaan wij na, wat er in een dubbelen wortel van de afgeleide gebeurt bij het samenvallen der R-lijnen. Daar er een drievoudig punt moet ontstaan, moeten drie takken van de R-lijn in dat punt samenkomen. De drie punten, die elkaar hier ontmoeten, bereiken het punt volgens richtingen, die hoeken van 120^0 met elkaar maken, en verwijderen zich volgens richtingen, die deze hoeken middendoor deelen. Een dubbele wortel van $f'(z) = 0$ is dus in den regel met drie wortels van $f(z) = 0$ verbonden. Een van de verbindingslijnen kan echter ook van een wortel van $f'(z) = 0$ zijn uitgegaan, maar dan van een zoodanigen, waar R in de richting van de beschouwende Φ-lijn een minimum is, en die dus zijdelings weer met andere wortels van $f(z) = 0$ verbonden is. Ook de directe voortzettingen van de drie samenkomende takken der Φ-lijn kunnen natuurlijk weer andere wortels van $f'(z) = 0$ ontmoeten.

Van de vier gevonden eigenschappen, waarvan de drie laatste slechts verschillende iukleedingen van eene zelfde eigenschap zijn, blijft de eerste onveranderd waar, mits slechts de twee samenvallende wortels voor twee geteld worden. Aan de tweede moet het volgende worden toegevoegd.

II^a. *Als twee wortels van* $f'(z) = 0$ *samenvallen, worden twee van de* $n-1$ Φ-*lijnen vervangen door drie in den dubbelen wortel eindigende lijnen, die dan behalve deze geen wortel van* $f'(z) = 0$ *bevatten.*

De algemeene stelling blijft doorgaan, wanneer men twee van die lijnen als eene enkele geknakte lijn beschouwt, en de derde als een tweede verbindingslijn opvat. Van de twee samenvallende wortels moet dan één beschouwd worden als op de eerste en één als op de tweede verbindingslijn gelegen te zijn. Ook kan men een van de drie takken dubbel in rekening brengen, en eens met den eenen en eens met den anderen van de beide overblijvende takken te zamen als eene doorloopende verbindingslijn opvatten, terwijl weer op ieder van deze een van de twee samenvallende wortels ligt. Tot deze laatste beschouwingswijze komt men, als men dit geval als een grensgeval van het algemeen geval beschouwt, waarbij twee wortels van (2), die met een zelfden wortel van (1) verbonden waren, samenvallen. Beschouwt men het als een grensgeval, waarbij twee met *elkaar* verbonden wortels van (2) samenvallen, dan komt men tot de eerste opvatting. Twee noch met elkaar, noch met een zelfden wortel van (1) verbonden wortels van (2) kunnen nooit door eene geleidelijke verandering der coëfficiënten tot samenvallen gebracht worden, zonder dat het systeem der verbindingslijnen eene verandering ondergaat, daar anders een gesloten keten van verbindingslijnen ontstaan zou. Er moeten dus vooraf of gelijktijdig, andere samenvallingen van wortels of Φ-lijnen plaats hebben.

De eigenschap III moet aldus worden aangevuld:

III^a. *Ieder paar samenvallende wortels van de afgeleide doet het aantal lijnen met één, ieder paar samenvallende wortels van de vergelijking zelve, doet het met twee verminderen. In een dubbelen wortel van de afgeleide liggen nu niet meer altijd twee lijnen in elkaars verlengde, maar er zijn er altijd drie, die elkaar onder hoeken van* 120^0 *ontmoeten. Er kunnen in zulk een punt hoogstens nog drie samenkomen, en deze deelen dan ieder een van de hoeken tusschen de andere middendoor.*

Het laatste gedeelte van de stelling blijft onveranderd, mits men de samenvallende wortels voor twee telt, daar in deze punten R noch maximum noch minimum is.

Van de eigenschap IV vervalt in dit geval het laatste gedeelte.

18. Het is duidelijk, wat er gebeuren zal, als drie van de wortels der afgeleide vergelijking samenvallen. Hier bereiken vier gesloten takken van de R-lijn tegelijk hetzelfde punt, en gaan voor een oogenblik in eene lijn met een viervoudig punt en daarna in een enkelen gesloten tak over. De bewezen stellingen blijven ook hier met geringe wijziging doorgaan. De drievoudige wortel van de afgeleide is dan in den regel met vier wortels van $f(z) = 0$ verbonden, door kruis-

gewijs gelegen verbindingslijnen. Een of meer van die lijnen kunnen echter ook hun ander uiteinde hebben in een wortel van de afgeleide, maar dan altijd in een zoodanigen, die zijdelings weer met andere wortels verbonden is. Behalve deze vier lijnen kunnen er nog hoogstens vier in dit punt uitkomen, die dan echter altijd hun ander uiteinde in een wortel van de afgeleide zullen hebben, en ieder een van de rechte hoeken middendoor deelen, die de eerste vier met elkaar maken. Het is na het voorgaande gemakkelijk in te zien, hoe de toestand zal worden, als nog meer dan drie wortels der afgeleide vergelijking gelijk zijn.

Als bijzonder geval verdient nog opmerking het geval, dat al de wortels van de afgeleide in een enkel punt samenvallen. De wortels van (1) liggen dan in de hoekpunten van een regelmatigen veelhoek, wiens middelpunt de $n-1$-voudige wortel van (2) is, waarmede zij alle door rechte Φ-lijnen verbonden zijn.

19. Ook eene nadere beschouwing van de X- en Y-lijnen zal ons nog enkele eigenschappen doen kennen. Daar eene X-lijn eene algebraïsche kromme van den n^{den} graad is, zal zij in het algemeen n asymptoten hebben; en deze asymptoten zullen hier alle reëel zijn. Doen wij namelijk den term met z^{n-1} uit de vergelijking verdwijnen, door eene substitutie, die zoo als wij zagen op eene verplaatsing van het coördinatenstelsel neerkomt, en stellen wij in de daardoor ontstane vergelijking:

$$f(z) = A_n\, e^{i\alpha_n}\, z^n + A_{n-2}\, e^{i\alpha_{n-2}}\, z^{n-2} + \text{enz.} \ldots + A_0\, e^{i\alpha_0} = 0$$

$$z = re^{i\varphi}\ ,$$

dan komt er:

$$X = A_n\, r^n \cos(n\varphi + \alpha_n) + A_{n-2}\, r^{n-2} \cos((n-2)\varphi + \alpha_{n-2}) + \text{enz.}$$

De kromme

$$X = \gamma$$

zal dus dezelfde asymptoten hebben als

$$r^n \cos (n\varphi + \alpha_n) = \frac{\gamma}{A_n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

die, zoo als gemakkelijk is na te gaan, n asymptoten heeft, welke elkaar in den oorsprong snijden, en de vier rechte hoeken om dat punt in $2n$ gelijke deelen verdeelen.

20. Voor groote waarden van γ bestaat de X-lijn uit n takken, die ieder twee asymptoten hebben waartusschen geen andere asymptoten in liggen. Immers is γ zeer groot, dan is de kleinste waarde die r hebben kan nog zeer groot, en wel des te grooter, naarmate γ grooter is. Voor groote waarden van r hangt, behalve als $\cos (n\varphi + \alpha_n)$ zeer klein is, het teeken van X echter uitsluitend van den eersten term af. Hieruit volgt dat, behalve in de onmiddellijke nabijheid der asymptoten de X-lijn geen punten kan hebben binnen de hoeken door de asymptoten gevormd, waarbinnen geen punten van de lijn (13) liggen.

Voor de Y-lijnen geldt dit alles ook, met dit onderscheid, dat de Y-lijnen dezelfde asymptoten hebben als kromme

$$r^n \sin (n\varphi + \alpha_n) = \frac{\delta}{A_n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Deze kromme is van (13) niet in vorm, maar alleen in grootte en in ligging ten opzichte van de assen onderscheiden. Eenen cirkel met grooten straal volgende, zal men beurtelings een tak van de X-lijn en een van de Y-lijn ontmoeten. Tusschen elke twee op elkaar volgende takken van de X-lijn, die zich tot in het oneindige uitstrekken, ligt dus één, maar ook slechts één oneindige tak van iedere Y-lijn en omgekeerd. Daar alle asymptoten reëel zijn, kan geen X- of Y-lijn een gesloten tak hebben.

21. Op een tak van eene X-lijn, die niet door een wortel van de afgeleide vergelijking gaat, kan Y nergens een maximum of minimum zijn, en dus eene bepaalde waarde maar eenmaal aannemen. Elke tak eener X-lijn kan dus door eene zelfde Y-lijn maar eenmaal gesneden worden. Het geheele aantal snijpunten van eene X- en eene Y-lijn is echter n, daar die punten de wortels zijn der vergelijking

$$f(z) = \gamma + i\delta.$$

V. *Elke tak van een X-lijn, die niet door een wortel van de afgeleide gaat, moet dus eenmaal door elke Y-lijn gesneden worden en omgekeerd* *).

Als bijzonder geval van deze eigenschap heeft men:

VI. *Als de lijn* $X = 0$ *of* $Y = 0$ *niet door een wortel van de afgeleide gaat, ligt op elken tak van ieder dier lijnen één wortel van de oorspronkelijke vergelijking.*

V^a. *Gaat eene X-lijn door een wortel van de afgeleide vergelijking, dan is de waarde van Y in dat punt een maximum of minimum, en wel een maximum volgens den eenen en een minimum volgens den anderen tak van de X-lijn, die elkaar in dat punt snijden. Op een van de takken liggen dan twee snijpunten met eene willekeurige Y-lijn en op den anderen tak geen enkelen.*

VI^a. *Gaat een van de lijnen* $X = 0$ *of* $Y = 0$ *door eenen wortel der afgeleide, dan bevat een van de takken, die elkaar in dat punt snijden twee en de andere geen wortel van de vergelijking. De twee wortels liggen ter weerszijde van het snijpunt.*

Evenzoo vindt men:

VI^b. *Als een tak van de lijn* $X = 0$ *of* $Y = 0$ *door* p *wortels van de afgeleide gaat, liggen er op dien tak* $p + 1$ *wortels van de vergelijking of een even aantal minder. Zijn er* $p + 1$, *dan ligt tusschen elk paar een wortel van de afgeleide. Zijn er minder, dan liggen de ontbrekende twee aan twee op de takken, die den beschouwden tak in de wortels der afgeleide snijden.*

Gaat de lijn $X = 0$ *of* $Y = 0$ *door een dubbelen wortel van de afgeleide, dan ligt weer op elken tak een wortel van de vergelijking zelve. Gaat zij door een drievoudigen wortel,*

---

*) Merkt men op, dat de waarde van Y langs elken tak van eene X-lijn van $-\infty$ tot $+\infty$ moet toenemen, dan ziet men, dat deze stelling ook onafhankelijk van de hoofdeigenschap der Hoogere-machtsvergelijkingen kan worden bewezen, en dan volgt er onmiddellijk uit, dat elke n^{de} machtsvergelijking n wortels heeft.

dan bevatten twee van de vier takken ieder twee wortels en de beide andere niet, en zoo vervolgens.

22. Bij een vergelijking met reëele coëfficiënten is de X-as altijd een tak van de lijn $Y = 0$. Als de vergelijking dus meer dan een reëelen wortel heeft, moet de x-as door een of meer wortels van de afgeleide gaan, en wel zoo, dat er tusschen elke twee reëele wortels van de vergelijking minstens één reëele wortel van de afgeleide ligt. Zijn al de wortels reëel, dan moeten $n-1$ takken van de lijn $Y = 0$ de x-as rechthoekig snijden, en, daar zij elkander niet snijden kunnen, het vlak in n strooken verdeelen. Van deze strooken bevat ieder een tak van de lijn $X = 0$, daar deze nergens de andere takken der lijn $Y = 0$ kunnen snijden. Deze X-lijn verdeelt dus ook het vlak in $n + 1$ strooken, die, behalve de twee buitenste, ieder slechts aan eene zijde begrensde, elk een wortel van de afgeleide bevatten.

23. Dit laatste is ook weer een bijzonder geval van eene algemeenere eigenschap, welke wij nu gaan bewijzen. Zij luidt als volgt:

VII. *Elk X- of Y-lijn, die niet door een wortel van de afgeleide gaat, en dus uit n gescheiden takken bestaat, verdeelt het vlak in n + 1 deelen, en in ieder van die deelen bedraagt het aantal wortels van de afgeleide één minder dan het aantal takken, dat tot de begrenzing van dat deel medewerkt.*

Het is in de eerste plaats duidelijk, dat deze eigenschap geldt voor zeer groote positieve of negatieve waarden van γ of δ. Immers, deze waarden kunnen steeds zoo groot genomen worden, dat de n takken, waaruit dan de X- of Y-lijn bestaat, ieder een deel van het vlak afsnijden, dat geen wortel van de afgeleide bevat. Deze n deelen worden ieder door één tak begrensd, en het overblijvende deel dat al de $n-1$ wortels der afgeleide bevat, wordt begrensd door al de takken. Er blijft nu nog aan te toonen, dat als de regel voor eene of andere waarde van γ of δ geldt, zij voor alle waarden zal blijven gelden. Gaan wij daartoe na, wat er gebeurt, als bij het toenemen van γ of δ de X- of Y-lijn een wortel van de afgeleide overschrijdt. Het is duidelijk, dat alleen bij zulk eene gelegenheid de verdeeling der wortels over de verschillende deelen van het vlak veranderen kan. De twee punten van de twee takken der X- of Y-lijn, die elkaar naderen, komen in tegenovergestelde richtingen langs een van de takken eener Y- of X-lijn aan, en verwijderen zich daarna in twee tegenovergestelde richtingen loodrecht op die, waarin zij gekomen zijn. De twee helften van de verschillende takken, die aan dezelfde zijde van de beschreven Y- of X-lijn lagen, vereenigen zich tot een nieuwen tak en evenzoo de beide andere helften. Hierdoor worden twee deelen van het vlak, die vroeger gescheiden waren, vereenigd, terwijl hun gezamenlijk aantal begrenzingslijnen niet veranderd is. Het aantal wortels, dat zij bevatten, is met één vermeerderd, zoo als behoort, zal de eigenschap waar blijven. Aan den anderen kant wordt het deel van het vlak, dat vroeger den nu gepasseerden wortel bevatte, in twee deelen verdeeld. De vraag is nu of de wortels, die dit deel bovendien nog mocht bevatten, in overeenstemming met de gestelde eigenschap over de beide stukken worden verdeeld. Wat het gezamenlijk aantal betreft is aan de eigenschap voldaan; had dus de verdeeling over de beide helften niet volgens de eigenschap plaats, dan zou een van die deelen te veel wortels bevatten, en hoe dikwijls het ook weer in tweeën gesplitst mocht worden, steeds zou er een deel overblijven, dat meer wortels bevatte dan er in behoorden te liggen. Toch zal ten slotte voor zeer groote positieve waarden van γ of δ evenals bij het begin voor groote negatieve waarden van de parameters de verdeeling weer die worden, welke de stelling aangeeft. Men zou nog kunnen meenen, dat zulk een deel met te veel wortels, vóórdat de eindtoestand intreedt, zich weer met een ander deel, dat te weinig wortels bevatte, zou kunnen vereenigen, maar dit is niet mogelijk, daar de verdere verandering van zulk een deel steeds in eene inkrimping moet bestaan. Het oorspronkelijk centrale deel wordt telkens en telkens weer in deelen gesplitst, totdat er op het laatst niets dan n ieder door één tak begrensde stukken van overblijven, terwijl juist de deelen, die oorspronkelijk ieder slechts ééne begrenzingslijn hadden, zich achtereenvolgens met elkaar vereenigen en een nieuw centraal deel vormen

Hiermede is de stelling bewezen, voor zoo ver er geen dubbele of veelvoudige wortels van $f(z) = 0$ voorkomen. Is dat wel het geval, dan blijft het bewijs met eene geringe verandering toch doorgaan. In een dubbelen wortel worden namelijk drie deelen van het vlak tot één vereenigd, en nemen den dubbelen wortel in zich op, terwijl een ander deel den dubbelen wortel verliest en bij die gelegenheid in drie deelen verdeeld wordt. In een drievoudigen wortel worden vier deelen tot een vereenigd, terwijl een ander deel in vier deelen wordt verdeeld en zoo vervolgens *).

Bij sommige vergelijkingen zijn er waarden voor γ of δ te vinden, waarbij de deelen van het vlak ieder door twee takken begrensde strooken zijn met uitzondering van de beide uiterste. Dit is onder anderen het geval bij alle tweede en derde-machtsvergelijkingen, en zoo als wij zagen, bij vergelijkingen met n reëele wortels, echter op voorwaarde, dat de afgeleide vergelijking geen gelijke wortels hebbe, wat bij derde-machtsvergelijkingen zou kunnen voorkomen.

24. Stellen wij ons eene vergelijking voor met wortels, die alle reëel of aan de positieve zijde van de x-as †) gelegen zijn. De waarde van R is het product van de modulen van de verschillende wortelfactoren $z - a$, waarin a een wortel voorstelt. Voor alle reëele wortels is die modulus in twee ten opzichte van de x-as symmetrisch gelegen punten gelijk, en voor de andere is hij kleiner in punten aan de positieve, dan in de overeenkomstige punten aan de negatieve

---

*) De hier bewezen eigenschappen voor de X- en Y-lijnen gelden ook en worden op dezelfde wijze bewezen voor de lijnen:

$$f X + g Y = \varepsilon.$$

waarin f, g en ε reëele constanten voorstellen. Deze lijnen kunnen trouwens tot X- of Y-lijnen gemaakt worden door de vergelijking met eene complexe constant te vermenigvuldigen.

Tot deze lijnen behooren al de Φ lijnen wanneer men twee Φ lijnen, waarvoor β een verschil van $^1/_2\ \pi$ heeft als eene enkele lijn beschouwt.

†) Dat is aan die zijde waar de waarden van y positief zijn.

zijde van die as. Dit geldt dus ook voor de waarden van R zelve. De gesloten R-lijnen, voor zoo ver zij de reëele wortels omgeven, strekken zich dus verder aan den positieven, dan aan den negatieven kant uit; de helften aan den positieven kant zullen de spiegelbeelden van de aan de negatieve zijde gelegen deelen insluiten. Hieruit volgt, dat de punten, waar de gesloten R-lijnen zich vereenigen, dat zijn de wortels van de afgeleide vergelijking, alle aan den positieven kant van de x-as moeten liggen. Daar nu elke rechte lijn tot x-as kan worden gemaakt, heeft men de stelling:

VIII. *Elke rechte lijn, die door een wortel van de afgeleide gaat, moet alle wortels van de vergelijking bevatten, of er moeten aan weerszijden van die lijn wortels gelegen zijn.*.

Hieruit volgt nog:

IX. *Worden al de wortels van de vergelijking door rechte lijnen verbonden, dan liggen al de wortels van de afgeleide binnen den veelhoek, die daardoor gevormd wordt.*

25. Het n^{de} gedeelte van de som der wortels is gelijk aan het $n-1^{ste}$ gedeelte van de som der wortels van de afgeleide.

Men heeft dus:

X. *De wortels van de vergelijking en die van de afgeleide, als massieve punten met gelijke massa beschouwd, hebben hetzelfde zwaartepunt. Hetzelfde geldt ook voor de wortels der verdere afgeleiden. Dit punt is derhalve de eenige wortel van de* $n-1^{ste}$ *afgeleide.* *)

26. Beschouwen wij thans in verband met het voorgaande eene willekeurige derde-machtsvergelijking. Wij willen door eene substitutie, als in N^0. 10 genoemd werd, de x-as door het zwaartepunt van de wortels en tevens door de beide wortels van de afgeleide laten gaan en het eerste punt tot oorsprong nemen. De vergelijking neemt dan den vorm aan:

$$z^3 - 3a^2 z + B = 0 ,$$

waarin a eene reëele en B eene willekeurige, in het alge-

*) Het is ook het snijpunt van de asymptoten der X- en Y-lijnen.

meen complexe constante voorstelt. Zij $B = b + ic$, dan is de vergelijking der Φ-lijnen:

$$\frac{3x^2 y - y^3 - 3a^2 y + c}{x^3 - 3xy^2 - 3a^2 x + b} = \text{constant.}$$

Om de constante zoodanig te bepalen, dat de Φ-lijn door een van de wortels der afgeleide gaat, berekenen wij de waarde van het eerste lid voor $x = \pm a, y = 0$. Wij vinden dan:

$$\frac{3\,x^2 y - y^3 - 3\,a^2 y + c}{x^3 - 3\,xy^2 - 3\,a^2 x + b} = \frac{c}{\pm 2\,a^3 + b} .$$

Wij zien dus, dat de Φ-lijnen, die door de beide wortels der afgeleide gaan, in het algemeen verschillend zijn. Bij eene derde-machtsvergelijking zullen dus in het algemeen twee van de wortels door eene Φ-lijn met den derden verbonden zijn, en elk van deze verbindingslijnen zal door een wortel van de afgeleide gaan. Hierop maken twee gevallen uitzonderingen. Het eerste is $a = 0$. In dat geval zijn de beide wortels der afgeleide gelijk, en de drie wortels van de vergelijking zelve liggen in de hoekpunten van een gelijkzijdigen driehoek. De Φ-lijn, die door al de drie wortels van de vergelijking en door de samenvallende wortels van de afgeleide gaat, bestaat uit drie rechte lijnen, die elkaar in het laatstgenoemde punt onder hoeken van 60^0 snijden.

Het tweede geval van uitzondering is $c = 0$. De vergelijking der Φ-lijn is dan:

$$3\,x^2 y - y^3 - 3\,a^2 y = 0 .$$

De lijn bestaat dus uit de x-as en de hyperbool

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{3\,a^2} = 1 .$$

Deze lijnen snijden elkaar zooals het behoort, in de punten $+a$ en $-a$. De coëfficiënten der vergelijking zijn nu alle reëel.

De wortels kunnen alle reëel zijn en dus op de x-as liggen; één ligt er dan tusschen, en één binnen ieder van de takken der hyperbool. Of een van de wortels is reëel, en de beide andere zijn geconjugeerd. De eerste ligt nu op de x-as, de beide andere op een van de takken der hyperbool. Hier hebben wij dus het geval, dat twee van de wortels door eene Φ-lijn zijn verbonden, en de wortel van de afgeleide, die op deze verbindingslijn gelegen is, door een anderen wortel van de afgeleide heen met een derden wortel der vergelijking. Zal dus dit geval zich voordoen, dan moeten de drie wortels van de vergelijking in de hoekpunten van een gelijkbeenigen driehoek liggen Deze driehoek moet echter nog aan een bepaalde voorwaarde voldoen. Immers zijn x_1 de reëele $x_2 \pm i\, y_2$ de imaginaire wortels der vergelijking, en noemen wij de punten, die deze wortels voorstellen P Q en R, dan is $QR^2 = 4\, y_2{}^2$, $PR^2 = PQ^2 = y_2{}^2 + (x_1 - x_2)^2$, of, daar $x_1 = -2\, x_2$ is, $PQ^2 = y_2{}^2 + 9\, x_2{}^2$. Het punt $x_2\, y_2$ ligt echter op de hyperbool 15), zoodat

$$PQ^2 = 12\, x_2{}^2 - 3\, a^2,$$

$$QR^2 = 12\, x_2{}^2 - 12\, a^2.$$

De laatste waarde is derhalve altijd kleiner dan de eerste, de basis van den gelijkbeenigen driehoek is kleiner dan een van de opstaande zijden. Deze voorwaarde is echter ook voldoende, want de verhouding $\dfrac{12\, x_2{}^2 - 3\, a^2}{12\, x_2{}^2 - 12\, a^2}$ kan alle waarden tusschen 1 en ∞ aannemen, daar $x_2{}^2$ van a^2 tot ∞ varieeren kan voor verschillende waarden van b.

Een gelijkbeenige driehoek, waarvan de opstaande zijden kleiner zijn dan de basis, zou bij den hier aangenomen stand der coördinaten zoo komen te liggen, dat de basis evenwijdig met de x-as liep; b zou in dat geval gelijk aan nul zijn. De twee Φ-lijnen, die dan ieder door een wortel der afgeleide gaan, liggen in dat geval symmetrisch ten opzichte van de y-as. Zij verbinden ieder een van de uiteinden van de basis met den top van den driehoek. Het zijn beide lijnen van den derden graad.

Stellen wij ons nu het algemeene geval voor, dat de driehoek, door de wortels van de vergelijking gevormd, ongelijkzijdig is. Veranderen wij dan a, b en c geleidelijk, zoodat de kleinste zijde langzamerhand gelijk aan de middelste wordt, terwijl de beide andere dezelfde lengte behouden. Tijdens die verandering heeft er geen samenvallen plaats van wortels der vergelijking, of van hare afgeleide of van Φ-lijnen, er kan derhalve geen verandering hebben plaats gehad in de wijze, waarop de wortels door Φ-lijnen zijn verbonden. Hieruit volgt, dat in het algemeene geval die wortel van de vergelijking, waar de kleinste en de middelste zijde van den driehoek elkaar ontmoeten met de beide andere door Φ-lijnen verbonden is, terwijl er geen zoodanige verbinding tusschen de beide andere wortels onderling plaats heeft.

27. Bijna alles, wat in het voorgaande bewezen is, kan op kortere wijze worden aangetoond door beschouwingen in verband met RIEMANS theorie. Stellen wij daartoe

$$f(z) = X + i\,Y\,Re^{i\Phi} = w$$

en beelden wij niet alleen de waarden van z, maar ook die van w in een tweede vlak het w-vlak op dezelfde wijze af, dan zijn de figuren in het w-vlak in de kleinste deelen gelijkvormige afbeeldingen van die in het z-vlak. Het z-vlak is een eenvoudig vlak, het w-vlak een RIEMAN'sche vlakte uit n bladen bestaande.

Noemen wij de wortels van

$$f(z) = 0$$

in het z-vlak a_1 a_2 enz. .. a_n, die van de afgeleide in hetzelfde vlak b_1, b_2, b_3 enz. .. b_{n-1}, de punten welke met a_1 a_2 enz. .. a_n overeenkomen in het w-vlak o_1 o_2 enz. .. o_n en de overeenkomende met b_1, b_2 enz. .. b_{n-1} c_1 c_2. .. c_{n-1}, dan liggen de punten o_1 enz. alle boven elkaar in den oorsprong. De vertakkingspunten, waar de bladen van het w-vlak samenhangen, zijn de punten waar twee waarden van z voor eene zelfde waarde van w gelijk worden, dat zijn dus de punten c. Daar er slechts $n-1$ van die punten zijn, juist genoeg om de n bladen van het w-vlak tot een geheel te vereenigen is dit vlak eenmaal samenhangend, en kunnen dus dezelfde twee bladen niet in meer dan één punt met elkaar verbonden zijn. De vertakkingsdoorsneden kunnen derhalve alleen van de punten c uit tot in het oneindige worden aangebracht.

De afbeeldingen van de X-, Y-, Φ- en R-lijnen op het w-vlak zijn respectievelijk rechte lijnen evenwijdig aan de Y-as, rechte lijnen evenwijdig aan de X-as. rechte lijnen van den oorsprong straalsgewijs uitgaande en cirkels, die den oorsprong tot middelpunt hebben.

28. Beschouwen wij een cirkel $R =$ constant in het w-vlak, die p punten c omgeeft. Deze lijn bestaat eigenlijk uit n cirkels ieder in een van de bladen gelegen. Deze cirkels ontmoeten p vertakkingsdoorsneden, zoodat zij op p wijzen samenhangen en dus eigenlijk uit $n-p$ van elkaar afgezonderde gesloten kromme lijnen bestaan, die zich op het z vlak in even zooveel gesloten takken afbeelden. Beschouwen wij in het bijzonder een van deze gesloten lijnen die q vertakkingsdoorsneden ontmoet en dus in $q+1$ bladen gelegen is. Het stuk, door deze gesloten lijn van het w-vlak afgesneden, bevat q verbindingspunten c en $q+1$ punten o. De afbeelding er van op het z-vlak bevat dus q punten b en $q+1$ punten a, waarmede de stelling I bewezen is.

29. Iets dergelijks heeft bij de X-lijnen plaats, die niet door een punt b gaan. De daarmede overeenkomende lijnen in het w-vlak bestaan uit n rechte lijnen boven elkaar ieder in een van de bladen gelegen, of, als zij een vertakkingsdoorsnede ontmoeten, daar twee aan twee van blad verwisselen. Deze rechte lijnen verdeelen altijd het w-vlak in $n+1$ volkomen gescheiden deelen. Bevat zulk een deel q vertakkingspunten c, dan zijn er $q+1$ van die lijnen noodig om het geheel van de andere deelen af te scheiden. Gaan wij nu weer tot de afbeelding op het z-vlak over, dan blijkt onmiddellijk, dat elke X-lijn dat vlak in $n+1$ deelen verdeelt, en dat, als tot de begrenzing van zulk een

deel $q + 1$ takken van de X-lijn medewerken, dat deel q punten b, dus q wortels van de afgeleide bevat. Volgens dezelfde redeneering geldt hetzelfde voor de Y-lijnen of ook voor de lijnen

$$a\,X + b\,Y = \text{const.},$$

of nog algemeener voor alle lijnen, die op het w-vlak, als enkelvoudig vlak beschouwd zich afbeelden als één aan beide zijden tot in het oneindige loopenden tak, die niet door een punt c gaat b. v. voor de lijn

$$a\,X + b\,Y = F(a'\,X + b'\,Y), \quad \ldots\ldots \quad (15)$$

als $F(\nu)$ eene eenwaardige functie van ν voorstelt.

30. Dit alles blijft doorgaan als eenige van de punten b samenvallen. Stel b. v. dat dit met p van die punten het geval is, dan heeft het w-vlak in het overeenkomstige punt een vertakkingspunt waar $p + 1$ bladen samenhangen. Neemt men dit in aanmerking dan blijven bovenstaande redeneeringen onveranderd doorgaan.

Vallen twee of meer punten a samen dan ligt in het w-vlak de oorsprong in een van de punten c, maar ook dit heeft geen invloed op bovenstaande redeneering.

31. Eene X-, Y-, Φ- of R-lijn of in het algemeen eene lijn (15) waarvan de afbeelding door een punt c gaat, in al de bladen van het w-vlak gelegen is, en in c geen singulariteit vertoont, heeft in het overeenkomstige punt b twee takken, die elkaar loodrecht snijden. Een doorloopende tak op het z-vlak beantwoordt daarbij aan de twee takken, die door het vertakkingspunt heen met elkaar samenhangen, en verder elkaar bedekken. De andere doorloopende tak beantwoordt aan de beide andere elkaar bedekkende takken.

Gaat eene dergelijke lijn op het w-vlak door een dubbel vertakkingspunt, dat is door een punt waar drie bladen samenhangen, en dat beantwoordt aan een dubbelen wortel van de afgeleide vergelijking, dan zijn er zes takken te onderscheiden. Noemen wij 1 en 2 de takken in het bovenste blad, 3 en 4 die in het tweede en 5 en 6 die in het derde, zoodat de oneven genummerde elkaar bedekken en evenzoo de even genummerde, dan vormen de afbeeldingen dezer takken in het z-vlak een rozet, waarvan de takken in de orde 1, 2, 3, 4, 5, 6 op elkaar volgen en gelijke hoeken met elkaar maken. Iets dergelijks geldt voor het geval dat drie of meer wortels van de afgeleide samenvallen. Hiermede is uitgemaakt welken vorm de X-, Y-, R- en Φ-lijnen in de punten b vertoonen.

32. Beschouwen wij in het w-vlak een rechte lijn $\Phi =$ constant, die door een der punten c, b. v. c_1 gaat en nemen wij aan, dat dit punt de bladen verbindt waarin o_1 en o_2 gelegen zijn. Onderstellen wij voorloopig, dat deze lijn geen ander punt c in een van de bladen gelegen ontmoet.

Volgen wij deze lijn van o_1 naar c_1 en vandaar naar o_2, dan beschrijft het overeenkomstige punt in het z-vlak een doorloopende Φ-lijn van a_1 door b_1 naar a_2. Zulke verbindingslijnen zijn er n — 1, daar er n — 1 punten c voorkomen, dus juist genoeg om al de punten a met elkaar te verbinden, zonder dat er een gesloten keten ontstaat.

Eenigszins anders wordt het als twee punten c, b. v. c_1 en c_2, die te zamen drie bladen verbinden, met den oorsprong in eene rechte lijn liggen. Laat c_1 de bladen waarin o_1 en o_2 liggen, en die wij van nu af aan blad 1 en blad 2 zullen noemen, en c_2 de bladen 2 en 3 verbinden, en zij c_2 verder dan c_1 van den oorsprong verwijderd. Men kan nu langs de lijn $\Phi =$ const. van o_1 naar c_1 komen en van daar verschillende wegen inslaan. In de eerste plaats kan men naar o_2 gaan waardoor weer in het z-vlak eene doorloopende Φ-lijn beschreven wordt die a_1 over b_1 met a_2 verbindt. Maar men kan ook van c_1 uit naar c_2 en van daar naar o_3 gaan. In dat geval volgt het overeenkomstige punt op het z-vlak van b_1 uit de tak der Φ-lijn, die loodrecht op den eerst beschreven tak staat, en gaat over b_2 naar a_3. Het is niet moeielijk na te gaan, hoe het is als meer dan twee punten c, die zonder behulp van andere verbindingspunten eenige bladen met elkaar verbinden op eene rechte lijn gelegen zijn die door den oorsprong gaat.

33. Is er een punt c, b. v. c_1, dat aan een dubbelen wortel van de afgeleide beantwoordt en dus drie bladen, b. v.

1, 2 en 3 met elkaar verbindt, dan kan men van o_1 over c_1 naar o_2 of ook naar o_3 komen. De Φ-lijn en in het z-vlak met deze wegen overeenkomende, maken in b_1 hoeken van 120^0 met elkaar. Ligt er op dezelfde rechte lijn in een van de drie bladen nog een tweede punt c b. v. c_2 verder dan c_1 van den oorsprong verwijderd, dan kan men van c_1 naar c_2 gaan waardoor op het z-vlak een Φ-lijn ontstaat, die een van de drie hoeken van 120^0 midden door deelt. Het is overbodig andere gevallen nader uit te werken. Men ziet, dat de stellingen II, III en IV uit deze beschouwingen volgen.

Evenmin kan het noodzakelijk worden geacht, na al het voorgaande te doen zien, hoe, met uitzondering van de stellingen VIII, IX en X, al het vroeger bewezene kan worden aangetoond, door de afbeeldingen op het z-vlak en op het w-vlak met elkaar in verband te beschouwen.

NASCHRIFT.

De aanleiding tot bovenstaand onderzoek was eene mondelinge mededeeling van den Heer Legebeke, omtrent eenige onderzoekingen, door hem zelven en door de HH. van den Berg en Stieltjes over dit onderwerp ten uitvoer gebracht. Deze mededeelingen bevatten het volgende:

De stelling, in het voorgaande met IX gemerkt, was door den Heer Legebeke vroeger op verschillende wijzen bewezen en werd nu door hem medegedeeld, met het mechanisch bewijs, door den Heer van den Berg gegegeven in deel IX van het *Nieuw Archief voor Wiskunde* 1882. Ook het bewijs voor het theorema van Rolle, door de Heer van den berg uit diezelfde beschouwingen afgeleid, werd medegedeeld.

Verder werd door den Heer Legebeke beschreven den vorm, dien de R- en Φ-lijnen in de wortels der afgeleide aannemen, en de wijze, waarop zich de R-lijnen bij het toenemen van de waarde van R gedragen, als door den Heer Stieltjes gegeven in de *Archives Néerlandaises.* Eindelijk werd door hem medegedeeld, dat hij getracht had de Φ-lijnen door twee wortels van de vergelijking te brengen, terwijl hij inzag, dat, ware dit mogelijk, op elk van die Φ-lijnen een wortel van de afgeleide zou moeten liggen.

Ik heb later de aangehaalde verhandelingen geraadpleegd, en daarin, behalve het door den Heer LEGEBEKE medegedeelde, het volgende teruggevonden.

Door den Heer STIELTJES (Quelques considérations sur la fonction rationnelle entière d'une variable complexe, *Archives Néerlandaises*, T. XVIII) wordt uitvoerig het verloop van de waarde van R in het vlak der z nagegaan, en in de eerste plaats gewezen op eene dwaling, die o. a. voorkomt *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, T. LXXXI, als zou in de wortels van de afgeleide vergelijking R een maximum zijn.

In de verhandeling van den Heer VAN DEN BERG vind ik mijne stelling X terug, en komt nog eene dergelijke stelling voor, namelijk dat de hoofdassen van inertie voor beide stelsels van punten ook samenvallen. Nog andere eigenschappen van mechanischen aard worden er in aangetroffen, maar zij staan met het onderwerp in een meer verwijderd verband.

Behalve dat bevat deze verhandeling eene beschouwing van de algemeene derde-machtvergelijking, die natuurlijk eenige punten van overeenkomst met de mijne vertoont, maar veel uitvoeriger is, en enkele belangrijke eigenschappen bevat. De belangrijkste is wel die, waardoor de ligging van de twee wortels der afgeleide ten opzichte van de drie wortels der vergelijking geheel bepaald is. Er wordt namelijk aangetoond, dat die twee punten de brandpunten zijn van de grootste ellips, die in den driehoek beschreven kan worden.

Het bewijs voor stelling IX van den Heer LEGEBEKE komt voor in *Nieuw Archief voor Wiskunde*, deel VIII, en eenigzins anders in *Archives Néerlandaises*, T. XVI, pag. 273—278.

Andere literatuur omtrent dit onderwerp is mij niet bekend.

Leiden, Nov. 1883.

VERSLAG

OVER DE DOOR

Dr. P. H. SCHOUTE:

AANGEBODEN VERHANDELING:

OVER EENE BIJZONDERE KROMME VAN DEN VIERDEN GRAAD MET DRIE DUBBELPUNTEN.

(Uitgebracht in de Vergadering van 26 Januari 1884).

De Commissie, benoemd in uwe Vergadering van 29 December l.l., ten einde rapport uit te brengen omtrent de aangebodene Verhandeling van den Heer Dr. P. H. Schoute: »Over eene bijzondere kromme van den vierden graad met drie dubbelpunten", heeft de eer het volgende mede te deelen.

De schrijver vangt zijn onderzoek aan met de synthetische behandeling van enkele eigenschappen der gelijkzijdige hyperbool, meer bepaaldelijk van de constructie der raaklijn aan eenig willekeurig punt dier kromme. Met behulp der stelling, dat drie kegelsneden, die twee punten gemeen hebben, elkander twee aan twee nog in drie paren punten snijden, waarvan de verbindingslijnen door één punt gaan, bewijst hij de eigenschappen, die zich voordoen, wanneer door een zelfde punt P eener kegelsnede met een middelpunt, op nader bepaalde wijze, vier kegelsneden worden aangebracht, die de eerste bovendien in een ander punt raken.

De dan gevondene eigenschappen brengen schrijver tot de stelling, dat de ontwondene van eene kegelsnede met een middelpunt eene kromme is van den zesden graad en de vierde klasse, die de eigenschap heeft, dat de raaklijnen aan de kromme in de vier punten, waarin zij door eene harer raaklijnen gesneden wordt, door één punt gaan.

Deze eigenschap der ontwondene eener kegelsnede met een middelpunt staat in nauw verband met eene dualistisch tegenovergestelde eigenschap der lemniscaat, die Prof. Dr. Emil Weyr te Weenen in 1873 langs analytischen weg gevonden heeft.

Ten einde zulks te betoogen volgt eene vrij samengestelde beschouwing, waaruit blijkt, dat ten gevolge der verplaatsing van het bovengenoemde punt P langs de oorspronkelijke kegelsnede de door de vier punten van aanraking der aangebrachte kegelsneden gaande gelijkzijdige hyperbool eene kromme van den vierden graad met drie dubbelpunten omhult. Deze kromme wordt in figuur voorgesteld, zoowel voor het geval dat de oorspronkelijke kegelsnede eene ellips als dat deze eene hyperbool is.

Met behulp eener daarna ontwikkelde eigenschap, die zich voordoet, wanneer door eenig punt eener geheel willekeurige kegelsnede vier kegelsneden op bepaalde wijze worden gebracht, komt de schrijver verder tot de volgende, merkwaardige, dubbele stelling:

1⁰. Elke kromme C^4 (van den vierden graad) met drie dubbelpunten laat uit ieder harer punten P vier de kromme elders rakende lijnen toe. Heeft in ieder dier dubbelpunten elk der beide door dit dubbelpunt gaande takken een buigpunt, dan liggen de raakpunten der vier raaklijnen door P in eene rechte lijn l. En die lijn l omhult bij de verplaatsing van P langs C^4 eene kegelsnede: de kegelsnede, die de zes buigraaklijnen aanraakt.

En dualistisch tegenovergesteld:

2⁰. Elke kromme K^4 (van de vierde klasse) met drie dubbelraaklijnen wordt door elk harer raaklijnen l buiten het raakpunt om in vier punten gesneden. Zijn de beide raakpunten op elk der dubbelraaklijnen keerpunten van K^4, dan gaan de raaklijnen in de vier snijpunten van l met K^4 door één punt P en wanneer l zich, K^4 omhullende, verplaatst, doorloopt P eene kegelsnede: de kegelsnede, die door de zes keerpunten gaat.

Voor het bijzonder geval der lemniscaat is de eerste stelling analytisch afgeleid door Dr. Emil Weyr. Voor de tweede stelling mogen de ontwondenen van ellips en hyperbool tot voorbeeld strekken. *

Een paar opmerkingen, naar aanleiding van enkele eenvoudige eigenschappen der kromme C^4, besluiten de Verhandeling.

De aangebodene arbeid bevat in uiterst gedrongen vorm verscheidene tot nu toe onbekende waarheden en getuigt van eene zeer uitgebreide en grondige kennis op het gebied der nieuwere meetkunde.

Ondergeteekenden meenen tot de opneming der verhandeling in de werken der Akademie te mogen adviseeren.

Amsterdam, 26 Januari 1884.

C. H. C. GRINWIS.
D. J. KORTEWEG.

OVER EEN BIJZONDERE KROMME

VAN DEN

VIERDEN GRAAD MET DRIE DUBBELPUNTEN

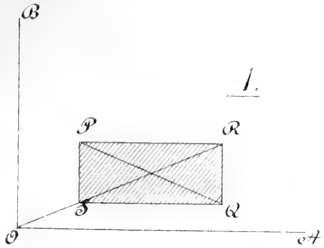
DOOR

P. H. SCHOUTE.

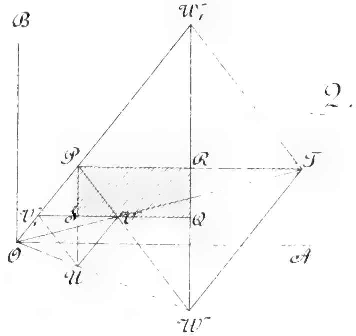
1. »Zijn OA en OB (fig. 1) de asymptoten eener gelijkzijdige hyperbool en P en Q twee punten dezer kromme en construeert men een rechthoek, waarvan PQ een diagonaal is en de zijden met OA en OB evenwijdig loopen, dan gaat de tweede diagonaal RS door O. En omgekeerd, wanneer de punten P en Q met betrekking tot de loodrecht op elkaar staande lijnen OA en OB zoo gelegen zijn, dat de tweede diagonaal RS van den rechthoek PQ, waarvan de zijden met OA en OB evenwijdig loopen, door O gaat, dan liggen P en Q op een gelijkzijdige hyperbool, die OA en OB tot asymptoten heeft.''

Deze stelling, die bij vervanging van rechthoek door parallelogram ook van ongelijkzijdige hyperbolen geldt, is overbekend. Zij wordt o. a. meetkundig bewezen met behulp van de stelling van Pascal, toegepast op den ingeschreven zeshoek $AAPBBQ$, waarbij onder A en B de punten der hyperbool in het oneindige worden verstaan.

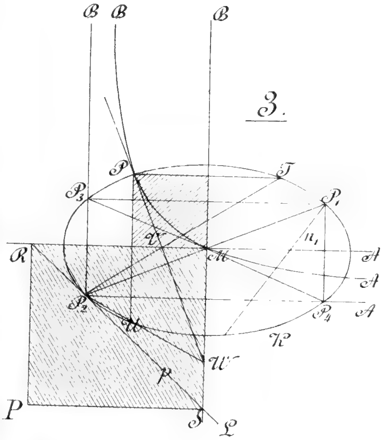
Ter bekorting stel ik de hyperbool, die OA en OB tot asymptoten heeft en door de punten $P, Q \ldots$ gaat, door het teeken $H\ (OA,\ OB;\ P, Q \ldots)$ voor. Verder mag de rechthoek, waarvan de koorde PQ van de gelijkzijdige hyperbool $H\ (OA,\ OB;\ P, Q)$ een diagonaal is en de zijden met


B
P
R
S
Q
O
A

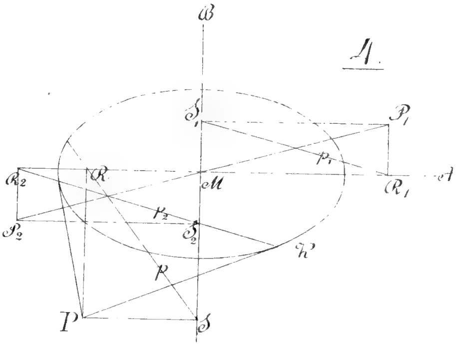
1.


B
W₁
P
R
T
V₁
S
Q
O
A
U
W

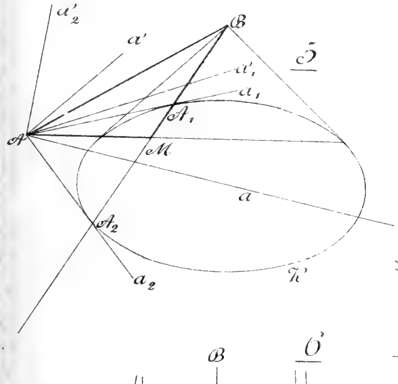
2.


B
B
B
P
T
P₃
P₁
R
M
A
A
A
P₂
P₄
U
K
W
P
P
S
L

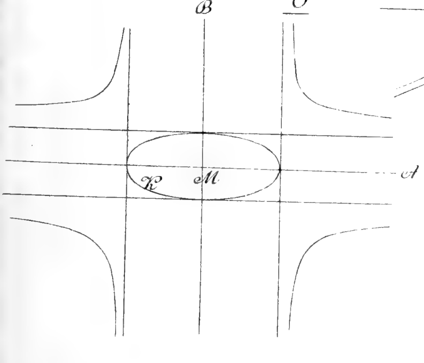
3.


B
S₁
P₁
R₂
R
M
R₁
A
P₂
S₂
K
P
P
S

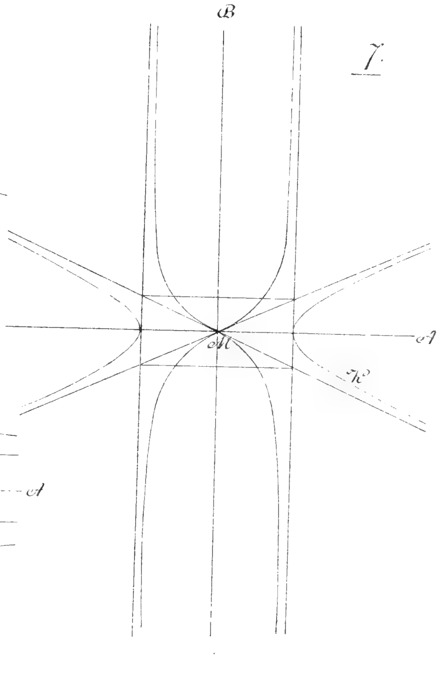
4.


a'₂
a'
B
a'₁
a₁
A₁
A
M
a
A₂
a₂
K

5.


B
K
M
A

6.


B
M
A
K

7.

de asymptoten OA en OB van deze kromme evenwijdig loopen, als de »asymptotenrechthoek" PQ van de hyperbool worden aangeduid. En eindelijk zal ik lijnen als de diagonalen PQ en RS van dien asymptotenrechthoek, die zonder evenwijdig te zijn met elk der asymptoten gelijke hoeken maken, antiparallele lijnen noemen.

2. »De raaklijn in het punt P aan de gelijkzijdige hyperbool H (OA, OB; P) is de lijn door P antiparallel aan OP getrokken."

Laat men in fig. 1 het punt Q langs de hyperbool tot P naderen, dan is, wijl PQ en RS antiparallel blijven en PQ in de raaklijn in P aan de kromme, RS in OP overgaat als Q met P samenvalt, deze tweede stelling, die eveneens overbekend is, een gevolg van de eerste.

3. »Men vindt twee punten van de raaklijn in P aan de gelijkzijdige hyperbool H (OA, OB; P, Q), wanneer men (fig. 2) de zijden PR en PS van den asymptotenrechthoek elk met haar eigen bedrag verlengt, de nieuwe uiteinden T en U met O vereenigt en de snijpunten V en W van OT met SQ en OU met RQ bepaalt. En omgekeerd, wanneer de punten P en Q met betrekking tot de loodrecht op elkaar staande lijnen OA en OB zoo gelegen zijn, dat de op de aangegeven wijze gevonden punten V en W met P in een rechte lijn liggen, dan ligt Q op de gelijkzijdige hyperbool H (OA, OB; P) en raakt deze kromme in P de lijn PVW aan."

Ligt Q op de gelijkzijdige hyperbool H (OA, OB; P), dan gaat de tweede diagonaal RS van den asymptotenrechthoek PQ — die met het oog op het tweede deel der stelling in de figuur niet getrokken is — volgens 1) door O. Snijdt nu OP de zijden QR en QS in V_1 en W_1, dan is dus, wijl $PR = RT$ is, ook $V_1S = SV$ en PV met PO antiparallel; eveneens, wijl $PS = SU$ is, is ook $W_1R = RW$ en dus PW met PO antiparallel, enz.

Weet men omgekeerd, dat de op aangegevene wijze uit P, Q, OA en OB afgeleide punten V en W met P op een rechte lijn liggen, maar niet dat Q een punt is van de gelijkzijdige hyperbool H (OA, OB; P), dan kan dit laatste als volgt worden aangetoond. De lijnen VU en TW zijn evenwijdig, daar ze met PVW antiparallel zijn. Uit gelijkvormige driehoeken, die zich onmiddellijk laten aanwijzen, volgt nu $\frac{OU}{OW} = \frac{OV}{OT}$ en $\frac{OV}{OT} = \frac{OV_1}{OP}$ en dus ook $\frac{OU}{OW} = \frac{OV_1}{OP}$, zoodat de lijnen UV_1 en WP evenwijdig loopen. Dus is $PVUV_1$ een ruit en eveneens W_1TWP; bovendien zijn deze vierhoeken gelijkvormig en gelijkstandig met het punt O tot gelijkvormigheidspunt; dus liggen de punten R en S als de middelpunten dier ruiten met O op een rechte lijn en gaat de hyperbool H (OA, OB; P) door Q. Eindelijk is dan ook duidelijk, dat OP en PVW antiparallel zijn en PVW dus de raaklijn in P aan de bedoelde hyperbool is.

Het behoeft nauwlijks gezegd te worden, dat ik met deze stelling niet de bedoeling heb een constructie aan te wijzen van de raaklijn in P aan de gelijkzijdige hyperbool H (OA, OB; P, Q), die met behulp van 2) reeds zoo gemakkelijk gevonden wordt. Zooals aanstonds blijken zal, heb ik ze alleen gegeven om de herkenning van een bepaalde lijn als de raaklijn in een punt aan een bepaalde hyperbool te vereenvoudigen.

4. »Door het middelpunt M eener gegeven kegelsnee K (fig. 3), de oneindig ver gelegene punten A en B van de assen en een willekeurig punt P_1 dier kromme kan men vier kegelsneden brengen, die K in een van P_1 verschillend punt aanraken. De raakpunten van K met deze vier kegelsneden, die, zooals bekend is, gelijkzijdige hyperbolen zijn, zijn de snijpunten van K met een gelijkzijdige hyperbool, die, als P_2 het op K diametraal tegenover P_1 gelegen punt voorstelt, door het teeken H (P_2A, P_2B; M) is gekenmerkt. Elk dier vier kegelsneden snijdt K nog in een vierde punt, telkens gelegen op de raaklijn in het raakpunt van die kegelsnee met K aan de hyperbool H (P_2A, P_2B; M) getrokken.''

Deze stelling zal zijn aangetoond, zoodra slechts gebleken is, dat ieder snijpunt P van K met de hyperbool H (P_2A, P_2B; M) een punt is, waarin K aangeraakt wordt door een kegelsnee van den bundel, die de punten

M, A, B, P_1 tot basispunten heeft, en omgekeerd ieder punt, waarin K door een kromme van dien bundel wordt aangeraakt op de hyperbool $H(P_2 A,\ P_2 B;\ M)$ gelegen is.

Zoeken we de verbindingslijn van de beide nog onbekende snijpunten van K met de kromme uit den bundel, die door een der vier snijpunten van K met $H(P_2 A, P_2 B; M)$, het punt P, gaat, welke kromme kortheidshalve door H_p mag worden aangeduid, dan doen we dit aan de hand van JOACHIMSTHAL *) met behulp van de stelling, dat drie kegelsneden, die twee punten gemeen hebben, elkaar twee aan twee nog in drie paren van punten snijden, waarvan de verbindingslijnen door een punt gaan. Beschouwen we daartoe eerst K, H_p en de vereeniging der rechte lijnen $P\,T$ en $M\,P_1$, die de punten P en P_1, gemeen hebben, dan vinden we dat de gezochte verbindingslijn door het snijpunt V van $T\,P_2$ en $M\,A$ moet gaan; beschouwen we daarna K, H_p en de vereeniging der rechte lijnen $P\,U$ en $M\,P_1$, die eveneens de punten P en P_1 gemeen hebben, dan vinden we, dat de gezochte verbindingslijn ook door het snijpunt W van $P_2\,U$ met $M\,B$ moet gaan. Zoodat $V\,W$ deze verbindingslijn voorstelt. Maar met betrekking tot de hyperbool $H(P_2 A, P_2 B; P, M)$ is de lijn $V\,W$ blijkens 3) de raaklijn in het punt P; dus gaat de koorde $V\,W$ door P en valt een der beide nog onbekende snijpunten van K en H_p met P samen, zoodat H en K_p elkaar in P aanraken. En wijl nu $V\,W$ de raaklijn in P aan de hyperbool $H(P_2 A,\ P_2 B;\ P, M)$ is, ligt het vierde snijpunt van K en H_p op de raaklijn in P aan $H(P_2 A, P_2 B; P, M)$.

Nemen we omgekeerd aan, dat P het raakpunt is van K met een kromme van den beschouwden bundel, dan wordt ook zonder moeite aangetoond, dat P op de hyperbool $H(P_2 A, P_2 B; M)$ ligt. Want dan ligt het punt M volgens het tweede gedeelte van stelling 3) op de hyperbool $H(P_2 A,\ P_2 B; P)$, enz.

5. »De ontwondene van een kegelsnee met een middel-

---

*) *Journal* van CRELLE, Band 26, Seite 172.

punt is een kromme C_4^6 van den zesden graad en de vierde klasse. *De raaklijnen aan de kromme in de vier punten, waarin zij door een harer raaklijnen gesneden wordt gaan door een punt.*"

Neemt men als bekend aan, wat op verschillende wijzen eenvoudig meetkundig kan worden aangetoond, dat door elk punt van het vlak eener kegelsnee K met een middelpunt vier normalen gaan, dat de voetpunten dier normalen gelegen zijn op een gelijkzijdige hyperbool door M, A, B en dat omgekeerd iedere kegelsnee door M, A, B de kromme K in vier punten snijdt, waarvoor de op K opgerichte normalen door een punt gaan, dan is de bovenstaande stelling een onmiddellijk gevolg van 4). Elk der gelijkzijdige hyperbolen door M, A, B, P_1 snijdt namelijk K in P_1 en drie andere punten en de normalen in deze drie punten op K opgericht snijden elkaar op de normaal n_1 van P_1; wijl het nu bij de krommen van dezen bundel volgens 4) viermaal gebeurt, dat twee dier drie bewegelijke snijpunten met K samenvallen, snijdt de raaklijn n_1 van de ontwondene deze kromme nog in vier punten en is de ontwondene dus van den zesden graad. En daar de vier raakpunten van K met de vier gevondene hyperbolen op een gelijkzijdige hyperbool door M, A, B gelegen zijn, gaan de vier normalen in die punten op K opgericht, d. w. z. de vier raaklijnen in de snijpunten van de ontwondene met haar raaklijn n_1, door een punt.

Zoo als straks blijken zal, staat de door mij gevondene eigenschap van de ontwondene eener kegelsnee met een middelpunt in een nauw verband met een dualistisch tegenovergestelde eigenschap der lemniscaat, die Dr. Emil Weyr, Hoogleeraar te Weenen, in 1873 langs analytischen weg gevonden heeft *). Bovendien zullen dan nadere bijzonderheden der ontwondene worden aangewezen.

6. »Wanneer P_1 zich langs K verplaatst, zal de gelijkzijdige hyperbool, die K snijdt in de vier punten van aan-

---

*) "Die Lemniscate in razionaler Behandlung" (*Abhandlungen der K. Böhm. Gesellsch. der Wissenschaften,* VI Folge, 6 Band).

raking met kegelsneden door M, A, B en P_1, een kromme van den vierden graad C^4 omhullen, die de punten M, A, B tot dubbelpunten heeft en in die punten de raaklijnen uit die punten aan K getrokken aanraakt".

Is P_1' een op P_1 volgend punt van K en P_2' het punt diametraal tegenover P_1' gelegen, dan is de bedoelde omhullende de meetkundige plaats van het vierde snijpunt der twee gelijkzijdige hyperbolen H (P_2 A, P_2 B; M) en $H(P_2'A$, $P_2'B$; M). Wijl deze beide krommen evenwijdige asymptoten hebben, zal dit vierde snijpunt P met het gemeenschappelijk punt M een aan beide krommen gemeenschappelijken asymptotenrechthoek moeten opleveren, waarvan de tweede diagonaal door de middelpunten der beide krommen gaat en dus raaklijn aan K in P_2 is. Het met het punt P_1 overeenkomende punt P der omhullende wordt dus gevonden door in het diametraal tegenoverliggende punt P_2 een raaklijn aan K te trekken en in de snijpunten R en S van deze raaklijn met de assen lijnen evenwijdig aan die assen te trekken; van deze lijnen is P dan het snijpunt. Zoodat we nu alleen nog slechts moeten nagaan, welke verwantschap er tusschen de punten P_1 en P bestaat.

Vooreerst is de verwantschap tusschen het punt P en de vereenigingslijn p van de voetpunten R en S der loodlijnen uit P op MA en MB neergelaten ons bekend. Want als p om een punt L wentelt, doorloopt P volgens 1) een gelijkzijdige hyperbool door M, die de lijnen uit L evenwijdig aan MA en MB tot asymptoten heeft. De verwantschap is dus deze, dat met elke lijn p een bepaald punt P en met het net der punten L van het stelsel p een net van gelijkzijdige hyperbolen van punten P, het net der kegelsneden door M, A, B, overeenstemt. Verder weten we, dat de betrekking tusschen punt P_2 van K en raaklijn p in dit punt aan K begrepen is in het zich over het geheele vlak uitstrekkende verband tusschen pool P_2 en poollijn p ten opzichte van K. En verstaan we nu onder P_1 steeds het punt dat verkregen wordt door $P_2 M$ met een stuk gelijk aan zich zelf te verlengen, dan komt nu ook met elk punt P_1 van het vlak een bepaald punt P_2, dus een bepaalde lijn p, dus een bepaald punt P en verder met een lijn van punten P_1, een lijn van punten P_2, dus een bundel van stralen p en een door M, A, B gaande kegelsnee van punten P overeen. Waaruit dan ten slotte blijkt, dat de overeenkomst tusschen de punten P_1 en P een kwadratische overeenkomst is en volgens de wetten van deze met de kegelsnee K van punten P_1 een kromme van den vierden graad C^4 met drie dubbelpunten M, A, B als meetkundige plaats der overeenkomstige punten P overeenstemt.

De beschouwde overeenkomst tusschen de punten P_1 en P vertoont drie bijzonderheden. Op zich zelve beschouwd is zij vooreerst involutorisch; met betrekking tot K is in de tweede plaats de driehoek MAB der fundamentaalpunten een pooldriehoek; terwijl in de derde plaats de raaklijnen uit elk dier punten aan K getrokken wederzijdsch met elkaar overeenstemmen. Achtereenvolgens zullen we elk dier punten behandelen en hun invloed op de gevondene kromme C^4 nagaan.

Uit een eenvoudige beschouwing van fig. 4 blijkt onmiddellijk, dat de verwantschap tusschen de punten P_2 en P involutorisch is. Want uit het feit, dat de verbindingslijn p van de voetpunten R en S der loodlijnen uit P op MA en MB de poollijn is van P_2 ten opzichte van K — en dit was de betrekking, die ons P uit P_2 deed vinden — volgt, dat de verbindingslijn p_2 van de voetpunten R_2 en S_2 der loodlijnen uit P_2 op MA en MB de poollijn is van P; immers, omdat p de poollijn is van P_2, is R de pool van $P_2 R_2$ en S de pool van $P_2 S_2$ en hieruit volgt weer, dat R_2 de pool van PR, S_2 de pool van PS en dus P de pool van p_2 is. En als nu de betrekking tusschen P_2 en P involutorisch is, dan is die tusschen P_1 en P het ook, daar de eenvoudige betrekking tusschen P_1 en P_2 ook involutorisch is.

Omdat de driehoek MAB der fundamentaalpunten pooldriehoek is van K, zal elk der dubbelpunten van de overeenkomstige kromme C^4 een buigpunt zijn voor elk der beide takken van de kromme, die door dit dubbelpunt gaan *).

*) Voor zoover mij bekend is, heeft K. Küpper, Hoogleeraar te Praag,

Terwijl namelijk in het algemeen een fundamentaalpunt A een dubbelpunt is van C^4, omdat de fundamentaallijn BM van A de kegelsnee K in twee van de andere fundamentaalpunten B en M verschillende punten snijdt, en een willekeurige lijn a' door A deze kromme buiten A om nog in twee punten snijdt, omdat de overeenkomstige lijn a door A twee punten met K gemeen heeft, zullen deze punten op elk der lijnen a_1' en a_2', die met de raaklijnen a_1 en a_2 uit A aan K getrokken overeenstemmen, in ons geval, waarbij ABM (fig. 5), pooldriehoek is van K, beide met A samenvallen, omdat de raakpunten A_1 en A_2 dier raaklijnen op de fundamentaallijn BM van A gelegen zijn, enz. *).

Eindelijk volgt de derde bijzonderheid onmiddellijk uit de beschouwing van fig. 3, wanneer men de raaklijn RS verplaatst tot zij door een der punten A, B of M gaat; in het laatste geval kan men dan weer gebruik maken van de waarheid, dat de beide diagonalen van den rechthoek $PRMS$ antiparallel zijn met betrekking tot de assen.

De gezochte kromme C^4 is voorgesteld in de figuren 6 en 7. In fig. 6, die betrekking heeft op het geval, dat K een ellips is, zijn de punten A en B dubbelpunten met bestaanbare buigraaklijnen, terwijl M een afgezonderd punt is; in fig. 7, waar K een hyperbool is, zijn de punten B en M dubbelpunten met bestaanbare buigraaklijnen en is A een afgezonderd punt.

7. »Door een willekeurig punt P_1 van een geheel willekeurige kegelsnee C^2 gaan vier kegelsneden, die omschreven zijn aan een willekeurig gegeven pooldriehoek ABC van C^2

---

deze eigenschap het eerst aangewezen („Ueber Raumcurven vierter Ordnung erster Art und eine specielle ebene Curve vierter Ordnung C_1^4". *Abhandlungen der k. böhm. Gesellsch. der Wissenschaften*, VI Folge, 6 Band, 1873) bij de vier dubbel rommen C^4 van het ontwikkelbare oppervlak, dat de ruimtekromme van den vierden graad van de eerste soort tot keerlijn heeft.

*) Omgekeerd zal de kwadratische transformatie eener C^4 met drie der beschouwde dubbelpunten ten opzichte van deze als fundamentaalpunten een kegelsnee opleveren, waarvan de driehoek dier punten een pooldriehoek is.

en C^2 aanraken. De raakpunten van deze vier kegelsneden liggen op een aan ABC omschreven kegelsnee $C^2{}_r$ en van deze is het punt P_1 het BRIANCHON'sche punt met betrekking tot den omgeschreven driehoek door de raaklijnen in A, B, C aan deze kegelsnee gevormd. En wanneer het punt P_1 zich langs de gegeven kegelsnee C^2 beweegt, dan omhult de kegelsnee $C^2{}_r$ der raakpunten een kromme C^4, die A, B, C tot dubbelpunten en de raaklijnen uit deze punten aan C^2 in deze punten tot buigraaklijnen heeft."

Deze stelling wordt onmiddellijk uit het voorgaande afgeleid door fig. 3 uit een willekeurig punt centraal te projecteeren op een vlak, dat met betrekking tot het vlak der figuur een willekeurige ligging heeft. Mogelijk is echter eenige toelichting omtrent de verhouding van het punt P_1 tot de kromme $C^2{}_r$ niet overbodig.

In fig. 3 is P_1 het BRIANCHON'sche punt van de gelijkzijdige hyperbool H $(P_2A,\ P_2B;\ M)$ met betrekking tot den omgeschreven driehoek der raaklijnen in A, B, M. Want de raaklijn in A is de asymptoot P_2A, die in B de asymptoot P_2B en die in M de tweede diagonaal P_3P_4 van den in K beschreven rechthoek, waarvan P_1P_2 de eene diagonaal is; zoodat $P_2P_3P_4$ de driehoek der raaklijnen is en de door P_1 gaande lijnen P_2M, P_3A, P_4B de drie lijnen voorstellen, die de hoekpunten van dien driehoek met de raakpunten van de overstaande zijden verbinden. Wijl nu de centrale projectie van P_1 met betrekking tot de centrale projectie van H $(P_2A,\ P_2B;\ M)$ en van den driehoek $P_2P_3P_4$ der raaklijnen denzelfden rol blijft spelen, is ook in het algemeen het punt P_1 der stelling het BRIANCHON'sche punt van $C^2{}_r$ met betrekking tot den daar aangewezen driehoek.

8. »Heeft een kromme C^4 van den vierden graad drie dubbelpunten en in elk dezer punten twee buigraaklijnen, dan zullen de raakpunten der vier raaklijnen, die men uit een punt P der kromme zoo aan de kromme trekken kan, dat ze haar in een van P verschillend punt aanraken, in een rechte lijn l liggen. En wanneer P de kromme C^4 doorloopt, omhult l een kegelsnee, waarvan de driehoek der drie dubbelpunten een pooldriehoek is en de door elk dier pun-

ten gaande buigraaklijnen de door dit punt gaande raaklijnen zijn.''

Men leidt deze stelling onmiddellijk uit de voorgaande af door op de gegeven kromme C^4 met hare drie dubbelpunten van bijzonderen aard een kwadratische transformatie met deze drie punten tot fundamentaalpunten toe te passen, de dan verkregene kegelsnee met haren pooldriehoek der fundamentaalpunten als de gegevens van de voorgaande stelling te beschouwen en deze met behulp van geheel dezelfde maar hier in tegengestelden zin aangewende transformatie op de gewone C^4 over te brengen.

Voor het bijzondere geval der lemniscaat is de bovenstaande stelling stelkundig afgeleid door den Heer Dr. Emil Weyr *).

9. »Heeft een kromme K^4 van de vierde klasse drie dubbelraaklijnen en als raakpunten op elk van deze twee keerpunten, dan zullen de raaklijnen in de vier punten, waarin deze kromme door een harer raaklijnen l buiten het raakpunt om gesneden wordt, door een punt P gaan. En wanneer l de gegevene kromme omhullend doorloopt, dan is de meetkundige plaats van het punt P een kegelsnee, waarvan de driehoek der drie dubbelraaklijnen een pooldriehoek is en de op deze lijnen gelegen keerpunten punten zijn.''

Deze stelling is de dualistisch tegenovergestelde stelling van de voorgaande. We hebben haar reeds bij een bijzondere kromme van de vierde klasse met drie dubbelraaklijnen, waarvan de raakpunten keerpunten der kromme zijn, ontmoet, bij de ontwondene van ellips of hyperbool, althans wat het eerste gedeelte betreft. Met betrekking tot deze ontwondene is de kegelsnee, die in het tweede gedeelte der stelling voorkomt, de meetkundige plaats der punten P, waarvoor de voetpunten der op de oorspronkelijke kegelsnee neergelaten normalen vier punten dier kromme zijn, waarvan de krommingsmiddelpunten op een rechte lijn liggen †).

---

*) t. a. p.

†) Middellijk volgt uit het gevondene, dat de zes buigraaklijnen van

10. »Ik eindig mijn opstel met een paar opmerkingen naar aanleiding van enkele eenvoudige eigenschappen der kromme C^4, die wel is waar langs meetkundigen weg reeds door den Heer Küpper gevonden, maar daarbij niet in al haar eenvoud blootgelegd zijn."

Wanneer als in de figuren 6 en 7 de twee dubbelpunten A en B in onderling loodrechte richtingen in het oneindige gelegen zijn, dan is M middelpunt en zijn MA en MB assen der kromme C^4; want in dit geval is M middelpunt en zijn MA en MB assen der kegelsnee, waarin C^4 bij de bekende kwadratische transformatie overgaat. Noemen we nu vier punten, die als P_1, P_2, P_3, P_4 in fig. 3 de hoekpunten zijn van een rechthoek, waarvan M het middelpunt en MA en MB de richtingen der zijdenparen aangeven, een »kwadrupel", dan heeft men bij de bedoelde symmetrische kromme C^4 onmiddellijk de volgende eigenschappen:

a) »Ieder punt x van C^4 maakt deel uit van een op C^4 gelegen kwadrupel".

b) »De op C^4 gelegene kwadrupels zijn de snijpunten van C^4 met een bundel van kegelsneden, waarvan de basispunten a, b, c, d een op C^4 gelegen kwadrupel vormen; de kegelsnee uit den bundel, die C^4 in a aanraakt, doet dit ook in b, c, d".

c) »Zijn a, b, c, d en a', b', c', d' twee verschillende kwadrupels van C^4, dan kan men de punten van het eene op vier verschillende wijzen zoo met de punten van het andere door vier rechte lijnen vereenigen, dat deze lijnen de kromme nog in twee nieuwe kwadrupels snijden".

d) »De raaklijnen aan C^4 in de punten van een kwadrupel snijden de kromme nog in twee nieuwe kwadrupels".

Projecteert men nu de figuur uit een willekeurig punt op een willekeurig vlak, dan gaat ter eene zij onze kromme C^4 in een andere kromme C^4 over, waarvan de driehoek der dubbelpunten MAB een willekeurigen vorm heeft, terwijl

---

elke kromme C^4 met drie „buigdubbelpunten" een zelfde kegelsnee aanraken en de zes keerpunten van elke kromme K^4 met drie „keerdubbelraaklijnen" op een zelfde kegelsnee liggen.

aan de andere zij de vier hoekpunten van een rechthoek, die boven een kwadrupel vormden, in vier punten overgaan, die de hoekpunten zijn van een volledigen vierhoek met M, A, B tot snijpunten der drie paren van overstaande zijden. Verstaan we nu bij deze meer algemeene kromme C^4 onder een kwadrupel eveneens meer algemeen de hoekpunten van zulk een volledigen vierhoek, dan gelden de aangegevene stellingen, die gemakkelijk te vermeerderen zijn, ook voor de meer algemeene kromme C^4. Wat meer zegt, dergelijke eigenschappen vertoonen zich steeds bij kromme lijnen, waarvan een der centrale projecties twee onderling loodrechte assen MA_∞ en MB_∞ bezit, en wel met betrekking tot den driehoek, waarvan $MA_\infty B_\infty$ de projectie is. Zoo vindt men, dat de stelling *a*) onder geheel dezelfde omstandigheden bij de kromme K_4 geldt en de anderen zeer gemakkelijk op deze kromme toepasselijk te maken zijn.

Groningen, 5 December 1883.

VOORLOOPIG RAPPORT DER HUYGENS-COMMISSIE

AAN DE

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM.

Uwe Commissie bestaat thans uit de Heeren:
BIERENS DE HAAN, *Voorzitter*,
GRINWIS,
VAN DEN BERG,
BOSSCHA,
LORENTZ, *Secretaris*,
VAN DE SANDE BAKHUIJZEN,
J. A. C. OUDEMANS,
CAMPBELL en
W. N. DU RIEU.

Het voorloopig onderzoek vooral omtrent de briefwisseling van CHRISTIAAN HUYGENS is nog wel niet afgeloopen, maar is toch reeds zooverre gevorderd, dat Uwe Commissie in hare laatste vergadering tot het besluit komen kon, om daaromtrent dit voorloopig verslag uit te brengen.

De HUYGENS-verzameling, berustende aan de Universiteits-bibliotheek te Leiden, is zeer uitgebreid en belangrijk: zij is door het lid BIERENS DE HAAN onderzocht, ten opzichte van genoemde briefwisseling. Daarbij werden gevonden in:

portefeuille met brieven in minuut van HUYGENS 420
portefeuilles met adversaria, aan HUYGENS. . . 119
minuut-brieven van HUYGENS 56
portefeuille met brieven aan hem 794
waarbij noch brieven van hem. 12

portefeuille met familie-brieven van HUYGENS. 398
en aan hem. 143
nog andere portefeuilles brieven van HUYGENS 86
en aan hem. 114

Hierbij dient te worden opgemerkt, dat de genoemde familiebrieven ten deele ook over wetenschappelijke onderwerpen handelen.

In het Stedelijk Archief ter stadhuize van Amsterdam worden gevonden brieven van HUYGENS 12
en aan hem 56
In de Bibliotheek der Koninklijke Akademie van Wetenschappen worden gevonden brieven van HUYGENS. . . . . 5 + 2
en aan hem . . . . 4 + 6
Het lid CAMPBELL vond in het Museum Westrheennianum, brief aan HUYGENS. 1

Het aantal brieven, in ons land aanwezig, zoude derhalve bedragen, van HUYGENS 991
en aan hem 1237

Mogelijk evenwel zal men nog hier of daar een brief kunnen opsporen; waartoe de noodige maatregelen reeds beraamd zijn.

Wat de briefwisseling aangaat, die buitenslands bewaard wordt, heeft het lid DU RIEU in Duitschland voorloopig niets gevonden. Het lid VAN DE SANDE BAKHUIJZEN vond in Italië en Frankrijk:

Accad. del Cimento, van HUYGENS . . . . 4 + 1
Florence, aan hem 4
Observatoire de Paris, van HUYGENS 8
aan hem 10
Bibliothèque Nationale, aan HUYGENS 9

Het lid BIERENS DE HAAN vond in Engeland:

British Museum, van HUYGENS 12

Royal Society, van HUYGENS 88
aan hem. 21

Het verder onderzoek naar de brieven, die zich buitenslands bevinden, zal nog moeten worden voortgezet; waartoe zich allicht dit jaar wederom goede gelegenheid zal voordoen.

Uit hetgeen tot nu toe in dezen is gedaan, bleek echter reeds genoegzaam, niet alleen de groote uitgebreidheid van de briefwisseling van HUYGENS, maar evenzeer haar wetenschappelijk gewicht; immers, veel bevattende, wat men in dezen tijd aan geleerde tijdschriften zoude toevertrouwen. Ook bevatten deze brieven — wegens den hoogen maatschappelijken stand van HUYGENS zelf en van andere leden van zijn geslacht — veel merkwaardige bijzonderheden, van algemeen zoowel als van meer bijzonder karakter. Uwe Commissie rekende het dus van het hoogste belang, deze brieven te doen drukken.

Verder meende Uwe Commissie eenparig, dat tot goed verstand der brieven van HUYGENS, die aan hem noodzakelijk zijn: als te zamen een geheel uitmakende, en op elkander verwijzende. Alleen langs dezen weg kan men een juist en zuiver beeld verkrijgen van HUYGENS in den lijst van zijnen tijd; van een man, die toen reeds door zijne tijdgenooten algemeen vereerd werd als iemand van geheel ongewone gaven, als een heros.

Hoezeer reeds nu belangrijke zaken werden ontdekt, is het voor het voorloopig gedeelte van de taak Uwer Commissie noodzakelijk, die geheele briefwisseling aan eene nauwgezette studie te onderwerpen. Op die wijze alleen zal het mogelijk kunnen zijn, een voorstel te doen omtrent aantal en omvang der brieven, wier uitgaaf wenschelijk is; en evenzeer omtrent den vorm, waarin dit zoude behooren te geschieden.

Maar daartoe is het een volstrekt vereischte, die brieven in duidelijk afschrift te bezitten, en vóór zich te hebben, Enkele zijn reeds afzonderlijk hier en daar uitgegeven, en deze behoeven natuurlijk niet gecopieerd, slechts gecollationneerd te worden. Maar bij de overigen is voor het gebruik meerendeel een duidelijk afschrift een noodzakelijk vereischte.

Daar zulk overschrijven tijd en geld kost, stelt Uwe Commissie aan de Akademie voor, haar nu reeds daartoe in staat te stellen, en daaromtrent het volgende besluit te nemen — nog geheel afgescheiden van de later te behandelen vraag omtrent de wijze van uitgeven zelve —:

1°. de Commissie kan voortgaan met de voorbereiding van de uitgaaf van de werken en briefwisseling van CHRISTIAAN HUYGENS;

2°. op de Begrooting van 1884 wordt daartoe aan de Commissie een crediet van *f* 600 geopend.

Namens de Huygens-Commissie:

D. BIERENS DE HAAN, *Voorzitter.*
H. A. LORENTZ, *Secretaris.*

HET PROBLEMA VAN SNELLIUS,

OPGELOST DOOR

PTOLEMAEUS,

DOOR

J. A. C. OUDEMANS.

Wijlen ons medelid VERDAM heeft in 1842 in het 2de Deel van GRUNERT's *Archiv der Mathematik und Physik* er op gewezen, dat het geodesisch vraagstuk, »om de ligging van een punt te vinden, wanneer uit dat punt de hoeken gemeten zijn tusschen drie bekende punten," dat de Duitschers gewoon zijn *die Pothenot'sche Aufgabe* te noemen, langen tijd voor POTHENOT, door onzen SNELLIUS is opgelost, en wel in zijnen *Eratosthenes Batavus*, (1617).

Hij merkte ook aan, dat KÄSTNER reeds in 1790 in zijne *Anwendungen der ebenen Geometrie und Trigonometrie*, (1er Theil, 3e Abth., Vorrede p. 4) hetzelfde betoogd heeft, zonder dat dit echter door zijne landgenooten schijnt opgemerkt te zijn.

Mij onlangs bezig houdende met de studie der maanstheorie van PTOLEMAEUS, is het mij gebleken, dat deze groote wis- en sterrekundige wel niet hetzelfde landmeetkundig vraagstuk heeft behandeld, maar bij het vaststellen van de grootte van den straal van den epicykel der maansbaan, vergeleken met den straal van den deferent, d. i. van den cirkel, dien het middelpunt van den epicykel om de aarde beschrijft, een vraagstuk oplost, dat geheel identiek is met het problema van SNELLIUS.

Om namelijk den straal der epicykels te bepalen, handelt PTOLEMAEUS, in het 4de boek van den *Almagest*, als volgt. Hij geeft eerst de reeds zeer nauwkeurige waarden op van den sideralen, den synodischen en den anomalistischen, ja ook van den draconitischen omloopstijd der maan, en wel zooals die door HIPPARCHUS bepaald waren. Om een voorbeeld der nauwkeurigheid van deze bepalingen te geven, zal ik alleen aanhalen, dat HIPPARCHUS voor den synodischen omloop vond, sexagesimaal uitgedrukt:

$$29^d 31' 50'' 8''' 20'''',$$

d. i.

$$29^d 12^u 44^m 3^s 20^t,$$

hetgeen binnen de sekonde nauwkeurig is. Verder geeft PTOLEMAEUS de dagelijksche beweging op, naar deze verschillende omloopstijden, en vindt:

1)	middelb. siderale beweging. . .	$13°$	$10'$	$34''$	$58'''$	33^{IV}	30^{V}	30^{VI}
2)	» synodische beweging .	12	11	26	41	20	17	59
3)	» anomalistische beweging.	13	3	53	56	29	38	38

Hij verbetert echter de anomalistische beweging met $-11^{IV} 46^{V} 39^{VI}$, zoodat zij wordt $13° 3' 53'' 56''' 17^{IV} 51^{V} 59^{VI}$.

Hij beschouwt nu drie maaneklipsen, die langen tijd te voren kort na elkander te Babylon waren waargenomen. Uit de aanteekeningen, die tot hem gekomen waren, leidde hij het juiste uur af van het midden der eklips, en daar nu tijdens zulk een midden de maan juist tegenover de zon staat, zoo is de plaats der maan gegeven, indien slechts die der zon bekend is. De verschillen tusschen de maansplaatsen bij deze drie eklipsen geven dus de ware beweging der maan, of liever de vermeerderingen der ware lengte der maan aan, tusschen de eerste en de tweede, en tusschen de tweede en de derde eklips. Maar daar de middelbare dagelijksche beweging der maan in lengte bekend is, kan men die beweging in de beide genoemde tijdvakken ook vinden, en komen die bewegingen, tusschen twee eklipsen, niet met de waargenomene overeen, dan is de reden hiervan dat de maan zich, in beide eklipsen niet in hetzelfde punt van haren epicykel bevond.

Dit kan trouwens ook nagerekend worden, want indien gegeven is de tijdruimte tusschen de beide eklipsen, en de middelbare dagelijksche anomalistische beweging, d. i. de middelbare dagelijksche beweging in den epicykel, dan vindt men door vermenigvuldiging den door de maan in den epicykel doorloopen boog.

De drie eklipsen, die Ptolemaeus voor zijn onderzoek gebruikte en die te Babylon waren waargenomen, hadden plaats gehad op dagen, die hij naar de Egyptische wijze opgeeft, nl. hij noemt den hoeveelsten van welke Egyptische maand elke eklips plaats had, en verder in welk regeeringsjaar van welken vorst. Deze datums laten zich nu gemakkelijk tot Juliaansche herleiden, zie bijv. Ideler, *Handbuch der mathematischen und technischen Chronologie*, I, p. 102. Men vindt dan dat de middens der drie eklipsen plaats hadden:

721 j. v. Chr. den	19den	Maart	9^u30^m	W.	T.	Babylon,
720 » » » »	8sten	»	12 0	»	»	» ,
720 » » » »	1sten	September	8 30	»	»	» .

De herleiding op M. Tijd te Alexandrië is — 0^u50^m.

De zon stond bij de	1e eklips	op	$354\frac{1}{2}$	lengte,
» »	2e »	»	$343\frac{3}{4}$	» ,
» »	3e »	»	$153\frac{1}{4}$	» .

Tusschen de 1e en 2e eklips	is dus	349°15′	lengte,
» » 2e » 3e »	» »	169 30	» .

Maar de oogenblikken waren tijd op middelbaren herleidende, en lettende op de middelbare dagelijksche beweging in lengte, vindt hij daarvoor in de genoemde tusschenruimten 345°51′ en 170°7′, dus in het éene geval 3°24′ minder, in het andere geval 37′ meer dan de ware beweging geweest is. De geheele omwentelingen worden in beide gevallen buiten rekening gelaten.

Evenzoo lettende op de middelbare beweging der anomalie (zooals Ptolemaeus dit noemt), verkrijgt hij eene beweging van (behalve een zeker aantal geheele omwentelingen) 306°25′ en 150°26′.

Deze getallen nu zijn PTOLEMAEUS voldoende om de betrekking te vinden van den straal der epicykels tot dien van den deferent. Heeft men het hoofd naar het noorden gekeerd, dan is de beweging in den deferent, uit het middelpunt gezien, van rechts naar links; die in den epicykel is daaraan tegengesteld, dus van links naar rechts. Neemt men nu in een cirkel, die dien epicykel moet voorstellen, drie punten A, B en C aan, zoodat, van A rechts om tellende *):

$$AB = 306°25',$$
$$BC = 150\ 26\,,$$

(derhalve links om tellende $CA = 96°51'$ en $AB = 53°35'$) is, dan stellen A, B en C de plaatsen der maan in haren epicykel tijdens de drie eklipsen voor. Zij nu D de plaats der aarde, dan zijn de gegevens deze:

$$\begin{aligned} AB &= \text{koorde } 53°35', \\ BC &= \quad » \quad 150\ 26\,, \\ AC &= \quad » \quad 96\ 51\,, \\ \angle ADB &= 3°24', \\ \angle CDB &= -0\ 37\,, \end{aligned}$$

dus $$\angle ADC = 2\ 47\,,$$

en noemt men het middelpunt van den epicykel K, dan moet o. a. gezocht worden de verhouding van DK tot den straal AK; daartoe moet de ligging van het punt D bepaald worden, en blijkbaar is het vraagstuk, dat hiertoe leidt, geen ander dan dat van SNELLIUS.

PTOLEMAEUS gebruikt voor de oplossing enkel rechthoekige driehoeken, en geene andere goniometrische lijnen dan koor-

---

*) In de uitgaaf van PTOLEMAEUS, bewerkt door DELAMBRE en HALMA, staat in plaats van deze figuur haar spiegelbeeld; in de Baseler uitgaaf van 1538, in de uitgaaf der latijnsche vertaling, bezorgd door SCHRECKENFUCHS in 1551, en in het door REGIOMONTANUS en PEURBACH bewerkte *Epitome,* uitgave door GEMUSAEUS, Basel 1543, staat de figuur zooals zij behoort te wezen.

den, waarvan hij in het 1ste boek eene tafel geeft voor den straal $= 60$. Hij verbindt D met B, het verste der drie punten A, B en C, en noemt het snijpunt dezer lijn met den epicykel E. De lijn BD valt even buiten den driehoek ABC, zoodat de boog EC 6°44′ van den cirkel bedraagt. Als men nu ook weet dat later gevonden wordt $KD = 11{,}502\ KA$, dan kan men de figuur licht zelf teekenen.

Hij zoekt nu uit driehoek AED de verhouding van AE tot ED; hiertoe dient de loodlijn EZ, uit E op AD neergelaten; voorts uit driehoek CED, de verhouding van CE tot ED; (loodlijn EH op CD); daar nu de hoek tusschen AE en $CE = \frac{1}{2}$ boog AC is, vindt hij, uit C de loodlijn CT op AE trekkende, ook de verhouding van AC tot DE. Maar $AC = AK \times$ koorde 96° 51′, derhalve wordt bekend de verhouding van den straal AK tot DE; en daaruit die van AK tot CE en AE. De boog CE wordt dus bekend, derhalve ook de boog BCE en de koorde BE, alsmede $DB = DE + EB$, uitgedrukt in den straal der epicykels, en eindelijk heeft men:

$$DK^2 = DE \times DB + AK^2.$$

Van de drie afstanden DA, DB en DC, is hier alleen DB berekend, maar uit de reeds gebruikte driehoeken DEA en DEC worden ook zeer gemakkelijk de verhoudingen $DA : DE$ en $DC : DE$, en derhalve $DA : AK$ en $DC : AK$ gevonden.

Brengen wij deze oplossing in ons algebraisch schrift over, en voeren wij de sinussen en cosinussen in plaats van koorden in, dan hebben wij, den straal $= R$, den hoek $ADB = \varphi'$, hoek $BDC = \varphi''$ en de drie hoeken BAC, ABC en ACB, A, B en C noemende, deze vergelijkingen:

$$AE = DE \frac{\sin \varphi'}{\sin (C - \varphi')} = \alpha \times DE,$$

$$CE = DE \frac{\sin \varphi''}{\sin (A - \varphi'')} = \beta \times DE,$$

$$AC^2 = [AE - CE \cos (A - C)]^2 + [CE \sin (A - C)]^2$$

hieruit $AC = \gamma \times DE$.

Maar:

$$AC = 2\, R \sin B,$$

dus:

$$DE = \frac{2 \sin B}{\gamma} \;.\; R,$$

$$\text{koorde } AE = \frac{2\, \alpha \sin B}{\gamma} \times R,$$

derhalve:

$$\sin \tfrac{1}{2} AE = \frac{\alpha}{\gamma} \sin B,$$

$$BE = 2\, R \sin (C + \tfrac{1}{2} AE),$$

$$DB = DE + BE,$$

$$DK^2 = R^2 + DE \times DB,$$

$$AD = DE \times \frac{\sin C}{\sin (C - \varphi')},$$

$$CD = DE \times \frac{\sin A}{\sin (A - \varphi'')}.$$

Utrecht, 1 Februari 1884.

INHOUD

VAN

DEEL XIX. — STUK 3.

---

bladz.

Tweede verslag omtrent de wenschelijkheid en uitvoerbaarheid van het instellen eener geregelde waarneming van verschijnselen van aardbeving in Nederland; uitgebracht in de Vergadering van 27 October 1883.. 303.

Verslag over eene verhandeling des Heeren BEIJERINCK: „Onderzoekingen over de besmettelijkheid der gomziekte bij de planten"; uitgebracht in de Vergadering van 27 October 1883............ 307.

Rapport over eene verhandeling des Heeren C. LE PAIGE: „Sur les surfaces du troisième ordre"; uitgebracht in de Vergadering van 27 October 1883.. 312.

Ueber die Anziehung zwischen gelösten Stoffen und Wasser in verdünnten Lösungen. Vorläufige Mittheilung von Dr. HUGO DE VRIES. 314.

Sur les surfaces du troisième ordre; par le Dr. C. LE PAIGE....... 328.

Revisio Perisporiacearum in regno Batavorum hucusque detectarum; auctore C. A. J. A. OUDEMANS.................................... 349.

Rapport over eene bijdrage van den Heer P. H. BROCX, Luit. t/zee 2e klasse: „Waarneming van den overgang van Venus over de Zon, volbracht te Curaçao op 6 December 1882"; uitgebracht in de Vergadering van 24 November 1883.................................. 364.

Verslag aangaande de waarneming van den overgang van Venus over de Zon op 6 December 1882 te Curaçao; door P. H. BROCX..... 372.

Uitbreiding van het theorema van ROLLE; door Dr. F. DE BOER... 384.

Verslag over eene verhandeling des Heeren Dr. J. H. SCHOUTE: „Over eene bijzondere kromme van den vierden graad met drie dubbelpunten"; uitgebracht in de Vergadering van 26 Januari 1883.... 417.

Over eene bijzondere kromme van den vierden graad met drie dubbelpunten; door P. H. SCHOUTE. (Met één plaat)................. 420.

Voorloopig Verslag der HUYGENS-Commissie aan de Koninklijke Akademie van Wetenschappen.. 432.

Het problema van Snellius opgelost door Ptolemaeus; door J. A. C. OUDEMANS.. 436.

Overzicht der boekwerken, door de Koninklijke Akademie van Wetenschappen ontvangen en aangekocht............................. 57—88.

GEDRUKT BIJ DE ROEVER KRÖBER - BAKELS.

GEDRUKT BIJ DE ROEVER KRÖBER - BAKELS.

VERSLAGEN EN MEDEDEELINGEN

DER

KONINKLIJKE AKADEMIE

VAN

WETENSCHAPPEN.

Afdeeling NATUURKUNDE.

TWEEDE REEKS.

TWINTIGSTE DEEL.

AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER.
1884.

VERSLAGEN EN MEDEDEELINGEN

DER

KONINKLIJKE AKADEMIE

VAN

WETENSCHAPPEN.

VERSLAGEN EN MEDEDEELINGEN

DER

KONINKLIJKE AKADEMIE

VAN

WETENSCHAPPEN.

Afdeeling **NATUURKUNDE.**

TWEEDE REEKS.

TWINTIGSTE DEEL.

AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER
1884.

GEDRUKT BIJ DE ROEVER KRÖBER-BAKELS.

INHOUD

VAN HET

TWINTIGSTE DEEL

TWEEDE REEKS.

VERSLAGEN.

Advies over een antwoord aan Z. E. den Minister van Binnenlandsche Zaken betrekkelijk de in October 1883 te Rome gehouden geodetische conferentie; uitgebracht in de Vergadering van 23 Februari 1884. . . . . blz. 63.

Rapport over den door den Heer VAN DE SANDE BAKHUYZEN uit naam van Dr. N. M. KAM te Schiedam aan de Afd. Natuurkunde der Koninklijke Akademie van Wetenschappen ter uitgave aangeboden „Catalog von Sternen, deren Oerter durch selbständige Meridianbeobachtungen bestimmt worden sind, aus Band 1 bis 66 der astronomischen Nachrichten reducirt auf 1855"; uitgebracht in de Vergadering van 23 Februari 1884. . . . . „ 66.

Verslag over eene verhandeling van den Heer J. W. GILTAY: „Over het polariseeren van telefonische geleiders"; uitgebracht in de Vergadering van 23 Februari 1884. . . . blz. 71.

Rapport over eene verhandeling van Dr. B. HAGEN, getiteld: „Ueber Körpergrösse und Wachsthumsverhältnisse der Süd-Chinesen"; uitgebracht in de Vergadering van 29 Maart 1884. „ 233.

Verslag omtrent eene verhandeling van Dr. G. J. MICHAËLIS, getiteld: „Over de theorie der veerkrachtige nawerking"; uitgebracht in de Vergadering van 29 Maart 1884. . . „ 297.

Verslag over eene verhandeling van Dr. F. DE BOER; getiteld: „Discussie der algemeene vierde-machtsvergelijking"; uitgebracht in de Vergadering van 25 April 1884. . . . „ 410.

MEDEDEELINGEN.

C. A. J. A. OUDEMANS. Revisio Pyrenomycetum in Regno Batavorum hucusque detectorum. . . . . „ 1.

J. W. GILTAY. Het polariseeren van telefonische ontvangers. (Met één plaat) . . . . „ 78

D. BIERENS DE HAAN. Bouwstoffen voor de geschiedenis der wis- en natuurkundige wetenschappen in de Nederlanden. . . . . „ 102, 197.

Dr. B. Hagen. Ueber Körpergrösse und Wachsthumsverhältnisse der Süd-Chinesen. . . . . blz. 236.

D. J. Korteweg. Over de banen beschreven onder den invloed eener centrale kracht. . . . . „ 247.

J. A. C. Oudemans. Over het vermogen van den 10-voets kijker van Huygens. (Met één plaat). . . . . „ 290.

G. J. Michaëlis. Over de theorie der veerkrachtige nawerking. „ 300.

E. Mulder. Bijdrage tot de kennis van normaal cyaanzuur en afgeleiden. Vijfde gedeelte. . . . . „ 375.

Dr. F. de Boer. Discussie der algemeene vierde-machtsvergelijking. (Met twee platen). . . . . „ 413.

VERSLAGEN EN MEDEDEELINGEN

DER

KONINKLIJKE AKADEMIE

VAN

WETENSCHAPPEN.

Afdeeling NATUURKUNDE.

TWEEDE REEKS.

Twintigste Deel. — Eerste en Tweede Stuk.

AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER.
1884.

REVISIO PYRENOMYCETUM

IN REGNO BATAVORUM HUCUSQUE DETECTORUM

AUCTORE

C. A. J. A. OUDEMANS.

ENUMERATIO LIBRORUM

QUI IN DIGERENDIS HISCE PAGINIS PRAESTO FUERUNT,
SIMUL ABBREVIATIONUM INTERPRETATIO.

Librorum titulis jam prius *) memoratis addantur sequentes:

Nederlandsch Kruidkundig Archief. Eerste Serie, V. — Amsterdam, 1860.

C. A. J. A. Oudemans, Matériaux pour la Flore mycologique de la Néerlande, I et II; in Archives Néerlandaises II (1867) et VIII, 1873. — Harlem.

C. A. J. A. Oudemans, Over den aard en de beteekenis van het Pyrenomyceten-geslacht Ascospora, in Verslagen en Mededeelingen der Kon. Akad. van Wet. 2, X, 76. — Amsterdam, 1876. — Gallice: Sur la nature et la valeur du genre Ascospora, de la famille des Pyrénomycètes, in Archives Néerlandaises, XI, 341. — Harlem, 1876.

C. A. J. A. Oudemans, Bijdrage tot de Flora mycologica van Nederland, IX; in Versl. en Med. der Kon. Akad. van Wet., Afd. Natuurkunde, 2, XVIII, 360. — Amsterdam, 1883.

C. A. J. A. Oudemans, Herbarium van Nederlandsche planten. Semicenturiae 27. — Amsterdam, a⁰ 1867—1877.

---

*) *Versl. en Meded. der Kon. Akad. v. Wet.,* Afd. Natuurk., 2, XIX, 349 et 350.

C. A. J. A. Oudemans, Fungi Neerlandici exsiccati, Centuriae I—III. — Amsterdam, 1875—1879.

Madem. **A. Libert,** Plantae cryptogamicae quas in Arduenna collegit. Centuriae I—IV. — Leodii, 1830—1834.

E. Lambotte, Flore mycologique Belge. — Verviers, 1880.

A. P. de Candolle, in Mémoires du Muséum, III. — Paris.

Annales des Sciences naturelles. 6e Série, IX. — Paris, 1883.

M. Bulliard, Histoire des Champignons de la France, I. — Paris, 1791.

F. F. Chevalier, Flore générale des environs de Paris, I. — Paris, 1826.

L. R. et **C. Tulasne,** Selecta Fungorum Carpologia, II. — Parisiis, 1863.

P. H. Karsten, Symbolae ad Mycologiam Fennicam. — Helsingfors, 1873—1879.

E. Fries, Systema Mycologicum, II et III. — Gryphiswaldiae, 1823 et 1832.

C. E. Hansen, Fungi fimicoli danici, et ejusdem Résumé. — Copenhague, 1877.

Grevillea. A monthly record of cryptogamic Botany, I—XII. — London, 1872—1884.

R. K. Greville, Flora Edinensis. — Edinburgh, 1824.

R. K. Greville, Scottish cryptogamic Flora, I—VI. — Edinburgh, 1823—1828.

C. B. Plowright, Sphaeriacei Britannici, Centuriae I—III. — King's Lynn, 1873—1878.

H. J. Tode, Fungi Mecklenburgenses selecti, I—II. — Luneburgi, 1790—1791.

C. H. Persoon, Synopsis methodica Fungorum. — Göttingae, 1801.

C. G. Ehrenberg, Sylvae mycologicae Berolinenses. — Berolini, 1818.

H. F. Link, Handbuch zur Erkennung der nutzbarsten und am häufigsten vorkommenden Gewächse, III. — Berlin, 1833.

F. G. Wallroth, Flora cryptogamica Germaniae. — Norimbergiae, 1833.

A. de Bary, Morphologie und Physiologie der Pilze, etc. — Leipzig, 1866.

J. Nitschke, Pyrenomycetes Germanici. — Breslau, 1870.

G. von Niessl, Neue Kernpilze, in Oest. bot. Zeits. — Wien, 1874.

L. Fuckel, Symbolae Mycologicae, Nachträge I—III. — Wiesbaden, 1871—1875.

G. Winter, Die Deutschen Sordarien. — Halle, 1873.

L. Rabenhorst, Mycologia Europaea. Opus absque titulo et impressionis anno. Pyrenomycetes plurimi ibidem propositi et descripti ab Auerswald.

Hedwigia, ein Notizblatt für kryptogamische Studien, I—XXII. — Dresden, 1852—1884.

Klotzsch, Herbarium Mycologicum, editio secunda, edita a L. Rabenhorst. Centuriae I—VIII. — Dresdae, 1850—1860.

L. Rabenhorst, Fungi Europaei. Centuriae I—XXX. — Dresdae, 1859—1884.

Duby, Mémoire sur la tribu des Hystérinées. — Genève, 1861.

G. de Notaris, Micromycetes Italici novi vel minus cogniti. Decades I—IX. — Taurini, 1839—1855.

V. Cesati et **G. de Notaris,** Schema di classificazione degli Sferiacei italici aschigeri (e Comm. Soc. crittog. Ital. I, p. 177—238).

G. de Notaris, Sferiacei italici. Centuria I (unica). — Genovae, 1863.

G. de Notaris, Prime linee di una dispozione de Pirenomiceti Isterini in Giorn. bot. Ital. II. — Firenze, 1847.

P. A. Saccardo, Mycologiae Venetae Specimen. — Pataviae, 1873.

P. A. Saccardo, Fungi Veneti novi vel critici. Series I—V, a° 1873—1876. — I, II et V in Nuovo Giornale Botanico Italiano, Series 1, V; Series 2, VII et Series 2, VIII; III in Hedwigia 1875; IV in Atti della Società Veneto-Trentiana di Scienze Naturali in Padova IV luce prodierunt.

P. A. Saccardo, Conspectus generum Pyrenomycetorum italicorum systemate carpologico dispositorum. — Padova, 1875.

P. A. Saccardo, Fungi Italici autographe delineati. Tabulae 1—1280. — Padova, 1877—1884.

C. Spegazini, Nova addenda ad Mycologiam Venetam. I—II. — Patavii 1875 et Mediolani 1880.

REVISIO.

Fam. I. PERISPORIACEAE Fr. (cf. Versl. en Med. Kon. Ak. v. Wet., Afd. Natuurk., 2e Serie, XIX, p. 351—363). Monendum tamen Microsphaeriam Eryngii aestate praeterita detectam esse in foliis Evonymi europaei.

Fam. II. SPHAERIACEAE Fr.

Sect. 1. ALLANTOSPORAE SACC.

COELOSPHAERIA SACC.

1. **Coelosphaeria cupularis** (P.) Karsten Symb. ad Mycol. Fenn. 42; Sacc. Syll. I, 91. — Sphaeria cupularis in Prodr. Fl. Bat. n^0. 3051; Nitschkia Fuckelii in Oud. Herb. v. Nederl. Pl. n^0. 761.

   In ramis ulmeis. — Amsterdam. — Goes.

2. **Coelosphaeria tristis** (P.) Sacc. Syll. I, 92. — Sphaeria cupularis in Prodr. Fl. Bat. n^0. 3051, quoad exempla in ramis sambucinis collecta; ibid n^0. 3074.

   In ramis sambucinis et in ligno acerino putrescente. — Leiden. — Utrecht.

CALOSPHAERIA TUL.

1. **Calosphaeria Princeps** Tul. S. F. C. II, 109; Sacc. Syll. I, 95. — Sphaeria pulchella in Prodr. Fl. Bat n^0. 3040.

   In cortice Prunorum. — Maastricht.

QUATERNARIA Tul.

1. **Quaternaria Persoonii** Tul. S. F. C. II, 105; Sacc. Syll. I, 106. — Sphaeria quaternata in Prodr. Fl. Bat. n°. 3042.
   In ramis betulinis et fagineis. — Walcheren.
2. **Quaternaria dissepta** (Fr.) Tul. S. F. C. II, 107; Sacc. Syll. I, 107. — Valsa dissepta in Ned. Kr. Arch. 2, I, 183 et III, 159; Arch. Néerl. VIII, 404.
   In ramis ulmeis. — Amsterdam. — Naaldwijk.

VALSA Fr.

1. **Valsa ceratophora** Tul. S. F. C. II, 191; Sacc. Syll. I, 108. — Sphaeria ceratosperma in Prodr. Fl. Bat. n°. 3018.
   In ramis querneis. — Baarn. — Harderwijk. — Goes. — Maastricht.
2. **Valsa Rubi** Fuck. Symb. 200; Sacc. Syll. I, 109. — Diatrype ceratosperma in Ned. Kr. Arch. 1, V, 343.
   In ramis Ruborum. — Grebbe. — Lochem.

3.? **Valsa coronata** (Hoffm.) Fr. S. V. S. 421; Sacc. Syll. I, 110. — Sphaeria coronata in Prodr. Fl. Bat. n°. 3035.
   In cortice fagineo. — Utrecht.

4. **Valsa decorticans** Fr. S. V. S. 412; Nitschke Pyren. Germ. 194; Sacc. Syll. I, 123. — Sphaeria decorticans in Prodr. Fl. Bat. n°. 3036.
   In ramis fagineis et Sorbi Aucupariae. — Maastricht.
5. **Valsa ambiens** (P.) Fr. S. V. S. 412; Sacc. Symb. I, 131. — Valsa deplanata Ned. Kr. Arch. 1, V, 345; Arch. Néerl. VIII, 404.
   In ramis Pyri Mali et Crataegi monogynae. — Bloemendaal. — Naaldwijk. — Lochem.
6. **Valsa salicina** (P.) Fr. S. V. S. 412; Nitschke Pyren. Germ. 212; Sacc. Syll. I, 131. — Sphaeria salicina in Prodr. Fl. Bat. n°. 3038.
   In ramis salicinis emortuis. — Rotterdam, Leiden. — Goes.

7. **Valsa nivea** (Hoffm.) Fr. S. V. S. 411; Nitschke Pyren. Germ. 224; Sacc. Syll. I, 137. — Sphaeria nivea Prodr. Fl. Bat. n°. 3032.
   In ramis populneis et salicinis. — Amsterdam. — Naaldwijk.

EUTYPELLA Nke.

1. **Eutypella Prunastri** (P.) Sacc. Syll. I, 147. — Sphaeria Prunastri in Prodr. Fl. Bat. n°. 3025.
   In ramis pruneis. — Utrecht.
2. **Eutypella stellulata** (Fr.) Sacc. Syll. I, 149. — Sphaeria stellulata in Prodr. Fl. Bat. n°. 3026.
   In ramis alneis. — Amsterdam, Sloterdijk.

EUTYPA Tul.

1. **Eutypa Acharii** Tul. S. F. C. II, 53; Sacc. Syll. I, 162. — Sphaeria eutypa in Tijds. Nat. Ges. XI, 394; Prodr. Fl. Bat. n°. 3095.
   In ramis crassioribus Aceris Pseudoplatani. — Amsterdam (sicc. in Oud. Fgi Neerl. exs. n°. 169).
2. **Eutypa lata** (P.) Tul. S. F. C. II, 56; Sacc. Syll. I, 170. — Valsa lata Nitschke Pyren. Germ. 141. — Sphaeria lata in Tijds. Nat. Ges. XI, 394; Prodr. Fl. Bat n°. 3021; Sphaeria undulata Prodr. Fl. Bat. n°. 3008.
   In cortice et ligno fraxineis et in ramis Crataegi et Coryli. — Amsterdam. — Leiden, Naaldwijk. — Utrecht. — Goes. — Maastricht.
3. **Eutypa scabrosa** (Bull.) Fuck. Symb. 215; Sacc. Syll. I, 171. — Sphaeria scabrosa in Prodr. Fl. Bat. n°. 3014.
   In ramis et truncis querneis. — Maastricht.
4. **Eutypa flavo-virescens** (Hoffm.) Tul. S. F. C. II, 57; Sacc. Syll. I, 172. — Sphaeria flavovirens in Prodr. Fl. Bat. n°. 3013; Diatrype flavovirens in Ned. Kr. Arch. 1, V, 343.
   In ramis. — Naaldwijk. — Utrecht. — Lochem.

5. **Eutypa Fraxini** Oud. in Ned. Kr. Arch. 2, III, 156 (a^0 1878); Sacc. Syll. I, 174 (a^0 1882).
In ramis fraxineis. — Amsterdam.

6. **Eutypa velutina** (Wallr.) Sacc. Fgi Ven. Ser. IV, 16; Syll. I, 176. — Sphaeria velutina in Prodr. Fl. Bat. n^0. 3022.
In ramis et ligno dejectis. — Leiden. — Goes.

CRYPTOSPHAERIA Grev.

1. **Cryptosphaeria populina** (P.) Sacc. Syll. I, 183. — Sphaeria corticis in Prodr. Fl. Bat. n^0. 3097.
In cortice populino vetusto. — Maastricht.

DIATRYPE Fr.

1. **Diatrype disciformis** (Hoffm.) Fr. S. V. S. 385; Nitschke Pyren. Germ, 67; Sacc. Syll. I, 191. — Sphaeria disciformis Dozy et Molk. Bijdr. 8; Prodr. Fl. Bat. n^0. 3011.
In ramis quercinis, fraxineis et aesculinis. — Amsterdam. — Leiden. — Maastricht.

2. **Diatrype bullata** (Hoffm.) Fr. S. V. S. 385; Sacc. Syll. I, 192. — Sphaeria bullata Prodr. Fl. Bat. n^0. 3007; Diatrype bullata in Ned. Kr. Arch. 1, V, 342.
In ramis salicinis, alneis, coryleis. — Amsterdam. — Naaldwijk. — Lochem. — Kampen, Zalk. — Groningen. — Maastricht.

3. **Diatrype Stigma** (Hoffm.) Fr. S. V. S. 385; Nitschke Pyren. Germ. 65; Sacc. Syll. I, 193. — Sphaeria Stigma in Tijds. Nat. Ges. XI, 393 et Prodr. Fl. Bat. n^0. 3009; Sphaeria decorticata in Prodr. Fl. Bat. n^0. 3010.
In ramis fagineis et Prunorum. — Amsterdam, Haarlem. — Rotterdam, Leiden. — Utrecht. — Maastricht.

DIATRYPELLA.

1. **Diatrypella verruciformis** (Ehrb.) Nitschke Pyren. Germ.

76; Sacc. Syll. I, 200. — Sphaeria verruciformis in Prodr. Fl. Bat. n°. 3012; Diatrype verruciformis in Ned. Kr. Arch. 1, V, 342.

In ramis querneis, carpineis, ulmeis. — Amsterdam, Bloemendaal. — Utrecht. — Maastricht.

2. **Diatrypella quercina** (P.) Nitschke Pyren. Germ. 71; Sacc. Syll. I, 206. – Sphaeria quercina in Tijds. Nat. Gesch. XI, 393; Prodr. Fl. Bat. n°. 3015.

In ramis querneis. — Haarlem. — den Haag, Leiden. — Utrecht. — Maastricht.

3. **Diatrypella melaena** Nitschke Pyren. Germ. 78; Sacc. Syll. I, 209.

In ramis Tiliae europaeae. — Amsterdam.

Sect. 2. PHAEOSPORAE SACC.

CERATOSTOMA FR.

1. **Ceratostoma piliferum** (Fr.) Fuck. Symb. 128; Sacc. Syll. I, 219. — Sphaeria dryina in Ned. Kr. Arch. 1, V, 344; Arch. Néerl. VIII, 406. — Ceratostoma piliferum in Versl. Med. Kon. Ak. v. Wet. Afd. Nat. 2, XVIII, 383.

In cortice vetusto Pini Strobi. — Eerbeek.

CHAETOMIUM KZE.

1. **Chaetomium comatum** (Tode) Fr. S. M. III, 253; Sacc. Syll. I, 221. — Chaetomium elatum Zopf, zur Entw.ges. der Ascom. (Chaet.) 83; Tijds. Nat. Gesch. XII, 273; Prodr. Fl. Bat n°. 2984.

In graminum residuis putrescentibus. — Leiden, Naaldwijk. — Goes.

2. **Chaetomium chartarum** Ehrenb. Sylv. myc. berol. 27; Sacc. Syll. I, 223. — Chaetomium Kunzeanum Zopf, zur Entw.ges. der Ascom. (Chaet.) 13 et 82.

In charta liquore stercoroso per longius tempus madefacto.

3. **Chaetomium spirale** Zopf, zur Entw.ges. der Ascom. (Chaetomium) 70 et 79; Sacc. Syll. I, 224. — Versl. Med. Kon. Ak. v. Wet. Afd. Nat. 2, XVIII, 378.
   In fimo cuniculorum. — Overveen.
4. **Chaetomium bostrychodes** Zopf, zur Entw.ges. der Ascom. (Chaetomium) 66 et 81; Sacc. Syll. I, 224. — Versl. en Med. Kon. Ak. v. Wet. Afd. Nat. 2, XVIII, 378.
   In fimo cuniculorum. — Overveen.

SORDARIA Ces. et de Not.

1. **Sordaria coprophila** (Fr.) Ces. et de Not. Schema Sfer. 226; de Not. Sfer. ital. t. XX; Winter Sord. 26; Sacc. Syll. I, 230. — Versl. Med. Kon. Ak. v. Wet. Afd. Nat. 2, XVIII, 383.
   In stercore vaccino. — Rijżenburger bosch.
2. **Sordaria minuta** Fuck. Symb. App. II, 44; Wint. Sord. 36; Sacc. Syll. I, 231. — Versl. Med. Kon. Ak. v. Wet. Afd. Nat. 2, XVIII, 383.
   In fimo cuniculorum. — Haarlem.
3. **Sordaria fimiseda** Ces. et de Not. Schema Sfer. 226; Wint. Sord. 25; Sacc. Syll. I, 232. — Versl. Med. Kon. Ak. v. Wet. Afd. Nat. 2. XVIII, 384.
   In fimo cuniculorum. — Brielle.
4. **Sordaria curvula** de Bary, Morph. d. Pilze 209; Wint. Sord. 37; Sarc. Syll. I, 233. — Versl. Med. Kon. Ak. v. Wet. Afd. Nat. 2, XVIII, 384.
   In fimo herbivororum variorum.
   var. coronata Wint. Sord. 38; Sacc. Syll. I, 234.
   In fimo vaccino. — Amsterdam.
5. **Sordaria decipiens** Wint. Sord. 28; Sacc. Syll. I, 235. — Versl. Med. Kon. Ak. v. Wet 2, XVIII, 384.
   In fimo cuniculorum. — Overveen.
6. **Sordaria lanuginosa** (Pr.) Sacc. Fgi Ven Ser. VI, 26: Syll. I, 237. — Sphaeria Brassicae in Ned. Kr. Arch. 2, I, 264; Arch. Néerl. VIII, 405.
   In caulibus putrescentibus Brassicae. — Naaldwijk.

7. **Sordaria anserina** Wint. Sord. 35; Sacc. Syll. I, 238. — Versl. Med. Kon. Ak. v. Wet. Afd. Nat. 2, XVIII, 384.
In fimo cuniculorum. — Overveen.

HYPOCOPRA.

1. **Hypocopra fimicola** (Rob.) Sacc. Syll. I, 240. — Versl. Med. Kon. Ak. v. Wet. Afd. Nat. 2, XVIII, 384.
In fimo equino et caprearum. — Amsterdam.
2. **Hypocopra Winterii** Oud. in Hedwigia 1882, p. 160; Versl. Med. Kon. Ak. v. Wet. Afd. Nat. 2, XVIII, 384. — Sacc. Syll. II, Add. ad vol. I, X. — Sordaria Winterii Oud. in Hedwigia 1882, p. 123.
In fimo Cameli Bactriani. — Amsterdam.
3. **Hypocopra discospora** Fuck. Symb. App. II, 43; Sacc. Syll. I, 240. — Versl. Med. Kon. Akad. v. Wet. Afd. Nat. 2. XVIII, 385.
In fimo cuniculorum. — Haarlem.
4. **Hypocopra platyspora** (Plowr.) Sacc. Syll, I, 241. — Versl. Med. Kon. Ak. v. Wet. Afd. Nat. 2, XVIII, 385.
In fimo cuniculorum. — Overveen.
5. **Hypocopra microspora** (Plowr.) Sacc. Syll. I, 241. — Versl. Med. Kon. Ak. v. Wet. Afd. Nat. 2, XVIII, 385.
In fimo cuniculorum. — Overveen.
6. **Hypocopra macrospora** (Auersw.) Sacc. Syll. I, 241. — Versl. Med. Kon. Ak. v. Wet, Afd. Nat. 2, XVIII, 385.
In fimo cuniculorum. — Overveen.
7. **Hypocopra bombardoides** (Auersw. et Winter) Sacc. Syll. I, 243. — Versl. Med. Kon. Akad. v. Wet. Afd. Nat. 2, XVIII, 385.
In fimo cuniculorum. — Overveen.
8. **Hypocopra minima** (Sacc. et Speg.) Sacc. Syll. I, 244. — Versl. Med. Kon. Ak. v. Wet. Afd. Nat. 2, XVIII, 385.
In fimo cuniculorum. — Overveen.
9. **Hypocopra stercoraria** (Sow.) Sacc. Syll. I, 244. — Sphaeria stercoraria in Tijds. Nat. Gesch. XI, 394; Prodr. Fl. Bat. n^0. 3081. Hypocopra stercoraria in Versl. Med. Kon. Ak. v. Wet. Afd. Nat. 2, XVIII, 385.

In stercore equino et fimo cuniculorum. — Overveen. — Leiden. — Harderwijk.

10. **Hypocopra Karstenii** nov. sp. — Pertinet ad Sect. C. in Hansen Champ. Sterc. du Danemarck, Résumé p. 20. — Sporae in quovis asco 8, monostichae, ovales, 25 μ longae, 16—17 μ latae, muco obductae, ad polam inferiorem globulo auctae, nigrae.

   In fimo cuniculorum. — Overveen.

11. **Hypocopra Serignanensis** Fabre in Ann. Sc. nat. 6, IX, 77; Sacc. Syll. I, 244 — Versl. Med. Kon. Ak. v. Wet. Afd. Nat. 2, XVIII, 386.

   In fimo cuniculorum. — Overveen.

12. **Hypocopra maxima** (Niessl) Sacc. Syll. I, 245. — Versl. Med. Kon. Ad. v. Wet. Afd. Nat. 2, XVIII, 386.

   In fimo cuniculorum. — Overveen.

13. **Hypocopra papyricola** (Wint.) Sacc. Syll. I, 245. — Versl. Med. Kon. Ak. v. Wet. Afd. Nat. 2, XVIII, 386.

   In charta liquore stercoroso diutius madefacto. — Amsterdam.

COPROLEPA Fuck.

1. **Coprolepa merdaria** (Fr.) Fuck. Symb. 240; Sacc. Syll. I. 248. — Versl. Med. Kon. Ak. v. Wet. Afd. Nat. 2, XVIII, 386.

   In fimo cuniculorum. — Overveen.

2. **Coprolepa equorum** Fuck. Symb. 240; Sacc. Syll. I, 249. — Versl. Med. Kon. Ak. v. Wet. Afd. Nat. 2, XVIII, 386.

   In fimo equorum. — Amsterdam.

3. **Coprolepa Saccardoi** Oud. in Hedwigia 1882, p. 161; Versl. Med. Kon. Ak. v. Wet. Afd. Nat. 2, XVIII, 386. — Sacc. Syll. II, Add. ad vol. I, XI.

   In fimo cuniculorum. — Overveen.

PHILOCOPRA Speg.

1. **Philocopra Hansenii** Oud. in Hedwigia 1882, p. 160;

Versl. Med. Kon. Ad. v. Wet. Afd. Nat. 2, XVIII, 387. — Sacc. Syll. II, Add. ad vol. I, XI. — Sordaria Hansenii Oud. in Hedw. 1882, p. 123.

In fimo cuniculorum. — Haarlem.

2. **Philocopra plejospora** (Wint.) Sacc. Syll. I, 249.

In fimo cuniculorum. — Wageningen.

3. **Philocopra dubia** (Hansen) Sacc. Syll. I, 251. — Versl. Med. Kon. Ak. v. Wet. Afd. Nat. 2, XVIII, 387.

In fimo cuniculorum. — Overveen.

ROSELLINIA DE NOT.

1. **Rosellinia aquila** (Fr.) de Not. Sfer. ital. 21, t. 18; Sacc. Syll. I, 252. — Sphaeria aquila Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3072; Ned. Kr. Arch. 1, V, 343.

In ramis variarum arborum. — Naaldwijk. — Utrecht.— Lochem. — Maastricht.

var. byssiseda (Tode) Sacc. ibid. — Sphaeria byssiseda in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3073. In ramis querneis et salicinis. — Enkhuizen. — Maastricht.

2. **Rosellinia mammiformis** (P.) Ces. et de Not. Sfer. ital., 227; Sacc, Syll. I, 258. — Sphaeria mammaeformis in Prodr. Fl. Bat. a⁰ 3080.

In ligno putrescente. — Zwake. — Maastricht.

BOMBARDIA FR.

1. **Bombardia fasciculata** Fr. S. V. S. 389; Sacc. Syll. I, 277. — Sphaeria bombarda in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3083.

In truncis putrescentibus. — Maastricht.

ANTHOSTOMELLA SACC.

1. **Anthostomella lugubris** (Roberge et Desm.) Sacc. Syll. I, 278. — Sphaeria lugubris in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3130.

In foliis siccis Ammophilae arenariae. — Haarlem.

ANTHOSTOMA Nitschke.

1. **Anthostoma Xylostei** (P.) Sacc. Fgi ital. t. 162; Syll. I, 300. — Sphaeria Xylostei in Prodr. Fl. Bat, n^0. 3101.
In ramis Lonicerae Xylostei. — Utrecht.
2. **Anthostoma turgidum** (P.) Nitschke Pyren. Germ. 121; Sacc. Syll. I, 303. — Sphaeria turgida in Prodr. Fl. Bat. n^0. 3037.
In ramis fagineis. — Naaldwijk. — Maastricht.

XYLARIA Hill.

1. **Xylaria polymorpha** (P.) Grev. Fl. Edin. 35; Nitschke Pyren. Germ. 17; Sacc. Syll. I, 309. — Prodr. Fl. Bat. n^0. 2992; Ned. Kr. Arch. 2, I, 92.
Ad truncos caesos. — Amsterdam. — Dordrecht, Naaldwijk. — Groningen. — Maastricht.
Sicc. in Oud. Herb. van Nederl. Planten n^0. 572.
2. **Xylaria coronata** West. in Prodr. Fl. Bat. n^0. 2995; Sacc. Syll. I, 314,
In truncis putridis. — Maastricht.
3. **Xylaria longipes** Nitschke Pyren. Germ. 14; Sacc. Syll. I, 328. — Ned. Kr. Arch. 2, I, 92 et 183; Arch. Néerl. VIII, 403.
Ad receptacula plantarum majorum putredine consumta in caldario Horti bot. Amstelaedamensis.
Sicc. in Oud. Herb. v. Nederl. Pl. n^0. 573.
4. **Xylaria Hypoxylon** (P.) Grev. Fl. Edin. 355; Nitschke Pyren. Germ. 5; Sacc. Syll. I, 133. — Sphaeria Hypoxylon in Tijds. Nat. Gesch. XI, 393; Xylaria cornuta in Prodr. Fl. Bat n^0. 2990.
Ad truncos vetustos et ligna putredine consumta. — Leiden, Naaldwijk, Zwijndrecht. — Ubbergen. — Kampen. — Groningen. — Maastricht.
var. cupressiformis P. — Sphaeria Hypoxylon var. cupressiformis in Tijds. Nat Gen. XI, 393; Xylaria cupressiformis in Prodr. Fl. Bat. n^0,

2991. — Una cum forma typica. — Haarlem. — Leiden. — Goes.

var. pedata Fr. — Sphaeria Hypoxylon var. pedata in Tijds. Nat. Gesch. XI, 393; Xylaria cupressiformis α pedata in Prodr. Fl. Bat. sub. n°. 2991. — Una cum forma typica. — Leiden, Dordrecht.

5. **Xylaria carpophila** (P.) Fr. S. V. S. 382; Nitschke Pyren. Germ. 6; Sacc. Syll. I, 336. — Sphaeria carpophila in Dozy et Molk. Bijdr. 8; Xylaria carpophila in Prodr. Fl. Bat. n°. 2994.

In cupulis maturis putrescentibus Fagi sylvaticae. — Bloemendaal. — Leiden.

Sicc. in Oud. Fgi Neerl. exs. n°. 273.

6. **Xylaria digitata** (L.) Grev. Fl. Edin. 356; Nitschke Pyren. Germ. 9; Sacc. Syll. I, 339. — Xylaria digitata in Prodr. Fl. Bat. n°. 2993; Ned. Kr. Arch. 1, V, 342.

In ligno putrido et truncorum fraxineorum residuis. — Haarlem. — Leiden. — Renkom, Lochem, Zutphen.

7. **Xylaria filiformis** (A. S.) Fr. S. V. S. 382; Nitschke Pyren. Germ. 12; Sacc. Syll. I, 342. — Xylaria filiformis in Ned. Kr. Arch. 2, I. 92 et 183; Arch. Néerl. VIII, 403.

In ramulis et acubus Pinorum putrescentibus. — Naaldwijk. — Doorn.

PORONIA Willd.

1. **Poronia punctata** (L.) Fr. S. V. S. 382; Sacc. Syll. I, 348. — Prodr. Fl. Bat. n°. 2989.

In stercore vetusto vaccino et leporino. — Sloten, Haarlem. — Naaldwijk. — Eerbeek. — Harderwijk.

USTULINA Tul.

1. **Ustulina vulgaris** Tul. S. F. C. II, 23; Sacc. Syll. I, 351. — Sphaeria deusta in Dozy et Molk Bijdr. 8;

Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3005. — Hypoxylon ustulatum in Ned. Kr. Arch. 1, V, 342.

Ad truncos salicinos et ad radices truncorum vegetorum Fagi sylvaticae. — Haarlem. — Leiden. — Baarn. — Doornwerth, Hemmen, Soerensch bosch.

HYPOXYLON Bull.

1. **Hypoxylon coccineum** Bull. Champ. de Fr. 174; Nitschke Pyren. Germ. 28; Sacc. Syll. I, 353.

   In ramis fraxineis. — Renkom.

2. **Hypoxylon fuscum** (P.) Fr. S. V. S 384; Nitschke Pyren. Germ. 35; Sacc. Syll. I, 361. — Sphaeria fusca in Tijds. Nat. Gesch. XI, 393; Prodr. Fl. Bat. n⁰. 2998.

   In ramis putrescentibus alneis et fagineis. — Amsterdam. — Leiden, Katwijk, Voorschoten, Naaldwijk. — Utrecht. — Kampen. — Goes. — Maastricht.

3. **Hypoxylon cohaerens** (P.) Fr. S. V. S. 384; Nitschke Pyren. Germ, 42; Sacc. Syll. I, 361. — Sphaeria cohaerens in Tijds. Nat. Ges. XI, 393; Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3000.

   In truncis putridis, praesertim Salicum. — Leiden.

4. **Hypoxylon multiforme** Fr. S. V. S. 384; Nitschke Pyren. Germ. 43; Sacc. Syll. I, 363. — Sphaeria multiformis in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3002; Sphaeria granulosa ibid n⁰. 3001; Hypoxylon multiforme in Ned. Kr. Arch. 1, V. 342.

   In ramis truncisque Betulae, Alni, Fagi. — Bloemendaal, Zandvoort. — Leiden. — Naaldwijk. — Utrecht. — Renkom.

5. **Hypoxylon unitum** Nitschke Pyren. Germ. 44; Sacc. Syll. I, 384; Ned. Kr. Arch. 2, II, 185.

   In ramis quercinis decorticatis ad conficienda receptacula Orchidearum tropicarum adhibitis. — Amsterdam.

6. **Hypoxylon udum** (P.) Fr. S. V. S. 384; Nitschke Pyren. Germ. 52; Sacc. Syll. I. 336. — Sphaeria confluens in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3004.

Ad ligna emollita Salicum. — Ankeveen. — Leiden. — Goes.

DALDINIA de Not. et Ces.

1. **Daldinia concentrica** (Bolt.) Ces. et de Not. Schema Sfer. 198; Sacc. Syll. I, 393. — Sphaeria concentrica in Dozy et Molk. Bijdr. 8; Prodr. Fl. Bat. n°. 2996.
In truncorum residuis. — den Haag, Leiden. — Lochem.

NUMMULARIA Tul.

1. **Nummularia Bulliardi** Tul. S. F. C. II, 43; Nitschke Pyren. Germ. 60; Sacc. Syll. I, 396. — Sphaeria Nummularia in Prodr. Fl. Bat. n°. 3006.
In ramis querneis et fagineis. — Maastricht.
2. **Nummularia repandoides** Fuck. Symb. 236; Sacc. Syll. I, 397. — Sphaeria operculata in Tijds. Nat. Gesch. XI, 394; Prodr. Fl. Bat. n°. 3096; Nummularia repandoides in Ned. Kr. Arch. 2, II, 186.
In ligno putrescente Abietis et Alni. — Leiden.

Sect. 3. Hyalosporae Sacc.

CERATOSTOMELLA Sacc.

1. **Ceratostomella cirrhosa** (P.) Sacc. Syll. I, 408. — Sphaeria cirrhosa in Ned. Kr. Arch. 1, V, 344; Arch. Néerl. VIII, 406.
In ligno carioso molli Pini. — Lochem.

GNOMONIELLA Sacc.

1. **Gnomoniella tubiformis** (Tode) Sacc. Syll. I, 413. — Sphaeria tubaeformis in Tijds. Nat. Gesch. XI, 395; Prodr. Fl. Bat. n°. 3131.

In foliis alneis delapsis. — Leiden, Warmond, Voorschoten. — de Bildt. — Ubbergen.

2. **Gnomoniella vulgaris** (Ces. et de Not.) Sacc. Syll. I, 416. — Sphaeria Gnomon in Prodr. Fl. Bat. n°. 3132.
   In foliis Coryli Avellanae. — Maastricht.
3. **Gnomoniella Euphorbiae** (Fuck.) Sacc. Syll. I, 418. — Sphaeria (Plagiostoma) Euphorbiae in Ned. Kr. Arch. 2, II, 103.
   In caulibus emortuis Euphorbiae palustris. — Amsterdam.
4. **Gnomoniella fimbriata** (P.) Sacc. Syll. I, 419. — Dothidea fimbriata in Prodr. Fl. Bat. n°. 3163.
   In foliis adhuc vegetis Carpini Betuli. — Rotterdam.— Maastricht.

LAESTADIA Auersw.

1. **Laestadia carpinea** (Fr.) Sacc. Fgi ital. t. 543 et Syll. I, 426. — Sphaeria carpinea in Dozy et Molk. Bijdr. 8; Prodr. Fl. Bat. n°. 3137.
   In foliis languescentibus Carpini Betuli. — Utrecht.

DITOPELLA de Not.

1. **Ditopella fusispora** de Not. Sfer. ital. t. 48; Sacc Syll. I, 450. — Sphaeria ditopa in Prodr. Fl. Bat. n°. 3098; Halonia ditopa in Ned. Kr. Arch. 1, V, 344.
   In ramis alneis. — Naaldwijk. — Warmond. — Lochem.

BOTRYOSPHAERIA Ces. et de Not.

1. **Botryosphaeria Dothidea** (Moug. et Fr.) Ces. et de Not. Schema Sfer. 212. — Sphaeria Dothidea in Prodr. Fl. Bat. n°. 3056; Ned. Kr. Arch. 1, V, 344.

In ramis Robiniae Pseudacaciae et Rosarum. — Grebbe. — Hulst.

CRYPTOSPORELLA Sacc.

1. **Cryptosporella Limminghii** (West.) Sacc. Syll. I, 466.— Sphaeria Limminghii in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3027.
   In ramis ulmeis. — Amsterdam. — Leiden. — Groningen.

Sect. 4. Hyalodidymae Sacc.

SPHAERELLA Ces. et de Not.

1. **Sphaerella allicina** (Fr.) Auersw. in Rabenh. Mycol. Eur. Pyr. 19; Sacc. Syll. I, 422. — Sphaeria allicina in Tijds. Nat. Gesch. XI, 394; Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3068.
   In foliis morientibus Allii Porri. — Leiden.
2. **Sphaerella brunneola** (Fr.) Cooke Brit. Fgi 922; Sacc. Syll. I, 423. — Sphaeria brunneola in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3139.
   In foliis Convallariae majalis. — Maastricht.
   Apud nos hucusque nonnisi immatura (Ascospora brunneola) visa.
3. **Sphaerella punctiformis** (P.) Rab. in Klotzsch Herb. Myc. ed. II, n⁰. 264; Sacc. Syll. I, 476. — Sphaeria punctiformis in Tijds. Nat. Gesch. XI, 395; Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3142.
   In foliis delapsis Quercus. — Leiden, Naaldwijk. — Zwake.
4. **Sphaerella maculiformis** (P.) Auersw. in Rab. Mycol. Europ. Pyren. 5; Sacc. Syll. I, 477. — Sphaeria maculiformis in Tijds. Nat. Gesch. XI, 395; Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3140; Ned. Kr. Arch. 2, I, 92.
   In foliis marcescentibus Quercus et Castaneae. — Leiden. — Utrecht. — Beek. — Kampen. — Maastricht.

5. **Sphaerella Taxi** Cooke Grev. VI, 128; Sacc. Syll. I, 480. — Sphaeria Taxi in Prodr. Fl. Bat. n^0. 3108.

In foliis Taxi baccatae. — Goes.

6. **Sphaerella salicicola** (Fr.) Fuck. Symb. 106; Sacc. Syll. I, 487.

In foliis Salicis pentandrae. — Naaldwijk.

7. **Sphaerella macularis** (Fr.) Auersw. in Rab. Myc. Europ. Pyren. 9; Sacc. Syll. I, 488. — Sphaeria macularis in Prodr. Fl. Bat. n^0. 3109.

In foliis Acerum et Populorum. — Groningen.

8. **Sphaerella Brassicicola** (Duby) Ces. et de Not. Schema Sfer. 238; Sacc. Syll. I, 502. — Dothidea brassicae in Prodr. Fl. Bat. n^0. 3160.

In foliis Brassicae oleraceae. — Leiden. — Utrecht. — Goes.

9. **Sphaerella melanoplaca** (Desm.) Auersw. in Rab. Myc. Eur. Pyren. 13; Sacc. Syll. I, 506. — Sphaeria melanoplaca in Prodr. Fl. Bat. n^0. 3147.

In foliis languescentibus Gei urbani. — Maastricht.

10. **Sphaerella Eryngii** (Wallr.) Cooke Brit. Fgi 917; Sacc. Syll. I, 511.

In foliis Eryngii maritimi. — Katwijk.

11. **Sphaerella Rumicis** (Desm.) Cooke Brit. Fgi 920; Sacc. Syll. I, 512. – Ned. Kr. Arch. 2, I, 92.

In foliis Rumicis obtusifolii. — Haarlem.

12. **Sphaerella Passeriniana** Sacc. Syll. II, Add. ad vol. I, XLI. — Sphaeria Cruciferarum in Prodr. Fl. Bat. n^0. 3144.

In caulibus, pedunculis et fructibus Sisymbrii officinalis. — Goes.

13. **Sphaerella nebulosa** (P.) Sacc. Mich. II, 56; Syll. I, 515. — Sphaeria nebularis Dozy et Molk. Bijdr. 8; Prodr. Fl. Bat. n^0. 3064; Sphaeria nebulosa in Ned. Kr. Arch. 1, V, 344.

In caulibus Umbelliferarum. — Leiden. — Lochem. — Maastricht.

14. **Sphaerella polygramma** (Fr.) Niessl neue Kernp. 87; Sacc. Syll. I, 5217. — Sphaeria polygramma in Prodr. Fl. Bat. n^0. 3065.

In caulibus Aegopodii Podagrariae. — Leiden. — Maastricht.

15. **Sphaerella Asteroma** (Fr.) Karst. Myc. Fenn. II, 181; Sacc. Syll. I, 523. — Dothidea Asteroma in Tijds. Nat. Gesch. XI, 396.

In foliis Polygonati multiflori. — Leiden.

Apud nos hucusque nonnisi sterilis (Ascospora Asteroma) reperta.

16. **Sphaerella graminicola** Fuck. Symb. 101; Sacc. Syll. I, 528.

In foliis Dactylis glomeratae. — Naaldwijk.

17. **Sphaerella lineolata** (Desm.) Ces. et de Not. Schema Sfer. 237; Sacc. Syll. I, 531; Ned. Kr. Arch. 2, III, 257.

In foliis Ammophilae arenariae. — Haarlem.

18. **Sphaerella acerina** (Wallr.) Sacc. Syll. I, 536.

In foliis Aceris Pseudoplatani et campestris. — Naaldwijk.

19. **Sphaerella Atomus** (Desm.) Cooke Grevillea III, 169; Sacc. Syll. I, 536. — Sphaeria atomus in Prodr. Fl. Bat. n^0. 3146.

In foliis Fagi sylvaticae. — Leiden. — Goes.

20. **Sphaerella Aucupariae** Plowr. Sphaer. Brit. n^0. 65; Sacc. Syll. I, 537. — Sphaeria Aucupariae in Prodr. Fl. Bat. n^0. 3141.

In foliis delapsis Sorbi Aucupariae. — Domburg. — Maastricht.

Exempla nostra immatura stromatique spurio nigro insidentia Stigmateae generi maxime affinia visa sunt.

21. **Sphaerella Armoraciae** (Fuck.) Oud. in Fgi Neerl. exs. n^0. 176; Sacc. Syll. I, 537.

In foliis Armoraciae rusticanae. — Amsterdam (Hort. Bot.). — Exempla immatura tantum visa.

22. **Sphaerella perforans** (Desm.) Sacc. Syll. I, 538. — Sphaeria perforans in Ned. Kr. Arch. 2, III, 161.

In foliis Ammophilae arenariae. — Haarlem.

23. **Sphaerella Polypodii** (Rabh.) Fuck. Symb. 102; Sacc.

Syll. I, 539. — Sphaeria aquilina in Dozy et Molk. Bijdr. 8; Sphaeria polypodii in Prodr. Fl. Bat. n^0. 3136.

In foliis Polypodii vulgaris et Aspidii filicis maris. — Haarlem. — Putten.

Exempla quae vidi omnia immatura.

STIGMATEA Fr.

1. **Stigmatea Robertiani** Fr. S. V. S. 421; Sacc. Syll. I, 541. — Dothidea Robertiani in Tijds. Nat. Gesch. XI, 396; Prodr. Fl. Bat. n^0. 3169.

   In foliis Geranii Robertiani. — Amsterdam. — Leiden. — Goes. — Maastricht.

2. **Stigmatea Geranii** Fr. S. V. S. 421; Sacc. Syll. I, 541. — Ned. Kr. Arch. 2, I, 317; Arch. Néerl. VIII, 407.

   In foliis Geranii dissecti. — Amsterdam.

3. **Stigmatea maculaeformis** Fr. S. V. S. 421; Sacc. Syll. I, 542. — Sphaeria maculaeformis in Prodr. Fl. Bat. n^0. 3140.

   In foliis delapsis Quercus et Castaneae. — Leiden. — Utrecht. — Kampen. — Maastricht.

4. **Stigmatea Ranunculi** Fr. S. V. S. 421; Sacc. Syll. I, 542. — Dothidea Ranunculi in Tijds. Nat. Gesch. XI, 396.

   In foliis Ranunculi repentis. — Goes.

5. **Stigmatea Ostruthii** (Fr.) Oud. Ascospor. 52; Sacc. Syll. I, 545. — Sphaeria Ostruthii in Prodr. Fl. Bat. 3145.

   In foliis Angelicae sylvestris. — Amsterdam.

   Exempla nostra in foliis adhuc vegetis lecta nonnisi immatura invenimus.

6. **Stigmatea Aegopodii** (Fr.) Oud. Ascosp. 52; Sacc. Syll. I, 545. — Dothidea Podagrariae in Tijds. Nat. Gesch. XI, 395.

   In foliis Aegopodii Podagrariae. — Leiden.

7. **Stigmatea Sorbi** Oud. in Ned. Kr. Arch. 2, II, 187.
In foliis Sorbi Aucupariae. — Lochem.

Exempla quae vidimus cuncta immatura. — Loco citato sequentia annotavimus: »In foliis Sorbi Aucupariae non raro maculae fuscescentes conspicuae fiunt, peritheciis minimis nigris sparsis sustentaculum praebentes. Haec perithecia primo a Laschio examinata (Klotzsch Herb. mycol. n^0. 459, a^0 1844) ab eo generi Septoria, postea vero a Rabenhorstio (Kryptogamen-Flora a^0 1844, p. 170) generi Sphaeria, a Cesatio (Rabh. Fgi Europaei n^0. 160) generi Cryptosporium, a Fiedlero tandem (Rabh. Fgi Europ. n^0. 548) generi Depazea adscripta sunt. Laschio secuti sunt Fuckelius (Symb. Myc. 390), Cookius (Handbook, 448), alii.

Fiedlerus et Cookius fungilli sporas observasse perhibent earumque proprietates brevibus verbis adumbraverunt. Nullus tamen dubito quin illi viri in errorem ducti, alia corpuscula cum sporis commutaverint, quod eo probatur, nemini umquam contigisse sporas in ipso peritheciorum contextu observare. Hic enim semper, quamdiu folia in quibus luxuriantur perithecia putrefactioni non ceciderint, parenchymati e cellulis minoribus polygonis isodiametricis conflato simillimus est, ita ut nihil in illo distinguere liceat nisi nucleum cellulosum colore carentem, et parietem solidiorem e stratis cellularum duabus vel pluribus fuscis conformatum.

Quamquam exempla matura fungilli hujus memorabilis nondum reperta sint, tamen ejus fabrica et crescendi modus, nec minus analogia, jubent Stigmatearum generi eum adscribere. — Folia adhuc viridia fungo onusta legi m. Augusto a^0 1865."

DIDYMELLA Sacc.

1. **Didymella vexata** Sacc. Mich. II, 58; Syll. I, 547. — Sphaeria oblitescens in Ned. Kr. Arch. 2, II, 186.
   In ramis Corni sanguineae. — Leiden.
2. **Didymella tosta** (B. et Br.) Sacc. Syll. I, 556. — Sphaeria (Diaporthe) tosta in Ned. Kr. Arch. 2, II, 104.
   In caulibus exsiccatis Epilobii hirsuti. — de Peel.
3. **Didymella aggregata** (Lasch) Sacc. Syll. I, 558. — Sphaeria aggregata in Prodr. Fl. Bat. n°. 3053.
   In caulibus exsiccatis Euphrasiae Odontitis. — Goes.

GNOMONIA Ces. et de Not.

1. **Gnomonia setacea** (P.) Ces. et de Not. Schema Sfer. 232; Sacc. Syll. I, 563. — Sphaeria setacea in Prodr. Fl. Bat. n°. 3134; Ned. Kr. Arch. 1, V, 344.
   In foliis Quercus. — Naaldwijk. — Lochem.
2. **Gnomonia erythrostoma** (P.) Auersw. in Rab. Myc. Eur. Pyren. 26; Sacc. Syll. I, 566. — Versl. Med. Kon. Ak. v. Wet. Afd. Nat. 2, XVIII, 383.
   In foliis Pruni avium. — Eerbeek.
3. **Gnomonia Cerastis** (Riess) Auersw. in Rab. Myc. Eur. Pyren. 27; Sacc. Syll. I, 569. — Sphaeria setacea α petiolicola in Prodr. Fl. Bat. n°. 3134.
   In petiolis Aceris Pseudoplatani et Aesculi Hippocastani. — Amsterdam. — Harderwijk.
4. **Gnomonia curvirostra** (Sow.) Sacc. Syll. I, 570. — Ned. Kr. Arch. 2, III, 257.
   In caulibus plantarum annuarum. — Naaldwijk.

EPICYMATIA Fuck.

1. **Epicymatia vulgaris** Fuck. Symb. 118; Sacc. Syll. I, 571. — Sphaeria Lichenicola in Tijds. Nat. Gesch. XII, 271; Sphaeria epicymatia in Prodr. Fl. Bat. n°. 3106.

In apotheciis Lecanorae subfuscae et Physciae parietinae. — Leiden. — Utrecht. — Goes.

MELANOPSAMMA Niessl.

1. **Melanopsamma pomiformis** (P.) Sacc. Mich. II, 58; Syll. I, 575. — Sphaeria pomiformis in Ned. Kr. Arch. 1, V, 343; Arch. Néerl. VIII, 405.
   In ligno alneo corrupto. — Lochem.

BERTIA de Not.

1. **Bertia moriformis** (Tode) de Not. in Giorn. bot. ital. I, 335; Sacc. Syll. I, 582. — Sphaeria moriformis in Tijds. Nat. Gesch. XII, 271; Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3085.
   In ligno Salicum emollito. — Leiden. — Kampen. — Goes.

VENTURIA de Not. et Ces.

1. **Venturia Kunzei** Sacc. Fgi Ven. Ser. V, 174; Syll. I, 588. — Dothidea Chaetomium in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3161.
   In foliis Ruborum. — Goes.
2. **Venturia Potentillae** (Fr.) Cooke Grevillea VI, 76; Sacc. Syll. I, 594. — Dothidea Potentillae in Dozy et Molk. Bijdr. 8; Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3159.
   In foliis Potentillae anserinae. — Goes. — Maastricht.

MELANCONIS Tul.

1. **Melanconis stilbostoma** (Fr.) Tul. S. F. C. II, 119; Sacc. Syll. I, 602. — Sphaeria stilbostoma in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3039.
   In ramis variarum arborum. — Leiden.

2. **Melanconis Alni** Tul. Ann. Sc. nat. 4, V, 109; Sacc. Syll. I, 604. — Ned. Kr. Arch. 2, I, 183; Arch. Néerl. VIII, 403.
   In ramis alneis. — Amsterdam.

HERCOSPORA Tul.

1. **Hercospora Tiliae** (Fr.) Tul. S. F. C. II, 154; Sacc. Syll. I, 605. — Sphaeria Tiliae in Prodr. Fl. Bat. n^{0}. 3099.
   In ramis Tiliae delapsis. — Amsterdam, Haarlem. — Leiden.

DIAPORTHE Nitschke.

1. **Diaporthe Chorostate Carpini** (P.) Fuck. Symb. 205; Sacc. Syll. I, 608. — Sphaeria Carpini Prodr. Fl. Bat. n^{0}. 3031.
   In ramis carpineis. — 's Hertogenbosch.
2. **Diaporthe Chorostate longirostris** (Tul.) Sacc. Syll. I, 609. — Valsa Hystrix in Ned. Kr. Arch. 2, I, 264.
   In ramis Aceris Pseudoplatani. — Naaldwijk.
3. **Diaporthe Chorostate Oudemansii** Sacc. Syll. 1, 611. — Valsa Aesculi Oud. in Ned. Kr. Arch. 2, I, 183; Arch. Néerl. VIII, 403.
   In ramis Aesculi Hippocastani. — Amsterdam.
4. **Diaporthe Chorostate oncostoma** (Duby) Fuck. Symb. 205; Sacc. Syll. I, 612. — Sphaeria rostrata in Prodr. Fl. Bat. n^{0}. 3093; Valsa oncostoma in Ned. Kr. Arch. 2, II, 186.
   In ramis Robiniae Pseudacaciae. — Amsterdam. — Leiden.
5. **Diaporthe Chorostate Strumella** (Fr.) Fuck. Syll. 205; Sacc. Syll. 613. — Sphaeria Strumella in Prodr. Fl. Bat. n^{0}. 3019.
   In ramis Ribis rubri. — Goes.

6. **Diaporthe Chorostate leiphaema** (Fr.) Sacc. Mycol. Ven. Spec. 135; Syll. I, 615.
   In ramis querneis. — Amsterdam.
7. **Diaporthe Chorostate detrusa** (Fr.) Fuck. Symb. I, 205; Sacc. Syll. I, 619. — Sphaeria detrusa in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3030.
   In ramis emortuis Berberidis vulgaris. — Leiden.
8. **Diaporthe Chorostate salicella** (Fr.) Sacc. Mycol. Ven. Spec. 135; Syll. I, 622. — Sphaeria salicella in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3023; Ned. Kr. Arch. 2, I, 184; Arch. Néerl. VIII, 406.
   In ramis salicinis. — Amsterdam. — Naaldwijk. — Goes.
9. **Diaporthe Chorostate sphingiophora** (Oud.) Sacc. Syll. I, 622. — Sphaeria sphingiophora Oud. in Ned. Kr. Arch. 2, I, 184; Arch. Néerl. VIII, 622.
   In ramis Cornus albae. — Naaldwijk.
10. **Diaporthe Chorostate Hystrix** (Tode) Sacc. Fgi Veneti Ser. IV, 6; Syll. I, 623. — Valsa Hystrix in Arch. Néerl. VIII, 403.
   In cortice Aceris Pseudoplatani. — Naaldwijk.
11. **Diaporthe Euporthe spiculosa** (A. S.) Nitschke Pyren. Germ. 256; Sacc. Syll. I, 633. — Sphaeria spiculosa in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3020.
   In ramis Viburni Opuli. — Utrecht.
12. **Diaporthe Euporthe ceuthosporioides** (Berk.) Sacc. Syll. I, 646.
   In foliis Pruni Laurocerasi. — Goes.
13. **Diaporthe Euporthe Berkeleyi** (Desm.) Nitschke Pyren. Germ. 273; Sacc. Syll. I, 647. — Sphaeria Berkeleyi in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3127.
   In caulibus Heraclei Sphondylii. — Goes.
14. **Diaporthe Euporthe nigrella** (Auersw.) Niessl Beitr. 51; Sacc. Syll. I, 648. — Sphaeria nigrella in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3128.
   In caulibus variarum herbarum. — Warmond. — Maastricht.
15. **Diaporthe Euporthe inquilina** (Wallr.) Nitschke Pyren.

Germ. 272; Sacc. Syll. I, 650. — Sphaeria inquilina in Ned. Kr. Arch. 2, II, 186.

In caulibus Umbelliferarum majorum. — Naaldwijk.

16. **Diaporthe Tetrastaga rudis** (Fr.) Nitschke Pyr. Germ. 282; Sacc. Syll. I, 662.

In ramis Cytisi Laburni. — Amsterdam.

Exempla quae vidi in statu spermogonifero versabantur.

17. **Diaporthe Tetrastaga rostellata** Nitschke Pyren. Germ. 298 ; Sacc. Syll. I, 667. — Sphaeria conjuncta in Prodr. Fl. Bat. n°. 3041; Sphaeria rostellata in Prodr. Fl. Bat. n°. 3094; Ned. Kr. Arch. 1, V, 344.

In ramis Ruborum. — den Haag. — Baarn. — Harderwijk, Apeldoorn. — Maastricht.

18. **Diaporthe Tetrastaga Lirella** (Moug. et Nestler) Fuck. Symb. 206; Sacc. Syll. I, 668. — Sphaeria lirella Tijds. Nat. Gesch. XII, 271 ; Prodr. Fl. Bat. n°. 3061.

In caulibus Spiraeae Ulmariae. — Leiden, Naaldwijk. — Blauwkapel.

Exempla omnia quae vidi immatura.

19. **Diaporthe Tetrastaga controversa** (Desm.) Fuck. Symb. App. I, 31; Sacc. Syll. I, 676. — Sphaeria controversa in Prodr. Fl. Bat. n°. 3034.

In ramis Corni sanguineae, Aceris Negundinis, Fraxini excelsioris et Syringae vulgaris. — Leiden, Naaldwijk.

20. **Diaporthe Tetrastaga striaeformis** (Fr.) Nitschke in Fuck. Symb. 206; Sacc. Syll. I, 690.

In caulibus Epilobii montani. — Naaldwijk.

Sect. 5. Phaeodidymae Sacc.

DIDYMOSPHAERIA Fuck.

1. **Didymosphaeria conoidea** Niessl Neue Kernp. in Oesterr. bot. Zeits. 1874, p. 202; Sacc. Syll. I, 702.

In caulibus siccatis Urticae. — Domburg.

2. **Didymosphaeria epidermidis** (Fr.) Fuck. Symb. 141; Sacc. Syll. I, 709. — Sphaeria epidermidis in Prodr. Fl. Bat. n°. 3107.
In ramis Berberidis vulgaris. — Naaldwijk. — Goes.

DELITSCHIA Auersw.

1. **Delitschia Auerswaldii** Fuck. Symb. 241; Sacc. Syll. I, 732. — Versl. Med. Kon. Ak. v. Wet. Afd. Nat. 2, XVIII, 387.
In fimo cuniculorum. — Overveen.
2. **Delitschia bisporula** (Crouan) Hansen Fgi fimicoli Dan. 107; Sacc. Syll. I, 732. — Versl. Med. Kon. Ak. v. Wet. Afd. Nat. 2, XVIII, 387.
In fimo cuniculorum. — Wageningen.
3. **Delitschia Winteri** Plowr. Brit. Fgi in Grevillea II, 188; Sacc. Syll. I, 734. — Versl. Med. Kon. Ak. v. Wet. Afd. Nat. 2, XVIII, 387.
In fimo cuniculorum. — Brielle.
4. **Delitschia Niesslii** Oud. Hedw. 1882, p. 163. — Versl. Med. Kon. Ak. v. Wet. Afd. Nat. 2, XVIII, 388. — Sacc. Syll. II, Add. ad vol. I, LIII.
In fimo cuniculorum. — Overveen.
5. **Delitschia leptospora** Oud. Hedw. 1882, p. 163; Versl. Med. Kon. Ak. v. Wet. Afd. Nat. 2, XVIII, 387. — Sacc. Syll. II, Add. ad vol. I, LIII.
In fimo cuniculorum. — Overveen.
6. **Delitschia microspora** Oud. Hedw. 1882, p. 165; Versl. en Med. Kon. Ak. v. Wet. Afd. Nat. 2, XVIII, 388.
In fimo cuniculorum. — Overveen.

OTTHIA Nitschke.

1. **Otthia Syringae** (Fr.) Niessl. Hedw. 1876, p. 2; Sacc. Syll. I, 737. — Sphaeria Syringae in Dozy et Molk. Bijdr. 8; Prodr. Fl. Bat. n°. 3103.
In ramis emortuis Syringae vulgaris. — Goes.

Sect. 6. Phaeophragmiae Sacc.

MASSARIA de Not.

1. **Massaria macrospora** (Desm.) Sacc. Syll. II, 11. — Cucurbitaria macrospora in Ned. Kr. Arch. 2, I, 183; Arch. Néerl. VIII, 404.
   In cortice betulino vetusto. — Naaldwijk.

LEPTOSPHAERIA Ces. et de Not.

1. **Leptosphaeria Doliolum** (P.) de Not. Schema Sfer. 235; Sacc. Syll. II, 14. — Sphaeria Doliolum in Tijds. Nat. Gesch. XI, 395; Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3117.
   In caulibus emortuis Angelicae sylvestris. — Leiden, Naaldwijk. — Blauwkapel. — Maastricht.
2. **Leptosphaeria Clivensis** (B. Br.) Sacc. Syll. II, 16. — Sphaeria clivensis in Ned. Kr. Arch. 2, III, 160.
   In foliis Caricis laevigatae. — Goes.
3. **Leptosphaeria nigrella** (Rabh.) Sacc. Syll. II, 21. — Sphaeria nigrella in Dozy et Molk. Bijdr. 8; Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3128.
   In caulibus Lychnidis diurnae. — Warmond. — Maastricht.
4. **Leptosphaeria Bardanae** (Wallr.) Sacc. Syll. II, 34. — Sphaeria Bardanae in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3123.
   In caulibus Lappae tomentosae. — Utrecht.
5. **Leptosphaeria maculans** (Desm.) Ces. et de Not. in Comm. Soc. bot. Ital. I, 235; Sacc. Syll. II, 35.
   In caulibus Phaseoli nani. — Naaldwijk.
6. **Leptosphaeria haematites** (Rob. et Desm.) Sacc. Syll. II, 36. — Sphaeria haematites in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3113.
   In ramulis siccis Clematidis Vitalbae. — Goes.
7. **Leptosphaeria modesta** (Desm.) Karst. Mycol. Fenn. II, 106; Sacc. Syll. II, 39. — Sphaeria modesta in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3115.
   In caulibus herbarum majorum. — Goes.

8. **Leptosphaeria agnita** (Desm.) de Not et Ces. Schema Sfer. 236; Sacc. Syll. II, 40. — Sphaeria (Pleospora) agnita in Ned. Kr. Arch. 2, II, 104.

In caulibus Eupatorii cannabini. — Amsterdam.

9. **Leptosphaeria acuta** (Moug.) Karst. Mycol. Fenn. II, 98; Sacc. Syll. II, 41. — Sphaeria acuta in Dozy et Molk. Bijdr. 8; Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3114; Sphaeria coniformis ibid. n⁰. 3116.

In caulibus Urticae et Umbelliferarum. — Amsterdam. — Leiden, Warmond. — Utrecht. — Goes. — Maastricht.

10. **Leptosphaeria arundinacea** (Sow.) Sacc. Fgi Ven. Ser. II, 320; Syll. II, 62. — Sphaeria arundinacea in Tijds. Nat. Gesch. XI, 394; Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3062.

In caulibus Phragmitidis vulgaris.

var. Godini Sacc. Syll. II, 63. — Sphaeria Godini in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3063. — Una cum forma typica in culmis Phragmitidis vulgaris. — Amsterdam. — Leiden.

11. **Leptosphaeria epicarecta** (Cooke) Sacc. Syll. II, 65.

In foliis Caricis laevigatae. — Goes.

12. **Leptosphaeria nigrans** (Desm.) Ces. et de Not. Schema Sfer. 235; Sacc. Syll. II, 70. — Sphaeria nigrans in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3129.

In culmis Dactylidis glomeratae. — Boxmeer.

13. **Leptosphaeria Rusci** (Wallr.) Sacc. Syll. II, 74. — Sphaerella Rusci in Arch. Néerl. II, 46.

In cladodiis Rusci aculeati. — Amsterdam (hort. bot.).

14. **Leptosphaeria culmifraga** (Fr.) Ces. et de Not. Schema Sfer. 235; Sacc. Syll. II, 75. — Sphaeria culmifraga in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3120.

In culmis Graminum. — Naaldwijk. — Goes.

CLYPEOSPHAERIA Fuck.

1. **Clypeosphaeria Notarisii** Fuck. Symb. 117; Sacc.

Syll. II, 90. — Sphaeria clypeata in Ned. Kr. Arch. 1, V, 344; Arch. Néerl. VIII, 407.

In ramis Ruborum. — Lochem.

MELANOMMA Nitschke et Fuck.

1. **Melanomma Pulvis pyrius** (P.) Fuck. Symb. 160; Sacc. Syll. II, 98. — Sphaeria pulvis pyrius Tijds. Nat. Gesch. XI, 394; Prodr. Fl. Bat. n^{0}. 3087.

   In ligno corrupto. — Muiden. — Leiden, Rijnsburg, Naaldwijk. — Utrecht. — Beek, Soerensch bosch. — Goes. — Maastricht.

2. **Melanomma Aspegrenii** (Fr.) Fuck. Symb. 159; Sacc. Syll. II, 100. — Sphaeria Aspegrenii in Ned. Kr. Arch. 2, II, 186.

   In ramis dejectis. — Leiden.

3. **Melanomma Epochnii** (B. Br.) Sacc. Mich. I, 344; Syll. II, 104. — Sphaeria Epochnii in Ned. Kr. Arch. 2, II, 186.

   In cortice quodam putrescente. — Leiden.

TREMATOSPHAERIA Fuck.

1. **Trematosphaeria pertusa** (P.) Fuck. Symb. 162; Sacc. Syll. II, 115. — Sphaeria pertusa in Tijds. Nat. Gesch. XI, 394; Prodr. Fl. Bat. n^{0}. 3090.

   In ligno putrido. — Leiden. — Goes.

2. **Trematosphaeria applanata** (Oud.) Sacc. Syll. II, 120.— Sphaeria applanata Oud. in Ned. Kr. Arch. 2, II, 186; Sphaeria operculata in Prodr. Fl. Bat. n^{0}. 3096.

   In ligno vetusto. — Leiden.

SPORORMIA de Not.

1. **Sporormia minima** Auersw. in Hedw. 1878, p. 661;

Sacc. Syll. II, 124. — Versl. Med. Kon. Ak. v. Wet. Afd. Nat. 2, XVIII, 390.

In fimo cuniculorum. — Overveen.

2. **Sporormia ambigua** Niessl Oesterr. bot. Zeits. 1878, p. 41; Sacc. Syll. II, 125. — Versl. Med. Kon. Ak. v. Wet. Afd. Nat. 2, XVIII, 390.

In fimo cuniculorum. — Overveen.

3. **Sporormia lageniformis** Fuck. Symb. 242; Sacc. Syll. II, 125. — Versl. Med. Kon. Ak. v. Wet. Afd. Nat. 2, XVIII, 390.

In fimo equino. — Amsterdam.

4. **Sporormia intermedia** Auersw. in Hedw. 1868, p. 67; Sacc. Syll. II, 126. — Versl. Med. Kon. Ak. v. Wet. Afd. Nat. 2, XVIII, 390.

In fimo herbivororum variorum. — Amsterdam.

5. **Sporormia megalospora** Auersw. Hedw. a⁰ 1868, p. 68; Sacc. Syll. II, 126. — Versl. Med. Kon. Ak. v. Wet. Afd. Nat. 2, XVIII, 390.

In fimo cuniculorum. — Wageningen.

6. **Sporormia gigantea** Hansen Fgi fimicoli Danici 113 et Résumé 16; Sacc. Syll. II, 127. — Versl. Med. Kon. Ak. v. Wet. Afd. Nat. 2, XVIII, 390.

In stercore cuniculorum. — Brielle.

7. **Sporormia leptosphaerioides** Spegaz. Michelia I, 459; Sacc. Syll. II, 128. — Versl. Med. Kon. Ak. v. Wet. Afd. Nat. 2, XVIII, 390.

In fimo cuniculorum. — Overveen.

8. **Sporormia pentamera** Oud. (n. sp.). Asci absque pedicello 190 μ longi‘ 38 μ lati, itaque lanceolati, obtusi. Sporae tristichae (?), pentamerae, 80 μ longae, 16—17 μ latae. Articuli duo ultimi obtuse conici, 18—19 μ longi, articuli tres intermedii 11—12 μ longi, omnes fusci et mucilagine obducti.

In fimo cuniculorum. — Overveen.

9. **Sporormia variabilis** Wint. Hedw. 1874, p. 50; Sacc. Syll. II, 129. — Versl. Med. Kon. Ak. v. Wet. Afd. Nat. 2, XVIII, 390.

In fimo cuniculorum. — Overveen.

10. **Sporormia pulchra** Hansen Fgi fimicoli Danici 113 et Résumé 17; Sacc. Syll. II, 131. — Versl. Med. Kon. Ak. v. Wet Afd. Nat. 2, XVIII, 390.
In fimo cuniculorum. — Brielle.

AGLAOSPORA DE NOT.

1. **Aglaospora profusa** (Fr.) de Not. Microm. ital. decas V; Sacc. Syll. II, 133. — Sphaeria Anomia in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3029.
In ramis Robiniae Pseudacaciae. — Hilversum. — Harderwijk.

PSEUDOVALSA CES. et DE NOT.

1. **Pseudovalsa lanciformis** (Fr.) Ces. et de Not. Schema Sfer. 206; Sacc. Syll. II, 135. — Sphaeria lanciformis in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3016.
In ramis betulinis. — Leiden (?).
2. **Pseudovalsa convergens** (Tode) Sacc. Syll. II, 136. — Valsa convergens in Ned. Kr. Arch. 1, V, 345; Arch. Néerl. VIII, 404.
Sub cortice ramorum Fagi. — Lochem.
3. **Pseudovalsa Berkeleyi** (Tul.) Sacc. Syll. II, 137. — Melanconis Berkeleyi in Ned. Kr. Arch. 2, III, 156.
In ramis Ulmi campestris. — Amsterdam.
4. **Pseudovalsa Kickxii** (West.) Sacc. in Lambotte Fl. Myc. Belg. II, 359; Syll. II, 139. — Valsa Kickxii in Ned. Kr. Arch. 2, III, 157.
In ramis Platani orientalis. — Amsterdam. — Edidi in Rab. Fgi Eur. n⁰. 2219 et in Oud. Fgi Neerl. n⁰. 173.

Sect. 7. Hyalophragmiae Sacc.

MASSARINA Sacc.

1. **Massarina eburnea** (Tul.) Sacc. Syll. II, 153.
In ramis betulinis. — Maartensdijk.

METASPHAERIA Sacc.

1. **Metasphaeria Hederae** (Sow.?) Sacc. Syll. II, 169. — Sphaeria Hederae in Tijds. Nat. Gesch. XI, 395; Sphaerella Hederae Oud. in Ned. Kr. Arch. 2, I, 317; Arch. Néerl. VIII, 407.
In pagina inferiore foliorum Hederae Helicis. — Amsterdam.
2. **Metasphaeria Junci** (Oud.) Sacc. Syll. II, 177. — Sphaeria Junci Oud. in Ned. Kr. Arch. 2, I, 265; Arch. Néerl. VIII, 405.
In foliis et culmis Junci glauci. — Naaldwijk. — Utrecht, Baarn.
3. **Metasphaeria Iridis** (Desm.) Sacc. Syll. II, 178. — Dothidea Iridis in Prodr. Fl. Bat. n^0. 3168.
In foliis Iridis Pseudacori. — Leiden.
4. **Metasphaeria Bellynckii** (West.) Sacc. Syll. II, 178.
In caulibus Polygonati multiflori. — Naaldwijk.
5. **Metasphaeria sabuletorum** (B. Br.) Sacc. Syll. II, 180. — Sphaeria sabuletorum in Ned. Kr. Arch. 2, III, 257; Sphaeria (Leptosphaeria) sabuletorum in Oud. Fgi Néerl. exs. n^0. 276.
In foliis Ammophilae arenariae. — Haarlemmerduin.

SPHAERULINA Sacc.

1. **Sphaerulina myriadea** (D.C.) Sacc. Syll. II, 186. — Sphaeria myriadea in Prodr. Fl. Bat. n^0. 3138.
In foliis delapsis Quercuum. — Zwake.

HYPOSPILA Fr.

1. **Hypospila bifrons** (D.C.) Fr. S. V. S 421; Sacc. Syll. II, 190. — Sphaeria bifrons in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3069.
   In foliis quercinis. — Leiden.

LASIOSPHAERIA Ces. et de Not.

1. **Lasiosphaeria hirsuta** (Fr.) Ces. et de Not. Schema Sfer. 229; Sacc. Syll. II, 191. — Sphaeria hirsuta in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3076.
   In ligno putrescente. — Naaldwijk. — Goes.
2. **Lasiosphaeria hispida** (Tode) Fuck. Symb. 147; Sacc. Syll. II, 194.
   In ramis alneis. — Naaldwijk.
3. **Lasiosphaeria spermoides** (Hoffm.) Ces. et de Not. Schema Sfer. 229; Sacc. Syll. II, 198. — Sphaeria spermoides in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3084.
   In truncis querneis et salicinis vetustis. — Amsterdam. — Utrecht. — Goes. — Maastricht.
4. **Lasiosphaeria ovina** (P.) Ces. et de Not. Schema Sfer. 229; Sacc. Syll. II, 199. — Sphaeria ovina in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3075.
   In ligno salicino emollito. — Naaldwijk. — Willemspolder.
5. **Lasiosphaeria crinita** (P.) Sacc. Syll. II, 201. — Sphaeria crinita in Ned. Kr. Arch. 1, V, 343; Arch. Néerl. VIII, 405.
   In ligno putrescente. — Lochem.
6. **Lasiosphaeria biformis** (P.) Sacc. Syll. II, 204.
   In terra arenosa humida. — Lochem.

MELOMASTIA Nitschke et Fuck.

1. **Melomastia Friesii** Nitschke in Fuck. Symb. App. I, 306; Sacc. Syll. II, 213. — Sphaeria mastoidea in

Tijds. Nat. Gesch. XI, 394; Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3089; Sphaeria lonicerae ibid. n⁰. 3104; Sphaeria fraxinicola in Ned. Kr. Arch. 2, II, 186.

In ramis salicinis, fraxineis et Lonicerae Periclymeni. — Haarlem. — Utrecht, de Bildt.

ZIGNOELLA Sacc.

1. **Zignoella? insculpta** (Fr.) Sacc. Syll. II, 225. — Sphaeria insculpta in Ned. Kr. Arch. 2, I, 184; Arch. Néerl. VIII, 405.

In ramis Ilicis Aquifolii. — Amsterdam. — Naaldwijk.

CALOSPORA Sacc.

1. **Calospora Platanoides** (P.) Niessl; Sacc. Syll. II, 231. — Sphaeria stilbostoma α umbilicata in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3039 α; Valsa platanoides in Ned. Kr. Arch. 2, III, 157.

In ramis corticatis Aceris Pseudoplatani. — Amsterdam.

2. **Calospora Innesii** (Curr.) Sacc. Syll. II, 231. — Valsa Innesii in Ned. Kr. Arch. 2, I, 183; Arch. Néerl. VIII, 404.

In ramis Aceris Pseudoplatani. — Naaldwijk.

Sect. 8. Dictyosporae Sacc.

PLEOSPORA Rab.

1. **Pleospora mucosa** (Fuck.?) Speg. Nova Add. n⁰. 85; Sacc. Syll. II, 245. — Sphaeria mucosa in Tijds. Nat. Gesch. XI, 394; Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3055.

In fructuum Cucurbitae Peponis cortice putrescente. — Leiden.

2. **Pleospora herbarum** (P.) Rab. in Klotzsch Herb. Myc. ed. II, n⁰. 547; Sacc. Syll. II, 247. — Sphaeria herbarum in Tijds. Nat. Gesch. XI, 395; Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3122; Ned. Kr. Arch. 2, III, 160.

   In caulibus siccatis herbarum plurimarum (Alismae Plantaginis, Allii Porri, Aristolochiae Clematitidis, Asparagi officinalis, Asteris Tripolii, Brassicae oleraceae, Cardamines hirsutae, Cardui spec., Centaureae sp., Cichorii Endiviae, Cirsii lanceolati, Cochleariae anglicae, Convolvuli tricoloris, Cynoglossi officinalis, Eryngii maritimi, Euphrasiae Odontitidis, Hypochaeridis radicatae, Oenotherae biennis, Lathyri latifolii, Phaseoli vulgaris, Rumicis sp., Solani tuberosi, Tamaricis gallicae, Urticae. — Amsterdam, Bloemendaal. — Leiden, Katwijk, Naaldwijk. — Utrecht. — Goes. — Maastricht.

3. **Pleospora Pisi** (Sow.) Fuck. Symb. 131; Sacc. Syll. II, 248. — Sphaeria Pisi in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3118.

   In caulibus Pisi sativi. — Goes.

4. **Pleospora Leguminum** (Wallr.) Rabh. in Klotzsch Herb. Myc. ed. II, n⁰. 548; Sacc. Syll. II, 254. — Sphaeria Leguminum Oud. in litt.

   In leguminibus maturis Coluteae arborescentis. — Amsterdam (Hort. bot.).

5. **Pleospora scirpicola** (D.C.) Karst. Myc. Fenn. II, 72; Sacc. Syll. II, 265. — Sphaeria scirpicola in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3121.

   In foliis et culmis Scirpi lacustris. — Goes.

PYRENOPHORA Fr.

1. **Pyrenophora pellita** (Fr.) Sacc. Syll. II, 280. — Sphaeria pellita in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3111.

   In caulibus Papaveris aliarumque herbarum. — Warmond.

TEICHOSPORA Fuck.

1. **Teichospora obducens** (Fr.) Fuck. Symb. 161; Sacc. Syll. II, 295. — Sphaeria obducens α minor in Prodr. Fl. Bat. n°. 3082.
   In ramis Fraxini excelsioris. — Naaldwijk. — Utrecht.

CUCURBITARIA Gray.

1. **Cucurbitaria Berberidis** (P.) Gray's Natur. Arrang. I, 519; Sacc. Syll. II, 308. — Sphaeria Berberidis in Dozy et Molk. Bijdr. 8; Prodr. Fl. Bat. n°. 3049.
   In ramis Berberidis vulgaris. — Amsterdam. — Leiden, Naaldwijk. — Utrecht.
2. **Cucurbitaria Laburni** (P.) de Not. Erb. critt. ital. n°. 875; Sacc. Syll. II, 308. — Sphaeria Laburni in Tijds. Nat. Gesch. XII, 271; Prodr. Fl. Bat. n°. 3046.
   In ramis Cytisi Laburni. — Leiden.
3. **Cucurbitaria elongata** (Fr.) Grev. Scott. t. 195; Sacc. Syll. II, 309. — Sphaeria elongata in Prodr. Fl. Bat. n°. 3054; Ned. Kr. Arch. 1, V, 344.
   In ramis Robiniae Pseudacaciae. — Leiden. — Utrecht, de Grebbe.
4. **Cucurbitaria Spartii** (Nees) Ces. et de Not. Schema Sfer. 214; Sacc. Syll. II, 312. — Sphaeria Spartii in Prodr. Fl. Bat. n°. 3057.
   In ramis Sarothamni vulgaris. — Axel.
5. **Cucurbitaria occultata** Oud. Arch. Néerl. VIII, 404.— Sacc. Syll. II, 317. — Cucurbitaria rugosa in Ned. Kr. Arch. 2, I, 183.
   In ramis Syringae vulgaris. — Naaldwijk.

FENESTELLA Tul.

1. **Fenestella Frit** (Fr.) Sacc. Syll. II, 332. — Valsa Frit in Ned. Kr. Arch. 2, I, 183; Arch. Néerl. VIII, 404.
   In ramis Aceris Negundinis. — Naaldwijk.

Sect. 9. Scolecosporae Sacc.

OPHIOBOLUS Riess.

1. **Ophiobolus porphyrogenus** (Tode) Sacc. Syll. II, 338.— Sphaeria rubella in Tijds. Nat. Gesch. XI, 394; Prodr. Fl. Bat. n°. 3112; Sphaeria erythrospora in Arch. Néerl. VIII, 407; Rhaphidospora erythrospora Oud. in Ned. Kr. Arch. 2, I, 265.
   In caulibus Urticae. — Amsterdam, Haarlem, Bloemendaal. — Leiden. — Maastricht.
   Exempla siccata edidi in Rab. Fgi Eur. n°. 1555.
2. **Ophiobolus Urticae** (Rab.) Sacc. Mich. II, 324; Syll. II, 338.
   In caulibus Urticae. — Overveen.
3. **Ophiobolus acuminatus** (Sow.) Duby ap. Rab. in Kickx Crypt. des Fl. I, 361; Sacc. Syll. II, 340.
   In caulibus Carduorum. — Haarlem.
4. **Ophiobolus Eryngii** (Oud.) Sacc. Syll. II, 345. — Sphaeria Eryngii α petiolicola West. in Prodr. Fl. Bat. n°. 3143; Sphaeria (Rhaphidophora) Eryngii Oud. in Ned. Kr. Arch. 2, III, 257.
   In foliis et petiolis Eryngii maritimi. — Harderwijk.

LINOSPORA Fuck.

1. **Linospora Capreae** (D.C.) Fuck. Symb. 124; Sacc. Syll. II, 354. — Sphaeria saligna in Prodr. Fl. Bat. n°. 3133.
   In foliis Salicis Capreae. — Maastricht.
2. **Linospora populina** (P.) Schröt. in Rab. Fgi. Eur. n°. 2429; Sacc. Syll. II, 357. — Sphaeria ceuthocarpa in Prodr. Fl. Bat. n°. 3070.
   In foliis Populi tremulae. — Wassenaar. — Goes. — Maastricht.

SILLIA Karst.

1. **Sillia ferruginea** (P.) Karst. Myc. Fenn. II, 159 et

251; Sacc. Syll. II, 361. — Sphaeria ferruginea in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3017.

In ramis coryleis. — Maastricht.

APPENDIX.

Sphaeriaceae imperfecte cognitae.

SPHAERIA Fr.

1. **Sphaeria pruinosa** Fr. S. M. II, 486. — Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3100.
In cortice fagineo. — Leiden. — Maastricht.

2. **Sphaeria varia** P. Syn. 52; Sacc. Syll. II, 389. — Sphaeria varia in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3050.
In cortice ramorum Pruni. — Maastricht.

Fam. III. HYPOCREACEAE de Not.

Sect. 1. Hyalosporae Sacc.

HYPONECTRIA Sacc.

1. **Hyponectria Buxi** (D.C.) Sacc. in Mich. I, 250 et Syll. II, 455. — Sphaeria Buxi in Ned. Kr. Arch. 1, V, 344.
In foliis Buxi sempervirentis. — Rotterdam. — Lochem.

POLYSTIGMA Pers.

1. **Polystigma rubrum** (P.) D.C. Mém. Mus. 337; Sacc. Syll. II, 458. — Dothidea rubra in Tijds. Nat. Gesch. XI, 396; Polystigma rubrum in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3150.
In foliis Pruni spinosae vegetis. – Amsterdam. — Beek. — Maastricht.

2. **Polystigma ochraceum** (Wahlb.) Sacc. Consp. Pyren. 20; Syll. II, 458. — Dothidea fulva in Tijds. Nat.

Gesch. XI, 396. — Polystigma fulvum in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3149.

In foliis vegetis Pruni Padi. — den Haag.

NB. var *α* aurantiacum West in Prodr. Fl. Bat. p. 69, sistit spermogonia Roesteliae cancellatae.

Sect. 2. PHAEOSPORAE SACC.

Species hujus Sectionis apud nos hucusque frustra quaesitae.

Sect. 3. HYALODIDYMAE SACC.

HYPOMYCES FR.

1. **Hypomyces aurantius** (P.) Fuck. Symb. 183; Sacc. Syll. II, 470. — Sphaeria aurantia in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3071.

In Polyporis suberosis corruptis. — Maastricht.

NECTRIA FR.

1. **Nectria cinnabarina** (Tode) Fr. S. V. S. 388; Sacc. Syll. II, 479. — Sphaeria cinnabarina Tijds. Nat Gesch. XI, 394; Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3043; Ned. Kr. Arch. 2, I, 92.

In ramis et truncis arborum plurimorum. — Amsterdam. — Leiden. — Kampen. — Groningen. — Goes. — Maastricht.

Sicc. in Oud. Fgi Neerl. exs. n⁰. 471.

2. **Nectria Ribis** (Tode) Rab. Fgi Eur. n⁰. 264; Sacc. Syll. II, 480. — Sphaeria Ribis in Tijds. Nat. Gesch. XI, 394; Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3045.

In ramis Ribis rubri et nigri. — Leiden, Naaldwijk. — Goes. — Maastricht.

Sicc. in Oud. Fgi Neerl. exs. n⁰. 168.

3. **Nectria coccinea** (P.) Fr. S. V. S. 368; Sacc. Syll. II, 481. — Sphaeria coccinea in Tijds. Nat. Gesch. XI, 394; Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3044; Ned. Kr. Arch. 2, I, 92.

In ramis alneis et Prunorum. — Amsterdam. — Leiden. — Goes. — Maastricht.

Sicc. in Oud. Fgi Neerl. exs. n⁰. 472.

Huc pertinet Sph. fragiformis Prodr. Fl. Bat. n⁰. 2997.

4. **Nectria Cucurbitula** (Tode?) Fr. S. V. S. 388 p.p.; Sacc. Syll. II, 484; Ned. Kr. Arch. 1, V, 343; Arch. Néerl. VIII, 403.

In ramis et acubus Pini. — Lochem.

5. **Nectria chrysitis** Rab. in Klotzsch Herb. Myc. ed. II, n⁰. 632; Sacc. Syll. II, 488. — Nectria chrysitis in Ned. Kr. Arch. 2, I, 92 et 182; Arch. Néerl. VIII, 402.

In trunco putrescente. — Amsterdam.

6. **Nectria sanguinea** (Sibth.) Fr. S. V. S. 385; Sacc. Syll. II, 493. — Sphaeria sanguinea in Prod. Fl. Bat. n⁰. 3078.

In ligno alneo. — Amsterdam. — Rotterdam, Naaldwijk.

7. **Nectria citrina** Fr. S. V. S. 388; Sacc. Syll. II, 494. — Nectria Citrum Oud. in Arch. Néerl. VIII, 402.

In ligno putrescente. — Naaldwijk.

8. **Nectria episphaeria** (Tode) Fr. S. V. S. 388; Sacc. Syll. II, 497. — Sphaeria episphaeria in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3079; Nectria episphaeria in Ned. Kr. Arch. 1, V, 343.

In stromate Diatrypellae quercinae et Diatrypes Stigmatis. — Haarlem. — Utrecht.

9. **Nectria Peziza** (Tode) Fr. S. V. S. 388; Sacc. Syll. II, 501. — Sphaeria peziza in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3077.

In ligno putrescente. — Amsterdam. — Naaldwijk. — Maastricht.

METANECTRIA Sacc.

1. **Metanectria Citrum** (Wallr.) Sacc. Mich. I, 300; Syll. II, 517. — Nectria Citrum in Ned. Kr. Arch. 2, II, 42.
In ligno alneo corrupto. — Naaldwijk.

Sect. 4. Phaeodidymae Sacc.

Species hujus Sectionis apud nos hucusque frustra quaesitae.

Sect. 5. Phragmosporae Sacc.

CALONECTRIA Sacc.

1. **Calonectria erubescens** (Desm.) Sacc. Mich. I, 309; Syll. II, 545. — Sphaeria erubescens in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3086.
In foliis Ilicis Aquifolii. — Goes.
2. **Calonectria Oudemansii** (West.) Sacc. Mich. I, 308; Syll. II, 546. — Nectria Oudemansii in Arch. Néerl. II, 46.
In ramis putrescentibus Urostigmatis Neumanni in caldario Horti bot. Amstelaed.

GIBBERELLA Sacc.

1. **Gibberella pulicaris** (Fr.) Sacc. Mich. I, 43; Sacc. Syll. II, 552. — Sphaeria pulicaris in Tijds. Nat. Ges. XI, 394; Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3052.
In ramis sambucinis. — Leiden.
2. **Gibberella cyanogena** (Desm.) Sacc. Syll. II, 555. — Sphaeria cyanogena in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3048.
In caulibus putrescentibus Brassicae. — Amsterdam. — Leiden.
3. **Gibberella acervalis** (Moug.) Sacc. Mich. I, 318; Syll.

II, 555. — Sphaeria acervalis in Prodr. Fl Bat. n^{0}. 3047.

In ramis fraxineis et salicinis. — Maastricht.

Sect. 6. DICTYOSPORAE SACC.

Species hujus Sectionis hucusque apud nos frustra quaesitae.

Sect. 7. SCOLECOSPORAE SACC.

CLAVICEPS TUL.

1. **Claviceps purpurea** (Fr.) Tul. A. S. N. 3, XX, 26 et 45; Sacc. Syll. II, 564. — Cordiceps purpurea in Arch. Néerl. II, 45.

   In sclerotio florum locum occupante intra glumas Secales cerealis. — Amsterdam, etc.

   Ipsa sclerotia praeterea carpsi in floribus Bromi grossi et Lolii perennis.

2. **Claviceps microcephala** (Wallr.) Tul. A. S. N. 3, XX, 49.

   In sclerotio florum locum occupante intra glumas Phragmitidis communis.

CORDYCEPS FR.

1. **Cordyceps militaris** Lk. Handb. III, 347; Sacc. Syll. II, 572. — Prodr. Fl. Bat. n^{0}. 2988; Ned. Kr. Arch. 1, V, 341.

   In sylvis in larvis insectorum corruptis. — Naaldwijk. — Driebergen. — Lochem. — Veenwouden.

2. **Cordyceps ophioglossoides** (Ehrh.) Lk. Handb. III, 347; Sacc. Syll. II, 574. — Prodr. Fl. Bat. n^{0}. 2987; Ned. Kr. Arch. 1, V, 342.

   In Elaphomyce muricata parasitans. — Driebergen. — Renkom, Doorwerth, Lochem.

EPICHLOE. Fr.

1. **Epichloe typhina** Fr. (ut subg.) S. V. S. 381; Tul. S. F. C. III. 24; Sacc. Syll. II, 578. — Dothidea typhina in Tijds. Nat. Ges. XI, 395; Polystigma typhinum in Prodr. Fl. Bat. n°. 3151; Epichloe typhina in Ned. Kr. Arch. 2, I, 92.
   In foliis Dactylidis glomeratae, Holci mollis, Agrostidis specierum, etc. — Amsterdam, Haarlem, Naarden. — Leiden, Naaldwijk, Noordwijkerhout. — Doorn. — Culemborg, Lochem. — Goes. — Maastricht.

Fam. IV. DOTHIDEACEAE Nitschke et Fuckel.

Sect. 1. Hyalosporae Sacc.

PHYLLACHORA Nke et Fuck.

1. **Phyllachora Ulmi** (Duv.) Fuck. Symb. 218; Sacc. Syll. II, 594. — Dothidea Ulmi in Tijds. Nat. Gesch. XI, 396; Prodr. Fl. Bat. n°. 3170.
   In foliis Ulmi campestris. — Amsterdam. — Leiden. — Beek, Ubbergen, Harderwijk. — Kampen. — Maastricht.
2. **Phyllachora Graminis** (P.) Fuck. Symb. 216; Sacc. Syll. II, 602. — Sphaeria Graminis in Tijds. Nat. Ges. XI, 394; Prodr. Fl. Bat. n°. 3066; Dothidea Graminis in Prodr. Fl. Bat. n°. 3166.
   In foliis Graminum morientium plurimorum. — Amsterdam, Haarlem. — Leiden, Naaldwijk. — Culemborg. — Maastricht.
3. **Phyllachora gangraena** (Fr.) Fuck. Symb. 217; Sacc. Syll. II, 604. — Sphaeria gangraena in Prodr. Fl. Bat. n°. 3148.
   In foliis languescentibus variarum Graminearum. — Boxmeer.

4. **Phyllachora Pteridis** (Reb.) Fuck. Symb. 218; Sacc. Syll. II, 607. — Dothidea Pteridis in Ned. Kr. Arch. 2, II, 186.
In foliis Pteridis aquilinae. — Beek.
Exempla quae vidi immatura.

5. **Phyllachora Trifolii** (P.) Fuck. Symb. 218; Sacc. Syll. II, 613. — Sphaeria Trifolii in Prodr. Fl. Bat. n°. 3067.
In foliis Trifolii repentis. — Amsterdam, Bloemendaal. — Leiden, Naaldwijk. — Harderwijk, Nijmegen. — Zwake.

6. **Phyllachora Podagrariae** (Roth.) Karst. Myc. Fenn. II, 228; Sacc. Syll. II, 615. — Sphaeria Aegopodii in Tijds. Nat. Gesch. XI, 395.
In foliis Aegopodii Podagrariae languescentibus. — Amsterdam. — Leiden.
Apud nos hucusque nonnisi in statu immaturo (= Ascospora) reperta.

7. **Phyllachora Caricis** (Fr.) Sacc. Syll. II, 625. — Dothidea Caricis in Ned. Kr. Arch. 2, I, 316; Arch. Néerl. VIII, 403.
In foliis Caricis cujusdam. — Nijkerk.

8. **Phyllachora depazeoides** (Desm.) Lambotte Fl. Myc. Belge II, 398; Sacc. Syll. II, 696. — Dothidea depazeoides in Prodr. Fl. Bat. n°. 3167.
In foliis adhuc vegetis Buxi sempervirentis. — Maastricht.

Sect. 2. Phaeosporae Sacc.

Species hujus Sectionis hucusque frustra apud nos quaesitae.

Sect. 3. Hyalodidymae Sacc.

DOTHIDELLA Speg.

1. **Dothidella thoracella** Sacc. Syll. II, 630.

In foliis Sedi purpurascentis in dunis maritimis et arenosis Patriae, sed semper immatura.

SCIRRHIA Nitschke.

1. **Scirrhia depauperata** (Desm.) Fuck. Sumb. 221; Sacc. Syll. II, 634. — Ned. Kr. Arch. 2, III, 256.

   In foliis Phragmitidis communis. — Utrecht.

2. **Scirrhia rimosa** (A. S.) Fuck. Symb. 221; Sacc. Syll. II, 635. — Sphaeria rimosa in Tijds. Nat. Gesch. XI, 394; Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3058. — Scirrhia rimosa in Ned. Kr. Arch. 2, I, 264.

   In vaginis foliorum Phragmitidis communis. — Haarlem. — Leiden, Voorschoten. — Utrecht. — Maastricht.

   Exs. in Oud. Fgi Neerl. exs. n⁰. 281.

PLOWRIGHTIA Sacc.

1. **Plowrightia ribesia** (P.) Sacc. Syll. II, 635. — Dothidea ribesia in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3152; Ned. Kr. Arch. 1, V, 343.

   In ramis Ribis rubri. — Naaldwijk. — Utrecht. — Lochem. — Goes. — Maastricht.

Sect. 4. Phaeodidymae Sacc.

DOTHIDEA Fr.

1. **Dothidea Sambuci** (P.) Fr. S. M. II, 551; Sacc. Syll. II, 639. — Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3153.

   In ramis sambucinis. — Leiden. — Maastricht.

2. **Dothidea puccinioides** (D.C.) Fr. S. M. II, 551; Sacc. Syll. II, 641. — Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3154.

   In ramis emortuis Buxi sempervirentis. — Goes.

Sect. 5. P H R A G M O S P O R A E Sacc.

R H O P O G R A P H U S Nitschke.

1. **Rhopographus filicinus** (Fr.) Fuck. Symb. II, 648. — Sphaeria in Prodr. Fl, Bat. n⁰. 3059.
In stipitibus Pteridis aquilinae. — Maastricht.

Sect. 6. D I C T Y O S P O R A E Sacc.

Species hujus sectionis hucusque apud nos frustra quaesitae.

Sect. 7. S C O L I C O S P O R A E Sacc.

Species hujus sectionis hucusque apud nos frustra quaesitae.

Fam. V. MICROTHYRIACEAE Sacc.

Sect. 1. H Y A L O S P O R A E Sacc.

Species hujus sectionis hucusque apud nos frustra quaesitae.

Sect. 2. P H A E O S P O R A E Sacc.

Species hujus sectionis hucusque apud nos frustra quaesitae.

Sect. 3. H Y A L O D I D Y M A E.

M I C R O T H Y R I U M Desm.

1. **Microthyrium microscopicum** Desm. Ann. Sc. Nat.

1841, p. 138; Sacc. Syll. II, 662. — Prodr. Fl. Bat. n^{0}. 3327.

In foliis Ilicis Aquifolii. — Leiden.

2. **Microthyrium Quercus** Fuck Symb. 98; Sacc. Syll. II, 663. — Ned. Kr. Arch. 2, II, 187,

In foliis querneis. — Leiden.

Sect. 4. PHAEODIDYMAE.

Species hujus sectionis hucusque apud nos nondum repertae.

Sect. 5. PHRAGMOSPORAE SACC.

Species hujus sectionis hucusque apud nos nondum repertae.

Sect. 6. CLOSTEROSPORAE SACC.

Species hujus sectionis hucusque apud nos nondum repertae.

Fam. VI. LOPHIOSTOMACEAE Sacc.

Sect. 1. PHAEOSPORAE SACC.

Species hujus sectionis hucusque apud nos nondum repertae.

Sect. 2. PHAEODIDYMAE SACC.

Species hujus sectionis hucusque apud nos nondum repertae.

Sect. 3. Hyalodidymae Sacc.

Species hujus sectionis hucusque apud nos frustra quaesitae.

Sect. 4. Hyalophragmeae Sacc.

Species hujus sectionis hucusque apud nos nondum repertae.

Sect. 5. Phaeophragmiae Sacc.

LOPHIOSTOMA Ces. et de Not.

1. **Lophiostoma caulium** (Fr.) Ces. et de Not. Schema Sfer. 219; Sacc. Syll. II, 697. — Sphaeria caulium in Prodr. Fl. Bat. n°. 3119.
   In caulibus exsiccatis Umbelliferarum. — Maastricht.
2. **Lophiostoma Arundinis** (Fr.) Ces. et de Not. Schema Sfer. 220; Sacc. Syll. II, 699. — Ned. Kr. Arch. 2, I, 264; Arch. Néerl. VIII, 404.
   In culmis Phragmitidis communis. — Rotterdam.
3. **Lophiostoma macrostomum** (Tode) Ces. et de Not. Schema Sfer. 219; Sacc. Syll. II, 700. — Sphaeria macrostoma in Prodr. Fl. Bat. n°. 3092.
   In cortice vetusto. — Rijnsburg.

Sect. 6. Dictyosporae Sacc.

LOPHIDIUM Sacc.

1. **Lophidium diminuens** (P.) Ces. et de Not. Schema Sfer. 220; Sacc. Syll. II, 714. — Sphaeria diminuens in Dozy et Molk. Bijdr. 8.
   In ramis Corni sanguineae. — Leiden.

Sect. 7. SCOLECOSPORAE SACC.

Species hujus sectionis hucusque apud nos nondum repertae.

Fam. VII. HYSTERIACEAE Corda.

Sect. 1. HYALOSPORAE SACC.

SCHIZOTHYRIUM DESM.

1. **Schizothyrium Ptarmicae** Desm. Ann. Sc. Nat. 3, XI, 361; Sacc. Syll. II, 725. — Labrella Ptarmicae in Tijds. Nat. Gesch. XI, 396; Prodr. Fl. Bat. n^0. 3325.
   In caulibus et foliis Achilleae Ptarmicae. — Leiden.

Sect. 2. PHAEOSPORAE SACC.

Species hujus sectionis apud nos hucusque nondum repertae.

Sect. 3. HYALODIDYMAE SACC.

AULOGRAPHIUM LIB.

1. **Aulographium vagum** Desm. Ann. Sc. Nat. 2^e S., XIX, 362; Sacc. Syll. II, 727. — Aylographum vagans in Prodr. Fl. Bat. n^0. 3204.
   In foliis Ilicis Aquifolii et Hederae Helicis. — Zutphen.

GLONIUM MÜHL.

1. **Glonium lineare** (Fr.) de Not. Giorn. bot. ital. II, 594; Sacc. Syll. II, 732. — Hysterium lineare in Prodr. Fl. Bat. n^0. 3190.
   In ligno quercino. — Goes, Willemsdorp.

Sect. 4. PHAEODIDYMAE SACC.

Species hujus sectionis hucusque apud nos nondum repertae.

Sect. 5. PHAEOPHRAGMIAE SACC.

HYSTERIUM TODE.

1. **Hysterium pulicare** P. Syn. 98; Sacc. Syll. II, 743. — Dozy et Molk. Bijdr. 7; Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3188.
   In ligno et cortice Quercus Roboris, Populi et Salicis albi. — Leiden, den Haag. — Harderwijk. — Goes. — Maastricht.

Sect. 6 HYALOPHRAGMIAE SACC.

DICHAENA FR.

1. **Dichaena strobilina** Fr. S. V. S. 40; Sacc. Syll. II, 771. — Sphaeria strobilina in Tijds. Nat. Gesch. XI, 394; Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3105; Dichaena strobilina in Ned. Kr. Arch. 2, III, 161.
   In squamis conorum Abietum. — Leiden. — Apeldoorn.

Sect. 7. HYALODICTYAE SACC.

GLONIOPSIS DE NOT.

1. **Gloniopsis Rocheana** (Duby) Sacc. Syll. II, 773. — Hysterium rocheanum in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3192.
   Ad cortices ignotos. — Leiden (Hort. bot.).

Sect. 8. PHAEODICTYAE SACC.

HYSTEROGRAPHIUM CDA.

1. **Hysterographium Fraxini** (P.) de Not. Pir. Ist. 22;

Sacc. Syll. II, 776. — Hysterium Fraxini in Tijds. Nat. Gesch. XI, 393; Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3191.

In ramis Fraxini excelsioris. — Leiden. — Utrecht. — Maastricht.

Sect. 9. Scolecosporae Sacc.

HYPODERMA DC.

1. **Hypoderma Hederae** (Mart.) de Not. Pir. Ist. 36; Sacc. Syll. II, 784. — Hysterium Hederae in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3202.

In foliis Hederae Helicis. — Leiden.

2. **Hypoderma Lauri** (Fr.) Duby Hyst. 43; Sacc. Syll. II, 784. — Hysterium Lauri in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3197.

In foliis Lauri nobilis. — Leiden (Hort. bot.).

3. **Hypoderma conigenum** (P.) Cooke Brit. Fgi 712; Sacc. Syll. II, 786. — Hysterium conigenum in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3194.

In squamis putrescentibus strobilorum Pini sylvestris. — Leiden. — Maastricht.

4. **Hypoderma virgultorum** DC. Fl. Fr. VI, 165; Sacc. Syll. II, 786. — Hysterium rubi et Hysterium petiolare in Ned. Kr. Arch. 1, V, 341; Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3195.

In sarmentis Ruborum et in petiolis Aceris Pseudoplatani. — Utrecht. — Lochem. — Maastricht.

5. **Hypoderma commune** (Fr.) Duby Hyst. 41; Sacc. Syll. II, 788. — Hysterium commune in Arch. Néerl. VIII, 402.

In caule exsiccato Rumicis cujusdam. — Naaldwijk.

6. **Hypoderma scirpinum** (DC.) Fl. Fr. VI, 166; Sacc. Syll. II, 788. — Hysterium scirpinum in Prodr. Fl. Bat. n⁰. 3198.

In caulibus putrescentibus Scirpi lacustris. — Leiden.

LOPHODERMIUM Chev.

1. **Lophodermium hysterioides** (P.) Sacc. Syll. II, 791. — Hysterium foliicolum in Prodr. Fl. Bat. n^0. 3201.
   In foliis emortuis Crataegi Oxyacanthae. — Nijmegen.
2. **Lophodermium petiolicolum** Fuck. Symb. 255; Sacc. Syll. 793. — Hysterium punctiforme in Dozy et Molk. Bijdr. 7; Prodr. Fl. Bat. n^0. 3203; Hysterium petiolare in Ned. Kr. Arch. 1, V, 341; Arch. Néerl. VIII, 402.
   In petiolis foliorum Quercus et Aceris Pseudoplatani. — Haarlem. — Leiden. — Lochem.
3. **Lophodermium Pinastri** (Schrad.) Chev. Fl. de Paris I, 430; Sacc. Syll. II, 794. — Hysterium pinastri in Tijds. Nat. Gesch. XI, 393; Prodr. Fl. Bat. n^0. 3196 (inclusis varietatibus α et β); Lophodermium Pinastri in Ned. Kr. Arch. 2, III, 156.
   In acubus Pini sylvestris, Pinastri, Cembrae et Abietis excelsae et in squamis strobilorum Pini sylvestris. — Leiden. — Harderwijk, Apeldoorn, Zutphen, Wageningen.
4. **Lophodermium juniperinum** (Fr.) de Not. Pir. Ist. 40; Sacc. Syll. II, 794. — Hysterium pinastri β juniperinum in Tijds. Nat. Gesch. XI, 393; Prodr. Fl. Bat. n^0. 3196 quoad var. c.
   In acubus Juniperi communis et Sabinae. — Leiden. — de Bildt.
5. **Lophodermium arundinaceum** (Schrad.) Chev. Fl. de Paris, I, 435; Sacc. Syll. II, 795. — Hysterium arundinaceum in Tijds. Nat. Gesch. XI, 393; Prodr. Fl. Bat. n^0. 3199; Lophodermium culmigenum α gramineum in Prodr. Fl. Bat. n^0. 3200 α.
   Iu culmis Phragmitidis communis. — Bloemendaal. — Leiden. — Utrecht. — Goes.
   var. abbreviatum Sacc. Syll. II, 795. — Hysterium culmigenum var. abbreviatum in Prodr. Fl. Bat. n^0. 3200 β.
   In foliis Ammophilae arenariae. — Haarlem.

LOPHIUM Fr.

1. **Lophium mytilinum** (P.) Fr. S. M. II, 593; Sacc. Syll. II, 799. — Ned. Kr. Arch. 1, V, 344; Arch. Néerl. VIII, 402.
   Ad ligna caesa. — Lochem.

COLPOMA Wallr.

1. **Colpoma quercinum** (P.) Wallr. Fl. Cr. 423; Sacc. Syll. II, 803. — Cenangium quercinum in Tijds. Nat. Gesch. XII, 270; Colpoma quercinum in Prodr. Fl. Bat. n°. 3205.
   In ramis quercinis. — Leiden. — Beek. — Maastricht.

ACROSPERMUM Tode.

1. **Acrospermum compressum** Tode Fgi Mecklb. I, 8; Sacc. Syll. II, 807. — Prodr. Fl. Bat. n°. 2936.
   In caulibus siccatis Urticae et Cardin. — Maastricht.
2. **Acrospermum graminum** Lib. exs. Ard. n°. 33; Sacc. Syll. II, 807. — Prodr. Fl. Bat. n°. 2937.
   In foliis Poae et Elymi. — Goes.

RECAPITULATIO

qua numerus Pyrenomycetum in regno Batavorum hucusque detectorum illustratur.

	Numerus specierum.
Fam. I. Perisporiaceae.	
Subfamilia 1. Erysipheae.	29
» 2. Perisporieae.	11
» 3. Capnodieae.	3
	43
Fam. II. Sphaeriaceae.	
Sect. 1. Allantosporae.	
Coelosphaeria.	2
Calosphaeria.	1
Quaternaria	2
Valsa	7
Eutypella.	2
Eutypa.	6
Cryptosphaeria.	1
Diatrype	3
Diatrypella	3
	27
Sect. 2. Phaeosporae.	
Ceratostoma.	1
Chaetomium.	4
Sordaria	7
Hypocopra	13
Coprolepa.	3
Philocopra	3
Rosellinia.	2

	Numerus specierum.
Bombardia	1
Anthostomella	1
Anthostoma	2
Xylaria	7
Poronia	1
Ustulina	1
Hypoxylon	6
Daldinia	1
Nummularia	2
	55

Sect. 3. Hyalosporae.

Ceratostomella	1
Gnomoniella	4
Laestadia	1
Ditopella	1
Botryosphaeria	1
Cryptosporella	1
	9

Sect. 4. Hyalodidymae.

Sphaerella	23
Stigmatea	7
Didymella	3
Gnomonia	4
Epicymatia	1
Melanopsamma	1
Bertia	1
Venturia	2
Melanconis	2
Hercospora	1
Diaporthe	20
	65

Sect. 5. Phaeodidymae.

Didymosphaeria	2
Delitschia	6
Otthia	1
	9

	Numerus specierum.
Sect. 6. Phaeophragmiae.	
Massaria	1
Leptosphaeria	14
Clypeosphaeria	1
Melanomma	3
Trematosphaeria	2
Sporormia	10
Aglaospora	1
Pseudovalsa	4
	36
Sect. 7. Hyalophragmiae.	
Massaria	1
Metasphaeria	5
Sphaerulina	1
Hypospila	1
Lasiosphaeria	6
Melomastia	1
Zignoella	1
Calospora	2
	18
Sect. 8. Dictyosporae.	
Pleospora	5
Pyrenophora	1
Teichospora	1
Cucurbitaria	5
Fenestella	1
	13
Sect. 9. Scolecosporae.	
Ophiobolus	4
Linospora	2
Sillia	1
	7
Appendix	2

	Numerus specierum.
Fam. III. Hypocreaceae.	
Sect. 1. Hyalosporae.	
Hyponectria	1
Polystigma	2
	3
Sect. 2. Phaeosporae.	
Sect. 3. Hyalodidymae.	
Hypomyces	1
Nectria	9
Metanectria	1
	11
Sect. 4. Phaeodidymae.	
Sect. 5. Phragmosporae.	
Calonectria	2
Gibberella	3
	5
Sect. 6. Dictyosporae.	
Sect. 7. Scolecosporae.	
Claviceps	2
Cordyceps	2
Epichloe	1
	5
Fam. IV. Dothideaceae.	
Sect. 1. Hyalosporae.	
Phyllachora	8
	8
Sect. 2. Phaeosporae.	
Sect. 3. Hyalodidymae.	
Dothidella	1
Scirrhia	2
Plowrightia	1
	4
Sect. 4. Phaeodidymae.	
Dothidea	2
	2

	Numerus specierum.
Sect. 5. Phragmosporae.	
Rhopographus	1
	1
Sect. 6. Dictyosporae.	
Sect. 7. Scolicosporae.	
Fam. V. Microthyriaceae.	
Sect. 1. Hyalosporae.	
Sect. 2. Phaeosporae.	
Sect. 3. Hyalodidymae.	
Microthyrium	2
	2
Sect. 4. Phaeodidymae.	
Sect. 5. Phragmosporae.	
Sect. 6. Closterosporae.	
Fam. VI. Lophiostomae.	
Sect. 1. Phaeosporae.	
Sect. 2. Phaeodidymae.	
Sect. 3. Hyalodidymae.	
Sect. 4. Hyalophragmiae.	
Sect. 5. Phaeophragmiae.	
Lophiostoma.	3
	3
Sect. 6. Dictyosporae.	
Lophidium	1
	1
Sect. 7. Scolecosporae.	
Fam VII. Hysteriaceae.	
Sect. 1. Hyalosporae.	
Schizothyrium	1
	1
Sect. 2. Phaeosporae.	
Sect. 3. Hyalodidymae.	
Aulographium	1
Glonium	1
	2

	Numerus specierum.
Sect. 4. Phaeodidymae.	
Sect. 5. Phaeophragmiae.	
Hysterium.	1
	1
Sect. 6. Hyalophragmiae.	
Dichaena.	1
	1
Sect. 7. Hyalodictyae.	
Gloniopsis.	1
	1
Sect. 8. Phaeodictyae.	
Hysterographium	1
	1
Sect. 9. Scolecosporae.	
Hypoderma	6
Lophodermium	5
Lophium.	1
Colpoma	1
Acrospermum.	2
	15

Fam.	1. Perisporiaceae	43
»	2. Sphaeriaceae	241
»	3. Hypocreaceae.	24
»	4. Dothideaceae.	15
»	5. Microthyriaceae	2
»	6. Lophiostomae	4
»	7. Hysteriaceae.	22
		351 species.

ADVIES

OVER EEN

ANTWOORD AAN Z. E. DEN MINISTER VAN BINNENLANDSCHE ZAKEN

BETREKKELIJK

DE IN OCTOBER 1883 TE ROME GEHOUDEN GEODETISCHE CONFERENTIE.

(Uitgebracht in de Vergadering van 23 Februari 1884).

In de zevende algemeene geodetische conferentie, in October 1883 te Rome gehouden, is gesproken over de invoering van een algemeenen eersten meridiaan en van een gemeenschappelijken tijd, en is vastgesteld, de Italiaansche Regeering uit te noodigen, de besluiten van de vergadering ter kennis van de verschillende Regeeringen te brengen.

Volgens de Commissie, die de zaak ter tafel bracht, is de invoering van een algemeenen eersten meridiaan wenschelijk, zoowel in het belang van de wetenschap, als in dat van de zeevaart, den handel en de internationale gemeenschap, en verdient het aanbeveling, dat voortaan een zelfde stelsel van lengten, althans voor de algemeene geographische en hydrographische instituten en bureaux, zoowel als voor alle astronomische en nautische tafelen worde gebruikt.

Als eersten meridiaan stelt zij voor aan te nemen dien, gaande door het midden der steunpunten van den meridiaankijker van het observatorium van Greenwich, van waar de lengten in éene richting, gaande van het westen naar het oosten, zullen geteld worden.

Voor sommige wetenschappelijke doeleinden en voor den dienst der groote gemeenschapsmiddelen, zooals de spoorwegen, de stoomvaart, de telegrafen en de post, acht zij de invoering van een algemeenen tijd, nevens den lokalen, van groot belang, en zij stelt voor om den gemiddelden middag van GREENWICH, die overeenstemt met het oogenblik van middernacht, of den aanvang van den burgerlijken dag, onder den meridiaan, die 12^u of 180^0 van GREENWICH verwijderd is, als aanvangspunt van den algemeenen tijd en den werelddatum aan te nemen, en daarbij uren van 0 tot 24 te tellen.

Door den Italiaanschen Gezant te 's Gravenhage werden de wenschen van de conferentie aan Z.Exc. den Minister van Buitenlandsche Zaken medegedeeld, met verzoek hem te willen berichten, welk onthaal zij bij de Nederlandsche Regeering hadden gevonden.

De Minister van Binnenlandsche Zaken heeft de Akademie uitgenoodigd, hem haar gevoelen te doen kennen over het antwoord, dat door zijner Majesteits Regeering aan den Italiaanschen Gezant zal kunnen gegeven worden, en de Akademie heeft verlangd, dienaangaande door eene, door haar benoemde, Commissie te worden voorgelicht.

Die Commissie vereenigt zich geheel met de meening, welke, omtrent het behandelen van dit onderwerp op de geodetische conferentie, door de Rijkscommissie voor graadmeting en waterpassing, in haar, bij de stukken gevoegd, verslag aan den Minister van Binnenlandsche Zaken is kenbaar gemaakt, dat namelijk »bij deze zaak belangen in het »spel komen, die door eene Commissie van geodeten, zooals »die te Rome vergaderd was, niet in haar geheel kunnen »beoordeeld worden; dat zij veeleer de belangen van de »cartographie, de marine, de administratie der posterijen, »de telegraphie en de spoorwegen, dan die der geodesie »raken, en elke beslissing, hierin door de geodetische con»ferentie genomen, doelloos zijn zou, zoo zij niet in over»eenstemming was met de belangen, waarvan de bevordering »niet tot haren werkkring behoort",

Uwe Commissie meent dan ook dat de besluiten, genomen in de algemeene geodetische conferentie te Rome, geene wijziging behoeven te brengen in het gevoelen, door de

Akademie met betrekking tot het invoeren van een algemeenen eersten meridiaan en het bijwonen van eene conferentie ter bespreking van dit onderwerp, in hare vergadering van 24 Februari 1883 aangenomen.

Gedeeltelijk toch zijn de besluiten der algemeene conferentie in overeenstemming met het uitgesproken gevoelen der Akademie, wat betreft den algemeenen eersten meridiaan; gedeeltelijk hebben zij, naar de meening Uwer Commissie, minder waarde door de bovengenoemde eigenaardige samenstelling der algemeene conferentie.

Naar aanleiding van een en ander stelt Uwe Commissie voor, aan den Minister van Binnenlandsche Zaken te antwoorden, dat men aan den Italiaanschen Gezant zou kunnen berichten, dat van de besluiten der algemeene geodetische conferentie te Rome met groote belangstelling is kennis genomen; dat deze besluiten voor een groot deel overeenkomen met de denkbeelden der Regeering, en dat deze zich reeds heeft bereid verklaard om zich in eene, door de Regeering van de Vereenigde Staten van Noord-Amerika bijeen te roepen, conferentie te laten vertegenwoordigen.

Het komt Uwer Commissie niet wenschelijk voor, den Italiaanschen Gezant geheel omtrent de zienswijze der Regeering, met betrekking tot de zaak zelve, in te lichten, omdat dit wellicht minder kiesch zou zijn tegenover de Regeering, van welke later eene uitnoodiging tot bijwoning eener conferentie mocht uitgaan.

H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN.
CH. M. SCHOLS.
MICHAËLIS.

RAPPORT

OVER DEN DOOR

DEN HEER **VAN DE SANDE BAKHUYZEN**

UIT NAAM VAN

Dr. **N. M. KAM** te *Schiedam*

AAN DE

AFD. NATUURK. DER KON. AKAD. VAN WETENSCHAPPEN

TER UITGAVE AANGEBODEN

CATALOG VON STERNEN, DEREN OERTER DURCH SELBSTÄNDIGE MERIDIANBEOBACHTUNGEN BESTIMMT WORDEN SIND, AUS BAND 1 BIS 66 DER ASTRONOMISCHEN NACHRICHTEN REDUCIRT AUF 1855.

(Uitgebracht in de Vergadering van 23 Februari 1884).

Tot het verkrijgen eener juiste kennis van de loopbanen der lichamen van ons zonnestelsel is het noodig, hunne schijnbare plaatsen aan het hemelruim zoo dikwijls mogelijk te bepalen. Twee verschillende handelwijzen worden daartoe voornamelijk gebruikt, namelijk de meridiaanwaarnemingen, waarbij de rechte klimming en declinatie van het hemellichaam te gelijk gevonden worden, — de eerste door den tijd van doorgang, de tweede door de aflezing van den vertikalen cirkel —, en de zoogenaamde relatieve bepalingen, waarbij door mikrometers het verschil in rechte klimming en declinatie gemeten wordt tusschen het bedoelde bewegelijke hemellichaam, hetzij planeet (asteroide) of komeet, en eene vaste ster.

Tot de nauwkeurige bepaling van de schijnbare plaats der planeet of komeet, is het dan nog slechts noodig de rechte klimming en declinatie der tot vergelijking gebruikte ster juist te kennen.

Somtijds vindt men deze in een der bestaande stercatalogi, maar daar de vergelijkingssterren dikwijls vrij zwak zijn (9 of 10e grootte), zoekt men ze daarin dikwijls te vergeefs, en is de sterrekundige genoodzaakt, wil hij zijne relatieve plaatsbepaling niet verloren doen gaan, de plaats der vergelijkingsster opzettelijk in den meridiaan te bepalen.

Op die wijze zijn in deze eeuw eenige duizenden bepalingen van de plaatsen van vaste sterren geschied. Elk jaar leverde daartoe zijn contingent, en reeds in 1859 uitte Argelander in de inleiding van het derde deel der *Beobachtungen auf der Sternwarte zu Bonn* den wensch, dat al deze bepalingen eens verzameld en de rechte klimmingen en declinaties tot één tijdstip herleid in ééne enkele zoogenoemde sterrelijst zouden vereenigd worden.

Reeds het volgende jaar deelde wijlen ons medelid M. Hoek mede, dat aan dezen wensch gevolg gegeven zou worden, en dat de Heeren Dibbits, Groneman en Martins op zijn verzoek besloten hadden den arbeid te ondernemen.

Drie jaar later kon Hoek reeds aankondigen, dat, ondanks vele hindernissen, de herleidingen goed gevorderd waren, en reeds eene lijst van ongeveer 2500 sterren gereed lag.

De Heeren Groneman en Martins werden echter weldra door ambtsbezigheden gedwongen, hunne berekeningen te staken, die nu door de Heeren Hoek en Dibbits werden vervolgd, totdat laatstgenoemde door het aanvaarden eener betrekking aan de H. B. S. te Amsterdam eveneens zijne deelneming aan den gemeenschappelijken arbeid moest opgeven.

Hoek, die de berekeningen niet alleen wilde voortzetten, stelde nu aan Dr. N. M. Kam voor, zijne taak over te nemen, hetgeen bereidwillig werd aangenomen.

Bij de verdere berekening bracht de Heer Kam echter eenige kleine wijzigingen in het oorspronkelijk plan. Hij zag er wegens verschillende bezwaren van af, al de afzonderlijke sterreplaatsen, die in de verschillende tijdschriften en periodieke werken zijn medegedeeld, in zijne lijst op te nemen, maar bepaalde zich tot die, welke in de *Astron. Nachrichten* voorkomen, daar deze toch verreweg het talrijkst zijn. Daarentegen breidde hij het werk uit door niet alleen, zooals aanvankelijk bedoeld was, de sterren op te geven uit de 60 eerste deelen van de *Astron. Nachrichten*, maar daaraan toe te voegen de sterreplaatsen uit deel 61—66 van dat tijdschrift. Hierdoor werd geheele aansluiting verkregen aan de lijst van onherleide sterreplaatsen door Prof. SCHJELLERUP te Kopenhagen in de publicaties van de *Astron. Gesellschaft* uitgegeven. Het aantal opgenomen sterreplaatsen nam hierdoor met ongeveer 700 toe.

Na eene inleiding, waarin Dr. KAM de geschiedenis van dezen wetenschappelijken arbeid mededeelt en de door hem en de overige medewerkers gevolgde berekeningswijzen aangeeft, volgt de eigenlijke catalogus, welken de Heer KAM zich genoopt zag in drie afdeelingen te verdeelen.

De eerste lijst bevat de plaatsen, gevonden door zelfstandige meridiaanwaarnemingen en bevat 4891 sterren. De tweede lijst die sterren, waaromtrent wel eene zelfstandige waarneming is volbracht, maar waarvan de plaats berust op het gemiddelde van de uitkomsten dier waarnemingen en die van andere sterrekundigen; zij bevat 240 sterren. De derde lijst eindelijk bevat die sterren, waarvan alleen rechte opklimming of alleen declinatie bepaald is, en bevat 325 sterren. De drie lijsten bij elkander geven dus de volledige of onvolledige plaats aan van 5456 sterren.

Wij moeten nog vermelden dat de Heer KAM, alle dergelijke sterreplaatsen, die in de *Astron. Nachrichten* voorkomen, maar die reeds elders zijn bekend gemaakt, *niet* in zijne lijsten heeft opgenomen.

De tabellen, waaruit de genoemde drie sterrelijsten bestaan, bevatten de volgende kolommen.

1. Het rangnummer.

2. Epoche der waarnemingen, d. i. jaar en breuk van een jaar, aanduidende het oogenblik, waarop de sterreplaats bepaald was.

3. Epoche der sterreplaats, d. i. jaar waarvoor de middelbare sterreplaats reeds in de *Astronomische Nachrichten* voorkomt.

4. Grootte der ster.

5. Middelbare rechte opklimming der ster, herleid tot 1855,0.

Dit tijdstip is gekozen, omdat de groote Bonner lijst van benaderde sterreplaatsen, bekend onder den naam van *Bonner Durchmusterung*, ook op 1855 herleid is, en het dus door deze inrichting gemakkelijk zijn zal de sterren met die der *Durchmusterung* te identificeeren.

6. Het aantal der waarnemingen.

7. De praecessie in rechte klimming voor elke sterreplaats, voor 1855.

8. De *seculaire variatie* van die praecessie.

9. De zoogenoemde 3^de^ term van die variatie, die alleen bij sterren met hooge declinatie in rekening genomen moet worden.

10—14. De middelbare declinatie voor 1855, het aantal waarnemingen en dezelfde opgaven voor de praecessie in declinatie, als reeds voor die in rechte klimming genoemd zijn.

15. Deel en bladzijde der *Astron. Nachrichten*, waar de plaatsbepalingen te vinden zijn.

16. Plaats der waarneming.

Achter elk der drie lijsten is een groot aantal aanmerkingen gevoegd, waarin alle bijzonderheden vermeld staan, die voor een critisch gebruik van de in die lijsten vermelde sterreplaatsen noodig is.

De uitgebreide berekeningen van den Catalogus zijn, zooals de schrijver ons mededeelt, alle dubbel verricht, zoodat er weinig gevaar voor cijferfouten bestaat. Door eene oordeelkundige vergelijking van zijne sterreplaatsen met die in andere catalogi, o. a. in de *Bonner Durchmusterung*, is ook eene zeer gewenschte controle verkregen op de juistheid der oorspronkelijke opgaven in de *Astron. Nachrichten*.

Groote zorg heeft de Heer Kam besteed aan de herleiding van de schijnbare tot middelbare plaatsen. Voor elken waarnemer heeft hij nagegaan van welken sterrekundigen almanak hij zich bij de bepaling van den stand van zijn uurwerk en van het poolpunt van zijn meridiaancirkel bediende, en naar aanleiding hiervan òf de grootheden uit het *Berliner*

Jahrbuch òf uit den *Nautical Almanac* bij zijne herleidingen gebruikt.

De praecessie is naar de constante van Bessel berekend, die, volgens het onderzoek van Mädler en andere sterrekundigen, de voorkeur boven die van Struve verdient.

Uit het medegedeelde blijkt genoegzaam, dat door den Heer Kam en zijne voorgangers, waartoe ook ons tegenwoordig medelid Dibbits behoort, een zeer nuttig werk is verricht, dat groote diensten kan bewijzen aan hen, die nauwkeurige sterreplaatsen behoeven voor hunne relatieve plaatsbepalingen van planeten en kometen, maar vooral bij een hernieuwd onderzoek omtrent praecessie en eigenbeweging der sterren.

Hiertoe moet echter hun Catalogus gedrukt, en zooals dit in de sterrekundige wereld het gebruik is, in een ruim aantal exemplaren verspreid worden. Van eene publicatie op eigen kosten kan dus geen sprake zijn, terwijl het daarentegen geheel op den weg van de Koninklijke Akademie van Wetenschappen ligt, om die taak op zich te nemen en zoo de studie der sterrekunde naar haar vermogen te bevorderen.

Ondergeteekenden adviseeren derhalve aan de Afdeeling, de door den Heer Kam aangeboden Sterrelijst met bijvoegsels, in hare verhandelingen op te nemen.

Utrecht en *Leiden*, J. A. C. OUDEMANS.
18 Februari 1884. H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN.

VERSLAG

OVER EENE

VERHANDELING VAN DEN HEER **J. W. GILTAY**:

OVER HET POLARISEEREN VAN TELEFONISCHE GELEIDERS.

(Uitgebracht in de Vergadering van 23 Februari 1884).

De Commissie, benoemd in Uwe Vergadering van 26 Januari l.l. ten einde advies uit te brengen over de door den Heer J. W. Giltay aangeboden verhandeling: *Over het polariseeren van telefonische ontvangers*, heeft de eer het volgende mede te deelen.

De verhandeling bevat de resultaten van een uitvoerig onderzoek omtrent de verschijnselen, die zich voordoen, wanneer een condensator als ontvanger in eene telefonische geleiding wordt geplaatst.

Onder de vele pogingen, die aangewend zijn om de telefonie tot grootere volkomenheid te brengen, behoort het bezigen van een electrischen condensator aan het ontvangstation. De zoogenaamde luchtcondensator van Prof. Dolbear is daarbij merkwaardig door zijnen grooten eenvoud; hij bestaat uit twee evenwijdige metalen cirkelplaatjes, die op zeer kleinen afstand, geïsoleerd van elkander, in een ebonieten ring zijn bevestigd. Wordt de eene plaat, die met de geleiding verbonden is, door den stroom geladen, zoo induceert zij eene tegengestelde lading op de andere plaat en de daarbij gevolgde aantrekking der platen is voldoende om oscilleerende electrische stroomen in geluidgolven om te zetten.

Het eigenaardige voordeel van zoodanigen ontvanger bestaat in het grootendeels verdwijnen der ook als geruischen schadelijk werkende, storende inductiestroomen, die nu, zoowel bij het afwezig zijn der anders voorkomende draadspiralen, als bij het ontbreken van eene gesloten metaalgeleiding, moeten vervallen. POLLARD en GARNIER verbeterden die inrichting, toen zij den enkelen condensator door eene condenseerende batterij vervingen, bestaande uit een zeker aantal blaadjes bladtin, gescheiden door lagen postpapier, en die om de andere met eene klemschroef en met een tweeden geleider verbonden werden. Die condensator werd in den secundairen draad van eene inductieklos geplaatst, en wanneer nu in den primairen draad, door het zingen vóór eene in dezen gebrachte plaat, een electrische stroom snel werd afgebroken, ontstonden in den secundairen draad even schielijk op elkander volgende inductiestroomen, die de lading van den condensator voortdurend veranderden en zijne plaatjes in trilling brachten, waardoor het oorspronkelijke geluid, hoewel gewijzigd, weder te voorschijn kwam. Zoo ontstond de zingende condensator, ook wel, naar zijn vorm, het zingende boek genoemd.

Deze proef kreeg in 1881, door de inrichting van HERZ en DUNAND, praktische waarde voor de telefonie. Zij brachten eene microfoon in de primaire geleiding van eene inductieklos, waarvan de secundaire draadeinden verbonden werden met de bekleedsels van eenen uit verscheidene elementen bestaanden condensator. Werd in de microfoon gesproken, zoo liet de condensator slechts een krakend geluid vernemen. DUNAND kwam nu op de goede gedachte, aan den condensator eene permanente lading te geven, door eene galvanische batterij in de secundaire geleiding te plaatsen. Zoodra dit gedaan was, bleek het, dat de condensator alle gearticuleerde geluiden nauwkeurig kon wedergeven.

De Heer GILTAY nu heeft deze telefonische werking van den condensator nader onderzocht en voornamelijk getracht eene verklaring te geven van de schijnbaar zoo vreemde werking dier met den condensator verbondene ladingsbatterij; eene werking, die ondanks de proeven van vele natuurkundigen nog niet tot helderheid was gebracht.

Bij verschillende proeven van den schrijver bleek:

1°. Dat, bij een condensator zonder ladingsbatterij, van het gesprokene geen woord is te verstaan; men hoort slechts een sterk geraas. De vijf klinkers zijn niet te onderscheiden, alleen is de *O* het sterkst en zijn de *I* en *U* het zwakst.

2°. De condensator, geladen door een Leclanché-element, geeft de vijf klinkers te onderscheiden, terwijl het gesprokene vrij goed is te verstaan.

3°. Wordt de condensator door twee Leclanché-elementen geladen, zoo kan men alles goed onderscheiden en verstaan.

Ten einde zich nu hiervan rekenschap te geven, stelt schrijver door eene kromme lijn in functie van den tijd de sterkte van den stroom voor, die in den primairen geleider ontstaat, wanneer voor eene daarin geplaatste microfoon een enkelvoudige toon wordt voortgebracht. De in den secundairen geleider geplaatste condensator zal door den hierin ontstaanden inductiestroom beurtelings geladen en ontladen worden, en dezelfde kromme lijn geeft eene voorstelling in grootte en teeken van de ladingen, die zich naar den condensator begeven. Tengevolge dier ladingen zullen de tinnen blaadjes van den condensator elkander aantrekken en afstooten, en door eene eenvoudige redeneering meent de schrijver te mogen besluiten, dat deze werkingen eene *andere* wet volgen; zoodat de periodieke kromme dezer beweging de halve periode van die der inductiestroomen heeft, en dus de toon, dien de condensator voortbrengt en welke vrij zwak is, eene octaaf hooger staat dan het oorspronkelijke geluid. Verschillende proeven bevestigden deze beredeneerde uitkomst, bij welke proeven van eene stemvork, orgelpijp en clarinet werd gebruik gemaakt. Niet het minst opvallend was het resultaat, dat de klinker *O*, vóór de microfoon gesproken, als *A* uit den condensator te voorschijn komt, wat bij het feit, dat de kenmerkende toonen dier vocalen *O* en *A* (bes′ en bes″) juist eene octaaf verschillen, eene uitmuntende bevestiging dier redeneering geeft.

Heeft echter de condensator, door eene in den secundairen draad geplaatste batterij eene permanente lading, zoo zullen de oscilleerende electrische stroomen dien condensator niet als vroeger beurtelings positief en negatief laden, doch de lading, beurtelings toe- of afnemende, zal steeds hetzelfde teeken kunnen behouden; dientengevolge zal de afwisselende aantrekking en afstooting der tinblaadjes de periode van de oorspronkelijke geluidgolf bezitten, geene octaafverhooging heeft meer plaats, en terwijl de aantrekking der plaatjes, wier veranderingen evenredig zijn met het spanningsverschil, krachtig is, heeft het geluid, dat de condensator voortbrengt, hetzelfde karakter als dat bij de microfoon ontwikkeld; het is bovendien sterker dan zonder permanente lading van den condensator.

Zooals wij zagen, wordt ook dit door de proeven bevestigd en kon de gemaakte redeneering als juist beschouwd worden.

Nog beter wordt de werking der ladingsbatterij tot helderheid gebracht door de eenvoudige, wiskundige ontwikkeling, die de Heer Bosscha aan den schrijver mededeelde en waardoor eene benaderde oplossing van het vraagstuk is verkregen. Daaruit volgt: zoowel de octaafverhoogde toon, wanneer de permanente lading des condensators ontbreekt, als het merkwaardige feit, dat in het algemeen het geluid, dat de condensator te hooren geeft, uit twee geluiden is zamengesteld: het vóór de microfoon ontwikkelde en zijne hoogere octaaf. De intensiteit van het eerste geluid is evenredig aan het vierkant der primitieve lading des condensators; die van de hoogere octaaf is van die lading onafhankelijk, zoodat, terwijl reeds bij eene zwakke lading de grondtoon sterker is dan de octaaf, men met eene ladingsbatterij van eenige elementen de octaaf geheel niet meer uit de klankmassa zal kunnen hooren.

Prof. Dolbear vergeleek de werking der ladingsbatterij van den condensator bij die van den permanenten magneet in den gewone telefoon. Het is wenschelijk na te gaan in hoever die vergelijking opgaat. De Heer Giltay bezigde daartoe twee telefonen: eene met permanenten magneet en eene met week ijzeren kern; hij liet vóór eene microfoon als transmitter op een stemfluitje blazen, en hield voor ieder oor eene der telefoonen; de ongepolariseerde, met ijzeren kern, gaf een hooger of scherper geluid dan de gewone telefoon; het verschil in intensiteit was echter te groot om te beoordeelen of de toon van de eerste juist eene octaaf hooger was. Het schijnt, dat eenig permanent magnetisme, dat de ijzerkern zoo spoedig verkrijgt, voor de juiste waarneming storend werkt, want nam men in plaats van de ijzeren staaf een koker met ijzervijlsel, waarbij het remaneerend magnetisme terstond door schudden verwijderd kon worden, zoo werd de telefoon geheel onbruikbaar; geen woord was bij het spreken te verstaan; het geluid was nog zwakker dan vroeger met de ijzerkern; doch liet men nu vóór de microfoon op een stemfluitje blazen, zoo scheen het geluid van deze ongepolariseerde telefoon scherper en hooger dan dat van de gewone; soms meende men werkelijk de hoogere octaaf te onderscheiden.

Bij aanwezigheid van remaneerend magnetisme geeft de telefoon de trillingen, vóór de microfoon ontwikkeld, daardoor goed terug, omdat er wel versterking en verzwakking van magnetisme, doch geene omkeering van polariteit plaats heeft en het is de rol van den permanenten magneet, die omkeering van polariteit te voorkomen, terwijl dan tevens de krachtige werking ontstaat, die tusschen magneet en plaat vereischt wordt. Eene pas uitgegloeide ijzerkern gaf geen resultaat, doch de kortstondige nabijheid van een permanenten magneet was voldoende om die telefoon gearticuleerd geluid te doen geven.

Een opzettelijk onderzoek naar de vraag, of het voordeelig is den magneet in de ontvangende telefoon zoo sterk mogelijk te nemen, of dat het magnetisme slechts sterk genoeg moet zijn om omkeering van polariteit te voorkomen, leerde:

1°. dat voor de sterkst mogelijke werking die minimumlading onvoldoende is.

2°. dat de deugd van het geluid slechts tot op zekere hoogte met de sterkte van den magneet toeneemt, want blijkbaar zullen de telefoonstroomen des te minder invloed op het magnetisme van de ijzerkern uitoefenen, naarmate deze dichter bij haar magnetisch verzadigingspunt is.

Zoo is dan aangetoond, dat eene bepaalde polariteit zoo wel noodig is bij condensatoren als bij gewone telefoonontvangers en dat de werking der ladingsbatterij dezelfde is als die van den gewoonlijk voorkomenden permanenten magneet.

De schrijver besluit zijne verhandeling met de mededeeling van een tweetal proeven van anderen aard, die wellicht later voor toepassing van belang kunnen zijn.

Hij onderzocht of trillingen van den condensator ook electrische beweging tengevolge zouden hebben en dus in de telefoon geluid zouden geven. EDISON had zulks reeds in 1878 voorspeld, en volgens DUMONCEL heeft MAICHE op deze wijze getelefoneerd.

De Heer GILTAY liet dicht bij den condensator zingen en spreken; alles werd uitstekend gearticuleerd in de telefoon gehoord. Door het invoeren van een grooten weerstand in de geleiding, komt schrijver tot het resultaat, dat de condensator hier niet als microfoon, dat is niet door verandering van weerstand, maar door verandering in capaciteit werkt. Zoowel eene meer uitvoerige beschrijving dezer proeven, als eene nadere verklaring dier veranderde capaciteit, waarbij waarschijnlijk in eene blijvende lading der isoleerende papieren lagen de oorzaak der nu optredende electrische stroomen moet gezocht worden, ware hier zeer wenschelijk geweest. Thans is het bezwaarlijk omtrent dit deel der proeven een nader oordeel uit te spreken.

Daar dus een condensator als transmitter en als ontvanger kan dienen, schijnt het mogelijk aan *beide* einden van den geleider condensatoren te bezigen, en werkelijk gelukte dit bij twee paraffine condensatoren met 36 kleine Faure-elementen, vooral, wanneer de twee condensatoren evenwijdig in de lijn gebracht werden, zoodat hunne gelijknamige polen met elkander in direct verband stonden.

De schrijver merkt eindelijk op, dat, bij volmaakte isoleering, de batterij zou kunnen gemist worden en de eenmaal, ontvangen ladingen der condensatoren voldoende zouden zijn voor volgende telefonische gemeenschap.

De verhandeling van den Heer Giltay vormt een goed geordend en logisch geheel, dat, met helderheid geschreven en door tal van proeven toegelicht, als eene wel gelukte poging moet beschouwd worden om onderscheidene duistere verschijnselen op dit gebied der telefonie tot klaarheid te brengen.

Uwe Commissie stelt voor, den arbeid van den Heer Giltay in de Verslagen en Mededeelingen der Akademie te doen opnemen.

Amsterdam, 23 Februari 1884.

C. H. C. GRINWIS.
J. D. VAN DER WAALS.

HET POLARISEEREN

VAN

TELEFONISCHE ONTVANGERS.

DOOR

J. W. GILTAY.

Reeds vrij lang is het bekend, dat een Leidsche flesch, zoowel bij het laden als bij het ontladen, geluid geeft. De gemakkelijkste wijze om dit verschijnsel waar te nemen, bestaat daarin, dat men de beide bekleedsels der flesch met de uiteinden van den secondairen draad van een inductieklosje verbindt. Leidt men nu door den primairen draad den stroom van een galvanisch element, en laat men het Neefsche hamertje werken, dan zal de Leidsche flesch bij de trillingen van het hamertje telkens geladen en weer ontladen worden. Het gevolg daarvan zal zijn, dat ook de flesch gaat trillen en een toon zal geven, die, hoewel niet sterk, toch duidelijk waar te nemen is.

Door een toeval ontdekte ik, dat een seleniumcel, zoowel de cilindrische van Bell als de vlakke van Shelford-Bidwell *), in die omstandigheden eveneens geluid geeft. De slecht geleidende seleenlaag tusschen de metalen geleiders, speelt waarschijnlijk de rol van isolator, en de geleiders zelven die van de bekleedsels eener Leidsche flesch. De toon was zeer scherp, en tot op 30 of 40 cM. afstand te hooren. Wil men echter een sterken toon uit een conden-

*) *Nature*, Nov. 18, 1880.

Fig. 1

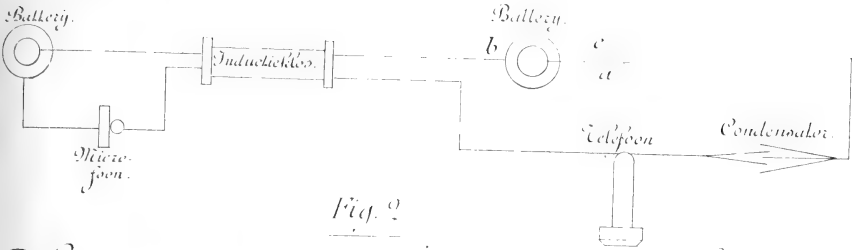


Fig. 2

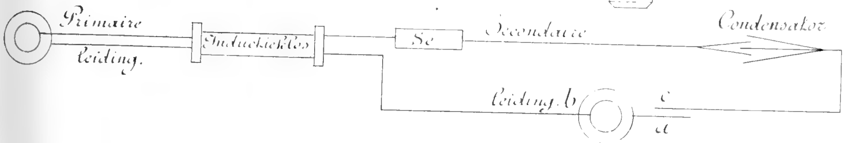


Fig. 3.

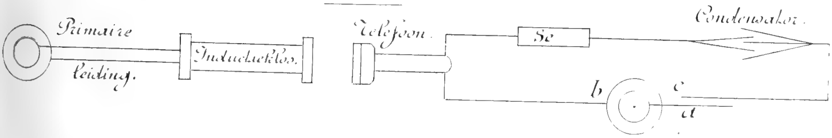


Fig: 4.

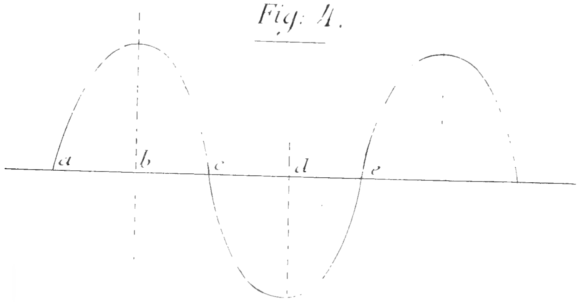


Fig. 5

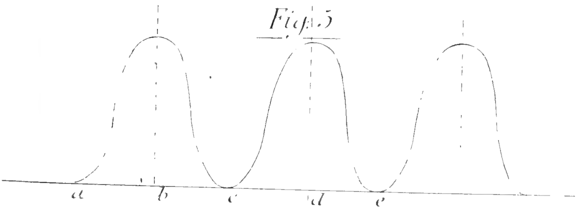
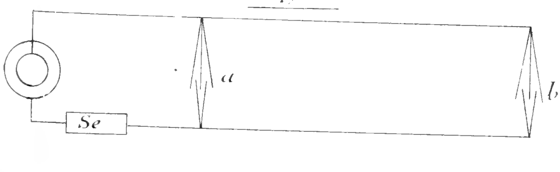


Fig: 6.



sator verkrijgen, dan kan men de Leidsche flesch evenmin als de seleniumcel gebruiken. Bij beiden zijn de metalen geleiders te ver van elkaar verwijderd, en ook is de isoleerende laag, zoowel glas als selenium, te stijf.

Veel geschikter tot het doen van deze proef is een condensator, die uit afwisselende lagen bladtin en papier is samengesteld. Wright en Varley zijn de eersten geweest, die hiermede geëxperimenteerd hebben, terwijl de proef door Pollard en Garnier *) zeer vereenvoudigd is. Deze laatsten maakten hun condensator uit 28 blaadjes tin van 6 bij 12 cM., die van elkaar gescheiden waren door velletjes postpapier, en om den andere de ééne helft met één klemschroef, de andere met een tweede geleidend verbonden. Deze condensator werd met de uiteinden van den secondairen draad van een inductieklosje verbonden. Voor het openen en sluiten der primaire leiding, waarin een batterij was geplaatst, diende een Reiss-transmitter, waarin echter de membraan door een metalen trilplaat, en het platinacontact door een koolcontact was vervangen. Zong men nu in dezen transmitter, dan werd, als hij goed gejusteerd was, het koolcontact met elke trilling verbroken en weer gesloten. In den secondairen draad van den klos ontstonden dus inductiestroomen, waardoor de condensator beurtelings geladen en ontladen werd. Deze geraakte daardoor in trilling, en bracht het geluid, dat de transmitter ontving, weer te voorschijn.

Om de proef van Pollard en Garnier na te doen, nam ik een condensator van 40 vellen bladtin van 6 bij 12 cM., die van elkaar gescheiden waren door paraffinepapier. De batterij in de primaire leiding van den inductieklos bestond uit 3 Bunsen-elementen. De primaire draad bestond uit 4 lagen van 0,045 cM. draaddikte, de secondaire uit 20 lagen van 0,016 cM. In den klos bevond zich, zooals gewoonlijk het geval is, een bundel week ijzerdraad. De Neefsche interruptor kan hierbij gemist worden, evenzoo de bij grootere inductietoestellen gebruikelijke condensator in den voet van

---

*) Dumoncel, *le Téléphone,* 4e Ed. p. 23.

het instrument. Liet ik nu in den transmitter zingen, dan gaf de condensator een geluid, dat door een geheele zaal te hooren was. Ofschoon dit het muziekale gehoor niet aangenaam aandoet, blijft de proef toch zeer merkwaardig. Praktische waarde voor de telefonie verkreeg de condensator eerst door de onderzoekingen van Herz en Dunand. Deze laatste natuurkundige *) bracht in plaats van den Reiss-transmitter een microfoon in de primaire leiding van een inductieklos, waarvan de secondaire draadeinden verbonden werden met de bekleedsels van een condensator.

Werd er nu tegen de microfoon gesproken, dan was er in den condensator niets te hooren dan een krakend geluid. Het tikken van een wekker en het slaan van een repetitiehorloge werden gehoord, maar zeer onduidelijk en eveneens krakend.

Dunand kwam toen op de goede gedachte, aan den condensator een permanente lading te geven, door een batterij in de secondaire leiding te plaatsen. Zoodra hij dit gedaan had, bemerkte hij dat de condensator in staat was, alle gearticuleerde geluiden nauwkeurig weer te geven. De beste resultaten verkreeg hij met een condensator, bestaande uit 36 velletjes tin van 6 bij 6 cM., gescheiden door postpapier. Met een inductieklos van 12 cM., 10 Bunsen-elementen in de secondaire, en 2 in de primaire leiding, sprak zijn condensator even goed als een Bell-telefoon. Met 15 Bunsen-elementen kon hij het gesprokene verstaan, als de condensator 90 cM. van het oor was verwijderd.

De luchtcondensator van Dolbear †) is in principe niets anders dan de sprekende condensator van Dunand.

In de volgende bladzijden wensch ik de telefonische werking van den condensator aan een nadere beschouwing te onderwerpen, en vooral wil ik trachten, een verklaring te

*) *Comptes Rendus*, 3 Janvier 1881.

†) *Scient. American*, June 18 1881.

geven, van de schijnbaar zoo vreemde werking der ladingsbatterij. Ofschoon verschillende natuurkundigen over dit onderwerp proeven genomen hebben, heeft niemand, voor zoover mij bekend is, deze zaak tot helderheid gebracht.

De volgende proef bleek mij zeer geschikt te zijn, om den invloed der ladingsbatterij op den condensator waar te nemen.

Ik verbond een Leclanché-element en een microfoon, model Hopkins *) met den primairen draad van een inductieklosje. In de secondaire leiding (fig. 1) bracht ik een telefoon, een batterij van 10 Bunsen-elementen en een condensator. Aan het plankje van de microfoon werd een horloge gehangen. Werd *c* met *a* verbonden, dan was de ladingsbatterij in werking, en had dus de condensator een permanente lading. Hield men nu aan het eene oor den condensator en aan het andere de telefoon, dan hoorde men in beiden zeer duidelijk het horologe tikken. Zoodra echter *c* met *b* verbonden, en dus de ladingsbatterij buiten werking gesteld werd, hield in den condensator alle geluid op, terwijl de telefoon rustig bleef doortikken †).

Wanneer wij nu overgaan tot de behandeling der vraag, welke de werking der ladingsbatterij op den condensator is, dan blijkt het, dat er tweeërlei verklaringen mogelijk zijn.

Ten eerste kan men zich denken, dat de condensator eerst door de ladingsbatterij *gevoelig* wordt gemaakt, en dat

---

*) *Scient. American,* March 19 1881. Deze microfoon is uiterst geschikt voor de proef met het tikkend horloge. De metalen trilplaat kan vervallen en het horizontaal stukje kool op een vertikaal plankje bevestigd worden. Dit toestelletje is veel beter vertrouwbaar dan het oorspronkelijke model van Hughes, en even gevoelig en eenvoudig te maken.

†) De condensator blijft in dit geval als inductor en niet als geleider, in de lijn. Als men in een telefonische leiding zulk een condensator brengt, wordt het geluid slechts zeer weinig verzwakt. De telefoon, die ik gebruikte, had een weerstand van 240 Ohms, en de condensator een van 1240000 Ohms. Diende de condensator nu als geleider, dan zou het geluid verbazend verzwakken, zoodra hij in de lijn werd gebracht.

daarin dus de reden te vinden is, dat slechts een permanent geladen condensator de zoo zwakke telefonische stroomen kan kenbaar maken.

Maar ten tweede is het ook mogelijk, dat de condensator eerst door de ladingsbatterij in staat wordt gesteld, nauwkeurig alle trillingsvormen weer te geven. In 't eerste geval zou men dus slechts aan een quantitatieve, in 't laatste aan een qualitatieve werking moeten denken. Is de eerste verklaring juist, dan moeten alle geluiden, die de condensator maakt, door de permanente lading versterkt worden. Bovendien zou het dan mogelijk zijn, een ongeladen condensator gearticuleerd te doen spreken, mits men er slechts zeer sterke telefonische ladingen heenzond.

In geval echter de tweede verklaring juist is, dan moet de ongepolariseerde condensator ook door de sterkste telefoonstroomen nog niet tot spreken te brengen zijn. Daarentegen zal dan de condensator reeds zeer zwakke stroomen in gearticuleerd geluid kunnen omzetten, mits men een ladingsbatterij gebruikt.

Ik zal nu in de eerste plaats een paar proeven beschrijven, die licht kunnen verspreiden over de vraag, of ongearticuleerde geluiden door de ladingsbatterij versterkt worden.

Een Leclanché-element werd met de primaire leiding van een inductieklos verbonden (fig. 2) en het Neefsche hamertje in werking gebracht. In de secondaire leiding plaatste ik een batterij van 57 kleine Leclanché-elementen, een condensator en een seleniumcel van 26000 Ohms weerstand. Deze laatste dient alleen, om de vermeerdering van den weerstand der secondaire leiding, door het inbrengen der ladingsbatterij, te kunnen verwaarloozen. Verbond ik *c* met *a*, dan was de condensator permanent geladen; verbond ik daarentegen *c* met *b*, dan was de ladingsbatterij buiten werking. Het bleek, dat de condensator een veel sterker toon gaf als *c* met *a*, dan wanneer *c* met *b* verbonden was. Derhalve wordt het geluid door de ladingsbatterij versterkt.

Op eenigszins andere wijze heb ik hetzelfde feit door de volgende proef bewezen.

De primaire leiding van den inductieklos (fig. 3) verbond ik weer met een Leclanché-element en liet het hamertje werken. De secondaire leiding liet ik open. Eenige centimeters van den klos verwijderd, werd een telefoon neergelegd, zoodat de magneet zich in het verlengde van de as van den inductieklos bevond. Deze telefoon was verbonden met de batterij, de seleencel en den condensator van de vorige proef. Er konden bij deze inrichting slechts zeer zwakke stroomen in de telefoon geïnduceerd worden, die zich naar den condensator begaven.

Het bleek toen, dat er in den ongeladen condensator niets hoegenaamd te hooren was, terwijl deze na het in werking stellen der batterij een vrij sterken toon gaf.

Nadat het aldus bewezen is, dat de condensator door de ladingsbatterij voor zwakke stroomen gevoeliger wordt gemaakt, willen wij onderzoeken, of een ongeladen condensator ook gearticuleerd geluid kan geven, als er zeer sterke telefonische ladingen heen worden gezonden. Blijkt het dat dit wel het geval is, dan dient de ladingsbatterij uitsluitend om den condensator gevoeliger te maken, en heeft zij op den vorm der trillingen geen invloed.

Ten einde deze vraag te beantwoorden, nam ik een Adermicrofoon, die ik met 3 Bunsen-elementen en den primairen draad van het inductieklosje verbond. Ten bewijze dat ik met dezen toestel zeer sterke telefonische stroomen verkreeg, diene, dat een Siemens-telefoon, met de secondaire leiding van den inductieklos verbonden, door een geheele zaal gehoord en verstaan werd. Daartoe was het noodig, dat men met luider stemme, en dicht bij de trilplaat van de Adermicrofoon sprak, en de telefoon van een bordpapieren trechter voorzien was, zooals dat bij de fonograaf gebruikelijk is *).

---

*) Ik heb op deze wijze een telefoon op het bladtin, dat om een fonograaftrommel was gewikkeld, zeer duidelijke trillingen doen opschrijven. Omtrent dit onderwerp hoop ik nog nadere proefnemingen te doen. Op de mogelijkheid van zulk een „tele-fonograaf" is reeds door EDISON gewezen (*Engineer* 1878, bd. 46, p. 425). Of de proef echter door hem gedaan is, is mij niet bekend.

Deze inductiestroomen voerde ik, in plaats van naar d Siemens-telefoon, naar een ongeladen condensator. Woorden, tegen de microfoon gesproken, werden gehoord, doch niet verstaan in den condensator. Daar het geluid sterk genoeg was, om, ware het gearticuleerd geweest, verstaan te worden, zoo leid ik uit deze proef af, dat de condensator zonder ladingsbatterij niet in staat is, gearticuleerde geluiden voort te brengen. Een melodie, luid en dicht bij de trilplaat der microfoon gefloten, werd gehoord en herkend; dit geluid was echter uiterst zwak.

De veronderstelling, dat de ladingsbatterij den condensator uitsluitend gevoeliger maakt, maar niets met den vorm der trillingen uitstaande heeft, blijkt dus onjuist te zijn. Deze stelt den condensator eerst in staat alle trillingen nauwkeurig weer te geven, en versterkt bovendien het geluid, zoowel gearticuleerd als niet-gearticuleerd.

Om te bepalen hoe sterk de ladingsbatterij ongeveer dient te zijn, ten einde den condensator gearticuleerd te doen spreken, deed ik de volgende proeven, waartoe weer de Ader-microfoon met 3 Bunsen-elementen gebruikt werd. De in de secondaire leiding opgewekte stroomen werden naar den hierboven beschreven condensator gevoerd. Bij de eerste proef was de condensator zonder permanente lading, bij de tweede werd er een Leclanché-element in de secondaire leiding gebracht, en bij de derde proef dienden twee Leclanché-elementen.

De resultaten dezer proeven waren de volgende:

1e proef. Condensator zonder ladingsbatterij. Van spreken is geen woord te verstaan, men hoort slechts een sterk geraas De vijf klinkers zijn niet te onderscheiden, alleen is de *o* het sterkst, en zijn de *i* en de *u* het zwakst.

2e proef. Condensator geladen door een Leclanché-element. De vijf klinkers zijn nu te onderscheiden, spreken is vrij goed te verstaan.

3e proef. Condensator geladen door twee Leclanché-elementen. Men kan alles goed onderscheiden en verstaan.

Zooals men hieruit ziet, is één Leclanché-element bijna voldoende, om gerticuleerd geluid mogelijk te maken.

Dat door een permanente lading van den condensator het voortgebrachte geluid versterkt wordt, is licht te begrijpen. Niet zoo gemakkelijk echter laat zich de vraag beantwoorden, op welke wijze eerst de ladingsbatterij den condensator in staat stelt den vorm der trillingen nauwkeurig weer te geven, en dus gearticuleerde geluiden voort te brengen.

De literatuur over dit onderwerp is zeer beperkt, althans datgene, wat de vermelding waard is.

Dunand zelf heeft, voor zoo ver mij bekend is, in het geheel geen verklaring van het door hem ontdekte feit gegeven.

Dolbear *) laat zich bij de beschrijving van zijn luchtcondensator zeer voorzichtig en onbepaald over de ladingsbatterij uit. Men kan zelfs uit zijn stuk niet opmaken, of hij een dergelijke batterij alleen wenschelijk dan wel noodzakelijk acht. Hij zegt: »if one of the terminals of a receiver be charged in any way, the reaction between the plates will be stronger than it will be without". Iets verder: »the electrically charged terminals in this system acting in a way analogous to the permanent magnets in the magnetic system".

Deze onduidelijk uitgesproken analogie tusschen de beteekenis van de ladingsbatterij bij den condensator, en die van den permanenten magneet bij de Bell-telefoon, kan men bezwaarlijk een verklaring noemen.

In het reeds genoemde werk van Dumoncel vindt men deze overeenkomst ook hier en daar aangeduid (blz. 213 en vgl.). Een eenigszins samenhangende beschouwing zal men er echter te vergeefs zoeken.

In de volgende regelen hoop ik aan te toonen, op welke wijze de ladingsbatterij op den vorm der trillingen werkt.

Denken wij ons daartoe een microfoon en een batterij, met den primairen draad van een inductieklos verbonden, en laat de secondaire draad gesloten zijn. Indien er nu vóór

*) *Scient. American.* June 18. 1881.

de microfoon een enkelvoudige toon wordt voortgebracht, dan zal er in den dunnen draad een inductiestroom ontstaan, die door de in fig. 4 geschetste kromme kan worden voorgesteld. Op de lijn der abscissen zijn de tijden opgeteekend, de ordinaten duiden de sterkte van den stroom aan. Wordt nu de secondaire leiding geopend, en worden de beide uiteinden met de bekleedsels van een condensator verbonden, dan zal deze beurtelings geladen en ontladen worden. De kromme van fig. 4, die zooeven de wording der inductiestroomen voorstelde, zal nu een beeld geven van de veranderingen van grootte en teeken der ladingen, die zich naar den condensator begeven.

Zal nu de condensator, onder den invloed dezer alterneerende ladingen, hetzelfde geluid geven, dat bij de microfoon is voortgebracht, dan moet ook zijn trillingsvorm overeenkomen met de kromme van fig. 4. Wanneer wij echter de beweging, die de condensator maakt, wat nauwkeuriger nagaan, dan zullen wij zien, dat de tinnen blaadjes zich volgens een geheel andere wet bewegen. Gemakshalve zal ik daarbij, wanneer de even bekleedsels +, de oneven — geladen zijn, de lading positief, en in het omgekeerde geval negatief noemen.

Op het tijdstip *a* (fig. 4) is de lading = 0, dus op dat oogenblik liggen de bekleedsels van den condensator in hun evenwichtspunt.

Van *a* tot *b* stijgt de lading van 0 tot haar positief maximum, de bekleedsels bewegen zich gedurende dien tijd naar elkaar toe.

Van *b* tot *c* daalt de lading van haar positief maximum tot op 0, de blaadjes bewegen zich van elkaar af, naar hun evenwichtspunt terug.

Van *c* tot *d* vermeerdert de lading van 0 tot haar negatief maximum, *de blaadjes bewegen zich weer naar elkaar toe.*

Van *d* tot *e* vermindert de lading van haar negatief maximum tot op 0, de blaadjes bewegen zich van elkaar af, naar hun evenwichtsstand terug.

Volgens deze beschouwing zou fig. 5 ongeveer een beeld geven van de beweging van den condensator, overeenkomend met de in fig. 4 voorgestelde wisseling der ladingen.

Ofschoon wij de bewegingskrommen van den condensator en de microfoon nog niet met mathematische juistheid bepaald hebben, is er toch, wat de snelheid van beweging betreft, een eenvoudige verhouding tusschen beidən op te merken. Bij vergelijking toch van fig. 4 met fig. 5 ziet men, dat de condensator blaadjes twee geheele trillingen volbrengen, in den tijd dat de microfoon er slechts één maakt.

Men kan dus verwachten, dat een toon, die voor de microfoon wordt voortgebracht, een octaaf hooger door den condensator zal worden teruggegeven. Of die octaaf hetzelfde timbre zal bezitten als de grondtoon, willen wij voorloopig in 't midden laten.

Werkelijk geeft de ongeladen condensator alle tonen een octaaf hooger weer, wat ik door een opzettelijk daartoe ingerichte proef heb bewezen.

Men zou kunnen meenen, dat ik reeds bij vroeger beschreven proeven met den ongeladen condensator, deze verhooging van toon moest waargenomen hebben. Dit is echter niet het geval. De tonen toch, die men uit den condensator verkrijgt, wanneer de ladingsbatterij beurtelings in en uit de leiding wordt gebracht, verschillen zeer in sterkte, en dit maakt het bizonder moeilijk, het verschil in hoogte met zekerheid te hooren. Daarom was het noodig, een inrichting te maken, waarbij men, den condensator steeds aan het oor houdend, de ladingsbatterij naar willekeur oogenblikkelijk in of buiten de leiding kon brengen. Daardoor volgen de beide tonen onmiddellijk op elkaar, en werd de vergelijking eerst mogelijk. In de primaire leiding van den inductie-klos bracht ik 3 Bunsen-elementen en een Ader-microfoon. In de secondaire plaatste ik een condensator, een batterij van 6 Leclanché-elementen en een drukknop. Deze laatste was zoodanig ingericht, dat de batterij geheel buiten de leiding werd gebracht, zoodra er op den knop werd gedrukt. In dat geval was dus de condensator ongepolariseerd; liet men den knop daarentegen los, dan was de condensator door 6 Leclanché-elementen geladen.

Vlak bij de trilplaat der Ader-microfoon werd nu op een stemfluitje de orchest-*a* geblazen. Wanneer men aan den geladen condensator luisterde, hoorde men de *a* zeer duidelijk. Zoodra echter de knop neer werd gedrukt, en dus de ladingsbatterij buiten werking gesteld, werd de toon plotseling zeer veel zwakker, maar bovendien een octaaf hooger.

Om de proef ook voor een enkelvoudigen toon te doen, nam ik een stemvork, die dicht voor de microfoon werd aangestreken. Het geluid op deze wijze, zelfs uit zeer groote stemvorken verkregen, bleek echter te zwak te zijn; zonder ladingsbatterij hoorde men niets. Wanneer ik de stemvork in trilling bracht door er tegen te slaan, gelukte de proef wel, dan echter heeft men geen enkelvoudig geluid meer. Ook een gesloten orgelpijp gaf het gewenschte resultaat. Zeer geschikt voor deze proef is een clarinet, mits er niet al te sterk op wordt geblazen, daar er dan contact-verbrekingen in de microfoon plaats hebben, waardoor het geluid rammelend wordt.

Ik heb deze proeven herhaaldelijk gedaan, en verschillende personen met een geoefend muziekaal gehoor het verschil in toonhoogte laten hooren; steeds werd dit door hen op een octaaf geschat. Een lastig verschijnsel bij deze proef is somtijds het voorkomen van een toon, die in de microfoon ontstaat; door af en toe eens op de trilplaat te kloppen, wordt dit gebrek echter gewoonlijk spoedig verholpen.

Wij weten dus nu, dat de ongepolariseerde condensator alle tonen een octaaf hooger weergeeft. Of er nu bovendien nog verandering van timbre plaats heeft, dan wel, of een enkelvoudige trilling der microfoon ook een enkelvoudig geluid in den condensator ten gevolge heeft, willen wij voorloopig onbeslist laten. Zelfs in dit laatste, gunstigste, geval, zal het echter nog niet mogelijk zijn, gearticuleerd geluid uit den condensator te verkrijgen. De oorzaak daarvan laat zich gemakkelijk begrijpen, wanneer men bedenkt, dat de klinkers, volgens Helmholtz, zich van elkaar onderscheiden door kenmerkende, constante bijtonen. Wanneer men bijv. den klinker *A* uitspreekt, onverschillig in welke toonhoogte, dan zal daarin steeds de toon bes″ voorkomen, die nog door het resonneeren der mondholte versterkt wordt. Spreekt men nu voor de microfoon een *A* uit, dan zullen alle tonen, waaruit die klank bestaat, en dus ook de kenmerkende bes″, een octaaf hooger uit den ongeladen condensator te voorschijn komen. Het gevolg daarvan zal zijn, dat het geluid, dat men uit den condensator hoort, geheel het karakter van den *A* klinker zal verloren hebben.

Dat deze bewering juist is, wordt door de volgende proef bewezen:

Een Ader-microfoon met 3 Bunsen-elementen wordt met den primairen draad van een inductieklos verbonden. In de secondaire leiding breng ik een condensator, een batterij van 3 Leclanché-elementen, en een drukknop. De laatste is zoodanig verbonden, dat de condensator slechts dan door de batterij geladen is, als de knop wordt neergedrukt. Spreekt men nu den klinker *O* voor de microfoon uit, dan zal men dien zeer duidelijk in den condensator hooren, als de knop neergedrukt is. Laat men dezen echter los, waardoor de condensator zijn permanente lading verliest, dan hoort men duidelijk den klinker *A*. Dit verschijnsel is een gevolg van het feit, dat de kenmerkende tonen der klinkers *O* en *A* (bes′ en bes″) juist een octaaf verschillen *).

De medeklinkers kan men, ondanks deze toonverhooging, goed onderscheiden, zoodat bijv. obrocodobro voor de microfoon gezegd, zeer duidelijk als abracadabra in den ongeladen condensator te hooren is.

Nadat ik aldus duidelijk gemaakt heb, waarom een ongeladen condensator niet als telefonische ontvanger kan dienen, wil ik thans nagaan, welke rol de ladingsbatterij speelt.

Zij fig. 4 weer een beeld van de veranderingen in grootte en teeken der telefonische ladingen, die naar den condensator

*) Helmholtz *die Lehre von den Tonempfindungen*, 3e Ausgabe, S. 172.

gezonden worden; laat ons dan nagaan, hoe deze zich zal bewegen, als hij bovendien een permanente lading L heeft.

De lading op het oogenblik a (fig. 4) is L, de blaadjes zijn in rust.

Van a tot b groeit de lading van L tot haar maximum, de blaadjes zullen zich dus dichter naar elkaar toe bewegen.

Van b tot c vermindert de lading van haar maximum tot op L, de blaadjes bewegen zich dus weer van elkaar.

Van c tot d vermindert de lading van L tot op haar minimum, wijl de telefonische lading, die nu aankomt, omgekeerd van teeken is als de permanente. De blaadjes bewegen zich dientengevolge nog verder uit elkaar.

Van d tot e groeit de lading van haar minimum tot op L, de blaadjes bewegen zich weer naar hun evenwichtsstand.

De geladen condensator volgt dus in zijn beweging ongeveer de in fig. 4 geschetste kromme; hij geeft dus de trillingen van de microfoon geheel met dezelfde snelheid weer en dat wel, zooals uit de bovenstaande beschouwing blijkt, omdat door de ladingsbatterij de omkeering van polariteit verhinderd wordt. De permanente lading behoeft daartoe niet zeer groot te zijn; wanneer zij slechts grooter is, dan de grootste telefonische lading, die den condensator bereikt, dan zal deze laatste reeds geschikt zijn tot het geven van gearticuleerd geluid. Wij zagen dan ook reeds vroeger, dat de zwakke lading van een enkel Leclanché-element bijna voldoende is voor articulatie.

De geladen condensator brengt het gesproken woord op uitstekende wijze te voorschijn, door de passiviteit der blaadjes tin wordt het geluid veel natuurlijker teruggegeven dan door een Bell-telefoon.

Dat de ladingsbatterij bovendien, zooals wij zagen, den condensator gevoeliger maakt, wordt duidelijk, als men bedenkt, dat de aantrekkende kracht evenredig is aan het vierkant van het potentiaal-verschil. Wordt een der bekleedsels met de aarde verbonden, en is het potentiaal van het andere $= V$, dan is de aantrekking K:

$$K = V^2 \text{ const.}$$

$$dK = 2\,V\,.\,d\,V\,.\text{ const.}$$

Hieruit ziet men, dat de verandering der aantrekking, ontstaan door de verandering van potentiaal, evenredig is aan het oorspronkelijk potentiaal der niet afgeleide bekleeding. En daar die verandering van aantrekking de oorzaak der geluidgevende beweging is, zal ook de sterkte van het geluid aangroeien met het oorspronkelijk potentiaal.

Ofschoon wij in het bovenstaande de bewegingskrommen van den geladen en den ongeladen condensator niet met wiskunstige nauwkeurigheid bepaald hebben, bleek uit de overeenstemming tusschen de beredeneerde resultaten en de proeven toch, dat de beschouwingen omtrent de werking der ladingsbatterij geheel juist waren.

Om echter den juisten vorm dier bewegingskrommen te bepalen, dient de volgende mathematische ontwikkeling, die ik aan den Hoogleeraar Bosscha verschuldigd ben.

Wanneer er voor de microfoon, die met den primairen draad van den inductieklos verbonden is, een enkelvoudig geluid wordt voortgebracht, dan zal de sterkte der in den dunnen draad opgewekte inductiestroomen door een sinusoïde kunnen worden voorgesteld. Wordt er met den secondairen draad een condensator verbonden, die ook nog een permanente lading a heeft, dan zal de grootte der lading op elk oogenblik kunnen worden gevonden uit de uitdrukking $a + b \sin 2\pi \frac{t}{T}$, waar T den trillingstijd voorstelt van den toon, die voor de microfoon is voortgebracht. Wijl de aantrekking K der bekleedseis evenredig is aan het vierkant der lading, zoo is:

$$K = \left(a + b \sin 2\pi \frac{t}{T}\right)^2 = a^2 + 2\,a\,b \sin 2\pi \frac{t}{T} + b^2 \sin^2 2\pi \frac{t}{T}.$$

Is $a = 0$, dus heeft de condensator geen permanente lading, dan is:

$$K_{\mathrm{I}} = b^2 \sin^2 2\pi \frac{t}{T}.$$

Daar, bij kleine amplituden, de uitslag evenredig kan genomen worden aan de aantrekking op dat oogenblik, zoo stelt deze laatste uitdrukking tevens de bewegingskromme voor van den ongeladen condensator; zij is dus de vergelijking van de kromme, die wij in fig. 5 teekenden. Vervangen wij

$$sin^2\, 2\,\pi\, \frac{t}{T} \text{ door } \frac{1 - cos\, 2\,\pi\, \frac{t}{\frac{1}{2}\,T}}{2},$$

dan is K_I:

$$K_I = \frac{b^2}{2} - \frac{b^2}{2} cos\, 2\pi \frac{t}{\frac{1}{2}\,T}.$$

Hieruit blijkt, dat de kromme van fig. 5 kan ontbonden worden in een sinusoïde van den trillingstijd $\frac{1}{2}\,T$, en een rechte lijn, op den afstand $\frac{b^2}{2}$ evenwijdig aan de as loopend. Dit wil dus zeggen, dat de ongeladen condensator een voor de microfoon voortgebrachten, enkelvoudigen toon, niet alleen een octaaf hooger, maar ook weer als enkelvoudigen toon zal teruggeven.

Zetten wij de laatstgevonden uitdrukking voor K_I in den vorm, dien wij voor K ontwikkelden, in, dan is:

$$K = a^2 + 2\,a\,b\,sin\, 2\,\pi\, \frac{t}{T} + \frac{b^2}{2} - \frac{b^2}{2}\, cos\, 2\,\pi\, \frac{t}{\frac{1}{2}\,T}.$$

Deze uitdrukking zegt ons, dat de bewegingskromme van den *geladen* condensator kan worden ontbonden in een rechte lijn, op een afstand $a^2 + \frac{b^2}{2}$ evenwijdig aan de as loopend, en in twee sinusoïden, de eene van de periode T, de andere van $\frac{1}{2}\,T$. Behalve het enkelvoudig geluid, voor de microfoon voortgebracht, zal er dus uit den condensator ook nog de hoogere octaaf van dien toon te hooren zijn.

Dit resultaat is geheel in overeenstemming met mijn proeven. In de primaire leiding van den inductieklos had ik de Ader-microfoon met 3 Bunsen-elementen geplaatst. Met de secondaire leiding was de condensator verbonden, en, door middel van 2 drukknoppen, kon ik dezen naar willekeur met een of twee Leclanché-elementen laden. Voor de microfoon liet ik op een stemfluitje de orchest-*a* blazen. Het bleek nu, dat ik, behalve de *a*, ook nog de hoogere octaaf, ofschoon zwak, uit den condensator hoorde, wanneer deze met één Leclanché-element geladen was. Met een lading van twee Leclanché-elementen, kwam die octaaf eveneens, ofschoon zwakker, te voorschijn.

Volgens de formule, die wij voor K vonden, verhouden zich de amplituden der beide tonen als $2\,a\,b : \frac{b^2}{2}$, de verhouding der intensiteiten is dus als $4\,a^2\,b^2 : \frac{b^4}{4}$ of $16\,a^2 : b^2$. De grondtoon zal dus reeds even sterk als de octaaf zijn, als $4\,a = b$ is. Daaruit volgt, dat reeds bij een zwakke permanente lading de grondtoon sterker zal zijn dan de octaaf; met een ladingsbatterij van eenige elementen, zal men de octaaf geheel niet meer uit de klankmassa kunnen hooren. De condensator zal dus, bij een voldoende permanente lading, de kromme van fig. 4 geheel in zijn beweging volgen.

Zooals wij zagen, wordt er in het geciteerde stuk van Dolbear gezinspeeld op de analogie tusschen de werking der ladingsbatterij bij den condensator, en die van den permanenten magneet bij de telefoon. Navez *) is, voor zoover mij bekend is, de eenige, die getracht heeft een verklaring te geven van de rol, die de permanente magneet in de *ontvangende* telefoon speelt. Hij beweert, dat er bij een telefoon zonder magneet omkeering van polariteit plaats heeft, zoodra er een stroom aankomt, die sterker is dan de onmiddellijk voorafgaande, d. w. z., die aan een grootere beweging der

*) *Bulletin de l'Acad. Royale de Belgique* 1878, T. 45, p. 423.

trilplaat dan de voorafgaande, zijn ontstaan te danken heeft. Hij zegt daaromtrent het volgende.

»Supposons deux Bell conjugués, celui qui remplit les fonctions de récepteur n'étant pas muni d'un aimant permanent. La plaque de l'envoyeur fait un mouvement, et le courant d'induction produit, activant l'électro-aimant du récepteur, détermine dans sa plaque un mouvement correspondant. La plaque de l'envoyeur fait un autre mouvement, plus grand que le précédent, et envoie en conséquence dans la bobine un courant, qui doit nécessairement renverser les poles de l'électro-aimant et déterminer deux mouvements en sens inverse de la plaque réceptrice pour un mouvement de la plaque de l'envoyeur."

Ofschoon het hier gezegde zonder twijfel waar is, bevat het toch niet de geheele waarheid. Het is namelijk volstrekt niet noodig dat een stroom sterker zij dan zijn voorganger, om omkeering van polariteit te bewerken, want voor dat de tweede stroom komt, heeft de eerste reeds opgehouden, en daarmede is alle polariteit van den ijzerkern verdwenen, waarbij ik natuurlijk het uiterst geringe remanente magnetisme, dat de ijzerkern door de telefoonstroomen zal hebben verkregen, buiten rekening laat. Er zal dus reeds bij den tweeden stroom omkeering van polariteit ontstaan, al is deze slechts even sterk of zelfs zwakker dan de eerste. De volgende redeneering zal dit nog duidelijker maken:

Men neme aan dat wij in de secondaire leiding van onzen inductieklos een telefoon zonder permanenten magneet brengen, terwijl fig. 4, weer een beeld geeft van de in die leiding opgewekte inductiestroomen. Laat ons dan nagaan, welke beweging de telefoon-trilplaat zal maken, onder den invloed dier stroomen.

Op het oogenblik *a* (fig. 4) gaat er geen stroom door het spoeltje, de ijzerkern is dus niet magnetisch, de trilplaat wordt niet aangetrokken.

Van *a* tot *b* gaat er een steeds sterker wordende stroom door het spoeltje. Het uiteinde van de ijzerkern, dat zich het dichtst bij de trilplaat bevindt, wordt bijv. Noordpool.

De trilplaat wordt aangetrokken en beweegt zich naar de ijzerkern toe.

Van *b* tot *c* verzwakt de hierboven genoemde stroom, tot hij in $c = 0$ is De Noordpool verdwijnt, de trilplaat beweegt zich van de ijzerkern af.

Van *c* tot *d* gaat een steeds toenemende stroom, omgekeerd gericht als die van *a* tot *b*, door het spoeltje. Het uiteinde van de ijzerkern het dichtst bij de trilplaat wordt Zuidpool. *De trilplaat wordt weer aangetrokken.*

Van *d* tot *e* verzwakt de hierboven genoemde stroom, tot hij in $c = 0$ is. De Zuidpool verdwijnt weer en de trilplaat verwijdert zich van de ijzerkern.

Men ziet dus dat de trilplaat ongeveer dezelfde beweging maakt, als de blaadjes van den ongepolariseerden condensator. Werkelijk heeft dan ook het geluid, dat uit den laatste komt, en dat, hetwelk de ongepolariseerde telefoon voortbrengt, hoewel van geen van beiden iets te verstaan is, zeer veel overeenkomst met elkaar. Om met zulk een telefoon geluid te krijgen, doet men het best, als transmitter een Ader-microfoon met 3 Bunsen-elementen te gebruiken, men verkrijgt daardoor een zeer goed hoorbaar, hoewel niet gearticuleerd, geluid. Dat NAVEZ uit een telefoon zonder magneet in het geheel geen geluid verkreeg, is zonder twijfel daaraan toe te schrijven, dat hij met te zwakke telefoonstroomen werkte.

Evenals van den ongeladen condensator, kan men van de telefoon zonder magneet verwachten, dat zij het geluid een octaaf hooger zal weergeven. Ik heb verschillende proeven gedaan, om die octaaf te verkrijgen, doch met twijfelachtig resultaat. Daartoe gebruikte ik een telefoon zonder magneet, en met zorgvuldig week gemaakte ijzerkern, en bracht deze, achter een gewone telefoon, in de secondaire leiding van een inductieklos. Met de primaire leiding werd een Blake-microfoon en een Leclanché-element verbonden. Aan het eene oor hield ik de ongepolariseerde, en aan het andere de gewone telefoon, en liet voor de microfoon op een stemfluitje blazen. Daarbij scheen het mij wel toe, dat de ongepolariseerde telefoon een hooger of scherper geluid gaf dan de gewone telefoon, maar toch durf ik niet met zekerheid zeggen, dat er juist een octaaf verschil tusschen die twee geluiden bestond. Het verschil in intensiteit was te groot, om met volkomen beslistheid te kunnen oordeelen, en dat wel, niettegenstaande ik de gewone telefoon van zeer weinig windingen had voorzien, zoodat zij slechts een weerstand van 13 Ohms bezat, terwijl die van de ongepolariseerde telefoon 145 Ohms bedroeg.

Het scheen mij echter bij deze proeven toe, dat de ijzerkern hoe langer hoe meer remanent magnetisme verkreeg, 't zij door de werking van het aardmagnetisme, of wel door de sterke inductiestroomen, die soms, bij het geheel verbreken van het microfonisch contact, ontstonden. Toen ik de Blake-microfoon verving door een Ader-microfoon met 3 Bunsen-elementen, kon ik zelfs in de ongepolariseerde telefoon, ofschoon zeer zwak, reeds alles, wat voor de microfoon werd gesproken, verstaan; wel een bewijs, dat er reeds vrij wat remanent magnetisme in het spel was. Om dit bezwaar te vermijden, nam ik de ijzerkern uit de telefoon, en verving die door een kartonnen kokertje, bijna geheel met ijzervijlsel gevuld. Mocht hierin remanent magnetisme ontstaan, dan kon ik dat onmiddellijk doen verdwijnen, door de telefoon even te schudden. Dit bleek een afdoend middel te zijn, want er was nu geen woord meer uit de telefoon te verstaan. Zoo liet ik bijv. iemand bij de Ader-microfoon ons volkslied opzeggen, maar kon dit in de telefoon zelfs niet volgen. Bovendien was het geluid uiterst zwak, nog zwakker dan vroeger met de ijzerkern.

Toen ik nu voor de Ader- of Blake-microfoon op het stemfluitje liet blazen, scheen al weer het geluid van de ongepolariseerde telefoon mij scherper en hooger toe dan dat van de gewone. Soms zelfs meende ik werkelijk de hoogere octaaf te onderscheiden, maar ook bij deze inrichting maakte het groote verschil in intensiteit, dat het niet mogelijk was, met voldoende zekerheid te oordeelen.

Wanneer daarentegen de telefoon permanent gemagnetiseerd is, dan is het duidelijk, dat zij zeer juist de trillingen, die voor de microfoon zijn voortgebracht, kan weergeven, daar er dan slechts verzwakking en versterking van magnetisme plaats heeft, terwijl omkeering van polariteit, bij een voldoende sterkte van den permanenten magneet, geheel vermeden is. Met andere woorden: de magneet dient slechts om omkeering van polariteit te verhinderen. Daarom is een zeer zwakke permanente magnetiseering reeds voldoende, om een telefoon gearticuleerd te doen spreken.

Dit bleek dan ook reeds genoegzaam uit de proef met de telefoon met weeke ijzerkern, die ik zooeven vermeldde. Ten overvloede deed ik nog een andere proef, waarbij ik eerst een telefoon met versch gegloeide ijzerkern, en zonder magneet, aan het oor bracht, zonder iets te kunnen verstaan, van hetgeen er tegen de microfoon gesproken werd. Nadat ik slechts een oogenblik een permanenten magneet bij de kern had gehouden, had deze laatste reeds remanent magnetisme genoeg om de telefoon gearticuleerd, ofschoon zwak, te doen spreken.

In verband met het voorgaande, doet zich nu de vraag voor, of het voordeelig is, den polariseerenden magneet in de ontvangende telefoon zoo sterk mogelijk te nemen, of dat men dien maar juist sterk genoeg moet maken, om omkeering van polariteit te voorkomen?

Aan het kiezen van een zeer sterken magneet is, theoretisch gesproken, zoowel een voordeel als een nadeel verbonden. Het voordeel ontstaat daaruit, dat een sterke magneet ook de trilplaat sterk zal magnetiseeren, terwijl de verandering van aantrekking evenredig is aan het magnetisme der trilplaat. Zij m het magnetisme van den staalmagneet en m_{I} dat der trilplaat, dan is de aantrekking:

$$K = C\, m\, m_{\text{I}}.$$

Nemen wij aan, dat de trilplaat verzadigd, en dus m_{I} constant is, dan is:

$$d\,K = C\, m_{\text{I}}\, d\, m.$$

Het nadeel, dat echter aan de keuze van een zeer sterken magneet is verbonden, bestaat daarin, dat de telefoonstroomen des te minder invloed op het magnetisme van de ijzerkern zullen hebben, naarmate deze dichter bij haar magnetisch verzadigingspunt is. Was de ijzerkern volkomen verzadigd, dan zouden zij in 't geheel niets uitwerken, en dus zou $d\,m$, en bijgevolg ook $d\,K = 0$ zijn.

De proef zal nu uit moeten maken, welke inrichting het gunstigst is voor een maximale werking.

Tot dat doel vervaardigde ik een telefoon, waarin de permanente magneet door een rechten elektromagneet vervangen was. Deze telefoon had dus twee draadklossen: het gewone klosje voor de telefonische stroomen, aan dat uiteinde der staaf, dat zich bij de trilplaat bevond, en verder een langen klos, met dikken draad ontwikkeld, over het overige deel der staaf.

De kleine klos dier telefoon bracht ik nu met een Blake-microfoon en een Leclanché-element in één leiding, zonder een inductieklos te gebruiken. De groote klos werd voorloopig buiten werking gelaten. Omkeering van polariteit was op deze wijze niet mogelijk, de telefoon sprak dan ook zeer goed verstaanbaar.

Nu verbond ik een Bunsen-element met den langen klos, die op de ijzeren staaf geschoven was: het geluid werd daardoor onmiddelijk veel sterker.

Toen ik daarna voor den elektromagneet 4 Bunsen-elementen gebruikte, bleef het geluid even sterk als met een enkel. De magneet droeg met een Bunsen-element 55 gram, met 4 elementen 100 gram, bij welke metingen een gewone telefoon-trilplaat als anker diende. Zonder de Bunsen-batterij, dus alleen door het Leclanché-element, en met de microfoon in de leiding, was de ijzerkern te zwak magnetisch om de enkele trilplaat, zonder belasting, te dragen.

Ofschoon deze meting, wat de grenswaarden aangaat, op geen groote nauwkeurigheid aanspraak mag maken, bewijst zij toch:

1°. Dat het, om de sterkst mogelijke werking te verkrijgen, niet voldoende is, als men den magneet zoo zwak neemt, dat hij slechts omkeering van polariteit verhindert.

2°. Dat de sterkte van het geluid slechts tot op een zekere hoogte toeneemt met de sterkte van den magneet.

Dezelfde mathematische beschouwing, die ons den juisten vorm der condensator-beweging leerde kennen, kan toegepast worden tot het vinden van de beweging der telefoon-trilplaat. Wanneer P het permanent magnetisme van de ijzerkern is, en μI het magnetisme, dat door een stroom I, die door den klos loopt, in de ijzerkern wordt opgewekt, dan is de aantrekking:

$$K = C(P + \mu I)^2.$$

Is het geluid, voor de microfoon voortgebracht, enkelvoudig, dan verandert I naar den vorm $a \sin 2\pi \frac{t}{T}$, dus:

$$K = C\left(P + \mu a \sin 2\pi \frac{t}{T}\right)^2.$$

Deze vorm is geheel overeenkomend met dien, welken wij voor de beweging des condensators vonden. Dezelfde resultaten, die wij er toen uit afleidden, zullen wij dus ook voor de beweging der telefoon-trilplaat verkrijgen.

Ik meen in het bovenstaande aangetoond te hebben, waarom polarisatie noodig is, bij condensatoren zoowel als bij telefonen. Ofschoon de vraag, die ik bij het begin van dit stuk gesteld heb, hiermede beantwoord is, wil ik hier nog een paar proeven, betrekking hebbende op de telefonische werking der condensatoren, bijvoegen.

Toen ik een telefoon, condensator en ladingsbatterij van 10 Bunsen-elementen in één lijn had, kwam ik op de gedachte, eens te beproeven, of trilling van den condensator ook electriciteits-beweging ten gevolge zou hebben, en dus in de telefoon eenig geluid zou geven. Daartoe liet ik zeer dicht bij den condensator zingen en spreken, en het bleek mij, dat alles uitstekend gearticuleerd in de telefoon gehoord werd, ofschoon het geluid niet sterk was. Met die inrichting was het dus mogelijk, heen en weer te spreken.

De vraag was nu, welke is de oorzaak van dit verschijnsel? Werkt de condensator als microfoon, of is het verandering van capaciteit, waarmede men te doen heeft? Deze vraag was op zeer eenvoudige wijze te beantwoorden.

Daartoe bracht ik den condensator met een batterij en een telefoon in één leiding. De geleidingsweerstand van den condensator was 1248000 Ohms, die der telefoon 240 Ohms; de weerstand der overige geleiding was zoo gering, dat zij kon verwaarloosd worden. Nu plaatste ik op den condensator een klein speeldoosje, en hoorde, in een ander vertrek, zeer duidelijk de melodie in de telefoon.

Werkt daarbij de condensator als microfoon, dan zullen de stroomen, die ik in de telefoon hoor, *door den condensator* loopen: de weerstand der leiding, die door die stroomen wordt doorloopen, is dan 1248240 Ohms. Is echter verandering van capaciteit de oorzaak der werking, dan gaan de telefonische stroomen *niet door den condensator*; de weerstand der leiding is dan slechts 240 Ohms.

Om uit te maken, met welk dezer beide gevallen men te doen heeft, is het voldoende, een weerstand van eenige duizend Ohms in de leiding te brengen. Is de weerstand der lijn werkelijk 1248240 Ohms, dan zal de invoeging van enkele duizenden meer zoo goed als geen invloed op de stroomsterkte hebben, en dus het geluid in de telefoon niet van intensiteit doen veranderen. Is echter de leidingsweerstand slechts 240 Ohms, dan zullen de stroomen, door zoodanige invoeging, zeer verzwakken, en daarmee zal ook het geluid in de telefoon veel zwakker worden.

Ik bracht nu een seleencel van 26000 Ohms in de lijn en bemerkte toen dat het geluid ontzachelijk verzwakte. Derhalve was de condensator niet als weerstand in de lijn en heeft men in dit geval te doen met capaciteits-veranderingen.

Op deze wijze had ik een elektrostatischen transmitter verkregen, en daar een condensator bovendien ook als ontvanger kan dienen, lag de veronderstelling voor de hand, dat men ook van den eenen condensator in den anderen zou kunnen spreken. Met twee condensatoren en een ladingsbatterij moest dit gelukken. Werkelijk was dit het geval. Twee paraffine-condensatoren, van hetzelfde model als de vroeger beschrevene, werden met 36 kleine Faure-elementen verbonden. Wanneer men nu sprak of zong tegen den eenen condensator, kon men alles in den anderen verstaan, ofschoon het geluid uiterst zwak was.

Beter resultaat verkreeg ik, door de condensators evenwijdig in de lijn te brengen (fig. 6), waardoor elk tot het geheele potentiaal der batterij geladen was. Sprak men nu tegen *a*, dan kon men in *b* alles verstaan, en, ofschoon nog steeds zwak, was het geluid sterker dan bij de vorige proef. Se is een selenium-cel van 26000 Ohms, ware deze niet aanwezig, dan zou het grootste gedeelte der electriciteit, door *a* verzonden, door de batterij, en dus niet naar *b* gaan.

Ware een volmaakte isoleering mogelijk, dan zou men volgens dit systeem kunnen telefoneeren zonder batterij, daar het dan voldoende zou wezen, de condensatoren éénmaal een lading te geven.

Volgens DUMONCEL *) heeft ook MAICHE getelefoneerd met een condensator als transmitter. Lang voor dezen, was echter de mogelijkheid daarvan reeds door EDISON †) in het licht gesteld.

Delft, Deember 1883.

---

*) *le Téléphone*, 4e Ed., p. 294.

†) *Engineer* 1878, Bd. 46, p. 425.

BOUWSTOFFEN VOOR DE GESCHIEDENIS

DER

WIS- EN NATUURKUNDIGE WETENSCHAPPEN

IN DE NEDERLANDEN.

DOOR

D. BIERENS DE HAAN.

N°. XXVI. De Spiegeling der Singconst van Simon Stevin.

1. Toen ik onlangs in de Bibliotheek van de Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam bezig was met het onderzoeken van de verzameling handschriften Huygens, ten opzichte van brieven van of aan Christiaan Huygens, — kreeg ik in handen een bundel Adversaria, gemerkt »Handschriften XLVII."

Al dadelijk meende ik daarin eenige verloren manuscripten van Simon Stevin te ontdekken, en een nader onderzoek bevestigde dit vermoeden volkomen.

In het werk toch van Simon Stevin, getiteld »Wisconstighe Gedachtenissen, V Stuck, blz. 107" [zie Bouwstoffen XXI, Noot 52] en de vertaling daarvan door Willebrordus Snellius, »Hypomnemata Mathematica, Tomus V, pag. 205" [zie Bouwstoffen XXV, Noot 21] komt eene lijst voor van verhandelingen van Stevin, die niet opgenomen werden. In de fransche vertaling door Jean Tuning »Memoires Mathématiques . . . Leyde chez Jan Paedts Jacobsz. 1608. folio" [zie Bouwstoffen XXV, Noot 25] ontbreekt deze lijst. In het werk »Wisconstigh Filosofisch Bedrijf" van Hendrick Stevin, die daarin enkele stukken van zijn vader SIMON overneemt [zie Bouwstoffen XXV, Noot 36], verhaalt de zoon in het 1ste Boek, 1 Voorstel, blz. 5, hoe »de hantschriften (welke nu deur onachtsaemheyt al veel jaren || onder verscheyden geleerde handen waren vertrout, sonder yets anders, || onses wetens, daer me verricht te zijn [d. i. zonder uitgegeven te zijn], als datse van vele voltrockene de- || len, daer wij genoeg-same kennis af menen te hebben, geledigt, en sulcx || de rest heel ongeret, wijt en zijt deur malcander verstroyt waren)."

Onder die verloren handschriften behoorde ook de »Spiegeling der Singconst", en het is o. a. dit werk, dat ik in genoemden bundel terugvond, onder denzelfden titel. Tot bewijs, dat het werkelijk de arbeid van SIMON STEVIN was, moge dienen, dat het daar voorkomt te midden van nog andere stukken van dien schrijver, en voorts, dat het »CORTBEGRIJP" van het werk zelf en dat van de »BYVOUGH" geheel overeenkomen met hetgeen daarvan wordt vermeld in de »Verrechting van Domeine" [zie Bouwstoffen XXV, Noot 34a, behoorende als 2de Deel bij zijn »Materiae Politicae", Noot 34 aldaar], Anhang, laatste gedeelte, blz. 147, waar de »Tytels en Cortbegrijpen totte Wisconstige Gedachtenissen" voorkomen.

2. In den voornoemden bundel van Adversaria vindt men nu genoeg belangrijks omtrent het verloren werk van SIMON STEVIN, om daarvan een afdruk te rechtvaardigen.

Behalve toch de Spiegeling der Singconst zelve komt daarbij nog een aantal stukken voor, die daarop betrekking hebben. Ik heb dus gemeend het best te doen, die Spiegeling te laten voorafgaan, en daarop de andere stukken, in zoo verre zij van belang zijn, ten deele als bijlagen te doen volgen.

3. Na een hoofdtitel »*Musica*" en een tweeden »*Singconst van* || *Stevin*" (die mij eigenlijk eerst op het spoor bracht) volgen eenige onvolledige, bovendien niet eens in goede volgorde zamengevoegde, brokstukken en daartusschen een nieuwe titel »*Spiegheling der* || *Singconst* || *met cladden van dien.*" Ten slotte eenige muziekstukjes.

Dan volgt »DE || SPIEGELING DER || SINGCONST || *Beschreven deur*" in 27 + 4 bladzijden 4⁰, die hierachter na het hoofdwerk afgedrukt te vinden is. Bij toeval als het ware komt hier als bewijsstuk, dat men hier met de papieren van STEVIN zelven te doen heeft, op een voorgaande bladzijde de titel »*Musiec*" voor; maar dit werd daarop geschreven nadat was uitgeschrapt een vroegere titel »Octroyen van Watermolens", een andere arbeid van STEVIN, waarop wij later zullen terugkomen.

Deze »Spiegeling" is misschien een eerste opstel van STEVIN, dat naderhand in anderen vorm werd verwerkt: men vindt hier wel dezelfde redeneeringen, hoezeer veel uitvoeriger uitgewerkt, en ook wel denzelfden inhoud, maar op geheel andere wijze verdeeld. Zoo is bijv. alles wat betrekking heeft op de »Singconst der Grieken" later in het »Bijvough" gebracht.

Hoezeer het mij tot nog toe niet gelukte het schrift — dat somtijds aan duidelijkheid wel wat te wenschen overlaat, ja een enkele maal een ware »cladde" is met doorhalingen en invoegingen, — met eenigen brief van SIMON STEVIN te kunnen vergelijken, — bewijzen nochtans juist die uitkrabbingen en verbeteringen, dat dit werk door den ontwerper zelven geschreven en nagezien is, en niet door een ander werd overgeschreven. En voor de meening, dat het werkelijk van SIMON STEVIN is, pleiten de volgende redenen. Vooreerst dat alles steunt op dezelfde berekeningen als later in het werk zelf voorkomen, en die STEVIN voor nieuw houdt. Ten tweede uit zijne bijna dweepachtige vereering van de »Duytsche tael". Vervolgens ook het gebruik van *sa* in plaats van *si*, hetgeen door STEVIN zelf als in strijd met het gewone gebruik aangegeven wordt.

Nu komen er, echter in geheel andere volgorde gebonden, de Bijlage A—F voor, die behooren bij een schrijven van ABRAHAM VERHEIJEN, organist te Nijmegen aan SIMON STEVIN, en alle betrekking hebben op onze »Spiegeling".

Na een achttal bladzijden folio over »VERRECHTING van Domeine van SIMON STEVIN", waarover later, vindt men eindelijk het ware

»DERDE DEEL DER || GHEMENGDE STOFFEN || VANDE || SPIEGHELING || DER || SINGCONST. || *Beschreven door* || SIMON STEVIN."

28 bladzijden in folio, en

»BYVOUCH DER || SINGCONST."

15 bladz. folio.

En dit is nu het hoofdwerk, waarvan de Cortbegrijpen geheel overeenkomen met hetgeen van elders daaromtrent bekend was.

Het is hier met een fraaien klerkenhand overgeschreven.

Uit eerbied voor dit geheel onbekende handschrift, alsmede om het terugvinden van eenig woord, bij het soms zeer onduidelijk geschrevene, mogelijk te maken, heb ik het bladzijde voor bladzijde, en regel voor regel doen afdrukken.

DERDE DEEL DER

GHEMENGDE STOFFEN

VANDE

SPIEGELING

DER

SINGCONST

Beschreven door

Simon Stevin.

CORT BEGRYP.

Angesien mijn voornemen is te beschryven een spiegeling der singconst, soo sal ick, om mijn meyning wel te verclaren, dat doen, sonder vermenging des geens bij de Oude Griecken mette Spiegelaers deses tijts niet recht getroffen en schijnt, inde evenredenheyt der geluijden met haer lichamen, en int oirdeel van goe of qua geluijden, waar af ick in een bijvouch besonderlick handelen sal, om alsoo gelijck ick in meer ander stoffen gedaen heb, de leering met geen strijding te verduijsteren.

Ande Sangmeesters

deses tijts.

I. *Bepaling.*

Met geluijt des gesancx verstaetmen, dat geduerlick even hooch een oirdentlicke grofheyt heeft.

Verclaring.

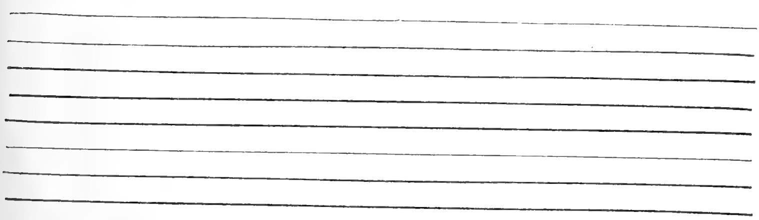
Imant soude int singen wel connen gebruijcken geluijden, die elck geduerlick niet even hooch en waren, gelijck de katten meawen, honden huijlen, of ander gedierten roepen, maer ten soude geen sanck sijn, die wij int gemeen natuerlic noemen, en van wiens grofheijt, of fijnheijt, hoocheijt of leecheijt, een seecker oirdeel is; en daerom en sijn soodanige geen geluijden des gesancx, maer sulcke als de bepaling inhout.

II. *Bepaling.*

*) Singleer is die bestaet in evewijdige linien, op de wijse der trappen van een leer, daer der singteijckens climming en daling door beduyt wort.

Verclaring.

Als de linien hier onder:



*) *Scala musica.* [Deze aanmerkingen staan bij het handschrift in margine.]

III. *Bepaling.*

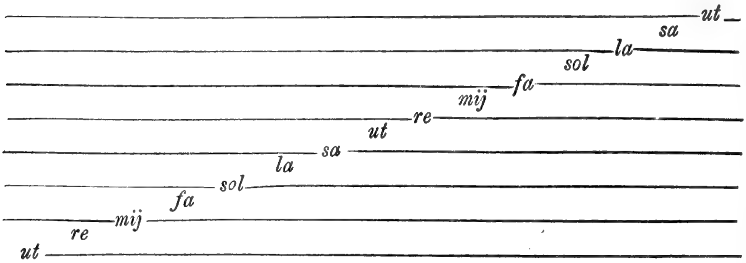
*) *Trap* is de naeste vervolgende climming of dalingh diemen inde natuerlicke sanck climt of daelt, en wort op de singleer beteijckent van een lini tottet naeste middel tusschen twee linien.

IIII. *Bepaling.*

De namen van elcke seven oirdentlicke vervolgende climmende trappen, sijn dusdanich: *ut*, *re*, *mij*, *fa*, *sol*, *la*, *sa* †).

Verclaring.

Deze namen der trappen op eenige singleer vervoucht, sijn als hier onder:



V. *Bepaling.*

Evelange tijden, diemen int singen beteijckent met §) slagen (gemeenlijk des vingers) worden slagen of maten genoemt.

VI. *Bepaling.*

De **) singteijckens diemen inde sanck gebruijckt sijn dusdanich

*) *Gradus.*

†) De reden waerom hier *sa* geseijt is in plaets vant gemeen *si*, sal inden byvouch verclaert worden. [waar ik echter niets daaromtrent heb gevonden.]

§) *Tactus.*

**) *Notulae.*

𝅝 van een slach.

𝅗𝅥 of 𝅗𝅥 van een halve slach of twee op de slach.

♩ of ♩ van een vierendeel slachs of vier op de slach.

of ♪ van een achtendeel slachs of acht op de slach.

of 𝅘𝅥𝅯 van een sestiendedeel slachs of sestien op een slach, maer 2, 3 of 4 in een vierhoeck aldus gestelt [2] [3] [4], sijn teijckens van twee, drie of vier slagen, en soo voorts met ander beduijt het getal altijt de menichte der slagen.

VII. *Bepaling.*

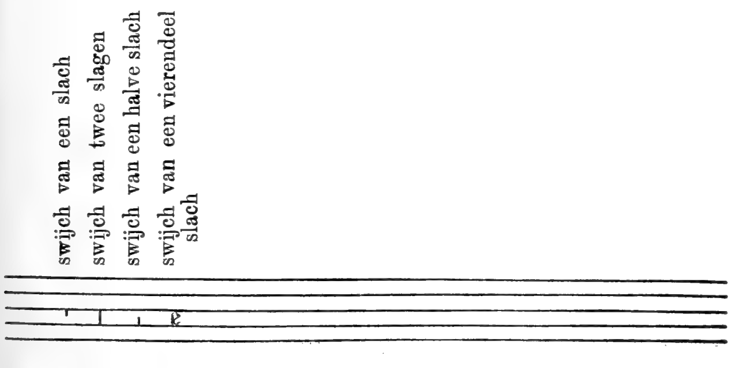
Een punt achter een singteijcken, verlangt dat zijn helft.

Verclaring.

Als 𝅝. geduert een slach en een half, 𝅗𝅥. een halve slach en een vierendeel, en soo voorts met d'ander.

VIII. *Bepaling.*

De *) swijchteijckens zijn dusdanich:



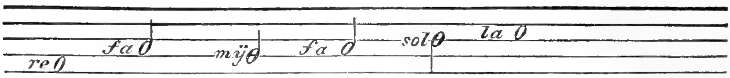
*) *Pausae.*

IX. *Bepaling.*

De singteijckens ontfangen namen der trappen daerse op staen.

Verclaring.

Als hier onder het singteijcken op den trap *re*, heet *re;* ende op den trap *fa*, heet *fa*, en soo voorts met d'ander.



X. *Bepaling.*

Twee geluijden even hooch, of op een selve trap zijnde, haer verlijcking wort eerste genoemt, een trap verschillende tweede, twee trappen verschillende derde, en soo voorts totte achste: Wiens oirdentlicke vervolgende trappen, heeten dobbel tweede, dobbel derde, en soo met d'ander, totte dobbel achtste. En s'gelijcx is oock den voortganck met drievoudige en meervoudige tweeden, derden, en haer volgende. T'is oock bij eenige int gebruijck de trappen nade achste volgende, te noemen negende tiende, elfde en soo voorts, in plaets van dobbel tweede, dobbel derde.

XI. *Bepaling.*

De vijf trappen van *ut* tot *re*, van *re* tot *mij*, van *fa* tot *sol*, van *sol* tot *la*, en van *sa* tot *ut*, sijn groot: D'ander twee van *mij* tot *fa*, en van *la* tot *sa* cleen.

XII. *Bepaling.*

De tweede, derde, en vierde, daer een cleene trap in is, heet cleene tweede, cleene derde, cleene vierde; De vijfde seste en sevende, daer twee cleene trappen in sijn, heet cleene vijfde, cleene seste, cleene sevende: Maer de tweede met een groote trap, de derde met twee groote trappen, en de vierde met drie groote trappen, heeten groote tweede, groote derde, groote vierde: De vijfde, seste, en sevende, daer maer een cleene trap in en is, heeten groote vijfde, groote seste, groote sevende: s'Gelijcx worden de cleene of groote negende, cleene of groote tiende, oock genoemt cleene of groote dobbel tweede, cleene of groote dobbel derde, en soo voorts.

XIII. *Bepaling.*

De verlijcking der twee geluyden vande eerste heet oock selftoon: der cleene tweede halftoon, der groote tweede toon; En voorts na de menichte der thoonen noemt mense anderhalf thoon, tweethoon, twee en half toon, driethoon en soo voorts met d'ander.

Verclaring.

De verlijcking vande twee geluijden ontfangen twederleij verscheijden manieren van namen, soose inde, 10 en 12e bepaling beschreven zijn, die elck haer besonder gebruijck hebben; want wesende de redens der geluijden te vergaren of van malcander te trecken, daer int volgende afgezeijt zal worden, men noemtse bequamelick deur de namen der thoonen overmits dat totten tweethoon, vergaert den driethoon, haer somme is den vijftoon; Treckende den tweethoon vanden drieenhalfthoon, blijft den anderhalftoon; Inder vougen dat sommen en resten namen der getalen crijgen, lijckvormich ant geene sij zijn. De namen van eersten, tweeden, derden etz. sijn bequamer om int dadelick*) gesangk, maecksel, en int spreecken van rijsing en daling te gebruycken; want lichtelicker en bequamelicker telt men t'verschil van twee geluijden, deur trappen nade natuerlicke sanck climmende of dalende, dan deur thoonen en halfthoonen, overmits de menichte der trappen met de menichte der thoonen niet nootsaeckelick over een en comt, gemerckt sommige driethoon een vierde is, te weten de groote vierde, sommige driethoon een vijfde, te weten de cleene vijfde.

XIIII. *Bepaling.*

Goe geluijden sijn de twee der eerste, der cleene derde, groote derde, en cleene vierde, mitsgaders alle achste of menichvuldige achste, van het eene dier twee geluijden tegen het ander, de rest der geluijden is quaet.

Verclaring.

Dat de twee geluijden des selftoons der cleene derde, groote derde, en cleene vierde goet geseijt worden is verstaenlick genouch: Angaende voorder geseijt is, mitsgaders alle achtste of menichvuldige achste vant een dier twee geluijden tegen het ander, dat sal ick by voorbeelt verclaren,

---

*) *Compositione Cantus.*

Laet tot dien eijnde genomen worden de twee geluijden der cleene derde, en tegen het leeghste geluijt zij gehoort de rijsende achtste vant hoochste, sij sullen t samen maken de dobbel cleene tweede; die eenige oock de cleene thiende noemen, oock goetluijdich sijnde: Maer tegen t'voorsz. leeghste geluijt gehoort de dalende achste vant ander, sij sullen t'samen maecken de goetluijdige groote seste; En dergelijcke sal oock gebueren alsmen tegen het hoochste geluijt hoort de rijsende of dalende achste vant leeghste. Ende s'gelijcx doende mette groote derde, de achste vant een geluijt sal tegen t'ander maken de goeluijdige groote dobbel derde of cleene seste. Ende s'gelijcx doende mette cleen vierde, de achste vant een geluijt zal tegen t'ander maken de goeluijdige cleene dobbel vierde of groote vijfde: Sulcx datter in als seven goe geluijden sijn met haer veelvoudige; te weten cleen derde, groote derde, cleen vierde, groote vijfde, cleen seste, groote seste, en de achste.

Belangende datter inde bepaling geseijt is al de rest der geluijden quaet te wesen, die sijn in getale ses met haer veelvoudige, te weten de cleene tweede, groote tweede, groote vierde van *sa* rijsende tot *mi*, de cleen vijfde van *sa* dalende tot *mi*, de cleen sevende, de groote sevende.

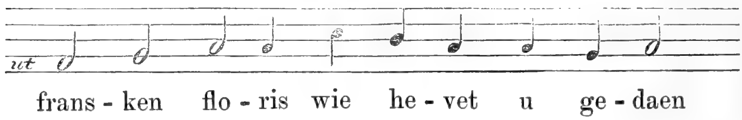
Tot hier toe verclaert sijnde tgeene daermen gesanck me beteijckenen can, wij sullen noch bepalen wat natuerlicke en singconstighe sanck is.

XV. *Bepaling.*

Natuerlicke sanck noemt men diemen deur natuerlicke climming en daling der stemmen singt.

Verclaring.

Als bij voorbeelt, gesongen zijnde de navolgende singteijckens of woorden daer me over commende, wantse een climming en daling der stemmen hebben, met vermenging van half thoonen, tot soodanige plaets, als daer wij die uijter nateur geneijcht sijn te vervougen, soo heet sulcx natuerlicke sanck.



Maer om dit deur onnatuerlicke mishagelicke climming en daling noch beter te verclaren, soo sal ick de voorsz. woorden noch eens onder ander singteijckens stellen als volcht.

Alwaer blijckt dat vant eerste singteijcken tottet tweede geclommen wort, de qua groote vierde of driethoon, die eenige de onsingelicke heeten, om datse al singende niet wel te treffen en is; Ende alsoo is int dalen oock quaet om treffen de cleene vijfde, gelijck hier vant negende singteijcken tottet laetste; Oock sijn groote ende cleene seste en sevende, gelijck in dit voorbeelt eenige genomen worden, moylick om treffen, en mishagelick int gehoor. welcke de menschen die uijtter natuer singen niet geneijcht en zijn te gebruijcken.

XVI. *Bepaling.*

Singconstige sanck noemtmen, die uyt twee of meer natuerlicke t'saemluijdende gesangen bestaet, niet evehooch climmende, noch eveleech dalende, en sonder qua thoonen, daer in te vallen.

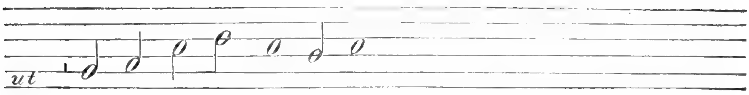
Verclaring.

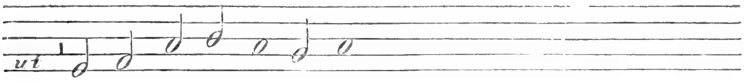
T'gebeurt, dat een mensch yet alleen int wilde wel singt sonder an eenige ander sanck verbonden te sijn. Doch wantmen dat uijtter natuer, sonder leeren doen can, soo en wort daer me geen singconstige sanck verstaen, maer wel mette geene die de bepaling inhout; Om daer af voorbeelt te geven, laet een gesanck zijn van twee stemmen als hier onder:

Ander voorbeelt met drie stemmen,

Ander voorbeeld met vier stemmen,

Waer in nergens twee geluijden t'samen even hooch en climmen noch even leech en dalen, oock sonder een qua thoon daer in te commen. D'oirsaeck waerom die even climming en daling inde singconstige sanck niet geleden en wort, is dat sulcx toegelaten wesende, weijnich const soude gelegen zijn, in gesanck te maecken, ten anderen dat sulcke selfheijt niet behaegelick en is. Doch staet hier te gedencken datmen sich niet en moet bedriegen mette gelijcke namen der trappen, als dat ijmant, sonder onderscheijt van groote en cleene trappen, seijde int gemeen geen derde of seste malcander te mogen volgen, dat waer gemist, want soo dickwils na de groote een cleene, en na de cleene wederom een groote volcht, soo en gater niet tegen de regel: Als bij voorbeelt, want dese acht derden, malcander volgende, deurgaens sulcke verandering hebben, soo en isser geen even climming of dalinge.





Vierden en vijfden en connen met even climming of daling achter malcander niet volgen sonder tegens de regel te gaen, om datter maer een goe vierde en is, dats de cleene en een goe vijfde te weten de groote deur de 14 bepalinge.

Vertooch. I. Voorstel.

De heele gespannen snaer en haer gedeelten eeveredenich te wesen, mette grofheijt haerder geluijden.

Als men de heele gespannen snaer van eenigen speeltuijch opt middel stopt, d'ervaring leert dat de heele tegen haer helft de achtste maeckt. Waer uijt wijder volcht dat den helft der heele tegen haer helft oock een achste moet clincken, en daerom de heele snaer tegen haer vierendeel een dobbel achste en soo voort met d'ander noch kleender helften. Maer de grofheyt des leeghsten geluijts der achste noemen wij dobbel of tweevoudich totte grofheijt des hoochsten, daerom sulcken *) afcomst van dobbelheijt of reden als dat is in sijn †) geslacht, dergelijcke afcomst is de drievou of viervoudige reden der Grofheijt des geluijts der heele snaer totte grofheijt des vierendeels; Dat is gelijck de heele snaer tot haer helft, vierendeel, of achstendeel, alzoo de grofheijt vant geluijt des heelen snaers totte grofheijt vant geluijt des helfts, vierendeels, of achtendeels: Maer gelijck de everedenheyt der snaerdelen en haer geluijden in die bestaet, alsoo vereijscht de reden datmen toelate de everedenheijt te bestaen in alle andere deelen en grofheijt haerder geluyden twelck wij bewijsen mosten. *T besluyt.*

---

*) *Species.*

†) *Genere.*

Vertooch. II. Voorstel.

Vant een geluijt der achste tottet ander twelf eevegroote halfthoonen te weesen.

Om hier af tottet begeerde te commen, ick sal eerst verclaren datter vant een geluijt der achste tottet ander, ses evegroote thoonen sijn; daer na dat de selve twelff evegroote half tonen doen. Angesien het de natuer soo niet vervougt en heeft, dat wij deur natuerlicke gestalte ses heele thoonen met seker oirdeel connen achter malcander singen, soo sal ick om tottet bewijs te commen eenige speeltuijch tot hulpe nemen, en daer me voorbeelt geven. Laet onder andere reetschappen genomen sijn twee clavesingels daer af het *mij* der leechste ende het climmende *sa* van d'ander in een selfde hoochde sijn, twelck soo wesende, van *sa* onder de voorsz. *mij* der leechste clavesingel tottet selve *mij* sijn (welverstaende alsmen de *) spleten ongeroert laet †)) drie heele evegroote thoonen. En van dat *mij* of anders van het boveschreve *sa* van d'ander (dat een selve is, om datse deur t'gestelde evehooch sijn) tottet *mij* daer boven, sijn oock drie heele thoonen, sulcx datmen daer mede sal hebben en connen hooren ses vervolgende heele thoonen die, als geseijt is, de menschen met geen seecker oirdeel vervolgens singen en connen. Ende sal alsdan d'ervaring betuijgen het bovesz. *mij* der hoochste clavesingel tottet bovesz. *mij* der leechste, de volcommen achste te maken: Waer mede het eerste deel bewesen is.

Angaende het ander, te weten elcke heele thoon twee evegroote halftoonen te doen, wort aldus verclaert:

---

*) *Fenten.*

†) De woorden, ongeroert laet, heb ick gestelt in placts van een woort dat ick niet lesen conde meenende uijt ander cladde dat de sin daer oock te wesen.

De acht geluijden der achste na natuerlicke sanck gesongen, hebben seven trappen, te weten vijf heele thoonen, die deur t'voorgaende evegroot sijn, en twee halve, daerom dese twee halve maecken t'samen den sesten thoon, even an elcken van d'ander vijf: Maer den halfthoon als van *mij* tot *fa* en van *la* tot *sa*, sijn evegroot, daerom sij doen elck den rechten helft eens heelen toons, waer deur ijder heele thoon twee evegroote halve doet, en vervolgens de ses heele thoonen twaelf evegroote halve. Ende die hier af noch nauwer prouve begeerde dan mette stemmen, mocht nemen een welgestelde Clavesingel, waer in hij de vijfde der twee spleten na *sa* en *fa* (dat zijn de *) spleten diese *gis* en *fis* noemen) sal bevinden goet te wesen: Waer uijt volcht dat de splete of halfthoon na *sa* even soo veel moet climmen boven *sa*, als de spleete of halfthoon na *fa* boven de selve *fa*, en vervolgens dat die twee halfthoonen even groot moeten zijn, t'welck wij bewijsen mosten. *T'Besluyt.*

Werckstuck. III. Voorstel.

Deur de dobbel reden vande grofheijt der twee geluijden vande achtste, te vinden de reden der grofheijt van alle gegeven twee geluijden des gesancx.

Angesien deur het eerste voorstel t'leeghste geluijt der achste, dobbel is tottet hoochste, ende dat deur het tweede voorstel vant een tottet ander twaelf evegroote halfthoonen zijn, soo ist kennelick dat wij tusschen

---

*) *Fenten.*

twee en een moeten vinden elf middelevereedenige getalen, die bekent connen worden deur het 45 voorstel van mijn Fransche Telkonst; Maer om daer in wat cortheijt en claerheijt te gebruijcken. Ick seg aldus: nademael het een uijterste getal doet 1 t'ander 2, soo vinde ick van 1 en twee het derde everedenich getal 4, daer na het vierde 8, tvijfde 16, en soo voort tot de twaelfde, dat sijn sal van 4096. Al dese getalen in menichte tot derthien, segh ick elck te wesen wortel der twaelfde grofheijt als $\surd$ (12) 1. $\surd$ (12) 2. $\surd$ (12) 4. en soo voorts totte laetste dats $\surd$ (12) 4096. Ende want die in geduerige everedenheijt sijn tusschen de twee uyttersten $\surd$ (12) 4096 en $\surd$ (12) 1, doende 2 en 1. soo is hier me gevonden de volcommen reden der voorgestelde geluijden telckens met een halfthoon vermeerderende; welcke oirdentlick bij den anderen vervoucht dusdanich zijn.

Reden der twee geluijden des

Selfthoons dats der eerste is van 2 tot . . $\surd$ (12) 4096.
Halfthoons dats der cleen tweede, is van 2 tot $\surd$ (12) 2048.
Thoons dats der groote tweede is van 2 tot $\surd$ (12) 1024.
Anderhalfthoons dats der cleen derde is van 2 tot $\surd$ (12) 512.
Tweethoons dats der groote derde is van 2 tot $\surd$ (12) 256.
Tweeenhalfthoons dats der cleen vierde is van 2 tot $\surd$ (12) 128.
Driethoons dats der groote vierde of cleene vijfde is van 2 tot . . . . $\surd$ (12) 64.
Drie en halftoons dats der groote vijfde is van 2 tot. . . . . $\surd$ (12) 32.
Viertoons dats der cleen seste is van 2 tot $\surd$ (12) 16.
Vierenhalftoons dats der groote seste is van 2 tot $\surd$ (12) 8.
Vijfthoons dats der cleene sevende is van 2 tot $\surd$ (12) 4.
Vijfenhalftoons dats der groote sevende is van 2 tot $\surd$ (12) 2.
Sesthoons dats der achste is van 2 tot . . . . $\surd$ (12) 1.

En bij aldienmen aldus wilde voortvaren met dobbeling der voorgaende getalen, tis kennelick dat voor de dobbel cleen tweede soude commen √ (12) 8192, ende voor de dobbel groote tweede √ (12) 16384 en soo voort met d'ander; Waer me de regel over alle gegeven twee geluijden des gesancx gemeen is.

Maer soomen de boveschreven redens wilde beschrijven mette minste getalen dieder vallen en even in weerde mette voorgaende doch sonder oirdentlick vervolch als boven, en met wortelen van verscheijden grootheden, die salse na de wijse des voorsz. 45e voorstel van mijn Fransche Telconst dusdanich vinden.

Reden der twee geluijden t'een des heelen snaers t'ander des deels clinckende den

Selfthoon dats de eerste is van 2 tot . . . . 2.
Halfthoon dats de cleen tweede is van 2 tot √ (12) 2048.
Thoon dats de groote tweede is van 2 tot . √ (6) 32.
Anderhalfthoon dats de cleen derde is van 2 tot √ (4) 8.
Tweethoon dats de groote derde is van 2 tot √ (3) 4.
Twee en halfthoon dats de cleen goe vierde is van 2 tot . . . . √ (12) 128.
Driethoon dats de groote qua vierde of cleen qua vijfde is van 2 tot . . . . √ 2.
Drie en halfthoon dats de groote goe vijfde is van 2 tot . . . . √ (12) 32.
Vierthoon dats de cleen seste is van 2 tot . √ (3) 2.
Vierenhalfthoon dats de groote seste is van 2 tot . . . . √ (4) 2.
Vijftoon dats de cleen sevende is van 2 tot . √ (6) 2.
Vijfenhalftoon dats de groote sevende is van 2 tot . . . . √ (12) 2.
Sesthoon dats de achste is van 2 tot. . . . 1.

Werckstuck. IIII. Voorstel.

De reden der grofheijt van alle twee geluijden des gesancx ten naesten te vinden in sulcke delen, alsser de grofste 10000 doet.

Int derde voorstel sijn wel beschreven de volcommen redens der geluijden; maer gemerckt de deeling der snaer (twelck een der voorneemste eijnden deses handels is) op sulcke wijse tot noch toe niet wisconstelick bekent en is, wij sullen de bovesz. redens andermael beschrijven na t'inhout deses voorstels, te weten soo dattet meeste getal, of de deelen der heele snaer altijt sij van 10000, want hoewel het ander getal op de laetste letter wat onvolcommenheijt heeft, soo en is dat inde daet van geender acht, gelijckt in veel soodanige anders toegaet.

Om dan te beginnen mette lichtste wijse, die mij nu te vooren comt, Ick segh aldus: Des driethoons twee geluijden zijn volcommelick inde reden van 2 tot $\sqrt{}$ 2 deur het 3 voorstel; Daerom segh ick 2 geeft $\sqrt{}$ 2 wat 10000? comt voor d'ander pael 7071, dats voor reden des driethoons . . . . $\frac{10000}{7071}$

Wederom des anderhalftoons twee geluijden sijn in reden van 2 tot $\sqrt{}$ (4) 8 deur het 3 voorstel daerom seg ick 2 geeft $\sqrt{}$ (4) 8 wat 10000? comt voor d'ander pael 8408, dats voor reden des anderhalfthoons. . . . . $\frac{10000}{8408}$

Ten derden des tweethoons twee geluijden sijn inde reden van 2 tot $\sqrt{}$ (3) 4, deur het 3 voorstel, daerom seg ick 2 geeft

$\sqrt{}$ (3) 4 wat 10000? comt voor d'ander pael 7937, dats voor reden des tweetoons . . $\frac{10000}{7937}$

Daer af getrocken de reden des anderhalf thoons $\frac{10000}{8408}$ tweede in d'oirden blijft voor reden des halftoons . . . . $\frac{10000}{9440}$

Die vergaert tot noch sulcken reden des halftoons $\frac{10000}{9440}$ comt voor reden des heelen toons. . . . . $\frac{10000}{8911}$

Ende de reden des halftoons $\frac{10000}{9440}$ vierde in d'oirden vergaert totte reden des tweethoons $\frac{10000}{7937}$, derde in d'oirden comt voor reden des twee en halftoons . . $\frac{10000}{7493}$

Tot reden des driethooons $\frac{10000}{7071}$ eerste in d'oirden, vergaert reden des halftoons $\frac{10000}{9440}$ vierde in d'oirden, comt reden des drieenhalfthoons . . . . $\frac{10000}{6675}$

Daer toe vergaert reden des halfthoons $\frac{10000}{9440}$ vierde in d'oirden comt reden des viertoons. . . . . $\frac{10000}{6301}$

Tot reden des driethoons $\frac{10000}{7071}$ eerste in d'oirden vergaert reden des anderhalf-toons $\frac{10000}{8408}$ tweede in d'oirden comt reden des vierenhalftoons . . . . $\frac{10000}{5945}$

Tot reden des driethoons $\frac{10000}{7071}$ eerste in d'oirden vergaert reden des tweetoons $\frac{10000}{7937}$ derde in d'oirden comt reden des vijfthoons. . . . . $\frac{10000}{5612}$

Daer toe vergaert reden des halfthoons $\frac{10000}{9440}$ vierde in d'oirden comt reden des vijfenhalfthoons . . . . $\frac{10000}{5298}$

Tot proeve der voorgaende werckingen can noch verstrecken dat tot reden deser vijfenhalfthoons $\frac{10000}{5298}$ vergaert reden des halftoons $\frac{10000}{9440}$ vierde in d'oirden comt reden des sestoons $\frac{10000}{5001}$, twelck om volcommen te wesen zoo soude de cleenste pael 5001 alleenlick 1 min moeten sijn.

Maer om de bovegevonde getalen met oirdentlick vervolch te hebben, ick stelle aldus,

Reden der twee geluijden des

Selfthoons, dats der eerste is van 10000 tot . .	10000
Halfthoons, dats der cleen tweede is van 10000 tot.	9440
Thoons dats der groote tweede is van 10000 tot.	8911
Anderhalfthoons dats der cleene derde is van 10000 tot.	8408
Tweetoons dats der groote derde is van 10000 tot.	7937
Tweeenhalfthoons dats der cleen vierde is van 10000 tot	7493
Driethoons dats der groote qua vierde of cleen qua vijfde van 10000 tot	7071
Drieenhalftoons dats der groote vijfde van 10 00 tot	6675
Vierthoons dats der cleen seste van 10000 tot .	6301
Vierenhalfthoons dats der groote seste van 10000 tot	5945
Vijfthoons dats der cleen sevende van 10000 tot	5612
Vijf en halftoons dats der groote sevende van 10000 tot	5298
Sesthoons dats der achtste van 10000 tot	5000

T'bewijs is hier af deur twerck openbaer. *T besluyt.*

1. *Merck.*

Ick heb het eerste, tweede en derde des oirdens deses 4 voorstels gevonden deur worteltreckingen uijt de volcommen getalen des 3 voorstels: Bij aldien soo gedaen wierde met d'ander volgende des oirdens (alswaer ick mij om lichticheijts wille beholpen heb sonder worteltreckinge, te weten met vergaring en aftrecking der redens, als blijckt) het soude om bekende oirsaecken, op de laetste letter, wat meerder seeckerheijt geven, welcke den geenen hebben can die sulcke worteltrecking doet.

2. *Merckt.*

Uijt het voorgaende is kennelick de deeling der sanglijn: Oock me om dat in een speeltuijch de langhde tusschen de brugge en t'uijterste vanden hals gedeelt in 10000 even deelen eerste in d'oirden, en vande brugge af getelt 9440 tweede in d'oirden, dat ten eijnde vandien de plaets is des eersten bants vanden eersten halftoon: Sgelijcx vande brugge afgetelt 8911 derde in d'oirden, dat ten eijnde vandien de plaets is des tweeden bants vande tweehalfthoon, en soo voorts met d'ander. Maer wanttet inde daet geriviger valt sulcke telling vant begin des halses an te vangen, soo is kennelick datmen sal trecken 9440 tweede in d'oirden van 10000 eerste in d'oirden, en de rest doende 560 sijn de deelen diemen vanden hals af tellen moet om te commen ter plaetse vanden eersten bant, en soo voorts met d'ander. Maer om int leggen of teijckenen der banden niet telckens alsoo te moeten aftrecken, soo machmen dat eens voor al doen, gelijck de navolgende teijckening uijtwijst.

Vant begin des hals totten	Eersten bandt	560	deelen 10000.
	tweeden bandt	1089	
	derden bandt	1592	
	vierden bandt	2063	
	vijfden bandt	2507	
	sesten bandt	2929	
	sevenden bandt	3325	
	achtsten bandt	3699	
	negenden bandt	4055	
	thienden bandt	4388	
	elfden bandt	4702	
	twaelfden bandt	5000	

III. *Merck.*

Tis kennelick datmen deur t'behulp der sanglijn wel verdeelt zijnde en een onvalsche snaer hebbende met lichticheijt en groote seeckerheijt sal connen stellen Clavesingels en orgels. Maer om vande goetheijt of valsheijt eens snaers seeckerheijt te hebben, dat wort beproeft op des sanglijns (gelijck oock luijten, Cijters en meer ander speeltuijgen die gestopt worden) helft, vierendeel en achtendeel an wedersijden, want die maeckende volcommen achtsten, dobbelachtste en drievoudige achtsten, sij is voor goet te houden, maer anders gebeurende, soo ist verkeerde daer uijt te oirdelen.

IIII. *Merck.*

Hoewel de heele snaer hier boven gedeelt wort in 10000 soo is kennelick dat 1000 deelen inde daet genoech zijn, mits datmen d'ander getalen elck van een letter vercort: Doch soo is dit getal van 10000 genomen tot overvloet om datmen deur de eerste gedaen in 10000 daer na meerder seeckerheijt krijcht op de laetste letter dan deur de verdelinge in 1000.

BIJVOUGH DER

SINGCONST.

Cort begrijp deses

Bijvoughs.

I. Hooftstick.

Dat de everedenheijt der geluijden met haer lichamen, bij de Griecken niet recht getroffen en is.

Der Griecken singconstige spiegelingen worden aldus geseijt haren oirspronck genomen te hebben: Gaende Pythagoras langs de stıaet, voor bij een smits winckel alwaer met drie hamers op een ijser gesmeet wiert, hij hoorde daer in bij geval tgeluijt der achtste, vijfde, en vierde; waer mede hem in den sin quam die hamers te doen wegen, om te sien of haer gewichten mette geluijden eenige gemeenschap hadden, en bevant den grootsten van vier pont, de cleenste (die tegen de grootste de achtste maeckte) van 2 pont; De middelste (die tegen de grootste de vierde clanck en daerom tegen de cleenste de vijfde) van drie pondt; dat is anders geseijt den grootsten hamer tegen haer $^1/_2$ de achtste te maken, tegen haer $^2/_3$ de vijfde, tegen haer $^3/_4$ de vierde. Dergelijcke voorder besoeckende op *) speeltuygens gespannen snaren, bevant daerin het selve regel te houden, te weten dat de heele snaer tegen haer $^1/_2$ de achtste maeckte, tegen haer $^3/_4$ de vierde, en tegen haer $^2/_3$ de vijfde.

Maer soomen in plaets van dese vijfdens reden $^3/_2$ neemt getalen dient meeste 10000, t'ander valt ten naesten van 6667, want seggende 3 geeft 2, wat 10000? comt als boven 6667, sulcx dat der Griecken reden vande vijfde doet reden $\frac{10000}{6667}$ welcke soo weijnich verschilt vande bijcans ware reden $\frac{10000}{6675}$ beschreven int 4 voorstel dat de snaer eens speeltuijchs gedeelt in 1000 even deelen

*) *Instrumenta Musica.*

het clinckende stuck der vijfde moet na d'een en d'ander wijse tennaesten 667 deelen hebben, sulcx datse alleene verschillen in eenich gedeelte van een dier deelen, waer af bij tgehoor niet te oirdeelen en is; Ende dergelijcke cleen verschil, wort alzoo oock bevonden tusschen de vierde gemistens $^4/_3$ en de ware reden.

Nu want dese redens der vijfde van 2 tot 3 en der vierde van 3 tot 4 de ware redens soo seer na quamen, de Griecken hebben gemeent datse de warachtige waren, en daerop hun spiegeling gegront, om banden der halsen van speeltuijgen te leggen niet al tastende, maer na tgeene t'wesen inde natuer vereijschte. Tot desen eijnde hebbense aldus geseijt.

Vande achtens . . . . reden $^2/_1$

Getrocken de vijfdens of drie enhalftoons . . . . reden $^3/_2$

Blijft de vierdens of twee en halfthoons . . . . reden $^4/_3$

Die getrocken vande drie en halfthoons reden $^3/_2$
tweede in d'oirden blijft des toons . . . . . . reden $^9/_8$

Daertoe vergaert noch sulcke reden $^9/_8$
comt des tweethoons. . . . . reden $\frac{81}{64}$

Die getrocken vande twee en halfthoons reden
$^4/_3$ derde in d'oirden blijft des halftoons . . . reden $\frac{256}{243}$

Die getrocken van des thoons reden $^9/_8$ vierde
in d'oirden blijft nu voor des halftoons. . . . reden $\frac{2187}{2048}$

Maer angesien alle halfthoonen eve groot gesongen worden, soo behoorde dese laetste reden des halfthoons even te vallen met des anderen halfthoons reden $\frac{256}{243}$, twelck niet en gebeurt, maar doet reden $\frac{256}{240}$, want seggende 2187 geeft 2048 wat 256? comt in heel tal ten naesten 240 en heeft t'geluijt van deen halfthoon een oirdeelelick verschil vant geluijt van d'ander, gemerckt de twee banden des grooten halftoons becans het vierendeel wijder van malcander commen te leggen dan de banden des cleenen halfthoons in reden $\frac{256}{243}$.

Nu dan uijt de voorgaende stelling der vijfdens reden $^3/_2$ niet volgende tgeene daer uijt behoort te commen, en noch te blijven seggen die stellinge goet te wesen, Ick ben noch vande meijning beschreven int 2e lidt der 6e bepaling vant je boeck des Eertclootschrifts, alwaer met ander omstandigen, welcke tot die plaets vereijscht wierden, geseijt is sulcx soo veel te sijn, als oft ijmant bekent waer vier pinten waters een stoop te maken, maer soo dickwils hij in een vadt twaelfmael een maet giet, die hij meent een pint te doen, soo dickwils bevint hij min dan drie stoop, sonder te weten, dat zijn genomen maet minder dan een pint moet wesen.

Nu dan ick sulcx voor openbaer dwalingh houdende, segh de vijfdens volcommen reden, als int 3e voorstel, te sijn van 2 tot $\sqrt{}$ (12) 32, want daer me voort gevaren, als boven d'een halftoon wort met d'ander na behooren evegroot bevonden elck in reden van 2 tot $\sqrt{}$ (12) 2048; besluijtende hier uijt gelijck t'voornemen was der Griecken everedenheijt niet wel getroffen te wesen.

Merckt.

Men soude benevens de breeder verclaring gedaen op d'oirsaeck der bovesz. dwalinge int 2e lidt der 6 bepaling van je boeck des Eertclootschrifts noch meugen dit seggen: Angesiender inde natuer geen ander getal en is, daer de volcommen evenheijt deser twee halftoonen uijt volcht, dan voor de vijfdens reden te nemen 2 tot $\sqrt{(12)}\,32$, dats twee tot wortel of sijde der twaelfde grootheijt van 32, en dattet niet en schijnt der Griecken hun metter *) daet jn telling sulcker getalen geoeffent te hebben (hoewel van soodanige stof diepsinnige spiegelingen des wijsen tijts thaerder hant gecommen sijn, als blijckt in Euclides boecken) soo mochtmen vermoeden sulcx me een oirsaeck geweest te sijn, waer deur kennis der ware redens voor hemlien verborgen bleeft, want die niet en weten wat wortel of sijde der twaelfde grootheyt is, hoe soudense daer me het ware besluyt connen doen? Dit seg ick met verlof eenvoudelick na tgeene mij vande saken dunckt, soo ijmant daer af beter bescheyt wist, hij souder beter onderrichting af meugen doen.

II. Hooftstick.

Van der Griecken gemist oirdeel over cleene en groote derden en sesten met haer gedobbelden.

Angesien de Griecken vande goetheijt en quaetheijt der geluijden geoirdeelt hebben, uijt de getalen haerder redens, soo sal ick tot verclaringe van dien, hier voor t'eerste beschrijven de redens der geluijden daer t'geschil af is, te weten van cleene en groote derden en sesten met haer gedobbelden, volgens hun gemiste stellingh: tot welcken eijnde ick aldus segh:

---

*) *Praxi.*

Alsmen vande vierdens of twee enhalftoons reden $^4/_3$ treckt des toons reden $^9/_8$ blijft cleene derdens of anderhalftoons. . . . reden $\frac{32}{27}$

Tot des toons reden $^9/_8$ vergaert noch een toons reden $^9/_8$ comt de groote derdens of tweetoons. reden $\frac{81}{64}$

Totte vierdens reden $^4/_3$ vergaert de cleene derdens reden $\frac{32}{27}$ eerste in d'oirden comt de cleene sestens . . . . reden $\frac{128}{81}$

Totte vierdens reden $^4/_3$ vergaert de groote derdens Reden $\frac{81}{64}$ tweede in d'oirden comt de groote sestens . . . . Reden $\frac{27}{16}$

Totte cleene derdens Reden $\frac{32}{27}$ eerste in d'oirden vergaert de achtens reden $^2/_1$ comt de cleene tiendens of dobbel cleene derdens . . . . reden $\frac{64}{27}$

Ende sgelijcx is de voortganck vant vinden der reden vande dobbel groote derde en van de dobbel sesten.

Nu dan de getalen der bovesz. redens dusdanich sijnde, wij sullen totte sake commen: Nadien de Griecken benevens de achtens waren reden $^1/_2$ oock voor recht hielden de vijfdens gemiste reden $^2/_3$, mette vierdens gemiste Reden $^3/_4$, jn welcke getalen men noch vint een oirdentlick vervolch van 1 tot 2, van 2 tot 3, van 3 tot 4, dit heeft hemlien doen vermoeden en besluijten de natuer de saeck soo vervougt te hebben, dat de soetste of beste geluijden, de eenvoudichste cleenste getalen der palen haers redens hadden, oirdeelden hier uijt tgeluijt der achtste het soetste te zijn, wiens getalen der palen sijn de cleenste al 1 en 2, daer na dat der vijfde van 2 en 3, en ten laetsten dat der vierde van 3 en 4.

Angaende de geluijden der cleene derde, groote derde, cleene seste, groote seste, wiens getalen sijn als vooren $\frac{32}{27}$, $\frac{81}{64}$, $\frac{128}{81}$, $\frac{27}{16}$, die en conden seijden sij niet soet wesen, gemerkt sij grooter sijn dan $^9/_8$ der tweede, openbaer mishagelick sijnde: sulcx dat al de lieflicke geluijden van derden en sesten als quaet uyt haer sanck gebannen bleven. Waer inmen bij voorbeelt siet hoe uyt een toegelaten ongeschicktheijt veel dwalingen volgen.

D'oirsaeck waerom de *) Vinders des tegenwoordich gesancx dese fauten niet gevolcht en hebben, schijnt dat der Griecken spiegeling hemlien onbekent wesende, soo en sijnse deur het quaet besluijt op gemiste getalen gegront, niet verleijt geworden, dan hebben voor soet geoirdeelt tgeene sij uijtter nateur soet gevoelden.

III. Hoofstick.

Van der nieuwe Sangmeesters gemist oirdeel over de vierde met haer gedobbelde.

De vierde die bij de Griecken voor lieflick gehouden

---

*) *Inventeurs.*

wiert achten de *) Sangmakers deses tijts onbehaeghlic sulcx datmense in den †) tweeich liet ganslick niet en lijt, dan in meerstemmige wortse toegelaten, mits datmense tegen de leechste niet en hoort. Maer dit dwaling te wesen, wort int cort aldus verclaert: Tgebeurt gemeenlick dat oude lieden met jonge kinderen t'samen eenich liet in een selve thoon singende, daer toe uijtter nateur stemmen gebruijcken, diese meynen even hooch te wesen, en nochtans een achtste of somwijlen wel twee achtsten verschillen: Inder vougen dat tusschen die twee geluijden soodanigen gelijckheyt is, al oft bijcans selfheijt waer. Hier uijt soudemen meugen besluijten dat een derde stemme met een vandien behaechlick sijnde, met d'ander niet mishagelick en can wesen. Als bij voorbeelt, die derde stemme onder des kindts stemme een behaechelicke vijfde makende, en can tegen d'ander leeghste, daerse een vierde tegen valt, niet mishagelick wesen; want na de gemeene regel soo hebben twee gelijcke saecken tot een derde gelijcke reden. Maer want hier me de nagel noch niet volcommelick opt hooft getroffen en schijnt, wij sullen naerder commen: Tot welcken eijnde ick andermael segh, de gelijckheijt vande twee geluijden der achtste soo groot te wesen, datse niet alleen de bovesz. onervarene der singconst onsekerlick doet oirdelen, maer dat sulcx oock de ervarenste gebeuren can, voornamelick wanneer twee geluijden van verscheijden afcomsten, als snarenclanck tegen menschen stemmen, of tegen geblasen tuych als fleuten, cromhoorens, trompetten, schalmeijen en diergelijcken, diemen metter daet wel t'samen gebruijckt, waer me voor de scherpsinnichste dickwils onseker is, ofse

*) *Componistas.*

†) *Duo.*

een achtste schillen of in een selve hooghde sijn. En die hier af proeve wil doen, macht metter daet versoecken, want hij niet alleen verscheijdener menschen vonnis verscheyden en sal vinden, maer oock sijn eygen onseker te gaen, hem sulcke twee geluyden d'eenmael dunckende een achtste te schillen die hij daer na op een ander tijt houden sal van een selve hoochde te zijn.

Dit dus wesende genomen, dat ghij alsoo oirdelende, twee geluijden in een selve hoochde te sijn, t'een neem ick van een snaer, t'ander van een fleute, soo ister een derde hooger, Ick neem van een trompet makende na u goetduncken tegen elck van d'ander twee een vijfde: Maer op een ander tijt oordeelt ghij t'een dier twee eerste geluijden niet even hooch te wesen alsvooren, dan de snaer een achtste hooger te commen dan de fleute, waer uyt volght dat de fleute, na dit tweede oirdeel, tegen het bovesz. derde geluijt, dats tegen het trompet, dan onbehagelicke vierde sal maken; Maer ghij hebt eerst geseijt dattet een behagelicke vijfde was, daerom, ghij u selven tegenspreeckende, soo en ist geen wonder een ander met u niet te connen over een commen: Merckt noch dat van dese gemiste stof der vierde deur Andries Papus een besonder handel beschreven is, bij hem genoemt *Pro Dialebaron.*

Angaende jmant nu vragen mocht hoe sulcken gemist besluijt soo lange dueren can, en voor recht gehouden worden bij alleman op soo grooten deel des Eertbodems als daermen tegenwoordelick sulck gesanck gebruyckt; Men soude hier op meugen antwoorden der Griecken gelycken geval te meugen tot voorbeelt dienen, welcke nadiense missende de twee soete derden en sesten oirdeelden mishagelick te wesen, tegen tgemeen gevoelen der sangers deses tijts, soo deedet d'eenen mensch den anderen deur overstemming geloven, en hadder ijmant tegen gewilt men soude hem metten cortsten geseijt hebben, de gemeene spreuck *De const en heeft geen viant dan den onwetenden.* Ende hoewel ick oock dergelijcke op dese voorstaning der vierde verwachte, soo gevoel ick mij sulcx minder verdriet te sullen andoen dan verborgen te houden, tgeene ick hier of geloof de waerheijt te wesen.

IIII. Hoofstick.

Inhoudende des Schrijvers gevoelen vande gedaente des gesancx der Ouden.

Want ons voornemen is wat te seggen vande gedaente des gesancx der ouden, en dat de selve ouden verscheijden en driederleij sijn, sullen eerst verclaren om tbedroch der lijcknoeming te schuwen, van welcke soorten der drie wij hier spreecken. Deerste sijn die Moises, Berosius ende Josephus vermanen, d'ander de Griecken met haer navolgers de Romeynen daer Euclides, Ptolomeus, Vitruvius en Boetius af schrijven. De laetste die vinders en eerste oprechters geweest sijn vande gesanck diemen nu ter tijt gebruijckt als Josquin du Pres, zijn meester Jan Ockegens etz.

Vande gedaente des gesancx der eerste en laetste ouden en valt hier geen verschil, overmits ons d'eene gansch onbekent is, d'ander, om haer nieuheijt, teemael openbaer. Maer de middelste, daer twijffel af is, van dese sullen wij wat handelen.

Angesien hier vooren genouchsaem bewesen is der ouden valschen gront en dwalingen inde singconst, soo mocht nu ijmant dencken, hoe dat sommige personen daer deur soo seer hebben connen beweecht worden, gelyckmen leest van Alexander dat hij etz.

Ick seg d'oirsaeck van desen de cracht des vermoedens geweest te hebben, welcke even soo wel int valsche als int warachtige, den selfde daet werckt; neemt voorbeelt an etz.

Alsoo oock doen sij in een vast gelooft quamen, de ware reden der vijfde te wesen van 3 tot 2, al wat daer uijt volchde, tmocht sijn soot wilde, sij hieldent voor eygen en volmaeckt, ontfangende aldus met een besloten gemoet in de mishagelickheijt een welbehagen: Maar om dit noch opentlicker te bewijsen, soo laet ons nemen onpartijdich volck diens tijts, welck onverleijt deur valche beginselen gelijck d'ander, de natuer plaets gaven, als de gemeente tot Athē. Voor welcke een leerlinck van Antigenidas spelende, etz.

Maer wie sal dese gemeente ongelijck geven, soomen merckt op de twee ongeschickte geslachten des gesancx, als haer *Chromaticum* en *Harmonicum* waren; Om welcker gedaente te verclaren soo laet AB de sanglijn beteijckenen gedeelt in etz.

Sgelijcx sij *AB* een sanglijn gedeelt in etz.

Wildi nu weten hoedanich *Genus Chromaticum* was, soo neemt een luijt, verschuijvende haer banden alsoo, datse lijckformich liggen met de deeling der lijn AB, daer over een snaer spannende. Nu genomen dat ijmant op dese snaer eenich eenstemmich liet speelt, rijsende ende dalende nade banden dieder opstaen, denckt (soot u t'onpas quam te hooren) wat een lieflick cattengemaeu daer op can gemaeckt worden: Maer t'sij hoet wil die sijn stem met sulcke trappen dede climmen en dalen, sijn gesanck heet *Genus Chromaticum*. Ende diergelijcke is oock te verstaen van het *Genus harmonicum*: geslachten voorwaer gelijck haer gront: Wiens gedaenten wij voorgenomen hadden te verclaren, om eijntlick ons voornemen te besluijten, te weten dat sij deur een onbeweechelic vermoeden, daer hun schijn van waerheyt toe brocht, het onbehaechlick voor bevallich geacht hebben.

V. Hoofstick.

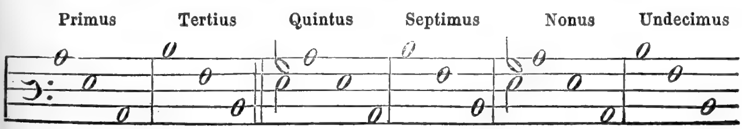
Vant gemeen onderscheijt tusschen de gesanck diemen noemt *Bemollaris* ende *Beduralis*.

Tgemeen onderscheijt datmen maeckt tusschen de gesanck diemen noemt *Bemollaris* end *Beduralis* is onnut, ende eijgentlick geen onderscheijt, maer al deselfde: Want geeft de C sol fa ut sleutel in Bemol, den naem van G sol re ut, beduyer daer singende, ghij hebt al de selfde gesanck die in Bemol was. Tselve heeft hem alzoo gevende de sleutel van F fa ut Bemol, den naem van C sol fa ut Bedeur; Sgelijcx de sleutel G sol re ut Bemol den naem van D la sol re beduijer: Ofte geeft ter contrarie alle dese den naem van die, ende hebt al t'selfde. Ten is dan geen ander aert van gesanck als d'ander en vervolgens soo ist een onut, [lees: onnut] onderscheijt.

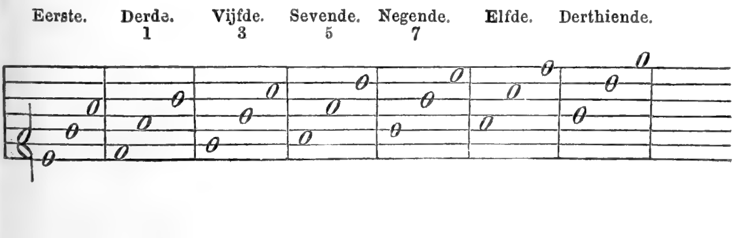
Dit volgende is dubbelt van een brief bij mijn Vader zal: an ijmant geschreven.

Alsoo ick van meijninge was met Meester Davidt te spreken van Sarlijns twaelf thoonen, soo verschreef ick de noten na mijn manier, om hem te bethoonen dattet twaelf waren, Maer alsoo ick vorder meende te bewijsen datter niet meer sijn en conden, bevant ter contrarie datter veertien waren: welck bewijs ick u hier sende. Dus wilt mij uijt den droom helpen, of u selven daer in brengen.

Sarlijns ses thoonen (die met haer contrarie twaelf souden maken) sijn, soo ghijse mij sendt, dusdanich.



Dese stel ick na mijn manier (daer bij vougende de sevende anders de dertiende) aldus



Nu ist kennelick dat uijt de verscheijden plaetsen der halftoonen, onderscheijt wort de verscheijden aert van gesanc diemen verscheijden thoonen noemt. Daerom make ick seven gelijcke fugen in elcken toon een, als hier onder: Mette getippelte trappen beteecken ick tot meerder claerheijt, de plaetsen die op haer voorgaende note halfthoonen maken.

4e 8e De selve segh ick altemael verscheijden te wezen: twelck ick aldus bewijse:

3e.7e. T'verschil vande derde toon met d'eerste is, dat die haer derde en sevende note halfthoonen heeft dese heeltoonen.

2e.6e. T'verschil vande vijfde toon met de twee voorgaende is, dat die haer tweede en seste noten halftoonen heeft dese heelthoonen.

5e.8e. T'verschil vande sevende mette drie voorgaende is, dat die haer vijfde note halfthoon heeft dese heelthoonen; Voorts dat die haer achste note halfthoon heeft, maer de derde en vijfde hebbense heeltoonen.

4e.7e. T'verschil vande negende toon met de derde vijfde en sevende is, dat die haer vierde note halftoon heeft, maer dese hebbense heeltoonen; Voort dat die haer sevende note halftoon heeft, maer d'eerste vijfde en sevende hebbense heeltoonen.

3e. 6e. T'verschil vande elfde toon met d'eerste, vyfde, sevende en negende is, dat die haer derde note halftoon heeft, dese heeltoonen; Voort dat die haer seste note halftoon heeft, maer de voorgaende eerste, derde, sevende, en negende, hebbense heeltoonen.

2e. 5e. T'verschil vande dertiende toon met d'eerste, derde, sevende, negende en elfde is, dat die haer tweede note halftoon heeft, dese heeltoon: Voort dat die haer vijfde note halftoon heeft, maer d'eerste, derde, vijfde, negende en elfde hebbense heeltoon.

Dese toonen met haer contrarien (welcke contrarien ick om cortheijt achter laet) maecken veerthien toonen, en niet meer en cander wesen, want d'eerstvolgende, twelcke in d'oirden de vijftiende waer, soude sijn als d'eerste, twelck ick bewijsen wilde.

D E

SPIEGELING DER

SINGCONST

Beschreven duer

D E

SPIEGHELING DER SINGCONST,

BEPALINGHEN.

1e *Bepaling.*

Trap is de naeste vervolghende climming diemen inde nateurlicke sanck rijst wiens minste stemming cleentrap geheeten wort de meeste groote trap.

2e *Bepaling.*

Nateurlicke sanck is, die deur oirdentlicke climming aldus gheschiet: Twee groote trappen een cleene drie groote een cleene twee groote een cleene drie groote een cleene. Ende soo overhandt oirdentlick voort.

Verclaring.

Anghesien dat de leeck luijden sonder kennis vant onderscheyt tusschen halve ende heele trappen door nateurlicke gheneghenheijt sulcken voortganck ghebruyken soo wortse met goede reden nateurlicke sanck ghenoemt want 2 of 3 halve trappen ofte 4 of 5 heele trappen vervolghens achter malcander te singhen en is niet alleen moeyelick om doen maer oock int anhooren onbehaghelick ende als onnateurlick.

3e *Bepaling.*

Dese seven trappen na de nateurlick gesanck oirdentlick climmende maken des ghesanckx een ommeganck.

Verclaring.

Wanneermen boven een ghestelde toon seven trappen rijst met oirdentlick climming soo heeft het laetste gheluijt sulcken ghelyckheijt mettet eerste dattet schijnt al ofmen een ommeganck ghedaen hadde ende wederom quaem daermen begosten: Inder voughen datmen sulcx van weghen die ghelyckheyt ommeganck heet: Welck ghenouchsaem toegaet als inde Sterreconst met de slangkeeren, die de Maen duer haer ghevalligh roersel daghelicx beschryft welcke eyghentlick gheen evewijdighe ronden sijnde nochtans om de ghelijckheyts wille alsoo ghenoemt worden.

4e *Bepaling.*

Die seven trappen worden elck aldus ghenoemt, *ut*, *re*, *mi*, *fa*, *sol*, *la*, *si*, wiens trappen van *mi* tot *fa* ende van *la* tot *si* cleen sijn dander al groot.

5e *Bepaling.*

Twee gheluyden even hooch sijnde hun verlycking wert self toon ghenoemt. Maer een cleen trap verschillende half toon Een groote trap verschillende toon: Een groote met een cleene verschillende anderhalftoon: Twee groote verschillende tweetoon. Ende soo oirdentlick voort.

6e *Bepaling.*

Twee gheluyden even hooch sijnde haer verlycking wert oock eerste ghenoemt maer een trap verschillende tweede welcke trap cleyner sijnde heet eyghentlick cleene tweede groot wesende groote tweede: Ghelijcx twee trappen verschillende wort derde gheheijten welcke een cleene sijnde heet cleene derde maer van twee grooter, groote derde ende soovoort tot de sevende wiens volghende trappen dobbeleerst dobbeltweede heeten ende soo oirdentlick voort met de eenvoudiche eerste tweede ende haer volghende.

Verclaring.

Desinghelickegheluijden ontfanghen twee verscheyden manieren van namen ghelyckse inde voorgaende 5e ende 6e bepalinghen beschreven sijn die elck haer besonder ghebruijck hebben. Want wesende de redens der gheluijden te vergaren ofte van malcander te trecken men noemtse bequamelicker duer de namen der toonen overmidts dat totten tweethoon vergaert den drietoon haer somme is den vyftoon; treckende den tweetoon vanden drie enhalftoon blyft de onderhalftoon inder voughen dat sommen en resten namen der ghetalen cryghen lijckformich an heur sij sijn. De namen van eersten tweeden derden dus sijn bequamer om int dadelick *) maecksel des sancx te ghebruycken. Want lichter ende bequamelicker telt men tverschil van twee gheluyden deur trappen na de nateurlicke ghesanck climmende of dalende dan deur toonen en halftoonen overmits de menichte der trappen met de menichte der toonen niet en overcomt.

Begheerte.

Wij begheeren toeghelaten te werden dat ghelijck snaersdeel tot snaersdeel also haerder gheluyden grofheyt tot grofheyt.

Verclaring.

Wanneer twee persoonen tsamen een dobbel eerste singhen de grover stem des leegsten heeft een ghelaet van dobbelheijt teghen de fine stem des hoochsten: dat is

*) *Compositione cantus.*

ghelijck 2 ellen dobbel sijn teghen 1 elle alsoo schijnt dese leegste stem in grofheijt dobbel te wesen ande hoochste: Tis wel waer dat de selve dobbelheijt ons int gheluijt niet soo heel claer ende verstaenlick en ontmoet als in grootheijt ghetal ghewicht tijt roersel, ende meer ander: nochtans soo beweeght ons de ghespannen snaer selve toete laten overmits haer deelen in dobbel reden der grootheijt sijnde de selve gheluyden clijncken die wij segghen van dobbel reden der grofheijt te wesen. Want de heel snaer teghen haer helft clincken tsamen de voorschreven dobbel eerste. Voort ghelyck hier gheseyt is, dat de heele snaer tot haer helft in dobbel reden der grootheijt sijnde, haer gheluyt in dobbel reden der grofheijt heeft, alsoo is oock te verstaen dat de heele snaer tot haer vierendeel in verhoudinghe reden der grootheijt wesende haer gheluijt in verhoudinghe reden der grofheyt heeft ende alsoo voort met allen anderen soo wel deelen teghen malcander als deelen teghen de heele snaer. — Nu alsoo ymant mocht willen ontkennen den helft der snaer teghen de heele een dobbel eerste te clijncken, daer uyt oock niet toestaende der gheluyden grofheijt te wesen inde reden van haer snaersdeelen soo wort hier boven beschreven welcke toeghelaten te worden overmidts sulcx als beghinsel gheen ander bewijs en verreyscht. Want ghelijck de ervaring leert, soo en ghebeurt de contrari niet dan deur valsche snaren oft ander ongheval.

2e *Begheerte.*

Heele toonen al even groot te wesen, dat sgelijcx oock halve toonen al even groot sijn.

Verclaring.

De sin is dese datmen van *ut* tot *re* even soo veel ryst als van *re* tot *mij* ende als van *fa* tot *sol*, van *sol* tot *la* ende van *sa* tot *ut*. Datmen desgelijcx eerst van *mij* tot *fa* even soo hooch rijst als van *la* tot *sa*.

	Vertooch.			*Voorstel.*
Ghelyck 1 tot	1	Alsoo den eenen toon tot den anderen	Selftoon	Eerste
	$\surd(12)\,\frac{1}{2}$		Halftoon	Cleen tweede
	$\surd(6)\,\frac{1}{2}$		Toon	Groote tweede
	$\surd(4)\,\frac{1}{2}$		Onderhalftoon	Cleen derde
	$\surd(3)\,\frac{1}{2}$		Tweetoon	Groote derde
	$\surd(12)\,\frac{1}{32}$		Twee en halftoon	Vierde
	$\surd\,\frac{1}{2}$		Drietoon	qua groote vierde of qua cleene vijfde
	$\surd(12)\,\frac{1}{128}$		Drie en halftoon	Vijfde
	$\surd(3)\,\frac{1}{4}$		Viertoon	Cleen seste
	$\surd(4)\,\frac{1}{8}$		Vier en halftoon	Groote seste
	$\surd(6)\,\frac{1}{32}$		Vijftoon	Cleen sevende
	$\surd(12)\,\frac{1}{2048}$		Vijf en halftoon	Groote sevende
	$\frac{1}{2}$		Sestoon	Dobbeleerste.

Bewijs.

[abest]

Vande Reden int ghemeen.

Want de redens inde stof des gheluijdts niet soo opentlick bekent en sijn als in ander stoffen daer sij ons ontmoeten, sullen om meerder claerheyt eerst segghen vande Redens ende Everedenheyt int gheluiden; daer nae vande ghedaente des redens der Singconst duer haer verlijcking met de bekende reden der meetconst.

Ende ten laetsten van d'eijghen redens der singhelicke gheluyden. Reden dan int ghemeen bepaelt, is tselver stoffen verlyckingh na de menichvuldenheyt. Als in ghetalen grootheyt, ghewichten, tijt; 6, 6 voeten, 6 pont, 6 uijren, sijn in dobbel reden tot 3, 3 voeten, 3 pont, 3 uijren. D'Everedenheyt is de verlyckinge van twee even redens als 6 tot 3 is een dobbel reden, alsoo oock is 8 tot 4, daerom de reden van 6 tot 3 is even ander reden van 8 tot 4. tsijn dan even redens ende haer verlycking segghende ghelyck 6 tot 3 alsoo 8 tot 4, is everedenheijt ofte 6, 3, 8, 4, sijn everednighe palen.

Siet hier duytsche woorden licht om verstaen ende van slecht ghelaet maer eyghentlick van oneindelick vermueghen. Want soomen ansiet het bepaelde te weten Everedenheijt tis als bepaling sijns grondts, wiens gheluijt alleen, int eerste anhooren ons vermaent ende anwijst dattet recht grontlick verstandt der Everedenheyt byde Griecken ende hun navolghers niet gheweest en heeft. Want (veel ander ghelaten die elders te pas sullen comen) te segghen dat 6, 4, 3 van drie ghelycke singconstighe everedenheyt maecken daer oneindelycke ydelheden uijt volghen ende besloten worden; Men antwoort duer beweghing van tvoornoemde gheluijt, hier van sijn gheen even redens, daerom oock gheen Everedenheyt. Doirsaeck dier dwalinghen is dat hun spraeck dit woort medtsgaders al d'ander Wisconstighe namen niet soo eyghentlick beteeckenen en conden als dese daerom soomen met goet onderscheyt van der talen nutbaerheijt wilde spreken; men mocht segghen de wetenschap van Griecx oirboir te wesen van veel verscheijden vonden der Griecken die thaerder tyt de voornaemste waren int licht te brenghen, duer oversetting uyt het Griecx in ander talen: sgelijckx daeghelicx ghebeurt; Tlatijn om daer mede (als bij ghevalle des werrelts ghemeen tael gheworden synde) in alle landen verstaen te worden, oock om alle konsten te mueghen besien, die van alle stoffen bij verscheijden geslachten van. volcken daerin beschreven worden; Tfranszois Italiaens Spaens Pools, etz. om sijn handel daer deur te dryven yder nae sijn ghelegenheyt. Maer het DUYTSCH om de vrie consten daer in te leeren, om de natuerens verborghentheden daer in duergronden ende te bewysen dat wonder gheen wonder en is. Daerom hij die van meyningh waer na de groote Wysheyt te trachten daer der Caldeen ende Egyptenaeren wetenschappen eertijts overblijfselen af waeren, hem soude nut sijn tot desen born oft eerste oirspronck te gaen van daer sijse gekreghen hadden vlietelick in Duytsch leerende onder anderen wat de voornoemde Everedenheyt is. Want dit gheluyt beeldet wesen van dese groote saeck eyghentlick uijt andre woorden als *Proportio Analogia*, synder onbequaem toe ghelyck de daet tot verscheyden plaatsen claerlick betuycht.

Verlijcking der Meetconstighe Reden met de Sinconstighe.

Tot hier toe is vande Redens int gheluiden gheseyt maer om nu nae tvoornemen duer verlijcking der meetconstighe Reden die der Singconst te verclaren soo is te weten dat ghelyck de Meetconstighe Reden bestaet in der formen grootheyt ende cleenheyt welcke afghemeten wort duer langhde, alsoo de Singconstens Reden in der gheluyden grofheyt en fynheyt, die afghemeten wort duer hoochde of leechde: Als twee singhende een dobbeleerste, men seght uyt sulck verschil der leechde die deen onder dander is de grofste stem dobbel onder finste. Ende sulcke stof der dobbelheyt als dit is vande selve sijn. al d'ander meerder ende minder singconstighe Redens. Wederom ghelyckmen alle Redens van twee voorghestelde rechtlinighe platten of lichamen duer tghesicht niet bekennen en can, maer hun meetconstighe reghels hebben, leerende hoemen die vinden sal, alsoo en sijn alle Redens van twee voorghestelde gheluyden uyt het ghehoor niet te oirdeelen, maer sij worden openbaer duer haer Sinconstighe reghels daer wij nu af segghen moeten.

Vande Redens der singchelicke gheluyden
na der Griecken meining.

D'ervaring betuycht dat de gespannen snaer op eenich reetschap als luyt cyter viool of derghelycke teghen haer helft een gheluyt maeckt daer mede soo seer ghelyck dattet in hem een ghelaet van selfheyt heeft diens Reden der grofheyt wij duer eenighe natuerlicke gheneghentheyt dobbel verstaen maer niet soo wesentlick als de dobbelheyt die ons in ander stoffen ontmoet, ghelyck vooren gheseyt is, doch soo wort sulcx merckelicker bevesticht duer de lichamen dese gheluijden uijtende als der heelsnaer ende haer helft, welcke oock in dobbel reden sijn. Tselve heeft hem alsoo met de halfsnaer tot huer vierendeel, achtendeel, sesttiendendeel ende d'ander in die voortganck. Want alsulcke gheluyden al tvoornoemde ghelaet der selfheyt hebben, met begrijpelicke ghedaente der viervoudighe achtvoudighe, sesthienvoudighe Reden der grofheijt. Desgelycs is oock openbaer in al dander redens buyten den boveschreven voortganck. Want nemende een deel des snaers wiens Reden tot de heele den helft sij des Redens vande dobbelden haer gheluyt sal oock tot halfweghe duer oirdeelick leeghde ghedaelt sijn: Maer want dese bekende daling de maet der grofheyt is ghelyck wij vooren gheseyt hebben, soo is ons de Reden der grofheijt hier bekent, ende alsoo met anderen dier ghelycken waer uijt besloten wort dat ghelyck dit snaersdeel tot dat snaersdeel, alsoo desens gheluyt tot diesens gheluyt, dat is de snaersdeelen brenghen gheluyden voort inde Reden haerder grootheden. Dit eertyts bemerckt sijnde, soo was de drangh na de ware deeling des snaers alsoo datse de eijghentlicke toonen begrepen die wij duer natuerlick ghesanck synghen. twelck de Griecken tot onderscheyt van tgheen sij *Chromaticum* ende *Harmonicum* heeten, *Diatonicum genus* noemen, op dat alsoo tnatuerlick ghesanck inde singconstighe reetschappen volcomelick ghetroffen wierden. Om hier toe te commen soo en behouftmen maer eenich toon den halftoon vervatende als onderhalftoon, tweeenhalftoon, drieenhalftoon enz. wantmen daer uijt om der Redens vergaring ende aftrecking wil, al de rest gewislick vinden can sonder meer gheluyden te hooren. Sij hebben daer toe ghenomen de vyfde, dat is den drieenhalftoon ende vinden de ware Reden der langde des snaers ende haers deels desen drieenhalftoon clijnckende seer naer in de Reden van 3 tot 2 hebben gheschat Reden $^3/_2$ de warachtiche te wesen. daermede voortgaende als of syt waer treckense van Reden $^2/_1$ des sestoons blyft Reden $^4/_3$ des tweeenhalftoons, de selve van Reden $^3/_2$ des drieenhalftoons blijft reden $^9/_8$ voor den toon, daer toe vergaert noch een reden $^9/_8$ comt Reden $\frac{81}{64}$ des tweetoons de selve getrocken van Reden $^4/_3$ des tweeenhalftoons blyft voor den halftoon Reden $\frac{256}{243}$, etz. Maer alsmen de sanglijn ofte om werckelicker te spreken, den hals van een luyt of cyter deelt na de boveschreven Redens d'ervaring betuycht opentlick duer tghehoir sulcx den halftoon niet te wesen want sij veel te cleen is. Indervoughe dat de natuerlicke toonen duer sulcke deeling niet recht ghetroffen en sijn. Ende hoewel d'ouden dit ghenomen merckten hebben nochtans dese deeling voor goedt ende volmaeckt ghehouden ende liever tghebreck (ghelyck oftmen seyde de Son mach lieghen maer tuijrwerck niet) in ons ghesanck gheacht; ja hebben hierom de soete ende lieflicke gheluijden der cleene ende groote derde en sesten, welcke in haer misdeelde sanglijn mishaeghlick clancken voor quaet ghehouden, te meer dat een sinlicheijt van oneyghen ghetalen hun hier toe drang. Maer willende Ptolemeus daer naer dese onvolmaectheijt verbeteren heeft tvoornoemde *genus diatonicum* op een ander wyse ghedeelt makende onderscheijt tusschen groote toon in Reden $\frac{9}{8}$ ende cleene toon in Reden $\frac{10}{9}$ welck verschil inde natuer niet en bestaet wantet openbaer is alle heele toonen evegroot ghesonghen te worden. Dese onghetroffen toonen an Zarlinus niet ghevallende heeft noch een ander deeling ghemaeckt verspreydende seker *comma* (in Ptolemeus deeling overschietende) op deen en dander toon daert hem goet docht maer al tastende. Alle dese dwalinghen sijn daer uyt ghesproten dat den aert der everedenheijt niet grontlick ghenomen begrepen en heeft gheweest twelck niet en quam duer ghebreck des verstants want hun naeghelaten daden ghenouch betuyghen datse van d'alder scherpsinnichsten waren die de natuer voortbrenght maer tlooch hun an goede reetschap naemlick de duytsche tael sonder welcke men inde diepsinnichste saecken soo weijnich doen can als een ervaren timmerman sonder goede verstaelde reetschappen sijn ambacht want ghelyck men duer een ongheschickt cromlinighe form de meetconstighe eygenschappen des viercants niet soo duergronden en can als met een eyghen viercante form na den vyften des 4 voorstels wiens gheduerich opsicht gheduerich tghedacht versterckt alsoo en condemen de diepsinnichste natuerens verborghentheden duer dongheschickte (bij Duytsch verleken) Griecksche spraeck niet soo grontlick begrypen als duer dese aldergheschickste ende aldervolmaeckste tael der talen wiens eijghentlicke beteeckening ons tbeteeckende soo claerlick inbeelt dat de saeck self daer duer gheduerich voor ooghen schijnt welcke in dander talen onbegrijpelicke duysterheden blijven soo dervaring onder anderen in dese stof overvloedelick betuijcht. Want Reden $^3/_2$ voor de vyfde te stellen, daer mede na den vyften voortgaende ende eintlick niet wel uijtcommende noch te meijnen dat Reden $^3/_2$ de waerachtighe sij, voorwaer de grontlicke aert der vergaring ende aftrecking vande Redens isster onbekent. Maer op dat wij dit misverstant in d'onverstaen aert der Redens duer verlijcking van verstaenlicken gheluiden ghetalen openbaer maken: laet ons nemen eenich ghetal als 110 inde plaets des sesthoons, ende vyf persoonen, A, B, C, D, E, oirdentlick beteeckenende den drieenhalftoon tweeenhalftoon, toon, tweetoon ende halftoon, daer mede den eysch stellende lyckformich ande voorgaende Pitagorische wercking des Redens aldus: Van 110 ghetrocken tghene A hebben moet de rest is voor B, ende ghetrocken B van A t'overschot is voor C, daer toenoch soo veel ghedaen de somme is voor D, die ghetrocken van B toverblijfsel moet 35 sijn voor E. Ymant om tot besluyt van desen te commen, neemt een ghetal voor A dat hem soo veel tuyterlick ghevoel belanght na ghenouch dunckt als 60, hier mede voortgaende als oftet twaerachtich waer, trecket van 110 blyft 50 voor B, die ghetrocken vande 60 rest 10 voor C, daer toe ghedaen noch 10 vint 20 voor D, die ghetrocken van 50 der B blyft 30 voor E, maer E moest 35 hebben hij siet dan opentlick dat E tsijne niet en heeft; doch sonder te mercken dat sulcx comt uijt het eerste ghetal voor A dats 60 onrecht ghestelt te wesen acht dat laetste ongheval de naturens verborchenheijt houdende sijn boveschreven besluyt voor goet. Maer wat sal den ervaren Telder hier toe segghen? seker met goede reden dat soodanighen deyghenschappen der Telconst niet ghenough bekent en sijn, wetende dattet recht deel voor A 59 is, twelck van 110 ghetrocken blyft 51 voor B, welcke van 59 rest 8 voor C, daer toe noch 8 comt 16 voor D, die ghetrocken van 51 der B blyft 35 voor E naer tbegheerde. Even eens ist inde berekening vande Redens der gheluyden toegeghaen, want wesende voor de vyfde een Redens te stellen, die na seecker reghel af te trecken ende te vergaren was, alsoo datter eintlick de ware Reden des halftoons overschiete welcke men duert stellen van Reden $^3/_2$ daetlick bevandt daer niet uijt te commen, ende bevandt noch gheduerlick te blyven meijnen dat die Reden $^3/_2$ de waerachtighe is; Voorwaer soo opentlick als den Telder hier boven sach dat den stelder van

60 voor A de Telconst niet ghenouch en verstont naestelick ghevoelende doirsaeck sijnder dwaling; even soo claerlick siet den ervaren der Everedenheijt dese stelders van Reden $^3/_2$ voor de vyfde den grontlicken aert der Redens end Everedenheyts niet innerlick ghenomen begrepen te hebben spruijtende daer uijt als voor gheseyt is dat sij gheen woorden en hadden die de Wisconstighe saken soo eyghentlick beteeckenen conden als het DUYTSCH.

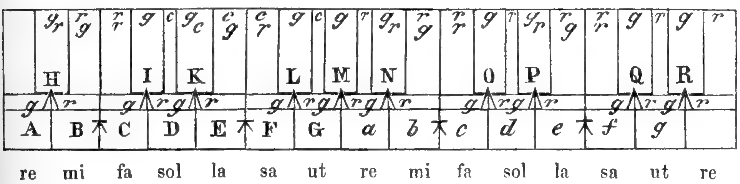
Vande ware redens der natuerlicke toonen.

Maer om tot de saeck te commen ende deyghen Redens der natuerlicke toonen te beschryven, soo segh ick dat de ware reden der vyfden ofte des drieenhalftoons is van 1 tot $\surd(12)\frac{1}{128}$, dat is van 1 tot syde der twelfde grootheyt van $\frac{1}{128}$, de selve ghetrocken van Reden. $\frac{2}{1}$ des sestoons blyft Reden van 1 tot $\surd(12)\frac{1}{32}$ voor den tweeenhalftoon, die wederom ghetrocken vande voornoemde Reden des drieenhalftoons blijft Reden van 1 tot $\surd(6)\frac{1}{2}$ voor den toon, daer toe ghedaen noch alsulcken reden comt Reden van 1 tot $\surd(3)\frac{1}{2}$ voor den tweetoon; de selve ghetrocken vande boveschreven Reden des tweeenhalftoons blyft reden van 1 tot $\surd(12)\frac{1}{2}$ voor den *) halftoon. Om twelck te bewysen soo laet A, B, C, D, E, F, G, *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, beteeckenen de clawieren van een orgel ofte clavesingel ende H I K L M N O P Q R de tusschen toonen diese

*) Om twelck te bewijsen, soo is te weten dat alsmen syngt (soot derghelicken noemen) *gis* teghen *dis* opwaert als onder anderen Orlando en etc., tzelfde hooren wij een goede vyfde te wesen.

fenten noemen, Want ons dit reetschap tottet voornemen bequamer is, dan de sanglijn, tselve laet ghestelt worden met de volmaeckte natuerlicke toonen in deser voughen

Boven F de dobbeleerste *f* met de vijfde *c* tusschen beyden
Onder *c* de dobbeleerste C met de vijfde G tusschen beyden
Boven G de dobbeleerste *g* met de vijfde *d* tusschen beyden
Onder *d* de dobbeleerste D met de vijfde *a* tusschen beyden
Onder *a* de dobbeleerste A met de vijfde E tusschen beyden
Boven E de dobbeleerste *e* met de vijfde *b* tusschen beyden
Onder *b* de dobbeleerste B met de vijfde L tusschen beyden
Boven L de dobbeleerste Q met de vijfde O tusschen beyden
Onder O de dobbeleerste I met de vijfde M tusschen beyden
Boven M de dobbeleerste R met de vijfde P tusschen beyden
Onder P de dobbeleerste K met de vijfde N tusschen beyden
Onder N de dobbeleerste H



Dit soo wesende dervaring betuycht dat HF een volmaeckte vyfde maken, ende hoewel sulcx voor ghemeen ende ghewisse Reghel gehouden wort van al de ghene hun dies verstaende, heb nochtans tot meerder versekering voor de ghene die daer an twijfelen mocht de Loofweerdicheyt willen ghebruijcken van. . . . .

Wesende dan HF een volmaeckte vijfde, soo syn alle halftoonen nootsaecklick evegroot ende den rechten helft des toons twelck aldus bewesen wort: Laet den halftoon van B tot C ende van E tot F cleynder oft grooter syn, waert mueghelick dan den rechten helft des toons; ick neem na de Pitagorische meining cleender, twelck wij daerom (metgaders *bc* ende *ef*) teyckenen met *r* clein bediende, duer tlettercken *g* salmen groot halftoon verstaen: Om dan voort te gaen LB is duer de stelling een vijfde bestaende uijt drie toonen ende een cleen halftoon, ofte dattet selve is uyt twee toonen, twee cleene halftoonen met een groot halftoon; Dit soo synde van F tot L is een groot halftoon twelck aldus bewesen wort. BC is een cleen halftoon CD ende DE elck een toon, EF een cleen halftoon maken tsamen twee toonen ende twee cleene halftoonen, soo moet dan FL tot voldoening der vyfde BL een groot halftoon sijn, ende vervolghens van L tot G is een cleen halftoon want van F tot G is een toon daer af ghetrocken de groot halftoon van F tot L soo moet dan L tot G een clein halftoon sijn. Maer *f* Q *g* sijn dobbeleersten met F L G daerom oock ist van *f* tot Q een groot halftoon ende van Q tot *g* een cleen halftoon. Voort soo is O een vyfde op L. duer de stelling daerom oock ist van *c* tot O een groot halftoon twelck aldus bethoont wort: L G is een cleen halftoon, G *b* twee toonen, *b c* een cleen halftoon, maken tsamen twee toonen ende twee cleene halftoonen soo moet dan *c* O tot voldoening der vijfde L O een groote halftoon sijn, ende vervolghens soo is O *d* een cleen halftoon. Maer C I D sijn dobbeleersten met *c* O *d* daerom oock ist van C tot I een groot halftoon ende van I tot D een cleen halftoon. Voort soo is M een vyfde op I duer de stelling, daerom oock ist van G tot M een groot halftoon want ID is een cleen halftoon ende DE een toon, EF een cleen halftoon, FG een toon maken tsamen twee toonen ende twee cleene halftoonen indervoughen dat GM tot voldoening der vyfde MI een groot halftoon maken ende vervolghens soo is M *a* een cleen halftoon. Maer *g* R sijn dobbeleersten met GM, daerom oock is *g* R een groot halftoon.

Wyder soo is P een vyfde op M duer de stelling daerom oock ist van *d* tot P een groot halftoon want van M tot *a* is een cleen halftoon van *a* tot *b* een toon, van *b* tot *c* een cleen halftoon van *c* tot *d* een toon, maken tsamen twee toonen ende twee cleene halftoonen waer duer *d* P tot voldoening der vyfde PL nootsaeckelick een groot halftoon is, ende vervolghens soo moet P *e* een cleen halftoon sijn.

Maer DKE sijn dobbeleersten met *d* P *e* daerom oock is DK een groote halftoon ende KE een cleen halftoon. Voort soo is N den vijfde op K duer de stelling daerom ist oock van *a* tot N een groot halftoon. Want van K tot E is een cleen halftoon ende van E tot F oock een cleen halftoon ende van F tot A twee toonen, maken tsamen twee toonen ende twee cleene halftoonen waer duer *a* N tot voldoening der vyfde NK een groot halftoon maeckt, ende vervolghens N *b* een cleen halftoon, maer AHB sijn dobbeleersten inde *a* N *b*, daerom oock is AH een groote halftoon ende HB een cleen halftoon. Dit dus wesende HF bestaet uyt twee toonen ende drie cleyn halftoonen. Want HB is een cleen halftoon, alsoo oock is BC, ende CE sijn twee toonen ende EF een cleen halftoon maken tsamen als vooren gheseijt is, twee toonen ende drie cleene halftoonen. HF dan en is gheen vyfde twelck teghen dervaring teghen loofweerdicheyt teghen tghemeen ghevoelen ende ontkenning der beginselen soude sijn; merckt wijder dat soo veel BC cleender waer dan een recht halftoon soo veel soude AH nootsaeckelick grooter moeten wesen ende vervolghens haer verschil tot malcander tweemael soo veel twelck teghen tghemeen ghevoelen is. Want ghelyck int ghesanck de climming van *mi* tot *fa* evensoo hooch is als van *la* tot *sa*, alsoo istter van B tot C evensoo veel rysing als van A tot H. BC dan en is niet minder dan den rechten helft eens toons; sghelycx salmense oock bewysen niet meerder te wesen, sij is dan nootsakelick den rechten helft, alsoo oock sijn al dander ghelyck van A tot H, van H tot B, enz. Dit soo wesende de dobbeleerste bestaet nootsaecklick in ses toonen al even groot ofte in twelf evegroote halftoonen daerom heeftmen tbegheerde alsder tusschen de palen der dobbeleersten 1 ende $\frac{1}{2}$ gheteyckent hier onder met A B ghevonden sijn. elf middeleverednighe ghetalen C,D,E,F,G,H,J,K,L,M,N, aldus

A. 1 . . . . . Selftoon . . . . Eerste
C. $\surd(12)\,\frac{1}{2}$. . Halftoon . . . . Cleen tweede
D. $\surd(6)\,\frac{1}{2}$ . . Toon . . . . . . Groote tweede
E. $\surd(4)\,\frac{1}{2}$ . . Onderhalftoon . Cleen derde
F. $\surd(3)\,\frac{1}{2}$ . . Tweetoon . . . Groote derde
G. $\surd(12)\,\frac{1}{32}$. Tweeenhalftoon. Vierde
H. $\surd\,\frac{1}{2}$ . . . Drietoon . . Qua groote vierde of qua cleene vijfde
J. $\surd(12)\,\frac{1}{128}$. Drieenhalftoon . Vijfde
K. $\surd(3)\,\frac{1}{4}$. . Viertoon . . . . Cleen seste
L. $\surd(4)\,\frac{1}{8}$. . Vierenhalftoon . Groote seste
M. $\surd(6)\,\frac{1}{32}$. Vijftoon . . . . Cleen sevende
N. $\surd(12)\,\frac{1}{2048}$ Vijfenhalftoon . Groote sevende
B. $\frac{1}{2}$ . . . . . Sestoon . . . . . Dobbeleerste, achtste.

Inder voughen dat A 1 tot A 1 de reden des selftoons ofte der eerste is, maer A 1 tot C $\surd(12)\,\frac{1}{2}$ de reden des halftoons ofte der cleen tweede ende A1 tot D $\surd(6)\frac{1}{2}$ de reden des toon ofte der groote tweede ende soo voort met de rest, waer uijt blyckt dat de vyfde en dander in sulcke redens zijn als wij voorghenomen hadden te bewysen.

Ymant mocht nu achten na doude meyning hoe dattet soet gheluydt der vyfde in soo *) onuijtsprekelick, onredelick, ongeschickt ghetal bestonde, daer op wij int breede souden connen antwoorden maer want ons voornemen niet en is an donuytsprekelicke onredelicheyt ende ongeschicktheyt van sulcken misverstant hier te leeren duytsprekelicheyt redelicheyt geschicktheijt ende natuerlicke constighe volmaecktheyt deser ghetalen, sullent, als elders bewesen hebbende, daer bij laten.

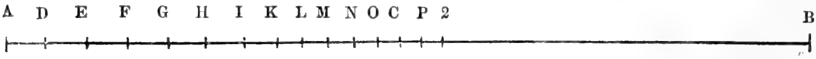
Maer soomen de boveschreven redens al wilde beteeckenen met syden en twelfde grootheden inde selve weerde men soude den voortganck des noemers vande ghebroken in oirdentlicke voortganck vinden waer uyt, duer lichticheyt bekent worden al de redens boven den sestoon ofte dobbeleerste ghelyck dit voorbeelt opentlick ghenouch aenwyst.

AtotA	A$\surd(12)1$	. . . Selftoon.	Eerste
A » H	C$\surd(12)\frac{1}{2}$	. . . Halftoon	Cleen tweede
A » B	D$\surd(12)\frac{1}{4}$	. . . Toon	Groote tweede
A » C	E$\surd(12)\frac{1}{8}$	. . . Onderhalftoon .	Cleen derde
A » I	F$\surd(12)\frac{1}{16}$	. . Tweetoon	Groote derde
A » D	G$\surd(12)\frac{1}{32}$	. . . Tweeenhalftoon.	Vierde
A » K	H$\surd(12)\frac{1}{64}$	Drietoon. qua groote vierde of qua cleen vyfde	
A » E	I$\surd(12)\frac{1}{128}$	. . Drieenhalftoon .	Vyfde
A » F	K$\surd(12)\frac{1}{256}$	. . Viertoon	Cleen seste
A » L	L$\surd(12)\frac{1}{512}$	. . Vierenhalftoon .	Groote seste
A » G	M$\surd(12)\frac{1}{1024}$	. Vijftoon.	Cleen sevende
A » M	N$\surd(12)\frac{1}{2048}$	. Vijvenhalftoon .	Groote sevende
A » *a*	B$\surd(12)\frac{1}{4096}$	. Sestoon	Dobbeleerste, achste
	$\surd(12)\frac{1}{8192}$	. Sessenhalftoon .	Dobbel cleen tweede
	$\surd(12)\frac{1}{16384}$	. Sevetoon	Dobbel groote tweede
	$\surd(12)\frac{1}{32768}$	. Sevenenhalftoon.	Dobbel cleen derde.

*) *Inexplicabili irrationali absurdo numero.*

*Meetconstighe deeling der *) sanglini.*

Om nu de sanglijn meetconstlick te deelen alsoo datmen daer in hebbe de ware volcommen gheluyden des natuerlicken ghesancks dat is inde boveschreven redens so laet AB de sanglijn beteeckenen wiens middelpunt C is, de selve salmen



deelen in D, E, F, G, H, I, K, L, M, N, O, alsoo dat GB ende LB. twee middeleverednighe lynen sijn tusschen AB ende CB die op verscheyden wyse, werckelick (want de wisconstighe is alsnoch onbekent) ghevonden wort doch bequamelicst mijns bedunckens na de manier van . . . . [sic] . . . . Voort alsoo dat IB middeleveredniche sij tusschen AB ende CB, diemen vindt duer het.[sic] Voorsteldes.[sic] boucs van Euclides. Sghelycx EB tusschen AB en GB. Wederom DB tusschen AB en EB. Voort FB tusschen AB en IB. Sghelycx HB tusschen GB en IB; Ende KB tusschen EB en CB. Wederom MB tusschen IB en CB ende NB tusschen LB en CB. Ten laetsten OB tusschen NB en CB.

Maer soomen dese deelinghen van C naer B noch voorder begheerde dat can met lichticheyt geschien in deser voughen: Men sal teeckenen P int middel van DB ende Q int middel van EB ende soo voort want PB sal teghen AB den sesenhalftoon ofte dobbel cleentweede maken ende QB teghen AB den sevetoon ofte dobbelgroote tweede.

Telconstighe deeling der sanglijn.

Tot hier toe is vande Meetconstighe deeling gheseyt int volghende sullen wij de telconstighe verclaren dat is duer slechte ghetalen inde daet ghenouch doende, aldus: Ic deel de

*) *Regula harmonices seu monocordus.*

lijn AB in 10000 even deelen nu om te weten hoe veel der selver tot yder toon behooren ist beghin anden drieenhalftoon segghende 1 gheeft √(12) $\frac{1}{128}$ wat 10000? comt √(12)7812500000000000000000000000000000000000000000 die doet zeer bij ende in heel ghetal ten naesten 6674. Want 6675 te veel is soo duer de twelfde grootheyt van deen en dander blijcken can. Maer om eyghentlicke bewys te doen in yder deel der wercking vande vinding deser syden soo is te weten dat de syde der tweede grootheyt ofte viercants syde des boveschreven vierde paels is bina √(6)88388347648318440550105 (die de gront hier af begheert mach dit ghetal in sich self menichvuldighen daer bij doende 96389809968824984488975 dieder overschoten; tblyckt oock duer tvoornomde overschot datde ware syde van gheen eenheyt meerder en is maer alleenlick van ontrent $\frac{96389809968824984488975}{176776695296636881100211}$). Vande voornomde √(6)88388347648318440550105 wederom ghetrocken viercants syde die doet √(3)297301778750 (de prouf is openbaer duer menichvuldighing deses ghetals in sich daer toe doende doverschietende 404488987605, tblyckt oock duer tvoornomde overschot dat de ware syde van gheen eenheyt meerder en is maer alleenlick van ontrent $\frac{404488987605}{594603557501}$ *)). Hier uyt ten laetsten ghetrocken syde derderdegrootheyt ofte teerlinxsyde comt 6674, de prouf van desen is dat 6674 teerlincwijs ghemenichvuldicht ende daer toe ghedaen doverschietende 26628726 maken haer eerste teerlincstal, tblyckt oock duer tvoornomde overschot datde ware teerlincxsyde van gheen eenheyt meerder en is maer alleenlick van ontrent $\frac{26628726}{133646851}$ Inder voughen dat 6674 de voornomde syde in heeltal ten naesten is. De Reden die des drieenhalftoons is in slechttal te nemen als van 10000 tot 6674, daervan ghetrocken Reden $\frac{10000}{6674}$ des drieenhalftoons van Reden $\frac{2}{1}$ des sestoons blyft

*) Dese ghetalen moeten noch eens overzien wesen teghen den oirspronck.

Reden $\frac{13348}{10000}$ des tweeenhalftoons. Maer de telder en is gheen 10000, om die dan daer toe te brenghen ick seg 13348 gheeft 10000 wat 10000? comt 7491. Inder voughen dat de tweeenhalftoon is van Reden $\frac{10000}{7491}$, de selve ghetrocken van Reden $\frac{10000}{6674}$ des drieenhalftoons blyft (na verandering in ghemeen telder 10000) Reden $\frac{10000}{8909}$ des toons tot de selve ghedaen noch alsulck Reden comt Reden $\frac{10000}{7937}$ des tweetoons, de selve van Reden $\frac{10000}{7491}$ des tweeenhalftoons blyft Reden $\frac{10000}{9438}$ des halftoons. Dese toonen bekent wesende, al dander worden openbaer duer verscheyden manieren van wercking want om te hebben de Reden des onderhalftoons men mach trecken den toon vanden tweeenhalftoon ofte den tweetoon vanden $3\frac{1}{2}$toon ofte vergaren den toon totden halftoon, ende alsoo met al d'ander.

A	10000.	Selftoon	Eerste
	9438.	Halftoon. . . .	Cleen tweede
	8908.	Toon.	Groote tweede
	8404.	Onderhalftoon .	Cleen derde
	7936.	Tweetoon . . .	Groote derde
	7491.	Tweeenhalftoon	Goe vierde
	7071.	Drietoon	Qua vierde
	6674.	Drieenhalftoon	Vyfde
	6298.	Viertoon. . . .	Cleen seste
	5944.	Vierenhalftoon.	Groote seste
	5611.	Vyftoon	Cleen sevende
	5296.	Vyfenhalftoon .	Groote sevende
	5000.	Sestoon	Dobbeleerste
	4719.	Sessenhalftoon.	Dobbelcleen tweede
	4454.	Sevetoon. . . .	Dobbelgroot tweede

Men soude de voornoemde deeling oock mueghen aldus doen: Ghevonden hebbende de Reden des drieenhalftoons als boven ick krijgh die des drietoons segghende 1 gheeft $\sqrt{\frac{1}{2}}$ wat 10000? comt 7071 inder voughen dat Reden $\frac{10000}{7071}$ die des drietoons is, de selve ghetrocken van Reden $\frac{10000}{6674}$ des drieenhalftoons blyft (na verandering in ghemeen telder 10000) Reden $\frac{10000}{9438}$ voor den halftoon, daertoe vergaert noch alsulcken reden comt voor den toon Reden $\frac{10000}{8908}$ daer wij na deerste manier creghen Reden $\frac{10000}{8909}$ doirsaeck van welck verschilken openbaer is. Wij sullen ons inde onderschreven tafel om oirdentlicker vervolghs wil an 8909 houden ende om der ghelycke oirsake inden tweetoon an 7936. De ghetalen boven den sestoon worden lichtelick ghevonden duer halving der voorgaende, als om

B

te hebben tghetal dessessenhalftoons, ick neem den helft van 9438 die doet 4719 ende voor den sevetoon den helft van 8908 enz. Een sanglijn dan aldus ghedeelt synde, in 10000 even deelen voor yder toon sullen soo veel deelen commen rekenende van B naer A als de volghende beschryving van dies uytwyst.

Nota. Hier moet de voorgaende tafel ende lijn A B commen.

Soomen nu wilde sien hoe verre de ghedwaelde deelinghen vanPitagoras.Ptolemeus,Bootus ende Zarlinus buyten den wegh waren, men can daer lichtelick toe commen ende haer redens grootste ghetal oock op 10000 te stellen. Ic neem de Pitagorische diens tafel tot den drieenhalftoon wert beschreven, soodanich is

10000	Eerste
9364	minste tweede
9492	meeste tweede
8888	Groote tweede
8437	Cleen derde
7901	Groote derde
7500	Goe vierde
7023	Qua vierde
6666	Vyfde

Alwaer blyckt dat de cleynste pael des drieenhalftoons van 8 deelen te cort is. Want ghetrocken 6666 van 6674 blyft 8 maer den halftoon van 54 deelen te lanck. Ymandt mocht nu dencken waerom dit verschil inden halftoon soo veel grooter is dan inden drieenhalftoon? Daer af seg ick doirsaeck openbaer te wesen int voorbeelt hier boven ghegheven met slechter talen daer wij 110 inde plaets des sestoons stelden ende vyf persoonen A,...E oirdentlick beteeckenende den drieenhalftoon tweeenhalftoon, toon, tweetoon, ende halftoon, alwaer A inde quad wercking maer een te veel en creegh ende B een te weijnich, C twee te veel D vier te veel maer E vyf te weynich Inder voughen dat E vyfmael meer te weynich had dan A te veel; Ende even eens uyt de ghelycke oirsaecke cryght hier den halftoon vyfmael meer te weynich (int ansien der Redens vande grofheyt) dan den drieenhalftoon te veel heeft. Uyt desen is oock openbaer dattet verschil des cleen halftoons ende groothalftoons thienmael meerder is dan de Reden des drieenhalftoons te groot ghestelt was, twelck doirsaeck is dat dese dwaling inden halftoon soo veel merckelicker blyckt als in dander toonen.

MERKT.

Tis teghedencken dat de namen vandedobbelheyt drievoudicheyt viervoudicheyt der eersten tweeden derden enz. niet en sijn int ansien vande grofheyt der gheluyden maer vande omganghen (nemende acht vervolghende trappen voor een omganck) want ghelyckmen twee drie of vier keeren der slanghens dobbel, drievoudich oft viervoudich mach segghen an een omtrec niet int ansien vande oneven lengden der lynen waer in sulcke Reden niet en bestaet maer opsicht hebbende tot de menichte der keeren: Alsoo heetmen dese eersten tweeden enz. dobbel drievoudich viervoudich int ansien der omganghen sonder te letten opde grofheyt der gheluyden na welck de palen der drievoudicheerste in viervoudighe Reden sijn ende die der viervoudighe eerste in achtvoudighe reden. Inde dobbel eersten overcommet bij ghevalle om wat anders. Want een eersten ofte selftoon te weten Reden $\frac{1}{1}$ ghedobbelt dat is daer toe vergaert noch een Reden $\frac{1}{1}$ en maeckt al maer Reden $\frac{1}{1}$ men heeftse dan alleenlick opsicht tot de omganghen des gheluydts.

ANHANG.

Voorreden / Vande Vierde / Van *la si ut*, Vande twelf toonen / De natuer en wort inde compositie niet ghevolcht als in Rhetorica / Der sesten en derden ghelycke daling en climming is wettelick als sij overhandt nu een cleen dan een groote comt. Waerom niet cijferletters inde langhe noten / Bemollaris cantus is onnut onderscheijt. Tis een ghemeen woordt dat die wel onderscheyt die leert vaec. maer daerbenevens is te weten dat die qualick onderscheyt leert qualick Species perfecta ende imperfecta sijn al quaet onderscheyt.

Hier vooren beschreven hebbende de spiegeling der Singconst soo heeft mij ghoedt ghedocht daer bij te voughen met corte woorden de verclaring van sommighe duysterheden ende valscheden inde Singdaet deses tydts inghewortelt.

Hooftstick vande vierde.

De *) vierde wort vande ghesanckmakers deses tijts voor quaetluydich ghehouden, alsoo datse in ghesanck met drie of meer stemmen teghen de leeghste niet ghehoort en mach worden ja onder twee stemmen en wilmense gantschelick niet lyden. Maer soomen vraeght waerom? sij antwoorden overmidts datse in ons ghehoir mishaeghlick is: Twelck ick ontken: sal oock de contrari bewijsen eerst met reden daer na, dat meer is, mitterdaet. De reden is dusdanich: Twee

*) *De Diatessaron.*

gheluyden der dobbeleerste hebben soo grooten ghelijcheyt dat singhende twee persoonen, eenen liedt, ick neem een oudt mensch met een kindt, dese een dobbeleerste hoogher als die doch sonder kennis der dobbeleersten sij en weten ghemeenlick anders niet dan datse beyde in een selfde toon synghen. Ja wij sullen hier oock bewysen dat sulcx dalder ervarendste somtyts ghebeurt. Soo groot dan is dese ghelyckheyt dattet in hen een ghelaet der selfheyt heeft, daerom bij de twee boveschreven stemmen der dobbeleersten ghestelt eenighe derde stem alsulcken aert van soetluidichheyt ofte quaetluijdichheyt als die derde met deene maeckt soodanighe maektse oock met dander. Als neem ick die derde stem een toon boven de leegste wesende, sij maekt daer mee de qualuydighe tweede ende teghen de bovenste de qualuydighe sevende van ghelycke ghedaente: Maer soo de derde stem twee toonen boven de leechste waer, maken de soetluydighe derde ende met de bovenste gheen qualuydighe toon maer de soetluydighe sesten van ghelycke gedaente: Ende vervolghens de derde stem met de bovenste een behaeglick vyfde makende, sij en can met donderste stem niet mishaeghlick wesen, maer maeckt daer teghen een behaeghlicke soetluydighe vierde. Want dit is een ghemeen reghel dat een selfde tot eveneen selfde reden 1 heeft. Hier toe mochtmen noch brenghen de loofweerdiche der Grieken met hun navolghers diet soo mede verstaen hebben, maer die verlatende sullen ant daetlich bewijs commen. Ymandt de vierde quaetluydich achtende segghende die in sijn ghehoir mishaeghlick te wesen, de contrari ende sijn onghelyck wort hun aldus bethoont, men sal nemen eenighe twee verscheyden gheluijden als van een snaer met een menschestem ofte een fluyte met een snaer oft een stem met een fluyte daer mede makende alsnu een vierde alsdan een vyfde ende dat tot verscheydemael ende oock verscheyden vierden en vyfden hoogher en leegher, vraghende telck an sijn partie wat het is dat hij sinct ende sullen daetlick bevinden dat hij sonder sekerheyt daer af oirdeelende sijn selven dickwils teghen sal spreken dicmael een vyfde achtende tgene hij te vooren een vierde seyde te wesen ende weder ter contrarie een vierde oirdeelende tgene hij te vooren een vyfde gheseyt had: Twelck soo daetlick blyckende wat behouven wij meer woorden? Wie isser soo onredelick die hem met sijn selfs woorden beschamen sal? segghende de vierde mishaeght mij ende de vyfde bevalt mij seer wel. Maer om deser dynghen oirsake wat breeder te verclaren soo is te weten dat als sulcke twee gheluyden tsamen een eerste ofte dobbel eerste maken dalderscherpste ghehoiren en connen niet sekerlick oirdeelen welck van tween het is. Om hier af by voorbeelt noch opentlicker te spreken ick neem datter twee sijn deen op de fluyte spelende dander synghende, elck sijn partie van eenich liedt ghesonghen ghelyckmen achten soude dattet behoort te wesen

Dit liedt daer naer noch eens overgaen maer alsoo dat den sangher een dobbeleerste hoogher ga dan te vooren, yder (om de reden als vooren te weten datter op een dobbeleerste na gheen sekerheyt en is) hooret voor goedt an, nochtans die toon daer den singher eerst een vyfde onder den fluter was daer sal hij nu nootsaecklick een vierde boven wesen. Inder voughen dat ghenomen het deerste mael een vyfde was soo salmen hier de vierde voor vyfde anhooren. Daerom de ghene die noch segghen dat de vierde in hun ooren mishaeghelick luyt, maer de vyfde seer bevallick, ick en siender niet beter af te besluyten dan dat de ghewoonte uyt de leest [?] eeu ghesproten een weeckheyt in hemlien ghewortelt heeft.

Doirsaeck waerom Zarlin syn eerste toon niet en stelde als dander heeft goede reden overmidts daer duer verdorven soude sijn doirdentlicke voorganck der climming van deen toon tot dander dats van trap tot trap.

Want had hij deerste toon der ouden voor sijn eerste ghenomen soo en soude sijn elfde toon gheen trap hoogher gaen dan sijn voorgaende neghende maer vyf trappen leegher. Ende om de selve reden moet sijn tweede toon oock tot die selve plaets wesen.

Merckt dat ons 1^e^ toon overcomt met haer 10^e^ want sij beyden in *fa* sijn. alleenlick verschillense daer in dat dese hun middelste tsaemval een trap hoogher maeckt dan die. Sgelycx overcomt de 2^e^ met de 11^e^, de 3^e^ mette 12^e^, de 5^e^ mette 7^e^, de 6^e^ mette 8^e^. Wat de vierde en de 9^e^ belanghen, sij en overcommen noch met malcander noch met eeniche van al dander.

Tgheheele onderscheyt datmen maeckt tusschen de ghesanck diemen noemt *Bemollaris* ende *Beduralis* sij is geheel onnut ende eyghentlick gheen onderscheijt, maer al een selve. Want geeft de C solfaut sluetel in bemol den naem van Gsolreut, bedur daerop singhende ghij hebt al de selve ghesanck die in bemol was Tselfde heeft hem alsoo ghevonden de sluetel van Afaut bemol den naem van Csolfaut bedur. Sgelijcx de sluetel Gsolreut bemol den naem van Dlasolut bedur. Ofte gheeft per contrarie alle dese den naem van die ende hebt al tselfde: Ten is dan gheen ander aert van ghesanck als dander ende vervolghens soo ist een onnutte onderscheijt.

Om dit te bewysen, soo merckt dat alsmen singt (op dat wyt noemen na der orghelisten wyse) *gis*, teghen *dis*, opwaert als in . . . . [sic] . . . . Ende meer anderen, de twee stemmen der selver *gis* en *dis* maken met malcander, soot openbaer kennelick is, een volmaeckte goede vyfde. Waer uyt de voorgaende redens der gheluyden alsoo nootsaecklick te moeten wesen aldus bethoont wort.

Laet ABCDE etc. beteeckenen de clawieren van een orghel clavisimbel ofte clavicorde (want soodanich reetschap tottet voornemen bequaemer is dan de sanghlijn) alsulck reetschap sij ghestelt na eenighe ghemeene manier van stelling, ick neem (op dat wij een seker voet hebben) aldus

. . . .

Nu de vyfde MP dat *gis* ende *dis* sij (ghelyck inde voornomde ghesanck gheseyt is) goet ende volmaeckt. Dit soo wesende laet den halftoon MP meerder of minder sijn, waert mueghelick, dan etc.

Hoofstick waer in doirsaeck verclaert wort vande onvolmaecktheyt dieder int stellen der orghels ende clavesimbels ghebuert.

Tgheen wij int voorgaende hooftstick vande vyfde MP gheseyt ende besloten hebben is ghenomen de selfde vyfde MP goet te wesen maer tghebuert in verscheyden reetschappen soo dervaringh betuycht datse deenmael een weynich te groot valt dandermael een weynich te cleen, somtijts oock goet, maer wantse int spelen niet, oft maer seer weynich ghebruyckt wort, soo latent veel meesters diese stellen, blyven by tgheen tgheval uytbrenght overmidts al de rest diemen besicht sooveel tghehoir belanght, goet ghenouch is. Maer om te verclaren donverclaerden gesanck waerom dese vijfde . . . inde voorsz. reetschappen niet soo recht te treffen en is als de natuerlicke ghesanck der menschelicke stemmen die betuijcht te moeten wesen, soo dient verstaen te worden de ghemeene onvolmaecktheijt des werckelicken handels in alle stoffen, welcke niet soo volcommentlick ghelyck de wisconstighe te treffen en is. Als by voorbeelt een stuck lywaet van 50 ellen duer verscheyden persoonen voorsichtelick ghemeten d'een sal een stroobreet ofte duijm meer vinden als dander, Doch soose teenemael ende gants effen uyt commen sonder een haer te verschillen, sulcx ghebuert selden ende by ghevalle, sgelycx heeft hem alsoo int meten der vlacken, lichaemen ende ander stoffen als tijt, roersel, swaerheijten; Oock mede inde stof des gheluyts daer ons verschil af is. Want men can gheen twee gheluyden als der vierde, vyfde of seste etc. alsoo passen dat sijt in duyterste volcommenheyt sijn, ten waer bij ghevalle; daer af oock gheen bewys en can ghedaen worden. Maer om dese werckelicke onvolmaeckt-heyt duetlick te bethoonen, soo leght den bandt van een luyt ter plaets daer u dunckt haer snaer teghen een ander snaer de volmaeckte vyfde te maken, verschuyf daer naer dien bandt alleenlick soo veel als de dickte van een haer opwaert of neerwaert ende sult bevinden datter gheen merckelicke verandering duer en gheburt niet teghenstaende datter voor seker eenighe verandering gheschiet. Doch soo ghij vermoedet ende u selven toegaeft die valsheijt der vyfde te bemercken soo laet die verschuijving des bandts duer een ander persoon ghedaen worden, alsoo dat ghij niet en weet of hyse de breede van een haerken opwaert of neerwaer schuyft, ofte op de selve plaets laet; hij u alsoo tot verscheydenmael vraghende na de goetheyt der vyfde sult daetlick u oirdeel onseker bevinden, dicwils de goede quaet segghende ende de quade goet. Tis dan openbaer dattet gheen menschelick ghehoor mueghelick en is hoe scherp het sij twee toonen in haer uyterste volcommenheyt heel seker te passen. Waer uyt volght dat veel sulcke feylen die elck int besonder onbemerckelick sijn, nochtans tsamen een merckelicke dwaling maken; Want ghelyck in tvoorseyde stuck lywaet duer verschyeden persoonen ghemeten veel cleyne verschillekens op yder elle tsamen opt einde eenich merckelick verschil maken, alsoo hier oock inde gheluyden. Want overmidts dese vijfde... seer selden ghebruyckt wort soo laetmen die clyene onbemercklicke feylkens daer op al ancommen welcke ten einde altsamen bemercklick connen sijn, somtijts oock onbemerckelick na tgheval. Daerom en ist gheen wonder dat de bovenste meesters sulcke reetschappen voorsichtelick stellende int laetste nochtans quade toonen ontmoeten die goet behooren te wesen, maer tis natuerlick. Ende diet niet en verstaet hem ghebreeckt de kennis des onderscheyts tusschen werckelicke ende wisconstighen handel, twelck wij bewysen moesten.

BIJLAGEN A—E.

BIJLAGE A.

Brief van Abraham Verheijen, Organist te Nijmegen aan Simon Stevin.

Eerwaerdighe zeer goetgunstighe vriendt, Mr Simon Stevin ick hebbe laetstmael U. E. schrijuens met de 5 eerste voorstellen der Spiegeling des Singconsts met blytscap ontfanghen, die heb ic oock seer wel verstaen, zoo dat ick gheen naerder verclaringhe van doen en hebbe: Oock hebbe ick (volgens t'begeeren van U. E.) met aller neersticheyt ondersocht het inhoudt des 1en voorstels ende volgens t'inhoudt des seluighen twee clauesingels d'een 3 heele thoonen hoogher gestelt als d'ander, maer hebbe beuonden (dwelck ick eerst niet en meende te souden geschien) dat 6 alsulcke euen thoonen gheen volcomen achste en maecken, doch ouermits ick my niet al te vast vertroude op de proeue van twee clauesingels aldus gestelt synde, hebbe gedacht offmen t'selue niet soude connen proeuen op eene clauesingel alleen, ende beuonden iae aldus, toegelaeten synde 6 eue groote heele thoonen des natuerlycken gesangs, een volcomen achste te maecken, soo moet om de selue reden oock toegelaeten werden drie groote derden (elck bestaende uyt twee eue heele thoonen) ofte vier cleyne derden (elck bestaende uyt anderhalffthoon) oock een volcomen achste te maeken, beyde is licht te proeuen niet alleen op een clauesingel maer selffs door den natuerlicken sanck, maer om

U. E. t'selue claerlick te bethoonen, ick hebbe de clauieren met letters geteeckent nae onse gewoonte, ende de nooten des natuerlicken sancx daer onder, dit gedaen synde, ick stelle eerst de achste van F tot *f*, soo volcommen als mogelick is, daer nae de groote derde van F tot A, twelcke men alsoo volcomen door natuyrlick gehoor kan stellen als de achste, ten laetsten stelle ick oock soo volcomen als mogelick is de groote derde van A tot *Ce*, welcke de spleeten tusschen C ende D, dit aldus gedaen synde, by soverre de achste bestonde uyt drie volcomen groote derden, soo moste van *Ce* tot *f* oock een volcomen derde synde, maer de eruaring betuycht ons sekerlick t'selue meer als een groote derde te syn, de selue reden geuet oock met de nooten des natuirlicken gesanckx. Want alle eruaren gesangmakers sullen seggen vande 1 noot tot de 5 een volcomen groote derde te syn, van gelycken vande 5 tot de 9 noot is een volcomen groote derde maer vande 9 noot tot de 13 noot (dewelck oock een volcomen groote derde moste syn indien de achste bestonde uyt drie groote derden) sal nietmant int singen eruaren synde, toelaeten een groote derde te syn. maer sullen alle seggen, gelyckt oock is, dat het een onvolcomen *) vierde is, soo dat hier uyt openbaer is dat ses euen heele thoonen minder syn als de achste, ende volgens de twee halffthoonen der natuerlicke achste elck meerder als de helft des heelen thoons. Van gelycken proeue doende met de cleene vierden, daer zal beuonden werden (van de bouenste *f* beginnende) vier cleene vierden meerder te syn als een volcomen achste, tselue is mede openbaer, door de nooten des natuerlycken sancx want de 1 noote tegen de derde sy is maer een

---

*) Ofte vercleende.

vergroote thoon, dewelck een volcomen cleene derde moste syn, indien twaelff ende halffthoonen de volcomen achste souden maecken; soo dat uyt dese twee proeuen seker beuonden wert, drie groote derden minder ende vier cleene derden *) meerder als een volcomen achste te syn, waer uyt onderscheyt der halfthoonen nootsaeckelick moet volghen, oock soo is het by alle indese const eruaeren soo ghemeen, dat niemant en twyfelt ons inde natuyrlycke sanck soo wel cleene als groote halffthoonen t'ontmoeten, want men kan vande cleene derde tot de groote derde, noch vande cleene seste tot de groote seste niet comen sonder den cleenen halffthoon, ten overvloet hebbe ick een cort voorbeelt gemaeckt met twee stemmen waer in men bequamelick mach sien ende hooren t'onderscheyt des grooten ende cleenen halffthoons, soo dat men vrij euen als voor begin (dwelck geen bewys en behouft) stellen mach ons inde natuyrlicke sanck cleene ende groote halffthoonen t'ontmoeten: dit selue heb ick wel geweeten, als ick oyt aen U. E. screeff, maer meende offmen door sulc redelycke deeling der sanglyn de halfthoonen hadde konnen euen maecken, dwelck my de proeue geleert heeft niet te konnen geschien, want de sanglyn eueredelick verdeelt synde ende de clauesingel daer nae gestelt (gelyck ick versocht hebbe) alle groote derden syn te groot ende alle cleene te cleen. Nu t'ondersoucken van desen heeft my doen vinden de waere natuyrlycke redens der thoonen waer van naest Gode (sonder flatteringe gesproocken) de eer U. E. alleen toecomt om twee bysondere redenen, d'eerste is datse sonder kennis der worteltalen niet geuonden connen werden, welcke ick geerne beken (soo veel ick daer van weet) uyt niemants andders dan uyt

*) [lees: vierden].

U. E. fransche telconst geleert te hebben; dander reden is dese dat, sonder de vermaninghe vande Reden der vyfde van 3 tot 2 in de bepalinghe des Wysentyts [?] van uwe E. wistconstighe gedachtenissen gedaen, ick noyt de saeck soo verre naegedacht en soude hebben. Om dan het vinden der waere Redens te thoonen, soo is U. E. kennelick uyt stellinghe der vyffde van 3 tot 2 te volgen twee oneuen heele thoonen, d'eene van 9 tot 8, d'ander van 10 tot 9, welcke onevenheyt van heele thoonen ons inde natuyrlycke sanck niet en ontmoet, daeromme dese twee Redens vergaert, comt reden van 5 tot 4 voor de waere Reden des tweetoons, dese Reden gehalft comt Reden van $\sqrt{5}$ tot 2 voor de waere Reden des thoons, der gelycke vyff Redens te weten $\sqrt{3125}$ tot 32 getrocken vande waere Reden der achste van 2 tot 1 blyft voor de twee groote halffthoonen der achste Reden van 64 tot $\sqrt{3125}$. dese wederomme gehalft, comt voor de Reden des grooten halffthoons Reden van 8 tot W3125 dese Reden wederomme getrocken vande Reden des heelen thoons $\sqrt{5}$ tot 2 blyft Reden van W78125 tot 16 voor de cleene halffthoon, nu wetende t'verschil der vyffde ende vierde een heelen thoon te syn, ende tverschil der vierde ende groote derde een grooten halff-thoon te syn, ende tverschil der groote ende cleene derde een cleenen halffthoon te syn, d'ander Redens der thoonen syn door vergaring en afftrecking licht om vinden. U. E. sullen int ondersoucken andder getalen als de myne beiegenen maer sy sullen inde selue Reden staen want ick hebbe de minste paelen gesocht die ick vinden coste, om de prouff daer van des te lichter te doen. Nae dese Redens de sanglyn verdeelt (gelyck ick gedaen hebbe) ende de clauesingel daer na gestelt, sy is soo wel gestelt als mogelick is te geschieden, hier hebben U. E.

de Rechte waere Redens der thoonen, ende moghen daer met handelen nae welgevallen, soo U. E. eenighe swaricheyt ontmoet ick ben bereyt U. E. altyts te voldoen, want ick teghenwoordich (sonder roem spreckende) dese stoff grondelick verstae, by aldien U. E. oock begeert een wel verdeelde sanglyn euueredelick, ende oock nae dese nieu waere gevonden Redens verdeelt synde (dwelck bequamelick op eene sanglyn can geschieden) om het onderscheyt der selue niet alleen te sien maer oock te hooren salse U. E geerne met deelen, ende met yemant van onse boden ouerseynden; de reden waeromme ick de verdeelinghe der sanglyn begin van F van G ofte van C dunct my betamelick te syn; om dat *ut* de eerste noot des natuyrlycken sanx is, en datmen maer op dese drie letters *ut* en singt, hoe wel het inde daet euenveel is van wat letter men de deeling begint, alsmen maer gaeslaet wat afcompsten der thoonen de volgende geluyden maecken tegen d'eerstgestelde. Hier mede eyndigende wil ick U. E. den alderhoochsten beuelen die U. E. in landuerighe gesontheyt gelieue te spaeren.

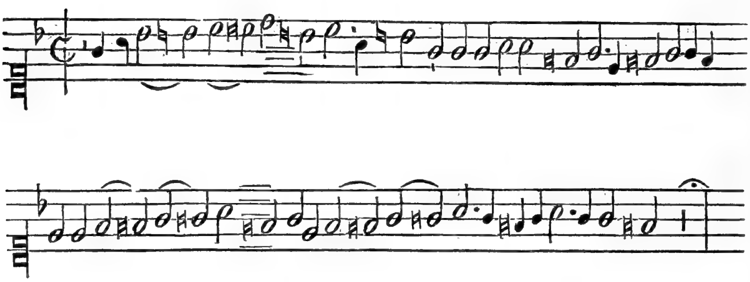
U. E. altyt dienstwillighe vrient ende dienaer Abraham Verheyen organist tot Nijmeghen.

U. E. sal gelieuen mij eens met een woort ofte twee t'ontbieden, waer ick een welgemaeckte drieroe (in U. E. Meetdaet beschreuen) soude moghen becomen, ende wat de selue ontrent soude moeten costen, dit doende my sal grooter vrientschap geschieden.

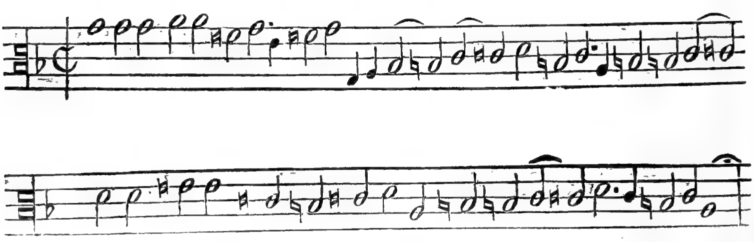
B IJ L A G E B.

(Behoort bij Bijlage A.)

Cort voorbeelt met 2 stemmen, waer in claerlyck gesien ende gehoort wordt het onderscheyt des grooten ende cleenen halffthoons.



de nooten met dese ⌢ ⌣ gebonden beteyckenen de cleene halffthoon, dander syn alle groote halffthoonen.



B IJ L A G E C.

(Behoort bij Bijlage A.)

De Redens der Thoonen, eueredenich met Thoonen des Natuerlicx Ghesancx.

Selffthoon is van	1 tot 1.
Cleene halffthoon is van.	W78125 tot 16.
Groote halffthoon is van.	8 tot W3125.
Thoon is van.	$\sqrt{5}$ tot 2.
Vercleende cleene derde ofte twee groote halffthoon is van	64 tot W3125.
Vergrootte thoon is van.	W1953125 tot 32.
Cleene derde is van	4 tot W125.
Tweethoon ofte groote derde is van .	5 tot 4.
Vercleende vierde is van.	32 tot 25.
Vergrootte groote derde is van . . .	W48828125 tot 64.
Vierde is van.	2 tot W5.
Driethoon ofte vergroote vierde is vā. .	$\sqrt{125}$ tot 8.
Vercleende vyffde is van.	16 tot $\sqrt{125}$.
Vyffde is van	W5 tot 1.
Vercleende cleene seste is van. . . .	128 tot W48828125.
Vierthoon ofte vergrootte vyffde is vā. .	25 tot 16.
Cleene seste is van.	8 tot 5.
Groote seste is van.	W125 tot 2.
Vercleende cleene seuende is van . .	64 tot W1953125.
Vyffthoon ofte vergroote groote seste is van	$\sqrt{3125}$ tot 32.
Cleene seuende is van	4 tot $\sqrt{5}$.
Groote seuende is van	W3125 tot 4.
Vercleende achste is van	32 tot W78125.
Achste is van	2 tot 1.

Alle dese thoonen ontmoeten ons inde natuerlicke sanck maer de vercleende ende vergrootte thoonen werden niet ofte seer weynich gebruyckt om datse qualick met goet oirdeel gesonghen connen werden; sy konnen alle lichtelick gesocht ende gesien werden uyt de geteeckende clauieren ende oock eueneens uyt de nooten des natuerlicken sancx daer onder staende, als by voorbeelt vande 1 tot de 2noot is de cleene halffthoon vande 2 tot de 3 noot is de groote halffthoon, vande 1 tot de 3 noot is een thoon, vande 1 tot de 4 noot is een vergrootte thoon, etc. Hier uyt volcht dat de banden aende halsen der speeltuyghen nootwendich eueredelick geleyt moeten zyn, om te myden de vercleende ende vergrootte ongebruyckelicke affcomsten der thoonen, ofte daer mosten soo veel banden syn alser redens der thoonen hier voor staen, dewelcke niet alleen groote swaricheyt int spelen soude maecken, maer de banden souden oock soo nae by malcanderen comen te liggen datmense met de vingeren niet soude connen onderscheyden derhaluen de eueredelycke deeling niet te vergeeffs, maer oock nootwendich is; maer met de clauesingels ende orgels gaet het anders toe, want de spleten ofte anders geseyt, fenten steken tusschen de ander clauieren soo veel hooger uyt datmense bequaemelick kan raecken (als men wil) sonder d'ander clauieren te roeren, ende de clauieren behouden euentwel haer behoirlicke grootte, alsoo datmen bequamelick met een handt de achste kan ouervatten, ende de vercleende ende vergrootte thoonen kanmen bequamelick door hulp der spleten mijden, dwelck in ander speeltuyghen (diens thoonen door banden onderscheyden werden) niet geschieden en kan, want d'eene bant niet hooger kan liggen als d'ander, maer aleuen hooch op de rye, alsoo dat beyde de verdeelingen nootwendig syn.

B IJ L A G E D.

(Behoort bij Bijlage C.)

De Reden der Vijffde om het Orgel ofte Clauesingel nae te stellen mach sijn eene van de 4 naevolgende.

√(3) 10 tot √(3) 3.

√(4) 5 tot 1.

√(5) 15 tot √(5) 2.

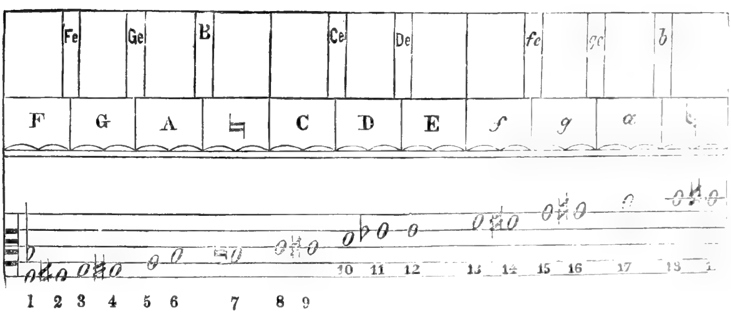
√(7) 50 tot √(7) 3.

De Redens der andere Thoonen als vierde, derde, etc syn licht door Vergaring ende Aftreckinge te vinden.

B IJ L A G E E.

(Behoort bij Bijlage A.)

Eerwaerdige zeer wijse ende geeerde Mr. Simon Steuin.



De *) afcomsten der thoonen met de waere Redens van dien syn de navolgende.

Selfthoon is van . . . . 1 tot 1
Cleen halffthoon is van . . . . w 78125 tot 16.
Groote halffthoon is van . . . . 8 tot w 3125.
Thoon is van. . . . . $\sqrt{5}$ tot 2.
Cleene derde is van. . . . . 4 tot w 125.
Groote derde is van. . . . . 5 tot 4.
Vierde is van . . . . 2 tot w 5.
Vyfde is van . . . . w 5 tot 1.
Cleene seste is van . . . . 8 tot 5.
Groote seste is van. . . . . w 125 tot 2.
Cleene seuenste is van . . . . 4 tot $\sqrt{5}$.
Groote seuenste is van . . . . w 3125 tot 4.
Achste is van. . . . . 2 tot 1.

Nu ouermidts inde verdeelinghe der sanghlyn ons eenighe ongebruyckelycke affcomsten der thoonen ontmoeten (de selue verdeelinghe beginnende van F ofte van G ofte van C ghelyckt behoirlick is) soo sal ick de selue hier mede stellen eerst de onghebruyckelycke affcomsten der thoonen aldus bepalende.

Onghebruyckelycke afcomsten der Thoonen zyn die welckers geluyden een cleene halfthoon vermeerdert ofte vermindert zyn.

Dese Thoonen syn onghebruyckelyck om datmense met gheen seecker oirdeel en kan singhen, ende werden gheseyt vergroot ofte vercleent.

---

*) *Species.*

De ongebruykelycke afcomsten der thoonen tot de verdeelinge der sanglyn noodich zynde met de Redens van dien syn de navolgende

Vergrootte thoon is van.	w 1953125 tot 32.
Driethoon ofte vergrootte vierde is van .	$\sqrt{}$125 tot 8.
Vergrootte vyffde ofte vierthoon is van .	25 tot 16.

De verdeelinghe van F beginnende men moet de navolgende Redens gebruycken.

Selfthoon is van.	10000 tot 10000
Cleene halffthoon is van	10000 tot 9570
Thoon is van	10000 tot 8944
Vergrootte thoon is van	10000 tot 8560
Groote derde is van.	10000 tot 8000
Vierde is van	10000 tot 7477
Driethoon is van.	10000 tot 7155
Vijffde is van.	10000 tot 6687
Vierthoon ofte vergrootte vyffde is van .	10000 tot 6400
Groote seste is van	10000 tot 5981
Cleene seuenste is van.	10000 tot 5590
Groote seuenste is van	10000 tot 5350
Achste is van	10000 tot 5000

[NB.De schrijver heeft dergelijke tafeltjes opgemaakt,doch niet ingevuld, met de titels:

De verdeelinghe van C beginnende men moet gebruycken de volghende Redens.

en

De verdeelinghe van G beginnende men moet ghebruycken de volgende Redens.]

BOUWSTOFFEN VOOR DE GESCHIEDENIS

DER

WIS- EN NATUURKUNDIGE WETENSCHAPPEN

IN DE NEDERLANDEN.

DOOR

D. BIERENS DE HAAN.

N°. XXVII. Van de Molens, door Simon Stevin; en over een ander werk van hem.

1. In het vorige N°. XXVI werd gewag gemaakt van een paar werken van Simon Stevin; deze willen wij nu nader behandelen. Zij zijn niet zoo geheel onbekend als de »Spiegelingh der Singconst", daar zij gedeeltelijk reeds zijn afgedrukt; maar toch moge de overdruk van het eerste hier wel gerechtvaardigd zijn, omdat daarvan althans een gedeelte slechts bekend was.

2. Dit eerste werk heeft tot titel »Stevin || vande Molens || *Gereviceert doorden Professor* || *Golius* || 1634", en bevat de »overslach" van 19 molens (door mij genummerd van [1] tot [19]) met een »Vertooch" aan het einde.

In het »Wisconstigh Filosofisch Bedrijf" van den zoon Hendrik Stevin [zie Bouwstoffen XXV, Noot 36] vindt men in het »X. Boec || *VANDEN HANDEL* || Der || Watermolens onses Vaders Simon Stevin" in het »Tweede onderscheyt || *Vant* 10 *Boec* || Van Watermolens na de oude manier", op blz. 10 en 13 onze overslagen Nr. [1] en [10] terug. Daarop volgt in voornoemd werk »Derde onderscheyt || *Vant* 10

Boec || Van Polderwatermolens nae de nieu- || we manier ons Vaders" en daarin vinden wij onze overslagen Nr. [14]—[19] terug op blz. 15—25. Ik heb echter gemeend ook deze hier te mogen overdrukken, omdat zij toch tot het geheel behooren, en juist den praktischen blik van den schrijver in zulk geheel eigenaardig daglicht plaatsen. Deze »nieuwe Manier" van STEVIN zelven, is eene soort van onbepaald vraagstuk: te stellen zekere aantallen van cammen en staven, en daaruit het aantal van de overige te vinden, opdat de aldus gebouwde molens een bepaalde drukking op ieder vierkante voet van het zeil geven. Het »Vertooch" aan het slot, dat bij HENDRIK STEVIN niet voorkomt, heb ik mede afgedrukt.

3. Omtrent het tweede »VERRECHTING || VAN DOMEINE || METTE CONTREROLLE || VAN DIEN || BE*schreven door* || Simon Stevin || *van Brugghe*", dat tusschen de bladen van de »Spiegeling der Singconst" gevonden wordt, valt het volgende op te merken. Het is bekend, dat deze »Verrechting" het tweede deel uitmaakte van SIMON STEVIN's »Materiae Politicae. Bvrgherlicke stoffen. Leijden. JVSTVS LIVIVS (1650) 4°." [zie Bouwstoffen XXV, Noot 34 en 34[a]]. Hier vindt men slechts de »Cortbegrijpen": en wel achtereenvolgens

Van het geheele werk, zie de aangehaalde »Materiae Politicae", blz. 1.

Van het eerste deel, zie aldaar blz. 15, 16.

Van het tweede deel, zie aldaar blz. 41, 42.

Daarop volgt die van het eerste deel des Anhangs »GHEMEENE REGEL || *Vande weerde der granen* || *en Landen jnt ansien* || *der maten*," zie het aangehaalde werk blz. 127, 128. Hierbij treft men een klein verschil aan, waaruit m. i. blijkt dat ons stuk ouder is dan het gedrukte. Wij lezen hier toch in het Cortbegrijp »Tot verclaring deses handels sal ick beschrijven vijf hooftsticken", terwijl in de »Materiae Politicae" het Cort Begrijp spreekt van »vier Hooftsticken". Maar in ons handschrift, waar nu de inhoud der hoofdstukken opgeteekend staat, leest men bij het vijfde alleen het volgende. »Hier van is anders niet, doch meen dattet heel werck in de 4 hoofsticken begrepen is." STEVIN schijnt dus later van deze verdeeling in vijf hoofdstukken te zijn teruggekomen. Dat hij of de verdeeling veranderd, of niet alles later in zijne »Materiae Politicae" heeft opgenomen, zoude men daaruit opmaken, dat in ons handschrift behalve twee titels (voorkomende op blz. 137 en 146 van het aangehaalde werk) nog voorkomt de titel »VOORBEELT DER || Capittelen 69, 70, 71, 72, 73 vande || Cockz Mitsgaders der Capittelen || 74, 75 vande Clames, soodie || mosten commen inde bereyding || en voltrecking der Contrerolle || van Oraigne des jaers 1628." In het gedrukte werk toch is er van zulke hoofdstukken geen sprake.

Stevin.

VANDE MOLENS

Gereviceert door den Professor

GOLIUS.

1634.

[1] OVERSLACH der

Zuyt Nootdorpsche molen.

Langde der wiecke	$40\frac{1}{2}$	voet
Breede	$8\frac{1}{4}$	voet
Camrat boven	44	cammen
Schijfloop boven.	13	staven
Schijfloop beneen	10	staven
Camrat beneen	52	cammen
Camrats halfmiddellijn tot op tmiddel der cammen.	$\frac{31}{6}$	voet
Scheprats halff middellijn	$\frac{31}{4}$	voet
Breede der lepels	$\frac{29}{24}$	voet
Commen onder tpeijl	$\frac{4}{3}$	voet
Verschil des hoochsten en̄ leeghsten waters. .	4	voet

Hier uyt worden de volghende voorstellen beschreven.

1e VOORSTEL.

Te vinden met wat gewicht waters het scheprat verladen is, ende dat op eenich seker punt. Ick neem opt swaerheytsmiddelpunt des ghepranghs van het leeghste water.

De somme des wercx is dese, men sal vinden tghewicht tegen de lepel van achter persende, opt swaerheijts middelpunt des geprangs: daer na tghewicht datter van vooren perst, op een punt soo verre vanden as, als het swaerheijts middelpunt des gheprangs van tleeghste water daer af is.

Daer na ghetrocken tcleenste ghewicht vant grootste, de rest is tbegeerde. *Tghegheuen.* Laet AB d'een sijde des lepels beteeckenen, lanck alsboven $\frac{31}{4}$, breet $\frac{29}{24}$, ende BC sij de hooghde des binnewaters van $\frac{4}{3}$ ende BD $\frac{4}{9}$ sij het derdendeel van BC ende

AB	$\frac{31}{4}$
Breet	$\frac{29}{24}$
BC	$\frac{4}{3}$
BD	$\frac{4}{9}$
AD	$\frac{263}{36}$

D sal swaerheijtsmiddelpunt sijn des geprangs, deur het 18e voorstel der beghinselen des waterwichts, ende ghetrocken die $\frac{4}{9}$ van AB $\frac{31}{4}$, blijft voor AD $\frac{263}{36}$.

Laet nu EF dander sijde des lepels beteeckenen eñ FG sij de hoogde des buytewaters van $\frac{16}{3}$, want na luijt der beschriving hier voor, tbinnewater staet tegen de lepel hooch $\frac{4}{3}$ ende het buytewater noch 4 voet hoogher, maken tsamen als vooren $\frac{16}{3}$: Ende HF $\frac{16}{9}$ sij het derdendeel van FG, ende H sal swaerheijts middelpunt sijn des geprangs.

FG	$\frac{16}{3}$
HF	$\frac{16}{9}$
EH	$\frac{215}{36}$
EI	$\frac{263}{36}$

Ende ghetrocken HF $\frac{16}{9}$ van EF $\frac{31}{4}$, blijft voor EH $\frac{215}{36}$. Laet nu ghestelt worden het punt I, alsoo dat EI even sij an AD doende $\frac{263}{36}$. *Tbegheerde.* Wij moeten vinden hoe veel gewichts de lepel vooren meer heeft dan achter, ende dat op D, ofte, welck tselve is, op 't punt I. *Twerck.* Ick vinde deur het 15e voorstel der beghinselen des waterwichts, dat teghen het lepeldeel BC, perst $\frac{29}{27}$ voet, wiens swaerheijts middelpunt des geprangs is D. Teghen het lepeldeel F G perst $\frac{3712}{216}$ voet, ende dat opt swaerheijts middelpunt H, de selve doen an I $\frac{3034}{216}$, want ick segh E I $\frac{263}{36}$ gheven $\frac{3712}{216}$, wat EH $\frac{215}{36}$? comt alsvooren $\frac{3034}{216}$ voet, die weghen (rekenende 65 £ voor de voet) 913 £, daer af ghetrocken de bovengeschreven $\frac{29}{27}$ voet, wegende 69 £, blijft voor tbegeerde 844 £, dieder perssen opt punt I inde selfde hoogde van tswaerheijts middelpunt D, des geprangs van tleegste water.

2e VOORSTEL.

Te vinden wat reden de keeren der wiecken, teghen de keeren des scheprats hebben.

Ick menichvuldighe doenders met doenders, als 44 cammen van boven, met 10 staven van beneen, comt 440, daer na lijders met lijders, als 13 staven van boven, met 52 cammen van beneen (want sulck is de meenichte der cammen en staven deur de voorgaende beschrivingh van dien) comt 676, ende de reden den uytbrenghs der lijders als 676, totten uytbrengh der doenders als 440, is de begeerde reden vande keeren der wieken tottet scheprat, dat is, de wiecken $\frac{676}{440}$ mael, ofte $1\frac{59}{110}$, tegen tscheprat eens.

3e VOORSTEL.

De ghewelt van yder voet seijls te vinden.

Tmiddel vande wieck is $20\frac{1}{4}$ voet vant middel vanden as, daerom sullen wij vinden tghewicht daer tscheprat mede verladen is, oock op $20\frac{1}{4}$ voet van tmiddel vande wateras, segghende $20\frac{1}{4}$ voet vande halve wieck, gheeft 844 £ persinghe, wat AD $\frac{263}{36}$? comt 304 £; Nu soo de wiecken even soo dickwils draeijden als tscheprat, soo soude de macht der wiecken sijn van 304 £, maer sij draeijen $\frac{676}{440}$ maer [sic] soo rasch, deur het 2e voorstel, daerom gedeelt 304 £ deur die reden der keeren als $\frac{676}{440}$, comt voor de macht der wiecken evestaltwichtich teghen de last des scheprats 197 £. Nu moet ick hebben de vlacke grootheijt der vier wiecken, daerom menichvuldighe ick haer langde deur breede, dats $40\frac{1}{2}$ voet deur $8\frac{1}{4}$ (soo langch ende breet sijnse deur de voorgaende beschrijvinghe) — maect $\frac{2673}{8}$ voet, voor een wieck, de selve vier mael, comt voor de vier wiecken $1336\frac{1}{2}$ voet, der selver ghewelt is van 197 £. daerom gerekent 16 oncen opt pont, soo comt yder voet seyls te doen de gewelt van $2\frac{480}{1336}$ oncen.

4e VOORSTEL.

Te vinden hoe stijf de stauen teghen de cammen perssen.

Aengesien dat opt swaerheyts middelpunt des leeghsten waters, dats op $\frac{263}{36}$ voeten van tmiddel vanden as, perst 844 £ deur het je voorstel ende dat het middel vande cammen na de voorgaeñ beschrijvinghe $\frac{31}{6}$ voet van tmiddel van den as is, soo segh ick, $\frac{31}{6}$ gheeft 844 £, wat $\frac{263}{36}$ voet van AD? comt 1193 £, ende soo stijf perssen de staven teghen de cammen des ondersten camrats opt middel der cammen berekent.

Om voort te vinden hoe stijf de bovenste staven tegen de cammen perssen, jck segh: ghelijck de middellijn des schijfloops beneden, tot de middellijn des schijfloops boven, alsoo de perssinge boven, tot de persinge beneden.

5e VOORSTEL.

Te vinden hoe veel waters datter met elcken keer der wiecken deurgaet, als tbinnenwater op sijn somerpeyl is.

Want des scheprats half middellijn doet $\frac{31}{4}$, ende de breede der lepels $\frac{29}{24}$, soo is tgeheel lichaem (te weten den ronden pilaer beschreven deur een keer der lepels) groot 228 voet. Hier af moet ghetrocken sijn het middeldeel des scheprats datter buyten het binnewater gaet, tselve deel is een ronde pilaer diens gront halfmiddellijn AC doet $\frac{77}{12}$, tselve lichaem is groot 156 voeten, die getrocken vande voorsz. 228 voet blijft 72 voet. Dit gaet eens om in $\frac{676}{440}$ keeren der wiecken; daerom ghedeelt 72 deur $\frac{67}{440}$, comt met elcken keer der wiecken 46 voeten waters.

[2] OVERSLACH der

Noort Nootdorpsche molen.

Langde der wiecke	$40\frac{1}{2}$	voet
Breede	$8\frac{1}{4}$	voet
Camrat boven	48	cammen
Schijfloop boven.	13	staven
Schijfloop beneen	9	staven
Camrat beneen . . . , ...	53	cammen
Camrats halfmiddellijn tot opt middel der cammen.		
Scheprats half middellijn	$7\frac{11}{12}$	voet
Breede der lepels	$1\frac{1}{6}$	voet
Commen onder tpeijl	$\frac{4}{8}$	voet
Verschil des hoochsten ende leeghsten waters.	4	voet

Hier uyt volght het nabeschreuen.

[NB. is niet ingevuld, denkelijk omdat een getal niet is opgegeven].

[3] OVERSLACH der

Westescamp molen.

Langde der wiecken	33	voet
Breede	$8\frac{10}{12}$	voet
Camrat boven	52	cammen
Schijfloop boven.		
Schijfloop beneen		
Camrat beneen. . . . . , ...		
Camrats halfmiddellijn tot opt middel der cammen.		
Scheprats halfmiddellijn	$6\frac{1}{6}$	voet
Breede der lepels		
Commen onder tpeijl..	$1\frac{7}{12}$	voet
Verschil des hoochsten eñ leeghsten waters. .	$3\frac{10}{12}$	voet

Hier uyt volght het nabeschreuen.

[NB. niet ingevuld, denkelijk omdat er opgaven ontbreken].

[4] OVERSLACH der

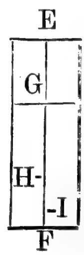
Pynackersche molen aen de brugghe.

Langde der wiecke	41	voet
Breede	$7\frac{1}{2}$	voet
Camrat boven	50	cammen
Schijfloop boven	13	staven
Schijfloop beneen	10	staven
Camrat beneen	53	cammen
Camrats half middellijn tot op tmiddel der cammen.		
Scheprats half middellijn	8	voet
Breede der lepels	$\frac{11}{8}$	voet
Commen onder tpeijl	$\frac{7}{6}$	voet
Verschil des hoochsten eñ leeghsten waters . .	5	voet

Hier uyt volght het nabeschreuen.

Teghen BC perst $\frac{539}{576}$ voet ende dat op D Teghen FG perst $\frac{15059}{576}$ voet ende dat op H, die doen an I $\frac{29003634}{1420416}$ want ick segh EI $\frac{137}{18}$ gheven $\frac{15059}{576}$ wat EH $\frac{107}{18}$? comt als vooren $\frac{19003634}{1420416}$ voet die weghen 1327 £ daer af getrocken de $\frac{539}{576}$ voet, weghende 60 £ blijft 1267 £ daer tscheprat mede verladen opt swaerheyts middelpunt des leeghsten waters als D.

AB 8
Breet $\frac{11}{8}$
BC $\frac{7}{6}$
BD $\frac{17}{8}$
AD $\frac{137}{18}$



FG $\frac{37}{6}$
HF $\frac{39}{17}$
EH $\frac{107}{18}$
EI $\frac{137}{18}$

De ghewelt van yder voet seyls te vinden.

$20\frac{1}{2}$ voet halve wieck gheeft 1267 £ persinge wat AD $\frac{137}{18}$? comt 470 £ die gedeelt deur reden der keeren $\frac{689}{600}$ comt 341 £ die ghedeelt deur 1230 voet der vier seylen comt yder voet seyls te doen de ghewelt van $4\frac{536}{1230}$ oncen.

[5] Overslach der

Nieu achtcante molen byden Hage.

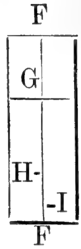
Langde der wiecke	$38\frac{1}{3}$	voeten
Breede.	$8\frac{1}{4}$	voet
Camrat boven	51	cammen
Schijfloop boven.	12	staven
Schijfloop beneen	10	staven
Camrat beneen	53	cammen
Camrats halfmiddellijn tot opt middel der cammen.		
Scheprats half middellijn.	$6\frac{1}{3}$	voet
Breede der lepels	$\frac{17}{12}$	voet
Commen onder tpeijl	$\frac{7}{4}$	voet
Verschil des hoochsten en leeghsten waters . .	3	voet

Hier uyt volght het nabeschreuen.

Teghen BC perst $\frac{833}{384}$ voet ende dat op D Teghen FG perst $\frac{6137}{384}$ voet ende dat op H die doen an I $\frac{466412}{35328}$ want ick segh EI $\frac{23}{4}$ gheven $\frac{6137}{384}$ voet, wat EH $\frac{19}{4}$? comt alsvooren $\frac{466412}{35328}$ voet die weghen 858 £ daer af

AB $\frac{19}{3}$
Breet $\frac{17}{12}$
BC $\frac{7}{4}$
BD $\frac{7}{12}$
AD $\frac{23}{4}$

getrocken de $\frac{833}{384}$ voet weghende 141 £ blijft 717 £ daer tscheprat mede verladen is opt swaerheyts middelpunt des leeghsten waters als D.



FG $\frac{19}{4}$
HF $\frac{19}{12}$
EH $\frac{19}{4}$
EI $\frac{23}{4}$

De ghewelt van yder voet seyls te vinden.

19 $\frac{1}{6}$ voet halve wieck gheeft 717 £ persinge wat AD $\frac{23}{4}$? comt 215 £, die ghedeelt deur reden der keeren $\frac{636}{510}$ comt 172 £ die gedeelt deur 1265 der vier seylen comt yder voet seyls te doen de geweld van $2\frac{222}{1265}$ oncen.

[6] Overslach der

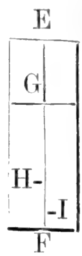
Craylinger achtcante molen.

Langde der wiecke	$35\frac{1}{2}$	voet
Breede	$7\frac{1}{2}$	voet
Camrat boven.	53	cammen
Schijfloop boven	12	staven
Schijfloop beneen	9	staven
Camrat beneen	52	cammen
Camrats half middellijn totopt middel der cammen.	4	voet
Scheprats half middellijn	$7\frac{5}{6}$	voet
Breede der lepels	1	voet
Commen onder tpeijl	$1\frac{1}{3}$	voet
Verschil des hoochsten eñ leeghsten waters. .	4	voet

Hieruyt volght het nabeschreuen.

Teghen BC perst $\frac{8}{9}$ voet ende dat op D. Teghen FG perst $\frac{128}{9}$ voet ende dat op H die doen an I $\frac{251136}{21456}$ [lees: 21546] want ick segh EI $\frac{133}{18}$ gheven $\frac{128}{9}$ wat EH $\frac{109}{18}$ comt alsvooren $\frac{251136}{21546}$ voet die weghen 757 £ daer af getrocken de $\frac{8}{9}$ £ [lees: voet] weghende 57 £ blijft 700 £ daer tscheprat mede verladen is opt swaerheijts middelpunt des leeghsten waters als D.

AB $\frac{47}{6}$
Breet 1
BC $\frac{4}{3}$
BD $\frac{4}{9}$
AB[lees: AD] $\frac{133}{18}$



FG $\frac{16}{3}$
HF $\frac{16}{9}$
EH $\frac{109}{18}$
EI $\frac{133}{18}$

De ghewelt van yder voet seijls te vinden.

$17\frac{3}{4}$ voet, halve wieck, geeft 700 £ persinge wat AD $\frac{133}{18}$? comt 291 £ die ghedeelt deur reden der keeren $\frac{208}{159}$ comt 222 £ die ghedeelt deur 1065 voeten der vier seijlen, comt yder voet seijls te doen de ghewelt van $3\frac{357}{1065}$ oncen.

[7] Overslach der

Craylingher Wipmolen.

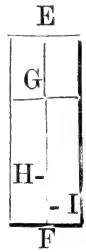
Langde der wiecke	34 voet
Breede.	$7\frac{1}{2}$ voet
Camrat boven	47 cammen
Schijfloop boven	12 staven
Schijfloop beneen.	
[Camrat beneen]	56 cammen

Camrats half middellijn tot opt middel der cammen. $5\frac{1}{4}$ voet
Scheprats half middellijn . . . . $7\frac{1}{2}$ voet
Breede der lepels . . . . $1\frac{1}{6}$ voet
Commen onder tpeijl . . . . 1 voet
Verschil des hooghsten ende leeghsten waters . . . 4 voet

Hier uyt volght het nabeschreuen.

Teghen BC perst $\frac{7}{12}$ voet ende dat op D. Tegen FG perst $\frac{175}{12}$ voet ende dat op H, die doen an I $\frac{36750}{3096}$ want ick segh EI $\frac{43}{6}$ gheven $\frac{175}{12}$ wat EH $\frac{35}{6}$? comt alsvooren $\frac{36750}{3096}$ voet die weghen 771 £ daer af getrocken de $\frac{7}{12}$ voet weghende 38 £, blijft 733 £ daer tscheprat mede verladen is opt swaerheijts middelpunt des leeghsten waters als D.

AB	$7\frac{1}{2}$
Breet	$\frac{7}{6}$
BC	1
BD	$\frac{1}{3}$
AD	$\frac{43}{6}$



FG	5
HF	$\frac{5}{3}$
EH	$\frac{6}{35}$
EI	$\frac{43}{6}$

De ghewelt van yder voet seyls te vinden.

17 voet halve wieck gheeft 733 £ persinge wat AD $\frac{43}{6}$? comt 309 £ die ghedeelt deur $\frac{672}{423}$ reden der keeren comt 194 £, die ghedeelt deur 1020 voet der vier seijlen comt yder voet seijls te doen de ghewelt van $3\frac{44}{1020}$ oncen.

[8] OVERSLACH der

Leeghste staende Brouckscher molen by Ysselsteyn.

Langde der wiecke . . . . 37 voet
Breede . . . . $7\frac{1}{4}$ voet
Camrat boven . . . . 44 cammen

Schijfloop boven	13 staven
Schijfloop beneen.	10 staven
Camrat beneen	48 cammen
Camrats half middellijn tot opt middel der cammen.	$4\frac{2}{3}$ voet
Scheprats half middellijn.	$7\frac{1}{8}$ voet
Breede der lepels.	$1\frac{1}{3}$ voet
Commen onder tpeijl.	$2\frac{5}{12}$ voet
Verschil des hooghsten ende leeghsten waters .	$1\frac{10}{12}$ voet

Hier uyt volght het nabeschreuen.

Teghen BC perst $\frac{1682}{432}$ voet ende dat op D Teghen FG perst $\frac{289}{24}$ voet ende dat op H die doen an I $\frac{738684}{67680}$ want ick segh EI $\frac{235}{36}$ gheven $\frac{289}{24}$ wat EH $\frac{71}{12}$? comt alsvooren $\frac{738684}{67680}$ voet die weghen 709 £ daer af getrocken de $\frac{1682}{432}$ voet weghende 253 £ blijft 456 £ daer tscheprat mede verladen is opt swaerheijts middelpunt des leeghsten waters als D.

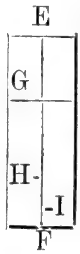
AB $\frac{22}{3}$

Breet $\frac{4}{3}$

BC $\frac{29}{12}$

BD $\frac{29}{36}$

AD $\frac{235}{36}$



FG $\frac{17}{4}$

HF $\frac{17}{12}$

EH $\frac{71}{12}$

EI $\frac{235}{36}$

De ghewelt van yder voet seyls te vinden.

$18\frac{1}{2}$ voet halve wieck gheeft persinghe 456 £ wat AD $\frac{235}{36}$? comt 160 £ die ghedeelt deur reden der keeren $\frac{624}{440}$ comt 112 £, die ghedeelt deur 1073 voet der vier seijlen comt yder voet seijls te doen de ghewelt van $1\frac{719}{1073}$ oncen.

[9] Overslach der

Hoochst staende Brouckscher molen by Ysselsteijn.

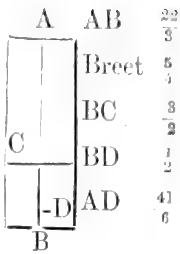
Langde der wiecke	36 voet
Breede	$7\frac{1}{4}$ voet
Camrat boven	45 cammen
Schijfloop boven	12 staven
Schijfloop beneen	9 staven
Camrat beneen	5[0] cammen
Camrats half middellijn tot opt middel der cammen.	$4\frac{7}{12}$ voet
Scheprats half middellijn.	$6\frac{11}{12}$ voet
Breede der lepels.	$1\frac{1}{2}$ voet
Commen onder tpeijl	$1\frac{3}{4}$ voet
Verschil des hoochsten ende leeghsten waters .	$2\frac{2}{3}$ voet

[10] Overslach der

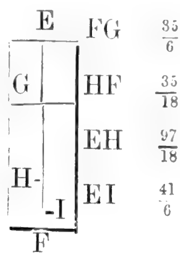
Ghinste molen in Sarlois.

Langde der wiecke	$33\frac{1}{2}$ voet
Breede.	$7\frac{1}{2}$ voet
Camrat boven.	51 cammen
Schijfloop boven	14 staven
Schijfloop beneen	10 staven
Camrat beneen	63 cammen
Scheprats half middellijn.	$7\frac{1}{3}$ voet
Breede der lepels.	$1\frac{1}{4}$ voet
Commen onder tpeijl	$1\frac{1}{2}$ voet
Verschil des hoochsten ende leeghsten waters .	$4\frac{1}{3}$ voet

Hier uyt volght het nabeschreuen.



Teghen BC perst $\frac{45}{32}$ voet ende dat op D. Teghen FG perst $\frac{6125}{288}$ voet ende dat op H die doen an I $\frac{3564750}{212544}$ want ick segh EI $\frac{41}{6}$ gheven $\frac{6125}{288}$ wat EH $\frac{97}{18}$? comt alsvooren $\frac{3564750}{212544}$ voet die weghen 1090 £ daer af getrocken de $\frac{45}{32}$ voet weghende 91 £ blijft 999 £ daer tscheprat mede verladen is opt swaerheijts middelpunt des leechsten waters als D.



De ghewelt van yder voet seyls te vinden.

16$\frac{3}{4}$ voet halve wieck gheeft 999 £ persinge wat AD $\frac{41}{6}$? comt 407 £ die ghedeelt deur reden der keeren $\frac{882}{510}$ comt 235 £ die ghedeelt deur 1005 voet der vier wiecken comt yder voet seijls te doen de ghewelt van 3$\frac{745}{1005}$ oncen.

[11] Overslach der *Streefkercksche middel molen.*

Langde der wiecke	38 voet
Breede	7$\frac{1}{2}$ voet
Camrat boven	
Schijfloop boven.	
Schijfloop beneen	
Camrat beneen	
Scheprats half middellijn	7$\frac{1}{2}$ voet
Breede der lepels	
Commen onder tpeijl	2$\frac{3}{4}$ voet
Verschil des hoochstens ende leeghsten waters . .	2$\frac{1}{2}$ voet

[12] OVERSLACH der

Beyersche molen te Stolck.

Langde der wiecke	
Breede	
Camrat boven	47 cammen
Schijfloop boven	13 staven
Schijfloop beneen	9 staven
Camrat beneen	47 cammen
Scheprats half middellijn	$6\frac{1}{2}$ voet
Breede der lepels	$1\frac{1}{3}$ voet
Commen onder tpeijl	$\frac{11}{6}$ voet
Verschil des hoochsten eñ leeghsten waters	3 voet

[13] OVERSLACH der

Molen opt hof van Delf.

Langde der wiecke	35 voet
Breede	8 voet
Camrat boven	48 cammen
Schijfloop boven	13 staven
Schijfloop beneen	9 staven
Camrat beneen	56 cammen
Scheprats half middellijn	7 voet
Breede der lepels	$1\frac{1}{6}$ voet
Commen onder tpeijl	$\frac{13}{12}$ voet
Verschil des hooghsten eñ leeghsten waters	$4\frac{1}{2}$ voet

[14] OVERSLACH der

Molen tot Escamp na de nieu manier.

Langde der wiecke	$33\frac{1}{2}$ voet
Breede	10 voet
Scheprats half middellijn	8 voet

Breede der lepels . . . . $3\frac{1}{2}$ voet

Commen onder tpeijl . . . . $2\frac{2}{3}$ voet

Verschil des hoochsten ende leeghsten waters . . . $3\frac{7}{6}$ voet

Hier uyt volght het nabeschreuen.

Teghen BC perst $\frac{112}{9}$ voet ende dat op D. Teghen FG perst $\frac{1183}{16}$ [voet] ende dat op H die doen [an] I $\frac{372645}{6144}$ want ick segh EI $\frac{64}{9}$ gheven $\frac{1183}{16}$ wat EH $\frac{35}{6}$? comt alsvooren $\frac{372645}{6144}$ voet die weghen 3942 [£] daer af getrocken de $\frac{112}{9}$ voet weghende 809 £ blijft 3133 £ daer tscheprat mede verladen is opt swaerheijts middelpunt des leeghsten waters als D.

AB	8
Breet	$\frac{7}{2}$
BC	$\frac{8}{3}$
BD	$\frac{8}{9}$
AD	$\frac{64}{9}$
FG	$\frac{13}{2}$
HF	$\frac{13}{6}$
EH	$\frac{35}{6}$
EI	$\frac{64}{9}$

Te veroirdenen reden der keeren deser wiecken tot het scheprat alsoo dat yder voet seyls doe de ghewelt van 3 oncen.

Ick vinde eerst de platte grootheijt der vier wiecken meenichvuldighende de langde $33\frac{1}{2}$ deur de breede 10 maect voor den wieck 335 die viermael comt voor de vier wiecken 1340 voeten, de selve menichvuldighe ick met de 3 oncen, comt voor de ghewelt der vier wiecken 251 £ ende dit opt middelpunt der wiecke dats op $16\frac{3}{4}$ voet van tmiddel vanden as Nu soo tpunt D des gheprangs der 3133 £ oock waer $16\frac{3}{4}$ voet van tmiddel vande wateras soo soudemen segghen de reden der keeren te moeten wesen van 3133 £ tot 251, maer dat gheprang op D alleenlick wesende $\frac{64}{9}$ voet van tmiddel vanden as, soo moeten wij dat vinden op $16\frac{3}{4}$ voet seggende $16\frac{3}{4}$ gheven 3133 wat $\frac{64}{9}$? comt 1330. Ic segh dan dat de reden der keeren moet sijn van 1330 tot 251, daerom ghedeelt 1330 deur 251 comt $5\frac{75}{251}$ ende soo menichmael sullen de wiecken moeten ommegaen teghen tscheprat eens.

Te veroirdenen de menichte van cammen en staven om te cryghen ten naesten by de boueschreuen reden der keeren van 1330 *tot* 251.

Ghenomen dat ick aensiende de grootheijt des camrats ende de behoirlicke dickte der cammen ende der staven die daer tussen commen moeten, soo veroirden ick het camrat beneen met 47 cammen, het schijfloop daertoe met 12 staven ende het schijfloop aende wieckas met 16 staven. Vrage hoe veel cammen het croonradt sal moeten hebben om de begheerde reden der keeren te crijghen. Ick stelle de voornomde [sic] 16. 12 en 47 in oirden ende 0 ter plaets daer tgetal der begheerde cammen moet staen als hier onder segghende 16 mael 12 is 192, die stel ick daer neven aldus:

16. 12. 192
0. 47.

Nu ist kennelick dat ter plaets van 0 een getal moet staen soodanich dattet selve ghemenichvuldicht met 47 gheve den uytbrengh die sulcken reden hebben tot 192 als 1330 tot 251. Om tselve te vinden ick segghe 251 gheeft 1330 wat 192? comt 1017 die stel ick onder de 192. Nu aenghesien tgetal ter plaets van 0 ghemenichvuldight met 47 moet maken 1017, soo deel ick 1017 deur de 47 comt ten naesten bij 21 ende soo veel cammen sal het croonrat hebben. Ende de ghestalt der werckinghe sal sijn als hier onder

16. 12. 192
21. 47. 1017.

Doch alsoo 21 mael 47 maer uytenbrenghen 987, soo en salder eijghentlicke reden der keeren int ghemaeckte werck maer sijn van 987 tot 192 als hieronder

16. 12. 192
21. 47. 987.

Ick segghe dan dattet schijfloop aende wieckas
sal hebben . . . . 16 staven
het croonrat . . . . 21 cammen
het schijfloop beneen . . . . 12 staven
het camrat beneen. . . . . 47 cammen
Ende tselve camrat ghemaect wesende soo is
sijn half middellijn tot opt middel der cammen. $5\frac{1}{2}$ voet.

Proef.

Somen nu den proef wil doen ende sien of yder voet wiecks hier mede de begheerde ghewelt uytbrenght ten naesten bij van 3 oncen men doe na de leeringhe des 3en Voorstels int je overslach aldus.

$16\frac{3}{4}$ voet halve wieck gheeft 3133 £ persinge, wat AD $\frac{64}{9}$? comt 1330 £ die ghedeelt deur reden der keeren $\frac{987}{192}$ comt 258 £ die ghedeelt deur 1340 voet der vier wiecken comt yder voet wieck te doen de ghewelt van $3\frac{108}{1340}$ oncen.

Het is wel waer datter maer begheert en was 3 oncen doch dit verschil is soo cleen dat bij aldienmen int croonrat maeckt een cam meer en stelde als 22 cammen, soo soudet dan min vallen als 3 oncen, te weten $2\frac{1256}{1340}$ oncen.

[15] Overslach der

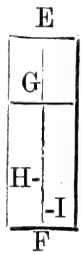
Stolwyckische molen na de nieu manier.

Langde der wiecke	40	voet
Breede	$9\frac{1}{2}$	voet
Scheprats half middellijn	$10\frac{1}{6}$	voet
Breede der lepels	$3\frac{1}{2}$	voet
Commen onder tpeijl	$4\frac{1}{6}$	voet
Verschil des hoochsten eñ leeghsten waters	4	voet

Hier uyt volght het nabeschreuen.

Teghen BC perst $\frac{4375}{144}$ voet ende dat op D. Teghen FG perst $\frac{16807}{144}$ voet ende dat op H die doen aen I $\frac{10134621}{102384}$ want ick segh EI $\frac{79}{9}$ gheven $\frac{16807}{144}$ wat EH $\frac{67}{9}$? comt alsvooren $\frac{10134621}{102384}$ voet die weghen 6434 £ daer af getrocken de $\frac{4375}{144}$ voet weghende 1974 £ blijft 4460 £ daer tscheprat mede verladen is opt swaerheijts middelpunt des leeghsten waters als D.

AB $\frac{61}{6}$
Breet $\frac{7}{2}$
BC $\frac{25}{16}$ [lees $\frac{25}{6}$]
BD $\frac{25}{18}$
AD $\frac{78}{9}$ [lees $\frac{79}{9}$]



FG $\frac{49}{6}$
HF $\frac{49}{18}$
EH $\frac{67}{9}$
EI $\frac{79}{9}$

Te veroirdenen reden der keeren deser wiecken tottet scheprat alsoo dat yder voet seyls doe de ghewelt van $3\frac{1}{4}$ oncen.

1520 voet der vier seijlen gemenichvuldicht met $3\frac{1}{4}$ oncen comt 308 £. Voort 20 voet halve wieck gheeft 4460 £ des gheprangs wat AD $\frac{79}{8}$ [lees $\frac{79}{9}$]? comt 1957 daerom segh ick dat de reden der keeren sal sijn van 1957 tot 308.

Te veroirdenen de menichte van cammen en stauen om te cryghen ten naesten by de boueschreuen reden der keeren van 1957 *tot* 308.

Ghenomen voor tschijfloop aende wieckas, 12 staven voor tschijfloop beneen 8 staven, voor tcamrat beneen 43 cammen.

Vraghe hoe veel cammen het croonrat sal moeten hebben om de begeerde reden der keeren te crijghen?

Ick segh 12 mael 8 is 96. Voort 308 minste pael gheeft 1957 meeste pael wat 96? comt 609 die ghedeelt deur de 43 cammen comt voort croonrat 14 cammen.

Dese 12 staven boven 14 cammen int croonradt, 8 staven beneen ende 43 cammen int camrat brenghen uyt reden der keeren van 301 tot 48.

Prouf.

Om nu te sien of yder voet seijls hiermede de begheerde ghewelt uyt brenght ten naesten bij van $3\frac{1}{4}$ oncen, ick segh 20 voet halve wieck gheeft 4460 £ persinge wat AD $\frac{79}{9}$? comt 1957 £ die ghedeelt deur reden der keeren $\frac{301}{48}$ comt 312 £ die ghedeelt deur de 1520 voeten der vier seijlen comt yder voet seijls te doen de ghewelt van $3\frac{432}{1520}$ oncen.

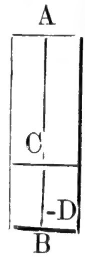
[16] Overslach der

Brouckscke molen by Yselsteyn na de nieu manier.

Langde der wiecke	39	voet
Breede . . . . . . , ...	10	voet
Scheprats half middellijn	$10\frac{11}{24}$	voet
Breede der lepels	$3\frac{3}{4}$	voet
Commen onder tpeijl	3	voet
Verschil des hoochsten ende leeghsten waters. . .	$4\frac{1}{2}$	voet

Hier uyt volght het nabeschreuen.

Teghen BC perst $\frac{135}{8}$ voet ende dat op D Teghen FG perst $\frac{3375}{32}$ voet ende dat op H die doen aen I $\frac{15471000}{174336}$ want ick segh EI $\frac{227}{24}$ gheven $\frac{3375}{32}$ wat EH $\frac{191}{24}$? comt alsvooren $\frac{15471000}{174336}$ voet die weghen 5768 £ daer af getrocken de $\frac{135}{8}$ voet weghende 1096 £ blijft 4672 £ daer tscheprat mede verladen is opt swaerheijts middelpunt des leegchsten waters als D.



AB	$\frac{251}{24}$
Breet	$\frac{15}{4}$
BC	3
BD	1
AD	$\frac{227}{24}$

FG	$\frac{15}{2}$
HF	$\frac{5}{2}$
EH	$\frac{191}{24}$
EI	$\frac{227}{24}$

Te veroirdenen reden der keeren deser wiecken tottet scheprat alsoo dat yder voet seyls doe de ghewelt van 3¾ *oncen.*

1560 voet der vier seijlen gemenichvuldicht met 3¾ oncen comt 365 £ voort 19½ voet halve wieck gheeft 4672 £ des gheprangs wat AD $\frac{227}{24}$? comt 2266, daerom segh ick dat de reden der keeren sal sijn van 2266 tot 365.

Te veroirdenen de menichte van cammen en stauen om te crijghen ten naesten bij de boueschreuen reden van 2266 *tot* 365.

Ghenomen aende wieckas 16 staven, voor tschijfloop beneen 8 staven, voor tcamrat beneen 45 cammen. Vraghe hoe veel cammen het croonrat zal moeten hebben om de begheerde reden der keeren te krijghen?

Ick segh 16 mael 8 is 128. Voort 365 minste pael gheeft 2266 meeste pael wat 128? comt 794 die ghedeelt deur de 45 cammen comt voor teroonrat 17 $\frac{29}{45}$ daer ick voor neem 18 cammen.

Dese 16 staven boven, 18 cammen int croonrat, 8 staven beneen ende 45 cammen int camrat brengen uyt reden der keeren van 810 tot 128.

Prouf.

Om nu te sien of yder voet seijls hier mede de begheerde ghewelt uytbrenght ten naesten bij van $3\frac{3}{4}$ oncen ick segh $19\frac{1}{2}$ voet halve wieck gheeft 4672 £ persinge, wat AD $\frac{227}{24}$? comt 2266 £ die ghedeelt deur reden der keeren $\frac{810}{128}$ comt 362 £ die ghedeelt deur de 1560 voeten der vier seijlen comt yder voet seijls te doen de ghewelt van $3\frac{1112}{1560}$ oncen.

[17] Overslach der

Craeylingher molen na de nieu manier.

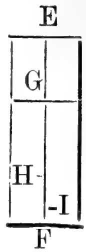
Langde der wiecke	39	voet
Breede	10	voet
Scheprats half middellijn	$10\frac{11}{24}$	voet
Breede der lepels	$3\frac{3}{4}$	voet
Commen onder tpeijl	$3\frac{1}{2}$	voet
Verschil des hoochsten eñ leeghsten waters . . .	4	voet

Hier uyt volght het nabeschreuen.

Teghen BC perst $\frac{735}{32}$ voet ende dat op D Teghen FG perst $\frac{3375}{32}$ voet ende dat op H die doen aen I $\frac{15471000}{171264}$ want ick segh EI $\frac{223}{24}$ gheven $\frac{3375}{32}$ wat EH $\frac{191}{24}$? commt alsvooren $\frac{15471000}{171264}$ voet die weghen 5871 £ daer af ge-

AB $\frac{251}{24}$
Breet $\frac{15}{4}$
BC $\frac{7}{2}$
BD $\frac{7}{6}$
AD $\frac{228}{24}$

trocken de $\frac{735}{32}$ voet weghende 1492 £ blijft 4379 £ daer het scheprat mede verladen is opt swaerheijts middelpunt des leeghsten waters als D.



FG	$\frac{15}{2}$
HF	$\frac{5}{2}$
EH	$\frac{191}{24}$
EI	$\frac{223}{24}$

Te veroirdenen reden der keeren deser wiecken tottet scheprat alsoo dat yder voet seyls doe de ghewelt van

[niet verder ingevuld].

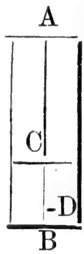
[18] Overslach der

Robbenoirtsche molen na de nieu manier.

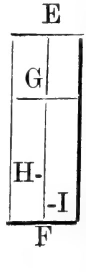
Langde der wiecke.	19	voet
Breede	$10\frac{1}{2}$	voet
Scheprats half middellijn	$6\frac{1}{2}$	voet
Breede der lepels	$2\frac{3}{4}$	voet
Commen onder tpeijl.	$2\frac{1}{2}$	voet
Verschil des hoochsten ende leeghsten waters . .	$2\frac{1}{2}$	voet

Hier uyt volght het nabeschreuen.

Teghen BC perst $\frac{275}{32}$ voet ende dat op D Teghen FG perst $\frac{275}{8}$ ende dat op H die doen aen I $\frac{23925}{816}$ want ick segh EI $\frac{17}{3}$ gheven $\frac{275}{8}$ wat EH $\frac{29}{6}$? comt alsvooren $\frac{23925}{816}$ voet die weghen 1905 £ daer af getrocken de $\frac{275}{32}$ voet weghende 558 £ blijft 1347 £ daer tscheprat mede verladen is opt swaerheijts middelpunt des leeghsten waters, als D.



AB	$\frac{13}{2}$
Breet	$\frac{11}{4}$
BC	$\frac{5}{2}$
BD	$\frac{5}{6}$
AD	$\frac{17}{3}$



FG	5
HF	$\frac{5}{8}$
EH	$\frac{29}{6}$
EI	$\frac{17}{3}$

Te veroirdenen reden der keeren deser wiecken tottet schepraat alsoo dat yder voet seyls doe de ghewelt van $2\frac{3}{4}$ oncen.

798 voet der vier seijlen ghemenichvuldicht met $2\frac{3}{4}$ oncen comt 137 [£]. Voort $9\frac{1}{2}$ voet der halve wieck gheeft 1347 £ des geprangls wat AD $\frac{17}{3}$? comt 803 [£], daerom segh ick dat de reden der keeren sal sijn van 803 tot 137.

Te veroirdenen de menichte van cammen en stauen om te cryghen ten naesten by de boueschreuen reden van 803 *tot* 137.

Zij ghenomen voor tschijfloop aende wieckas 12 staven, voor tschijfloop beneen 8 staven, voor tcamrat 35 cammen. Vraghe hoe veel cammen het croonradt sal moeten hebben om de begheerde reden der keeren te crijghen?

Ick segh 12 mael 8 is 96, voort 137 minste pael gheeft 803 meeste pael wat 96? comt 562 die ghedeelt deur 35 cammen, comt voor tcroonradt 16 cammen

Dese 12 staven boven, 16 cammen int croonradt 8 staven beneen eñ 35 cammen int camrat brenghen uyt reden der keeren van 560 tot 96.

Prouf.

Om nu te sien of yder voet seijls hiermede de begeerde gewelt uytbrengt ten naesten bij van $2\frac{3}{4}$ oncen. Ick segh $9\frac{1}{2}$ voet der halve wieck gheeft 1347 £ persinge wat AD $\frac{17}{3}$? comt 803 £ die ghedeelt deur reden der keeren $\frac{560}{96}$ comt 137 £ die ghedeelt deur de 798 voet der vier seylen comt yder voet seyls te doen de ghewelt van $2\frac{596}{798}$ oncen.

[19] Overslach der

Molen tsoeterwoude na de nieu manier.

Langde der wieck . . . . 16 voet

Breede	$5\frac{1}{2}$	voet
Scheprats half middellijn	$5\frac{3}{8}$	voet
Breede der lepels	$2\frac{5}{6}$	voet
Commen onder tpeyl	3	voet
Verschil des hoochsten en̄ leeghsten waters	2	voet

Hier uyt volght het nabeschreuen.

Teghen BC perst $\frac{153}{12}$ voet ende dat op D Teghen FG perst $\frac{425}{12}$ voet ende dat op H, die doen aen I $\frac{30260}{1008}$ want ick segh EJ $\frac{35}{8}$ gheven $\frac{425}{12}$ wat EH $\frac{89}{24}$? comt alsvooren $\frac{30260}{1008}$ voet die weghen 1951 £ daer af getrocken de $\frac{153}{12}$ voet weghende 828 £ blijft 1123 £ daer tscheprat mede verladen is opt swaerheyts middelpunt des leechsten waters als D.

AB	$\frac{43}{8}$
Breet	$\frac{17}{6}$
BC	3
BD	1
AD	$\frac{35}{8}$

FG	5
HF	$\frac{5}{3}$
EH	$\frac{89}{24}$
EI	$\frac{35}{8}$

Te veroirdenen reden der keeren deser wiecken tottet scheprat alsoo dat yder voet seyls doe de ghewelt van $2\frac{2}{3}$ *oncen.*

325 voet der vier seylen ghemenichvuldight met $2\frac{2}{3}$ oncen comt 58 £, voort 8 voet der halve wieck gheeft 1123 £ des gheprangs wat AD $\frac{35}{8}$? comt 614 daerom segh ick dat de reden der keeren sijn sal van 614 tot 58.

Te veroirdenen de menichte van cammen en staven om te cryghen ten naesten by de boueschreuen reden der keeren van 614 *tot* 58.

Ghenomen voor tcamrat aende wieckas 25 cammen het schijfloop onder aende groote spille 6 staven het sterrerat daer in draeyende 20 cammen, het schijfloop beneden 8 staven, het camrat beneden 40 cammen. Vraghe hoe veel staven het schijfloop boven aende spille sal moeten hebben om de begheerde reden der keeren te cryghen.

Ick segh 25 mael 6 is 150 de selve deur 8 maeckt 1200. Voort 58 minste pael gheeft 614 meeste pael wat 1200? comt 12703, die gedeelt deur 20 mael 40 dats deur 800 comt voor tschijfloop boven 15 $\frac{703}{800}$, daer voor ghenomen syn 16 staven.

Dese 25 cammen aende wieckas 16 staven int schijfloop boven, 6 staven onder int schijfloop aende groote spille, 20 cammen inde sterre acht staven int schijfloop beneen, 40 cammen int camrat beneen brenghen uyt reden der keeren van 32 tot 3.

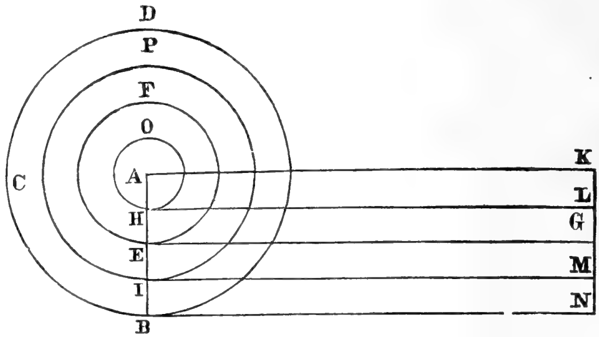
Prouf.

Om nu te sien of yder voet seyls hiermede de begeerde gewelt uytbrenght ten naesten by van $2\frac{2}{3}$ oncen ick segh 8 voet der halve wieck gheeft 1123 £ persinge wat AD $\frac{35}{8}$? comt 614 £, die ghedeelt deur reden der keeren $\frac{32}{3}$ comt 57 £, die ghedeelt deur 352 voeten der vier seylen comt yder voet seyls te doen de ghewelt van $2\frac{208}{352}$ oncen.

Vertooch.

Wesende de halfmiddellijn eens ronts vast opt middelpunt, de reste draeijende int ront. Die cromme voortganck der halfmiddellijn is euen an een rechte voortganck soo lanck wesende als des halfmiddellijns middelpunts cromme voortganck.

Tghegheuen. Laet AB wesen de half middellijn des ronts BCD vast op des ronts middelpunt A ende draeijende van B na C van daer na D ende soo voorts tot datse weder comt ter plaets daerse eerst begost ende den omtreck beschreven van des middellijns middelpunt E sij EF, laet voor EG een rechte lijn wesen rechthouckich op AB ende even aenden omtreck EF.



Tbegheerde. Wij moeten bewijsen dat den crommen voortganck der half middellijn AB int ront BCD even is aenden rechten voortganck derselve lijn van E tot G, dat is hoe wel het uijterste punt B der lijn AB den langhsten wech gaet ende alle andere punten een corter, te weten hoe naerder A hoe corter dat nochtans dien heelen crommen voortganck der lijn AB van C tot G (corter deelen met langer altsamen even sijn aenden rechten voortganck).

Tbereytsel. Laet gheteijckent worden het punt H int middel van AE ende I int middel van EB voor de lijnen AK, HL, IM, BN alle even ende evenwijdighe met EG daer na de lijn KN. Laet voort beschreven worden opt punt A de twee ronden HO ende IP deur de punten H ende I.

Tbewijs. Anghesien de halfmiddellijn AB ghedeelt is in vier even stucken als AH, HE, EI, IB, soo heeft inden omganck des selfden half middellijns yder stick sijn plat deel beschreven, welcke vier deelen altsamen makende het ront BCD sijn even aenden rechthouck AN deur het voorstel des . . . Archimedes. Boven dien soo sijn de ronde deelen vande selfde breede der rechte deelen want AH, HE, EI, IB sijn haer beijder ghemeene breeden, daerom ist nootsakelick die vier cromme deelen altsamen vande selfde langde sijn als de vier rechte deelen des rechthoucx AN, want sonder dat sij en soudender niet even mede connen wesen twelck teghen tghestelde waer. *Besluyt* wesende dan de half middellijn eens ronts enz.

Ander telconstich bewys.

De langde der vier rechthoucken AL, HG, EM, IN altsamen ofte dattet selve is de langde der lijn AK viermael is corter dan de buytenste sijden altsamen der vier deelen daer tront BCD in gedeelt is, maer langher dan de binnenste sijden der selve vier deelen twelck aldus bewesen wort. Laet den omtreck OH doen 1 duym soo sal den omtreck EF doen 2 duym, want AE is dobbel aen AH ende om der ghelijcke reden sal den omtreck IP doen 3 duym ende den omtreck DB 4 duym, comt tsamen 10 duym. Nu alsoo de lijn AK even is aen tront EF doende 2 duym soo doet de lijn AK 2 duym de selve viermael maeckt 8 duym twelck (soo wij boven geseyt hebben) min is dan 10 duym der vier omtrecken. Ten anderen de vier binnenste syden der voornombde vier deelen daer tront BCD in gedeelt is als 3, 2, 1, 0 maken tsamen 6 duym die minder sijn dan de 8 duym der lijn AK viermael. Inder voughen dat soo wy gheseyt hebben de lijn AK viermael is corter dan de vier buytenste sijden der vier deelen daer het ront BCD in ghedeelt is maar langher dan de binnenste sijden der selver haer reden dan daer sijn in bestaen is 6. 8. 10. twelck in minder paelen comt 3. 4. 5.

Nu ghelyck wij deur deelinge der halfmiddellijn AB in vier even deelen hier gevonden hebben dese 3. 4. 5. alsoo sullen wij deur deelinghe in vyven vinden 4. 5. 6. ende deur deelinghe in sessen 5. 6. 7. ende soo oirdentlick oneyndelick voort. Inder voughen, dat soomen van vooren aen begonde men soude vinden dusdanighen voortganck.

0.	1	2.
1.	2.	3.
2.	3.	4.
3.	4.	5.
4.	5.	6.
5.	6.	7.
6.	7.	8.
7.	8.	9.
8.	9.	10.
9.	10.	11.
10.	11.	12.

Waer uyt blijckt dat de som̄e der rechte sijden altyt blijft tusschen de twee sommen der langhste en̄ cortste cromme sijden; Twelck soo verstaen sijnde laet de rechte deelen $\frac{1}{1000}$ langher of corter sijn, waert meughelick dan de cromme. Om de contrari te bewysen. Ic deele de half middellijn AB deur de ghedacht in 10000 even deelen ende om de redenen hier boven verhaelt soo sullen de voornombde drie langden (te weten de som̄e der cromme corste sijden de somme der rechte sijden ende de somme der cromme langhste sijden) bewesen in sulcken reden tot malcander als 9999, 10000, 10001, waer uyt blijckt dat de cromme langhste sijden maer $\frac{1}{10000}$ langher ende de cortste maer $\frac{1}{10000}$ corter en is dan de rechte twelck min is dan $\frac{1}{1000}$ soo wij bethoonen wilden. Het is dan kennelick dat soo die twee langden eenich verschil hadden, het soude moeten minder sijn dan meughelick is ghegheven te worden, maer sulck verschil is niet, daerom en verschillen de twee boveschreven langden niet ende vervolghens sijn even lanck.

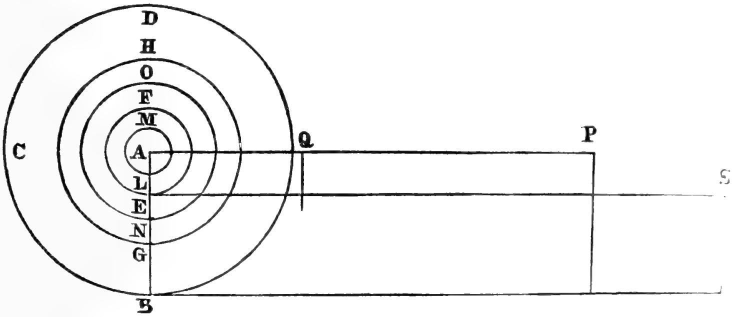
Vertoogh.

Wesende opt middelpunt eens ronts beschreuen noch een cleender omtreck. Het plat tusschen de twee omtrecken is euen aenden rechthouck begrepen onder het half middellijns deel staende tusschen die twee omtrecken ende een rechte lijn euen aenden omtreck beschreuen door tmiddelpunt van dat deel.

Tghegheuen. Laet A het middelpunt wesen des ronts BCD diens halfmiddellijn AB ende opt selve punt A sij beschreven noch een cleender omtreck EF, ende EB sij het halfmiddellijnsdeel tusschen de twee omtrecken, ende G sij het middelpunt des selfden deels EB door welck punt G beschreven is het ront GH. Voort soo is de rechte lijn ES rechthouckich op AB ende even aenden omtreck GH.

Tbegheerde. Wij moeten bewijsen dattet plat begrepen tusschen de twee omtrecken BD ende EF even is aenden rechthouck BS.

Tbereytsel. Laet L wesen het middelpunt van AE ende daer deur beschreven worden tront LM voort N het middelpunt van AB ende daer deur het ront NO daer na AP rechthouckich op AB even aenden omtreck NO, sgelijcx AQ even aenden omtreck LM. Laet voort de langde van AB wesen 6 duym ende van EB 4 duym ende de reden des omtrecx tot haer middellijn sij van 22 tot 7. Volgende al twelck soo sal de lijn AP doen $\frac{132}{7}$ ende ES $\frac{126}{7}$ ende AQ $\frac{44}{7}$ daerom den rechthouck BP $\frac{792}{7}$ ende den rechthouck BS $\frac{704}{7}$ ende den rechthouck EQ $\frac{88}{7}$.



Tbewijs. Anghesien den rechthouck BS doet $\frac{704}{7}$ ende den rechthouck EQ $\frac{88}{7}$ makende tsamen $\frac{792}{7}$, soo sijn die twee rechthoucken even aenden rechthouck BP, oock doende $\frac{792}{7}$, maer den rechthouck BP is even aen tront BCD deur tvoornombde voorstel van Archimedes, daerom beyde de rechthoucken BS ende EQ sijn tsamen even aen tgheheel ront BCD maer den rechthouck EQ is even aen tront EF deur tvoorsz. voorstel van Archimedes, daerom getrocken tcleen ront EF van tgheheel ront BCD soo blijft den rechthouck BS even aen het plat begrepen tusschen de twee omtrecken BCD, EF. Twelck soo synde, het volghende vertooch is uyt het voorgaende openbaer.

Vertooch.

Wesende de halfmiddellijn eens ronts vast opt middelpunt de rest draeyende int rondt: De cromme voortganck vant uyterste deel der halfmiddellyn is euen aen een rechte voortganck soo lanck wesende als diens deels middelpunts cromme voortganck.

RAPPORT

OVER EENE

VERHANDELING VAN Dr. B. **HAGEN**,

GETITELD:

UEBER KÖRPERGRÖSSE UND WACHSTHUMSVERHÄLTNISSE DER SÜD-CHINESEN.

(Uitgebracht in de Vergadering van 29 Maart 1884.)

In de Vergadering dezer Afdeeling van den 23sten Februari l.l. werd aan de ondergeteekenden opgedragen verslag uit te brengen over eene verhandeling van Dr. B. HAGEN, arts te Tandjong Morawa in het gebied van Serdang, Resid. Sumatra's Oostkust, getiteld: *Ueber Körpergrösse und Wachsthumsverhältnisse der Süd-Chinesen.*

Dr. HAGEN, als arts op eene tabaksplantage te Deli op de Oostkust van Sumatra werkzaam, heeft zich de voor hem bestaande gelegenheid ten nutte gemaakt en door het meten der op de plantage aangebrachte koelies getracht eene leemte in de anthropologische wetenschap aan te vullen. Het door hem gebezigde materiaal bestond uitsluitend uit Zuid-Chineezen in den leeftijd van 20—50 jaren; zij waren afkomstig uit de binnenste streken der provincie Kwang-Tung en behoorden tot de 3 Afdeelingen der Cheü-hu's, der Kee's en der Hei-Lok-Hong's; in zuiverheid van ras overtreffen deze stammen wellicht alle anderen.

Deze koelies worden jaarlijks bij duizenden uit Hongkong en Swatau via Singapore en vooral via Penang naar Deli geïmporteerd. In Penang worden zij dadelijk met het oog op hunne geschiktheid voor veldarbeid gekeurd en daarbij wordt ook de lichaamsgrootte gemeten. Bij de aankomst op de plantage, waar Dr. HAGEN werkzaam is, werden de koelies ook door hem onderzocht en de te Penang verkregen maten gecontroleerd. Buitendien werden eenige andere honderden koelies door hem gemeten en, ten einde het duizendtal volledig te maken, werden de door SCHERZER en SCHWARZ op de reis der Novara gemetene en uit dezelfde provincie afkomstige Zuid-Chineezen in zijne tabel opgenomen.

Daar het aantal metingen niet groot genoeg kon geacht worden om het gemiddelde der lichaamslengte in elk levensjaar afzonderlijk te bepalen, werd eene reeks van jaren te zamen genomen en werden kategoriën van 5—5 jaren gevormd. Alleen de laatste kategorie (van 40—50 jaren) bevat 10 jaren, omdat het aantal afzonderlijke metingen daarin te gering is.

Uit de door Dr. HAGEN medegedeelde cijfers blijkt dat de Zuid-Chineezen tot aan de 3de kategorie (van 30—34 jaren) gestadig groeien en in deze laatste hun maximum (1622 mm.) bereiken. Bij de door Dr. HAGEN onderzochte Chineezen schijnt dus dezelfde wet te gelden, die QUETELET bij de Belgen gevonden en LELUT bij de Franschen bevestigd heeft, dat namelijk het lichaam tot na het 30ste levensjaar in de lengte groeit. Iets dergelijks heeft GOULD bij de Amerikanen gevonden.

Na het 34ste levensjaar wordt de lichaamsgrootte langzaam, doch gestadig geringer. Wordt dit verschijnsel door verdere waarnemingen bevestigd, dan zal het, volgens Dr. HAGEN, wel als seniele teruggang opgevat moeten worden. Doch Dr. HAGEN zelf maant tot voorzichtigheid bij het trekken van besluiten uit de betrekkelijk geringe getallen zijner beide laatste kategoriën.

Uit de door Dr. HAGEN medegedeelde cijfers is verder af te leiden, dat men, om de gemiddelde lichaamsgrootte van een volk te bepalen, strikt genomen slechts de cijfers zou moeten gebruiken, verkregen door metingen van menschen tusschen 30 en 34 jaren. Het verschil tusschen deze kategorie en de daaraan voorafgaande, bevattende de individu's tusschen 25 en 29 jaren, is evenwel zóó gering, dat deze beide kategoriën zonder nadeel in rekening gebracht kunnen worden.

Na bovenstaande korte mededeeling van den hoofdinhoud van het geschrift van Dr HAGEN, geven wij aan de Afdeeling in overweging, dezen arbeid in de *Verslagen en Mededeelingen* op te nemen. Dr. HAGEN, die zich reeds vroeger door zoölogische onderzoekingen op Sumatra en door een reis naar het meer van Toba bekend gemaakt heeft, heeft door de hier besproken onderzoekingen feiten aan het licht gebracht, die uit een anthropologisch oogpunt niet zonder belang geacht kunnen worden, te meer daar het vereischte materiaal uiterst moeielijk te verkrijgen is.

Amsterdam, 29 Maart 1884.

T. ZAAIJER,
W. KOSTER.

ÜBER KÖRPERGRÖSSE

UND

WACHSTHUMSVERHÄLTNISSE DER SÜD-CHINESEN.

VON

Dr. B. HAGEN.

Es mangelt in der anthropologischen Literatur noch gar sehr an grösseren Reihen einheitlicher Körpermessungen. Man würde allerdings denjenigen Reisenden ungenügend ausgerüstet nennen, der nicht mit anthropologischen Messapparaten versehen wäre; es liegt aber in der Natur der Sache, dass ein solcher je nach der Zeit, die er unter einem Volke verweilt, nur einige dutzend oder, wenn es hoch kommt, einige hundert Messungen mit nach Hause bringt. Um mehr leisten zu können, muss er schon jahrelang in einem Gebiet verwielen oder anderweitig in eine günstige Gelegenheit versetzt werden. Aber selbst einige hundert Messungen reichen zur endgültigen, unanfechtbaren Bestimmung des Normal-Mittels eines ganzen Volkes noch nicht aus und geben keine Sicherheit, wie ich mich während meiner Arbeiten oft genug überzeugen konnte. Erst bei 500 bis 1000 Einzelmessungen fangen die fluctuirenden Mittelwerthe an, einigermassen Stabilität zu gewinnen und werden auch durch einige Extreme höchstens noch um Zehntelsmillimeter aus dem Gleichgewicht gebracht.

Ich bin nun zwar nicht in der glücklichen Lage, wie der Americaner Gould, eine runde Million von Einzelmessungen vorlegen zu können, ja nicht einmal 12000 wie der Baier

J. C. Majer; meine Messungen erstrecken sich nur über c.a 1000 Individuen; doch glaube ich aus dem eben angeführten Grunde, dass schon diese Zahl genügend verlässliche Mittelwerthe gibt und mit dazu beitragen hilft, die kleinen unzureichenden und desshalb ganz beweisunkräftigen Zahlenreihen der anthropologischen Handbücher durch grössere, vertrauenerweckendere und mehr Sicherheit gewährende zu ersetzen.

Das Material der vorliegenden Grössenlisten wird ausnahmelos von Süd-Chinesen im Alter von 20—50 Jahren aus den inneren Gegenden der Provinz Kwang-Tung (zu beiden Seiten des n. Wendekreises) gebildet, welche zu den 3 Abtheilungen der Chëu-hu's, der Kee's (wozu ich auch die Macao-leute (Punti's und Hakka's) rechne) und der Hei-Lok-Hong's gehören; wenn irgend ein Volk auf Rassenreinheit Anspruch machen darf, so sind es diese Völker. Die Kuli's, an harte Feldarbeit im Tropenklima gewöhnt, bilden fast das ausschliessliche Arbeitsmaterial für die grossen Tabaksplantagen in Deli auf Sumatra's Ostküste und werden alljährlich zu Tausenden aus den Hafenplätzen Hongkong und Swatau via Singapore oder (am häufigsten) Penang nach Deli importirt. So wie sie in Penang ankommen, werden sie ärztlicherseits auf ihre Tauglichkeit für Feldarbeit untersucht und wird im Zusammenhang damit ihre Körpergrösse gemessen. Bei der Ankunft auf der Pflanzung, auf welcher ich als Arzt fungire, werden die Kuli's von mir nochmals untersucht und dabei die Grössenlisten des Arztes in Penang controlirt, so dass also durch diese doppelten Messungen die wünschenswertheste Exactheit erzielt sein dürfte. Ausser dem aus diesen Listen erhaltenen Material habe ich jedoch noch einige weitere hundert Kuli's in Bezug auf ihre Körpergrösse gemessen, und um die Zahl 1000 voll zu machen, wurden die 26 von Scherzer und Schwarz *) gemessenen Chinesen, die aus der nämlichen Provinz stammen, in meine Tabelle eingerechnet.

---

*) Anthropologischer Theil der Novarareise v. Weisbach S. 11 ff.

Ich glaube nunmehr noch einem Einwand begegnen zu müssen, als ob die ärztliche Auswahl der zur Feldarbeit geeigneten Kuli's von Einfluss auf die Grössenziffern sei. Dies ist durchaus nicht der Fall; nur kranke oder schwächlich gebaute Leute werden refüsirt; diese beiden Factoren jedoch haben bekanntlich auf die Körpergrösse nicht den geringsten Einfluss.

Da ich nicht eine hinreichend grosse Zahl von Messungen aus jedem einzelnen Jahrgang besass, sah ich mich genöthigt, eine Reihe von Jahrgängen zusammen zu ziehen und bildete mir Kategorien von 5 zu 5 Jahren; nur die letzte, fünfte Kategorie umfasst 10 Jahre, da die Einzelmessungen zu spärlich waren. Auf diese Weise erhielt ich als Durchschnittswerth für die:

I. Kategorie	(20–24 Jahre)	= 1612	m.m.	aus	310	Messungen.
II.	» (25–29 »)	= 1621,3	»	»	297	»
III.	» (30–34 »)	= 1622	»	»	225	»
IV.	» (35–39 »)	= 1620	»	»	124	»
V.	» (40–50 »)	= 1618	»	»	51	»
					1007	Messungen.

Aus dieser Tabelle ersehen wir nun zunächst, dass der (Süd-)Chinese bis zur III. Kategorie (30—34 J.) stetig wächst und in dieser letzteren sein Maximum erreicht (1622 m.m.). Der Unterschied zwischen der I. und II. Kategorie beträgt beinahe 10 m.m., derjenige zwischen der II. und III. jedoch noch nicht einmal 1 m.m. Daraus folgt, dass das Wachsthum gegen die Höhe der Entwicklung sich bedeutend verlangsamt. Unser Ergebniss stimmt also genau mit dem von Scherzer und Schwarz auf Grund ihrer völlig unzulänglichen (nur 26!) Messungen ausgesprochenen und desshalb nur zufällig das Wahre treffenden Satze überein: »dass also auch bei den Chinesen jenes Gesetz zu gelten scheint, welches Quetelet bei den Belgiern gefunden und Lelut bei den Franzosen bestätigt hat: Dass nämlich der Körper bis in die 30er Jahre in die Länge wächst". Etwas ähnliches hat Gould bei den Americanern gefunden (Peschel, *Völkerkunde*, S. 82). Wir sehen nun aber noch ferner, dass in der IV. und V. Kategorie die Körpergrösse langsam, aber stetig wieder zurückgeht, eine Erscheinung, die wir, wenn sie sich bestätigt durch feinere Beobachtungen, wohl als senile Rückbildung aufzufassen haben. Denn ich will nicht vergessen darauf hinzuweisen, dass gerade die beiden letzten Kategorien die zahlenärmsten und desshalb Vorsicht erheischenden sind. Die V. Kategorie namentlich enthält nur 51 Messungen, obwohl ich hier schon zwei fünfjährige Kategorien zu einer 10jährigen verschmolz. Frappirend ist auf den ersten Augenblick der Umstand, dass sich der Altersschwund schon so frühe, Ende der 30er Jahre, bemerklich macht. Es ist dies eben eine neue Bestätigung des alten Satzes, dass es in der Natur keinen Stillstand gibt; wo die Entwicklung aufhört, fängt die Rückbildung an.

So hätten wir also im Grossen und Ganzen die Wachsthumsgesetze der Süd-Chinesen zwischen 20 und 50 Jahren fixirt. Hieraus geht nun für den Anthropologen hauptsächlich eine wichtige Folgerung hervor. Bei Bestimmung der allgemeinen Durchschnittsgrösse eines Volkes müssen wir die noch nicht völlig entwickelten, sowie die in seniler Rückbildung begriffenen Individuen, also die Kategorien I, IV und V ausscheiden und nur das Alter zwischen 25 und 35 Jahren berücksichtigen, denn nur so erhalten wir das wahre Mittel des ausgewachsenen Volkes, um das es dem Anthropologen doch hauptsächlich zu thun sein muss. Wollten wir sehr scrupulös sein, so dürften wir eigentlich nur die Kategorie III berücksichtigen und ihr Durchschnitt (1622 m.m.) bildete zugleich auch das Mittel des ausgewachsenen Volkes; doch ist der Unterschied von der Kategorie II nur so gering, dass wir auch diese Individuen schon als ausgewachsen betrachten und zur Berechnung des allgemeinen Mittels heranziehen dürfen.

Es sind die Wachsthumsgesetze des menschlichen Körpers überhaupt und der einzelnen Völker im Besonderen noch viel zu wenig bekannt, als dass wir hier uns eine Vergleichung oder gar Schlüsse zu ziehen erlauben dürften; auch mangelt es mir hiezu augenblicklich in meinem fernen, abgelegenen Wohnort zu sehr an einschlägiger Literatur; eines aber glaube ich doch mit Bestimmtheit aussprechen zu können: Individuen unter 24 Jahren sind wohl bei allen Völkern noch nicht völlig entwickelt, und Leute über 45 Jahre werden überall mehr weniger schon senile Rückbildung zeigen. Solche Individuen sollte man also a priori bei Berechnung eines Volksdurchschnittes ausschliessen, so lange keine speciellen Wachsthumsverhältnisse bekannt sind.

Das nämliche Resultat, etwas schwankender allerdings, aber in Bezug auf das Wachsthum der einzelnen Jahrgänge genauer, erhalten wir, wenn wir das Material anstatt in fünfjährige Kategorien, in solche von je 2 und 2 Jahren theilen. Wir erhalten dann folgendes Bild:

I.	20—21	Jahre	=	1606,6	m.m.	aus	72	Messungen
II.	22—23	»	=	1612,5	»	»	129	»
III.	24—25	»	=	1616,8	»	»	120	»
IV.	26—27	»	=	1624	»	»	94	»
V.	28—29	»	=	1620,4	»	»	120	»
VI.	30—31	»	=	1623,2	»	»	111	»
VII.	32—33	»	=	1620,6	»	»	76	»
VIII.	34—35	»	=	1621,6	»	»	47	»
IX.	36—37	»	=	1624	»	»	57	»
X.	38—39	»	=	1616,5	»	»	40	»
XI.	40—50	»	=	1618	»	»	51	»

Hier sehen wir besser als bei der vorigen Tabelle das schnelle Wachsthum in der ersten Hälfte der zwanziger Jahre, beinahe 6 m.m. im zweijährigen Durchschnitt, per Jahr also im Grossen und Ganzen zwischen 2—3 m.m. Von 26 bis zu 37 Jahren sehen wir kein Wachsthum mehr; die Zahlen schwanken willkürlich hin und her in einer Grenze von beiläufig $3^1/_2$ m.m., zwischen 1620,4 und 1624 m.m., Ziffern, die weder vorher noch nachher erreicht werden. Dadurch hebt sich diese Gruppe von selbst als die Gruppe der ausgewachsenen Individuen hervor, und als Entwicklungsgrenze haben wir etwas genauer als aus den fünfjährigen Kategorien das 37 Jahr erhalten. Von hier an fällt die Grössenziffer merklich.

Es bleiben uns nunmehr noch einige Worte über die gefundenen Extreme zu sagen, d. h. über die Grenzen, zwischen welchen sich die gemessenen Körpergrössen bewegten.

Der kleinste Mann misst 1225 m.m. und steht mit solch niedriger Ziffer ganz allein da; er ist somit als einzige zwergenhafte Ausnahme zu bezeichnen, da die nächstniedrige Ziffer fast um 200 m.m. höher ist, nämlich 1410 m.m. Im Gegensatze hiezu erreicht kein einziger Mann die Höhe von 1800 m.m.; die höchste Ziffer ist 1795 m.m. Die beste Uebersicht wird folgende Tabelle geben:

Unter	1300	m.m.	misst	1	Individuum	
»	1400	»	»	0	»	
»	1500	»	messen	14	Individuen	(Extrem 1410)
Zwischen	1500—1600	»	»	306	»	
»	1600—1700	»	»	517	»	
Ueber	1700	»	»	79	»	(Extrem 1795)

Das Mittel des ausgewachsenen Volkes beträgt, wie früher schon erwähnt, in runder Zahl 1622 m.m.; die Süd-Chinesen gehören somit zu den mittelgrossen Völkern.

Wenn nan die Extreme nach oben und unten (unter 1500 und über 1700 m.m.) nach Procenten ausrechnet, so entfallen auf die Jahrgänge:

	Unter 1500 mM.	Extrem	Ueber 1700 mM.	Extrem
20—21 (72 Messungen)	1,4 pCt.	1470	5,5 pCt.	1735
22—23 (129 〃)	1,5 〃	1455	10,0 〃	1755
24—25 (120 〃)	2,5 〃	1455	4,1 〃	1753
26—27 (94 〃)	2,1 〃	1470	7,4 〃	1795
28—29 (120 〃)	0,8 〃	1225	12,5 〃	1762
30—31 (111 〃)	0,9 〃	1490	10,0 〃	1740
32—33 (76 〃)	—	—	10,5 〃	1752
34—35 (47 〃)	2,1 〃	1495	4,2 〃	1725
36—37 (57 〃)	1,7 〃	1490	5,2 〃	1735
38—39 (40 〃)	5,0 〃	1470	7,5 〃	1735
40—50 (51 〃)	2,0 〃	1410	10,0 〃	1740
Total 917 *) Messungen	1,7 pCt.	1225	8,3 pCt.	1795

*) Von 90 Kuli's war das Alters- (Geburts-) Jahr nicht zu eruiren, dieselben konnten desshalb für diese Tabelle nicht verwendet werden.

MESSUNGSLISTE.

Es ist wohl nicht ganz überflüssig darauf hinzuweisen, dass der Chinese sein Alter in so fern etwas anders berechnet als wir Europäer, als er sein Geburtsjahr für voll rechnet, gleichviel in welchem Monat er geboren wurde; ein Kind z. B. das am 31 Dezember geboren wird, ist am nächsten Fage, am 1 Januar, schon 1 Jahr alt.

Grösse in mm.	Alter.	Grösse in mm.	Alter.	Grösse in mm.	Alter.	Grösse. in mm.	Alter.
1510	20 J.	1545	21 J.	1513	22 J.	1610	22 J.
1535		1550		1520		1610	
1545		1550		1520		1613	
1545		1555		1535		1613	
1550		1557		1543		1615	
1553		1570		1547		1620	
1560		1570		1550		1620	
1570		1575		1555		1620	
1570		1577		1557		1625	
1580		1580		1560		1630	
1580		1580		1560		1630	
1583		1590		1565		1630	
1589		1595		1567		1630	
1590		1600		1567		1632	
1590		1605		1570		1635	
1590		1605		1570		1635	
1590		1615		1570		1640	
1600		1615		1570		1650	
1600		1623		1570		1653	
1600		1630		1570		1653	
1605		1635		1580		1655	
1610		1645		1580		1655	
1610		1650		1580		1660	
1615		1650		1580		1660	
1620		1670		1580		1665	
1620		1670		1580		1670	
1620		1670		1585		1675	
1620		1680		1590		1690	
1620		1690		1590		1695	
1627		1690		1590		1705	
1630		1695		1590		1710	
1630		1710		1592		1712	
1650		1710		1595		1712	
1650		1735		1595		1715	
1655				1600		1755	
1710		1455	22 J.	1600			
		1470		1603		1530	23 J.
1470	21 J.	1500		1605		1535	
1500		1505		1605		1535	

Grösse in mm.	Alter.	Grösse in mm.	Alter.	Grösse in mm.	Alter.	Grösse. in mm.	Alter.
1542	23 J.	1572	24 J.	1545	25 J.	1680	25 J.
1550		1572		1550		1680	
1560		1573		1560		1685	
1560		1575		1560		1685	
1560		1575		1565		1690	
1560		1580		1570		1690	
1560		1580		1575		1700	
1560		1585		1580		1720	
1562		1585		1580			
1570		1590		1590		1470	26 J.
1570		1590		1590		1497	
1570		1590		1600		1510	
1580		1597		1605		1545	
1582		1600		16[illegible]5		1550	
1582		1600		1607		1557	
1590		1602		1607		1560	
1595		1605		1610		1560	
1610		1610		1610		1567	
1615		1610		1615		1575	
1620		1615		1615		1575	
1620		1615		1615		1580	
1630		1620		1618		1585	
1630		1620		1620		1590	
1640		1620		1620		1590	
1640		1620		1620		1600	
1640		1625		1620		1603	
1640		1630		1620		1610	
1645		1635		1620		1610	
1650		1640		1620		1620	
1650		1640		1620		1625	
1655		1640		1623		1628	
1658		1643		1625		1630	
1658		1645		1625		1630	
1670		1655		1625		1630	
1670		1660		1630		1630	
1670		1660		1630		1635	
1675		1660		1630		1635	
1680		1670		1635		1640	
1680		1670		1635		1650	
1690		1673		1640		1650	
1690		1685		1640		1650	
1705		1690		1644		1650	
1705		1695		1644		1652	
1710		1700		1645		1655	
1710		1703		1645		1655	
1715		1753		1650		1667	
1725				1650		1670	
1745		1480	25 J.	1650		1675	
		1490		1650		1677	
1455	24 J.	1515		1660		1685	
1517		1520		1660		1685	
1540		1520		1670		1690	
1545		1545		1670		1700	
1557		1545		1675		1790	

Grösse in mm.	Alter.	Grösse in mm.	Alter.	Grösse in mm.	Alter.	Grösse in mm.	Alter.
1795	26 J.	1545	28 J.	1633	28 J.	1657	29 J.
		1545		1635		1665	
1547	27 J.	1547		1635		1665	
1550		1550		1638		1685	
1560		1550		1640		1700	
1565		1550		1640		1705	
1565		1550		1647		1710	
1570		1552		1650		1720	
1570		1555		1650		1725	
1570		1557		1650		1727	
1575		1557		1650			
1580		1560		1650		1490	30 J.
1585		1560		1655		1510	
1590		1560		1660		1520	
1595		1560		1660		1540	
1600		1565		1665		1547	
1600		1570		1667		1550	
1608		1570		1670		1555	
1610		1575		1670		1555	
1610		1580		1675		1560	
1615		1585		1680		1560	
1616		1585		1685		1565	
1616		1585		1690		1570	
1617		1590		1693		1570	
1617		1590		1700		1570	
1620		1590		1700		1570	
1620		1590		1715		1575	
1622		1595		1730		1575	
1622		1595		1750		1575	
1625		1595		1750		1575	
1630		1600		1750		1577	
1630		1600		1760		1580	
1640		1600		1762		1580	
1640		1605				1580	
1645		1610		1225	29 J.	1585	
1650		1610		1550		1585	
1650		1610		1557		1590	
1650		1610		1560		1590	
1653		1610		1565		1590	
1657		1610		1570		1595	
1659		1615		1580		1595	
1670		1615		1590		1600	
1673		1615		1595		1600	
1673		1617		1607		1600	
1680		1620		1620		1600	
1680		1620		1620		1610	
1700		1620		1620		1615	
1720		1620		1625		1620	
1744		1620		1625		1620	
1750		1625		1630		1620	
		1625		1630		1620	
1500	28 J.	1630		1632		1620	
1535		1630		1635		1620	
1540		1630		1650		1625	

Grösse in mm.	Alter.	Grösse in mm.	Alter.	Grösse in mm.	Alter.	Grösse in mm.	Alter.
1627	30 J.	1657	31 J.	1685	32 J.	1665	34 J.
1630		1660		1685		1670	
1630		1660		1690		1675	
1635		1665		1710		1685	
1635		1665		1715		1690	
1640		1670		1720		1705	
1640		1670		1740			
1646		1670				1495	35 J.
1650		1675		1520	33 J.	1550	
1650		1680		1545		1560	
1655		1685		1563		1565	
1660		1690		1570		1585	
1660		1700		1570		1585	
1662		1700		1575		1595	
1665		1740		1595		1600	
1670				1595		1600	
1670		1500	32 J.	1597		1600	
1670		1515		1598		1610	
1675		1530		1598		1610	
1680		1550		1600		1610	
1680		1550		1600		1620	
1680		1555		1610		1625	
1690		1555		1610		1630	
1690		1567		1615		1635	
1700		1567		1617		1635	
1700		1572		1620		1640	
1710		1575		1630		1645	
1720		1585		1630		1650	
1720		1585		1635		1650	
1720		1590		1660		1685	
1724		1590		1670		1685	
1730		1600		1670		1687	
1730		1600		1670		1695	
		1602		1685		1725	
1504	31 J.	1603		1695			
1512		1605		1700		1540	36 J
1524		1607		1710		1540	
1524		1607		1720		1545	
1550		1610		1752		1554	
1563		1610				1554	
1580		1610		1550	34 J.	1557	
1590		1610		1550		1560	
1600		1622		1550		1570	
1600		1630		1565		1570	
1605		1635		1580		1577	
1607		1635		1585		1580	
1620		1638		1590		1590	
1620		1640		1600		1600	
1625		1645		1600		1605	
1625		1650		1610		1620	
1626		1655		1610		1630	
1636		1655		1647		1630	
1640		1670		1655		1630	
1656		1675		1660		1635	

Grösse in mm.	Alter.	Grösse in mm.	Alter.	Grösse in mm.	Alter.	Grösse in mm.	Alter.
1645	36 J.	1677	37 J.	1695	38 J.	1570	42 J.
1650		1680		1695		1585	
1650		1700		1720		1590	
1650		1730		1726		1603	
1650				1735		1630	
1652		1470	38 J.			1660	
1655		1480		1550	39 J.	1665	
1655		1507		1600		1725	
1680		1525		1630			
1680		1557		1687		1614	43 J.
1685		1566		1700		1650	
1690		1566					
1735		1567		1537	40 J.	1555	44 J.
		1567		1575		1600	
1490	37 J.	1575		1590		1670	
1552		1585		1605		1695	
1564		1595		1610			
1564		1595		1610		1555	40-45 J.
1570		1602		1610		1615	
1603		1605		1615		1617	
1605		1615		1620		1625	
1605		1615		1625		1660	
1608		1615		1625		1670	
1630		1620		1635		1720	
1635		1620		1640			
1637		1625		1680		1410	45 J.
1640		1630		1700		1557	
1640		1630		1705		1570	
1640		1630		1740		1617	47 J.
1640		1640				1675	
1650		1643		1650	41 J.	1700	48 J.
1655		1645				1520	49 J.
1655		1650		1545	42 J.	1540	50 J.
1660		1655		1555		1617	
1660		1667		1565			

OVER DE BANEN

BESCHREVEN ONDER

DEN INVLOED EENER CENTRALE KRACHT.

DOOR

D. J. KORTEWEG.

I. Inleiding.

1. Wanneer wij *a priori* willen nagaan, welke verschillende vormen de banen zullen kunnen aannemen, die ontstaan onder de werking eener centrale kracht, welke eene ondubbelzinnige functie is van den afstand tot het centrum, dan kan dit geschieden door eene denkbeeldige baan eerst te vervolgen in middelpuntvliedende richting en daarna in middelpuntzoekende richting en daarbij te letten op de mogelijkheden, die zich kunnen voordoen. Het is dan onmiddellijk duidelijk, dat *de middelpuntvliedende tak* op drie wijzen eindigen kan. Hij kan *ten eerste* tot een apocentrum voeren. De lijn, die van het centrum naar het apocentrum gaat, wordt dan eene as van symmetrie van de baan, zoodat ieder onderzoek naar het verder verloop der baan overbodig wordt. Hij kan *ten tweede* tot op oneindigen afstand van het centrum voeren. *Ten derde* kan de afstand tot het centrum tot eene limietwaarde naderen, die nimmer wordt bereikt. De baan gaat dan onbepaald voort zich spiraalsgewijze rond te bewegen, daarbij dichter en dichter naderende tot een aan haar buitenzijde gelegen asymptotischen cirkel, zonder dien cirkel ooit te bereiken. Wij zullen dezen laatsten baanvorm aanwijzen door

te zeggen, dat de baan een cirkelspiraaleinde bezit met asymptotischen buitencirkel.

De *middelpuntzoekende takken* gedragen zich evenzeer op drieërlei verschillende wijze. Men heeft er *ten eerste* die tot in het centrum voeren. Hoe zij zich dan verder voortzetten zal geen punt van beschouwing voor ons uitmaken. *Ten tweede* die tot een pericentrum aanleiding geven, *ten derde* die eindigen in een cirkelspiraaleinde met asymptotischen binnencirkel.

Combineert men de verschillende wijzen, waarop de baan in middelpuntvliedende en in middelpuntzoekende richting eindigen kan, dan blijkt het dus dat er *negen* verschillende hoofdvormen optreden kunnen, waarnevens dan nog te onderscheiden vallen de cirkelbanen en de radiale banen, die bij iedere krachtenwet mogelijk zijn.

2. Beschouwt men nu de banen, die onder de werking der meest bekende centrale krachten, de kracht evenredig met de eerste macht van den afstand en die omgekeerd evenredig met het vierkant van den afstand, ontstaan dan moet het dadelijk opvallen, dat van de negen mogelijke hoofdvormen er in het eene geval slechts één, in het andere slechts twee voorkomen. Bovendien is in het tweede geval opmerkelijk de eenvoudigheid van het kenmerk, waardoor voor een gegeven punt van vertrek en bij een gegeven snelheid beslist kan worden, welke der beide hoofdvormen zich vertoonen zal. De richting der snelheid is namelijk onverschillig, het is slechts de vraag of de snelheid groot genoeg is om aan het punt zooveel levende kracht te geven als voldoende is om den arbeid te leveren, noodig om het punt in het oneindige te voeren. Dit eenvoudige kenmerk blijft bij vele krachtenwetten doorgaan, maar faalt weer bij anderen. Wat zijn de voorwaarden, waaronder het doorgaat? Binnen welke grenzen geldt de zoo merkwaardige eigenschap van vele krachtenwetten, dat alleen de banen, die recht op het centrum afgezonden worden, dit centrum bereiken, terwijl alle overigen tot een pericentrum voeren? Wat zijn in 't algemeen de voorwaarden waaronder de verschillende hoofdvormen ontstaan? In de literatuur over centrale beweging vindt men voor vele bijzondere onderstellingen om-

trent de krachtenwet de banen berekend en aangegeven. Vooral sedert de invoering der elliptische functiën is het aantal gevallen dat de differentaalvergelijkingen, waartoe men geraakt, integreerbaar zijn, zeer toegenomen. Een direkt en algemeen antwoord op de gestelde vragen, vond ik echter niet, en zoo geraakte ik er toe een zelfstandig onderzoek in te stellen, dat mij voerde tot de ontdekking van eenige algemeene eigenschappen der centrale beweging, die mij waardig schenen te worden medegedeeld.

3. Spoedig bleek de wenschelijkheid het veld, waarin de centrale kracht werkt, en dat, daar alle banen vlakke krommen zijn, als een plat vlak gedacht kan worden, in drieërlei soort van gebied in te deelen. Tot de *eerste soort* behoort elk gebied, waar de centrale kracht afstootend werkt. Tot de *tweede soort* elk gebied, waar zij aantrekt en waar tevens *het produkt van de kracht met de derde macht van den afstand* tot het centrum *met dien afstand aangroeit*. Tot de *derde soort* elk gebied, waar de kracht eene aantrekkende is, terwijl het bedoelde produkt *afneemt*, als de afstand *toeneemt*.

Een gebied van *de eerste soort* noemen wij een afstootingsgebied, een van *de tweede soort* een *stabiliteits*- van de *derde* een *instabiliteitsgebied*, welke laatste twee benamingen ontleend zijn aan de verschillende uitwerking, welke eene kleine storing op de beweging in den cirkelbaan heeft, naar gelang zich die cirkelbaan in een gebied van de *tweede* of van de *derde* soort bevindt.

Natuurlijk kunnen als zeer bijzondere gevallen nog voorkomen: een gebied waar alle krachtwerking ontbreekt, en een gebied — het *omgekeerde derdemachtsgebied*, waar het produkt van de kracht met de derde macht van den afstand constant blijft.

Een willekeurig gegeven krachtenveld kan door cirkels met het centrum van krachtwerking tot middelpunt in deze verschillende soorten van gebied worden ingedeeld.

4. Twee grootheden zijn er die langs eene zelfde baan overal dezelfde waarde bezitten. De eene heeft betrekking op de energie. Meten wij de *potentieele energie* door het arbeidsvermogen, dat vrijkomt als wij het deeltje van de

plaats waar het is, brengen op een eens vooral gegeven afstand van het middelpunt, de *actueele energie* door de halve levende kracht, dan is de som dier beide grootheden, de *totale energie*, voor iedere gegevene baan eene constante.

De andere standvastige grootheid is de in de eenheid van tijd beschreven sector. Die grootheid zullen wij — in overeenstemming met de uitdrukking: hoeksnelheid — den naam van *sectorsnelheid* geven.

Beide deze constanten en één harer punten bepalen, als de krachtenwet bekend is, de baan en de snelheid in de baan. Immers uit de *totale energie* kan men de grootte, en daarna uit de *sectorsnelheid* de richting der snelheid in het gegeven punt berekenen, daaruit de plaats van een volgend punt afleiden en zoo voortgaande de gansche baan construeeren.

Kiest men dan vervolgens een ander uitgangspunt, terwijl men de *totale energie* en de *sectorsnelheid* onveranderd laat, dan zal men eene baan van dezelfde gedaante, die met dezelfde snelheid doorloopen wordt, terugvinden, *mits* de voerstraal van het uitgangspunt gelijk is aan den voerstraal van een der punten, die tot de vroegere baan behoorden. Neemt men daarentegen een uitgangspunt, welks voerstraal grooter is dan de grootste, of kleiner dan de kleinste waarde van de voerstralen, die in de vroegere baan voorkwamen, dan kan het gebeuren, dat ook door dit uitgangspunt eene baan gaat, die dan echter eene andere gedaante bezit. Bij gegeven *totale energie* en *sectorsnelheid* zijn in het algemeen meerdere banen van verschillende gedaante mogelijk, maar geen twee dezer banen kunnen een voerstraal van gelijke grootte bezitten, zoodat de kennis van een der voerstralen, die in de baan voorkomen, deze geheel ondubbelzinnig bepaalt.

Het behoeft wel niet gezegd te worden, dat al deze banen dan uit een zuiver wiskundig oogpunt bij elkander behooren en, indien uitvoering der integraties der bewegingsvergelijkingen mogelijk is, te zamen in dezelfde analytische vergelijking zullen begrepen zijn. Het is echter onmogelijk dat een materieel deeltje van de eene op de andere overgaat, en in zooverre zijn het uit een mechanisch oogpunt verschillende banen.

Daar wij in het vervolg de banen uitsluitend uit dit laatste oogpunt beschouwen, voeg ik hier eene opmerking toe, die om die reden moeilijk elders plaats vinden kan. Zij betreft eene omstandigheid die aanvankelijk mij eenige verwondering veroorzaakte. Wanneer men uit één zelfde punt met eene zelfde beginsnelheid banen in verschillende richting vertrekken laat, dan zal, zooals later blijkt, een oneindig klein verschil in richting, dikwijls een eindig verschil in apocentrum-afstand veroorzaken. Dit zal steeds gebeuren als bij eene bepaalde richting der snelheid eene baan met cirkelspiraaleinde ontstaat.

Hoe moet dit uit een wiskundig oogpunt verklaard worden? Op volgende wijze: Bij eene bepaalde richting der snelheid bestaan er twee banen, waarin de sectorsnelheid en totale energie dezelfde waarde bezitten, en die dus wiskundig bijeen behooren. De buitenste van deze omhult de andere, zoodat *haar* pericentrum verder van het centrum verwijderd ligt als het apocentrum der binnenste baan. Terwijl men nu de richting of ook de grootte der snelheid in het gegeven punt geleidelijk in bepaalden zin verandert, worden apocentrum-afstand der binnenste en pericentrum-afstand der buitenste baan meer en meer gelijk. Op het oogenblik dat deze geheel gelijk worden, eindigen beide banen in cirkelspiraaleinden, die een zelfden cirkel, de een tot asymptotischen binnen- de ander tot asymptotischen buitencirkel bezitten.

Het volgend oogenblik zijn de banen samengesmolten en ook uit een mechanisch oogpunt te beschouwen als één enkele baan. Het materieele deeltje, dat de baan afloopt, bereikt dan plotseling een apocentrum-afstand, overeenkomende met dien van de buitenste baan.

5. Door ieder punt kan ééne cirkelbaan worden gevoerd; om deze te doen beschrijven moet aan het materieele deeltje eene bepaalde snelheid gegeven worden, die wij de plaatselijke *cirkelsnelheid* in dat punt zullen noemen; de waarde welke de energie dan verkrijgt noemen wij de *energie der*

cirkelbeweging daar ter plaatse; evenzoo kan men spreken van de *sectorsnelheid der cirkelbeweging* in een gegeven punt.

In het vervolg onderstellen wij, dat de massa van het materieele deeltje gelijk is aan de eenheid van massa, wat natuurlijk geene beperking is. Voorts voeren wij de volgende notaties in:

ϱ_0 afstand van het centrum tot het punt, waar de potentieele energie gelijk *nul* gesteld is,
ϱ afstand van een willekeurig punt tot het centrum,
v snelheid in eenig punt der baan,
μ scherpe hoek tusschen raaklijn en voerstraal,
F aantrekkende kracht,
A totale energie eener willekeurige baan,
A_w energie der cirkelbeweging in eenig punt,
B sectorsnelheid eener willekeurige baan,
B_w sectorsnelheid der cirkelbeweging in eenig punt.

Naar gelang de hoek μ kleiner is, zullen wij de baan steiler noemen.

Tusschen deze grootheden bestaan als bekend is, de volgende betrekkingen:

$$w^2 = F\varrho \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$A = \tfrac{1}{2} v^2 + \int_{\rho_0}^{\rho} F d\varrho \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$A_w = \tfrac{1}{2} w^2 + \int_{\rho_0}^{\rho} F d\varrho = \tfrac{1}{2} F\varrho + \int_{\rho_0}^{\rho} F d\varrho \quad \ldots \quad (3)$$

$$B = \tfrac{1}{2} \varrho v \sin \mu \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

$$B_w = \tfrac{1}{2} \varrho w \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Verder willen wij nog even aanvoeren de voorwaarde waaronder een *pericentrum* of een *apocentrum* in de baan optreedt. Voor beiden wordt vereischt:

$$\mu = 90^0$$

maar bovendien verlangt een *pericentrum*

$$v > w \qquad \text{en dus} \qquad A > A_w$$

een *apocentrum* daarentegen:

$$v < w \qquad \text{en dus} \qquad A < A_w$$

Een *cirkelspiraaleinde* eischt natuurlijk, dewijl de baan in gedaante meer en meer tot de cirkelbaan nadert:

$$lim.\ v = lim.\ w \qquad A = lim\ A_w \quad .$$

Eindelijk wijzen wij op eene stelling, waarvan wij in het vervolg meermalen stilzwijgend gebruik maken zullen, deze namelijk: dat wanneer van een zelfde punt met dezelfde snelheid, maar in verschillende richtingen banen vertrekken, in alle punten dezer banen welker voerstralen overeenstemmen dezelfde snelheden gevonden worden. Immers de energie is in al deze banen dezelfde. Op gelijke afstanden van het centrum is voorts de potentieele, dus ook de actueele energie, dus ook de snelheid in alle banen gelijk.

II. Algemeene stellingen.

6. Stelling I. *De energie der cirkelbeweging, de sectorsnelheid der cirkelbeweging en de grootheid $F. \varrho^3$ in eenig punt nemen steeds gelijktijdig toe en af bij verplaatsing van dit punt door het veld.*

Bewijs. Alle drie deze grootheden zijn uitsluitend functiën van ϱ. Men heeft:

$$\frac{d.\ A_w}{d\,\varrho} = \tfrac{3}{2}\,F + \tfrac{1}{2}\,\varrho\,\frac{d\,F}{d\varrho} = \frac{1}{2\,\varrho^2} \cdot \frac{d.\ F.\ \varrho^3}{d\ \varrho} \quad . \; . \; . \; (6)$$

waaruit blijkt, dat de differentiaal-quotienten van A_w en van $F\,\varrho^3$ naar ϱ steeds hetzelfde teeken hebben.

Verder is:

$$B^2_{\ w} = \tfrac{1}{4}\,\varrho.^2\,w^2 = \tfrac{1}{4}\,F.\,\varrho^3\,, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (7)$$

waarmede de stelling volledig bewezen is.

Gevolgen a. In een *stabiliteitsgebied* neemt de *energie* en de *sectorsnelheid* der cirkelbeweging met den afstand *toe*, in een *instabiliteitsgebied af.*

b. In een *omgekeerde derdemachtsgebied* zijn de *energie* en *sectorsnelheid* der cirkelbeweging overal gelijk.

c. Op de grens tusschen een *stabiliteits-* en *instabiliteitsgebied* verkrijgen de *energie* en de *sectorsnelheid* der cirkelbeweging maximum- of minimumwaarden. Maximumwaarden als het *instabiliteits-* minimumwaarden als het *stabiliteitsgebied* buitenwaarts ligt.

d. Het apocentrum en het pericentrum eener zelfde baan kunnen nooit binnen éénzelfde instabiliteitsgebied gelegen zijn. Noem namelijk ϱ_2 de voerstraal van het apo- ϱ_1 van het pericentrum, dan is noodzakelijk $w^2{}_2 > v^2{}_2$; dus $A_{w_2} > A$; daarentegen $A_{w_1} < A$; dus $A_{w_2} > A_{w_1}$. Dit nu is ten duidelijkste in strijd met de bewezene stelling, want daar $\varrho_2 > \varrho_1$ zou men moeten hebben in een instabiliteitsgebied: $A_{w_2} < A_{w_1}$.

e. Daaruit volgt nu weer onmiddellijk dat *indien het geheele veld bestaat uit één enkel instabiliteitsgebied, zooals bijv. het geval is voor iedere krachtenwet* $F = \dfrac{f}{\varrho^n}$, *alwaar* $n > 3$, *in éénzelfde baan nimmer een pericentrum en een apocentrum beiden aanwezig kunnen zijn.* Alle banen moeten dus in zulk een veld òf uit het oneindige tot een pericentrum (of spiraaleinde met asymptotischen binnencirkel) òf van uit het centrum naar een apocentrum (of spiraaleinde met asymptotischen buitencirkel) òf eindelijk van uit het oneindige naar het centrum voeren.

f. Verder valt uit *gevolg d* af te leiden, *dat eene cirkelbaan in een instabiliteitsgebied in dien zin eene instabiele bewegingstoestand vertegenwoordigt,* dat eene kleine verstoring ten gevolge heeft, dat het bewegende deeltje zich ten slotte op aanzienlijken afstand van de oorspronkelijke cirkelbaan verwijderen zal. Immers moet na de verstoring òf het pericentrum òf het apocentrum buiten het instabiliteitsgebied gelegen zijn.

g. Iedere baan die vertrekt van uit eenig punt van een *instabiliteitsgebied in middelpuntvliedende richting met eene snelheid grooter dan of gelijk aan de plaatselijke cirkelsnelheid moet noodzakelijk dit gebied aan den buitenkant verlaten, of, indien het zich tot in het oneindige uitstrekt, een tot in het oneindige voortloopende tak bezitten. Dit gevolg geldt ook voor het omgekeerde derdemachtsgebied.*

Immers een apocentrum is onmogelijk, wijl de totale energie der baan gelijk is aan of overtreft die der plaatselijke cirkelbaan en dit het geval moet blijven voor al de cirkelbanen, die aan de buitenzijde van deze gelegen zijn. Een cirkelspiraaleinde is evenzeer onmogelijk, want dan verschilt de baan ten slotte oneindig weinig van de asymptotische cirkelbaan, en beider energie moet dus overeenkomen. Dit kan niet gebeuren, daar de energie der baan die van alle buitenwaartsche cirkelbanen overtreft. Dat eene baan, wier energie overeenstemt met de gelijke energie van alle cirkelbanen in een omgekeerde derdemachtsgebied niet tot een cirkelspiraaleinde voert, zal later blijken, als wij den vorm dier baan bepalen.

h. Iedere baan die vertrekt van uit eenig punt van een instabiliteitsgebied in middelpuntzoekende richting met eene snelheid kleiner dan, of gelijk aan de plaatselijke cirkelsnelheid, moet noodzakelijk dit gebied verlaten of, indien het tot aan het centrum voert, dit bereiken. Dit gevolg geldt ook voor het omgekeerde derdemachtsgebied.

7. STELLING II. *Het produkt van voerstraal en snelheid* ($v\ \varrho$) *is langs eene zelfde baan toenemende met den afstand tot het centrum zoolang de snelheid van het deeltje de plaatselijke cirkelsnelheid overtreft, afnemende in het tegenovergestelde geval.*

Maxima en minima van dit produkt komen, behalve in de apocentra en pericentra, slechts in zulke punten voor, waar de snelheid der beweging gelijk is aan de cirkelsnelheid.

Ligt een zoodanig punt in een STABILITEITSGEBIED, *dan is het produkt een* MAXIMUM, *in een* INSTABILITEITSGEBIED *dan een* MINIMUM.

Een afstootingsgebied mag daarbij beschouwd worden, als een gebied waar de snelheid der beweging voortdurend de plaatselijke cirkelsnelheid overtreft.

Bewijs. Men heeft, dewijl A langs de geheele baan standvastig blijft:

$$d.\,v^2\,\varrho^2 = d.\,(2\,A\,\varrho^2 - 2\,\varrho^2 \int_{\rho_0}^{\rho} F.\,d\varrho) =$$

$$=(4A\varrho \text{-} 4\varrho \int_{\rho_0}^{\rho} F.d\varrho \;\; 2F.\varrho^2)d\varrho = 4\varrho(A - A_w)d\varrho = 2\varrho(v^2 - w^2)d\varrho. \quad (8)$$

waaruit het eerste gedeelte der stelling volgt.

Voorts zal $v^2\,\varrho^2$ en dus ook $v\,\varrho$ nergens anders eene minimum- of maximumwaarde verkrijgen kunnen dan:

1e. daar waar $d\,\varrho = 0$ dus in *pericentrum* en *apocentrum*. In beide deze punten is $v\,\varrho$ een minimum, zooals gemakkelijk blijkt, indien men bedenkt dat in een *pericentrum* noodzakelijk $v^2 > w^2$ en dus $v^2\,\varrho^2$ in de onmiddellijke nabijheid met toenemenden afstand toenemen moet; terwijl in een *apocentrum* omgekeerd $v^2 < w^2$ en dus in de punten met kleineren voerstraal $v^2\,\varrho^2$ grooter dan in het *apocentrum* moet zijn.

2e. daar waar: $w = v$. Ligt zulk een punt in een stabiliteitsgebied, dan is A_w toenemende met ϱ. Volgen wij dus de baan in middelpuntvliedende richting, dan wordt $A < A_w$ en, daar tevens ϱ toeneemt, zoo neemt $v^2\,\varrho^2$ af. In middelpuntzoekende richting wordt $A > A_w$, maar dan neemt ook in die richting, wijl daarin ϱ afneemt, $v^2\,\varrho^2$ af. Men heeft dus te doen met een maximum. Ligt het punt daarentegen in een instabiliteitsgebied, dan blijkt op dezelfde wijze $v^2\,\varrho^2$ een minimum te zijn.

Ten einde de waardeveranderingen van $v\,\varrho$ in een afstootingsgebied na te gaan, schrijven wij:

$$d.\,v^2\varrho^2 = (4A\varrho - 4\varrho \int_{\rho_0}^{\rho} F.d\varrho - 2F.\varrho^2)d\varrho = (2\,v^2 - 2F\varrho)d\varrho\,. \quad (9)$$

dewijl nu F negatief is, zal $v\,\varrho$ in het afstootingsgebied altijd moeten *toenemen* met ϱ.

Opmerking. Stilzwijgend hebben wij aangenomen, dat F en dan ook w^2 niet sprongsgewijze verandert. Waar dit het geval is, is een afzonderlijk onderzoek noodig. Verandert namelijk w^2 dan van een waarde $< v^2$ tot een waarde $> v^2$ dan is natuurlijk ook dáár een maximum of minimum van $v\varrho$ aanwezig.

Gevolgen. *a.* In ieder *stabiliteitsgebied* kan slechts één *maximum*, in ieder *instabiliteitsgebied* slechts één *minimum* van $v\varrho$ gelegen zijn, met uitzondering altijd van pericentrum en apocentrum. Uit de onafgebroken aangroeijing of afneming van A_w van den binnen- naar den buitenkant van éénzelfde gebied, volgt namelijk onmiddellijk, dat op zulk een gebied slechts eenmaal $v = w$ of $A = A_w$ zijn kan.

b. Ook dááruit kan men afleiden, dat in éénzelfde instabiliteitsgebied niet te gelijkertijd een pericentrum en apocentrum gelegen kan zijn van dezelfde baan. Immers in *peri-* en *apocentrum* wordt $v\varrho$ minimaal, daartusschen zou dan een maximum van $v\varrho$ moeten liggen, maar in een instabiliteitsgebied is dit onmogelijk.

Zie verder de gevolgen van stelling III.

8. Stelling III. *De scherpe hoek μ tusschen raaklijn en voerstraal is langs eene zelfde baan afnemende met den afstand tot het centrum, zoolang de snelheid van het deeltje de plaatselijke cirkelsnelheid overtreft, toenemende in het tegenovergestelde geval.*

Maxima *en* minima *van μ, punten dus van minimale of maximale steilte, kunnen, behalve de maxima in apo- en pericentrum, slechts daar voorkomen, waar de snelheid der beweging gelijk is aan de plaatselijke cirkelsnelheid.*

Ligt zoodanig punt in een STABILITEITSGEBIED *dan is μ een* MINIMUM: *in een* INSTABILITEITSGEBIED *dan een* MAXIMUM.

Een afstootingsgebied mag daarbij weer beschouwd worden als een gebied waar de snelheid der beweging voortdurend de plaatselijke cirkelsnelheid overtreft.

Bewijs. Dewijl langs dezelfde baan $\frac{1}{2} v\varrho \sin\mu = B$ eene constante is, moet $\sin\mu$ en dus ook μ toenemen als $v\varrho$ afneemt en omgekeerd. Uit deze overweging volgen, in verband met *stelling II*, al de in *stelling III* opgesomde eigenschappen van den hoek μ.

Gevolgen. *a.* In ieder *stabiliteitsgebied* kan slechts één *minimum*, in ieder *instabiliteitsgebied* slechts één *maximum* van μ gelegen zijn.

b. Laat men uit éénzelfde punt verschillende banen met dezelfde beginsnelheid vertrekken, dan liggen de punten van maximale en minimale steilte voor al deze banen op dezelfde om het cèntrum als middelpunt beschreven cirkels.

Immers dewijl de grootheid A voor alle deze banen dezelfde waarde bezit, moeten voor gelijke voerstralen de snelheden overeenstemmen, het produkt $v\varrho$ en dus ook de hoek μ moet derhalve dezelfde maximale of minimale waarden in al deze banen voor gelijke waarden der voerstraal bereiken. Passen wij deze gevolgtrekking toe op de *aantrekking volgens de omgekeerde tweedemacht van den afstand*, dan voert zij onmiddellijk tot eenige van elders bekende fraaie theorema's. Bij de elliptische banen toch onder de werking dezer wet beschreven, verkrijgt μ zijne minimale waarden in de uiteinden der kleine as; daaruit volgt dan vooreerst:

De uiteinden der kleine assen van de elliptische banen, die van eenzelfde punt met dezelfde snelheid uitgaan, liggen allen op éénzelfden cirkel om het attractiecentrum beschreven.

Bedenkt men nu bovendien, dat de afstand tusschen het brandpunt en de uiteinden der kleine as gelijk is aan de groote as, zoo blijkt onmiddellijk:

Al deze ellipsen bezitten gelijke groote assen, en dus ook blijkens de derde wet van Kepler gelijke omloopstijden.

Let men er nu op, dat de sectorsnelheid $\frac{1}{2}\, v \varrho \sin \mu$ bedraagt en dat de inhouden dezer verschillende ellipsen zich als de kleine assen verhouden moeten, dan volgt uit de gelijke omloopstijden, dat die assen zich verhouden als de sectorsnelheden; derhalve:

De kleine assen verhouden zich als de sinussen der hoeken tusschen de voerstraal en de aanvankelijke richting der snelheid.

d. Passen wij haar toe op de *aantrekking evenredig met den afstand*, dan blijkt, dat de uiteinden der *gelijke toegevoegde middellijnen* (want daar liggen dan de punten van maximale steilte der baan) voor alle van éénzelfde punt met dezelfde snelheid vertrekkende banen gelegen zijn op denzelfden cirkel beschreven met den straal $\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)}$, zoodat dus de diagonaal van den rechthoek op de assen beschreven voor al deze ellipsen gelijke waarden verkrijgt.

e. In het *omgekeerde derdemachtsgebied* blijft A_w constant. Laten wij dus daar uit eenig punt eene baan met eene snelheid gelijk aan de cirkelsnelheid vertrekken, dan blijft $v\varrho$ en dus μ constant, dewijl dan overal blijkens (8) $d.\,v^2\varrho^2 = 0$. De beschreven baan zal dus in dat geval zijn eene logarithmische spiraal.

9. Stelling IV. *Beweegt zich een materieel deeltje in eene cirkelbaan, welke gelegen is in een stabiliteitsgebied en ondergaat de beweging eene geringe storing, dan zal de nieuwe baan een peri- en een apocentrum-afstand verkrijgen, die onderling en van den straal der oorspronkelijke cirkelbaan zeer weinig verschillen.*

Was de cirkelbaan daarentegen in een instabiliteitsgebied gelegen, dan zal na eene geringe storing de afstand van het apocentrum of die van het pericentrum of die van beiden tot het centrum belangrijk van den straal der cirkelbaan verschillen.

Bewijs. Na de storing zal de cirkelbaan, wier totale energie gelijk staat met dien der nieuwe baan in het algemeen iets verder van of iets dichter bij het centrum gelegen moeten zijn als de oude cirkelbaan, maar toch altijd op geringen afstand van deze verwijderd zijn. Die cirkelbaan van dezelfde energie als de nieuwe baan zal in een stabiliteitsgebied altijd door deze doorsneden worden, want vervolgt men de baan in de richting, welke naar haar toevoert, dan is de scherpe hoek μ afnemende, zooals onmiddellijk blijkt als men de eerste alinea van *stelling VII* toepast, daarbij lettende op de eigenschap van het stabiliteitsgebied, dat aldaar A_w met ϱ toe- en afneemt. Zoolang nu μ afneemt, gaat de begonnen verwijdering van of nadering tot het centrum zeker voort, zoodat, als gezegd, de cirkel van gelijke energie steeds bereikt moet worden. Op dezen cirkel heeft μ eene minimum-, ϱv eene maximum-waarde. Beschouwt men nu de beide takken, die van dit snijpunt uitgaan, dan zal op beide ϱv af-, μ toenemen. Immers bij de middelpuntvliedende tak gaat de plaatselijke cirkel-energie, die der baan

17*

meer en meer overtreffen en moet dus ϱv afnemen, als ϱ toeneemt; bij de middelpuntzoekende daarentegen is de plaatselijke cirkelenergie kleiner dan die der baan, derhalve moet hier ϱv evenzeer afnemen, wijl ϱ afnemende is. Dit afnemen van ϱv geschiedt sneller en sneller naar gelang het punt verder van de cirkelbaan van gelijke energie verwijderd geraakt. Bedenkt men nu dat μ aanvankelijk, wegens de onderstelde geringheid der verstoring, reeds weinig van 90^0 verschilt, dan zal men inzien, dat de toename van $v \varrho$ spoedig $sin\, \mu = \frac{B}{\frac{1}{2}\, v\, \varrho}$ in de eenheid zal doen overgaan, wanneer een *pericentrum* of *apocentrum* bereikt is. De middelpuntvliedende tak zal dus tot een *apo-* en de middelpuntzoekende tot een *pericentrum* moeten voeren zonder dat de voerstraal aanzienlijk toe- of afgenomen is.

Beschouwen wij nu de verstoorde cirkelbaan in een *instabiliteitsveld*, dan valt het gemakkelijk tot het besluit te komen, dat òf in den middelpuntvliedenden òf in den middelpuntzoekenden tak, en wel in dien tak, die is afgekeerd van de cirkelbaan, wier energie gelijk is aan die der gestoorde beweging, μ zal moeten blijven afnemen en $v \varrho$ toenemen tot het *instabiliteitsgebied* verlaten is.

In den anderen de cirkelbaan van gelijke energie naderenden tak zal daarentegen $v \varrho$ *af* en μ toenemen, en nu kan er van drie dingen één gebeuren, *òf* die cirkel wordt bereikt, dan zal van dit oogenblik af μ weer gaan afnemen, en de baan zal ook aan de andere zijde het instabiliteitsgebied verlaten, *òf* die cirkel doet dienst als asymptotische cirkel der baan, die dan een cirkelspiraaleinde verkrijgt, òf zij wordt niet bereikt, omdat vóór dien tijd een *apo-* of *pericentrum* is opgetreden. In dat geval is de afstand daarvan weinig verschillend van den straal der oorspronkelijke cirkelbaan. Welke van deze drie mogelijkheden werkelijkheid worden zal, hangt van den aard der verstoring af.

Gevolg. a. Is het geheele veld één enkel instabiliteitsgebied, dan heeft de geringste storing in de cirkelbaan van eenig materieel deeltje ten gevolge, dat het zich op den duur òf naar het centrum òf op oneindigen afstand van het aantrekkende centrum begeeft. Daar ook alle andere banen in zulk een gebied òf naar het centrum òf naar het oneindige voeren, kan een materieel deeltje niet blijvend in het veld vertoeven, althans niet zonder telkens weer in het centrum te vallen. Iets als ons zonnestelsel is dus onmogelijk daar waar de aantrekkende krachten van dien aard zijn, dat zij één enkel doorloopend instabiliteitsveld in het leven roepen.

III. Stellingen over cirkelspiraaleinden.

10. Stellingen V. *Cirkelspiraaleinden kunnen alleen voorkomen binnen een instabiliteitsgebied. Banen met cirkelspiraaleinden bezitten dezelfde totale energie en sectorsnelheid als de cirkelbaan van den asymptotischen cirkel.*

Bewijs. Vervolgen wij een cirkelspiraalbaan, terwijl zij tot haar asymptotischen binnen- of buitencirkel nadert, dan zal de voerstraal ϱ meer en meer tot den straal van den asymptotischen cirkel ϱ naderen. Aangezien voorts de gansche gedaante der baan, dus ook haar kromtestraal, meer en meer overeenkomt met die van den asymptotischen cirkel, zoo zal v tot w_1, μ tot 90^0 moeten naderen. Iedere $f(\varrho, v, \mu)$ zal derhalve tot limiet moeten bezitten $f(\varrho_1, w_1, 90^0)$. Dit geldt ook voor de totale energie en de sectorsnelheid der baan, maar aangezien dit constante grootheden zijn, zoo moeten zij deze limietwaarde van den aanvang af bezitten. Men zal dus moeten hebben langs de gansche baan:

$$A = \tfrac{1}{2} v^2 + \int_{\rho_0}^{\rho} F.\,d\varrho = \tfrac{1}{2} w^2{}_1 + \int_{\rho_0}^{\rho_1} F.d\varrho = A_{w_1}. \quad (10)$$

$$B = \tfrac{1}{2} \varrho\, v \sin \mu = \tfrac{1}{2} \varrho_1\, w_1 . = B_{w_1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Uit deze laatste vergelijking volgt:

$$\sin \mu = \frac{\varrho_1\, w_1}{\varrho\, v} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

maar daaruit blijkt onmiddellijk in verband met *stelling II*, dat zulke spiraaleinden in het *stabiliteitsgebied* onmogelijk zijn. Immers, beschouwen wij eerst een cirkelspiraaleinde met asymptotischen buitencirkel. Hier zal dan $A = A_{w_1}$ overal de plaatselijke energie der cirkelbeweging moeten overtreffen, dewijl de cirkelenergie met den straal toeneemt en dus binnen den asymptotischen cirkel overal minder zal moeten bedragen dan er op. Dan zal echter blijkens de eerste alinea dier stelling $\varrho\, v$ moeten toenemen met ϱ, dan zoude men overal moeten hebben $\varrho\, v < \varrho_1\, w_1$; maar dan wordt de vergelijking (12) tot eene ongerijmdheid.

Op volkomen overeenkomstige wijze kan men aantoonen, dat ook cirkelspiraaleinden met asymptotischen binnencirkel onmogelijk zijn. Hier zoude A voortdurend kleiner dan de plaatselijke energie der cirkelbeweging moeten zijn, met het afnemen van ϱ zoude dus $\varrho\, v$ moeten toenemen, waaruit weder evenzeer volgt $\varrho\, v < \varrho_1\, w_1$.

Dat cirkelspiraaleinden op een *afstootingsgebied* niet kunnen voorkomen behoeft wel geen betoog.

In een *omgekeerde-derdemachtsgebied* zullen zij evenmin optreden. Dewijl de plaatselijke cirkelenergie daar overal gelijk is, komen alleen banen in aanmerking, welker totale energie aan die der cirkelbeweging gelijk is, maar bij zulke banen blijft μ constant.

Alleen binnen een *instabiliteitsgebied* kunnen dus cirkelspiraaleinden bestaan, zooals wij zien zullen kunnen zij daar aan weêrskanten van iedere cirkelbaan voorkomen.

Gevolgen. a. Binnen éénzelfde instabiliteitsgebied kan eenzelfde baan geene twee cirkelspiraaleinden bezitten. Immers daar de totale energie der cirkelbeweging geregeld afneemt naar buiten toe, kan de totale energie der baan onmogelijk gelijk zijn aan die van twee verschillende cirkelbanen in datzelfde gebied.

b. Eene spiraalbaan met asymptotischen binnencirkel moet haar apocentrum, indien zij dit bezit, hebben buiten het instabiliteitsgebied, waarop de asymptotische cirkel ligt, want hare totale energie overtreft overal in dit gebied die der cirkelbeweging.

c. Eene spiraalbaan met asymptotischen buitencirkel moet haar pericentrum, indien zij dit bezit, hebben buiten het instabiliteitsgebied, waarin de asymptotische cirkel ligt.

11. STELLING VI. *Door ieder binnen een instabiliteitsgebied gelegen punt kan eene baan gevoerd worden, wier sectorsnelheid en wier totale energie overeenstemmen met die van iedere gegevene in hetzelfde instabiliteitsgebied gelegene cirkelbaan. Zulk eene baan eindigt in het algemeen aan de naar de cirkelbaan toegekeerde zijde in een cirkelspiraal met de cirkelbaan als asymptotischen cirkel. Uitzonderingen hierop kunnen zich voordoen als in de cirkelbaan de aantrekkende kracht zelve, of hare eerste afgeleide naar den straal oneindig groot wordt.*

Bewijs. Laat ϱ_1 zijn de straal van den cirkel, die de asymptotische buiten- op binnencirkel zal moeten worden van de cirkelspiraal, welke men wenscht aan te brengen door eenig punt P gelegen in hetzelfde instabiliteitsgebied op een afstand ϱ_2 van het centrum. Men heeft dan ter berekening van v_2 en μ_2, d. w. z. van grootte en richting der in P vereischte snelheid:

$$A = \tfrac{1}{2} v^2{}_2 + \int_{\rho_0}^{\rho_2} F\, d\varrho = \tfrac{1}{2} w^2{}_1 + \int_{\rho_0}^{\rho_1} F\, d\varrho = A_{w_1} \,. \quad (13)$$

$$B = \tfrac{1}{2} v_2\, \varrho_2 \sin \mu_2 = \tfrac{1}{2} w_1\, \varrho_1 = B_{w_1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

Oppervlakkig zoude het nu kunnen schijnen alsof v_2 onbestaanbaar of $\sin \mu_2$ grooter dan de eenheid zoude kunnen worden.

Om aan te toonen, dat v_2 altijd bestaanbaar gevonden wordt, lossen wij op uit (13):

$$v^2{}_2 = w^2{}_1 + 2 \int_{\rho_2}^{\rho_1} F\, d\varrho \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

Het blijkt dus onmiddellijk dat als $\varrho_2 < \varrho_1$ noodzakelijk $v^2{}_2 > w^2{}_1$ dus v_2 bestaanbaar zal zijn. Is daarentegen $\varrho_2 > \varrho_1$, dan is:

$$A = A_{w_1} > A_{w_2}$$

dus:

$$v^2_2 > w^2_2 ,$$

en dan evenzeer bestaanbaar.

Om nu te bewijzen, dat $w_1 \varrho_1 < v_2 \varrho_2$ en dus $sin\, \mu < 1$ is, zenden wij van P uit met de snelheid v_2 eene radiale baan op den cirkel af Het is gemakkelijk in te zien, dat deze altijd den cirkel bereiken moet. Daar ter plaatse is $w = w_1$, maar tevens is $v \varrho$ blijkens *Stelling II* daar een minimum. Overal elders, dus ook in P, is dus $v \varrho > w_1 \varrho_1$.

Hiermede is dus bewezen, dat door ieder punt van het *instabiliteitsgebied* eene baan gevoerd kan worden, die dezelfde sectorsnelheid en energie bezit als eene gegeven cirkelbaan in datzelfde gebied. Vervolgen wij nu zulk eene baan, in de richting van die cirkelbaan, dan is het vooreerst duidelijk, dat zij deze nimmer passeeren kan; immers in het snijpunt zouden de snelheden van beide banen wegens de gelijkheid van sectorsnelheid en energie naar grootte en richting moeovereenkomen; maar dan is er geene snijding meer Evenmin kan de baan hare nadering tot de cirkelbaan staken. Dit zoude alleen kunnen gebeuren als μ door 90^0 heenging; maar vergelijkt men de snelheid in eenig punt met die in de straks te hulp geroepene rechtlijnige baan in de richting van den straal op denzelfden afstand, dan zal men inzien, dat steeds:

$$v \varrho > w_1 \varrho_1$$

en dus $sin\, \mu$ kleiner dan de eenheid moet blijven.

Nu blijven er nòg twee mogelijkheden over, òf de baan komt na een eindig aantal windingen tot raking met de cirkelbaan en vertoont dan in dit raakpunt eene aanraking van hoogere orde *), òf zij gaat voort asymptotisch tot de

---

*) Op het bestaan dezer beide mogelijkheden ben ik opmerkzaam geworden door eene mededeeling van J. Boussinesq in de *Compt. rend.* 84, p. 944—946. Deze spreekt daar van „une trajectoire circulaire $r = r_0$ „telle que le mobile pourra à partir d'un quelconque de ses points et

cirkelbaan te naderen. Tusschen die twee mogelijkheden kan worden beslist door den tijd te berekenen, die het materieele deeltje noodig heeft om langs de baan, die wij onderzoeken, te geraken van den afstand ϱ, waarop dit

---

„sans que les équations différentielles cessent d'être satisfaites soit con„tinuer à la parcourir, soit en dévier pour décrire une nouvelle trajec„toire". Dit geldt dus voor *alle* cirkelbanen in een instabiliteitsgebied. Toch heeft het materieele deeltje dan in 't algemeen *geene* keus tusschen de beide banen, want om langs de spiraalbaan te geraken tot op een eindigen afstand van de cirkelbaan moet het een oneindig langen weg in een oneindig langen tijd afleggen. De kleinste eindige verstoring evenwel brengt het uit de cirkelbaan op eene baan, die in eindigen tijd op eindigen afstand van de cirkelbaan voert, welke afstand langen tijd en aanzienlijk kan blijven toenemen.

Als zeer bijzonder geval kunnen er ook cirkelbanen voorkomen, waar inderdaad eene keus bestaat tusschen twee banen. Dit kan gebeuren als F of als $\frac{dF}{d\rho}$ oneindig groot wordt op de cirkelbaan. Als voorbeeld wijzen wij op de cirkelbaan $\rho = \rho_1$ beschreven onder de krachtenwet $F = \frac{A}{\rho^3} - f(\rho - \rho_1)^{1/3}$. Die baan ligt in een instabiliteitsgebied. Nemen wij een punt P, gelegen op een afstand ρ_2 van het centrum, dan kan door dit punt eene baan:

$$\tfrac{1}{2} v^2 = \tfrac{1}{2} w_1^2 + \int_{\rho}^{\rho_1} F.\,d\rho \qquad \rho v \sin\mu = \rho_1 w_1$$

gevoerd worden. Daartoe wordt vereischt:

$$v^2 = \frac{A}{\rho^2} + \frac{3}{2} f(\rho - \rho_1)^{\frac{4}{3}}; \qquad \sin^2\mu = \frac{A}{A + \frac{3}{2} f\rho^2.(\rho-\rho_1)^{\frac{4}{3}}}$$

De tijd noodig om van den afstand ρ_2 te komen tot den afstand ρ_1 bedraagt dan:

$$T_{\rho_2}^{\rho_1} = \sqrt{\tfrac{2}{3}} \int_{\rho_2}^{\rho_1} \frac{d\rho}{\sqrt{f}(\rho - \rho_1)^{\frac{2}{3}}} = \sqrt{6 f}.(\rho_1 - \rho_2)^{\frac{1}{3}}$$

en daar ook de snelheid overal eindig is, moet deze baan met een boog van eindige lengte naar de cirkelbaan voeren. Omgekeerd kan het deeltje op elk oogenblik de cirkelbaan verlaten langs zulk eene baan.

deeltje aanvankelijk is, tot den afstand ϱ_1, die overeenkomt met den straal van de cirkelbaan.

Men heeft:

$$\frac{d\varrho}{dt} = v \cos \mu = \sqrt{v^2 - v^2 \sin^2 \mu} = \sqrt{v^2 - \frac{w^2{}_1\, \varrho^2{}_1}{\varrho^{\,2}}} =$$

$$= \sqrt{\left(w_1^2 + 2\int_{\rho}^{\rho_1} F.\, d\varrho - \frac{w_1^2\, \varrho_1^2}{\varrho^{\,2}}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

derhalve vindt men voor den tijd:

$$T_{\rho_2}^{\rho_1} = \int_{\rho_2}^{\rho_1} \frac{\varrho.\, d\varrho}{\sqrt{w_1^2(\varrho^2 - \varrho_1^2) + 2\,\varrho^2 \int_{\rho}^{\rho_1} F.\, d\varrho}} \quad .\ .\ (17)$$

Van deze integraal beschouwen wij slechts dat gedeelte, waarvoor het argument ϱ nog slechts zeer weinig van ϱ_1 verschilt. Stellen wij dan:

$$w_1^2\,(\varrho^2 - \varrho_1^2) + 2\,\varrho^2 \int_{\rho}^{\rho_1} F\, d\varrho = \varphi\,(\varrho) \quad .\ .\ (18)$$

dan is:

$$\varphi\,(\varrho) = \varphi(\varrho_1) + (\varrho - \varrho_1)\varphi'(\varrho_1) + \frac{(\varrho - \varrho_1)^2}{1.\,2}\,\varphi''(\varrho_1 + \theta(\varrho - \varrho_1)) \;.(19)$$

maar:

$$\varphi(\varrho_1) = 0;\ \varphi'(\varrho) = 2\varrho w_1^2 + 4\varrho \int_{\rho}^{\rho_1} F d\varrho - 2\varrho^2 F;\ \varphi'(\varrho_1) = 0 \;.\ (20)$$

$$\varphi''\,(\varrho) = 2\,w_1^2 + 4\int_{\rho}^{\rho_1} F\, d\varrho - 8\,\varrho\, F - 2\,\varrho^2 \frac{dF}{d\varrho};$$

$$\varphi''\,(\varrho_1) = -\,6\,w_1^2 - 2\,\varrho_1^2 \left(\frac{d\,F}{d\varrho}\right)_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

Wij mogen dus stellen:

$$T_{\rho}^{\rho_1} = \int_{\rho}^{\rho_1} \frac{\varrho \, . \, d\varrho}{(\varrho - \varrho_1) \sqrt{\frac{1}{2} \varphi'' \left(\varrho_1 + \theta \left(\varrho - \varrho_1\right)\right)}} \quad . \; . \; . \; (22)$$

Nu is binnen een instabiliteitsgebied $\varphi''(\varrho_1)$ altijd positief; immers binnen zulk een gebied heeft men:

$$\frac{d. F \varrho^3}{d\varrho} < 0 ,$$

dus:

$$\varrho^3 \frac{dF}{d\varrho} + 3 \varrho^2 F < 0$$

dus:

$$\left(3 w^2 + \varrho^2 \frac{dF}{d\varrho}\right) \varrho < 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; (23)$$

waaruit onmiddellijk volgt dat $\varphi''(\varrho_1)$ positief moet zijn.

Noem voorts α de grootste, β de kleinste waarde, welke de uitdrukking:

$$\frac{1}{\varrho} \sqrt{\tfrac{1}{2} \varphi'' \left(\varrho_1 + \theta \left(\varrho - \varrho_1\right)\right)} \quad . \; . \; . \; . \; (24)$$

binnen de grenzen ϱ en ϱ_1 verkrijgt, dan ligt de waarde van $T_{\rho}^{\rho_1}$ tusschen de beide grenzen:

$$\frac{1}{\alpha} \int_{\rho}^{\rho_1} \frac{d\varrho}{\varrho - \varrho_1} \quad \text{en} \quad \frac{1}{\beta} \int_{\rho}^{\rho_1} \frac{d\varrho}{\varrho - \varrho_1} \quad . \; . \; . \; (25)$$

en is dus in elk geval oneindig groot. Men heeft dus altijd te doen met banen die asymptotisch de cirkelbaan naderen zonder haar te bereiken, behalve alleen in het *zeer* bijzonder geval, dat:

$$\varphi''(\varrho_1) = -6 F_1 \varrho_1 - 2 \varrho_1^2 \left(\frac{dF}{d\varrho}\right)_1 = \infty \; . \; . \; (26)$$

Dit geval vereischt natuurlijk een bijzonder onderzoek, dat somtijds tot eene raking van hoogere orde, somtijds weder tot een cirkelspiraal zal voeren. Eene raking van hoogere orde kan dus alleen plaats hebben als of de kracht zelve, of hare eerste afgeleide naar den afstand ergens oneindig groot worden.

Gevolgen. a. In een instabiliteitsgebied zijn aan weerskanten van iedere cirkelbaan cirkelspiraalbanen mogelijk. Alleen de grenscirkels tusschen een instabiliteits- en een stabiliteits- of afstootingsgsbied kunnen slechts van ééne zijde door eene cirkelspiraalbaan genaderd worden.

12. Stelling VII. *Van uit ieder punt kunnen met eene gegevene snelheid* v_1 *zoovele* $\frac{\textit{middelpuntvliedende}}{\textit{middelpuntzoekende}}$ *banen met cirkelspiraaleinden worden afgezonden als er minimaalwaarden van* $v\varrho$ *kleiner dan de voorafgaande minimaalwaarden (geteld van het punt tot het* $\frac{\textit{oneindige}}{\textit{centrum}}$ *en kleiner dan de waarde* $v_1 \varrho_1$ *van dit produkt in het punt zelve (maar niet* NUL) *gelegen zijn op de radiale* $\frac{\textit{middelpuntvliedende}}{\textit{middelpuntzoekende}}$ *baan, welke met diezelfde snelheid begonnen wordt. De asymptotische cirkels dezer spiraaleinden gaan door de punten in de radiale baan, waar de minimumwaarden van* $v\varrho$ *optreden.*

Bewijs. Laat $v_2 \varrho_2$ zulk eene minimaalwaarde zijn, dan zal men, dewijl $v_2 \varrho_2 < v_1 \varrho_1$ van uit het gegeven punt met de snelheid v_1 eene baan kunnen laten vertrekken, onder den hoek μ, zoodat:

$$B = \tfrac{1}{2} v_1 \varrho_1 \sin \mu_1 = \tfrac{1}{2} v_2 \varrho_2$$

Is $\varrho_2 > \varrho_1$ dan geve men deze baan eene middelpuntvliedende, in het tegengestelde geval eene middelpuntzoekende richting. Een *apo-* en *pericentrum* zal dan niet kunnen optreden vóór de voerstraal de waarde ϱ_2 aangenomen heeft, want tusschen ϱ_1 en ϱ_2 is overal op de radiale en dus ook op de afgezondene baan $v\varrho > v_2 \varrho_2$, dus $\sin \mu < 1$.

Een minimum van $v\varrho$ kan blijkens *Stelling II* slechts gelegen zijn in een instabiliteitsgebied. Zoodra echter de baan dit gebied betreedt, gelden de redeneeringen ten bewijze van *Stelling VI* aangevoerd en, behoudens de daar vermelde uitzondering, zal dus de baan eindigen in een cirkelspiraaleinde, terwijl ϱ_2 de straal wordt van den asymptotischen cirkel.

Een minimum van $v\varrho$ *grooter* dan $v_1\varrho_1$ of dan een voorafgaand minimum kan onmogelijk tot eene cirkelspiraalbaan aanleiding geven. Immers indien men de baan de vereischte sectorsnelheid geeft, dan wordt $sin\,\mu$ in het ééne geval onmiddellijk > 1, in het andere wordt $sin\,\mu > 1$ voor waarden der voerstraal die met een voorafgaand minimum overeenstemmen. De baan moet dus vóór die waarde bereikt is, een *apocentrum* vertoonen.

Overigens zal het wel onmiddellijk in 't oog vallen, dat iedere cirkelspiraal, die met de gegeven snelheid van het gegeven punt vertrekt, noodzakelijk tot asymptotischen cirkel één der cirkels moet hebben, welke gaan door de punten, waarvoor $v\varrho$ in de radiale baan minimale waarden verkrijgt.

Immers laat ϱ_2 de straal zijn van den asymptotischen cirkel, dan is:

$$A = A_{w_2}$$

dus:

$$lim.\ v = v_2 = w_2$$

en daar nu cirkelspiraaleinden alleen in een instabiliteitsgebied optreden kunnen, is blijkens *Stelling II* in de radiale baan daar ter plaatse een minimum van $v\varrho$ aanwezig.

IV. Stellingen betreffende het bereiken van het centrum en het oneindige.

13. Stelling VIII. *Wanneer van eenig punt P uit twee middelpuntzoekende banen met gelijke beginsnelheid vertrekken, dan zal de pericentrum-afstand, die voorkomt bij de steilste baan, kleiner moeten zijn (tenzij beide banen naar het centrum mochten voeren), dan die bij de minder steile baan.*

Vertrekken daarentegen van zulk een punt twee middelpuntvliedende banen van gelijke beginsnelheid, maar ongelijke richting, dan zal de apocentrum-afstand bij de steilste baan grooter moeten zijn dan bij de minder steile, tenzij beide tot het oneindige voeren.

Bewijs. Vergelijkt men met elkander de punten der beide middelpuntzoekende banen, wier voerstralen gelijk zijn, dan zijn in die punten ook de snelheden gelijk. Nu is echter het produkt $v \varrho \sin \mu$ voor de steilste baan voortdurend kleiner dan voor de minder steile, derhalve moet $\sin \mu$ bij de steilste baan kleiner zijn dan bij de andere. Voert nu de minder steile tot een pericentrum of tot een cirkelspiraaleinde, dan is aldaar $\sin \mu = 1$, dus van de steilere baan nog altijd < 1, zoodat deze nog in middelpuntzoekende richting voortgaat en tot kleinere waarden der voerstraal aanleiding geeft.

Het tweede gedeelte der stelling wordt door eene gelijksoortige redeneering bewezen.

Gevolgen. a. Voert eene van een bepaald punt uitgaande baan naar het centrum, dan voeren alle steilere banen van hetzelfde punt uitgaande met gelijke snelheid, eveneens naar het centrum.

b. Voert zulk eene baan daarentegen tot een *pericentrum* of *spiraaleinde*, dan eindigt bij alle minder steile banen van dezelfde beginsnelheid de middelpuntzoekende tak op een van deze beide wijzen.

c. Voert eene middelpuntvliedende baan naar het oneindige, dan doen dit ook alle steilere banen met dezelfde beginsnelheid.

d. Voert zulk eene baan tot een *apocentrum* of *spiraaleinde*, dan kunnen minder steile banen niet tot het oneindige voeren.

14. Stelling IX. *Strekt zich eenige baan tot in het centrum uit, dan zal men hebben bij de nadering tot het centrum:*

$$\lim v^2 \varrho^2 = \lim w^2 \varrho^2 = \lim F \varrho^3 \quad . \ . \ . \ . \ . \ (27)$$

Bewijs. Laat ϱ_1 de voerstraal zijn van een der punten, waardoor de baan gaat, v_1 de snelheid in dit punt, dan is:

$$v^2 = v_1^2 + 2 \int_\rho^{\rho_1} F\, d\varrho \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (28)$$

derhalve:

$$lim\ \varrho^2 v^2 = lim\ 2\, \varrho^2 \int_\rho^{\rho_1} F\, d\varrho \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (29)$$

Is nu *ten eerste* $lim \int_\rho^{\rho_1} F\, d\varrho$ eindig, dan is $lim\ v\, \varrho$ NUL, maar dan moet wel tevens $lim\ F \varrho^3$ NUL zijn; want ware $lim\ F \varrho^3$ eindig, dan mag men, van af eene zekere waarde ϱ' der voerstraal tot in het centrum, stellen:

$$F \varrho^3 > \gamma\ ,$$

waarin γ eindig is. Dan echter is:

$$lim \int_\rho^{\rho_1} F\, d\varrho \;\; > \gamma .\ lim \int_\rho^{\rho_1} \frac{d\varrho}{\varrho^3} = \infty$$

Is daarentegen *ten tweede* $lim \int_\rho^{\rho_1} F\, d\varrho$ oneindig dan kan men schrijven:

$$lim\ \varrho^2 v^2 = lim \frac{2 \int_\rho^{\rho_1} F\, d\varrho}{\varrho^{-2}} = lim \frac{-2F}{-2\varrho^{-3}} = lim F \varrho^3 = lim\ w^2 \varrho^2.$$

zoodat in beide gevallen de stelling doorgaat.

15. STELLING X^a. *Ligt om het centrum heen een afstootingsgebied, of is in het centrum* $lim\ F\, \varrho^3 = 0$, *dan kunnen alleen radiale banen tot het centrum voeren. Alle andere banen, die het afstootingsgebied of stabiliteitsgebied betreden, dat het centrum omgeeft, bezitten daarbinnen een pericentrum.*

Is in het centrum $lim\ F\, \varrho^3 = \alpha^2$, *dan zullen slechts zulke banen, wier sectorsnelheid kleiner is dan* $\frac{1}{2}\alpha$, *en soms ook die* *wier sectorsnelheid gelijk is aan $\frac{1}{2}\alpha$, het centrum kunnen bereiken.*

Bewijs. Stellen wij ons eene baan voor, die naar een centrum voert, waar $F\varrho^3$ tot nul nadert, dan nadert dus ook $v\varrho$ onbepaald tot nul; maar dan kan ook de sectorsnelheid $\frac{1}{2} v\varrho \sin \mu$, die constant moet zijn, niet van nul verschillen. De baan moet dan radiaal zijn.

Is het centrum door een afstootingsgebied omringd en nadert $F\varrho^3$ tot nul, dan gaat dezelfde redeneering door. Is $\lim F\varrho^3$ negatief eindig of oneindig groot, dan kan zelfs eene radiale baan niet tot het centrum voeren, althans bij eindige snelheid van vertrek, wat wij trouwens steeds onderstellen.

Nadert $F\varrho^3$ tot eene eindige positieve grenswaarde α, zooals zoowel bij een instabiliteits- als bij een stabiliteitsgebied voorkomen kan, dan zal $\frac{1}{2} v\varrho \sin \mu$ in de onmiddellijke nabijheid van het centrum en dan ook overal, de waarde $\frac{1}{2}\alpha \sin \mu_0$ moeten bezitten, als μ_0 de grenswaarde voorstelt, waartoe de hoek μ in het centrum nadert; derhalve is de sectorsnelheid van *alle* banen, die door het centrum gaan, kleiner dan $\frac{1}{2}\alpha$.

Indien zulke banen het centrum bereiken, dan nadert μ tot een zekere limiet en zij nemen dan in de nabijheid van het centrum den vorm aan eener logarithmische spiraal, die met een oneindig aantal windingen het centrum omgeeft, maar het toch in eindigen tijd bereikt.

16. Het antwoord op de vraag of eene baan, wier sectorsnelheid *juist* $\frac{1}{2}\alpha$ bedraagt, ook tot het centrum voeren kan, is van eenigszins meer ingewikkelden aard. In zulk eene baan moet in de nabijheid van het centrum noodzakelijk $\lim \mu = 90^0$ worden, want $v\varrho \sin \mu = \alpha$ en $\lim v^2\varrho^2 = \lim F\varrho^3 = \alpha^2$. Zulk eene baan moet dus daar ter plaatse in middelpuntzoekende richting noodzakelijk voortdurend minder steil worden. Dit kan alleen dan het geval zijn, zooals wij weten, als $v > w$. Men moet dus hebben: $\lim v \geqq \lim w$. Laat nu ϱ_1 de voerstraal zijn van een punt zoo dicht bij het centrum, dat van daaraf tot in het centrum het produkt $F\varrho^3$ geregeld in denzelfden zin verandert, en stel:

$$F\varrho^3 = \alpha^2 + \varepsilon \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (30)$$

dan is ε eene grootheid, die in een stabiliteitsgebied *positief*, in een instabiliteitsgebied *negatief* is, en met ϱ tot *nul* nadert.

Dan is:

$$v^2 = v_1^2 + 2\int_{\rho}^{\rho_1} F d\varrho = v_1^2 + \frac{\alpha^2}{\varrho^2} - \frac{\alpha^2}{\varrho_1^2} + 2\int_{\rho}^{\rho_1} \frac{\varepsilon}{\varrho^3} d\varrho \quad . \quad (31)$$

$$w^2 = F\varrho = \frac{\alpha^2}{\varrho^2} + \frac{\varepsilon}{\varrho^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (32)$$

voorts:

$$v_1\, \varrho_1 \sin \mu_1 = \alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (33)$$

Uit deze drie betrekkingen volgt:

$$v^2 - w^2 = v_1^2 \cos^2 \mu_1 + \left[2\int_{\rho}^{\rho_1} \frac{\varepsilon}{\varrho^3} d\varrho - \frac{\varepsilon}{\varrho^2} \right] \quad . \quad (34)$$

Nu is het gemakkelijk in te zien, dat als ε van af ϱ_1 tot ϱ voortdurend afneemt, in *absolute* waarde:

$$2\int_{\rho}^{\rho_1} \frac{\varepsilon}{\varrho^3} d\varrho > \frac{\varepsilon}{\varrho^2}$$

waar nu, zooals in een stabiliteitsgebied, ε positief is, zal dus altijd aan de voorwaarde $\lim v > \lim w$ voldaan kunnen worden. Een met de sectorsnelheid α uit het punt, welks voerstraal is ϱ_1, afgezondene baan, zal noodzakelijk het centrum onbepaald moeten naderen, derhalve:

STELLING X_b. *Wordt het centrum omringd door een stabiliteitsgebied, dan zullen er altijd banen mogelijk zijn, die vertrekkende met de sectorsnelheid* $\frac{1}{2}\alpha$, *het centrum onbepaald naderen.*

Wat betreft den tijd, noodig om van het punt, welks voerstraal is ϱ_1, het centrum te bereiken, kan men opmerken, dat: (zie) 16)).

$$T = lim \int_{\rho}^{\rho_1} \frac{d\varrho}{\sqrt{v^2 - v^2 \sin^2 \mu}} =$$

$$= lim \int_{\rho}^{\rho_1} \frac{d\varrho}{\sqrt{v^2 - \frac{\alpha^2}{\varrho^2}}} = lim \int_{\rho}^{\rho_1} \frac{d\varrho}{\sqrt{v_1^2 - \frac{\alpha^2}{\varrho_1^2} + 2\int_{\rho}^{\rho_1} \frac{\varepsilon}{\varrho^3} d\varrho}} . \quad (35)$$

Dewijl steeds:

$$v_1 \varrho_1 > \alpha^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (36)$$

en verder in een stabiliteitsgebied ε positief is, zoo nadert de noemer niet tot nul en de tijd wordt eindig, derhalve:

Stelling X^c. *In een stabiliteitsgebied, dat het centrum omringt, is de tijd noodig tot het bereiken van het centrum altijd eindig.*

17. Om te onderzoeken of ook in een instabiliteitsgebied banen wier sectorsnelheid bedraagt $\frac{1}{2}\alpha$ het centrum kunnen bereiken, denken wij ons $F\varrho^3$ naar de opklimmende machten van ϱ ontwikkeld, dan is blijkens (30):

$$\varepsilon = \varrho \left(\frac{d.F\varrho^3}{d\varrho}\right)_0 + \frac{\varrho^2}{1.2}\left(\frac{d.^2F\varrho^3}{d\varrho^2}\right)_0 + \frac{\varrho^3}{1.2.3}\left(\frac{d.^3F\varrho^3}{d\varrho^3}\right)_0 + \text{enz.} \quad . \ (37)$$

en voorts volgt uit (34):

$$v^2 - w^2 = v_1^2 \cos^2 \mu_1 + \left\{\frac{1}{\varrho} - \frac{2}{\varrho_1}\right\} \left(\frac{d.\ F\varrho^3}{d\varrho}\right)_0 +$$

$$+ \tfrac{1}{2}\left[2\, l\left(\frac{\varrho_0}{\varrho}\right) - 1\right]\left(\frac{d^2F\varrho^3}{d\varrho^2}\right)_0 + \tfrac{1}{6}\left[2\varrho_1 - 3\varrho\right]\left(\frac{d^3F\varrho^3}{d\varrho^3}\right)_0 + \text{enz.} \quad . \ (38)$$

Hier wordt de tweede term van het tweede lid in 't algemeen in het centrum negatief oneindig groot. Het is dus in den regel onmogelijk v_1 zoodanig te kiezen, dat aan de voorwaarde $v > w$ in de nabijheid van het centrum is voldaan. Ditzelfde geldt — als soms $\left(\frac{d.\ F\varrho^3}{d\varrho}\right)_0$ *nul* mocht zijn — voor den derden term van het tweede lid, want ook dan moet $\left(\frac{d^2\,F\varrho^3}{d\varrho^2}\right)$ weder negatief worden, anders hadde men met een stabiliteitsgebied te doen en wordt de term ten duidelijkste oneindig groot voor $\varrho = 0$, derhalve:

STELLING X_d. *In een instabiliteitsgebied, dat het centrum omringt, kunnen geene banen, vertrekkende met eene sectorsnelheid* $\frac{1}{2}\alpha$, *het centrum bereiken, tenzij lim.* $\frac{d\,F\varrho^3}{d\varrho}$ *en lim.* $\frac{d^2F\varrho^3}{d\varrho^2}$ *beiden nul zijn.*

Doet zich daarentegen het zeer bijzondere geval voor, dat *lim.* $\frac{d\,F\varrho^3}{d\varrho}$ en *lim.* $\frac{d^2\,F\varrho^3}{d\varrho^2}$ beiden *nul* zijn, dan is het mogelijk voor waarden van v_1, die eene voldoende grootte bezitten, banen te verkrijgen, die met de sectorsnelheid $\frac{1}{2}\alpha$ in een instabiliteitsgebied tot het centrum voeren.

Als uitdrukking voor den tijd noodig om het centrum te bereiken vindt men dan door substitutie in (35):

$$=lim\int_{\rho}^{\rho_1}\frac{d\varrho}{\sqrt{v_1{}^2-\frac{\alpha^2}{\varrho_1{}^2}+\frac{1}{3}(\varrho_1-\varrho)\left(\frac{d^3F\varrho^3}{d\varrho^3}\right)_0+\frac{1}{24}(\varrho_1{}^2-\varrho^2)\left(\frac{d^4F\varrho^3}{d\varrho^4}\right)_0+\text{enz.}}} \quad .\,(39)$$

In den regel is die integraal eindig. En dit is zelfs *altijd* het geval als $\left(\frac{d^3\,F}{d\varrho^3}\right)_0$ niet nul is. Alleen *als* deze uitdrukking nul is, kan zich het geval voordoen, dat de tijd oneindig groot wordt. Als voorbeeld daarvan kan dienen eene baan beschreven onder den invloed eener kracht:

$$F = \frac{\alpha^2}{\varrho^3} - \beta\varrho$$

Indien ϱ_1 voorstelt de voerstraal van een punt, gelegen in het instabiliteitsgebied, dat het centrum omringt, v_1 de snelheid en μ_1 de hoek tusschen raaklijn en voerstraal daar ter plaatse, dan vindt men voor den tijd, noodig om het centrum te bereiken, als $v_1\,\varrho_1\,sin\,\mu_1 = \alpha$:

$$T = \lim \int_{\rho}^{\rho_1} \frac{d\varrho}{\sqrt{v_1^2 - \frac{\alpha^2}{\varrho_1^2} - \beta(\varrho_1^2 - \varrho^2)}}$$

Kiest men nu v_1 zoodanig dat:

$$v_1^2 = \frac{\alpha^2}{\varrho_1^2} + \beta \varrho_1^2$$

dan wordt voor deze baan de tijd noodig tot het bereiken van het centrum oneindig groot, en dat er inderdaad zulk eene baan afgezonden worden kan, blijkt uit de benoodigde waarde voor μ_1, men vindt namelijk:

$$\sin \mu_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\beta}{\alpha^2} \varrho_1^4}}$$

waarvoor steeds kan worden gezorgd.

Alle steilere banen, die van dit punt met de sectorsnelheid $\frac{1}{2}\alpha$ vertrekken, bereiken het centrum in eindigen tijd, minder steile bereiken het niet.

18. Stelling XI. *In eenig instabiliteitsgebied, dat zich tot in het oneindige uitstrekt, is de cirkelsnelheid grooter dan de snelheid, die aan eenig materieel deeltje gegeven moet worden om in radiale richting het oneindige te bereiken. In een stabiliteitsgebied, dat zich tot in het oneindige uitstrekt, is het omgekeerde het geval.*

Bewijs. Het eerste gedeelte der stelling is eigenlijk reeds bewezen in *Gevolg g* der eerste stelling, want indien eene in schuine richting afgezondene baan het oneindige bereikt, dan zal dit blijkens *stelling VIII* à fortiori het geval moeten zijn met eene radiale baan.

Zie hier een ander bewijs, tevens van het tweede gedeelte der stelling. Laat ϱ_1 de afstand zijn van eenig punt in zulk een $\frac{\text{instabiliteits}}{\text{stabiliteits}}$ gebied gelegen, dan is voor iedere grootere afstand: $F \varrho^3 \lessgtr F_1 \varrho_1^3$, derhalve:

$$\int_{\rho_1}^{\infty} F\,d\varrho \lessgtr F_1\,\varrho_1^3 \int_{\rho_1}^{\infty} \frac{d\varrho}{\varrho^3} \lessgtr \tfrac{1}{2} F_1\,\varrho_1 \quad \dots\dots (40)$$

dus, als wij de snelheid noodig om in radiale richting het oneindige te bereiken u_1 noemen:

$$u_1 \lessgtr w_1 \quad \dots\dots\dots\dots (41)$$

naar gelang het bedoelde gebied een *instabiliteits* of een *stabiliteitsgebied* voorstelt.

Gevolg a. Iedere baan vertrekkende in een stabiliteitsgebied met eene snelheid grooter dan of gelijk u_1, *zal ook noodzakelijk een oneindig voortloopende tak moeten bezitten.*

Immers zal, blijkens hetgeen bewezen is, als men de baan in middelpuntvliedende richting volgt, de snelheid in de baan, die altijd voldoende moet blijven om het oneindige te bereiken, overal de plaatselijke cirkelsnelheid overtreffen; dus kan geen apocentrum optreden.

19. Stelling XII. *Wanneer eene baan zich tot in het oneindige voortzet, terwijl overal de snelheid juist voldoende is, om langs de radiale baan tot in het oneindige te voeren, dan is:*

$$\lim v\varrho = \lim \sqrt{F\varrho^3} = \lim w\varrho$$

Bewijs. Laat u_1 de snelheid zijn op een afstand ϱ_1 van het centrum, dan is dus volgens onderstelling:

$$u_1^2 = 2\int_{\rho_1}^{\infty} F\,d\varrho \quad \dots\dots\dots (42)$$

Nu is overal elders:

$$v^2 = u_1^2 - 2\int_{\rho_1}^{\rho} F\,d\varrho \quad \dots\dots\dots (43)$$

dus:

$$\lim \varrho^2 v^2 = \lim \varrho^2 \left(u_1^2 - 2\int_{\rho_1}^{\rho} F\,d\varrho\right) = \lim \frac{u_1^2 - 2\int_{\rho_1}^{\rho} F\,d\varrho}{\varrho^{-2}} \quad . (44)$$

Bij de limiet gaat deze uitdrukking over in $\frac{0}{0}$; maar teller en noemer differentieerende, vindt men onmiddellijk:

$$lim\ \varrho^2\ v^2 = lim\ \frac{-\ 2F}{-\ 2\ \varrho^{-3}} = lim\ F\ \varrho^3\ \ . \ . \ . \ (45)$$

V. Toepassingen.

20. I. *Bepaal de verschillende hoofdvormen der banen, die optreden kunnen onder de werking eéner gegeven krachtenwet, wanneer een materieel deeltje van een gegeven punt met gegeven snelheid, maar telkens in verschillende richtingen, vertrekt.*

Men begint met aan te brengen alle banen, die tot cirkelspiraaleinden voeren. Daartoe is het blijkens *stelling VII* voldoende de punten te bepalen op de radiale baan, die met dezelfde snelheid van uit hetzelfde punt afgezonden wordt, voor welke $v\varrho$ eene minimumwaarde aanneemt.

Om die punten te vinden moet men oplossen de, in het algemeen transcendentale, vergelijking:

$$A_w = A\ \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (46)$$

dat wil zeggen:

$$\tfrac{1}{2}\ \varrho F + \int_{\rho_0}^{\rho} F\, d\varrho = \tfrac{1}{2}\ v_1{}^2 + \int_{\rho_0}^{\rho_1} F.d\varrho\ \ . \ . \ . \ (47)$$

Heeft men echter vooraf het veld verdeeld in stabiliteits-instabiliteits- en afstootingsgebieden, dan zijn de wortels reeds gescheiden. In ieder stabiliteits- en instabiliteitsgebied kan namelijk volgens *Stelling II, Gevolg a* slechts één wortel gelegen zijn. Bovendien behoeft men slechts die wortels te kennen, welke in instabiliteitsgebieden gelegen zijn, want die in een stabiliteitsgebied voeren tot maximumwaarden van $v\varrho$. Eindelijk moeten, als de radiale baan niet tot het oneindige of tot het centrum voert maar eindpunten bezit, waar de snelheid omkeert, onmiddellijk de wortels verworpen worden gelegen buiten deze eindpunten.

Om nu te weten of in een gegeven instabiliteitsgebied, 't welk door de radiale baan betreden wordt, al of niet een wortel ligt, bepale men de waarde van A_w op de beide grenzen. Ligt de waarde van A daartusschen, dan alleen is er een wortel, die dan door benadering gevonden worden kan.

Eenige moeilijkheid kan dit nog opleveren bij het buitenste instabiliteitsgebied, indien dit zich tot in het oneindige uitstrekt, of bij het binnenste, indien dit het centrum onmiddellijk omgeeft. In het eerste geval moet men bepalen $lim\ A_w$ voor $\varrho = \infty$, in het tweede voor $\varrho = 0$.

De bepaling van $lim\ A_w$ voor $\varrho = \infty$ levert, als het laatste gebied een instabiliteitsgebied is, geene bijzondere moeilijkheid op, want is $lim\ F\varrho^3$ eindig of *nul*, dan is $lim\ F\varrho$ **ZEKER** nul, dus:

$$lim\ A_w\ (\varrho = \infty) = \int_{\rho_0}^{\infty} F d\varrho \quad \ldots\ldots \quad (48)$$

Daarentegen neemt $lim\ A_w$ voor $\varrho = 0$ en in een instabiliteitsgebied meestal een onbepaalden vorm aan, en dan kunnen de volgende opmerkingen zeer tot bekorting bijdragen:

1^e^. *Is lim* $F\ \varrho^3$ *oneindig, dan is ook limiet* A_w *oneindig.* Immers men heeft blijkens (6):

$$\frac{d\,A_w}{d\varrho} = \frac{1}{2\,\varrho^2}\,\frac{d\,F\varrho^3}{d\varrho}$$

Beschouwt men de toename van A_w en $F\varrho^3$ als men van af een afstand ϱ_1 tot op een kleiner afstand ϱ_2 van het centrum nadert, dan is daarbij dus:

$$\Delta A_w > \frac{1}{2\,\varrho_1{}^2}\,\Delta F\varrho^3 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (49)$$

waaruit onmiddellijk volgt, dat als $F\varrho^3$ oneindig wordt, zulks ook met A_w het geval moet zijn:

2e. *Ook dan wanneer $F\varrho^3$ tot een eindige limiet nadert, zal A_w nog oneindig groot worden, tenzij lim* $\left(\frac{dF\varrho^3}{d\varrho}\right)$ *en lim* $\left(\frac{d^2F\varrho^3}{d\varrho^2}\right)$ *beiden nul worden.*

Men mag als *lim* $F\varrho^3$ eindig is, stellen:

$$F\varrho^3 = (F\varrho^3)_0 + \varrho\left(\frac{dF\varrho^3}{d\varrho}\right)_0 + \frac{\varrho^2}{1.2}\left(\frac{d^2F\varrho^3}{d\varrho^2}\right)_0 + \frac{\varrho^3}{1.2.3}\left(\frac{d^3F\varrho^3}{d\varrho^3}\right)_0 + .. \quad (50)$$

Dan is echter:

$$A_w = \tfrac{1}{2}F\varrho + \int_{\rho_0}^{\rho} F d\varrho = \frac{1}{2\varrho_0^{\,2}}(F\varrho^3)_0 + \left(\frac{1}{\varrho_0} - \frac{1}{\varrho}\right)\left(\frac{dF\varrho^3}{d\varrho}\right)_0 +$$

$$+ \frac{1}{4}\left(2 + l\left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)\right)\left(\frac{d^2F\varrho^3}{d\varrho^2}\right)_0 + \frac{1}{12}(3\varrho - 2\varrho_0)\left(\frac{d^3F\varrho^3}{d\varrho^3}\right)_0 + . \quad (51)$$

welke uitdrukking altijd ∞ wordt, tenzij de bedoelde differentiaalquotienten *nul* worden. Alleen *dan* is dus eene eigenlijke berekening van *lim* A_w noodig.

21. Heeft men nu de voerstralen bepaald van al die punten in de radiale baan waar $v\varrho$ minimale waarden verkrijgt, dan berekene men die minimale waarden zelve. Zeer wordt die berekening vereenvoudigd door de opmerking, dat volgens *stelling II* in die punten $v = w$, dus:

$$v\varrho = w\varrho = \sqrt{F\varrho^3}$$

is.

In overeenstemming met *stelling VII* moet men nu verwerpen al die punten voor welke $v\varrho > v_1\,\varrho_1$, alsmede die voor welke $v\varrho$ waarden verkrijgt *grooter* dan de waarde dier uitdrukking voor een der andere punten tusschen dit punt en het punt van vertrek gelegen.

Zooveel punten nu overblijven, zooveel banen kunnen met de gegeven snelheid van het punt vertrekkende, tot een spiraaleinde voeren. De voerstralen der punten zijn daarbij de stralen der asymptotische cirkels.

Laat ϱ_p de voerstraal van, v_p de snelheid in de radiale baan voor zulk een punt voorstellen, μ_p de hoek waaronder de bijbehoorende baan met cirkelspiraaleinde het punt van vertrek verlaten moet, dan is blijkens *stelling VII*:

$$sin\, \mu_p = \frac{v_p\, \varrho_p}{v\, \varrho} = \frac{w_p\, \varrho_p}{v\, \varrho}.$$

Zoo kan men dus in het gegeven punt alle banen aanbrengen, die voor de gegevene snelheid tot cirkelspiraaleinden voeren. Ligt van eenige baan de hoek van vertrek tusschen die van twee banen met cirkelspiraaleinden, dan moet zij een apo- of pericentrum bezitten, gelegen binnen het gebied begrensd door de beide asymptotische cirkels der cirkelspiraaleinden. Zijn de banen met cirkelspiraaleinden beide middelpuntzoekend of beide middelpuntvliedend, dan zal men het gedeelte van het veld waar het peri- of apocentrum liggen kan, nog kunnen beperken door de opmerking, dat het zich zeker niet bevinden kan in het instabiliteitsgebied, behoorende bij de minst steile der beide banen met cirkelspiraaleinden.

Daaruit volgt dan, dat, als de snelheid, geleidelijk van richting verandert, bij het passeeren van een der richtingen, die tot het ontstaan van banen met cirkelspiralen aanleiding geven, een sprong plaats heeft in den afstand van het apocentrum, van welke sprong in § 4 verklaring gegeven is uit een zuiver wiskundig oogpunt.

Wenscht men voor eene gegevene baan de voerstraal van het peri- of apocentrum te vinden, dan volstaat de opmerking, dat die voerstraal gelijk is aan die van het punt in de radiale baan, alwaar voor de eerste maal — gerekend van af het punt van vertrek — de betrekking:

$$v\, \varrho = v_1\, \varrho_1\, sin\, \mu_1 \text{ *)} \quad \dots\dots\dots \quad (54)$$

*) Uit deze betrekking volgt:

$$\rho^2 \left(v_1^2 - 2\int_{\rho_1}^{\rho} F\, d\, \rho\right) = v_1^2\, \rho_1^2\, sin^2\, \mu_1.$$

doorgaat. Van die voerstraal toch, wordt in de gegeven baan $\sin \mu = 1$ dus $\mu = 90^o$.

22. Zijn nu de beide steilste banen bepaald, welke in middelpuntvliedende en middelpuntzoekende richting tot cirkelspiraaleinden voeren, dan blijft nog slechts over het onderzoek der steilere banen.

Wat de *middelpuntvliedende banen* betreft, is de beslissing nu uiterst gemakkelijk geworden. *Zij hangt slechts af van de vraag of de radiale baan naar het oneindige voert, m. a. w. of de halve levende kracht voldoende is om den arbeid te overwinnen noodig om het deeltje door alle aantrekkingsgebieden heen naar het oneindige te voeren.* Immers is die levende kracht daartoe *onvoldoende*, dan moet er natuurlijk een apocentrum zijn. Het produkt $v \varrho$ zal in de radiale baan na door de laatste minimaalwaarde gegaan te zijn, aanvankelijk toenemen om later weer af te nemen en met de snelheid nul te worden. Vooraf zal het een oogenblik gelijk worden van $v_1 \varrho_1 \sin \mu_1$, wanneer de apocentrumafstand der baan is bereikt.

Is de levende kracht daarentegen *meer dan voldoende*, dan

Dit is de bekende vergelijking in ρ, dienende ter bepaling van de afstanden der toppen eener centrale baan tot het centrum. Natuurlijk ware de oplossing van het vraagstuk, dat ons bezighoudt, ook langs zuiver algebraïschen weg uit deze vergelijking te verkrijgen.

Banen met een apo- en pericentrum ontstaan als deze verg. twee wortels heeft, waartusschen ρ_1 gelegen is. Ligt er geen wortel tusschen ρ_1 en ∞, of geen tusschen ρ_1 en *nul*, dan gaat de baan naar het oneindige of naar het centrum.

Overgangen tusschen deze gevallen vinden plaats, wanneer een der beide wortels, waartusschen ρ_1 ligt, met een anderen samenvalt. Dit kan alleen geschieden voor waarden van die wortels, welke voldoen aan de afgeleide verg.:

$$2\rho \int_{\rho_1}^{\rho} F d\rho + F\rho - v_1^2 = 0,$$

welke identisch is met onze verg. $A_w = A$. In het overgangsgeval ontstaan in den regel cirkelspiraaleinden.

Wil men verder in bijzonderheden treden, grenzen van de wortels der vergelijking en hare afgeleide vaststellen, regels aangeven om te bepalen, welke wortels der afgeleide werkelijk tot een overgangsgeval voeren kunnen, enz., dan treden een voor een al de moeilijkheden op, die in het bovenstaande op, naar het mij voorkomt, meer aanschouwelijke wijze overwonnen zijn.

moet de baan naar het oneindige gaan, want hare sectorsnelheid is kleiner dan die der steilste cirkelspiraalbaan voor welke zij gelijk is aan de helft der kleinste minimaalwaarde van $v\,\varrho$ gelegen tusschen het punt van vertrek en het oneindige. Derhalve is overal:

$$v\,\varrho\,\sin\mu = v_1\,\varrho_1\,\sin\mu_1 < v\,\varrho$$

$$\sin\mu < 1.$$

Eenige meerdere moeilijkheid heeft het in te beslissen tusschen de beide mogelijkheden, als de levende kracht *juist voldoende* is. Dan toch neemt de limietwaarde van $v\,\varrho$ een onbepaalden vorm aan. Nu komt ons echter *stelling XII* te hulp ter bepaling dezer limietwaarde. Is die limietwaarde $\sqrt{F\varrho^3}$ *grooter* dan de kleinste minimaalwaarde van $v\,\varrho$ tusschen het punt van vertrek en het oneindige, en — indien iedere minimaalwaarde kleiner dan $v_1\,\varrho_1$ ontbreken mocht – dan $v_1\,\varrho_1$, dan voeren al de banen, steiler dan de steilste middelpuntvliedende cirkelspiraalbaan, of, als zulk eene ontbreekt, alle middelpuntvliedende banen, naar het oneindige.

Is de limietwaarde $\sqrt{F\varrho^3}$ daarentegen kleiner dan $v_1\,\varrho_1$ en kleiner dan de kleinste minimaalwaarde, dan bestaat er een nieuwe grenshoek μ_p, te berekenen uit:

$$\sin\mu_p = \frac{\sqrt{F\varrho^3}}{v_1\,\varrho_1}$$

zoodat alle steilere banen evenals de baan die onder dien grenshoek vertrekt zelve, naar het oneindige voeren, alle minder steile een apocentrum bezitten tusschen de buitenste grens van het instabiliteitsgebied der steilste cirkelspiraalbaan en het oneindige. De baan, die onder den grenshoek zelf vertrekt, bezit de eigenaardigheid dat zij zich meer en meer loodrecht stelt op de voerstraal. Ook de andere banen, die het oneindige bereiken, hebben daartoe oneindig veel windingen noodig, maar de hoek tusschen voerstraal en baan nadert hier tot eene andere grens.

23. Wat de *middelpuntzoekende banen* betreft steiler dan de steilste middelpuntzoekende baan met cirkelspiraaleinde, om hier te beslissen of het centrum al of niet bereikt worden

zal, *bepale men eerst lim* $\sqrt{F\varrho^3}$ *voor* $\varrho = 0$. *Is deze limiet nul* dan bezitten volgens *Stelling* X_a al de bedoelde banen een pericentrum. Ditzelfde is het geval als er om het centrum heen een afstootingsgebied ligt en de limiet dus onbestaanbaar wordt.

Is lim. $\sqrt{F\varrho^3}$ *daarentegen oneindig groot, of ook maar grooter dan* $v_1\,\varrho_1$ *of grooter dan de kleinste minimaalwaarde van* $v\,\varrho$ *gelegen tusschen het punt van vertrek en het centrum,* dan voeren al deze banen naar het centrum; indien althans de radiale baan daar henen voert, wat belet zoude kunnen worden door de aanwezigheid van een afstootingsgebied. In dat laatste geval bezitten natuurlijk al de banen weer een pericentrum.

Een nader onderzoek is dus alleen noodig in het geval dat $\lim \sqrt{F\varrho^3} = \alpha$ eindig is, kleiner dan $v_1\,\varrho_1$, en kleiner dan de kleinste minimaalwaarde van $v\,\varrho$ in de richting van het centrum.

Er ontstaat dan een nieuwe grenshoek:

$$\sin \mu_p = \frac{\sqrt{F\varrho^3}}{v_1\,\varrho_1}$$

zoodat de steilere banen door het centrum gaan, de minder steile een apocentrum bezitten.

Het grensgeval is in § 16 uitvoerig onderzocht, waarheen wij verwijzen.

II. 24. *Bepaal de verschillende hoofdvormen der banen, beschreven onder de werking eener aantrekkende kracht* $F = f\varrho^n$, *en de voorwaarden waaronder zij ontstaan.*

Eerste geval $n \geqq -1$.

Behalve radiale banen en cirkelbanen, die wij in het vervolg stilzwijgend uitgezonderd denken, is er slechts *ééne* soort van banen mogelijk, namelijk *banen, die zoowel een apocentrum als een pericentrum bezitten.* Immers de arbeid om het oneindige te bereiken is oneindig groot, dus zijn er nooit oneindige takken. *Lim.* $F\varrho^3$ is *nul,* dus wordt het centrum niet bereikt. Het gansche gebied is een stabiliteitsgebied, dus zijn er geene cirkelspiraaleinden.

Tweede geval. $-1 > n > 3$.

Er zijn *twee* soorten van banen. *De eerste soort bezit een apocentrum en een pericentrum.* Zij ontstaat als $v_1 < \sqrt{\frac{2f}{-n-1} \varrho_1^{n+1}}$; dan toch is de levende kracht onvoldoende om de arbeid te leveren tot het bereiken van het oneindige noodig. *De tweede soort bezit oneindige takken en een pericentrum.* Zij ontstaat altijd als $v_1 \geqq \sqrt{\frac{2f}{-n-1} \varrho_1^{n+1}}$ blijkens *Stelling XI. Gevolg a.*

Derde geval. $n = -3.$

Er zijn *drie* soorten van banen. *De eerste soort gaat door het centrum en bezit een apocentrum.* Zij ontstaat als $v_1 < w_1 = \frac{\sqrt{f}}{\varrho_1}$. Immers blijkens *Stelling I. Gevolg. h* moet de baan dan in middelpuntzoekende richting tot in het centrum voeren, tevens kan zij geen oneindige takken hebben, omdat de levende kracht onvoldoende is. *De tweede soort bezit een oneindigen tak en voert tot het centrum.* Zij ontstaat indien gelijktijdig $v_1 \geqq w_1 = \frac{\sqrt{f}}{\varrho_1}$ en $\sin \mu_1 \leqq \frac{\sqrt{f}}{\varrho_1 v_1}$ Immers blijkens *Stelling I, Gevolg g* moet dan in middelpuntvliedende richting een oneindige tak optreden, terwijl door toepassing van § 21 onmiddellijk gevonden wordt dat het centrum bereikt zal moeten worden. Deze tweede soort bevat in zich de banen in den vorm van logarithmische spiralen, die ontstaan als $v_1 = w_1 = \frac{\sqrt{f}}{\varrho_1}$. (*Zie Stelling III, Gevolg e*).

De derde soort bezit een pericentrum en twee oneindige takken. Zij ontstaat als $v_1 > w_1 = \frac{\sqrt{f}}{\varrho_1}$ en gelijktijdig $\sin \mu_1 > \frac{\sqrt{f}}{\varrho_1 v_1}$.

Vierde geval $n < -3.$

Er zijn *vijf* soorten van banen. *De eerste soort gaat door het centrum en bezit een apocentrum.* Zij ontstaat *altijd* als $v_1 < \sqrt{\frac{2f}{-n-1}\varrho_1^{n+1}}$; dan toch kunnen geen oneindige takken optreden, omdat de levende kracht onvoldoende is. Bovendien is dan $v_1 < w_1 = \sqrt{f\varrho^{n+1}}$ en moet dus blijkens *Stelling I, Gevolg h* de baan in middelpuntzoekende richting tot het centrum voeren. Zij ontstaat *nooit* als $v_1 > w_1 = \sqrt{f\varrho_1^{n+1}}$, want dan voert de baan blijkens *Stelling I, Gevolg g* tot in het oneindige. Ligt v_1 tusschen die beide grenzen, dan zal er een grenshoek μ' zijn aan te wijzen, zoodanig dat de baan welke in middelpuntvliedende richting onder dien grenshoek vertrekt tot een cirkelspiraaleinde voert, iedere steilere tot het oneindige, iedere minder steile tot een apocentrum. Ten einde die grenshoek te vinden bepale men uit verg. (47) de waarde der voerstraal voor welke $v\varrho$ een minimum wordt; men vindt:

$$\varrho = \left(\frac{-n-1}{-n-3}\cdot\frac{v_1^2}{f} - \frac{2}{-n-3}\varrho_1^{n+1}\right)^{\frac{1}{n+1}}.$$

Voor de waarde $v\varrho$ zelve, die daarbij behoort, vindt men:

$$v\varrho = \sqrt{F\varrho^3} = \sqrt{f}\cdot\left(\frac{-n-1}{-n-3}\frac{v_1^2}{f} - \frac{2}{-n-3}\varrho_1^{n+1}\right)^{\frac{n+3}{2(n+1)}},$$

en derhalve voor den grenshoek:

$$sin\,\mu' = \frac{\sqrt{f}\cdot\left(\frac{-n-1}{-n-3}\frac{v_1^2}{\varrho} - \frac{2\varrho_1^{n+1}}{-n-3}\right)^{\frac{n+3}{2(n+1)}}}{v_1\varrho_1}.$$

De tweede soort gaat door het centrum en bezit een cirkelspiraaleinde met asymptotischen buitencirkel. Deze ontstaat zoodra $v_1 < w_1 = \sqrt{f\varrho_1^{n+1}}$ en $\mu_1 = \mu'$.

De derde soort gaat door het centrum en bezit een oneindige tak. Deze ontstaat, zooals wij zagen, zoodra $v_1 < w_1 = \sqrt{f\varrho_1^{n+1}}$ maar $> \sqrt{\frac{2f}{-n-1}\varrho_1^{n+1}}$ en tevens $\mu_1 < \mu'$. Zij kan echter ook ontstaan als $v_1 \overline{\overline{>}} w_1 = \sqrt{f\varrho_1^{n+1}}$. In dat geval bezit de baan in middelpuntvliedende richting altijd een oneindige tak blijkens *Stelling I, Gevolg g.* Is $v_1 = w_1 = \sqrt{f \varrho_1^{n+1}}$ dan voert de middelpuntzoekende tak blijkens *Stelling I, Gevolg h* stellig naar het centrum en ontstaat dus eene baan van de derde soort. Is $v_1 > w_1 = \sqrt{f \varrho_1^{n+1}}$, dan is er weer een grenshoek μ' aan te wijzen, voor welke de vroeger ontwikkelde formule geldt, van dien aard, dat de onder dien toch vertrekkende baan tot een cirkelspiraaleinde met asymtotische binnencirkel voert. Iedere minder steile baan bezit dan een pericentrum, iedere steilere voert tot het centrum en is dus van de derde soort.

De vierde soort bezit een oneindigen tak en een cirkelspiraaleinde met asymptotischen binnencirkel. Zij ontstaat als $v_1 > w_1 = \sqrt{f \varrho_1^{n+1}}$ en bovendien $\mu_1 = \mu'$.

De vijfde soort bezit een pericentrum en twee oneindige takken. Zij ontstaat als: $v_1 > w_1 = \sqrt{f \varrho_1^{n+1}}$ en bovendien $\mu_1 > \mu'$.

III. 23. *Bepaal aard en grenzen der gebieden welke ontstaan in het vlak van een homogeenen ring van materie, welke aantrekt volgens de wetten der algemeene aantrekkingskracht.*

Het kwam mij wenschelijk voor dit vraagstuk te behandelen, ten einde te doen zien dat de Newton'sche aantrekkingskracht tot het ontstaan van instabiliteitsgebieden aanleiding geven kan.

Het spreekt van zelve, dat men de aantrekking die van zulk een ring uitgaat in haar eigen vlak, kan opvatten als eene centrale kracht met het middelpunt van den ring tot centrum. Stelt M de massa voor van den ring, R zijn straal, kiest men de constante der aantrekkingskracht als eenheid van kracht, en voert men in de volledige elliptische integralen.

$$\omega(\theta) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2\theta \sin^2\varphi}}; \quad \vartheta(\theta) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \cdot \sqrt{1 - \sin^2\theta \sin^2\varphi}.$$

Stelt men voorts: $\varrho = R \cot^2 \frac{1}{2}\theta$; dan wordt de potentiaal V der aantrekkende kracht in eenig punt buiten den ring:

$$V = \frac{2 M \sin^2 \frac{1}{2}\theta}{\pi R} \omega(\theta).$$

Daaruit wordt dan door differentiatie naar ϱ, en onder toepassing der formule:

$$\omega'(\theta) = -\cot\theta\,.\,\omega(\theta) + \frac{1}{\sin\theta\cos\theta}\,\vartheta(\theta)$$

gemakkelijk gevonden:

$$F = \frac{M\,.\,\sin^4\frac{1}{2}\theta}{\pi R^2\cos^2\frac{1}{2}\theta}\left[\omega(\theta) + \frac{\vartheta(\theta)}{\cos\theta}\right].$$

Voor den afstand ϱ_0 op welke de potentieele energie gelijk *nul* gerekend is, nemen wij de waarde oneindig groot, dan is de totale energie van eenig materieel deeltje dat eene bepaalde baan beschrijft:

$$A = \tfrac{1}{2}v^2 - 2\int_\rho^\infty F\,d\varrho = \tfrac{1}{2}v^2 - \frac{2M\,.\,\sin^2\frac{1}{2}\theta}{\pi R}\,.\,\omega(\theta).$$

Verder is:

$$w^2 = \varrho F = \frac{M\,.\,\sin^2\frac{1}{2}\theta}{\pi R}\left[\omega(\theta) + \frac{\vartheta(\theta)}{\cos\theta}\right]$$

en daaruit volgt:

$$A_w = \frac{M\,.\,\sin^2\frac{1}{2}\theta}{\pi R}\left[-3\,\omega(\theta) + \frac{\vartheta(\theta)}{\cos\theta}\right]$$

$$B_w{}^2 = \varrho^2 w^2 = \frac{M\,.\,\cos^4\frac{1}{2}\theta}{\pi\sin^2\frac{1}{2}\theta}\left[\omega(\theta) + \frac{\vartheta(\theta)}{\cos\theta}\right].$$

Binnen den ring is natuurlijk een afstootingsgebied aanwezig. Even buiten den ring wordt A_w zeer groot, en *op* den ring zelfs oneindig groot, waarvan men zich gemakkelijk overtuigen kan, door θ te laten naderen tot de limiet 90^0. Vervolgens neemt A_w af, als ϱ toeneemt. De ring wordt dus omgeven door een *instabiliteitsgebied.* Dit moet echter later weder een *stabiliteitsgebied*, want de aantrekkingswet, nadert tot de grenswaarde $F = \frac{M}{\varrho^2}$, welke grenswet een *stabiliteitsgebied* oplevert. De afscheiding tusschen beide soorten van gebied bevind zich daar waar:

$$\frac{d\,.\,A_w}{d\varrho} = -\frac{1}{R}\,.\,\frac{\sin^3\frac{1}{2}\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta}\,.\,\frac{dA_w}{d\theta} = 0.$$

Onder toepassing der formule:

$$\vartheta'(\theta) = \cot\theta\,(\vartheta(\theta) - \omega(\theta))$$

vindt men, na uitvoering der differentiaties, dat ter bepaling van die afscheiding moet opgelost worden de verg.:

$$\omega(\theta) = \frac{\sin^4 \frac{1}{2}\theta}{\cos^2\theta} \,.\, \vartheta(\theta).$$

Men vind daaruit:

$$\theta = 76^0 29'\,30''$$

$$\varrho = 1{,}609^5\, R.$$

Derhalve is de materieele ring omringd tot op den afstand

$$R_1 = 1{,}609^5\, R$$

door een instabiliteitsgebied, binnen welk gebied zich dus onder de werking der NEWTON'*sche aantrekkingskracht cirkelspiraal-einden, en labiele cirkelbanen voordoen kunnen.*

Op den grenscirkel tusschen het stabiliteits- en instabiliteitsgebied is:

$$A_w = -\,0{,}7742\,\frac{M}{\pi R},$$

alwaar het negatieve teeken aanwijst, dat de levende kracht der cirkelbeweging onvoldoende zoude zijn om den arbeid noodig tot het bereiken van het oneindige te leveren. Dichter bij den ring neemt echter A_w toe en wordt ten slotte positief, zoodat men daar cirkelbanen verkrijgt, die met snelheden doorloopen worden zoo groot, dat de levende kracht meer dan voldoende zoude zijn om dien arbeid te verrichten.

Dit doet zich voor zoodra:

$$A_w > 0$$

'tgeen vereischt:

$$\theta > 84^0\, 55'\, 30''$$

$$\varrho < 1{,}194\, R.$$

Amsterdam, Maart 1884.

OVER HET VERMOGEN

VAN DEN

10 VOETS KIJKER VAN HUYGENS,

DOOR

J. A. C. OUDEMANS.

Ons, thans rustend, medelid HARTING heeft, zooals bekend is, in het jaar 1867 door een toeval ontdekt, dat het door CHR. HUYGENS vervaardigde objectief met een brandpuntsafstand van 10 rijnl. voet (volgens de bepaling van den Heer HARTING 3,17 M. volgens mijne bepaling 3,33 M.), waarmede hij den wachter van Saturnus ontdekte, zich onder eenige andere oude lenzen, op het physisch kabinet te Utrecht bevond. Die lens is vlakbol, zij heeft eene middellijn van 57 mM., en eene dikte van 3,2 mM. Aan den omtrek is met kleine cursieve letters het anagram geschreven: Admovere oculis distantia sidera nostris, en daartegenover: 3 FEBR. CIↃIↃCLV. Dit anagram was een raadsel, zooals, naar den smaak van die tijden, door hem, die vermoedde eene ontdekking gemaakt te hebben, voorloopig opgegeven werd, om, mocht iemand anders zich haar toeeigenen, het prioriteitsrecht te kunnen doen gelden.

Er behooren eigenlijk nog de enkele letters vvvvvvvv ccc rr hmsbqx bij, en behoorlijk gerangschikt kan de oplossing van het raadsel eruit samengesteld worden: Saturnus luna sua circumducitur sexdecim diebus horis quatuor.

Men zie over deze ontdekking van ons medelid het *Album der Natuur*, 1867, blz. 274 en verv.

Reeds lang had ik gewenscht, in een kijker, met hetzelfde objectief samengesteld, die hemellichten te beschouwen, welke HUYGENS er zelf mede had waargenomen In de eerste plaats om mij meer in zijn toestand te kunnen verplaatsen, om mij beter te kunnen voorstellen wat hij gezien moet hebben, verder ook om het beeld van hetzelfde hemellicht, door een zeventiende- en door een negentiende-eeuwschen kijker gezien, met elkander te vergelijken.

Ik wachtte daarmede tot den vorigen winter, omdat de ring van Saturnus dan nagenoeg zoover mogelijk open zou zijn.

Indachtig aan het woord van ARGELANDER: Beobachtungen im Pulte sind keine Beobachtungen, en vertrouwende dat ook mijne medeleden, wel eenig belang zullen stellen in het weinige, dat mijn onderzoek heeft opgeleverd, neem ik de vrijheid daaromtrent hier iets mede te deelen.

Het bedoelde objectief, dat ik heb medegenomen, ten einde het u te laten zien, is niet geheel onbeschadigd. Er is eene cirkelvormige rij putjes in, even alsof eene kleinere lens, die even als deze met een gekartelden metalen rand voorzien was, er op gelegen heeft, en er door een' schok of stoot die kartels op heeft afgezet.

Een oculair was er niet bij; zooals ik elders heb opgemerkt (*Astr. Nachr.* N^0. 2277, 28 Augustus 1879), is tot nog toe geen echt »Hugeniaansch oculair" gevonden, daardoor verstaande een negatief oculair, bestaande uit twee lenzen, waarvan de brandpuntsafstanden en de onderlinge afstand tot elkander staan, in reden van 4, 1 en 2. Dit is namelijk de verhouding, zooals men door de constructie vindt, die HUYGENS in de LIV Propositie der Dioptrica mededeelt, en het is ten onrechte, dat men gewoonlijk de verhouding 3, 1 en 2 aan HUYGENS toeschrijft.

Na deze merkwaardige ontdekking heeft ons geacht medelid BUYS BALLOT, om de werking van het gemelde objectief in een kijker te kunnen onderzoeken, een blikken buis laten maken, van omtrent 10 rijnl. voet lengte, aan wier eene einde het objectief door eene andere buis er overheen, met bajonetsluiting bevestigd wordt, terwijl in het andere einde eene tweede blikken buis geschoven wordt, die voor het opnemen van een of ander oculair moet dienen.

Deze kijker was verder op een houten voet bevestigd, waardoor het mogelijk was, hem op hemellichten te richten, en daarbij eene horizontale en vertikale beweging mede te deelen. Daar er echter veel speling en in het geheel geene klemming aan dien voet was, kostte het buitengewoon veel inspanning, met den kijker op dien voet een hemellicht te beschouwen, want was men eens geslaagd het er in te krijgen, dan verloor men het door de minste beweging weer, en moest men het op nieuw zoeken.

Daarbij kwam dat Huygens zelf beschrijft, dat hij, bij de ontdekking van den wachter van Saturnus, slechts een enkelvoudig oculair gebruikte van 3 rijnl. duim brandpuntsafstand. Daar er te Utrecht geene oculairglazen van dien brandpuntsafstand aanwezig waren, verzocht ik den Heer van de Sande Bakhuyzen, de goedheid te willen hebben, mij de oogbuis, die bij den door Kaiser beschreven en Hugeniaanschen kijker van 12 voet behoorde, voor eenigen tijd te willen leenen. Die oogbuis toch bestaat, zoo als uit de beschrijving van Kaiser (*Het Instituut*, 1846, blz. 410) blijkt, uit ééne lens van 0,079 M. (d. i. 3 rijnl. duim) en twee lenzen van 0,105 M. (d. i. 4 rijnl. duim) brandpuntsafstand, en er was dus gelegenheid om een kijker samen te stellen, geheel identiek aan den kijker, dien Huygens gebruikt heeft.

Nog den vorigen winter heb ik eenige malen getracht met het 3 duims glas als oculair gewapend, dat ik los in de hand moest houden, in de allereerste plaats Saturnus te beschouwen. De vergrooting bedroeg nu 42 maal. Met zeer veel moeite kreeg ik dit gedaan, daar het wegens ondoelmatigheid van den voet bijna onmogelijk was, een hemellicht gedurende eenigen tijd stil in den kijker te houden.

Ik vond, den 9den Januari 1883, met genoemde oogbuis: den ring *even te onderkennen*, even als den wachter. In mijn journaal teekende ik hem dadelijk aldus af. Schaduwen waren niet te zien noch van de planeet op den ring, noch van den ring op de planeet. De dubbelster Mizar, ζ Ursae Maio-

ris, was duidelijk te scheiden, de afstand der samenstellende sterren is bij deze dubbelster omtrent 14″,4.

Ik beproefde nu in plaats van een enkelvoudig oculair, het zwakste negatief oculair van den kijker van Steinheil, van de Sterrewacht te Utrecht, te gebruiken, dat een equivalenten brandpuntsafstand van $38^{mm},425$ (of 1,42 par. duim) heeft. De vergrooting wordt nu $\frac{3330}{38,425} = 86,6$ maal. Dit gaf, zoo als te verwachten was, eene groote verbetering. De wachter van Saturnus was beter zichtbaar, maar schaduwen waren nu nog niet te zien. Evenmin was de afscheiding van twee ringen zichtbaar, noch ook dat de buitenste rand van den ring donkerder was dan de binnenste.

Van Jupiter was de ééne band, die zich dezen avond alleen vertoonde, even zichtbaar, zijne wachters daarentegen zeer goed.

Beter beviel mij dien avond de nevelvlek van Orion, daar de algemeene vorm van den nevel, zoo als de teekeningen die aangeven, duidelijk te onderkennen was. Van het Trapezium was slechts ééne ster duidelijk, twee andere nauwelijks te onderkennen.

De moeite, verbonden aan het richten van dezen kijker en de nog grootere moeite om een eens gevonden voorwerp in den kijker te houden, noopten mij den kijker liever te laten bevestigen aan den kijker van Steinheil, die op een parallatischen voet is opgesteld, en door een uurwerk bewogen wordt, zoodat hij de hemellichten in hunnen schijnbaren dagelijkschen loop volgt.

De Heer Olland heeft dit door middel van een paar houten klossen, waarin de kijker van Huygens komt te liggen, en een paar zinken banden op eene eenvoudige wijs bewerkstelligd, doch door het ongunstige weer in den herfst van het vorige jaar, en vele bezigheden van anderen aard heb ik eerst dezen winter de gelegenheid gehad, met den aldus ingerichten kijker de hemellichten te beschouwen. Ik gebruikte nu een nog sterker oculair van den kijker van Steinheil, dat omtrent 28 mM. brandpuntsafstand heeft, en dus eene vergrooting van 119 maal verschafte. De resultaten waren echter, wat Jupiter en Saturnus aangaat, nagenoeg dezelfde als met de zwakkere oogbuis. De scheiding der beide ringen van Saturnus was ook met deze vergrooting niet te zien. Het gebrek aan achromatisme van den kijker was duidelijk merkbaar. Saturnus en zijn ring vertoonden gekleurde randen; ik vind aangeteekend: »groenachtig van boven en rood van onderen. Jupiter zeer slecht; 3e wachter op de schijf niet te zien. ter nauwernood een band".

De nevelvlek van Orion kwam mij, zoover mijne herinnering strekte, vrij nauwkeurig zoo voor, als HUYGENS haar in zijn Systema Saturmium afbeeldde, (fig. 1 der bijgevoegde plaat). Ik zag drie sterren van het Trapezium.

Den 24sten Januari j.l. had ik eerst weder gelegenheid den kijker te beproeven. Ik richtte hem op Mars. Als ik hem op zijn scherpst zag, zag ik toch geene vlekken op zijne oppervlakte. Schoof ik de gansche oogbuis een weinig in, dan zag ik den vorm der planeet uitzetten in drie richtingen, die met elkander hoeken van 120^0 maakten, doch zoodra ik de buis weder uittrok, was de vorm der planeet hersteld.

Omtrent Jupiter en Saturnus verkreeg ik dezelfde resultaten als vroeger.

Den 15den Maart j l. heb ik het laatst den kijker beproefd. Er moest zich toen op de oppervlakte van Jupiter de schaduw van den tweeden wachter vertoonen, maar door den kijker van HUYGENS was hij *niet* zichtbaar. Van Saturnus was van de verdeeling van den ring niets te zien; verder waren noch de schaduw van den ring op de planeet, noch de banden op Saturnus zichtbaar. De band op Jupiter daarentegen was zeer goed te onderscheiden.

Van de nevelvlek van Orion maakte ik eene teekening, die ik later met wit krijt op zwart papier heb overgebracht, (fig. 2 der bijgevoegde plaat). Het merkwaardige van deze teekening is, dat ik in het Trapezium duidelijk alle 4 de sterren kon onderscheiden, even als de nevel, die de twee sterren omgeven, die ten Z.O. en N.N.O. van het Trapezium op afstanden van ongeveer 8′ afstaan. (G. P. Bond, n°. 784 en 734 *)).

Ik zag den grooten inham, (Sinus Magnus) tot zeer nabij het Trapezium zelf, terwijl in het plaatje dat Huygens ervan gegeven heeft, en waarvan fig. 1 der plaat eene kopie voorstelt, hij op een afstand van een paar minuten van het Trapezium afblijft.

Ik merk hier op, dat, ofschoon Huygens, zoo als deze teekening aanduidt, en hij bovendien uitdrukkelijk vermeldt, met zijnen 23voetskijker slechts drie sterren in het Trapezium zag, hij toch later, en wel het eerst den 8sten Januari 1684, de 4de ster er ook bij gezien heeft; tien jaar later, namelijk den 6den Februari 1694, maakte hij van diezelfde nevelvlek, in zijn dagboek, eene teekening met de pen, waarvan wijlen ons medelid Kaiser eene kopie heeft medegedeeld in het 1ste Deel van het Tijdschrift voor de Wis- en Natuurkundige Wetenschappen, uitgegeven door de 1ste klasse van het Kon. Nederl. Instituut (1848).

Ook in die teekening reikt de donkere Sinus Magnus tot aan het Trapezium.

Bij deze teekeningen heeft Huygens echter zonder twijfel een dubbel-oculair naar zijne eigene vinding gebruikt. Immers het blijkt uit zijn Systema Saturnium, dat deze uitvinding dateert van 1656, althans dat de eerste aanwending van zulk een oculair reeds den 16den Februari van dat jaar schijnt plaats gehad te hebben.

Met het enkele oogglas van 3 rijnl. duim brandpuntsafstand kon ik de grenzen van den geheelen nevel niet goed onderscheiden.

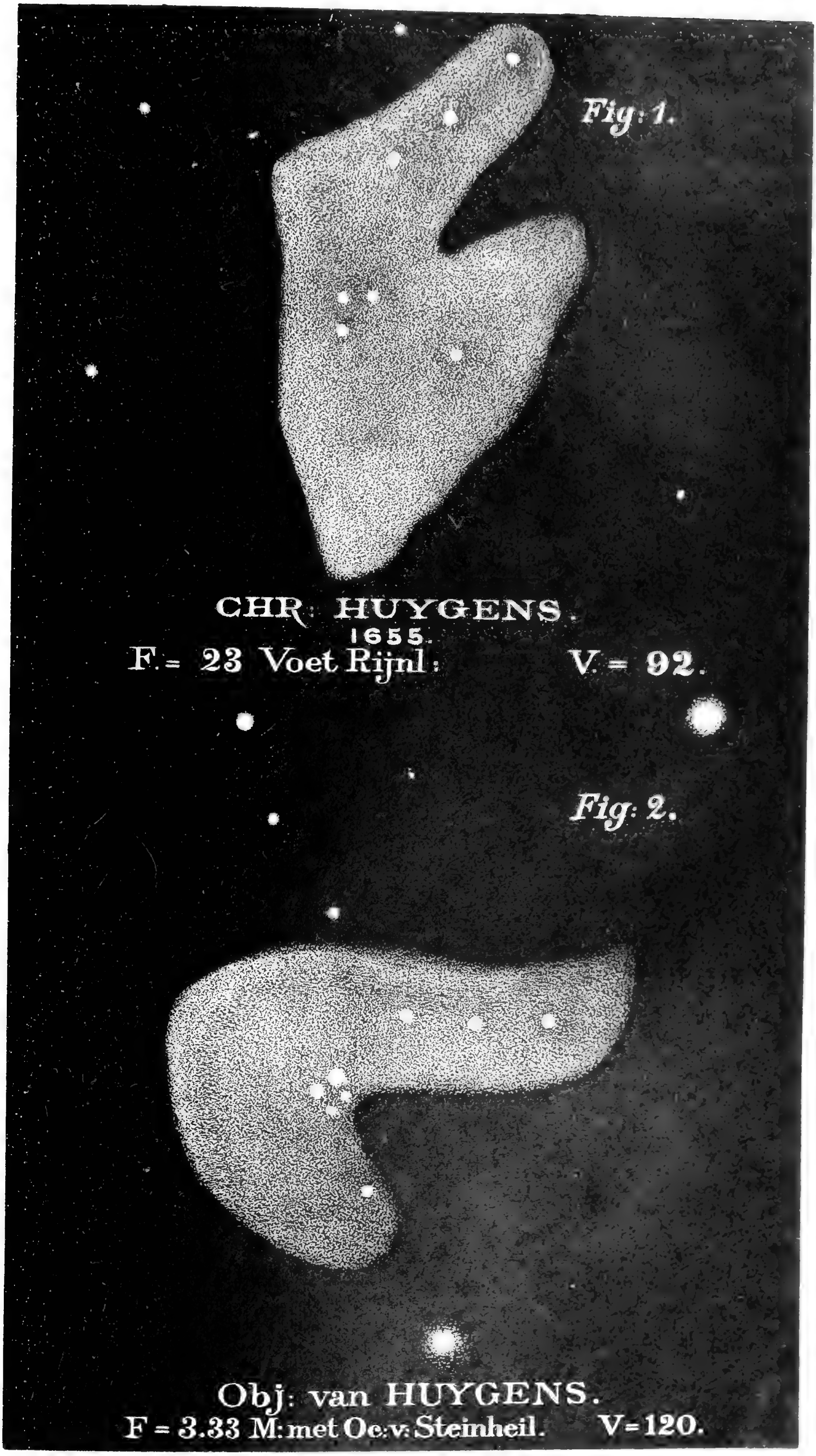
---

*) De door G. P. Bond vervaardigde lijst van sterren, in en bij de nevelvlek van Orion, vindt men in de *Observations upon the great Nebula of Orion*, na zijn dood uitgegeven door Safford, in het 5de Deel der *Annals of the Astronomical Observatory of Harvard College*, Cambridge (Mass.) 1867. Eene latere monographie over het centrale gedeelte van de nevelvlek van Orion, gaf Holden in een aanhangsel tot de *Washington Astronomical Observations* 1878; hierin komt ook eene door H. Draper vervaardigde photographie voor van dit gedeelte, verkregen door eene expositie van 137 minuten.

Maken wij uit een en ander op dat indien Huygens krachtiger oculairén gehad had, reeds ditzelfde objectief hem wel zou veroorloofd hebben meer resultaten bij de beschouwing der hemellichten te verkrijgen, toch is het treffend het onderscheid te zien tusschen hetzelfde hemellichaam, beschouwd door den kijker van Huygens van 1655, en door dien van Steinheil van 1862, beide kijkers van nagenoeg denzelfden brandpuntsafstand.

Utrecht, 28 Maart 1884.

J. A. C. OUDEMANS. 10 Voets-kijker van Huygens.



INHOUD

VAN

DEEL XX. — STUK 1 EN 2.

---

bladz.

Revisio Pyrenomycetum in Regno Batavorum hucusque detectorum; auctore C. A. J. A. OUDEMANS.................................. 1.

Advies over een antwoord aan Z. E. den Minister van Binnenlandsche Zaken betrekkelijk de in October 1883 te Rome gehouden geodetische conferentie; uitgebracht in de Vergadering van 23 Febr. 1884. 63.

Rapport over den door den Heer VAN DE SANDE BAKHUYZEN uit naam van Dr. N. M. KAM te Schiedam aan de Afd. Natuurk. der Kon. Akad. van Wetenschappen ter uitgave aangeboden „Catalog von Sternen, deren Oerter durch selbständige Meridianbeobachtungen bestimmt worden sind, aus Band 1 bis 66 der astronomischen Nachrichten reducirt auf 1855"; uitgebracht in de Vergadering van 26 Februari 1884.. 66.

Verslag over eene verhandeling van den Heer J. W. GILTAY: „Over het polariseeren van telefonische geleiders"; uitgebracht in de Vergadering van 23 Februari 1884.............................. 71.

Het polariseeren van telefonische ontvangers; door J. W. GILTAY. (*Met één Plaat*).. 78.

Bouwstoffen voor de geschiedenis der Wis- en Natuurkundige Wetenschappen in de Nederlanden; door D. BIERENS DE HAAN... 102, 197.

Rapport over eene verhandeling van Dr. B. HAGEN, getiteld: „Ueber Körpergrösse und Wachsthumsverhältnisse der Süd-Chinesen"; uitgebracht in de Vergadering van 29 Maart 1884................. 233.

Ueber Körpergrösse und Wachsthumsverhältnisse der Süd-Chinesen; von Dr B. HAGEN.. 236.

Over de banen beschreven onder den invloed eener centrale kracht; door D. J. KORTEWEG.. 245.

Over het vermogen van den 10-voets kijker van HUYGENS; door J. A. C. OUDEMANS. (*Met één Plaat*).............................. 290.

Overzicht der boekwerken, door de Koninklijke Akademie van Wetenschappen ontvangen en aangekocht.......................... 89—157.

GEDRUKT BIJ DE ROEVER KRÖBER - BAKELS.

VERSLAGEN EN MEDEDEELINGEN

DER

KONINKLIJKE AKADEMIE

VAN

WETENSCHAPPEN.

Afdeeling NATUURKUNDE.

TWEEDE REEKS.

Twintigste Deel. — Derde Stuk.

AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER.
1884.

VERSLAG

OMTRENT EENE

VERHANDELING VAN Dr. G. J. MICHAËLIS

GETITELD:

OVER DE THEORIE DER VEERKRACHTIGE NAWERKING.

(Uitgebracht in de Vergadering van 29 Maart 1884.)

Ondanks de talrijke experimenteele onderzoekingen over de nawerkingsverschijnselen na vormveranderingen van veerkrachtige lichamen, maakte de theoretische verklaring daarvan, wat betreft het mechanisme dier verschijnselen, nog slechts geringe vorderingen. Wel sprak reeds W. Weber het denkbeeld uit, dat bij eene deformatie in het algemeen eene wenteling der moleculen zou plaats hebben en dat de nawerking hieraan zou toe te schrijven zijn, dat die wenteling slechts langzaam kan geschieden, maar deze gedachte werd door hem zelf in het geheel niet en naderhand door Warburg slechts gedeeltelijk wiskundig uitgewerkt.

Dr. Michaëlis heeft de onderstelling van Weber aan een uitvoerig onderzoek onderworpen. Hij ontwikkelt daartoe in de eerste plaats de formules voor de onderlinge werking van een stelsel moleculen, waarbij deze als lichaampjes van eene zekere uitgebreidheid worden opgevat en niet slechts de kracht maar ook het koppel wordt berekend, dat een molecuul van de overige deeltjes ondervindt. Warburg had bij eene dergelijke berekening aangenomen, dat de bestanddeelen eener molecule alle gelijksoortig zijn. De schrijver maakt zich vrij van deze hypothese en verkrijgt daardoor uitdrukkingen, die niet slechts in de elasticiteitsleer beter aan de werkelijkheid moeten beantwoorden, maar die ook in de theorie van het geinduceerde magnetisme van toepassing kunnen zijn.

In een stelsel van moleculen blijkt op een daarvan slechts dan een koppel te werken, wanneer de rangschikking der deeltjes niet met betrekking tot alle richtingen dezelfde is. WARBURG, die de verspreiding der moleculen in den natuurlijken toestand van het lichaam isotroop onderstelde, vond dan ook, dat alleen na eene deformatie een koppel zou bestaan, maar volgens zijne theorie worden in den natuurlijken toestand de moleculen niet in bepaalde richtingen vastgehouden. Toch moet dit noodzakelijk worden aangenomen, zal men tot eene nawerking, evenredig aan de deformatie, geraken. De Heer MICHAËLIS lost deze moeilijkheid op door de onderstelling, dat, al schijnt het lichaam ons in zijn geheel isotroop toe, dit niet geldt van de verschillende volume-elementen elk op zich zelf, waarin het kan worden verdeeld.

Eindelijk bespreekt de schrijver, ook hier een stap verder gaande dan WARBURG, de weerstanden, die zich tegen de wenteling der moleculen verzetten. Wordt vooreerst, naar het voorbeeld van sommige theoriën over het geïnduceerde magnetisme, een weerstand ondersteld, die de moleculen belet te wentelen, zoolang niet het koppel, dat er op werkt, eene bepaalde grootte bereikt heeft, dan geeft de theorie rekenschap van de blijvende vormveranderingen van veerkrachtige lichamen. Een weerstand aan den anderen kant, die, evenals eene wrijving, van de snelheid der wenteling afhangt, zal tot een langzaam verloop der nawerking aanleiding geven.

De verkregen resultaten worden uitvoerig op de uitrekking, de wringing en de buiging toegepast en met verschillende proeven, met name met die van BRAUN vergeleken, terwijl aan het slot der verhandeling eene bespreking gevonden wordt van den invloed der nawerking op de trillingen van veerkrachtige lichamen.

Ten deele ongetwijfeld wegens de aan het onderwerp verbonden moeilijkheden, zijn de positieve resultaten, waartoe de schrijver geraakt, niet zeer talrijk, waarbij nog komt, dat hij de uitkomsten, die hij werkelijk verkregen heeft, niet zoo in het licht heeft gesteld als hij had kunnen doen. Eveneens hadden naar onze meening sommige der ingevoerde onderstellingen duidelijker uitgesproken kunnen worden. Eindelijk hebben wij eenige opmerkingen gemaakt van meer bijzonderen aard, die wij zouden wenschen, dat onder de aandacht van den schrijver werden gebracht, maar die het ons vergund zij, hier achterwege te laten.

Ofschoon de verhandeling van Dr. MICHAËLIS slechts het begin bevat van eene theorie van het verschijnsel, heeft hij toch het belangrijke onderwerp met grooten ijver en met succes behandeld. Hij heeft in verschillende opzichten de theorie een stap verder gebracht, en zijn arbeid zal als uitgangspunt voor verdere onderzoekingen kunnen dienen. Wij aarzelen dan ook niet, de Akademie voor te stellen, de verhandeling in de *Verslagen en Mededeelingen* op te nemen, nadat de schrijver van onze opmerkingen zal zijn in kennis gesteld en gelegenheid zal hebben gehad om, naar aanleiding daarvan, indien hij dit wenscht, eenige wijzigingen aan te brengen.

H. A. LORENTZ.
R. A. MEES.

OVER DE THEORIE

DER

VEERKRACHTIGE NAWERKING

DOOR

G. J. MICHAËLIS.

§ 1. De vergelijkingen ter bepaling van het evenwicht en van de beweging der vaste veerkrachtige lichamen zijn af te leiden uit het beginsel, dat deze lichamen uit moleculen zijn samengesteld, die aantrekkende en afstootende krachten op elkander uitoefenen. De werking van de eene molecule op de andere wordt daarbij voorgesteld door een kracht en een koppel. Door de meeste schrijvers werd dit laatste zonder opheldering buiten beschouwing gelaten. POISSON *) meende, dat de verschillende koppels elkander opheffen, omdat in een werkingssfeer een zeer groot aantal moleculen voorkomen, die zonder regelmaat daarin verspreid zijn. Hij noemde het verdwijnen van het koppel een noodzakelijk gevolg van de wet der groote getallen. Het blijkt echter, dat in het algemeen, als men aan de moleculen een willekeurigen vorm toekent, de koppels elkander geenszins opheffen. Bij een eerste benadering kan men ze verwaarloozen, wanneer de onderlinge afstanden der moleculen zeer groot zijn ten opzichte van hare afmetingen; de uitkomsten, welke bij die onderstelling verkregen worden, zijn voldoende ter verklaring der gewone elastische vormveranderingen.

*) *Mémoires de l'Academie.* T. XVIII. Paris 1842.

De verschijnselen der veerkrachtige nawerking echter, door W. WEBER *) ontdekt en beschreven, kunnen volgens zijn opvatting door zulke koppels veroorzaakt worden. WEBER namelijk nam aan, dat, bij de vormverandering van een veerkrachtig lichaam, de moleculen verschoven worden en tevens wentelen. De verschuiving zou plotseling geschieden, de wenteling daarentegen zou door een weerstand belemmerd worden en daardoor langzaam plaats hebben. In het laatstgenoemde deel der beweging zocht WEBER de oorzaak der elastische nawerking. Deze meening was ook F. KOHLRAUSCH †) toegedaan, die uitvoerige waarnemingen omtrent het verschijnsel heeft verricht §). De wenteling der moleculen geeft volgens hem een bevredigende verklaring, als men onderstelt, dat zij langzaam geschiedt en dat door die wenteling een wijziging der moleculaire krachten kan teweeggebracht worden, zonder dat de deeltjes ten opzichte van elkaâr verschoven worden.

Hetzelfde denkbeeld heeft CLAUSIUS **) uitgesproken. Als een lichaam aan krachten onderworpen wordt, die in verschillende richtingen op ongelijke wijze werken, is het volgens CLAUSIUS duidelijk, dat de moleculen daarbij moeten draaien. Men behoeft maar te onderstellen, dat die beweging en ook de terugwenteling na opheffing der krachten langzaam volbracht worden, om de elastische nawerking volledig te verklaren.

Eindelijk heeft G. WIEDEMANN ††), door onderzoekingen omtrent den invloed der vormverandering van een lichaam op zijn magnetisme en omgekeerd, aangetoond, dat een verschuiving der moleculen altijd met een wenteling vereenigd is en dat de wenteling een verschuiving tengevolge kan hebben.

---

*) POGGENDORFF's *Annalen.* Band XXXIV, p. 247 en LIV, p. 1.

†) POGGENDORFF's *Annalen.* Band CXXVIII, p. 414.

§) POGGENDORFF's *Annalen.* Band CXIX, p. 350; CXXVIII, p. 1, 207, 399 en CLVIII, p. 337.

**) POGGENDORFF's *Annalen.* Band LXXVI, p. 66.

††) WIEDEMANN, *Annal. der Physik. und Chemie.* VI, p. 504.

WARBURG *) heeft, voor zoover mij bekend is, het eerst een poging gedaan om het denkbeeld van WEBER wiskundig uit te werken. Hij stelde de evenwichtsvoorwaarden op van een aantal onderling gelijke moleculen, die, zoo lang geen uitwendige krachten op het stelsel werken, gemiddeld op gelijke afstanden van elkaâr in rust ondersteld werden en leidde uit zijn berekening qualitatief eenige nawerkingsverschijnselen af. WARBURG nam aan, dat de verschillende punten eener molecule gelijksoortig zijn, zoodat de krachten, die tusschen twee moleculen werken, allen op dezelfde wijze van den afstand zouden afhangen. Verder bevond hij, bij de onderstellingen, die hij invoerde, het koppel, dat op een molecule werkt, alleen afhankelijk van de vormverandering van het stelsel. Na het verdwijnen der uitwendige krachten, zou de molecule, naar zijn berekening, niet weer teruggedraaid worden. Ook voerde hij geen weerstand in, dien de moleculen, volgens WEBER, bij de wenteling ondervinden.

Het kwam mij daarom niet overbodig voor om, bij meer algemeene onderstellingen, dit onderzoek nog eens op te vatten en vooral ook de gevolgtrekkingen na te gaan, tot welke de invoering van een terugwerkend koppel en van een weerstand, die de wenteling belemmert, leiden.

Vooreerst zijn een paar theorieën besproken, die op andere beginselen berusten. Daarna is de onderlinge werking berekend van twee moleculen, bij de onderstelling, dat tusschen twee punten krachten werken, die functiën van den afstand zijn: functiën, welke bij verschillende punten derzelfde moleculen niet aan elkaar gelijk behoeven te wezen. Aangenomen is daarbij, dat de afmetingen der moleculen klein zijn, vergeleken bij den onderlingen afstand.

De voorwaarden zijn onderzocht, waarbij een stelsel van moleculen, die een willekeurige gedaante hebben, door de krachten, welke zij op elkander uitoefenen, zullen wentelen. Zoolang geen uitwendige krachten op het stelsel werken, zijn de zwaartepunten der deeltjes bij standvastige tempera-

*) WIEDEMANN, *Annal. der Physik. und Chemie.* IV, p. 232.

tuur in rust ondersteld op afstanden, welke van de temperatuur afhangen.

De warmtebewegingen zijn dus verwaarloosd. De invloed der temperatuur op de *intensiteit* der nawerking, die, volgens de waarnemingen van Kohlrausch *), aanzienlijk is, kan bij de ingevoerde onderstellingen niet berekend worden. Alleen kan in ruwe trekken worden aangegeven, wat gebeuren zal, als bij verhooging van temperatuur de gemiddelde afstanden grooter worden.

Door de *intensiteit* der nawerking verstaan wij de geheele verandering, die de krachten, welke op het lichaam werken, moeten ondergaan, om gedurende de wenteling der moleculen de vormverandering een standvastige waarde te doen behouden. Als daarentegen de krachten standvastig blijven, wordt de intensiteit gemeten door de wijziging, die de deformatie tengevolge van de wenteling ondergaat. Dit begrip wordt hier vooropgesteld, omdat Kohlrausch, zooals in § 11 nader wordt meegedeeld, een standvastige grootheid, die in elke stof de snelheid der wenteling bepaalt, en dus ook de snelheid, waarmeê de spanningen veranderen, de *coëfficiënt* der nawerking heeft genoemd.

Afgezien nu van den invloed der temperatuur, geven de uitkomsten, die in de volgende bladzijden zullen afgeleid worden, rekenschap van een aantal kenmerkende eigenschappen der elastische nawerking.

Denkt men zich namelijk de moleculen een weinig ten opzichte van elkaar verschoven, dan vindt men, behalve de spanningen, die in de gewone theorie der elasticiteit voorkomen, nog anderen, welke van de afmetingen der moleculen afhangen, en gedurende de wenteling van dezen veranderen.

Deze bijkomende krachten verklaren dus het feit, dat de spanning van een lichaam veranderen kan, zonder dat zijn vorm en grootte gewijzigd worden. In hoeverre zij ook rekenschap geven van eenige zeer merkwaardige verschijnselen, die Braun †) omtrent de veerkrachtige nawerking heeft waar-

---

*) Pogg. *Annalen*. CXXVIII, p. 216.

†) Poggendorff's *Annal*. CLIX, p. 337.

genomen, wordt in § 8 uitvoerig besproken. Alleen als in een werkingssfeer een zeer groot aantal gelijke moleculen aanwezig zijn, die in den natuurlijken toestand van het lichaam gemiddeld naar alle richtingen gelijk gerangschikt zijn, bestaat bij een vormverandering geen terugwerkend koppel. Dit eenvoudige geval (dat WARBURG onderstelde), is eerst onderzocht en daarbij aangenomen, dat de moleculen vrij kunnen wentelen.

Daarna is nagegaan, wat gebeuren zal, als om elk punt de rangschikking der moleculen niet isotroop is. Verder is de invloed berekend, dien een weerstand op de verkregen uitkomsten heeft.

Verschillende hypothesen zijn opgesteld omtrent den weerstand, dien de moleculen bij de wenteling ondervinden, zoowel ter verklaring van de langzame beweging bij de elastische nawerking, als van de blijvende verandering in richting na de werking van mechanische en magnetische krachten. In de paragrafen 11 en 12 zijn de voornaamsten dier hypothesen vermeld en is over hare waarde, bij de berekening der verschijnselen, het een en ander meegedeeld.

Eindelijk volgen nog een paar opmerkingen over den invloed van de veerkrachtige nawerking op de demping der trillingen.

§ 2. Een andere theorie der veerkrachtige nawerking werd door O. E. MEIJER *) gegeven. Zij verdient slechts kortelijk vermeld te worden, daar de schrijver haar later heeft ingetrokken †).

MEIJER ging van de hypothese uit, dat in vaste lichamen, even als in gassen en vloeistoffen, een inwendige wrijving zou bestaan tusschen de deelen, die zich ten opzichte van elkander bewegen, en zocht daarin de oorzaak der nawerking. Hij nam dus aan, dat de spanningen in een veerkrachtig lichaam niet alleen van de verschuiving der deeltjes zouden afhangen, maar ook van de snelheid dier verschuiving. Uit de bewegingsvergelijkingen, welke hij opstelde,

---

*) POGG. *Annal.* CLI, p. 108.

†) WIEDEMANN *Annal.* IV, p. 257.

leidde MEIJER de beweging van een elastischen draad af, die door een kracht plotseling wordt uitgerekt.

Behalve de veerkrachtige trillingen, vond hij een niet-periodieke beweging van den draad, en meende, dat deze door de inwendige wrijving langzamer gedempt wordt dan de trillingen.

BOLTZMANN *) echter merkte op, dat MEIJER de massa van het gewicht, waarmede de draad bij de proeven belast wordt, buiten rekening had gelaten. Wordt dit gewicht in aanmerking genomen, dan vindt men, dat de demping der langzaamste slingering veel kleiner uitvalt dan de grootheid, die MEIJER als maat van de nawerking beschouwd had, zoodat zijn theorie het verschijnsel volstrekt niet verklaren kan; hoewel de inwendige wrijving, die hij ondersteldde, hoogstwaarschijnlijk in vaste lichamen wel zal voorkomen, moet dus voor de nawerking een andere oorzaak gezocht worden.

BOLTZMANN heeft in de genoemde verhandeling een andere theorie medegedeeld.

Hij nam aan, dat de krachten, die op een lichaam moeten werken om het een bepaalde vormverandering te doen ondergaan, ook afhankelijk zijn van verplaatsingen, die de deeltjes van het lichaam al vroeger ondergaan hebben. De kracht, die een bepaalde verschuiving veroorzaakt, is kleiner, naarmate reeds te voren verplaatsingen in dezelfde richting zijn voorgekomen. Als op den tijd τ, gedurende het tijdselement $d\tau$, een verschuiving v bestaan heeft, stelde BOLTZMANN den invloed van deze op de kracht, welke op een anderen tijd t een verplaatsing in dezelfde richting veroorzaakt, evenredig met v, met $d\tau$ en met een functie van het tijdsverloop $t - \tau$. Verder nam hij, voor kleine verplaatsingen althans, het beginsel der superpositie aan.

De theorie van BOLTZMANN heeft het voordeel, dat zij op enkele algemeene grondstellingen berust en geen hypothesen noodig heeft omtrent de inwendige samenstelling der licha-

*) POGG. *Annal.* Ergänzb. VII, p. 627.

men. Het is echter de vraag, of die grondstellingen de nawerkingsverschijnselen volledig kunnen beschrijven.

Wat vooreerst het beginsel der superpositie betreft, dit is door Boltzmann bij de torsie van een glazen staaf proefondervindelijk onderzocht en hij verkreeg bevredigende uitkomsten.

Ook F. Kohlrausch *) vond bij dezelfde stof resultaten, die vrij nauwkeurig met Boltzmann's theorie overeenstemden.

Bij een zilverdraad echter waren de waarden, die volgens het beginsel berekend werden, allen grooter dan die, welke gemeten werden. Zelfs bij benadering kwam daarbij het beginsel niet uit. Messer †) vond, bij onderzoekingen omtrent de buiging van een staaf van caoutchouc, het beginsel evenmin bevestigd. Wil men aannemen, dat het met grooter nauwkeurigheid gelden zal, naarmate de vormveranderingen kleiner zijn, dan moet ik, vooral op grond van proeven, door G. Wiedemann genomen, (zie § 12) opmerken, dat waarschijnlijk bij vele stoffen de nawerking zich eerst na grootere vormveranderingen begint te vertoonen. In het geval, dat de verplaatsingen zeer klein zijn, zou zij door den inwendigen weerstand geheel verhinderd worden.

Boltzmann schreef het logarithmisch decrement der veerkrachtige trillingen aan nawerking toe. De overeenstemming, die hij vond tusschen de grootte van dat decrement, door berekening uit zijn theorie en door waarnemingen verkregen, is, volgens een opmerking door P. M. Schmidt §) gemaakt, slechts aan een rekenfout toe te schrijven.

In de onderstellingen van Boltzmann is verder geen ander specifiek onderscheid tusschen de oorspronkelijke veerkrachtige verplaatsingen en de bewegingen der nawerking opgesloten, dan dat de eersten snel en de laatsten langzaam plaats hebben. De nawerking wordt als een rest der elastische verschuiving opgevat. De theorie kan dus geen

---

*) Pogg. *Annal.* CLX. p. 231.

†) *Berichte der naturf. Ges. zu Freiburg* in Br. II.

§) Wiedemann's *Annal.* II. p. 272.

rekenschap geven van de verschijnselen, door Braun in de bovengenoemde verhandeling (zie pag. 303) zoo uitvoerig beschreven, welke in hun aard geheel verschillend zijn van die der oorspronkelijke veerkrachtige vormveranderingen.

Door Neesen *) is een poging gedaan om de nawerkingsverschijnselen af te leiden uit de botsingen, die de moleculen van een lichaam bij hare periodieke bewegingen ondergaan.

Iedere molecule, zegt Neesen, slingert om een bepaalden stand van evenwicht onder den invloed der aantrekkende krachten en der botsingen van de omringende moleculen. De botsingen moeten in geregelde volgorde plaats hebben, zoolang geen uitwendige krachten op het lichaam werken, omdat anders geen beweging om een vasten evenwichtsstand mogelijk zou wezen. Werkt echter een kracht op het lichaam, dan worden de deeltjes ten opzichte van elkaar verschoven, de geregelde opvolging der botsingen wordt verbroken, de molecule kan niet om een zelfde punt blijven slingeren. Een voortdurende verplaatsing van de punten, om welke de moleculen zich bewegen, is het gevolg van de onregelmatigheid der botsingen, die eerst langzamerhand weer verdwijnt. Het is duidelijk, dat men, bij de geheele onbekendheid, waarin men verkeert, ten opzichte van den aard der warmtebewegingen, de denkbeelden van Neesen niet wiskundig analyseeren kan. Het is zelfs moeilijk om na te gaan, of werkelijk in een dergelijke verstoring der regelmatigheid van de botsingen een geregelde verplaatsing van den gemiddelden evenwichtsstand besloten is, zooals die bij de veerkrachtige nawerking wordt waargenomen.

Neesen heeft echter de uitwerking der botsingen op een molecule beschouwd op een willekeurig oogenblik na het ontstaan der deformatie, en ook op het oogenblik, dat het evenwicht hersteld is. Het verschil tusschen deze werkingen behandelde hij als een geleidelijk afnemende kracht. Hij kwam daardoor tot een betrekking tusschen de spanning

*) Pogg. *Annal.* CLVII, p. 579.

en de verschuiving in eenig punt van een veerkrachtig lichaam. Zijn formule heeft veel overeenkomst met de grondformule van Boltzmann. Hier komen echter drie onbepaalde functiën voor: twee van de verschuivingen en één van den tijd, terwijl Boltzmann slechts twee onbepaalde functiën van den tijd invoerde. Overigens kunnen omtrent deze formulen dezelfde opmerkingen gemaakt worden: ook hier worden de gewone veerkrachtige verplaatsingen en de bewegingen gedurende de nawerking als van denzelfden aard aangemerkt. Deze theorie eischt, evenals die van Meijer, dat wanneer b. v. een staaf aan de eene zijde bevestigd wordt en aan den anderen kant een torsie ondergaat, die men standvastig laat blijven, de moleculen zich toch ten opzichte van elkander verplaatsen, omdat men daarbij een vermindering van het moment van torsie waarneemt. Inderdaad merkte Neesen op, dat een spiegeltje, in het midden van een staaf van caoutchouc bevestigd, die op de genoemde wijze getordeerd was, zich gedurende geruimen tijd geregeld naar ééne richting verplaatste.

Meijer heeft de proef met getordeerde draden van verschillende stoffen herhaald; spiegels waren op verschillende hoogten van de draden vastgehecht, tegenover elken spiegel was een kijker met verdeelde schaal opgesteld. Elke spiegel bewoog zich, eerst sneller, daarna langzamer, altijd naar dezelfde richting, afhangende van die der torsie. Wanneer echter een draad aan het boveneinde even sterk getordeerd werd als aan het andere uiteinde, bewogen de spiegels zich niet op dezelfde wijze. In het algemeen overtuigde Meijer zich, dat de waargenomen bewegingen hoofdzakelijk hieraan toe te schrijven waren, dat de draden niet homogeen waren, en dus in de verschillende deelen de nawerking niet hetzelfde verloop had. Hij kwam tot het besluit, dat deze spiegelproeven eerder tegen dan vóór zijn theorie pleiten, dus evenzeer tegen die van Neesen.

Een ander beginsel heeft Nissen *) als uitgangspunt

*) *Beiblätter der Physik und Chemie,* V. p. 19.

eener theorie opgesteld. De uitwisseling tusschen den ether in een vast lichaam en in de omringende lucht, ten gevolge der trillingen van de moleculen, zou, na de toeneming van den gemiddelden afstand van deze, een langzame vermeerdering van den ether in het lichaam veroorzaken. In dat binnenstroomen van ether wordt de oorzaak van de nawerking gezocht. Het is mij onbekend, of de schrijver zijn theorie later verder heeft uitgewerkt. Voorloopig gaf hij te kennen, dat zijn beschouwingen zich het meest aan die van NEESEN aansloten.

Na dit korte overzicht van de hoofdbeginselen, waarop de meest bekende theoriën der veerkrachtige nawerking berusten, gaan wij die van WEBER nader onderzoeken.

§ 3. Om tot een uitdrukking te komen voor de onderlinge werking van twee moleculen, zal eerst die van een molecule op een daar buiten gelegen punt worden nagegaan.

Ik stel mij een molecule voor als een vereeniging van punten, die onder de werking van mechanische krachten vast verbonden blijven.

De kracht tusschen een punt der molecule en een uitwendig punt, zij een willekeurige functie van hun afstand. waarin verschillende constanten kunnen voorkomen.

Een punt O der molecule wordt als oorsprong van een met die molecule vast verbonden, rechthoekig coördinatenstelsel genomen. Zij A het uitwendige punt; zijn afstand tot een willekeurig punt P der molecule worde r_1 genoemd. De aantrekking die tusschen A en P werkt, zij $f(r_1)$.

Zijn x, y en z de coördinaten van A, x_1 y_1 en z_1 die van P, dan zijn de ontbondenen der kracht volgens de assen:

$$X_1 = f(r_1)\frac{x - x_1}{r_1}; \quad Y_1 = f(r_1)\frac{y - y_1}{r_1}; \quad Z_1 = f(r_1)\frac{z - z_1}{r_1}.$$

Als men de krachten, die A op alle punten der molecule uitoefent, naar O overbrengt, vindt men voor de componenten van het koppel, dat daarbij ontstaat:

$$\left.\begin{aligned}\Sigma(Z_1 y_1 - Y_1 z_1) &= \Sigma\left\{f(r_1)\frac{z y_1 - y z_1}{r_1}\right\}\\ \Sigma(X_1 z_1 - Z_1 x_1) &= \Sigma\left\{f(r_1)\frac{x z_1 - z x_1}{r_1}\right\}\\ \Sigma(Y_1 x_1 - X_1 y_1) &= \Sigma\left\{f(r_1)\frac{y x_1 - x y_1}{r_1}\right\}\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\quad(1)$$

Stellen wij nog $\frac{f(r_1)}{r_1} = F(r_1)$, den afstand $OA = a$, de lijn $OP = R_1$ en den hoek $POA = \varphi_1$.

Uit de vergelijking:

$$r_1^2 = R_1^2 + a^2 - 2\,a\,R_1\cos\varphi_1$$

volgt, als $\frac{R_1}{a}$ een zeer kleine grootheid is, als dus de afmetingen der molecule klein zijn, vergeleken met den afstand van haar punten tot A, bij benadering:

$$r_1 = a - R_1\cos\varphi_1 + \frac{R_1^2}{2a}\sin^2\varphi_1.$$

Men vindt, als $F(r_1)$ een doorloopende functie is:

$$F(r_1) = F(a) + \left(-R_1\cos\varphi_1 + \frac{R_1^2}{2a}\sin^2\varphi_1\right)F'(a) +$$
$$+\frac{1}{2}\left(-R_1\cos\varphi_1 + \frac{R_1^2}{2a}\sin^2\varphi_1\right)^2 F''(a) + \text{enz.}\quad\ldots\ldots\quad(2)$$

Wanneer deze reeks snel convergeert, hetgeen het geval zal zijn, als $a\,F'(a)$, $a^2\,F''(a)$, $a^3\,F'''(a)$ grootheden zijn van dezelfde orde als $F(a)$, vindt men ongeveer:

$$F(r_1) = F(a) - R_1\cos\varphi_1\,F'(a) = F(a) - \frac{xx_1 + yy_1 + zz_1}{a}F'(a).$$

Zulk een herleiding stellen wij mogelijk voor elke functie, die de kracht tusschen A en eenig punt der molecule voorstelt. Het kan echter zijn, dat sommige dier functiën of haar differentiaal-quotiënten verwaarloosd kunnen worden, omdat de intensiteit der krachten zeer verschillend kan wezen. Door substitutie van de formule voor $F(r_1)$ in de vergelijking (1) ontstaat het koppel:

$$\Sigma \left\{ \left[F(a) - \frac{x x_1 + y y_1 + z z_1}{a} F'(a) \right] (z y_1 - y z_1) \right\}, \ldots (3)$$

volgens de x-as en dergelijke koppels voor de y- en de z-assen. Deze reeksontwikkeling is dus voortgezet tot termen, die ten opzichte der afmetingen van de moleculen van de tweede orde zijn. Hetzelfde zal in alle volgende reeksontwikkelingen geschieden. Men kan ook de ontbondenen der kracht en van het koppel uit een potentiaal-functie afleiden, wier aangroeiing den arbeid der krachten voorstelt. Zij deze:

$$U = \Sigma F_1(r)$$

$$\text{en} \quad F_1(r_1) = -\int f(r_1)\, d r_1$$

dan is:

$$U = \Sigma \left[F_1(a) + \left\{ x x_1 + y y_1 + z z_1 - \frac{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}{2} \right\} F(a) - \right.$$

$$\left. - \left\{ \frac{(x x_1 + y y_1 + z z_1)^2}{2a} \right\} F'(a) \right]. \ldots \ldots \ldots \ldots (4)$$

Hiervoor kan geschreven worden:

$$U = \Sigma F_1(a) - \Sigma \left\{ \frac{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}{2} F(a) \right\} + x \Sigma \{F(a) x_1\} +$$

$$+ y \Sigma \{F(a) y_1\} + z \Sigma \{F(a) z_1\} - \frac{x^2}{2} \Sigma \left\{ \frac{F'(a)}{a} x_1^2 \right\} -$$

$$- \frac{y^2}{2} \Sigma \left\{ \frac{F'(a)}{a} y_1^2 \right\} - \frac{z^2}{2} \Sigma \left\{ \frac{F'(a)}{a} z_1^2 \right\} - xy \Sigma \left\{ \frac{F'(a)}{a} x_1 y_1 \right\} \text{enz.} . (5)$$

In het algemeen zullen de termen, waarin de eerste machten van x_1, y_1 en z_1 voorkomen, groot zijn ten opzichte van die, welke de tweede machten dezer grootheden bevatten; dan kunnen de laatsten tegen de eersten verwaarloosd worden. Er bestaat altijd een punt in de molecule met de eigenschap, dat wanneer het tot oorsprong der x, y en z-assen wordt gekozen, $\Sigma\{F(a)x_1\}$ $\Sigma\{F(a)y_1\}$ en $\Sigma\{F(a)z_1\}$ verdwijnen. Zij verdwijnen dan ook voor alle vlakken, die door dat punt gaan. Het punt is echter afhankelijk van den afstand a. Kiest men het zwaartepunt der molecule als oorsprong en brengt men twee coördinaat-vlakken door het beschreven punt, dan verdwijnt het koppel, als A (het aangetrokken punt) in de snijlijn ligt. Op elken afstand bestaat dus een bepaalde evenwichtsas ten opzichte van de draaiende beweging der molecule. In het bijzondere geval, dat alle bestanddeelen der molecule gelijksoortig zijn, dat dus de kracht voor allen eenzelfde functie van den afstand is, wordt de zaak anders. Zij m_1 de massa van een punt der molecule, m_1' die van het uitwendige punt A en zij nu de kracht tusschen deze twee punten, volgens een onderstelling, die dikwijls gemaakt is: $m_1\, m_1'\, f(r_1)$, waarbij $f(r_1)$ alleen met den afstand verandert, dan kan voor vergelijking (5) in de plaats worden geschreven:

$$U = m_1' \Big[M_1\, F_1(a) - \frac{F(a)}{2} \Sigma\, m_1 (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) -$$
$$- \frac{x^2}{2} \frac{F'(a)}{a} \Sigma\, (m_1\, x_1^2) - \frac{y^2}{2} \frac{F'(a)}{2} \Sigma\, (m_1\, y_1^2) -$$
$$- \frac{z^2}{2} \frac{F'(a)}{a} \Sigma\, (m_1\, z_1^2) \Big] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Als oorsprong is weer het zwaartepunt gekozen, de coördinaatassen vallen samen met de hoofdassen der centrale ellipsoide, M_1 is de massa der molecule. Dezen vorm neemt nu de functie U aan, ten opzichte van dezelfde assen, op welken afstand het punt A ook van het zwaartepunt ligge.

Stellen wij nog:

$$\Sigma\, (m_1\, x_1^2) = A_1; \quad \Sigma\, (m_1\, y_1^2) = B_1; \quad \Sigma\, (m_1\, z_1^2) = C_1$$

Stelt men zich voor, dat het punt A en het zwaartepunt op onveranderlijken afstand blijven, maar dat de molecule vrij wentelen kan, dan kunnen de evenwichtsvoorwaarden gemakkelijk bepaald worden. Als namelijk:

$$x = a \cos\chi \cos\psi$$

$$y = a \cos\chi \sin\psi$$

$$z = a \sin\chi$$

zijn, vindt men, wanneer het punt A in de x-as ligt en dus $\sin\chi = 0$, $\sin\psi = 0$ zijn, terwijl $m_1' = 1$ wordt genomen:

$$\frac{\partial U}{\partial \psi} = 0\,; \quad \frac{\partial U}{\partial \psi} = 0\,; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \chi\, \partial \psi} = 0\,; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \psi^2} = a\, F'(a)\,(A_1 - C_1) \text{ en}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \psi^2} = a\, F'(a)\,(A_1 - B_1).$$

Zij $A_1 > B_1 > C_1$, dan ligt het punt A in de as van het kleinste traagheidsmoment. Men ziet, dat U een maximum of minimum is, naarmate $F''(a)$ negatief of positief uitvalt. In het eerste geval, dat o. a. bij de aantrekking volgens de wet van Newton voorkomt, zal dus U een maximum en het evenwicht standvastig zijn, indien het aangetrokken punt in de as van het kleinste traagheidsmoment ligt. Het evenwicht ten opzichte der beweging om het zwaartepunt zal wankelbaar zijn, als het punt in de as van het grootste traagheidsmoment gelegen is. Wanneer het punt in de as van het gemiddelde traagheidsmoment ligt, hangt de aard van het evenwicht af van de verplaatsing.

§ 4. Zoeken wij nu de potentiaal der werking van twee moleculen op elkander.

In het algemeene geval, als omtrent de verschillende functiën $F(a)$ niets bijzonders ondersteld is, worde door een punt O' der tweede molecule een rechthoekig assen-stelsel aangebracht. De coördinaten van O (de oorsprong der assen in de eerste molecule) zijn ten opzichte van dat stelsel: a_1', b_1', c_1', die van een punt der tweede molecule: x_1', y_1', z_1'.

De coördinaten van O' ten opzichte der assen in de eerste molecule zijn: a_1, b_1, c_1. Als de afstand van O en O' door R wordt voorgesteld, vindt men, even als in vergelijking (5):

$$F_1(a) = F_1(R) - \frac{(x_1')^2 + (y_1')^2 + (z_1')^2}{2} F(R) + a_1' F(R) x_1' +$$
$$+ b_1' F(R) y_1' + c_1' F(R) z_1' - \frac{(a_1')^2}{2} \frac{F'(R)}{R} (x_1')^2 - \text{enz.}$$

Voor den term $F(a) x_1$, die in vergelijking (5) voorkomt, kan geschreven worden:

$$F(a) x_1 = F(R) x_1 - a_1' \frac{F'(R)}{R} x_1 x_1' - b_1' \frac{F'(R)}{R} x_1 y_1' - c_1' \frac{F'(R)}{R} x_1 z_1',$$

terwijl de verdere termen der ontwikkeling, die ten opzichte van de afmetingen der moleculen van hoogeren graad dan den tweeden zijn, verwaarloosd worden.

Het product $x F(a) x_1$ uit (5) kan in deze gedaante worden gebracht

$$a_1 F(R) x_1 + \alpha F(R) x_1 x_1' + \beta F(R) x_1 y_1' + \gamma F(R) x_1 z_1' -$$
$$- a_1 a_1' \frac{F'(R)}{R} x_1 x_1' - a_1 b_1' \frac{F'(R)}{R} x_1 y_1' - a_1 c_1' \frac{F'(R)}{R} x_1 z_1'.$$

α, β, γ zijn de cosinussen der hoeken, die de x'-, y'- en z'-assen in de tweede molecule met de x-assen in de eerste vormen. Voor $\frac{F'(a)}{a} x_1^2$ kan $\frac{F'(R)}{R} x_1^2$ in de plaats worden geschreven.

In alle termen, die met tweede machten van x, y en z in (5) of met haar producten twee aan twee vermenigvuldigd zijn, kunnen bij den aangenomen graad van benadering deze letters door a_1, b_1 en c_1 worden vervangen.

Substitueert men al deze waarden in de vergelijking (5) en sommeert men over alle combinatiën twee aan twee der punten van beide moleculen, dan ontstaat de gezochte potentiaal. Zij is zeer samengesteld. Behalve de eerste en tweede machten der coördinaten a_1, b_1 en c_1, a_1', b_1' en c_1' komen alle producten twee aan twee dezer grootheden voor en die termen hebben verschillende coëfficiënten.

Bestond elke molecule b. v uit twee magneetpolen en nam men voor de werking van twee polen de aantrekking of afstooting omgekeerd evenredig met de tweede macht van den afstand aan, dan zou men, in iedere molecule de magnetische as als x—as aannemende, van alle ontwikkelde termen slechts behouden:

$$\alpha\, F(R)\, x_1\, x_1' - a_1\, a_1' \frac{F'(R)}{R}\, x_1\, x_1'.$$

Hieruit leidt men gemakkelijk de bekende formule voor de potentiaal af:

$$\frac{\mu_1\, \mu_2}{R^3} [\alpha - 3 \cos(x R) \cos(x' R)],$$

wanneer μ_1 en μ_2 de magnetische momenten zijn.

In het algemeen zullen de standen, die de moleculen met betrekking tot elkaâr moeten innemen, opdat zij niet om hun zwaartepunten wentelen, van den afstand der zwaartepunten afhangen.

Wanneer weder de bijzondere onderstelling wordt ingevoerd, dat voor alle punten de aantrekking een zelfde functie van den afstand is, kan men bij dezelfde notatie als in (6), de potentiaal in den vorm brengen:

$$V = M_1 M_1' F_1(R) - M_1' \frac{F(R)}{2} (A_1 + B_1 + C_1) -$$

$$- M_1 \frac{F(R)}{2} (A_1' + B_1' + C_1') - M_1' \frac{F'(R)}{2R} (A_1 a_1^2 + B_1 b_1^2 + C_1 c_1^2) -$$

$$- M_1 \frac{F'(R)}{2} [A_1' (a_1')^2 + B_1' (b_1')^2 + C_1' (c_1')^2] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Daarbij zijn in beide moleculen de zwaartepunten als oorsprong en de hoofdassen der centrale ellipsoïden als coördinaat-assen gekozen. De grootheden M_1'. A_1', B_1'

en C_1' hebben voor de tweede molecule dezelfde beteekenissen als dezelfde letters zonder accenten voor de eerste.

De componenten van het koppel, die op het eerste lichaam, volgens de assen x, y en z werken, zijn:

$$M_1' \frac{F'(R)}{R} (B_1 - C_1)\, b_1 c_1,$$

$$M_1' \frac{F'(R)}{R} (C_1 - A_1)\, a_1 c_1,$$

$$M_1' \frac{F'(R)}{R} (A_1 - B_1)\, a_1 b_1.$$

Deze ontbondenen hangen dus in dit bijzondere geval niet van de traagheidsmomenten der tweede molecule af en evenmin van den stand harer assen ten opzichte van die der eerste molecule. Het is duidelijk, dat dit in het algemeene geval, wegens de termen, die de producten $a_1\, a_1'$ enz. bevatten, wel zal plaats hebben.

Men vindt hier verder door een beschouwing, gelijk aan die in de vorige paragraaf, dat bij een aantrekking de potentiaal een maximum is, bij een bepaalden afstand der zwaartepunten, wanneer de assen der kleinste traagheidsmomenten in elkaars verlengde vallen. Het evenwicht ten opzichte van den stand der assen is dan standvastig. Het zal wankelaar zijn, wanneer de assen der grootste traagheidsmomenten in één richting liggen.

§ 5. Een stelsel van moleculen, wier zwaartepunten door de onderlinge werking in rust ondersteld worden, zij gegeven. Men kan aannemen, dat dit geschiedt onder den invloed van aantrekkende en afstootende krachten. Even als de zwaartepunten in den natuurlijken toestand van het stelsel op bepaalde onderlinge afstanden in evenwicht zijn, zullen de assen der moleculen ook bepaalde richtingen moeten aannemen. Wijken zij van die richtingen af, dan oefenen de andere moleculen gezamenlijk een koppel uit, dat de bedoelde assen in de oorspronkelijke standen terugvoert. Om de richting eener molecule bij het evenwicht te vinden, heeft men het gedeelte der potentiaal van het stelsel op die molecule noodig, dat van de coördinaten der zwaartepunten afhangt, niet dat, hetwelk alleen van de afstanden R afhankelijk is. Als het beschouwde deeltje geheel binnen het stelsel ligt, moet bij de opstelling van de potentiaal der krachten, die er op werken, gesommeerd worden over alle moleculen, die in zijn werkingssfeer voorkomen.

Ondersteld worde, dat de moleculen in een werkingssfeer aan elkander gelijk zijn, dat zij evenwijdig gericht zijn en dat hun aantal groot is.

In een ruimte-element, dat een groot aantal werkingssferen bevat, zullen de assen der moleculen gemiddeld naar alle richtingen gelijkelijk verspreid zijn; neemt men echter aan, dat die richtingen slechts geleidelijk kunnen veranderen van het eene punt tot het andere, dan kan men ze in een werkingssfeer op weinig na als evenwijdig beschouwen.

Verder zullen moleculen, die een willekeurigen vorm hebben, in een werkingssfeer niet isotroop gerangschikt zijn. Een groep moleculen met evenwijdige assen zullen namelijk in de richtingen dier assen niet met dezelfde kracht op elkaâr werken, zooals uit de beschouwing in de vorige § volgt, als loodrecht op die richting. Een gevolg moet zijn, dat de zwaartepunten in de eene richting meer tot elkander naderen dan in de andere. Zijn b. v. de moleculen symmetrisch rondom een as, dan kan men daaruit misschien afleiden, dat zij ook in de werkingssfeer symmetrisch ten opzichte eener lijn gerangschikt moeten zijn

Een lichaam, dat gewoonlijk als isotroop wordt beschouwd, moet men zich dus voorstellen als een vereeniging van niet-isotrope deelen. Men kan echter in een ruimte-element, dat groot is, ten opzichte eener werkingssfeer, een isotrope rangschikking onderstellen.

Nemen wij nu in de moleculen evenwijdige assen door hun zwaartepunten aan.

Zijn de coördinaten van het zwaartepunt van een molecule, die in de werkingssfeer van een bepaald deeltje ligt, ten opzichte der assen, die in het laatstgenoemde zijn aangebracht: a_1, b_1 en c_1 dan is de potentiaal der werking tusschen beide moleculen:

$$V = \Sigma \Big[F_1(R) - \{ a_1 (x_1' - x_1) + b_1 (y_1' - y_1) + c_1 (z_1' - z_1) + \\ + x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - x_1 x_1' - y_1 y_1' - z_1 z_1' \} F(R) - \\ - \{ a_1^2 (x_1^2 - x_1 x_1') + b_1^2 (y_1^2 - y_1 y_1') + c_1^2 (z_1^2 - z_1 z_1') + \\ + 2\, a_1 b_1 (x_1 y_1 - x_1 y_1') + 2\, a_1 c_1 (x_1 z_1 - x_1 z_1') + \\ + 2\, b_1 c_1 (y_1 z_1 - y_1 z_1') \} \frac{F'(R)}{R} \Big] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

waarbij men in het oog moet houden, dat wegens de gelijkheid der moleculen: $\Sigma \{x_1^2 F(R)\} = \Sigma \{(x_1')^2 F(R)\}$ is, en dergelijke vergelijkingen ontstaan, als men x_1 door y_1 of z_1, en x_1' door y_1' of z_1' vervangt.

Zulk een uitdrukking moet men zich opgesteld denken om de werking te vinden, tusschen de beschouwde molecule en elk deeltje, dat in haar werkingssfeer voorkomt en daarna moet de som gezocht worden.

Men kan daarbij echter eenige termen weglaten. Vooreerst hebben, zooals reeds werd opgemerkt, de termen, die onafkelijk zijn van de coördinaten a_1, b_1 en c_1, geen invloed op het koppel, dat gezocht wordt. In de tweede plaats verdwijnen de termen, die alleen de eerste machten dezer grootheden bevatten, elk afzonderlijk, als men over de werkingssfeer sommeert, bij de onderstelling waarvan wij uitgaan, dat die sfeer drie loodrechte assen van symmetrie bevat. Voor elk paar moleculen op gelijke afstanden van het centrale deeltje gelegen en diametraal tegenover elkaâr, verdwijnen dan namelijk die termen.

Wij moeten dus verder het gedeelte der potentiaal tusschen twee moleculen behouden:

$$V_1 = A_{11} a_1^2 + A_{22} b_1^2 + A_{33} c_1^2 + 2\, A_{12} a_1 b_1 + 2\, A_{13} a_1 c_1 + \\ + 2\, A_{23} b_1 c_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

als gesteld wordt:

$$A_{11} = \Sigma (x_1 x_1' - x_1^2) \frac{F'(R)}{R} \qquad A_{12} = \Sigma (x_1 y_1' - x_1 y_1) \frac{F'(R)}{R}$$

$$A_{22} = \Sigma (y_1 y_1' - y_1^2) \frac{F'(R)}{R} \qquad A_{13} = \Sigma (x_1 z_1' - x_1 z_1) \frac{F'(R)}{R}$$

$$A_{33} = \Sigma (z_1 z_1' - z_1^2) \frac{F'(R)}{R} \cdot \qquad A_{23} = \Sigma (y_1 z_1' - y_1 z_1) \frac{F'(R)}{R} \cdot$$

Wij voeren een coördinaten-stelsel in, dat in het lichaam een vasten stand behoudt en waarvan de oorsprong met het zwaartepunt der onderzochte molecule samenvalt. Worden deze assen ξ, η en ζ genoemd en bestaan tusschen de coördinaten van een punt ten opzichte van deze assen en van het selsel x, y, z de betrekkingen:

$$\left. \begin{aligned} x &= \alpha \xi + \alpha_1 \eta + \alpha_2 \zeta \\ y &= \beta \xi + \beta_1 \eta + \beta_2 \zeta \\ z &= \gamma \xi + \gamma_1 \eta + \gamma_2 \zeta \end{aligned} \right\} \quad \ldots \ldots \ldots (10)$$

Worden verder de coördinaten van het punt (a_1, b_1, c_1) ten opzichte der nieuwe assen ξ_1, η_1, ζ_1 genoemd, dan verandert V_1 in:

$$\begin{aligned} V_1 = {} & A_{11} (\alpha \xi_1 + \alpha_1 \eta_1 + \alpha_2 \zeta_1)^2 + A_{22} (\beta \xi_1 + \beta_1 \eta_1 + \beta_2 \zeta_1)^2 + \\ & + A_{33} (\gamma \xi_1 + \gamma_1 \eta_1 + \gamma_2 \zeta_1)^2 + \\ & + 2 A_{12} (\alpha \xi_1 + \alpha_1 \eta_1 + \alpha_2 \zeta_1) (\beta \xi_1 + \beta_1 \eta_1 + \beta_2 \zeta_1) + \\ & + 2 A_{13} (\alpha \xi_1 + \alpha_1 \eta_1 + \alpha_2 \zeta_1) (\gamma \xi_1 + \gamma_1 \eta_1 + \gamma_2 \zeta_1) + \\ & + 2 A_{23} (\beta \xi_1 + \beta_1 \eta_1 + \beta_2 \zeta_1) (\gamma \xi_1 + \gamma_1 \eta_1 + \gamma_2 \zeta_1) \ldots (11) \end{aligned}$$

Als de werkingssfeer drie onderling loodrechte assen van symmetrie heeft, kunnen deze tot ξ-, η- en ζ-assen worden gekozen. Dan zijn ten opzichte van elk der coördinaten-vlakken twee moleculen steeds zoodanig gelegen, dat het zwaartepunt van de eene het spiegelbeeld is van dat punt in de andere. Dientengevolge vindt men na optelling over alle punten binnen de werkingssfeer:

$$\begin{aligned}\Sigma V_1 = \Sigma[&A_{11}(\alpha^2 \xi_1^2 + \alpha_1^2 \eta_1^2 + \alpha_2^2 \zeta_1^2) + \\ &+ A_{22}(\beta^2 \xi_1^2 + \beta_1^2 \eta_1^2 + \beta_2^2 \zeta_1^2) + \\ &+ A_{33}(\gamma^2 \xi_1^2 + \gamma_1^2 \eta_1^2 + \gamma_2^2 \zeta_1^2) + \\ &+ 2A_{12}(\alpha\beta \xi_1^2 + \alpha_1 \beta_1 \eta_1^2 + \alpha_2 \beta_2 \zeta_1^2) + \\ &+ 2A_{13}(\alpha\gamma \xi_1^2 + \alpha_1 \gamma_1 \eta_1^2 + \alpha_2 \gamma_2 \zeta_1^2) + \\ &+ 2A_{23}(\beta\gamma \xi_1^2 + \beta_1 \gamma_1 \eta_1^2 + \beta_2 \gamma_2 \zeta_1^2)] \quad . \quad . \quad (12)\end{aligned}$$

Indien de rangschikking der moleculen isotroop ware, zou men in deze vergelijking ξ_1 in de plaats mogen stellen van η_1 en ζ_1 en men zou vinden:

$$\Sigma V_1 = \Sigma [\xi_1^2 (A_{11} + A_{22} + A_{33})].$$

Men ziet, dat daarbij de potentiaal onafhankelijk wordt van de richtingscosinussen en daar nu de ξ, η en ζ-assen willekeurig kunnen worden gekozen, blijkt het, dat geen koppel op de moleculen werkt, welke richtingen zij ook hebben.

Neemt men nog de hypothese aan, dat in iedere molecule drie loodrechte vlakken van symmetrie voorkomen, wier doorsneden tot x, y en z-assen worden gekozen. Dan verdwijnen de grootheden A_{12}, A_{13} en A_{23}. Immers in elke molecule liggen dan symmetrisch ten opzichte van ieder coördinaat-vlak gelijksoortige punten. In een molecule liggen b. v. de punten C_1 en C_2 symmetrisch ten opzichte van het xy-vlak; evenzoo in een tweede de punten C_1' en C_2'. Geeft nu de werking tusschen C_1 en C_1' in de potentiaal den term: $x_1 z_1 \dfrac{F'(R)}{R}$, dan geeft de werking tusschen C_1' en C_2 den term: $- x_1 z_1 \dfrac{F'(R)}{R}$. De combinatie $C_1 C_1'$ levert o. a.: $x_1 z_1' \dfrac{F'(R)}{R}$ en de combinatie $C_1 C_2'$: $- x_1 z_1' \dfrac{F'(R)}{R}$. Op dezelfde wijze toont men aan, dat de overige grootheden, die in A_{12}, A_{13} en A_{23} voorkomen, elkaâr paarsgewijze opheffen. Men zal gemakkelijk inzien, dat dezelfde eigenschap ook nog moet gelden, wanneer de punten, die elkaârs spiegelbeelden zijn, tegengestelde eigenschappen bezitten, wat in magneten zal gebeuren. Gaat deze onderstelling omtrent de structuur der moleculen samen met de bovengenoemde hypothese omtrent de rangschikking der deeltjes in de werkingssfeer, dan gaat (12) over in:

$$\Sigma V_1 = \Sigma[(\alpha^2\xi_1{}^2 + \alpha_1{}^2\eta_1{}^2 + \alpha_2\zeta_1{}^2)A_{11} + (\beta^2\xi_1{}^2 + \beta_1{}^2\eta_1{}^2 + \beta_2{}^2\zeta_1{}^2)A_{22} + \\ + (\gamma^2\xi^2 + \gamma_1{}^2\eta_1{}^2 + \gamma_2{}^2\zeta_1{}^2)A_{33}] \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (13)$$

Om hieruit het koppel af te leiden, dat op de beschouwde molecule werkt, bij een bepaalden stand harer assen, moet de arbeid bepaald worden, die verricht wordt, wanneer de deeltjes in haar werkingssfeer een weinig gewenteld worden. Als in de ruimte-eenheid n moleculen aanwezig zijn, zou de onderlinge potentiaal $\frac{1}{2} n \Sigma V_1$ bedragen, wanneer zij allen evenwijdig gericht waren en de toestand in het geheele element dezelfde ware als in de werkingssfeer. Deze onderstelling heeft blijkbaar geen invloed op het gezochte koppel. Dan zou de arbeid, die verricht werd, indien de moleculen evenveel wentelden, $\frac{1}{2} n\, d\,.\, \Sigma V_1$ bedragen. Op iedere molecule zou een even groot koppel werken en dus de arbeid op elk der moleculen $\frac{1}{2} d\,.\, \Sigma V_1$ zijn.

Als men dit in aanmerking neemt, vindt men voor de componenten van het koppel, dat uit vergelijking (13) volgt de waarden:

$$\Sigma \left\{(\beta\gamma\xi_1{}^2 + \beta_1\gamma_1\eta_1{}^2 + \beta_2\gamma_2\zeta_1{}^2)(A_{33} - A_{22})\right\},$$

$$\Sigma \left\{(\alpha\gamma\xi_1{}^2 + \alpha_1\gamma_1\eta_1{}^2 + \alpha_2\gamma_2\zeta_1{}^2)(A_{11} - A_{33})\right\},$$

$$\Sigma \left\{(\alpha\beta\xi_1{}^2 + \alpha_1\beta_1\eta_1{}^2 + \alpha_2\beta_2\zeta_1{}^2)(A_{22} - A_{11})\right\}.$$

Men ziet, dat het koppel verdwijnt, als de assen der moleculen met die der werkingssfeer samenvallen.

Bij de bijzondere hypothese, voor welke vergelijking (7) geldt, verandert formule (8) in:

$$\Sigma V_1 = - \Sigma \left\{ M_1{}' \frac{F'(R)}{R} (A_1 a_1{}^2 + B_1 b_1{}^2 + C_1 c_1{}^2) \right\},$$

wanneer weder de assen x, y en z samenvallen met de hoofdassen der centrale ellipsoïde in iedere molecule, terwijl nu echter omtrent de rangschikking in de werkingssfeer niets ondersteld is. Voert men weder de vaste assen in, volgens de formulen (10), dan kan men schrijven:

$$\left.\begin{aligned}\Sigma V_1 = -\{ & A_1 (\alpha^2 T\xi + \alpha_1^2 T\eta + \alpha_2^2 T\zeta + 2\,\alpha\alpha_1 T\xi\eta + \\ & \qquad + 2\,\alpha\alpha_2 T\xi\zeta + 2\,\alpha_1\alpha_2 T\eta\zeta) \\ & + B_1 (\beta^2 T\xi + \beta_1^2 T\eta + \beta_2^2 T\zeta + 2\,\beta\beta_1 T\xi\eta + \\ & \qquad + 2\,\beta\beta_2 T\xi\zeta + 2\,\beta_1\beta_2 T\eta\zeta) \\ & + C_1 (\gamma^2 T\xi + \gamma_1^2 T\eta + \gamma_2^2 T\zeta + 2\,\gamma\gamma_1 T\xi\eta + \\ & \qquad + 2\,\gamma\gamma_2 T\xi\zeta + 2\,\gamma_1\gamma_2 T\eta\zeta)\}\end{aligned}\right\}\ldots(14)$$

wanneer gesteld wordt:

$$T\xi = \Sigma \left\{ M_1' \frac{F'(R)}{R} \xi_1^2 \right\}; \qquad T\eta = \Sigma \left\{ M_1' \frac{F'(R)}{R} \eta_1^2 \right\};$$

$$T\zeta = \Sigma \left\{ M_1' \frac{F'(R)}{R} \zeta_1^2 \right\}; \qquad T\xi\eta = \Sigma \left\{ M_1' \frac{F'(R)}{R} \xi_1 \eta_1 \right\};$$

$$T\xi\zeta = \Sigma \left\{ M_1' \frac{F'(R)}{R} \xi_1 \zeta_1 \right\}; \qquad T\eta\zeta = \Sigma \left\{ M_1' \frac{F'(R)}{R} \eta_1 \zeta_1 \right\}.$$

Daar R voor elk punt der werkingssfeer standvastig blijft gedurende de wenteling der deeltjes om hun zwaartepunten, kan men aantoonen, dat de assen ξ, η en ζ zoodanig kunnen worden gekozen, dat $T\xi\eta$, $T\xi\zeta$ en $T\eta\zeta$ verdwijnen. De assen voor welke die eigenschap geldt, noemen wij de hoofdassen der werkingssfeer. Een molecule is in evenwicht, als haar traagheidsassen samenvallen met de hoofdassen der werkingssfeer. In deze § heb ik, naar aanleiding van de welwillende opmerkingen der Heeren Prof. Lorentz en Prof. Mees, die verslag over deze verhandeling hebben uitgebracht, eenige wijzigingen gemaakt.

§ 6. Het stelsel moge nu een kleine vormverandering ondergaan. De verschuivingen eener molecule in de richtingen der vaste assen worden u, v en w genoemd. Deze grootheden worden als doorloopende functiën van de coördinaten behandeld; voor de gemiddelde verplaatsing eener groep van moleculen zal, wegens haar groot aantal, deze eigenschap mogen ondersteld worden.

Door het verschoven zwaartepunt van een molecule worden assen aangebracht, die evenwijdig zijn met ξ, η en ζ. De coördinaten van een naburig zwaartepunt, die oorspronkelijk ξ_1, η_1 en ζ_1 waren, zullen daarbij overgaan in:

$$\xi_1 + u_\xi \xi_1 + u_\eta \eta_1 + u_\zeta \zeta_1,$$

$$\eta_1 + v_\xi \xi_1 + v_\eta \eta_1 + v_\zeta \zeta_1,$$

$$\zeta_1 + w_\xi \xi_1 + w_\eta \eta_1 + w_\zeta \zeta_1,$$

waarin u_ξ, u_η, v_ξ enz. geschreven zijn in plaats van de differentiaal-quotiënten: $\frac{\partial u}{\partial \xi}$, $\frac{\partial u}{\partial \eta}$, $\frac{\partial v}{\partial \xi}$ enz. Deze quotiënten worden allen als zeer klein ondersteld. Zij R' de veranderde afstand van twee punten, dan kan bij benadering worden gesteld:

$$\lambda(R') = \lambda(R) + [u_\xi \xi_1^2 + v_\eta \eta_1^2 + w_\zeta \zeta_1^2 +$$
$$+ (u_\eta + v_\xi)\xi_1\eta_1 + (u_\zeta + w_\xi)\xi_1\zeta_1 + (v_\zeta + w_\eta)\eta_1\zeta_1]\frac{\lambda'(R)}{R},$$

als $\lambda(R)$ een doorloopende functie van R voorstelt en $\lambda'(R) = \frac{\partial \lambda(R)}{\partial R}$ is. Als in het algemeen geval de functie ΣV_1 (zie vergelijking 11) in den oorspronkelijken toestand van het stelsel een term $\Sigma(A_{10}\xi_1)$ bevatte, zou deze na de deformatie den vorm aannemen:

$$\Sigma\{A_{10}\xi_1\} + u_\xi \Sigma\{A_{10}\xi_1\} + u_\eta \Sigma\{A_{10}\eta_1\} +$$
$$+ u_\zeta \Sigma\{A_{10}\zeta_1\} + u_\xi \Sigma\left\{\frac{A_{10}'}{R}\xi_1^3\right\} + v_\eta \Sigma\left\{\frac{A_{10}'}{R}\xi\eta_1^2\right\} +$$
$$+ w_\zeta \Sigma\left\{\frac{A_{10}'}{R}\xi_1\zeta_1^2\right\} + (u_\eta + v_\xi)\Sigma\left\{\frac{A_{10}'}{R}\xi_1^2\eta_1\right\} +$$
$$+ (u_\zeta + w_\xi)\Sigma\left\{\frac{A_{10}'}{R}\xi_1^2\zeta_1\right\} + (v_\zeta + w_\eta)\Sigma\left\{\frac{A_{10}'}{R}\xi_1\eta_1\zeta_1\right\},$$

wanneer $A_{10}' = \frac{\partial A_{10}}{\partial R}$ is.

Men vindt dus den oorspronkelijken term, vermeerderd met een aantal termen, die de quotiënten u_ξ, v_η enz. als factoren bevatten. Daar dit met alle grootheden, die in (11) voorkomen, ook het geval moet wezen, hebben wij slechts het gedeelte van $\Sigma\, V_1$, dat de genoemde quotiënten bevat, nader te onderzoeken. Wij nemen nu aan, dat in den natuurlijken toestand van het lichaam de afwijking van een isotrope rangschikking der moleculen binnen een werkingssfeer slechts gering is. Dan kan die afwijking in het onderzochte deel van $\Sigma\, V_1$ verwaarloosd worden, wegens het kleine bedrag der vormverandering. Men ziet nu, dat in bovenstaande uitdrukking alle termen, die op den eersten volgen, moeten verdwijnen.

De term $\alpha^2 \Sigma \left\{ A_{11}\xi_1^2 \right\}$ uit (11), geeft het van de vormverandering afhangende bedrag:

$$\alpha^2\Big[2\,u_\xi \Sigma\left\{A_{11}\xi_1^2\right\} + 2u_\eta \Sigma\left\{A_{11}\xi_1\eta_1\right\} + 2\,u_\zeta \Sigma\left\{A_{11}\xi_1\zeta_1\right\} +$$

$$+ u_\xi \Sigma\left\{\frac{A_{11}'}{R}\xi_1^4\right\} + v_\eta \Sigma\left\{\frac{A_{11}'}{R}\xi_1^2\eta_1^2\right\} + w_\zeta \Sigma\left\{\frac{A_{11}'}{R}\xi_1^2\zeta_1^2\right\} +$$

$$+ (u_\eta + v_\xi)\, \Sigma\left\{\frac{A_{11}'}{R}\xi_1^3\eta_1\right\} + (u_\zeta + w_\xi)\, \Sigma\left\{\frac{A_{11}'}{R}\xi_1^3\zeta_1\right\} +$$

$$+ (v_\zeta + w_\eta)\, \Sigma\left\{\frac{A_{11}'}{R}\xi_1^2\eta_1\zeta_1\right\}\Big].$$

Hierin zijn de termen, die tweede machten en producten van de grootheden u_ξ, v_η enz. bevatten, als kleine grootheden van hoogere orden verwaarloosd.

Men kan nu, bij de gemaakte onderstellingen, schrijven:

$$\left.\begin{array}{l}
\Sigma\left\{A_{11}\xi_1^2\right\} = \Sigma\left\{A_{11}\eta_1^2\right\} = \Sigma\left\{A_{11}\zeta_1^2\right\} = T_{11} \\[2mm]
\Sigma\left\{\dfrac{A_{11}'}{R}\xi_1^4\right\} = \Sigma\left\{\dfrac{A_{11}'}{R}\eta_1^4\right\} = \Sigma\left\{\dfrac{A_{11}'}{R}\zeta_1^4\right\} = T_{11}' \\[2mm]
\Sigma\left\{\dfrac{A_{11}'}{R}\xi_1^2\eta_1^2\right\} = \Sigma\left\{\dfrac{A_{11}'}{R}\xi_1^2\zeta_1^2\right\} = \text{enz.} = T_{11}''
\end{array}\right\} \ldots (15)$$

terwijl

$$\Sigma \left\{ \frac{A_{11}'}{R} \xi_1^3 \eta_1 \right\} = \Sigma \left\{ \frac{A_{11}'}{R} \xi_1^3 \zeta_1 \right\} = \Sigma \left\{ A_{11} \xi_1 \eta_1 \right\} = 0$$

worden.

De beschouwde term wordt daardoor:

$$\alpha^2 \left[2\, u_\xi\, T_{11} + u_\xi\, T_{11}' + (v_\eta + w_\zeta)\, T_{11}'' \right].$$

Evenzoo verandert de term $\alpha_1^2\, \Sigma \{A_{11}\, \eta_1^2\}$ in:

$$\alpha_1^2 \left[2\, v_\eta\, T_{11} + v_\eta\, T_{11}' + (u_\xi + w_\zeta)\, T_{11}'' \right]$$

terwijl $\alpha_2^2\, \Sigma \{A_{11}\, \zeta_1^2\}$ oplevert:

$$\alpha_2^2 \left[2 w_\zeta\, T_{11} + w_\zeta\, T_{11}' + (u_\xi + v_\eta)\, T_{11}'' \right].$$

De som dezer termen is, zooals na een kleine herleiding blijkt:

$$(T_{11} + T_{11}' - T_{11}'')(\alpha^2 u_\xi + \alpha_1^2 v_\eta + \alpha_2^2 w_\zeta) + (u_\xi + v_\eta + w_\zeta) T_{11}''.$$

Van deze som behouden wij in de verdere berekeningen alleen het gedeelte, dat van de richtingscosinussen afhangt, omdat dit alleen invloed op het koppel kan hebben.

Nog zij:

$$2\, T_{11} + T_{11}' - T_{11}'' = B_{11} \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

De term $2\, \alpha \alpha_1\, \Sigma \{A_{11}\, \xi_1\, \eta_1\}$ uit vergelijking (11) geeft, na een soortgelijke herleiding:

$$2\, \alpha\alpha_1\, (u_\eta + v_\xi)\, (T_{11} + T_{11}'').$$

Stellen wij:

$$T_{11} + T_{11}'' = C_{11} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

Grootheden, die evenzoo uit A_{22}, A_{33}, A_{12} enz. ontstaan als B_{11} en C_{11} uit A_{11}, worden met B_{22}, B_{33}, B_{12}, C_{22}, C_{33}, C_{12} aangeduid. Wanneer men alle termen herleidt, die in de vergelijking (11) voorkomen, vindt men het deel der potentiaal, dat van de vormverandering van het lichaam afhangt:

$$
\left.\begin{aligned}
\Sigma V_2 = (&B_{11}\,\alpha^2 + B_{22}\,\beta^2 + B_{33}\,\gamma^2 + 2\,B_{12}\,\alpha\,\beta + \\
&+ 2\,B_{13}\,\alpha\,\gamma + 2\,B_{23}\,\beta\,\gamma)\,u_\xi + \\
&+ (B_{11}\,\alpha_1^2 + B_{22}\,\beta_1^2 + B_{33}\,\gamma_1^2 + 2\,B_{12}\,\alpha_1\,\beta_1 + \\
&\quad + 2\,B_{13}\,\alpha_1\,\gamma_1 + 2\,B_{23}\,\beta_1\,\eta_1)\,v_\eta + \\
&+ (B_{11}\,\alpha_2^2 + B_{22}\,\beta_2^2 + B_{33}\,\gamma_2^2 + 2\,B_{12}\,\alpha_2\,\beta_2 + \\
&\quad + 2\,B_{13}\,\alpha_2\,\gamma_2 + 2\,B_{23}\,\beta_2\,\gamma_2)\,w_\zeta + \\
&+ 2\,[C_{11}\,\alpha\alpha_1 + C_{22}\,\beta\beta_1 + C_{33}\,\gamma\gamma_1 + C_{12}\,(\alpha\,\beta_1 + \alpha_1\beta) + \\
&\quad + C_{13}\,(\alpha\,\gamma_1 + \alpha_1\,\gamma) + C_{23}\,(\beta\gamma_1 + \beta_1\,\gamma)]\,(u_\eta + v_\xi) + \\
&+ 2\,[C_{11}\,\alpha\alpha_2 + C_{22}\,\beta\beta_2 + C_{33}\,\gamma\gamma_2 + C_{12}\,(\alpha\,\beta_2 + \alpha_2\,\beta) + \\
&\quad + C_{13}\,(\alpha\gamma_2 + \alpha_2\,\gamma) + C_{23}\,(\beta\gamma_2 + \beta_2\,\gamma)]\,(w_\xi + v_\zeta) + \\
&+ 2\,[C_{11}\,\alpha_1\alpha_2 + C_{22}\,\beta_1\beta_2 + C_{33}\,\gamma_1\gamma_2 + C_{12}(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) + \\
&\quad + C_{13}(\alpha_1\gamma_2 + \alpha_2\gamma_1) + C_{23}(\beta_1\gamma_2 + \beta_2\gamma_1)](v_\zeta + w_\xi)
\end{aligned}\right\}\ldots(18)
$$

Deze uitdrukking kan nog vereenvoudigd worden, omdat over de richtingen der x-, y- en z-assen nog willekeurig beschikt kan worden. Men kan ze zoodanig kiezen, dat B_{12}, B_{13} en B_{23} binnen de werkingssfeer verdwijnen. Men bedenke, dat hier over den bouw der moleculen niets ondersteld is en over de rangschikking slechts dit, dat de afwijking van een isotrope verdeeling in den natuurlijken toestand klein is.

Voert men in de moleculen nieuwe assen in door de substituties:

$$
\begin{aligned}
X &= \alpha'\,x + \beta'\,y + \gamma'\,z \\
Y &= \alpha_2'\,x + \beta_1'\,y + \gamma_1'\,z \\
Z &= \alpha_1'\,x + \beta_2'\,y + \gamma_2'\,z
\end{aligned}
$$

dan gaat de waarde van B_{12} ten opzichte der nieuwe assen over in:

$$
\begin{aligned}
\alpha'\,\alpha_1'\,B_{11} + \beta'\,\beta_1'\,B_{22} + \gamma'\,\gamma_1'\,B_{33} + (\alpha'\,\beta_1' + \alpha_1'\,\beta')\,B_{12} + \\
+ (\alpha'\,\gamma_1' + \alpha_1'\,\gamma')\,B_{13} + (\beta'\,\gamma_1' + \beta_1'\,\gamma')\,B_{23}
\end{aligned}
$$

omdat de afstanden R en de coördinaten der zwaartepunten onveranderd blijven. Stelt men B_{12}, B_{13}, B_{23} ten opzichte der nieuwe assen nul, dan kunnen uit de vergelijkingen, die daarbij ontstaan, de richtingscosinussen bepaald worden.

De oplossing van dit vraagstuk geschiedt, zooals bekend is, door middel van de vergelijking:

$$\begin{vmatrix} B_{11}-\lambda, & B_{12}, & B_{13} \\ B_{12}, & B_{22}-\lambda, & B_{23} \\ B_{13}, & B_{23}, & B_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

die van den derden graad is ten opzichte van λ en altijd drie reëele wortels heeft. De richtingen der assen, voor welke B_{12}, B_{13} en B_{23} verdwijnen, hangen dus in het algemeen van den onderlingen afstand der moleculen af.

Wanneer echter de krachten, die tusschen de verschillende punten van twee moleculen werken, allen op dezelfde wijze van den afstand afhangen, kunnen de assen x, y en z zoodanig aangenomen worden, dat in de uitdrukking voor de onderlinge werking van elk paar moleculen: A_{12}, A_{13} en A_{23} niet voorkomen. Dit geldt evenzoo bij de onderstellingen die tot vergelijking (13) aanleiding geven. In de formule (18) verdwijnen dan zoowel de coëfficiënten C_{12}, C_{13} en C_{23} als B_{12}, B_{13} en B_{23} ten opzichte van dezelfde assen, op welken afstand de zwaartepunten der moleculen ook gelegen zijn. Bij kleine magneten zouden bovendien in A_{11}, A_{22} en A_{33} (zie vergel. 9) de grootheden:

$$\Sigma\left\{\frac{F'(R)}{R}x_1^2\right\}, \quad \Sigma\left\{\frac{F'(R)}{R}y_1^2\right\} \quad \text{en} \quad \Sigma\left\{\frac{F'(R)}{R}z_1^2\right\}$$

verdwijnen, als ten minste de magnetische krachten alleen in rekening werden gebracht.

Wanneer tusschen elke twee punten krachten werkten, die evenredig waren met het product hunner massa's en volgens dezelfde wet van den afstand afhingen, zouden de assen ten opzichte waarvan de bovengenoemde coëfficiënten verdwijnen, de hoofdassen der centrale ellipsoïden van de moleculen zijn. Dan worden:

$$A_{11} = -M_1' \frac{F'(R)}{R} A_1; \qquad A_{22} = -M_1' \frac{F'(R)}{R} B_1;$$

$$A_{33} = -M_1' \frac{F'(R)}{R} C_1,$$

waarin A_1, B_1 en C_1 dezelfde beteekenissen hebben als op pag. 312. Men kan dan in plaats van de grootheden, die door de vergelijkingen (15) ingevoerd werden, schrijven:

$$T_{11} = -A_1 T; \quad T_{11}' = -A_1 T'; \quad T_{11}'' = -A_1 T'' \text{ enz.}$$

en in plaats van de vergelijkingen (16) en (17):

$$B_{11} = -A_1 (2T + T' - T''); \quad B_{22} = -B_1 (2T + T' - T'');$$
$$B_{33} = -C_1 (2T + T' - T'');$$
$$C_{11} = -A_1 (T + T''); \quad C_{22} = -B_1 (T + T'');$$
$$C_{33} = -C_1 (T + T'') \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

De vergelijking (18) neemt dan de eenvoudige gedaante aan:

$$\begin{aligned} \Sigma V_2 = & -(A_1 \alpha^2 + B_1 \beta^2 + C_1 \gamma^2)(2T + T' - T'') u_\xi \\ & -(A_1 \alpha_1^2 + B_1 \beta_1^2 + C_1 \gamma_1^2)(2T + T' - T'') v_\eta \\ & -(A_1 \alpha_2^2 + B_1 \beta_2^2 + C_1 \gamma_2^2)(2T + T' - T'') w_\zeta \\ & -2(A_1 \alpha\alpha_1 + B_1 \beta\beta_1 + C_1 \gamma\gamma_1)(T + T'')(u_\eta + v_\xi) \\ & -2(A_1 \alpha\alpha_2 + B_1 \beta\beta_2 + C_1 \gamma\gamma_2)(T + T'')(w_\xi + u_\zeta) \\ & -2(A_1 \alpha_1\alpha_2 + B_1 \beta_1\beta_2 + C_1 \gamma_1\gamma_2)(T + T'')(v_\zeta + w_\eta) \ldots \quad (20) \end{aligned}$$

Wanneer in een werkingssfeer een volkomen isotrope rangschikking der moleculen ondersteld werd, zou ΣV_2 in de vergelijkingen (18) en (20) de geheele potentiaal op een molecule voorstellen, voor zooverre deze van de richting harer assen afhangt. Immers toonden wij in § 5 aan, dat bij deze onderstelling in den natuurlijken toestand van het lichaam het bedoelde deel der potentiaal verdwijnt. Dit eenvoudige geval zal vooreerst nader onderzocht worden.

Men kan in de algemeene formule (18) de assen ξ, η en ζ laten samenvallen met de hoofdassen der elasticiteitsellipsoïde in het beschouwde punt. Dan worden $u_\eta + v_\xi = 0$, $w_\eta + v_\zeta = 0$ en $u_\zeta + w_\xi = 0$. Laat men daarna de assen

x, y en z, voor welke de grootheden B_{12}, B_{13} en B_{23} verdwijnen (en die wij in het vervolg de *assen* der molecule zullen noemen), samenvallen met de assen ξ, η en ζ, dan verdwijnt het koppel.

Iedere molecule van een oorspronkelijk isotroop lichaam, dat een vormverandering ondergaan heeft, is in evenwicht als haar assen in de richtingen van de assen der elasticiteits-ellipsoide vallen. Met den onderlingen afstand der moleculen veranderen in het algemeen de richtingen van hare assen. Bij de hypothese, die tot vergelijking (20) voert, zijn zij de hoofdtraagheidsassen.

Bij stabiel evenwicht moet ΣV_2 een maximum wezen. Om te onderzoeken, wanneer dit zal plaats hebben, worden in de vergelijking (18) in plaats van de negen cosinussen, drie onafhankelijk veranderlijken ingevoerd: de hoek tusschen de z- en de ζ-assen $= \theta$; de hoek tusschen de doorsnede der vlakken xy en $\xi\eta$ met de ξ-as $= \psi$; de hoek, dien deze doorsnede met de x-as maakt, $= \varphi$.

Wanneer de x-as samenvalt met de ξ-as, de y-as met de η-as en de z-as met de ζ-as, vindt men, als de vaste assen samenvallen met de hoofdassen der elasticiteits-ellipsoide:

$$\frac{\partial \Sigma V_2}{\partial \theta} = 0; \quad \frac{\partial \Sigma V_2}{\partial \varphi} = 0; \quad \frac{\partial \Sigma V_2}{\partial \psi} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 \Sigma V_2}{\partial \varphi \partial \theta} = 0; \quad \frac{\partial^2 \Sigma V_2}{\partial \psi \partial \theta} = 0.$$

$$\frac{\partial^2 \Sigma V_2}{\partial \theta^2} = 2\,(B_{33} - B_{22})\,(v_\eta - w_\zeta);$$

$$\frac{\partial^2 \Sigma V_2}{\partial \varphi^2} = \frac{\partial^2 \Sigma V_2}{\partial \psi^2} = -\frac{\partial^2 \Sigma V_2}{\partial \varphi \partial \psi} = 2\,(B_{22} - B_{11})\,(u_\xi - v_\eta).$$

Stelt t een grootheid voor, van welke de hoeken φ, ψ en θ afhangen, dan is ΣV_2 een maximum of minimum voor bepaalde waarden van u_ξ, v_η en w_ζ, naarmate $\frac{d^2 \Sigma V_2}{dt^2}$ negatief of positief is.

Nu is:

$$\frac{d^2 \Sigma V_2}{d t^2} = \frac{\partial^2 \Sigma V_2}{\partial \varphi^2} \left(\frac{d \varphi}{d t} - \frac{d \psi}{d t}\right)^2 + \frac{\partial^2 \Sigma V_2}{\partial \theta^2} \left(\frac{d \theta}{d t}\right)^2.$$

Dus is ΣV_2 een maximum en het evenwicht stabiel, als:

$$\frac{\partial^2 \Sigma V_2}{\partial \varphi^2} < 0 \quad \text{en} \quad \frac{\partial^2 \Sigma V_2}{\partial \theta^2} < 0 \text{ zijn.}$$

Worden de grootheden B_{11}, B_{22} en B_{33} als positief ondersteld en $B_{11} > B_{22} > B_{33}$ aangenomen, dan is, bij den gekozen stand der assen het evenwicht stabiel, wanneer $u_\xi > v_\eta > w_\zeta$ is. Bij de beperkende hypothese, die vergelijking (20) tot grondslag heeft, moet in dezelfde omstandigheden $2\,T + T' - T'' < 0$ worden ondersteld en $A_1 > B_1 > C_1$. Dan is het evenwicht stabiel als de as van het kleinste traagheidsmoment samenvalt met de grootste as der elasticiteits-ellipsoide en omgekeerd.

§ 7. De spanningen, die op de zijvlakken van een kleinen kubus binnen het lichaam werken, wiens aangrenzende ribben evenwijdig met de vaste assen zijn, kunnen uit de gevonden formules berekend worden. De lengte der ribbe van den kubus worde als eenheid aangenomen. De normale spanningen in de richtingen der ξ, der η en der ζ-as, worden t_{11}, t_{22} en t_{33} genoemd; de tangentieele spanningen zijn t_{12}, t_{23} en t_{31}. Zij zijn achtereenvolgens loodrecht op de ξ-, de η- en de ζ-assen en vallen in de richtingen der η-, der ζ- en der ξ-assen.

De arbeid, die door deze spanningen verricht wordt, gedurende een kleine vormverandering van den kubus, is:

$$t_{11}\,\delta u_\xi + t_{22}\,\delta v_\eta + t_{33}\,\delta w_\zeta + t_{12}\,\delta(u_\eta + v_\xi) + t_{23}\,\delta(v_\zeta + w_\eta) + \\ + t_{31}\,\delta(w_\xi + u_\zeta).$$

Deze arbeid kan nog op een andere manier worden voorgesteld. Zij W de potentiaal der onderlinge werking van de moleculen binnen den kubus. Deze heeft, zooals bekend is, de eigenschap, dat de variatie, die zij ondergaat, bij een willekeurige kleine verplaatsing der moleculen, den arbeid voorstelt, welke bij die verplaatsing verricht wordt. Men kan zich voorstellen, dat de moleculen een weinig zoodanig verschoven worden, dat de richtingen harer assen daarbij niet veranderen. Bij deze virtueele verplaatsing verrichten de koppels geen arbeid en men vindt:

$$\delta W = \frac{\partial W}{\partial u_\xi}\delta u_\xi + \frac{\partial W}{\partial v_\eta}\delta v_\eta + \frac{\partial W}{\partial w_\zeta}\delta w_\zeta + \frac{\partial W}{\partial u_\eta}\delta(u_\eta + v_\xi) +$$
$$+ \frac{\partial W}{\partial v_\zeta}(v_\zeta + w_\eta) + \frac{\partial W}{\partial w_\xi}(w_\xi + u_\zeta).$$

Door vergelijking van beide uitdrukkingen voor den arbeid, verkrijgt men voor de spanningen de formules:

$$t_{11} = \frac{\partial W}{\partial u_\xi};\ t_{22} = \frac{\partial W}{\partial v_\eta};\ t_{33} = \frac{\partial W}{\partial w_\zeta};\ t_{12} = \frac{\partial W}{\partial u_\eta};\ t_{23} = \frac{\partial W}{\partial v_\zeta};$$
$$t_{31} = \frac{\partial W}{\partial u_\zeta}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

De functie W bestaat uit twee deelen. Het eerste is ontstaan uit de krachten, die op de zwaartepunten der moleculen werken. Zij geeft formules voor de spanningen, welke overeenkomen met die, welke in de gewone theorie, waar de afmetingen der deeltjes verwaarloosd worden, gegeven worden.

Het tweede gedeelte van de functie W hangt van de richtingen af, die de assen der moleculen met de vaste assen vormen. Dit deel der potentiaal, dat door W_1 zal aangeduid worden, is, zooals uit vergelijking (9) volgt, bij de aangenomen onderstellingen omtrent de functie $F(R)$, klein ten opzichte van het eerste gedeelte. De grootheden A_{11}, A_{22} enz. toch, die in W_1 voorkomen, bevatten de eerste en tweede machten der afmetingen van de moleculen. Daarom mogen in W_1 de producten en tweede machten van de grootheden u_ξ, v_η enz. verwaarloosd worden. Worden deze bijkomende spanningen met τ_{11}, τ_{22}, τ_{33}, τ_{12}, τ_{23} en τ_{31} aangeduid, dan heeft men de formules:

$$\tau_{11} = \frac{\partial W_1}{\partial u_\xi}; \quad \tau_{22} = \frac{\partial W_1}{\partial v_\eta}; \quad \tau_{33} = \frac{\partial W_1}{\partial w_\zeta};$$

$$\tau_{12} = \frac{\partial W_1}{\partial u_\eta}; \quad \tau_{23} = \frac{\partial W_1}{\partial v_\zeta}; \quad \tau_{31} = \frac{\partial W_1}{\partial w_\xi} \quad . \; . \; (22)$$

De functie W_1 moet nog bepaald worden. In het algemeen wordt zij zeer samengesteld. Neemt men echter aan, dat alle moleculen in den kubus onderling gelijk zijn, dat haar assen gelijke richtingen hebben en dat zij isotroop gerangschikt zijn, dan wordt vooreerst de potentiaal der krachten, die op een molecule werken, voor zooverre deze functie van de richtingen der assen afhangt $= \Sigma V_2$. Daarin heeft dan ΣV_2 dezelfde beteekenis als in vergelijking (18). Indien n het aantal deeltjes is, dat in den bovengenoemden kubus aanwezig is, wordt:

$$W_1 = \frac{n}{2} \Sigma V_2 .$$

Bij een bepaalden stand der assen van de moleculen, (voor allen denzelfden) wordt dan gevonden:

$$\tau_{11} = \tfrac{1}{2} n \left(B_{11} \alpha^2 + B_{22} \beta^2 + B_{33} \gamma^2\right) \quad . \; . \; . \; . \; (23)$$

terwijl τ_{22}, τ_{33} hieruit afgeleid worden, als men α, β en γ vervangt door α_1, β_1 en γ_1 en door α_2, β_2 en γ_2. Ook de uitdrukkingen voor de tangentieële spanningen kunnen door middel van de vergelijkingen (18) en (22) worden opgeschreven.

De kubus op wiens zijvlakken de spanningen bepaald zijn in de onderstelling, dat de assen der moleculen allen onderling evenwijdig zijn, kan een zeer groot aantal werkingssferen bevatten. In elke sfeer hebben wij de moleculen als nagenoeg evenwijdig gericht beschouwd. Zoolang zij niet door den invloed van uitwendige krachten, die op de oppervlakte van het lichaam werken, gewenteld zijn, kan men echter aannemen, dat in den geheelen kubus de assen der moleculen gemiddeld naar alle richtingen gelijkelijk verdeeld zijn.

Om in dien toestand de spanningen τ_{11}, τ_{22} enz. te berekenen, kan men zich een bol geconstrueerd denken, en uit het middelpunt lijnen getrokken, evenwijdig met overeenkomstige assen van de moleculen in het volume-element. De n snijpunten zullen gelijkmatig over de boloppervlakte verspreid liggen. Alle stralen, die met de ξ-as hoeken vormen, welke tusschen de waarden h en $h + dh$ begrepen zijn, snijden een schijf af, waarop $\frac{n}{2}$ $sin\, h \,.\, dh$ snijpunten liggen. Hieruit volgt, dat het aantal moleculen, wier x-assen hoeken met de ξ-as maken, die tusschen h en $h + dh$ besloten zijn, gelijk is aan $\frac{n}{2}$ $sin\, h\, dh = - \frac{n}{2} d\alpha$, volgens de formules (10). De uitdrukking voor de spanning τ_{11} wordt blijkbaar bepaald, door in de vergelijking (23) α^2 te vermenigvuldigen met: $- \frac{n}{2} d\alpha$, evenzoo β^2 met $- \frac{n}{2} d\beta$ en γ^2 met $- \frac{n}{2} d\gamma$ en vervolgens de geheele uitdrukking tusschen de grenzen $+ 1$ en $- 1$ te integreeren. Men verkrijgt de waarde:

$$\tau_{11} = \frac{1}{6} n (B_{11} + B_{22} + B_{33}) \quad . \; . \; . \; . \; . \; (24)$$

Zoekt men op dezelfde manier ook de overige spanningen op het beschouwde oogenblik, zoo zal men vinden:

$$\left.\begin{array}{l} \tau_{11} = \tau_{22} = \tau_{33} \\ \tau_{12} = \tau_{23} = \tau_{31} = 0 \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (25)$$

Na afloop der vormverandering, als de moleculen in stabiel evenwicht gekomen zijn, kunnen de gewijzigde spanningen weder worden berekend. Daar toch op dat oogenblik de assen van de moleculen, zooals wij zagen, met de elasticiteits-assen in elk element samenvallen, kunnen de richtingscosinussen α, β en γ in vergelijking (23) gemakkelijk bepaald worden, als de aard der deformatie gegeven is. De grootte der verplaatsingen heeft op de bijkomende spanningen bij de eenvoudige hypothesen, die tot nu toe gesteld zijn, geen invloed.

De vergelijkingen ter bepaling van het evenwicht in een veerkrachtig lichaam kunnen gemakkelijk opgesteld worden als de uitwendige krachten, die op de massa en de oppervlakte van het lichaam werken, aangrijpen in de zwaartepunten der moleculen.

De spanningen, die in de gewone elasticiteits-theorie voorkomen, en afhangen van u_ξ, u_η, u_ζ enz. duiden wij verder aan door de letters: t_{11}, t_{22}, t_{33} enz., de bijkomende spanningen, even als boven door τ_{11}, τ_{22}, τ_{33} enz.

De ontbondenen der uitwendige krachten, die op alle punten van het lichaam werken, worden voorgesteld door X, Y en Z. De ontbondenen van de krachten, die in een element van de oppervlakte werken, worden $X_{(0)}$, $Y_{(0)}$, $Z_{(0)}$ genoemd.

Bepaalt men het verschil der spanningen, die op een bepaald oogenblik op de overstaande zijden van een kleinen kubus binnen het lichaam werken, dan vindt men daaruit de vergelijkingen:

$$\left.\begin{aligned}
X + \frac{\partial(t_{11}+\tau_{11})}{\partial\xi} + \frac{\partial(t_{12}+\tau_{12})}{\partial\eta} + \frac{\partial(t_{31}+\tau_{31})}{\partial\zeta} &= 0 \\
Y + \frac{\partial(t_{12}+\tau_{12})}{\partial\xi} + \frac{\partial(t_{22}+\tau_{22})}{\partial\eta} + \frac{\partial(t_{23}+\tau_{23})}{\partial\zeta} &= 0 \\
Z + \frac{\partial(t_{31}+\tau_{31})}{\partial\xi} + \frac{\partial(t_{23}+\tau_{23})}{\partial\eta} + \frac{\partial(33+\tau_{33})}{\partial\zeta} &= 0
\end{aligned}\right\} \ldots (26^a)$$

Beschouwt men verder een element, dat door de oppervlakte des lichaams begrensd wordt, dan verkrijgt men ter bepaling van het evenwicht aan die oppervlakte de vergelijkingen:

$$\left.\begin{aligned}
X_{(0)} &= (\alpha)_{(0)}(t_{11}+\tau_{11}) + (\beta)_{(0)}(t_{12}+\tau_{12}) + (\gamma)_{(0)}(t_{31}+\tau_{31}) \\
Y_{(0)} &= (\alpha)_{(0)}(t_{12}+\tau_{12}) + (\beta)_{(0)}(t_{22}+\tau_{22}) + (\gamma)_{(0)}(t_{23}+\tau_{23}) \\
Z_{(0)} &= (\alpha)_{(0)}(t_{31}+\tau_{31}) + (\beta)_{(0)}(t_{23}+\tau_{23}) + (\gamma)_{(0)}(t_{33}+\tau_{33})
\end{aligned}\right\} .(26^b)$$

Hierin zijn $(\alpha)_{(0)}$, $\beta_{(0)}$ en $\gamma_{(0)}$ de cosinussen der hoeken, die de normaal van het element der oppervlakte (naar buiten gericht) met de coördinaat-assen maakt. Voor de spanningen aan de oppervlakte mogen de uitdrukkingen worden genomen, welke voor de spanningen binnen het lichaam gevonden zijn, als men aanneemt, dat de uitwendige krachten $X_{(0)}$, $Y_{(0)}$ en $Z_{(0)}$ zich uitstrekken tot moleculen, welke op een afstand, gelijk aan den straal der werkingssfeer, van de oppervlakte gelegen zijn. Aan de oppervlakte zelf heeft namelijk de functie W niet dezelfde waarde als binnen het lichaam.

Behalve de genoemde voorwaarden is voor het evenwicht nog noodig, dat de moleculen niet om haar zwaartepunten wentelen. Daar bij het evenwicht de assen van alle moleculen in het ruimte-element van het lichaam als evenwijdig kunnen beschouwd worden, heeft men nog in een isotroop lichaam de vergelijkingen:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial W_1}{\partial \varphi} = 0, \qquad \dfrac{\partial W_1}{\partial \psi} = 0, \qquad \dfrac{\partial W_1}{\partial \theta} = 0 \\ \text{met de voorwaarden:} \quad \dfrac{\partial^2 W_1}{\partial \varphi^2} < 0 \quad \text{en} \quad \dfrac{\partial^2 W_1}{\partial \theta^2} < 0 \end{array}\right\} \quad . \ . \ . \ . \ (26^c)$$

als het evenwicht stabiel zal zijn. De hoeken zijn dezelfden, die in het laatst der vorige paragraaf werden ingevoerd. W_1 heeft dezelfde beteekenis als in de vergelijkingen (22).

De evenwichtsvergelijkingen kunnen ook uit het beginsel afgeleid worden, dat de arbeid, die bij een kleine verplaatsing en wenteling der moleculen verricht wordt, bij het evenwicht verdwijnen moet. Zij dO het element der oppervlakte en dS een element van het volume van een isotroop lichaam, dan moet voldaan worden aan de voorwaarde:

$$\delta \left\{ \int (u X + v Y + w Z)\, dS + \right.$$
$$\left. + \int (u X_{(0)} + v Y_{(0)} + w Z_{(0)})\, dO - \int W\, dS \right\} = 0.$$

Neemt men in aanmerking, dat hier:

$$\delta W = \frac{\partial W}{\partial u_\xi}\delta u_\xi + \frac{\partial W}{\partial v_\eta}\delta v_\eta + \frac{\partial W}{\partial w_\zeta}\delta w_\zeta + \frac{\partial W}{\partial u_\eta}\delta(u_\eta + v_\xi) +$$

$$+ \frac{\partial W}{\partial v_\zeta}\delta(v_\zeta + w_\eta) + \frac{\partial W}{\partial w_\xi}\delta(w_\xi + u_\zeta) + \frac{\partial W}{\partial \varphi}\delta\varphi + \frac{\partial W}{\partial \psi}\delta\psi + \frac{\partial W}{\partial \theta}\delta\theta$$

is en dat:

$$\int \frac{\partial W}{\partial u_\xi}\,\delta u_\xi\, d S = + \int (\alpha)_0 \frac{\partial W}{\partial u_\xi}\,\delta u\, d O - \int \frac{\partial^2 W}{\partial \xi\, \partial u_\xi}\,\delta u\, d S$$

is, dan vindt men, na een dergelijke herleiding van alle termen en door vervolgens de grootheden afzonderlijk $= 0$ te stellen, die in de integraal, welke over den geheelen inhoud van het lichaam uitgestrekt wordt, met δu, δv, δw, $\delta\varphi$, $\delta\psi$ en $\delta\theta$ vermenigvuldigd zijn, de vergelijkingen (26^a) en (26^c) terug. Stelt men alle grootheden, welke in de integraal, die over de oppervlakte genomen wordt, met δu, δv en δw vermenigvuldigd zijn, ook $= 0$, dan verkrijgt men weêr de vergelijkingen (26^b). Men ziet ook bij deze berekening, dat de spanningen werkelijk de waarden hebben, welke in de formules (21) zijn aangegeven.

§ 8. Als de moleculen van een lichaam ten opzichte van elkaâr verschoven worden, zullen zij volgens de bovenstaande beschouwingen tevens wentelen en moeten de spanningen daarbij veranderen.

Indien dus gedurende de wenteling de vormverandering van het lichaam een standvastige waarde zal behouden, moeten de uitwendige krachten, die op het lichaam werken, een wijziging ondergaan.

Proefondervindelijke bepalingen hierover zijn door F. Kohlrausch *) gedaan. Hij heeft het moment van torsie waargenomen, dat noodig was, om aan een draad een standvastige wringing te geven en de verandering, die dat moment ondervond, nauwkeurig gemeten.

---

*) Poggendorff's *Annal.* CXIX. p. 337.

Als daarentegen het lichaam aan den invloed van standvastige uitwendige krachten onderworpen blijft, zal zoolang de richting der moleculen verandert, ook de vormverandering gewijzigd worden.

De veerkrachtige nawerking wordt, wat den aard van het verschijnsel aangaat, dus door de meegedeelde theorie verklaard. Ook de vormveranderingen, die men bij gemagnetiseerde lichamen heeft opgemerkt, zijn in de theorie begrepen, als men van het beginsel van WEBER uitgaat, dat het magnetiseeren in een verandering der richting van moleculair-magneten bestaat. Immers is de onderstelling, dat de moleculen als kleine magneten te beschouwen zijn, als een bijzonder geval in de gegeven formules opgesloten.

Wij zullen nu de deformatie van een *isotropen* cilinder, waarvan de as evenwijdig met de ζ-as worde aangenomen, nader onderzoeken. Ondersteld wordt, dat de zwaartepunten der moleculen de verschuivingen ondergaan, die bij het vraagstuk van de Saint-Venant *) gevonden worden, waarbij de evenwichtstoestand onderzocht werd van een cilinder, die aan het eene uiteinde bevestigd is, terwijl op het andere eindvlak zoodanige krachten werken, dat elementen, evenwijdig aan de as geen zijdelingsche drukking op elkander uitoefenen.

Als geen uitwendige krachten op de massa van den cilinder aangrijpen, en de moleculen eenigen tijd noodig hebben om de wenteling te volbrengen, (waarvan de oorzaak in § 11 nader zal besproken worden), zullen de verschuivingen op het eerste oogenblik voldoen aan de vergelijkingen (26^a) en (26^b), mits op den mantel van den cilinder in elk element de krachten:

$$X_{(0)} = -(\alpha)_{(0)}\, \tau_{11} \quad \text{en} \quad Y_{(0)} = -(\beta)_{(0)}\, \tau_{22}$$

aangebracht gedacht worden. Voor die spanningen moeten dan natuurlijk de waarden ingevoerd worden, die in de vergelijking (25) zijn aangegeven.

*) *Mémoires des savants étrangers,* T. XIV. *Journal de Liouville,* 2 T. 1.

Aan de vergelijkingen (26^c) wordt echter niet voldaan; de moleculen draaien tot dat zij in bepaalde, van de vormverandering afhangende richtingen tot rust komen.

Gedurende deze beweging echter zullen de richtingscosinussen α, β, γ enz., van welke op een willekeurig oogenblik de bijkomende spanningen afhangen, functiën van de coördinaten zijn. Uit (26^a) en (26^b) ziet men, dat het evenwicht van de zwaartepunten der moleculen niet kan blijven bestaan, wanneer niet in het algemeen op elk element van het lichaam krachten X, Y en Z worden aangebracht, die gedurende de wenteling der deeltjes elk oogenblik veranderen. Ook de uitwendige krachten, die op het grondvlak en op den mantel van den cilinder aangrijpen, moeten voortdurend gewijzigd worden. Men ziet hieruit, dat als een cilinder aan het eene uiteinde bevestigd is, en aan het andere b. v. om een standvastigen hoek getordeerd wordt gehouden, de moleculen, zoolang zij wentelen, niet in evenwicht blijven. Op de uitwendige krachten, die noodig zouden zijn, volgens het zooeven gezegde, om deze bewegingen tegen te houden, en die wij voorloopig als aanwezig denken, komen wij nader terug.

De elasticiteits ellipsoïde is bij dit probleem overgegaan in een ellips, waarvan de normaal loodrecht op de ζ-as staat en met de ξ-as een hoek maakt, die bepaald wordt door de formule:

$$tang\, p = -\frac{t_{31}}{t_{23}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

De hoofdspanningen nemen de waarden aan:*)

$$S_1 = \frac{t_{33}}{2} + \sqrt{t_{31}^2 + t_{23}^2 + \frac{t_{33}^2}{4}};$$

$$S_2 = \frac{t_{33}}{2} - \sqrt{t_{31}^2 + t_{23}^2 + \frac{t_{33}^2}{4}} \quad \ldots\ldots \quad (28)$$

---

*) Zie o. a. Clebsch. *Theorie der Elasticität fester Körper*, p. 130.

De cosinussen der hoeken, welke deze krachten met de coördinaat-assen vormen, zijn gegeven door de uitdrukkingen:

$$cos\, p_1 = \frac{t_{31}}{\sqrt{t_{31}^2 + t_{23}^2 + S^2}}; \qquad cos\, q_1 = \frac{t_{23}}{\sqrt{t_{31}^2 + t_{23}^2 + S^2}};$$

$$cos\, r_1 = \frac{S}{\sqrt{t_{31}^2 + t_{23}^2 + S^2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (29)$$

als daarin achtereenvolgens S_1 en S_2 in plaats van S worden gesteld. Zij nu in de eerste plaats:

$$u = -\mu a \xi + b \eta \zeta; \quad v = -\mu a \eta - b \xi \zeta; \quad w = a \zeta \ldots (30)$$

Deze waarden gelden, als de cilinder een cirkelvormige doorsnede heeft en gelijktijdig in de richting zijner as gespannen en om die as getordeerd wordt. Hieruit leidt men af:

$$t_{12} = 0; \qquad t_{33} = Ea; \qquad t_{31} = \frac{Eb}{2(1+\mu)}\eta;$$

$$t_{23} = -\frac{Eb}{2(1+\mu)}\xi \quad \ldots\ldots\ldots \quad (31)$$

waarin E de elasticiteits-modulus van den isotropen cilinder beteekent. Uit (27) volgt:

$$tang\, p = \frac{\eta}{\xi}$$

Als de deeltjes in den stabielen evenwichtsstand gekomen zijn, en als ondersteld wordt, dat $B_{11} > B_{22} > B_{33}$ is, moeten de y-assen samenvallen met de normalen der elasticiteits-ellipsen. Daarom moet volgens de formules (10) $\beta_2 = 0$ zijn, terwijl verder $\frac{\eta}{r} = \beta_1$ en $\frac{\xi}{r} = \beta$ is, wanneer $r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ gesteld wordt. Nu worden voor de bijkomende spanningen in dien toestand van het lichaam de waarden gevonden:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\tau_{11}'}{n} &= \tfrac{1}{2}\,(B_{11}\,\alpha^2 + B_{22}\,\beta^2 + B_{33}\,\gamma^2) \\
\frac{\tau_{22}'}{n} &= \tfrac{1}{2}\,(B_{11}\,\alpha_1^{\,2} + B_{22}\,\beta_1^{\,2} + B_{33}\,\gamma_1^{\,2}) \\
\frac{\tau_{33}'}{n} &= \tfrac{1}{2}\,(B_{11}\,\alpha_2^{\,2} + B_{33}\,\gamma_2^{\,2}) \\
\frac{\tau_{21}'}{n} &= 0 \\
\frac{\tau_{31}'}{n} &= C_{11}\,\alpha\,\alpha_2 + C_{33}\,\gamma\,\gamma_2 + C_{12}\,\alpha_2\,\beta + \\
&\quad + C_{13}\,(\alpha\,\gamma_2 + \alpha_2\,\gamma) + C_{23}\,\beta\,\gamma_2 \\
\frac{\tau_{23}'}{n} &= C_{11}\,\alpha_1\,\alpha_2 + C_{33}\,\gamma_1\,\gamma_2 + C_{12}\,\alpha_2\,\beta_1 + \\
&\quad + C_{13}\,(\alpha_1\,\gamma_2 + \alpha_2\,\gamma_1) + C_{23}\,\beta_1\,\gamma_2
\end{aligned}\right\}\quad \ldots\ldots \quad (32)$$

De spanning τ_{12}' verdwijnt hier, omdat $u_\eta + v_\xi = 0$ is. Voor de richtingscosinussen moeten de waarden in de plaats worden gesteld, die in de vergelijkingen (29) voorkomen na substitutie van (31). Daarbij ziet men vooreerst, dat de componenten der uitwendige krachten, die op een willekeurig punt binnen het lichaam moeten werken, om het oorspronkelijk evenwicht in stand te houden zijn:

$$X = -\frac{\partial \tau_{11}'}{\partial \xi}$$

$$Y = -\frac{\partial \tau_{22}'}{\partial \eta}$$

$$Z = -\frac{\partial \tau_{31}'}{\partial \xi} - \frac{\partial \tau_{23}'}{\partial \eta}.$$

De som der momenten dezer krachten ten opzichte van de as des cilinders is:

$$\int (X\eta - Y\xi)\, dq$$

wanneer dq het element der doorsnede van het lichaam is.

Daar echter τ_{11}' en τ_{22}', zoowel uit (32) gemakkelijk blijkt, even functiën van ξ en η zijn en dus X een oneven functie van ξ en Y een oneven functie van η is, zal het moment, omdat de cilinder cirkelvormig is, verdwijnen. Het moment van torsie is, zoolang de moleculen nog willekeurig gericht zijn,

$$M_\zeta = \frac{Eb}{4(1+\mu)} \pi \varrho^4 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (33)$$

wanneer ϱ den straal der doorsnede voorstelt.

Wanneer de moleculen in stabiel evenwicht gekomen zijn, is er nog een moment:

$$M'_\zeta = \int (\tau_{31}' \eta - \tau_{23}' \xi) \, dq.$$

Substitueert men hierin de waarden van τ_{31}' en τ_{23}' uit vergelijking (32), dan heeft men vooreerst:

$$C_{11} n \int (\alpha \alpha_2 \eta - \alpha_1 \alpha_2 \xi) \, dq = C_{11} n \int \alpha_2 \frac{\frac{Eb}{2(1+\mu)} r^2}{\sqrt{t_{31}^2 + t_{23}^2 + S_1^2}} dq =$$

$$= \tfrac{1}{2} C_{11} n \frac{Eb}{(1+\mu)} \int \frac{S_1 r^2 \, dq}{t_{31}^2 + t_{23}^2 + S_1^2} =$$

$$= \tfrac{1}{2} C_{11} n \frac{b}{(1+\mu)} \int \frac{r^2 \, dq}{\sqrt{\frac{b^2}{(1+\mu)^2} r^2 + a^2}}.$$

Evenzoo is:

$$C_{33} n \int (\gamma \gamma_2 \eta - \gamma_1 \gamma_2 \xi) \, dq = -\tfrac{1}{2} C_{33} n \frac{b}{1+\mu} \int \frac{r^2 \, dq}{\sqrt{\frac{b^2}{(1+\mu)^2} r^2 + a^2}}.$$

Verder is:

$$C_{12} n \int (\alpha_2 \beta \eta - \alpha_2 \beta_1 \xi) \, dq = 0$$

$$C_{23} n \int (\beta \gamma_2 \eta - \gamma_2 \beta_1 \xi) \, dq = 0$$

$$n\, C_{13} \int (\alpha \gamma_2 \eta - \alpha_1 \gamma_2 \xi)\, d q =$$

$$= \tfrac{1}{2}\, n\, C_{13} \frac{b\, E}{(1+\mu)} \int \frac{r^2\, S_2\, d q}{\sqrt{(t_{31}^2 + t_{23}^2 + S_1^2)(t_{31}^2 + t_{23}^2 + S_2^2)}}$$

$$n\, C_{13} \int (\alpha_2 \gamma\, \eta - \alpha_2 \gamma_1 \xi)\, d q =$$

$$= \tfrac{1}{2}\, n\, C_{13} \frac{b\, E}{(1+\mu)} \int \frac{r^2\, S_1\, d q}{\sqrt{(t_{13}^2 + t_{23}^2 + S_1^2)(t_{31}^2 + t_{23}^2 + S_2^2)}}$$

De som dezer laatste twee termen neemt een eenvoudige gedaante aan, als men in acht neemt, dat:

$$S_1 + S_2 = E a$$

en

$$\sqrt{(t_{31}^2 + t_{23}^2 + S_1^2)(t_{31}^2 + t_{23}^2 + S_2^2)} =$$

$$= \frac{E^2\, b}{2\,(1+\mu)}\, r \sqrt{a^2 + \frac{b^2}{(1+\mu)^2} r^2}$$

is.

Men vindt eindelijk:

$$M'_\zeta = \tfrac{1}{2}\, n\, (C_{11} - C_{33}) \frac{b}{(1+\mu)} \int \frac{r^2\, d q}{\sqrt{\frac{b^2}{(1+\mu)^2} r^2 + a^2}} +$$

$$+ n\, C_{13}\, a \int \frac{r\, d q}{\sqrt{\frac{b^2}{(1+\mu)^2} r^2 + a^2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (34)$$

Bij de onderstellingen, die aanleiding geven tot de vergelijking (13) verdwijnen, zooals in § 6 werd opgemerkt de coëfficiënten C_{12}, C_{13} en C_{23}; de moleculen kunnen dan ook, zooals daar bewezen werd, nog als kleine magneten worden beschouwd. Men ziet dan gemakkelijk in, dat de volstrekte waarde van M'_ζ een maximum is, wanneer $a = 0$ is, dus wanneer de torsie niet samengesteld is met een spanning volgens de as van den cilinder. In dat geval vindt men:

$$M'\zeta = \frac{n\,(C_{11} - C_{33})}{3}\,\pi\,\varrho^3.$$

In het bijzondere geval, dat de vergelijking (20) geldt, wordt deze formule:

$$M'\zeta = -\frac{n\,(A_1 - C_1)}{3}\,(T + T'')\,\pi\,\varrho^3\,.$$

Dit moment is met $M\zeta$ tegengesteld gericht, wanneer de coëfficiënt $(T + T'')$ een positieve waarde heeft, want bij de bovenstaande herleiding is in deze onderstelling aangenomen, dat $A_1 > B_1 > C_1$ is. Nam men echter aan, dat $A_1 < B_1 < C_1$ ware, dan zou in plaats van de x-as, de z-as van iedere molecule de richting der spanning S_1 hebben. Men zou in de laatste formule A_1 en C_1 met elkaâr moeten verwisselen en het teeken van het moment $M'\zeta$ zou niet veranderen.

Bij de proeven van F. Braun *) is gebleken, dat de nawerking, die bij de torsie optreedt, door een daarop volgende spanning volgens de as van den cilinder steeds vermindert, moge die spanning positief of negatief zijn, d. w. z. moge zij een uitrekking of samendrukking veroorzaken.

Bovenstaande berekening is evenzeer van toepassing, als de spanning en de torsie op elkaâr volgen en als zij gelijktijdig plaats hebben. De eind-toestand van den cilinder moet dan namelijk volgens de theorie dezelfde zijn. De theorie is in het eerste geval in overeenstemming met de waarnemingen, bij de hypothesen, die voor C_{13} de waarde nul of ten opzichte van $C_{11} - C_{33}$ een zeer geringe waarde opleveren. Wel zijn de uitkomsten der waarneming en der berekening niet onmiddellijk gelijk te stellen, daar de grootte der nawerking door Braun bepaald werd uit de verplaatsing van het uiteinde van den draad, die na opheffing der krachten overbleef, maar zij zijn toch met elkaâr in overeenstemming.

Uit de theorie zou ook volgen, dat als een cilinder gelijktijdig aan een torsie en aan een spanning volgens de as

*) Pogg. *Annal.* CLIX. p. 372.

onderworpen werd, het moment $M'\zeta$ ook kleiner zou wezen dan zonder de spanning. Dit is echter niet in overeenstemming met de uitkomsten der proeven van BRAUN. Hij vond in een groot aantal gevallen, dat de nawerkingen, door een gelijktijdige torsie en spanning ontstaan, elkander versterken.

Er zijn meer feiten, waarvan de theorie, zooals zij tot nu toe voorgesteld is, geen rekenschap geeft. Vooreerst zou de nawerking onafhankelijk van de intensiteit der vormverandering zijn, terwijl zij er werkelijk mee evenredig is. Ten tweede zouden, na opheffing der krachten, de moleculen in de nieuwe standen blijven. Van een nawerking zou daarna geen sprake zijn.

In § 10 zal aangetoond worden, dat als het lichaam binnen een werkingssfeer niet isotroop ondersteld wordt, men uitkomsten verkrijgt, die beter met de waarnemingen overeenkomen.

Wat het verschil betreft tusschen een gelijktijdige en op elkaâr volgende werking van krachten in verschillende richtingen, dit kan door een weerstand verklaard worden, die de wenteling der moleculen verhindert, zooals in § 12 nader zal besproken worden.

Wanneer men in bovenstaande formules de spanning laat verdwijnen, vindt men $\alpha_2^2 = \frac{1}{2}$ en $\gamma_2^2 = \frac{1}{2}$, dus:

$$\tau_{33}' = \frac{1}{4}\, n\,(B_{11} + B_{33})\,.$$

Vergelijkt men deze waarde met degene, die τ_{33} bij de natuurlijke rangschikking der moleculen had, dan vindt men:

$$\tau_{33}' - \tau_{33} = \frac{1}{12}\, n\,\{(B_{11} - B_{22}) + (B_{33} - B_{22})\}\,.$$

Als men daarentegen in dezelfde formules de torsie doet verdwijnen, zal (altijd in de onderstelling $B_{11} > B_{22} > B_{33}$) de x-as van ieder deeltje evenwijdig worden met de ζ-as, zoodat men dan heeft: $\alpha = 0$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$, $\beta_2 = 0$, $\gamma_2 = 0$ terwijl β, γ, β_1, γ_1 alle waarden tusschen -1 en 1 kunnen aannemen. Na een kleine herleiding wordt dan gevonden:

$$\tau_{33}' - \tau_{33} = \frac{1}{6} n \left\{ (B_{11} - B_{22}) + (B_{11} - B_{33}) \right\}.$$

Zoowel bij de torsie als bij de lengte-spanning heeft dus een nawerking volgens de as van den cilinder plaats, terwijl in het laatste geval het moment M'_ζ nul is. Bij de torsie is het teeken van $\tau_{33}' - \tau_{33}$ afhankelijk van de gedaante der moleculen; in het geval, dat alleen de spanning bestaat, niet. Indien namelijk $B_{11} < B_{22} < B_{33}$ ware, zou de z-as van een molecule met de as van den cilinder evenwijdig zijn en daarom moest dan $\alpha_2 = 0$ en $\gamma_2 = 1$ wezen; men vindt daarbij:

$$\tau_{33}' = \tau_{33} = -\frac{1}{6} n \left\{(B_{11} - B_{33}) + (B_{22} - B_{33})\right\}.$$

Wanneer nu, zooals in § 6 ondersteld werd, de grootheden B positief zijn, moet de uitwendige kracht op het grondvlak van den cilinder, die $\tau_{33}' - \tau_{33}$ opheft, negatief zijn en zal dus de spankracht, die de vormverandering heeft doen ontstaan, afnemen. De grootte der nawerking is in beide gevallen niet dezelfde. Wat de spanningen betreft aan de oppervlakte van den cilinder, verkrijgt men, als er geen torsie is, uit de gegeven formules:

$$\tau_{11}' - \tau_{11} = \tau_{22}' - \tau_{22} = -\frac{1}{12} n \left\{(B_{11} - B_{22}) + (B_{11} - B_{33})\right\}.$$

Beschouwen wij nog de buiging in het $\xi\zeta$-vlak van een cilinder, waarvan de doorsnede symmetrisch is ten opzichte van de η- en de ξ-assen. Men vindt (zie het genoemde werk van Clebsch, p. 87):

$$\left.\begin{aligned} t_{31} &= \frac{E b_1}{2(1+\mu)} \left[-\frac{\mu \xi^2 - (2-\mu)\eta^2}{2} + \frac{\partial P}{\partial \xi} \right], \\ t_{23} &= \frac{E b_1}{2(1+\mu)} \left[-(\mu + 2)\xi\eta + \frac{\partial P}{\partial \eta} \right] \\ t_{33} &= E \xi (a_1 + b_1 \zeta) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (35)$$

a_1 en b_1 zijn standvastige grootheden, P is een functie, die van den vorm der doorsnede afhangt en wel een oneven functie van ξ en een even functie van η. Daardoor wordt t_{31} een even functie van ξ en van η, en t_{23} een oneven functie van beide. Als de moleculen in standvastig evenwicht gekomen zijn, vindt men α en γ uit de formule voor $\cos p_1$ in de vergelijkingen (29). Men ziet, dat zij even functiën van η zijn, want in den noemer komen slechts even machten van deze veranderlijke voor. Evenzoo ziet men, dat α_1 en γ_1 oneven functiën daarentegen α_2 en γ_2 even functiën van η zullen wezen. Uit vergelijking (27) volgt, dat β een oneven en β_1 een even functie is.

Wanneer X_e, Y_e en Z_e de ontbondenen der kracht zijn, die op het grondvlak van den cilinder moet werken, tengevolge van de nawerking, om de vormverandering een standvastige waarde te doen behouden, ziet men, dat bij de meest algemeene onderstelling, deze ontbondenen geen van allen verdwijnen.

Men heeft namelijk de formules:

$$X_e = -\int \tau_{31}'\, dq; \quad Y_e = -\int \tau_{23}'\, dq; \quad Z_e = -\int \tau_{33}'\, dq.$$

Bij de bijzondere onderstellingen echter, die tot vergelijking (13) aanleiding gaven, waardoor de coëfficiënten C_{12}, C_{13} en C_{23} verdwijnen, wordt: $Y_e = 0$. Zijn verder M'_ξ, M'_η en M'_ζ de componenten van het koppel, dat door de bijkomende spanningen moet werken, dan zijn, als de lengte van den cilinder l genoemd wordt:

$$M'_\xi = \int (\tau_{23}' l - \tau_{33}' \eta)\, dq; \quad M'_\zeta = \int (\tau_{31}' \eta - \tau_{23}' \xi)\, dq;$$

$$M'_\eta = \int (\tau_{23}' \xi - \tau_{31}' l)\, dq.$$

Alleen bij de bepaalde onderstellingen, die zooeven genoemd werden, worden M'_ξ en M'_ζ nul. Dit onderzoek leert, dat dan, overeenkomstig met de waarnemingen van Braun, de buiging in een hoofdvlak geen nawerking in een ander hoofdvlak en geen torsie-nawerking zou tengevolge hebben.

Daarentegen zal de nawerking, die in een hoofdvlak bestaat, zooals bij de proeven ook gevonden werd, door de buiging in een ander vlak en in het algemeen door de vormverandering in een andere richting gewijzigd worden. Het is uit bovenstaande theorie eenvoudig genoeg af te leiden. Wordt de doorsnede van den cilinder als zeer klein aangenomen, dan kunnen in (35) de spanningen t_{31} en t_{23} verwaarloosd worden. Bij de samenstelling van een torsie om de as van den cilinder en van deze buiging wordt een vergelijking gevonden, die van (34) alleen daarin verschilt, dat voor a in de plaats wordt geschreven: $a_1 \xi$. Even als daar, volgt ook hier, dat M'_ζ bij dezelfde onderstelling een maximum is Een nawerking dus, die door torsie wordt opgewekt, zou dan door een daarop volgende buiging verminderen, zooals door de waarnemingen aangetoond werd. Bij de resultaten, die uit vergelijking (35) zijn verkregen, werden de spanningen aan de oppervlakte van den cilinder en de krachten, die op al zijn punten, na de wenteling der moleculen, moeten werken, om de vormverandering constant te houden, verwaarloosd. De krachten, die op den mantel moeten werken, zijn:

$$X_{(0)} = \tau_{11}' \cos n$$

$$Y_{(0)} = \tau_{22}' \sin n$$

$$Z_{(0)} = \tau_{31}' \cos n + \tau_{23}' \sin n\,;$$

waarin n de hoek is, dien de normaal aan het oppervlakte-element met de ξ-as maakt. Nu is blijkbaar $\cos n$ een even functie van η en $\sin n$ een oneven functie. Berekent men dus de momenten dezer krachten ten opzichte van de coördinaat-assen, zoo ziet men, dat zij geen verandering brengen in het boven verkregen resultaat.

De krachten, die binnen den cilinder op eenig punt moeten werken, zijn:

$$X = -\frac{\partial \tau_{11}'}{\partial \xi}; \quad Y = -\frac{\partial \tau_{22}'}{\partial \eta};$$

$$Z = -\frac{\partial \tau_{13}'}{\partial \xi} - \frac{\partial \tau_{23}'}{\partial \eta} - \frac{\partial \tau_{33}'}{\partial \zeta}.$$

Daar het differentiaal-quotient van een even functie oneven en omgekeerd is, kunnen de momenten, die deze krachten uitoefenen, ook geen verandering in de uitkomst brengen. Als men dus die krachten niet aanbrengt, zullen de moleculen zich wel ten opzichte van elkaâr verplaatsen, maar overigens blijft bovenstaande beschouwing van toepassing.

§ 9. In de vorige § werd ondersteld, dat u, v en w gegeven waren en werden de krachten berekend, die noodig waren, om ze te doen ontstaan en in stand te houden. Veel moeilijker is het omgekeerde probleem op te lossen; de verschuivingen te bepalen, die door de werking van gegeven krachten in een lichaam ontstaan en de veranderingen te berekenen, die zij door de wenteling der moleculen moeten ondergaan.

Slechts in een enkel geval zal dit vraagstuk bij een isotroop cilindervormig lichaam worden opgelost.

Vooreerst wordt ondersteld, dat op het gebogen oppervlak geen krachten werken. Dit geeft, volgens de vergelijkingen (26^b) de voorwaarden:

$$(\alpha)_0 (t_{11} + \tau_{11}) + (\beta)_0 (t_{12} + \tau_{12}) = 0$$
$$(\alpha)_0 (t_{12} + \tau_{12}) + (\beta)_0 (t_{22} + \tau_{22}) = 0$$
$$(\alpha)_0 (t_{13} + \tau_{13}) + (\beta)_0 (t_{23} + \tau_{23}) = 0.$$

Hieraan wordt voldaan, als men stelt:

$$t_{11} = -\tau_{11}; \quad t_{22} = -\tau_{22}; \quad t_{12} = -\tau_{12};$$
$$t_{31} = -\tau_{31}; \quad t_{23} = -\tau_{23}.$$

Op het grondvlak werkt in de richting van de as van den cilinder een kracht, die een verlenging in die richting veroorzaakt, en die gelijkmatig over de doorsnede verdeeld gedacht wordt. Haar grootte op de eenheid van oppervlak zij Z_1. Aan de vergelijkingen (26) kan nu worden voldaan, als men aanneemt, dat:

$$u = P\xi; \quad v = P\eta \text{ en } w = Q\zeta \quad \ldots\ldots (36)$$

is, waarin P en Q nog onbepaalde grootheden zijn. Daar de richtingscosinussen hier blijkbaar alleen functiën van den tijd, niet van de coördinaten zullen wezen, is reeds aan de eerste drie vergelijkingen (26) voldaan, mits op het inwendige van den cilinder geen krachten aangrijpen. De voorwaarden aan de oppervlakte en aan het grondvlak van den cilinder zijn:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{E}{(1+\mu)}\left(u_\xi+\frac{\mu}{1-2\mu}\delta\right)=\tfrac{1}{2}n\left(B_{11}\alpha^2+B_{22}\beta^2+B_{33}\gamma^2\right)\\
&\frac{E}{(1+\mu)}\left(v_\eta+\frac{\mu}{1-2\mu}\delta\right)=\tfrac{1}{2}n\left(B_{11}\alpha_1^2+B_{22}\beta_1^2+B_{33}\gamma_1^2\right)\\
&\frac{E}{2(1+\mu)}(u_\eta+v_\xi)=n\,[C_{11}\alpha\alpha_1+C_{22}\beta\beta_1+C_{33}\gamma\gamma_1+\\
&\quad+C_{12}(\alpha\beta_1+\alpha_1\beta)+C_{13}(\alpha\gamma_1+\alpha_1\gamma)+C_{23}(\beta\gamma_1+\beta_1\gamma)]\\
&\frac{E}{2(1+\mu)}(w_\xi+u_\zeta)=n\,[C_{11}\alpha\alpha_2+C_{22}\beta\beta_2+C_{33}\gamma\gamma_2+\ldots]\\
&\frac{E}{2(1+\mu)}(v_\zeta+w_\eta)=n\,[C_{11}\alpha_1\alpha_2+C_{22}\beta_1\beta_2+C_{33}\gamma_1\gamma_2+\ldots]\\
&-Z_1+\frac{E}{(1+\mu)}\left(w_\zeta+\frac{\mu}{1-2\mu}\delta\right)=\tfrac{1}{2}n\left(B_{11}\alpha_2^2+B_{22}\beta_2^2+B_{33}\gamma_2^2\right)
\end{aligned}\right\}\ldots(37)$$

De spanningen t_{11}, t_{22} enz. zijn hier (zie o. a. Clesch p. 48) in functiën van de verschuivingen uitgedrukt; $\delta = u_\xi + v_\eta + w_\zeta$. Als de moleculen in standvastig evenwicht gekomen zijn, zullen de x-assen (bij de onderstelling: $B_{11} > B_{22} > B_{33}$) evenwijdig met ζ-as de y- en z-assen willekeurig gericht zijn. De vergelijkingen (37) gaan over in:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{E}{(1+\mu)}\left\{P+\frac{\mu}{1-2\mu}(2P+Q)\right\}=\tfrac{1}{4}n\left(B_{22}+B_{33}\right)\\
&-Z_1+\frac{E}{(1+\mu)}\left\{Q+\frac{\mu}{1-2\mu}(2P+Q)\right\}=\tfrac{1}{2}n\,B_{11}
\end{aligned}\right\}\ldots(38)$$

De overige vergelijkingen vallen weg. Door oplossing van P en Q wordt gevonden:

$$P = \frac{-\mu Z_1 + \frac{1}{4} n \{ (1-\mu)(B_{22} + B_{33}) - 2\mu B_{11} \}}{E}$$

$$Q = \frac{Z_1 + \frac{1}{2} n \{ B_{11} - \mu (B_{22} + B_{33}) \}}{E}.$$

Op het oogenblik, dat de moleculen nog gelijkelijk naar alle richtingen om een punt voorkomen, moet men voor de tweede leden der vergelijkingen (38) in de plaats schrijven $\frac{1}{6} n (B_{11} + B_{22} + B_{33})$. Dan wordt aan de vergelijkingen (26^a) en (26^b), maar niet aan (26^c) voldaan. Worden de waarden, die P en Q op dat oogenblik annemen P_1 en Q_1 genoemd, dan wordt:

$$\left.\begin{aligned} P - P_1 &= -\frac{1}{12} n \frac{(1+\mu)}{E} \{ B_{11} - B_{22}) + (B_{11} - B_{33}) \} \\ Q - Q_1 &= \frac{1}{6} n \frac{(1+\mu)}{E} \{ (B_{11} - B_{22}) + (B_{11} - B_{33}) \} \end{aligned}\right\} \ldots (39)$$

Deze verschillen bepalen de verschuivingen volgens de as en volgens de doorsnede van den cilinder ten gevolge van de wenteling der moleculen. Men ziet, dat de cilinder onder den invloed eener spankracht volgens de as, bij de onderstellingen, die ingevoerd zijn, in lengte zal toenemen. Men kan gemakkelijk aantoonen, dat deze uitkomst onafhankelijk is van den vorm der moleculen, wat de teekens van $P - P_1$ en van $Q - Q_1$ betreft. Wanneer de cilinder samengedrukt in plaats van uitgerekt werd, zou de z–as van elke molecule evenwijdig met de ζ–as gericht worden. Bij stabiel evenwicht zouden daardoor de tweede leden van vergelijking (38) veranderen in: $\frac{1}{4} n (B_{11} + B_{22})$ en $\frac{1}{2} n B_{33}$. De grootheden, die de nawerking bepalen, worden nu:

$$\left.\begin{aligned} P - P_1 &= \frac{1}{12} n \frac{(1+\mu)}{E} \{ B_{11} - B_{33}) + (B_{22} - B_{33}) \} \\ Q - Q_1 &= -\frac{1}{6} n \frac{(1+\mu)}{E} \{ B_{11} - B_{33}) + (B_{22} - B_{33}) \} \end{aligned}\right\} \ldots (40)$$

De nawerking bij de samendrukking heeft wel het tegengestelde teeken maar in het algemeen niet dezelfde grootte als die bij de uitrekking. Proeven hierover zijn mij niet bekend.

§ 10. In een lichaam, dat binnen een werkingssfeer niet als isotroop kan beschouwd worden, een onderstelling, die zooals in § 5 werd opgemerkt, bij een willekeurige gedaante der moleculen wel de meest waarschijnlijke is, werken op ieder deeltje twee koppels. Het eene is evenredig met de grootheden: u_ξ, v_η, w_ζ enz.; het andere hangt af van de rangschikking der moleculen in den natuurlijken toestand van het lichaam. Stelt men de ontbondenen der koppels volgens de assen aan elkander gelijk, dan vindt men vergelijkingen, waaruit de richtingen der assen bij het evenwicht kunnen bepaald worden. De spanning in een punt van het lichaam en de verandering daarvan bij standvastige vormverandering kan dan volgens de formules (22) berekend worden. In het algemeen is deze berekening zeer samengesteld. Om een eenvoudig voorbeeld te geven, worden de volgende onderstellingen ingevoerd:

1⁰. De moleculen zijn symmetrisch rondom een as. Deze onderstelling wordt slechts ingevoerd ter bekorting der berekeningen. Zij zal bij benadering kunnen worden aangenomen, als één as aanmerkelijk verschilt van de beide anderen.

2⁰. De rangschikking der moleculen in een werkingssfeer is symmetrisch ten opzichte eener as

3⁰. De afwijking van een isotrope rangschikking is zoo gering, dat zij verwaarloosd kan worden in het koppel, dat evenredig is met de vormverandering. Deze hypothese werd reeds in § 5 nader onderzocht.

Het lichaam zij weder een cilinder, waarin dezelfde coördinaat-assen worden aangenomen, als in de vorige paragraaf. De vormverandering zij een verlenging volgens de as, zoodat:

$$u_\xi = -\mu a; \quad v_\eta = -\mu a \text{ en } w_\zeta = a$$

is.

Om het koppel, dat evenredig met de vormverandering is, te berekenen, kan men uitgaan van een der vergelijkingen (18) en (20). Wel is de laatste een bijzonder geval van de eerste, maar bij de hier ingevoerde onderstellingen, komen de berekeningen op hetzelfde neer. Hier zijn de uitkomsten uit (20) afgeleid; men behoeft slechts voor de grootheden A_1 B_1 T enz. andere waarden in de plaats te stellen, om de resultaten te vinden, die (18) oplevert.

Stellen wij nu in vergelijking (20) $B_1 = C_1$, volgens de eerste hypothese, dan wordt bij de aangenomen vormverandering:

$$- \Sigma V_2 = (2T + T' - T'') \{ (A_1 - B_1) \alpha_2^2 (w\zeta - u\xi) + \\ + A_1 u\xi + B_1 (u\xi + w\zeta) \}.$$

En dus, wanneer $-(2T + T' - T'') = D_1$ en $\alpha_2 = \cos\varphi$ worden gesteld, waarbij φ de hoek is tusschen de x-as der molecule en de ζ-as van den cilinder:

$$\Sigma V_2 = D_1 a \{ (A_1 - B_1)(1 + \mu) \cos^2\varphi - A_1 \mu + B_1 (1 - \mu) \}.$$

Het gezochte koppel wordt, volgens de opmerking, die in § 5 gemaakt is:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \Sigma V_2}{\partial \varphi} = - \tfrac{1}{2} (A_1 - B_1) D_1 a (1 + \mu) \sin 2\varphi.$$

Door dit koppel wordt de molecule gewenteld in een vlak, dat door haar hoofdas en de richting der ζ-as gaat.

Het terugwerkend koppel kan op dezelfde wijze uit de vergelijking (14) worden afgeleid. Indien men in die vergelijking de coördinaten der zwaartepunten ten opzichte van de hoofdassen der werkingssfeer bepaalt, vindt men met het oog op de tweede onderstelling dezer §:

$$\Sigma V_1 = (A_1 - B_1)(\alpha_2')^2 (T\xi_1 - T\zeta_1) - A_1 T\xi_1 - B_1 (T\xi_1 + T\zeta_1).$$

De hoofdassen der werkingssfeer worden namelijk door ξ_1, η_1 en ζ_1 aangeduid, terwijl de laatste als as van symmetrie is aangenomen, zoodat $T\eta_1 = T\xi_1$ is gesteld. Verder is α_2' de cosinus van den hoek p tusschen de x-as der molecule en de ζ_1-as van de werkingssfeer.

Wordt $T_{\xi_1} - T_{\zeta_1} = G$ gesteld, dan verkrijgt het terugwerkend koppel de waarde

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \Sigma V_1}{\partial p} = -\frac{1}{2}(A_1 - B_1)\, G \sin 2p \,.$$

De evenwichtsvoorwaarde is dus, zooals uit de gelijkstelling van de beide gevonden koppels volgt:

$$G \sin 2p = D_1 (1 + \mu)\, a \sin 2\varphi \quad \ldots \ldots (41)$$

De waarde van G wordt bepaald door de afwijking van den isotropen toestand binnen een werkingssfeer. Zij kan dus van het eene punt tot het andere gewijzigd worden. In een ruimte-element, dat vele werkingssferen bevat, zal men nu een gemiddelde waarde van G kunnen aannemen. Wij beschouwen haar gedurende de wenteling als standvastig. Dit zal bij de volgende berekeningen steeds ondersteld worden.

Zij nu φ_1 de hoek tusschen de ζ-as en de ζ_1-as, dan moet $p = \varphi_1 - \varphi$ zijn. Door oplossing van φ uit (41) wordt de formule verkregen:

$$\cos 2\varphi = \frac{D_1 (1 + \mu)\, a + G \cos 2\varphi_1}{\sqrt{G^2 + D_1^2 (1 + \mu)^2 a^2 + 2 D_1 G (1 + \mu)\, a \cos 2\varphi_1}} \,.$$

Zij nu nog de deformatie zoo klein, dat ook de verandering in de richting der moleculen slechts gering is, dan kan men voor de laatste uitdrukking in de plaats schrijven:

$$\cos 2\varphi = \cos 2\varphi_1 + \frac{D_1 (1 + \mu)\, a \sin^2 2\varphi_1}{G} \quad \ldots \ldots (42)$$

Als alle moleculen in een ruimte-element oorspronkelijk evenwijdig gericht waren, zou de spanning τ_{33}, voordat de uitwendige kracht op den cilinder werkte, volgens (23) bedragen:

$$\tau_{33} = \frac{1}{2} n D_1 \left\{ B_1 + (A_1 - B_1) \cos^2 \varphi_1 \right\} .$$

De spanning τ_{33}' na de wenteling der moleculen wordt in hetzelfde element gevonden door φ_1 met φ te verwisselen. De wijziging der spanning zou dus wezen:

$$\tau_{33}' - \tau_{33} = \tfrac{1}{4}\, D_1\, n\,(A_1 - B_1)\,(\cos 2\varphi - \cos 2\varphi_1) \ldots (43)$$

Substitueert men de waarde van $\cos 2\varphi$ uit (42), dan wordt de wijziging, welke de spanning ondergaat:

$$\tau_{33}' - \tau_{33} = \frac{D_1^2\, n\,(A_1 - B_1)(1+\mu)\, a \sin^2 2\varphi_1}{4\,G} \ldots (44)$$

Het ruimte-element is echter, zooals ook bij vergelijking (24) werd ondersteld, zeer groot ten opzichte van den afstand, waarop de moleculen nog een merkbaren invloed op elkander uitoefenen. Daarom mogen in dat element weder de assen der moleculen als naar alle richtingen in gelijken getale aanwezig ondersteld worden. Volgens de beschouwing, die in § 7 werd meegedeeld, wordt dan:

$$\tau_{33}' - \tau_{33} = \frac{1}{8}\,\frac{D_1^2 n (A_1 - B_1)(1+\mu) a}{G} \int_0^{\pi} \sin^2 2\varphi_1 \sin\varphi_1\, d\varphi_1 =$$

$$= \frac{2}{15}\,\frac{D_1^2\, n\,(A_1 - B_1)\,(1+\mu)\, a}{G} =$$

$$= \frac{2}{15}\,\frac{D_1^2\, n\,(A_1 - B_1)\,(1+\mu)\, t_{33}}{E\,G} \ldots\ldots (45)$$

Wanneer de deeltjes in het element gelijke richtingen hadden, zou de spanning τ_{11}, volgens de ξ-as, op een willekeurig oogenblik door de formule worden uitgedrukt:

$$\tau_{11} = \tfrac{1}{2}\, n\, D_1 \left\{ B_1 + (A_1 - B_1)\,\alpha^2 \right\},$$

waarin, even als vroeger, α de cosinus van den hoek tusschen de x- en de ξ-as is. Zij nu λ de hoek tusschen de ξ-as en het vlak, waarin de x-as zich beweegt, dan is:

$$\alpha = \sin\varphi \cos\lambda$$

en dus:

$$\tau_{11}' - \tau_{11} = -\tfrac{1}{4}\, D_1\, n\,(A_1 - B_1)\,(\cos 2\varphi - \cos 2\varphi_1) \cos^2\lambda \,.\; (46)$$

Daar de gemiddelde waarde van $\cos^2 \lambda$ tusschen de grenzen 0 en 2π van den hoek λ, $= \frac{1}{2}$ is, vindt men, als alle richtingen van de assen der moleculen in het element in gelijken getale voorkomen, op dezelfde manier als boven:

$$\tau_{11}' - \tau_{11} = -\frac{1}{15} \frac{D_1^2 n (A_1 - B_1)(1+\mu) a}{G} \quad \ldots (47)$$

Dezelfde uitdrukking verkrijgt men voor de verandering in spanning volgens de η-as.

De cilinder moge nu in de tweede plaats een torsie ondergaan, zoodat:

$$u = b\,\eta\,\zeta \quad \text{en} \quad v = -b\,\xi\,\zeta$$

is, of als men in een punt de richtingen der hoofdspanningen als ξ_2- en ζ_2-assen aanneemt:

$$u(\xi_2) = \tfrac{1}{2}\,b\,r, \qquad w(\zeta_2) = -\tfrac{1}{2}\,b\,r$$

zijnde, even als vroeger: $r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$.

Deze vormverandering kan worden opgevat als een spanning volgens de eene hoofdas en een even groote samendrukking volgens de andere. De eene doet een koppel ontstaan: $\frac{D_1}{4}\,b\,r\,(A_1 - B_1)\sin 2\psi$ als ψ de hoek tusschen de x- en de ξ_2-as is; ook ontstaat een terugwerkend koppel in hetzelfde vlak: $\frac{1}{2}(A_1 - B_1)\,G \sin 2(\psi_1 - \psi)$, waarin ψ_1 de oorspronkelijke waarde van ψ beteekent. Evenzoo ontstaan in het vlak $x\zeta_2$ twee koppels, die evenwicht maken. Bij de berekening der spanningen kan aangenomen worden, dat de as der molecule in beide vlakken tegelijk afwijkt. De evenwichtsvoorwaarden worden:

$$\left.\begin{aligned}
&\text{in het eene vlak:}\\
&\frac{D_1}{2}\,b\,r \sin 2\psi = G \sin 2(\psi_1 - \psi)\\
&\text{in het andere:}\\
&-\frac{D_1}{2}\,b\,r \sin 2\chi = G \sin 2(\chi_1 - \chi)
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (48)$$

De eerste geeft volgens de ξ_2- en de ζ_2-assen de verandering in spanningen:

$$\tau_{11}' - \tau_{11} = \frac{1}{15} \frac{D_1^2 n (A_1 - B_1) b r}{G}$$

en

$$\tau_{33}' - \tau_{33} = -\frac{1}{30} \frac{D_1 n (A_1 - B_1) b r}{G}$$

De tweede voorwaarde geeft daarentegen:

$$\tau_{11}' - \tau_{11} = \frac{1}{30} \frac{D_1^2 n (A_1 - B_1) b r}{G}$$

en

$$\tau_{33}' - \tau_{33} = -\frac{1}{15} \frac{D_1^2 n (A_1 - B_1) b r}{G}.$$

Hieruit vindt men voor de geheele verandering in spanning loodrecht op den voerstraal van het beschouwde punt:

$$\frac{1}{5} \frac{D_1^2 n (A_1 - B_1)}{G} \cos 45^0.$$

Het moment van torsie, dat door de nawerking ontstaat, wordt:

$$M_\zeta' = \frac{1}{10} \frac{D_1^2 n (A_1 - B_1) b}{G} \sqrt{2} \int r^2 dq = \frac{\pi}{20} \frac{D_1^2 n (A_1 - B_1) b}{G} \varrho^4 \sqrt{2}.$$

als ϱ ook hier de straal der doorsnede is.

De uitdrukking voor het moment M'_ζ, die in vergelijking (33) werd medegedeeld, invoerende, vindt men:

$$M'_\zeta = \frac{1}{5} \frac{D_1^2 n (A_1 - B_1)(1 + \mu)}{E G} \sqrt{2} \,.\, M_\zeta \,.\,.\,. \quad (49)$$

Vergelijkt men de verhoudingen $\frac{\tau_{33}' - \tau_{33}}{t_{33}}$ uit vergelijking (45) en $\frac{M'_\zeta}{M_\zeta}$ uit (49), dan ziet men, dat de laatste $1{,}5 \times \sqrt{2}$-maal zoo groot als de eerste is.

F. KOHLRAUSCH *) heeft door proeven, die wel niet met denzelfden draad werden genomen, maar toch met draden die uit dezelfde soort van caoutchouc bestonden, aangetoond, dat de intensiteit der nawerking (zie de volgende §) bij de torsie en bij de lengtespanning niet veel verschilt. De eerste werd door hem iets grooter dan de laatste bevonden.

De theorie geeft dus in hoofdzaak dezelfde uitkomst, die door de waarnemingen werd opgeleverd. Een geheele overeenstemming was niet te verwachten.

§ 11. Tot nu toe werd het verloop der veerkrachtige nawerking ten opzichte van den tijd niet in de beschouwing opgenomen. Juist dit verloop is zoowel door WEBER bij de spanning van cocondraden als door KOHLRAUSCH bij de torsie van verschillende stoffen en door NEESEN zeer uitvoerig onderzocht. Deze waarnemers hebben empirische formules opgesteld ter berekening van de verandering der nawerking met den tijd. WEBER stelde de snelheid, waarmede de deeltjes van een uitgerekten cocondraad na opheffing van het gewicht in den evenwichtstoestand terugkeeren, evenredig met een macht van den afstand, dien zij nog te doorloopen hebben. Wordt die afstand door x voorgesteld, dan is volgens WEBER:

$$-\frac{dx}{dt} = b\,x^p \text{ , waarin } p > 1 \text{ is,}$$

en

$$x = \frac{b_1}{(t + C_1)^p}.$$

KOHLRAUSCH daarentegen gaf de formule:

$$-\frac{dx}{dt} = \alpha \frac{x}{t^n}$$

en daaruit:

$$x = C e^{-\frac{\alpha}{1-n} t^{1-n}} = C e^{-at^m}.$$

*) POGGENDORFF's *Annal.* CLVIII. p. 358.

Voor n werd uit de waarnemingen een waarde afgeleid, die weinig van de eenheid afweek. Stelt men haar daaraan gelijk, dan wordt:

$$-\frac{dx}{dt} = \alpha \frac{x}{t}; \qquad x = \frac{c}{t^{\alpha}}.$$

In dit geval komen dus de formules van Weber en Kohlrausch, als men in de eerste de constante $C_1 = 0$ neemt, op hetzelfde neêr. De coëfficient α der snelheid is door Kohlrausch de *coëfficient der elastische nawerking* genoemd. Deze grootheid bleek bijna uitsluitend van den aard der onderzochte stof af te hangen. De integratie-constante c daarentegen bleek ongeveer evenredig met de oorspronkelijke deformatie, dus bij de proeven van Kohlrausch met den hoek van torsie te zijn; verder was zij evenredig met een bepaalde macht van den tijd, gedurende welken de uitwendige krachten op het lichaam gewerkt hadden en met de temperatuur, als deze gerekend werd van —21°,5. Deze constante stelt den geheelen weg voor, die gedurende de nawerking doorloopen wordt. Wij noemen haar ter onderscheiding van den coëfficient α de *intensiteit der nawerking*.

De formule van Kohlrausch gaf binnen de grenzen zijner waarnemingen een zeer groote overeenstemming met de uitkomsten der proeven. Zij kan natuurlijk niet gelden voor de eerste oogenblikken, nadat de wenteling der moleculen begonnen is, want wanneer $n = 1$ gesteld wordt, zou de snelheid bij den aanvang $= \infty$ worden. Zij is dan ook, zooals Kohlrausch opmerkte slechts een empirische formule, die binnen vrij ruime grenzen ter berekening der verschijnselen goede diensten kan bewijzen.

Neesen maakte bij zijn onderzoekingen omtrent de nawerking, welke bij de torsie optreedt *), gebruik van een andere formule:

$$x = C e^{-\beta t}.$$

*) Pogg. *Annal.* CLIII, p. 498.

Hij vond daarbij β onafhankelijk van den duur en de grootte der torsie, C daarentegen afhankelijk van deze beide grootheden. De afhankelijkheid van de temperatuur kon hij niet met zekerheid nagaan. In deze formule moet dus β de *coëfficient der nawerking* en C hare *intensiteit* worden genoemd.

De formule van NEESEN gaf tot ongeveer 25 minuten na het begin der nawerking uitkomsten, die met de waarnemingen overeenkwamen, maar na dien tijd niet meer. Om ook het verdere verloop van het verschijnsel te berekenen, moest hij gebruik maken van de meer samengestelde formule:

$$x = Ce^{-\beta t} + C_1 e^{-\beta_1 t}.$$

Men heeft hierin twee verschillende coëfficienten der nawerking β en β_1, terwijl haar intensiteit hier door $C + C_1$ wordt voorgesteld. De grootheden c_1 en β_1 werden uit de waarnemingen afgeleid, die geruimen tijd na het begin der nawerking verricht werden.

KOHLRAUSCH *) heeft tegen de formule van NEESEN aangevoerd, dat daarin over een grooter aantal constante grootheden beschikt wordt, die uit de waarnemingen berekend moeten worden dan in zijn formule het geval is; dat daarom de overeenstemming tusschen de waargenomen en berekende verplaatsingen, die NEESEN vond, minder sprekend is dan die, welke zijn eenvoudige formule opleverden. Bovendien toonde KOHLRAUSCH aan, dat zijn interpolatie formule ongeveer even goed op de waarnemingen van NEESEN paste, als de formule, die deze gegeven had.

De langzame wenteling der moleculen is aan een weerstand toe te schrijven, van wier aard men niets weet. Onderzoeken wij in een eenvoudig geval tot welke uitkomsten de onderstelling leidt, dat de weerstand even als bij de beweging van een lichaam in de lucht, van de snelheid afhangt. Daar de beweging zeer langzaam verloopt,

---

*) POGG. *Annal.* CLV. p. 579.

kan misschien de weerstand evenredig met de hoeksnelheid worden aangenomen. In § 2 werd meegedeeld, dat O. E. MEIJER een theorie der nawerkingsverschijnselen poogde af te leiden uit de inwendige wrijving, die bij de veerkrachtige verschuivingen der moleculen zou ontstaan. De bezwaren werden vermeld, die tegen deze opvatting in te brengen zijn, al is het ook zeer waarschijnlijk, dat de inwendige wrijving, die MEIJER invoerde, wel bestaat. Wanneer dit zoo is, dan is ook de onderstelling natuurlijk, dat een dergelijke weerstand bij de wenteling der moleculen voorkomt.

Gaan wij deze hypothese na bij het eenvoudige geval, dat in de vorige § behandeld werd. Behalve de koppels, die daar berekend werden, komt nog het weerstandskoppel, dat gelijk aan $\lambda \frac{dp}{dt}$ gesteld wordt. Omdat de molecule in dit geval om een hoofdas wentelt, is de differentiaal-vergelijking der beweging:

$$(A_1 + B_1)\frac{d^2 p}{dt^2} = \tfrac{1}{2} D_1 (A_1 - B_1)(1 + \mu)\, a \sin 2 (\varphi_1 - p) -$$

$$- \tfrac{1}{2} (A_1 - B_1)\, G \sin 2 p - \lambda \frac{dp}{dt}$$

of, als p zeer klein ondersteld wordt, gedurende het geheele verloop der beweging:

$$(A_1+B_1)\frac{d^2p}{dt^2}=\tfrac{1}{2}D_1(A_1-B_1)(1+\mu)a \sin 2\varphi_1-(A_1-B_1)Gp-\lambda\frac{dp}{dt}.$$

Deze vergelijking geeft na integratie:

$$p = \frac{D_1 (1+\mu)\, a \sin 2\varphi_1}{2\, G} + C_1\, e^{k_1 t} + C_2\, e^{k_2 t}, \quad . \; . \quad (50)$$

waarin C_1 en C_2 de integratie-constanten zijn.

Uit $\cos 2\,\varphi = \cos 2\,(\varphi_1 + p)$, volgt, bij de aangenomen onderstelling:

$$\cos 2\,\varphi - \cos 2\,\varphi_1 = 2\, p \sin 2\,\varphi_1.$$

Even als bij de vergelijking (43), vindt men nu voor de verandering, die de spanning τ_{33} op den tijd t na het begin der beweging ondergaan heeft:

$$\tau_{33}' - \tau_{33} = \frac{D_1^2\, n\, (A_1 - B_1)\, (1 + \mu)\, a\, sin^2\, 2\, \varphi_1}{4\, G} +$$

$$+ \tfrac{1}{2}\, sin\, 2\, \varphi_1\, .\, D_1\, n\, (A_1 - B_1)\, (C_1\, e^{k_1 t} + C_2\, e^{k_2 t})\; . \; . \; (51)$$

De exponenten k_1 en k_2 moeten voldoen aan de vergelijking:

$$(A_1 + B_1)\, k^2 + \lambda\, k + (A_1 - B_1)\, G = 0.$$

Zij zijn dus:

$$k = - \frac{\lambda}{2\, (A_1 + B_1)} \pm \frac{1}{A_1 + B_1} \sqrt{\tfrac{1}{4}\, \lambda^2 - (A_1^2 - B_1^2)\, G}.$$

Omdat aangenomen is, dat de x-assen der moleculen zich evenwijdig met de as van den cilinder trachten te stellen tengevolge van de spanning, is, volgens het slot van § 6: $A_1 > B_1$. Wanneer λ klein is (de inwendige wrijving dus gering), worden k_1 en k_2 imaginair; dan zal de molecule om den evenwichtsstand slingeren. Wanneer $\frac{1}{4}\lambda^2 > (A_1^2 - B_1^2)\, G$, worden beide waarden negatief en de molecule zal langzamerhand tot den evenwichtsstand naderen. Als λ zeer groot is, wordt:

$$k_1 = - \frac{\lambda}{(A_1 + B_1)} + \frac{(A_1 - B_1)\, G}{\lambda} \quad \text{en} \quad k_2 = - \frac{(A_1 - B_1)\, G}{\lambda}.$$

Bij eenigszins aanzienlijke waarden van t zal dan de term $C_1\, e^{k_1 t}$ in de vergelijking (50) slechts een zeer geringen invloed uitoefenen. Men kan dan voor de verandering in spanning schrijven:

$$\tau_{33}' - \tau_{33} = \frac{D_1^2 (A_1 - B_1)(1 + \mu)\, a\, sin^2 2\varphi_1}{4\, G} \left(1 - e^{-\frac{(A_1 - B_1) G t}{\lambda}} \right) . \; . \; (52)$$

De formule (50) komt geheel overeen met die, welke NEESEN bij de berekening der nawerking bezigde.

§ 12. Maar de ingevoerde weerstand is niet voldoende, om alle bij de wenteling der moleculen voorkomende verschijnselen te verklaren. Er blijft namelijk na de opheffing der uitwendige krachten altijd een gedeelte der vormverandering in een veerkrachtig lichaam over. Door de proeven van WERTHEIM, G. WIEDEMANN en anderen is aangetoond, dat zelfs na de werking van kleine krachten een blijvende deformatie waar te nemen is. Het is waarschijnlijk, dat de moleculen, tengevolge van den weerstand, dien zij bij de wenteling ondergaan, niet geheel in de evenwichtsstanden komen, die in de vorige paragrafen berekend werden. De hypothese, dat zij na een wenteling niet in de vroegere standen teruggebracht worden, is ook in WEBER's theorie van het geïnduceerde magnetismus ingevoerd. Daar, zooals in § 6 werd opgemerkt, de onderstelling, dat de moleculen als magneten te beschouwen zijn, een bijzonder geval uitmaakt van de hier meegedeelde theorie, zal het permanente magnetisme aan dezelfde oorzaak kunnen worden toegeschreven als de genoemde blijvende afwijkingen.

Om de magnetische verschijnselen te verklaren, nam W. WEBER, zooals bekend is, aan, dat de moleculairmagneten wentelen onder den invloed eener uitwendige kracht en van een terugwerkend koppel Dit laatste werd echter niet uit de wisselwerking der moleculen afgeleid. MAXWELL *) merkte op, dat deze hypothese geen rekenschap gaf van het magnetisme, dat na opheffing der uitwendige krachten in staal overblijft. Hij nam daarom aan, dat de as van een magnetische molecule in de oorspronkelijke ligging terugkeert, na opheffing der krachten, indien de hoek van afwijking kleiner was dan een bepaalde waarde β_0, maar dat als de afwijking β grooter was dan β_0, een permanente verandering in richting $= \beta - \beta_0$ overblijft.

MAXWELL paste deze theorie toe op het geval, dat nadat

---

*) *On Electricity and Magnetism.* II p. 79.

een stuk ijzer onderworpen geweest was aan den invloed eener magnetische kracht, het daarna aan den invloed eener nieuwe kracht blootgesteld werd. Zijn uitkomsten waren in overeenstemming met de waarnemingen van JOULE en anderen.

Een nader onderzoek heeft FROMME *) ingesteld. Indien namelijk MAXWELL's beschouwing juist ware, moesten kleine magnetische krachten geen permanent magnetisme kunnen opwekken. FROMME onderzocht nu de werking van de horizontale en verticale componenten van het aardmagnetisme en hij kon geen invloed op het permanente magnetisme in staal waarnemen. Ofschoon wegens onvermijdelijke fouten deze proeven de zaak niet konden beslissen, meende FROMME toch, dat zij ten gunste van MAXWELL's theorie konden worden uitgelegd. Hij nam verder waar, dat als het permanente magnetisme na herhaalde werkingen van dezelfde kracht een zekere grenswaarde bereikt had, een kleinere kracht dat magnetisme niet meer kon wijzigen. Tegenover kleinere krachten gedraagt een stalen staaf zich verder als week ijzer. De magnetische moleculen hebben dus, zeide FROMME, in staal een onbepaald aantal evenwichtsstanden; elke stand is voor een bepaald gebied van krachten stabiel. Het is dus, volgens hem, ook waarschijnlijk, dat de niet-magnetische toestand voor kleine krachten een toestand van stabiel evenwicht zou wezen.

De hypothese van MAXWELL werd bestreden door CHWOLSON †), op grond van de onmogelijkheid, om zich een duidelijke voorstelling te kunnen vormen van de werkingen, die een dergelijke beweging der moleculen zouden teweegbrengen.

CHWOLSON stelde eene andere hypothese op. Hij nam aan, dat in staal de koolstof-atomen een belemmering zijn voor de vrije wenteling der moleculen. Het gevolg daarvan zou wezen, dat gemiddeld het koppel, hetwelk op een molecule werkt, een bepaalde grootte zou moeten overschrijden, om

---

*) POGG. *Annal.* Ergänzungsband VII, p. 390.

†) POGG. *Annal.* Ergänzungsb. VII. p. 572.

beweging te kunnen veroorzaken. De wenteling moet geringer zijn dan in het geval, dat de koolstof-deeltjes niet aanwezig waren, want zij houdt niet op als het magnetisch koppel evenwicht met het terugwerkend koppel maakt, maar als het verschil hunner momenten een bepaalde grootte bereikt. Een groot aantal waarnemingen van VILLARI, van G. WIEDEMANN, van JAMIN en van anderen werden door CHWOLSON uit zijn hypothese afgeleid.

Een dergelijke hypothese als CHWOLSON ten opzichte van het staal aannam, kan in het algemeen dienen, om de permanente verandering in richting der moleculen te berekenen. Wij onderstellen dus, dat in elk lichaam het koppel, dat op een molecule werkt, een bepaalde grootte moet overtreffen, om beweging te veroorzaken. Het is duidelijk, dat deze onderstelling, bij de geheele onbekendheid, waarin men verkeert ten opzichte van de inwendige bewegingen in de vaste lichamen, slechts als noodhulp moet dienen, om de verschijnselen zoo goed mogelijk te kunnen berekenen.

Noemt men nu het weerstandsmoment $\frac{1}{2}\,Q$, dan verandert vergelijking (41) in:

$$D_1\,(1+\mu)\,a \sin 2\varphi = G \sin 2p + Q \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (53)$$

Is de molecule uit den stand van evenwicht afgeweken, dan poogt, na opheffing der uitwendige krachten, die op het lichaam werkten, het koppel $\frac{1}{2}\,G \sin 2p$ haar in de vroegere richting terug te brengen, maar daarvoor moet het moment van dat koppel grooter zijn dan $\frac{1}{2}\,Q$.

Een kleine afwijking zal dien ten gevolge blijvend zijn. Wanneer p_1 de grootste afwijking is, die de as van een deeltje nog met de oorspronkelijke richting kan maken, zonder dat zij terugbewogen wordt, heeft men:

$$\sin 2p_1 = \frac{Q}{G}.$$

De spanning, die zulk een afwijking veroorzaakt, wordt afgeleid uit:

$$D_1\,(1+\mu)\,a \sin 2\varphi = 2\,Q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (54)$$

Als de kracht, die op het grondvlak van den cilinder volgens de as werkt, zoodanig is, dat $D_1\,(1+\mu)\,a < Q$ is, zal geen enkele molecule een verandering van stand ondergaan; is zij tusschen Q en $2\,Q$ begrepen, dan moet de wenteling van alle moleculen permanent blijven: na het verdwijnen der kracht blijft geen nawerking over.

Wanneer $D_1\,(1+\mu)\,a > 2\,Q$ wordt, zullen de assen van een aantal moleculen den grenshoek overschrijden. Ze behouden, nadat de vormverandering verdwenen is, de afwijking p_1 van de oorspronkelijke richting. Als men in de vergelijking (53) voor p in de plaats schrijft: $\varphi_1 - \varphi$, vindt men, als $D_1\,(1+\mu)\,a$ en Q kleine grootheden zijn met betrekking tot G:

$$\cos 2\varphi = \cos 2\varphi_1 + \frac{D_1\,(1+\mu)\,a \sin^2 2\varphi_1 - Q \sin 2\varphi_1}{G}.$$

De verandering in spanning, evenwijdig met de as van den cilinder, bedraagt, volgens formule (43):

$$\tau_{33}' - \tau_{33} = \frac{D_1(1+\mu)\,a \sin^2 2\varphi_1 - Q \sin 2\varphi_1}{4\,G}\,D_1\,n\,(A_1 - B_1) \ldots (55)$$

Als in een ruimte-element alle mogelijke richtingen der assen van moleculen voorkomen, moet, even als vroeger, met $\frac{1}{2}\sin\varphi_1\,d\varphi_1$ vermenigvuldigd en daarna geïntegreerd worden, maar nu tusschen de waarden van φ_1, die bepaald worden uit de vergelijking:

$$D_1\,(1+\mu)\,a \sin 2\varphi_1 = Q$$

want indien δ de kleinste waarde van φ_1 is, die aan deze vergelijking voldoet, heeft alleen een afwijking plaats van de assen der moleculen, bij welke φ_1 gelegen is tusschen δ en $90^0 - \delta$ en tusschen $90^0 + \delta$ en $180^0 - \delta$. De uitkomst is:

$$\tau_{33}-\tau_{33}=\frac{D_1(1+\mu)a\int_{\delta}^{90^0-\delta}sin^2 2\varphi_1\, sin\varphi_1\, d\varphi_1-Q\int_{\delta}^{90^0-\delta}sin\,2\varphi_1\, sin\,\varphi_1\, d\varphi_1}{4\,G}-D_1n(A_1-B_1)$$

of ook:

$$\tau_{33}'-\tau_{33}=$$

$$=\frac{D_1(1+\mu)a\left[\frac{2}{3}(cos^3\delta-sin^3\delta)+\frac{2}{5}(sin^5\delta-cos^5\delta)\right]-\frac{1}{3}Q(cos^3\delta-sin^3\delta)}{2\,G}-D_1n(A_1-B_1).$$

Deze uitdrukking moet natuurlijk tusschen de aangegeven grenzen berekend worden. Zoo zal men vinden, als:

$D_1(1+\mu)a = 1{,}1\,Q$ is . .	$\tau_{33}'-\tau_{33} = 0{,}010 \times$	$\frac{D_1 n(A_1-B_1)Q}{2\,G}$
» $= 1{,}2\,Q$ » . .	» $= 0{,}026 \times$	»
» $= 1{,}3\,Q$ » . .	» $= 0{,}046 \times$	»
» $= 1{,}4\,Q$ » . .	» $= 0{,}067 \times$	»
» $= 1{,}5\,Q$ » . .	» $= 0{,}090 \times$	»
» $= 2\;\;Q$ » . .	» $= 0{,}212 \times$	»
» $= 2{,}1\,Q$ » . .	» $= 0{,}238 \times$	»
» $= 2{,}2\,Q$ » . .	» $= 0{,}263 \times$	»
» $= 2{,}5\,Q$ » . .	» $= 0{,}341 \times$	»

In de laatste drie gevallen is de geheele afwijking niet blijvend; daar $D_1\,(1+\mu)\,a > 2\,Q$ is, zullen sommige moleculen den grenshoek overschrijden, en na opheffing der uitwendige krachten dezen hoek met de as blijven vormen. Zoolang de krachten nog op het grondvlak van den cilinder werken, vormen de assen der moleculen met de ζ-as den hoek φ. Als de krachten verdwenen zijn, zal deze hoek naderen tot de waarde $\varphi_1 - p_1$, waarbij p_1 weder den grenshoek voorstelt.

Zij $\tau_{33}' - \tau_{33}''$ het gedeelte der spanning, dat weder verdwijnt, dan vindt men:

$$\tau_{33}' - \tau_{33}'' = \frac{1}{4} D_1 n (A_1 - B_1) [cos\, 2\, \varphi \quad cos\, 2\, (\varphi_1 - p_1)].$$

Maar omdat p_1 een kleine hoek is, kan geschreven worden:

$$cos\, 2\, (\varphi_1 - p_1) = cos\, 2\, \varphi_1 + sin\, 2\, \varphi_1\, sin\, 2\, p_1$$

en brengt men de waarde $sin\, 2\, p_1 = \frac{Q}{G}$ over, dan wordt:

$$\tau_{33}' - \tau_{33}'' = D_1 n (A_1 - B_1) \frac{D_1 (1 + \mu)\, a\, sin^2 \varphi_1 - 2\, Q\, sin\, 2\, \varphi_1}{4\, G}.$$

Behandelt men deze vergelijking evenzoo als (55) en neemt men daarna voor φ_1 de waarden aan, die aan (54) voldoen, dan wordt de uitkomst. Voor:

$$D_1 (1 + \mu) a = 2{,}1\, Q \;.\;.\; \tau_{33}' - \tau_{33}'' = 0{,}007 \times \frac{D_1 n (A_1 - B_1) Q}{2\, G}$$

»	$= 2{,}2\, Q$ . .	»	$= 0{,}020 \times$	»
»	$= 2{,}5\, Q$ . .	»	$= 0{,}072 \times$	»

Bij deze vormveranderingen is dus nog het grootste gedeelte van de afwijking der assen van de moleculen permanent.

Uit deze beschouwing kan in de eerste plaats afgeleid worden, dat zelfs als zeer geringe krachten op een lichaam werken, een blijvende afwijking der moleculen en daarom ook een blijvende vormverandering ontstaat, die bij aangroeiing der krachten snel toeneemt. Ten tweede volgt er uit, dat als de weerstand afneemt, b. v. bij herhaalde werkingen derzelfde krachten, de permanente afwijking der moleculen daarbij aangroeit. Wordt toch een lichaam meermalen door dezelfde kracht gespannen en zij de eerste keer:

$$D_1 (1 + \mu)\, a = 1{,}2\, Q\,,$$

dan wordt:

$$\tau_{33}' - \tau_{33} = 0{,}022 \times \frac{D_1^2\, n\, (A_1 - B_1)\, (1 + \mu)\, a}{2\, G}\;;$$

als later de weerstand, dus Q, verminderd is, zoodat dan

$D_1 (1 + \mu) a = 2 Q$ geworden is, wordt de permanente verandering der spanning:

$$= 0{,}106 \times \frac{D_1^2\, n\, (A_1 - B_1)\, (1 + \mu)\, a}{2\, G}.$$

De aangroeiing zal tot zekeren grens naderen.

G. WIEDEMANN *) heeft waargenomen, dat als een draad herhaaldelijk door hetzelfde gewicht getordeerd wordt, de permanente torsie daarbij tot een bepaalden grens vermeerdert. Deze torsie was zeker slechts voor een gedeelte aan de verandering in richting der moleculen toe te schrijven, maar de verklaring van het verschijnsel blijft gelden, als men met WIEDEMANN aanneemt, dat de weerstand, die de wenteling der deeltjes belemmert, van denzelfden aard is, als die, welke de verschuiving ondervindt.

De waarneming van WIEDEMANN is in overeenstemming met de bovenvermelde proeven van FROMME, waarbij herhaaldelijk dezelfde magnetische krachten op een stalen staaf werkten. In beide gevallen konden kleinere krachten geen blijvende veranderingen teweegbrengen.

Beschouwen wij de proeven van WIEDEMANN, die hij met een draad van messing genomen heeft, nauwkeuriger. De torsie werd onmiddelijk nadat de kracht op den draad werkte, en ook na geruimen tijd gemeten; beide werden in deelen eener schaal aangegeven en door T en T_1 aangeduid. Uit een tabel, die in de verhandeling van WIEDEMANN (pag. 489) voorkomt, ontleen ik de volgende getallen:

Gewichten:	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	gram
$T_1 - T$	0	0	0	0	1	1	2,5	4	13	13	33	95	deelen.

Na opheffing der uitwendige kracht, werd weder onmiddelijk de overblijvende torsie P en de permanente torsie P_1, die na langen tijd nog bestond, gemeten. Daarbij werd gevonden:

*) WIEDEMANN. *Annal der Physik. und Chemie.* VI. p. 490.

Gewichten:	30	40	40	60	70	80	90	100	110	120	130	140	gram
$P—P_1$:	0	0	0	0	0	0	0	0	0,7	1,5	2,8	8	deelen.

De grootheden $T_1 — T$ en $P_1 — P$ zijn aan elastische nawerking, dus aan de wenteling der moleculen toe te schrijven. Zooals WIEDEMANN opmerkte, waren T en P niet nauwkeurig te bepalen. Al zijn dus de aangegeven waarden niet geheel juist, is het toch duidelijk, dat $T_1 — T$ en $P_1—P$ met de tordeerende krachten snel aangroeien. Vooral is opmerkelijk, dat bij dezelfde gewichten $T_1 — T$ veel grooter is dan $P—P_1$. Terwijl na opheffing der kracht van 110 gram nauwelijks eenige nawerking te bespeuren was, werd deze gedurende de torsie door een gewicht van 70 gram reeds waargenomen.

Zooals uit de theorie volgt, blijkt ook uit deze proeven, dat de nawerking, die door kleine krachten veroorzaakt wordt, niet weer verdwijnt na opheffing dier krachten, en dat na grootere deformatiën de moleculen slechts gedeeltelijk terugwentelen.

Verder werd waargenomen, dat als de draad nog 16 maal door het gewicht van 140 gram getordeerd werd, en daarna weder aan krachten van 10, 20, enz. gram onderworpen werd, reeds bij de torsie onder de werking van 60 gram een duidelijke nawerking plaats had. Bij de eerstvermelde waarneming was bij deze kracht de wenteling nog niet mogelijk. Nu was door de herhaalde bewegingen in dezelfde richting de weerstand geringer geworden en werd daardoor een verschil tusschen de grootheden T en T_1 waargenomen. De in de vorige paragraaf besproken weerstand gedurende de beweging was ook verminderd, de snelheid, waarmeê de moleculen wentelden dientengevolge grooter geworden Op deze wijze kan men verklaren, dat bij de tweede reeks van waarnemingen, toen de draad 16 maal door 140 gram getordeerd was geweest, voor $T_1—T$ onder den invloed van 130 gram slechts de waarde van 4, onder den invloed van 140 gram de waarde van 5 deelen der schaal werd gevonden. Deze getallen waren bij de eerste proef 33 en 95. Nu was bij de bepaling van T de nawerking waarschijnlijk reeds grootendeels afgeloopen. Door verschillende oorzaken, zooals herhaalde vormveranderingen in dezelfde richting, kleine stooten, die men aan het lichaam geeft en anderen, vermindert de weerstand, dien de moleculen ondervinden. Hierdoor laat zich ook het verschijnsel verklaren, dat bij gelijktijdige verplaatsingen der moleculen in verschillende richtingen, de nawerkingen door de verplaatsingen afzonderlijk veroorzaakt, elkander versterken; de weerstand is bij die verschillende bewegingen geringer geworden.

Het onderscheid, dat Braun opmerkte, tusschen de nawerkingen, die door gelijktijdige en op elkaâr volgende krachten teweeggebracht werden, is dus door de ondersteld eigenschap van den weerstand (ook door Wiedemann aangenomen) te verklaren.

De invloed der temperatuur op de veerkrachtige nawerking is samengestelder. Bij verhooging van de temperatuur zullen de deeltjes gemiddeld op grootere afstanden van elkaâr gebracht worden en worden de krachten, die zij op elkander uitoefenen, geringer. Zoowel het koppel, dat evenredig is met de deformatie als het terugwerkend koppel nemen daardoor kleiner waarden aan. Maar ook wordt de beweeglijkheid der deeltjes grooter, de weerstand geringer. Als nu deze laatste invloed de overhand heeft, moet bij stijging van temperatuur de intensiteit der nawerking (zie § 11) grooter worden, zooals de proeven hebben uitgewezen. De snelheid, waarmede de deeltjes zich bewegen, moet dan ook toenemen. Dit laatste is door F. Kohlrausch bij de terugwenteling van een draad, die gedurende geruimen tijd een aanzienlijke torsie ondergaan had, waargenomen *).

§ 13. In de vergelijkingen (26) zijn de evenwichtsvoorwaarden gegeven van een veerkrachtig lichaam met inachtneming van de afmetingen der moleculen. Daaruit zou men de bewegingsvergelijkingen kunnen afleiden, als men een hypothese aannam omtrent den weerstand gedurende de wenteling der deeltjes, b.v. die, welke in § 11 bij een eenvoudig

*) Pogg., *Annal.* CXXVIII, p. 413.

geval werd nagegaan. Zulke vergelijkingen zouden echter in het algemeen zeer samengesteld worden en zeker moeilijk te integreeren zijn.

Ik zal mij bepalen tot een paar algemeene opmerkingen over den invloed der nawerkingsverschijnselen op de demping der elastische trillingen.

W. Weber gaf als hoofdoorzaak van die demping de verandering van den evenwichtsstand der moleculen aan bij elke slingering, en G. Wiedemann *) heeft hetzelfde denkbeeld op grond van zijn proeven uitgesproken.

Gesteld, dat een draad uitgerekt worde: de moleculen draaien en trachten zich met één harer assen (in de beteekenis, welke op pag. 329 verklaard is evenwijdig met de as van den draad te stellen. Nu worde de draad losgelaten: de moleculen keeren tot nieuwe evenwichtsstanden terug. Door de snelheid, die ze verkregen hebben, gaan ze over deze standen heen en bij de verkorting van den draad trachten de assen der moleculen zich loodrecht op die van den draad te plaatsen. Wegens den weerstand volbrengen ze echter die wenteling slechts gedeeltelijk. Werd de draad nu vastgehouden en langzaam terugbewogen, dan zou men bevinden, dat hij in een anderen stand tot rust kwam, als vóór de slingering. Immers moet hier een analoog verschijnsel plaats hebben, als bij herhaalde torsiën in tegengestelde richtingen. Wiedemann heeft daarbij duidelijk een verschuiving van den evenwichtsstand aangetoond en door magnetische onderzoekingen als waarschijnlijke oorzaak de draaiing der moleculen gevonden. Elke slingering heeft dus om een anderen stand van evenwicht plaats, omdat de moleculen telkens andere richtingen aannemen. De weerstand, bij de wenteling ondervonden, veroorzaakt daarom een demping der trillingen.

Als de verschuiving van den evenwichtsstand telkens evenredig met de afwijking a (zie § 10) is, volgt daaruit een afneming der amplituden naar een meetkundige reeks. Volgens § 12, en ook volgens de waarnemingen van Wiedemann

*) Wiedemann, *Annal.* VI, p. 513.

bij de torsie, neemt zoolang de weerstand groot is, de permanente afwijking sterker toe dan de temporaire spanning of torsie. Vooral bij het begin der slingeringen moet daarom het logarithmisch decrement van de amplitude afhangen. Door herhaalde vormveranderingen in dezelfde richting wordt, zooals reeds gezegd is, de weerstand kleiner en daarbij moet het decrement afnemen. Dit werd door STREINTZ *) en anderen waargenomen. STREINTZ bevond verder bij zijn proeven omtrent de torsie-slingeringen van een gespannen draad het decrement onafhankelijk van het traagheidsmoment van het gewicht. Daaruit zou volgen, dat de weerstand niet afhangt van de snelheid der verschuiving van de moleculen, zooals door MEIJER was aangenomen. MEIJER heeft namelijk uit dezelfde vergelijkingen, die hij ter verklaring van de elastische nawerking had opgesteld (zie § 2) het logarithmisch decrement der torsie-slingeringen berekend. Wanneer men echter in die berekening de massa van het spannende gewicht invoert volgens de opmerking van BOLTZMANN, dan bevindt men het decrement afhankelijk van het traagheidsmoment, wat in strijd is met de proeven van STREINTZ.

De invloed van herhaalde vormveranderingen in dezelfde richting op den weerstand en dus op het logarithmisch decrement werd tegengesproken door P. M. SCHMIDT †). Als oorzaak van de demping der slingeringen nam hij een inwendige wrijving aan, die hij evenredig met de eerste en tweede macht van de snelheid der slingeringen stelde. Als bijkomende omstandigheden, die hun invloed op de demping zouden doen gelden, rekende hij den weerstand van de lucht en de elastische nawerking in den gespannen draad. STREINTZ had beweerd, dat de weerstand van de lucht als een zeer geringe grootheid buiten rekening kon worden gelaten. SCHMIDT berekende dien invloed door middel eener formule, welke door LAMPE §) gevonden was en vond een waarde, die in sommige omstandigheden een vierde gedeelte van het geheele

---

*) POGG. *Annal.* CLIII, p. 387.

†) WIEDEMANN'S *Annal.* II, p. 48 en p. 241.

§) Programm des Gymnasiums in Danzig 1866.

decrement bereiken kon. W. Braun en A. Kurz *) echter vonden bij hun proeven door toepassing van dezelfde formule slechts 2 pCt. der geheele demping.

Wat Streintz toeschreef aan een vermindering van den weerstand bij voortgezette trillingen, een verschijnsel door hem accomodatie genoemd, trachtte Schmidt door elastische nawerking van den gespannen draad te verklaren. Want volgens hem wordt het decrement niet slechts geringer, als men den draad een tijdlang laat slingeren, maar ook als men hem stil laat hangen, terwijl in het laatste geval, zoodra de nawerking afgeloopen was, geen vermindering van het decrement gedurende de slingeringen werd waargenomen.

Hier tegenover staat een proef van Streintz, die een draad gedurende $3^1/_2$ maand onafgebroken liet hangen en daarna nog een accomodatie met de slingeringen constateerde.

Schmidt trachtte op de volgende wijze aan te toonen, dat de vermindering van het logarithmisch decrement alleen door de elastische nawerking in den gespannen draad teweeg wordt gebracht.

W. Weber had voor de lengte van een gespannen draad, die aan nawerking onderworpen was, op den tijd T na het begin der proef de formule gegeven:

$$L = L_0 + \frac{a}{b + T}$$

waarin a en b constante grootheden en L_0 de eindelijke lengte is. Hieruit volgt, zeide Schmidt, zonder eenige nadere berekening, dat ook het decrement der torsie-slingeringen aan de formule onderworpen moet zijn:

$$D = D_0 + \frac{a}{b + T}$$

waarin D_0 het decrement voorstelt, dat eindelijk bereikt wordt. Uit eenige waarnemingen der decrementen op verschillende dagen werden a en b berekend en de formule van toepassing gevonden op de overigen. Dit bewijst toch slechts,

*) Carl's *Repertorium* 15, p. 561.

dat de verandering van het decrement omgekeerd evenredig met den tijd zou zijn, die sedert een bepaald oogenblik verloopen is. Uit de analogie met een dergelijke wet bij de nawerking, volgt nog geenszins, dat de verschijnselen van elkander afhangen.

Wanneer de waarnemingen van STREINTZ omtrent de accomodatie-verschijnselen, (die ook door anderen bevestigd zijn), als juist worden erkend, kan men aannemen, dat dezelfde weerstand, die de permanente vormveranderingen veroorzaakt, zooals in de vorige § beschreven werd, vooral bij den aanvang van de veerkrachtige trillingen een belangrijken invloed op de demping uitoefent. Men overtuigt zich daarvan nog nader, als men de waarnemingen vergelijkt, die omtrent de veerkrachtige eigenschappen van glazen staven gedaan zijn.

Bij de torsie van glazen staafjes heeft de nawerking een snel verloop en een merkbare blijvende vormverandering wordt niet opgemerkt (BOLTZMANN); aan het beginsel der superpositie wordt bij glas voldaan, bij de meeste andere stoffen, die onderzocht werden, niet (KOHLRAUSCH); de eigenaardige nawerkingsverschijnselen na gelijktijdige deformatiën in verschillende richtingen zijn bij glas minder sprekend dan bij de metalen (F. BRAUN). Deze proeven bewijzen, dat de besproken weerstand bij dit materiaal zeer gering is. Men nam dan ook waar, dat het verschijnsel der accomodatie bij de slingeringen van glazen staven zeer gering was en dat van den aanvang af het logarithmisch decrement nagenoeg onafhankelijk van de amplitude was (KLEMENČIE). Men heeft hier dus voornamelijk een weerstand gedurende de wenteling der moleculen, zooals in § 11 beschreven werd.

BIJDRAGE

TOT DE

KENNIS VAN NORMAAL CYAANZUUR EN AFGELEIDEN,

DOOR

E. MULDER.

Vijfde Gedeelte.

Van versch ruw product waren 49,3 gr., na zes maanden te hebben gestaan onder een exsiccator, herleid tot 26,494 gr., waaruit krystalliseerde 1,43 gr. amido-verbinding. Het vloeibare deel afgeschonken bedroeg 21,119 gr. (het overige bleef tusschen de krystalmassa), na vier weken teruggebracht tot 20,971 gr. en schijnbaar geheel vast geworden. Tusschen filtreerpapier bleef terug 2,69 gr. aan ruw n. cyanuurzuur. aethyl. Het papier werd uitgetrokken met (zuiveren) aether, en de oplossing geplaatst onder een exsiccator. Aldus werd erlangd 12,83 gr. van een vloeibaar product, na zes dagen verminderd tot 12,79 gr. en dit na acht dagen tot 12,74 gr.; het overige was gebleven in het papier. Hiervan gaf 0,5986 gr. aan kooldioxyde 1,065 gr. en 0,4006 gr. water, op 100 gew.-d. overeenkomende met:

koolstof	48,5
waterstof	7,4.

Een hoeveelheid van 0,8073 gr. gaf met broomwater (verhoudingen als vroeger) 0,73 gr. afzetsel (na twee dagen.

bedragende 0,726 gr.), dus op 0,15 gr. stof 0,135 gr. afzetsel. Dit vloeibare product kan alzoo geacht worden in samenstelling te naderen tot het lichaam van Cloëz. Bij staan werd het dan ook schijnbaar geheel vast, en verhield zich dus ook in dit opzicht daarmede overeenkomstig. Neemt men eens aan, dat het laatste voor de helft bestaat uit n. cyanuurzuur aethyl (het gehalte is wellicht grooter, zie later), dan leert een eenvoudige berekening, dat het versche ruwe product (na aftrek van alkoholgehalte) op 0,15 gr. ongeveer 0,085 gr. zou hebben bevat aan n. cyanuurzuur aethyl, ingeval geen polymerisatie was ingetreden; dit laatste heeft alzoo waarschijnlijk plaats gehad.

Van een andere bereiding gaf 2,0792 gr. versch ruw product met broomwater aan afzetsel 0,369 gr. (na twee dagen verminderd tot 0,356 gr); na aftrek van alkohol stemt dit overeen op 0.15 gr. stof met 0,043 gr. afzetsel. Gemeld versch ruw product bedroeg 61 gr., na 14 dagen onder een exsiccator verminderd tot 40 gr.. Van dit laatste gaf 0,7505 gr. met broomwater 0,444 gr. afzetsel (na twee dagen herleid tot 0,437 gr.), dus op 0,15 gr. stof aan afzetsel 0,0888 gr. Na een maand werd deze bepaling herhaald, en werd van 0,723 gr. erlangd aan afzetsel 0,4365 gr., dus op 0,15 gr. stof aan afzetsel 0,0909 gr., alzoo slechts 0,0021 gr. meer. Ook in dit geval schijnt vorming van n. cyanuurzuur aethyl als waarschijnlijk te mogen afgeleid worden.

De 40 gr. van gemeld ruw product na staan, door de bepaling met broomwater herleid tot 37,246 gr. (een gedeelte was door het uitnemen verloren gegaan), was na een maand 35,301 gr., welk verlies wellicht ten deele kan worden toegeschreven aan nog teruggebleven alkohol. Bij staan was geen amido-verbinding afgezet, waartoe (zelfs bij eenigzins lage temperatuur) in den regel meer tijd wordt gevorderd. Hetzelfde geldt van de volgende bereiding van versch ruw product, bedragende 10,736 gr., na 14 dagen onder een exsiccator geworden 6,044 gr., van welk laatste 0,704 gr. aan broomafzetsel gaf 0,472 gr. (na twee dagen 0,454 gr.), derhalve op 0,15 gr. vloeistof aan afzetsel 0,1 gr.. Van het ruw product versch gaf 2,2053 gr. met broomwater 0,347 gr. aan afzetsel (na twee dagen 0,333), dus op 0,15 gr. stof aan afzetsel 0,038 gr. (als altijd na aftrek van het gehalte aan alkohol).

Van ruw product na staan (acht maanden oud) en uitkrystallisatie van amido-verbinding gaf 0,617 gr. aan broomafzetsel 0,45 gr. (na twee dagen 0,446 gr.), dus 0,15 gr. stof aan afzetsel 0,109 gr.. Van deze bereiding versch was geen bepaling*) met broomwater gedaan.

Van een andere bereiding van ruw product, bewaard gedurende vijf maanden (het fleschje was nu en dan geopend), gaf 2,009 gr. stof aan afzetsel met broomwater 1,141 gr. (na twee dagen 1,12), alzoo 0,08 gr. op 0.15 gr. stof (na aftrek van alkohol).

Van een nieuwe bereiding in een goed gesloten fleschje bewaard, niet minder dan negen maanden, gaf 1,991 gr. aan broomafzetsel 0,938 (na twee dagen 0,929 gr.), dus op 0,15 gr. stof aan afzetsel 0,07 gr. (na aftrek van alkohol).

Een soort uitzondering vormde een product (oud vijf maanden) na staan (en uitkrystallisatie van amido-verbinding), in zooverre als het eerder vast werd, terwijl andere dergelijke produkten vloeibaar bleven; en met broomwater zeer veel afzetsel werd verkregen. Een hoeveelheid van 0,691 gr. stof gaf 0,811 gr. broomafzetsel (na drie dagen 0,8025), berekend op 0,15 gr. stof aan afzetsel 0,176 gr..

In de volgende tabel wordt een overzicht gegeven van de bepalingen met broomwater:

A. bevat de bepalingen met n. cyanuurzuur aethyl (zie later);

B. die met ruw product;

C. de bepalingen met het lichaam van Cloëz;

D. die met ruw product na staan onder een exsiccator;

E. ruw product na staan onder een exsiccator en uitkrystallisatie van amido-verbinding;

F. bevat een bepaling met een product afgeleid van dat

---

*) B. IV, 437.

onder E vermeld, welk laatste bij staan vastgeworden, tusschen filtreerpapier werd gedaan, waarna dit papier met aether werd uitgetrokken, bij verdampen van welken aether het bedoelde product terugbleef:

Aantal bepalingen.	A *)	B †)	C §)	D **)	E ††)	F §§)
1.	0,279	0,034	0,0873	0,0888 *a*)	0,119 (5 m.)	0,135
2.	0,3515	0,032	0,13 (na 5 m.)	0,0909 (na 1 m.)	0,109 (8 m.)	
3.	0,295	0,032	0,159 (na 16 m.)	0,1 *b*)	0,176 (5 m.)	
4.	—	0,038	0,142	0,0445 (ouderdom onbekend)		
5.	—	0,043	0,146			
6.	-	0,08 (5 m.)	0,146			
7.	—	0,07 (9 m.)	0,144			
8.	—	—	0,149 (na 8 w.)			

De hoeveelheid broomafzetsel is uitgedrukt in gr. en berekend op 0,15 gr. stof, na aftrek van alkoholgehalte. Bij de bepaling werd 0,6 gr. vloeibaar of vast product, namelijk ruw product na staan (en uitkrystallisatie van amido-verbinding) of lichaam van Cloëz of n. cyanuurzuur aethyl, of 1 gr. ruw product, opgelost in 100 C. C. water en neêrgeslagen met 42 C. C. broomwater.. Ouderdom is, zoo noodig, opgegeven in weken (w.) en maanden (m.). De bepalingen werden gedaan bij een betrekkelijk lage temperatuur (en niet gedurende den zomer).

---

*) B. III, 16; B. IV, 427.

†) B. IV, 427, 428; B. V, 377.

§) B. III. 164; B. IV, 432, 433; B. V, 390.

**) B. IV, 427; B. V, 376.

††) B. IV, 435; B. V, 377.

§§) B. V, 375, 376.

a) Versch ruw, aanvankelijk 0,043, zie onder B.

b) Versch ruw 0,038, zie onder B.

Nogmaals *) zij opgemerkt, dat de methode met broomwater niet boven alle bedenking is verheven, en dit meer bepaalt geldt van de berekening bij de bepaling van het gehalte aan n. cyanuurzuur aethyl gevolgd. Deze berekening baseert zich op de hoeveelheid broomafzetsel verkregen uitgaande van n. cyanuurzuur aethyl (welk afzetsel evenwel een vreemd verschijnsel vertoonde), thans wat nader nagegaan.

I. 0,329 gr. n. cyanuurzuur aethyl naar de vroegere methode verkregen gaf 0,476 gr. broomafzetsel (na drie dagen 0,4655), op 0,15 gr. stof bedragende 0,217 gr. afzelsel †).

II. 0,305 gr. n. cyanuurzuur aethyl, uit een waterige oplossing bij lage temperatuur afgezet, gaf 0,462 gr. broomafzetsel (na twee dagen 0,371), op 0,15 gr. stof alzoo 0,227 gr..

III. 0,3025 gr. cyanuraat, erlangd als dat van II, gaf 0,459 gr. afzetsel (na drie dagen 0,439); alzoo op 0,15 gr. stof 0,227 gr..

IV. 0,3215 gr. cyanuraat (als II) gaf (met 0,285 gr. alkohol bij de oplossing, eene betrekkelijke hoeveelheid zoo ongeveer in ruw product voorkomende) aan broomafzetsel 0,481 gr. (na drie dagen 0,457 gr.), dus op 0,15 gr. stof aan afzetsel 0,224 gr..

Deze bepalingen leveren dus niet het vreemde verschijnsel op, van in 't begin betrekkelijk zoo snel af te nemen in gewicht, wellicht vroeger het gevolg daarvan, dat onder eenigzins andere omstandigheden, zoo b. v. bij een andere temperatuur, werd gewerkt.

Het gehalte van ruw product, lichaam van Cloëz enz. aan n. cyanuurzuur aethyl is naar deze bepalingen hooger. Later wordt hierop teruggekomen.

Samenstelling van versch ruw product. Uitgaande van de vijf eerste bepalingen onder B, betrekking hebbende op versch ruw product, geeft dit gemiddeld 0,035 gr. broomafzetsel op 0,15 gr. stof, als altijd na aftrek van alkoholgehalte.

---

*) B. IV. 427, 431.

†) Met dit zijn ook later bepalingen gedaan met subblimaat.

Daarbij is tevens begrepen het broomafzetsel van amido-verbinding, van welke laatste zoo ongeveer 3 p. c. voorkomt in versch ruw product, terwijl dit ongeveer 40 p. c. alkohol bevat. Er blijven alzoo 57 gew.-d. over voor n. aethylcyanaat en cyanuraat in 100 gew.-d. versch ruw product. Het broomafzetsel bedraagt berekend op versch ruw product 14 p. c., dat van amido-verbing er onder begrepen. Laat eens worden aangenomen: dat amido-verbinding evenveel broomafzetsel geeft als n. cyanuurzuur aethyl, en het broomafzetsel worden genomen voor de oorspronkelijke stof, dan zou versch ruw product (alkoholgehalte niet afgetrokken) bevatten $14 - 3 = 11$ p. c. n. cyanuurzuur aethyl. Dit gehalte is evenwel te hoog, indien men let op de bepalingen van n. cyanuurzuur aethyl met broomwater. Het gehalte van versch ruw product aan n. aethylcyanaat zou dan in ieder geval minstens $57 - 14 = 43$ p. c. kunnen bedragen.

Dialyse van ruw product. In een cylindervormig glazenvat (te sluiten met glazen stop) werd geplaatst een kleine dialysator (rustende op platina pootjes), en gedialyseerd met (zuiveren) alkohol, terwijl ruw product werd gedaan in den dialysator. Na de proef bleek, dat zoowel het dialysaat als het teruggeblevene in den dialysator na staan (onder een exsiccator) n. cyanuurzuur aethyl afzette; niet zoo spoedig het geval met het dialysaat, dat de grootste hoeveelheid uitmaakte. Hieruit zou volgen, dat het hoofdbestanddeel van ruw product goed dialyseert.

Verzeepen met alkaliën. A. In waterige oplossing, a. met natriumhydroxyde. Bij verzeepen met sodaloog van ruw product, dit na staan (en uitkrystallisatie van amido-verbinding), zouden kunnen optreden: $OCNNa$, $C_3N_3O_3HNa_2$ en CO_3Na_2, daarenboven NH_3, terwijl tevens kunnen aanwezig zijn onontleed $NCOC_2H_5$, $N_3C_3 . 3OC_2H_5$ en niet gebruikt $NaOH$, enz.. De gevolgde methode ter afzondering van mogelijk gevormd natriumcyanaat berust op deze eigenschappen:

1. Natriumcyanaat: $OCNNa$ wordt niet ontleed in water-alkoholische oplossing door kooldioxyde onder de later mede te deelen omstandigheden. Aether doet het cyanaat uitkrystalliseeren.

2. Natriumhydroxyde kan uit de water-alkoholische oplossing door kooldioxyde worden omgezet in natriumcarbonaat daarin onoplosbaar.

3. Natriumcyanuraat en wel: $C_3N_3O_3HNa_2$ wordt uit een waterige oplossing gemakkelijk neêrgeslagen door alkohol.

Wat betreft:

1. Zoo werd 0,2 gr. kaliumcyanaat, genomen in plaats van natriumcyanaat, opgelost in 6 C.C. water, en hierbij gevoegd 80 C.C. abs. alkohol. Na een halven dag te hebben gestaan was niets afgezet, evenmin het geval na toevoegen op nieuw van 80 C.C. alkohol. Door de oplossing werd geleid kooldioxyde, waardoor geen troebeling intrad, wel het geval, toen een overeenkomstige mol. hoeveelheid kaliumcarbonaat werd opgelost in 6 C.C. water met 160 C.C. alkohol. De oplossing van kaliumcyanaat werd dan ook niet neêrgeslagen met baryumnitraat, wel door loodnitraat. Uit de oplossing van kaliumcyanaat werd na 10 dagen wat afgezet van een krystallijne stof, in waterige oplossing de reacties gevende van cyanaat.

Een hoeveelheid van 0,2 gr. kaliumcyanaat in 6 C.C. water met 160 C.C. alkohol, na een halven dag staans, met 80 C.C. aether (ongezuiverd), liet een deel van het cyanaat afgezet worden, meer aether nog wat. Bij een andere dergelijke proef, werd de aether telkens met 40 C.C. toegevoegd, waarbij bleek, dat de eerste 40 C.C. zoo goed als niets deden afgezet worden. De tijd van staan der alkoholisch-waterige oplossing schijnt eenigen invloed uit te oefenen op de snelheid van afzetten door aether (in den regel liet men na bijvoegen van alkohol en aether een halven dag staan). Proeven met 8 C.C. water (in plaats van 6 C.C., zie boven), leidden tot nagenoeg dezelfde uitkomst, maar er was dan betrekkelijk meer aether noodig (op dezelfde hoeveelheid alkohol, en na een halven dag staans der alkoholisch-waterige oplossing).

2. Een hoeveelheid natriumcarbonaat overeenstemmende met 0,2 gr. natriumcyanaat in de verhouding uitgedrukt door CO_3Na_2 en $2OCNNa$, werd opgelost in 6 C.C. wa-

ter; 80 C.C. alkohol deden een goed deel afzetten, nog 80 C.C. alkohol slechts zeer weinig.

Bij een sodaoplossing van 0,8 gr. natrium op 6 C.C. water werden 160 C.C. alkohol gedaan, en kooldioxyde doorgeleid. Zoodra de massa geleiachtig was geworden, liet men deze een halven dag staan, waarna werd gefiltreerd; op nieuw leiden van kooldioxyde door het filtraat deed, ook in volgende proeven, in den regel niets meer afgezet worden. Aether en wel 80 C.C. gaf slechts zeer weinig van een afzetsel, meer aether deed niets afgezet worden.

3. Van cyanuurzuur werd 0,2 gr. genomen, hierbij gedaan 6 C.C. water, en ter oplossing 0,5 C.C. sodaloog van 0,8 gr. natrium op 6 C.C. water. Toegevoegd werden 80 C.C. alkohol, die een geleiachtig neêrslag gaven van $C_3N_3O_3HNa_2$. Door het filtraat werd kooldioxyde geleid, gefiltreerd enz.; aether vormde slechts zeer weinig van een afzetsel. Een overeenkomstig resultaat werd erlangd met 0,2 gr. cyanuurzuur met sodaloog van 0,8 gr. natrium op 6 C.C. water, enz..

Nadere contrôle der methode. 0,2 gr. kaliumcyanaat werd opgelost in 1 C.C. water, sodaloog toegevoegd van 0,8 gr. natrium en 6 C.C. water, verder 160 C.C. alkohol, kooldioxyde doorgeleid enz.. Het filtraat gaf met 80 C.C. aether een afzetsel van cyanaat.

Aangaande de gevoeligheid der reactie op cyanaat met loodnitraat kan worden medegedeeld, dat 0,1 gr. kaliumcyanaat in 50 C.C. water nog een duidelijk neêrslag daarmede geeft.

Met sublimaat gaf een oplossing van 0,1 gr. kaliumcyanaat op 3 C.C. water geen neêrslag met een oplossing van 1 gr. sublimaat op 20 C.C. water; bij staan echter ontstaat wel een neêrslag.

Verzeepen der produkten met soda in waterige oplossing. Bij 1 gr. ruw product werd gedaan sodaloog van 0,8 gr. natrium op 6 C.C. water in een platinumbuis, geplaatst in een glazen buis, en bij 80^0 verhit gedurende zeven uur. Bij openen was geen spanning, maar werd een eigenaardige *doordringende reuk* waargenomen; de massa was geleiachtig en bleef dit bij uitspoelen met alkohol (vorming van $C_3N_3O_3HNa_2$). Na toevoegen van 160 C.C. alkohol werd kooldioxyde doorgeleid, gefiltreerd enz., aether deed geen cyanaat afzetten. Bij de volgende proeven werd 0,4 gr. natrium op 6 C.C. water genomen, om het verzeepen van n. cyanuurzuur aethyl zoo mogelijk tegen te gaan. Ruw product bij 80^0 gedurende vijf uur verwarmd en verwerkt onder overigens dezelfde omstandigheden, bleek slechts ten deele verzeept te zijn, terwijl alkohol een afzetsel gaf; aether deed (na doorvoeren van kooldioxyde enz.) geen cyanaat afzetten.

Ruw product *na staan* (en uitkrystallisatie van amidoverbinding) en wel 0,6 gr. (overeenkomende met ongeveer 1 gr. ruw product), werd als vroeger verhit bij 80^0 gedurende vier uur; een deel was niet verzeept. Alkohol gaf een weinig afzetsel; na doorvoeren van kooldioxyde enz. gaf aether geen afzetsel van cyanaat.

De uitslag is ten deele, zooals mocht verwacht worden; toch scheen het wenschelijk deze proeven te nemen om reden vroeger medegedeeld.

Ten einde te weten, of n. cyanuurzuur aethyl ook werd omgezet in isocyanuurzuur en dit in isocyaanzuur, werd genomen 0,3 gr. n. cyanuurzuur aethyl (sodaloog van 0,6 gr. natrium op 6 C.C. water) en te werk gegaan als bij de twee laatste proeven (verhit werd vier uur bij 80^0). Er bleef terug 0,137 gr.; van de 0,163 gr. werd niets teruggevonden, in zooverre als alkohol geen neêrslag gaf van $C_3O_3N_3HNa_2$, noch van CO_3Na_2, terwijl na doorvoeren van kooldioxyde enz. aether geen cyanaat deed afzetten. De uitkomst dezer proef is alzoo in overeenstemming met het vorige.

Verzeeping van ruw product kan ook plaats hebben bij gewone temperatuur, sneller indien alkohol ter oplossing is bijgevoegd, en de sodaloog sterker wordt genomen (b. v. 0,8 gr. natrium op 6 C.C. water). Na weken te hebben gestaan geeft dan alkohol een geleiachtig neêrslag. Zonder alkohol ontstond na vele weken een krystallijn afzetsel. Deze proeven werden voortgezet.

N. cyanuurzuur aethyl lost bij gewone temperatuur op in sodaloog (van 0,4 natrium op 6 C.C. water), terwijl deze oplossing niet wordt neêrgeslagen door alkohol, als het geval is met isocyanuurzuur onder overeenkomstige omstandigheden (wel had dit plaats na verhitten der oplossing gedurende 24 uur bij 80^0). Bij gemelde proef ontstaat meergemeld lichaam met eigenaardigen reuk niet.

b. Verzeepen met potassa in waterige oplossing. De volgende proeven waren reeds gedaan, toen werd besloten ter verzeeping soda te nemen. Er werd ook hierbij gebruik gemaakt van een platinabuis. Bij 0,1 gr. cyanuurzuur werd gedaan 3 gr. potassaloog van 16,6 p. c., vervolgens geneutraliseerd met zoutzuur, en na een dag het afzetsel $C_3 N_3 O_3 H_2 K$ gebracht op een klein gewogen filtrum, tweemaal doorgespoeld, vervolgens gedroogd en gewogen; van gemeld zout werd verkregen 0,063 gr.. Uitgaande van 0,2 gr. cyanuurzuur werd aldus te werk gaande, erlangd 0,108 gr.. Bij staan zet zich nog wat af uit het filtraat en waschwater. Verhit bij 80^0 gedurende 24 uren gaf 0,1 gr. cyanuurzuur aldus 0,055 gr. afzetsel; bij 100^0 verhit slechts 0,02 gr. en bij 120^0 (tevens 24 uren) was al het cyanuurzuur ontleed.

Van n. cyanuurzuur aethyl gaf 0,1 gr. behandeld op gemelde wijze, verhit bij 80^0 gedurende 24 uren geen afzetsel, terwijl nog 0,07 gr. ontleed was teruggebleven. Een hoeveelheid van 0,1 gr. gaf bij 120^0 gedurende 24 uren, verhit, geen afzetsel. Bij 150^0 verhit gedurende 24 uren gaf 0,1 gr. n. cyanuurzuur aethyl tevens geen afzetsel.

Van ruw product gaf 1 gr. bij 80^0 gedurende 24 uren, ook met 3 gr. potassaloog van 16,6 p. c. aan afzetsel, naar dezelfde methode, 0,065 gr.; verhit bij 120^0 een hoeveelheid van 0,038 gr..

Van ruw product na staan (en uitkrystallisatie van amido-verbinding), gaf 0,41 gr. met 6 gr. loog bij 80^0 gedurende 24 uren verhit genoegzaam geen afzetsel, daarentegen was van een vaste stof teruggebleven, en wel 0,17 gr.. Een bepaling met broomwater leidde er toe, dit product te beschouwen als bestaande voor ongeveer de helft uit n. cyanuurzuur aethyl.

Bij werken met sodaloog van gemelde sterkte werd een terugblijven van een vaste stof niet waargenomen.

B. Verzeepen met alkaliën in alkoholische oplossing *). De wijze van verzeepen was deze. In een platinabuis werd gedaan 1 gr. kaliumhydroxyde, deze buis daarna gedaan in een glazenbuis, dan gedeeltelijk uitgetrokken, 5 C.C. werkelijk abs. alkohol †) toegevoegd, verder de te verzeepen stof, toegesmolten, en verhit in een lucht-oliebad voorzien van een gasregulator. Na de proef werd de vloeibare inhoud uitgestort in een kolfje, het terugblijvende met 6 C.C. water opgelost en bij het eerste gedaan, volgen 155 C.C. (gewone) abs. alkohol; vervolgens werd kooldioxyde doorgeleid tot de massa geleiachtig was geworden. Na een halven dag werd gefiltreerd, en weder kooldioxyde doorgeleid. Bleef de vloeistof helder, zooals steeds het geval was, dan werden 40 C.C. aether toegevoegd en dit herhaald.

Vergelijkende proeven werden gedaan met kaliumhydroxyde zonder te verzeepen stof en overigens verhit enz. als bij een bepaalde proef; zoo ook met eenig kaliumcyanaat en verder met kaliumhydroxyde en alkohol verhit enz. als anders. De uitkomsten waren niet geheel naar wensch, en vooral scheen het CO_3KH bezwaar op te leveren, dat zich in kleine hoeveelheid afzettende geen neërslag gevende met $BaCl_2$, wel bij verwarming, dus zooals OCNK. Pogingen werden dus aangewend, om het gebruik van kooldioxyde te ontgaan.

Afzonderen van kaliumcyanaat zonder kooldioxyde. Genomen werd 0,2 gr. kaliumcyanaat en dit met kaliumhydroxyde en alkohol in de verhouding als vroeger bij 80° verhit

---

*) B. IV. 439. In de *Ber. d. Deutsch. Chem. Ges.* Jahrg. 16, 276 staat bij vergissing „alkoholische Kali", terwijl Gal verzeepte met potassa opgelost in water.

†) B. II. 5.

gedurende vier uur. Na de proef werd water bijgedaan, en op een deel der oplossing gereageerd, na toevoeging van eenig zoutzuur, op ammoniak met NESSLER's reagens, welke reactie zeer duidelijk zich vertoonde. Na toevoeging van alkohol (steeds in bovengemelde verhouding) werd aanvankelijk iets van een afzetsel gevormd, dat gemelde reactie niet gaf, evenmin het afzetsel ontstaan na bijvoeging van 40 C.C. aether; daarentegen dat na bijdoen van 80 C.C. aether en zichtbaar krystallijn, gaf zeer duidelijk de reactie op ammoniak in zure oplossing; een nieuwe 40 C.C. gaf nog iets afzetsel van kaliumcyanaat.

Met 't oog op later te nemen proeven werd 0,2 gr. kaliumcyanaat, in de bekende verhouding, met potassa en alkohol bij 120^0 verhit gedurende 24 uren, en verwerkt als naar gewoonte. De oplossing van toevoeging van water gaf als zoodanig geen reactie op ammoniak met NESSLER's reagens, daarentegen wel na bijvoegen van zoutzuur. Na toevoegen van alkohol, filtratie en bijdoen van aether tot 160 C.C. werd wel iets afgezet, maar niet gevende gemelde reactie op cyaanzuur.

Ter verzeeping werd genomen ruw product (oud zes maanden; had met broomwater gegeven 0,08 gr. afzetsel op 0,15 gr. stof); steeds werden dezelfde verhoudingen genomen, en 1 gr. stof op 1 gr. kaliumhydroxyde. Verhit bij 80^0 gedurende vier uur gaf de waterige oplossing (zie boven) met zoutzuur geen reactie op ammoniak, zelfs niet bij verhitten gedurende 24 uur. Bij 100^0 gedurende 24 uur verwarmd, gaf de vast geworden massa na toevoegen van water (16 C.C.) geen reactie op ammoniak in zure oplossing (wel een licht oranje gekleurd neêrslag). Alkohol (155 C.C.) gaf in deze en overeenkomstige gevallen een geleiachtig neêrslag, na staan onder een exsiccator een amorph lichaam, oplosbaar in water, geen reactie gevende op cyaanzuur. Dit neêrslag ontstond niet uitgaande van potassa alleen, of dit met 0,2 gr. kaliumcyanaat onder overigens gelijke omstandigheden (verhitten enz.). Veelal was een sterke reuk waarneembaar na verzeepen van ruw product; met ruw product na staan, niet het geval bij verhitten bij

80^0 gedurende 24 uur. Nu en dan was bij het doen der waterige oplossing van zoutzuur wat te zien van een nevel, zonder dat het reagens van NESSLER de bekende reactie vertoonde van ammoniak (of amine); wel ontstond een neêrslag wat licht oranje gekleurd.

Verzeeping kan reeds intreden bij gewone temperatuur (en tevens vorming van een lichaam met doordringenden reuk, herinnerende aan dien van een carbylamine, niet aan $O\,C\,N\,C_2\,H_5$), waarbij de massa geleiachtig wordt. Na oplossing in water, weder geen duidelijke reactie met gemeld reagens op ammoniak. De oplossing gaf met alkohol zeer weinig afzetsel. Bij neutralisatie met zoutzuur werd geen $C_3\,N_2\,O_3\,H_2\,K$ afgezet, evenmin in de andere proeven. Dit laatste trad wel in bij verzeepen bij 120^0 gedurende 24 uur; water (6 C.C.) vormde een troebele massa, zoutzuur deed nog meer afzetten, alles in meer zuur oplosbaar, met NESSLER's reagens de reactie op ammoniak gevende. Bij herhaling dezer proef bleek, dat de waterige oplossing (na filtratie) zonder zoutzuur gemelde reactie gaf. Verder verwerkt, werd bij geen der voorgaande proeven met aether, uit de oplossing kaliumcyanaat afgezet.

Onder gemelde omstandigheden treedt alzoo kaliumcyanaat niet op als ontledingsproduct bij verzeepen van ruw product in alkoholische oplossing met kaliumhydroxyde.

Verzeepen met sublimaat *). Bij 2 gr. ruw product werd gevoegd 0,5 gr. sublimaat en verhit, in een toegesmolten buis, aanvankelijk tot 100^0, daarna tot 110^0 en ten slotte tot 120^0; bij openen bleek weinig spanning te zijn. In een volgende proef werd dadelijk verhit tot 120^0; de uitkomst was dezelfde, alleen was de massa wat meer gekleurd geworden dan bij de vorige proef het geval was, terwijl het sublimaat meerendeels scheen ingesloten door een onoplosbare verbinding, die ontstond. Daarom werd thans het sublimaat

*) B. IV. 438.

opgelost in aether (gezuiverd) en hierbij het ruwe product gedaan, terwijl werd verwarmd bij 120^0 gedurende 4 uur. Hetzelfde werd herhaald zonder verhitten. Beide produkten verhielden zich op overeenkomstige wijze tegenover sodaloog (0,4 gr. natrium op 6 C.C. water), waarbij geen mercurioxyde werd afgescheiden, maar een kleurlooze vaste stof ontstond; na toevoeging van alkohol werd deze eerst opgelost, maar met meer alkohol (in 't geheel 160 C.C.) weder afgezet. Het kwam geschikter voor uit te gaan van ruw product na staan (genoegzaam gezuiverd van amidoverbinding). Gelijke gew.-hoev. hiervan en sublimaat werden verhit, en onder dezelfde omstandigheden tevens n. cyanuurzuur aethyl. Eenige gasontwikkeling ving aan bij 130^0—140^0 en hield op bij 150^0—160^0. Op 0,6 gr. stof had een vermindering plaats in gewicht bedragende voor ruw product na staan 0,1 gr. en n. cyanuurzuur aethyl 0,12 gr.. Het product met n. cyanuurzuur aethyl gaf met sodaloog (sterkte als vroeger) dadelijk een *geel* afzetsel, dat met ruw product na staan een eveneens vaste massa, maar die zeer langzaam werd aangetast (het vorige werd gemakkelijk ontleed), en er ontstond een volumineus genoegzaam *kleurloos* afzetsel.

Het product met n. cyanuurzaur aethyl, behandeld met sodaloog, werd gefiltreerd, kooldioxyde doorgeleid, na toevoeging van 160 C.C. alkohol (waarbij geen neêrslag ontstond) gefiltreerd, ter contrôle andermaal kooldioxyde doorgeroerd, waarbij de vloeistof helder bleef; 80 C.C. aether vormde zeer weinig van een amorph afzetsel, het filtraat gaf met 80 C.C. aether daarenboven geen afzetsel. Deze proeven werden voorloopig niet voortgezet (zie later).

Sublimaat als middel ter scheiding van n. aethyl-cyanuraat en cyanaat. Een hoeveelheid van 0,317 gr. n. cyanuurzuur aethyl (gekrystalliseerd uit alkohol) werd opgelost in water (0,6 gr. stof op 100 C.C. water), en wat alkohol toegevoegd (0,4 gr. op de 0,6 gr. stof) ter betere vergelijking met ruw product (alkohol bevattende). Bij deze oplossing deed men 15,8 C.C. sublimaatoplossing (24,954 gr. op 500 C.C. water), overeenkomende met de dubbele theoretische hoeveelheid (15 C.C. op 0,6 gr. n cyanuurzuur aethyl is de theoret. hoev.); na een halven dag te hebben gestaan werd gefiltreerd. Het afzetsel bedroeg 0,659 gr., terwijl het filtraat met sublimaatoplossing geen neêrslag meer gaf.

Een hoeveelheid van 0,319 gr. n. cyanuurzuur aethyl (gekrystalliseerd uit water bij lage temperatuur) gaf onder genoegzaam gelijke omstandigheden (evenwel zonder alkohol) met dezelfde sublimaatoplossing 0,661 gr. neêrslag *); het filtraat gaf niets meer.

De verbinding van n. cyanuurzuur aethyl met sublimaat heeft naar Ponomareff †) tot formule: $C_3N_3.3OC_2H_5.HgCl_2$, zoodat van 100 gew.-d. n. cyanuurzuur aethyl 227 gew.-d. aan deze kwikverbinding zou moeten verkregen worden. De eerste bepaling komt overeen met 208 gew.-d. sublimaat-verbinding op 100 gew.-d. n. cyanuurzuur aethyl, de tweede verbinding met 207 gew.-d., dat voldoende overeenstemt.

Het was nu van veel belang te weten, hoe ruw product en dit na staan, alsmede het lichaam van Cloëz zich verhield quantitatief tegenover sublimaatoplossing.

Van ruw product (oud negen maanden) in dezelfde verhouding in water opgelost en onder gelijke omstandigheden zooveel mogelijk neêrgeslagen met sublimaat, gaf 1,021 gr. aan afzetsel 0,6985 gr. en het filtraat nog 0,063 gr. Aangenomen een gehalte aan alkohol van 40 p. c. komt 1,021 gr. ruw product overeen met 0,6126 gr. zonder alkohol, zoodat dan 0,6126 gr. product geven 0,7615 gr. afzetsel. of op 100 gew.-d. aan afzetsel 124 gew.-d. Alles gerekend als n. cyanuurzuur aethyl, zoo ook het gehalte aan amidoverbinding, zou dit neêrslag overeenkomen met 59,6 p. c. n. cyanuurzuur aethyl. Met broomwater had dit product op 0,15 gr. (alkohol afgetrokken) gegeven 0,07 gr. broomafzetsel, of op 100 gew.-d. aan afzetsel 46 gew.-d..

Van een versche bereiding gaf 1,0665 gr. ruw product

---

*) Met. n. cyanuurzuur aethyl van deze twee bereidingen, werden de bepalingen gedaan met broomwater, vroeger in deze verhandeling medegedeeld (p. 379).

†) *Ber. d. Deutsch. Chem. Gesellsch.* Jahrg. 15. 513.

onder dezelfde omstandigheden neêrgeslagen aan afzetsel met de sublimaatoplossing 0,93 gr. en de moederloog nog daarenboven 0,046 gr., alzoo te zamen: 0,976 gr. van 1,0665 gr. product. Alkoholgehalte afgetrokken, komt 1,0665 gr. ruw product overeen met 0,64 gr., dan gevende op 100 gew.-d. aan sublimaatafzetsel: 145 gew.-d.. Met broomwater gaf dit product van 2,001 gr. aan broomafzetsel 0,9775 gr., dus op 0,15 gr. stof, alkoholgehalte afgetrokken, 0,119 gr.. Bij de bereiding van dit product was de alkohol wellicht niet zoo watervrij als in den regel het geval was, zoodat deze proef is te herhalen.

Hetzelfde product werd thans neêrgeslagen met de helft der vroeger genomen sublimaatoplossing. Een hoeveelheid van 1,038 gr. gaf 0,668 gr. afzetsel. Het filtraat verdampt onder een exsiccator zette een geleiachtige massa af; in 't geheel bleef na droogen terug 0,282 gr., alzoo bedraagt alles te zamen 0,95 gr.. Vrij sublimaat was wel in deze 0,282 niet aanwezig; daar dit na staan met water een oplossing gaf, een kleurloos neêrslag vormende met natriumcarbonaat. Opmerkingswaardig is, dat gemeld filtraat na indampen tot droog in een exsiccator (met zwavelzuur) een lichaam achterliet met den aangenamen reuk eigen aan ruw product na staan (en lichaam van Cloëz).

Een hoeveelheid van 0,641 gr. van het lichaam van Cloëz, waarmede vroeger werd gewerkt, gaf met de sublimaatoplossing 1,05 gr. afzetsel, en de moederloog daarenboven 0,037 gr., dus te zamen 1,087 gr. afzetsel, op 100 gew.-d. overeenkomende met 169 gew.-d. sublimaatverbinding.

Met broomwater gaf dit laatste product *) van 0,585 gr. aan broomafzetsel 0,621 gr. (na twee dagen 0,589 gr.), dus op 0,15 gr. stof aan afzetsel 0,159 gr..

Gemelde hoeveelheid van 169 gew.-d. sublimaatverbinding van 100 gew.-d. van gemelde bereiding van het lichaam van

---

*) B. III, 159; B. IV. 431, 432. Bij het staan gedurende 16 maanden onder een exsiccator was 3,9146 gr. dezer bereiding van het lichaam van Cloëz herleid tot 3,7086 gr., alzoo afgenomen 0,213 gr.. Ter vergelijking met de vorige broombepaling is 0,585 gr. te veranderen in 0,6186 gr., dat dan geeft op 0,15 gr. stof aan afzetsel met broomwater 0,15 gr..

Cloëz zou overeenkomen met een gehalte van 81,3 p. c. n. cyanuurzuur aethyl (100 : x = 207,5 : 169).

Het gemiddelde der vier laatste bepalingen *) van n. cyanuurzuur aethyl met broomwater, zoo ongeveer onder dezelfde omstandigheden genomen als bovengemelde bepaling, geeft 0,224 gr. broomafzetsel van 0,15 gr. n. cyanuurzuur aethyl, waarnaar 0,159 gr. afzetsel zouden bevatten 0,106 gr. n cyanuurzuur aethyl, dus 70 p. c.; zie later over bepalingen naar een andere methode (de formule: $C_3N_3 . 3OC_2H_5$, $NC . OC_2H_5$ eischt 75 p. c.).

De volgende analysen werden verricht.

I. Dit product heeft betrekking op de sublimaatverbinding erlangd met ruw product, dat twee maanden oud was. Een hoeveelheid van 0,6089 gr. stof gaf 43,5 C.C. stikstof bij 768,2^{mm} (corr.) en 6,7^0.

II. Afkomstig van ruw product, oud vijf maanden, dat in twee gedeelten werd neêrgeslagen. De bepaling betreft het eerste neêrslag. Een hoeveelheid van 0,5532 gr. stof gaf 40 C.C. stikstof bij 773,9^{mm} (corr.) en 2,8^0;

0,4903 gr. stof gaf 0,3947 gr. kooldioxyde en 0,148 gr. water.

III. Heeft betrekking (zie II) op het (tweede of) laatste neêrslag (met overmaat van sublimaat verkregen). Een hoeveelheid van 0,6532 gr. stof gaf 46,4 C.C. stikstof bij 750,93^{mm} (corr.) en 8^0.

Op 100 gew.-d. stof komen bovenstaande gegevens overeen met:

	I.	II.	III.	$C_3N_3 . HOC_2H_5$, $HgCl_2$ eischt:
Koolstof		21,9		22,2
Waterstof		3,3		3,1
Stikstof	8,7	9,0	8,5	8,7.

Deze verbindingen waren met opzet niet omgekrystalleerd: de neêrslagen, zeer volumineus, eerst geplaatst tusschen filtreerpapier bij herhaling ververscht, en na genoegzaam

*) Zie deze Verhandeling pag. 379.

van moederloog te zijn bevrijd, geplaatst tusschen filtreerpapier onder een exsiccator.

Deze verbindingen vormen een uiterst ligt glanzende massa, naar 't schijnt bij allen kleine naalden. Het smeltpunt is ongeveer 115^0, terwijl bij omstreeks 130^0 gasontwikkeling (van C_2H_5Cl) aanvangt. Tevens is dit het geval met de verbinding van n. cyanuurzuur aethyl en sublimaat. In verband met de groote hoeveelheid sublimaatverbinding gevormd door ruw product en dit na staan, zoo mede van het lichaam van Cloëz, lag de vraag niet verre, of hier gedacht moet worden aan polymerisatie, misschien ook aan de vorming eener verbinding van aethylcyacaat met sublimaat, of aethylcyanaat-cyanuraat met sublimaat. Al spoedig bleek eenig verschil te bestaan tusschen de verbinding van n. cyanuurzuur aethyl en sublimaat en die verkregen met ruw product, ruw product na staan en lichaam van Cloëz, behoudens bovengemelde overeenstemming betreffende smeltpunt. Meer bepaald werd dit nagegaan van twee der producten geanalyseerd (II en III van zoo even) en twee anderen (zie later).

II. Wordt een oplossing van n. cyanuurzuur aethyl zoo goed als dadelijk door de sublimaatoplossing neêrgeslagen (terwijl eenige alkohol daarop geen merkbaren invloed uitoefent), is dit veelal anders het geval met andere producten en meer bepaald met ruw product, dat veelal aanvangt met een *opaliseerende* oplossing te geven, hoegenaamd niet het geval met n. cyanuurzuur aethyl.

Het was opgevallen, dat de sublimaatverbinding van n. cyanuurzuur aethyl met kaliumcarbonaat dadelijk geeft een bruinroode verbinding, niet het geval b. v. met product I in verschen staat, wel soms na droogen onder een exsiccator. Dit verschijnsel werd eenigermate quantitatief vervolgd met natriumcarbonaat. Een hoeveelheid van ongeveer 0,6 gr. der verbinding van sublimaat met n. cyanuurzuur aethyl werd ontleed met een verdunde waterige oplossing van natriumcarbonaat, de theoretische hoeveelheid aan dit zout ter ontleding bevattende (CO_3Na_2 op $HgCl_2$); de *bruinroode* kwikverbinding ontstond (onder vrijkomen van

n. cyanuurzuur aethyl). Onder genoegzaam dezelfde omstandigheden werd 0,622 gr. van II behandeld. Naar 't voorkwam ontstond betrekkelijk weinig van gemeld bruinrood basisch kwikzout maar meer van een *kleurloos vlokkig* lichaam.

III. Genoegzaam overeenkomstig met II verhield zich dit neêrslag; voor deze proef werd genomen 0,582 gr..

Ruw product na staan (en uitkrystallisatie van amidoverbinding) leverde hetzelfde verschijnsel op (genomen werd 0,537 gr. der kwikverbinding). en tevens de sublimaatverbinding gemaakt met het lichaam van CLOËZ. eener bereiding waarmede vroeger was gewerkt *) (genomen werd voor de proef 0,609 gr. aan sublimaatverbinding).

De verbinding van n. cyanuurzuur aethyl lost geheel op in water, die van II (na droogen onder een exsiccator) gaf een melkachtig troebele vloeistof, tevens eenigzins het geval met III. Onder genoegzaam gelijke omstandigheden behandeld met sodaloog (zuiver), werd de sublimaatverbinding van n. cyanuurzuur aethyl zoo goed als geheel opgelost; slechts uiterst weinig kwikoxyde werd afgezet; van II gaf het sodaloog een weinig kleurloos afzetsel, terwijl III geheel helder bleef. Ook tegenover zilvercarbonaat schijnt de verhouding eenigzins anders te wezen. De sublimaatverbinding van n. cyanuurzuur aethyl wordt namelijk ontleed naar de te verwachten wijze ($HgCl_2 + CO_3Ag_2 = CO_2 + 2ClAg + HgO$, terwijl n. cyanuurzuur aethyl vrijkomt), maar het eerste neêrslag van ruw product met sublimaat geeft met zilvercarbonaat een troebele massa, zelfs na vrij lang staan niet helder bezinkende, en een violette kleur aannemende (blijkbaar door het chloorzilver); het filtraat is kleurloos en geeft met broomwater, als dat van n. cyanuurzuur aethyl. de bekende reactie.

De vraag is te beantwoorden, of men hier heeft te doen met een meer schijnbaar verschil als gevolg eener verontreiniging, of met een geval van isomerie. Amido-verbinding vereenigt zich ook met sublimaat, terwijl deze combinatie

---

*) B. III, 159; B. IV, 431, 432; B. V, pag. 390.

bij ontleding met kaliumcarbonaat een genoegzaam kleurloos ontledingsproduct geeft. De medegedeelde analysen duiden hierop niet ($C_3N_3 . 2OC_2H_5$, NH_2, $HgCl_2$ eischt 12,2 p. c. stikstof). De laatste verbinding vormt na droogen een krystallijn poeder, zeer gemakkelijk te onderscheiden van de andere neêrslagen, zoo ook bij praecipitatie. Amido-verbinding geeft een weinig opaliseerende vloeistof met sublimaat alvorens de verbinding neêrslaat, welk laatste echter spoedig volgt. In het ruw preduct na staan (vroeger gebruikt) en het lichaam van Cloëz kan amido-verbinding bezwaarlijk in noemenswaardige hoeveelheid voorhanden wezen. De volgende bepalingen werden gedaan.

Van een oplossing van natriumcarbonaat in water werd gedaan bij gedroogde neêrslagen met sublimaat, verondersteld allen te zijn $C_3N_3 . 3OC_2H_5$, $HgCl_2$, in de verhouding van CO_3Na_2 op $HgCl_2$, terwijl op 0,6 gr. $C_3N_3 . 3OC_2H_5$, verondersteld te zullen vrijkomen, waren genomen 150 C.C. water.

a. Een hoeveelheid van 0,7 gr. kwikverbinding van n. cyanuurzuur aethyl gaf (na droogen onder een exsiccator, als de volgenden) berekend op 1 gr. stof (als de volgenden) 0,355 gr. afzetsel.

b. Verbinding van II (zie p. 391 de betreffende analysen) 0,444 gr. afzetsel.

c. Van III (zie p. 391) 0,39 gr. afzetsel.

d. Van een ruw product na staan (en uitkrystallisatie van amido-verbinding) 0,393 gr. afzetsel.

e. Van het lichaam van Cloëz (vroeger geanalyseerd *)) 0,379 gr. afzetsel.

Alleen het eerste afzetsel had een bruinroode kleur, dat der anderen was grootendeels meer of min geelachtig gekleurd. Te oordeelen naar de genoegzame overeenstemming der hoeveelheid aan afzetsel, schijnt men hier te doen te hebben met een kwikoxychloride eener zelfde samenstelling maar verschillende kleur †). Over het na staan onder den

*) B. III. 159; B. IV. 431, 432.

†) *Handb. d. Anorg. Chem.* von Gmelin. B. III 792 (1875).

exsiccator terugblijvende der filtraten, kan eerst later mededeeling worden gedaan.

Scheiding door waterdamp. Als vervolg op een vroegere *) mededeeling strekke het volgende. Een hoeveelheid van 1 gr. ruw product en 150 C.C. water werden verhit en ongeveer 100 C.C. vloeistof opgevangen, den bekenden reuk hebbende. Sublimaatoplossing gaf slechts zeer weinig van opaliseeren, daarentegen werd de oplossing neêrgeslagen met sublimaat genoegzaam op de wijze van n. cyanuurzuur aethyl. Ook het terugblijvende werd neêrgeslagen met sublimaat. Lastig bij het destilleeren is het stooten door het zwaardere vloeibare gedeelte door water uit ruw product afgezet, terwijl dit eerste slechts zeer langzaam overgaat; destillatie met stoom zou hier zeker geschikter zijn. Hetzelfde geldt noodwendig van ruw product na staan (en uitkrystallisatie van amido-verbinding, *meerendeels* altijd wel te verstaan): zonder stoom geeft het stooten aanleiding tot te veel bezwaar. Daarom werd dit laatste in oplossing overgehaald; hierbij bleek, dat een oplossing bij verwarming troebel wordende door uitscheiden van n. cyanuurzuur aethyl, zeer wel kan overgaan, maar neme men de oplossing echter niet te sterk, en zoo, dat bij meerdere verwarming de vloeistof weder helder wordt, anders gaat er weldra over tengevolge van het stooten. Een goede verhouding bleef te zijn 2 gr. ruw product na staan op 175 C.C. water (en wat platinadraad in de retort); van den aanvang af wordt dan ook het destillaat bij verwarming troebel (bij een verdunde oplossing blijft n. cyanuurzuur aethyl ook regelmatig overgaan). Amido-verbinding (door afzetten uit ruw product bij staan, altijd wel te verstaan onder een exsiccator) genomen in de verhouding van 0,6 gr. op 150 C.C. water, destilleerde naar het scheen niet over, want 100 C.C. overgegaan gaven met 16 C.C. der sublimaatoplossing geen neêrslag, ook niet na staan, terwijl het terugblijvende met de sublimaatoplossing dadelijk een neêrslag vormde. Alzoo kan door overhaling

---

*) B. IV. 438.

met water n. cyanuurzuur aethyl worden gescheiden van amido-verbinding. Het aethylcyanaat schijnt hierbij niet te worden gepolymeriseerd.

Scheiding door verlaging in temperatuur *). N. cyanuurzuur aethyl in waterige oplossing wordt grootendeels afgezet en wel in verbinding met water, welk laatste onder een exsiccator gemakkelijk wordt losgelaten, waarbij de krystallen verweeren. Nu kan genomen worden een waterige oplossing van ruw product of deze aanvankelijk worden overgehaald (bedoeld wordt, ruw product na staan en uitkrystallisatie van amido-verbinding; bij overhaling blijft dit laatste terug). Voor het eerste wordt genomen ongeveer 2 gr. op 100 C.C. water (sommige producten vereischen ter oplossing meer water), terwijl het oplossen wordt bevorderd door verwarming in een waterbad en daarna schudden tot de vloeistof genoegzaam is bekoeld (waarna wordt gefiltreerd). Een oplossing van 0,6 gr. amido-verbinding op 100 C.C. water gaf bij lage temperatuur krystallen, maar niet duidelijk gekrystalliseerd, als van n. cyanuurzuur aethyl, waarvan de verweerde krystallen zeer gemakkelijk zijn te onderscheiden. In eerstgemelde oplossing kan slechts uiterst weinig aan amido-verbinding voorhanden zijn. Het gekrystalliseerde n. cyanuurzuur aethyl bleek dan ook zuiver te zijn. Aanvankelijke overhaling zou iets voor kunnen hebben, maar dan moet 2 gr. stof op 175 C.C. water worden genomen, anders is het bezwaar te groot van stooten (zie vroeger). In het eerste geval werd van 10 gr. product ongeveer 4 gr. n. cyanuurzuur erlangd (zonder krystalwater), door overhaling dan niet meer dan de helft. Wat aangaat het krystalliseeren, zoo is geschikt een temperatuur een weinig boven 0^0; is de temperatuur betrekkelijk zeer laag, dan houde men deze betrekkelijk korten tijd, anders wordt het geheel een ijsmassa. Soms gebeurt het, dat niets is uitgekrystalliseerd, maar door eenige beweging de krystallisatie aanvangt, en zich door de geheele vloeistof voortplant.

---

*) Zie B. III. 150.

Er werd ook eens nagegaan, of gemelde eigenschap van n. cyanuurzuur aethyl zou te gebruiken zijn ter quantitatieve bepaling.

I. 0,631 gr. n. cyanuurzuur aethyl gaf 0,3455 afzetsel bij lage temperatuur (altijd na staan onder een exsiccator).

II. 0,691 gr. van het lichaam van Cloëz, hetzelfde als waarvan zoo straks (pag. 394) sprake was, gaf onder dezelfde omstandigheden 0,2873 gr. afzetsel.

Dus op 100 gew.-d. aan n. cyanuurzuur aethyl:

I. 54,7
II. . . . . . 41,5.

Het product dezer bereiding van het lichaam van Cloëz zou alzoo bevatten 75,8 p. c. n. cyanuurzuur aethyl (54,7 : 41,5 = 100 : x).

Bij deze bepalingen was 0,6 gr. stof genomen op 100 C.C. water. Deze oplossing bleek wat te zwak te zijn, in zooverre als van een ander product en wel ruw product na staan (en uitkrystallisatie van amido-verbinding) bij een eenigzins hoogere temperatuur n. cyanuurzuur aethyl (met krystalwater) goed uitkrystalliseerde en niet van gemelde twee oplossingen, die bij een betrekkelijk lage temperatuur geheel waren bevroren, terwijl bij ontdooien het n. cyanuurzuur aethyl (altijd met krystalwater) terugbleef. Deze bepalingen zullen daarom herhaald worden in den volgenden winter. Toch hebben zij reeds eenige beteekenis, in zooverre als broomwater (naar de gewijzigde berekeningswijze) gaf 70 p. c. en de sublimaatmethode 81,3 p. c. aan n. cyanuurzuur aethyl *).

Ruw product en ammoniak †). Een hoeveelheid van 1,12 gr. ruw product (na staan) liet men staan met 11 gr. ammoniak (van 16,6 pCt.) in een gesloten fleschje, waarna de inhoud werd geplaatst onder een exsiccator en vervolgens in vacuo; het gewicht bedroeg thans 1,035 gr. aan *vaste*

*) Zie deze Verhandeling, pag. 391.

†) B. I.

stof, dus was het afgenomen 0,085 gr.. Bij deze proef was aanvankelijk van tijd tot tijd geschud, waarbij de massa weldra was vast geworden. De ontstane massa smolt nog niet bij 210^0, en was betrekkelijk gemakkelijk oplosbaar in water. Met broomwater gaf 0,44 gr. stof aan afzetsel 0,197 gr., dus op 0,15 gr. aan afzetsel 0,067 gr., zoodat betrekkelijk weinig van n. cyanuurzuur aethyl of eenig afgeleide, scheen voorhanden te zijn.

Bij 9,7 gr. versch ruw product werd gevoegd 10 gr. ammoniak van dezelfde sterkte, terwijl men dit mengsel liet staan in een toegesmolten buis gedurende vier maanden. Afgezet aan krystallijne stof was 0,41 gr. (alzoo 4,2 p. c.), terwijl de vloeibare massa na staan onder een exsiccator terugliet aan vaste stof 3,02 gr., te samen dus uitmakende 3,43 gr. Daar ruw product ongeveer 40 p. c. alkohol schijnt te bevatten, zijn de 9,7 gr. waarvan werd uitgegaan te herleiden tot ongeveer 5,8 gr., hierna afgetrokken 3,4 gr. blijft een verlies over van 2,4 gr.. De eerste stof (van 0.41 gr.) werd niet neêrgeslagen met broomwater, terwijl hierbij eenige gasontwikkeling schijnt plaats te hebben; het reagens van Nessler gaf een zeer zwak geel gekleurd neêrslag. Voor het gehalte aan stikstof (der niet nader gezuiverde stof) werd verkregen 32,2 p. c.. Ook het andere product (3,02 gr.) gaf met broomwater geen neêrslag (genomen werd 1 gr. op 100 C.C. water). Het schijnt alzoo, dat geen afgeleiden van n. cyanuurzuur in noemenswaardige hoeveelheid aanwezig waren. Het verlies in gewicht zou ten deele kunnen verklaard worden door aanvankelijke substitutie van de rest $O\,C_2H_5$ door $N\,H_2$. Vooralsnog kan het ons doel niet wezen dit onderzoek te vervolgen.

N. cyanuurzuur aethyl en ammoniak. In verband met het voorgaande was het wenschelijk de verhouding dezer stoffen te leeren kennen. Op 2,67 gew.-d. cyanuraat (zuiver) werden genomen 11 gew.-d. ammoniak van voormelde sterkte, welk mengsel werd bewaard in een toegesmolten buis, totdat de krystallijne stof geheel scheen omgezet te zijn in een andere (het geval na ongeveer negen maanden). De krystalmassa met vloeistof werd gedaan op een schaaltje, de vloeistof weggedaan; na droogen bedroeg de eerste ongeveer 1,9 gr., door eenmalige omkrystallisatie uit warm water gezuiverd. Het smeltpunt bedroeg ongeveer 97°. Een hoeveelheid van 0,2488 gr. stof gaf 61 C.C. stikstof bij 8^0,5 en 756,57 Bar. (gecorr.), overeenkomende met 30,8 p. c. stikstof, terwijl het n. monamidocyanuurzuur aethyl ($C_3 N_3 . 2 O C_2 H_5 . N H_2$) van HOFMANN *) vordert 30,5 p. c. (en een overeenkomstig smeltpunt heeft). Dit lichaam krystalliseert in fijne naalden tot een zijdeglanzende massa. Het wordt neêrgeslagen door broomwater (en sublimaat), dus is het wel een afgeleide van n. cyanuurzuur, tot dusverre niet aangetoond (terwijl H. van deze stof geen analysen openbaar maakte). De medegedeelde methode ter bereiding is zeer eenvoudig.

Afzetsel †) *uit ruw product bij staan*, tot nog toe bestempeld door mij met de benaming »amido-verbinding", werd omgekrystalliseerd uit warm water. Na eenmalige omkrystallisatie bedroeg het smeltpunt ongeveer 124°, terwijl de loupe geen mengsel deed kennen, en de krystallen zich voordeden als goed gevormde prisma's. Na nogmalige omkrystallisatie bleek het smeltpunt vergeleken met dat der vorige niet te zijn veranderd, en het uiterlijk voorkomen gaf tevens den indruk, dat dit lichaam afwijkt van n. monamidocyanuurzuur aethyl, tevens het geval na een derde omkrystallisatie.

I. Een hoeveelheid van 0,2545 gr. stof der tweede omkrystallisatie gaf bij $8,5^0$ en 749,57 Bar. (gecorr.) aan stikstof 70,5 C.C.

II. Van een derde omkrystallisatie gaf 0,2369 gr. bij $11,5^0$ en 757,35 Bar. (gecorr.) aan stikstof 65 C.C.

Op 100 gew.-d. overeenkomende met:

	I.	II	$N_3C_3.2OC_2H_5.NH_2$ eischt:
Stikstof.	32,8	32,5	30,5 .

*) B. II, 168.

†) B. III, 165.

Bij koken der waterige oplossing gaat niets over, evenmin met n. monamidocyanuurzuur aethyl. Niet onwaarschijnlijk is dit lichaam daarmede niet identisch, ook wijl het stollingspunt (ongeveer 117°) der drie omkrystallisatie-produkten overeenstemt. De hoeveelheid waarin dit lichaam optreedt, is betrekkelijk zeer gering, waardoor een nader onderzoek voorloopig moest gestaakt worden.

N. cyanuurzuur aethyl en aniline. Dit cyanuraat is zeer gemakkelijk oplosbaar in aniline, zoo 0,5 gr. in 0.9 gr. amiline en blijkbaar is de oplosbaarheid nog grooter. Bewaard vele maanden in een toegesmolten buis werd niets afgezet.

Lichaam van Cloëz nader. Een hoeveelheid van 6,497 gr. versch bereid, en na eenige dagen in vacuo te hebben gestaan gedeeltelijk vast geworden, werd korten tijd verhit bij 35—40° om het geheel weder vloeibaar te maken, en toen geplaatst onder een exsiccator. Weldra vertoonde zich een aanslag, terwijl deze stof in water bleek oplosbaar te zijn en na verdampen bij gewone temperatuur terugbleef. Na vier maanden bedroeg het gewicht 5,579 gr. en was alzoo 0,918 gr. vervluchtigd. Een bepaling met broomwater leverde niets bijzonders op. Deze proef werd tot nog toe niet herhaald.

Normaal cyanuurzuur aethyl en ruw product tegenover chloorwaterstof. Van ruw product (na staan) werd genomen 1,89 gr. en hierdoor bij gewone temperatuur chloorwaterstof gevoerd, waarbij de massa dikvloeibaar werd (het eerst door Gal *) aangetoond voor het lichaam van Cloëz). Verwarmd daarna bij 35°—40° had een soort *ontploffing* plaats onder vorming eener vaste stof (oplosbaar in warm water) blijkbaar *isocyanuurzuur.* Bij een volgende proef werd uitgegaan van 2,542 gr. door chloorwaterstof geworden 3,4054 gr., dus toegenomen 0,912 gr.; verwarmd tot 33° had een hevige gasontwikkeling plaats van C_2H_5Cl, nu en dan tot eenige rust komende maar bij stijging tot 90° telkens met kleine

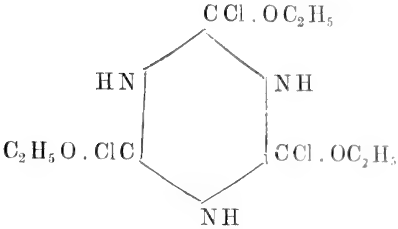
*) *Compt. rend.* 61. 530.

ontploffingen, terwijl een vaste massa terugbleef, geheel oplosbaar in water (dus vrij van cyamelid).

Een hoeveelheid van 0,349 gr. normaal cyanuurzuur aethyl werd door chloorwaterstof ten deele vloeibaar en nam daarbij 0,096 gr. toe in gewicht. Bij verwarming was de massa gesmolten nabij 27°; bij ongeveer 29° ving een gasontwikkeling aan, bij stijgen tot ongeveer 60° nu en dan bij wijze van kleine ontploffingen.

Een geschikte methode ter bereiding van het additie-product bestaat daarin, om n. cyanuurzuur aethyl op te lossen in aether (watervrij) en hierdoor chloorwaterstof te leiden; weldra zetten zich dan naaldjes af.

Normaal cyanuurzuur aethyl *zou* kunnen addeeren 3 HCl en vormen:



(of de H bij de C en Cl bij N); geeft bij verwarming isocyanuurzuur en C_2H_5Cl, een merkwaardig geval eener inwendige moleculaire ontleding.

Bereiding van ruw product, ruw product na staan, en lichaam van CLOËZ. Bij 58 gr. alkohol (gemaakt door ontleding van C_2H_5ONa, a C_2H_6O) vermengd met 116 gr. aether (gezuiverd met natrium) wordt langzamerhand gedaan 3,8 gr. natrium (onder afkoeling met water); en na oplossen ongeveer 19 gew.-d. broomcyaan opgelost in 70—75 gew.-d. aether (steeds gezuiverd) uit een chamaeleon-burette (onder afkoeling met water) bij gedeelten toegevoegd. Na filtratie (onder een klok) wordt overgehaald in een retort, daarna de terugblijvende vloeistof in een kleine buis met afleidingsbuis langen tijd verhit in een bad van kokend water, ter verwijdering zooveel mogelijk van aether en alkohol, totdat genoegzaam niets meer overgaat, waarna nog ongeveer een half uur wordt verhit; terug blijft dan zoogenaamd ruw product.

Het lichaam van Cloëz werd gemaakt door bij gemeld product van drie bereidingen (dus met $3{,}8 \times 3 = 11{,}4$ gr. natrium) eerst te voegen 86 C.C. water, en de neêrgeslagen olieachtige vloeistof tweemaal te wasschen, telkenmale met 43 C.C. water. Het product wordt dan geplaatst in vacuo met zwavelzuur (beter dan onder een exsiccator). Bij lang staan zet het lichaam van Cloëz een kleine hoeveelheid amido-verbinding af.

Laat men ruw product staan onder een exsiccator met zwavelzuur, dan gaat de alkohol langzamerhand weg, en krystalliseert amido-verbinding uit; het vloeibare gedeelte kan hiervan gemakkelijk worden afgeschonken. Dit product nadert in samenstelling zeer tot het lichaam van Cloëz; beiden zijn te beschouwen als grootendeels te bestaan uit: $N_3C_3 . 3\,O\,C_2H_5$, α $N\,C\,O\,C_2H_5$.

Thiocarbaminezuur aethyl en normaal aethylcyanaat. Ter bereiding *) van thiocarbaminezuur aethyl werd 1 gew.-d. natrium opgelost (onder afkoeling) in 15 gew.-d. gewonen abs. alkohol, daarna toegevoegd 3,3 gew.-d. zwavelkoolstof (onder afkoeling), vervolgens 6,8 gew.-d. aethyliodide, om dan eenige uren zachtkens te verhitten op een waterbad. Na vele uren te hebben gestaan werd de massa gefiltreerd, het filtraat neêrgeslagen met water, gescheiden; de zware vloeistof verhit tot ongeveer 130°, na bekoeling opgelost in 13 gew. d. abs. alkohol, ammoniakgas doorgeleid, na een dag staans werd de alkohol gedeeltelijk afgedestilleerd, verder ingedampt gedeeltelijk op een waterbad, vervolgens geplaatst onder een exsiccator, waarna krystallen werden afgezet. De krystalmassa werd gedaan tusschen filtreerpapier. Het smeltpunt was gelegen nabij 38°.

Bij gemelde bereiding hebben de volgende reacties plaats. Natriumaethylaat: C_2H_5ONa wordt met CS_2 omgezet in:

---

*) *J. pr. Ch. N. F.* Bd. 6, 445; Bd. 8, 115.

†) *Ann. Ch. Ph.* Bd. 72, 12; Bd. 75, 128.

$KS.CS.OC_2H_5$, dit met C_2H_5I in: $C_2H_5S.CS.OC_2H_5$, met NH_3 overgaande in: $NH_2.CS.OC_2H_5$ thiocarbaminezuur aethyl.

Door middel van kwikoxyde of broomwater zou daaraan H_2S wellicht onttrokken kunnen worden en alzoo ontstaan: $NC.OC_2H_5$ normaal aethylcyanaat. In geval dit mocht gelukken, had men daarin een zeer geschikte contrôle.

Ongeveer een gram thiocarbaminezuur aethyl werd, na oplossing in water, behandeld met ongeveer de dubbele hoeveelheid versch neêrgeslagen mercurioxyde, waarbij ontstond zwavelkwik, en een lichaam met *sterken reuk*. Het geheel werd een halven dag aan zich zelf overgelaten, en nu en dan geschud. Bij verdampen van een deel van het filtraat bleef iets over van een kleurloos lichaam, dat met zwavelwaterstof zwart werd en bleek kwik te bevatten. Dit laatste is ontgaan aan de aandacht van Debus *). Gemelde stof gaf met het reagens van Nessler de reactie als die met ammoniak. Naar Debus ontstaat een kleine hoeveelheid van eenig niet nader te determineeren ammonium-zout, dat wel niet het geval schijnt te zijn. Ten einde deze stof af te zonderen, werd door gemeld filtraat zwavelwaterstof in overmaat doorgeleid, gefiltreerd, het filtraat bij zachte warmte ingedampt, waarbij niets terugbleef van een krystallijne, maar slechts een kleine hoeveelheid van een op 't oog amorphe zelfstandigheid.

Het lichaam met sterken reuk zou $OCNC_2H_5$ kunnen wezen, ontstaan door omzetting van aanvankelijk gevormd $NCOC_2H_5$, maar $OCNC_2H_5$ zou met water geven diaethylureum, waarvan niets bleek te zijn ontstaan. Mogelijkerwijze zou broomwater geschikter zijn (een methode ter ontzwaveling die wij vroeger leerden kennen), en inderdaad wordt een oplossing van thiocarbaminezuur aethyl gemakkelijk ontleed met broom onder vorming van zwavelzuur. Van de vorming van $NC.OC_2H_5$ of $N_3C_3.3OC_2H_5$ werd echter bij nader onderzoek niets waargenomen.

---

*) l. c. Bd. 72, 12.

Debus *) meent met salpeterigzuur of cuprichloride door thiocarbaminezuur aethyl een lichaam te hebben verkregen: $C_6H_{10}N_2SO_2$. Wellicht is de formule $C_6H_{12}N_2SO_2$ en de structuur:

$$\begin{array}{l} HN = C - OC_2H_5 \\ \quad\quad S< \\ HN = C - OC_2H_5, \end{array}$$

en vormt dit lichaam een overgangsproduct bij oxydeeren, waardoor het ontstaan van $NCOC_2H_5$ wordt bemoeilijkt.

Een contrôle eenigzins voor het bovenstaande had men in de verhouding van H_2S tegenover $NCOC_2H_5$, aangenomen dat dit kan bestaan en een deel uitmaakt van ruw product (en dit na staan). Als eerste proef werd zwavelwaterstof geleid bij gewone temperatuur door ruw product na staan, waarbij geen noemenswaardige vermeerdering in gewicht plaats had; toch werd de massa een weinig geel gekleurd en ontstond er een product met eigenaardigen reuk. Zwavelwaterstof geleid onder verwarming (tot en bij 100^0) door ruw product na staan deed eveneens de massa geel worden en een stof ontstaan met sterken reuk, maar van het ontstaan eener krystallijne zelfstandigheid werd niets waargenomen. De volgende proeven werden daarenboven genomen.

Door ruw product na staan opgelost in aether, werd zwavelwaterstof geleid, tevens na toevoeging van een weinig ammoniak. Bij ruw product na staan opgelost in alkohol werd eenig geel zwavelammonium gedaan, en de laatste proef genomen zonder alkohol.

Na inwerking liet men het geheel staan onder een exsiccator. Het na staan terugblijvende behandeld met water gaf met SO_4Cu en zoutzuur *niet* de reactie †) op $NH_2 . CS . OC_2H_5$, van welke verbinding overigens niets werd waargenomen.

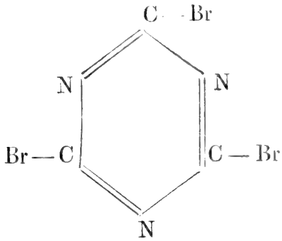
Uit het medegedeelde volgt noodwendig niet, dat wellicht

*) *Ann. Ch. Ph.* 82, 279; Beilstein, l. c. 741.

†) *Ann. Ch. Ph.* 82, 262; Beilstein l. c. 741.

onder andere omstandigheden zoowel additie kan intreden van H_2S met $NC.OC_2H_5$ ter vorming van $NH_2.CS.OC_2H_5$, als aan dit laatste H_2S zal kunnen ontrokken worden.

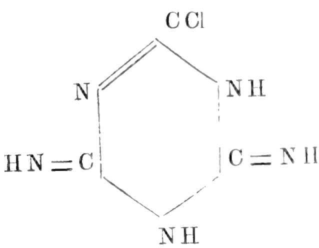
Over normaalcyanuurzuur-bromide en chloride, benevens chloorcyanamid. Het s. g. in gasvorm van vast chloorcyaan *) komt overeen met de formule: $(CN)_3Cl_3$, en het is wel aan geen twijfel onderhevig, of dit is tevens het geval met vast broomcyaan, waarvan dan de formule is: $(CN)_3Br_3$. Dit laatste geeft naar Ponomareff †) met natriumaethylaat n. cyanuurzuur aethyl, waaruit zou volgen, dat de structuurformule van vast broomcyaan is terug te geven met den vorm:



Ook afgescheiden van gemelde reactie is aan dit lichaam wel bezwaarlijk een andere structuur toe te kennen.

Laat men op vast chloorcyaan inwerken ammoniak, dan ontstaat, naar Gerhardt en andere scheikundigen, een verbinding, dus genaamd *chloorcyanamid*, volgens Nencki §) aldus geconstrueërd:

(A)



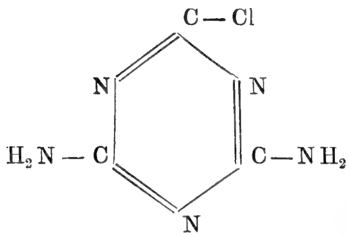
*) Beilstein l. c. 688.

†) *Berl. Ber.* XV, 513.

§) Beilstein, l. c. 717.

In ieder geval moet aanvankelijk gevormd worden een lichaam van de structuur:

(B)



De vraag of zoogenaamd chloorcyanamid tot formule heeft A of B, staat in verband met het vraagstuk betreffende de structuur van zoogenaamd cyanamid. Bij inwerking van NH_3 op $N \equiv C - Br$, zou in de eerste plaats moeten ontstaan: $N \equiv C - NH_2$, dat echter door verschuiving schijnt over te gaan in: $HN = C = NH$. In zooverre heeft de opvatting van NENCKI dan meer waarschijnlijkheid *) voor zich, maar dit neemt niet weg, dat ook hier het experiment, voor zooverre mogelijk, moet beslissen. De verhouding nu tegenover broom zal wellicht in staat zijn deze zaak tot genoegzame helderbeid te brengen. In gemeld geval heeft men ook te doen met een gesloten keten, en daarin heeft een verschuiving minder gemakkelijk plaats, zoodat chloorcyanamid wel degelijk B tot structuur zou kunnen hebben (in dat geval kan de benaming zijn: diamidonormaal cyanuurzuurchloride).

Over de theoretisch bestaanbare cyanuurzuren. Behalve normaal cyanuurzuur en isocyanuurzuur zouden nog andere cyanuurzuren †) bekend zijn, van wier structuur men echter niets weet. Het kan daarom zijn goede zijde hebben eens na te gaan, hoeveel cyanuurzuren naar de theorie kunnen bestaan. Noemt men die lichamen cyanuurzuren, welke tot mol. formule hebben $C_3H_3N_3O_3$ en waarin C en N elkander in een

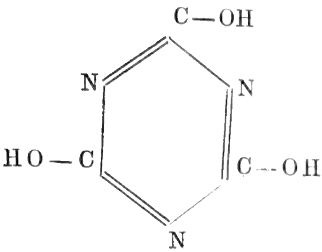
---

*) B. I, 14.

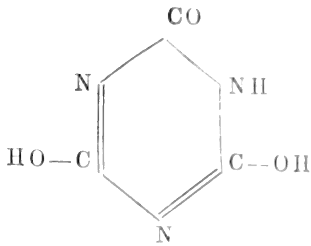
†) BEILSTEIN, l. c. S. 693.

gesloten keten afwisselen, dan zijn behalve de twee bekenden (A en D) daarenboven nog twee anderen (B en C) naar de theorie mogelijk:

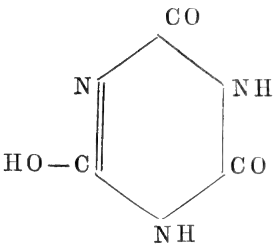
A.



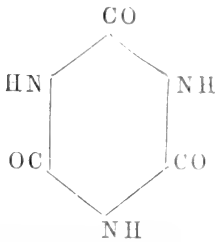
B.



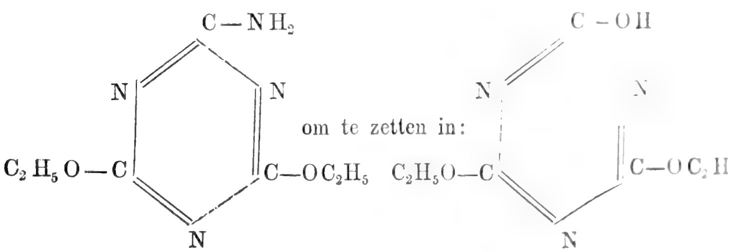
C.



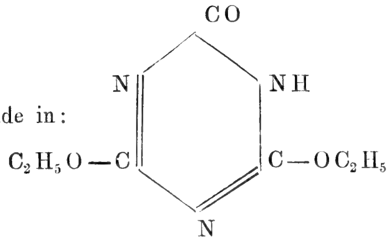
D.



De verbinding A zou in vrijen staat niet kunnen bestaan; van B en C is voorloopig niets te zeggen dienaangaande, alleen zullen zij zonder twijfel meer standvastigheid bezitten, het meest het geval met D. Later hopen wij afgeleiden van A om te zetten in die van B en C, b. v. uitgaande van monamido- en diamido n. cyanuurzuur aethyl. Nemen we tot voorbeeld het maken van een afgeleide van B:



overgaande in:



Besluit. Het medegedeelde schijnt te leiden tot de volgende uitkomsten:

1. Ruw product (bereid naar de gemelde methode *)), en door staan onder een exsiccator bevrijd van alkohol en amido-verbinding, nadert in samenstelling tot het lichaam van Cloëz, dat evenmin een zuivere scheikundige verbinding is. Bij staan wordt het vloeibaar gedeelte (na afschenken) schijnbaar geheel vast door afzetten van n. cyanuurzuur aethyl, als het lichaam van Cloëz, en na scheiding van vast en vloeibaar gedeelte (in samenstelling naderende tot het eerste) wordt dit bij staan weder schijnbaar geheel vast †). Bij staan schijnt het gehalte aan n. cyanuurzuur aethyl van ruw product, en dit na staan, toe te nemen §).

2. Het gehalte van ruw product, lichaam van Cloëz enz. aan n. cyanuurzuur aethyl is wellicht hooger dan naar de vroeger gevolgde berekening het geval zou wezen; bepalingen met sublimaat **) geven een gehalte, dat nog hooger is.

3. Thiocarbaminezuur aethyl: $NH_2 . CS . OC_2H_5$ schijnt noch met mercurioxyde noch broomwater te vormen: $NCOC_2H_5$ of $3NC . 3OC_2H_5$. Omgekeerd werd met H_2S geen additieproduct erlangd uitgaande van ruw product, overeenkomende met thiocarbaminezuur aethyl ††).

---

*) Zie deze Verhandeling pag. 401.

†) l. c. pag. 375.

§) l. c. pag. 376.

**) l. c. pag. 389, 390.

††) l. c. pag. 404.

4. Bij verzeepen van ruw product en dit na staan, met een alkoholische oplossing van potassa *), werd geen kaliumcyanaat verkregen. Hierbij ontstaat een lichaam met een reuk herinnerende aan dien van een carbylamine; tevens het geval bij verzeepen met een waterige oplossing van potassa en soda †), zelfs bij gewone temperatuur; niet het geval met n. cyanuurzuur aethyl (alhoewel oplosbaar in sodaloog na lang staan bij gewone temperatuur, zonder met alkohol een geleiachtig neêrslag te geven als isocyanuurzuur).

5. N. cyanuurzuur aethyl kan zeer geschikt worden gemaakt, door ruw product te laten staan onder een exsiccator (amido-verbinding te doen uitkrystalliseeren), het terugblijvende op te lossen in water, en deze oplossing te plaatsen bij een temperatuur van even boven 0^0, onder welke omstandigheden het zich afzet §) (met krystalwater).

6. Het monamidocyanuurzuur aethyl van HOFMANN is gemakkelijk zuiver te erlangen door ammonia te laten inwerken bij gewone temperatuur op n. cyanuurzuur aethyl. Door de verhouding tegenover broomwater (en sublimaat) staat de formule $3\,NC \, . \, 2\,O\,C_2\,H_5 \, . \, N\,H_2$ genoegzaam vast, en is het derhalve te beschouwen als een afgeleide van n. cyanuurzuur **). De amido-verbinding afgezet uit ruw product schijnt hiermede niet identisch te zijn ††).

7. Als structuurformule voor vast broomcyaan §§) is te nemen $3\,N \, . \, 3\,C\,Br$ en voor die van vast chloorcyaan $3\,N \, . \, 3\,C\,Cl$.

8. Theoretisch kunnen bestaan vier cyanuurzuren ***).

Onderzoekingen met betrekking tot normaal cyaanzuur en afgeleiden worden voortgezet.

Utrecht, 29 Maart 1884.

---

*) l. c. pag. 385.
†) l. c. pag. 380, 384.
§) l. c. pag. 396.
**) l. c. pag. 399.
††) l. c. pag. 399.
§§) l. c. pag. 407.
***) l. c. pag. 405.

V E R S L A G

OVER EENE

VERHANDELING VAN Dr. **F. DE BOER.**

GETITELD:

DISCUSSIE DER ALGEMEENE VIERDE-MACHTS-VERGELIJKING.

(Uitgebracht in de Vergadering van 25 April 1884.)

In eene vorige verhandeling, getiteld: »*Uitbreiding van het theorema van* ROLLE" opgenomen in de *Versl. en Meded.* 2de Reeks, Deel XIX, p. 384, werd door Dr. DE BOER bewezen dat, indien men in een veld waar de wortels eener hoogere machtsvergelijking en harer afgeleide op de bekende wijze zijn afgebeeld, alle begrensde φ–lijnen aanbrengt welke twee der wortels verbinden, deze φ–lijnen een samenhangend geheel vormen 't welk alle wortels der oorspronkelijke en afgeleide vergelijking opneemt en nergens een gesloten kring doet ontstaan. In het algemeen bevat daarbij iedere φ–lijn twee wortels der oorspronkelijke en daartusschen één wortel der afgeleide vergelijking; maar in bijzondere gevallen komen φ–lijnen voor welke n wortels der oorspronkelijke en $n-1$ der afgeleide bevatten ($n > 2$). Onder deze vindt men er die zich vertakken ter plaatse waar een wortel der afgeleide vergelijking gelegen is.

Wat de vierdemachtsvergelijking betreft, bestaan er twee verbindingswijzen der wortels door begrensde φ–lijnen, die op gelijke algemeenheid aanspraak kunnen maken. Bij de eene zijn de wortels in eene bepaalde volgorde twee aan twee, bij de andere is één wortel met de drie overige verbonden. Daarnevens kunnen echter 25 verschillende verbindingswijzen van mindere algemeenheid optreden.

In de thans ingezonden verhandeling nu, heeft Dr. DE BOER zich ten doel gesteld na te gaan, wanneer, en op welke wijze deze verschillende verbindingswijzen in elkander overgaan als men in eene gegevene vierdemachtsvergelijking den bekenden term geleidelijk veranderen laat.

Dewijl de afgeleide vergelijking daarbij onveranderd blijft, behouden hare wortels hunne plaats, maar die van de vergelijking zelve bewegen zich over het veld zoodanig dat de plaats van één van hen die der overigen bepaalt. Daarbij veranderen ook de verbindende φ-lijnen voortdurend van vorm en stand.

De schrijver toont nu aan dat de overgangen tusschen de verbindingswijzen van grootere algemeenheid steeds gevormd worden door die gevallen waarbij vertakte φ-lijnen optreden. Zulke vertakte φ-lijnen verbinden steeds twee of drie wortels der afgeleide vergelijking; brengt men dus alle lijnen aan, welke door eene behoorlijke keuze van den bekenden term φ-lijnen worden kunnen, en welke tevens twee of meer wortels der afgeleide vergelijking verbinden, dan kan overgang van de eene tot de andere verbindingswijze uitsluitend dan plaats hebben als een der wortels zulk eene lijn overschrijdt.

Deze lijnen, door Dr. DE BOER *verdeelde lijnen* genoemd, verbinden op dat oogenblik minstens drie der wortels, terwijl door den vierden wortel een met de overige takken niet samenhangende tak derzelfde φ-lijn gaat Brengt men ook *dien* tak aan, dan kan geen der wortels eene verdeelende lijn overschrijden, zonder dat dit ook de overige wortels doen. Te zamen deelen deze lijnen het veld af in vakken, zoodat, indien men een der wortels in één dier vakken brengt, dadelijk aangewezen worden kan in welke vakken zich de overigen bevinden *en tevens op welke wijze zij door φ-lijnen verbonden zijn.*

In de eerste plaats onderzocht de schrijver het bijzondere geval dat éene enkele verdeelende lijn de drie wortels der afgeleide vergelijking bevat. Merkwaardig genoeg blijkt het dat dit onder twee geheel verschillende omstandigheden geschiedt. Vooreerst namelijk dan wanneer de wortels der afgeleide vergelijking alle drie in ééne rechte gelegen zijn, maar tevens ook dan wanneer zij de hoekpunten vormen van een driehoek die de eigenschap bezit dat de som der vierkanten zijner zijden gelijk is aan zesmaal den straal van den omgeschreven cirkel.

Daarna behandelt de schrijver het meer algemeene geval, dat er drie verschillende verdeelende lijnen zijn. Men behoort dan twee gevallen te onderscheiden al naar gelang de som der vierkanten der zijden van den driehoek, waarvan de wortels der afgeleide vergelijking de hoekpunten zijn, grooter is of kleiner dan het vierkant van den straal van den omgeschreven cirkel. In het eene geval wordt het veld door de verdeelende lijnen in 28, in het andere in 16 vakken afgedeeld.

Hierop wordt nog het geval onderzocht dat twee wortels der afgeleide vergelijking samenvallen.

Telkens wordt de loop der verdeelende lijnen nagegaan en door eene figuur verduidelijkt; de correspondeerende vakken worden aangewezen en de verbindingswijzen der wortels door φ-lijnen beschreven.

Ten slotte wordt een en ander nog nader met behulp van het RIEMANN'sche vlak toegelicht.

Hoewel de schrijver in deze verhandeling de theorie der hoogeremachtsvergelijkingen niet met nieuwe stellingen van eenvoudigen inhoud verrijkt, is toch het tamelijk ingewikkeld onderwerp met zooveel helderheid en meesterschap behandeld en draagt die behandeling zoozeer bij tot nadere toelichting der vroegere door hem verkregen uitkomsten en tot verduidelijking der voorstellingen omtrent den samenhang tusschen de ligging van de wortels der oorspronkelijke en afgeleide vergelijking in het vlak waarin zij gewoonlijk worden afgebeeld, dat wij niet aarzelen de verhandeling ter opneming in de werken der Akademie aan te bevelen.

D. J. KORTEWEG.
C. H. C. GRINWIS.

DISCUSSIE

DER

ALGEMEENE VIERDE-MACHTSVERGELIJKING.

DOOR

Dr. F. DE BOER.

1. Door schrijver dezes werden in eene verhandeling, getiteld: *Uitbreiding van het theorema van* ROLLE, opgenomen in de *Verslagen en Mededeelingen van de Kon. Akad. van Wetenschappen*, 2de Reeks, Deel XIX, pag. 384, eenige eigenschappen ontwikkeld van de wortels eener hoogere-machtsvergelijking, in verband met die harer afgeleide. Het volgende bevat eene nadere beschouwing van de algemeene vierdemachtsvergelijking in verband met die eigenschappen.

Zij

$$f(z) = f(x + iy) = R e^{i\Phi} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

eene vierde-machtsvergelijking. Stellen wij ons voor, dat de waarden van z in een plat vlak zijn afgebeeld, door x en y als de rechthoekige coördinaten van een veranderlijk punt te beschouwen, dan kunnen wij door eene eenvoudige substitutie de vergelijking zoo herleiden, dat het gemeenschappelijk zwaartepunt van de wortels der vergelijking en die harer afgeleide

$$f'(z) = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

tot oorsprong wordt aangenomen, en de negatieve richting der x-as door een van de wortels der afgeleide vergelijking gaat *). De vergelijking heeft dan den vorm

$$z^4 + A z^2 + B z = C, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

waarbij nog de reeele en imaginaire deelen van A en B aan zekere voorwaarde moeten voldoen.

Dit omtrent het coördinatenstelsel vastgesteld hebbende, kunnen wij de wortels der afgeleide vergelijking voorstellen door

$$k = -{}^2/_3 p, \quad l = {}^1/_3 p + {}^1/_2 a e^{i\omega}, \quad m = {}^1/_3 p - {}^1/_2 a e^{i\omega}.$$

De punten K, L en M in fig. 1 (en ook in de volgende figuren) stellen die wortels voor. De meetkundige beteekenis der drie grootheden p, a en ω is de volgende: a is de lijn LM, p is de lijn die K met het midden van LM verbindt, en ω de hoek tusschen die twee lijnen, gerekend, zooals in de figuur is aangewezen. Wij voegen hier nog bij, dat b de lijn KM en c de lijn KL zal voorstellen, dat p_1 en p_2 de beide andere medianen van den driehoek KLM zullen zijn, en ω_1 en ω_2 de hoeken analoog met ω, en eindelijk dat ν_1 en ν_2 de hoeken zullen voorstellen, die b en c en μ_1 en μ_2 die welke p_1 en p_2 met de x-as maken. De richting, waarin deze hoeken gerekend worden, is in fig. 1 aangewezen.

2. De afgeleide vergelijking kan nu in de volgende vormen worden gebracht:

$$z^3 - z(l^2 + lm + m^2) - klm = z^3 - z(k^2 - lm) - klm = 0 \ldots (4)$$

of

$$z^3 - z({}^1/_3 p^2 + {}^1/_4 a^2 e^{2i\omega}) + {}^2/_3 p ({}^1/_9 p^2 - {}^1/_4 a^2 e^{2i\omega}) = 0,$$

terwijl de vierde-machtsvergelijking zelve wordt:

$$z^4 - 2z^2(l^2 + lm + m^2) - 4klmz = \gamma + i\delta \;\ldots\; (5)$$

*) Zie t. a. p. N°. 10.

of

$$z^4 - 2z^2(^1/_3 p^2 + ^1/_4 a^2 e^{2i\omega}) + ^8/_3 z p(^1/_9 p^2 - ^1/_4 a^2 e^{2i\omega}) = \gamma + i\delta,$$

waarin $C = \gamma + i\delta$ gesteld is *).

Stellen wij nog:

$$z^4 - 2z^2(l^2 + lm + m^2) - 4zklm = X + iY,$$

en geven wij aan X en Y de indices 1, 2 of 3 als z door k, l of m vervangen wordt, dan vinden wij

$$X_1 + iY_1 = -k^2(l^2 + 4lm + m^2),\quad X_2 + iY_2 = -l^2(k^2 + 4km + m^2),$$
$$X_3 + iY_3 = -m^2(l^2 + 4kl + k^2), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

en verder

$$X_3 - X_2 + i(Y_3 - Y_2) = k(m-l)^3,\quad X_1 - X_3 + i(Y_1 - Y_3) = l(k-m)^3,$$
$$X_2 - X_1 + i(Y_2 - Y_1) = m(l-k)^3. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Door invoering van de waarden van k, l en m vindt men hieruit

$$\left.\begin{aligned} X_3 - X_2 + i(Y_3 - Y_2) &= ^2/_3 p a^3 e^{3i\omega}, \\ X_1 - X_3 + i(Y_1 - Y_3) &= -(^1/_3 p + ^1/_2 a e^{i\omega})(p - ^1/_2 a e^{i\omega})^3, \\ X_2 - X_1 + i(Y_2 - Y_1) &= (^1/_3 p - ^1/_2 a e^{i\omega})(p + ^1/_2 a e^{i\omega})^3. \end{aligned}\right\} \ldots (8)$$

Merkt men nog op, dat $m - k = b e^{i\nu_1}$, $l = -^2/_3 p_1 e^{i\mu_1}$ en evenzoo $l - k = c e^{i\nu_2}$, $m = -^2/_3 p_2 e^{i\mu_2}$, terwijl $\nu_1 = \omega_1 + \mu_1$, $\nu_2 = \omega_2 + \mu_2 - 180^0$ is, dan vindt men nog

$$\left.\begin{aligned} X_1 - X_3 + i(Y_1 - Y_3) &= ^2/_3 p_1 b^3 e^{i(3\nu_1 + \mu_1)} = ^2/_3 p_1 b^3 e^{i(3\omega_1 + 4\mu_1)} \\ X_2 - X_1 + i(Y_2 - Y_1) &= -^2/_3 p_2 c^3 e^{i(3\nu_2 + \mu_2)} = ^2/_3 p_2 c^3 e^{i(3\omega_2 + 4\mu_2)} \end{aligned}\right\}, \ldots (9)$$

zoodat men heeft

---

*) Stelt men $A = A_1 + iA_2$, $B = B_1 + iB_2$, en vergelijkt men de coëfficiënten van (3) met die van (5), dan vindt men door eliminatie van p, a en ω

$$4A_2^2(A_1 B_2 - B_1 A_2) + B_2^3 = 0.$$

Dit is de voorwaarde waarvan in N^0. 1 sprake was

$$\left.\begin{array}{l} X_3 - X_2 = {}^2/_3\, p\, a^3 \cos 3\,\omega, \quad Y_3 - Y_2 = {}^2/_3\, p\, a^3 \sin 3\,\omega \\ X_1 - X_3 = {}^2/_3\, p_1\, b^3 \cos(3\,\omega_1 + 4\,\mu_1), \\ \qquad\qquad Y_1 - Y_3 = {}^2/_3\, p_1\, b^3 \sin(3\,\omega_1 + 4\,\mu_1), \\ X_2 - X_1 = {}^2/_3\, p_2\, c^3 \cos(3\,\omega_2 + 4\,\mu_2), \\ \qquad\qquad Y_2 - Y_1 = {}^2/_3\, p_2\, c^3 \sin(3\,\omega_2 + 4\,\mu_2). \end{array}\right\} \ldots (10)$$

3. Uit

$$X_1 + i\,Y_1 = -\,k^2\,(l^2 + 4\,l\,m + m^2)$$

volgt nog

$$X_1 + i\,Y_1 = -\,{}^4/_9\, p^2\,({}^2/_3\, p^2 - {}^1/_2\, a^2 e^{2i\omega}),$$

en dus

$$X_1 = -\,{}^8/_{27}\, p^4 + {}^2/_9\, a^2 p^2 \cos 2\,\omega, \quad Y_1 = {}^2/_9\, a^2 p^2 \sin 2\,\omega, \ldots (11)$$

en uit de andere vergelijkingen (6) heeft men op dezelfde wijze:

$$\left.\begin{array}{l} X_2 = {}^1/_{27} p^4 - {}^5/_{18} p^2 a^2 \cos 2\,\omega - {}^1/_3\, p\, a^3 \cos 3\,\omega - {}^1/_{16}\, a^4 \cos 4\,\omega \\ Y_2 = \qquad\quad - {}^5/_{18} p^2 a^2 \sin 2\,\omega - {}^1/_3\, p\, a^3 \sin 3\,\omega - {}^1/_{16}\, a^4 \sin 4\,\omega \\ X_3 = {}^1/_{27} p^4 - {}^5/_{18} p^2 a^2 \cos 2\,\omega + {}^1/_3\, p\, a^3 \cos 3\,\omega - {}^1/_{16}\, a^4 \cos 4\,\omega \\ Y_3 = \qquad\quad - {}^5/_{18} p^2 a^2 \sin 2\,\omega + {}^1/_3\, p\, a^3 \sin 3\,\omega - {}^1/_{16}\, a^4 \sin 4\,\omega \end{array}\right\} \ldots (12)$$

De substitie dezer waarden geeft

$$X_3\,Y_2 - Y_3\,X_2 = -\,{}^1/_9\, a\, p \sin \omega\, \{ {}^2/_3\, p^4 a^2 (1 - {}^4/_3 \sin^2 \omega) - \\ -\,{}^5/_3\, p^2 a^4 + {}^3/_8\, a^6 \}, \ldots\ldots\ldots (13)$$

$$X_1\,Y_3 - Y_1\,X_3 = -\,{}^1/_9\, a\, p \sin \omega\, \{ {}^4/_3\, p^5\, a \cos \omega + \\ + {}^8/_3\, p^4 a^2 (1 - {}^4/_3 \sin^2 \omega) + {}^2/_3\, a^3 p^3 (\cos^3 \omega - \sin^2 \omega \cos \omega) - \\ -\,{}^2/_3\, a^4 p^2 - {}^1/_4\, a^5\, p \cos \omega \}, \ldots\ldots\ldots (14)$$

$$X_2\,Y_1 - Y_2\,X_1 = -\,{}^1/_9\, a\, p \sin \omega\, \{ -\,{}^4/_3\, p^5\, a \cos \omega + \\ + {}^8/_3\, p^4 a^2 (1 - {}^4/_3 \sin^2 \omega) - {}^2/_3\, a^3 p^3 (\cos^3 \omega - \sin^2 \omega \cos \omega) - \\ -\,{}^2/_3\, a^4 p^2 + {}^1/_4\, a^5\, p \cos \omega \}. \ldots\ldots\ldots (15)$$

De optelling der laatste drie vergelijkingen geeft

$$X_3 Y_2 - Y_3 X_2 + X_1 Y_3 - Y_1 X_3 + X_2 Y_1 - Y_2 X_1 =$$
$$= ap\,sin\omega\,\{{}^2/_3 p^4 a^2({}^4/_3 sin^3\omega - 1) + {}^1/_3 a^4 p^2 - {}^1/_{24} a^6\} \,..(16)$$

De grootheid tusschen accolades geplaatst zullen wij door $^1/_2 P$ voorstellen, zoodat:

$$P = a^2\,\{{}^4/_3 p^2({}^4/_3 sin^2\omega - 1) + {}^2/_3 a^2 p^2 - {}^1/_{12} a^4\}. \;. \;(17)$$

Deze grootheid P, die in het volgende een hoofdrol te vervullen heeft, kunnen wij nog onder een paar andere vormen voorstellen. Uit de figuur (1) volgt:

$$p^2 = {}^1/_2 b^2 + {}^1/_2 c^2 - {}^1/_4 a^2,\quad ap\,cos\omega = {}^1/_2 c^2 - {}^1/_2 b^2;$$

en door subsitutie hiervan in P heeft men:

$$P = {}^2/_9(a^2b^4 + a^4b^2 + a^2c^4 + a^4c^2 + b^2c^4 + b^4c^2 - a^6 - b^6 - c^6)..(18)$$

Voert men nog in de hoeken K, L en M van driehoek KLM en R den straal des omgeschreven cirkels van dien driehoek, dan vindt men:

$$P = {}^4/_9\,abc\,(a^3 cos\,K + b^3 cos\,L + c^3 cos\,M)\;.\;.\;.\;.\;(19)$$

en

$$P = {}^{32}/_9\, I^2\,(a^2 + b^2 + c^2 - 6\,R^2),\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(20)$$

waarin I den inhoud des driehoeks KLM voorstelt. Neemt men nog in aanmerking, dat $I = {}^1/_2\, ap\, sin\,\omega$ is, dan ziet men, dat (16) nu ook als volgt kan geschreven worden:

$$X_3 Y_2 - Y_3 X_2 + X_1 Y_3 - Y_3 X_1 + X_2 Y_1 - Y_2 X_1 = I\,.\,P...(21)$$

De vergelijkingen (13), (14) en (15) kunnen nu nog gebracht worden in de vormen:

$$\left.\begin{aligned} X_3 Y_2 - Y_3 X_2 &= {}^1/_9 I\,\{P + {}^4/_3 a^4(b^2 + c^2 - a^2)\} = \\ &= {}^1/_9 I(P + {}^8/_3 a^4 bc\,cos\,K), \\ X_1 Y_3 - Y_1 X_3 &= {}^1/_9 I\,\{P + {}^4/_3 b^4(a^2 + b^2 - c^2)\} = \\ &= {}^1/_9 I(P + {}^8/_3 ab^4 c\,cos\,L), \\ X_2 Y_1 - Y_2 X_1 &= {}^1/_9 I\,\{P + {}^4/_3 c^4(a^2 + b^2 - c^2)\} = \\ &= {}^1/_9 I(P + {}^8/_3 abc^4\,cos\,M) \end{aligned}\right\}\;.\;.\;(22)$$

4. In de boven aangehaalde verhandeling is aangetoond, dat sommige paren van wortels eener hoogere machtsvergelijking door eindige Φ-lijnen *) zijn verbonden, andere niet. Bij het onderzoek, tusschen welke wortels die verbinding bestaat, is het van belang het volgende op te merken.

Alle vergelijkingen, die alleen in den bekenden term verschillen, hebben dezelfde afgeleide; verandert dus de bekende term, dan ondergaat de ligging van de wortels der vergelijking zelve eene verandering, maar die van de wortels der afgeleide niet. Heeft die verandering geleidelijk plaats, dan zal daarbij de volgorde, waarin de verbinding der wortels door Φ-lijnen plaats heeft, *in het algemeen* niet veranderen. Zulk eene verandering *kan* echter plaats grijpen wanneer voor een oogenblik twee of meer Φ-lijnen samenvallen, zoodanig, dat op zulk een oogenblik drie of meer wortels van de vergelijking op *samenhangende* takken eener zelfde Φ-lijn gelegen zijn. Fig. 2 moge dit ophelderen; A, B en G stellen daar drie wortels eener vergelijking voor en K en L twee wortels van hare afgeleide. A en B zijn verbonden door eene Φ-lijn, welke door L gaat, en B en G door eene andere, die over K loopt. Verplaatsen zich nu A, B en G respectievelijk naar A', B' en G', dan kan het gebeuren, dat de beide Φ-lijnen $B A$ en $B G$ gedeeltelijk samenvallen in $B' K$, zoodat er eene vertakte Φ-lijn $A' B' G'$ ontstaat, waarop al de drie wortels gelegen zijn. Heeft nu nog een verdere verandering in denzelfden zin plaats, dan gaat A' bijv. naar A'', B' naar B'' en G' naar G'', en nu is nog wel altijd B'' met G'', maar in plaats van B'' is nu G'' met A'' verbonden. Geen verandering zou er in de verbinding zijn ontstaan, wanneer bij het samenvallen der Φ-lijnen de drie wortels op eenzelfden tak van de Φ-lijn kwamen te liggen, zooals een blik op fig. 3 onmiddelijk leert. Hierbij heeft dan ook eigenlijk geen samenvallen der *verbindende* Φ-lijnen plaats; de deelen $B' G'$ en $A' B'$ be-

---

*) Dat zijn de lijnen Φ = const.
Zie t a. p. N°. 13.

hooren wel tot dezelfde algebraïsche kromme, maar niet tot dezelfde Φ-lijn.

Dat in het geval van fig. 2 die verbinding veranderen *moet*, is door die figuur wel aanschouwelijk gemaakt, maar nog niet bewezen. Om dat bewijs te leveren zullen wij aantoonen, dat twee Φ-lijnen die dezelfde twee (veranderlijk onderstelde) wortels verbinden en door denzelfden wortel van de afgeleide vergelijking gaan, elkaar niet kunnen snijden behalve in dat punt.

Onderstellen wij dat A en B (fig. 4) twee wortels zijn verbonden door eene Φ-lijn, die over K, een wortel der afgeleide loopt. Laat $B'A'$ een tweede stand van die Φ-lijn zijn, nadat de bekende term der vergelijking veranderd is, en nemen wij aan, dat deze twee lijnen elkaar behalve in K nog in N snijden.

De vergelijkingen dier beide lijnen kunnen worden voorgesteld door

$$sX + tY = s\gamma_1 + t\delta_1,$$
$$s'X + t'Y = s'\gamma_2 + t'\delta_2.$$

waarin s, t, s' en t' getallencoëfficiënten zijn en γ_1 en δ_1 de waarden die X en Y in A en B, γ_2 en δ_2 die welke deze zelfde functiën in A' en B' aannemen*). Verandert men nu de waarden van γ_1 en δ_1, zoo dat $s\gamma_1 + t\delta_1$ onveranderd blijft, dan verplaatst men de wortels A en B langs de lijn AKB en het is gemakkelijk in te zien, dat men een van die wortels elk willekeurig punt van die lijn kan doen innemen, zonder dat deze ophoudt eene Φ-lijn te zijn. Zoo kan men het punt A in N brengen. Maar evenzoo kan men A' langs de lijn $A'KB'$ naar N doen gaan; A en A' zouden dan dezelfde wortel van dezelfde vergelijking geworden zijn, die door twee verschillende Φ-lijnen met K zou zijn verbonden, wat onmogelijk is.

---

*) Volgens onze bepaling van X en Y in N°. 2 hebben deze grootheden uitsluitend op de vierde-machtsvergelijking betrekking. Niets verhindert echter aan de letters bij het hier gegeven bewijs voor elk hoogere-machtsvergelijking de analoge beteekenis toe te kennen.

Hieruit ziet men dat in fig. 2 B'' niet met A'' kan zijn verbonden, daar de verbindingslijn de vertakte φ-lijn $A'B'G'$ behalve in L noodzakelijk ergens zou moeten snijden, wat volgens het voorgaand niet mogelijk is.

5. Het is uit dit alles duidelijk dat de lijnen, wier vergelijking den vorm

$$sX + tY = \varepsilon$$

heeft, en die door twee of meer wortels van de afgeleide gaan, voor het onderzoek, dat wij ons voorstellen, van veel belang zijn. Het is met het opsporen en nader onderzoeken van die lijnen dat wij ons nu gaan bezighouden, en wel in de eerste plaats met die, welke door alle drie de wortels van de afgeleide gaan.

Is

$$sX + tY = \varepsilon \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (23)$$

de vergelijking van zulk eene lijn, dan moet

$$sX_1 + tY_1 = \varepsilon, \quad sX_2 + tY_2 = \varepsilon, \quad sX_3 + tY_3 = \varepsilon \quad \ldots \quad (24)$$

zijn, waaruit door eliminatie volgt:

$$X_3 Y_2 - Y_3 X_2 + X_1 Y_3 - Y_1 X_3 + X_2 Y_1 - Y_2 X_1 = 0,$$

en hiervoor kan men blijkens (21) ook schrijven:

$$I.P = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (25)$$

Aan deze vergelijking kan op tweeërlei wijze worden voldaan, in de eerste plaats door $I = 0$. De drie wortels liggen dan in eene rechte lijn; bij den aangenomen stand van het coördinatenstelsel zijn ze dan alle reëel. Wij kunnen, zonder aan de algemeenheid te kort te doen, nu aannemen, dat $\omega = 0$ en a niet kleiner dan $2p$ is; de betrekkelijk ligging der wortels is dan zooals in fig. 5 is aangewezen. Daar de coëfficiënten A en B van (3) in dit geval reëel zijn, is de x-as een tak van de lijn (23). De vergelijking van die lijn is hier:

$$Y = 0$$

of

$$x^3 y - y^3 x - xy(k^2 + km + m^2) + (k+m) kmy = 0, \quad . \quad . \quad (26)$$

welke kan worden ontbonden in

$$y = 0$$

en

$$x(x^2 - y^2) - x(k^2 + km + m^2) + (k + m) km = 0.$$

Zooals wij vooruit konden weten, heeft deze lijn tot asymptoten de beide assen en de lijnen, die de hoeken tusschen de assen middendoordeelen. Geen van de asymptoten kan den bijbehoorenden tak snijden, immers voor $x = \pm y$ vindt men slechts twee snijpunten nl.:

$$x = 0, \qquad y = 0 \qquad \text{en} \qquad x = \pm y = \frac{km(k + m)}{k^2 + km + m^2}$$

en de y-as snijdt de kromme alleen in den oorsprong. De tak, die de y-as tot asymptoot heeft, heeft een buigpunt op oneindigen afstand.

Is $k = 0$ dan is de vierde-machtsvergelijking van tweede-machtsvorm en de lijn (26) gaat over in de twee assen en eene gelijkzijdige hyperbool.

Het geval, dat twee wortels der afgeleide samenvallen, laten wij voor het oogenblik buiten beschouwing.

6. Aan de vergelijking (25) kan in de tweede plaats voldaan worden door

$$P = 0,$$

welke vergelijking blijkens (17), (19) en (20) ook in een der volgende vormen kan geschreven worden:

$$p^4(1 - {}^4/_3 \sin^2 \omega) - {}^1/_2 p^2 a^2 + {}^1/_{16} a^4 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

$$a^3 \cos K + b^3 \cos L + c^3 \cos M = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

$$6R^2 = a^2 + b^2 + c^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

Men ziet dus, dat dit geval zich voordoet als 6 maal het vierkant van de straal des omgeschreven cirkels van driehoek KLM gelijk is aan de som van de kwadraten der drie zijden. Uit (28) blijkt, dat de driehoek dan altijd stomphoekig moet zijn.

Om een overzicht te bekomen van de vormen, die deze driehoek hierbij kan aannemen, beschouwen wij (27) als de vergelijking eener kromme op pool-coördinaten, waarvan de pool in het midden der zijde a ligt en de as met die lijn samenvalt. Men bekomt dan eene kromme lijn als in fig. 6 is voorgesteld en elke driehoek door de twee punten L en M en een willekeurig punt van de kromme gevormd zal aan de voorwaarde voldoen.

Men kan zich hierbij bepalen tot den tak LPM: de punten der andere takken geven driehoeken met de daardoor gevondene gelijkvormig zijn. Dit kan men reeds daaruit opmaken, dat men voor a altijd de grootste zijde nemen kan, maar het blijkt analytisch gemakkelijk, als men de pool naar L verplaatst door de substitutie

$$p \cos \omega = p' \cos \omega' + {}^1/_2 a, \quad p \sin \omega = p' \sin \omega'.$$

Men vindt dan voor de nieuwe vergelijking:

$$p'^2 + 2\, a p' \frac{3 - 2 \sin^2 \omega'}{3 - 4 \sin^2 \omega'} + a^2 = 0.$$

Trekt men dus uit L eene willekeurige lijn LPP', dan is LM steeds middenevenredig tusschen LP en LP', waaruit de gelijkvormigheid der driehoeken LPM en LMP' volgt.

De grootste waarde, die $\angle LPM$ kan hebben, is 120^0 namelijk als P met L of M samenvalt; de kleinste waarde heeft die hoek, als de driehoek gelijkbeenig is, n.l. $111^0 28' 15''$. Deze grenswaarden verschillen slechts weinig, zoodat de boog LPM niet veel van een cirkelboog verschilt.

De vergelijking (25) in aanmerking nemende, vindt men voor de vergelijking der kromme (23) in dit geval

$$(X_3 - X_2)(Y - Y_1) = (Y_3 - Y_2)(X - X_1).$$

Door invoering van de in N^0. 2 en 3 gevonden waarden en met behulp van (27), kan men deze vergelijking herleiden tot

$$Y \cos 3\omega - X \sin 3\omega = {}^2/_9\, p^2 a^2 \sin\omega - {}^1/_{18}\, a^6 \sin\omega. \quad . \; . \; (30)$$

Na invoering van de waarden van X en Y heeft men een vergelijking, die het analytisch onderzoek der kromme mogelijk maakt. Zij wordt aanmerkelijk vereenvoudigd als de driehoek $K\,L\,M$ gelijkbeenig is. In dat geval is $\omega = 90^0$, $a^2 = {}^4/_3\,(3 + 2\sqrt{3})\,p^2$, en de vergelijking (30) gaat over in

$$x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + {}^4/_3(1+\sqrt{3})p^2(x^2-y^2) + \frac{16}{27}(5+3\sqrt{3})p^3x +$$
$$+ \frac{16}{27}(2+\sqrt{3})p^4 = 0. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (31)$$

De vier takken dezer kromme moeten noodzakelijk samenhangen, daar anders geen drie dubbelpunten konden bestaan, zonder dat hetzelfde paar takken elkaar tweemaal sneedt. Hierbij zijn echter nog twee gevallen mogelijk: eenzelfde tak kan de drie andere snijden, of de eerste kan door den tweeden, de tweede door den derden, en deze weer door den vierden gesneden worden. Dat zich hier het laatste geval moet voordoen, blijkt daaruit, dat alles hier symmetrisch moet zijn met betrekking tot de x-as, en deze lijn geen tak van de kromme is. Dit alles wordt bevestigd door het analytisch onderzoek der vergelijking. In het punt $x = -{}^2/_3\, p$, $y = 0$ vindt men twee takken, die de x–as onder hoeken van 45^0 snijden. Evenzoo vindt men twee elkaar loodrecht snijdende takken in elk der punten $x = {}^1/_3\, p$, $y = \pm\, {}^1/_3\, p \sqrt{(9 + 6\sqrt{3})}$. De asymptoten maken met elkaar hoeken van 45^0 en met de assen van $22^1/_2{}^0$. De lijn is afgebeeld fig. 7.

7. Wanneer de coëfficiënten der vergelijking (3) geleidelijk worden veranderd, en dus de wortels der vergelijking (4) even als de hier beschouwde lijn een geleidelijke verplaatsing ondergaan, dan kan de samenhang van de takken dezer lijn alleen veranderen op het oogenblik, dat de lijn begint of ophoudt door een wortel van de afgeleide verge-

lijking te gaan. Blijft nu de lijn voortdurend door de drie wortels van de afgeleide gaan, dan kan er dus geen verandering in den samenhang harer takken plaats grijpen, en deze blijft derhalve voor alle gevallen, waarin aan de vergelijking (27) is voldaan dezelfde. Het spreekt van zelf, dat de symmetrie met betrekking tot de x-as ophoudt, als de driehoek niet meer gelijkbeenig is.

De zooeven gemaakte opmerking is algemeen: de samenhang van de takken eener lijn $s X + t Y = \varepsilon$ kan, niet alleen wanneer de wortels der afgeleide vergelijking onveranderd blijven, maar ook, als die geleidelijk veranderen, uitsluitend dan eene verandering ondergaan, als twee of meer wortels van de afgeleide samenvallen, of als de lijn begint of ophoudt door een wortel van de afgeleide te gaan. Om dit in te zien, heeft men slechts op te merken, dat in het punt, waar de verandering plaats heeft, het aantal samenhangende takken vermeerderen of verminderen moet.

8. Ingeval

$$I \, . \, P \gtrless 0$$

is, kan de lijn

$$s X + t Y = \varepsilon$$

niet door al de drie wortels van de afgeleide vergelijking gaan. Er zijn dan drie van die lijnen mogelijk, ieder door twee van die punten gaande. Daarbij kunnen zich echter twee verschillende gevallen voordoen: door ieder van de twee wortels kunnen twee takken gaan, terwijl het eene paar geheel van het andere afgezonderd ligt, of een tak kan door de beide wortels gaan, en in elk van die punten door een tweeden tak gesneden worden, terwijl de vierde tak door geen enkelen wortel van de afgeleide vergelijking gaat. Eene lijn, waarbij zich het laatste geval voordoet, zullen wij in het vervolg eene *verdeelende lijn* noemen.

9. Wij wijden nu vooreerst onzen aandacht aan het geval, dat de driehoek KLM gelijkzijdig is. Wij hebben dan $\omega = 90^0$ $a = {}^2/_3\, p \sqrt{3}$, en uit de in N^0. 2 afgeleide betrekkingen volgt:

$$X_1 = -\frac{16}{27}p^4,\ Y_1 = 0,\ X_2 = X_3 = \frac{8}{27}p^4,\ Y_2 = -Y_3 = \frac{8}{27}p^4\sqrt{3}.$$

$$X = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + \frac{32}{27}p^3x,\quad Y = 4x^3y - 4xy^3 + \frac{32}{27}p^3y.$$

De lijn

$$X(Y_2 - Y_3) - Y(X_2 - X_3) = X_3Y_2 - Y_3X_2$$

gaat hier over in

$$X = X_3$$

of

$$x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + \frac{32}{27}p^3x = \frac{8}{27}p^4,$$

of in poolcoördinaten

$$r^4 \cos 4\varphi + \frac{32}{27}p^3 r \cos\varphi = \frac{8}{27}p^4. \quad \ldots\ldots \quad (32)$$

Deze lijn moet door de beide imaginaire wortels gaan en symmetrisch zijn met betrekking tot de x-as. Voor $\varphi = 0$ heeft r twee reëele waarden, waaruit volgt, dat er een tak moet zijn, die de beide imaginaire wortels verbindt. De lijn is dus eene *verdeelende lijn*. De takken, die de x-as snijden, kunnen niets anders zijn dan de tak die de beide wortels verbindt en de vrije tak. Het verder analytisch onderzoek der vergelijking bevestigt dit. De kromme is voorgesteld in fig. 8. Hare takken zijn LM, FG, HI en EJ.

Daar de figuur in dit geval door eene wenteling van 120° om den oorsprong niet veranderen kan, moeten er door de punten K en M en door de punten L en M nog twee verdeelende lijnen gaan, die met (32) gelijk en gelijkvormig zijn. Werkelijk vindt men door substitutie van de gevonden waarden in de vergelijkingen

$$X(Y_3 - Y_1) - Y(X_3 - X_1) = X_1Y_3 - Y_1X_3,$$

$$X(Y_1 - Y_2) - Y(X_1 - X_2) = X_2Y_1 - Y_2X_1,$$

en na invoering van poolcoördinaten

$$\left.\begin{array}{l} r^4 \cos 4(\varphi + 120^0) + \frac{32}{27} p^3 r \cos(\varphi + 120^0) = \frac{8}{27} p^4, \\ r^4 \cos 4(\varphi - 120^0) + \frac{32}{27} p^3 r \cos(\varphi - 120^0) = \frac{8}{27} p^4. \end{array}\right\} . \quad (33)$$

De samenhangende takken van een der drie verdeelende lijnen kunnen die van een der andere, behalve in het gemeenschappelijk dubbelpunt, niet snijden. Immers het geheele aantal snijpunten moet vier bedragen, het gemeenschappelijk dubbelpunt geldt voor twee, en op ieder der vrije takken moet een snijpunt liggen, terwijl deze, zooals uit de ligging dadelijk blijkt, elkander niet snijden kunnen *).

Uit het voorgaande volgt met behulp der figuur, dat de drie *verdeelende lijnen* het vlak in acht en twintig deelen verdeelen.

De waarde van P is in dit geval $\frac{128}{81} p^6$, en dus positief.

10. Stellen wij ons nu voor, dat de ligging van de wortels der afgeleide vergelijking langzamerhand veranderd wordt, echter zoo, dat geen twee wortels samenvallen, en geen van de verdeelende lijnen ooit door al de drie wortels van de afgeleide gaat. Dan zal in de eerste plaats P niet van teeken veranderen. Verder zal de samenhang tusschen de verschillende deelen eener zelfde lijn onveranderd blijven, en er kunnen geen nieuwe snijpunten ontstaan of snijpunten verdwijnen tusschen de takken der verschillende verdeelende lijnen. Om dit laatste te doen zien, is het voldoende aan te toonen dat een willekeurige asymptoot van een der drie krommen altijd binnen denzelfden hoek moet blijven door twee asymptoten eener andere verdeelende lijn gevormd.

---

*) Dit blijkt ook uit de redeneering in N°. 4, die eigenlijk neerkomt op het bewijs, dat twee takken of twee groepen van samenhangende takken van verschillende lijnen van den vorm $s X + t Y = \varepsilon$, die door een zelfden wortel van de afgeleide gaan, elkaar niet snijden kunnen, behalve in den wortel.

Dit laatste zal bewezen zijn, zoodra gebleken is, dat nooit de asymptoten van twee der verdeelende lijnen kunnen samenvallen.

Om dit bewijs te leveren, merken wij op, dat de termen van den hoogsten graad der drie vergelijkingen aldus kunnen worden geschreven:

$$r^4 \cos 4\varphi (Y_3 - Y_2) - r^4 \sin 4\varphi (X_3 - X_2),$$

$$r^4 \cos 4\varphi (Y_1 - Y_3) - r^4 \sin 4\varphi (X_1 - X_3),$$

$$r^4 \cos 4\varphi (Y_2 - Y_1) - r^4 \sin 4\varphi (X_2 - X_1),$$

of na substitutie van (10) en na weglating van een constanten factor:

$$r^4 \sin (3\omega - 4\varphi), \qquad r^4 \sin (3\omega_1 + 4\mu_1 - 4\varphi),$$
$$r^4 \sin (3\omega_2 + 4\mu_2 - 4\varphi)$$

De hoeken, die de asymptoten met de x-as maken, zijn dus voor de drie lijnen respectievelijk:

$$^3/_4\,\omega + \frac{n}{4}\pi, \qquad ^3/_4\,\omega_1 + \mu_1 + \frac{n'}{4}\pi, \qquad ^3/_4\,\omega_2 + \mu_2 + \frac{n''}{4}\pi$$

waarin n, n' en n'' positieve of negatieve geheele getallen voorstellen. Zullen dus b. v. van de beide eerste de asymptoten samenvallen, dan moet

$$^3/_4\,\omega + \frac{n}{4}\pi = {}^3/_4\,\omega_1 + \mu_1 + \frac{n'}{4}\pi,$$

of

$$3\omega = 3\omega_1 + 4\mu_1 + (n' - n)\pi$$

zijn, en hieruit zou volgen:

$$\frac{Y_3 - Y_2}{X_3 - X_2} = \frac{Y_1 - Y_3}{X_1 - X_3},$$

of

$$I.P = 0,$$

welk geval wij hebben uitgesloten.

11. Op twee wijzen kan nu de toestand veranderen, vooreerst door dat twee wortels samenvallen. Zet men dan echter de verandering voort, zoodat de twee samenvallende wortels hunne beweging in denzelfden zin voortzetten, dan kan de nieuwe vorm, dien de figuur heeft aangenomen weer geleidelijk en zonder een overgangstoestand te passeeren in den vorm overgebracht worden, waarbij de driehoek KLM gelijkzijdig is. Na het uiteenwijken der wortels treedt dus weer dezelfde wijze van samenhang tusschen de takken der verdeelende lijnen op, en dezelfde betrekkelijke ligging dier takken, die voor het samenvallen bestond.

P is op het oogenblik dat de twee wortels samenvielen gelijk aan nul geweest, maar heeft bij die gelegenheid haar teeken niet veranderd. Immers er heeft bij die gelegenheid slechts een verwisseling van l met m of, wat op hetzelfde neerkomt, eene teekenverandering van a plaats gehad, welke grootheid in P slechts in evene machten voorkomt *). Op het overgangsgeval zelf komen wij later terug.

12. Maar nog op eene andere wijze kan de toestand eene verandering ondergaan, namelijk door dat de driehoek KLM tijdelijk een der vormen heeft aangenomen, waarbij het in N⁰. 6 behandelde bijzondere geval plaats heeft, en daarna de stompe hoek grooter geworden is, dan bij dezelfde verhouding der omliggenden zijden met dat bijzonder geval zou overeenkomen. Hierdoor is P van teeken veranderd. Liggen namelijk de drie punten K, L en M op een rechte lijn, eene ligging waartoe zij nu kunnen geraken zonder dat P weer de waarde nul bereikt, dan is $\omega = 0$ en dus

$$P = {}^1/_3\, a^2 (2p^2 - {}^1/_2\, a^2)^2 = - {}^4/_3\, a^2 b^2 c^2 ,$$

zoodat P negatief is en negatief blijft, zoolang de figuur niet weer in den vroeger beschreven toestand terugkeert. De samenhang tusschen de takken der verdeelende lijnen

---

*) I is hierbij ook van teeken veranderd, maar men kan die grootheid weer positief maken door L en M en l en m met elkaar te verwisselen, waardoor a weer van teeken verandert.

kan nu veranderd zijn, daar voor een oogenblik alle drie die lijnen samenvielen. Hoe echter de samenhang ook zij, deze moet nu steeds dezelfde blijven, zoolang niet weer een van de overgangstoestanden is overschreden. Bovendien kan die samenhang niet veranderd zijn, nadat het overgangsgeval is gepasseerd, waarbij de drie wortels in een rechte lijn liggen, want de vormen, die de figuur voor en na dien overgang kan aannemen, zijn natuurlijk twee aan twee symmetrisch. Ook het teeken van P kan daarbij niet zijn veranderd, daar P niet gelijk aan nul geweest is*). De slotsom is, dat in al de gevallen waarin P negatief is, de samenhang tusschen de takken der beschouwde lijnen dezelfde moet zijn.

Er blijft dus nog slechts over dien samenhang in een bijzonder geval te onderzoeken.

13. Het bijzondere geval, dat wij ter onderzoeking kiezen is dat, waarbij

$$b = c \text{ en } a^2 = \frac{4p^2}{4\sqrt[3]{2} - 5}$$

is. Wij vinden voor dat geval

$$X_1 = \frac{8}{27}\,\frac{2\sqrt[3]{2} - 1}{4\sqrt[3]{2} - 5}\,p^4,$$

$$X_2 = X_3 = \frac{8}{27} \cdot \frac{-19 + 10\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{4}}{4\sqrt[3]{2} - 5}\,p^4,$$

$$Y_1 = 0, \qquad Y_2 = -Y_3 = \frac{8p^4}{3(4\sqrt[3]{2} - 5)}\sqrt{\frac{1}{4\sqrt[3]{2} - 5}},$$

$$X_3 - X_1 = -(Y_3 - Y_1)\sqrt{3}, \qquad X_1 - X_2 = (Y_1 - Y_2)\sqrt{3},$$

terwijl men heeft:

$$X = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + \frac{8}{3} \cdot \frac{2 - \sqrt[3]{2}}{4\sqrt[3]{2} - 5}\,p^2(x^2 - y^2) + \frac{32}{27} \cdot \frac{1 + \sqrt[3]{2}}{4\sqrt[3]{2} - 5}\,p^3 x.$$

---

*) Omtrent het teeken van I geldt dezelfde opmerking als in de vorige noot is gemaakt.

$$Y = 4(x^3y - y^3x) + \frac{16}{3}\cdot\frac{2-\sqrt[3]{2}}{4\sqrt[3]{2}-5}p^2xy + \frac{32}{27}\cdot\frac{1+\sqrt[3]{2}}{4\sqrt[3]{2}-5}p^3y.$$

De vergelijkingen der drie lijnen, die als verdeelende lijnen in aanmerking kunnen komen, zijn hier

$$X = X_3, \qquad X + Y\sqrt{3} = X_1, \qquad X - Y\sqrt{3} = X_1,$$

of na substitutie der bovenstaande waarde en invoering van poolcoördinaten

$$r^4\cos 4\varphi + \frac{8}{3}\cdot\frac{2-\sqrt[3]{2}}{4\sqrt[3]{2}-5}r^2p^2\cos 2\varphi + \frac{32}{27}\cdot\frac{1+\sqrt[3]{2}}{4\sqrt[3]{2}-5}rp^3\cos\varphi =$$
$$= \frac{8}{27}\cdot\frac{-19+10\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{4}}{4\sqrt[3]{2}-5}p^4, \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (34)$$

$$\left.\begin{array}{l} r^4\cos 4(\varphi - 120^0) + \frac{8}{3}\cdot\frac{2-\sqrt[3]{2}}{4\sqrt[3]{2}-5}r^2p^2\cos 2(\varphi + 120^0) + \\ + \frac{32}{27}\cdot\frac{1+\sqrt[3]{2}}{4\sqrt[3]{2}-5}rp^3\cos(\varphi - 123^0) = \frac{8}{27}\cdot\frac{2\sqrt[3]{2}-1}{4\sqrt[3]{2}-5}, \\ r^4\cos 4(\varphi + 120^0) + \frac{8}{3}\cdot\frac{2-\sqrt[3]{2}}{4\sqrt[3]{2}-5}r^2p^2\cos 2(\varphi - 128^0) + \\ + \frac{32}{27}\cdot\frac{1+\sqrt[3]{2}}{4\sqrt[3]{2}-5}rp^3\cos(\varphi + 120^0) = \frac{8}{27}\cdot\frac{2\sqrt[3]{2}-1}{4\sqrt[3]{2}-5}. \end{array}\right\} \; . \; . \; (35)$$

Men ziet, dat de twaalf asymptoten dezer drie kromme lijnen, evenals in het geval van den gelijkzijdigen driehoek, de vier rechte hoeken om den oorsprong in hoeken van 15^0 verdeelen. Stelt men in (34) $\varphi = 0$, dan bekomt men eene vergelijking in r, die geen enkelen reëelen wortel heeft. Dit blijkt onmiddelijk, als men den eersten term weglaat: daardoor ontstaat eene tweede-machtsvergelijking met imaginaire wortels, waarvan het eerste lid steeds positief is, en daar ook de eerste term altijd positief blijft, kan het eerste lid der op nul herleide vergelijking niet van teeken veranderen of nul worden. De x-as snijdt alzoo deze kromme niet; er bestaat dus geen tak, die door de beide imaginaire wortels gaat. De kromme is derhalve geen verdeelende lijn, maar bestaat uit twee paar takken, waarvan die van hetzelfde paar elkaar telkens in een van de imaginaire wortels snijden. De kromme kan als voor ons doel van geen belang verder buiten beschouwing blijven.

14. Onderzoeken wij nu de eerste der krommen (35). Voor $\varphi = 0$ vinden wij voor r twee wortels, gelijk aan $-\frac{2}{3}p$ en twee imaginaire wortels. De x-as snijdt dus de kromme nergens anders dan in K. Hiermede is reeds uitgemaakt, dat de kromme eene verdeelende lijn moet zijn. Zij kan namelijk niet bestaan uit twee takken, gaande door den reëelen wortel en twee takken gaande door M (fig. 9). De laatstgenoemde twee takken zouden dan moeten behooren bij de vier halve asymptoten met dat punt aan dezelfde zijde van de x-as gelegen. Voor de beide andere takken zouden dan de andere vier halve asymptoten overblijven, en dit kan onmogelijk zonder dat minstens een der takken de x-as snijdt.

Gaan wij nu na hoe de verschillende takken over de verschillende halve asymptoten verdeeld zijn, en nummeren wij daartoe de halve asymptoten van I tot VIII, zooals in fig. 9 is aangewezen.

KM	heeft	tot	asymptoten	IV en VII,
$F'G'$	»	»	»	VI en VIII,
$H'I'$	»	»	»	I en V,
$E'J'$	»	»	»	II en III.

Dit alles blijkt uit de volgende opmerkingen: Laat men de wortels der afgeleide nog een weinig van plaats veranderen, zoodat zij alle op de y-as komen te liggen, dan moet de tak $H'I'$ even als de asymptoot I—V in de x-as overgaan. Aan de negatieve zijde liggen nu nog alleen $F'G'$ en het eene uiteinde van KM, het laatste tusschen de twee uiteinden des eerstgenoemden taks; deze heeft dus VI en VIII, gene VII tot asymptoten. Van de drie overblijvende moeten nu twee op elkaar volgende bij den tak $E'J'$ behooren dus II en III of III en IV, zoodat voor MK II of IV overblijft. Neemt men echter in aanmerking, dat MK den tak KL van de tweede lijn (35), wiens bestaan uit de symmetrie der figuur volgt niet snijden kan (zie de noot op N^0. 8), dan blijkt, dat deze tak bij IV, en dus de vrije tak $E' J'$ bij II en III behoort. Dit alles was natuurlijk ook uit eene discussie der eerste vergelijking (35) af te leiden. Na al het voorgaande is deze discussie voor ons doel overbodig. Alleen is het noodig voor het teekenen der figuur eenige punten te bepalen en vooral na te gaan, welke takken door de bijbehoorende asymptoten gesneden worden. Voor de asymptoten II—VI en III—VII is dit niet mogelijk, zooals zonder nader onderzoek blijkt. De beide andere asymptoten moeten in de eene of in de andere richting den bijbehoorenden tak snijden. Door φ successivelijk gelijk aan $7^1/_2{}^0$ en $142^1/_2{}^0$ te stellen, zal men vinden, dat de halve asymptoten V en IV de bijbehoorende takken snijden. Hierbij is natuurlijk in het oog te houden dat, wat ten dezen opzichte voor dit bijzonder geval geldt, nog niet waar behoeft te zijn voor al de andere gevallen tot dit type behoorende.

15. Wij onderstelden tot nog toe, dat geen twee wortels van de afgeleide vergelijking samen vielen. Is dat wel het geval, dan kunnen wij b. v. aannemen, dat $b = 0$ is, waardoor men heeft

$$I = P = 0.$$

De vergelijking der verdeelende lijn is in dit geval (zie N^0. 5)

$$4\,(x^3\,y - y^3\,x) - {}^{16}/_3\,x\,y\,p^2 - \frac{64}{27}\,p^3\,y = 0\,, \quad . \;.\; . \; (36)$$

en bestaat dus uit de x-as en eene kromme van den derden graad

$$x^3 - y^2\,x - {}^4/_3\,p^2\,x - {}^{16}/_{27}\,p^3 = 0.$$

De laatste heeft in den enkelvoudigen wortel een enkelen tak, en in den dubbelen wortel twee takken, die elkaar en de x-as onder hoeken van 60^0 snijden. Uit de ligging der takken volgt onmiddelijk, dat geen tak door de bijbehoorende asymptoot gesneden kan worden. De kromme is afgebeeld in fig. 10.

Men kan in dit geval elke lijn, wier vergelijking den vorm heeft

$$sX + tY = \varepsilon,$$

en die door den dubbelen wortel der afgeleide gaat, als eene verdeelende lijn aanmerken, alleen de zooeven beschouwde is echter voor ons van belang. Zij verdeelt het z-vlak in acht deelen.

Vallen de drie wortels samen, dan wordt $p = 0$ en de vergelijking (36) gaat over in

$$xy(x^2 - y^2) = 0.$$

Deze vergelijking stelt vier rechte lijnen voor, die elkaar in den oorsprong onder hoeken van 45^0 snijden. Elk ander stelsel van vier zulke lijnen door hetzelfde punt gaande, heeft echter evenveel recht op de naam van verdeelende lijn, zooals reeds daaruit blijkt, dat het coördinatenstelsel, wat de richting der assen betreft, volkomen onbepaald is.

16. Het voorgaande wordt samengevat in de volgende tabel.

A. $I \gtrless 0.$

I. P positief.

Er zijn drie verdeelende lijnen, die het z-vlak in acht en twintig deelen verdeelen (fig. 8).

II. P negatief.

Er zijn twee verdeelende lijnen, wier takken het z-vlak in zestien deelen verdeelen (fig. 9).

III. $P = 0.$

Er is éene verdeelende lijn, die door al de drie wortels der afgeleide gaat. Twee takken gaan ieder door twee van die punten en de twee andere ieder door één. Het z-vlak wordt in acht deelen verdeeld (fig. 7).

B. $I = 0.$

I. P negatief.

De drie wortels liggen in eene rechte lijn, maar geen twee vallen er samen. Er is ééne verdeelende lijn, waarvan eenzelfde tak, de evengenoemde rechte lijn door de drie wortels gaat. Zij verdeelt het vlak in acht deelen (fig. 5).

II. $P = 0.$

α. $p \gtrless 0.$

Twee van de wortels der afgeleide vallen samen. Er zijn oneindig veel verdeelende lijnen, waarvan er ééne door de drie wortels gaat. Door den dubbelen wortel gaan drie, door den enkelen wortel twee takken. Het z-vlak wordt in acht deelen verdeeld (fig. 10).

β. $p = 0.$

Er zijn oneindig veel verdeelende lijnen. Zij bestaan ieder uit vier rechte lijnen, die het vlak om het punt, waar de drie wortels samenvallen, in acht gelijke deelen verdeelen.

17. Thans zullen wij nagaan, hoe de vier wortels der vergelijking (3) met elkaar door eindige Φ-lijnen zijn verbonden, wanneer zij in de verschillende deelen van het z-vlak gelegen zijn. Al de verschillende wijze van verbinding tusschen de wortels eener vierde-machtsvergelijking en hare afgeleiden, die men zich denken kan, zijn in fig. 11 a—z, schematisch voorgesteld, op eene wijze, die wel geen nadere toelichting zal behoeven. Alleen zij vermeld dat A, B, C en D de wortels der vergelijking K, L en M, die van hare afgeleide voorstellen, en dat, waar twee of meer wortels der vierde-machtsvergelijking samenvallen, de daarmede tevens samenvallende wortels der afgeleide vergelijking niet zijn aangeduid.

Wij beginnen ons onderzoek met het geval A I, en onderstellen eenvoudigheidshalve, dat de driehoek KLM gelijkzijdig is; voor alle andere vormen tot dit geval behoorende, is de toestand natuurlijk volkomen dezelfde. Beginnen wij met $\gamma + i\delta = 0$ te onderstellen. Eén wortel b. v. A ligt dan in den oorsprong; de drie andere zijn er mede door rechte Φ-lijnen verbonden, zooals uit de vergelijking gemakkelijk is op te maken en ook uit de symmetrie der figuur volgt. De wortels A, B, C en D liggen dan respectievelijk in de deelen van het z-vlak met 1, 8, 15 en 22 gemerkt. Zoolang A nu binnen 1 blijft, zullen de drie andere respectievelijk binnen de deelen 8, 15 en 22 blijven, en met A verbonden zijn. Wij hebben dus de verbinding a (fig. 11). Gaat A naar 2, dan gaat B naar 9, C naar 16 en D naar 23, want, als een van de wortels een van de verdeelende lijnen overschrijdt, moeten de andere het ook doen. Bij dezen overgang heeft geen verandering in de verbinding plaats gehad. Op het oogenblik van de overgang bestond de verbinding c, daarna weder de verbinding a. Gaat nu echter A naar 3, dan gaat B naar 10, C naar 17 en D naar 24. De verbinding van A met C is nu opgeheven, maar B is met C verbonden geworden, zoodat nu de verbinding b bestaat. Tijdens den overgang had de verbinding d plaats. Zoo kan men achtereenvolgens A nog in 4, 5, 6 en 7 brengen, waardoor B in 11, 12, 13 en 14, C in 18, 19, 20 en 21 en D in 25, 26, 27 en 28 komt. Men zal bevinden, zooals trouwens ook uit de symmetrie der figuur volgt, dat hierbij beurtelings de verbindingswijzen a en b optreden, terwijl bij den overgang steeds de verbinding d bestaat. Als algemeene regel vindt men hierbij: Ligt een van de wortels binnen den kromlijnigen driehoek KLM of in een der aangrenzende deelen, dan bestaat de verbinding a. In alle andere gevallen, waarin zij niet op een verdeelende lijn liggen, heeft de verbinding b plaats. Vallen twee van de wortels b. v. in K samen, dan liggen de beide andere in de snijpunten R en W, en het is de verbinding r die zich voordoet.

18. Beschouwen wij thans het tweede hoofdgeval A II (fig. 9).

Beginnen wij weer met een van de wortels A in den oorsprong aan te nemen, dan moet b. v., als wij KLM gelijkbeenig onderstellen, C op de x-as in 9 gelegen zijn, B en D liggen dan in 5 en 13. Dat B b. v. niet in 6 kan liggen, blijkt daaruit, dat A met B moet kunnen samenvallen in L, en om dat punt te bereiken over $H' I'$ zou moeten gaan, maar dan moet B daarbij ook een tak van dezelfde verdeelende lijn passeeren Evenzoo voor D. De wortel A moet met de drie andere wortels verbonden zijn, want eene verbinding $B-C$ b. v. kan niet bestaan, omdat de verbindende lijn een samenhangende groep takken van dezelfde verdeelende lijn tweemaal zou moeten snijden. Gaat A naar 2, dan gaan B, C en D naar 6, 10 en 14. De verbinding $D-A$ is door $D-C$ vervangen en het is nu de verbinding b die plaats heeft. Bij de overgang bestond de verbinding d. Brengt men A nog naar 3 en 4. dan zal men bevinden, dat behalve op het oogenblik van overgang steeds de verbinding b blijft bestaan, waarbij echter de volgorde der wortels telkens verandert. Tijdens den overgang van 2 naar 3 of van 3 naar 4 bestaat de verbinding e. Maar men kan ook A van 2 naar 7 doen gaan, en bij deze overgang treedt de verbinding f op.

Vallen twee wortels in K samen, dan is r de verbindingstoestand, die daarbij plaats heeft; de twee andere wortels liggen namelijk dan in R en S. Geschiedt hetzelfde in L of M, dan doet zich de verbinding s voor.

19. In het overgangsgeval A III (fig. 7) kunnen de wortels in 1, 3, 5 en 7 of in 2, 4, 6 en 8 liggen. In het eerste geval is a, in het tweede b de optredende wijze van verbinding. Deze gevallen kunnen op twee verschillende wijzen in elkaar overgaan, n.l. doordat een wortel van 1 naar 2 of van 1 naar 4 gaat. In het eerste geval doet zich de toestand g, in het tweede de toestand h voor. Vallen twee wortels samen, dan is t of u de verbinding, die zich vertoont, naarmate het samenvallen in K of in een der punten L of M plaats heeft.

In het geval B I (fig. 5) komt steeds de verbinding b voor, zoolang de wortels niet op de verdeelende lijn liggen. Is dit wel het geval, dan zijn er vier verschillende overgangsgevallen mogelijk, naarmate de wortels over de verschillende takken verspreid zijn, namelijk i, j, k en l. Vallen twee wortels samen, dan heeft men r, w of x, naarmate het samenvallen in K, M of L plaats heeft. In het bijzondere geval dat $k = 0$ is, kan de verbinding x' voorkomen. Wij toonen dit later nader aan.

In het geval B II α (fig. 10) bestaat in het algemeen de verbinding m, maar er zijn drie overgangsgevallen mogelijk, n.l. n, o en p, die zich zullen voordoen, naarmate een wortel uit 1 naar 6, naar 2 of naar 8 gaat. Vallen twee wortels samen, dan bestaat de verbinding y, en als drie wortels samenvallen de verbinding z.

In het geval B II β heeft men de verbinding q, tenzij al de wortels samen mochten vallen.

20. Zullen in het geval A I de wortels van de vergelijking (3) op een van de verdeelende lijnen liggen, dan moet een van de drie uitdrukkingen

$$\left.\begin{array}{l}\gamma(Y_3 - Y_2) - \delta(X_3 - X_2) - (X_2 Y_3 - Y_2 X_3), \\ \gamma(Y_1 - Y_3) - \delta(X_1 - X_3) - (X_3 Y_1 - Y_3 X_1), \\ \gamma(Y_2 - Y_1) - \delta(X_2 - X_1) - (X_1 Y_2 - Y_1 X_2)\end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; (a)$$

gelijk aan nul zijn, en daar deze uitdrukkingen ten opzichte van γ en δ van den eersten graad zijn, is het gemakkelijk in te zien, dat zij van teeken zullen veranderen, telkens als de wortels de overeenkomstige verdeelende lijn overschrijden.

Stellen wij $\gamma = \Delta \cos \lambda$, $\delta = \Delta \sin \lambda$, dan kunnen wij blijkens (10) en (22) voor deze uitdrukkingen ook schrijven

$$\left.\begin{array}{l}{}^2/_3 \Delta p a^3 \cos(\lambda - 3\omega) + {}^1/_9 I(P + {}^8/_3 a^4 b c \cos K), \\ {}^2/_3 \Delta p_1 b^3 \cos(\lambda - 3\omega_1 - 4\mu_1) + {}^1/_9 I(P + {}^8/_3 a b^4 c \cos L), \\ {}^2/_3 \Delta p_2 c^3 \cos(\lambda - 3\omega_2 - 4\mu_2) + {}^1/_9 I(P + {}^8/_3 a b c^4 \cos M).\end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; (a)$$

Men zou met deze drie uitdrukkingen als wortels eene derde-machtsvergelijking kunnen samenstellen, wier coëfficiënten symmetrisch zouden zijn, ten opzichte van de wortels der afgeleide vergelijking. Men mag hieruit echter niet besluiten, dat de coëfficiënten dier vergelijking rationeel in de reëele en imaginaire deelen van de coëfficiënten der vergelijking (3) zouden kunnen worden uitgedrukt.

Als een van de wortels van (3) gelijk aan nul is, en de driehoek KLM is scherphoekig, dan zijn de drie uitdrukkingen (a) alle positief. Dit zal zoo blijven, zoolang een wortel binnen het gedeelte 1 van het z-vlak blijft (fig. 8). Is de driehoek stomphoekig, dan kan het gebeuren, dat de oorsprong niet binnen het gedeelte 1 ligt, maar toch zullen binnen dat gedeelte altijd de drie uitdrukkingen (a) positief zijn, zooals men gemakkelijk inziet, als men dit geval langzamerhand uit dat van den scherphoekigen driehoek laat ontstaan. Om in een van de deelen 2, 11 of 20 te komen, moet de wortel uit 1 ééne verdeelende lijn passeeren, ligt dus een van de wortels in een van die deelen, dan zullen twee van de uitdrukkingen (a) positief en één negatief zijn. Wij besluiten hieruit, dat, zal de verbinding fig. 11 a tusschen de wortels der vergelijking (3) bestaan, er onder de uitdrukkingen (a) meer positieve dan negatieve moeten zijn. Zal de verbinding b zich voordoen, dan moet een van de wortels in 10, 12 of 21 liggen, en om van 1 uit daar te komen, moeten twee verdeelende lijnen worden gepasseerd, en er zullen dus in dat geval onder de uitdrukkingen (a) meer negatieve dan positieve zijn. Alle drie kunnen zij niet negatief worden, daar hunne som gelijk is aan $I \times P$, welke uitdrukking hier positief is.

Is een der drie uitdrukkingen (a) gelijk aan nul, dan kunnen de twee andere positief of verschillend van teeken zijn. In het eerste geval ligt een wortel op de grens van 1, en bestaat de verbinding c (fig. 11), in het tweede geval is het de verbinding d die zich voordoet.

Zijn er onder de uitdrukkingen (a) twee die verdwijnen, dan liggen twee van de wortels van (3) in K, L of M, en wij hebben de verbinding r.

21. In het geval A II zijn er slechts twee verdeelende lijnen n. l. die welke aan de beide laatste uitdrukkingen (a) beantwoorden. Wij hebben dus hier voornamelijk met die beide uitdrukkingen te maken. In den oorsprong, dus in het geheele met 1 gemerkt deel van het z-vlak (fig. 9),

zijn beide positief *), maar ook alleen, wanneer binnen 1 een wortel van (3) ligt, is dit het geval, terwijl ook alleen in dit geval de verbinding *a* (fig. 11) bestaat. Ligt een van de wortels in 2 of in 16, dan hebben de beide laatste uitdrukkingen *a* verschillende teekens, en bestaat de verbinding *b*. Dit laatste is ook het geval als een van de wortels in 3 ligt, in welk geval de beide laatste uitdrukkingen (*a*) negatief zijn. Men zou hier nog onderscheid kunnen maken tusschen de zigzagsgewijze verbinding, waarbij de wortels in de volgorde waarin zij verbonden zijn beurtelings ter weerszijden van de gebroken kromme lijn *KLM* liggen, en de verbinding, waarbij dit niet het geval is. De eerste heeft plaats, als de teekens der uitdrukkingen (*a*) ongelijk zijn, de tweede, als zij beide negatief zijn.

Er zijn in dit geval drie verschillende overgangsvormen, n. l.: *d*, *e* en *f*. In elk van deze drie gevallen is een der beide uitdrukkingen (*a*) gelijk aan nul. In het eerste is de overblijvende positief in de beide andere negatief. Wil men een algebraïsch kenmerk, dat tusschen de beide laatste gevallen beslist, dan moet men zijn toevlucht nemen tot de eerste der uitdrukkingen (*a*). Deze zal namelijk positief zijn, als de verbinding *e*, negatief, als de verbinding *f* bestaat. Om dit in te zien, heeft men zich slechts den loop der kromme (34) voor te stellen.

Zijn de beide laatste uitdrukkingen (*a*) gelijk aan nul, dan vallen twee wortels in *K* samen, en bestaat de verbinding *r*. Is het de eerste der uitdrukkingen (*a*), die tegelijk met een der andere verdwijnt, dan heeft het samen-

---

*) Men kan dit uitmaken door de waarden voor een bijzonder geval te berekenen, maar ook door dit geval uit het vorige te laten ontstaan. Beschouwt men dan een punt ergens in het deel 2 (fig. 8) op de x-as gelegen, en laat men nu de fig. 8 door fig. 7 heen in fig. 9 overgaan, dan ziet men, dat geen van de verdeelende lijnen gedurende de verandering door het beschouwde punt kan gaan, en de twee laatste uitdrukkingen (*a*) dus ook voor dat punt nooit van teeken kunnen veranderen. Het punt komt echter even als de oorsprong na de verandering in het deel 1 van fig. 9 te liggen, zoodat daar de beide uitdrukkingen positief zijn.

vallen der wortels in L of M plaats, en men heeft de verbinding s.

Bij dit alles is stilzwijgend ondersteld, dat K de stompe hoek is van de driehoek $K\,L\,M$, is een der andere hoeken stomp, dan verwisselen de drie uitdrukkingen (a) natuurlijk van rol.

22. Wij gaan over tot het geval A III. De drie uitdrukkingen (a) worden dan tegelijk nul, en veranderen dus tegelijk van teeken. In den oorsprong zijn de beide laatste positief, en is dus de eerste negatief. Dit zal derhalve steeds het geval zijn zoolang de verbinding a bestaat. Gaat een der wortels van (3) uit 1 (fig. 7) naar 2, dan verandert het teeken der drie uitdrukkingen (a) en tevens de verbinding, die in b overgaat.

Neemt men in aanmerking, dat als $P = 0$ is,

$$sin(\lambda - 3\,\omega) = -\,sin(\lambda - 3\,\omega_1 - 4\,\mu_1) = -\,sin(\lambda - 3\,\omega_2 - 4\,\mu_2)$$

en

$$-\frac{cos\,K}{p} = \frac{cos\,L}{p_1} = \frac{cos\,M}{p_2}$$

is, dan ziet men dat de drie uitdrukkingen (a), na respectieve deeling door $p\,a^3$, $-\,p_1\,b^3$ en $-\,p_2\,c^3$, allen overgaan in:

$$^2/_3\,\Delta\,sin\,(\lambda - 3\,\omega) + {}^8/_{27}\,\frac{a\,b\,c\,cos\,K}{p} \quad .\ .\ .\ .\ .\ (a^1)$$

Deze uitdrukking is dus negatief als de verbinding a, positief als de verbinding b bestaat.

Tusschen de beide overgangsgevallen g en h (fig. 11), die hier mogelijk zijn, kunnen de uitdrukkingen (a) hier geen onderscheidende kenmerken aangeven, daar zij in beide gevallen alle drie gelijk aan nul zijn. Men kan zulke kenmerken vinden door de drie uitdrukkingen

$$\left.\begin{array}{l}\gamma(X_2 - X_3) + \delta(Y_2 - Y_3) - (X_1 X_2 + Y_1\,Y_2) + (X_1 X_3 + Y_1\,Y_3),\\ \gamma(X_3 - X_1) + \delta(Y_3 - Y_1) - (X_2 X_3 + Y_2\,Y_3) + (X_2 X_1 + Y_2\,Y_1),\\ \gamma(X_1 - X_2) + \delta(Y_1 - Y_2) - (X_3\,X_1 + Y_3\,Y_1) + (X_3\,X_2 + Y_3\,Y_2),\end{array}\right\}\ .\ .\ (\beta)$$

te beschouwen. Vervangt men hierin γ door X en δ door Y, en stelt men dan de drie uitdrukkingen ieder afzonderlijk gelijk aan nul, dan bekomt men de vergelijkingen van drie lijnen die ieder door een van de wortels der afgeleide gaan.

Het is hieruit duidelijk dat deze drie uitdrukkingen verschillen de teekens zullen hebben bij de verschillende overgangstoestanden. Men zal gemakkelijk vinden, dat de drie uitdrukkingen na deeling respectievelijk door $p\,a^3$, $-p_1 b^3$, $-p_2 c^3$ overgaan in

$$\left.\begin{array}{l} {}^2/_3\, A \cos(\lambda - 3\,\omega) + {}^4/_{27}\, p^2\,(p^2 \cos 3\,\omega + a^2 \cos \omega), \\ {}^2/_3\, A \cos(\lambda - 3\,\omega) + {}^4/_{27}\, p_1^2\,(p_1^2 \cos 3\,\omega_1 + b^2 \cos \omega_1), \\ {}^2/_3\, A \cos(\lambda - 3\,\omega) + {}^4/_{27}\, p_2^2\,(p_2^2 \cos 3\,\omega_2 + c^2 \cos \omega_2). \end{array}\right\} \ldots (b)$$

Ten einde iets naders omtrent de teekens, die deze uitdrukkingen in de verschillende punten der verdeelende lijn hebben, te weten te komen, merken wij op, dat zij respectievelijk gelijk aan nul worden als in K, in L en in M twee wortels samenvallen (fig. 7). In het eerste geval zullen twee andere wortels ergens in R en in S liggen, in het tweede geval ergens in T en U en in het derde ergens in V en W. In de zes laatstgenoemde punten zal telkens een van de drie uitdrukkingen (b) van teeken veranderen. In de punt K, L, M verandert de daar verdwijnende uitdrukking (b) niet van teeken als men op denzelfde tak der verdeelende lijn blijft, maar wel als men op den anderen tak overgaat.

Onderstellen wij den driehoek K, L, M gelijkbeenig, dan zijn de tweede termen der drie uitdrukkingen achtereenvolgens 0, positief en negatief. In het punt K zijn dus de eerste termen gelijk aan nul. Tusschen K en S zijn er twee positief en een negatief, van S tot T twee negatief en een positief en voorbij T zijn alle drie negatief. Op den door M gaanden tak zijn alle drie positief. Van K tot W zijn er nog altijd twee positief en een negatief. en voorbij W alle drie positief. Als wij nog opmerken, dat in symmetrisch gelegen punten het aantal positieve en negatieve teekens verwisseld wordt, is hiermede overal dit aantal bepaald.

Men ziet hieruit onmiddelijk, dat bij den overgangstoestand g (fig. 11) steeds de drie teekens gelijk zullen zijn, bij den toestand h niet.

Bij de verbinding t zijn de twee niet verdwijnende uitdrukkingen (b) ongelijk van teeken, bij de verbinding u gelijk.

22. Wij komen tot het geval BI. De drie uitdrukkingen (a) reduceeren zich na deeling door van λ onafhankelijke factoren alle tot $\sin \lambda$. Maar de aard der verbinding verandert niet, als λ van teeken verandert. Behalve in het overgangsgeval $\sin \lambda = 0$ bestaat hier steeds de verbinding b (fig. 11).

Er zijn hier vier overgangsgevallen mogelijk, waarvoor de algebraïsche kenmerken weer in de uitdrukkingen (β) te zoeken zijn, die voor dit geval na deeling door van γ en δ onafhankelijke factoren zich reduceeren tot

$$\gamma - X_1, \quad \gamma - X_2, \quad \gamma - X_3 \ldots\ldots \quad (c)$$

De vergelijkingen $X - X_1 = 0$, $X - X_2 = 0$, $X - X_3 = 0$, stellen drie X-lijnen voor, ieder door een van de wortels der afgeleide vergelijking gaande. Ieder van deze zal behalve in dien wortel nog in twee punten de verdeelende lijn snijden. Van de zes snijpunten liggen er vier op de x-as, zooals men met behulp van de vergelijkingen (b) gemakkelijk zal vinden, en wel twee T en U (fig. 5) rechts van L een n. l. V tusschen L en K en een linksch van M n. l. W. Door deze punten wordt de x-as in vijf deelen verdeeld; in de beide uitersten zijn de drie uitdrukkingen (c) positief, omdat voor groote waarde van x, zoowel positieve als negatieve, X dus ook γ zeer groot en positief is. In T en in W verandert $\gamma - X_1$ van teeken, zoodat tusschen T en U en tusschen V en W er twee positief en een negatief zijn. In U en in V verandert $\gamma - X_3$ van teeken, dus zijn er tusschen U en V twee negatief. In de punten K, L en M wordt telkens eene der uitdrukkingen gelijk aan nul, zonder van teeken te veranderen, als het punt op de x-as blijft. Wel verandert het teeken als het punt van de x-as op den daarop loodrecht staanden tak der verdeelende lijn overgaat.

Gaan wij nu na, welke van de vier overgangsgevallen telkens plaats heeft, als wij achtereenvolgens alle mogelijke combinaties van teekens bij de uitdrukkingen (c) onderstellen. Zijn alle drie positief, dan ligt een wortel rechts van T en een links van W en nergens anders op x-as is een wortel mogelijk; wij hebben dus de verbinding j. Zijn er twee positief en een negatief, dan moet er een wortel liggen in elk van de deelen UT, WM, MK en KV, want in ieder van die vier deelen neemt γ al de waarde tusschen X_1 en X_3 aan. Dit beantwoordt aan de verbinding i. Zijn er onder de uitdrukkingen c twee negatieve, dan is er een wortel tusschen L en U en een tusschen L en V; de beide andere kunnen nergens anders dan op den tak, die door M gaat, gelegen zijn. Dit is de verbinding k. Zijn eindelijk alle negatief, dan is nergens op de x-as een wortel te vinden, en de verbinding l heeft plaats. Hieruit ziet men tevens, dat er nog twee punten R en S op de door M gaande tak moeten liggen, waar $\gamma = X_2$ is.

Een blik op de figuur is nu voldoende om te doen zien, dat, als een der uitdrukkingen (c) verdwijnt, de toestanden v, w en x zich zullen voordoen, naarmate de overblijvende beide positief, verschillend van teeken, of beide negatief zijn. Mocht $k = 0$ zijn, dan zouden de beide eerste uitdrukkingen (c) tegelijk kunnen verdwijnen en de verbindingstoestand x zou optreden. R en S zouden dan in M, V en U in L samenvallen.

24. In het geval B II α vindt in het algemeen de verbinding fig. 11 m plaats Is $\delta = 0$, dan doet zich een van de drie verbindingen n, o of p voor.

De eerste en laatste der drie uitdrukkingen (c) zijn hier natuurlijk aan elkander gelijk. Zijn de beide eerste positief, dan heeft de verbinding o plaats. Hebben zij verschillende teekens, dan is het de verbinding n, en zijn beide negatief de verbinding p die zich voordoet. De verbinding y komt voor, als de tweede en de verbinding z als de eerste dezer uitdrukkingen verdwijnt. Dit alles ziet men onmiddelijk, als men dit geval beschouwt als een grensgeval van het vorige, en opmerkt, dat de punten T en U van fig. 5 met elkaar en V en W met K en M samenvallen.

In het geval B II β heeft men natuurlijk de verbinding q als γ van X_1 of δ van nul verschilt, en als $\delta = 0$ en $\gamma - X_1 = 0$ is, vallen al de wortels in een enkel punt samen.

---

25. Beschouwen wij nu het voorgaande weder in het licht van RIEMANN's theorie, en beelden wij dus niet alleen de waarde van z, maar ook die van:

$$w = z^4 + A z^2 + B z$$

af, en wel op een RIEMANN'sche vlakte met vier bladen.

De vier wortels der vergelijking in het z-vlak noemen wij als vroeger A, B, C en D, de drie wortels der afgeleide K, L en M. De overeenkomstige punten in het w-vlak zullen wij door de overeenkomstige kleine letters voorstellen. De punten a, b, c en d vallen boven elkaar in de vier bladen van het w-vlak; de punten k, l en m, zijn de drie vertakkingspunten van dat vlak. Wij brengen de vertakkingsdoorsneden zoo aan, dat zij van de vertakkingspunten in het oneindige loopen, en niet door het inwendige van den driehoek $k\,l\,m$ gaan.

Laten wij nu het geval, dat de punten k, l en m in eene rechte lijn liggen, vooreerst buiten beschouwing, dan zijn er twee gevallen te onderscheiden. Drie van de bladen van het w-vlak kunnen namelijk alle met het vierde samenhangen, of zij kunnen samenhangen in eene bepaalde volgorde. In het eerste geval zullen wij aannemen, dat a in het blad ligt, dat met de drie andere samenhangt, en dat het eerste noemen, terwijl in k het tweede, in l het derde en in m het vierde met dat eerste verbonden is. In het tweede geval onderstellen wij dat in k het eerste met het derde, in l het tweede met het derde en in m het eerste met het vierde samenhangt.

Beschouwen wij in het eerste geval de drie rechte lijnen, die ieder door twee van de punten k, l en m gaan. Deze beantwoorden aan drie lijnen van den vorm:

$$sX + tY = \epsilon$$

in het z-vlak. Gaan wij een daarvan wat nauwkeuriger na, b. v. $l\,m$. Laat men een punt van uit het oneindige tot l naderen, dan beschrijft het overeenkomstige punt in het z-vlak eene lijn tot aan L; van l uit kan men in het derde vlak schijnbaar denzelfden weg teruggaan, waardoor in het z-vlak de voortzetting der reeds beschreven lijn ontstaat, maar men kan ook twee andere wegen inslaan, men kan in het derde blad schijnbaar door m heen voortgaan, of in het eerste blad blijven en naar m gaan. In beide gevallen ontstaat in het z-vlak een tak loodrecht op den eersten, die in de eene richting door M gaat, en wordt voortgezet, als men in het vierde blad schijnbaar over l terugkeert. Gaat men daarentegen van m uit in denzelfden zin voort in het eerste of in het vierde blad, dan wordt in het z-vlak de eene of de andere helft beschreven van een tak, die alleen door M gaat. Men herkent hieruit eene verdeelende lijn, zooals die in N^0. 8 is gedefinieerd. De drie genoemde rechte lijnen vertegenwoordige ieder een dergelijke lijn; wij hebben dus hier het geval in N^0. 15 onder A I beschreven. Merkt men op, dat $X_1\,Y_1$, $X_2\,Y_2$, $X_3\,Y_3$ de respectieve coördinaten zijn van de punten k, l en m, dan ziet men, dat de uitdrukking $I\,.\,P$ den dubbelen inhoud voorstelt van den driehoek $k\,l\,m$, waaruit wij besluiten, dat de toestand onveranderd moet blijven, zoolang dit product niet van teeken verandert.

26. Is de samenhang der bladen van het w-vlak die, welke wij in het vorige nummer in de tweede plaats onderstelden, dan kan van de lijnen $k\,l$ en $k\,m$ nog altijd hetzelfde gezegd worden. Zij beantwoorden nog altijd aan twee verdeelende lijnen in het z-vlak. De derde lijn, $l\,m$, bestaat hier echter uit twee niet samenhangende deelen, waarvan

een geheel in het tweede en derde, en een in het eerste en vierde blad ligt, en die ieder aan twee elkaar loodrecht snijdende takken beantwoorden.

Wij hebben hier blijkbaar het geval A II van N°. 15 voor ons. Zoowel in dit als in het voorgaande geval laat zich alles, wat omtrent de onderlinge ligging en snijding der verdeelende lijnen gezegd is, onmiddelijk uit de ligging der rechte lijnen in het w-vlak opmaken. Ook de verdeeling van het vlak in acht en twintig en in zestien deelen volgt hieruit onmiddelijk, daar in het eerste geval ieder blad in zeven, in het tweede geval in vier deelen verdeeld wordt, en binnen die deelen geen vertakkingspunten liggen.

27. Zien wij nu hoe deze gevallen in elkaar over kunnen gaan. Denken wij ons, dat in het eerste geval een der punten, b. v. k verschoven wordt, zoodat het op de lijn $l\,m$ komt te liggen. Er moet dan eene verdeelende lijn zijn, die door al de drie punten K, L en M gaat. In L heeft men, zooals dadelijk te zien is, twee onderling loodrechte takken, een daarvan gaat door K, en zet zich over dat punt voort zonder M te ontmoeten, maar een tweede tak in K loodrecht op den eersten staande gaat door M tot in het oneindige en wordt in M door een vierden tak gesneden. Wij hebben dus hier het geval A III van N°. 15. Brengt men het punt k aan de andere zijde van de lijn $l\,m$, dan hangt nog wel altijd het eerste blad met de drie andere samen, maar een van de vertakkingsdoorsneden gaat nu door het inwendige van den driehoek. Om dit te verhelpen, verplaatsen wij die vertakkingsdoorsnede, door haar een wenteling van 180^0 om k te laten maken. Hierbij moet zij echter een der punten l of m, b. v. l passeeren. De helft van het eerste blad, waarin l ligt en de overeenkomstige helft van het tweede blad, zijn nu met elkaar verwisseld, en het is nu niet meer het eerste, maar het tweede blad dat in l met het derde samenhangt. De wijze van samenhang tusschen de bladen is dus nu die geworden, welke wij in N°. 24 in de tweede plaats hebben beschreven.

Bij de overgang lagen de punten k, l en m wel, maar de punten K, L en M niet in eene rechte lijn. $I\,.\,P$ moet dus nul geweest zijn en van teeken zijn veranderd, terwijl I niet gelijk aan nul is geweest en niet van teeken veranderd. Dit moet dus met P het geval zijn.

Onderstelt men, dat de betrekkelijke ligging van de X- en Y-as in het w-vlak dezelfde is als die van de x- en y-as in het z-vlak, dan ziet men uit het voorgaande, dat de punten k, l en m in het geval A I in denzelfden zin rondom den driehoek gelegen zijn als de punten K, L en M, in het geval A II daarentegen in tegengestelde zin.

28. Komen de punten k, l en m weer in eene rechte lijn te liggen, door dat k wederom de lijn $l\,m$ passeert, dan komt natuurlijk de eerste toestand weer terug, maar gaat nu een der andere punten, b. v. m zich tusschen k en l plaatsen, dan liggen weer de drie punten K, L en M op dezelfde verdeelende lijn, maar toch is de toestand nu eene gansch andere dan in het geval van N^0. 26. In L heeft men nu twee onderling loodrechte takken. Een daarvan gaat als eene doorloopende lijn over K naar M, want men kan van l naar k in het tweede blad, en vandaar terug in het eerste blad naar m gaan. De doorloopende tak, die nu al de wortels K, L en M van de afgeleide bevat, moet noodzakelijk recht zijn, en wordt in K en M even als in L door een anderen tak gesneden. Wij herkennen hierin het geval B I. Wij zien dan ook, dat het nu de factor I is die gelijk aan nul wordt. Komt het punt m nu aan de andere zijde van de lijn $k\,l$ te liggen, dan is de samenhang der bladen niet veranderd, ook niet nadat de door m gaande vertakkingsdoorsnede 180^0 is omgewenteld; dit kan namelijk over l geschieden, en dit punt ligt niet in een der bladen, waartusschen eene verwisseling plaats heeft.

29. Zoowel bij het eerste als bij het tweede overgangsgeval kan het gebeuren, dat twee van de punten k, l en m samenvallen. Als in het tweede geval k een van die punten is, ontstaat daardoor volkomen dezelfde toestand, die dus naar willekeur kan worden opgevat als uit het eene of uit het andere overgangsgeval ontstaan te zijn. Daar echter in een van die gevallen I en in het andere P steeds gelijk aan nul is, moeten in het hier beschouwde geval, waaraan

een samenvallen van twee der punten K, L en M beantwoordt, beide die grootheden verdwijnen. Door het samenvallen van twee der punten b. v. k en m ontstaat een vertakkingspunt, waar drie bladen samenhangen, en men zal gemakkelijk de figuur 10 op het z-vlak terugvinden.

In het geval B I kunnen echter ook de punten l en m samenvallen; dit samenvallen is evenwel slechts schijnbaar, en beantwoordt niet aan een samenvallen van twee punten in het z-vlak. Denkt men zich dan in het w-vlak eene door k gaande rechte lijn uitsluitend gelegen in het eerste en tweede blad en daar in het verlengde van lk tot in het oneindige loopend, dan is het vierbladige w-vlak daardoor in twee gelijk en gelijkvormige maar symmetrische helften verdeeld. De overeenkomstige lijn in het z-vlak moet dus eene rechte lijn zijn, die ook het z-vlak in twee symmetrische helften verdeelt, en de twee punten L en M moeten evenver ter weerszijden van K liggen. Elke rechte lijn door de samenvallende punten l en m getrokken vertegenwoordigt eene lijn van den vorm

$$sX + tY = \varepsilon,$$

die door twee wortels van de afgeleide gaat maar geen verdeelende lijn is.

Het geval dat al de drie punten k, l en m samenvallen vereischt geen nadere bespreking.

30. Ligt in het geval A I het punt a en dus ook de punten b, c en d binnen den driehoek klm of in een van de deelen van het vlak aan dien driehoek grenzende, dan kan elk van die wortels met een der punten k, l en m, a met alle drie die punten verbonden worden door eene rechte lijn, die geen vertakkingsdoorsnede ontmoet, waaruit volgt, dat a met ieder van de andere over een der vertakkingspunten heen samenhangt. In het z-vlak bestaat dus de verbinding a fig. 11. Ligt a echter binnen den overstaanden hoek van een van de hoeken des driehoeks b. v. k, dan loopt een van de verbindingslijnen b. v. al over de vertakkingsdoorsnede uit k heen; a is nu over k met b en over m met d verbonden, maar er is geen verbinding

van a met l. De lijn van van b naar l loopende ligt aanvankelijk in het tweede blad, maar gaat in de vertakkingsdoorsnede in het eerste blad over, en komt over l in het derde blad terug naar c, zoodat nu de verbinding $c—b—a—d$ dus de verbinding b (fig. 11) bestaat.

Ligt het punt a op een van de zijden des driehoeks klm b. v. kl dan is a over k en l met b en c verbonden door lijnen in elkaârs verlengde gelegen, en met d door een lijn over m gaande. Er bestaat dus eene verbinding c fig. 11. Is echter a op het verlengde van kl gelegen, dan gaat eene verbindingslijn van a over k naar b; van uit k gaat een lijn over l naar c en een derde gaat direct over m naar d. Op het z-vlak heeft men dus de verbinding d. Valt ten slotte a met een der hoekpunten k b. v. samen, dan ligt ook b in dat punt, en het is de verbinding r die plaats grijpt.

31. Ligt in het tweede geval a binnen den driehoek klm, of in een van de aangrenzende deelen van het vlak, dan komt de volgorde, waarin de wortels verbonden zijn overeen met die van de vlakken waarin zij liggen, en bestaat dus de verbindingswijze b. Ligt het punt binnen den overstaanden hoek van l, dan gaat b. v. de lijn ak over de vertakkingsdoorsnede uit l heen, b is dan over l met c verbonden, c over k met a en a over m met d, dus nog altijd de verbinding b fig. 11. Gaat de verbindingslijn am over de vertakkingsdoorsnede dan vindt men wel eene andere volgorde maar nog steeds de verbinding b. Ligt echter a binnen den overstaanden hoek van k en snijdt b. v. am de vertakkingsdoorsnede dan is b over k met a, over l met c en over m met d verbonden, en doet zich dus de verbinding a voor.

Komt a op de zijde lm of haar verlengde te liggen, dan is dit voor de verbindingstoestand niets bijzonders, wel echter als a op een der andere zijde b. v. kl ligt. Er gaat dan een doorloopende Φ-lijn van A over K, B en L naar C, terwijl een andere verbindingslijn over M naar D gaat. Ligt a op het verlengde van kl, dan gaat eene verbinding van b en c over l en van l over k naar a, en van a over *m* naar *d*. Is eindelijk *a* op het verlengde van *l k* gelegen, dan is er eene verbinding van *a* met *b* over *k* en van *k* over *l* met *c*, terwijl *a* over *m* met *d* is verbonden. Men herkent hier de verbindingen *f*, *e* en *d*.

Valt *a* in *k*, dan vallen *a* en *b* samen, en het is de verbinding *r* die plaats heeft. Komt *a* in *l* of *m* te liggen, dan treedt de verbinding *s* op *).

32. Het overgangsgeval A III denken wij ons uit het geval A I ontstaan, en dus de vertakkingsdoorsnede zoo gelegd, dat het eerste vlak met ieder der drie andere samenhangt. Ligt *a* aan de zijde van de lijn *k l m*, waar de vertakkingsdoorsnede uit *k* niet valt, dan snijdt geen der verbindingslijnen een vertakkingsdoorsnede, en de verbinding *a* fig. 11 heeft plaats. Ligt echter het punt aan de andere zijde, dan moet een der drie lijnen, b. v. *al* de vertakkingsdoorsnede ontmoeten, *a* is dan nog wel met *b* en met *d*, maar niet meer met *c* verbonden, daarentegen bestaat er eene verbinding tusschen *b* en *c*. Nu is er dus de verbinding *b*. Neemt men *a* tusschen *m* en *l*, dan zal men gemakkelijk de verbinding *k*, neemt men het op het verlengde van *l m* of van *m l* even gemakkelijk de verbinding *g* herkennen. Ligt *a* in *k*, dan treedt de verbinding *t*, ligt het in *l* of *m*, dan treedt de verbinding *u* op.

In het tweede overgangsgeval B I ziet men op dezelfde wijze redeneerende, dat, zoolang het punt *a* buiten de lijn *k m l* ligt, altijd de verbinding *b* zich voordoet. De vier overgangsgevallen *i*, *j*, *k* en *l* vindt men terug als het pun *a* respectievelijk genomen wordt tusschen *k* en *m*, op het verlengde van *l k*, tusschen *l* en *m*, en op het verlengde van *k l*.

Valt het punt *a* in *k*, dan bestaat de verbinding *v*, valt het in *m*, dan heeft men de verbinding *w* en als het in *l* valt de verbinding *x*.

---

*) Zoowel in dit als in het voorgaande geval, beantwoordt het bijzondere geval, dat wij vroeger beschouwden, en waarop onze figuren betrekking hebben, aan het geval dat de driehoek *k l m* gelijkzijdig is.

Valt l met m samen, en komt ook het punt a in dat punt te liggen, dan heeft men de verbinding x'.

Vallen b. v. k en m samen, dan hebben wij met het geval B II α te doen. Ligt het punt a ergens in het w-vlak, dan zijn a, b en c met het punt k verbonden door lijnen, waaraan in het z-vlak drie elkaar onder hoeken van 120⁰ ontmoetende Φ-lijnen beantwoorden, en a is over m met vereenigd. Dit is de verbinding m. Mocht het punt op de lijn $k\,l$ liggen, dan heeft een van de drie verbindingen n, o of p plaats, en wel n als het tusschen l en k, o als het op het verlengde van $l\,k$, en p als het op het verlengde van $k\,l$ ligt. Ligt a in l, dan bestaat de verbinding y, en ligt het in k, dan heeft men de verbinding z.

Vallen eindelijk al de drie punten k, l en m samen, dan doet zich het geval B II β voor. Waar a ook ligt, altijd bestaat de verbinding q, tenzij het in k mocht vallen, als wanneer al de vier wortels in een punt samenvallen.

33. De drie uitdrukkingen (a), in N⁰. 19 voorkomende, zijn niets anders dan de dubbele inhouden der driehoeken $a\,l\,m$, $a\,m\,k$ en $a\,k\,l$, in het geval A I zoo genomen, dat zij positief zijn, als het punt a binnen den driehoek $k\,l\,m$ ligt, en in het geval A II zoo, dat zij in dat geval negatief zijn. Hieruit volgen dadelijk de algebraïsche kenmerken, zooals zij in N⁰. 19 en 20 zijn opgegeven.

In het geval A III stelt (a') van N⁰. 21 den afstand voor van het punt a tot aan de lijn $l\,k\,m$, zooals daaruit blijkt, dat de factoren, waardoor de drie uitdrukkingen (a) gedeeld zijn, afgezien van het teeken, de lengten $l\,m$, $k\,m$ en $k\,l$ zijn.

Denkt men zich in dit geval loodlijnen getrokken op de lijn $l\,k\,m$ in de punten k, l en m, dan stellen de drie uitdrukkingen (b) in N⁰. 21 de afstanden voor van die loodlijnen tot het punt a. In het geval B I en in de beide volgende hebben de uitdrukkingen (c) van N⁰. 22 dezelfde beteekenis. Ook voor deze gevallen vindt men hieruit de in N⁰. 21, 22 en 23 gegeven kenmerken terug.

Ten slotte zullen wij nog doen zien, hoe men door deze beschouwingen de vier laatste vergelijkingen (10) zonder berekening uit de beide eerste kan afleiden.

Door de substitutie:

$$z = z' e^{\mu_1}$$

verandert men het coördinatenstelsel in het z-vlak zoodanig, dat de negatieve richting der x-as voortaan in plaats van door K door L gaat. Op het w-vlak ondergaat de figuur hierdoor geene verandering, maar de term met z'^4 in de vergelijking, die uit (3) ontstaat, heeft nu den coëfficiënt $e^{4\mu_1}$. Om aan dien term weer de eenheid tot coëfficiënt te geven, moet men de vergelijking met $e^{-4\mu_1}$ vermenigvuldigen, of, wat op hetzelfde neerkomt, de figuur in het w-vlak een wenteling van $4\mu_1$ om den oorsprong doen ondergaan. Voorziet men de waarden van X en Y in den nieuwen stand van accenten, dan heeft men hierdoor

$$X_1 = X_1' \cos 4\mu_1 - Y_1' \sin 4\mu_1, \quad Y_1 = X_1' \cos 4\mu_1 + Y_1' \sin 4\mu_1$$

en evenzoo voor X_2, X_3, Y_2 en Y_3.

Het is echter duidelijk dat nu

$$X_1' - X_3' = {}^2/_3 p_1 b^3 \cos 3\,\omega_1, \qquad Y_1' - Y_3' = {}^2/_3 p_1 b^3 \sin 3\,\omega_1,$$

en dit substitueerende heeft men

$$X_1 - X_3 = {}^2/_3\, p_1\, b^3 \cos\,(3\,\omega_1 + 4\,\mu_1),$$
$$Y_1 - Y_3 = {}^2/_3\, p_1\, b^3 \sin\,(3\,\omega_1 + 4\,\mu_1);$$

evenzoo voor de beide andere vergelijkingen.

Dezelfde redeneering is natuurlijk ook van toepassing op de vergelijkingen (22) en andere dergelijke stelsels.

Verandert, zooals bij de vergelijkingen (22) het eerste lid door een wenteling van het coördinatenstelsel in het w-vlak niet, dan zijn de drie vergelijkingen symmetrisch ten opzichte van de drie wortels der afgeleide vergelijking.


Fig 8.
Fig 6.
Fig 9.
Fig 10.
Fig 5.
Fig 7
Fig 2.
Fig 3.
Fig 1
Fig 4

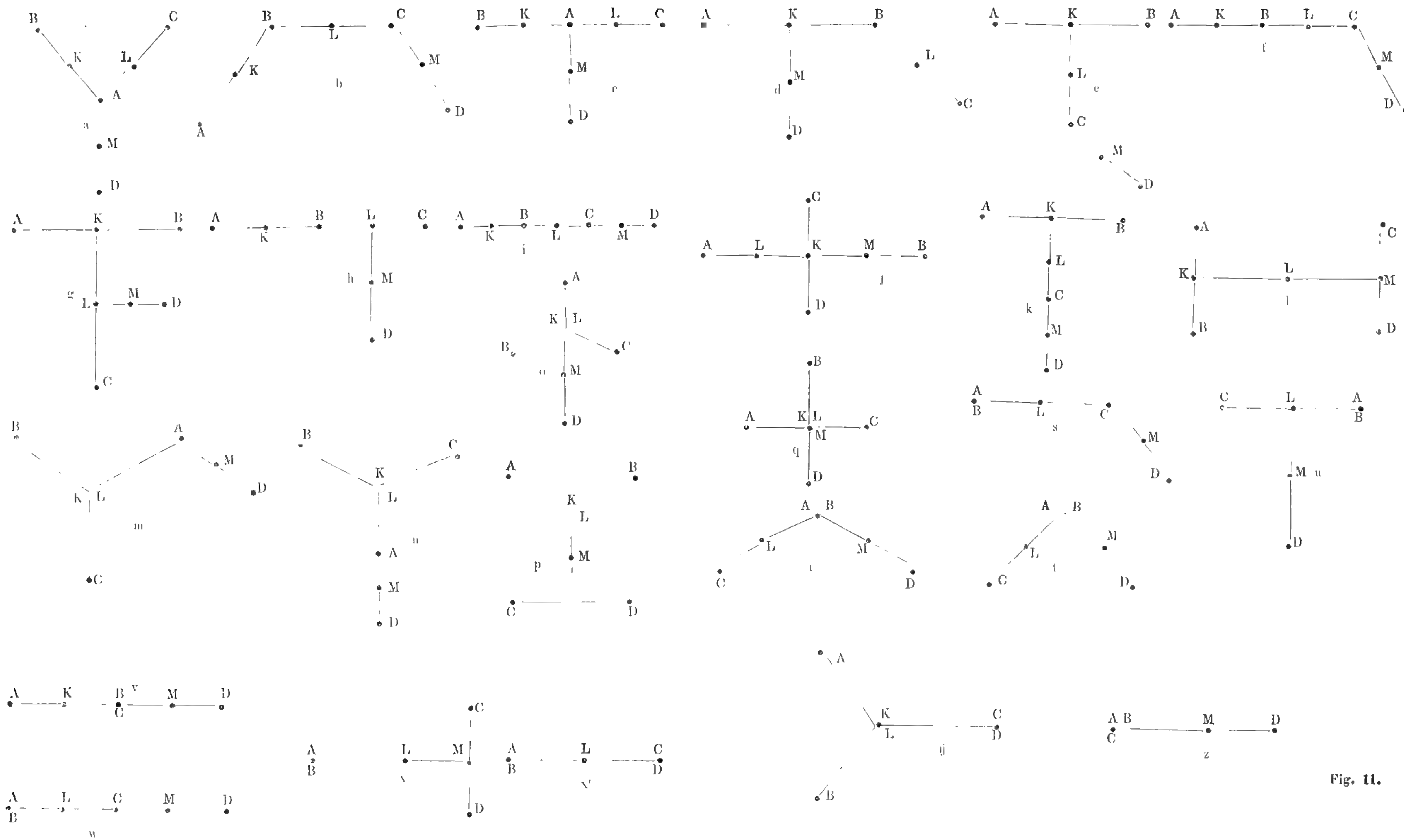


Fig. 11.

INHOUD

VAN

DEEL XX. — STUK 3.

---

bladz.

Verslag omtrent eene verhandeling van Dr. G. J. MICHAËLIS, getiteld: Over de theorie der veerkrachtige nawerking; uitgebracht in de Vergadering van 29 Maart 1884........................ „ 297.

Over de theorie der veerkrachtige nawerking; door G. J. MICHAËLIS.. „ 300.

Bijdrage tot de kennis van normaal cyaanzuur en afgeleiden; door E. MULDER. Vijfde gedeelte.............................. „ 375.

Verslag over eene verhandeling van Dr. F. DE BOER, getiteld: Discussie der algemeene vierde-machtsvergelijking; uitgebracht in de Vergadering van 25 April 1884.......................... „ 410.

Discussie der algemeene vierde-machtsvergelijking; door Dr. F. DE BOER. (*Met twee platen*)................................. „ 413.

Overzicht der boekwerken, door de Koninklijke Akademie van Wetenschappen ontvangen en aangekocht............................ 1—32.

GEDRUKT BIJ DE ROEVER KRÖBER-BAKELS.

GEDRUKT BIJ DE ROEVER KRÖBER - BAKELS.