VORLESUNGEN ÜBER DYNAMIK

VON

C. G. J. JACOBI

NEBST

FÜNF HINTERLASSENEN ABHANDLUNGEN DESSELBEN

HERAUSGEGEBEN

VON

A. CLEBSCH.

UNTER BEFÖRDERUNG DER KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE
DER WISSENSCHAFTEN.

BERLIN.
DRUCK UND VERLAG VON GEORG REIMER.
1866.

Vorwort.

Die Vorlesungen über Dynamik, welche den ersten und hauptsächlichen Bestandtheil dieses Bandes bilden, sind, mit Ausnahme des von mir hinzugefügten Schlusses (p. 291—300), nach den an der Königsberger Universität im Winter 1842—1843 von Jacobi gehaltenen Vorträgen von dessen damaligem Zuhörer Herrn Borchardt aufgezeichnet und später von demselben überarbeitet worden.

Den Rest des Bandes bildet eine Sammlung von nachgelassenen Abhandlungen Jacobi's, welche sich auf Dynamik und auf die Theorie der partiellen Differentialgleichungen beziehen. Die zahlreichen in diese Gebiete einschlägigen längern und kürzern Aufsätze, welche sich im Nachlass vorfanden, erwiesen sich nur zum kleinen Theil als verwendbar; die meisten derselben waren entweder ganz unvollständig, oder Vorstudien zu Abhandlungen, welche bei Jacobi's Lebzeiten von ihm selbst herausgegeben worden sind. Der Mannigfaltigkeit des hinterlassenen Materials und den mit der Sichtung desselben verbundenen Schwierigkeiten ist es zuzuschreiben, dass der Druck dieser Sammlung erst jetzt beendigt ist, obgleich die benutzten Manuscripte sich schon seit 1860 in meinen Händen befunden haben.

Die hier erscheinenden fünf Abhandlungen umfassen alles zur Veröffentlichung Geeignete, was aus den erwähnten Gebieten vom Jacobischen Nachlass noch zurückgeblieben ist, nachdem eine grosse und wichtige Arbeit über die Integration der partiellen Differentialgleichungen bereits im 60sten Bande und eine kleinere über die Bestimmung der Ordnung eines Systems von Differentialgleichungen im 64sten Bande des Journals für Mathematik herausgekommen sind.

Ueber die Zeiten, in welchen die fünf Abhandlungen des vorliegenden Bandes entstanden sind, lassen sich, da ein Datum in keinem der Manuscripte verzeichnet steht, nur Vermuthungen aufstellen. Diese beruhen entweder auf der Vergleichung des Inhalts mit Jacobi's Entwicklungsgang oder finden, wo dieses Mittel versagt, wenigstens einen äussern Anhalt in Jacobi's Schrift, welche im Lauf seines Lebens nicht unbedeutende Veränderungen erfahren hat.

Es ist wahrscheinlich, dass die zweite Abhandlung aus Jacobi's letzten Jahren stammt. Die übrigen dürften der Zeit nach den Königsberger Vorträgen über Dynamik nahe stehen, und zwar ist die fünfte jedenfalls erst nachher verfasst.

Es bleibt mir übrig, die Unterstützung dankbar zu erwähnen, welche dem Unternehmen durch die Munificenz der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften gewährt worden ist.

Giessen, den 19. März 1866.

Clebsch.

Inhaltsverzeichniss.

Vorlesungen über Dynamik.

Nachgelassene Abhandlungen.

Ueber diejenigen Probleme der Mechanik, in welchen eine Kräftefunction existirt, und über die Theorie der Störungen.

Ueber die vollständigen Lösungen einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung.

Vorlesungen über Dynamik.

Erste Vorlesung.

Einleitung.

Diese Vorlesungen werden sich mit den Vortheilen beschäftigen, welche man bei der Integration der Differentialgleichungen der Bewegung aus der besonderen Form dieser Gleichungen ziehen kann. In der Mécanique analytique findet man Alles, was sich auf die Aufgabe bezieht, die Differentialgleichungen aufzustellen und umzuformen, allein für ihre Integration ist sehr wenig geschehen. Die in Rede stehende Aufgabe ist kaum gestellt; das Einzige, was man dahin rechnen kann, ist die Methode der Variation der Constanten, eine Näherungsmethode, welche auf der besonderen Form der in der Mechanik vorkommenden Differentialgleichungen beruht.

Unter der grossen Menge von Aufgaben, welche die Mechanik darbietet, wollen wir nur diejenigen betrachten, welche sich auf ein System von n materiellen Punkten beziehen, d. h. von n Körpern, deren Ausdehnung man vernachlässigen kann und deren Masse man im Schwerpunkt befindlich annimmt. Wir wollen ferner nur solche Probleme berücksichtigen, bei welchen die Bewegung allein von der Configuration der Punkte und nicht von ihrer Geschwindigkeit abhängt. Hierdurch sind also namentlich alle Probleme ausgeschlossen, bei welchen der Widerstand in Rechnung zu ziehen ist.

Wir werden zuerst die Differentialgleichungen für die Bewegung eines solchen Systems aufstellen und dann die Principe durchgehen, welche für dasselbe gelten. Diese Principe sind:

1. Das Princip der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunkts.
2. Das Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft.
3. Das Princip der Erhaltung der Flächenräume.
4. Das Princip der kleinsten Wirkung oder, wie es besser heissen sollte, des kleinsten Kraftaufwandes.

Die drei ersten dieser Principe geben Integrale des aufgestellten Systems von Differentialgleichungen; das letzte Princip giebt kein Integral, sondern nur eine symbolische Formel, in welche das System von Differentialgleichungen sich zusammenfassen lässt. Dasselbe ist aber darum nicht minder wichtig, und *Lagrange* hat sogar ursprünglich aus ihm alle seine Resultate in der Mechanik hergeleitet. Später, als er jene Resultate streng begründen wollte, verliess er das Princip der kleinsten Wirkung und nahm (zuerst in der von der Pariser Akademie gekrönten Preisschrift über die Libration des Mondes, dann aber vorzüglich in der Mécanique analytique) das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten zur Basis seiner Entwickelungen. So wurde also das Princip der kleinsten Wirkung, welches die Mutter aller neuen Resultate gewesen war, ungebührlich hintenangesetzt.

Ich habe ein neues Princip der Mechanik hinzugefügt, welches darin mit den Principen der Erhaltung der lebendigen Kraft und dem der Flächenräume übereinstimmt, dass es ein Integral giebt; aber übrigens ist es ganz anderer Natur. Erstens ist es allgemeiner als jene Principe; denn es gilt, sobald die Differentialgleichungen nur die Coordinaten enthalten; ferner: während jene Principe erste Integrale der Form geben: Function der Coordinaten und ihrer Differentialquotienten gleich einer Constanten, Integrale also, aus deren Differentiation Gleichungen fliessen, die durch Benutzung der gegebenen Differentialgleichungen identisch Null werden, giebt das neue Princip bei Voraussetzung der vorhergehenden Integrale das letzte. Dies Princip lautet nämlich: Nimmt man an, dass man ein Problem der Mechanik bis auf eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen zwei Variablen zurückgeführt habe, so kann man den Multiplicator dieser Differentialgleichungen allgemein angeben.

In Fällen, wo die übrigen Principe ein Problem auf eine Differentialgleichung erster Ordnung zurückführen, wird also durch das neue Princip die Aufgabe vollständig gelöst. Hierher gehört das Problem der Anziehung eines Punktes nach einem festen Centrum, wobei das Gesetz der Anziehung beliebig ist, ferner das der Anziehung nach zwei festen Centren, vorausgesetzt, dass die Anziehung nach dem *Newton*schen Gesetz stattfindet, und die Rotation eines von keinen äusseren Kräften sollicitirten Körpers um einen Punkt. Bei der Anziehung nach zwei festen Centren ist freilich ausser der Anwendung der älteren Principe ein von *Euler* durch besondere Kunstgriffe gefundenes Integral nöthig, durch welches erst das Problem auf eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen zwei Variablen zurückgeführt wird: aber diese

Gleichung ist äusserst complicirt, und ihre Integration ist eins der grössten Meisterwerke *Eulers*. Durch das neue Princip ergiebt sich ihr Multiplicator von selbst.

Besonders hervorzuheben ist diejenige Classe von Problemen, für welche zugleich das Princip der lebendigen Kraft und das Princip der kleinsten Wirkung gilt. *Hamilton* hat nämlich bemerkt, dass man in diesem Falle die Aufgabe auf eine nicht lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung zurückführen kann. Hat man eine vollständige Lösung dieser partiellen Differentialgleichung gefunden, so ergeben sich alle Integralgleichungen mit einem Schlage. Die durch die partielle Differentialgleichung definirte Function nennt *Hamilton* die charakteristische Function.

Hamilton hat den schönen Zusammenhang, den er gefunden hat, etwas unzugänglich gemacht und verdunkelt und zwar dadurch, dass er seine charakteristische Function noch zugleich von einer zweiten partiellen Differentialgleichung abhängig macht. Die Hinzufügung dieser Bestimmung macht die ganze Entdeckung unnöthig complicirt, da eine genauere Untersuchung zeigt, dass die zweite partielle Differentialgleichung vollkommen überflüssig ist.

Wir wollen zur Unterscheidung folgende Bezeichnungen einführen: Die Integrale der gewöhnlichen Differentialgleichungen wollen wir Integrale oder Integralgleichungen nennen, die Integrale der partiellen Differentialgleichung dagegen Lösungen. Ferner wollen wir bei einem System von Differentialgleichungen Integrale und Integralgleichungen unterscheiden. Integrale seien diejenigen ersten Integrale, welche die Form haben: Function der Coordinaten und ihrer Differentialquotienten gleich einer Constanten, und deren Differentialquotient durch das gegebene System von Differentialgleichungen identisch gleich Null wird, ohne dass man andere Integrale zu Hülfe ruft; Integralgleichungen heissen alle übrigen Integrale. In diesem Sinne geben also die Principe der lebendigen Kraft und der Flächenräume Integrale und nicht Integralgleichungen.

Durch die *Hamilton*sche Entdeckung hat das System der Integralgleichungen der mechanischen Probleme eine sehr merkwürdige Form erhalten. Wenn man nämlich die charakteristische Function nach den willkürlichen Constanten, welche sie enthält, differentiirt, so giebt dies die Integralgleichungen des gegebenen Systems von Differentialgleichungen. Dies ist analog dem Satz von *Lagrange*, wonach sich die Differentialgleichungen eines Problems, für welches das Princip der kleinsten Wirkung gilt, als partielle Differentialquotienten einer einzigen Grösse darstellen lassen. Obgleich nun *Hamilton* die in Rede stehende Form der Integralgleichungen, welche sie vermittelst der charakteristischen Function annehmen, aufgestellt hat, so hat er doch nichts zur Auffindung der charakteristischen Function gethan. Hiermit werden wir uns beschäftigen, und mit Hülfe der gewonnenen Resultate die Anziehung nach einem festen Centrum, nach zwei festen Centren und die Bewegung eines der Schwere nicht unterworfenen Punktes auf dem dreiaxigen Ellipsoid (deren Bestimmung mit der Auffindung der kürzesten Linie auf dem Ellipsoid übereinkommt) behandeln.

Der von *Hamilton* entdeckte Zusammenhang giebt auch neue Aufschlüsse über die Methode der Variation der Constanten. Diese Methode beruht auf folgendem: Die Integration eines Systems von Differentialgleichungen der Bewegung enthält eine bestimmte Anzahl von willkürlichen Constanten, welche durch die Anfangspositionen bestimmt werden. Bekommt nun der Punkt während der Bewegung einen Stoss, so ändert sich dadurch nur der Werth der willkürlichen Constanten, die Form der Integralgleichungen bleibt dieselbe. Bewegt sich z. B. ein Planet in einer Ellipse um die Sonne, und bekommt er während der Bewegung einen Stoss, so wird er sich nun in einer neuen Ellipse oder vielleicht auch in einer Hyperbel, jedenfalls in einem Kegelschnitt bewegen, die Form der Gleichung ist dieselbe geblieben. Treten nun solche Stösse nicht momentan auf, sondern werden sie continuirlich fortgesetzt, so kann man die Sache so ansehen, als ob die Constanten sich continuirlich änderten, und zwar so, dass diese Aenderungen die Wirkung der störenden Kräfte genau darstellen. Diese Theorie der Variation der Constanten wird in dem Verlauf unserer Untersuchung in einem neuen Lichte erscheinen.

Das Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft umfasst eine grosse Classe von Problemen, unter welche namentlich das Problem der drei Körper gehört, oder allgemeiner, das Problem der Bewegung von n Körpern, welche sich gegenseitig anziehen.

Jemehr man in die Natur der Kräfte eindringt, desto mehr reducirt man Alles auf gegenseitige Anziehungen und Abstossungen, desto wichtiger wird also das Problem, die Bewegung von n Körpern zu bestimmen, welche sich gegenseitig anziehen. Dieses Problem gehört in die Kategorie derjenigen, auf welche unsere Theorie anzuwenden ist, d. h. welche sich auf die Integration einer partiellen Differentialgleichung zurückführen lassen. Man erkennt hieraus die Nothwendigkeit, die partiellen Differentialgleichungen zu studiren: aber seit 30 Jahren*) hat man sich nur mit den linearen partiellen Differentialgleichungen beschäftigt, während für die nicht linearen nichts geschehen ist. Für drei Variablen hat bereits *Lagrange* das Problem absolvirt; für mehr Variablen hat *Pfaff* eine zwar verdienstliche aber unvollkommene Arbeit gemacht. Nach *Pfaff* muss man zur Lösung der partiellen Differentialgleichung zunächst ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen integriren. Nach Integration derselben hat man ein neues System von Differentialgleichungen aufzustellen, welches zwei Variablen weniger enthält; dieses wiederum zu integriren u. s. w., und so gelangt man endlich zur Integration der partiellen Differentialgleichung. Hiernach hatte also *Hamilton* durch seine Zurückführung der Differentialgleichung der Bewegung auf eine partielle Differentialgleichung das Problem auf ein schwierigeres zurückgeführt; denn nach *Pfaff* erfordert die Integration einer partiellen Differentialgleichung die Integration einer Reihe von Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen, während das mechanische Problem nur die Integration eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen erfordert. Es war daher hier die umgekehrte Zurückführung von grösserer Wichtigkeit, wonach eine partielle Differentialgleichung sich auf ein einziges System von Differentialgleichungen zurückführen lässt. Das erste *Pfaff*sche System stimmt nämlich mit dem System, auf welches die Mechanik führt, überein, und es lässt sich nachweisen, dass die übrigen Systeme alsdann entbehrt werden können. So wie in diesem Falle kehrt sich die Zurückführung eines Problems auf ein anderes sehr häufig um, indem der Fortschritt der Wissenschaft das Erste zum Zweiten macht und umgekehrt. Das Wichtige an solchen Zurückführungen ist der Zusammenhang, der zwischen zwei Problemen nachgewiesen wird. Der in Rede stehende Zusammenhang lässt erkennen, dass jeder Fortschritt in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen auch einen Fortschritt in der Mechanik herbeiführen muss.

Ein tieferes Studium der Differentialgleichungen der Mechanik zeigt, dass die Anzahl der Integrationen sich immer auf die Hälfte zurückführen lässt, während die andere Hälfte durch Quadraturen ersetzt wird. Es giebt ein merkwürdiges Theorem, welches zeigt, dass ein qualitativer Unterschied zwischen den Integralen stattfindet. Während nämlich einige Integrale nicht mehr Be-

*) Diese Vorlesungen wurden im Winter 1842—43 gehalten. C.

deutung haben als Quadraturen, giebt es andere, welche für alle übrigen zusammengenommen gelten können. Dies Theorem lässt sich folgendermassen aussprechen: *Kennt man ausser dem durch das Princip der lebendigen Kraft gegebenen Integral noch zwei Integrale der dynamischen Gleichungen, so kann man aus diesen beiden ein drittes finden.* Ein Beispiel hiervon sind die sogenannten Flächensätze, deren es für die drei Coordinatenebenen giebt; gelten von diesen zwei, so lässt sich der dritte daraus ableiten.

Hat man nach dem angeführten allgemeinen Satze aus zwei Integralen ein drittes gefunden, so lässt sich hieraus und aus einem der früheren ein viertes finden, u. s. w. bis man auf eins der gegebenen zurückkommt. Es giebt Integrale, welche bei dieser Operation das ganze System der Integralgleichungen erschöpfen, während bei anderen sich der Cyclus früher schliesst. Dieses Fundamentaltheorem ist schon seit 30 Jahren zugleich gefunden und verborgen. Es rührt nämlich von *Poisson* her, und war auch *Lagrange* bekannt, der in dem erst nach seinem Tode erschienenen zweiten Theil der Méc. anal. dasselbe als Hülfssatz brauchte*). Aber dieser Satz ist immer in einer ganz anderen Bedeutung genommen worden; er sollte nur zeigen, dass in einer Entwicklung gewisse Glieder unabhängig von der Zeit seien, und es war keine geringe Schwierigkeit, in demselben seine heutige Bedeutung zu sehen. In diesem Satze liegt zugleich das Fundament für die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung.

Zweite Vorlesung.

Die Differentialgleichungen der Bewegung. Symbolische Formel für dieselben. Die Kräftefunction.

Wir wollen zunächst ein freies System von materiellen Punkten betrachten; wir nennen es ein System, denn wir nehmen an, dass die Punkte den äusseren Kräften nicht unabhängig von einander Folge leisten, in welchem Falle man jeden Punkt für sich betrachten könnte, sondern dass sie gegenseitig auf einander einwirken, so dass man nicht einen ohne die anderen betrachten kann. Dies System sei ferner ein freies, d. h. ein solches, in welchem die Punkte den Einwirkungen der Kräfte ohne Hinderniss folgen. Irgend

*) Méc. anal. Sect. VII. 60, 61. (Band II. p. 70 folgg. der dritten Ausgabe.)

einer der Punkte des Systems habe die Masse m, die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z, und die Componenten der auf ihn wirkenden Kraft seien X, Y, Z: dann hat man bekanntlich folgende Gleichungen der Bewegung:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X, \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y, \qquad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z,$$

und ähnliche Gleichungen giebt es für alle Punkte des Systems. Die Grössen X, Y, Z hängen von den Coordinaten aller n Punkte ab und können auch deren Differentialquotienten nach der Zeit t enthalten, welches namentlich immer stattfindet, sobald der Widerstand in Rechnung zu ziehen ist.

Die obigen Differentialgleichungen der Bewegung können in eine äusserst vortheilhafte symbolische Form dadurch gebracht werden, dass man jede Gleichung, nachdem man die rechte Seite auf Null gebracht hat mit einem willkürlichen Factor multiplicirt und die Producte addirt. Man erhält so die Gleichung:

$$\left(m\frac{d^2x}{dt^2} - X\right)\lambda + \left(m\frac{d^2y}{dt^2} - Y\right)\mu + \left(m\frac{d^2z}{dt^2} - Z\right)\nu + \text{u. s. w.} = 0,$$

wo sich das u. s. w. auf ähnliche Glieder bezieht, welche von den übrigen Punkten des Systems herrühren. Indem man nun fordert, dass diese Gleichung für alle Werthe der Grössen λ, μ, ν ... gelte, repräsentirt dieselbe das ganze obige System von Differentialgleichungen. Der Uebersichtlichkeit wegen wollen wir die Factoren λ, μ, ν ... mit δx, δy, δz bezeichnen, wo x, y, z rein als Indices anzusehen sind, so wird unsere symbolische Gleichung:

$$\Sigma\left\{\left(m\frac{d^2x}{dt^2} - X\right)\delta x + \left(m\frac{d^2y}{dt^2} - Y\right)\delta y + \left(m\frac{d^2z}{dt^2} - Z\right)\delta z\right\} = 0,$$

wo sich die Summe auf alle Punkte des Systems bezieht. Diese Gleichung muss also für alle Werthe von δx, δy, δz, ... bestehen. Die symbolische Bezeichnung in dieser Gleichung ist sehr wichtig; es tritt nämlich häufig der Fall ein, dass ein Symbol als Grösse betrachtet und damit gerechnet und operirt wird, wie es mit Grössen geschieht; hiervon werden wir später ein Beispiel haben.

Eine besondere Behandlung lässt der Fall zu, wo nur Attractionen nach festen Centren oder Attractionen der Punkte unter sich betrachtet werden. In diesem Falle lassen sich die Componenten X, Y, Z, ... als partielle Differentialquotienten ein und derselben Grösse darstellen. *Lagrange* hat die wichtige Bemerkung gemacht, dass wenn man einen festen Punkt mit einem beweglichen verbindet, die Cosinus der Winkel, welche diese Linie mit den drei

Coordinatenaxen bildet, die partiellen Differentialquotienten einer Grösse, der Entfernung der beiden Punkte, sind. Der feste Punkt habe die Coordinaten a, b, c, der bewegliche die Coordinaten x, y, z, der beide Punkte verbindende Radiusvector sei r; man ziehe durch den festen Punkt (a, b, c) drei Gerade parallel den Coordinatenaxen und zwar nach dem positiven Ende derselben gerichtet; die Winkel, welche der Radiusvector r mit diesen Geraden macht, seien α, β, γ. Man hat dann folgende Gleichungen:

$$r^2 = (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2:$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x-a}{r} = \cos\alpha; \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y-b}{r} = \cos\beta; \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z-c}{r} = \cos\gamma \text{ *)}.$$

Ist nun R die Kraft, mit welcher der Punkt (x, y, z) von dem Punkt (a, b, c) angezogen wird, so sind die Componenten, welche auf den Punkt (x, y, z) nach der positiven Seite der Coordinaten hin wirken:

$$= -R\frac{\partial r}{\partial x}, \quad -R\frac{\partial r}{\partial y}, \quad -R\frac{\partial r}{\partial z},$$

oder wenn wir

$$\int R\,dr = P$$

setzen:

$$= -\frac{\partial P}{\partial x}, \quad -\frac{\partial P}{\partial y}, \quad -\frac{\partial P}{\partial z}.$$

Die Componenten sind also die partiellen Differentialquotienten einer Grösse $-P$. Dies findet auch bei der gegenseitigen Anziehung zweier Punkte, p und p_1, statt. Ihre Coordinaten seien x, y, z und x_1, y_1, z_1, ihre Entfernung r, also

$$r^2 = (x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2.$$

R sei die Kraft der Anziehung zwischen p und p_1; dann sind die auf p wirkenden Componenten:

$$-R\frac{\partial r}{\partial x}, \quad -R\frac{\partial r}{\partial y}, \quad -R\frac{\partial r}{\partial z}$$

und die auf p_1 wirkenden Componenten:

$$-R\frac{\partial r}{\partial x_1}, \quad -R\frac{\partial r}{\partial y_1}, \quad -R\frac{\partial r}{\partial z_1},$$

welche respective gleich und entgegengesetzt sind, da

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x-x_1}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial x_1} = -\frac{x-x_1}{r}.$$

---

*) Es wird hier wie im Folgenden immer für die partiellen Differentiationen das Zeichen ∂, für die vollständigen das Zeichen d gebraucht.

also:

$$\frac{\partial r}{\partial x_1} = -\frac{\partial r}{\partial x}, \quad \text{und ebenso:} \quad \frac{\partial r}{\partial y_1} = -\frac{\partial r}{\partial y}, \quad \frac{\partial r}{\partial z_1} = -\frac{\partial r}{\partial z}.$$

Führt man nun wieder

$$P = \int R\, dr$$

ein, so sind die auf p wirkenden Componenten

$$-\frac{\partial P}{\partial x}, \quad -\frac{\partial P}{\partial y}, \quad -\frac{\partial P}{\partial z}$$

und die auf p_1 wirkenden Componenten

$$-\frac{\partial P}{\partial x_1}, \quad -\frac{\partial P}{\partial y_1}, \quad -\frac{\partial P}{\partial z_1}.$$

Betrachten wir jetzt n Punkte, welche sich gegenseitig anziehen. Ihre Massen seien $m_1, m_2, \dots m_n$, ihre Coordinaten $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots x_n, y_n, z_n$, die Entfernung von m_1 und m_2 werde mit $r_{1,2}$ bezeichnet; das Integral derjenigen Function von $r_{1,2}$, welche die zwischen beiden Punkten wirkende Anziehung ausdrückt, mit $P_{1,2}$, worin man sich das Product der Massen m_1, m_2 als Factor eintretend zu denken hat (für das *Newton*sche Gesetz z. B. wird $P_{1,2} = -\frac{m_1 m_2}{r_{1,2}}$). Dies vorausgesetzt, ist die Componente der Kraft, welche auf den Punkt m_1 wirkt, in der Richtung der x-Coordinaten:

$$= -\frac{\partial(P_{1,2} + P_{1,3} + \cdots + P_{1,n})}{\partial x_1}$$

und analog für die beiden anderen Componenten. Daher hat man für den Punkt m_1

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -\frac{\partial(P_{1,2} + P_{1,3} + \cdots + P_{1,n})}{\partial x_1},$$

$$m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} = -\frac{\partial(P_{1,2} + P_{1,3} + \cdots + P_{1,n})}{\partial y_1},$$

$$m_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2} = -\frac{\partial(P_{1,2} + P_{1,3} + \cdots + P_{1,n})}{\partial z_1}.$$

Aehnliche Gleichungen giebt es für die übrigen Punkte des Systems; für den Punkt m_2 z. B. ist die in Klammern eingeschlossene Grösse, deren Differentialquotient genommen wird $= P_{2,1} + P_{2,3} + \cdots P_{2,n}$. Die Grössen P haben aber die Eigenschaft, dass jede derselben nur von den Coordinaten der zwei Punkte abhängt, deren Indices angehängt sind, daher verschwinden bei der Differentiation nach x_1, y_1 oder z_1 die Differentialquotienten von $P_{2,3}$, $P_{2,4} \dots P_{2,n}$, $P_{3,4}, \dots P_{n-1,n}$.

und nur die Differentialquotienten von $P_{1,2}$, $P_{1,3} \ldots P_{1,n}$ verschwinden nicht. Es werden also die auf den ersten Punkt bezüglichen Differentialgleichungen ganz ungeändert bleiben, wenn man auf der rechten Seite in der Klammer zu der Summe $P_{1,2}+P_{1,3}+\cdots+P_{1,n}$ noch die Summe aller übrigen P hinzufügt. Eine ähnliche Aenderung kann man bei den anderen Gleichungen in der in Klammern eingeschlossenen Grösse anbringen, und man erhält dann in den Differentialgleichungen des ganzen Systems die Differentialquotienten einer und derselben Grösse:

$$U = -(P_{1,2}+P_{1,3}+\cdots+P_{1,n}+P_{2,3}+\cdots+P_{2,n}+\cdots+P_{n-1,n}).$$

Wir haben auf diese Weise für irgend einen Punkt des Systems die Gleichungen

$$m\frac{d^2x_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \qquad m_i\frac{d^2y_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \qquad m_i\frac{d^2z_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z_i}.$$

Diese Bemerkung, dass man in allen Gleichungen eine und dieselbe Grösse U einführen kann, scheint sehr einfach, und dennoch ist es das Uebersehen dieses Umstandes allein, welches *Euler* verhindert hat, die Allgemeinheit der *Lagrange*schen Resultate zu erreichen. *Euler* kannte das Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft nur für Anziehungen nach festen Centren. Am Ende der Nova methodus inveniendi curvas maximi minimive proprietate gaudentes hat sich *Euler* in dem Appendix de motu projectorum mit sehr unvollkommenen Ausdrücken der Differentialgleichungen für die gegenseitige Attraction begnügt. Erst *Daniel Bernoulli* hat in einer der philosophischen Classe der Berliner Akademie eingereichten Abhandlung *) diese Bemerkung gemacht und dadurch dem Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft seine wahre Bedeutung gegeben. *Lagrange* hat alsdann diese Bemerkung auf die Probleme angewandt, welche sich *Euler* in dem Aufsatz de motu projectorum gestellt hatte, und ist dadurch auf seine Hauptresultate gekommen.

Der Ausdruck U ist von *Hamilton* mit dem Namen *Kräftefunction* (force function) belegt worden. Der partielle Differentialquotient dieses Ausdrucks nach einer Coordinate einer der betrachteten n Massen giebt die Kraft, mit welcher diese Masse von allen übrigen angezogen wird, nach der Richtung dieser Coordinate gemessen.

Für das *Newton*sche Attractionsgesetz wird die Kräftefunction

$$U = \Sigma\frac{m_i . m_{i_1}}{r_{i,i_1}}.$$

*) Mém. de l'acad. de Berlin 1748.

also für den Fall dreier Körper

$$U = \frac{m_1 m_2}{r_{1,2}} + \frac{m_1 m_3}{r_{1,3}} + \frac{m_2 m_3}{r_{2,3}}.$$

In der Theorie der Zurückführung der Differentialgleichungen der Bewegung auf eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung hat man es immer nur mit der Kräftefunction zu thun, daher ist ihre Einführung von der höchsten Wichtigkeit. Vorläufig werden wir sie sehr gut zur abgekürzten Darstellung der Gleichungen benutzen können.

Es ist von Interesse, sich klar zu machen, wie weit man die Grenzen der zu betrachtenden mechanischen Probleme ausdehnen kann, ohne die Einführung der Kräftefunction aufzugeben.

Bei der gegenseitigen Anziehung der Punkte ist es nicht nöthig vorauszusetzen, dass das Gesetz, nach welchem zwei Punkte einander anziehen, für je zwei Punkte des Systems dasselbe sei, sondern man kann hierüber jede beliebige Annahme machen, vorausgesetzt, dass die Anziehung lediglich von der Entfernung abhänge, und dass irgend eine Masse m_ι mit derselben Kraft von einer der anderen Massen m_{ι_1} angezogen wird, wie m_{ι_1} von m_ι. Die Bemerkung dieser Ausdehnung ist nicht ohne allen Nutzen; so hat z. B. *Bessel* das Bedenken hervorgerufen, ob im Weltsystem zwischen je zwei Körpern dasselbe Anziehungsgesetz stattfindet, nicht als ob sich die Function der Entfernung in dem Gesetz änderte, aber er machte die Hypothese, dass ein Körper des Sonnensystems z. B. die Sonne selbst den Saturn mit einer anderen Masse anzöge, als den Uranus. Diese Hypothese würde also die Einführung der Kräftefunction nicht stören. Ausser den gegenseitigen Anziehungen der Massen können aber auch Attractionen nach festen Centren hinzukommen. Man kann sogar annehmen, was freilich nur eine mathematische Fiction ist, dass jedes der festen Centren nicht auf alle Massen wirkt, sondern nur auf eine oder auf eine bestimmte Anzahl derselben. Wird z. B. die Masse m_1 nach einem festen Centrum hingezogen, dessen Masse k und dessen Coordinaten a, b, c sind, so kommt, wenn das *Newton*sche Gesetz stattfindet, zu der Kräftefunction der Term

$$\frac{m_1 k}{\sqrt{(x_1-a)^2+(y_1-b)^2+(z_1-c)^2}}$$

hinzu, und ähnliche Terme erhält man für die übrigen Massen, wenn das feste Centrum k auch auf sie einwirkt. Endlich können noch constante parallele Kräfte hinzukommen, welche ebenfalls nicht auf alle Massen zu wirken brauchen. Es möge z. B. auf die Masse m_1 eine constante Kraft wirken (wie z. B. die Schwere), deren Componenten in den Richtungen der Coordinatenaxen A, B, Γ seien, so kommt zur Kräftefunction U der Term

$$Ax_1 + By_1 + \Gamma z_1$$

hinzu, und ähnliche Terme für die anderen Massen des Systems, wenn auf sie die constanten Kräfte A, B, Γ oder andere wirken. Für den Fall der festen Centren ist noch zu bemerken, dass, wenn sie auf alle im Problem vorkommenden Massen wirken, was natürlich in der Natur immer der Fall ist, man dieselben wie bewegliche Massen ansehen kann. Hierdurch kommen zwar überflüssige Glieder in die Kräftefunction, nämlich diejenigen, welche die gegenseitige Attraction der festen Centren ausdrücken würden, indessen sind diese Glieder reine Constanten und fallen bei jeder Differentiation heraus.

Die symbolische Form, unter welche wir die Differentialgleichungen der Bewegung gebracht haben, war:

$$\Sigma\left\{\left(m_i\frac{d^2x_i}{dt^2}-X_i\right)\delta x_i+\left(m_i\frac{d^2y_i}{dt^2}-Y_i\right)\delta y_i+\left(m_i\frac{d^2z_i}{dt^2}-Z_i\right)\delta z_i\right\} = 0,$$

welches wir besser so schreiben können:

$$(1.) \qquad \Sigma m_i\left\{\frac{d^2x_i}{dt^2}\delta x_i+\frac{d^2y_i}{dt^2}\delta y_i+\frac{d^2z_i}{dt^2}\delta z_i\right\} = \Sigma\{X_i\delta x_i+Y_i\delta y_i+Z_i\delta z_i\}.$$

In dem Fall, wo man die Kräftefunction einführen kann, wird

$$X_i = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \qquad Y_i = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \qquad Z_i = \frac{\partial U}{\partial z_i},$$

daher:

$$\Sigma m_i\left\{\frac{d^2x_i}{dt^2}\delta x_i+\frac{d^2y_i}{dt^2}\delta y_i+\frac{d^2z_i}{dt^2}\delta z_i\right\} = \Sigma\left\{\frac{\partial U}{\partial x_i}\delta x_i+\frac{\partial U}{\partial y_i}\delta y_i+\frac{\partial U}{\partial z_i}\delta z_i\right\}.$$

In dieser Gleichung nun, wie in der obigen, sind die δx_i ... als willkürliche Factoren anzusehen, welche jeden Werth annehmen können, und x_i ... als Indices derselben. Betrachtet man aber für einen Augenblick δx_i, δy_i, δz_i als unendlich kleine Incremente von x_i, y_i, z_i, so wird nach den Regeln der Differentialrechnung die rechte Seite der letzten Gleichung

$$(A.) \qquad \Sigma\left\{\frac{\partial U}{\partial x_i}\delta x_i+\frac{\partial U}{\partial y_i}\delta y_i+\frac{\partial U}{\partial z_i}\delta z_i\right\} = \delta U,$$

also hat man

$$(2.) \qquad \Sigma m_i\left\{\frac{d^2x_i}{dt^2}\delta x_i+\frac{d^2y_i}{dt^2}\delta y_i+\frac{d^2z_i}{dt^2}\delta z_i\right\} = \delta U.$$

Hierin ist δU vorläufig nur als ein abgekürztes Zeichen für die Summe (A.) anzusehen, welche mit derselben nur übereinstimmt, wenn man die δ als unendlich kleine Incremente ansieht. Obgleich nun diese Bezeichnung nur einen Sinn hat, wenn die Kräftefunction existirt, so hat man sie sogar in manchen Fällen mit Vortheil auf die allgemeinere Gleichung (1.) angewendet, um die Rechnung bequemer zu machen, indem man alsdann den Vorbehalt stillschweigend machen muss, dass man in der Entwickelung von δU den partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial U}{\partial x_i}$ durch X_i zu ersetzen hat. Hierdurch kommt man, wenn man es nur mit linearen Substitutionen zu thun hat, in der Regel zu richtigen Resultaten. Dies ist der kühne Weg, den *Lagrange* in den Turiner Memoiren, freilich ohne ihn gehörig zu rechtfertigen, eingeschlagen hat.

Die Bezeichnung δU ist auch sehr vortheilhaft, wenn man für die Coordinaten $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots x_n, y_n, z_n$ neue $3n$ Variable $q_1, q_2, \ldots q_{3n}$ einführt. Man braucht nämlich dann nur diese neuen Variablen in U einzusetzen und nach den Regeln der Differentialrechnung zu entwickeln:

$$\delta U = \frac{\partial U}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial U}{\partial q_2}\delta q_2 + \cdots + \frac{\partial U}{\partial q_{3n}}\delta q_{3n};$$

zugleich muss man aber für δx_i setzen:

$$\frac{\partial x_i}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial x_i}{\partial q_2}\delta q_2 + \cdots + \frac{\partial x_i}{\partial q_{3n}}\delta q_{3n} = \sum_s \frac{\partial x_i}{\partial q_s}\delta q_s.$$

Die Richtigkeit dieser Behauptung lässt sich folgendermassen nachweisen:

Die $3n$ Differentialgleichungen der Bewegung sind:

$$m_i\frac{d^2x_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_i}; \qquad m_i\frac{d^2y_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y_i}; \qquad m_i\frac{d^2z_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z_i},$$

wo dem i alle Werthe von 1 bis n inclusive beizulegen sind. Denkt man sich diese $3n$ Gleichungen respective mit $\frac{\partial x_i}{\partial q_k}$, $\frac{\partial y_i}{\partial q_k}$, $\frac{\partial z_i}{\partial q_k}$ multiplicirt und addirt, so erhält man:

$$\sum_i m_i\left\{\frac{d^2x_i}{dt^2}\frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \frac{d^2y_i}{dt^2}\frac{\partial y_i}{\partial q_k} + \frac{d^2z_i}{dt^2}\frac{\partial z_i}{\partial q_k}\right\} = \frac{\partial U}{\partial q_k}.$$

Solcher Gleichungen erhält man $3n$, indem man für q_k nach einander alle q einsetzt. Diese $3n$ Gleichungen vertreten nun das ursprüngliche System von Gleichungen vollkommen, so dass das eine allemal für das andere gesetzt werden kann. Multipliciren wir das letzte System mit willkürlichen Factoren $\delta q_1, \delta q_2, \ldots \delta q_s \ldots \delta q_{3n}$ und addiren, so erhalten wir eine neue symbolische

Gleichung, welche das letzte System von Differentialgleichungen und daher auch das frühere ganz ersetzt. Diese symbolische Gleichung wird aber:

$$\sum_s \sum_i m_i \left\{ \frac{d^2 x_i}{dt^2} \frac{\partial x_i}{\partial q_s} + \frac{d^2 y_i}{dt^2} \frac{\partial y_i}{\partial q_s} + \frac{d^2 z_i}{dt^2} \frac{\partial z_i}{\partial q_s} \right\} \delta q_s = \sum_s \frac{\partial U}{\partial q_s} \delta q_s.$$

oder wenn man die Summationen auf der linken Seite dieser Gleichung in umgekehrter Ordnung ausführt:

$$\sum_i m_i \left\{ \frac{d^2 x_i}{dt^2} \sum_s \frac{\partial x_i}{\partial q_s} \delta q_s + \frac{d^2 y_i}{dt^2} \sum_s \frac{\partial y_i}{\partial q_s} \delta q_s + \frac{d^2 z_i}{dt^2} \sum_s \frac{\partial z_i}{\partial q_s} \delta q_s \right\} = \sum_s \frac{\partial U}{\partial q_s} \delta q_s.$$

Diese Gleichung ist dieselbe, in welche (2.) übergeht, wenn man für δU $\sum_s \frac{\partial U}{\partial q_s} \delta q_s$ einsetzt und für δx_i, δy_i, δz_i respective $\sum_s \frac{\partial x_i}{\partial q_s} \delta q_s$, $\sum_s \frac{\partial y_i}{\partial q_s} \delta q_s$, $\sum_s \frac{\partial z_i}{\partial q_s} \delta q_s$. Somit ist also die oben angegebene Regel für die Substitution neuer Variablen bewiesen. In der transformirten Gleichung sind alsdann wiederum die δq_s als von einander unabhängige Grössen zu betrachten, und es zerfällt so die transformirte symbolische Gleichung in das soeben angegebene zweite System der $3n$ Gleichungen.

Aber in diesen Rechnungsvortheilen liegt nicht die Wichtigkeit unserer symbolischen Gleichungen (1.) und (2.). Die wahre Bedeutung dieser Darstellung besteht vielmehr darin, dass sie auch noch dann beizubehalten ist, wenn das System nicht mehr ein freies ist, sondern wenn Bedingungsgleichungen hinzutreten, welche die Verbindung der Punkte ausdrücken. Aber alsdann sind die Variationen nicht mehr als ganz willkürlich und von einander unabhängig zu behandeln, sondern als *virtuelle* Variationen, d. h. als solche, welche mit den Bedingungen vereinbar sind. Nehmen wir z. B. an, dass drei Bedingungsgleichungen existiren

$$f = 0, \quad \varphi = 0, \quad \psi = 0,$$

so werden die zwischen den Variationen existirenden Relationen, welche sie zu virtuellen machen, durch folgende Gleichungen bestimmt:

$$\delta f = 0, \quad \delta \varphi = 0, \quad \delta \psi = 0,$$

oder entwickelt:

$$\sum \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial f}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial f}{\partial z_i} \delta z_i \right) = 0,$$

$$\sum \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial \varphi}{\partial z_i} \delta z_i \right) = 0,$$

$$\sum \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial \psi}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial \psi}{\partial z_i} \delta z_i \right) = 0.$$

Jede Bedingungsgleichung giebt also eine lineare Relation zwischen den $3n$ Variationen ... δx_i, δy_i, δz_i .... Hat man m Bedingungsgleichungen, also auch m Relationen zwischen den Variationen, so kann man alle Variationen durch $3n-m$ derselben ausdrücken, und erhält durch Substitution derselben unsere symbolische Gleichung frei von m Variationen. Aber diese Elimination der m Variationen wird äusserst complicirt. Ein Auskunftsmittel für diese Schwierigkeit hat *Lagrange* in der Einführung eines Systems von Multiplicatoren gefunden.

Die im Obigen enthaltene Ausdehnung unserer symbolischen Gleichung auf ein durch Bedingungen beschränktes System ist, wie sich von selbst versteht, nicht bewiesen, sondern nur als Behauptung historisch ausgesprochen. Dies ausdrücklich zu sagen, scheint nöthig zu sein, denn obgleich *Laplace* diese Ausdehnung in der Méc. céleste ebensowenig bewiesen hat, als es hier geschehen ist, sondern sie auch nur historisch behauptet, so hat man dies dennoch für einen Beweis gehalten, und *Poinsot* hat gegen diese Meinung eine eigene Abhandlung *) geschrieben. Er sagt darin sehr richtig, dass sich die Mathematiker häufig durch den sehr langen Weg täuschen lassen, den sie zurückgelegt haben, zuweilen aber auch durch den sehr kurzen. Durch den langen Weg lassen sie sich täuschen, wenn sie durch sehr weite Rechnungen endlich zu einer Identität kommen, dieselbe aber für einen Satz halten. Ein Beispiel von dem Entgegengesetzten giebt unser Fall.

Diese Ausdehnung zu beweisen, ist keineswegs unsere Absicht, wir wollen sie vielmehr als ein Princip ansehen, welches zu beweisen nicht nöthig ist. Dies ist die Ansicht vieler Mathematiker, namentlich von *Gauss* **).

Dritte Vorlesung.

Das Princip der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunkts.

Wir wollen nun zum Beweise der allgemeinen Principe übergehen, welche für die bisher betrachteten mechanischen Probleme gelten. Das erste

*) *Liouvilles* Journal, vol. 3, p. 244.

**) Wahrscheinlich liegt eine mündliche gegen *Jacobi* gerichtete Aeusserung von *Gauss* zu Grunde, ein in diesem Sinne niedergeschriebener Ausspruch desselben scheint sich wenigstens nach Herrn Professor *Scherings* gütiger Mittheilung nicht zu finden.
C.

derselben ist (vgl. die erste Vorlesung) das Princip der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunkts.

Nehmen wir zuerst den einfacheren Fall, in welchem eine Kräftefunction existirt, so haben wir:

$$\Sigma m_i \left\{ \frac{d^2x_i}{dt^2}\delta x_i + \frac{d^2y_i}{dt^2}\delta y_i + \frac{d^2z_i}{dt^2}\delta z_i \right\} = \delta U.$$

Wir wollen annehmen, dass sowohl U als die Bedingungsgleichungen nur von den Differenzen der Coordinaten abhängen, so dass sie sich gleich bleiben, wenn man alle x um eine und dieselbe Grösse vermehrt, und ebenso, wenn man alle y oder alle z um eine Grösse vermehrt. Dann ist die Annahme:

$$\delta x_1 = \delta x_2 = \cdots = \delta x_n = \lambda,$$
$$\delta y_1 = \delta y_2 = \cdots = \delta y_n = \mu,$$
$$\delta z_1 = \delta z_2 = \cdots = \delta z_n = \nu,$$

eine mit den Bedingungsgleichungen vereinbare. Bei dieser Annahme erhalten wir:

$$1.)\qquad \Sigma m_i \left\{ \frac{d^2x_i}{dt^2}\lambda + \frac{d^2y_i}{dt^2}\mu + \frac{d^2z_i}{dt^2}\nu \right\} = \Sigma\frac{\partial U}{\partial x_i}\lambda + \Sigma\frac{\partial U}{\partial y_i}\mu + \Sigma\frac{\partial U}{\partial x_i}\nu.$$

Die rechte Seite ist aber $= 0$. In der That, da unserer Annahme nach U nur von den Differenzen der Coordinaten abhängt, so kann man, wenn

$$x_1 - x_n = \xi_1, \quad x_2 - x_n = \xi_2, \quad \ldots \quad x_{n-1} - x_n = \xi_{n-1}$$

gesetzt wird, U, insofern es von den x-Coordinaten abhängt, so darstellen:

$$U = F(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{n-1}).$$

Dann ist zugleich:

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = \frac{\partial F}{\partial \xi_1}, \quad \frac{\partial U}{\partial x_2} = \frac{\partial F}{\partial \xi_2}, \quad \ldots \quad \frac{\partial U}{\partial x_{n-1}} = \frac{\partial F}{\partial \xi_{n-1}}, \quad \frac{\partial U}{\partial x_n} = -\frac{\partial F}{\partial \xi_1} - \frac{\partial F}{\partial \xi_2} - \cdots - \frac{\partial F}{\partial \xi_{n-1}},$$

also:

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} + \frac{\partial U}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial U}{\partial x_n} = \Sigma\frac{\partial U}{\partial x_i} = 0.$$

und ebenso:

$$\Sigma\frac{\partial U}{\partial y_i} = 0, \quad \Sigma\frac{\partial U}{\partial z_i} = 0.$$

Sonach zieht sich unsere obige Gleichung zusammen in:

$$\Sigma m_i \left\{ \frac{d^2x_i}{dt^2}\cdot\lambda + \frac{d^2y_i}{dt^2}\cdot\mu + \frac{d^2z_i}{dt^2}\cdot\nu \right\} = 0,$$

und da diese Gleichung für alle Werthe von λ, μ, ν bestehen muss, so ist

$$\Sigma m_i \frac{d^2x_i}{dt^2} = 0, \quad \Sigma m_i \frac{d^2y_i}{dt^2} = 0, \quad \Sigma m_i \frac{d^2z_i}{dt^2} = 0.$$

Setzen wir jetzt

$$\Sigma m_i = M, \quad \Sigma m_i x_i = MA, \quad \Sigma m_i y_i = MB, \quad \Sigma m_i z_i = MC,$$

so dass A, B, C, wie bekannt, die Coordinaten des Schwerpunkts des Systems sind, so kann man statt der obigen Gleichungen auch folgende schreiben:

$$(2.) \qquad \frac{d^2A}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2B}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2C}{dt^2} = 0,$$

welche integrirt geben:

$$(3.) \qquad A = \alpha^{(0)} + \alpha' t, \quad B = \beta^{(0)} + \beta' t, \quad C = \gamma^{(0)} + \gamma' t,$$

d. h. der Schwerpunkt bewegt sich in einer geraden Linie, deren Gleichungen in den laufenden Coordinaten A, B, C

$$\frac{A - \alpha^{(0)}}{\alpha'} = \frac{B - \beta^{(0)}}{\beta'} = \frac{C - \gamma^{(0)}}{\gamma'}$$

sind, und bewegt sich in derselben mit der constanten Geschwindigkeit

$$\sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2}.$$

In dem allgemeineren Fall, in welchem die Kräftefunction nicht existirt, hat man statt der Gleichung (1.) folgende:

$$\Sigma m_i \left\{ \frac{d^2x_i}{dt^2}\lambda + \frac{d^2y_i}{dt^2}\mu + \frac{d^2z_i}{dt^2}\nu \right\} = \Sigma X_i\lambda + \Sigma Y_i\mu + \Sigma Z_i\nu,$$

und da dieselbe für alle Werthe von λ, μ, ν gilt,

$$\Sigma m_i \frac{d^2x_i}{dt^2} = \Sigma X_i, \quad \Sigma m_i \frac{d^2y_i}{dt^2} = \Sigma Y_i, \quad \Sigma m_i \frac{d^2z_i}{dt^2} = \Sigma Z_i$$

oder, wenn man die Schwerpunktscoordinaten einführt,

$$(4.) \qquad M\frac{d^2A}{dt^2} = \Sigma X_i, \quad M\frac{d^2B}{dt^2} = \Sigma Y_i, \quad M\frac{d^2C}{dt^2} = \Sigma Z_i,$$

d. h. der Schwerpunkt bewegt sich so, als ob alle im System wirkenden Kräfte parallel mit sich selbst verschoben im Schwerpunkt angebracht wären, und als ob zugleich die Summe aller Massen im Schwerpunkt ihren Sitz hätte.

Sind die auf diese Weise parallel verschobenen Kräfte in ihrer neuen Lage im Gleichgewicht, ist also

$$\Sigma X_i = 0, \quad \Sigma Y_i = 0, \quad \Sigma Z_i = 0,$$

so wirken auf den Schwerpunkt gar keine beschleunigenden Kräfte. Dies findet statt, wenn nur gegenseitige Attractionen in dem System wirken, da alsdann Wirkung und Gegenwirkung, in denselben Angriffspunkt verlegt, sich zerstören (dieser Fall ist schon oben behandelt, da nämlich alsdann immer eine Kräftefunction existirt); es findet aber nicht statt, sobald feste Centren im Probleme vorkommen.

Alles bisher Gesagte gilt natürlich nur, wenn die Bedingungsgleichungen nur von den Differenzen der x-Coordinaten, der y-Coordinaten und der z-Coordinaten abhängen. Ein solcher Fall ist das Seilpolygon, wenn man auf die Ausdehnung des Seils keine Rücksicht nimmt. Damit in diesem Fall auch die Kräftefunction allein von den Differenzen der Coordinaten abhänge, müssen die Endpunkte des Seils nicht befestigt gedacht werden, da sonst diese Punkte wie feste Centren in die Aufgabe eintreten. Bei einem ganz freien System gelten natürlich die Gleichungen (4.) unter allen Umständen. Findet die Kräftefunction statt, ohne bloss von den Differenzen der Coordinaten abzuhängen, was der Fall ist, wenn feste Centren oder constante Kräfte vorhanden sind, so gelten auch in diesem Falle die Gleichungen (4.) und nicht die Gleichungen (2.).

In dem Namen des Princips der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunkts bezieht sich das Wort Erhaltung darauf, dass die Bewegung des Schwerpunkts durch dieselben Gleichungen dargestellt erhalten wird, als wenn keine Bedingungsgleichungen da wären. Wenn z. B. beim Seilpolygon die Verbindung der Punkte fortfallend gedacht wird, so werden die Gleichungen der Bewegung des Schwerpunkts nicht geändert, denn dieselben sind unabhängig von den Bedingungsgleichungen. Die Modification ist nur die, dass die Summen ΣX_i, ΣY_i, ΣZ_i andere Werthe erhalten, sobald die Coordinaten der einzelnen Punkte andere Functionen der Zeit werden. Sind aber diese Summen noch überdies Constanten, was z. B. der Fall ist, wenn das System allein der Schwere ausgesetzt ist, so ändert sich in der Bewegung des Schwerpunkts durch die Bedingungsgleichungen gar nichts.

Vierte Vorlesung.

Das Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft.

Eine Hypothese über die Variationen, die sich unter allen Umständen mit den Bedingungsgleichungen verträgt, ist, dass man für jeden Werth von i

$$\delta x_i = \frac{dx_i}{dt}\,dt, \qquad \delta y_i = \frac{dy_i}{dt}\,dt, \qquad \delta z_i = \frac{dz_i}{dt}\,dt$$

setzt. Führen wir diese Werthe der Variationen in die symbolische Gleichung (2.) der zweiten Vorlesung ein, welche für den Fall der Existenz einer Kräftefunction gilt, so geht δU in dU über, und wir erhalten nach Division durch dt

$$(1.)\qquad \Sigma m_i\left\{\frac{d^2x_i}{dt^2}\frac{dx_i}{dt}+\frac{d^2y_i}{dt^2}\frac{dy_i}{dt}+\frac{d^2z_i}{dt^2}\frac{dz_i}{dt}\right\} = \frac{dU}{dt}.$$

Diese Gleichung lässt sich direct integriren, ihr Integral ist

$$\tfrac{1}{2}\Sigma m_i\left\{\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2\right\} = U+h,$$

wo h die willkürliche Constante der Integration ist. Bezeichnet man das Element des von der Masse m_i in der Zeit dt durchlaufenen Weges mit ds_i, ihre Geschwindigkeit mit v_i, so hat man

$$\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2=\left(\frac{ds_i}{dt}\right)^2=v_i^2,$$

und die obige Gleichung nimmt also die Form an:

$$\tfrac{1}{2}\Sigma m_i v_i^2 = U+h.$$

Dies ist der Satz von der lebendigen Kraft. Lebendige Kraft eines Punktes nennt man nämlich das Quadrat seiner Geschwindigkeit multiplicirt in seine Masse; die lebendige Kraft eines Systems ist gleich der Summe der lebendigen Kräfte der einzelnen materiellen Punkte. Demnach lässt sich die Gleichung (1.) in Worten so aussprechen: *Die halbe lebendige Kraft eines Systems ist gleich der Kräftefunction vermehrt um eine Constante.*

Das Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft ist, wie die Herleitung desselben gezeigt hat, unabhängig von den Bedingungsgleichungen, und hierauf beruht ein grosser Theil seiner Wichtigkeit. Es gilt, sobald die Kräftefunction existirt; eine Erweiterung der Fälle, in welchen die Kräftefunction eingeführt werden kann, musste auch eine Ausdehnung dieses Princips mit sich führen. Daher ist nach unserer früheren Bemerkung *Daniel Bernoulli* derjenige, welcher dieses Princip zu seiner heutigen allgemeinen Bedeutung erhoben hat, während man es vor ihm nur für Attractionen nach festen Centren kannte.

Durch Subtraction zweier Gleichungen (1.), welche für zwei verschiedene Zeiten gelten, kann man die willkürliche Constante h eliminiren und erhält dann den Satz: *Bewegt sich ein System von einem Ort zum anderen, so ist die Differenz der lebendigen Kraft des Systems für Anfang und Ende gleich der Differenz zwischen den Werthen der Kräftefunction für dieselben Momente.* Die Aenderung der lebendigen Kraft ist also nur von dem Anfangsund Endwerth der Kräftefunction abhängig, die Mittelzustände haben auf dieselbe keinen Einfluss. Um dies anschaulicher zu machen, nehmen wir an, es bewege sich ein Punkt auf einer beliebigen Curve von einem gegebenen Anfangspunkt nach einem gegebenen Endpunkt hin; ist nun die Anfangsgeschwindigkeit gegeben, so ist auch die Endgeschwindigkeit eine und dieselbe, die dazwischen liegende Curve mag gestaltet sein, wie sie wolle. Die Geschwindigkeit muss hier natürlich nach der wirklich erfolgenden Bewegung in der Richtung der Tangente der Curve gemessen werden; derjenige Theil der Geschwindigkeit, welcher, wenn der ursprünglich dem Punkte mitgetheilte Stoss nicht in der Richtung der Tangente der Curve wirkt, durch den Widerstand derselben vernichtet wird, ist hier nicht mitzurechnen. Dieselbe Unabhängigkeit von der Gestalt des durchlaufenen Weges findet auch bei einem System statt. Als Corollar hiervon ergiebt sich der Satz: *wenn die Bewegung eines Systems von der Art ist, dass es in dieselbe Lage zurückkehren kann, so ist bei der Rückkehr auch die lebendige Kraft dieselbe;* wobei vorausgesetzt wird, dass das Princip der lebendigen Kraft überhaupt gilt. Auf diese Unabhängigkeit von der Gestalt des durchlaufenen Weges oder, was dasselbe ist, von den Bedingungsgleichungen (denn von diesen wird die Gestalt des durchlaufenen Weges bestimmt) bezieht sich im Namen des Princips das Wort Erhaltung.

Der Ausdruck lebendige Kraft rührt von der Bedeutung her, die dieses Princip in der Maschinenlehre hat, deren Basis dasselbe seit *Carnot* geworden ist. Man hat in dieser Disciplin festgesetzt, dass die Hälfte der lebendigen Kraft, also $\frac{1}{2}\Sigma m_i v_i^2$, gleich der Arbeit der Maschine ist, oder, wie man sich in diesen praktischen Dingen ausdrückt, $\frac{1}{2}\Sigma m_i v_i^2$ ist dasjenige, was an einer Maschine bezahlt wird. Dies verhält sich nämlich so: Man nimmt in der Maschinenlehre, insofern auf die Reibung keine Rücksicht genommen wird, als Princip an, dass es nur Arbeit mache, eine Kraft in ihrer Richtung (und zwar im entgegengesetzten Sinn ihrer Wirkung) zu bewegen, während es keine Arbeit mache, sie senkrecht auf ihre Richtung fortzubewegen. Man nimmt ferner an, dass die Arbeit einer Maschine gemessen wird durch das Product der fortbewegten Kraft, in den Weg, um welchen sie in ihrer Richtung (im entgegengesetzten Sinn) fortbewegt worden ist. Ein Gewicht horizontal fortzuschieben wird also nicht als Arbeit angesehen, sondern nur es zu heben, und die Arbeit des Hebens wird gemessen durch das Product des gehobenen Gewichts in die Höhe, um welche es gehoben worden. Dies ist die Arbeit, welche z. B. bei der Ramme bezahlt wird.

In einem System von materiellen Punkten ist jeder derselben Angriffspunkt der in ihm wirkenden Kraft. Indem diese Angriffspunkte bei der Bewegung des Systems verschoben werden, müssen auch die in ihnen wirkenden Kräfte verschoben werden. Aber die Verrückung der Kraft geschieht im Allgemeinen nicht in der Richtung der Kraft, sondern unter irgend einem Winkel gegen dieselbe; daher muss man, um die Arbeit des Systems zu bekommen, die Kraft nicht in den durchlaufenen Weg multipliciren, sondern in die Projection des durchlaufenen Weges auf die Richtung der Kraft. In dem Punkt m_i wirken die Kräfte $m_i\frac{d^2x_i}{dt^2}$, $m_i\frac{d^2y_i}{dt^2}$, $m_i\frac{d^2z_i}{dt^2}$ und zwar wirken dieselben parallel den Coordinatenaxen. Die Verrückung von m_i in dem Zeitelement dt ist ds_i, die Projectionen derselben auf die Coordinatenaxen sind respective dx_i, dy_i, dz_i, daher ist die auf Fortbewegung des Punktes m_i verwandte Arbeit im Zeitelement dt

$$m_i\left\{\frac{d^2x_i}{dt^2}dx_i+\frac{d^2y_i}{dt^2}dy_i+\frac{d^2z_i}{dt^2}dz_i\right\}$$

und die Arbeit des ganzen Systems im Zeitelement dt

$$\Sigma m_i\left\{\frac{d^2x_i}{dt^2}dx_i+\frac{d^2y_i}{dt^2}dy_i+\frac{d^2z_i}{dt^2}dz_i\right\} = \tfrac{1}{2}d(\Sigma m_i v_i^2),$$

woraus man für die Arbeit des Systems in der Zeit t_0 bis t_1 erhält

$$\tfrac{1}{2}\left\{\Sigma m_i v^2_{i\,(t=t_1)} - \Sigma m_i v^2_{i\,(t=t_0)}\right\}.$$

Die halbe Differenz des Anfangs- und Endwerthes der Summe $\Sigma m_i v_i^2$ ist also das Maass für die Arbeit des Systems. Dies ist der wahrscheinliche Grund des von *Leibnitz* für diese Summe eingeführten Namens „lebendige Kraft“, über dessen Entstehung man viel gestritten hat.

In dem Fall, wo die Kräftefunction eine homogene Function ist, und wo man es mit einem freien System zu thun hat, kann man dem Satz von den lebendigen Kräften, der in Gleichung (1.) enthalten ist, eine sehr interessante Form geben. U sei eine homogene Function der k^{ten} Dimension: dann ist bekanntlich

$$\Sigma\left(x_i\frac{\partial U}{\partial x_i}+y_i\frac{\partial U}{\partial y_i}+z_i\frac{\partial U}{\partial z_i}\right) = kU.$$

Hat man es mit einem freien System zu thun, so kann man

$$\delta x_i = x_i\omega,\qquad \delta y_i = y_i\omega,\qquad \delta z_i = z_i\omega$$

setzen, wo ω eine unendlich kleine Grösse bezeichnet, und man erhält dann mit Berücksichtigung der Gleichung für die Homogeneität von U

$$\delta U = kU.\omega.$$

Daher wird unsere symbolische Gleichung (Gl. (2.) der zweiten Vorlesung)

$$\Sigma m_i\left(x_i\frac{d^2x_i}{dt^2}+y_i\frac{d^2y_i}{dt^2}+z_i\frac{d^2z_i}{dt^2}\right) = kU,$$

wo der gemeinschaftliche Factor ω weggelassen ist. Addiren wir hierzu die mit 2 multiplicirte Gleichung (1.), so erhalten wir

$$\Sigma m_i\left\{x_i\frac{d^2x_i}{dt^2}+\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2+y_i\frac{d^2y_i}{dt^2}+\left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2+z_i\frac{d^2z_i}{dt^2}+\left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2\right\} = (k+2)\,U+2h$$

oder

$$\Sigma m_i\frac{d}{dt}\left(x_i\frac{dx_i}{dt}+y_i\frac{dy_i}{dt}+z_i\frac{dz_i}{dt}\right) = (k+2)\,U+2h$$

oder auch

$$\tfrac{1}{2}\Sigma m_i\frac{d^2}{dt^2}(x_i^2+y_i^2+z_i^2) = (k+2)\,U+2h$$

oder, wenn wir

$$x_i^2+y_i^2+z_i^2 = r_i^2$$

setzen und mit 2 multipliciren:

$$(2.)\qquad \frac{d^2(\Sigma m_i r_i^2)}{dt^2} = (2k+4)\,U+4h.$$

Der Ausdruck $\Sigma m_i r_i^2$ kann auf eine merkwürdige Art umgeformt werden, nämlich so, dass nicht mehr die Entfernungen aller Punkte vom Anfangspunkt der Coordinaten vorkommen, sondern nur die gegenseitigen Entfernungen der Punkte und die Entfernung des Schwerpunkts vom Anfangspunkt der Coordinaten. Transformationen dieser Art sind Lieblingsformeln von *Lagrange*. Die in Rede stehende erhält man folgendermassen:

Es ist, wie leicht einzusehen,

$$(\Sigma m_i)(\Sigma m_i x_i^2)-(\Sigma m_i x_i)^2 = \Sigma m_i m_{i'}(x_i^2+x_{i'}^2-2x_i x_{i'}),$$

wo auf der rechten Seite die Summe nur auf verschiedene Werthe von i und i', jede Combination einmal gerechnet, auszudehnen ist. Aehnliche Gleichungen giebt es für y und z; addirt man alle drei, so erhält man

$$(\Sigma m_i)\left(\Sigma m_i(x_i^2+y_i^2+z_i^2)\right)-(\Sigma m_i x_i)^2-(\Sigma m_i y_i)^2-(\Sigma m_i z_i)^2$$
$$= \Sigma m_i m_{i'}\left\{(x_i-x_{i'})^2+(y_i-y_{i'})^2+(z_i-z_{i'})^2\right\}.$$

Nun führe man wie früher die Coordinaten des Schwerpunkts ein und setze

$$\Sigma m_i = M,\quad \Sigma m_i x_i = MA,\quad \Sigma m_i y_i = MB,\quad \Sigma m_i z_i = MC.$$

ferner bezeichne man die Entfernung der Punkte m_i, $m_{i'}$ von einander mit $r_{i,i'}$: alsdann ist

$$(3.)\qquad M\Sigma m_i r_i^2 - M^2(A^2+B^2+C^2) \;=\; \Sigma m_i m_{i'} r_{i,i'}^2.$$

Hierin hat man nach dem Früheren

$$A = \alpha^{(0)}+\alpha' t,\quad B = \beta^{(0)}+\beta' t,\quad C = \gamma^{(0)}+\gamma' t$$

zu substituiren. Führt man diese Substitutionen aus und differentiirt zweimal nach der Zeit, so kommt

$$\frac{d^2(\Sigma m_i r_i^2)}{dt^2} = 2M(\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2)+\frac{d^2(\Sigma m_i m_{i'} r_{i,i'}^2)}{M\,dt^2},$$

und wenn man dies in die Gleichung (2.) einführt,

$$\frac{d^2(\Sigma m_i m_{i'} r_{i,i'}^2)}{M\,dt^2} \;=\; (2k+4)U+4h-2M(\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2)$$

oder endlich, wenn man

$$4h-2M(\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2) \;=\; 4h'$$

setzt,

$$(4.)\qquad \frac{d^2(\Sigma m_i m_{i'} r_{i,i'}^2)}{M\,dt^2} \;=\; (2k+4)U+4h'.$$

In der Gleichung (3.) sind die Grössen r_i die Radien Vectoren der materiellen Punkte des Systems vom Anfangspunkt der Coordinaten aus gerechnet, $\sqrt{A^2+B^2+C^2}$ der Radius Vector des Schwerpunkts von ebendaher gerechnet; diese Grössen ändern sich daher, sobald man den Anfangspunkt der Coordinaten verlegt. Die Grössen $r_{i,i'}$ sind dagegen unabhängig von der Wahl des Anfangspunkts der Coordinaten, denn sie sind die Entfernungen je zweier Punkte des Systems unter sich. Man nehme nun den Anfangspunkt der Coordinaten im Schwerpunkt an, wodurch $A^2+B^2+C^2=0$ wird; zu gleicher Zeit bezeichne man die Radien Vectoren vom Schwerpunkt aus gerechnet mit ϱ_i, dann geht die Gleichung (3.) über in

$$(5.)\qquad M\Sigma m_i \varrho_i^2 \;=\; \Sigma m_i m_{i'} r_{i,i'}^2.$$

Wenn man zwischen dieser Gleichung und (3.) $\Sigma m_i m_{i'} r_{i,i'}^2$ eliminirt, so ergiebt sich:

$$(6.)\qquad \Sigma m_i r_i^2 \;=\; \Sigma_i m_i \varrho_i^2 + M(A^2+B^2+C^2),$$

d. h. die Summe $\Sigma m_i r_i^2$ für irgend einen Punkt genommen (denselben als Anfangspunkt der Radien Vectoren r_i betrachtet) ist gleich derselben Summe für den

Schwerpunkt, vermehrt um das in die Summe der Massen aller materiellen Punkte multiplicirte Quadrat der Entfernung jenes Punktes vom Schwerpunkt. Hieraus sieht man, dass $\Sigma m_i r_i^2$ für den Schwerpunkt ein Minimum ist, und dass es proportional dem Quadrate der Entfernung vom Schwerpunkt wächst; $\Sigma m_i r_i^2$ wird daher einen constanten Werth annehmen für alle Punkte, die auf der Oberfläche einer vom Schwerpunkt als Mittelpunkt beschriebenen Kugel liegen. Ein ähnlicher Satz gilt für die Ebene, wo der geometrische Ort der Punkte, für welche $\Sigma m_i r_i^2$ constant bleibt, ein Kreis ist.

Die Formel (6.) können wir auch selbständig beweisen. In der That verrücken wir unser früheres ganz beliebiges Coordinatensystem parallel mit sich selbst, so dass der neue Anfangspunkt der Coordinaten in den Schwerpunkt fällt, und bezeichnen in dem neuen Coordinatensystem die Coordinaten unserer n materiellen Punkte mit $\xi_1, \eta_1, \zeta_1; \xi_2, \eta_2, \zeta_2; \ldots \xi_n, \eta_n, \zeta_n$, so haben wir für jedes i

$$x_i = \xi_i + A, \quad y_i = \eta_i + B, \quad z_i = \zeta_i + C,$$

wo A, B, C als Coordinaten des Schwerpunkts durch die Gleichungen

$$\Sigma m_i = M, \quad \Sigma m_i x_i = MA, \quad \Sigma m_i y_i = MB, \quad \Sigma m_i z_i = MC$$

definirt werden. Daher ist

$$\begin{aligned} \Sigma m_i r_i^2 &= \Sigma m_i x_i^2 + \Sigma m_i y_i^2 + \Sigma m_i z_i^2 \\ &= \Sigma m_i \xi_i^2 + 2A\Sigma m_i \xi_i + A^2 \Sigma m_i \\ &\quad + \Sigma m_i \eta_i^2 + 2B\Sigma m_i \eta_i + B^2 \Sigma m_i \\ &\quad + \Sigma m_i \zeta_i^2 + 2C\Sigma m_i \zeta_i + C^2 \Sigma m_i. \end{aligned}$$

Nun ist aber

$$MA = \Sigma m_i x_i = \Sigma m_i \xi_i + \Sigma m_i . A = \Sigma m_i \xi_i + MA,$$

daher

$$\Sigma m_i \xi_i = 0, \quad \text{ebenso} \quad \Sigma m_i \eta_i = 0, \quad \Sigma m_i \zeta_i = 0.$$

Hierdurch erhalten wir

$$\Sigma m_i r_i^2 = \Sigma m_i (\xi_i^2 + \eta_i^2 + \zeta_i^2) + M(A^2 + B^2 + C^2),$$

übereinstimmend mit Formel (6.).

Eine ähnliche Formel ergiebt sich für die Differentiale. Aus unseren bisherigen Formeln nämlich finden sich die Differentialformeln

$$dx_i = d\xi_i + dA, \quad dy_i = d\eta_i + dB, \quad dz_i = d\zeta_i + dC,$$
$$\Sigma m_i d\xi_i = 0, \quad \Sigma m_i d\eta_i = 0, \quad \Sigma m_i d\zeta_i = 0,$$

und hieraus erhält man

$$\Sigma m_i (dx_i^2 + dy_i^2 + dz_i^2) = \Sigma m_i (d\xi_i^2 + d\eta_i^2 + d\zeta_i^2) + M(dA^2 + dB^2 + dC^2)$$

oder, wenn wir durch dt^2 dividiren,

$$(7.)\quad \begin{cases} \Sigma m_{\iota}\left\{\left(\frac{dx_{\iota}}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy_{\iota}}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz_{\iota}}{dt}\right)^2\right\} \\ = \Sigma m_{\iota}\left\{\left(\frac{d\xi_{\iota}}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\eta_{\iota}}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\zeta_{\iota}}{dt}\right)^2\right\}+M\left\{\left(\frac{dA}{dt}\right)^2+\left(\frac{dB}{dt}\right)^2+\left(\frac{dC}{dt}\right)^2\right\}, \end{cases}$$

d. h. die absolute lebendige Kraft des Systems ist gleich der relativen lebendigen Kraft des Systems in Beziehung auf den Schwerpunkt (oder, wie man sich ausdrückt, um den Schwerpunkt) vermehrt um die absolute lebendige Kraft des Schwerpunkts. Daher ist die absolute lebendige Kraft des Systems immer grösser als seine relative lebendige Kraft um den Schwerpunkt.

Man kann die relative lebendige Kraft um den Schwerpunkt in den Satz der lebendigen Kräfte einführen. Dieser Satz war in der Gleichung

$$\tfrac{1}{2}\Sigma m_{\iota}\left\{\left(\frac{dx_{\iota}}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy_{\iota}}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz_{\iota}}{dt}\right)^2\right\} = U+h$$

enthalten. Transformirt man die linke Seite dieser Gleichung mittelst der Gleichung (7.), so findet sich

$$\tfrac{1}{2}\Sigma m_{\iota}\left\{\left(\frac{d\xi_{\iota}}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\eta_{\iota}}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\zeta_{\iota}}{dt}\right)^2\right\} = U+h-\tfrac{1}{2}M\left\{\left(\frac{dA}{dt}\right)^2+\left(\frac{dB}{dt}\right)^2+\left(\frac{dC}{dt}\right)^2\right\}.$$

Es ist aber

$$h-\tfrac{1}{2}M\left\{\left(\frac{dA}{dt}\right)^2+\left(\frac{dB}{dt}\right)^2+\left(\frac{dC}{dt}\right)^2\right\} = h-\tfrac{1}{2}M(\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2),$$

also dasselbe, was wir bisher mit h' bezeichnet haben, und es wird

$$(8.)\quad \tfrac{1}{2}\Sigma m_{\iota}\left\{\left(\frac{d\xi_{\iota}}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\eta_{\iota}}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\zeta_{\iota}}{dt}\right)^2\right\} = U+h'.$$

Der Satz der lebendigen Kräfte gilt also ebensowohl für die relative lebendige Kraft um den Schwerpunkt, als für die absolute; es ändert sich hierbei nur die Constante h in h'. Man darf übrigens nicht vergessen, dass hier vorausgesetzt wird, es gelte das Princip der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunkts; denn auf dieser Voraussetzung beruht die Substitution von $\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2$ für $\left(\frac{dA}{dt}\right)^2+\left(\frac{dB}{dt}\right)^2+\left(\frac{dC}{dt}\right)^2$. Das Resultat (8.) konnte man übrigens vorhersehen. In der That, falls das Princip der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunkts gilt, sind U und die Bedingungsgleichungen nur von den Differenzen der Coordinaten abhängig; diese Ausdrücke bleiben also ungeändert, wenn man ξ_{ι}, η_{ι}, ζ_{ι} an die Stelle von x_{ι}, y_{ι}, z_{ι} setzt, wo

$$x_{\iota} = \xi_{\iota}+A, \qquad y_{\iota} = \eta_{\iota}+B, \qquad z_{\iota} = \zeta_{\iota}+C;$$

ferner hat man

$$\frac{d^2A}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2B}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2C}{dt^2} = 0,$$

daher

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} = \frac{d^2\xi_i}{dt^2}, \quad \frac{d^2y_i}{dt^2} = \frac{d^2\eta_i}{dt^2}, \quad \frac{d^2z_i}{dt^2} = \frac{d^2\zeta_i}{dt^2}.$$

Die symbolische Gleichung

$$\Sigma m_i \left(\frac{d^2x_i}{dt^2} \delta x_i + \frac{d^2y_i}{dt^2} \delta y_i + \frac{d^2z_i}{dt^2} \delta z_i \right) = \delta U$$

und die Bedingungsgleichungen des Problems gelten also noch, wenn man für x_i, y_i, z_i, ... die Grössen ξ_i, η_i, ζ_i, setzt, d. h. diese Gleichungen gelten eben so wohl für die relative Bewegung um den Schwerpunkt als für die absolute. Dasselbe musste daher auch mit der daraus gezogenen Consequenz, dem Satz der lebendigen Kraft, der Fall sein, wobei sich freilich die Constante der Integration ändern konnte, was auch wirklich eintritt.

Aus der obenstehenden Auseinandersetzung sieht man, dass man im Falle der Gültigkeit des Princips der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunkts nur nöthig hat, die relative Bewegung des Systems um den Schwerpunkt zu bestimmen. Alsdann suche man die Bewegung des Schwerpunkts, und man erhält aus der blossen Addition beider Bewegungen die absolute Bewegung des Systems.

Das Sonnensystem gehört in diese Kategorie von Problemen. Aber wir kennen nur seine relative Bewegung. Zur Bestimmung der Bewegung des Schwerpunkts fehlen uns alle Data; denn hierzu müsste es wirkliche Fixsterne geben, was sehr zweifelhaft ist, und diese müssten uns so nahe sein, dass sie in Beziehung auf eine 40 Millionen Meilen lange Linie (grosse Axe der Erdbahn) eine einigermassen in Betracht kommende Parallaxe gäben. *Argelander* hat in neuerer Zeit die Verhältnisse von $\alpha':\beta':\gamma'$ (Siehe Gl. (3.) der dritten Vorlesung), d. h. die Richtung der Bewegung des Schwerpunkts zu bestimmen gesucht und zwar nach einer von dem älteren *Herschel* angeregten Idee, indessen beruht diese Bestimmung nur auf Wahrscheinlichkeitsgründen.

Wir kehren jetzt wieder zur Gleichung (4.) zurück, welche für den Fall, wo U eine homogene Function k^{ter} Ordnung ist, das Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft in der interessanten Form

$$\frac{d^2(\Sigma m_i m_{i'} r_{i,i'}^2)}{M dt^2} = (2k+4)U + 4h'$$

enthielt. Mit Berücksichtigung der Gleichung (5.) kann man hierfür schreiben

$$\frac{d^2(\Sigma m_\iota \varrho_\iota^2)}{dt^2} = (2k+4)U+4h',$$

wo die ϱ_i die vom Schwerpunkt aus gezogenen Radien Vectoren sind. Für das Sonnensystem ist $k=-1$, also hat man

$$\frac{d^2(\Sigma m_\iota \varrho_\iota^2)}{dt^2} = 2U+4h',$$

wo

$$U = \Sigma \frac{m_\iota m_{\iota'}}{r_{\iota,\iota'}}.$$

Ueber diese Gleichung lassen sich mehrere Betrachtungen anstellen. Wäre die Attraction umgekehrt proportional nicht dem Quadrate der Entfernung, sondern dem Cubus derselben, so könnte man die obige Gleichung integriren. Denn in diesem Falle wäre $k=-2$, $2k+4=0$, also, wenn $\Sigma m_\iota \varrho_\iota^2$ zur Abkürzung mit R bezeichnet wird,

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = 4h'.$$

Aber alsdann würde das Sonnensystem auseinandergehen, denn eine zweimalige Integration ergiebt:

$$R = 2h't^2+h''t+h''',$$

es würde also mit wachsender Zeit R ins Unendliche wachsen, da aber $R=\Sigma m_\iota \varrho_\iota^2$, so müsste wenigstens ein Körper des Sonnensystems in eine unendliche Entfernung vom Schwerpunkt desselben rücken.

Aehnliche Betrachtungen zeigen, dass für den wirklichen Fall des Sonnensystems, d. h. für die dem Quadrate der Entfernung umgekehrt proportionale Attraction die Constante h' negativ sein muss, wenn das Sonnensystem stabil sein soll. In der That, insofern im Sonnensystem nur anziehende Kräfte wirken, ist die Kräftefunction U eine ihrer Natur nach positive Grösse. Nun hat zwar *Bessel* die Hypothese gemacht, dass die Sonne eine abstossende Kraft gegen die Kometen besitze, und hat hiermit die Erscheinung in Verbindung gebracht, dass alle Kometenschweife von der Sonne abgekehrt sind: indessen ist dies doch noch nichts Gewisses und man wird vorläufig bei allgemeinen Betrachtungen von dieser abstossenden Kraft absehen müssen. Demnach ist also U eine nothwendig positive Grösse. Dies vorausgesetzt, erhalten wir durch Integration der Gleichung

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = 2U+4h'$$

zwischen den Grenzen 0 und t

$$\frac{dR}{dt} - R'_0 = \int_0^t (2U + 4h')\,dt,$$

oder, wenn α den kleinsten Werth von U zwischen den Grenzen 0 und t bedeutet,

$$\frac{dR}{dt} - R'_0 > (2\alpha + 4h')\,t,$$

wo R'_0 der Werth von $\frac{dR}{dt}$ für $t = 0$ ist. Dies noch einmal zwischen den Grenzen 0 und t integrirt giebt, wenn R_0 der Werth von R für $t = 0$ ist,

$$R - R_0 - R'_0 t > (\alpha + 2h')\,t^2$$

oder

$$R > R_0 + R'_0 t + (\alpha + 2h')\,t^2.$$

Hier ist α eine nothwendig positive Grösse, da U seiner Natur nach positiv ist. Wäre nun $2h'$ positiv, so wäre es auch $\alpha + 2h'$, also würde R mit wachsendem t ins Unendliche wachsen, d. h. das Sonnensystem wäre nicht stabil; $2h'$ muss also negativ sein. Aber sein numerischer Werth darf nicht grösser sein, als der grösste Werth, den U zwichen 0 und t annimmt; denn sonst sind alle Elemente des Integrals $2\int_0^t (U + 2h')\,dt$ negativ, man kann daher

$$\frac{dR}{dt} - R'_0 < -2\beta t$$

setzen, wo β eine positive Grösse ist, nämlich der kleinste numerische Werth, den $U + 2h'$ zwischen 0 und t annimmt; und dies integrirt giebt

$$R < R_0 + R'_0 t - \beta t^2,$$

d. h. R nähert sich mit wachsendem t der negativen Unendlichkeit, was absurd ist, da R eine Summe von Quadraten bedeutet. Man kann alle diese Betrachtungen in der Behauptung zusammenfassen, dass $U + 2h'$ in den Grenzen der Integration weder lauter positive, noch lauter negative Werthe haben kann, die Stabilität des Sonnensystems vorausgesetzt. $U + 2h'$ muss also vom Positiven zum Negativen fortwährend herüber und hinüberschwanken, d. h. U muss um $-2h'$ herumschwanken. Diese Schwankungen von U müssen aber in bestimmten endlichen Grenzen eingeschlossen sein; denn gesetzt U werde zu einer Zeit unendlich gross, so kann dies, da $U = \Sigma \frac{m_i m_{i'}}{r_{i,i'}}$ ist, nur dadurch geschehen, dass sich zwei Körper unendlich nahe kommen, und da dann ihre Attraction unendlich gross wird, so können sie nie wieder aus einander kommen: es bleibt also von der Zeit an ein bestimmtes $r_{,,} = 0$, mithin $U = \infty$, und es wird, sowie man über diese Zeit fort integrirt, $\int\int (U + 2h') dt^2$, mithin auch R, einen unendlich grossen positiven Werth erhalten, welchen Werth auch h' habe. Es müssten also andere Körper des Sonnensystems sich unendlich weit entfernen, es wäre keine Stabilität da. U muss also um $-2h'$ herum Schwankungen machen, die zwischen bestimmten endlichen Grenzen eingeschlossen sind, von welchem Verhalten die periodischen Functionen ein Beispiel geben, deren constanter Term $= -2h'$ ist. Dies wird durch die Formeln für die elliptische Bewegung bestätigt. In diesen ist $U = \frac{1}{r}$, $-2h' = \frac{1}{a}$. r muss also um a herumschwanken, was in der That der Fall ist: ferner muss die Entwickelung von $\frac{1}{r}$ nach der mittleren Anomalie den constanten Term $\frac{1}{a}$ enthalten, und auch dies findet wirklich Statt. Bei der gegenseitigen Anziehung zweier Körper geben negative Werthe von h' die elliptische Bewegung, $h' = 0$ entspricht der parabolischen, und positive Werthe geben die hyperbolische Bewegung, welches ebenfalls mit unseren Resultaten übereinstimmt.

Den Satz, dass U um $-2h'$ oder $U + 2h'$ um Null herumschwankt, kann man auch so ausdrücken, dass $2U + 2h'$ um U herumschwankt; $2U + 2h'$ ist aber nach Gleichung (8.) die lebendige Kraft (um den Schwerpunkt); also muss der Werth der lebendigen Kraft um den Werth der Kräftefunction herumschwanken. Werden alle Entfernungen im System sehr gross, so wird die Kräftefunction sehr klein, also nach dem Satz der lebendigen Kraft auch diese, also die Geschwindigkeiten sehr klein, oder je grösser die Entfernungen, desto kleiner die Geschwindigkeiten; hierauf beruht die Stabilität.

In diesen und ähnlichen Betrachtungen liegt der Kern der berühmten Untersuchungen von *Laplace*, *Lagrange* und *Poisson* über die Stabilität des Weltsystems. Es existirt nämlich der Satz: nimmt man die Elemente einer Planetenbahn veränderlich an und entwickelt die grosse Axe nach der Zeit, so tritt die Zeit nur als Argument periodischer Functionen ein, es kommen keine der Zeit proportionale Terme vor. Diesen Satz hat zuerst *Laplace* nur für kleine Excentricitäten und die erste Potenz der Masse bewiesen. *Lagrange* dehnte ihn *) mit einem Federstrich auf beliebige Excentricitäten

*) Mém. de l'Institut, 1808.

aus. *Poisson* endlich bewies*), dass er auch noch gilt, wenn man die zweite Potenz der Masse berücksichtigt; dies ist eine seiner schönsten Arbeiten. Für die Berücksichtigung der dritten Potenz der Masse kommt schon die Zeit ausserhalb der periodischen Functionen in dieselben multiplicirt vor, für die vierte Potenz tritt t sogar schon, ohne in periodische Functionen multiplicirt zu sein, auf. Das Resultat für die dritte Potenz gäbe also noch immer Oscillationen um einen Mittelwerth, aber für $t = \infty$ unendlich grosse, bei Berücksichtigung der vierten Potenz sind aber überhaupt dergleichen Oscillationen nicht mehr da. Auf ein ähnliches Resultat kommt man bei den kleinen Schwingungen; bei Berücksichtigung höherer Potenzen der Verschiebungen kommt man hier zu dem Ergebniss, dass kleine Impulse mit wachsendem t zu immer grösseren Schwingungen führen.

Aber alle diese Resultate beweisen genau genommen gar nichts. Denn indem man die höheren Potenzen der Verschiebungen vernachlässigt, nimmt man an, dass die Zeit klein sei, und kann nicht hieraus Schlüsse auf grosse Werthe von t machen. Man hätte sich daher gar nicht wundern dürfen, wenn auch für die erste und zweite Potenz der Masse die Zeit schon ausserhalb der periodischen Functionen vorkäme; denn die Berechtigung zur Entwickelung und Vernachlässigung der höheren Potenzen der Masse liegt nur in der Annahme, dass t eine gewisse Grenze nicht übersteigt. Man bewegt sich daher in einem Kreise.

Ein anschauliches Beispiel hiervon giebt das Pendel. Die Stellung, in welcher die Kugel senkrecht über dem Aufhängungspunkt sich befindet, giebt ein labiles Gleichgewicht des Pendels. Man erhält hier die Zeit ausserhalb des Sinus und Cosinus und schliesst daraus mit Recht, dass ein unendlich kleiner Impuls eine endliche Bewegung giebt; aber es wäre sehr falsch, aus dem Umstand, dass die Zeit ausserhalb der periodischen Functionen vorkommt, zu schliessen, dass die Bewegung des Pendels nicht periodisch sei, denn die Kugel rotirt in dem vorliegenden Fall periodisch um ihren Aufhängungspunkt. Ebenso falsch wäre es, aus dem Resultat für die höheren Potenzen der Masse zu schliessen, dass das Sonnensystem nicht stabil sei.

*) Journal de l'école polytechnique, cah. 15.

Fünfte Vorlesung.

Das Princip der Erhaltung der Flächenräume.

Indem wir die Annahme machten, dass die Kräftefunction U und die Bedingungsgleichungen ungeändert blieben, wenn man sämmtliche x-Coordinaten um ein und dasselbe Stück ändert, sämmtliche y-Coordinaten um ein zweites, sämmtliche z-Coordinaten um ein drittes, fanden wir das Princip der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunkts. Die angegebenen Aenderungen der Coordinaten kommen darauf hinaus, dass man den Anfangspunkt der Coordinaten verlegt, die Coordinatenaxen aber parallel bleiben lässt.

Wir wollen jetzt eine andere Annahme machen: es sollen die Bedingungsgleichungen ungeändert bleiben, wenn man bei ungeänderter x-Axe die Axen der y und z um einen beliebigen Winkel in ihrer Ebene dreht. Setzt man

$$y = r\cos v, \qquad z = r\sin v,$$

so kommt dies mit der Vermehrung des Winkels v um einen beliebigen Winkel δv überein. Bezeichnet man für die verschiedenen Punkte des Systems die Winkel v respective mit $v_1, v_2, \ldots v_\iota, \ldots$, so müssen also U und die Bedingungsgleichungen ungeändert bleiben, wenn sämmtliche v um denselben Winkel δv geändert werden, d. h. sie müssen nur von den Differenzen $v_\iota - v_\varkappa$ abhängig sein. Hierher gehört ein ganz freies System und überhaupt jeder Fall, wo nur die Entfernungen je zweier materiellen Punkte des Systems vorkommen. Durch Einführung von r und v wird nämlich der Ausdruck für eine solche Distanz:

$$\begin{aligned} r_{1,2}^2 &= (x_1-x_2)^2+(r_1\cos v_1-r_2\cos v_2)^2+(r_1\sin v_1-r_2\sin v_2)^2 \\ &= (x_1-x_2)^2+r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos(v_1-v_2), \end{aligned}$$

also nur von der Differenz v_1-v_2 abhängig. Ebenso gehört der Fall hierher, wo die Punkte des Systems gezwungen sind, sich auf einer Rotationsfläche zu bewegen, deren Rotationsaxe die Axe der x ist; alsdann kommen nämlich die v in den Bedingungsgleichungen gar nicht vor. Ferner ist zu bemerken, dass, wenn feste Punkte in dem Problem vorkommen sollen, diese in der Axe der x liegen müssen.

Bei dieser Annahme über U und die Bedingungsgleichungen wird man also sämmtliche v_i gleichzeitig um δv vermehren können. Hierdurch bleiben die $x_{,}$ ungeändert, die $y_{,}$ und $z_{,}$ aber werden variirt, denn es ist

$$y_{,} = r_{,} \cos v_{,}, \qquad z_{,} = r_{,} \sin v_{,},$$

also erhält man

$$\delta x_{,} = 0, \qquad \delta y_{,} = -r_{,} \sin v_{,} . \delta v, \qquad \delta z_{,} = r_{,} \cos v_{,} \delta v$$
$$= -z_{,} \delta v \qquad\qquad = y_{,} \delta v$$

als die für unser Problem geltenden virtuellen Variationen der Coordinaten. Diese in die symbolische Gleichung (2.) der zweiten Vorlesung eingesetzt führen zu der Gleichung:

$$\delta v \Sigma m_{,} \left\{ -z_{,} \frac{d^2 y_{,}}{dt^2} + y_{,} \frac{d^2 z_{,}}{dt^2} \right\} = \delta U;$$

für die angegebenen Verschiebungen bleibt U ungeändert, also ist $\delta U = 0$, und man hat

$$(1.) \qquad \Sigma m_{,} \left\{ y_{,} \frac{d^2 z_{,}}{dt^2} - z_{,} \frac{d^2 y_{,}}{dt^2} \right\} = 0.$$

Wir wollen hier gleich bemerken, dass diese Gleichung in dem allgemeineren Fall, wo statt δU auf der rechten Seite der Ausdruck $\Sigma(X_{,} \delta x_{,} + Y_{,} \delta y_{,} + Z_{,} \delta z_{,})$ steht, ebenfalls gültig bleibt, wenn nur

$$(2.) \qquad \Sigma(Y_{,} z_{,} - Z_{,} y_{,}) = 0$$

ist. Ist dieser Ausdruck nicht $= 0$, so tritt er auf der rechten Seite der Gleichung (1.) an die Stelle der 0. Nehmen wir also an, dass entweder eine Kräftefunction U von der angegebenen Beschaffenheit existire oder in dem allgemeineren Fall, wo sie nicht existirt, dass die Gleichung (2.) erfüllt sei. Dann gilt die Gleichung (1.) in der oben angegebenen Form; ihre linke Seite ist aber integrabel, und man erhält durch Integration:

$$(3.) \qquad \Sigma m_{,} \left\{ y_{,} \frac{dz_{,}}{dt} - z_{,} \frac{dy_{,}}{dt} \right\} = \alpha,$$

wo α die Constante der Integration bedeutet. Führt man wieder die Polarcoordinaten $r_{,}$ und $v_{,}$ ein, so nimmt (3.) die Form an:

$$(4.) \qquad \Sigma m_{,} r_{,}^2 \frac{dv_{,}}{dt} = \alpha.$$

In dieser Gleichung ist das Princip der Erhaltung der Flächen enthalten. Es ist nämlich bekanntlich $r^2 dv$ gleich dem doppelten Flächenelement in Polarcoordinaten, also ergiebt eine nochmalige Integration der Gleichung (4.) von 0 bis t den Satz: *Multiplicirt man jeden der Flächenräume, welche von den* *auf die Ebene der yz projicirten Radien Vectoren in dieser Ebene beschrieben werden, in die Masse des dazugehörigen materiellen Punktes, so ist die Summe der Producte proportional der Zeit.* Dies ist das berühmte Princip von der Erhaltung der Flächenräume. Es gilt, wie gesagt, wenn U und die Bedingungsgleichungen dadurch nicht geändert werden, dass man die Axen der y und z in ihrer Ebene um die Axe der x dreht, eine Hypothese, welche man für die Bedingungsgleichungen analytisch so ausdrücken kann, dass für jede Bedingungsgleichung $f = 0$ die Gleichung

$$\Sigma\left(z_i \frac{\partial f}{\partial y_i} - y_i \frac{\partial f}{\partial z_i}\right) = 0$$

identisch erfüllt sein muss.

Dass bei der vorhin gebrauchten Transformation $y\,dz - z\,dy = r^2 dv$ das v nur als Differential vorkommt, ist ein in vielen Fällen sehr wichtiger Umstand; aus dieser Transformation geht unter Anderem auch hervor, dass $y\,dz - z\,dy$ in eine homogene Function -2^{ter} Ordnung von y und z multiplicirt ein vollständiges Differential ist, da es sich als Product von dv in eine Function von v allein darstellt.

In dem Fall, wo U und die Bedingungsgleichungen auch unverändert bleiben, wenn man die Axen der x und z um die der y und die Axen der x und y um die der z dreht, hat man ausser der Gleichung (3.) noch zwei ähnliche, nämlich

$$(5.)\qquad \Sigma m_i\left(z_i \frac{dx_i}{dt} - x_i \frac{dz_i}{dt}\right) = \beta,$$

$$(6.)\qquad \Sigma m_i\left(x_i \frac{dy_i}{dt} - y_i \frac{dx_i}{dt}\right) = \gamma.$$

Dies gilt z. B. für n sich frei im Raum bewegende Körper, und in diesem Fall hat man daher immer vier Integrale, die drei Flächensätze und den Satz der lebendigen Kraft.

Es ist ein sehr merkwürdiger Umstand, auf den wir schon in der Einleitung aufmerksam gemacht haben, dass von diesen Flächensätzen entweder nur einer gilt, oder alle drei. Wir werden es als ein reines Resultat des Calculs, als eine blosse Folgerung einer mathematischen Identität bewiesen sehen, dass der dritte Flächensatz immer aus den beiden anderen folgt. Wenn alle drei Flächensätze gelten, so kann man, ohne der Allgemeinheit der Lösung zu nahe zu treten, zwei der Constanten α, β, γ gleich Null annehmen. Diese Constanten werden nämlich in jedem Probleme durch die Bedingungsgleichungen bestimmt; aber, wie die Bedingungsgleichungen auch beschaffen sein mögen, immer lassen sich die Coordinaten so verlegen, dass im neuen Coordinatensystem zwei der Constanten verschwinden. In der That, die neuen Coordinaten seien ξ_i, η_i, ζ_i, dann sind die allgemeinen Transformationsformeln der Coordinaten

$$\begin{aligned}\xi_i &= a x_i + b y_i + c z_i,\\ \eta_i &= a' x_i + b' y_i + c' z_i,\\ \zeta_i &= a'' x_i + b'' y_i + c'' z_i,\end{aligned}$$

wo unter den Constanten a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'' unter anderen folgende neun Gleichungen existiren:

$$\begin{aligned}&b'c''-b''c' = a, \qquad && c'a''-c''a' = b, \qquad && a'b''-a''b' = c,\\ &b''c-bc'' = a', && c''a-ca'' = b', && a''b-ab'' = c',\\ &bc'-b'c = a'', && ca'-c'a = b'', && ab'-a'b = c''.\end{aligned}$$

Demnach ist mit Berücksichtigung dieser Gleichungen

$$\eta_i \frac{d\zeta_i}{dt} - \zeta_i \frac{d\eta_i}{dt} = a\left(y_i \frac{dz_i}{dt} - z_i \frac{dy_i}{dt}\right) + b\left(z_i \frac{dx_i}{dt} - x_i \frac{dz_i}{dt}\right) + c\left(x_i \frac{dy_i}{dt} - y_i \frac{dx_i}{dt}\right),$$

daher

$$(7.) \qquad \Sigma m_i\left(\eta_i \frac{d\zeta_i}{dt} - \zeta_i \frac{d\eta_i}{dt}\right) = a\alpha + b\beta + c\gamma.$$

Hieraus sieht man, dass, wenn die Flächensätze für ein Coordinatensystem in allen drei Coordinatenebenen gelten, sie für jedes Coordinatensystem gelten*). Wir wollen die neue Constante $a\alpha + b\beta + c\gamma$ unter einer anderen Form darstellen. Bezeichnet man die Winkel, welche die Axe der ξ mit den Axen der x, y, z

---

*) Die bisher betrachteten Flächensätze, welche sich auf einen unbeweglichen Anfangspunkt der Coordinaten beziehen, kann man auf das Sonnensystem nicht anwenden, weil man im Weltraum keinen festen Punkt hat. Aber man überzeugt sich leicht, wenn man

$$x_i = \mathfrak{x}_i + A, \qquad y_i = \mathfrak{y}_i + B, \qquad z_i = \mathfrak{z}_i + C$$

setzt, wo A, B, C die Coordinaten des Schwerpunkts sind (dritte Vorlesung), dass die Flächensätze (3.), (5.), (6.) auch noch gelten, wenn man für x_i, y_i, z_i beziehungsweise $\mathfrak{x}_i$, $\mathfrak{y}_i$, $\mathfrak{z}_i$ setzt, sobald man zugleich α, β, γ um

$$\begin{aligned}&M(\beta^0\gamma' - \gamma^0\beta'),\\ &M(\gamma^0\alpha' - \alpha^0\gamma'),\\ &M(\alpha^0\beta' - \beta^0\alpha')\end{aligned}$$

verändert, d. h. dass jene Flächensätze auch noch für den Fall gelten, wo der gleichförmig und geradlinig bewegte Schwerpunkt als Anfangspunkt der Coordinaten betrachtet wird.

macht, mit l, m, n, so ist

$$a = \cos l, \qquad b = \cos m, \qquad c = \cos n.$$

Setzt man noch

$$\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}} = \cos\lambda, \qquad \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}} = \cos\mu, \qquad \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}} = \cos\nu,$$

so hat man

$$a\alpha+b\beta+c\gamma = \sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}.(\cos l\cos\lambda+\cos m\cos\mu+\cos n\cos\nu).$$

Aber da $\cos\lambda^2+\cos\mu^2+\cos\nu^2 = 1$, so lassen sich λ, μ, ν als die Winkel ansehen, welche eine gewisse Gerade L mit den Axen der x, y, z bildet. Bezeichnet man den Winkel, welchen diese Gerade mit der ξ-Axe bildet, mit V, so hat man

$$\cos l\cos\lambda+\cos m\cos\mu+\cos n\cos\nu = \cos V,$$

also

$$a\alpha+b\beta+c\gamma = \sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\cdot\cos V.$$

Die Constante des Flächensatzes für die Ebene der $\eta\zeta$ ist also $= \sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$ multiplicirt in den Cosinus des Winkels, welchen die Axe der ξ mit der nach obiger Angabe construirten Geraden L bildet. Dasselbe gilt natürlich für die beiden anderen Flächensätze in dem neuen Coordinatensystem, nur dass statt V die Winkel V' und V'' zu nehmen sind, welche die Gerade L mit den Axen der η und ζ bildet. Lässt man nun die Axe der ξ mit der Geraden L zusammenfallen, so wird der Winkel $V = 0$, zu gleicher Zeit wird $V' = 90^0$ und $V'' = 90^0$, daher $\cos V = 1$, $\cos V' = 0$, $\cos V'' = 0$. Hieraus sieht man, dass die Constanten der Flächensätze für die Ebenen der $\xi\eta$ und $\xi\zeta$ wirklich Null werden, und zugleich wird die Constante des Flächensatzes der Ebene $\eta\zeta$

$$\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2},$$

d. h. gleich dem Maximum, welches diese Constante erreichen kann, da ihr Werth in der allgemeinen Form $\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}.\cos V$ enthalten ist.

Die auf diese Weise bestimmte Ebene der $\eta\zeta$ hat *Laplace* mit dem Namen der unveränderlichen Ebene belegt; er hat geglaubt, dass man sie dazu benutzen könne, zu finden, ob im Lauf der Jahrtausende Stösse im Sonnensystem vorgekommen sind, indem sich alsdann ihre Lage ändern muss. Geben umgekehrt zwei zu verschiedenen Zeiten angestellte Messungen verschiedene Lagen für diese Ebene, so müssen Stösse während dieser Zeit vorgekommen sein. Dies ist aber der geringste Nutzen der unveränderlichen Ebene. Schreiben wir für die neuen Coordinaten wieder die Buchstaben der frühern x, y, z, so dass die Ebene der yz die unveränderliche wird, so haben wir die drei Flächensätze

$$\Sigma m_\iota\left(y_\iota\frac{dz_\iota}{dt}-z_\iota\frac{dy_\iota}{dt}\right)=\varepsilon,\quad \Sigma m_\iota\left(z_\iota\frac{dx_\iota}{dt}-x_\iota\frac{dz_\iota}{dt}\right)=0,\quad \Sigma m_\iota\left(x_\iota\frac{dy_\iota}{dt}-y_\iota\frac{dx_\iota}{dt}\right)=0,$$

wo

$$\varepsilon = \sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}.$$

Für den Fall zweier Körper kann man diesen Flächensätzen eine interessante geometrische Deutung geben. In diesem Fall hat man

$$m_1\left(y_1\frac{dz_1}{dt}-z_1\frac{dy_1}{dt}\right)+m_2\left(y_2\frac{dz_2}{dt}-z_2\frac{dy_2}{dt}\right) = \varepsilon,$$

$$m_1\left(z_1\frac{dx_1}{dt}-x_1\frac{dz_1}{dt}\right)+m_2\left(z_2\frac{dx_2}{dt}-x_2\frac{dz_2}{dt}\right) = 0.$$

$$m_1\left(x_1\frac{dy_1}{dt}-y_1\frac{dx_1}{dt}\right)+m_2\left(x_2\frac{dy_2}{dt}-y_2\frac{dx_2}{dt}\right) = 0.$$

Daher nach Elimination von m_1 und m_2 aus den beiden letzten Gleichungen:

$$(8.)\qquad z_1\frac{dx_1}{dt}-x_1\frac{dz_1}{dt} : x_1\frac{dy_1}{dt}-y_1\frac{dx_1}{dt} = z_2\frac{dx_2}{dt}-x_2\frac{dz_2}{dt} : x_2\frac{dy_2}{dt}-y_2\frac{dx_2}{dt}.$$

Diese Proportion hat eine einfache geometrische Bedeutung. In der That, man denke sich in m_1 an die von m_1 beschriebene Curve eine Tangente gelegt, durch diese Tangente und den Anfangspunkt der Coordinaten denke man sich eine Ebene E_1 gelegt, auf diese Ebene eine Normale N_1 im Anfangspunkt der Coordinaten errichtet. Die Cosinus der Winkel, welche N_1 mit den Coordinatenaxen bildet, seien p_1, q_1, r_1; dann hat man für den Punkt m_1 die beiden Gleichungen

$$p_1x_1+q_1y_1+r_1z_1 = 0,$$
$$p_1dx_1+q_1dy_1+r_1dz_1 = 0,$$

welche sich auch in Form einer doppelten Proportion schreiben lassen, nämlich:

$$p_1 : q_1 : r_1 = y_1dz_1-z_1dy_1 : z_1dx_1-x_1dz_1 : x_1dy_1-y_1dx_1.$$

Ebenso erhält man, wenn man für den Punkt m_2 die analoge Construction macht, indem man die Ebene E_2 der E_1 entsprechend und die Normale N_2 der N_1 entsprechend construirt und hierdurch die Cosinus p_2, q_2, r bestimmt:

$$p_2 : q_2 : r_2 = y_2dz_2-z_2dy_2 : z_2dx_2-x_2dz_2 : x_2dy_2-y_2dx_2.$$

Hieraus geht hervor, dass man die Gleichung (8.) vermittelst der Grössen p_1, q_1, r_1, p_2, q_2, r_2 so schreiben kann:

$$q_1 : r_1 = q_2 : r_2.$$

Die geometrische Bedeutung dieser Gleichung lässt sich leicht finden. Die Gleichungen der Geraden N_1 und N_2 sind

$$\frac{x}{p_1} = \frac{y}{q_1} = \frac{z}{r_1} \quad \text{und} \quad \frac{x}{p_2} = \frac{y}{q_2} = \frac{z}{r_2}.$$

Daher hat man als Gleichungen ihrer Projectionen auf die Ebene der yz

$$\frac{y}{q_1} = \frac{z}{r_1} \quad \text{und} \quad \frac{y}{q_2} = \frac{z}{r_2}.$$

Aber da $q_1 : r_1 = q_2 : r_2$, so sind diese beiden Gleichungen identisch, d. h. N_1 und N_2 haben dieselbe Projection in der Ebene der yz, oder auch, N_1 und N_2 liegen in einer Ebene, welche senkrecht auf der der yz steht, und welche, da N_1 und N_2 durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehen, die Axe der x enthält. Hieraus geht für die Ebenen E_1 und E_2 hervor, dass sie die Ebene der yz in einer und derselben Linie schneiden. Es gilt also für die freie Bewegung zweier Massen m_1 und m_2 der Satz:

Man denke sich in m_1 und m_2 Tangenten an die Bahnen der beiden Punkte gezogen. Durch diese Tangenten und den Schwerpunkt des Systems (dies ist der Anfangspunkt der Coordinaten) *denke man sich Ebenen gelegt: dann schneiden dieselben die unveränderliche Ebene* (die Ebene der yz) *in einer und derselben Geraden.*

Diese geometrische Deutung rührt von *Poinsot* her. Ich habe von derselben eine interessante Anwendung auf das Problem der drei Körper gemacht *).

Sowie aus dem Satz der lebendigen Kraft die Stabilität des Weltsystems rücksichtlich seiner Dimensionen bewiesen wurde, so kann das Princip der Flächen dazu benutzt werden, die Stabilität desselben rücksichtlich der Form seiner Bahnen zu beweisen. Der früher erwähnte Beweis sollte zeigen, dass die grossen Axen der Ellipsen, in welchen sich die Planeten bewegen, nicht über gewisse Grenzen hinauswachsen können; ebenso kann man aus dem Satz der Flächen beweisen, dass die Excentricitäten sich nur zwischen gewissen Grenzen verändern können, und hiervon hängen die Formen der Bahnen ab. Aber ausser dem Uebelstande des früheren Beweises, dass für die Berücksichtigung der höheren Potenzen dennoch säculare Terme vorkommen, d. h. solche, welche die Zeit ausser dem Zeichen des Sinus und Cosinus

*) *Crelles* Journal, Bd. 26, p. 115. Math. Werke, Bd. I, p. 30.

enthalten, leidet dieser Beweis an der Unvollkommenheit, dass er nur für Himmelskörper mit einigermassen beträchtlichen Massen gilt. In der Gleichung nämlich, aus welcher man das in Rede stehende Resultat zieht, sind die einzelnen Terme in die Massen der Himmelskörper multiplicirt, und daher influiren die Körper mit kleinen Massen so wenig auf die ganze Gleichung, dass man auf ihre Excentricitäten hieraus keinen Schluss machen kann. Die Stabilität der Form der Bahn gilt auch in der That nicht von den Kometen; aber sie gilt auch nicht einmal für die kleineren Planeten, z. B. den Mercur, dessen Masse so gering ist, dass sie bisher nur nach Muthmassungen geschätzt werden konnte, und dass der erste von *Encke* herrührende Versuch, dieselbe aus Beobachtungen herzuleiten, nur durch die ausserordentliche Nähe möglich wurde, in welche der nach ihm benannte Komet dem Merkur kam.

Wenn zu den gegenseitigen Attractionen der materiellen Punkte noch Anziehungen nach festen Centren hinzukommen, so hört das Princip der Flächen auf zu gelten, es sei denn, dass diese Centren in einer Geraden liegen. Nehmen wir diese Gerade zur Axe der x, so gilt alsdann der eine Flächensatz in der Ebene der yz, während die andern beiden Flächensätze zu bestehen aufhören. In der That, betrachten wir einen materiellen Punkt m_i, und denken wir uns durch denselben eine Ebene E_i parallel der Ebene der yz gelegt. Denkt man sich nun die Anziehungen, welche der Punkt m_i durch alle in der Axe der x gelegenen festen Centren erleidet, so wird diese Kraft von dem Punkt m_i nach einem gewissen Punkt der x-Axe hin gerichtet sein: man kann daher diese Kraft in zwei zerlegen, von denen die eine parallel der Axe der x durch den Punkt m_i geht, die andere von dem Punkt m_i nach dem Durchschnittspunkt der Ebene E_i mit der Axe der x gerichtet ist, und daher in dieser Ebene liegt. Diese letztere Kraft wollen wir mit Q_i bezeichnen und dieselbe in zwei Componenten parallel den Axen der y und z zerlegen. Behalten wir die früheren Bezeichnungen bei, so ist die Componente parallel der y-Axe

$$= Q_i \cos r_i,$$

und die Componente parallel der z-Axe

$$= Q_i \sin r_i.$$

Daher kommt in der symbolischen Gleichung der Bewegung zu dem früheren δU jetzt noch der Ausdruck

$$\Sigma Q_i (\cos r_i \,.\, \delta y_i + \sin r_i \,.\, \delta z_i)$$

hinzu. Wir haben also, wenn wir unter U nur denjenigen Theil der Kräftefunction verstehen, welcher von der gegenseitigen Attraction der Punkte herrührt,

$$\Sigma m_i \left\{ \frac{d^2 x_i}{dt^2} \delta x_i + \frac{d^2 y_i}{dt^2} \delta y_i + \frac{d^2 z_i}{dt^2} \delta z_i \right\} = \delta U + \Sigma Q_i (\cos v_i . \delta y_i + \sin v_i \delta z_i).$$

oder, wenn wie oben,

$$\delta x_i = 0, \quad \delta y_i = -r_i \sin v_i \delta v = -z_i \delta v, \quad \delta z_i = r_i \cos v_i \delta v = y_i \delta v$$

gesetzt wird, wodurch δU verschwindet,

$$\Sigma m_i \left(y_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} - z_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} \right) = 0,$$

und daher durch Integration

$$\Sigma m_i \left(y_i \frac{dz_i}{dt} - z_i \frac{dy_i}{dt} \right) = \alpha,$$

d. h. das Princip der Erhaltung der Flächen gilt für die Ebene, auf welcher die Gerade senkrecht steht, in der sämmtliche festen Centra enthalten sind. In diesem Fall hat man also zwei Integrale, den Satz der lebendigen Kraft und einen Flächensatz. Treten aber in das Problem mehrere feste Centra ein, welche nicht in gerader Linie liegen, so existirt kein Flächensatz mehr, und man hat nur noch das eine Integral des Princips der lebendigen Kraft.

Nimmt man überdies an, dass die Centra nicht fest seien, sondern eine eigene, von den übrigen materiellen Punkten des Systems unabhängige Bewegung haben, so dass diese Bewegung eine gegebene Function der Zeit ist, so hört auch das Princip der lebendigen Kraft zu bestehen auf. Solche Fälle kommen in der Natur vor; hierher gehört z. B. die Attraction eines Kometen durch Sonne und Jupiter, wo die Bahnen von Sonne und Jupiter als gegeben anzusehen sind, und der Komet als ein materieller Punkt, der auf jene Bahnen gar keinen Einfluss hat. Hier hört, wie gesagt, das Princip der lebendigen Kraft zu bestehen auf; denn dieses beruht wesentlich darauf, dass man für die Entfernung r eines materiellen Punktes (x, y, z) von einem Centrum (a, b, c) die Differentialgleichung

$$dr = \frac{x-a}{r} dx + \frac{y-b}{r} dy + \frac{z-c}{r} dz$$

hat. Aber diese Differentialgleichung setzt voraus, dass a, b, c Constanten sind; sie hört also in unserem Falle zu bestehen auf, und mit ihr das Princip der lebendigen Kraft. Man kann zwar noch immer die auf die einzelnen Punkte wirkenden Kräfte als partielle Differentialquotienten einer Function U darstellen, aber diese Function enthält jetzt ausser den Coordinaten noch die Zeit explicite: es ist daher jetzt nicht mehr

$$\frac{dU}{dt} = \Sigma\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt}+\frac{\partial U}{\partial y_i}\frac{dy_i}{dt}+\frac{\partial U}{\partial z_i}\frac{dz_i}{dt}\right),$$

sondern es kommt jetzt auf der rechten Seite noch der partielle Differentialquotient $\frac{\partial U}{\partial t}$ hinzu, so dass

$$\Sigma\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt}+\frac{\partial U}{\partial y_i}\frac{dy_i}{dt}+\frac{\partial U}{\partial z_i}\frac{dz_i}{dt}\right) = \frac{dU}{dt}-\frac{\partial U}{\partial t}.$$

Nun war die Differentialgleichung des Satzes der lebendigen Kraft

$$\Sigma m_i\left(\frac{dx_i}{dt}\frac{d^2x_i}{dt^2}+\frac{dy_i}{dt}\frac{d^2y_i}{dt^2}+\frac{dz_i}{dt}\frac{d^2z_i}{dt^2}\right)=\Sigma\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt}+\frac{\partial U}{\partial y_i}\frac{dy_i}{dt}+\frac{\partial U}{\partial z_i}\frac{dz_i}{dt}\right).$$

Diese wurde, indem man für die rechte Seite $\frac{dU}{dt}$ setzen konnte, integrabel. Jetzt aber muss man für dieselbe $\frac{dU}{dt}-\frac{\partial U}{\partial t}$ setzen und kann daher nicht mehr integriren. Wenn man in der Gleichung

$$\Sigma m_i\left(\frac{dx_i}{dt}\frac{d^2x_i}{dt^2}+\frac{dy_i}{dt}\frac{d^2y_i}{dt^2}+\frac{dz_i}{dt}\frac{d^2z_i}{dt^2}\right) = \frac{dU}{dt}-\frac{\partial U}{\partial t}.$$

U in die Summe $U+V$ zerfällt denkt, wo V die Zeit explicite enthält, U aber nicht, so ergiebt sich

$$9.)\qquad \Sigma m_i\left(\frac{dx_i}{dt}\frac{d^2x_i}{dt^2}+\frac{dy_i}{dt}\frac{d^2y_i}{dt^2}+\frac{dz_i}{dt}\frac{d^2z_i}{dt^2}\right) = \frac{dU}{dt}+\frac{dV}{dt}-\frac{\partial V}{\partial t}.$$

Dies ist die Gleichung, welche an die Stelle der Differentialgleichung des Princips der lebendigen Kraft tritt, welche aber jetzt kein Integral mehr liefert. Ebenso wenig gilt jetzt noch das Princip der Flächen: man hat also kein einziges Princip, welches ein Integral gäbe. Dennoch habe ich bemerkt, dass es eine Hypothese über die Bewegung der festen Centren giebt und zwar eine dem ebenerwähnten Fall der Natur sehr nahe kommende Hypothese, unter deren Annahme man aus der Combination beider Principe ein Integral erhalten kann. Diese Hypothese besteht darin, dass man annimmt, die festen Centren bewegen sich in Kreisen mit gleicher Winkelgeschwindigkeit um eine und dieselbe Axe, so dass man für die Coordinaten irgend eines Centrums (a, b, c)

$$a = \text{Const.}, \qquad b = \beta\cos nt, \qquad c = \beta\sin nt$$

habe, wo n für alle Centren denselben Werth hat, und wo die x-Axe gemeinschaftliche Rotationsaxe ist. Dies kommt in der That mit dem Fall der Natur sehr nahe überein, denn Sonne und Jupiter bewegen sich in der Ekliptik um ihren gemeinschaftlichen Schwerpunkt in Ellipsen mit sehr kleiner Excentricität (ungefähr $= \frac{1}{20}$), die mithin als Kreise anzusehen sind. Ihre Umlaufszeit ist gleich gross, und setzt man diese $= T$, so hat man zur Bestimmung von n die Gleichung $nT = 2\pi$.

Wir wollen nun untersuchen, was in diesem Fall aus der Differentialgleichung des Princips der Flächen wird. Wenn wir der Allgemeinheit wegen ausser den Centren nicht einen einzelnen materiellen Punkt annehmen, sondern ein ganzes System von Punkten, so wird in unserem Fall die Kräftefunction aus zwei Complexen von Termen bestehen. Der erste Complex rührt von der gegenseitigen Attraction der materiellen Punkte her und umfasst Glieder der Form

$$\frac{m_i m_{i'}}{\sqrt{(x_i - x_{i'})^2 + (y_i - y_{i'})^2 + (z_i - z_{i'})^2}}$$

oder, wenn wir wieder, wie im Vorhergehenden, r_i und v_i einführen, der Form

$$\frac{m_i m_{i'}}{\sqrt{(x_i - x_{i'})^2 + r_i^2 + r_{i'}^2 - 2 r_i r_{i'} \cos(v_i - v_{i'})}}.$$

Der zweite Complex rührt von der Anziehung der Centren her und umfasst Glieder der Form

$$\frac{m_i \mu}{\sqrt{(x_i - a)^2 + (y_i - b)^2 + (z_i - c)^2}}$$

oder, wenn wir auch hier r_i und v_i einführen und zugleich $b = \beta \cos nt$, $c = \beta \sin nt$ einsetzen,

$$B. \quad \frac{m_i \mu}{\sqrt{(x_i - a)^2 + r_i^2 + \beta^2 - 2 r_i \beta \cos(v_i - nt)}}.$$

Beide Complexe bleiben unverändert, wenn man alle Grössen v_i um dieselbe Quantität vergrössert und zugleich t um den n^{ten} Theil derselben, wenn man also für jeden Werth von i

$$\delta v_i = n \delta t$$

setzt, welches für unseren Fall virtuelle Variationen sind. Wir wollen den ersten Complex von Termen U, den zweiten V nennen.

In der allgemeinen symbolischen Gleichung

$$\Sigma m_i \left(\frac{d^2 x_i}{dt^2} \delta x_i + \frac{d^2 y_i}{dt^2} \delta y_i + \frac{d^2 z_i}{dt^2} \delta z_i \right) = \Sigma \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial U}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial U}{\partial z_i} \delta z_i \right)$$

tritt in diesem Fall $U+V$ an die Stelle von U, also wird die rechte Seite

$$= \Sigma\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\delta x_i+\frac{\partial U}{\partial y_i}\delta y_i+\frac{\partial U}{\partial z_i}\delta z_i\right)+\Sigma\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\delta x_i+\frac{\partial V}{\partial y_i}\delta y_i+\frac{\partial V}{\partial z_i}\delta z_i\right).$$

In U ist t nicht explicite enthalten, die erste Summe wird daher gleich δU; in V aber ist t allerdings explicite enthalten, es fehlt also zur zweiten Summe noch $\frac{\partial V}{\partial t}\delta t$, um das vollständige δV zu geben, d.h. sie ist gleich $\delta V-\frac{\partial V}{\partial t}\delta t$, und man hat

$$\Sigma m_i\left(\frac{d^2x_i}{dt^2}\delta x_i+\frac{d^2y_i}{dt^2}\delta y_i+\frac{d^2z_i}{dt^2}\delta z_i\right) = \delta U+\delta V-\frac{\partial V}{\partial t}\delta t.$$

Die obigen Variationen sind aber so eingerichtet, dass U und V durch sie ungeändert bleiben, daher hat man $\delta U=0$ und $\delta V=0$; ferner ist

$$\delta x_i=0,\qquad \delta y_i=-r_i\sin v_i\,\delta v_i=-nz_i\delta t,\qquad \delta z_i=r_i\cos v_i\,\delta v_i=ny_i\delta t,$$

also

$$10.)\qquad n\Sigma m_i\left(y_i\frac{d^2z_i}{dt^2}-z_i\frac{d^2y_i}{dt^2}\right) = -\frac{\partial V}{\partial t}.$$

Dies ist die Gleichung, welche in unserem Fall an die Stelle der Differentialgleichung des Princips der Flächen tritt; V ist ein Aggregat von Termen der Form $(B.)$, wo n in allen Termen dasselbe sein muss, alle übrigen Grössen aber von einem Gliede zum anderen verschiedene Werthe annehmen können. — Nun war die Gleichung (9.)

$$\Sigma m_i\left(\frac{dx_i}{dt}\frac{d^2x_i}{dt^2}+\frac{dy_i}{dt}\frac{d^2y_i}{dt^2}+\frac{dz_i}{dt}\frac{d^2z_i}{dt^2}\right) = \frac{dU}{dt}+\frac{dV}{dt}-\frac{\partial V}{\partial t}$$

oder

$$\tfrac{1}{2}\Sigma m_i\frac{d}{dt}\left\{\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2\right\} = \frac{dU}{dt}+\frac{dV}{dt}-\frac{\partial V}{\partial t}.$$

Wenn man (10.) von dieser Gleichung abzieht, so erhält man

$$\tfrac{1}{2}\Sigma m_i\frac{d}{dt}\left\{\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2\right\}-n\Sigma m_i\left(y_i\frac{d^2z_i}{dt^2}-z_i\frac{d^2y_i}{dt^2}\right) = \frac{dU}{dt}+\frac{dV}{dt}$$

oder durch Integration

$$11.)\quad \tfrac{1}{2}\Sigma m_i\left\{\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2\right\}-n\Sigma m_i\left(y_i\frac{dz_i}{dt}-z_i\frac{dy_i}{dt}\right) = U+V+h''.$$

Dies ist das aus der Combination der Principe der lebendigen Kraft und der Flächen entstandene Princip, welches gilt, wenn Attractions-Centra sich um eine Rotationsaxe mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewegen. In diese Categorie gehört zum Beispiel die Bewegung an der Oberfläche der Erde oder in deren Nähe, denn die Erde ist ein Aggregat solcher Anziehungscentren. Unter diesen Gesichtspunkt müsste auch in der That die Aufgabe gefasst werden, wenn die Verschiedenheit der Dichtigkeit der Erde unter verschiedenen Meridianen beträchtlich wäre. Dies vorausgesetzt, und wenn zugleich der Mond uns näher wäre und die Erde sich langsamer bewegte, so würde die Anziehung des Mondes durch die Erde unter Anderem auch eine Function des Stundenwinkels sein. Alsdann wären die Momente der Trägheit in Bezug auf die verschiedenen Meridianebenen verschieden, was sich in den Beobachtungen müsste entdecken lassen.

Sechste Vorlesung.

Das Princip der kleinsten Wirkung.

Wir kommen jetzt zu einem neuen Princip, welches nicht, wie die früheren, ein Integral giebt. Dies ist das „principe de la moindre action", fälschlich der kleinsten Wirkung genannt. Die Wichtigkeit desselben liegt erstens in der Form, unter welcher es die Differentialgleichungen der Bewegung darstellt, und zweitens darin, dass es eine Function angiebt, welche, wenn diese Differentialgleichungen erfüllt sind, ein Minimum wird. Ein solches Minimum existirt zwar bei allen Aufgaben, aber man weiss in der Regel nicht wo. Während daher das Interesse dieses Princips gerade darin besteht, dass man das Minimum allgemein *angeben* kann, legte man in früheren Zeiten ein übertriebenes Gewicht darauf, dass ein solches Minimum überhaupt existire. Ein Beispiel des in Rede stehenden Princips kommt in der schon früher citirten Abhandlung von *Euler* „de motu projectorum" vor. Nachdem er daselbst jenes Princip für die Anziehungen nach festen Centren bewiesen hat, gelingt ihm dies nicht für gegenseitige Attractionen, für welche ihm die Geltung des Princips der lebendigen Kraft unbekannt war; er begnügt sich daher zu sagen, für gegenseitige Anziehungen würde die Rechnung sehr weitläufig, indessen müsste das Princip der kleinsten Wirkung auch hier gelten, denn die Grundsätze einer gesunden Metaphysik zeigten, dass in der Natur die Kräfte nothwendig immer die kleinste Wirkung hervorbringen müssten (wie er meinte, wegen der den Körpern inwohnenden Trägheit). Aber dies zeigt weder eine gesunde, noch überhaupt irgend eine Metaphysik, und in der That ist *Euler* nur durch Missverständniss des Namens „kleinste Wirkung" zu diesem Ausspruch veranlasst worden.

Maupertuis wollte mit diesem Namen ausdrücken, dass die Natur ihre Wirkungen mit dem kleinsten Kraftaufwand erreiche, und dies ist die wahre Bedeutung des Namens „principe de la moindre action".

Dies Princip wird fast in allen Lehrbüchern, auch in den besten, in denen von *Poisson*, *Lagrange* und *Laplace*, so dargestellt, dass es nach meiner Ansicht nicht zu verstehen ist. Es wird nämlich gesagt, es solle das Integral

$$\int \Sigma m_\iota v_\iota ds_\iota$$

$\left(\text{worin } v_\iota = \frac{ds_\iota}{dt}\right.$ die Geschwindigkeit des Punktes m_ι bezeichnet$\left.\right)$ ein Minimum sein, wenn man das Integral von einer Position des Systems zur andern ausdehne. Es wird dabei gesagt, dieser Satz gelte nur, so lange der Satz der lebendigen Kräfte gelte, aber es wird zu sagen vergessen, dass man durch den Satz der lebendigen Kraft die Zeit aus obigem Integral eliminirt und alles auf Raumelemente reducirt annehmen müsse. Das Minimum des obigen Integrals ist übrigens so zu verstehen, dass, wenn die Anfangs- und Endpositionen gegeben sind, das Integral unter allen von der einen zur andern Position möglichen Wegen für den wirklich durchlaufenen ein Minimum wird.

Eliminiren wir die Zeit aus obigem Integral. Setzen wir $v_\iota = \frac{ds_\iota}{dt}$ ein, so wird

$$\int \Sigma m_\iota v_\iota ds_\iota = \int \frac{\Sigma m_\iota ds_\iota^2}{dt}.$$

Aber nach dem Satz der lebendigen Kraft ist

$$\tfrac{1}{2} \Sigma m_\iota v_\iota^2 = U + h,$$

oder

$$\frac{\Sigma m_\iota ds_\iota^2}{dt^2} = 2(U+h).$$

$$\frac{1}{dt} = \sqrt{\frac{2(U+h)}{\Sigma m_\iota ds_\iota^2}}.$$

Führt man diesen Werth von $\frac{1}{dt}$ ein, so ergiebt sich

$$\int \Sigma m_\iota v_\iota ds_\iota = \int \sqrt{2(U+h)} \sqrt{\Sigma m_\iota ds_\iota^2}.$$

Die Differentialgleichungen der Bewegung geben integrirt die $3n$ Coordinaten des Problems durch die Zeit ausgedrückt; zwischen je zwei Coordinaten kann man aber die Zeit eliminiren und erhält, wenn man will, $3n-1$ Coordinaten durch eine ausgedrückt, z. B. durch x_1. Unter dieser Voraussetzung kann man für $\Sigma m_\iota ds_\iota^2$ den Ausdruck $\Sigma m_\iota \left(\frac{ds_\iota}{dx_1}\right)^2 dx_1^2$ substituiren und erhält demnach das Integral in der Form

$$\int \sqrt{2(U+h)} \sqrt{\Sigma m_\iota \left(\frac{ds_\iota}{dx_1}\right)^2} \cdot dx_1,$$

mit welcher nun ein ganz bestimmter Begriff verbunden ist. Lassen wir, um keiner Coordinate den Vorzug zu geben, das Integral in der früheren Form

$$\int \sqrt{2(U+h)} \sqrt{\Sigma m_\iota ds_\iota^2},$$

so können wir das Princip der kleinsten Wirkung so aussprechen:

Sind zwei Positionen des Systems gegeben (d. h. kennt man die Werthe, welche für $x_1 = a$ und $x_1 = b$ die übrigen $3n-1$ Coordinaten erhalten), und dehnt man das Integral

$$\int \sqrt{2(U+h)} \sqrt{\Sigma m_\iota ds_\iota^2}$$

auf die ganze Bahn des Systems von der ersten Position zur zweiten aus, so ist sein Werth für die wirkliche Bahn ein Minimum in Beziehung auf alle möglichen Bahnen, d. h. solche, welche mit den Bedingungen des Systems (wenn es deren giebt) vereinbar sind. Es wird also

$$\int \sqrt{2(U+h)} \sqrt{\Sigma m_\iota ds_\iota^2}$$

ein Minimum oder

$$(1.) \qquad \delta \int \sqrt{2(U+h)} \sqrt{\Sigma m_\iota ds_\iota^2} = 0.$$

In dieser wahren Form, in welcher das Princip der kleinsten Wirkung ausgesprochen werden muss, ist es schwer eine metaphysische Ursache für dasselbe zu finden. Es giebt Minima ganz anderer Art, aus denen man ebenfalls die Differentialgleichungen der Bewegung ableiten kann, welche in dieser Rücksicht etwas viel Ansprechenderes haben.

Zu dem Princip der kleinsten Wirkung muss noch eine Beschränkung hinzugesetzt werden. Das Minimum des Integrals findet nämlich nicht zwischen zwei beliebigen Positionen des Systems statt, sondern nur wenn die Endposition der Anfangsposition hinlänglich nahe ist. Wir werden sogleich erörtern, welche Grenze hier nicht überschritten werden darf.

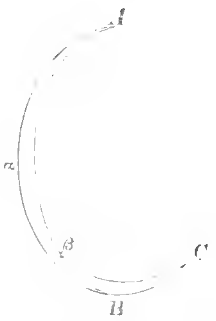
Betrachten wir zunächst einen besonderen Fall. Es bewege sich ein einzelner materieller Punkt auf einer gegebenen Oberfläche durch einen anfänglichen Stoss fortgetrieben, ohne dass Anziehungskräfte auf ihn wirken. In diesem Fall ist $U = 0$ und die Summe $\Sigma m_i ds_i^2$ zieht sich auf $m ds^2$ zusammen; es wird also

$$\int ds$$

oder

$$s$$

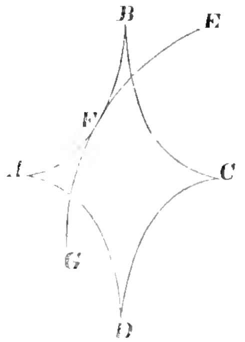
ein Minimum, d. h. der materielle Punkt beschreibt eine kürzeste Linie auf der gegebenen Oberfläche. Aber die kürzesten Linien haben ihre Eigenschaft, ein Minimum zu sein, nur zwischen gewissen Grenzen: auf der Kugel z. B., wo die grössten Kreise kürzeste Linien sind, hört diese Eigenschaft auf, wenn man eine Länge betrachtet, die grösser als 180^0 ist. Um dies einzusehen, wird man nicht die Ergänzung zu 360^0 zu Hülfe rufen dürfen, was nichts beweisen würde, da die Minima nur immer in Beziehung auf die unendlich nahe liegenden Linien stattzufinden brauchen; man überzeugt sich vielmehr davon auf eine andere Art.



B sei der Pol von A; man verlängere den grössten Kreis $A\alpha B$ über B hinaus bis C und lege den grössten Kreis $A\beta B$ unendlich nahe an $A\alpha B$, dann ist $A\alpha BC = A\beta B + BC = A\beta + \beta B + BC$. Es sei ferner β unendlich nahe an B und βC ein grösster Kreisbogen, so ist $\beta C < \beta B + BC$, also ist die gebrochene Linie $A\beta + \beta C$ kleiner, als der grösste Kreis $A\alpha BC$. Auf der Kugel also ist 180^0 die Grenze der Minimums-Eigenschaft. Um diese Grenze allgemein zu bestimmen, habe ich folgenden Satz aufgestellt, auf welchen ich durch tiefer liegende Untersuchungen gekommen bin:

Wenn man von einem Punkt einer Oberfläche nach allen Richtungen kürzeste Linien zieht, so können zwei Fälle eintreten: zwei unendlich nahe kürzeste Linien laufen entweder fortwährend neben einander, ohne sich zu schneiden, oder sie schneiden sich wiederum, und alsdann bildet die Continuität aller Durchschnittspunkte ihre einhüllende Curve. Im ersten Falle hören die kürzesten Linien nie auf kürzeste zu sein, im zweiten sind sie es nur bis zum Berührungspunkte mit der einhüllenden Curve.

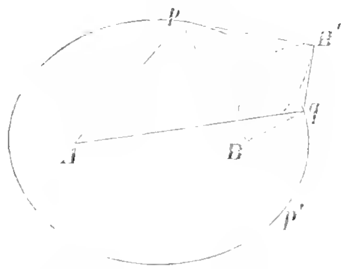
Das Erstere findet, wie sich von selbst versteht, bei allen developpablen Flächen statt, denn in der Ebene schneiden sich die durch einen Punkt gehenden Geraden nie wieder; ferner findet es auch, wie ich gefunden habe, bei allen concav-convexen Flächen statt, d. h. bei denjenigen, in welchen zwei auf einander senkrechte Normalschnitte ihre Krümmungshalbmesser nach entgegengesetzten Seiten haben, z. B. bei dem einschaligen Hyperboloid und bei dem hyperbolischen Paraboloid. Hiermit soll übrigens nicht gesagt sein, dass es nicht auch concav-concave Flächen geben könnte, welche in diese Kategorie gehören, wenigstens ist die Unmöglichkeit hiervon nicht bewiesen. Ein Beispiel der zweiten Art giebt das Revolutionsellipsoid. Nehmen wir dasselbe wenig von der Kugel verschieden an, so werden die kürzesten Linien, welche durch einen beliebigen Punkt der Oberfläche gehen, sich zwar nicht, wie auf der Kugel, in dem Pole sämmtlich schneiden, aber sie werden in der Gegend des Pols eine kleine einhüllende Curve bilden. In diesem Umstande scheint bei oberflächlicher Betrachtung ein Paradoxon zu liegen; denn die einhüllende Curve hat im Allgemeinen die Eigenschaft, dass das System von Curven, welches von derselben eingehüllt wird, nicht in den inneren Raum der einhüllenden eintreten kann. Demnach würde es einen Raum geben von der Beschaffenheit, dass sich nach irgend einem Punkt im Innern desselben von dem gegebenen Punkt keine kürzeste Linie ziehen liesse, was unmöglich ist. Das Paradoxon löst sich aber durch die genauere Betrachtung der einhüllenden Curve auf, wie aus der nebenstehenden Zeichnung zu ersehen ist, in welcher $ABCD$ die einhüllende Curve, welche ungefähr die Gestalt der Evolute der Ellipse hat, und EFG eine kürzeste Linie darstellt. Von E her tritt sie in die einhüllende Curve ein, und im Berührungspunkt F verliert sie ihre Eigenschaft kürzeste Linie zu sein. — Obgleich diese Eigenschaft, dass die kürzesten Linien aufhören solche zu sein, wenn sie ihre gemeinschaftliche einhüllende Curve berührt haben, wie gesagt, durch tiefliegende Betrachtungen gefunden worden ist, so lässt sie sich nachträglich sehr leicht einsehen. Denn indem zwei unendlich nahe kürzeste Linien sich schneiden, wird im Durchschnittspunkt nicht nur die erste, sondern auch die zweite Variation Null, der Unterschied reducirt sich also auf unendlich kleine Grössen dritter Ordnung, d. h. es findet kein Minimum mehr statt. —



Wir kehren jetzt wieder zu der allgemeinen Betrachtung des Minimums für das Princip der kleinsten Wirkung zurück. Die willkürlichen Constanten, welche nach Integration der Differentialgleichungen der Bewegung übrig bleiben, können am einfachsten durch die Anfangspositionen und Anfangsgeschwindigkeiten der Bewegung bestimmt werden. Sind diese gegeben, so sind hierdurch alle Constanten der Integration bestimmt, und es kann keine

Mehrdeutigkeit stattfinden. Aber bei dem Princip der kleinsten Wirkung nimmt man nicht die Anfangspositionen und Anfangsgeschwindigkeiten als gegeben an, sondern die Anfangs- und Endpositionen. Daher muss man, um die wirkliche Bewegung zu erhalten, durch Auflösung von Gleichungen die Anfangsgeschwindigkeiten aus den Endpositionen ableiten. Diese Gleichungen brauchen nicht linear zu sein, daher kann man mehrere Systeme von Werthen der Anfangsgeschwindigkeiten erhalten, und diesen Systemen entsprechen dann mehrere Bewegungen des Systems aus den gegebenen Anfangspositionen in die gegebenen Endpositionen, welche sämmtlich in Beziehung auf die ihnen unendlich nahe liegenden Bewegungen Minima geben. Indem man nun das Intervall der Anfangs- und Endpositionen von Null an continuirlich wachsen lässt, ändern sich auch die verschiedenen Systeme von Werthen, welche man aus der Auflösung der Gleichungen für die Anfangsgeschwindigkeiten erhält. Sobald nun bei dieser Aenderung der Werthsysteme der Fall eintritt, dass zwei Systeme von Werthen einander gleich werden, so ist dies die Grenze, über welche hinaus kein Minimum mehr stattfindet.

Diesen Satz, der übrigens für die Mechanik im engeren Sinne von gar keiner Wichtigkeit ist, habe ich im *Crelle*schen Journal*) bekannt gemacht, aber nur als Notiz ohne Beweis. Als Beispiel zu demselben wollen wir die Bewegung der Planeten um die Sonne wählen. Gegeben sei der eine Brennpunkt A der Ellipse als Ort der Sonne und die grosse Axe a der Ellipse und ausserdem zwei Positionen p und q des Planeten. Bezeichnen wir den zweiten vorläufig unbekannten Brennpunkt mit B, so sind durch die gegebenen Stücke die Entfernungen des Punktes B von den beiden Planetenörtern p und q bekannt; diese Entfernungen sind nämlich $= a - Ap$ und $= a - Aq$ wegen der bekannten



Eigenschaft der Ellipse. Dies giebt aber für B zwei Lagen B und B', die eine oberhalb, die andere unterhalb der Verbindungslinie von p und q. Es giebt also zwei Ellipsen, mithin auch zwei Bewegungen des Planeten, welche für die gegebenen Stücke möglich sind. Damit beide Lösungen zusammenfallen, müssen die Punkte B und B' in die Verbindungslinie von p und q fallen, d. h. p, B und q müssen in gerader Linie liegen, mithin q in p'.

*) Bd. 17, p. 68 folgg.

Der Punkt p' bezeichnet also die Grenze, über welche man von p aus das Integral nicht ausdehnen darf, ohne dass es aufhört ein Minimum zu sein.

Wir kehren jetzt zu der eigentlich mechanischen Bedeutung des Princips der kleinsten Wirkung zurück. Diese besteht darin, dass in der Gleichung (1.) dieser Vorlesung die Grundgleichungen der Dynamik für den Fall enthalten sind, wo das Princip der lebendigen Kraft gilt. In der That, die Gleichung (1.) war:

$$\delta\int\sqrt{2(U+h)}\sqrt{\Sigma m_i ds_i^2} = 0.$$

Hier können wir alle Coordinaten nach Elimination der Zeit als Functionen von einer, z. B. von x_1, ansehen, und demnach schreiben:

$$\delta\int\sqrt{2(U+h)}\sqrt{\Sigma m_i\left(\frac{ds_i}{dx_1}\right)^2}\cdot dx_1 = 0$$

oder

$$\delta\int\sqrt{2(U+h)}\sqrt{\Sigma m_i\left\{\left(\frac{dx_i}{dx_1}\right)^2+\left(\frac{dy_i}{dx_1}\right)^2+\left(\frac{dz_i}{dx_1}\right)^2\right\}}\cdot dx_1 = 0$$

oder, wenn wir

$$\frac{dx_i}{dx_1} = x_i', \qquad \frac{dy_i}{dx_1} = y_i', \qquad \frac{dz_i}{dx_1} = z_i'$$

setzen,

$$\delta\int\sqrt{2(U+h)}\sqrt{\Sigma m_i(x_i'^2+y_i'^2+z_i'^2)}dx_1 = 0.$$

Unter Einführung der Bezeichnungen

$$2(U+h) = A, \qquad \Sigma m_i(x_i'^2+y_i'^2+z_i'^2) = B,$$
$$\sqrt{A}.\sqrt{B} = P$$

haben wir endlich

$$\delta\int P\,dx_1 = 0,$$

oder es ergiebt sich die Regel: man setze in $\int P\,dx_1$ für x_i, y_i, z_i respective $x_i+\delta x_i$, $y_i+\delta y_i$, $z_i+\delta z_i$ ein, wo δx_i, δy_i, δz_i in den unendlich kleinen Factor α multiplicirte willkürliche Functionen sind, welche innerhalb der Integrationsgrenzen nicht unendlich werden, entwickele nach Potenzen von α und setze das in die erste Potenz von α multiplicirte Glied gleich Null. Hierbei ist zu bemerken, dass erstens, weil die Grenzen des Integrals gegeben sind, von den Grenzen keine Variationen herrühren können, dass ferner aus demselben Grunde alle Variationen an den Grenzen verschwinden müssen, und endlich, dass δx_1 überhaupt Null ist, weil x_1 die unabhängige Variable ist. Demgemäss erhält man nach den Regeln der Variationsrechnung:

$$\delta\int P\,dx_1 = \int \delta P\,dx_1$$

$$= \int \Sigma \left\{ \frac{\partial P}{\partial x_\iota}\delta x_\iota + \frac{\partial P}{\partial y_\iota}\delta y_\iota + \frac{\partial P}{\partial z_\iota}\delta z_\iota + \frac{\partial P}{\partial x'_\iota}\delta x'_\iota + \frac{\partial P}{\partial y'_\iota}\delta y'_\iota + \frac{\partial P}{\partial z'_\iota}\delta z'_\iota \right\} dx_1.$$

Nun ist

$$\int \frac{\partial P}{\partial x'_\iota}\delta x'_\iota\,dx_1 = \int \frac{\partial P}{\partial x'_\iota}\frac{d\,\delta x_\iota}{dx_1}dx_1 = \frac{\partial P}{\partial x'_\iota}\delta x_\iota - \int \frac{d\dfrac{\partial P}{\partial x'_\iota}}{dx_1}\delta x_\iota\,dx_1$$

oder, da δx_ι an den Grenzen der Integration verschwindet,

$$\int \frac{\partial P}{\partial x'_\iota}\delta x'_\iota\,dx_1 = -\int \frac{d\dfrac{\partial P}{\partial x'_\iota}}{dx_1}\delta x_\iota\,dx_1.$$

Aehnliche Gleichungen gelten für y_ι und z_ι. Die Benutzung dieser Gleichungen giebt:

$$\delta\int P\,dx_1 =$$

$$\int \Sigma \left\{ \left(\frac{\partial P}{\partial x_\iota} - \frac{d\dfrac{\partial P}{\partial x'_\iota}}{dx_1}\right)\delta x_\iota + \left(\frac{\partial P}{\partial y_\iota} - \frac{d\dfrac{\partial P}{\partial y'_\iota}}{dx_1}\right)\delta y_\iota + \left(\frac{\partial P}{\partial z_\iota} - \frac{d\dfrac{\partial P}{\partial z'_\iota}}{dx_1}\right)\delta z_\iota \right\} dx_1.$$

Es ist aber

$$P = \sqrt{A}\sqrt{B}, \qquad A = 2(U+h), \qquad B = \Sigma m_\iota (x'^2_\iota + y'^2_\iota + z'^2_\iota).$$

$$\frac{\partial P}{\partial x_\iota} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{B}{A}}\frac{\partial A}{\partial x_\iota} = \sqrt{\frac{B}{A}}\frac{\partial U}{\partial x_\iota}, \qquad \frac{\partial P}{\partial x'_\iota} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{A}{B}}\frac{\partial B}{\partial x'_\iota} = \sqrt{\frac{A}{B}}\cdot m_\iota x'_\iota;$$

also hat man

$$\frac{\partial P}{\partial x_\iota} - \frac{d\dfrac{\partial P}{\partial x'_\iota}}{dx_1} = \sqrt{\frac{B}{A}}\frac{\partial U}{\partial x_\iota} - \frac{d\left(m_\iota\sqrt{\dfrac{A}{B}}\dfrac{dx_\iota}{dx_1}\right)}{dx_1}.$$

Setzt man nun

$$(2.) \qquad \sqrt{\frac{B}{A}}\,dx_1 = dt,$$

so erhält man

$$\frac{\partial P}{\partial x_\iota} - \frac{d\dfrac{\partial P}{\partial x'_\iota}}{dx_1} = \sqrt{\frac{B}{A}}\left(\frac{\partial U}{\partial x_\iota} - m_\iota\frac{d^2x_\iota}{dt^2}\right)$$

und ähnliches für y_ι und z_ι. Führt man diese Ausdrücke ein, so ergiebt sich:

$$\delta\int P\,dx_1 =$$

$$\int\sqrt{\frac{B}{A}}\cdot\Sigma\left\{\left(\frac{\partial U}{\partial x_\iota} - m_\iota\frac{d^2x_\iota}{dt^2}\right)\delta x_\iota + \left(\frac{\partial U}{\partial y_\iota} - m_\iota\frac{d^2y_\iota}{dt^2}\right)\delta y_\iota + \left(\frac{\partial U}{\partial z_\iota} - m_\iota\frac{d^2z_\iota}{dt^2}\right)\delta z_\iota\right\}dx_1.$$

Diese Variation soll aber nach unserem Princip verschwinden; also hat man

$$0 = \Sigma\left\{\left(\frac{\partial U}{\partial x_\iota} - m_\iota \frac{d^2x_\iota}{dt^2}\right)\delta x_\iota + \left(\frac{\partial U}{\partial y_\iota} - m_\iota \frac{d^2y_\iota}{dt^2}\right)\delta y_\iota + \left(\frac{\partial U}{\partial z_\iota} - m_\iota \frac{d^2z_\iota}{dt^2}\right)\delta z_\iota\right\}$$

oder

$$(3.)\quad \Sigma m_\iota\left(\frac{d^2x_\iota}{dt^2}\delta x_\iota + \frac{d^2y_\iota}{dt^2}\delta y_\iota + \frac{d^2z_\iota}{dt^2}\delta z_\iota\right) = \Sigma\left(\frac{\partial U}{\partial x_\iota}\delta x_\iota + \frac{\partial U}{\partial y_\iota}\delta y_\iota + \frac{\partial U}{\partial z_\iota}\delta z_\iota\right) = \delta U.$$

welches die frühere symbolische Gleichung ist.

Die Gleichung (2.) ist nichts Anderes als der Satz der lebendigen Kraft; denn durch Quadrirung findet man

$$B dx_1^2 = A dt^2$$

oder

$$\Sigma m_\iota\left\{\left(\frac{dx_\iota}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_\iota}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_\iota}{dt}\right)^2\right\} = 2(U+h).$$

Dies war vorauszusehen, denn durch den Satz der lebendigen Kraft hatten wir die Zeit aus dem Integral des Princips der kleinsten Wirkung eliminirt.

Siebente Vorlesung.

Fernere Betrachtungen über das Princip der kleinsten Wirkung.
Die *Lagrange*schen Multiplicatoren.

Ausser dem Uebelstande, der bei der gewöhnlichen Ausdrucksweise des Princips der kleinsten Wirkung darin liegt, dass man den Satz der lebendigen Kraft nicht in das Integral einführt, kommt noch der hinzu, dass man sagt, das Integral solle ein Grösstes oder Kleinstes werden, statt zu sagen, seine erste Variation solle verschwinden. Die Verwechselung dieser keineswegs identischen Forderungen ist so sehr Sitte geworden, dass man sie den Autoren kaum als Fehler anrechnen kann. Es findet sich in dieser Rücksicht ein sonderbares Quidproquo bei *Lagrange* und *Poisson*, welches sich auf die kürzeste Linie bezieht. *Lagrange* sagt ganz richtig, in diesem Falle könne das Integral nie ein Maximum werden, denn wie lang auch die zwischen zwei Punkten auf einer gegebenen Oberfläche gezogene Curve sein möge, so könne man immer eine noch längere angeben; und hieraus schliesst er, dass das Integral *immer* ein Minimum sein müsse. *Poisson* dagegen, der wusste, dass das Integral in gewissen Fällen, namentlich bei geschlossenen Oberflächen, über gewisse Grenzen hinaus aufhört ein Minimum zu sein, schloss hieraus, in diesen Fällen müsste es demnach ein Maximum sein. Beide Schlüsse sind falsch; im Fall der kürzesten Linien kann das Integral allerdings nie ein Maximum sein, vielmehr ist es entweder ein Minimum, oder keines von Beiden, weder Maximum, noch Minimum.

Die Elimination der Zeit aus dem Integral, welches bei dem Princip der kleinsten Wirkung in Betracht kommt, darf nicht etwa durch das Princip der Flächen oder irgend eine andere Integralgleichung des Problems, sondern sie muss gerade durch das Princip der lebendigen Kraft geschehen; nur so kommt man zu dem Princip der kleinsten Wirkung. *Lagrange* sagt an einer Stelle, er habe in den Turiner Memoiren die Differentialgleichungen der Bewegung aus dem Princip der kleinsten Wirkung in Verbindung mit dem Princip der lebendigen Kraft hergeleitet. Eine solche Ausdrucksweise ist nach den oben gemachten Bemerkungen nicht zulässig. *Lagrange* wandte die soeben von ihm erfundene Variationsrechnung auf das schon von *Euler* benutzte Princip der kleinsten Wirkung an, gebrauchte aber hierbei das Princip der lebendigen Kraft in der Ausdehnung, welche *Daniel Bernoulli* demselben gegeben hatte, und auf diese Weise kam er zu der allgemeinen symbolischen Gleichung der Dynamik, von welcher wir ausgegangen sind, und welche wir hier noch einmal hinschreiben wollen; sie war:

$$(1.)\qquad \Sigma m_i \left\{ \frac{d^2x_i}{dt^2}\delta x_i + \frac{d^2y_i}{dt^2}\delta y_i + \frac{d^2z_i}{dt^2}\delta z_i \right\} = \Sigma \{X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i\},$$

wo auf der rechten Seite δU zu setzen ist, wenn das Princip der lebendigen Kraft gilt. Abstrahirt man davon, dass δU nach dem in der Variationsrechnung üblichen Sinn nur dann für die rechte Seite obiger Gleichung gesetzt werden kann, wenn die Grössen X_i, Y_i, Z_i die partiellen Differentialquotienten einer einzigen Function U sind, und betrachtet man es rein als symbolische abgekürzte Bezeichnung, so hat man

$$(2.)\qquad \Sigma m_i \left\{ \frac{d^2x_i}{dt^2}\delta x_i + \frac{d^2y_i}{dt^2}\delta y_i + \frac{d^2z_i}{dt^2}\delta z_i \right\} = \delta U$$

auch, wenn der Satz der lebendigen Kraft nicht gilt. Diese Gleichung ist nun, wie schon früher erwähnt wurde, auch noch richtig, wenn Bedingungsgleichungen stattfinden, aber dann sind die Variationen nicht mehr alle von einander unabhängig. Hat man m Bedingungsgleichungen

$$(3.)\qquad f = 0, \quad \varphi = 0, \quad \ldots,$$

so existiren zwischen den Variationen die m Relationen

$$
(4.)\quad \begin{cases}
\Sigma\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial f}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial f}{\partial z_i}\delta z_i\right) = 0, \\
\Sigma\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial \varphi}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial \varphi}{\partial z_i}\delta z_i\right) = 0, \\
\text{u. s. w.}
\end{cases}
$$

Vermittelst dieser m Gleichungen kann man m von den $3n$ Variationen δx_i, δy_i, δz_i ... aus der Gleichung (1.) eliminiren, und indem man die übrig bleibenden von einander unabhängig setzt, zerfällt die symbolische Gleichung (1.) in die Differentialgleichungen der Bewegung. Aber diese Elimination würde sehr mühsam sein, und sie hat überdies manche Uebelstände; denn erstens müsste man gewisse Coordinaten vor den übrigen bevorzugen, man erhielte keine symmetrischen Formeln, und ausserdem wäre die Form der Eliminationsgleichungen für jede Anzahl von Bedingungsgleichungen eine andere, durch welchen Umstand die Allgemeinheit der Untersuchung sehr erschwert werden würde. Alle diese Schwierigkeiten hat *Lagrange* durch Einführung von Multiplicatoren besiegt, eine Methode, welche schon *Euler* bei den Problemen „de maximis et minimis" häufig angewendet hat. Da nämlich die Variationen δx_i, δy_i, δz_i ... in den Gleichungen (1.) und (4.) linear vorkommen, so kann man die Elimination von m derselben folgendermassen bewerkstelligen: Man multiplicire die Gleichungen (4.) respective mit den Factoren λ, μ ... und addire sie zu (1.); die resultirende Gleichung heisse (L). Nun bestimme man die Factoren λ, μ ... so, dass in der mit (L) bezeichneten Gleichung m der in die Variationen δx_i, δy_i, δz_i ... multiplicirten Ausdrücke identisch verschwinden; dann geben die in die übrig bleibenden $3n-m$ Variationen multiplicirten Ausdrücke gleich Null gesetzt die Differentialgleichungen des Problems. Man sieht auf diese Weise, dass man in der Gleichung (L) sämmtliche $3n$ in die Variationen δx_i, δy_i, δz_i ... multiplicirten Ausdrücke gleich Null zu setzen hat, und man hat diese Gleichungen dann so anzusehen, dass m derselben die Multiplicatoren λ, μ ... definiren, die übrigen aber, in welche die so bestimmten Multiplicatoren einzusetzen sind, die Differentialgleichungen des Problems geben. Mit andern Worten, zwischen den $3n$ Gleichungen, in welche die Gleichung (L) zerfällt, wenn man die Variationen alle als unabhängig ansieht, hat man die m Multiplicatoren λ, μ ... zu eliminiren und erhält dann die $3n-m$ Differentialgleichungen des Problems. Anstatt aber diese Elimination auszuführen, thut man besser die unbekannten Multiplicatoren in den $3n$ Gleichungen zu lassen und auf diese die ferneren Untersuchungen zu gründen. Diese $3n$ Gleichungen werden alsdann von der Form

$$(5.)\quad \begin{cases} m_i \dfrac{d^2 x_i}{dt^2} = X_i + \lambda \dfrac{\partial f}{\partial x_i} + \mu \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \cdots, \\[2ex] m_i \dfrac{d^2 y_i}{dt^2} = Y_i + \lambda \dfrac{\partial f}{\partial y_i} + \mu \dfrac{\partial \varphi}{\partial y_i} + \cdots, \\[2ex] m_i \dfrac{d^2 z_i}{dt^2} = Z_i + \lambda \dfrac{\partial f}{\partial z_i} + \mu \dfrac{\partial \varphi}{\partial z_i} + \cdots, \end{cases}$$

wo für alle n Werthe von i überall dieselben Multiplicatoren λ, μ . . . vorkommen. Dies ist die Form, welche *Lagrange* den Gleichungen der Bewegung eines durch beliebige Bedingungen gebundenen Systems gegeben hat.

Die zu den Kräften X_i, Y_i, Z_i hinzukommenden Grössen drücken die Wirkung des Systems aus, d. h. die Modification, welche die sollicitirenden Kräfte durch die Verbindungen der materiellen Punkte erleiden. Zu diesem Resultat gelangt man auch in der Statik, indem man beweist, dass, wenn in den n Punkten des Systems die Kräfte

$$\lambda \frac{\partial f}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \cdots, \qquad \lambda \frac{\partial f}{\partial y_i} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} + \cdots, \qquad \lambda \frac{\partial f}{\partial z_i} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial z_i} + \cdots$$

parallel den Coordinatenaxen angebracht werden, dieselben durch die Verbindung des Systems aufgehoben werden, woraus hervorgeht, dass die durch die Verbindung des Systems aufgehobenen Kräfte nicht bestimmt sind, sondern die unbestimmten Grössen λ, μ . . . enthalten. Die Einführung der Multiplicatoren λ, μ . . . ist daher nicht ein blosser Kunstgriff der Rechnung, sondern diese Grössen haben in der Statik ihre ganz bestimmte Bedeutung. Aus dem soeben ausgesprochenen Satz der Statik kann man nun auch auf die Gleichungen (5.) der Bewegung kommen und zwar, indem man den Uebergang von der Statik zur Mechanik auf folgende Betrachtung gründet:

Wegen der Verbindung des Systems können die materiellen Punkte den ihnen mitgetheilten Impulsen nicht Folge leisten. Um die wirkliche Bewegung zu ermitteln, muss man daher solche Kräfte hinzusetzen, deren Complex von der Verbindung des Systems aufgehoben wird, nach deren Hinzufügung es daher so anzusehen ist, als wenn die Punkte den an sie angebrachten Kräften ohne Hinderniss folgten; mit andern Worten, nach Hinzufügung von Kräften, durch welche die Verbindung des Systems aufgehoben wird, kann man das System als ein freies betrachten. Dies ist als ein Princip anzusehen, und aus ihm ergeben sich ganz von selbst die Gleichungen (5.).

Eben dieses Princip, welches uns die Modification der beschleunigenden Kräfte durch die Verbindungen des Systems gegeben hat, dient auch dazu, die Modification der momentanen Kräfte durch die Verbindungen des Systems zu finden. Die Formeln, welche man hier anzuwenden hat, sind ganz die nämlichen. Wirken auf den Punkt m_i die momentanen Impulse a_i, b_i, c_i so sind die mit Berücksichtigung der Verbindung des Systems hieraus folgenden modificirten Impulse:

$$(6.)\quad \begin{cases} a_i + \lambda_1 \dfrac{\partial f}{\partial x_i} + \mu_1 \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \cdots, \\[2ex] b_i + \lambda_1 \dfrac{\partial f}{\partial y_i} + \mu_1 \dfrac{\partial \varphi}{\partial y_i} + \cdots, \\[2ex] c_i + \lambda_1 \dfrac{\partial f}{\partial z_i} + \mu_1 \dfrac{\partial \varphi}{\partial z_i} + \cdots, \end{cases}$$

wo die Grössen λ_1, μ_1 ... wieder für alle Punkte des Systems dieselben bleiben.

Wenn man die Grössen λ, μ ... und λ_1, μ_1 ... bestimmen will, so muss man die Gleichungen $f = 0$, $\varphi = 0$ ... differentiiren. Zur Bestimmung der Grössen λ, μ ... muss man zweimal differentiiren und dann die zweiten Differentialquotienten der Coordinaten aus den Gleichungen (5.) substituiren; zur Bestimmung der Grössen λ_1, μ_1 ... hat man aber nur einmal zu differentiiren, denn die momentanen Impulse sind den Geschwindigkeiten, d. h. den ersten Differentialquotienten proportional. Wir wollen die Gleichungen zur Bestimmung von λ_1, μ_1 ... wirklich entwickeln, indem wir annehmen, dass die momentanen Impulse a_i, b_i, c_i am Anfang der Bewegung erfolgen, und dass das System in diesem Moment sich in vollkommener Ruhe befindet. Unter diesen Umständen können wir für den Anfang der Bewegung die beschleunigenden Kräfte ganz ausser Acht lassen, da dieselben nur unendlich kleine Geschwindigkeiten ergeben würden, und haben daher, wenn wir zur Bestimmung von λ_1, μ_1 ... die Differentialgleichungen

$$\Sigma \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{dy_i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z_i} \frac{dz_i}{dt} \right\} = 0,$$

$$\Sigma \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} \frac{dy_i}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial z_i} \frac{dz_i}{dt} \right\} = 0,$$

u. s. w.

bilden, für $\frac{dx_i}{dt}$, $\frac{dy_i}{dt}$, $\frac{dz_i}{dt}$ die Grössen (6.) zu setzen, nachdem sie durch m_i dividirt worden sind. Dies giebt folgendes Resultat: man setze

$$A = \Sigma \frac{1}{m_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} a_i + \frac{\partial f}{\partial y_i} b_i + \frac{\partial f}{\partial z_i} c_i\right),$$

$$B = \Sigma \frac{1}{m_i}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} a_i + \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} b_i + \frac{\partial \varphi}{\partial z_i} c_i\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(f, f) = \Sigma \frac{1}{m_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial y_i}\frac{\partial f}{\partial y_i} + \frac{\partial f}{\partial z_i}\frac{\partial f}{\partial z_i}\right),$$

$$(f, \varphi) = \Sigma \frac{1}{m_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial y_i}\frac{\partial \varphi}{\partial y_i} + \frac{\partial f}{\partial z_i}\frac{\partial \varphi}{\partial z_i}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

dann hat man zur Bestimmung von λ_1, μ_1 ... die Gleichungen

$$(7.)\quad \begin{cases} 0 = A+(f, f)\lambda_1+(f, \varphi)\mu_1+(f, \psi)\nu_1+\cdots, \\ 0 = B+(\varphi, f)\lambda_1+(\varphi, \varphi)\mu_1+(\varphi, \psi)\nu_1+\cdots, \\ 0 = C+(\psi, f)\lambda_1+(\psi, \varphi)\mu_1+(\psi, \psi)\nu_1+\cdots, \\ \qquad\qquad \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Von derselben Form werden die Gleichungen zur Bestimmung von λ, μ ..., nur dass A, B, C ... hier andere Werthe annehmen.

Wir kehren jetzt zu den Differentialgleichungen (5.) zurück. Wenn wir dieselben der Reihe nach mit δx_i, δy_i, δz_i multipliciren und alle $3n$ Producte addiren, so erhalten wir wieder die symbolische Gleichung, die wir oben mit (L) bezeichnet haben, nämlich

$$(8.)\qquad \Sigma m_i\left(\frac{d^2x_i}{dt^2}\delta x_i + \frac{d^2y_i}{dt^2}\delta y_i + \frac{d^2z_i}{dt^2}\delta z_i\right) = \delta U + \lambda\delta\varphi + \mu\delta\varphi + \cdots,$$

welche Gleichung mit dem System (5.) gleichbedeutend ist.

Um den ganzen Umfang von Problemen zu betrachten, welcher in den Gleichungen (5.) enthalten ist, müssen wir auch auf den Fall Rücksicht nehmen, in welchem die Zeit in den Bedingungen explicite vorkommt. Auch dann noch gelten die Gleichungen (5.). Um eine Vorstellung davon zu bekommen, wie die Zeit in den Bedingungen enthalten sein kann, nehme man z. B. an, die materiellen Punkte seien mit beweglichen Centren, deren Bewegung gegeben sei, in Verbindung gesetzt und zwar so, dass die Centra auf die materiellen Punkte wirken, ohne dass Reaction stattfinde. Zu dieser Annahme aber ist es nöthig, den beweglichen Centren Massen zu geben, welche im Verhältniss zu den Massen der materiellen Punkte unendlich gross sind. In diesem Falle gelten für die materiellen Punkte die Gleichungen (5.) ohne Weiteres: die beweglichen Centra aber behalten die gegebenen Bewegungen unverändert bei. In der That, es sei M die als unendlich gross zu behandelnde Masse eines Centrums, p eine seiner Coordinaten, so ist die in der Richtung der Coordinate p wirkende Kraft proportional M; nennen wir dieselbe MP, so haben wir mit Rücksicht auf die Verbindungen des Systems

$$M\frac{d^2p}{dt^2} = MP + \lambda\frac{\partial f}{\partial p} + \mu\frac{\partial \varphi}{\partial p} + \cdots .$$

Aber nach Division durch die unendlich grosse Masse M fallen alle übrigen Glieder fort, und man erhält

$$\frac{d^2p}{dt^2} = P.$$

Dasselbe gilt für die übrigen Coordinaten, d. h. die Centra folgen ihren gegebenen Bewegungen ohne Rücksicht auf die Verbindungen. Die Werthe von λ, μ ... und λ_1, μ_1 ... werden hier freilich andere, als früher; denn bei den Differentiationen kommen noch die partiellen Differentialquotienten nach t hinzu. So kommt z. B. zu A (Gleichungen (7.)) der Term $\frac{\partial f}{\partial t}$, zu B ebenso $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ hinzu u. s. w.

Die Zeit kann zwar noch ganz anders in die Bedingungen eintreten, z. B. wenn die Verbindung zweier Punkte locker wird oder sich ausdehnt, etwa durch steigende Temperatur; indessen wird man alle Bedingungen dieser Art auf bewegliche Centra zurückführen können, wenn man es nur als Grundsatz festhält, dass zwei Verbindungen, welche auf dieselben Gleichungen führen, durch einander ersetzt werden können.

Die Zeit kann übrigens auch eine sehr erschwerende Rolle spielen, z. B. wenn sie die Massen verändert. Dies hat man aber im Weltsystem noch nicht nöthig gehabt anzunehmen; denn um zu entscheiden, ob dergleichen stattfindet, haben die Beobachtungen noch nicht Schärfe genug.

Achte Vorlesung.

Das *Hamilton*sche Integral und die zweite *Lagrange*sche Form der dynamischen Gleichungen.

Man kann statt des Princips der kleinsten Wirkung ein anderes substituiren, welches auch darin besteht, dass die erste Variation eines Integrals verschwindet, und aus welchem man die Differentialgleichungen der Bewegungen auf eine noch einfachere Weise erhält als aus dem Princip der kleinsten Wirkung. Man scheint dies Princip früher deshalb unbemerkt gelassen zu haben, weil hier nicht, wie bei dem Princip der kleinsten Wirkung, mit dem Verschwinden der Variation im Allgemeinen zugleich ein Minimum eintritt. *Hamilton* ist der erste, der von diesem Princip ausgegangen ist. Wir werden dasselbe benutzen, um die Gleichungen der Bewegung in der Form aufzustellen, welche ihnen *Lagrange* in der Mécanique analytique gegeben hat. Es seien zunächst die Kräfte X_i, Y_i, Z_i partielle Differentialquotienten einer Function U; ferner sei T die halbe lebendige Kraft, d. h.

$$T = \tfrac{1}{2}\Sigma m_i v_i^2 = \tfrac{1}{2}\Sigma m_i\left\{\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2\right\},$$

dann besteht das neue Princip in der Gleichung

$$(1.)\qquad \delta\int(T+U)dt = 0.$$

Dies Princip ist, mit dem Princip der kleinsten Wirkung verglichen, insofern allgemeiner, als hier U auch t explicite enthalten darf, was in jenem Princip nicht angeht; denn im Princip der kleinsten Wirkung muss die Zeit durch den Satz der lebendigen Kraft eliminirt werden, und dieser Satz gilt nur, wenn U die Zeit nicht explicite enthält.

Die Gleichung (1.) ist es, welche wir benutzen werden, um die Zurückführung der Differentialgleichungen der Bewegung auf eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung nachzuweisen. Wie *Hamilton* gezeigt hat, kann man durch theilweise Integration die Variation (1.) in zwei Theile dergestalt zerlegen, dass der eine ausser, der andere unter dem Integralzeichen steht, und jeder für sich verschwinden muss. Auf diese Weise giebt der Ausdruck unter dem Integralzeichen gleich Null gesetzt die Differentialgleichungen des Problems, und der Ausdruck ausser dem Integralzeichen die Integralgleichungen desselben.

Das neue Princip lautet vollständig ausgesprochen folgendermassen:

Es seien die Positionen des Systems zu einer gegebenen Anfangszeit t_0 und zu einer gegebenen Endzeit t_1 gegeben: dann hat man zur Bestimmung der wirklich erfolgenden Bewegung die Gleichung

$$(1.)\qquad \delta\int (T+U)\,dt = 0.$$

Hier ist das Integral von t_0 bis t_1 auszudehnen, U ist die Kräftefunction und kann die Zeit auch explicite enthalten, und T ist die halbe lebendige Kraft, man hat also

$$T = \tfrac{1}{2}\Sigma m_i(x_i'^2+y_i'^2+z_i'^2),$$

$$x_i' = \frac{dx_i}{dt},\quad y_i' = \frac{dy_i}{dt},\quad z_i' = \frac{dz_i}{dt}.$$

Wenn man die in diesem Princip vorgeschriebene Variation ausführt, indem man nach den Regeln der Variationsrechnung den Coordinaten die Variationen δx_i, δy_i, δz_i hinzufügt, die unabhängige Variable t aber unvariirt lässt, so erhält man

$$\delta\int T dt = \int \delta T dt = \int \Sigma m_i(x_i'\delta x_i'+y_i'\delta y_i'+z_i'\delta z_i')\,dt,$$

oder, indem man für $\delta x_i'$, $\delta y_i'$, $\delta z_i'$ die Ausdrücke $\frac{d\delta x_i}{dt}$, $\frac{d\delta y_i}{dt}$, $\frac{d\delta z_i}{dt}$ einführt und theilweise integrirt,

$$\delta\int T dt = \int \Sigma m_i\left(x_i'\frac{d\delta x_i}{dt}+y_i'\frac{d\delta y_i}{dt}+z_i'\frac{d\delta z_i}{dt}\right)dt$$

$$= \Sigma m_i(x_i'\delta x_i+y_i'\delta y_i+z_i'\delta z_i)-\int \Sigma m_i(x_i''\delta x_i+y_i''\delta y_i+z_i''\delta z_i)\,dt,$$

wo x_i'', y_i'', z_i'' die zweiten nach t genommenen Differentialquotienten von x_i, y_i, z_i sind. Aber die Anfangs- und Endpositionen sind gegeben; daher verschwinden δx_i, δy_i, δz_i an den Grenzen der Integration, die ausser dem Integralzeichen stehenden Glieder werden gleich Null, und

$$\delta\int T dt = -\int \{\Sigma m_i(x_i''\delta x_i+y_i''\delta y_i+z_i''\delta z_i)\}\,dt.$$

Man hat also

$$(2.)\qquad \delta\int (T+U)\,dt = -\int \{\Sigma m_i(x_i''\delta x_i+y_i''\delta y_i+z_i''\delta z_i)-\delta U\}\,dt,$$

wo

$$\delta U = \Sigma\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\delta x_i+\frac{\partial U}{\partial y_i}\delta y_i+\frac{\partial U}{\partial z_i}\delta z_i\right),$$

eine Gleichung, aus welcher in der That die frühere in der zweiten Vorlesung (p. 12) gegebene symbolische Grundgleichung (2.) der Dynamik folgt.

Das in Gleichung (1.) enthaltene Princip ist sehr nützlich bei der Transformation der Coordinaten. Die Gleichung (1.) gilt für jedes Coordinatensystem; in einem neuen System hat man daher nach den neuen Coordinaten ebenso zu variiren, wie früher nach den alten, und die ganze Substitution, welche vorzunehmen ist, beschränkt sich auf die beiden Ausdrücke T und U.

Wir wollen dies zunächst auf Polarcoordinaten anwenden; die Transformationsformeln sind in diesem Falle:

$$\begin{aligned} x_\iota &= r_\iota \cos\varphi_\iota, \\ y_\iota &= r_\iota \sin\varphi_\iota \cos\psi_\iota, \\ z_\iota &= r_\iota \sin\varphi_\iota \sin\psi_\iota. \end{aligned}$$

Hieraus folgt durch Differentiation

$$\begin{aligned} dx_\iota &= \cos\varphi_\iota . dr_\iota - r\sin\varphi_\iota . d\varphi_\iota, \\ dy_\iota &= \sin\varphi_\iota \cos\psi_\iota dr_\iota + r_\iota \cos\varphi_\iota \cos\psi_\iota d\varphi_\iota - r_\iota \sin\varphi_\iota \sin\psi_\iota d\psi_\iota, \\ dz_\iota &= \sin\varphi_\iota \sin\psi_\iota dr_\iota + r_\iota \cos\varphi_\iota \sin\psi_\iota d\varphi_\iota + r_\iota \sin\varphi_\iota \cos\psi_\iota d\psi_\iota; \end{aligned}$$

daher ist

$$dx_\iota^2 + dy_\iota^2 + dz_\iota^2 = dr_\iota^2 + r_\iota^2 d\varphi_\iota^2 + r_\iota^2 \sin\varphi_\iota^2 d\psi_\iota^2,$$

oder

$$x_\iota'^2 + y_\iota'^2 + z_\iota'^2 = r_\iota'^2 + r_\iota^2 \varphi_\iota'^2 + r_\iota^2 \sin\varphi_\iota^2 \psi_\iota'^2,$$

wo

$$r_\iota' = \frac{dr_\iota}{dt}, \qquad \varphi_\iota' = \frac{d\varphi_\iota}{dt}, \qquad \psi_\iota' = \frac{d\psi_\iota}{dt}.$$

Man hat also sofort:

$$(3.)\quad T = \tfrac{1}{2}\Sigma m_\iota (x_\iota'^2 + y_\iota'^2 + z_\iota'^2) = \tfrac{1}{2}\Sigma m_\iota (r_\iota'^2 + r_\iota^2 \varphi_\iota'^2 + r_\iota^2 \sin\varphi_\iota^2 \psi_\iota'^2).$$

Dies vorausgesetzt und angenommen, dass auch U durch die neuen Coordinaten ausgedrückt sei, werden wir die aus $\delta\int(T+U)\,dt = 0$ hervorgehende Gleichung nach den allgemeinen Regeln der Variationsrechnung finden.

Ist P eine Function mehrerer Variablen $\ldots p \ldots$ und ihrer ersten Differentialquotienten $\ldots p' \ldots$, wobei vorausgesetzt wird, dass alle p von einer unabhängigen Variabeln t abhängen, und soll die erste Variation von $\int P\,dt$ verschwinden, also soll

$$\delta\int P\,dt = 0$$

sein, wo das Integral von t_0 bis t_1 zu nehmen ist, und wo die diesen Werthen von t entsprechenden Werthe der p gegeben sind: so führt dies, wie die in der sechsten Vorlesung (p. 50) ausgeführten Entwickelungen gezeigt haben, zu der Gleichung

$$(4.)\qquad 0 = \Sigma \left\{ \frac{d\frac{\partial P}{\partial p'}}{dt} - \frac{\partial P}{\partial p} \right\} \delta p.$$

In unserem Fall sind r_i, φ_i, ψ_i die Grössen p, und $P = T+U$; ferner enthält U die Differentialquotienten r'_i, φ'_i, ψ'_i nicht; daher erhalten wir

$$0 = \Sigma \left\{ \frac{d\frac{\partial T}{\partial r'_i}}{dt} - \frac{\partial T}{\partial r_i} - \frac{\partial U}{\partial r_i} \right\} \delta r_i + \Sigma \left\{ \frac{d\frac{\partial T}{\partial \varphi'_i}}{dt} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_i} - \frac{\partial U}{\partial \varphi_i} \right\} \delta \varphi_i$$

$$+ \Sigma \left\{ \frac{d\frac{\partial T}{\partial \psi'_i}}{dt} - \frac{\partial T}{\partial \psi_i} - \frac{\partial U}{\partial \psi_i} \right\} \delta \psi_i.$$

Nun ist nach (3.)

$$\frac{\partial T}{\partial r'_i} = m_i r'_i, \qquad \frac{\partial T}{\partial \varphi'_i} = m_i r_i^2 \varphi'_i, \qquad \frac{\partial T}{\partial \psi'_i} = m_i r_i^2 \sin\varphi_i^2 \psi'_i,$$

$$\frac{\partial T}{\partial r_i} = m_i (r_i \varphi_i'^2 + r_i \sin\varphi_i^2 \psi_i'^2), \qquad \frac{\partial T}{\partial \varphi_i} = \tfrac{1}{2} m_i r_i^2 \sin 2\varphi_i \psi_i'^2, \qquad \frac{\partial T}{\partial \psi_i} = 0;$$

also hat man

$$0 = \Sigma \left\{ m_i \left(\frac{dr'_i}{dt} - r_i \varphi_i'^2 - r_i \sin\varphi_i^2 \psi_i'^2 \right) - \frac{\partial U}{\partial r_i} \right\} \delta r_i$$

$$+ \Sigma \left\{ m_i \left(\frac{d(r_i^2 \varphi'_i)}{dt} - \tfrac{1}{2} r_i^2 \sin 2\varphi_i \psi_i'^2 \right) - \frac{\partial U}{\partial \varphi_i} \right\} \delta\varphi_i + \Sigma \left\{ m_i \frac{d(r_i^2 \sin\varphi_i^2 \psi'_i)}{dt} - \frac{\partial U}{\partial \psi_i} \right\} \delta\psi_i,$$

oder

$$\Sigma m_i \left\{ \left(\frac{d^2 r_i}{dt^2} - r_i \varphi_i'^2 - r_i \sin\varphi_i^2 \psi_i'^2 \right) \delta r_i + \left(\frac{d(r_i^2 \varphi'_i)}{dt} - \tfrac{1}{2} r_i^2 \sin 2\varphi_i \psi_i'^2 \right) \delta\varphi_i + \frac{d(r_i^2 \sin\varphi_i^2 \psi'_i)}{dt} \delta\psi_i \right\}$$

$$= \Sigma \left(\frac{\partial U}{\partial r_i} \delta r_i + \frac{\partial U}{\partial \varphi_i} \delta \varphi_i + \frac{\partial U}{\partial \psi_i} \delta \psi_i \right) = \delta U.$$

Sind Bedingungsgleichungen da: $f = 0$, $\varpi = 0 \ldots$, so kommt auf der rechten Seite dieser Gleichung zu δU noch das Aggregat $\lambda \delta f + \mu \delta \varpi + \cdots$ hinzu, und man hat also in diesem Falle

$$(5.)\quad \begin{cases} \Sigma m_i \left\{ \left(\frac{d^2 r_i}{dt^2} - r_i \varphi_i'^2 - r_i \sin\varphi_i^2 \psi_i'^2 \right) \delta r_i + \left(\frac{d(r_i^2 \varphi'_i)}{dt} - \tfrac{1}{2} r_i^2 \sin 2\varphi_i \psi_i'^2 \right) \delta\varphi_i \right. \\ \qquad\qquad \left. + \frac{d(r_i^2 \sin\varphi_i^2 \psi'_i)}{dt} \delta\psi_i \right\} \\ \qquad = \delta U + \lambda \delta f + \mu \delta \varpi + \cdots, \end{cases}$$

eine Gleichung, welche in $3n$ Gleichungen von folgender Form zerfällt:

$$(6.)\quad \begin{cases} m_\iota\left\{\dfrac{d^2 r_\iota}{dt^2} - r_\iota \varphi_\iota'^2 - r_\iota \sin\varphi_\iota^2 \psi_\iota'^2\right\} = \dfrac{\partial U}{\partial r_\iota} + \lambda\dfrac{\partial f}{\partial r_\iota} + \mu\dfrac{\partial \varpi}{\partial r_\iota} + \cdots, \\ m_\iota\left\{\dfrac{d(r_\iota^2 \varphi_\iota')}{dt} - \frac{1}{2} r_\iota^2 \sin 2\varphi_\iota \psi_\iota'^2\right\} = \dfrac{\partial U}{\partial \varphi_\iota} + \lambda\dfrac{\partial f}{\partial \varphi_\iota} + \mu\dfrac{\partial \varpi}{\partial \varphi_\iota} + \cdots, \\ m_\iota \dfrac{d(r_\iota^2 \sin\varphi_\iota^2 \psi_\iota')}{dt} = \dfrac{\partial U}{\partial \psi_\iota} + \lambda\dfrac{\partial f}{\partial \psi_\iota} + \mu\dfrac{\partial \varpi}{\partial \psi_\iota} + \cdots. \end{cases}$$

Von vorzüglicher Wichtigkeit ist die Transformation der ursprünglichen Veränderlichen in neue, die so gewählt sind, dass, wenn Alles durch sie ausgedrückt ist, die Bedingungsgleichungen von selbst befriedigt werden. Wenn nämlich m Bedingungsgleichungen da sind, so lassen sich alle $3n$ Coordinaten durch $3n-m$ derselben oder auch durch $3n-m$ Functionen derselben ausdrücken. In den meisten Fällen ist es sehr wichtig, nicht die Coordinaten selbst, sondern neue Grössen einzuführen, um Irrationalitäten zu vermeiden. Bei der Bewegung eines Punktes auf dem Ellipsoid z. B. sind die Formeln

$$x = a\cos\eta, \qquad y = b\sin\eta\cos\zeta, \qquad z = c\sin\eta\sin\zeta,$$

welche die Gleichung des Ellipsoids identisch befriedigen, von der grössten Wichtigkeit. Wir wollen die neuen $3n-m = k$ Grössen $q_1, q_2, \ldots q_k$ nennen; sie sollen so beschaffen sein, dass, wenn man $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 \ldots$ durch sie ausdrückt, und in die m Bedingungsgleichungen $f=0$, $\varpi=0$, ... diese Ausdrücke einsetzt, die linken Theile dieser Gleichungen identisch verschwinden, d. h. es soll identisch

$$(7.)\qquad f(q_1, q_2, \ldots q_k) = 0, \quad \varpi(q_1, q_2, \ldots q_k) = 0, \quad \ldots$$

sein, ohne dass zwischen den q irgend welche Relation stattfindet. Hierdurch werden die Differentialgleichungen der Bewegung bedeutend vereinfacht. Für irgend ein Coordinatensystem nämlich ist nach Gleichung (4.) die allgemeine symbolische Grundgleichung der Dynamik, wenn Bedingungsgleichungen stattfinden,

$$\Sigma\left\{\frac{d\dfrac{\partial T}{\partial q_\varkappa'}}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_\varkappa}\right\}\delta q_\varkappa = \delta U + \lambda\delta f + \mu\delta\varpi + \cdots,$$

wo sich das Summenzeichen auf alle q erstreckt. Aber für unsere Grössen q gelten die Gleichungen (7.) identisch; daher hat man nach Einführung dieser Grössen $\delta f = 0$, $\delta\varpi = 0$, etc. und die obige Gleichung reducirt sich auf

$$\Sigma\left\{\frac{d\dfrac{\partial T}{\partial q_\varkappa'}}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_\varkappa}\right\}\delta q_\varkappa = \delta U,$$

welche in k Differentialgleichungen der Form

$$(8.)\qquad \frac{d\frac{\partial T}{\partial q'_s}}{dt}-\frac{\partial T}{\partial q_s}=\frac{\partial U}{\partial q_s}$$

zerfällt. Dies ist die Form, in welcher *Lagrange* schon in der alten Ausgabe der Mécanique analytique die Differentialgleichungen der Bewegung dargestellt hat.

Denkt man sich alle Coordinaten durch die Grössen q ausgedrückt, so erhält man durch Differentiation:

$$x'_i=\frac{\partial x_i}{\partial q_1}q'_1+\frac{\partial x_i}{\partial q_2}q'_2+\cdots+\frac{\partial x_i}{\partial q_k}q'_k,$$

$$y'_i=\frac{\partial y_i}{\partial q_1}q'_1+\frac{\partial y_i}{\partial q_2}q'_2+\cdots+\frac{\partial y_i}{\partial q_k}q'_k,$$

$$z'_i=\frac{\partial z_i}{\partial q_1}q'_1+\frac{\partial z_i}{\partial q_2}q'_2+\cdots+\frac{\partial z_i}{\partial q_k}q'_k.$$

Wenn man dies in $T=\frac{1}{2}\Sigma m_i(x_i'^2+y_i'^2+z_i'^2)$ einsetzt, erhält man einen Ausdruck, der in Beziehung auf die Grössen $q'_1, q'_2, \ldots q'_k$ eine homogene Function zweiten Grades ist, deren Coefficienten bekannte Functionen von $q_1, q_2, \ldots q_k$ sind. Setzen wir

$$\frac{\partial T}{\partial q'_s}=p_s,$$

so können wir die Gleichung (8.) auch so schreiben:

$$(9.)\qquad \frac{dp_s}{dt}=\frac{\partial(T+U)}{\partial q_s}.$$

Dies ist zwar noch nicht die schliessliche Form der Gleichungen der Bewegung, sie erfordert vielmehr eine fernere Transformation: aber ehe wir hierzu übergehen, wollen wir das Bisherige auf den Fall ausdehnen, wo keine Kräftefunction existirt, sondern wo an die Stelle von δU in der ursprünglichen symbolischen Gleichung der Bewegung $\Sigma(X_i\delta x_i+Y_i\delta y_i+Z_i\delta z_i)$ tritt. Wenn Alles in den Grössen q ausgedrückt ist, so ist $\delta U=\sum_s\frac{\partial U}{\partial q_s}\delta q_s$. Vergleicht man dies mit dem eben erwähnten Ausdruck $\Sigma(X_i\delta x_i+Y_i\delta y_i+Z_i\delta z_i)$ und erinnert sich an die in der zweiten Vorlesung (p. 13) gegebene Regel, wonach bei einer Transformation der Coordinaten für δx_i, δy_i, δz_i beziehungsweise $\sum_s\frac{\partial x_i}{\partial q_s}\delta q_s$, $\sum_s\frac{\partial y_i}{\partial q_s}\delta q_s$, $\sum_s\frac{\partial z_i}{\partial q_s}\delta q_s$ zu substituiren sind, so sieht man, dass an Stelle von

$$\sum_s\frac{\partial U}{\partial q_s}\delta q_s$$

der Ausdruck

$$\sum_i \sum_s \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_s} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_s} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_s}\right) \delta q_s$$

tritt, und also an die Stelle von $\frac{\partial U}{\partial q_s}$ der Ausdruck

$$(10.) \qquad Q_s = \sum_i \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_s} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_s} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_s}\right).$$

Vermöge dieser Aenderung wird Gleichung (8.) durch folgende ersetzt:

$$(11.) \qquad \frac{d\frac{\partial T}{\partial q'_s}}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s.$$

Und wenn man hierin für s die Werthe 1 bis k setzt, so erhält man für den vorliegenden Fall die Gleichungen der Bewegung in den Grössen q ausgedrückt.

Wir wollen die Gleichung (11.) noch auf anderem Wege verificiren und zwar, indem wir von den in der vorigen Vorlesung (p. 54) gegebenen Gleichungen (5.)

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = X_i + \lambda \frac{\partial f}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial \varpi}{\partial x_i} + \cdots,$$

$$m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = Y_i + \lambda \frac{\partial f}{\partial y_i} + \mu \frac{\partial \varpi}{\partial y_i} + \cdots,$$

$$m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = Z_i + \lambda \frac{\partial f}{\partial z_i} + \mu \frac{\partial \varpi}{\partial z_i} + \cdots$$

ausgehen. Multiplicirt man diese Gleichungen mit $\frac{\partial x_i}{\partial q_s}$, $\frac{\partial y_i}{\partial q_s}$, $\frac{\partial z_i}{\partial q_s}$ und summirt in Beziehung auf i, so erhält man als Multiplicator von λ

$$\sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_s} + \frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial q_s} + \frac{\partial f}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial q_s}\right) = \frac{\partial f(q_1, q_2 \cdots q_k)}{\partial q_s}.$$

Der Ausdruck rechts aber verschwindet nach (7.), und dasselbe gilt von den Coefficienten von μ . . . : daher erhält man mit Berücksichtigung der Gleichung (10.):

$$(12.) \qquad \sum_i m_i \left\{\frac{d^2 x_i}{dt^2} \frac{\partial x_i}{\partial q_s} + \frac{d^2 y_i}{dt^2} \frac{\partial y_i}{\partial q_s} + \frac{d^2 z_i}{dt^2} \frac{\partial z_i}{\partial q_s}\right\} = Q_s.$$

Um die Gleichung (11.) zu verificiren müssen wir also zeigen, dass ihre linke Seite mit der linken Seite dieser Gleichung identisch ist. Dies wird folgendermassen nachgewiesen. Es ist

$$T = \tfrac{1}{2} \Sigma m_i (x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2),$$

daher

$$\frac{\partial T}{\partial q'_s} = \sum_i m_i \left(x'_i \frac{\partial x'_i}{\partial q'_s} + y'_i \frac{\partial y'_i}{\partial q'_s} + z'_i \frac{\partial z'_i}{\partial q'_s} \right), \quad \frac{\partial T}{\partial q_s} = \sum_i m_i \left(x'_i \frac{\partial x'_i}{\partial q_s} + y'_i \frac{\partial y'_i}{\partial q_s} + z'_i \frac{\partial z'_i}{\partial q_s} \right).$$

Nun hatten wir aber die Differentialgleichungen

$$x'_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_1} q'_1 + \frac{\partial x_i}{\partial q_2} q'_2 + \cdots + \frac{\partial x_i}{\partial q_k} q'_k,$$

$$y'_i = \frac{\partial y_i}{\partial q_1} q'_1 + \frac{\partial y_i}{\partial q_2} q'_2 + \cdots + \frac{\partial y_i}{\partial q_k} q'_k,$$

$$z'_i = \frac{\partial z_i}{\partial q_1} q'_1 + \frac{\partial z_i}{\partial q_2} q'_2 + \cdots + \frac{\partial z_i}{\partial q_k} q'_k.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{\partial x'_i}{\partial q'_s} = \frac{\partial x_i}{\partial q_s}, \qquad \frac{\partial y'_i}{\partial q'_s} = \frac{\partial y_i}{\partial q_s}, \qquad \frac{\partial z'_i}{\partial q'_s} = \frac{\partial z_i}{\partial q_s};$$

ferner:

$$\frac{\partial x'_i}{\partial q_s} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_s \partial q_1} q'_1 + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_s \partial q_2} q'_2 + \cdots + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_s \partial q_k} q'_k = \frac{d \frac{\partial x_i}{\partial q_s}}{dt},$$

$$\frac{\partial y'_i}{\partial q_s} = \frac{\partial^2 y_i}{\partial q_s \partial q_1} q'_1 + \frac{\partial^2 y_i}{\partial q_s \partial q_2} q'_2 + \cdots + \frac{\partial^2 y_i}{\partial q_s \partial q_k} q'_k = \frac{d \frac{\partial y_i}{\partial q_s}}{dt}.$$

$$\frac{\partial z'_i}{\partial q_s} = \frac{\partial^2 z_i}{\partial q_s \partial q_1} q'_1 + \frac{\partial^2 z_i}{\partial q_s \partial q_2} q'_2 + \cdots + \frac{\partial^2 z_i}{\partial q_s \partial q_k} q'_k = \frac{d \frac{\partial z_i}{\partial q_s}}{dt}.$$

Die Substitution dieser Werthe in $\frac{\partial T}{\partial q'_s}$ und $\frac{\partial T}{\partial q_s}$ giebt

$$\frac{\partial T}{\partial q'_s} = \sum_i m_i \left(x'_i \frac{\partial x_i}{\partial q_s} + y'_i \frac{\partial y_i}{\partial q_s} + z'_i \frac{\partial z_i}{\partial q_s} \right),$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_s} = \sum_i m_i \left(x'_i \frac{d \frac{\partial x_i}{\partial q_s}}{dt} + y'_i \frac{d \frac{\partial y_i}{\partial q_s}}{dt} + z'_i \frac{d \frac{\partial z_i}{\partial q_s}}{dt} \right);$$

daher ist

$$\frac{d \frac{\partial T}{\partial q'_s}}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_s} = \sum_i m_i \left(\frac{dx'_i}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_s} + \frac{dy'_i}{dt} \frac{\partial y_i}{\partial q_s} + \frac{dz'_i}{dt} \frac{\partial z_i}{\partial q_s} \right)$$

$$= \sum_i m_i \left(\frac{d^2 x_i}{dt^2} \frac{\partial x_i}{\partial q_s} + \frac{d^2 y_i}{dt^2} \frac{\partial y_i}{\partial q_s} + \frac{d^2 z_i}{dt^2} \frac{\partial z_i}{\partial q_s} \right),$$

wodurch die Identität der Gleichungen (11.) und (12.) bewiesen und zugleich die erstere verificirt ist.

Somit hat man, wenn keine Kräftefunction stattfindet, Gleichungen der Form (11.) als Gleichungen der Bewegung, wenn aber eine Kräftefunction stattfindet, Gleichungen der Form (8.) oder, was dasselbe ist, der Form (9.), nämlich

$$\frac{dp_s}{dt} = \frac{\partial (T+U)}{\partial q_s}, \qquad p_s = \frac{\partial T}{\partial q'_s}.$$

Aus der Form dieser Gleichungen ergiebt sich auf der Stelle ein bemerkenswerthes Resultat, und zwar: *Kann man die neuen Variablen so wählen, dass eine derselben q_s in der Kräftefunction nicht vorkommt und dass zur Darstellung von T nicht die Variable q_s selbst sondern nur ihr Differentialquotient q'_s gebraucht wird, so ergiebt sich aus diesem Umstande jedesmal ein Integral des vorgelegten Systems von Differentialgleichungen und zwar $p_s=$ Const., oder, was dasselbe ist,* $\frac{\partial T}{\partial q'_s} =$ Const. Denn unter der gemachten Voraussetzung ist $\frac{\partial (T+U)}{\partial q_s} = 0$, man hat daher $\frac{dp_s}{dt} = 0$, $p_s =$ Const. Dieser Fall tritt z. B. bei der Attraction eines Punktes durch *ein* festes Centrum ein. Befindet sich das Centrum im Anfangspunkt der Coordinaten, so hat man in Polarcoordinaten (Siehe Gleichung (3.))

$$U = \frac{\alpha}{r}, \qquad T = \tfrac{1}{2} m (r'^2 + r^2 \varphi'^2 + r^2 \sin\varphi^2 \psi'^2),$$

es kommt also ψ in U nicht vor und in T nicht ψ selbst sondern nur dessen Differentialquotient ψ', daher hat man

$$\frac{\partial T}{\partial \psi'} = m r^2 \sin\varphi^2 \psi' = \text{Const.}$$

oder, indem man den Factor m in die Constante eingehen lässt,

$$r^2 \sin\varphi^2 . \psi' = \text{Const.},$$

was man übrigens auch aus der dritten Gleichung (6.) hätte ableiten können. Dies ist das Princip der Flächen in Beziehung auf die Ebene der yz. In der That, es ist

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi\cos\psi, \quad z = r\sin\varphi\sin\psi,$$

also

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{z}{y},$$

$$\frac{1}{\cos\psi^2} . \psi' = \frac{yz' - zy'}{y^2},$$

oder nach Multiplication mit $y^2 = r^2 \sin\varphi^2 \cos\psi^2$

$$r^2 \sin\varphi^2 . \psi' = y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt},$$

und es ist daher

$$r^2 \sin\varphi^2 . \psi' = y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt} = \text{Const.}$$

das Princip der Flächen für die Ebene der yz.

Neunte Vorlesung.

Die *Hamilton*sche Form der Bewegungsgleichungen.

Nach dem Erscheinen der ersten Ausgabe der Mécanique analytique war der wichtigste Fortschritt in der Umformung der Differentialgleichungen der Bewegung der, welchen *Poisson* in einem Aufsatz machte, der von der Methode der Variation der Constanten handelt und im 15ten Hefte des polytechnischen Journals steht. Hier führt *Poisson* die Grössen $p = \frac{\partial T}{\partial q'}$ für die Grössen q' ein; da nun, wie schon oben bemerkt, T eine homogene Function zweiten Grades der Grössen q' ist, deren Coefficienten von den q abhängen, so werden die p lineare Functionen der Grössen q'; zur Definition der p hat man also k Gleichungen der Form $p_\iota = \varpi_\iota$, wo ϖ_ι ein linearer Ausdruck in $q'_1, q'_2, \ldots q'_k$ ist. Löst man diese k linearen Gleichungen nach den Grössen q' auf, so bekommt man Gleichungen der Form $q'_\iota = K_\iota$, wo die K_ι lineare Ausdrücke in den p sind, deren Coefficienten von den q abhängen. Diese Ausdrücke von q'_ι wollen wir in die Gleichung (9.) der vorigen Vorlesung einsetzen, d. h. in die Gleichung

$$\frac{dp_\iota}{dt} = \frac{\partial(T+U)}{\partial q_\iota} = \frac{\partial T}{\partial q_\iota} + \frac{\partial U}{\partial q_\iota},$$

wo $\frac{\partial U}{\partial q_\iota}$ nur die q enthält, während $\frac{\partial T}{\partial q_\iota}$ noch überdies Function der Grössen q' ist und zwar eine in Bezug auf diese Grössen homogene Function zweiten Grades. Setzen wir nun $q'_\iota = K_\iota$ ein, so wird $\frac{\partial T}{\partial q_\iota}$ eine homogene Function zweiten Grades der Grössen p_ι. Dadurch wird die obige Gleichung von der Form

$$\frac{dp_\iota}{dt} = P_\iota,$$

wo P_ι ein Ausdruck in den p und q ist und zwar zweiten Grades in Bezug auf die p. Diese Gleichungen mit den Gleichungen $q'_\iota = \frac{dq_\iota}{dt} = K_\iota$ combinirt gehen:

$$(1.)\qquad \frac{dq_\iota}{dt} = K_\iota, \qquad \frac{dp_\iota}{dt} = P_\iota.$$

Und dies ist die Form, auf welche *Poisson* die Gleichungen der Bewegung bringt, wo K_ι und P_ι weiter keine variablen Grössen enthalten, als die p und die q. Von diesem System von $2k$ Gleichungen gelten die merkwürdigen Sätze, dass

$$(2.)\qquad \frac{\partial K_\iota}{\partial p_{\iota'}} = \frac{\partial K_{\iota'}}{\partial p_\iota}, \qquad \frac{\partial K_\iota}{\partial q_{\iota'}} = -\frac{\partial P_{\iota'}}{\partial p_\iota}, \qquad \frac{\partial P_\iota}{\partial q_{\iota'}} = \frac{\partial P_{\iota'}}{\partial q_\iota},$$

von welchen *Poisson* am angeführten Orte die erste Gruppe genau ebenso angiebt, während die übrigen sich aus seinen Resultaten unmittelbar hinschreiben lassen.

Die Gleichungen (2.) zeigen, dass die Grössen K_ι und P_i als die partiellen Differentialquotienten *einer* Function nach den Grössen p_ι und $-q_\iota$ anzusehen sind. Diese Bemerkung, die ohne Weiteres aus den Gleichungen (2.) hervorgeht, macht *Poisson* nicht; noch weniger sucht er jene Function zu ermitteln. Diese Bestimmung hat vielmehr *Hamilton* zuerst gemacht, und durch die Einführung seiner charakteristischen Function wird die ganze Umformung ausserordentlich erleichtert. Auf jene charakteristische Function kommt man fast von selbst, wenn man aus der in der vorigen Vorlesung angegebenen zweiten *Lagrange*schen Form der Differentialgleichungen den Satz der lebendigen Kraft herleiten will, eine Herleitung, welche nicht ganz auf der Hand liegt. Der Satz der lebendigen Kraft ist, wenn man den Fall mitberücksichtigt, in welchem in der Kräftefunction U die Zeit explicite vorkommt,

$$T = U - \int \frac{\partial U}{\partial t} dt + \text{Const.}$$

oder differentiirt

$$\frac{d(T-U)}{dt} + \frac{\partial U}{\partial t} = 0.$$

Um dies Resultat aus der (in Gleichung (9.) der achten Vorlesung enthaltenen) zweiten *Lagrange*schen Form der Differentialgleichungen

$$\frac{dp_\iota}{dt} = \frac{\partial(T+U)}{\partial q_\iota}, \qquad p_\iota = \frac{\partial T}{\partial q'_\iota}$$

herzuleiten, verfährt man auf folgende Art. T ist eine homogene Function zweiten Grades der Grössen q', also hat man, wie bekannt,

$$2T = q_1' \frac{\partial T}{\partial q_1'} + q_2' \frac{\partial T}{\partial q_2'} + \cdots + q_k' \frac{\partial T}{\partial q_k'} = \Sigma q_\iota' p_\iota$$

oder

$$T = \Sigma q_\iota' \frac{\partial T}{\partial q_\iota'} - T,$$

und hieraus erhält man durch vollständige Differentiation

$$dT = \Sigma q_\iota' d \frac{\partial T}{\partial q_\iota'} + \Sigma \frac{\partial T}{\partial q_\iota'} dq_\iota' - \Sigma \frac{\partial T}{\partial q_\iota'} dq_\iota' - \Sigma \frac{\partial T}{\partial q_\iota} dq_\iota$$

oder, da die zweite und dritte Summe einander aufheben,

$$(3.) \qquad dT = \Sigma q_\iota' d \frac{\partial T}{\partial q_\iota'} - \Sigma \frac{\partial T}{\partial q_\iota} dq_\iota = \Sigma q_\iota' dp_\iota - \Sigma \frac{\partial T}{\partial q_\iota} dq_\iota,$$

welches eine identische Gleichung ist. Führt man hierin für $d \frac{\partial T}{\partial q_\iota'} = dp_\iota$ seinen Werth aus (9.) der vorigen Vorlesung ein und dividirt durch dt, so ergiebt sich

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= \Sigma \frac{\partial (T+U)}{\partial q_\iota} q_\iota' - \Sigma \frac{\partial T}{\partial q_\iota} \frac{dq_\iota}{dt} \\ &= \Sigma \frac{\partial U}{\partial q_\iota} q_\iota' = \frac{dU}{dt} - \frac{\partial U}{\partial t}, \end{aligned}$$

also haben wir

$$\frac{d(T-U)}{dt} + \frac{\partial U}{\partial t} = 0, \quad \text{w. z. b. w.}$$

Die identische Gleichung (3.) führt mit Leichtigkeit auf die *Hamilton*sche charakteristische Function. Die partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial T}{\partial q_\iota}$ und $\frac{\partial T}{\partial q_\iota'} = p_\iota$ nämlich, welche auf der rechten Seite der Gleichung (3.) vorkommen (von den letzteren die Differentiale), sind so zu verstehen, dass T als Function der Grössen q und q' anzusehen ist. Führen wir aber durch die schon oben erwähnten linearen Gleichungen $q_\iota' = K_\iota$ die Grössen p_ι für q_ι' ein, so wird dadurch T eine Function der Grössen p und q, und die unter dieser Hypothese gebildeten Differentialquotienten von T nach p_ι und q_ι wollen wir zur Unterscheidung mit $\left(\frac{\partial T}{\partial p_\iota}\right)$ und $\left(\frac{\partial T}{\partial q_\iota}\right)$ bezeichnen. Dann ist

$$dT = \Sigma \left(\frac{\partial T}{\partial p_\iota}\right) dp_\iota + \Sigma \left(\frac{\partial T}{\partial q_\iota}\right) dq_\iota,$$

also nach Gleichung (3.)

$$\Sigma \left(\frac{\partial T}{\partial p_\iota}\right) dp_\iota + \Sigma \left(\frac{\partial T}{\partial q_\iota}\right) dq_\iota = \Sigma q_\iota' dp_\iota - \Sigma \frac{\partial T}{\partial q_\iota} dq_\iota.$$

Dies muss eine identische Gleichung sein, und aus derselben folgt also

$$(4.)\qquad \left(\frac{\partial T}{\partial p_i}\right) = q'_i,$$

$$(5.)\qquad \left(\frac{\partial T}{\partial q_i}\right) = -\frac{\partial T}{\partial q_i}.$$

Die Gleichung (4.) zeigt, dass zwischen den Grössen p und q' eine Art von Reciprocität stattfindet; denn durch Zusammenstellung mit der früher aufgestellten, $\frac{\partial T}{\partial q'_i} = p_i$, erhalten wir die beiden Gleichungen

$$\frac{\partial T}{\partial q'_i} = p_i, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial p_i}\right) = q'_i,$$

eine Correlation, wie sie ähnlich in der Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung vorkommt. Setzen wir den in (5.) gefundenen Werth von $\frac{\partial T}{\partial q_i}$ in die Gleichung (9.) der vorigen Vorlesung ein, so erhalten wir

$$\frac{dp_i}{dt} = -\left(\frac{\partial T}{\partial q_i}\right) + \frac{\partial U}{\partial q_i}.$$

Aber da U die p gar nicht enthält und ebenso wenig die q', so ist

$$\frac{\partial U}{\partial q_i} = \left(\frac{\partial U}{\partial q_i}\right), \quad \text{also} \quad \frac{dp_i}{dt} = -\left(\frac{\partial (T-U)}{\partial q_i}\right).$$

Ferner kann man, weil U kein p enthält, die Gleichung (4.) auch so schreiben:

$$\frac{dq_i}{dt} = \left(\frac{\partial (T-U)}{\partial p_i}\right).$$

Also haben wir, wenn

$$(6.)\qquad T - U = H$$

gesetzt wird,

$$(7.)\qquad \frac{dq_i}{dt} = \left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\right), \quad \frac{dp_i}{dt} = -\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\right),$$

woraus man sieht, dass $H = T - U$ die characteristische Function ist. Aus diesen Gleichungen ergiebt sich der Satz der lebendigen Kraft von selbst; denn aus den beiden Gleichungen (7.) folgt

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\right)\frac{dp_i}{dt} + \left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)\frac{dq_i}{dt} = 0,$$

und dies in Beziehung auf alle i summirt giebt:

$$\frac{dH}{dt} - \frac{\partial H}{\partial t} = 0,$$

d. h. den Satz der lebendigen Kraft.

Da es sich von selbst versteht, dass in den Gleichungen (7.) die Grössen p und q als die Variablen anzusehen sind, so kann man die Klammern um die Differentialquotienten fortlassen und erhält:

$$(8.)\qquad \frac{dq_\iota}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\iota}, \quad \frac{dp_\iota}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_\iota}, \quad H = T - U.$$

In dem allgemeineren Fall, wo keine Kräftefunction existirt, tritt an die Stelle von $\frac{\partial U}{\partial q_\iota}$ der Ausdruck

$$Q_\iota = \Sigma\left(X\frac{\partial x}{\partial q_\iota} + Y\frac{\partial y}{\partial q_\iota} + Z\frac{\partial z}{\partial q_\iota}\right),$$

wo die Summe über alle x, y, z auszudehnen ist, und es treten also an die Stelle der Gleichungen (8.) folgende:

$$(9.)\qquad \frac{dq_\iota}{dt} = \frac{\partial T}{\partial p_\iota}, \quad \frac{dp_\iota}{dt} = -\frac{\partial T}{\partial q_\iota} + Q_\iota.$$

Wenn keine Bedingungsgleichungen da sind, fallen die Grössen q mit den Coordinaten zusammen; die erste der Gleichungen (8.) wird identisch, und die zweite geht über in das System

$$m_\iota\frac{d^2x_\iota}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_\iota}, \quad m_\iota\frac{d^2y_\iota}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y_\iota}, \quad m_\iota\frac{d^2z_\iota}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z_\iota},$$

welches die ursprüngliche Form der Bewegungsgleichungen ist.

Zehnte Vorlesung.

Das Princip des letzten Multiplicators. Ausdehnung des *Euler*schen Multiplicators auf drei Veränderliche. Aufstellung des letzten Multiplicators für diesen Fall.

Das Princip des letzten Multiplicators leistet in allen Fällen, wo die Integration eines Systems von Differentialgleichungen der Bewegung bis auf eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen zwei Variablen zurückgeführt ist, die Integration dieser letzten Gleichung durch Angabe ihres Multiplicators. Vorausgesetzt wird hierbei, dass die sollicitirenden Kräfte X_ι, Y_ι, Z_ι nur von den Coordinaten und der Zeit abhängen.

Wenn wir in das System der ursprünglichen Differentialgleichungen der Bewegung die Differentialquotienten $\frac{dx_\iota}{dt}$, $\frac{dy_\iota}{dt}$, $\frac{dz_\iota}{dt}$ als neue Variable x'_ι, y'_ι,

z'_i einführen, so nimmt dasselbe folgende Form an:

$$m_i \frac{dx'_i}{dt} = X_i + \lambda \frac{\partial f}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial \varpi}{\partial x_i} + \cdots, \qquad \frac{dx_i}{dt} = x'_i,$$

$$m_i \frac{dy'_i}{dt} = Y_i + \lambda \frac{\partial f}{\partial y_i} + \mu \frac{\partial \varpi}{\partial y_i} + \cdots, \qquad \frac{dy_i}{dt} = y'_i,$$

$$m_i \frac{dz'_i}{dt} = Z_i + \lambda \frac{\partial f}{\partial z_i} + \mu \frac{\partial \varpi}{\partial z_i} + \cdots, \qquad \frac{dz_i}{dt} = z'_i.$$

Dies sind $6n$ Differentialgleichungen; aber zwischen den in ihnen vorkommenden $6n$ von t abhängigen Variablen x_i, y_i, z_i, x'_i, y'_i, z'_i ... bestehen schon $2m$ Relationen, nämlich:

$$f = 0, \qquad \varpi = 0, \qquad \ldots,$$

$$\Sigma\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} x'_i + \frac{\partial f}{\partial y_i} y'_i + \frac{\partial f}{\partial z_i} z'_i\right) = 0, \quad \Sigma\left(\frac{\partial \varpi}{\partial x_i} x'_i + \frac{\partial \varpi}{\partial y_i} y'_i + \frac{\partial \varpi}{\partial z_i} z'_i\right) = 0, \quad \ldots,$$

wo auf den linken Seiten der letzteren m Gleichungen respective die Terme $\frac{\partial f}{\partial t}$, $\frac{\partial \varpi}{\partial t}$, ... hinzuzufügen sind, wenn t in f, ϖ, ... explicite vorkommt. Man hat also noch $6n-2m$ Integralgleichungen zu finden.

Setzen wir nun zuerst voraus, dass t nicht explicite vorkommt, weder in X_i, Y_i, Z_i, noch in f, ϖ, ..., so kann man durch eine der $6n$ Gleichungen, etwa durch die Gleichung $\frac{dx_1}{dt} = x'_1$ oder $dt = \frac{dx_1}{x'_1}$, aus den übrigen die Zeit eliminiren und hat dann ein System von $6n-1$ Differentialgleichungen, dessen vollständige Integration $6n-2m-1$ Integrale erfordert. Gesetzt, diese Integration wäre geleistet, so kann man die $6n$ Grössen x_i, y_i, z_i, x'_i, y'_i, z'_i ... durch eine derselben, z. B. durch x_1, ausdrücken. Denken wir uns auf diese Weise x'_1 als Function von x_1 dargestellt, so giebt die Gleichung $dt = \frac{dx_1}{x'_1}$ integrirt

$$t + \text{Const.} = \int \frac{dx_1}{x'_1};$$

es kommt also, wenn die Zeit nicht explicite vorkommt, die letzte Integration auf eine blosse Quadratur zurück, und die Zeit ist dann immer mit einer willkürlichen Constanten durch Addition verbunden. Dies findet z. B. bei der elliptischen Bewegung der Planeten statt. Nehmen wir aber an, das System der $6n-1$ Differentialgleichungen, welche nach Elimination der Zeit erhalten wurden, sei nicht vollständig integrirt, sondern es fehle noch eine Integration, man habe also nicht $6n-2m-1$ Integrale gefunden, sondern nur $6n-2m-2$;

alsdann kann man nicht alle Variablen durch eine einzige, z. B. x_1, ausdrücken, wohl aber durch zwei, z. B. x_1 und y_1. In diesem Falle bleibt noch eine Differentialgleichung zwischen x_1 und y_1 zu integriren übrig; hat man nämlich aus $\frac{dy_1}{dt} = y_1'$ das Differential der Zeit durch $dt = \frac{dx_1}{x_1'}$ eliminirt, so erhält man

$$dx_1 : dy_1 = x_1' : y_1',$$

wo x_1' und y_1' nach unserer Annahme Functionen von x_1 und y_1 sind. Von dieser Differentialgleichung nun giebt das von mir aufgestellte Princip den Multiplicator an, und nachdem man diese Gleichung vermöge des Princips des letzten Multiplicators integrirt hat, findet man, wie oben bemerkt, die Zeit durch eine blosse Quadratur. Wenn also die Zeit nicht explicite vorkommt, so braucht man nur $6n-2m-2$ Integrationen auszuführen, und es ergeben sich die beiden letzten ohne weiteren Kunstgriff.

Kommt die Zeit aber explicite also nicht blos in ihrem Differential vor, so lässt sie sich aus den Differentialgleichungen nicht eliminiren. Alsdann muss man $6n-2m-1$ Integrationen als ausgeführt annehmen, wodurch sich Alles auf die Integration einer Differentialgleichung der Form

$$dx_1 - x_1'dt = 0$$

reducirt, in welcher x_1' Function von x_1 und t ist. Die Integration dieser Gleichung leistet wiederum das Princip des letzten Multiplicators.

Nachdem wir gesehen haben, was das in Rede stehende Princip leistet, gehen wir zur Herleitung desselben über. —

Als *Euler* schon an sehr vielen Beispielen gesehen hatte, dass man Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen zwei Variablen durch Multiplicatoren zu vollständigen Differentialen machen und so integriren könne, dauerte es doch noch sehr lange, bis er zu der Einsicht gelangte, dass dies eine allgemeine Eigenschaft dieser Differentialgleichungen sei. Dies lag daran, dass ihm die Vorstellung, die Integralgleichung nach der willkürlichen Constante aufzulösen, sehr fern lag. Wäre ihm diese Vorstellung geläufiger gewesen, so würde er auch nicht daran verzweifelt haben, die linearen partiellen Differentialgleichungen auf gewöhnliche zurückzuführen, ein Problem, welches er für schwieriger hielt, als das noch heute ungelöste, Differentialgleichungen zweiter Ordnung zwischen zwei Variablen zu integriren, während die Zurückführung der partiellen linearen Differentialgleichungen auf gewöhnliche jetzt zu den Elementen gehört. *Euler* hat auch nie die Theorie des

Multiplicators auf ein System von Differentialgleichungen ausgedehnt, was ganz ebenso einfach ist, wenn man sich die Integralgleichungen nach den willkürlichen Constanten aufgelöst denkt.

Nehmen wir zuerst eine Differentialgleichung zwischen zwei Variablen x und y, und zwar sei sie in Gestalt der Proportion

$$dx : dy = X : Y,$$

gegeben, welche mit der Gleichung

$$X dy - Y dx = 0$$

identisch ist. Denkt man sich das Integral auf die Form $F = \text{Const.}$ gebracht, so erhält man durch Differentiation die Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial x} dx = 0,$$

deren linke Seite nur um einen Factor M von der linken Seite obiger Differentialgleichung verschieden sein kann; man hat also

$$MX = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad -MY = \frac{\partial F}{\partial x},$$

und hieraus ergiebt sich zur Bestimmung von M die Gleichung

$$(1.) \qquad \frac{\partial (MX)}{\partial x} + \frac{\partial (MY)}{\partial y} = 0.$$

Dehnen wir die Theorie dieses Multiplicators M auf ein System zweier simultanen Differentialgleichungen zwischen drei Variablen aus. Dasselbe sei in folgender Form vorgelegt:

$$(2.) \qquad dx : dy : dz = X : Y : Z,$$

die Integralgleichungen nach den willkürlichen Constanten aufgelöst seien

$$(3.) \qquad f = \alpha, \quad \varphi = \beta;$$

dann hat man

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = 0,$$

und hieraus ergiebt sich

$$dx : dy : dz = \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial y} : \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial z} : \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Setzt man

$$A = \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad B = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad C = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

so ist also

$$dx : dy : dz = A : B : C,$$

was mit dem vorgelegten System (2.) verglichen zu der Proportion

$$A : B : C = X : Y : Z$$

führt. Es giebt also einen Multiplicator M von der Beschaffenheit, dass

$$A = MX, \quad B = MY, \quad C = MZ.$$

Aber die Grössen A, B, C befriedigen identisch die Relation

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0;$$

daher hat man für M die Gleichung

$$\frac{\partial (MX)}{\partial x} + \frac{\partial (MY)}{\partial y} + \frac{\partial (MZ)}{\partial z} = 0,$$

oder

$$(4.) \qquad X\frac{\partial M}{\partial x} + Y\frac{\partial M}{\partial y} + Z\frac{\partial M}{\partial z} + \left\{ \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right\} M = 0.$$

Da $f = \alpha$ ein Integral des vorgelegten Systems (2.) ist, so muss df vermöge dieses Systems, ohne dass die Integralgleichungen zu Hülfe gerufen werden, identisch verschwinden, und ebenso $d\varphi$. Es ist aber

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz, \quad d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z}dz;$$

folglich erhält man vermöge des Systems (2.)

$$(5.) \qquad X\frac{\partial f}{\partial x} + Y\frac{\partial f}{\partial y} + Z\frac{\partial f}{\partial z} = 0, \quad X\frac{\partial \varphi}{\partial x} + Y\frac{\partial \varphi}{\partial y} + Z\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0,$$

welche Gleichungen als die Definitionsgleichungen der Integrale des Systems (2.) anzusehen sind.

Man kann hieraus beweisen, dass jede Function von f und φ, einer Constanten gleich gesetzt, ebenfalls ein Integral des Systems (2.) ist. In der That, ist ϖ irgend eine Function von f und φ, so multiplicire man die Gleichungen (5.) respective mit $\frac{\partial \varpi}{\partial f}$ und $\frac{\partial \varpi}{\partial \varphi}$ und addire; alsdann erhält man

$$X\left(\frac{\partial \varpi}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial \varpi}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + Y\left(\frac{\partial \varpi}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial \varpi}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) + Z\left(\frac{\partial \varpi}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial \varpi}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) = 0,$$

oder

$$(6.) \qquad X\frac{\partial \varpi}{\partial x} + Y\frac{\partial \varpi}{\partial y} + Z\frac{\partial \varpi}{\partial z} = 0,$$

also ist ϖ ein Integral von (2.). Umgekehrt ist aber jedes Integral von (2.) nothwendig eine Function von f und φ. Denn gesetzt es gäbe ein Integral $\varpi = \gamma$, welches keine Function von f und φ wäre, so gilt für ϖ die Gleichung (6.). Nun sei ω eine beliebige Function von f, φ und ϖ, und man multiplicire die Gleichungen (5.) und (6.) respective mit $\frac{\partial \omega}{\partial f}$, $\frac{\partial \omega}{\partial \varphi}$ und $\frac{\partial \omega}{\partial \varpi}$ und addire, so erhält man

$$X\frac{\partial \omega}{\partial x}+Y\frac{\partial \omega}{\partial y}+Z\frac{\partial \omega}{\partial z} = 0,$$

folglich ist auch ω ein Integral der Gleichungen (2.). Es ist aber ω eine ganz beliebige Function der Grössen f, φ, ϖ, und f, φ, ϖ sind von einander unabhängig. Daher kann man f, φ, ϖ als neue Variablen für die ursprünglichen x, y, z eingeführt denken und diese ursprünglichen Variablen durch f, φ, ϖ ausdrücken. Demnach kann man jede Function von x, y, z als Function von f, φ, ϖ darstellen, und eine willkürliche Function von f, φ, ϖ ist gleichbedeutend mit einer willkürlichen Function von x, y, z. Man kann also jede Function von x, y, z für ω setzen, d. h. jede Function von x, y, z einer Constanten gleich gesetzt ist ein Integral des Systems (2.), was unmöglich ist. Es kann also nur zwei von einander unabhängige Integrale des Systems (2.) geben, und jedes dritte ist eine Function zweier von einander unabhängigen, f und φ.

Man kann dies Resultat dazu benutzen, um aus *einem* Werthe des Multiplicators M alle anderen abzuleiten. Es sei N ein zweiter Werth dieses Multiplicators, so hat man

$$X\frac{\partial M}{\partial x}+Y\frac{\partial M}{\partial y}+Z\frac{\partial M}{\partial z}+\left\{\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right\}M = 0,$$

$$X\frac{\partial N}{\partial x}+Y\frac{\partial N}{\partial y}+Z\frac{\partial N}{\partial z}+\left\{\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right\}N = 0.$$

Wenn man die zweite dieser Gleichungen mit M, die erste mit N multiplicirt und die Resultate von einander abzieht, so ergiebt sich

$$0 = X\left\{M\frac{\partial N}{\partial x}-N\frac{\partial M}{\partial x}\right\}+Y\left\{M\frac{\partial N}{\partial y}-N\frac{\partial M}{\partial y}\right\}+Z\left\{M\frac{\partial N}{\partial z}-N\frac{\partial M}{\partial z}\right\},$$

oder, wenn man durch M^2 dividirt,

$$0 = X\frac{\partial\left(\frac{N}{M}\right)}{\partial x}+Y\frac{\partial\left(\frac{N}{M}\right)}{\partial y}+Z\frac{\partial\left(\frac{N}{M}\right)}{\partial z}.$$

$\frac{N}{M} = \text{Const.}$ ist also ein Integral des Systems (2.), mithin $\frac{N}{M}$ eine Function von f und φ, oder

$$(7.)\qquad N = MF(f, \varphi);$$

d. h. ist M ein Werth des Multiplicators, so sind alle übrigen Werthe unter der Form $MF(f, \varphi)$ enthalten. Aber vorausgesetztermassen sind $f = \alpha$ und $\varphi = \beta$ die Integrale von (2.), also wird $F(f, \varphi) = \text{Const.}$; d. h. wenn man die Integralgleichungen zu Hülfe ruft, so sind die verschiedenen Werthe des Multiplicators nur um constante Factoren von einander verschieden. —

Wir wollen nun sehen, welchen Vortheil die Kenntniss eines Werthes von M gewährt; hierdurch findet man nicht wie bei einer Differentialgleichung zwischen zwei Variablen das Integral selbst, sondern man findet nur vermittelst der Gleichungen $A = MX$, $B = MY$, $C = MZ$ Werthe der Grössen

$$A = \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad B = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad C = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Der Vortheil, den man hieraus ziehen kann, tritt erst dann ein, wenn man ein Integral z. B. φ schon kennt und das andere f sucht. Man führe statt einer der Variablen z. B. statt z den Ausdruck φ ein, so dass z als Function von φ, x und y dargestellt wird; wir wollen uns demnach das zu suchende Integral f durch x, y, φ ausgedrückt denken und die unter dieser Hypothese gebildeten partiellen Differentialquotienten mit $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$, $\left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)$ bezeichnen, dann haben wir

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

und erhalten für die Grössen A, B, C die Ausdrücke

$$A = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad B = -\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad C = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Aus denselben ergiebt sich, dass, wenn man das Integral $\varphi = \beta$ und einen Werth des Multiplicators M kennt, man f bestimmen kann. Denn denkt man sich f durch x, y und $\varphi = \beta$ ausgedrückt, so ist

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)d\varphi,$$

oder da $d\varphi = 0$ ist,

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)dy.$$

Aber aus den obigen Gleichungen für A und B hat man

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{A}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}}, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = -\frac{B}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}},$$

also

$$df = \frac{A\,dy - B\,dx}{\frac{\partial\varphi}{\partial z}}.$$

Da nun

$$A = MX, \quad B = MY,$$

so wird

$$(8.) \qquad df = \frac{M}{\frac{\partial\varphi}{\partial z}}(X\,dy - Y\,dx),$$

und es ergiebt sich daher

$$\int \frac{M}{\frac{\partial\varphi}{\partial z}}(X\,dy - Y\,dx) = f = \alpha$$

als zweites Integral des Systems (2.). Hier muss man X und Y, welche als Functionen von x, y, z gegeben sind, durch x, y und $\varphi = \beta$ ausgedrückt annehmen. Unter dieser Voraussetzung ist, wie wir aus Gleichung (8.) sehen, $\frac{M}{\frac{\partial\varphi}{\partial z}}$ der integrirende Factor der Differentialgleichung $X\,dy - Y\,dx = 0$. Und so haben wir folgenden Satz:

Ist das System von Differentialgleichungen

$$dx : dy : dz = X : Y : Z$$

gegeben, und kennt man erstens ein Integral $\varphi = \beta$ desselben, sowie zweitens einen Werth des Multiplicators M des Systems, welcher der partiellen Differentialgleichung

$$X\frac{\partial M}{\partial x} + Y\frac{\partial M}{\partial y} + Z\frac{\partial M}{\partial z} + \left\{\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right\} M = 0$$

genügt, so ist

$$\frac{M}{\frac{\partial\varphi}{\partial z}}$$

der integrirende Factor der Differentialgleichung

$$X\,dy - Y\,dx = 0,$$

vorausgesetzt, dass sowohl aus dem angegebenen Factor, als aus X und Y vermöge des schon gefundenen Integrals $\varphi = \beta$ die Variable z eliminirt sei.

Man könnte meinen, dass dieser Satz sehr unfruchtbar sei; denn während zur Kenntniss des zweiten Integrals f die Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$X\frac{\partial f}{\partial x}+Y\frac{\partial f}{\partial y}+Z\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

erfordert wird, haben wir, um M zu bestimmen und daraus das zweite Integral f zu finden, die viel complicirtere Differentialgleichung

$$(4.)\qquad X\frac{\partial M}{\partial x}+Y\frac{\partial M}{\partial y}+Z\frac{\partial M}{\partial z}+\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)M = 0$$

zu lösen. Es scheint also ein leichteres Problem auf ein schwierigeres zurückgeführt zu sein; indessen tritt hier ein eigenthümlicher Umstand ein. Die partielle Differentialgleichung, welche f definirt, also die Gleichung

$$X\frac{\partial f}{\partial x}+Y\frac{\partial f}{\partial y}+Z\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

lässt die Lösung $f = \text{Const.}$ zu; aber diese evidente Lösung giebt kein Integral des vorgelegten Systems und muss daher ausgeschlossen werden. Ein solches Ausschliessen einer Lösung ist bei dem Multiplicator M nicht nöthig, und wenn z. B. M einer Constanten gleich gesetzt eine Lösung der Gleichung (4.) giebt, so ist dieser Werth von M als Multiplicator ebensowohl zu brauchen, wie jeder andere. Der Fall, dass man $M = \text{Const.}$ setzen kann, tritt ein, wenn

$$(9.)\qquad \frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z} = 0$$

ist, denn alsdann reducirt sich die Gleichung (4.) auf

$$X\frac{\partial M}{\partial x}+Y\frac{\partial M}{\partial y}+Z\frac{\partial M}{\partial z} = 0;$$

man kann also $M = \text{Const.}$, z. B. $= 1$, setzen und hat den Satz:

Wenn in dem System der Differentialgleichungen

$$dx : dy : dz = X : Y : Z$$

X, Y, Z Functionen von x, y, z sind, welche der Bedingung

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z} = 0$$

genügen, wenn man ferner ein Integral $\varphi = \beta$ des Systems kennt und den durch Auflösung der Gleichung $\varphi = \beta$ erhaltenen Ausdruck von z durch x, y und β in X, Y und $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ einsetzt, so ist

$$\frac{1}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}}(X dy - Y dx) = df$$

ein vollständiges Differential, und man findet also durch blosse Quadratur das zweite Integral $f = \alpha$ des Systems.

Es ist noch ein zweiter, allgemeiner Fall zu erwähnen, der den eben genannten in sich schliesst, und in welchem sich ebenfalls M allgemein bestimmen lässt. Führt man nämlich in die für M geltende Gleichung (4.), nachdem man dieselbe mittelst Division durch MX auf die Form

$$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{Y}{X}\frac{\partial M}{\partial y}+\frac{Z}{X}\frac{\partial M}{\partial z}\right)+\frac{1}{X}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right) = 0$$

gebracht hat, die aus dem vorgelegten System (2.) folgenden Werthe

$$\frac{Y}{X}=\frac{dy}{dx}, \qquad \frac{Z}{X}=\frac{dz}{dx}$$

ein, so erhält man

$$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial M}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial M}{\partial z}\frac{dz}{dx}\right)+\frac{1}{X}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right) = 0,$$

oder

$$\frac{1}{M}\frac{dM}{dx}+\frac{1}{X}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right) = 0,$$

oder endlich

$$(11.) \qquad \frac{d\lg M}{dx}+\frac{1}{X}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right) = 0.$$

Ist nun $\frac{1}{X}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)$ ein vollständiger Differentialquotient nach x, also von der Form $\frac{d\xi}{dx}$, so hat man

$$\frac{d\lg M}{dx}+\frac{d\xi}{dx} = 0,$$

$$M = C.e^{-\xi}.$$

Und so ergiebt sich der Satz:

Das vorgelegte System heisse

$$dx : dy : dz = X : Y : Z,$$

es sei ferner der Ausdruck

$$\frac{1}{X}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)$$

gleich $\frac{d\xi}{dx}$, *d. h. gleich irgend einem vollständigen Differentialquotienten nach* x, *endlich sei* $\varphi = \beta$ *ein bekanntes Integral des Systems; dann ist*

$$\frac{e^{-\xi}}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}}(X\,dy - Y\,dx)$$

ein vollständiges Differential, vorausgesetzt, dass hierin vermöge des Integrals $\varphi = \beta$ Alles in x und y ausgedrückt sei. Man kann natürlich dies Resultat auch so aussprechen, dass die beiden Veränderlichen des Differentialausdrucks, von welchem der integrirende Factor angegeben wird, nicht x und y sondern x und z oder y und z sind.

Wir wollen Beispiele zu diesen Sätzen geben. Es sei zuerst eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung vorgelegt, also

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = u.$$

Führt man eine neue Variable $z = \frac{dy}{dx}$ ein, so hat man die beiden Gleichungen

$$\frac{dy}{dx} = z, \qquad \frac{dz}{dx} = u,$$

also

$$dx : dy : dz = 1 : z : u;$$

daher ist nach den früheren Bezeichnungen

$$X = 1, \qquad Y = z, \qquad Z = u.$$

Um den ersten der beiden aufgestellten Sätze anwenden zu können, muss

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0$$

sein; in dem hier vorliegenden Fall ist $\frac{\partial X}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial Y}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial Z}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial z}$, also hat man die Bedingung

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

d. h. es darf in u kein z oder, was dasselbe ist, kein $\frac{dy}{dx}$ vorkommen. Indem man diese Annahme macht, erhält man das Theorem:

Es sei die Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y)$$

vorgelegt, wo f kein $\frac{dy}{dx}$ enthält, man kenne hiervon ein erstes Integral

$$\varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = \alpha,$$

welches nach $\frac{dy}{dx}$ aufgelöst

$$\frac{dy}{dx} = \psi(x, y, \alpha)$$

oder

$$dy - \psi(x, y, \alpha)\,dx = 0$$

gebe, dann ist

$$\frac{1}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial \dfrac{dy}{dx}}}$$

in x, y und α ausgedrückt der integrirende Factor dieser Differentialgleichung.

Ein Beispiel zu dem zweiten Satze giebt die Variationsrechnung. Das einfachste Problem der Variationsrechnung ist dasjenige, in welchem das Integral

$$\int \psi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) dx$$

ein Maximum oder Minimum werden soll. Diese Aufgabe führt auf die Differentialgleichungen

$$\frac{d\dfrac{\partial \psi}{\partial y'}}{dx} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad y' = \frac{dy}{dx}.$$

Die erste derselben giebt entwickelt

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y'} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial y'} y' + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y'^2} \frac{dy'}{dx} = \frac{\partial \psi}{\partial y};$$

man hat also

$$\frac{dy'}{dx} = \frac{\dfrac{\partial \psi}{\partial y} - \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y'} - \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial y'} y'}{\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial y'^2}} = u$$

oder, wenn man zur Abkürzung

$$v = \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y'} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial y'} y' = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y'^2} \frac{dy'}{dx}$$

setzt,

$$\frac{dy'}{dx} = \frac{v}{\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial y'^2}} = u.$$

Nun ist ausserdem

$$\frac{dy}{dx} = y',$$

also hat man

$$dx : dy : dy' = 1 : y' : u.$$

Es tritt hier y' an die Stelle der Variablen, welche oben mit z bezeichnet wurde, und es ist also

$$X = 1, \qquad Y = y', \qquad Z = u.$$

Damit der zweite Satz Anwendung finde, muss der Ausdruck

$$\frac{1}{X}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{dz}\right)$$

ein vollständiger Differentialquotient nach x sein, im vorliegenden Fall ist derselbe

$$= \frac{\partial u}{\partial y'},$$

also fragt es sich, ob sich $\frac{\partial u}{\partial y'}$ als vollständiger Differentialquotient nach x darstellen lässt. Es ist

$$u = \frac{v}{\frac{\partial^2 \psi}{\partial y'^2}},$$

also

$$\frac{\partial u}{\partial y'} = \frac{\frac{\partial^2 \psi}{\partial y'^2}\frac{\partial v}{\partial y'} - \frac{\partial^3 \psi}{\partial y'^3} v}{\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y'^2}\right)^2}.$$

Aber zugleich wird

$$\frac{\partial v}{\partial y'} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial y'} - \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y'^2} - \frac{\partial^3 \psi}{\partial y \partial y'^2} y' - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial y'} = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2 \psi}{\partial y'^2} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^2 \psi}{\partial y'^2}\frac{dy}{dx}\right);$$

und da zufolge der Gleichung

$$v = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y'^2}\frac{dy'}{dx}$$

$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y'^2}$ im Zähler und Nenner von $\frac{\partial u}{\partial y'}$ sich forthebt, so erhält man

$$\frac{\partial u}{\partial y'} = -\frac{\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2 \psi}{\partial y'^2} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^2 \psi}{\partial y'^2}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial}{\partial y'}\frac{\partial^2 \psi}{\partial y'^2}\frac{dy'}{dx}}{\frac{\partial^2 \psi}{\partial y'^2}},$$

oder

$$\frac{\partial u}{\partial y'} = -\frac{\frac{d}{dx}\frac{\partial^2 \psi}{\partial y'^2}}{\frac{\partial^2 \psi}{\partial y'^2}} = -\frac{d \lg \frac{\partial^2 \psi}{\partial y'^2}}{dx}.$$

Es ist also in der That $\frac{\partial u}{\partial y'}$ ein vollständiger Differentialquotient nach x, und nach Gleichung (11.)

$$\frac{d\lg M}{dx} = \frac{d\lg \frac{\partial^2\psi}{\partial y'^2}}{dx},$$

$$M = C\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial y'^2}.$$

Man hat demnach einen Satz, der für alle Probleme der Variationsrechnung gilt, in welchen das Integral

$$\int \psi(x, y, y')\,dx$$

ein Maximum oder Minimum werden soll. Damit diese Maximums- oder Minimums-Bedingung erfüllt werde, muss zwischen x und y die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{d\frac{\partial\psi}{\partial y'}}{dx} = \frac{\partial\psi}{\partial y}$$

bestehen, welche folgende Eigenschaft besitzt: *Kennt man ein erstes Integral derselben*

$$\varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = \alpha$$

und bringt dasselbe auf die Form

$$dy - F(x, y, \alpha)\,dx = 0,$$

so ist

$$\frac{1}{\frac{\partial\varphi}{\partial\frac{dy}{dx}}}\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial y'^2}$$

in x, y und α ausgedrückt der integrirende Factor dieser Differentialgleichung.

In diese Kategorie von Aufgaben des Maximums oder Minimums gehört z. B. die Bestimmung der kürzesten Linie auf einer gegebenen Oberfläche. Diese Aufgabe führt auf eine Differentialgleichung zweiter Ordnung; kennt man von derselben ein Integral, so lässt sich der integrirende Factor der übrig bleibenden Differentialgleichung erster Ordnung bestimmen.

Was bis jetzt von dem einfachsten Fall der Variationsrechnung gesagt worden ist, lässt sich auf den allgemeinsten ausdehnen, in welchem unter dem Integralzeichen eine Function steht, die beliebig viele abhängige Variable y, z, u, ... und von jeder die Differentialquotienten bis zu einer beliebig hohen Ordnung hin enthält. Wenn eine solche Aufgabe bis zu einer Differentialgleichung erster Ordnung zwischen zwei Variablen zurückgeführt ist, so lässt sich die letzte Integration auch noch ausführen. Aber um dieses Resultat zu gewinnen, ist es nöthig einige Sätze über die Ausdrücke anzuführen, welche bei der Auflösung der linearen Gleichungen vorkommen, und welche von *Laplace* Resultanten, von *Gauss* Determinanten, von *Cauchy* alternirende Functionen genannt worden sind.

Elfte Vorlesung.

Uebersicht derjenigen Eigenschaften der Determinanten, welche in der Theorie des letzten Multiplicators benutzt werden.

Setzt man

$$\begin{array}{rl} P = & (a_2-a_1)(a_3-a_1)\ldots(a_s-a_1)\ldots(a_n-a_1) \\ & \qquad\quad (a_3-a_2)\ldots(a_s-a_2)\ldots(a_n-a_2) \\ & \qquad\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \qquad\qquad\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \qquad\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad \ldots\ldots \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad (a_n-a_{n-1}), \end{array}$$

so hat das so definirte Product P die Eigenschaft, dass es durch irgend eine Permutation der Grössen $a_1, a_2, \ldots a_n$ oder, was dasselbe ist, der Indices $1, 2, \ldots n$ nur das Zeichen und nicht seinen absoluten Werth ändert. Von diesen Permutationen soll hier nur Folgendes angeführt werden:

Man bezeichne die Indices $1, 2, \ldots n$, nachdem man ihre Ordnung auf eine ganz beliebige Art geändert hat, mit $i_1, i_2, \ldots i_n$ und die Permutation, durch welche

$$1, \; 2, \; 3, \; \ldots \; s \; \ldots \; n$$

in

$$i_1, \; i_2, \; i_3, \; \ldots \; i, \; \ldots \; i_n$$

übergeht, mit J. Wie auch die Permutation J beschaffen sein mag, so kann man immer die Indices $1, 2, \ldots n$ in gewisse Gruppen von der Beschaffenheit theilen, dass durch die Permutation J die Indices, die zu einer Gruppe gehören, entweder in einander oder sammt und sonders in eine andere Gruppe übergehen, so dass jedenfalls die zu einer Gruppe gehörenden Indices bei einander bleiben. In Rücksicht auf diese Gruppen kann man alsdann wiederum die Permutationen klassificiren, so dass für gewisse Permutationen alle Gruppen in sich selbst übergehen, für andere Permutationen eine bestimmte Gruppe von Indices in eine zweite übergeht u. s. w. Dieser noch keineswegs erschöpfte Gegenstand ist einer der wichtigsten der Algebra; in allen Fällen, wo bis jetzt die Auflösung der Gleichungen möglich gewesen ist, liegt hierin der Grund davon.

Die wichtigste dieser Klassificationen der Permutationen ist die in positive und negative Permutationen, von welchen die ersteren P ungeändert lassen, die letzteren P in $-P$ verwandeln. In die zweite Klasse gehört z. B. der einfachste Fall, in welchem man nur zwei Indices i und i' mit einander vertauscht, was man auf der Stelle einsieht, wenn man P auf die Form

$$P = \pm(a_i - a_{i'})\,\Pi(a_i - a_k)\,\Pi(a_{i'} - a_k)\,\Pi(a_k - a_{k'})$$

bringt, wo k sämmtliche Indices bedeutet, die von i und i' verschieden sind, und k, k' sämmtliche Combinationen zu zweien ohne Wiederholungen von diesen Indices. Um zu beurtheilen, ob eine Permutation

$$(J) \qquad \begin{cases} 1, & 2, & 3, & \ldots & n \\ i_1, & i_2, & i_3, & \ldots & i_n \end{cases}$$

positiv oder negativ sei, vergleiche man je zwei verschiedene Zahlen aus der Reihe $i_1, i_2, i_3, \ldots i_n$ mit einander. Ist μ die Anzahl derjenigen Fälle, in welchen von den beiden mit einander verglichenen Zahlen die grössere weiter vorn in der Reihe, die kleinere weiter hinten steht, so ist (J) eine positive oder negative Permutation, je nachdem μ gerade oder ungerade ist.

Um von dem Bisherigen zu den Determinanten überzugehen, betrachte man die n^2 Grössen

$$\begin{array}{l} a_1,\ b_1,\ c_1,\ \ldots\ p_1, \\ a_2,\ b_2,\ c_2,\ \ldots\ p_2, \\ \vdots \\ a_n,\ b_n,\ c_n,\ \ldots\ p_n. \end{array}$$

Man bilde das Product

$$a_1\ b_2\ c_3\ \ldots\ p_n,$$

permutire in ihm die Indices auf alle möglichen Arten, gebe dem jedesmal resultirenden Producte das Plus- oder Minuszeichen, jenachdem die Permutation eine positive oder negative ist, und summire alle diese Producte mit den ihnen zukommenden Zeichen, so ist der dadurch entstandene Ausdruck

$$R = \Sigma \pm a_1\ b_2\ c_3\ \ldots\ p_n,$$

wo das doppelte Vorzeichen in der angegebenen Bedeutung zu nehmen ist, die Determinante der n^2 Grössen $a_1 \ldots p_n$, und diese n^2 Grössen sind die Elemente der Determinante R. Man kann sich R aus der Entwickelung von P dadurch entstanden denken, dass man in jedem Gliede dasjenige a, welches in demselben nicht auftritt, zur nullten Potenz erhoben als Factor hinzufügt und sodann für jeden Werth des Index i an die Stelle der Potenzen a_i^0, a_i^1, $a_i^2, \ldots a_i^{n-1}$ beziehungsweise a_i, b_i, c_i, $\ldots p_i$ setzt. Die Determinante R hat folgende Fundamental-Eigenschaften:

1. Permutirt man zwei Indices i und k oder zwei Buchstaben z. B. a und b mit einander, so geht R in $-R$ über. Daraus folgt, dass, sobald zwei Reihen von Grössen mit einander zusammenfallen, sobald also

$$a_i = a_k, \quad b_i = b_k, \quad \ldots \quad p_i = p_k,$$

oder

$$g_1 = h_1, \quad g_2 = h_2, \quad \ldots \quad g_n = h_n,$$

die Determinante R verschwindet.

2. Die Determinante R ist in Beziehung auf alle Grössen, die in einer Reihe stehen, homogen und linear, also sowohl in Beziehung auf die Grössen

$$a_i, \; b_i, \; \ldots \; p_i,$$

als auf die Grössen

$$g_1, \; g_2, \; \ldots \; g_n.$$

Daher hat man

$$R = \frac{\partial R}{\partial a_i} a_i + \frac{\partial R}{\partial b_i} b_i + \cdots + \frac{\partial R}{\partial p_i} p_i,$$

$$R = \frac{\partial R}{\partial g_1} g_1 + \frac{\partial R}{\partial g_2} g_2 + \cdots + \frac{\partial R}{\partial g_n} g_n.$$

Setzen wir

$$\frac{\partial R}{\partial a_i} = A_i, \quad \frac{\partial R}{\partial b_i} = B_i, \quad \ldots \quad \frac{\partial R}{\partial p_i} = P_i,$$

so ist

$$R = A_i a_i + B_i b_i + C_i c_i + \cdots + P_i p_i,$$

ebenso

$$R = A_k a_k + B_k b_k + C_k c_k + \cdots + P_k p_k.$$

Aber durch Vertauschung der Indices i und k geht R in $-R$ über, also, wie hieraus ersichtlich ist, A_i in $-A_k$, B_i in $-B_k$ u. s. w.; mithin geht der Term von A_i, der in b_k multiplicirt ist, in den Term von $-A_k$ über, der in b_i multiplicirt ist, d. h. in R haben $a_i b_k$ und $a_k b_i$ entgegengesetzte Factoren, oder es ist

$$\frac{\partial^2 R}{\partial a_i \partial b_k} = -\frac{\partial^2 R}{\partial a_k \partial b_i}.$$

Ebenso hat man für drei Indices i, k, l

$$\frac{\partial^3 R}{\partial a_i \partial b_k \partial c_l} = \frac{\partial^3 R}{\partial a_k \partial b_l \partial c_i} = \frac{\partial^3 R}{\partial a_l \partial b_i \partial c_k} = -\frac{\partial^3 R}{\partial a_l \partial b_k \partial c_i} = -\frac{\partial^3 R}{\partial a_k \partial b_i \partial c_l} = -\frac{\partial^3 R}{\partial a_i \partial b_l \partial c_k},$$

und hieraus ergeben sich folgende Darstellungen von R:

$$R = \Sigma\Sigma(a_i b_k - a_k b_i)\frac{\partial^2 R}{\partial a_i \partial b_k},$$

$$R = \Sigma\Sigma\Sigma\{a_i(b_k c_l - b_l c_k) + a_k(b_l c_i - b_i c_l) + a_l(b_i c_k - b_k c_i)\}\frac{\partial^3 R}{\partial a_i \partial b_k \partial c_l},$$

wo die Summationen auf alle von einander verschiedenen Combinationen der Indices 1, 2, ... n zu zweien und zu dreien auszudehnen sind. Diese Darstellung einer Determinante durch Producte von Determinanten niederer Ordnung findet sich zuerst in einer Abhandlung von *Laplace* über das Weltsystem in den Pariser Memoiren von 1772. *Laplace* und *Cramer* in Genf sind überhaupt die ersten, welche die Eigenschaften der Determinanten gehörig untersucht haben.

3. Die oben angeführte Gleichung

$$R = g_1\frac{\partial R}{\partial g_1} + g_2\frac{\partial R}{\partial g_2} + \cdots + g_n\frac{\partial R}{\partial g_n}$$

giebt, wenn man a für g schreibt:

$$R = a_1\frac{\partial R}{\partial a_1} + a_2\frac{\partial R}{\partial a_2} + \cdots + a_n\frac{\partial R}{\partial a_n}.$$

Dieser Gleichung sind noch $n-1$ andere hinzuzufügen, welche sich dadurch beweisen lassen, dass R identisch verschwinden muss, wenn man zwei Reihen von Grössen einander gleich setzt; sie lauten:

$$\begin{array}{lllll}
0 = b_1\frac{\partial R}{\partial a_1} & + b_2\frac{\partial R}{\partial a_2} & + \cdots + & b_n\frac{\partial R}{\partial a_n}, \\
0 = c_1\frac{\partial R}{\partial a_1} & + c_2\frac{\partial R}{\partial a_2} & + \cdots + & c_n\frac{\partial R}{\partial a_n}, \\
\vdots \quad \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 = p_1\frac{\partial R}{\partial a_1} & + p_2\frac{\partial R}{\partial a_2} & + \cdots + & p_n\frac{\partial R}{\partial a_n}.
\end{array}$$

Auf diesen Formeln beruht die Auflösung der linearen Gleichungen. Denn hat man das System

$$\begin{array}{l}
a_1 x_1 + b_1 x_2 + \cdots + p_1 x_n = y_1, \\
a_2 x_1 + b_2 x_2 + \cdots + p_2 x_n = y_2, \\
\vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\
a_n x_1 + b_n x_2 + \cdots + p_n x_n = y_n,
\end{array}$$

und multiplicirt man diese Gleichungen respective mit $\frac{\partial R}{\partial a_1}, \frac{\partial R}{\partial a_2}, \dots \frac{\partial R}{\partial a_n}$, mit $\frac{\partial R}{\partial b_1}, \frac{\partial R}{\partial b_2}, \dots \frac{\partial R}{\partial b_n}$, etc. wo R die oben angegebene Bedeutung

$$R = \Sigma \pm a_1 b_2 \dots p_n$$

hat, so erhält man

$$\begin{aligned}
Rx_1 &= \frac{\partial R}{\partial a_1} y_1 + \frac{\partial R}{\partial a_2} y_2 + \dots + \frac{\partial R}{\partial a_n} y_n, \\
Rx_2 &= \frac{\partial R}{\partial b_1} y_1 + \frac{\partial R}{\partial b_2} y_2 + \dots + \frac{\partial R}{\partial b_n} y_n, \\
&\vdots \\
Rx_n &= \frac{\partial R}{\partial p_1} y_1 + \frac{\partial R}{\partial p_2} y_2 + \dots + \frac{\partial R}{\partial p_n} y_n.
\end{aligned}$$

4. Mit Hülfe dieser Formeln beweist man einen merkwürdigen Satz über die Variation der Determinante R. Man bezeichne die Variationen der Grössen $a_\iota, b_\iota, \dots p_\iota$ mit $\delta a_\iota, \delta b_\iota, \dots \delta p_\iota$ und bilde folgende n Systeme von linearen Gleichungen:

$$\begin{aligned}
1)\quad & a_1 x_1' + b_1 x_2' + \dots + p_1 x_n' = \delta a_1, \\
& a_2 x_1' + b_2 x_2' + \dots + p_2 x_n' = \delta a_2, \\
& \vdots \\
& a_n x_1' + b_n x_2' + \dots + p_n x_n' = \delta a_n;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2)\quad & a_1 x_1'' + b_1 x_2'' + \dots + p_1 x_n'' = \delta b_1, \\
& a_2 x_1'' + b_2 x_2'' + \dots + p_2 x_n'' = \delta b_2, \\
& \vdots \\
& a_n x_1'' + b_n x_2'' + \dots + p_n x_n'' = \delta b_n;
\end{aligned}$$

u. s. w. u. s. w.

endlich

$$\begin{aligned}
n)\quad & a_1 x_1^{(n)} + b_1 x_2^{(n)} + \dots + p_1 x_n^{(n)} = \delta p_1, \\
& a_2 x_1^{(n)} + b_2 x_2^{(n)} + \dots + p_2 x_n^{(n)} = \delta p_2, \\
& \vdots \\
& a_n x_1^{(n)} + b_n x_2^{(n)} + \dots + p_n x_n^{(n)} = \delta p_n.
\end{aligned}$$

Nun ist

$$\delta R = \sum_\iota \left\{ \frac{\partial R}{\partial a_\iota} \delta a_\iota + \frac{\partial R}{\partial b_\iota} \delta b_\iota + \dots + \frac{\partial R}{\partial p_\iota} \delta p_\iota \right\}.$$

Aber nach den obigen Formeln für die Auflösung der Gleichungen hat man

$$R x_1' = \frac{\partial R}{\partial a_1}\delta a_1 + \frac{\partial R}{\partial a_2}\delta a_2 + \cdots + \frac{\partial R}{\partial a_n}\delta a_n = \sum_i \frac{\partial R}{\partial a_i}\delta a_i,$$

und ebenso

$$R x_2'' = \sum_i \frac{\partial R}{\partial b_i}\delta b_i, \quad R x_3''' = \sum_i \frac{\partial R}{\partial c_i}\delta c_i, \quad \ldots \quad R x_n^{(n)} = \sum_i \frac{\partial R}{\partial p_i}\delta p_i;$$

also

$$\delta R = R\{x_1' + x_2'' + x_3''' + \cdots + x_n^{(n)}\},$$

oder

$$\delta \lg R = x_1' + x_2'' + x_3''' + \cdots + x_n^{(n)}.$$

Zwölfte Vorlesung.

Der Multiplicator für Systeme mit beliebig vielen Veränderlichen.

Wir wollen sogleich von dem gegebenen Satz über die Variation der Determinante eine Anwendung auf ein System von Differentialgleichungen machen.

Es sei folgendes System gegeben:

$$(1.)\quad \frac{dx_1}{dx} = X_1, \quad \frac{dx_2}{dx} = X_2, \quad \ldots \quad \frac{dx_i}{dx} = X_i, \quad \ldots \quad \frac{dx_n}{dx} = X_n.$$

Dieses System, in welchem $X_1, X_2, \ldots X_n$ beliebige Functionen von $x, x_1, x_2, \ldots x_n$ sein können, sei integrirt durch folgendes System von Gleichungen:

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1(x, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n), \\ x_2 &= f_2(x, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n), \\ &\vdots \\ x_n &= f_n(x, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n). \end{aligned}$$

Setzt man hieraus die Werthe von $x_1, x_2, \ldots x_n$ in $X_1, X_2, \ldots X_n$ ein und bestimmt auch die Differentialquotienten $\frac{dx_1}{dx}, \frac{dx_2}{dx}, \ldots \frac{dx_n}{dx}$ als Functionen von x und den n willkürlichen Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, so wird durch diese Werthe das System (1.) identisch erfüllt, d. h. die Gleichungen (1.) werden für jeden Werth der Veränderlichen x und der willkürlichen Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ erfüllt; daher kann man sie nach jeder dieser n Constanten differentiiren. Aus jeder der Gleichungen (1.) entstehen auf diese

Weise n Gleichungen, im Ganzen n Systeme von je n Gleichungen, also n^2 Gleichungen, sämmtlich von der Form

$$\frac{d\frac{\partial x_i}{\partial \alpha_k}}{dx} = \frac{\partial X_i}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_k} + \frac{\partial X_i}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_k} + \cdots + \frac{\partial X_i}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial \alpha_k}.$$

Das aus der ersten Gleichung $\frac{dx_1}{dx} = X_1$ folgende System ist:

$$1)\quad \begin{aligned}
&\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1}\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_1}\frac{\partial X_1}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_1}\frac{\partial X_1}{\partial x_n} = \frac{d\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1}}{dx},\\
&\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_2}\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_2}\frac{\partial X_1}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_2}\frac{\partial X_1}{\partial x_n} = \frac{d\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_2}}{dx},\\
&\vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad\quad \vdots\\
&\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_n}\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_n}\frac{\partial X_1}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_n}\frac{\partial X_1}{\partial x_n} = \frac{d\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_n}}{dx}.
\end{aligned}$$

Die aus den übrigen Gleichungen (1.) folgenden Systeme sind:

$$2)\quad \begin{aligned}
&\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1}\frac{\partial X_2}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_1}\frac{\partial X_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_1}\frac{\partial X_2}{\partial x_n} = \frac{d\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_1}}{dx},\\
&\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_2}\frac{\partial X_2}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_2}\frac{\partial X_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_2}\frac{\partial X_2}{\partial x_n} = \frac{d\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_2}}{dx},\\
&\vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad\quad \vdots\\
&\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_n}\frac{\partial X_2}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_n}\frac{\partial X_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_n}\frac{\partial X_2}{\partial x_n} = \frac{d\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_n}}{dx};
\end{aligned}$$

u. s. w. u. s. w.

. . . .

. . . .

endlich

$$n)\quad \begin{aligned}
&\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1}\frac{\partial X_n}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_1}\frac{\partial X_n}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_1}\frac{\partial X_n}{\partial x_n} = \frac{d\frac{\partial x_n}{\partial \alpha_1}}{dx},\\
&\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_2}\frac{\partial X_n}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_2}\frac{\partial X_n}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_2}\frac{\partial X_n}{\partial x_n} = \frac{d\frac{\partial x_n}{\partial \alpha_2}}{dx},\\
&\vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad\quad \vdots\\
&\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_n}\frac{\partial X_n}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_n}\frac{\partial X_n}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_n}\frac{\partial X_n}{\partial x_n} = \frac{d\frac{\partial x_n}{\partial \alpha_n}}{dx}.
\end{aligned}$$

Vergleicht man diese Systeme mit denen, welche in N°. 4 der vorigen Vorlesung bei Gelegenheit des Satzes von der Variation der Determinante aufgestellt worden sind, so findet man, dass jene in diese durch die folgenden Annahmen übergehen:

$$a_1 = \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1}, \quad b_1 = \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_1}, \quad \ldots \quad p_1 = \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_1},$$

$$a_2 = \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_2}, \quad b_2 = \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_2}, \quad \ldots \quad p_2 = \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_2},$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$a_n = \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_n}, \quad b_n = \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_n}, \quad \ldots \quad p_n = \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_n},$$

$$R = \Sigma \pm a_1 b_2 \ldots p_n = \Sigma \pm \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1} \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_2} \cdots \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_n},$$

$$x_1' = \frac{\partial X_1}{\partial x_1}, \quad x_2' = \frac{\partial X_1}{\partial x_2}, \quad \ldots \quad x_n' = \frac{\partial X_1}{\partial x_n},$$

$$x_1'' = \frac{\partial X_2}{\partial x_1}, \quad x_2'' = \frac{\partial X_2}{\partial x_2}, \quad \ldots \quad x_n'' = \frac{\partial X_2}{\partial x_n},$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$x_1^{(n)} = \frac{\partial X_n}{\partial x_1}, \quad x_2^{(n)} = \frac{\partial X_n}{\partial x_2}, \quad \ldots \quad x_n^{(n)} = \frac{\partial X_n}{\partial x_n},$$

$$\delta = \frac{d}{dx}.$$

Daher lässt sich der vollständige Differentialquotient von $\lg R$ nach x unter der merkwürdigen Form

$$(2.) \qquad \frac{d \lg R}{dx} = \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n}$$

darstellen, wo

$$R = \Sigma \pm \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1} \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_2} \cdots \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_n}.$$

Nach vollendeter Integration des Systems (1.) findet man also R aus der Gleichung (2.) durch eine Quadratur nach x. Aber es giebt Fälle, in welchen die Determinante R vor allen Integrationen angegeben werden kann, nämlich wenn sich die Summe $\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n}$ mit Hülfe des Systems (1.) in einen vollständigen Differentialquotienten nach x transformiren lässt, oder, was ein noch einfacherer Fall ist, wenn X_1 kein x_1, X_2 kein x_2 u. s. w. X_n kein x_n enthält. Alsdann ist $\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n} = 0$; daher

$$\frac{d \lg R}{dx} = 0,$$

$$R = \text{Const.}$$

Der in der Gleichung (2.) enthaltene Satz ist zuerst von *Liouville* und zwar in dieser Form aufgestellt worden (*Liouv.* Journal Bd. 3, p. 348); in einer anderen Form, in welcher die willkürlichen Constanten α durch unabhängige Variable x und diese durch Functionen f von den Variablen x ersetzt sind, kommt derselbe in einer meiner Abhandlungen (*Crelle* Journal Bd. 22, p. 336) vor. *Liouville* hat aus diesem Satz nicht den Nutzen gezogen, welchen er für die Integration gewährt. Ehe wir zu dieser Anwendung übergehen, wollen wir dem gewonnenen Ergebniss eine etwas allgemeinere Form geben, indem wir daran eine Veränderung anbringen, die zwar sehr unwesentlich scheint, ohne welche aber nichtsdestoweniger seine Anwendbarkeit sehr viel beschränkter sein würde.

Schreibt man das System (1.) in Form der Proportion

$$dx : dx_1 : dx_2 : \ldots : dx_n = 1 : X_1 : X_2 : \ldots : X_n,$$

so lässt sich derselben, durch Multiplication mit einer willkürlichen Grösse X auf der rechten Seite, die früher betrachtete Gestalt

$$(3.)\qquad dx : dx_1 : dx_2 : \ldots : dx_n = X : X_1 : X_2 : \ldots : X_n$$

geben, wenn man gleichzeitig $X_1, X_2, \ldots X_n$ beziehungsweise durch die Quotienten $\frac{X_1}{X}, \frac{X_2}{X}, \ldots \frac{X_n}{X}$ ersetzt. Durch diese Veränderung geht die Gleichung (2.) in

$$\begin{aligned}\frac{d\lg R}{dx} &= \frac{\partial\left(\frac{X_1}{X}\right)}{\partial x_1} + \frac{\partial\left(\frac{X_2}{X}\right)}{\partial x_2} + \frac{\partial\left(\frac{X_3}{X}\right)}{\partial x_3} + \cdots + \frac{\partial\left(\frac{X_n}{X}\right)}{\partial x_n} \\ &= \frac{1}{X}\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n}\right) - \frac{1}{X^2}\left(X_1\frac{\partial X}{\partial x_1} + X_2\frac{\partial X}{\partial x_2} + \cdots + X_n\frac{\partial X}{\partial x_n}\right)\end{aligned}$$

über. Das subtractive Glied auf der rechten Seite dieser Gleichung kann man mit Hülfe der Gleichungen

$$\frac{X_1}{X} = \frac{dx_1}{dx}, \quad \frac{X_2}{X} = \frac{dx_2}{dx}, \quad \ldots \quad \frac{X_n}{X} = \frac{dx_n}{dx}$$

auf die Form

$$-\frac{1}{X}\left(\frac{\partial X}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dx} + \frac{\partial X}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dx} + \cdots + \frac{\partial X}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dx}\right)$$

oder

$$-\frac{1}{X}\left(\frac{dX}{dx} - \frac{\partial X}{\partial x}\right)$$

bringen. Setzt man dies in den Ausdruck von $\frac{d\lg R}{dx}$ ein, so ergiebt sich

$$\frac{d\lg R}{dx} = \frac{1}{X}\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n}\right) - \frac{1}{X}\left(\frac{dX}{dx} - \frac{\partial X}{\partial x}\right),$$

oder

$$(4.)\qquad \frac{d\lg(XR)}{dx} = \frac{1}{X}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial X_1}{\partial x_1}+\frac{\partial X_2}{\partial x_2}+\cdots+\frac{\partial X_n}{\partial x_n}\right).$$

Man kann also, wenn sich $\frac{1}{X}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial X_1}{\partial x_1}+\cdots+\frac{\partial X_n}{\partial x_n}\right)$ durch das gegebene System (3.) in einen vollständigen Differentialquotienten nach x transformiren lässt, oder wenn $\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial X_1}{\partial x_1}+\cdots+\frac{\partial X_n}{\partial x_n}=0$ ist, R vor allen Integrationen bestimmen. Im letzteren Falle hat man

$$XR = \text{Const.},$$

also

$$R = \frac{\text{Const.}}{X},$$

wo, wie früher,

$$R = \Sigma\pm\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1}\,\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_2}\cdots\frac{\partial x_n}{\partial \alpha_n}.$$

Setzen wir nun voraus, das System (3.) sei in der That von der Beschaffenheit, dass sich R vor aller Integration angeben lässt, und nehmen wir an, man habe schon $n-1$ Integrale gefunden, das n^{te} fehle noch, so kann man die $n-1$ Integralgleichungen in der Form

$$\begin{aligned} x_2 &= \varphi_2(x, x_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n),\\ x_3 &= \varphi_3(x, x_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n),\\ &\;\vdots\\ x_n &= \varphi_n(x, x_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n) \end{aligned}$$

darstellen, und es bleibt alsdann die Differentialgleichung

$$X dx_1 - X_1 dx = 0$$

zu integriren übrig, deren Integral auf eine Gleichung von der Form

$$x_1 = \varphi_1(x, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$$

führt. Aus der Vergleichung mit dem obigen vollständigen Integrationssystem der Differentialgleichungen (1.) folgt überdies, dass die gegenwärtig mit φ_1 bezeichnete Function dieselbe ist, welche oben mit f_1 bezeichnet wurde, und dass die Functionen $\varphi_2, \varphi_3, \ldots \varphi_n$ respective in $f_2, f_3, \ldots f_n$ übergehen, wenn man für x_1 seinen Werth φ_1 substituirt.

Schliessen wir die Differentialquotienten der Grössen $x_2, x_3, \ldots x_n$, insofern wir sie als Functionen von $x, x_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$ ansehen, zur Unterscheidung von den bisher betrachteten Differentialquotienten in Klammern ein. so wird

$$\frac{\partial x_i}{\partial \alpha_k} = \left(\frac{\partial x_i}{\partial \alpha_k}\right) + \left(\frac{\partial x_i}{\partial x_1}\right)\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_k},$$

wo i und k alle Werthe von 2 bis n inclusive annehmen können. Für $k=1$ erhält man

$$\frac{\partial x_i}{\partial \alpha_1} = \left(\frac{\partial x_i}{\partial x_1}\right)\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1},$$

eine Gleichung, welche man unter der allgemeinen Formel mit begreifen kann, wenn man berücksichtigt, dass

$$(5.)\qquad \left(\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_1}\right) = \left(\frac{\partial x_3}{\partial \alpha_1}\right) = \cdots = \left(\frac{\partial x_n}{\partial \alpha_1}\right) = 0$$

ist. Es gilt demnach die Formel

$$\frac{\partial x_i}{\partial \alpha_k} = \left(\frac{\partial x_i}{\partial \alpha_k}\right) + \left(\frac{\partial x_i}{\partial x_1}\right)\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_k}$$

von $i=2$ bis $i=n$ und von $k=1$ bis $k=n$. Hierdurch wird

$$R = \Sigma \pm \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1}\left\{\left(\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_2}\right) + \left(\frac{\partial x_2}{\partial x_1}\right)\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_2}\right\}\left\{\left(\frac{\partial x_3}{\partial \alpha_3}\right) + \left(\frac{\partial x_3}{\partial x_1}\right)\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_3}\right\}\cdots\left\{\left(\frac{\partial x_n}{\partial \alpha_n}\right) + \left(\frac{\partial x_n}{\partial x_1}\right)\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_n}\right\},$$

d. h. R wird die Determinante aus den Grössen

$$\begin{array}{lllll}
\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1}, & \left(\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_1}\right) + \left(\frac{\partial x_2}{\partial x_1}\right)\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1}, & \left(\frac{\partial x_3}{\partial \alpha_1}\right) + \left(\frac{\partial x_3}{\partial x_1}\right)\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1}, & \cdots & \left(\frac{\partial x_n}{\partial \alpha_1}\right) + \left(\frac{\partial x_n}{\partial x_1}\right)\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1}, \\
\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_2}, & \left(\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_2}\right) + \left(\frac{\partial x_2}{\partial x_1}\right)\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_2}, & \left(\frac{\partial x_3}{\partial \alpha_2}\right) + \left(\frac{\partial x_3}{\partial x_1}\right)\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_2}, & \cdots & \left(\frac{\partial x_n}{\partial \alpha_2}\right) + \left(\frac{\partial x_n}{\partial x_1}\right)\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_2}, \\
\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_3}, & \left(\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_3}\right) + \left(\frac{\partial x_2}{\partial x_1}\right)\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_3}, & \left(\frac{\partial x_3}{\partial \alpha_3}\right) + \left(\frac{\partial x_3}{\partial x_1}\right)\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_3}, & \cdots & \left(\frac{\partial x_n}{\partial \alpha_3}\right) + \left(\frac{\partial x_n}{\partial x_1}\right)\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_3}, \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_n}, & \left(\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_n}\right) + \left(\frac{\partial x_2}{\partial x_1}\right)\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_n}, & \left(\frac{\partial x_3}{\partial \alpha_n}\right) + \left(\frac{\partial x_3}{\partial x_1}\right)\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_n}, & \cdots & \left(\frac{\partial x_n}{\partial \alpha_n}\right) + \left(\frac{\partial x_n}{\partial x_1}\right)\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_n}.
\end{array}$$

Bezeichnet man mit R_1 und mit R_2 die Determinanten, in welche die vorgelegte Determinante R übergeht, wenn man die n Grössen der zweiten Verticale für R_1 auf ihren ersten Term, für R_2 auf ihren zweiten Term reducirt, so ist R als lineare homogene Function jener n Grössen gleich der Summe von R_1 und R_2. Aber R_2 hat den gemeinschaftlichen Factor $\left(\frac{\partial x_2}{\partial x_1}\right)$, und nachdem man denselben herausgezogen, fallen die Grössen der ersten und zweiten Verticalreihe zusammen, d. h. R_2 ist eine nach Nr. 1 der vorigen Vorlesung verschwindende Determinante, und R wird gleich R_1, d. h. R bleibt unverändert, wenn man die Grössen der zweiten Verticalreihe auf ihre ersten Terme reducirt. Dasselbe gilt von den Grössen der dritten, vierten, ... n^{ten} Verticalreihe, und es ergiebt sich daher R gleich der Determinante aus den Grössen

$$\begin{array}{ccccc}
\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1}, & \left(\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_1}\right), & \left(\frac{\partial x_3}{\partial \alpha_1}\right), & \cdots & \left(\frac{\partial x_n}{\partial \alpha_1}\right), \\
\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_2}, & \left(\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_2}\right), & \left(\frac{\partial x_3}{\partial \alpha_2}\right), & \cdots & \left(\frac{\partial x_n}{\partial \alpha_2}\right), \\
\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_3}, & \left(\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_3}\right), & \left(\frac{\partial x_3}{\partial \alpha_3}\right), & \cdots & \left(\frac{\partial x_n}{\partial \alpha_3}\right), \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_n}, & \left(\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_n}\right), & \left(\frac{\partial x_n}{\partial \alpha_n}\right), & \cdots & \left(\frac{\partial x_n}{\partial \alpha_n}\right).
\end{array}$$

Stellt man nun diese Determinante als lineare Function der Grössen der ersten Horizontalreihe dar und berücksichtigt, dass nach (5.) dieselben mit Ausnahme von $\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1}$ alle verschwinden, so erhält man R als Product von $\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1}$ in $\frac{\partial R}{\partial \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1}}$ d. h. als Product von $\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1}$ in die Determinante

$$(6.)\qquad Q = \Sigma \pm \left(\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_2}\right)\left(\frac{\partial x_3}{\partial \alpha_3}\right)\cdots\left(\frac{\partial x_n}{\partial \alpha_n}\right),$$

deren Elemente diejenigen sind, welche von dem letzten Schema übrig bleiben, wenn man die erste Horizontalreihe und die erste Verticalreihe fortlässt. Man hat also schliesslich

$$(7.)\qquad R = \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1} Q.$$

Diese Gleichung ist von der höchsten Wichtigkeit. Da man nämlich nach unserer Annahme R aus dem gegebenen System (3.) a priori finden kann, ohne irgend eine Integration gemacht zu haben, da ferner Q vermöge der $n-1$ bereits ausgeführten Integrationen bekannt ist, so liefert die Gleichung (7.), wie wir sogleich sehen werden, die noch übrig bleibende n^{te} Integration, indem sie für die Differentialgleichung

$$X dx_1 - X_1 dx = 0,$$

in welcher X und X_1 als Functionen von x und x_1 ausgedrückt sind, den integrirenden Factor bestimmt. Das vollständige Integral dieser Gleichung sei

$$(8.)\qquad F(x, x_1) = \alpha_1.$$

Hieraus ergiebt sich durch Auflösung für x_1 derselbe Ausdruck, den wir oben mit

$$x_1 = \varphi_1(x, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n)$$

bezeichnet haben. Die Substitution dieses Ausdrucks für x_1 macht (8.) zu einer identischen Gleichung, daher erhält man durch Differentiation nach α_1

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1} = 1$$

oder, da nach Gleichung (7.)

$$\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1} = \frac{R}{Q}$$

ist,

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{Q}{R}.$$

Bezeichnet man mit N den integrirenden Factor von $X dx_1 - X_1 dx$, so hat man

$$NX = \frac{\partial F}{\partial x_1}, \quad -NX_1 = \frac{\partial F}{\partial x},$$

also aus der ersten dieser Gleichungen

$$(9.) \qquad N = \frac{1}{X}\frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{Q}{XR}.$$

$N = \frac{Q}{XR}$ ist also der integrirende Factor der Gleichung $X dx_1 - X_1 dx = 0$. Und so hat man den Satz:

Ist in dem System von Differentialgleichungen

$$dx : dx_1 : dx_2 : \dots : dx_n = X : X_1 : X_2 : \dots : X_n,$$

der Ausdruck

$$\frac{1}{X}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n}\right)$$

ein vollständiger Differentialquotient nach x, kennt man $n-1$ Integrale des Systems, aus welchen sich die Veränderlichen $x_2, x_3, \dots x_n$ als Functionen von x, x_1 und den $n-1$ willkürlichen Constanten der Integration durch die Gleichungen

$$x_2 = \varphi_2(x, x_1, \alpha_2 \dots \alpha_n), \quad x_3 = \varphi_3(x, x_1, \alpha_2 \dots \alpha_n), \quad \dots \quad x_n = \varphi_n(x, x_1, \alpha_2 \dots \alpha_n)$$

darstellen lassen, und bleibt demnach allein die Differentialgleichung

$$X dx_1 - X_1 dx = 0$$

zu integriren übrig, so ist

$$N = \frac{Q}{XR}$$

der integrirende Factor dieser Differentialgleichung, wo

$$XR = e^{\int \frac{1}{X}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial X_1}{\partial x_1}+\cdots+\frac{\partial X_n}{\partial x_n}\right)dx}$$

und

$$Q = \Sigma \pm \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_2}\frac{\partial x_3}{\partial \alpha_3}\cdots\frac{\partial x_n}{\partial \alpha_n}.$$

Wenn $\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial X_1}{\partial x_1}+\cdots+\frac{\partial X_n}{\partial x_n}=0$ ist, so wird $XR=\text{Const.}$, und in diesem Fall ist die Determinante Q selbst der integrirende Factor der Differentialgleichung $X dx_1 - X_1 dx = 0$.

Die Gleichung (4.) dieser Vorlesung zeigt, mit der Gleichung (11.) der zehnten Vorlesung verglichen, dass die Differentialgleichung, welcher $-\lg XR$ genügt, die nämliche für $n+1$ Variable ist, welche wir damals (für ein System zweier Differentialgleichungen zwischen drei Variablen) für $\lg M$ gefunden haben. Man kann daher

$$\lg M = -\lg XR$$

setzen, oder

$$M = \frac{1}{XR},$$

und es ist unter den Voraussetzungen des soeben ausgesprochenen Satzes

$$MQ$$

der integrirende Factor der letzten Differentialgleichung $X dx_1 - X_1 dx = 0$, wo M aus der Gleichung

$$X\frac{d\lg M}{dx}+\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial X_1}{\partial x_1}+\cdots+\frac{\partial X_n}{\partial x_n} = 0$$

zu bestimmen ist.

Die im Vorigen betrachtete Determinante Q kann man auf verschiedene Weise bilden. Die einfachste Darstellung ist die in Form eines Products. Sowie wir nämlich vermittelst x_1 die Constante α_1 aus den Variablen $x_2, x_3, \ldots x_n$ eliminirten und dann die Determinante R als Product von $\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1}$ in die Determinante Q darstellten, deren Ordnung um eine Einheit niedriger ist, als die Ordnung von R, so können wir wieder vermittelst x_2 die Constante α_2 aus den Variablen $x_3, x_4, \ldots x_n$ eliminiren und dann Q als Product von $\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_2}$ in die Determinante $P = \Sigma \pm \frac{\partial x_3}{\partial \alpha_3}\frac{\partial x_4}{\partial \alpha_4}\cdots\frac{\partial x_n}{\partial \alpha_n}$ darstellen. Auf diese Weise hat man fortzufahren; man eliminire vermittelst x_3 die Constante α_3 aus $x_4, x_5, \ldots x_n$, vermittelst x_4 die Constante α_4 aus $x_5, x_6, \ldots x_n$ u. s. w., so dass man folgende Darstellung der Integralgleichungen erhält:

$$(F.)\quad\begin{cases} x_1 = F_1(x, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \dots \alpha_{n-1}, \alpha_n), \\ x_2 = F_2(x, x_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \dots \alpha_{n-1}, \alpha_n), \\ x_3 = F_3(x, x_1, x_2, \alpha_3, \alpha_4, \dots \alpha_{n-1}, \alpha_n), \\ x_4 = F_4(x, x_1, x_2, x_3, \alpha_4, \dots \alpha_{n-1}, \alpha_n), \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ x_n = F_n(x, x_1, x_2, x_3, x_4, \dots x_{n-1}, \alpha_n); \end{cases}$$

alsdann ist

$$(10.)\qquad R = \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1}\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_2}\frac{\partial x_3}{\partial \alpha_3}\cdots\frac{\partial x_n}{\partial \alpha_n},$$

wo für die Grössen x_1 bis x_n die Ausdrücke F_1 bis F_n zu setzen sind, und für dieselbe Darstellungsart der Integralgleichungen hat man

$$(11.)\qquad Q = \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_2}\frac{\partial x_3}{\partial \alpha_3}\cdots\frac{\partial x_n}{\partial \alpha_n}.$$

Die hier gebrauchte Transformation besteht also in Folgendem:

Sind n Grössen $x_1, x_2, \dots x_n$ Functionen von n anderen $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$, so dass

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n), \\ x_2 &= f_2(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n), \\ &\vdots \\ x_n &= f_n(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n), \end{aligned}$$

und stellt man durch successive Elimination die Grössen $x_1, x_2, \dots x_n$ folgendermassen dar:

$$\begin{aligned} x_1 &= F_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots \alpha_{n-1}, \alpha_n), \\ x_2 &= F_2(x_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots \alpha_{n-1}, \alpha_n), \\ x_3 &= F_3(x_1, x_2, \alpha_3, \dots \alpha_{n-1}, \alpha_n), \\ &\vdots \\ x_n &= F_n(x_1, x_2, x_3, \dots x_{n-1}, \alpha_n), \end{aligned}$$

so ist

$$\Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial \alpha_1}\frac{\partial f_2}{\partial \alpha_2}\cdots\frac{\partial f_n}{\partial \alpha_n} = \frac{\partial F_1}{\partial \alpha_1}\frac{\partial F_2}{\partial \alpha_2}\cdots\frac{\partial F_n}{\partial \alpha_n},$$

oder wenn wir die Differentiationen der Grössen x in der ersten Darstellung ohne Klammern, in der zweiten mit Klammern bezeichnen,

$$\Sigma \pm \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1}\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_2}\cdots\frac{\partial x_n}{\partial \alpha_n} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1}\right)\left(\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_2}\right)\cdots\left(\frac{\partial x_n}{\partial \alpha_n}\right).$$

Die Form (*F.*) der Integralgleichungen ist diejenige, welche sie für den Fall einer einzigen Differentialgleichung höherer Ordnung bei successiver Integration von selbst annehmen. Die successive Integration der Gleichung

$$y^{(n+1)} = f(y^{(n)}, y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \dots y'', y', y, x)$$

giebt:

$$\begin{aligned}
y^{(n)} &= f_1\ (\alpha_n, y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \dots y'', y', y, x),\\
y^{(n-1)} &= f_2\ (\alpha_n, \alpha_{n-1}, y^{(n-2)}, \dots y'', y', y, x),\\
\vdots\ & \quad \vdots\\
y'' &= f_{n-1}(\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots\dots\dots \alpha_2, y', y, x),\\
y' &= f_n\ (\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots\dots\dots \alpha_2, \alpha_1, y, x).
\end{aligned}$$

Gehört nun die vorgelegte Gleichung $y^{(n+1)} = f$ zur Kategorie derer, für welche der Multiplicator M sich a priori bestimmen lässt, so ist für die Differentialgleichung erster Ordnung

$$y' = f_n$$

der integrirende Factor

$$MQ,$$

wo

$$Q = \frac{\partial y_n}{\partial \alpha_n}\,\frac{\partial y_{n-1}}{\partial \alpha_{n-1}} \cdots \frac{\partial y''}{\partial \alpha_2}\,\frac{\partial y'}{\partial \alpha_1}.$$

Dreizehnte Vorlesung.

Functionaldeterminanten. Ihre Anwendung zur Aufstellung der partiellen Differentialgleichung für den Multiplicator.

Determinanten der Form

$$\Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\,\frac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$

werden von mir *Functional-Determinanten*, von *Cauchy*, welcher in den Comptes rendus der Pariser Akademie einige Sätze darüber gegeben hat, „fonctions différentielles alternées" genannt. Functional-Determinanten werden also aus den n^2 partiellen Differentialquotienten $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_k}$ von n Functionen $f_1, f_2, \dots f_n$ gebildet, deren jede von den n Grössen $x_1, x_2, \dots x_n$ abhängt.

Ich habe im 22[sten] Bande des *Crelle*schen Journals eine Abhandlung über Functional-Determinanten erscheinen lassen, in welcher die Analogie nachgewiesen wird, welche zwischen Functional-Determinanten für Probleme mit mehreren Variablen und den Differentialquotienten für Probleme mit einer Variablen stattfindet. Es werden daselbst unter anderen folgende Sätze bewiesen, in welchen sich diese Analogie ausspricht.

1. Ist f Function von φ und φ Function von x, so ist $\frac{df}{dx} = \frac{df}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dx}$. Dem entspricht für n Variable der Satz: *Sind $f_1, f_2, \ldots f_n$ Functionen von $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ und diese wiederum Functionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$, so ist*

$$\Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\cdots\frac{\partial f_n}{\partial x_n} = \left(\Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_1}\frac{\partial f_2}{\partial \varphi_2}\cdots\frac{\partial f_n}{\partial \varphi_n}\right)\left(\Sigma \pm \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}\cdots\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n}\right).$$

2. Dies kann in anderer Gestalt auch so ausgedrückt werden: Sind f und φ Functionen von x, so ist

$$\frac{df}{d\varphi} = \frac{\frac{df}{dx}}{\frac{d\varphi}{dx}}.$$

Hierzu hat man für n Variable den analogen Satz: *Sind $f_1, f_2, \ldots f_n$ und $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ Functionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$, so ist*

$$\Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_1}\frac{\partial f_2}{\partial \varphi_2}\cdots\frac{\partial f_n}{\partial \varphi_n} = \frac{\Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\cdots\frac{\partial f_n}{\partial x_n}}{\Sigma \pm \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}\cdots\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n}},$$

und daher, wenn man $f_1 = x_1, f_2 = x_2, \ldots f_n = x_n$ setzt,

$$\Sigma \pm \frac{\partial x_1}{\partial \varphi_1}\frac{\partial x_2}{\partial \varphi_2}\cdots\frac{\partial x_n}{\partial \varphi_n} = \frac{1}{\Sigma \pm \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}\cdots\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n}}.$$

3. Aus der Gleichung

$$\Pi(x, y) = 0$$

ergiebt sich:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial \Pi}{\partial x}}{\frac{\partial \Pi}{\partial y}}.$$

Hierzu hat man folgende Analogie: *Aus den n Gleichungen zwischen $2n$ Variablen*

$$\begin{aligned}
\Pi_1(y_1, y_2, \ldots y_n, x_1, x_2, \ldots x_n) &= 0,\\
\Pi_2(y_1, y_2, \ldots y_n, x_1, x_2, \ldots x_n) &= 0,\\
\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots &\\
\Pi_n(y_1, y_2, \ldots y_n, x_1, x_2, \ldots x_n) &= 0
\end{aligned}$$

ergiebt sich:

$$(-1)^n \Sigma \pm \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial y_n}{\partial x_n} = \frac{\Sigma \pm \frac{\partial \Pi_1}{\partial x_1} \frac{\partial \Pi_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial \Pi_n}{\partial x_n}}{\Sigma \pm \frac{\partial \Pi_1}{\partial y_1} \frac{\partial \Pi_2}{\partial y_2} \cdots \frac{\partial \Pi_n}{\partial y_n}}.$$

4. Damit die Gleichung $Fx = 0$ zwei gleiche Wurzeln habe, muss zugleich $F'x = 0$ sein. Hierzu giebt es folgende Analogie: *Damit die Gleichungen*

$$F_1(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0, \quad F_2(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0, \quad \ldots \quad F_n(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0$$

zwei zusammenfallende Systeme von Wurzeln haben, muss zugleich

$$\Sigma \pm \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial F_n}{\partial x_n} = 0$$

sein.

5. Wenn für alle Werthe von x der Differentialquotient $\frac{\partial F}{\partial x}$ verschwindet, so folgt hieraus $F = \text{Const.}$ Hierzu hat man die Analogie: *Sobald für alle Werthe von* $x_1, x_2, \ldots x_n$

$$\Sigma \pm \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial F_n}{\partial x_n} = 0$$

ist, muss zwischen den n *Functionen* $F_1, F_2, \ldots F_n$ *eine Gleichung*

$$\Pi(F_1, F_2, \ldots F_n) = 0$$

bestehen, in welcher die Variablen $x_1, x_2, \ldots x_n$ *nicht explicite vorkommen.* Dies giebt für $n = 1$ auch in der That $\Pi(F) = 0$, also $F = \text{Const.}$, wie es sein muss.

Diesen Beispielen für die erwähnte Analogie lassen sich viele andere hinzufügen, welche theils in der angeführten Abhandlung, theils in der im 12ten Bande des *Crelle*schen Journals erschienenen „de binis quibuslibet functionibus homogeneis etc." zu finden sind.

Indem wir von der Betrachtung der Functional-Determinanten ausgehen, gelangen wir dazu, für den allgemeinen Fall von $n+1$ Variablen die Theorie des Multiplicators eines Systems von Differentialgleichungen in anderer Art, als es in der zwölften Vorlesung geschehen ist, zu begründen, nämlich auf demjenigen Wege, den wir in der zehnten Vorlesung für den Fall von drei Variablen betreten haben.

Das System

$$dx : dx_1 : dx_2 : \ldots : dx_n = X : X_1 : X_2 : \ldots : X_n$$

sei integrirt durch die Gleichungen

$$f_1 = \alpha_1, \qquad f_2 = \alpha_2, \qquad \ldots \qquad f_n = \alpha_n,$$

in welchen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ die willkürlichen Constanten bedeuten. Die unmittelbaren Differentiale derselben sind

$$\begin{array}{l}
\frac{\partial f_1}{\partial x} dx + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} dx_n = 0, \\
\frac{\partial f_2}{\partial x} dx + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial f_2}{\partial x_n} dx_n = 0, \\
\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\
\frac{\partial f_n}{\partial x} dx + \frac{\partial f_n}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_n}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} dx_n = 0,
\end{array}$$

welche, da die willkürlichen Constanten durch die Differentiation herausgegangen sind, mit dem vorgelegten System identisch sein müssen. Fügt man zu diesen n in Beziehung auf $dx, dx_1, \ldots dx_n$ linearen Gleichungen als $n+1^{\text{te}}$ die identische Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n = df$$

hinzu, wo f eine beliebige Function von $x, x_1, \ldots x_n$ bezeichnet, und wendet auf diese $n+1$ Gleichungen die in No. 3. der elften Vorlesung enthaltenen Auflösungsformeln für lineare Gleichungen an, so ergeben sich für $dx, dx_1, \ldots dx_n$ die Werthe:

$$R\,dx = A\,df, \qquad R\,dx_1 = A_1 df, \qquad \ldots \qquad R\,dx_n = A_n df,$$

wo

$$\begin{aligned}
R &= \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \\
&= A \frac{\partial f}{\partial x} + A_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + A_n \frac{\partial f}{\partial x_n},
\end{aligned}$$

$$A = \frac{\partial R}{\partial \frac{\partial f}{\partial x}}, \qquad A_1 = \frac{\partial R}{\partial \frac{\partial f}{\partial x_1}}, \qquad \ldots \qquad A_n = \frac{\partial R}{\partial \frac{\partial f}{\partial x_n}}.$$

Obgleich diese aus der Entwicklung von R nach den partiellen Differentialquotienten von f sich ergebende Bestimmung der Grössen $A, A_1, \ldots A_n$ gerade diejenige ist, deren wir uns im Folgenden zu bedienen haben werden, so ist es, namentlich um die Analogie mit dem in der zehnten Vorlesung gegebenen Fall von drei Variablen zu verfolgen, von Interesse, die Grössen A auch unabhängig, d. h. ohne Dazwischenkunft von R, zu definiren. Zunächst ist

$$A = \Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}.$$

Aus A erhält man nach No. 2 der elften Vorlesung A_1, indem man die Differentiationen nach x und nach x_1 mit einander vertauscht und das Zeichen ändert. Diese Regel, A_1 aus A herzuleiten, kann man durch folgende damit gleichbedeutende ersetzen. Man permutire die nach sämmtlichen $n+1$ Variablen x genommenen Differentiationen cyclisch, an die Stelle der nach x, x_1, x_2, ... x_{n-1}, x_n genommenen setze man nämlich beziehungsweise Differentiationen nach x_1, x_2, x_3, ... x_n, x, und ändere überdies das Vorzeichen oder behalte es bei, je nachdem die Anzahl $n+1$ der Variablen gerade oder ungerade ist, alsdann verwandelt sich A in A_1. Die letztere Regel hat den Vortheil, dass durch blosse Wiederholung derselben Operation sich A_1 in A_2 verwandelt, A_2 in A_3 u. s. w.

Indem man zwischen den für dx, dx_1, ... dx_n erhaltenen Werthen df eliminirt, ergiebt sich

$$dx : dx_1 : \ldots : dx_n = A : A_1 : \ldots : A_n,$$

was mit dem gegebenen System

$$dx : dx_1 : \ldots : dx_n = X : X_1 : \ldots : X_n$$

übereinstimmen muss. Es muss also die Proportion

$$A : A_1 : \ldots : A_n = X . X_1 : \ldots : X_n$$

bestehen, d. h. es muss einen Multiplicator M von der Beschaffenheit geben, dass

$$MX = A, \quad MX_1 = A_1, \quad \ldots \quad MX_n = A_n$$

ist. Es kommt jetzt darauf an, die für $n = 2$ bereits in der zehnten Vorlesung bewiesene identische Gleichung, der die Grössen A genügen, auf den allgemeinen Fall auszudehnen, also zu beweisen, dass die Gleichung

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial A_n}{\partial x_n} = 0$$

stattfindet. Wenn man auf die Zusammensetzung der Grössen A, A_1 ... A_n Rücksicht nimmt, so sieht man leicht ein, dass auf der linken Seite dieser Gleichung nur erste und zweite Differentialquotienten der Grössen f_1, f_2, ... f_n vorkommen können und zwar die letzteren nur linear, d. h. niemals das Product zweier Differentialquotienten zweiter Ordnung. Ferner, da in A keine Differentiationen nach x, in A_1 keine nach x_1 u. s. w. in A_n keine nach x_n vorkommen, so können die in dem Ausdruck

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial A_n}{\partial x_n}$$

auftretenden zweiten Differentialquotienten nicht von der Form $\frac{\partial^2 f_s}{\partial x_i^2}$ sondern nur von der Form $\frac{\partial^2 f_s}{\partial x_i \partial x_k}$ sein, wo i von k verschieden ist. Man kann also den betrachteten Ausdruck $\Sigma \frac{\partial A_i}{\partial x_i}$ als eine Summe von Termen der Form

$$F_{i,k}^{(s)} \cdot \frac{\partial^2 f_s}{\partial x_i \partial x_k}$$

darstellen. Der Werth von $F_{i,k}^{(s)}$ wird mit Hülfe der Formeln

$$R = \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n} = A \frac{\partial f}{\partial x} + A_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + A_n \frac{\partial f}{\partial x_n},$$

$$A_i = \frac{\partial R}{\partial \frac{\partial f}{\partial x_i}}, \qquad A_k = \frac{\partial R}{\partial \frac{\partial f}{\partial x_k}}$$

ermittelt, und zwar sind dazu nur die beiden Differentialquotienten $\frac{\partial A_i}{\partial x_i}$ und $\frac{\partial A_k}{\partial x_k}$ zu untersuchen, denn in den übrigen kommt $\frac{\partial^2 f_s}{\partial x_i \partial x_k}$ offenbar nicht vor. Nun sind die Grössen A_i und A_k selbst Determinanten und können folgendermassen dargestellt werden:

$$A_i = \frac{\partial A_i}{\partial \frac{\partial f_1}{\partial x_k}} \frac{\partial f_1}{\partial x_k} + \frac{\partial A_i}{\partial \frac{\partial f_2}{\partial x_k}} \frac{\partial f_2}{\partial x_k} + \cdots + \frac{\partial A_i}{\partial \frac{\partial f_s}{\partial x_k}} \frac{\partial f_s}{\partial x_k} + \cdots + \frac{\partial A_i}{\partial \frac{\partial f_n}{\partial x_k}} \frac{\partial f_n}{\partial x_k},$$

$$A_k = \frac{\partial A_k}{\partial \frac{\partial f_1}{\partial x_i}} \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \frac{\partial A_k}{\partial \frac{\partial f_2}{\partial x_i}} \frac{\partial f_2}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial A_k}{\partial \frac{\partial f_s}{\partial x_i}} \frac{\partial f_s}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial A_k}{\partial \frac{\partial f_n}{\partial x_i}} \frac{\partial f_n}{\partial x_i}.$$

Hieraus ergeben sich als Beitrag zu dem betrachteten Ausdruck $\Sigma \frac{\partial A_i}{\partial x_i}$ zwei in $\frac{\partial^2 f_s}{\partial x_i \partial x_k}$ multiplicirte Terme. Der eine rührt aus $\frac{\partial A_i}{\partial x_i}$ her und ist

$$\frac{\partial A_i}{\partial \frac{\partial f_s}{\partial x_k}} \frac{\partial^2 f_s}{\partial x_i \partial x_k};$$

der andere rührt aus $\frac{\partial A_k}{\partial x_k}$ her und ist

$$\frac{\partial A_k}{\partial \frac{\partial f_s}{\partial x_i}} \frac{\partial^2 f_s}{\partial x_i \partial x_k};$$

folglich wird

$$F_{\iota,k}^{(s)} = \frac{\partial A_\iota}{\partial \frac{\partial f_s}{\partial x_k}} + \frac{\partial A_k}{\partial \frac{\partial f_s}{\partial x_\iota}} = \frac{\partial^2 R}{\partial \frac{\partial f}{\partial x_\iota}\, \partial \frac{\partial f_s}{\partial x_k}} + \frac{\partial^2 R}{\partial \frac{\partial f}{\partial x_k}\, \partial \frac{\partial f_s}{\partial x_\iota}}.$$

Die in N°. 2 der elften Vorlesung enthaltene Formel

$$\frac{\partial^2 R}{\partial a_\iota \partial b_k} = -\frac{\partial^2 R}{\partial a_k \partial b_\iota} \qquad \text{oder} \qquad \frac{\partial^2 R}{\partial a_\iota \partial b_k} + \frac{\partial^2 R}{\partial a_k \partial b_\iota} = 0$$

giebt im vorliegenden Fall

$$\frac{\partial^2 R}{\partial \frac{\partial f}{\partial x_\iota}\, \partial \frac{\partial f_s}{\partial x_k}} + \frac{\partial^2 R}{\partial \frac{\partial f}{\partial x_k}\, \partial \frac{\partial f_s}{\partial x_\iota}} = 0,$$

also

$$F_{\iota,k}^{(s)} = 0.$$

Auf diese Weise ist die identische Gleichung

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial A_n}{\partial x_n} = 0$$

allgemein bewiesen. Aber wir hatten

$$A = MX, \qquad A_1 = MX_1, \qquad . \;\; . \;\; . \qquad A_n = MX_n;$$

daher ergiebt sich

$$\frac{\partial (MX)}{\partial x} + \frac{\partial (MX_1)}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial (MX_n)}{\partial x_n} = 0,$$

welches die partielle Differentialgleichung für den Multiplicator M ist.

Vierzehnte Vorlesung.

Die zweite Form der den Multiplicator definirenden Gleichung. Die Multiplicatoren der stufenweise reducirten Systeme von Differentialgleichungen. Der Multiplicator bei Benutzung particularer Integrale.

Wir können nun die fernere Untersuchung für $n+1$ Variable ganz auf dieselbe Weise führen, wie in der zehnten Vorlesung für 3 Variable. Indem wir die partielle Differentialgleichung für den Multiplicator M entwickeln, erhalten wir

$$(1.) \qquad X\frac{\partial M}{\partial x} + X_1\frac{\partial M}{\partial x_1} + \cdots + X_n\frac{\partial M}{\partial x_n} + \left\{\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n}\right\} M = 0.$$

Irgend eine andere Lösung dieser Differentialgleichung sei N, dann hat man auch

$$X\frac{\partial N}{\partial x}+X_1\frac{\partial N}{\partial x_1}+\cdots+X_n\frac{\partial N}{\partial x_n}+\left\{\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial X_1}{\partial x_1}+\cdots+\frac{\partial X_n}{\partial x_n}\right\}N = 0.$$

Multiplicirt man die zweite dieser Gleichungen mit $\frac{1}{M}$, die erste mit $\frac{N}{M^2}$ und zieht sie von einander ab, so erhält man

$$X\frac{M\frac{\partial N}{\partial x}-N\frac{\partial M}{\partial x}}{M^2}+X_1\frac{M\frac{\partial N}{\partial x_1}-N\frac{\partial M}{\partial x_1}}{M^2}+\cdots+X_n\frac{M\frac{\partial N}{\partial x_n}-N\frac{\partial M}{\partial x_n}}{M^2} = 0$$

oder

$$X\frac{\partial\left(\frac{N}{M}\right)}{\partial x}+X_1\frac{\partial\left(\frac{N}{M}\right)}{\partial x_1}+\cdots+X_n\frac{\partial\left(\frac{N}{M}\right)}{\partial x_n} = 0.$$

d. h. $\frac{N}{M}$ ist eine Lösung der Gleichung

$$(2.)\qquad X\frac{\partial f}{\partial x}+X_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+\cdots+X_n\frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

Zur vollständigen Integration einer solchen Gleichung ist die Kenntniss von n von einander unabhängigen Lösungen $f_1, f_2, \ldots f_n$ nöthig, d. h. von n Functionen $f_1, f_2, \ldots f_n$, welche den Gleichungen

$$\begin{aligned}
&X\frac{\partial f_1}{\partial x}+X_1\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+\cdots+X_n\frac{\partial f_1}{\partial x_n} = 0,\\
&X\frac{\partial f_2}{\partial x}+X_1\frac{\partial f_2}{\partial x_1}+\cdots+X_n\frac{\partial f_2}{\partial x_n} = 0,\\
&\vdots\qquad\quad\vdots\\
&X\frac{\partial f_n}{\partial x}+X_1\frac{\partial f_n}{\partial x_1}+\cdots+X_n\frac{\partial f_n}{\partial x_n} = 0
\end{aligned}$$

genügen, ohne dass eine der n Functionen eine Function der übrigen ist. Kennt man solche n Functionen, so ist die allgemeinste Lösung

$$F(f_1, f_2, \ldots f_n),$$

was man beweist, indem man die obigen n Gleichungen respective mit $\frac{\partial F}{\partial f_1}$, $\frac{\partial F}{\partial f_2}$, $\ldots$ $\frac{\partial F}{\partial f_n}$ multiplicirt und dann addirt. Eine $n+1^{\text{te}}$ Lösung f_{n+1}, welche von den n übrigen unabhängig wäre, giebt es nicht; denn gesetzt es gäbe eine solche, so würde nach der eben angewandten Schlussweise folgen, dass jede Function dieser $n+1$ Lösungen

$$\varphi(f_1, f_2, \ldots f_n, f_{n+1})$$

gleichfalls eine Lösung ist. Da aber $f_1, f_2, \ldots f_n, f_{n+1}$ von einander unabhängig angenommen werden, so kann man sie als neue Variable für $x, x_1, \dots x_n$ einführen, und daher ist eine willkürliche Function von $f_1, f_2, \dots f_n, f_{n+1}$ gleichbedeutend mit einer willkürlichen Function von $x, x_1, \dots x_n$. Der in Rede stehenden Differentialgleichung für f würde demnach jede beliebige Function von $x, x_1, \dots x_n$ genügen, was unmöglich ist. Es kann also nur n von einander unabhängige Lösungen $f_1, f_2, \dots f_n$ geben.

Diese n Lösungen der partiellen Differentialgleichung (2.) haben die Eigenschaft, dass sie durch die Integralgleichungen des Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$(3.) \qquad dx : dx_1 : \dots : dx_n = X : X_1 : \dots : X_n$$

Constanten gleich werden. Denn da diese Integralgleichungen die Grössen $X, X_1, \dots X_n$ den Differentialen $dx, dx_1, \dots dx_n$ proportional machen, so kann man in der für irgend ein f geltenden partiellen Differentialgleichung, also in der Gleichung

$$X\frac{\partial f_i}{\partial x}+X_1\frac{\partial f_i}{\partial x_1}+\dots+X_n\frac{\partial f_i}{\partial x_n} = 0,$$

die Grössen $X, X_1, \dots X_n$ durch die denselben proportionalen Differentiale $dx, dx_1, \dots dx_n$ ersetzen und erhält

$$\frac{\partial f_i}{\partial x}dx+\frac{\partial f_i}{\partial x_1}dx_1+\dots+\frac{\partial f_i}{\partial x_n}dx_n = 0$$

oder

$$df_i = 0,$$

und daher

$$f_i = \text{Const.}$$

Indem man annimmt, dass die Constanten, welchen $f_1, f_2, \dots f_n$ gleich werden müssen, n von einander unabhängige willkürliche Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ sind, erhält man die allgemeinste Integration, deren die Differentialgleichungen (3.) fähig sind, und es bilden also

$$f_1 = \alpha_1, \quad f_2 = \alpha_2, \quad \dots \quad f_i = \alpha_i, \quad \dots \quad f_n = \alpha_n$$

ein vollständiges nach den willkürlichen Constanten aufgelöstes System von Integralen jener Differentialgleichungen. Umgekehrt, wird die vollständige Integration der Differentialgleichungen (3.) durch n Gleichungen mit n von einander unabhängigen willkürlichen Constanten geleistet, d. h. durch n Gleichungen der Beschaffenheit, dass es unmöglich ist, aus denselben eine von allen n Constanten freie Resultante der Elimination herzuleiten, so löse man diese n Gleichungen nach den Constanten auf und erhalte

$$f_1 = \alpha_1, \quad f_2 = \alpha_2, \quad \dots \quad f_i = \alpha_i, \quad \dots \quad f_n = \alpha_n,$$

dann giebt die Differentiation

$$\frac{\partial f_i}{\partial x}dx + \frac{\partial f_i}{\partial x_1}dx_1 + \cdots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n}dx_n = 0;$$

aber $f_1 = \alpha_1, f_2 = \alpha_2, \ldots f_n = \alpha_n$ bilden ein vollständiges System von Integralen der Differentialgleichungen (3.), daher sind die Differentiale $dx, dx_1, \ldots dx_n$ den Grössen $X, X_1, \ldots X_n$ proportional, und man hat auch

$$X\frac{\partial f_i}{\partial x} + X_1\frac{\partial f_i}{\partial x_1} + \cdots + X_n\frac{\partial f_i}{\partial x_n} = 0,$$

d. h. $f_1, f_2, \ldots f_n$ sind Lösungen der Gleichung (2.).

Es ist also vollkommen dasselbe, ob man sagt: $f_1, f_2, \ldots f_n$ sind n von einander unabhängige Lösungen der partiellen Differentialgleichung (2.), oder ob man sagt: $f_1 = \alpha_1, f_2 = \alpha_2, \ldots f_n = \alpha_n$ bilden ein vollständiges System von Integralen der Differentialgleichungen (3.). Nun haben wir gesehen, dass

$$F(f_1, f_2, \ldots f_n)$$

die allgemeinste Lösung der Gleichung (2.) ist, ferner dass $\frac{N}{M}$ eben dieser Gleichung genügt. Hieraus folgt, dass, wenn M eine bestimmte Lösung der Gleichung (1.) ist und N irgend eine Lösung, $\frac{N}{M}$ eine Function von $f_1, f_2, \ldots f_n$ sein muss. Dies giebt

$$N = M.F(f_1, f_2, \ldots f_n):$$

ist M *ein* Multiplicator, so ist also

$$M.F(f_1, f_2, \ldots f_n)$$

die allgemeine Form, unter welcher *alle* Multiplicatoren enthalten sind. Durch die Integralgleichungen des Systems (3.) wird aber $f_1 = \alpha_1, f_2 = \alpha_2, \ldots f_n = \alpha_n$; bei Benutzung der Integralgleichungen unterscheidet sich also diese allgemeine Form nur durch einen constanten Factor von M. Um Verwechselungen zu vermeiden, wollen wir den bestimmten Werth des Multiplicators M mit M_0 bezeichnen, den allgemeinen mit M, ferner mit $\frac{1}{\varpi}$ die Function von $f_1, f_2, \ldots f_n$, mit welcher M_0 zu multipliciren ist um M zu ergeben, so dass $M = M_0\frac{1}{\varpi}$. Alsdann kann man die am Ende der vorigen Vorlesung vorkommenden Gleichungen

$$MX = A, \qquad MX_1 = A_1, \qquad \ldots \qquad MX_n = A_n$$

auch so schreiben:

$$(4.) \qquad M_0 X = A\varpi, \quad M_0 X_1 = A_1\varpi, \quad \ldots \quad M_0 X_n = A_n\varpi.$$

Mit Hülfe des Systems der Differentialgleichungen (3.) lässt sich die für M gefundene partielle Differentialgleichung (1.) transformiren. Die Gleichung

$$X\frac{\partial M}{\partial x}+X_1\frac{\partial M}{\partial x_1}+\cdots+X_n\frac{\partial M}{\partial x_n}+M\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial X_1}{\partial x_1}+\cdots+\frac{\partial X_n}{\partial x_n}\right) = 0,$$

oder, was dasselbe ist,

$$X\left(\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{X_1}{X}\frac{\partial M}{\partial x_1}+\cdots+\frac{X_n}{X}\frac{\partial M}{\partial x_n}\right)+M\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial X_1}{\partial x_1}+\cdots+\frac{\partial X_n}{\partial x_n}\right) = 0,$$

geht nämlich unter Berücksichtigung von (3.) in

$$X\frac{dM}{dx}+M\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial X_1}{\partial x_1}+\cdots+\frac{\partial X_n}{\partial x_n}\right) = 0,$$

oder

$$(5.)\qquad X\frac{d\lg M}{dx}+\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial X_1}{\partial x_1}+\cdots+\frac{\partial X_n}{\partial x_n} = 0$$

über. Diese Gleichung ist, da für die Grössen $x, x_1, \dots x_n$ die Differentialgleichungen (3.) bestehen, mit der Gleichung (1.) vollkommen identisch; man kann vermittelst (3.) den Uebergang von (1.) zu (5.) sowie den umgekehrten Uebergang machen.

Aus der Gleichung (5.) lässt sich der Multiplicator M häufig bestimmen. Ist $\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial X_1}{\partial x_1}+\cdots+\frac{\partial X_n}{\partial x_n}=0$, so findet man $M=\text{Const.}$ In anderen Fällen lässt sich vermöge der Differentialgleichungen (3.) der Ausdruck

$$\frac{1}{X}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial X_1}{\partial x_1}+\cdots+\frac{\partial X_n}{\partial x_n}\right)$$

in einen vollständigen Differentialquotienten nach x transformiren, eine Transformation, welche freilich häufig noch grosse analytische Kunstgriffe erfordert, und dann erhält man ebenfalls M aus (5.).

Hat man nun auf irgend eine Weise einen Werth M_0 des Multiplicators M gefunden, so besteht der Nutzen, der sich hieraus für die Integration des Systems (3.) ziehen lässt, darin, dass man vermittelst M_0 den integrirenden Factor derjenigen Differentialgleichung angeben kann, welche nach Auffindung von $n-1$ Integralen zu integriren übrig bleibt. Zufolge der ersten Gleichung (4.) hat man

$$M_0 X = A\varpi,$$

wo ϖ eine Function der n Lösungen der partiellen Differentialgleichung (2.) oder, was dasselbe ist, eine Function der n Integrale des Systems (3.) ist. Nehmen wir nun an, man kenne $n-1$ dieser Integrale, nämlich $f_2, f_3, \dots f_n$, so dass nur noch f_1 zu finden übrig bleibt, so wollen wir statt $n-1$ der unabhängigen Variablen, nämlich statt $x_2, x_3, \ldots x_n$, die Grössen $f_2, f_3, \ldots f_n$ einführen, so dass Alles durch $x, x_1, f_2, f_3, \ldots f_n$ ausgedrückt wird. Untersuchen wir, welche Veränderung dadurch in der Determinante

$$A = \Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$

hervorgebracht wird. Schreiben wir dieselbe als lineare Function der partiellen Differentialquotienten von f_1:

$$A = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} B_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} B_2 + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} B_n,$$

so bestehen nach der Fundamentaleigenschaft der Determinanten die Gleichungen

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial f_2}{\partial x_1} B_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} B_2 + \cdots + \frac{\partial f_2}{\partial x_n} B_n, \\
0 &= \frac{\partial f_3}{\partial x_1} B_1 + \frac{\partial f_3}{\partial x_2} B_2 + \cdots + \frac{\partial f_3}{\partial x_n} B_n, \\
&\vdots \\
0 &= \frac{\partial f_n}{\partial x_1} B_1 + \frac{\partial f_n}{\partial x_2} B_2 + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} B_n.
\end{aligned}$$

Denken wir uns nun $f_2, f_3, \ldots f_n$ für $x_2, x_3, \ldots x_n$ eingeführt, so dass f_1 unter der Form

$$f_1 = \Phi(x, x_1, f_2, f_3, \ldots f_n)$$

dargestellt wird, und schliessen wir die unter dieser Hypothese gebildeten Differentialquotienten von f_1 in Klammern ein, so ist

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_1}{\partial x_1} &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right) + \left(\frac{\partial f_1}{\partial f_2}\right)\frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial f_3}\right)\frac{\partial f_3}{\partial x_1} + \cdots + \left(\frac{\partial f_1}{\partial f_n}\right)\frac{\partial f_n}{\partial x_1}, \\
\frac{\partial f_1}{\partial x_2} &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial f_2}\right)\frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial f_3}\right)\frac{\partial f_3}{\partial x_2} + \cdots + \left(\frac{\partial f_1}{\partial f_n}\right)\frac{\partial f_n}{\partial x_2}, \\
&\vdots \\
\frac{\partial f_1}{\partial x_n} &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial f_2}\right)\frac{\partial f_2}{\partial x_n} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial f_3}\right)\frac{\partial f_3}{\partial x_n} + \cdots + \left(\frac{\partial f_1}{\partial f_n}\right)\frac{\partial f_n}{\partial x_n},
\end{aligned}$$

und hierdurch wird mit Berücksichtigung der früheren Gleichungen

$$A = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right) \cdot B_1,$$

wo

$$B_1 = \Sigma \pm \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}.$$

Substituirt man diesen Werth von A in die Gleichung

$$M_0 X = A\varpi,$$

so ergiebt sich:

$$(6.)\qquad M_0 X = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right) \cdot B_1 \varpi.$$

Da nun f_1 das zu suchende Integral der noch übrig bleibenden Differentialgleichung

$$X\,dx_1 - X_1\,dx = 0$$

ist, in welcher aus X und X_1 vermittelst der bekannten $n-1$ Integrale die Variablen $x_2, x_3, \ldots x_n$ eliminirt sind, so muss durch den zu bestimmenden integrirenden Factor diese Differentialgleichung in

$$df_1 = 0$$

oder

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right) dx_1 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right) dx = 0$$

übergehen; folglich ist der gesuchte integrirende Factor

$$\frac{1}{X}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)$$

oder nach (6.)

$$\frac{M_0}{B_1 \varpi},$$

d. h. man hat identisch

$$\frac{M_0}{B_1 \varpi}(X\,dx_1 - X_1\,dx) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right) dx_1 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right) dx = df_1.$$

oder

$$\frac{M_0}{B_1}(X\,dx_1 - X_1\,dx) = \varpi\, df_1.$$

Hierin ist ϖ eine willkürliche Function von $f_1, f_2, \ldots f_n$. Inzwischen werden, mit Hülfe der gefundenen $n-1$ Integrale, $f_2, f_3, \ldots f_n$ Constanten gleich, also wird ϖ eine blosse Function von f_1 und $\varpi\, df_1$ ebensowohl ein vollständiges Differential als df_1 selbst. Man kann daher ϖ im Divisor fortlassen und erhält $\frac{M_0}{B_1}$ als Multiplicator der Differentialgleichung

$$X\,dx_1 - X_1\,dx = 0.$$

Und so gelangen wir zu folgendem Satz:

Es sei das System von Differentialgleichungen

$$dx : dx_1 : dx_2 : \ldots : dx_n = X : X_1 : X_2 : \ldots : X_n$$

vorgelegt, man kenne $n-1$ Integrale desselben,

$$f_2 = \alpha_2, \qquad f_3 = \alpha_3, \qquad \ldots \qquad f_n = \alpha_n,$$

man kenne ferner eine Lösung M der Differentialgleichung

$$X\frac{d \lg M}{dx} + \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n} = 0;$$

ist vermöge jener $n-1$ Integrale das vorgelegte System auf die Differentialgleichung erster Ordnung zwischen zwei Variablen

$$X dx_1 - X_1 dx = 0$$

zurückgeführt, so ist der integrirende Factor derselben

$$\frac{M}{\Sigma \pm \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}}.$$

Dies ist derselbe Satz, der in der zwölften Vorlesung aufgestellt wurde. Dort fanden wir für den Multiplicator den Ausdruck

$$M \Sigma \pm \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_2} \frac{\partial x_3}{\partial \alpha_3} \cdots \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_n};$$

aber da $f_2 = \alpha_2$, $f_3 = \alpha_3$, ... $f_n = \alpha_n$, so hat man, nach einem p. 101 No. 2 angeführten Satz über Functionaldeterminanten,

$$\Sigma \pm \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_2} \frac{\partial x_3}{\partial \alpha_3} \cdots \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_n} = \frac{1}{\Sigma \pm \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}},$$

so dass beide Multiplicatoren identisch sind.

Der Name des zum System der Differentialgleichungen (3.) gehörenden Multiplicators, den wir der durch die Gleichung (1.) oder (5.) definirten Grösse M beilegen, empfiehlt sich dadurch, dass für den Fall zweier Variablen, x und x_1, M mit dem *Euler*schen Multiplicator oder integrirenden Factor zusammenfällt.

Wir haben bisher gezeigt, dass, wenn durch $n-1$ Integrale das System auf eine Differentialgleichung zwischen zwei Variablen zurückgeführt worden ist, der Multiplicator dieser Differentialgleichung aus dem Multiplicator des Systems hergeleitet werden kann. Aber dies ist nur ein specieller Fall eines allgemeineren Satzes: kennt man nämlich nicht $n-1$ Integrale, sondern eine kleinere Anzahl, etwa $n-k$, so dass man das gegebene System zwischen $n+1$ Variablen auf ein System zwischen $k+1$ Variablen zurückführen kann, so lässt sich, wie wir sogleich sehen werden, aus dem Multiplicator des gegebenen Systems der Multiplicator des zurückgeführten Systems bestimmen. Diese Verallgemeinerung wird uns zugleich in den Stand setzen, eine den Multiplicator betreffende, bis jetzt unberührt gebliebene Frage zu erörtern. Wir haben nämlich bisher vorausgesetzt, dass bei jeder Integration des vorgelegten Systems von Differentialgleichungen eine neue willkürliche Constante hinzukomme. Es ist aber nothwendig, die Frage zu beantworten, ob und in welcher Weise die Methode des letzten Multiplicators sich auch auf den Fall ausdehnen lässt, wo die willkürlichen Constanten besondere Werthe annehmen, und wo man daher schliesslich nicht mehr zur vollständigen Integration des vorgelegten Systems von Differentialgleichungen gelangt. Um zu zeigen, wie man aus dem Multiplicator eines gegebenen Systems den Multiplicator des reducirten irgend einer Ordnung finden kann, verfahren wir stufenweise. Wir nehmen zunächst *eine* Integralgleichung $f_n = \alpha_n$ als gegeben an, wodurch sich die Ordnung des Systems um *eine* Einheit erniedrigen lässt, und suchen den Multiplicator des so reducirten Systems auf.

Für das gegebene System

$$(3.)\qquad dx : dx_1 : \ldots : dx_n = X : X_1 : \ldots : X_n$$

wird der Multiplicator M durch die Differentialgleichung (4.) oder (5.) definirt. Nehmen wir aber alle Integrale des Systems als bekannt an, so ist nicht mehr die Lösung einer Differentialgleichung nöthig, sondern wir können M unmittelbar finden, und zwar aus jeder der Gleichungen

$$MX = \varpi A, \qquad MX_1 = \varpi A_1, \qquad \ldots \qquad MX_n = \varpi A_n,$$

wo $A = \Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$, $A_1 = (-1)^n \Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \cdots \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_n} \frac{\partial f_n}{\partial x}$ u. s. w. und ϖ eine Function von $f_1, f_2, \ldots f_n$ ist. Betrachten wir die erste dieser Gleichungen, also

$$MX = \varpi(f_1, f_2, \ldots f_n) \Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}.$$

Gesetzt, das Integral $f_n = \alpha_n$ sei gefunden, und es komme x_n in demselben vor, so lässt sich x_n durch f_n und die übrigen Variablen x darstellen; wird dieser Ausdruck von x_n in $f_1, f_2, \ldots f_{n-1}$ substituirt, so sind diese Grössen Functionen von $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ und f_n. Schliesst man die unter dieser Hypothese gebildeten Differentialquotienten in Klammern ein, so erhält man für die Elemente der Determinante A folgende Werthe:

$$\begin{array}{cccc}
\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)+\left(\frac{\partial f_1}{\partial f_n}\right)\frac{\partial f_n}{\partial x_1}, & \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right)+\left(\frac{\partial f_2}{\partial f_n}\right)\frac{\partial f_n}{\partial x_1}, & \ldots \left(\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_1}\right)+\left(\frac{\partial f_{n-1}}{\partial f_n}\right)\frac{\partial f_n}{\partial x_1}, & \frac{\partial f_n}{\partial x_1}, \\
\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)+\left(\frac{\partial f_1}{\partial f_n}\right)\frac{\partial f_n}{\partial x_2}, & \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right)+\left(\frac{\partial f_2}{\partial f_n}\right)\frac{\partial f_n}{\partial x_2}, & \ldots \left(\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_2}\right)+\left(\frac{\partial f_{n-1}}{\partial f_n}\right)\frac{\partial f_n}{\partial x_2}, & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}, \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_{n-1}}\right)+\left(\frac{\partial f_1}{\partial f_n}\right)\frac{\partial f_n}{\partial x_{n-1}}, & \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_{n-1}}\right)+\left(\frac{\partial f_2}{\partial f_n}\right)\frac{\partial f_n}{\partial x_{n-1}}, & \ldots \left(\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\right)+\left(\frac{\partial f_{n-1}}{\partial f_n}\right)\frac{\partial f_n}{\partial x_{n-1}}, & \frac{\partial f_n}{\partial x_{n-1}}, \\
\left(\frac{\partial f_1}{\partial f_n}\right)\frac{\partial f_n}{\partial x_n}, & \left(\frac{\partial f_2}{\partial f_n}\right)\frac{\partial f_n}{\partial x_n}, \ldots & \left(\frac{\partial f_{n-1}}{\partial f_n}\right)\frac{\partial f_n}{\partial x_n}, & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}.
\end{array}$$

Wie p. 95 gezeigt ist, kann man hier diejenigen Terme der ersten $n-1$ Verticalreihen fortlassen, welche den Elementen der letzten Verticalreihe proportional sind; dabei verschwinden die ersten $n-1$ Elemente der letzten Horizontalreihe, so dass $\frac{\partial f_n}{\partial x_n}$ Factor der Determinante wird, und man erhält daher

$$MX = \varpi(f_1, f_2, \ldots f_{n-1}, f_n)\cdot\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\Sigma\pm\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right)\cdots\left(\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\right)$$

oder, da $f_n = \alpha_n$ ist,

$$(7.)\qquad MX = \varpi(f_1, f_2, \ldots f_{n-1}, \alpha_n)\cdot\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\Sigma\pm\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right)\cdots\left(\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\right).$$

Nun habe man vermöge des Integrals $f_n = \alpha_n$ aus dem gegebenen System (3.) x_n und dx_n eliminirt und sei dadurch zu dem reducirten System

$$(8.)\qquad dx : dx_1 : \ldots : dx_{n-1} = X : X_1 : \ldots : X_{n-1}$$

gelangt. Ist μ der Multiplicator dieses Systems, so hat man zu seiner Bestimmung die Gleichung

$$\mu X = F.\Sigma\pm\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right)\cdots\left(\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\right),$$

wo F eine willkürliche Function von $f_1, f_2, \ldots f_{n-1}$ ist. Ein Werth von μ entspricht der Annahme $F = \varpi(f_1, f_2, \ldots f_{n-1}, \alpha_n)$, derselbe wird durch die Gleichung

$$\mu X = \varpi(f_1, f_2, \ldots f_{n-1}, \alpha_n)\Sigma\pm\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right)\cdots\left(\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\right)$$

bestimmt. Aus dieser letzteren und aus (7.) ergiebt sich durch Division

$$\frac{M}{\mu} = \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$

oder

$$\mu = \frac{M}{\frac{\partial f_n}{\partial x_n}}.$$

Dieser Ausdruck also ist der Multiplicator des Systems (8.).

Auf dieselbe Weise kann man weiter gehen; kennt man ein Integral $f_{n-1} = \alpha_{n-1}$ des Systems (8.) und reducirt dadurch dasselbe auf folgendes:

$$dx : dx_1 : \ldots : dx_{n-2} = X : X_1 : \ldots : X_{n-2},$$

wo x_{n-1} eliminirt ist, so ist der Multiplicator dieses Systems

$$\frac{M}{\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\left(\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\right)}.$$

Eliminirt man durch ein neues Integral $f_{n-2} = \alpha_{n-2}$ die Variable x_{n-2}, so erhält man als Multiplicator des so entstehenden Systems den Ausdruck

$$\frac{M}{\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\left(\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\right)\left(\left(\frac{\partial f_{n-2}}{\partial x_{n-2}}\right)\right)},$$

wo die Klammern bedeuten, dass f_{n-1} durch f_n und $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$, und dass f_{n-2} durch f_n, f_{n-1} und $x_1, x_2, \ldots x_{n-2}$ auszudrücken ist. Indem man so fortfährt, kommt man zuletzt auf die Differentialgleichung

$$dx : dx_1 = X : X_1$$

oder

$$X dx_1 - X_1 dx = 0,$$

und ihr Multiplicator ist

$$\frac{M}{\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\cdots\frac{\partial f_2}{\partial x_2}},$$

wo die Differentiationen so zu verstehen sind, dass die Functionen $f_n, f_{n-1}, \ldots f_2$ in der Form

$$\begin{aligned}
f_n &= \varphi_n(x, x_1, x_2, x_3 \ldots x_{n-2}, x_{n-1}, x_n),\\
f_{n-1} &= \varphi_{n-1}(x, x_1, x_2, x_3, \ldots x_{n-2}, x_{n-1}, f_n),\\
f_{n-2} &= \varphi_{n-2}(x, x_1, x_2, x_3, \ldots x_{n-2}, f_{n-1}, f_n),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
f_2 &= \varphi_2(x, x_1, x_2, f_3, \ldots f_{n-1}, f_{n-2}, f_n)
\end{aligned}$$

dargestellt angenommen werden. Bei dieser stufenweisen Reduction wird die jedesmal hinzukommende Integralgleichung dazu benutzt, um eine Variable zu eliminiren. Das erste Integral $f_n = \alpha_n$ z. B. wird dazu benutzt, um x_n durch $x, x_1, \ldots x_{n-1}$ und α_n auszudrücken und den erhaltenen Werth in $X, X_1, \ldots X_{n-1}$ zu substituiren. Hierbei haben wir zwar bisher α_n als eine willkürliche Constante angesehen; indessen ist leicht einzusehen, dass in dem Raisonnement nichts geändert wird, wenn man für α_n einen bestimmten Werth a_n setzt, in welchem Fall dann aber das reducirte System nicht mehr gleichbedeutend mit dem gegebenen ist, sondern nur dem besondern Fall entspricht, wo in der Integralgleichung $f_n = \alpha_n$ die willkürliche Constante α_n den besonderen Werth a_n hat. Obgleich man also im Verlauf der Integration der willkürlichen Constante α_n einen besonderen Werth geben darf, was damit übereinkommt, ein besonderes Integral des gegebenen Systems anzuwenden, so muss man doch das vollständige Integral $f_n = \alpha_n$ kennen, weil zur Bestimmung des Multiplicators μ aus M die Kenntniss von f_n nothwendig ist. Es genügt also nicht, ein particulares Integral $x_n = \Phi(x, x_1, \ldots x_{n-1})$ ohne willkürliche Constante zu kennen, sondern man muss wissen, wie dies particulare aus dem vollständigen Integral $f_n = \alpha_n$ hervorgegangen ist, und welchen Werth man der willkürlichen Constante gegeben hat. Hierin liegt eine Ausdehnung des Princips des letzten Multiplicators, welche man folgendermassen aussprechen kann:

Es sei das System von Differentialgleichungen

$$dx : dx_1 : \ldots : dx_n = X : X_1 : \ldots : X_n$$

gegeben: ein Integral desselben mit einer willkürlichen Constante sei bekannt und auf die Form $f_n = \alpha_n = Const.$ gebracht. Man lege der Constante irgend einen particularen Werth a_n bei, löse $f_n = a_n$ nach x_n auf und setze seinen hieraus hervorgehenden Werth in X, X_1, ... X_{n-1} ein. Hierauf erhält man das erste reducirte System von Differentialgleichungen

$$dx : dx_1 : \ldots : dx_{n-1} = X : X_1 : \ldots : X_{n-1},$$

welches aber nicht mehr die Allgemeinheit des vorgelegten Systems hat, sondern nur den Fall $\alpha_n = a_n$ repräsentirt. Von dem ersten reducirten System von Differentialgleichungen sei wiederum ein Integral mit einer willkürlichen Constante bekannt und auf die Form $f_{n-1} = \alpha_{n-1} = Const.$ gebracht, wo f_{n-1} eine Function von x, x_1, ... x_{n-1} ist. Man lege der Constante α_{n-1} den besonderen Werth a_{n-1} bei, löse $f_{n-1} = a_{n-1}$ nach x_{n-1} auf und setze seinen hieraus hervorgehenden Werth in die Grössen X, X_1, ... X_{n-2} ein, so dass sich das zweite reducirte System von Differentialgleichungen

$$dx : dx_1 : \ldots : dx_{n-2} = X : X_1 : \ldots : X_{n-2}$$

ergiebt, und so fahre man fort, bis man auf die Differentialgleichung

$$dx : dx_1 = X : X_1$$

kommt: dann ist auch jetzt der Multiplicator der letzten Differentialgleichung

$$\frac{M}{\frac{\partial f_n}{\partial x_n} \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}} \cdots \frac{\partial f_2}{\partial x_2}}.$$

Hier sind aber f_n, f_{n-1}, ... f_2 nicht mehr $n-1$ Integrale des vorgelegten Systems, sondern nur $f_n = \alpha_n$ ist ein solches; $f_{n-1} = \alpha_{n-1}$ ist ein Integral des ersten reducirten Systems, welches den besonderen Fall $\alpha_n = a_n$ des gegebenen darstellt; $f_{n-2} = \alpha_{n-2}$ ist ein Integral des zweiten reducirten Systems, welches den besonderen Fall $\alpha_{n-1} = a_{n-1}$ des ersten reducirten Systems darstellt u. s. w.

Hiermit ist der Umfang erschöpft, den wir dem Princip des letzten Multiplicators zu geben vermögen: wir gehen jetzt zu den Anwendungen desselben über.

Funfzehnte Vorlesung.

Der Multiplicator für Systeme von Differentialgleichungen mit höheren Differentialquotienten. Anwendung auf ein freies System materieller Punkte.

Alle unsere bisherigen Betrachtungen betrafen Systeme von Differentialgleichungen, in welchen nur Differentialquotienten erster Ordnung vorkommen. Systeme dieser Art kann man als einen besonderen Fall derjenigen ansehen, in welchen die Differentialquotienten auf beliebige Ordnung steigen. Aber auch umgekehrt kann man durch Vermehrung der Anzahl der Variablen ein System mit höheren Differentialquotienten auf die Form eines nur Differentialquotienten erster Ordnung enthaltenden Systems zurückführen, so dass jenes ein besonderer Fall von diesem wird. Mit dieser Zurückführung eines beliebigen Systems auf ein System, in welchem nur Differentialquotienten erster Ordnung vorkommen, wollen wir uns zunächst beschäftigen. Man habe ein System von i Differentialgleichungen zwischen $i+1$ Variablen $t, x, y, z, \ldots$, wovon t als die unabhängige, $x, y, z, \ldots$ als die abhängigen Variablen angesehen werden. Die höchsten Differentialquotienten, welche in diesen Differentialgleichungen vorkommen, seien der m^{te} von x, der n^{te} von y, der p^{te} von z, etc. Nehmen wir ferner an, dass man nach diesen höchsten Differentialquotienten auflösen könne, so dass die Differentialgleichungen folgende Form bekommen:

$$(1.)\qquad \frac{d^m x}{dt^m} = A, \qquad \frac{d^n y}{dt^n} = B, \qquad \frac{d^p z}{dt^p} = C, \qquad \ldots,$$

wo die höchsten Differentialquotienten, die in $A, B, C \ldots$ vorkommen, der $m-1^{\text{te}}$ von x, der $n-1^{\text{te}}$ von y, der $p-1^{\text{te}}$ von z, etc. seien, so ist dies die canonische Form der Differentialgleichungen, in Beziehung auf welche alle Untersuchungen anzustellen sind. Auf diese canonische Form (1.) wird sich nicht immer unmittelbar jedes gegebene System zurückführen lassen; dies wird z. B. nicht angehen, wenn in der einen der gegebenen Gleichungen die höchsten Differentialquotienten $\frac{d^m x}{dt^m}, \frac{d^n y}{dt^n}, \frac{d^p z}{dt^p}, \ldots$ nicht vorkommen. Alsdann muss man zur Elimination die Differentiation hinzufügen. Gesetzt z. B. in der in Rede stehenden Gleichung wären die höchsten Differentialquotienten $\frac{d^{m-\mu}x}{dt^{m-\mu}}$, $\frac{d^{n-\nu}y}{dt^{n-\nu}}$, $\frac{d^{p-\pi}z}{dt^{p-\pi}}$, ... und es wäre $\mu \leqq \nu \leqq \pi \leqq \ldots$, so differentiire man μ mal nach t und benutze die so erhaltene Gleichung, um $\frac{d^m x}{dt^m}$ aus den übrigen Gleichungen zu eliminiren. Findet sich unter den aus dieser Elimination hervorgehenden Gleichungen wiederum eine, in welcher von den höchsten Differentialquotienten von y, z ... keiner vorkommt, so hat man diese von Neuem zu differentiiren u. s. w. Genügt auch diese Betrachtung um zu zeigen, dass die Zurückführung auf die canonische Form in jedem Fall möglich ist, so giebt es doch vorläufig keine allgemeine Methode dieser Zurückführung. Eine solche Methode aufzustellen würde eine sehr schöne Aufgabe sein*); sie kommt damit überein, die Anzahl der willkürlichen Constanten zu bestimmen, welche in den Integralen eines gegebenen Systems von Differentialgleichungen enthalten sind, diese Anzahl ergiebt sich unmittelbar aus der canonischen Form, sie ist nämlich $m+n+p+\cdots$ Die in Rede stehende Aufgabe hat daher einige Aehnlichkeit mit der Aufgabe, den Grad der Eliminationsgleichung aus einem gegebenen System algebraischer Gleichungen zu bestimmen.

Ein besonderer Fall der canonischen Form ist der, in welchem man alle Variablen, y, z, ... bis auf zwei, t und x, eliminirt und nach den Differentialquotienten von x nach t ordnet. Diese Elimination ist aber für unsere Betrachtung nicht nöthig; wir brauchen nur, wie gesagt, die Differentialgleichungen auf die Form (1.) reducirt anzunehmen, wo die höchsten Differentialquotienten in A, B, C, ... der $m-1^{\text{te}}$ von x, der $n-1^{\text{te}}$ von y, der $p-1^{\text{te}}$ von z ... sind.

Dies vorausgesetzt wollen wir $m+n+p+\cdots-i$ neue Variable einführen, nämlich:

---

*) *Jacobi* selbst hat diese Aufgabe gelöst; Andeutungen darüber finden sich in seiner Abhandlung über den Multiplicator (Math. W. Bd. 1, p. 219, *Crelle*s Journal, Bd. XXIX, p. 369), wo auf eine weiter zu erwartende Abhandlung hingewiesen ist, welche diesem Gegenstande gewidmet sein sollte. Von den beiden im Nachlasse vorgefundenen Aufsätzen über das vorliegende Problem ist der eine, welcher eine sehr vollständige Auseinandersetzung der Resultate enthält (de aequationum differentialium systemate non normali ad formam normalem revocando) unter die Nachträge zu diesen Vorlesungen aufgenommen worden; der andere, die Beweise enthaltend, findet sich im 64. Bande des mathematischen Journals abgedruckt (de investigando ordine systematis aequationum differentialium vulgarium cujuscunque). *C.*

$$(2.)\quad \begin{cases} x' = \frac{dx}{dt}, & x'' = \frac{dx'}{dt}, & \dots & x^{(m-1)} = \frac{dx^{(m-2)}}{dt}; \\ y' = \frac{dy}{dt}, & y'' = \frac{dy'}{dt}, & \dots & y^{(n-1)} = \frac{dy^{(n-2)}}{dt}; \\ z' = \frac{dz}{dt}, & z'' = \frac{dz'}{dt}, & \dots & z^{(p-1)} = \frac{dz^{(p-2)}}{dt}; \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{cases}$$

dann kann man alle diese Gleichungen mit den Gleichungen (1.) zusammen als folgendes System darstellen:

$$(3.)\quad \left\{\begin{array}{l} dt : dx : dx' : \dots : dx^{(m-2)} \\ \quad : dy : dy' : \dots : dy^{(n-2)} \\ \quad : dz : dz' : \dots : dz^{(p-2)} \\ \dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} 1 : x' : x'' : \dots : A \\ \quad : y' : y'' : \dots : B \\ \quad : z' : z'' : \dots : C \\ \dots\dots\dots \end{array}\right.$$

Wendet man auf dieses System die allgemeine Theorie an, so erhält man als Differentialgleichung für den Multiplicator

$$(4.)\quad 0 = \frac{d \lg M}{dt} + \frac{\partial A}{\partial x^{(m-1)}} + \frac{\partial B}{\partial y^{(n-1)}} + \frac{\partial C}{\partial z^{(p-1)}} + \cdots$$

Man kann daher M in allen Fällen angeben, in welchen die Summe

$$\frac{\partial A}{\partial x^{(m-1)}} + \frac{\partial B}{\partial y^{(n-1)}} + \frac{\partial C}{\partial z^{(p-1)}} + \cdots$$

ein vollständiger Differentialquotient ist. Wenn z. B.

$$\frac{\partial A}{\partial x^{(m-1)}} + \frac{\partial B}{\partial y^{(n-1)}} + \frac{\partial C}{\partial z^{(p-1)}} + \cdots = 0$$

ist, was namentlich immer der Fall ist, wenn A kein $\frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}}$, B kein $\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}$, C kein $\frac{d^{p-1}z}{dt^{p-1}}$ enthält u. s. w., so hat man

$$M = \text{Const.}$$

und kann daher nach unserer Theorie, wenn man die Differentialgleichungen (1.) auf eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen zwei Variablen zurückgeführt hat, den integrirenden Factor dieser Differentialgleichung angeben.

Diese Betrachtung würde von keinem sehr grossen Interesse sein, wenn nicht solche Fälle in der Praxis vorkämen. Dies findet aber statt. Sobald nämlich die Bewegung eines freien Systems materieller Punkte bloss von ihrer Configuration abhängt, so dass der Widerstand des Mediums ausser Betracht ist, so sind die Differentialgleichungen der Bewegung

$$(5.)\quad m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = X_i, \quad m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = Y_i, \quad m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = Z_i,$$

wo $X_{,}$, $Y_{,}$, $Z_{,}$ keine ersten Differentialquotienten enthalten: daher hat man

$$\frac{\partial X_{,}}{\partial x'_{,}} = 0, \quad \frac{\partial Y_{,}}{\partial y'_{,}} = 0, \quad \frac{\partial Z_{,}}{\partial z'_{,}} = 0,$$

also

$$\frac{d \lg M}{dt} = 0,$$

$$M = \text{Const.},$$

und das Princip des letzten Multiplicators ist anwendbar. Aber dies Princip findet sogar, wie wir später nachweisen werden, noch für ein durch irgend welche Verbindungen beschränktes System seine Anwendung.

Eine besondere Betrachtung verdient der Fall, wo in der canonischen Form der Differentialgleichungen,

$$(6.) \qquad \frac{d^m x}{dt^m} = A, \quad \frac{d^n y}{dt^n} = B, \quad \frac{d^p z}{dt^p} = C, \quad \ldots$$

die Grössen A, B, C, ... kein t enthalten. In diesem Fall kann man t ganz eliminiren, und zwar einfach dadurch, dass man in der unter (3.) gegebenen Form der Differentialgleichungen auf der linken Seite dt, auf der rechten das ihm entsprechende Glied 1 fortlässt. Man erhält auf diese Weise ein System, dessen Ordnung um eine Einheit niedriger, nämlich gleich $m+n+p+\cdots-1$ ist. Hat man dies System integrirt, mithin alle Variablen durch eine, z. B. x, ausgedrückt, so ergiebt sich t, wie schon früher erwähnt, aus der Differentialgleichung

$$dx - x'\,dt = 0.$$

Da alle Variablen durch x ausgedrückt sind, so ist es auch x', also hat man

$$dt = \frac{dx}{x'},$$

$$t = \int \frac{dx}{x'} + C,$$

und man findet daher t durch blosse Quadratur.

Hat man nun einen Multiplicator M, der von t frei ist (hierher gehört namentlich der Fall, wo $\frac{\partial A}{\partial x^{(m-1)}} + \frac{\partial B}{\partial y^{(n-1)}} + \frac{\partial C}{\partial z^{(p-1)}} + \cdots = 0$, also $M = \text{Const.}$ ist), so giebt dieser Werth von M den letzten Multiplicator des Systems $m+n+p+\cdots-1^{\text{ster}}$ Ordnung, aus welchem t eliminirt ist; man kann also von dem gegebenen System die *beiden* letzten Integrationen ausführen. Besitzt man dagegen nur einen Werth von M, der t enthält, so kann man hieraus keinen Nutzen für die $(m+n+p+\cdots-1)^{\text{ste}}$ Integration ziehen, sondern nur für die $(m+n+p+\cdots)^{\text{te}}$, welche den Werth von t liefert und bereits auf eine Quadratur zurückgeführt ist; und zwar besteht dieser Nutzen darin, dass man auch die Quadratur ersparen und t durch Auflösung einer Gleichung bestimmen kann. In der That, nach der ersten der Gleichungen (4.) der vorigen Vorlesung hatten wir für den Multiplicator M des daselbst mit (3.) bezeichneten und zwischen den Variablen $x, x_1, \dots x_n$ stattfindenden Systems n^{ter} Ordnung die Formel

$$(7.) \qquad MX = \varpi \Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n},$$

wo $f_1 = \alpha_1$, $f_2 = \alpha_2$, ... $f_n = \alpha_n$ die Integrale jenes Systems darstellen und ϖ eine Function von $f_1, f_2, \dots f_n$, d. h. da diese Grössen durch die Integrale des Systems zu Constanten werden, eine Constante bedeutet. Dies wollen wir auf das System (6.) anwenden. Sind

$$f_1 = \alpha_1, \qquad f_2 = \alpha_2, \qquad \dots \qquad f_{m+n+p+\dots-1} = \alpha_{m+n+p+\dots-1}$$

die Integrale des nach Elimination von t aus (6.) erhaltenen reducirten Systems, und ist

$$f = t - \int \frac{dx}{x'} = \text{Const.}$$

das letzte den Werth von t liefernde Integral von (6.), so ergiebt sich aus Formel (7.), indem $t, x, x', \dots x^{(m-1)}, y, y', \dots y^{(n-1)}, z, z', \dots z^{(p-1)}, \dots$ an die Stelle von $x, x_1, \dots x_n$ und demgemäss 1 an die Stelle von X gesetzt wird, für den Multiplicator M des Systems (6.) die Formel

$$M = \varpi \Sigma \pm \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f_1}{\partial x'} \frac{\partial f_2}{\partial x''} \cdots \frac{\partial f_{m-1}}{\partial x^{(m-1)}} \frac{\partial f_m}{\partial y} \cdots \frac{\partial f_{m+n-1}}{\partial y^{(n-1)}} \frac{\partial f_{m+n}}{\partial z} \cdots \frac{\partial f_{m+n+p-1}}{\partial z^{(p-1)}} \cdots.$$

Aber es ist $f = t - \int \frac{dx}{x'}$, wo x' eine gegebene Function von x ist, daher

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{x'}, \quad \frac{\partial f}{\partial x'} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x''} = 0, \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial z^{(p-1)}} = 0 \text{ etc.},$$

mithin

$$M = -\text{Const.} \frac{1}{x'} \Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial x'} \frac{\partial f_2}{\partial x''} \cdots \frac{\partial f_{m+n+p-1}}{\partial z^{(p-1)}} \cdots.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist zugleich ein Multiplicator des von t freien Systems $m+n+p+\cdots-1^{\text{ster}}$ Ordnung; denn für den Multiplicator dieses Systems, welcher mit μ bezeichnet werde, ergiebt die Anwendung von (7.) die Formel

$$\mu x' = \text{Const.} \Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial x'} \frac{\partial f_2}{\partial x''} \cdots \frac{\partial f_{m+n+p-1}}{\partial z^{(p-1)}} \cdots,$$

wo μ, wie sich von selbst versteht, ein von t freier Ausdruck ist. Wir haben also

$$M = \text{Const.}\,\mu,$$

und da M der Annahme nach t enthält, so ergiebt sich t durch Auflösung dieser Gleichung. Inzwischen wissen wir vermöge der uns bereits bekannten Bestimmung von t

$$t = \int \frac{dx}{x'} + \text{Const.},$$

dass die Constante mit t additiv verbunden sein muss; damit diese Verbindung von t mit der Constante auch aus der obigen Gleichung für M hervorgehe, muss M von der Form

$$e^{mt}N$$

sein, wo t in N nicht mehr vorkommt, alsdann erhält man durch die Logarithmen

$$mt = \lg\frac{\mu}{N} + \lg\text{Const.}$$

Wenn A, B, C, ... die Variable t nicht enthalten, so giebt also M, wenn es t ebenfalls nicht enthält, die vorletzte Integration. Enthält dagegen M die Variable t, so kann man durch die Kenntniss von M die Quadratur ersparen, welche sonst zur Bestimmung von t nothwendig wäre.

Zu dem ersten Fall gehören die für die Bewegung eines Systems von n materiellen Punkten geltenden Differentialgleichungen (5.), da der uns bekannte Werth $M =$ Const. des Multiplicators derselben von t frei ist. Die Differentialgleichungen (5.) bilden ein System der $6n^{\text{ten}}$ Ordnung, welches nach unsrer Methode durch die $6n+1$ Variablen x_i, x'_i, y_i, y'_i, z_i, z'_i und t dargestellt wird. Kennt man $6n-2=\nu$ die Variable t nicht enthaltende Integrale

$$f_1 = \alpha_1, \quad f_2 = \alpha_2, \quad \ldots \quad f_\nu = \alpha_\nu$$

dieses Systems, so dass man alle abhängigen Variablen durch zwei, etwa x_1 und y_1, ausdrücken kann, zwischen welchen die noch zu integrirende Differentialgleichung erster Ordnung

$$x'_1 dy_1 - y'_1 dx_1 = 0$$

stattfindet, so lässt sich der integrirende Factor R dieser letzteren angeben. Bezeichnet man die nach Ausschluss von x_1 und y_1 von den $6n$ Variablen x_i, x'_i, y_i, y'_i, z_i, z'_i übrig bleibenden $6n-2=\nu$ mit p_1, p_2, ... p_ν, so ist

$$R = \Sigma \pm \frac{\partial p_1}{\partial \alpha_1}\frac{\partial p_2}{\partial \alpha_2}\cdots\frac{\partial p_\nu}{\partial \alpha_\nu},$$

wo vorausgesetzt ist, dass man für die Variablen $p_1, p_2, \dots p_\nu$ ihre aus den Integralen $f_1 = \alpha_1, f_2 = \alpha_2, \dots f_\nu = \alpha_\nu$ sich ergebenden Werthe substituirt habe. Sind die gegebenen ν Integralgleichungen weder nach den Variablen $p_1, p_2, \dots p_\nu$, noch nach den willkürlichen Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_\nu$ aufgelöst, und werden sie mit

$$\varpi_1 = 0, \quad \varpi_2 = 0, \quad \dots \quad \varpi_\nu = 0$$

bezeichnet, so ergiebt sich nach den in der dreizehnten Vorlesung ausgesprochenen Sätzen über Functionaldeterminanten für den integrirenden Factor R der Bruch

$$R = \frac{\Sigma \pm \frac{\partial \varpi_1}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \varpi_2}{\partial \alpha_2} \cdots \frac{\partial \varpi_\nu}{\partial \alpha_\nu}}{\Sigma \pm \frac{\partial \varpi_1}{\partial p_1} \frac{\partial \varpi_2}{\partial p_2} \cdots \frac{\partial \varpi_\nu}{\partial p_\nu}}.$$

Unter der oben gemachten Annahme, dass die Integralgleichungen nach den willkürlichen Constanten aufgelöst seien, hat man $\varpi_\iota = f_\iota - \alpha_\iota$ zu setzen; dann reducirt sich der Zähler des Bruches auf 1, und der integrirende Factor wird

$$R = \frac{1}{\Sigma \pm \frac{\partial f_1}{\partial p_1} \frac{\partial f_2}{\partial p_2} \cdots \frac{\partial f_\nu}{\partial p_\nu}}.$$

Ein umfassenderer Fall, in welchem die den Zähler des obigen Bruches bildende Determinante sich bedeutend vereinfacht, ist der, wo ϖ_1 nur α_1 enthält, ϖ_2 nur α_1 und α_2 u. s. w. und allgemein ϖ_ι nur $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_\iota$; dann reducirt sich die Determinante $\Sigma \pm \frac{\partial \varpi_1}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \varpi_2}{\partial \alpha_2} \cdots \frac{\partial \varpi_\nu}{\partial \alpha_\nu}$ auf den einen Term

$$\frac{\partial \varpi_1}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \varpi_2}{\partial \alpha_2} \cdots \frac{\partial \varpi_\nu}{\partial \alpha_\nu}.$$

Diese Form der Integralgleichungen kann natürlich durch successive Elimination immer erzielt werden. Der analoge Fall für den Nenner von R ist der, wo ϖ_1 von allen Variablen $p_1, p_2, \dots p_\nu$ nur die eine p_1 enthält, ϖ_2 nur p_1 und p_2 u. s. w., ϖ_ι nur $p_1, p_2, \dots p_\iota$. Alsdann reducirt sich die Determinante $\Sigma \pm \frac{\partial \varpi_1}{\partial p_1} \frac{\partial \varpi_2}{\partial p_2} \cdots \frac{\partial \varpi_\nu}{\partial p_\nu}$ auf den einen Term

$$\frac{\partial \varpi_1}{\partial p_1} \frac{\partial \varpi_2}{\partial p_2} \cdots \frac{\partial \varpi_\nu}{\partial p_\nu}.$$

Wenn wir nicht ν vollständige Integrale kennen, sondern nur ν besondere, d. h. solche, in welchen den Constanten $\alpha_1, \dots \alpha_\nu$ besondere Werthe gegeben sind, so können wir die Determinante im Nenner von R wohl bilden, die im Zähler von R aber nicht, denn hierzu wäre es nöthig zu wissen, unter welcher Form die Constanten in die Integrale eintreten. Wissen wir aber, dass, ehe den willkürlichen Constanten besondere Werthe beigelegt wurden, ϖ_1 nur α_1, ϖ_2 nur α_1 und α_2 u. s. w., ϖ_ι nur $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\iota$ enthielt, so brauchen wir nur noch überdies zu wissen, wie α_1 in ϖ_1, α_2 in $\varpi_2, \ldots \alpha_\iota$ in $\varpi_\iota, \ldots \alpha_\nu$ in ϖ_ν enthalten waren, um die Determinante im Zähler von R bilden zu können; es ist nicht nöthig zu wissen, wie α_1 in ϖ_2, α_1 und α_2 in $\varpi_3, \ldots \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{\iota-1}$ in ϖ_ι u. s. w. vorkommen, denn, wie wir gesehen haben, reducirt sich die ganze Determinante auf den einen Term $\frac{\partial\varpi_1}{\partial\alpha_1}\frac{\partial\varpi_2}{\partial\alpha_2}\cdots\frac{\partial\varpi_\nu}{\partial\alpha_\nu}$. Dieser Fall ist der der Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung höherer Ordnung, wenn vorausgesetzt wird, dass man jede Integration vollständig ausführen kann, aber dann, um weiter zu integriren, der willkürlichen Constante einen besonderen Werth geben muss.

Sechzehnte Vorlesung.

Beispiele für die Aufsuchung des Multiplicators. Anziehung eines Punkts nach einem festen Centrum im widerstehenden Mittel und im leeren Raum.

Wir wollen, um die Anwendbarkeit der Theorie des Multiplicators zu zeigen, zunächst einen Fall betrachten, in welchem, abweichend von allen übrigen Beispielen, auf welche sich diese Untersuchungen beziehen, X_ι, Y_ι, Z_ι nicht bloss Functionen der Coordinaten sind, sondern auch die Geschwindigkeiten enthalten, wo also M nicht eine Constante wird. Dieser Fall ist der eines Planeten, welcher sich in einem widerstehenden Mittel um die Sonne bewegt. Ohne Berücksichtigung des Widerstandes sind bekanntlich die Gleichungen für die Bewegung eines Planeten folgende:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2\frac{x}{r^3}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -k^2\frac{y}{r^3}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -k^2\frac{z}{r^3}.$$

wo x, y, z die heliocentrischen Coordinaten des Planeten sind, r seine Entfernung von der Sonne und k^2 die Anziehung, welche die Sonne in der Einheit der Entfernung ausübt. Ist $v = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$ die Geschwindigkeit des Planeten in der Richtung der Tangente seiner Trajectorie und V der Widerstand in derselben Richtung, so sind die Componenten des Widerstandes nach den Axen der x, y und z respective

$$\frac{Vx'}{v}, \quad \frac{Vy'}{v}, \quad \frac{Vz'}{v}.$$

Diese Grössen sind auf der rechten Seite der Differentialgleichungen mit demselben Zeichen hinzuzufügen, welches die von der Attraction herrührenden Terme haben. Die Bewegungsgleichungen werden also:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2\frac{x}{r^3} - \frac{Vx'}{v},$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = -k^2\frac{y}{r^3} - \frac{Vy'}{v},$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} = -k^2\frac{z}{r^3} - \frac{Vz'}{v}.$$

Nehmen wir den Widerstand proportional der n^{ten} Potenz der Geschwindigkeit,

$$V = f.v^n,$$

an, wo f eine Constante ist, so hat man demnach die Differentialgleichungen

$$(1.)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = -k^2\dfrac{x}{r^3} - f.v^{n-1}x' = A, \\[2ex] \dfrac{d^2y}{dt^2} = -k^2\dfrac{y}{r^3} - f.v^{n-1}y' = B, \\[2ex] \dfrac{d^2z}{dt^2} = -k^2\dfrac{z}{r^3} - f.v^{n-1}z' = C. \end{cases}$$

Dies System mit der allgemeinen Form (1.) und (3.) der vorigen Vorlesung verglichen giebt $m = n = p = 2$; also erhält man nach Formel (4.) der nämlichen Vorlesung für den Multiplicator M des Systems (1.)

$$0 = \frac{d\lg M}{dt} + \frac{\partial A}{\partial x'} + \frac{\partial B}{\partial y'} + \frac{\partial C}{\partial z'}$$

oder, wenn man für A, B, C ihre Werthe setzt,

$$\begin{aligned} \frac{d\lg M}{dt} &= f\left\{\frac{\partial(v^{n-1}x')}{\partial x'} + \frac{\partial(v^{n-1}y')}{\partial y'} + \frac{\partial(v^{n-1}z')}{\partial z'}\right\} \\ &= f\left\{3v^{n-1} + (n-1)v^{n-2}\left(x'\frac{\partial v}{\partial x'} + y'\frac{\partial v}{\partial y'} + z'\frac{\partial v}{\partial z'}\right)\right\}. \end{aligned}$$

Aber es ist

$$\frac{\partial v}{\partial x'} = \frac{x'}{v}, \quad \frac{\partial v}{\partial y'} = \frac{y'}{v}, \quad \frac{\partial v}{\partial z'} = \frac{z'}{v},$$

also

$$x'\frac{\partial v}{\partial x'} + y'\frac{\partial v}{\partial y'} + z'\frac{\partial v}{\partial z'} = \frac{x'^2 + y'^2 + z'^2}{v} = v,$$

und somit

$$(2.) \qquad \frac{d \lg M}{dt} = (n+2) f . v^{n-1}.$$

Für $n = -2$ hätte man demnach $M = \text{Const.}$: dies ist aber ein Fall, der in der Natur nicht vorkommen kann, denn sonst müsste der Widerstand desto geringer sein, je schneller der Planet sich bewegte. Wir wollen also untersuchen, ob, auch ohne diese Annahme für n, v^{n-1} sich in einen vollständigen Differentialquotienten verwandeln lässt. Der Satz der lebendigen Kraft und die Flächensätze gelten für dieses Problem nicht mehr; untersuchen wir indess, welche Form die ihnen entsprechenden Gleichungen hier annehmen. Um die dem Satz der lebendigen Kraft analoge Gleichung zu erhalten, muss man die drei Gleichungen (1.) respective mit x', y', z' multipliciren und addiren; dann ergiebt sich

$$x' \frac{d^2 x}{dt^2} + y' \frac{d^2 y}{dt^2} + z' \frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{k^2}{r^3}(xx' + yy' + zz') - f v^{n-1}(x'^2 + y'^2 + z'^2).$$

Nun ist

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = v^2, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

$$x' \frac{d^2 x}{dt^2} + y' \frac{d^2 y}{dt^2} + z' \frac{d^2 z}{dt^2} = v \frac{dv}{dt}, \qquad xx' + yy' + zz' = r \frac{dr}{dt},$$

also

$$v \frac{dv}{dt} = -\frac{k^2}{r^2} \frac{dr}{dt} - f v^{n+1},$$

oder

$$\frac{1}{2} \frac{d(v^2)}{dt} = k^2 \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dt} - f v^{n+1}$$

und

$$f \int v^{n+1} dt = -\tfrac{1}{2} v^2 + k^2 \frac{1}{r}.$$

Dies ist zwar auch ein merkwürdiges Resultat; aber wir brauchen nicht $\int v^{n+1} dt$, sondern $\int v^{n-1} dt$.

Um die den Flächensätzen entsprechenden Gleichungen zu erhalten, haben wir aus den Gleichungen (1.) die Grössen $y \frac{d^2 z}{dt^2} - z \frac{d^2 y}{dt^2}$, $z \frac{d^2 x}{dt^2} - x \frac{d^2 z}{dt^2}$, $x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2}$ zu bilden: dann ergiebt sich

$$y \frac{d^2 z}{dt^2} - z \frac{d^2 y}{dt^2} = -f . v^{n-1}(yz' - zy'),$$

$$z \frac{d^2 x}{dt^2} - x \frac{d^2 z}{dt^2} = -f . v^{n-1}(zx' - xz'),$$

$$x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} = -f . v^{n-1}(xy' - yx');$$

und durch Integration

$$(3.)\quad -f.\int r^{n-1}dt = \lg(yz'-zy')-\lg\alpha = \lg(zx'-xz')-\lg\beta = \lg(xy'-yx')-\lg\gamma,$$

wo $\lg\alpha$, $\lg\beta$, $\lg\gamma$ die willkürlichen Constanten der Integration sind. Man erhält also hieraus erstens das gesuchte Integral $\int v^{n-1}dt$ und zweitens zwei Integralgleichungen, nämlich

$$(4.)\quad \frac{yz'-zy'}{\alpha} = \frac{zx'-xz'}{\beta} = \frac{xy'-yx'}{\gamma},$$

welche aussagen, dass die Grössen $yz'-zy'$, $zx'-xz'$, $xy'-yx'$ in constantem Verhältniss stehen, ein Ergebniss, welches sich hätte voraussehen lassen. Denn da der Planet in einem widerstehenden Mittel nicht aufhören kann sich in einer Ebene zu bewegen, so müssen die in Rede stehenden Grössen, welche mit dt multiplicirt die Projectionen des von dem heliocentrischen Radiusvector beschriebenen Flächenelements darstellen, sich nach einem bekannten Satz wie die Cosinus der Winkel verhalten, welche die Normale der Planetenbahn mit den drei Coordinatenaxen bildet.

Nach den Gleichungen (2.) und (3.) haben wir

$$\lg M = (n+2)f.\int r^{n-1}dt = -(n+2)\lg\left(\frac{xy'-yx'}{\gamma}\right),$$

also

$$M = \frac{\gamma^{n+2}}{(xy'-yx')^{n+2}},$$

oder, mit Fortlassung der Constante γ^{n+2},

$$M = \frac{1}{(xy'-yx')^{n+2}}.$$

Wir können somit in der That das Princip des letzten Multiplicators auf diese Aufgabe anwenden. Das vorgelegte System (1.) ist sechster Ordnung, und führt nach Elimination von t auf ein reducirtes System fünfter Ordnung. Indessen können wir, da die Bewegung in einer Ebene vor sich geht, die eine Coordinatenebene, z. B. die der xy, mit der Ebene der Bahn zusammenfallen lassen; dann ist $z = 0$ zu setzen, die letzte Gleichung (1.) fällt fort, es bleibt ein System vierter Ordnung und, nach Elimination von t, ein reducirtes System dritter Ordnung übrig. Von diesem letzteren ist uns aber kein einziges Integral gegeben, denn von den drei Gleichungen, welche an die Stelle der Flächensätze treten, existirt jetzt nur eine, und diese ist keine Integralgleichung, sie liefert nur für $\int r^{n-1}dt$ den dritten in (3.) gegebenen Ausdruck. Hat man nun von dem in Rede stehenden System dritter Ordnung zwei Integrale mit den beiden willkürlichen Constanten α_1, α_2 gefunden, so dass x' und y' als Functionen von x und y dargestellt werden können, und bleibt demnach nur noch die Differentialgleichung erster Ordnung

$$x'dy - y'dx = 0$$

zu integriren übrig, so ist ihr Multiplicator

$$\frac{\frac{\partial x'}{\partial \alpha_1}\frac{\partial y'}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial x'}{\partial \alpha_2}\frac{\partial y'}{\partial \alpha_1}}{(xy'-yx')^{n+2}}.$$

Als zweites Beispiel der Anwendung des letzten Multiplicators wollen wir ein solches nehmen, bei welchem wir nicht den Multiplicator einer unbekannten Differentialgleichung erhalten, sondern alle Integrationen vollkommen durchführen können, nämlich die Bewegung eines Planeten um die Sonne in einem nicht widerstehenden Mittel. Man überzeugt sich leicht, dass die Bewegung in einer Ebene vor sich gehen muss, und dass man daher nur ein System vierter oder, nach Elimination von t, dritter Ordnung erhält. Hiervon geben die Principe der lebendigen Kraft und der Flächen zwei Integrale und das Princip des letzten Multiplicators das dritte. Diese Aufgabe muss sich also, wie man a priori einsieht, vollständig integriren lassen. Das zu integrirende System von Differentialgleichungen ist, wie wir schon oben gesehen haben,

$$(5.)\qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -k^2\frac{x}{r^3}, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -k^2\frac{y}{r^3},$$

wo k^2 die Anziehung der Sonne in der Einheit der Entfernung darstellt. Die beiden Integrale, welche das Princip der lebendigen Kraft und der Flächen liefern, seien

$$f_1 = \alpha, \quad f_2 = \beta,$$

wo f_1 und f_2 Functionen von x, y, x' und y' sind: dann findet man für die zwischen x und y übrig bleibende Differentialgleichung als letzten Multiplicator den Ausdruck

$$M\left(\frac{\partial x'}{\partial \alpha}\frac{\partial y'}{\partial \beta} - \frac{\partial x'}{\partial \beta}\frac{\partial y'}{\partial \alpha}\right) = \frac{M}{\frac{\partial f_1}{\partial x'}\frac{\partial f_2}{\partial y'} - \frac{\partial f_1}{\partial y'}\frac{\partial f_2}{\partial x'}},$$

wo M der Multiplicator des Systems (5.) ist. Aber da wir es hier mit einer ganz freien Bewegung zu thun haben, so ist nach der vorigen Vorlesung $M = \text{Const.}$; man kann also $M = 1$ setzen und erhält als letzten Multiplicator

$$(6.)\qquad \frac{1}{\frac{\partial f_1}{\partial x'}\frac{\partial f_2}{\partial y'}-\frac{\partial f_1}{\partial y'}\frac{\partial f_2}{\partial x'}}.$$

Denken wir uns mittelst der Gleichungen $f_1=\alpha$ und $f_2=\beta$ die Grössen x' und y' durch x und y ausgedrückt und in die Differentialgleichung

$$(7.)\qquad x'dy-y'dx = 0$$

eingesetzt, so ist dies die Gleichung, deren Multiplicator (6.) sein muss. Wir wollen dies durch Ausführung der Rechnung nachweisen.

Indem wir die Gleichungen (5.) respective mit x' und y' multipliciren und dann addiren, erhalten wir den Satz der lebendigen Kraft, nämlich zunächst

$$x'\frac{d^2x}{dt^2}+y'\frac{d^2y}{dt^2} = -k^2\frac{xx'+yy'}{r^3} = -k^2\frac{r'}{r^2}$$

und durch Integration

$$(8.)\qquad \tfrac{1}{2}(x'^2+y'^2) = \frac{k^2}{r}+\alpha.$$

Das Princip der Flächen erhält man, indem man aus der Gleichung

$$x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

durch Integration

$$(9.)\qquad xy'-yx' = \beta$$

herleitet. Unsere beiden Integrale sind also

$$f_1=\tfrac{1}{2}(x'^2+y'^2)-\frac{k^2}{r}=\alpha,\quad f_2=xy'-yx'=\beta.$$

Hieraus ergiebt sich:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x'}=x',\quad \frac{\partial f_2}{\partial x'}=-y,$$
$$\frac{\partial f_1}{\partial y'}=y',\quad \frac{\partial f_2}{\partial y'}=x;$$

also wird nach (6.) der Multiplicator von (7.)

$$\frac{1}{\frac{\partial f_1}{\partial x'}\frac{\partial f_2}{\partial y'}-\frac{\partial f_1}{\partial y'}\frac{\partial f_2}{\partial x'}}=\frac{1}{xx'+yy'},$$

d. h. der Ausdruck

$$(10.)\qquad \frac{x'dy-y'dx}{xx'+yy'}$$

wird ein vollständiges Differential. Dies haben wir zu beweisen, indem wir

x' und y' aus den Gleichungen (8.) und (9.) bestimmen. Setzen wir zur Abkürzung

$$\frac{k^2}{r}+\alpha = \lambda,$$

so haben wir zur Bestimmung von x' und y' die Gleichungen

$$x'^2+y'^2 = 2\lambda, \quad xy'-yx' = \beta.$$

Die zweite dieser Gleichungen ist schon linear in Beziehung auf x' und y', es kommt also nur darauf an, eine zweite ebenfalls lineare herzuleiten. Dies kann man am besten durch die bekannte identische Formel

$$(x'^2+y'^2)(x^2+y^2) = (xx'+yy')^2+(xy'-yx')^2.$$

Setzt man in derselben für $x'^2+y'^2$ und $xy'-yx'$ ihre Werthe ein, so erhält man

$$2\lambda r^2 = (xx'+yy')^2+\beta^2,$$

$$xx'+yy' = \sqrt{2\lambda r^2-\beta^2}.$$

Man hat also die Gleichungen

$$yy'+xx' = \sqrt{2\lambda r^2-\beta^2},$$

$$xy'-yx' = \beta,$$

und hieraus ergiebt sich

$$r^2 y' = \beta x+y\sqrt{2\lambda r^2-\beta^2}, \quad r^2 x' = -\beta y+x\sqrt{2\lambda r^2-\beta^2}.$$

Dividirt man beide Gleichungen durch

$$r^2(yy'+xx') = r^2\sqrt{2\lambda r^2-\beta^2},$$

so erhält man

$$\frac{y'}{xx'+yy'} = \frac{\beta x}{r^2\sqrt{2\lambda r^2-\beta^2}}+\frac{y}{r^2}, \quad \frac{x'}{xx'+yy'} = -\frac{\beta y}{r^2\sqrt{2\lambda r^2-\beta^2}}+\frac{x}{r^2},$$

und wenn man diese Werthe in (10.) einsetzt,

$$\frac{x'dy-y'dx}{xx'+yy'} = -\frac{\beta(xdx+ydy)}{r^2\sqrt{2\lambda r^2-\beta^2}}+\frac{xdy-ydx}{r^2}.$$

Nun ist $xdx+ydy = rdr$, ferner, wenn wir für λ seinen Werth einsetzen,

$$\sqrt{2\lambda r^2-\beta^2} = \sqrt{2\alpha r^2+2k^2 r-\beta^2} = \sqrt{R},$$

wo R eine blosse Function von r ist; also wird

$$\frac{x'dy-y'dx}{xx'+yy'} = -\frac{\beta}{\sqrt{R}}\cdot\frac{dr}{r}+\frac{xdy-ydx}{r^2}.$$

Der erste Term auf der rechten Seite ist ein vollständiges Differential, denn er ist gleich dr multiplicirt in eine Function von r. Der zweite Term hat die bereits in der fünften Vorlesung p. 33 erwähnte Form eines Products von $xdy - ydx$ in eine homogene Function -2^{ter} Ordnung von x und y, welches sich immer als Product einer Function des Quotienten $\frac{y}{x}$ in dessen Differential darstellen lässt und daher ein vollständiges Differential ist. In dem vorliegenden Fall hat man

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{r^2} = \frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = d\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}.$$

Der Ausdruck $\frac{x'dy - y'dx}{xx' + yy'}$ ist also ein vollständiges Differential, was zu beweisen war.

Wir wollen jetzt zu den Differentialgleichungen der Bewegung eines nicht freien Systems übergehen.

Siebzehnte Vorlesung.

Der Multiplicator für die Bewegungsgleichungen unfreier Systeme in der ersten *Lagrange*schen Form.

Wir haben in der siebenten Vorlesung p. 54 gezeigt, dass die Differentialgleichungen eines Systems, welches durch die Bedingungsgleichungen

$$\varphi = 0, \quad \psi = 0, \quad \varpi = 0, \quad \ldots$$

gebunden ist, auf folgende Form gebracht werden können:

$$\begin{aligned}
m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} &= X_i + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial \varpi}{\partial x_i} + \cdots, \\
m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} &= Y_i + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial y_i} + \nu \frac{\partial \varpi}{\partial y_i} + \cdots, \\
m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} &= Z_i + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z_i} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial z_i} + \nu \frac{\partial \varpi}{\partial z_i} + \cdots,
\end{aligned}$$

wo die Multiplicatoren λ, μ, ν, ..., wie ebendaselbst bemerkt ist, durch zweimalige Differentiation der Gleichungen $\varphi = 0$, $\psi = 0$, $\varpi = 0$, ... zu bestimmen sind. Wenn man diese Bestimmung von λ, μ, ν, ... ausführt, so findet man, wie wir sogleich zeigen werden, dass diese Grössen von x', y', z' nicht unabhängig werden; daher kann man hier den Multiplicator M nicht gleich 1 setzen, sondern muss zu dessen Bestimmung auf die Gleichung (4.) der fünf-zehnten Vorlesung p. 120 zurückgehen. Nach derselben wird für das System von Differentialgleichungen

$$\frac{d^m x}{dt^m} = A, \quad \frac{d^n y}{dt^n} = B, \quad \frac{d^p z}{dt^p} = C, \quad \dots$$

der Multiplicator M durch die Gleichung

$$0 = \frac{d \lg M}{dt} + \frac{\partial A}{\partial x^{(m-1)}} + \frac{\partial B}{\partial y^{(n-1)}} + \frac{\partial C}{\partial z^{(p-1)}} + \cdots$$

definirt. Hieraus ergiebt sich für den vorliegenden Fall

$$\begin{aligned} -\frac{d \lg M}{dt} &= \sum_i \frac{1}{m_i}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\frac{\partial \lambda}{\partial x_i'} + \frac{\partial \varphi}{\partial y_i}\frac{\partial \lambda}{\partial y_i'} + \frac{\partial \varphi}{\partial z_i}\frac{\partial \lambda}{\partial z_i'}\right) \\ &+ \sum_i \frac{1}{m_i}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\frac{\partial \mu}{\partial x_i'} + \frac{\partial \psi}{\partial y_i}\frac{\partial \mu}{\partial y_i'} + \frac{\partial \psi}{\partial z_i}\frac{\partial \mu}{\partial z_i'}\right) \\ &+ \dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

wo auf der rechten Seite jedem der Multiplicatoren λ, μ, ... eine Summe entspricht. Für die Anwendung der Theorie des Multiplicators M ist es nöthig, dass die rechte Seite dieser Gleichung ein vollständiger Differentialquotient wird. Um zu untersuchen, ob dies der Fall ist, müssen die Werthe von λ, μ, ν, ... oder wenigstens diejenigen ihrer nach den Grössen x_i', y_i', z_i' genommenen Differentialquotienten ermittelt werden. Zur Bestimmung dieser Werthe differentiire man eine der Bedingungsgleichungen, z. B. $\varphi = 0$, zweimal hinter einander nach t. Die erste Differentiation giebt

$$\Sigma\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} x_i' + \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} y_i' + \frac{\partial \varphi}{\partial z_i} z_i'\right) = 0,$$

die zweite Differentiation führt zu der Gleichung

$$\Sigma\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} x_i'' + \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} y_i'' + \frac{\partial \varphi}{\partial z_i} z_i''\right) + u = 0,$$

wo u den Theil des Resultats darstellt, welcher aus der Differentiation der Factoren $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y_i}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial z_i}$ hervorgeht und eine homogene Function zweiter Ordnung der $3n$ Grössen x_i', y_i', z_i' ist. Bezeichnet man durch die Reihe p_1, p_2, ... p_{3n} den Complex aller $3n$ Coordinaten x_i, y_i, z_i, so kann man der Function u die Gestalt geben:

$$u = \Sigma \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p_i^2} p_i'^2 + 2 \Sigma \Sigma \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p_i \partial p_k} p_i' p_k',$$

wo die letzte Summe nur auf von einander verschiedene Werthe von i und k

auszudehnen ist. Auf dieselbe Weise leitet man aus den anderen Bedingungsgleichungen durch zweimalige Differentiation die Gleichungen

$$\Sigma\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_i}x_i''+\frac{\partial\psi}{\partial y_i}y_i''+\frac{\partial\psi}{\partial z_i}z_i''\right)+v = 0.$$

$$\Sigma\left(\frac{\partial\varpi}{\partial x_i}x_i''+\frac{\partial\varpi}{\partial y_i}y_i''+\frac{\partial\varpi}{\partial z_i}z_i''\right)+w = 0.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ab, wo nach der oben eingeführten Bezeichnung der Coordinaten die Functionen v, w, ... die Werthe

$$v = \Sigma\frac{\partial^2\psi}{\partial p_i^2}p_i'^2+2\Sigma\Sigma\frac{\partial^2\psi}{\partial p_i\partial p_k}p_i'p_k',$$

$$w = \Sigma\frac{\partial^2\varpi}{\partial p_i^2}p_i'^2+2\Sigma\Sigma\frac{\partial^2\varpi}{\partial p_i\partial p_k}p_i'p_k',$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

haben. Um nun λ, μ, ν, ... zu erhalten, hat man in diese Gleichungen die Werthe von x_i'', y_i'', z_i'' aus dem vorgelegten System einzusetzen. So ergiebt die durch zweimalige Differentiation aus φ hergeleitete Gleichung:

$$\left.\begin{aligned}
&u+\Sigma\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\cdot\frac{1}{m_i}\left\{X_i+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}+\mu\frac{\partial\psi}{\partial x_i}+\nu\frac{\partial\varpi}{\partial x_i}+\cdots\right\}\\
&+\Sigma\frac{\partial\varphi}{\partial y_i}\cdot\frac{1}{m_i}\left\{Y_i+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y_i}+\mu\frac{\partial\psi}{\partial y_i}+\nu\frac{\partial\varpi}{\partial y_i}+\cdots\right\}\\
&+\Sigma\frac{\partial\varphi}{\partial z_i}\cdot\frac{1}{m_i}\left\{Z_i+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial z_i}+\mu\frac{\partial\psi}{\partial z_i}+\nu\frac{\partial\varpi}{\partial z_i}+\cdots\right\}
\end{aligned}\right\} = 0,$$

oder wenn man

$$a = \Sigma\frac{1}{m_i}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}+\frac{\partial\varphi}{\partial y_i}\frac{\partial\varphi}{\partial y_i}+\frac{\partial\varphi}{\partial z_i}\frac{\partial\varphi}{\partial z_i}\right),$$

$$b = \Sigma\frac{1}{m_i}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}+\frac{\partial\varphi}{\partial y_i}\frac{\partial\psi}{\partial y_i}+\frac{\partial\varphi}{\partial z_i}\frac{\partial\psi}{\partial z_i}\right),$$

$$c = \Sigma\frac{1}{m_i}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial\varpi}{\partial x_i}+\frac{\partial\varphi}{\partial y_i}\frac{\partial\varpi}{\partial y_i}+\frac{\partial\varphi}{\partial z_i}\frac{\partial\varpi}{\partial z_i}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$u_1 = u+\Sigma\frac{1}{m_i}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}X_i+\frac{\partial\varphi}{\partial y_i}Y_i+\frac{\partial\varphi}{\partial z_i}Z_i\right)$$

setzt,

$$u_1 + a\lambda + b\mu + c\nu + \cdots = 0.$$

Eine solche lineare Gleichung zwischen den Grössen λ, μ, ν, ... erhält man für jede einzelne der Bedingungsgleichungen $\varphi = 0$, $\psi = 0$, $\varpi = 0$ .... Führt man allgemein, wie in der siebenten Vorlesung p. 56, die Bezeichnung

$$(F, \Phi) = \Sigma \frac{1}{m_i}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial y_i}\frac{\partial \Phi}{\partial y_i} + \frac{\partial F}{\partial z_i}\frac{\partial \Phi}{\partial z_i}\right),$$

ein, so dass

$$(F, \Phi) = (\Phi, F)$$

wird, und setzt

$$\begin{array}{llll} a = (\varphi, \varphi), & b = (\varphi, \psi), & c = (\varphi, \varpi), & \ldots \\ a' = (\psi, \varphi), & b' = (\psi, \psi), & c' = (\psi, \varpi), & \ldots \\ a'' = (\varpi, \varphi), & b'' = (\varpi, \psi), & c'' = (\varpi, \varpi), & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

so dass zwischen diesen Grössen die Gleichungen

$$a' = b, \quad a'' = c, \quad b'' = c', \quad \ldots$$

bestehen, setzt man ferner

$$u_1 = u + \Sigma \frac{1}{m_i}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} X_i + \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} Y_i + \frac{\partial \varphi}{\partial z_i} Z_i\right),$$

$$v_1 = v + \Sigma \frac{1}{m_i}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i} X_i + \frac{\partial \psi}{\partial y_i} Y_i + \frac{\partial \psi}{\partial z_i} Z_i\right),$$

$$w_1 = w + \Sigma \frac{1}{m_i}\left(\frac{\partial \varpi}{\partial x_i} X_i + \frac{\partial \varpi}{\partial y_i} Y_i + \frac{\partial \varpi}{\partial z_i} Z_i\right),$$

$$\ldots \ldots \ldots$$

so hat man zur Bestimmung von λ, μ, ν ... die Gleichungen

$$\begin{aligned} u_1 + a\,\lambda + b\,\mu + c\,\nu + \cdots &= 0, \\ v_1 + a'\lambda + b'\mu + c'\nu + \cdots &= 0, \\ w_1 + a''\lambda + b''\mu + c''\nu + \cdots &= 0, \\ \ldots \ldots \ldots \end{aligned}$$

Anstatt dieselben nach λ, μ, ν ... aufzulösen und aus den so gefundenen Werthen durch Differentiation $\frac{\partial \lambda}{\partial x_i'}$, $\frac{\partial \mu}{\partial x_i'}$, ... abzuleiten, differentiire man vielmehr unmittelbar die vorgelegten linearen Gleichungen partiell, was die Rechnung bedeutend vereinfacht. Die Grössen a, b, c, ... a', b', c', ... enthalten nämlich die Differentialquotienten x_i', y_i', z_i' gar nicht und sind daher bei dieser Differentiation als constant anzusehen; ferner sind die Grössen

$u_1, v_1, w_1, \ldots$ respective von $u, v, w, \ldots$ nur um Ausdrücke verschieden, die ebenfalls die Differentialquotienten x'_i, y'_i, z'_i nicht enthalten, daher ist $\frac{\partial u_1}{\partial x'_i} = \frac{\partial u}{\partial x'_i}, \frac{\partial v_1}{\partial x'_i} = \frac{\partial v}{\partial x'_i}$ u. s. w., und somit erhält man:

$$\frac{\partial u}{\partial x'_i} + a\frac{\partial \lambda}{\partial x'_i} + b\frac{\partial \mu}{\partial x'_i} + c\frac{\partial \nu}{\partial x'_i} + \cdots = 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x'_i} + a'\frac{\partial \lambda}{\partial x'_i} + b'\frac{\partial \mu}{\partial x'_i} + c'\frac{\partial \nu}{\partial x'_i} + \cdots = 0,$$

$$\frac{\partial w}{\partial x'_i} + a''\frac{\partial \lambda}{\partial x'_i} + b''\frac{\partial \mu}{\partial x'_i} + c''\frac{\partial \nu}{\partial x'_i} + \cdots = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Die Function u wurde durch die Gleichung

$$u = \Sigma\frac{\partial^2\varphi}{\partial p_i^2}p_i'^2 + 2\Sigma\Sigma\frac{\partial^2\varphi}{\partial p_i \partial p_k}p'_i p'_k$$

definirt, wo die Grössen p die $3n$ Coordinaten x_i, y_i, z_i bedeuten und in der zweiten Summe rechter Hand i von k verschieden ist. Durch Differentiation nach p_i ergiebt sich

$$\frac{\partial u}{\partial p'_i} = 2\sum_{k=1}^{k=3n}\frac{\partial^2\varphi}{\partial p_i \partial p_k}p'_k,$$

oder indem wir für p_i wiederum x_i und für die Grössen p_k die Grössen x_k, y_k, z_k setzen

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = 2\sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_k}x'_k + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial y_k}y'_k + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial z_k}z'_k\right).$$

Die Summe rechts ist aber der vollständige Differentialquotient von $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$ nach t, also hat man

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = 2\frac{d\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}}{dt},$$

und in dieser Gleichung kann man, wie sich von selbst versteht, y oder z für x schreiben, ferner $v, w \ldots$ für u, wenn man zugleich $\psi, \varpi, \ldots$ für φ setzt. Man erhält also:

$$\frac{\partial u}{\partial x'_i} = 2\frac{d\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}}{dt}, \quad \frac{\partial v}{\partial x'_i} = 2\frac{d\frac{\partial\psi}{\partial x_i}}{dt}, \quad \frac{\partial w}{\partial x'_i} = 2\frac{d\frac{\partial\varpi}{\partial x_i}}{dt}, \quad \ldots$$

und ähnliche Gleichungen für die nach y'_i, z'_i genommenen partiellen Differentialquotienten. Hierdurch verwandeln sich die obigen linearen Gleichungen für die Grössen $\frac{\partial\lambda}{\partial x'_i}, \frac{\partial\mu}{\partial x'_i}, \frac{\partial\nu}{\partial x'_i} \cdots$ in die folgenden:

$$2\frac{d\frac{\partial\varphi}{\partial x_\iota}}{dt}+a\,\frac{\partial\lambda}{\partial x'_\iota}+b\,\frac{\partial\mu}{\partial x'_\iota}+c\,\frac{\partial\nu}{\partial x'_\iota}+\cdots = 0,$$

$$2\frac{d\frac{\partial\psi}{\partial x_\iota}}{dt}+a'\,\frac{\partial\lambda}{\partial x'_\iota}+b'\,\frac{\partial\mu}{\partial x'_\iota}+c'\,\frac{\partial\nu}{\partial x'_\iota}+\cdots = 0,$$

$$2\frac{d\frac{\partial\varpi}{\partial x_\iota}}{dt}+a''\,\frac{\partial\lambda}{\partial x'_\iota}+b''\,\frac{\partial\mu}{\partial x'_\iota}+c''\,\frac{\partial\nu}{\partial x'_\iota}+\cdots = 0.$$

. . . .

Um diese linearen Gleichungen aufzulösen, muss man bekanntlich die Determinante der Grössen

$$\begin{matrix} a, & b, & c, & \ldots \\ a', & b', & c', & \ldots \\ a'', & b'', & c'', & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\,, \end{matrix}$$

also, in abgekürzter Bezeichnung, die Determinante

$$R = \Sigma \pm a\,b'\,c''\ldots$$

bilden; dann hat man, um $\frac{\partial\lambda}{\partial x'_\iota}$ zu bestimmen, die obigen Gleichungen mit $\frac{\partial R}{\partial a}$, $\frac{\partial R}{\partial a'}$, $\frac{\partial R}{\partial a''}$, ... zu multipliciren und erhält durch Addition:

$$0 = R\frac{\partial\lambda}{\partial x'_\iota}+2\frac{\partial R}{\partial a}\frac{d\frac{\partial\varphi}{\partial x_\iota}}{dt}+2\frac{\partial R}{\partial a'}\frac{d\frac{\partial\psi}{\partial x_\iota}}{dt}+2\frac{\partial R}{\partial a''}\frac{d\frac{\partial\varpi}{\partial x_\iota}}{dt}+\cdots.$$

Ebenso erhält man:

$$0 = R\frac{\partial\mu}{\partial x'_\iota}+2\frac{\partial R}{\partial b}\frac{d\frac{\partial\varphi}{\partial x_\iota}}{dt}+2\frac{\partial R}{\partial b'}\frac{d\frac{\partial\psi}{\partial x_\iota}}{dt}+2\frac{\partial R}{\partial b''}\frac{d\frac{\partial\varpi}{\partial x_\iota}}{dt}+\cdots$$

$$0 = R\frac{\partial\nu}{\partial x'_\iota}+2\frac{\partial R}{\partial c}\frac{d\frac{\partial\varphi}{\partial x_\iota}}{dt}+2\frac{\partial R}{\partial c'}\frac{d\frac{\partial\psi}{\partial x_\iota}}{dt}+2\frac{\partial R}{\partial c''}\frac{d\frac{\partial\varpi}{\partial x_\iota}}{dt}+\cdots,$$

. . . .

Aehnliche Gleichungen gelten für die nach y'_ι und z'_ι genommenen Differentialquotienten von λ, μ, ν, ... Die Werthe aller dieser Differentialquotienten sind in den oben gegebenen Ausdruck von $\frac{d\lg M}{dt}$ einzusetzen.

welchen man in folgender Art anordnen kann:

$$
\frac{d \lg M}{dt} = \left\{
\begin{aligned}
&-\Sigma \frac{1}{m_i}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\frac{\partial \lambda}{\partial x_i'} + \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\frac{\partial \mu}{\partial x_i'} + \frac{\partial \varpi}{\partial x_i}\frac{\partial \nu}{\partial x_i'} + \cdots\right)\\
&-\Sigma \frac{1}{m_i}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y_i}\frac{\partial \lambda}{\partial y_i'} + \frac{\partial \psi}{\partial y_i}\frac{\partial \mu}{\partial y_i'} + \frac{\partial \varpi}{\partial y_i}\frac{\partial \nu}{\partial y_i'} + \cdots\right)\\
&-\Sigma \frac{1}{m_i}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z_i}\frac{\partial \lambda}{\partial z_i'} + \frac{\partial \psi}{\partial z_i}\frac{\partial \mu}{\partial z_i'} + \frac{\partial \varpi}{\partial z_i}\frac{\partial \nu}{\partial z_i'} + \cdots\right).
\end{aligned}\right.
$$

Dann erhält man für das Product von R in die erste der drei Summen rechter Hand das Ergebniss

$$
\begin{aligned}
&-R\,\Sigma \frac{1}{m_i}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\frac{\partial \lambda}{\partial x_i'} + \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\frac{\partial \mu}{\partial x_i'} + \frac{\partial \varpi}{\partial x_i}\frac{\partial \nu}{\partial x_i'} + \cdots\right)\\
&= 2\frac{\partial R}{\partial a}\Sigma \frac{1}{m_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\frac{d\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}}{dt} + 2\frac{\partial R}{\partial a'}\Sigma \frac{1}{m_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\frac{d\frac{\partial \psi}{\partial x_i}}{dt} + 2\frac{\partial R}{\partial a''}\Sigma \frac{1}{m_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\frac{d\frac{\partial \varpi}{\partial x_i}}{dt} + \cdots\\
&+ 2\frac{\partial R}{\partial b}\Sigma \frac{1}{m_i}\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\frac{d\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}}{dt} + 2\frac{\partial R}{\partial b'}\Sigma \frac{1}{m_i}\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\frac{d\frac{\partial \psi}{\partial x_i}}{dt} + 2\frac{\partial R}{\partial b''}\Sigma \frac{1}{m_i}\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\frac{d\frac{\partial \varpi}{\partial x_i}}{dt} + \cdots\\
&+ 2\frac{\partial R}{\partial c}\Sigma \frac{1}{m_i}\frac{\partial \varpi}{\partial x_i}\frac{d\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}}{dt} + 2\frac{\partial R}{\partial c'}\Sigma \frac{1}{m_i}\frac{\partial \varpi}{\partial x_i}\frac{d\frac{\partial \psi}{\partial x_i}}{dt} + 2\frac{\partial R}{\partial c''}\Sigma \frac{1}{m_i}\frac{\partial \varpi}{\partial x_i}\frac{d\frac{\partial \varpi}{\partial x_i}}{dt} + \cdots.\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Die Elemente der Determinante R stehen aber, wie wir gesehen haben, in den Beziehungen zu einander, dass

$$
b = a', \quad c = a'', \quad c' = b'', \quad \ldots,
$$

und nach einem bekannten Satz über die Auflösung linearer Gleichungen folgen hieraus die Relationen

$$
\frac{\partial R}{\partial b} = \frac{\partial R}{\partial a'}, \quad \frac{\partial R}{\partial c} = \frac{\partial R}{\partial a''}, \quad \frac{\partial R}{\partial c'} = \frac{\partial R}{\partial b''}, \quad \ldots .
$$

Mit Berücksichtigung hievon kann man der rechten Seite obiger Gleichung auch die Gestalt

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial R}{\partial a}\Sigma \frac{1}{m_i}\frac{d}{dt}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} &+ 2\frac{\partial R}{\partial a'}\Sigma \frac{1}{m_i}\frac{d}{dt}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\frac{\partial \psi}{\partial x_i} + 2\frac{\partial R}{\partial a''}\Sigma \frac{1}{m_i}\frac{d}{dt}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\frac{\partial \varpi}{\partial x_i} + \cdots\\
&+ \frac{\partial R}{\partial b'}\Sigma \frac{1}{m_i}\frac{d}{dt}\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\frac{\partial \psi}{\partial x_i} + 2\frac{\partial R}{\partial b''}\Sigma \frac{1}{m_i}\frac{d}{dt}\frac{d\psi}{\partial x_i}\frac{\partial \varpi}{\partial x_i} + \cdots\\
&+ \frac{\partial R}{\partial c''}\Sigma \frac{1}{m_i}\frac{d}{dt}\frac{d\varpi}{dx_i}\frac{\partial \varpi}{\partial x_i} + \cdots
\end{aligned}
$$

geben, oder indem man wieder für $2\frac{\partial R}{\partial a'}$, $2\frac{\partial R}{\partial a''}$, $2\frac{\partial R}{\partial b''}$, ... respective $\frac{\partial R}{\partial a'}+\frac{\partial R}{\partial b}$, $\frac{\partial R}{\partial a''}+\frac{\partial R}{\partial c}$, $\frac{\partial R}{\partial b''}+\frac{\partial R}{\partial c'}$, ... schreibt, die folgende:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial R}{\partial a}\Sigma\frac{1}{m_i}\frac{d}{dt}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}+\frac{\partial R}{\partial a'}\Sigma\frac{1}{m_i}\frac{d}{dt}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}+\frac{\partial R}{\partial a''}\Sigma\frac{1}{m_i}\frac{d}{dt}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial\varpi}{\partial x_i}+\cdots\\
+&\frac{\partial R}{\partial b}\Sigma\frac{1}{m_i}\frac{d}{dt}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}+\frac{\partial R}{\partial b'}\Sigma\frac{1}{m_i}\frac{d}{dt}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}+\frac{\partial R}{\partial b''}\Sigma\frac{1}{m_i}\frac{d}{dt}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\frac{\partial\varpi}{\partial x_i}+\cdots\\
+&\frac{\partial R}{\partial c}\Sigma\frac{1}{m_i}\frac{d}{dt}\frac{\partial\varpi}{\partial x_i}\frac{d\varphi}{\partial x_i}+\frac{\partial R}{\partial c'}\Sigma\frac{1}{m_i}\frac{d}{dt}\frac{\partial\varpi}{\partial x_i}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}+\frac{\partial R}{\partial c''}\Sigma\frac{1}{m_i}\frac{d}{dt}\frac{\partial\varpi}{\partial x_i}\frac{\partial\varpi}{\partial x_i}+\cdots\\
+&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Setzt man die analogen Werthe für die beiden anderen in dem Ausdruck von $\frac{d\lg M}{dt}$ vorkommenden Summen und erinnert sich der Werthe von a, a', a'', ... b, b', b'', ... c, c', c'', ..., so erhält man

$$\begin{aligned}
R\frac{d\lg M}{dt} &= \frac{\partial R}{\partial a}\frac{da}{dt}+\frac{\partial R}{\partial a'}\frac{da'}{dt}+\frac{\partial R}{\partial a''}\frac{da''}{dt}+\cdots\\
&+\frac{\partial R}{\partial b}\frac{db}{dt}+\frac{\partial R}{\partial b'}\frac{db'}{dt}+\frac{\partial R}{\partial b''}\frac{db''}{dt}+\cdots\\
&+\frac{\partial R}{\partial c}\frac{dc}{dt}+\frac{\partial R}{\partial c'}\frac{dc'}{dt}+\frac{\partial R}{\partial c''}\frac{dc''}{dt}+\cdots\\
&+\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&= \frac{dR}{dt},
\end{aligned}$$

also

$$R\frac{d\lg M}{dt} = \frac{dR}{dt},$$

und mit Vernachlässigung eines constanten Factors

$$M = R.$$

Die eigenthümliche Form der Grössen a, a', a'', ... b, b', b'', ... c, c', c'', ... u. s. w. führt auch für deren Determinante R eine eigenthümliche Form mit sich. Wir haben oben

$$\begin{array}{llll}
a=(\varphi,\varphi), & a'=(\varphi,\psi), & a''=(\varphi,\varpi), & \ldots\\
b=(\psi,\varphi), & b'=(\psi,\psi), & b''=(\psi,\varpi), & \ldots\\
c=(\varpi,\varphi), & c'=(\varpi,\psi), & c''=(\varpi,\varpi), & \ldots\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

gesetzt, wo die in Klammern eingeschlossenen Grössen dem Ausdruck

$$(\varphi,\psi) = \Sigma\frac{1}{m_i}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}+\frac{\partial\varphi}{\partial y_i}\frac{\partial\psi}{\partial y_i}+\frac{\partial\varphi}{\partial z_i}\frac{\partial\psi}{\partial z_i}\right)$$

analog gebildet sind. Diese Summen lassen sich etwas einfacher darstellen, wenn, wie im Anfang dieser Vorlesung p. 133, alle $3n$ Coordinaten mit einem Buchstaben und angehängten $3n$ Indices bezeichnet werden. Führen wir statt der Coordinaten selbst denselben proportionale Grössen ein und setzen

$$\sqrt{m_\iota}\,.\,x_\iota = \xi_{3\iota-2}, \qquad \sqrt{m_\iota}\,.\,y_\iota = \xi_{3\iota-1}, \qquad \sqrt{m_\iota}\,.\,z_\iota = \xi_{3\iota},$$

so dass die $3n$ Grössen $\sqrt{m_\iota}\,.\,x_\iota$, $\sqrt{m_\iota}\,.\,y_\iota$, $\sqrt{m_\iota}\,.\,z_\iota$ mit den $3n$ Grössen $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{3n}$ identisch sind, so geht der Ausdruck (φ, ψ) in die Form

$$(\varphi, \psi) = \Sigma \frac{\partial\varphi}{\partial\xi_i} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\xi_i}$$

über, in welcher sich die Summation von $i = 1$ bis $i = 3n$ erstreckt. Determinanten, deren Elemente in der hier vorliegenden Art zusammengesetzt sind, lassen sich als Summen von Quadraten darstellen. (Siehe meine Abhandlung „de formatione et proprietatibus determinantium", *Crelles* Journal Bd. 22, p. 285.) Ist m die Anzahl der Functionen φ, ψ, ϖ, $\ldots$ ζ oder, was dasselbe ist, der für das mechanische Problem geltenden Bedingungsgleichungen, und bildet man alle möglichen Determinanten der Form

$$\Sigma \pm \frac{\partial\varphi}{\partial\xi_i} \frac{\partial\psi}{\partial\xi_{i'}} \frac{\partial\varpi}{\partial\xi_{i''}} \cdots \frac{\partial\zeta}{\partial\xi_{i^{(m-1)}}},$$

wo i, i', i'', $\ldots$ $i^{(m-1)}$ je m verschiedene Zahlen aus der Reihe $1, 2, \ldots 3n$ bedeuten, so ist die Summe der Quadrate dieser Determinanten gleich R, ein Satz, der zuerst von *Cauchy* *) bekannt gemacht worden ist, und von welchem ich in der oben angeführten Abhandlung eine schöne Anwendung auf die Methode der kleinsten Quadrate gemacht habe. Für den Fall, wo ein Punkt sich auf einer gegebenen Oberfläche bewegt, ist die Gleichung dieser Oberfläche, $\varphi = 0$, die einzige Bedingung; daher reduciren sich die partiellen Determinanten, aus deren Quadraten R zusammengesetzt werden kann, auf $\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_1} = \frac{1}{\sqrt{m_1}} \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_2} = \frac{1}{\sqrt{m_1}} \frac{\partial\varphi}{\partial y_1}$ und $\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_3} = \frac{1}{\sqrt{m_1}} \frac{\partial\varphi}{\partial z_1}$, so dass

$$R = \frac{1}{m_1} \left\{ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z_1}\right)^2 \right\}$$

wird. Der Fall $m = 3n$, der freilich in der Mechanik nicht vorkommt (da die Anzahl m der Bedingungsgleichungen höchstens gleich $3n-1$ sein kann), ist der einfachste in Beziehung auf den Determinantensatz; denn alsdann reducirt sich die Determinante R auf ein einziges Quadrat.

---

*) Journal de l'école polytechnique, cah. 17.

Durch die Gleichung

$$M = R = \Sigma \pm a b' c'' \ldots$$

haben wir für ein durch irgend welche Bedingungen gebundenes System und für die erste *Lagrange*sche Form der Differentialgleichungen den Multiplicator des Systems, mithin unter der Voraussetzung, dass alle Integrale bis auf eines bekannt seien, auch den letzten Multiplicator gefunden.

Achtzehnte Vorlesung.

Der Multiplicator für die Bewegungsgleichungen unfreier Systeme in der *Hamilton*schen Form.

Wir wollen jetzt den Multiplicator der Differentialgleichung eines unfreien Systems für die *Hamilton*sche Form der Differentialgleichungen aufsuchen. Es sei T die halbe lebendige Kraft, n die Anzahl der materiellen Punkte, m die Anzahl der Bedingungsgleichungen und bezeichnen wir, da neben i auch k als reihendes Element gebraucht werden soll, die Zahl $3n-m$ von jetzt an nicht mehr mit k, sondern mit μ. Wir dachten uns in der achten Vorlesung p. 62 die $3n$ Coordinaten als Functionen von $3n-m$ neuen Variablen q_1, $q_2, \ldots q_{3n-m}$ so dargestellt, dass die Ausdrücke der Coordinaten in die Bedingungsgleichungen substituirt diese identisch befriedigen, und erhielten dann T als homogene Function zweiter Ordnung der Grössen q'_i, deren Coefficienten die Grössen q_i enthalten können. Wir führten ferner die Grössen $p_i = \frac{\partial T}{\partial q'_i}$ an Stelle der q'_i ein und erhielten so in der neunten Vorlesung p. 71 zwischen den $2(3n-m)$ Variablen q_i und p_i die Differentialgleichungen der Bewegung in der auch für den Fall, wo keine Kräftefunction existirt, geltenden Gestalt

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial T}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial T}{\partial q_i} + Q_i,$$

wo

$$Q_i = \sum_{k=1}^{k=n} \left(X_k \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + Y_k \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + Z_k \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \right).$$

Diese Differentialgleichungen kann man auch so schreiben:

$$\begin{aligned} & dt : dq_1 : dq_2 : \ldots : dq_\mu : \quad dp_1 \quad : \ldots : \quad dp_\mu \\ = \; & 1 : \frac{\partial T}{\partial p_1} : \frac{\partial T}{\partial p_2} : \ldots : \frac{\partial T}{\partial p_\mu} : -\frac{\partial T}{\partial q_1} + Q_1 : \ldots : -\frac{\partial T}{\partial q_\mu} + Q_\mu . \end{aligned}$$

Wendet man auf dieses System die Theorie des Multiplicators an, so ergiebt sich

$$0 = \frac{d \lg M}{dt} + \Sigma \frac{\partial \frac{\partial T}{\partial p_i}}{\partial q_i} + \Sigma \frac{\partial\left(-\frac{\partial T}{\partial q_i} + Q_i\right)}{\partial p_i}.$$

Da nun X_i, Y_i, Z_i für die Probleme, welche wir betrachten, nur von den Coordinaten x_i, y_i, z_i abhängig sind und nicht von deren Differentialquotienten, so enthalten auch die Functionen Q_i nur die Variablen q_i und nicht deren Differentialquotienten und daher auch keine der Variablen p_i; also ist

$$\frac{\partial Q_i}{\partial p_i} = 0,$$

daher

$$-\frac{d \lg M}{dt} = \Sigma \frac{\partial^2 T}{\partial p_i \partial q_i} - \Sigma \frac{\partial^2 T}{\partial q_i \partial p_i} = 0,$$

$$M = \text{Const.}$$

Man kann also M gleich 1 setzen, so dass der Multiplicator hier denselben Werth hat, wie bei dem ganz freien System. Um den letzten Multiplicator für diesen Fall anzugeben, muss zunächst aus dem auf die $2\mu^{\text{te}}$ Ordnung steigenden System von Differentialgleichungen

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial T}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial T}{\partial q_i} + Q_i,$$

wo i die Werthe 1 bis μ durchläuft, t eliminirt werden, welches, wie wir voraussetzen, nicht explicite in den Grössen Q_i vorkommt. Kennt man von dem dadurch erhaltenen reducirten System $2\mu-1^{\text{ter}}$ Ordnung $2\mu-2$ Integralgleichungen

$$\varpi_1 = 0, \quad \varpi_2 = 0, \quad \ldots \quad \varpi_{2\mu-2} = 0$$

mit ebensoviel Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2\mu-2}$, so kann man vermöge derselben alle 2μ Variablen q und p durch zwei derselben, etwa q_1 und q_2 ausdrücken: alsdann behält man noch die Differentialgleichung

$$\frac{\partial T}{\partial p_1} dq_2 - \frac{\partial T}{\partial p_2} dq_1 = 0$$

zu integriren übrig, und ihr Multiplicator ist

$$\frac{\Sigma \pm \frac{\partial \varpi_1}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \varpi_2}{\partial \alpha_2} \cdots \frac{\partial \varpi_{2\mu-2}}{\partial \alpha_{2\mu-2}}}{\Sigma \pm \frac{\partial \varpi_1}{\partial q_3} \frac{\partial \varpi_2}{\partial q_4} \cdots \frac{\partial \varpi_{\mu-2}}{\partial q_\mu} \frac{\partial \varpi_{\mu-1}}{\partial p_1} \cdots \frac{\partial \varpi_{2\mu-2}}{\partial p_\mu}}.$$

Wenn die Kräfte X_ι, Y_ι, Z_ι die partiellen Differentialquotienten einer Function U sind, welche ausserdem noch t explicite enthalten kann, wenn also

$$X_\iota = \frac{\partial U}{\partial x_\iota}, \qquad Y_\iota = \frac{\partial U}{\partial y_\iota}, \qquad Z_\iota = \frac{\partial U}{\partial z_\iota},$$

so wird $Q_\iota = \frac{\partial U}{\partial q_\iota}$, und die Differentialgleichungen der Bewegung gehen, (siehe p. 71) wenn man

$$T - U = H$$

setzt, in die einfache Form

$$\frac{dq_\iota}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\iota}, \qquad \frac{dp_\iota}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_\iota}$$

über. An diese *Hamilton*sche Form der Differentialgleichungen werden die ferneren Untersuchungen anknüpfen, welche den Kern dieser Vorlesungen bilden, und zu welchen das Bisherige als Einleitung anzusehen ist.

Neunzehnte Vorlesung.

Die *Hamilton*sche partielle Differentialgleichung und ihre Ausdehnung auf die isoperimetrischen Probleme.

Die *Hamilton*sche Form der Differentialgleichungen der Bewegung wurde in der achten und neunten Vorlesung aus dem Princip hergeleitet, dass, wenn die Anfangs- und Endwerthe der Coordinaten gegeben sind, die Variation des Integrals $\int (T+U)\,dt$ verschwinden muss. Man kann dies Princip allgemeiner so aussprechen, dass es auch gilt, wenn nicht die Anfangs- und Endwerthe selbst gegeben sind, sondern andere für die Grenzen stattfindende Bedingungen. In diesem Fall ist nämlich nicht die ganze Variation des Integrals $\int (T+U)\,dt$ gleich Null zu setzen, sondern nur der unter dem Integralzeichen stehende Theil derselben; die Variation lässt sich alsdann ohne Integralzeichen ausdrücken, oder was dasselbe ausdrückt, die Variation von $T+U$ wird ein vollständiger Differentialquotient. Um dies klar zu machen, müssen wir auf die in der achten Vorlesung gegebene Herleitung zurückkommen.

Es sei T die halbe lebendige Kraft und U die Kräftefunction, welche ausser den Coordinaten auch t explicite enthalten kann; man denke sich die $3n$ Coordinaten als Functionen von $3n - m = \mu$ neuen Variablen q_1, q_2, ... q_μ

so dargestellt, dass die m Bedingungsgleichungen durch diese Ausdrücke identisch erfüllt werden; ferner sei

$$T+U = \varphi,$$

dann hat man, da φ Function der Grössen $q_1, \dots q_\mu$ und $q'_1, \dots q'_\mu$ ist,

$$\delta\varphi = \Sigma \frac{\partial\varphi}{\partial q_i}\delta q_i + \Sigma \frac{\partial\varphi}{\partial q'_i}\delta q'_i,$$

$$\delta\int\varphi\,dt = \int\delta\varphi\,dt = \int\left\{\Sigma\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}\delta q_i\right\}dt + \int\left\{\Sigma\frac{\partial\varphi}{\partial q'_i}\delta q'_i\right\}dt.$$

Es ist aber

$$\int\frac{\partial\varphi}{\partial q'_i}\delta q'_i\,dt = \int\frac{\partial\varphi}{\partial q'_i}\frac{d\delta q_i}{dt}dt = \frac{\partial\varphi}{\partial q'_i}\delta q_i - \int\frac{d\dfrac{\partial\varphi}{\partial q'_i}}{dt}\delta q_i\,dt,$$

also, wenn man zwischen der unteren Grenze τ und der oberen t integrirt und die der unteren Grenze τ entsprechenden Werthe durch einen oben angehängten Index 0 bezeichnet,

$$\int\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}\delta q'_i\,dt = \frac{\partial\varphi}{\partial q'_i}\delta q_i - \frac{\partial\varphi^0}{\partial q'_i}\delta q_i^0 - \int\frac{d\dfrac{\partial\varphi}{\partial q'_i}}{dt}\delta q_i\,dt.$$

Durch Einsetzung hiervon ergiebt sich

$$\delta\int\varphi\,dt = \Sigma\frac{\partial\varphi}{\partial q'_i}\delta q_i - \Sigma\frac{\partial\varphi^0}{\partial q'_i}\delta q_i^0 + \int\Sigma\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_i} - \frac{d\dfrac{\partial\varphi}{\partial q'_i}}{dt}\right)\delta q_i\,dt.$$

Nun ist, da q'_i in U nicht vorkommt,

$$(1.)\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial q'_i} = \frac{\partial T}{\partial q'_i} = p_i,$$

ferner verschwinden zufolge der Differentialgleichungen der Bewegung in der (p. 63 gegebenen) zweiten *Lagrange*schen Form die sämmtlichen auf der rechten Seite unter dem Integralzeichen stehenden Ausdrücke

$$\frac{\partial\varphi}{\partial q_i} - \frac{d\dfrac{\partial\varphi}{\partial q'_i}}{dt} = \frac{\partial(T+U)}{\partial q_i} - \frac{d\dfrac{\partial T}{\partial q'_i}}{dt};$$

daher bleibt für die gesuchte Variation allein der vom Integralzeichen freie Theil derselben übrig, und man hat

$$\delta\int\varphi\,dt = \Sigma\frac{\partial\varphi}{\partial q'_i}\delta q_i - \Sigma\frac{\partial\varphi^0}{\partial q'_i}\delta q_i^0 = \Sigma p_i\delta q_i - \Sigma p_i^0\delta q_i^0.$$

Nach der früheren Annahme waren die Anfangs- und Endwerthe der q gegeben, also $\delta q_i = 0$ und $\delta q_i^0 = 0$, und es verschwand demnach die rechte

Seite der letzten Gleichung; dies ist nach der gegenwärtigen allgemeineren Voraussetzung nicht der Fall. Um den Sinn, in welchem die Variationen genommen sind, richtig zu verstehen, muss man sich erinnern, dass der unter dem Integralzeichen stehende Theil der gesuchten Variation nur vermöge der Differentialgleichungen der Bewegung, welche als erfüllt angesehen werden, verschwindet. Die Grössen q_ι und q'_ι, sowie die Grössen p_ι müssen daher als gegebene Functionen von t und 2μ Constanten betrachtet werden, und die Variationen δq_ι sind lediglich die Veränderungen der q_ι, welche aus Veränderungen der Werthe der 2μ willkürlichen Constanten herrühren. Die Werthe dieser Variationen δq_ι, welche der unteren Grenze τ des Integrals entsprechen, sind die Grössen δq_ι^0. Indem wir das Integral, dessen Variation betrachtet wird, mit V bezeichnen, also

$$(2.)\qquad V=\int\varphi\, dt=\int(T+U)\,dt$$

setzen, lässt sich die obige Formel so schreiben:

$$(3.)\qquad \begin{cases}\delta V=p_1\delta q_1+p_2\delta q_2+\cdots+p_\iota\delta q_\iota+\cdots+p_\mu\delta q_\mu\\ \quad -p_1^0\delta q_1^0-p_2^0\delta q_2^0-\cdots-p_\iota^0\delta q_\iota^0-\cdots-p_\mu^0\delta q_\mu^0,\end{cases}$$

ein Ausdruck, dem noch das Glied $\frac{\partial V}{\partial t}\delta t$ hinzuzufügen ist, wenn man nicht t als unabhängige Variable ansieht.

Diese Darstellung der Variation von V ist sehr wichtig. Nach Integration der Differentialgleichungen der Bewegung kann man nämlich sämmtliche Variablen und daher auch φ als Function von t und den 2μ Integrations-Constanten darstellen und erhält aus dieser Darstellung von φ durch Quadratur V ebenfalls als Function von t und jenen 2μ Constanten. Die Wahl der Grössen, welche das System der 2μ willkürlichen Constanten in den Integralgleichungen bilden, steht in unserem Belieben. Wählen wir dazu die 2μ Anfangswerthe q_ι^0, p_ι^0, so bilden die $2\mu+1$ Variablen t, q_ι, p_ι und die 2μ Constanten q_ι^0, p_ι^0 zusammen ein System von $4\mu+1$ Grössen, welche vermöge der Integralgleichungen durch 2μ Relationen an einander gebunden sind, und von welchen daher irgend 2μ als Functionen der übrigen $2\mu+1$ anzusehen sind. Denken wir uns z. B. die Werthe der 2μ Grössen p_ι, p_ι^0 durch die $2\mu+1$ Grössen t, q_ι, q_ι^0 ausgedrückt und diese Werthe der p_ι^0 in V eingesetzt, welches uns bereits als Function der $2\mu+1$ Grössen t, q_ι^0, p_ι^0 bekannt ist, so ergiebt sich hierdurch $V=\int\varphi\, dt$ als Function der $2\mu+1$ Grössen t, q_1, q_2, ...

q_μ, q_1^0, q_2^0, ... q_μ^0. Indem man diese Darstellung von V variirt, dabei aber t unvariirt lässt, wird

$$\delta V = \frac{\partial V}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial V}{\partial q_2}\delta q_2 + \cdots + \frac{\partial V}{\partial q_\mu}\delta q_\mu$$
$$+ \frac{\partial V}{\partial q_1^0}\delta q_1^0 + \frac{\partial V}{\partial q_2^0}\delta q_2^0 + \cdots + \frac{\partial V}{\partial q_\mu^0}\delta q_\mu^0.$$

Vergleicht man dies mit der Darstellung (3.) von δV, so erhält man

$$(4.) \qquad \frac{\partial V}{\partial q_\iota} = p_\iota, \quad \frac{\partial V}{\partial q_\iota^0} = -p_\iota^0.$$

Andrerseits ist nach der in (2.) gegebenen Definition von V

$$\varphi = \frac{dV}{dt}.$$

Aber t ist in V erstens explicite enthalten und ausserdem implicite vermöge der Grössen q_1, q_2, ... q_μ; daher hat man

$$\varphi = \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \Sigma \frac{\partial V}{\partial q_\iota}\frac{dq_\iota}{dt},$$

oder mit Hülfe von (4.)

$$0 = \frac{\partial V}{\partial t} + \Sigma p_\iota q_\iota' - \varphi,$$

eine Gleichung, die unter Einführung der Function

$$(5.) \qquad \psi = \Sigma p_\iota q_\iota' - \varphi$$

in die folgende

$$(6.) \qquad \frac{\partial V}{\partial t} + \psi = 0$$

übergeht. Die Gleichung (6.) ist, wenn man ψ in der gehörigen Form darstellt, eine partielle Differentialgleichung für V. In der That, die Grössen q_ι' und die oben durch die Gleichungen

$$(1.) \qquad p_\iota = \frac{\partial \varphi}{\partial q_\iota'}$$

eingeführten Grössen p_ι bilden, wie wir wissen, zwei Systeme von Grössen, welche sich mit Hülfe der Grössen q_ι und t durch einander ersetzen lassen, sodass jeder gegebene Ausdruck der $3\mu+1$ Variablen t, q_ι, q_ι', p_ι sich zugleich als Function der $2\mu+1$ Variablen t, q_ι, q_ι' und als Function der $2\mu+1$

Variablen t, q_ι, p_ι darstellen lässt. Ein solcher Ausdruck ist

$$(5.)\qquad \psi = \Sigma p_\iota q'_\iota - \varphi.$$

Indem wir ψ als Function der Grössen t, q_ι, p_ι darstellen und für die Grössen p_ι nach der ersten der Gleichungen (4.) die partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial V}{\partial q_\iota}$ setzen, wird ψ schliesslich durch die Grössen t, q_1, q_2, ... q_μ, $\frac{\partial V}{\partial q_1}$, $\frac{\partial V}{\partial q_2}$, ... $\frac{\partial V}{\partial q_\mu}$ ausgedrückt, und die Gleichung (6.) nimmt die Gestalt an:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \psi\left(t, q_1, q_2, \dots q_\mu, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2}, \dots \frac{\partial V}{\partial q_\mu}\right) = 0.$$

Dies ist die *Hamilton*sche partielle Differentialgleichung, welcher $V = \int \varphi\, dt$ genügt, wenn man es als Function von t, q_1, q_2, ... q_μ und q_1^0, q_2^0, ... q_μ^0 ansieht. Die Integration der Differentialgleichungen der Bewegung giebt also für diese partielle Differentialgleichung eine Lösung, welche μ willkürliche Constanten q_1^0, q_2^0, ... q_μ^0 enthält.

Alles Bisherige gilt nicht bloss für die mechanischen Probleme, sondern auch, wenn φ, anstatt gleich $T+U$ zu sein, eine beliebige Function von t, q_1, q_2, ... q_μ, q'_1, q'_2, ... q'_μ bezeichnet. Im Fall der mechanischen Probleme aber bekommt ψ, wie die Entwicklungen der neunten Vorlesung bereits gezeigt haben, eine einfache Bedeutung. Denn wenn man in

$$\psi = \Sigma p_\iota q'_\iota - \varphi$$

für φ den Werth

$$\varphi = T+U$$

einsetzt, wo U nur von den Grössen q_ι abhängt und T eine homogene Function zweiten Grades der Grössen q'_ι ist, so wird

$$p_\iota = \frac{\partial T}{\partial q'_\iota},$$

$$\Sigma p_\iota q'_\iota = \Sigma q'_\iota \frac{\partial T}{\partial q'_\iota} = 2T,$$

$$\psi = T - U = H,$$

und die partielle Differentialgleichung geht in

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H = 0$$

über.

Das Resultat der bisherigen Betrachtungen lässt sich zunächst für die mechanischen Probleme folgendermassen aussprechen:

Es sei

$$H = T - U, \qquad p_\iota = \frac{\partial T}{\partial q'_\iota}$$

und H durch die Grössen p_ι und q_ι ausgedrückt, so sind

$$\frac{dq_\iota}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\iota}, \qquad \frac{dp_\iota}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_\iota}$$

die Differentialgleichungen der Bewegung. Man betrachte die Bewegung in dem Intervall τ bis t und führe als willkürliche Constanten in die Integralgleichungen die Anfangswerthe $q_1^0, q_2^0, \ldots q_\mu^0$ und $p_1^0, p_2^0, \ldots p_\mu^0$ ein. Ferner setze man in H

$$p_\iota = \frac{\partial V}{\partial q_\iota},$$

so ist

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H = 0$$

eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung, welche V als Function der Variablen $t, q_1, q_2, \ldots q_\mu$ definirt. Nun bilde man das Integral

$$\int_\tau^t (T+U)\,dt,$$

wo $T+U$ vermöge der Integralgleichungen eine blosse Function von t und den 2μ Constanten $q_1^0, q_2^0, \ldots q_\mu^0, p_1^0, p_2^0, \ldots p_\mu^0$ ist, und drücke das Resultat der Quadratur durch $t, q_1, q_2, \ldots q_\mu$ und $q_1^0, q_2^0, \ldots q_\mu^0$ aus: dann ist der so dargestellte Werth des Integrals

$$V = \int_\tau^t (T+U)\,dt$$

eine Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H = 0.$$

Tritt an die Stelle von $T+U$ eine beliebige Function φ der Grössen q_ι, q'_ι und t, so müssen zugleich an die Stelle der Differentialgleichungen der Bewegung diejenigen gesetzt werden, welche den unter dem Integralzeichen stehenden Theil der Variation $\delta\int\varphi\,dt$ verschwinden machen. Um die Analogie vollständig zu machen, muss man diese Differentialgleichungen auf dieselbe Form bringen, welche die Differentialgleichungen der Bewegung durch *Hamilton* erhalten haben, und zwar indem man auch hier die Differentialquotienten q'_ι durch die Grössen $p_\iota = \frac{\partial \varphi}{\partial q'_\iota}$ ersetzt, die Function $\psi = \Sigma p_\iota q'_\iota - \varphi$ einführt und dann ähnlich wie in der neunten Vorlesung verfährt. Bildet man von der Function ψ die Variation

$$\delta\psi = \Sigma q'_\iota \delta p_\iota + \Sigma p_\iota \delta q'_\iota - \delta\varphi$$

und substituirt hierin für $\delta\varphi$ seinen Werth

$$\delta\varphi = \Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial q_\iota} \delta q_\iota + \Sigma p_\iota \delta q'_\iota + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \delta t,$$

der, wenn man die Wahl der unabhängigen Variable unentschieden lässt, auch ein δt proportionales Glied enthält, so ergiebt sich

$$\delta\psi = \Sigma q'_\iota \delta p_\iota - \Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial q_\iota} \delta q_\iota - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \delta t.$$

Vergleicht man diesen Ausdruck von $\delta\psi$ mit demjenigen, welchen man erhält, wenn ψ in den Grössen q_ι, p_ι und t dargestellt angenommen wird, also mit dem Ausdruck

$$\delta\psi = \Sigma\left(\frac{\partial \psi}{\partial p_\iota}\right)\delta p_\iota + \Sigma\left(\frac{\partial \psi}{\partial q_\iota}\right)\delta q_\iota + \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)\delta t,$$

in welchem die unter der letzteren Annahme gebildeten partiellen Differentialquotienten zur Unterscheidung in Klammern eingeschlossen sind, so folgt aus der Vergleichung

$$q'_\iota = \left(\frac{\partial \psi}{\partial p_\iota}\right), \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial q_\iota} = -\left(\frac{\partial \psi}{\partial q_\iota}\right), \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right).$$

Durch die zweite dieser drei Gleichungen verwandeln sich die Differentialgleichungen

$$\frac{d \frac{\partial \varphi}{\partial q'_\iota}}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial q_\iota},$$

die erfüllt sein müssen, damit der unter dem Integralzeichen stehende Theil der Variation $\delta \int \varphi \, dt$ verschwinde, in

$$\frac{dp_\iota}{dt} = -\left(\frac{\partial \psi}{\partial q_\iota}\right),$$

während die erste der drei Gleichungen mit

$$\frac{dq_\iota}{dt} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial p_\iota}\right)$$

identisch ist. Die Differentialgleichungen aller isoperimetrischen Probleme, in denen sich nur erste Differentialquotienten unter dem gegebenen Integrale befinden, nehmen also die Form

$$\frac{dq_\iota}{dt} = \left(\frac{\partial\psi}{\partial p_\iota}\right), \qquad \frac{dp_\iota}{dt} = -\left(\frac{\partial\psi}{\partial q_\iota}\right)$$

an, und die Integration derselben liefert allemal eine Lösung der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \psi = 0.$$

Unter Fortlassung der jetzt nicht mehr zur Unterscheidung nöthigen Klammern um die Differentialquotienten $\left(\frac{\partial\psi}{\partial p_\iota}\right)$, $\left(\frac{\partial\psi}{\partial q_\iota}\right)$ kann das für den allgemeinen Fall gewonnene Resultat so ausgesprochen werden:

Es sei φ irgend eine gegebene Function von t, q_1, q_2, ... q_μ und q_1', q_2', ... q_μ', man führe für die Differentialquotienten q_ι' neue Variable

$$p_\iota = \frac{\partial\varphi}{\partial q_\iota'}$$

ein, setze

$$\psi = \Sigma p_\iota q_\iota' - \varphi$$

und drücke die Function ψ durch die Variablen p_ι, q_ι und t aus: dann sind die Gleichungen

$$\frac{dq_\iota}{dt} = \frac{\partial\psi}{\partial p_\iota}, \qquad \frac{dp_\iota}{dt} = -\frac{\partial\psi}{\partial q_\iota}$$

die Differentialgleichungen, welche den unter dem Integralzeichen stehenden Theil der Variation $\delta\int\varphi\, dt$ verschwinden machen. Man bezeichne ferner die Werthe der 2μ Variablen für die untere Integralgrenze τ mit q_1^0, q_2^0, ... q_μ^0, p_1^0, p_2^0, ... p_μ^0 und führe diese Grössen statt der willkürlichen Constanten in die Integralgleichungen des Systems ein. Endlich setze man

$$p_\iota = \frac{\partial V}{\partial q_\iota},$$

dann ist

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \psi = 0$$

eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung, welche V als Function der Variablen t, q_1, q_2, ... q_μ definirt. Bildet man nun das Integral

$$\int_\tau^t \varphi\, dt,$$

wo φ vermöge der Integralgleichungen eine blosse Function von t und den 2μ Constanten $q_1^0, q_2^0, \ldots q_\mu^0, p_1^0, p_2^0, \ldots p_\mu^0$ ist, und drückt das Resultat der Quadratur als Function von $t, q_1, q_2, \ldots q_\mu$ und $q_1^0, q_2^0, \ldots q_\mu^0$ aus: so ist der so dargestellte Werth des Integrals

$$V = \int_{\tau}^{t} \varphi\, dt$$

eine Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \psi = 0.$$

Der in Gleichung (5.) enthaltene Zusammenhang der Functionen φ und ψ stellt eine Art von Reciprocität zwischen denselben her. Setzt man nämlich

$$\psi = \Sigma q_\iota' \frac{\partial \varphi}{\partial q_\iota'} - \varphi = \Sigma p_\iota q_\iota' - \varphi,$$

wo

$$p_\iota = \frac{\partial \varphi}{\partial q_\iota'}$$

ist, und φ als Function der q_ι, q_ι' und t angesehen wird, so ist gleichzeitig

$$q_\iota' = \frac{\partial \psi}{\partial p_\iota},$$

vorausgesetzt dass ψ als Function der q_ι, p_ι und t angesehen wird; daher hat man auch

$$(7.) \qquad \varphi = \Sigma p_\iota \frac{\partial \psi}{\partial p_\iota} - \psi,$$

in welcher Gleichung an Stelle der p_ι die Grössen q_ι' vermittelst der Gleichungen

$$q_\iota' = \frac{\partial \psi}{\partial p_\iota}$$

einzuführen sind. Man kann also durch Gleichung (7.) zu *jeder* gegebenen Function ψ von t und von den Grössen q_ι und p_ι eine zugeordnete Function φ von t und von den Grössen q_ι und q_ι' finden; demnach stellt die Gleichung $\frac{\partial V}{\partial t} + \psi = 0$ die allgemeinste partielle Differentialgleichung erster Ordnung dar, welche V als Function von $t, q_1, q_2, \ldots q_\mu$ definirt, V selbst nicht enthält und nach $\frac{\partial V}{\partial t}$ aufgelöst ist. Es liegt hierin ein merkwürdiger Zusammenhang zweier weit aus einander liegenden Probleme, der isoperimetrischen Probleme der betrachteten Art und der Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Dieser Zusammenhang lässt sich auf die übrigen isoperimetrischen Probleme, in welchen sich höhere als die ersten Differentialquotienten unter dem Integrale befinden, ausdehnen.

Die gefundene Lösung der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial V}{\partial t} + \psi = 0$ enthält, wie wir gesehen haben, die μ willkürlichen Constanten q_1^0, q_2^0, ... q_μ^0, und da in ψ die Grösse V selbst nicht vorkommt, so kann man zu dieser Lösung V noch eine willkürliche Constante addiren und hat dann eine Lösung mit $\mu+1$ willkürlichen Constanten. Die Lösung V ist daher das, was man eine vollständige Lösung einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung nennt: denn eine solche muss so viele von einander unabhängige Constanten enthalten, als von einander unabhängige Variable in der Differentialgleichung vorkommen.

Sowie nun die Integration der betrachteten isoperimetrischen oder Bewegungsgleichungen diese vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial V}{\partial t} + \psi = 0$ liefert, so kann man umgekehrt aus der als bekannt vorausgesetzten vollständigen Lösung die Integralgleichungen der betrachteten isoperimetrischen oder mechanischen Differentialgleichungen bilden, und zwar sind dieselben in den bereits oben gegebenen Gleichungen

$$(4.) \qquad \frac{\partial V}{\partial q_\iota} = p_\iota, \quad \frac{\partial V}{\partial q_\iota^0} = -p_\iota^0$$

enthalten, welche auch im Fall der in Rede stehenden isoperimetrischen Probleme gelten. Wir haben also die Integralgleichungen unter derselben Form dargestellt, wie früher die Differentialgleichungen, nämlich durch die partiellen Differentialquotienten *einer* Function V. Dies ist die Erfindung *Hamiltons*, welcher die Function V mit dem Namen *the principal function* belegt. Das zweite in (4.) enthaltene System von Gleichungen $\frac{\partial V}{\partial q_\iota^0} = -p_\iota^0$ giebt die wahren Integralgleichungen, das erste System $\frac{\partial V}{\partial q_\iota} = p_\iota$ giebt die Grössen p_ι oder q_ι' in t und q_ι mit μ Constanten q_ι^0: dies ist das System der ersten Integralgleichungen, aber es ist von grosser Wichtigkeit, dass auch diese durch die partiellen Differentialquotienten von V dargestellt werden können. Wie wir später zeigen werden, brauchen die μ in V enthaltenen Constanten nicht die Anfangswerthe q_ι^0 zu sein, sondern wenn man nur überhaupt eine vollständige Lösung V der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial V}{\partial t} + \psi = 0$ mit irgend welchen Constanten kennt, so lassen sich immer die Integralgleichungen durch die partiellen Differentialquotienten dieser Lösung nach den in ihr enthaltenen Constanten darstellen.

Hamilton, der seine Erfindung in zwei Abhandlungen in den philosophical Transactions *) dargestellt hat, definirt V nicht bloss durch die eine partielle Differentialgleichung $\frac{\partial V}{\partial t}+\psi=0$, sondern er stellt zugleich noch eine zweite partielle Differentialgleichung auf, welcher V ebenfalls genügen soll, die man aber fortlassen kann, weil sie sich aus der schon aufgestellten herleiten lässt, und deren Hinzufügung nur der Untersuchung ihre Einfachheit nimmt, da die Frage der Bestimmung einer Grösse durch zwei simultane partielle Differentialgleichungen bei den jetzigen Mitteln der Analysis im Allgemeinen nicht beantwortet werden kann.

Um diese zweite partielle Differentialgleichung aus der schon gefundenen $\frac{\partial V}{\partial t}+\psi=0$ herzuleiten, brauchen wir folgenden leicht zu beweisenden Satz:

Es sei ein System von n gewöhnlichen Differentialgleichungen zwischen den $n+1$ Variablen $t, x_1, x_2, \ldots x_n$ vorgelegt, die dem Anfangswerthe τ von t entsprechenden Werthe der übrigen Variablen seien $x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0$, und man habe dem System der vorgelegten Differentialgleichungen durch das System der Integralgleichungen

$$(A.)\quad \begin{cases} x_1 = f_1(t, \tau, x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0), \\ x_2 = f_2(t, \tau, x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0), \\ \vdots \\ x_n = f_n(t, \tau, x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0) \end{cases}$$

genügt. Dann erhält man durch Vertauschung der Variablen $t, x_1, x_2, \ldots x_n$ mit ihren Anfangswerthen $\tau, x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0$ ein gleichbedeutendes System von Integralgleichungen, so dass man das lästige Geschäft der Elimination ganz ersparen und die Integralgleichungen nach den willkürlichen Constanten aufgelöst ohne weitere Rechnung so darstellen kann:

$$(B.)\quad \begin{cases} x_1^0 = f_1(\tau, t, x_1, x_2, \ldots x_n), \\ x_2^0 = f_2(\tau, t, x_1, x_2, \ldots x_n), \\ \vdots \\ x_n^0 = f_n(\tau, t, x_1, x_2, \ldots x_n). \end{cases}$$

Der Beweis dieses Satzes ist folgender: Genügt dem gegebenen System von

*) 1834. P. II., und 1835. P. I.

Differentialgleichungen das System der Integralgleichungen

$$(C.)\quad \begin{cases} x_1 = F_1(t, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n), \\ x_2 = F_2(t, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n), \\ \vdots \\ x_n = F_n(t, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n), \end{cases}$$

so folgt hieraus zwischen den Anfangswerthen dasselbe System von Gleichungen, nämlich

$$(D.)\quad \begin{cases} x_1^0 = F_1(\tau, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n), \\ x_2^0 = F_2(\tau, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n), \\ \vdots \\ x_n^0 = F_n(\tau, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n). \end{cases}$$

Das System $(A.)$ muss aus $(C.)$ und $(D.)$ durch Elimination von $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ hervorgehen. Aber die Systeme $(C.)$ und $(D.)$ gehen in einander über, wenn man t mit τ und zugleich x_1 mit x_1^0, x_2 mit x_2^0, ... x_n mit x_n^0 vertauscht; folglich muss man in $(A.)$ eben diese Vertauschung vornehmen können, und das aus derselben sich ergebende System $(B.)$ muss mit $(A.)$ gleichbedeutend sein.

Aus diesem Satze lässt sich eine bemerkenswerthe Folgerung ziehen. Die Gleichungen $(B.)$ sind Integrale, d. h. solche Integralgleichungen, die, wenn man sie differentiirt und die Differentialgleichungen zu Hülfe ruft, ein identisch verschwindendes Resultat geben. Von den Gleichungen $(A.)$ hingegen enthält jede n Constanten, von denen keine überflüssig (supervacanea) ist*). Daher erhält man, wenn man eine derselben, z. B. $x_1 = f_1(t, \tau, x_1^0, x_2^0, \dots x_n^0)$, differentiirt, die Differentialgleichungen zu Hülfe ruft und diese Operation fortsetzt, nach und nach alle Integralgleichungen. Einen solchen Nutzen kann man im Allgemeinen aus der Kenntniss eines Integrals, Const. $= F(t, \tau, x_1, x_2, \dots x_n)$, wo τ einen besonderen Werth von t bedeutet, nicht ziehen. Ereignet sich aber der Fall, dass die Constante gerade der dem Werthe τ von t entsprechende Werth der einen Variable, x_1 z. B., ist, so kann man aus dem einen Integral mit nur einer Constante alle Integralgleichungen herleiten. Dieser Fall tritt ein, sobald sich für $t = \tau$ die Function $F(t, \tau, x_1, x_2, \dots x_n)$ auf x_1 reducirt; alsdann kann man nach obigem Satz die Variablen mit ihren Anfangswerthen vertauschen und erhält daher aus dem einen Integral

$$\text{Const.} = F(t, \tau, x_1, x_2, \dots x_n)$$

---

*) Siehe die Abhandlung „dilucidationes de aequatt. diff. vulg. systematis“, *Crelles* Journal, Bd. 23.

die Integralgleichung

$$x_1 = F(\tau, t, x_1^0, x_2^0, \dots x_n^0),$$

aus welcher sich durch successive Differentiation alle übrigen herleiten lassen.

Wir wollen nun sehen, was bei der Vertauschung der Variablen mit ihren Anfangswerthen aus V wird. Die betrachteten isoperimetrischen oder dynamischen Differentialgleichungen seien durch das System

$$\begin{array}{ll}
q_1 = \chi_1(t, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{2\mu}), & p_1 = \varpi_1(t, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{2\mu}), \\
q_2 = \chi_2(t, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{2\mu}), & p_2 = \varpi_2(t, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{2\mu}), \\
\vdots & \vdots \\
q_\mu = \chi_\mu(t, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{2\mu}), & p_\mu = \varpi_\mu(t, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{2\mu})
\end{array}$$

integrirt. Man hat dann zugleich, indem man für t den Anfangswerth τ setzt,

$$\begin{array}{ll}
q_1^0 = \chi_1(\tau, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{2\mu}), & p_1^0 = \varpi_1(\tau, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{2\mu}), \\
q_2^0 = \chi_2(\tau, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{2\mu}), & p_2^0 = \varpi_2(\tau, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{2\mu}), \\
\vdots & \vdots \\
q_\mu^0 = \chi_\mu(\tau, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{2\mu}), & p_\mu^0 = \varpi_\mu(\tau, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{2\mu}),
\end{array}$$

und es ist

$$V = \int_\tau^t \varphi\, dt,$$

wo φ eine Function von $t, q_1, q_2, \dots q_\mu, p_1, p_2, \dots p_\mu$, also, nach Einsetzung der Werthe von $q_1, \dots q_\mu, p_1, \dots p_\mu$ aus den Integralgleichungen, eine blosse Function von $t, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{2\mu}$ ist. Man kann demnach

$$\int \varphi\, dt = \Phi(t, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{2\mu})$$

setzen und erhält

$$V = \int_\tau^t \varphi\, dt = \Phi(t, \alpha_1, \dots \alpha_{2\mu}) - \Phi(\tau, \alpha_1, \dots \alpha_{2\mu}).$$

Die auf diese Weise bestimmte Grösse V wird eine vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial V}{\partial t} + \psi = 0$, wenn vermöge der obigen 2μ Gleichungen für $q_1, q_2, \dots q_\mu, q_1^0, q_2^0, \dots q_\mu^0$ die Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{2\mu}$ eliminirt worden sind. Aber von diesen 2μ Gleichungen geht die eine Hälfte in die andere über, wenn man t mit τ und die Grössen q_i mit den Grössen q_i^0 vertauscht. Daher muss jede der Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{2\mu}$ als Function von $t, q_1, q_2, \dots q_\mu, \tau, q_1^0, q_2^0, \dots q_\mu^0$ ausgedrückt von der Beschaffenheit sein, dass sie ungeändert bleibt, wenn t mit τ, q_1 mit q_1^0, q_2 mit q_2^0, $\dots$ q_μ mit

q_μ^0 vertauscht wird. Berücksichtigt man dies, so erhellt, dass durch diese Vertauschung

$$V = \Phi(t, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2\mu}) - \Phi(\tau, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2\mu})$$

in

$$\Phi(\tau, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2\mu}) - \Phi(t, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2\mu})$$

d. h. in $-V$ übergeht.

Bei allem Bisherigen haben wir keine besondere Hypothese über die Differentialgleichungen gemacht. Jetzt müssen wir, um den von *Hamilton* betrachteten Fall zu erhalten, annehmen, dass φ die Variable t nicht explicite enthält. Dieser Fall tritt in der Mechanik ein, wenn die Zeit t nicht in der Kräftefunction U und demzufolge auch nicht in $\psi = H = T - U$ vorkommt. Dann tritt in die Differentialgleichungen der Bewegung

$$dt : dq_1 : dq_2 : \ldots : dq_\mu : dp_1 : \ldots : dp_\mu = 1 : \frac{\partial\psi}{\partial p_1} : \frac{\partial\psi}{\partial p_2} : \ldots : \frac{\partial\psi}{\partial p_\mu} : -\frac{\partial\psi}{\partial q_1} : \ldots : -\frac{\partial\psi}{\partial q_\mu}$$

t nur durch sein Differential ein; durch Fortlassung von dt und 1 eliminirt man die Zeit ganz, drückt nach Integration des übrig bleibenden Systems alle Variablen durch eine z. B. q_1 aus und bestimmt diese letztere als Function der Zeit, indem man die aus der Differentialformel

$$dt = \frac{dq_1}{\frac{\partial\psi}{\partial p_1}}$$

durch Quadratur hervorgehende Gleichung

$$t - \tau = \int_{q_1^0}^{q_1} \frac{dq_1}{\frac{\partial\psi}{\partial p_1}}$$

nach q_1 auflöst. So erhält man q_1 als Function von $t-\tau$, und da die übrigen Variablen bereits als Functionen von q_1 ausgedrückt sind, so hängen sämmtliche Variablen nur von der Differenz $t-\tau$ ab. Dies gilt auch von der Function V, welche ebenfalls die beiden Grössen t und τ nur in der Verbindung $\theta = t - \tau$ enthält, und man hat daher

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{\partial V}{\partial \tau} = \frac{\partial V}{\partial \theta}.$$

Werden nun die Grössen t, q_1, q_2, ... q_μ mit ihren Anfangswerthen τ, q_1^0, q_2^0, ... q_μ^0 vertauscht, so geht V in $-V$, θ in $-\theta$ über, und $\frac{\partial V}{\partial \theta}$ bleibt unverändert. Bezeichnet ferner ψ_0 den Werth, in welchen ψ übergeht, wenn die Grössen q_i und $p_i = \frac{\partial V}{\partial q_i}$ mit den Grössen q_i^0 und $p_i^0 = -\frac{\partial V}{\partial q_i^0}$ vertauscht werden, so geht die Gleichung

$$0 = \frac{\partial V}{\partial t} + \psi = \frac{\partial V}{\partial \theta} + \psi$$

in

$$0 = \frac{\partial V}{\partial \theta} + \psi_0 = -\frac{\partial V}{\partial \tau} + \psi_0$$

über. Dies ist die zweite *Hamilton*sche partielle Differentialgleichung, von der wir also nachgewiesen haben, dass sie aus der zuerst aufgestellten durch Vertauschung der Variablen mit ihren Anfangswerthen abgeleitet werden kann.

Zwanzigste Vorlesung.

Nachweis, dass die aus einer vollständigen Lösung der *Hamilton*schen partiellen Differentialgleichung abgeleiteten Integralgleichungen dem Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen wirklich genügen. Die *Hamilton*sche Gleichung für den Fall der freien Bewegung.

Wir wollen jetzt den umgekehrten Weg einschlagen und nachweisen, wie man, von der betrachteten partiellen Differentialgleichung ausgehend, zu den dynamischen oder isoperimetrischen Differentialgleichungen gelangen kann.

Es sei

$$(1.) \qquad \frac{\partial V}{\partial t} + \psi = 0$$

eine beliebige partielle Differentialgleichung erster Ordnung, welche V selbst nicht enthält, so dass ψ irgend eine Function der Grössen t, q_1, q_2, ... q_μ, p_1, p_2, ... p_μ ist, wo $p_\iota = \frac{\partial V}{\partial q_\iota}$; man kenne eine vollständige Lösung V der partiellen Differentialgleichung (1.), d. h. eine Lösung, welche ausser der mit V durch Addition verbundenen noch μ willkürliche Constanten α_1, α_2, ... α_μ enthält. Setzt man nun

$$(2.) \qquad \frac{\partial V}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \quad \dots \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_\mu} = \beta_\mu,$$

wo β_1, β_2, ... β_μ neue willkürliche Constanten bedeuten, so sind diese Gleichungen verbunden mit den Gleichungen

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial V}{\partial q_2} = p_2, \quad \dots \quad \frac{\partial V}{\partial q_\mu} = p_\mu$$

die Integralgleichungen des Systems von Differentialgleichungen

$$(3.)\qquad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial\psi}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial\psi}{\partial q_i}$$

wo i die Werthe 1, 2, ... μ annimmt.

Bei dem Beweise dieses Satzes haben wir zu berücksichtigen, dass, wenn die als bekannt vorausgesetzte vollständige Lösung für V in die partielle Differentialgleichung (1.) eingesetzt wird, die linke Seite derselben eine identisch verschwindende Function der Grössen t, $q_1, q_2, \dots q_\mu$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_\mu$ werden muss, und dass demnach ihr nach einer dieser Grössen genommener partieller Differentialquotient ebenfalls identisch verschwindet.

Um die erste Hälfte der Differentialgleichungen (3.) aus den Gleichungen (2.) herzuleiten, verfahren wir folgendermassen. Indem wir die Gleichungen (2.) nach t vollständig differentiiren, erhalten wir das System von Gleichungen

$$(4.)\qquad \begin{cases} 0 = \dfrac{\partial^2 V}{\partial\alpha_1\partial t} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial\alpha_1\partial q_1}\dfrac{dq_1}{dt} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial\alpha_1\partial q_2}\dfrac{dq_2}{dt} + \dots + \dfrac{\partial^2 V}{\partial\alpha_1\partial q_\mu}\dfrac{dq_\mu}{dt}, \\ 0 = \dfrac{\partial^2 V}{\partial\alpha_2\partial t} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial\alpha_2\partial q_1}\dfrac{dq_1}{dt} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial\alpha_2\partial q_2}\dfrac{dq_2}{dt} + \dots + \dfrac{\partial^2 V}{\partial\alpha_2\partial q_\mu}\dfrac{dq_\mu}{dt}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 0 = \dfrac{\partial^2 V}{\partial\alpha_\mu\partial t} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial\alpha_\mu\partial q_1}\dfrac{dq_1}{dt} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial\alpha_\mu\partial q_2}\dfrac{dq_2}{dt} + \dots + \dfrac{\partial^2 V}{\partial\alpha_\mu\partial q_\mu}\dfrac{dq_\mu}{dt}. \end{cases}$$

Es würde nun darauf ankommen, diese in Beziehung auf $\frac{dq_1}{dt}, \frac{dq_2}{dt}, \dots \frac{dq_\mu}{dt}$ linearen Gleichungen aufzulösen und zu zeigen, dass die aus der Auflösung hervorgehenden Werthe mit den Grössen $\frac{\partial\psi}{\partial p_1}, \frac{\partial\psi}{\partial p_2}, \dots \frac{\partial\psi}{\partial p_\mu}$ identisch sind. Aber diese Identität wird sich auch ohne Auflösung linearer Gleichungen ergeben, wenn man nachweist, dass die Grössen $\frac{dq_i}{dt}$ und die Grössen $\frac{\partial\psi}{\partial p_i}$ demselben System linearer Gleichungen genügen. Zu diesem Nachweis müssen wir die partielle Differentialgleichung $\frac{\partial V}{\partial t} + \psi = 0$ nach den Constanten α_1, $\alpha_2, \dots \alpha_\mu$ partiell differentiiren und hierbei bedenken, dass von den Grössen t, q_i und $p_i = \frac{\partial V}{\partial q_i}$, deren Function ψ ist, nur die letzteren, also p_i, die Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_\mu$ enthalten. Die Differentiation nach α_i ergiebt

$$0 = \frac{\partial^2 V}{\partial t\partial\alpha_i} + \frac{\partial\psi}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial\alpha_i} + \frac{\partial\psi}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial\alpha_i} + \dots + \frac{\partial\psi}{\partial p_\mu}\frac{\partial p_\mu}{\partial\alpha_i},$$

und da $p_1 = \frac{\partial V}{\partial q_1}$, $p_2 = \frac{\partial V}{\partial q_2}$, $\ldots$ $p_\mu = \frac{\partial V}{\partial q_\mu}$, also $\frac{\partial p_k}{\partial \alpha_\iota} = \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha_\iota \partial q_k}$, so erhält man aus dieser Gleichung für $i = 1, 2, \ldots \mu$ ein System von linearen Gleichungen, welches sich von dem System (4.) nur dadurch unterscheidet, dass die Grössen $\frac{\partial \psi}{\partial p_\iota}$ an die Stelle der $\frac{dq_\iota}{dt}$ getreten sind. Hieraus schliessen wir $\frac{dq_\iota}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial p_\iota}$.

Zur Ableitung der zweiten Hälfte der Differentialgleichungen (3.), also der Gleichungen $\frac{dp_\iota}{dt} = -\frac{\partial \psi}{\partial q_\iota}$, rufen wir die zweite Hälfte der Integralgleichungen zu Hülfe, d. h. die Gleichungen

$$\frac{\partial V}{\partial q_\iota} = p_\iota,$$

welche das System der ersten Integralgleichungen bilden, indem sie Relationen zwischen den Grössen q_ι und q'_ι mit μ willkürlichen Constanten darstellen. Die Gleichung $p_\iota = \frac{\partial V}{\partial q_\iota}$ giebt, nach t vollständig differentiirt,

$$\frac{dp_\iota}{dt} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_\iota \partial t} + \frac{\partial^2 V}{\partial q_\iota \partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial^2 V}{\partial q_\iota \partial q_2}\frac{dq_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial^2 V}{\partial q_\iota \partial q_\mu}\frac{dq_\mu}{dt}.$$

Schreiben wir für $\frac{\partial^2 V}{\partial q_\iota \partial q_1}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial q_\iota \partial q_2}$, $\ldots$ $\frac{\partial^2 V}{\partial q_\iota \partial q_\mu}$ respective $\frac{\partial p_1}{\partial q_\iota}$, $\frac{\partial p_2}{\partial q_\iota}$, $\ldots$ $\frac{\partial p_\mu}{\partial q_\iota}$ und benutzen die schon gefundenen Gleichungen $\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial p_1}$, $\frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial p_2}$, $\ldots$ $\frac{dq_\mu}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial p_\mu}$, so ergiebt sich

$$(5.)\qquad \frac{dp_\iota}{dt} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_\iota \partial t} + \frac{\partial p_1}{\partial q_\iota}\frac{\partial \psi}{\partial p_1} + \frac{\partial p_2}{\partial q_\iota}\frac{\partial \psi}{\partial p_2} + \cdots + \frac{\partial p_\mu}{\partial q_\iota}\frac{\partial \psi}{\partial p_\mu}.$$

Indem wir andrerseits die Gleichung $\frac{\partial V}{\partial t} + \psi = 0$ partiell nach q_ι differentiiren, finden wir:

$$0 = \frac{\partial^2 V}{\partial q_\iota \partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial q_\iota} + \frac{\partial \psi}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial q_\iota} + \cdots + \frac{\partial \psi}{\partial p_\mu}\frac{\partial p_\mu}{\partial q_\iota} + \frac{\partial \psi}{\partial q_\iota},$$

und diese Gleichung von (5.) abgezogen führt zu dem Ergebniss

$$\frac{dp_\iota}{dt} = -\frac{\partial \psi}{\partial q_\iota}.$$

Hiermit ist auch die zweite Hälfte der Differentialgleichungen (3.) hergeleitet, also der oben aufgestellte Satz vollständig bewiesen. Es ist wichtig, dass nach dem erhaltenen Ergebniss die in V enthaltenen μ Constanten willkürlich gewählt werden können und nicht die Anfangswerthe $q_1^0, q_2^0, \ldots q_\mu^0$ zu sein brauchen; denn zur Einführung der Anfangswerthe hat man Gleichungen aufzulösen oder Eliminationen zu bewerkstelligen, in den meisten Fällen also lästige Operationen auszuführen, denen wir jetzt überhoben sind.

Ein Punkt des vorstehenden Beweises verdient eine nähere Erörterung. Indem wir sahen, dass die für die Grössen $\frac{dq_\iota}{dt}$ aufgestellten Gleichungen (4.) auch für die Grössen $\frac{\partial\psi}{\partial p_\iota}$ gelten, schlossen wir hieraus, dass die Grössen $\frac{dq_\iota}{dt}$ und $\frac{\partial\psi}{\partial p_\iota}$ einander gleich sind. Zu diesem Schlusse sind wir aber nur dann berechtigt, wenn die Grössen $\frac{dq_\iota}{dt}$ durch das System linearer Gleichungen (4.) endliche und vollständig bestimmte Werthe erhalten. Dies findet nun bei einem System linearer Gleichungen immer statt, sobald die Gleichungen sich nicht widersprechen, oder sobald nicht eine oder mehrere eine Folge der übrigen sind. Im ersten dieser Fälle werden die Werthe der Variablen unendlich, im zweiten Falle unbestimmt; beide unterscheiden sich nur durch die Werthe der ganz constanten Terme, denn gesetzt, die letzte Gleichung eines Systems folge aus den übrigen, so müssen diese mit gehörigen Coefficienten multiplicirt und addirt die letzte geben. Aendert man nun in der letzten Gleichung den ganz constanten Term um eine beliebige Grösse, so folgt sie nicht mehr aus den übrigen, sondern widerspricht ihnen. Beide Fälle kommen also darin überein, dass, wenn man die ganz constanten Terme auf die linke Seite schafft, die rechte Seite der einen Gleichung, etwa der letzten, sich als die Summe der rechten Seiten der mit gehörigen Factoren multiplicirten übrigen Gleichungen darstellen lassen muss. Indem man für die in der letzten Horizontalreihe stehenden Coefficienten die hieraus hervorgehende Darstellung vermöge der übrigen einsetzt, zerfällt die Determinante R der in Rede stehenden Gleichungen in eine Summe von Determinanten, deren jede zwei zusammenfallende Horizontalreihen besitzt, also verschwindet. Es wird daher auch $R = 0$, und der Ausnahmefall, in welchem der obige Beweis ungültig wird, tritt also (insofern die Coefficienten der linearen Gleichungen endlich bleiben, was wir immer annehmen) nur dann ein, wenn die Determinante der linearen Gleichungen verschwindet. Die Coefficienten der linearen Gleichungen (4.) sind

$$\begin{array}{llll}
\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_1\partial q_1}, & \frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_1\partial q_2}, & \cdots & \frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_1\partial q_\mu}, \\
\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_2\partial q_1}, & \frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_2\partial q_2}, & \cdots & \frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_2\partial q_\mu}, \\
\vdots & & & \\
\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_\mu\partial q_1}, & \frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_\mu\partial q_2}, & \cdots & \frac{\partial^2 V}{\partial\alpha_\mu\partial q_\mu};
\end{array}$$

folglich kann man ihre Determinante auf die nachstehende doppelte Weise,

$$R = \Sigma \pm \frac{\partial\frac{\partial V}{\partial\alpha_1}}{\partial q_1}\frac{\partial\frac{\partial V}{\partial\alpha_2}}{\partial q_2}\cdots\frac{\partial\frac{\partial V}{\partial\alpha_\mu}}{\partial q_\mu} = \Sigma \pm \frac{\partial\frac{\partial V}{\partial q_1}}{\partial\alpha_1}\frac{\partial\frac{\partial V}{\partial q_2}}{\partial\alpha_2}\cdots\frac{\partial\frac{\partial V}{\partial q_\mu}}{\partial\alpha_\mu},$$

als Functionaldeterminante darstellen. Wäre nun $R=0$, so wären nach No. 5 der dreizehnten Vorlesung (p. 102) die Grössen $\frac{\partial V}{\partial\alpha_1}, \frac{\partial V}{\partial\alpha_2}, \ldots \frac{\partial V}{\partial\alpha_\mu}$, als Functionen von $q_1, q_2, \ldots q_\mu$ betrachtet, nicht unabhängig von einander, d. h. es müsste zwischen $\frac{\partial V}{\partial\alpha_1}, \frac{\partial V}{\partial\alpha_2}, \ldots \frac{\partial V}{\partial\alpha_\mu}, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\mu, t$ eine Gleichung existiren, welche $q_1, q_2, \ldots q_\mu$ nicht enthielte. Aus der zweiten Darstellung von R folgt, dass dann zugleich zwischen $\frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2}, \ldots \frac{\partial V}{\partial q_\mu}, q_1, q_2, \ldots q_\mu, t$ eine Gleichung existiren müsste, welche $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\mu$ nicht enthielte, in welcher doppelten Deutung übrigens ein allgemeiner Satz über Functionen von 2μ Variablen $q_1, q_2, \ldots q_\mu, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\mu$ enthalten ist. Man hätte also eine Gleichung der Form

$$0 = F\left(t, q_1, q_2, \ldots q_\mu, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2}, \ldots \frac{\partial V}{\partial q_\mu}\right),$$

d. h. eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung, welcher die vorausgesetzte Lösung V genügen müsste, und welche $\frac{\partial V}{\partial t}$ nicht enthält. Dies ist aber unmöglich, wenn V wirklich eine *vollständige* Lösung von $\frac{\partial V}{\partial t}+\psi=0$ sein soll. Damit nämlich

$$V = f(t, q_1, q_2, \ldots q_\mu, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\mu) + C$$

dem Begriff einer *vollständigen* Lösung genüge, ist es nothwendig, dass man zur Elimination der $\mu+1$ Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\mu, C$ alle $\mu+1$ Differentialquotienten

$$(6.)\qquad \frac{\partial V}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial t},\quad \frac{\partial V}{\partial q_1}=\frac{\partial f}{\partial q_1},\quad \frac{\partial V}{\partial q_2}=\frac{\partial f}{\partial q_2},\ \ldots\ \frac{\partial V}{\partial q_\mu}=\frac{\partial f}{\partial q_\mu}$$

brauche. Kann man, auch ohne die Gleichung $\frac{\partial V}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial t}$ anzuwenden, alle

$\mu+1$ Constanten eliminiren, so dass man auf eine Gleichung der Form

$$F\left(t, q_1, q_2, \ldots q_\mu, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2}, \ldots \frac{\partial V}{\partial q_\mu}\right) = 0$$

kommt, und nehmen wir an, bei der Elimination der Constanten könne man von den Gleichungen (6.) nicht mehr als die eine $\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t}$ missen, während jede der übrigen Gleichungen $\frac{\partial V}{\partial q_\iota} = \frac{\partial f}{\partial q_\iota}$ dabei erfordert werde, so muss es möglich sein, *einer* der Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\mu$ einen besonderen Werth beizulegen, ohne dass eine der Gleichungen $\frac{\partial V}{\partial q_\iota} = \frac{\partial f}{\partial q_\iota}$ zur Elimination der Constanten erforderlich zu sein aufhört. Denn zwischen μ Gleichungen kann man im Allgemeinen nur $\mu-1$ Grössen eliminiren. Die Constante, der man den besonderen Werth beilegte, ist daher überflüssig (supervacanea), und die Function f ist so anzusehen, als enthielte sie nur $\mu-1$ Constanten. Daher ist $V = f + C$ nicht eine *vollständige* Lösung der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial V}{\partial t} + \psi = 0$, sondern nur der Gleichung $F = 0$, was unserer Voraussetzung widerspricht. Die Determinante R kann also nie Null werden, mithin ist der Schluss, den wir bei dem Beweise der Gleichungen (3.) machten, gültig.

Wir wollen zum Schluss dieser Vorlesung die partielle Differentialgleichung $\frac{\partial V}{\partial t} + \psi = 0$ für die freie Bewegung von n materiellen Punkten wirklich aufstellen. In diesem Fall ist $\psi = T - U$, für die Grössen q sind die $3n$ Coordinaten $x_\iota, y_\iota, z_\iota$ zu setzen, und es ist $T = \frac{1}{2}\Sigma m_\iota (x_\iota'^2 + y_\iota'^2 + z_\iota'^2)$; daraus folgt nach den Gleichungen $p = \frac{\partial T}{\partial q'}$, dass an die Stelle der Grössen p hier die Grössen $m_\iota x_\iota', m_\iota y_\iota', m_\iota z_\iota'$ treten. Da gleichzeitig $p = \frac{\partial V}{\partial q}$ zu setzen ist, so hat man die Gleichungen

$$m_\iota x_\iota' = \frac{\partial V}{\partial x_\iota}, \quad m_\iota y_\iota' = \frac{\partial V}{\partial y_\iota}, \quad m_\iota z_\iota' = \frac{\partial V}{\partial z_\iota}$$

oder

$$x_\iota' = \frac{1}{m_\iota}\frac{\partial V}{\partial x_\iota}, \quad y_\iota' = \frac{1}{m_\iota}\frac{\partial V}{\partial y_\iota}, \quad z_\iota' = \frac{1}{m_\iota}\frac{\partial V}{\partial z_\iota}.$$

Dies in T eingesetzt giebt

$$T = \frac{1}{2}\Sigma\frac{1}{m_\iota}\left(\left(\frac{\partial V}{\partial x_\iota}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y_\iota}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z_\iota}\right)^2\right),$$

und da U eine blosse Function der Zeit und der Grössen q d. h. der Coordinaten x_ι, y_ι, und z_ι ist, so hat man

$$(7.) \quad \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\Sigma\frac{1}{m_\iota}\left(\left(\frac{\partial V}{\partial x_\iota}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y_\iota}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z_\iota}\right)^2\right) = U.$$

Dies ist die partielle Differentialgleichung erster Ordnung, von deren Lösung die Integration der Differentialgleichungen der Bewegung in dem Fall abhängt, wo die Bewegung ganz frei ist, und wo eine Kräftefunction U existirt, welche ausser den Coordinaten auch die Zeit t explicite enthalten darf. Hat man eine vollständige Lösung der Gleichung (7.) d. h. einen Werth von V, der ausser der zu V hinzuzufügenden Constante $3n$ Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{3n}$ enthält, so sind die für $i = 1, 2, \dots 3n$ geltenden Gleichungen

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_i} = \beta_i$$

die Integralgleichungen der für $i = 1, 2, \dots n$ geltenden Differentialgleichungen der Bewegung

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z_i},$$

deren erste Integralgleichungen in dem System

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = m_i \frac{dx_i}{dt}, \quad \frac{\partial V}{\partial y_i} = m_i \frac{dy_i}{dt}, \quad \frac{\partial V}{\partial z_i} = m_i \frac{dz_i}{dt}$$

enthalten sind.

Einundzwanzigste Vorlesung.

Untersuchung des Falles, wo t nicht explicite vorkommt.

Eine besondere Betrachtung erfordert der schon oben hervorgehobene Fall, in welchem t in ψ nicht vorkommt. In diesem Fall kann die partielle Differentialgleichung $\frac{\partial V}{\partial t} + \psi = 0$ auf eine andere mit einer Variable weniger zurückgeführt werden. Dies beruht auf einer sehr merkwürdigen Transformation der partiellen Differentialgleichungen, durch welche die eine der unabhängigen Variablen und der nach derselben genommene partielle Differentialquotient ihre Rollen vertauschen.

Es werde z als Function der n Variablen $x_1, x_2, \dots x_n$ angesehen, so dass, wenn $p_1, p_2, \dots p_n$ die nach $x_1, x_2, \dots x_n$ genommenen partiellen Differentialquotienten von z bedeuten,

$$(1.) \qquad dz = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \dots + p_n dx_n$$

sei. Indem man das Glied $p_1 dx_1$ auf die linke Seite schafft und überdies $x_1 dp_1$

auf beiden Seiten abzieht, verwandelt sich die Gleichung (1.) in

$$d(z-p_1x_1) = -x_1dp_1+p_2dx_2+\cdots+p_ndx_n,$$

also, wenn wir

$$(2.)\qquad z-p_1x_1 = y$$

setzen, in

$$dy = -x_1dp_1+p_2dx_2+\cdots+p_ndx_n.$$

Daher hat man, wenn $y=z-p_1x_1$ als Function von $p_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ angesehen wird,

$$\frac{\partial y}{\partial p_1}=-x_1,\qquad \frac{\partial y}{\partial x_2}=p_2,\qquad \frac{\partial y}{\partial x_3}=p_3,\qquad \ldots\qquad \frac{\partial y}{\partial x_n}=p_n.$$

Genügt nun z der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung

$$(3.)\qquad 0=F(x_1,x_2,\ldots x_n,p_1,p_2,\ldots p_n)=F\left(x_1,x_2,\ldots x_n,\frac{\partial z}{\partial x_1},\frac{\partial z}{\partial x_2},\ldots\frac{\partial z}{\partial x_n}\right),$$

und führt man anstatt z die neue Variable $y=z-p_1x_1$, anstatt x_1 die neue Variable p_1 ein, so verwandelt sich die partielle Differentialgleichung (3.) in

$$(4.)\qquad 0 = F\left(-\frac{\partial y}{\partial p_1},x_2,x_3,\ldots x_n,p_1,\frac{\partial y}{\partial x_2},\frac{\partial y}{\partial x_3},\ldots\frac{\partial y}{\partial x_n}\right).$$

Diese Transformation, welche sich im dritten Bande von *Eulers* Integralrechnung findet, ist besonders dann von Wichtigkeit, wenn x_1 in (3.) nicht vorkommt; denn alsdann kommt gleichzeitig $\frac{\partial y}{\partial p_1}$ in (4.) nicht vor, und es kann daher p_1 bei der Integration als Constante angesehen werden. Wenden wir dies auf die Gleichung

$$(5.)\qquad \frac{\partial V}{\partial t}+\psi\left(q_1,q_2,\ldots q_\mu,\frac{\partial V}{\partial q_1},\frac{\partial V}{\partial q_2},\ldots\frac{\partial V}{\partial q_\mu}\right) = 0$$

an, wo in ψ kein t vorkommt, sodass in den eben gegebenen Formeln t an die Stelle von x_1 tritt. Für t ist jetzt eine neue unabhängige Variable

$$\alpha = \frac{\partial V}{\partial t},$$

für V eine neue abhängige Variable

$$W = V-t\frac{\partial V}{\partial t} = V-t\alpha$$

einzuführen, so dass

$$t = -\frac{\partial W}{\partial \alpha}$$

wird, und

$$\frac{\partial V}{\partial q_1}=\frac{\partial W}{\partial q_1},\qquad \frac{\partial V}{\partial q_2}=\frac{\partial W}{\partial q_2},\qquad \ldots\qquad \frac{\partial V}{\partial q_\mu}=\frac{\partial W}{\partial q_\mu}.$$

Wir können die Formeln für diese Transformation auch beweisen, ohne die Differentialgleichung

$$dV = p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_\mu dq_\mu + \frac{\partial V}{\partial t} dt$$

zu benutzen. In der That, V ist Function von t, q_1, q_2, ... q_μ und von den willkürlichen Constanten α_1, α_2, ... Setzen wir nun

$$W = V - t\frac{\partial V}{\partial t}$$

und führen in W für t eine neue Variable α vermittelst der Gleichung

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \alpha$$

ein, so wird t Function von α und von den ausser t in V vorkommenden Grössen, und

$$W = V - t\alpha$$

wird Function von α, q_1, q_2, ... q_μ und von den Constanten α_1, α_2, ... Unter Berücksichtigung der verschiedenen Bedeutung der Differentiationen für die Functionen V und W hat man daher

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha} = \frac{\partial V}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \alpha} - \alpha\frac{\partial t}{\partial \alpha} - t = -t,$$

$$\frac{\partial W}{\partial q_\iota} = \frac{\partial V}{\partial q_\iota} + \frac{\partial V}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial q_\iota} - \alpha\frac{\partial t}{\partial q_\iota} = \frac{\partial V}{\partial q_\iota},$$

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_\iota} = \frac{\partial V}{\partial \alpha_\iota} + \frac{\partial V}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \alpha_\iota} - \alpha\frac{\partial t}{\partial \alpha_\iota} = \frac{\partial V}{\partial \alpha_\iota}.$$

In dem Fall, wo in der Gleichung (5.) die Zeit t, wie wir annehmen, in ψ nicht explicite vorkommt, führt man also durch die Gleichungen

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \alpha, \qquad V - t\frac{\partial V}{\partial t} = W$$

für t und V die neuen Variablen α und W ein und transformirt hierdurch (5.) in

$$(6.) \qquad \alpha + \psi\left(q_1, q_2, \ldots q_\mu, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \frac{\partial W}{\partial q_2}, \ldots \frac{\partial W}{\partial q_\mu}\right) = 0.$$

Nach Integration dieser Gleichung findet man V aus der Gleichung $V - t\frac{\partial V}{\partial t} = W$, welche, nachdem $\frac{\partial V}{\partial t} = \alpha$, $t = -\frac{\partial W}{\partial \alpha}$ darin substituirt worden ist, in

$$V = W - \alpha\frac{\partial W}{\partial \alpha}$$

übergeht. In V muss überdies statt α wiederum t eingeführt werden und zwar vermittelst der Gleichung

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha} = -t,$$

welche nach α aufzulösen ist.

Es scheint auf den ersten Anblick, als wenn auf diesem Wege aus einer vollständigen Lösung W der Gleichung (6.) noch keine vollständige Lösung V der Gleichung (5.) folgte. Denn jene Lösung W enthält μ Constanten, die daraus abgeleitete Lösung V enthält daher ebenfalls μ Constanten, müsste aber, um eine vollständige zu sein, $\mu+1$ Constanten enthalten. Diese fehlende Constante kann man indessen leicht hineinbringen. Da nämlich t selbst in Gleichung (5.) nicht vorkommt, sondern nur $\frac{\partial V}{\partial t}$, so wird eine Lösung V der Gleichung (5.) nicht aufhören eine Lösung zu sein, wenn man t um eine willkürliche Constante vermehrt oder vermindert, also $t-\tau$ an Stelle von t setzt. Dadurch verwandelt sich die zwischen V und W bestehende Transformationsformel $W = V - t\frac{\partial V}{\partial t}$ in

$$W = V-(t-\tau)\frac{\partial V}{\partial t} = V-\alpha(t-\tau),$$

und t wird nicht mehr durch die Gleichung $\frac{\partial W}{\partial \alpha} = -t$, sondern durch die Gleichung

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha} = \tau - t$$

eingeführt. Alsdann enthält V die genügende Anzahl $\mu+1$ von Constanten, nämlich die $\mu-1$ Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{\mu-1}$, welche ausser der additiv zu W hinzuzufügenden in W vorkommen, die additive Constante selbst und die mit t verbundene Constante τ. Die Integralgleichungen der isoperimetrischen Differentialgleichungen sind daher

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_{\mu-1}} = \beta_{\mu-1} \quad \text{und} \quad \frac{\partial V}{\partial \tau} = \text{Const.}$$

Da τ nur in der Verbindung $t-\tau$ vorkommt, so ist

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} = -\frac{\partial V}{\partial t};$$

also kann die letzte der μ Integralgleichungen durch

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \text{Const.}$$

ersetzt werden. Hieraus geht hervor, dass die Gleichung $\frac{\partial V}{\partial t} = \alpha$, mittelst deren wir α für t einführten, ein Integral ist, und dass α als Constante betrachtet werden muss.

Wie wir gesehen haben, sind die beiden Gleichungen $\frac{\partial V}{\partial t} = \alpha$ und $\frac{\partial W}{\partial \alpha} = \tau - t$ gleichbedeutend, überdies sind die partiellen Differentialquotienten

$\frac{\partial V}{\partial \alpha_i}$ und $\frac{\partial W}{\partial \alpha_i}$, wo i eine der Zahlen 1 bis $\mu-1$ darstellt, einander gleich: also kann man die Integralgleichungen auch ohne Dazwischenkunft von V unmittelbar durch W darstellen und erhält dieselben unter der Form

$$(7.)\qquad \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_{\mu-1}} = \beta_{\mu-1}, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha} = \tau - t.$$

Ebenso kann man das System der ersten Integralgleichungen

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial V}{\partial q_2} = p_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial V}{\partial q_\mu} = p_\mu$$

durch W darstellen und erhält, da $\frac{\partial V}{\partial q_i} = \frac{\partial W}{\partial q_i}$ ist, dasselbe unter der Form

$$(8.)\qquad \frac{\partial W}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial W}{\partial q_2} = p_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial W}{\partial q_\mu} = p_\mu.$$

Im Fall der Mechanik ist $\psi = T - U$, und man hat daher den Satz:

Wenn die Kräftefunction U die Zeit t nicht explicite enthält, so dass der Satz der lebendigen Kraft gilt, so drücke man die halbe lebendige Kraft T durch die Grössen q_i und $p_i = \frac{\partial T}{\partial q_i'}$ aus. Hierauf setze man in der Gleichung der lebendigen Kraft,

$$0 = \alpha + \psi = \alpha + T - U,$$

$\frac{\partial W}{\partial q_i}$ an Stelle von p_i, so dass diese Gleichung in eine partielle Differentialgleichung für W übergeht. Kennt man eine vollständige Lösung derselben, welche ausser der mit W additiv verbundenen Constante die $\mu-1$ Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{\mu-1}$ enthält, so sind

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_{\mu-1}} = \beta_{\mu-1}, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha} = \tau - t$$

die Integralgleichungen der Differentialgleichungen der Bewegung, zu welchen man noch die Gleichungen

$$\frac{\partial W}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial W}{\partial q_2} = p_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial W}{\partial q_{\mu-1}} = p_{\mu-1}, \quad \frac{\partial W}{\partial q_\mu} = p_\mu$$

als das System der ersten Integralgleichungen hinzufügen kann.

Die 2μ in den Integralgleichungen enthaltenen Constanten sind

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{\mu-1}, \alpha,$$
$$\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{\mu-1}, \tau.$$

Im Fall eines ganz freien Systems ist $\mu = 3n$, zugleich treten an die Stelle der Grössen p_ι die Grössen

$$m_\iota x'_\iota,\quad m_\iota y'_\iota,\quad m_\iota z'_\iota,$$

es wird

$$T = \tfrac{1}{2}\Sigma\frac{1}{m_\iota}\{(m_\iota x'_\iota)^2+(m_\iota y'_\iota)^2+(m_\iota z'_\iota)^2\}$$

und die partielle Differentialgleichung nimmt die Form an:

$$\tfrac{1}{2}\Sigma\frac{1}{m_\iota}\left\{\left(\frac{\partial W}{\partial x_\iota}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial y_\iota}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial z_\iota}\right)^2\right\} = U-\alpha.$$

Zweiundzwanzigste Vorlesung.

Lagranges Methode der Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen. Anwendung auf die mechanischen Probleme, welche nur von zwei Bestimmungsstücken abhängen. Die freie Bewegung eines Punkts in der Ebene und die kürzeste Linie auf einer Oberfläche.

Nachdem wir die mechanischen Probleme auf die Integration einer nicht linearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung zurückgeführt haben, müssen wir uns mit der Integration derselben, d. h. mit der Aufsuchung einer vollständigen Lösung, beschäftigen.

Im dritten Theil von *Eulers* Integralrechnung kommen sehr schöne Untersuchungen über die Integration der partiellen Differentialgleichungen vor. Er behandelt zwar immer nur besondere Fälle, indessen ist er so glücklich in der Auffindung derselben, dass sich meistentheils durch die später gefundene allgemeine Methode seinen Resultaten wenig oder nichts hinzusetzen lässt. *Eulers* Arbeiten haben überhaupt das grosse Verdienst, dass überall die Fälle möglichst vollständig angegeben sind, in welchen sich durch die angegebenen Methoden und Mittel Probleme vollständig auflösen lassen. Seine Beispiele geben daher immer den ganzen Inhalt seiner Methoden nach dem damaligen Stande der Wissenschaft, und es ist in der Regel eine Bereicherung der Wissenschaft, wenn man den *Euler*schen Beispielen ein neues hinzusetzen kann, da ihm selten ein durch seine Mittel lösbares entgangen ist.

Lagrange hat seine allgemeine Integrationsmethode der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, welche ein durchaus neuer Gedanke in der Integralrechnung ist, zuerst in einer Abhandlung gegeben, welche zu den Schriften der Berliner Akademie vom Jahre 1772 gehört. In dieser Abhandlung ist die Zurückführung der nicht linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung auf lineare enthalten; es werden die Begriffe der vollständigen und allgemeinen Lösungen aufgestellt, die letzteren aus den ersteren hergeleitet und die Methoden zur Auffindung der vollständigen Lösungen angegeben. Alles beschränkt sich aber nur auf den Fall von drei Variablen, von welchen zwei von einander unabhängig sind. *Lagranges* Methode ist folgende.

Es sei die partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$\Psi(x, y, z, p, q) = 0$$

vorgelegt, wo x, y die unabhängigen Variablen sind, z die abhängige, und

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y},$$

sodass zwischen den Differentialen der drei Variablen die Relation

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

besteht. Die vorgelegte Differentialgleichung gebe nach q aufgelöst

$$q = \chi(x, y, z, p),$$

dann hat man

$$dz = p\,dx + \chi(x, y, z, p)\,dy.$$

Um eine vollständige Lösung z zu finden, d. h. eine Lösung, welche zwei willkürliche Constanten enthält, ist es offenbar nur nöthig, einen Werth $p = \varpi(x, y, z, a)$ zu finden, welcher, in den Ausdruck $p\,dx + \chi\,dy$ substituirt, denselben zu einem vollständigen Differential macht, worauf z aus der Gleichung $dz = p\,dx + \chi\,dy$ zu bestimmen übrig bleibt. Das Letztere erfordert die Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung, durch welche in z ausser a eine zweite Constante b eintritt. Es kommt also darauf an, p als Function ϖ von x, y, z und einer willkürlichen Constante a so zu bestimmen, dass der Ausdruck $p\,dx + \chi(x, y, z, p)\,dy$ ein vollständiges Differential wird. Hierzu ist erforderlich, dass p nach y differentiirt denselben Werth gebe wie χ nach x differentiirt, d. h. es muss die Gleichung

$$\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial \chi}{\partial x} + \frac{\partial \chi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial \chi}{\partial p}\left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

oder

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} + \frac{\partial \chi}{\partial z}p = -\frac{\partial \chi}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} + \left(\chi - \frac{\partial \chi}{\partial p}p\right)\frac{\partial p}{\partial z}$$

erfüllt werden. Dies ist, da χ eine bekannte Function von x, y, z, p ist, eine *lineare* partielle Differentialgleichung für p, welche drei unabhängige Variable x, y, z enthält, und das vorliegende Problem ist also darauf zurückgeführt, von dieser linearen partiellen Differentialgleichung für p *eine* Lösung $p = \varpi(x, y, z, a)$ mit einer willkürlichen Constante a zu finden. Der Umstand, dass man nur *eine* solche Lösung zu kennen braucht, wird von *Lagrange* umständlich hervorgehoben.

Betrachten wir jetzt allein den Fall, wo z selbst in Ψ und daher auch in χ nicht enthalten ist, wo also die vorgelegte partielle Differentialgleichung die einfachere Form

$$(1.) \qquad \Psi(x, y, p, q) = 0$$

hat. In diesem Fall kann man auch p als Function von x, y, a ohne z so bestimmen, dass $p\,dx + \chi\,dy$ ein vollständiges Differential wird. Da jetzt sowohl $\frac{\partial \chi}{\partial z}$ als $\frac{\partial p}{\partial z}$ verschwinden, so reducirt sich die lineare partielle Differentialgleichung für p auf

$$\frac{\partial \chi}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \chi}{\partial x} = 0.$$

Statt aber die vorgelegte partielle Differentialgleichung (1.) nach q aufgelöst anzunehmen, wollen wir dieselbe vielmehr in ihrer ursprünglichen Gestalt in die Rechnung einführen. Denken wir uns ferner die Gleichung $p = \varpi(x, y, a)$ nicht nach p, sondern nach a aufgelöst, also auf die Form $f(x, y, p) = a$ gebracht, so haben wir uns der Formeln

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial \Psi}{\partial x}}{\frac{\partial \Psi}{\partial q}}, \qquad \frac{\partial \chi}{\partial p} = \frac{\partial q}{\partial p} = -\frac{\frac{\partial \Psi}{\partial p}}{\frac{\partial \Psi}{\partial q}},$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial p}}, \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial p}}$$

zu bedienen, und indem wir diese Werthe in die obige lineare partielle Differentialgleichung für p einsetzen, geht dieselbe in die folgende lineare partielle Differentialgleichung für f über:

$$(2.) \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial q}\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial p} = 0.$$

Kennt man von derselben eine Lösung f ohne Constante, so bedarf es im vorliegenden Fall zur Bestimmung der vollständigen Lösung z von (1.) keiner weiteren Integration einer Differentialgleichung. Denn man setze jene Lösung f einer willkürlichen Constante a gleich und bestimme aus der Gleichung

$$f(x, y, p) = a$$

in Verbindung mit der vorgelegten Differentialgleichung

$$\Psi(x, y, p, q) = 0$$

p und q als Functionen von x und y, so sind dieselben von der Beschaffenheit, dass $p\,dx + q\,dy$ ein vollständiges Differential wird, da die dafür erforderliche Bedingung (2.) erfüllt ist, und man erhält daher z aus der Formel

$$z = \int (p\,dx + q\,dy)$$

durch blosse Quadratur, so dass die zweite in der vollständigen Lösung z enthaltene willkürliche Constante additiv mit z verbunden ist, was sich voraussehen liess, da in Gleichung (1.) z selbst fehlt.

Es kommt also nur darauf an, *eine* Lösung der linearen partiellen Differentialgleichung (2.) zu finden, in welcher die partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial \Psi}{\partial p}$, $\frac{\partial \Psi}{\partial q}$, $\frac{\partial \Psi}{\partial x}$ vermöge der Gleichung (1.) als Functionen von x, y und p ohne q dargestellt vorausgesetzt sind. Aber bekanntlich ist diese lineare partielle Differentialgleichung (2.) nichts anderes *), als die Definitionsgleichung derjenigen Functionen f von x, y, p, welche einer Constante a gleich gesetzt ein Integral des Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$(3.) \qquad dx : dy : dp = \frac{\partial \Psi}{\partial p} : \frac{\partial \Psi}{\partial q} : -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

geben. Die ganze Untersuchung ist also darauf zurückgeführt, *ein* Integral des Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen (3.) zu finden.

Wir können dieses System noch dadurch vervollständigen, dass wir vermittelst der Gleichung $\Psi = 0$ die Grösse aufsuchen, welcher dq proportional ist. Die Gleichung $\Psi = 0$ differentiirt giebt

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Psi}{\partial p} dp + \frac{\partial \Psi}{\partial q} dq = 0.$$

Aber nach den Differentialgleichungen (3.) hat man die Proportion

$$dx : dp = \frac{\partial \Psi}{\partial p} : -\frac{\partial \Psi}{\partial x},$$

*) Siehe zehnte Vorlesung p. 75.

so dass $\frac{\partial \Psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Psi}{\partial p} dp$ für sich verschwindet: es muss daher auch $\frac{\partial \Psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Psi}{\partial q} dq$ für sich verschwinden, und man erhält

$$dy : dq = \frac{\partial \Psi}{\partial q} : -\frac{\partial \Psi}{\partial y}.$$

Das System (3.) lautet daher vollständig:

$$(4.) \qquad dx : dy : dp : dq = \frac{\partial \Psi}{\partial p} : \frac{\partial \Psi}{\partial q} : -\frac{\partial \Psi}{\partial x} : -\frac{\partial \Psi}{\partial y},$$

ein in Beziehung auf x und p einerseits, und y und q andrerseits symmetrisches Resultat, was eine Probe für die Richtigkeit der Rechnung ist. Dieses System tritt an die Stelle von (3.), wenn wir die Integrationsmethode dahin verallgemeinern, dass wir in die Function f auch q eintreten lassen. Wir können nämlich die Gleichung $f(x, y, p) = a$ als das Resultat der Elimination von q zwischen einer Gleichung

$$(5.) \qquad F(x, y, p, q) = a$$

und $\Psi(x, y, p, q) = 0$ ansehen, so dass, wenn, wie oben, χ den aus der Auflösung der Gleichung $\Psi = 0$ hervorgehenden Werth von q bezeichnet, identisch

$$F(x, y, p, \chi) = f(x, y, p)$$

wird. Daher muss $F(x, y, p, \chi)$ der linearen partiellen Differentialgleichung (2.) genügen, was für F zu der Differentialgleichung

$$\frac{\partial \Psi}{\partial p}\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial q}\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial p} + \frac{\partial F}{\partial \chi}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial p}\frac{\partial \chi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial q}\frac{\partial \chi}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{\partial \chi}{\partial p}\right) = 0$$

führt. Aber da χ die Gleichung $\Psi(x, y, p, \chi) = 0$ identisch befriedigt, so hat man

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial \Psi}{\partial x}}{\frac{\partial \Psi}{\partial \chi}}, \quad \frac{\partial \chi}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial \Psi}{\partial y}}{\frac{\partial \Psi}{\partial \chi}}, \quad \frac{\partial \chi}{\partial p} = -\frac{\frac{\partial \Psi}{\partial p}}{\frac{\partial \Psi}{\partial \chi}}.$$

Hierdurch reducirt sich der auf der linken Seite der obigen Gleichung in $\frac{\partial F}{\partial \chi}$ multiplicirte Ausdruck auf $-\frac{\partial \Psi}{\partial y}$, und man erhält

$$(6.) \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial p}\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial q}\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial p} - \frac{\partial \Psi}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial q} = 0,$$

woraus hervorgeht, dass $F = a$ in der That ein Integral des Systems von Differentialgleichungen (4.) ist. Da $f(x, y, p) = a$ das Resultat der Elimination von q zwischen $F(x, y, p, q) = a$ und $\Psi(x, y, p, q) = 0$ ist, so folgen aus den Gleichungen $F(x, y, p, q) = a$ und $\Psi(x, y, p, q) = 0$ dieselben Werthe von p und q, wie aus $f(x, y, p) = a$ und $\Psi(x, y, p, q) = 0$. Berücksichtigt man überdies, dass $\Psi = 0$ ein Integral der Differentialgleichungen (4.) ist und zwar ein allgemeines, wenn in der Function Ψ eine additiv mit derselben verbundene Constante enthalten ist, sonst aber ein particulares, so kann man das gewonnene Ergebniss in den folgenden Satz zusammenfassen:

Ist die partielle Differentialgleichung

$$(1.) \qquad \Psi(x, y, p, q) = 0$$

gegeben, wo $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$, *so bilde man das System gewöhnlicher Differentialgleichungen*

$$(4.) \qquad dx : dy : dp : dq = \frac{\partial \Psi}{\partial p} : \frac{\partial \Psi}{\partial q} : -\frac{\partial \Psi}{\partial x} : -\frac{\partial \Psi}{\partial y}.$$

Kennt man von demselben ausser dem a priori gegebenen Integral $\Psi = 0$ *noch ein zweites,*

$$(5.) \qquad F(x, y, p, q) = a,$$

so bestimme man aus (1.) *und* (5.) p *und* q *als Functionen von* x *und* y: *dann erhält man* z *durch die Formel*

$$z = \int (p\,dx + q\,dy)$$

vermittelst einer blossen Quadratur.

Die Gleichungen (4.) sind von derselben Form, wie die Differentialgleichungen der Bewegung, nur sind an die Stelle der Grössen q_1, q_2, p_1, p_2, $\psi + \alpha$, W hier die Grössen x, y, p, q, Ψ, z getreten. Folglich erhalten wir eine neue Integralgleichung von (4.), wenn wir z, nach einer darin enthaltenen willkürlichen Constante differentiirt, einer willkürlichen Constante gleich setzen. Eine solche in z enthaltene Constante ist a, wir haben somit in der Gleichung

$$\frac{\partial z}{\partial a} = \int \left(\frac{\partial p}{\partial a} dx + \frac{\partial q}{\partial a} dy \right) = b$$

das dritte Integral des Systems (4.). Dass wir zu demselben durch blosse Quadratur gelangt sind, ist ein bedeutender Nutzen, den wir aus der Zurückführung des Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen (4.) auf die partielle Differentialgleichung (1.) gezogen haben. Fügen wir, um die Analogie der Differentialgleichungen der Bewegung vollständig durchzuführen, zu der Proportion (4.) auf der linken Seite dt, auf der rechten 1 hinzu, so wird, wie wir in der vorigen Vorlesung gesehen haben, t durch die Gleichung

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha} = \int \left(\frac{\partial p}{\partial \alpha} dx + \frac{\partial q}{\partial \alpha} dy \right) = \tau - t$$

bestimmt, wo α die in $\Psi = \psi + \alpha$ enthaltene Constante ist.

Nachdem *Hamilton* die Zurückführung auf eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung gefunden hatte, brauchte man also auf dieselbe nur die seit 65 Jahren bekannten Methoden anzuwenden, um für alle Probleme der Mechanik, welche nur zwei Bestimmungsstücke q_1 und q_2 enthalten, ein wichtiges Resultat zu gewinnen.

Gilt für die betrachteten mechanischen Probleme der Satz der lebendigen Kraft, so hat in der Gleichung $0 = \Psi = \alpha + \psi$ die Function ψ den Werth

$$\psi = T - U;$$

die Gleichung

$$T = U - \alpha,$$

welche den Satz der lebendigen Kraft ausdrückt, und in welcher U Function von q_1, q_2 allein, T Function von q_1, q_2, p_1, p_2 ist, geht nach Einsetzung der Werthe $p_1 = \frac{\partial W}{\partial q_1}$, $p_2 = \frac{\partial W}{\partial q_2}$ in die partielle Differentialgleichung für W über, und die Differentialgleichungen der Bewegung heissen

$$dt : dq_1 : dq_2 : dp_1 : dp_2 = 1 : \frac{\partial \psi}{\partial p_1} : \frac{\partial \psi}{\partial p_2} : -\frac{\partial \psi}{\partial q_1} : -\frac{\partial \psi}{\partial q_2}.$$

Das zur Bestimmung der vollständigen Lösung W nothwendige zweite von t freie Integral dieser Differentialgleichungen sei

$$F(q_1, q_2, p_1, p_2) = a,$$

alsdann hat man

$$W = \int (p_1 dq_1 + p_2 dq_2),$$

das dritte von t freie Integral der Differentialgleichungen der Bewegung ist

$$\frac{\partial W}{\partial a} = b,$$

und t wird durch die Gleichung

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha} = \tau - t$$

eingeführt. Dies Resultat kann man unabhängig von der Theorie der partiellen Differentialgleichungen so aussprechen:

Wenn man für ein Problem der Mechanik, welches nur zwei Bestimmungsstücke q_1, q_2 enthält, und in welchem der Satz der lebendigen Kraft

$T = U - \alpha$ *gilt, ausserdem noch ein Integral* $F(q_1, q_2, p_1, p_2) = a$ *kennt, wo* $p_1 = \frac{\partial T}{\partial q_1'}$, $p_2 = \frac{\partial T}{\partial q_2'}$, *so bestimme man aus den Gleichungen* $\psi = T - U = -\alpha$ *und* $F = a$ *die Grössen* p_1 *und* p_2 *als Functionen von* q_1, q_2, a *und* α*; dann sind die beiden übrigen Integrale durch die Gleichungen*

$$\int \left(\frac{\partial p_1}{\partial a} dq_1 + \frac{\partial p_2}{\partial a} dq_2 \right) = b,$$

$$\int \left(\frac{\partial p_1}{\partial \alpha} dq_1 + \frac{\partial p_2}{\partial \alpha} dq_2 \right) = \tau - t$$

gegeben, sodass in diesen vier Integralen die vollständige Integration der Differentialgleichungen der Bewegung, d. h. des Systems

$$dt : dq_1 : dq_2 : dp_1 : dp_2 = 1 : \frac{\partial \psi}{\partial p_1} : \frac{\partial \psi}{\partial p_2} : -\frac{\partial \psi}{\partial q_1} : -\frac{\partial \psi}{\partial q_2}$$

enthalten ist.

Dies sind ganz neue Formeln; sie gelten z. B. für die Bewegung eines Punkts in der Ebene oder auf einer krummen Oberfläche, wenn der Satz der lebendigen Kraft gilt.

Für die freie Bewegung in der Ebene hat man, wenn die Masse des Punkts der Einheit gleich gesetzt wird,

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y},$$

$$T = \tfrac{1}{2}(x'^2 + y'^2),$$

und der Satz der lebendigen Kraft ist in dem Integral

$$\tfrac{1}{2}(x'^2 + y'^2) = U - \alpha$$

enthalten. Kennt man ein zweites Integral, d. h. eine zweite Gleichung, nach welcher eine Function von x, y, x', y' einer willkürlichen Constante a gleich wird, und bestimmt man aus beiden x' und y' als Functionen von x, y, a, α, so ist die Gleichung der Trajectorie

$$\int \left(\frac{\partial x'}{\partial a} dx + \frac{\partial y'}{\partial a} dy \right) = b,$$

und die Zeit wird durch die Gleichung

$$\int \left(\frac{\partial x'}{\partial \alpha} dx + \frac{\partial y'}{\partial \alpha} dy \right) = \tau - t$$

eingeführt.

Diese Formeln habe ich als die einfachste Frucht der Zurückführung mechanischer Probleme auf partielle Differentialgleichungen bereits im Jahre 1836 der Pariser Akademie mitgetheilt. Bei dem Interesse, welches dieselben in Anspruch nehmen, und da sie sich auf den elementarsten Fall der Mechanik beziehen, verdienen sie in den Lehrbüchern derselben eine Stelle zu finden. In den Unterricht an der polytechnischen Schule sind sie bereits übergegangen. *Poisson* hat in *Liouvilles* Journal *) einen Beweis oder vielmehr eine Verification derselben gegeben.

Ein zweiter in den obigen Formeln enthaltener Fall ist der, wo sich ein Punkt, nur von einem anfänglichen Stoss getrieben, auf einer gegebenen Oberfläche bewegt. Ein solcher Punkt beschreibt die kürzeste Linie, deren Bestimmung von einer Differentialgleichung zweiter Ordnung abhängt. Nach den früheren Betrachtungen ergiebt sich, dass, wenn man von dieser Differentialgleichung ein Integral kennt, man hieraus die zwischen den Coordinaten allein stattfindende Gleichung der Trajectorie durch blosse Quadratur herleitet. Da in diesem Falle die Kräftefunction U verschwindet, so wird die partielle Differentialgleichung

$$T+\alpha = 0.$$

Sind x, y, z die Coordinaten des sich bewegenden Punkts, so wird

$$2T = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}.$$

Man sehe x, y als die oben mit q_1, q_2 bezeichneten Bestimmungsstücke an, dann hat man den aus der Gleichung der Oberfläche hervorgehenden Werth

$$dz = p\,dx+q\,dy$$

einzusetzen und erhält

$$2T = \frac{dx^2+dy^2+(p\,dx+q\,dy)^2}{dt^2}$$

oder

$$2T = x'^2+y'^2+(px'+qy')^2.$$

Sind ξ, η die oben mit p_1, p_2 bezeichneten Grössen, so wird

$$\xi = \frac{\partial T}{\partial x'} = x'+p(px'+qy'),$$

$$\eta = \frac{\partial T}{\partial y'} = y'+q(px'+qy'),$$

$$p\xi+q\eta = (1+p^2+q^2)(px'+qy').$$

Indem man

$$N = 1+p^2+q^2$$

---

*) Bd. 2. p. 335.

setzt, findet man durch Auflösung nach x', y'

$$x' = \xi - \frac{p}{N}(p\xi + q\eta),$$

$$y' = \eta - \frac{q}{N}(p\xi + q\eta),$$

und da man auf T, als homogene Function zweiter Ordnung in x' und y', die Formel

$$2T = \frac{\partial T}{\partial x'}x' + \frac{\partial T}{\partial y'}y' = \xi x' + \eta y'$$

anwenden kann, so ergiebt sich

$$2T = \xi^2 + \eta^2 - \frac{(p\xi + q\eta)^2}{1+p^2+q^2} = \frac{(1+q^2)\xi^2 + (1+p^2)\eta^2 - 2pq\xi\eta}{1+p^2+q^2}.$$

Die partielle Differentialgleichung in W wird daher:

$$0 = (1+q^2)\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + (1+p^2)\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 - 2pq\frac{\partial W}{\partial x}\frac{\partial W}{\partial y} + 2\alpha(1+p^2+q^2).$$

Diese Gleichung lässt sich durch Einführung zweier neuen Variablen an der Stelle von x und y in mannigfacher Weise transformiren. Ein Beispiel dafür wird in der Folge die Substitution liefern, mit deren Hülfe wir die kürzeste Linie auf dem dreiaxigen Ellipsoid bestimmen.

Die angeführten Fälle gehören zugleich unter die Anwendungen des Princips des letzten Multiplicators, welches die letzte Integration bei mechanischen Problemen mit beliebig grosser Anzahl von Bestimmungsstücken leistet. Wir sind so durch ganz verschiedene Betrachtungen zu demselben Resultat gelangt.

Dreiundzwanzigste Vorlesung.

Reduction der partiellen Differentialgleichung für diejenigen Probleme, in welchen das Princip der Erhaltung des Schwerpunkts gilt.

Wir wollen jetzt untersuchen, welcher Nutzen für die partielle Differentialgleichung aus dem Principe der Erhaltung des Schwerpunkts zu ziehen ist.

Sobald sich die Variablen so wählen lassen, dass eine derselben in der partiellen Differentialgleichung $T = U - \alpha$ nicht selbst vorkommt, sondern nur der nach dieser Variable genommene Differentialquotient von W, so können wir durch dieselbe Art der Transformation, durch welche W aus V hergeleitet wurde, die in Rede stehende Variable aus der Differentialgleichung fortschaffen und so die Anzahl der in ihr vorkommenden Variablen vermindern.

Betrachten wir den Fall eines freien Systems von n materiellen Punkten, wo $T = \frac{1}{2}\Sigma m_i(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2)$, so haben wir (siehe einundzwanzigste Vorlesung p. 168) die partielle Differentialgleichung

$$(1.) \qquad \tfrac{1}{2}\Sigma \frac{1}{m_i}\left(\left[\frac{\partial W}{\partial x_i}\right]^2 + \left[\frac{\partial W}{\partial y_i}\right]^2 + \left[\frac{\partial W}{\partial z_i}\right]^2\right) = U - \alpha.$$

Gilt das Princip der Erhaltung des Schwerpunkts, so hängt U nur von den Differenzen der Coordinaten ab, also lässt sich, wenn man

$$\xi_1 = x_1 - x_n, \quad \xi_2 = x_2 - x_n, \quad \dots \quad \xi_{n-1} = x_{n-1} - x_n$$

setzt, U, insofern es Function der x-Coordinaten ist, blos durch die Grössen ξ darstellen. Bezeichnet man die partiellen Differentialquotienten von W mit eckigen Klammern, in welche man sie einschliesst, oder ohne dieselben, jenachdem man W als Function von $x_1, x_2, \dots x_{n-1}, x_n$, oder als Function von $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_{n-1}, x_n$ ansieht, so erhält man

$$\left[\frac{\partial W}{\partial x_1}\right] = \frac{\partial W}{\partial \xi_1}, \quad \left[\frac{\partial W}{\partial x_2}\right] = \frac{\partial W}{\partial \xi_2}, \quad \dots \quad \left[\frac{\partial W}{\partial x_{n-1}}\right] = \frac{\partial W}{\partial \xi_{n-1}},$$

$$\left[\frac{\partial W}{\partial x_n}\right] = -\left(\frac{\partial W}{\partial \xi_1} + \frac{\partial W}{\partial \xi_2} + \dots + \frac{\partial W}{\partial \xi_{n-1}}\right) + \frac{\partial W}{\partial x_n},$$

und mit Benutzung dieser Formeln ergiebt sich für die in Gleichung (1.) vorkommende Summe $\Sigma \frac{1}{m_i}\left[\frac{\partial W}{\partial x_i}\right]^2$ die neue Darstellung

$$(2.) \qquad \Sigma \frac{1}{m_i}\left[\frac{\partial W}{\partial x_i}\right]^2 = \Sigma \frac{1}{m_s}\left(\frac{\partial W}{\partial \xi_s}\right)^2 + \frac{1}{m_n}\left(\frac{\partial W}{\partial x_n} - \Sigma \frac{\partial W}{\partial \xi_s}\right)^2,$$

wo die auf das reihende Element i sich beziehende Summe von 1 bis n, die auf das reihende Element s sich beziehenden von 1 bis $n-1$ auszudehnen sind. Nach Einführung dieser Darstellung in die partielle Differentialgleichung (1.) sind die ursprünglichen Variablen $x_1, x_2, \dots x_{n-1}, x_n$ vollständig durch $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_{n-1}, x_n$ ersetzt, und die Variable x_n kommt nicht mehr selbst vor, sondern nur die nach derselben genommene Ableitung von W. Daher ist für x_n die neue Variable α' vermittelst der Gleichung

$$\frac{\partial W}{\partial x_n} = \alpha'$$

einzuführen, und für W die neue als Function von $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_{n-1}$ und α anzusehende Variable

$$W_1 = W + (\alpha_0 - x_n)\frac{\partial W}{\partial x_n},$$

wo α_0 eine willkürliche Constante bedeutet. Mit Benutzung der Gleichungen

$$\frac{\partial W_1}{\partial \xi_1} = \frac{\partial W}{\partial \xi_1}, \quad \frac{\partial W_1}{\partial \xi_2} = \frac{\partial W}{\partial \xi_2}, \quad \ldots \quad \frac{\partial W_1}{\partial \xi_{n-1}} = \frac{\partial W}{\partial \xi_{n-1}}$$

geht der Ausdruck (2.) jetzt in

$$(3.) \qquad \Sigma \frac{1}{m_i}\left[\frac{\partial W}{\partial x_i}\right]^2 = \Sigma \frac{1}{m_s}\left(\frac{\partial W_1}{\partial \xi_s}\right)^2 + \frac{1}{m_n}\left(\alpha' - \Sigma \frac{\partial W_1}{\partial \xi_s}\right)^2$$

über, und indem man die rechte Seite von (3.) in (1.) substituirt und berücksichtigt, dass bei der Differentiation nach y_i oder z_i die Ableitungen von W und W_1 einander gleich sind, verwandelt sich (1.) in eine partielle Differentialgleichung für W_1, in welcher die Variable α' nur selbst vorkommt, aber nicht der Differentialquotient $\frac{\partial W_1}{\partial \alpha'}$. Um von den Variablen α' und W_1 wiederum rückwärts den Uebergang zu x_n und W zu machen, bedient man sich der Gleichungen

$$\frac{\partial W_1}{\partial \alpha'} = \alpha_0 - x_n, \qquad W = W_1 - \alpha' \frac{\partial W_1}{\partial \alpha'}.$$

Man kann den Ausdruck (3.) noch mehr vereinfachen, wenn man die in Beziehung auf die partiellen Differentialquotienten der abhängigen Variable linearen Glieder durch eine neue Transformation herausschafft, die der Reduction der Gleichung eines Kegelschnitts auf seinen Mittelpunkt analog ist. Setzt man nämlich

$$W_1 = W_2 + \Sigma g_s \xi_s,$$

wo $g_1, g_2, \ldots g_{n-1}$ noch zu bestimmende Constanten bedeuten, so dass

$$\frac{\partial W_1}{\partial \xi_s} = \frac{\partial W_2}{\partial \xi_s} + g_s$$

wird, so geht der Ausdruck (3.) in

$$(4.) \qquad \Sigma \frac{1}{m_i}\left[\frac{\partial W}{\partial x_i}\right]^2 = \Sigma \frac{1}{m_s}\left\{\frac{\partial W_2}{\partial \xi_s} + g_s\right\}^2 + \frac{1}{m_n}\left\{\alpha' - \Sigma g_s - \Sigma \frac{\partial W_2}{\partial \xi_s}\right\}^2$$

über. Ist s' einer der Indices s, sucht man auf der rechten Seite von (4.) das in die erste Potenz von $\frac{\partial W_2}{\partial \xi_{s'}}$ multiplicirte Glied auf und setzt seinen Coefficienten gleich Null, so erhält man

$$(5.) \qquad \frac{g_{s'}}{m_{s'}} - \frac{\alpha' - \Sigma g_s}{m_n} = 0.$$

Diese Gleichung muss für die $n-1$ Werthe von s' gelten. Multiplicirt man dieselbe mit $m_{s'}$ und summirt von $s' = 1$ bis $s' = n-1$, so ergiebt sich zunächst der Werth von Σg_s, nämlich

$$\left(1+\frac{\Sigma m_s}{m_n}\right)\Sigma g_s = \frac{\alpha' \Sigma m_s}{m_n},$$

oder wenn man wie in der dritten Vorlesung die Bezeichnung

$$M = m_1+m_2+\cdots+m_n = \Sigma m_s + m_n$$

einführt,

$$\Sigma g_s = \alpha'\left(1-\frac{m_n}{M}\right),$$

$$\alpha'-\Sigma g_s = \frac{\alpha'}{M}m_n,$$

und indem man dies in (5.) einsetzt, findet man für $g_{s'}$ den einfachen Werth

$$g_{s'} = \frac{\alpha'}{M}m_{s'},$$

so dass die Transformationsformel von W_1 in W_2 folgendermassen bestimmt ist:

$$(6.) \qquad W_1 = W_2+\frac{\alpha'}{M}\Sigma m_s \xi_s.$$

Durch Substitution der Werthe von g_s in (4.) wird der von den Grössen $\frac{\partial W_2}{\partial \xi_s}$ unabhängige Theil jenes Ausdrucks

$$\Sigma\frac{1}{m_s}g_s^2+\frac{1}{m_n}\{\alpha'-\Sigma g_s\}^2 = \frac{\alpha'^2}{M},$$

und man erhält

$$(7.) \qquad \Sigma\frac{1}{m_i}\left[\frac{\partial W}{\partial x_i}\right]^2 = \Sigma\frac{1}{m_s}\left(\frac{\partial W_2}{\partial \xi_s}\right)^2+\frac{1}{m_n}\left(\Sigma\frac{\partial W_2}{\partial \xi_s}\right)^2+\frac{\alpha'^2}{M}.$$

Wenn man diesen Ausdruck in die Gleichung (1.) einsetzt und berücksichtigt, dass W_1 von W_2 um Grössen unterschieden ist, die von den Variablen y_i und z_i nicht abhängen, dass also bei der Differentiation nach y_i oder z_i nicht nur die Ableitungen von W und W_1, sondern auch die von W_1 und W_2 einander gleich sind, so geht die Gleichung (1.) in eine partielle Differentialgleichung für die abhängige Variable W_2 über. Diese Differentialgleichung enthält nicht mehr $3n$ unabhängige Variable x_i, y_i, z_i, sondern nur noch $3n-1$; denn die n Variablen x sind durch die $n-1$ Variablen ξ ersetzt, und die neu eingeführte Grösse α' ist als Constante zu betrachten, da der nach derselben genommene Differentialquotient von W_2 nicht vorkommt. Nachdem man die partielle Differentialgleichung für W_2 integrirt und vermöge Gleichung (6.) W_1 aus W_2 bestimmt hat, geschieht, wie schon oben bemerkt, die Einführung von x_n vermöge der Gleichung $\frac{\partial W_1}{\partial \alpha'} = \alpha_0 - x_n$, welche nach Ersetzung von

W_1 durch W_2 in

$$\alpha_0 - x_n = \frac{\partial W_2}{\partial \alpha'} + \frac{1}{M} \Sigma m_s \xi_s$$

übergeht. Diese Gleichung ist zugleich ein Integral der Differentialgleichungen der Bewegung, welche sich auf die partielle Differentialgleichung (1.) zurückführen lassen, und zwar dasjenige, welches nach Aufstellung der zwischen den $3n-1$ Variablen ξ_s, y_i und z_i bestehenden Integrale hinzuzufügen ist, ganz ähnlich, wie die Gleichung $\tau - t = \frac{\partial W}{\partial \alpha} = \frac{\partial W_2}{\partial \alpha}$, durch welche hierauf t eingeführt wird, zugleich das letzte Integral bildet.

Setzt man die beiden Transformationen

$$W = W_1 - \alpha' \frac{\partial W_1}{\partial \alpha'} = W_1 - \alpha'(\alpha_0 - x_n),$$

$$W_1 = W_2 + \frac{\alpha'}{M} \Sigma m_s \xi_s$$

zu einer zusammen, so ergiebt sich die Formel

$$W_2 = W - \frac{\alpha'}{M} \sum_{i=1}^{i=n} m_i x_i + \alpha' \alpha_0,$$

in welcher man indessen, da W selbst in Gleichung (1.) nicht vorkommt, wegen der mit W verbundenen willkürlichen Constante das Glied $\alpha'\alpha_0$ weglassen kann.

So wie durch diese Transformation die n Variablen x_i der partiellen Differentialgleichung (1.) auf die $n-1$ Variablen $\xi_s = x_s - x_n$ zurückgeführt worden sind, so kann man durch zwei neue Transformationen derselben Art die $2n$ Variablen y_i und z_i auf die $2(n-1)$ Variablen $\eta_s = y_s - y_n$ und $\zeta_s = z_s - z_n$ zurückführen, und wenn man schliesslich alle Transformationen zu einer zusammensetzt, so erhält man folgenden Satz:

Im Fall eines freien Systems von n materiellen Punkten, für welches sich die Differentialgleichungen der Bewegung auf die partielle Differentialgleichung

$$(1.) \qquad \tfrac{1}{2} \Sigma \frac{1}{m_i} \left\{ \left[\frac{\partial W}{\partial x_i}\right]^2 + \left[\frac{\partial W}{\partial y_i}\right]^2 + \left[\frac{\partial W}{\partial z_i}\right]^2 \right\} = U - \alpha$$

zurückführen lassen, setze man

$$\begin{array}{llll} \xi_1 = x_1 - x_n, & \xi_2 = x_2 - x_n, & \dots & \xi_{n-1} = x_{n-1} - x_n, \\ \eta_1 = y_1 - y_n, & \eta_2 = y_2 - y_n, & \dots & \eta_{n-1} = y_{n-1} - y_n, \\ \zeta_1 = z_1 - z_n, & \zeta_2 = z_2 - z_n, & \dots & \zeta_{n-1} = z_{n-1} - z_n \end{array}$$

und führe für W eine neue abhängige Variable

$$\Omega = W - \frac{\alpha'}{M} \Sigma m_i x_i - \frac{\beta'}{M} \Sigma m_i y_i - \frac{\gamma'}{M} \Sigma m_i z_i$$

ein: dann verwandelt sich die partielle Differentialgleichung (1.) *in*

$$(8.)\ \tfrac{1}{2}\Sigma\frac{1}{m_s}\left\{\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\xi_s}\right)^2+\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\eta_s}\right)^2+\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\zeta_s}\right)^2\right\}+\frac{1}{2m_n}\left\{\left(\Sigma\frac{\partial\Omega}{\partial\xi_s}\right)^2+\left(\Sigma\frac{\partial\Omega}{\partial\eta_s}\right)^2+\left(\Sigma\frac{\partial\Omega}{\partial\zeta_s}\right)^2\right\}=U-\beta,$$

wo

$$\beta = \alpha+\frac{\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2}{2M}.$$

Nach Integration dieser partiellen Differentialgleichung für Ω werden die Variablen x_n, y_n, z_n durch die Gleichungen

$$\alpha_0-x_n=\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha'}+\frac{1}{M}\Sigma m_s\xi_s,\quad \beta_0-y_n=\frac{\partial\Omega}{\partial\beta'}+\frac{1}{M}\Sigma m_s\eta_s,\quad \gamma_0-z_n=\frac{\partial\Omega}{\partial\gamma'}+\frac{1}{M}\Sigma m_s\zeta_s$$

eingeführt, und schliesslich die Variable t durch die Gleichung

$$\tau-t = \frac{\partial\Omega}{\partial\alpha}.$$

Aber da sich die vier Constanten α', β', γ' und α zu der einen Constante β vereinigt haben, so hat man

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha'}=\frac{\alpha'}{M}\frac{\partial\Omega}{\partial\beta},\quad \frac{\partial\Omega}{\partial\beta'}=\frac{\beta'}{M}\frac{\partial\Omega}{\partial\beta},\quad \frac{\partial\Omega}{\partial\gamma'}=\frac{\gamma'}{M}\frac{\partial\Omega}{\partial\beta},\quad \frac{\partial\Omega}{\partial\alpha}=\frac{\partial\Omega}{\partial\beta},$$

und hierdurch gehen die obigen vier Gleichungen in die folgenden über:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Omega}{\partial\beta} &= \tau-t,\\ \alpha_0-x_n &= \frac{\alpha'}{M}(\tau-t)+\frac{1}{M}\Sigma m_s\xi_s,\\ \beta_0-y_n &= \frac{\beta'}{M}(\tau-t)+\frac{1}{M}\Sigma m_s\eta_s,\\ \gamma_0-z_n &= \frac{\gamma'}{M}(\tau-t)+\frac{1}{M}\Sigma m_s\zeta_s.\end{aligned}$$

Die letzteren drei Formeln stimmen mit den in der dritten Vorlesung (p. 17 Gleichungen (3.)) für die geradlinige Bewegung des Schwerpunkts gegebenen überein, wenn man sie auf die Form

$$\begin{aligned}\alpha_0+\frac{\alpha'}{M}(t-\tau) &= x_n+\frac{1}{M}\Sigma m_s\xi_s = \frac{1}{M}\Sigma m_i x_i,\\ \beta_0+\frac{\beta'}{M}(t-\tau) &= y_n+\frac{1}{M}\Sigma m_s\eta_s = \frac{1}{M}\Sigma m_i y_i,\\ \gamma_0+\frac{\gamma'}{M}(t-\tau) &= z_n+\frac{1}{M}\Sigma m_s\zeta_s = \frac{1}{M}\Sigma m_i z_i\end{aligned}$$

bringt, da die Grössen auf der rechten Seite nichts anderes sind, als die Coordinaten des Schwerpunkts.

Vierundzwanzigste Vorlesung.

Bewegung eines Planeten um die Sonne. Lösung in Polarcoordinaten.

Den ferneren allgemeinen Betrachtungen möge die Behandlung einiger Beispiele nach der *Hamilton*schen Methode vorangehen. Das erste Beispiel soll die Bewegung eines Planeten um die Sonne bilden.

Im Fall eines freien Systems von n materiellen Punkten ist die partielle Differentialgleichung, auf die sich die Differentialgleichungen der Bewegung zurückführen lassen, (siehe p. 168) folgende:

$$T = \tfrac{1}{2}\Sigma\frac{1}{m_i}\left\{\left(\frac{\partial W}{\partial x_i}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial y_i}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial z_i}\right)^2\right\} = U-\alpha.$$

Für die Bewegung eines Planeten, dessen heliocentrische Coordinaten x, y, z seien, reducirt sich die Summe auf einen Term; setzen wir ferner die Masse des Planeten gleich 1 und bezeichnen die Anziehungskraft der Sonne in der Einheit der Entfernung durch k^2, so ist die Kräftefunction $U = \frac{k^2}{r}$, wo $r^2 = x^2+y^2+z^2$, und man hat

$$(1.)\qquad T = \tfrac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2\right\} = \frac{k^2}{r}-\alpha.$$

Da auf der rechten Seite dieser Gleichung der Radius Vector vorkommt, so ist es zweckmässig, statt der rechtwinkligen Coordinaten x, y, z Polarcoordinaten durch die Formeln

$$x = r\cos\varphi,\quad y = r\sin\varphi\cos\psi,\quad z = r\sin\varphi\sin\psi$$

einzuführen. Alsdann wird die halbe lebendige Kraft

$$T = \tfrac{1}{2}(x'^2+y'^2+z'^2) = \tfrac{1}{2}(r'^2+r^2\varphi'^2+r^2\sin\varphi^2\psi'^2),$$

also

$$\frac{\partial T}{\partial r'} = r',\quad \frac{\partial T}{\partial \varphi'} = r^2\varphi',\quad \frac{\partial T}{\partial \psi'} = r^2\sin\varphi^2\psi'.$$

Diese Grössen sind die früheren Grössen p, also gleich $\frac{\partial W}{\partial r}$, $\frac{\partial W}{\partial \varphi}$, $\frac{\partial W}{\partial \psi}$ zu setzen; man hat also

$$r' = \frac{\partial W}{\partial r},\quad \varphi' = \frac{1}{r^2}\frac{\partial W}{\partial \varphi},\quad \psi' = \frac{1}{r^2\sin\varphi^2}\frac{\partial W}{\partial \psi},$$

und hierdurch wird

$$T = \tfrac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2+\frac{1}{r^2\sin\varphi^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \psi}\right)^2\right\}.$$

Die partielle Differentialgleichung (1.) verwandelt sich demnach für Polarcoordinaten in folgende:

$$(2.)\qquad \tfrac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2+\frac{1}{r^2\sin\varphi^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \psi}\right)^2\right\} = \frac{k^2}{r}-\alpha.$$

Diese Gleichung wollen wir dadurch integriren, dass wir sie in mehrere zerspalten, deren jede nur eine unabhängige Variable enthält. Wenn wir das erste Glied der linken Seite allein der rechten gleich setzen, so giebt dies

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 = \frac{k^2}{r}-\alpha,$$

eine Differentialgleichung, welche nur die eine unabhängige Variable r enthält, und es bleibt alsdann die Gleichung

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2+\frac{1}{\sin\varphi^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \psi}\right)^2 = 0$$

übrig, welche r nicht mehr enthält. Diese Zerspaltung kann man noch etwas allgemeiner machen, indem man auf der rechten Seite der Gleichung (2.) das Glied $\frac{\beta}{r^2}$ additiv und subtractiv hinzufügt und dann die Gleichung (2.) in die beiden

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 = \frac{k^2}{r}-\alpha-\frac{\beta}{r^2} \quad\text{und}\quad \tfrac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2+\frac{1}{\sin\varphi^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \psi}\right)^2\right\} = \beta$$

zerlegt. Die erste dieser Gleichungen giebt integrirt

$$W = \int\sqrt{\frac{2k^2}{r}-2\alpha-\frac{2\beta}{r^2}}\cdot dr+F(\varphi,\psi),$$

und indem man diesen Werth in die zweite einsetzt, erhält man für $F(\varphi,\psi)$ die Differentialgleichung

$$\tfrac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial \varphi}\right)^2+\frac{1}{\sin\varphi^2}\left(\frac{\partial F}{\partial \psi}\right)^2\right\} = \beta.$$

Diese partielle Differentialgleichung lässt sich aber wiederum in zwei auflösen, von denen jede nur eine unabhängige Variable enthält. Man füge nämlich auf der rechten Seite wieder $\frac{\gamma}{\sin\varphi^2}$ additiv und subtractiv hinzu und zerlege die Gleichung in

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial \varphi}\right)^2 = \beta-\frac{\gamma}{\sin\varphi^2} \quad\text{und}\quad \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial \psi}\right)^2 = \gamma.$$

Die erste dieser Gleichungen giebt integrirt

$$F(\varphi,\psi) = \int\sqrt{2\beta-\frac{2\gamma}{\sin\varphi^2}}\cdot d\varphi+f(\psi),$$

und zufolge der zweiten muss $f(\psi)$ der Gleichung

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial \psi}\right)^2 = \gamma$$

genügen, d. h. es ist

$$f(\psi) = \sqrt{2\gamma}\,.\,\psi,$$

also

$$F(\varphi, \psi) = \int\sqrt{2\beta - \frac{2\gamma}{\sin\varphi^2}}\cdot d\varphi + \sqrt{2\gamma}\,.\,\psi$$

und schliesslich

$$(3.)\qquad W = \int\sqrt{\frac{2k^2}{r} - 2\alpha - \frac{2\beta}{r^2}}\,dr + \int\sqrt{2\beta - \frac{2\gamma}{\sin\varphi^2}}\,d\varphi + \sqrt{2\gamma}\,.\,\psi.$$

Dies ist eine vollständige Lösung der Differentialgleichung (2.), denn sie enthält die nöthige Anzahl willkürlicher Constanten. Man erhält also die Integralgleichungen der Bewegung unter der Form

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha} = \alpha' - t, \qquad \frac{\partial W}{\partial \beta} = \beta', \qquad \frac{\partial W}{\partial \gamma} = \gamma'.$$

wo α' die früher mit τ bezeichnete Constante ist. Die Ausführung der Differentiationen giebt:

$$(4.)\qquad \left\{\begin{aligned} t - \alpha' &= \int\frac{dr}{\sqrt{\frac{2k^2}{r} - 2\alpha - \frac{2\beta}{r^2}}}, \\ \beta' &= -\int\frac{dr}{r^2\sqrt{\frac{2k^2}{r} - 2\alpha - \frac{2\beta}{r^2}}} + \int\frac{d\varphi}{\sqrt{2\beta - \frac{2\gamma}{\sin\varphi^2}}}. \\ \gamma' &= -\int\frac{d\varphi}{\sin\varphi^2\sqrt{2\beta - \frac{2\gamma}{\sin\varphi^2}}} + \frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\,\psi. \end{aligned}\right.$$

Es ist zu bemerken, dass sich die Methode, durch welche wir die Gleichung (2.) integrirt haben, auf eine beliebige Zahl von Variablen ausdehnen lässt. Dies beruht auf Folgendem. Man setze, wenn man n Variable $x_1, x_2, \ldots x_n$ hat,

$$\begin{aligned} x_1 &= r\cos\varphi_1, \\ x_2 &= r\sin\varphi_1\cos\varphi_2, \\ x_3 &= r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_3, \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\sin\varphi_3\ldots\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1}, \\ x_n &= r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\sin\varphi_3\ldots\sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1}, \end{aligned}$$

dann ist

$$dx_1^2 + dx_2^2 + \cdots + dx_n^2$$
$$= dr^2 + r^2 d\varphi_1^2 + r^2 \sin\varphi_1^2 d\varphi_2^2 + r^2 \sin\varphi_1^2 \sin\varphi_2^2 d\varphi_3^2 + \cdots + r^2 \sin\varphi_1^2 \sin\varphi_2^2 \ldots \sin\varphi_{n-2}^2 d\varphi_{n-1}^2.$$

Die obige Methode lässt sich daher ohne Weiteres anwenden, sobald die rechte Seite der partiellen Differentialgleichung sich auf die Form

$$f(r) + \frac{1}{r^2} f_1(\varphi_1) + \frac{1}{r^2 \sin\varphi_1^2} f_2(\varphi_2) + \cdots + \frac{1}{r^2 \sin\varphi_1^2 \sin\varphi_2^2 \ldots \sin\varphi_{n-2}^2} f_{n-1}(\varphi_{n-1})$$

bringen lässt.

Die willkürlichen Constanten β, γ, wie sie in den obigen Integralgleichungen (4.) vorkommen, haben sehr merkwürdige Eigenschaften, welche für das Störungs-Problem die Einführung gerade dieser Constanten sehr wichtig machen. Es ist daher interessant die geometrische Bedeutung dieser Constanten zu untersuchen. Dieselbe ergiebt sich folgendermassen.

Setzt man den Ausdruck, der in den nach r genommenen Integralen unter dem Wurzelzeichen steht, gleich Null, so erhält man eine Gleichung zweiten Grades in r, deren Wurzeln den grössten und kleinsten Werth darstellen, welchen der Radius Vector annehmen kann. Die Wurzeln der Gleichung

$$\alpha r^2 - k^2 r + \beta = 0$$

sind also $a(1+e)$ und $a(1-e)$, wo a die grosse Axe, e die Excentricität der Planetenbahn ist. Dies giebt die Gleichungen

$$(5.)\quad \begin{cases} \dfrac{k^2}{\alpha} = 2a, \qquad \dfrac{\beta}{\alpha} = a^2(1-e^2), \\ \text{also} \\ \alpha = \dfrac{k^2}{2a}, \qquad \beta = \dfrac{k^2}{2} a(1-e^2) = \dfrac{k^2}{2} \cdot \dfrac{p}{2}, \end{cases}$$

wo p der Parameter ist.

Setzt man den Ausdruck unter dem Quadratwurzelzeichen in den nach φ genommenen Integralen gleich Null, so erhält man den grössten oder kleinsten Werth von $\sin\varphi$, nämlich $\sqrt{\frac{\gamma}{\beta}}$. Nun ist $\cos\varphi = \frac{x}{r}$, wo x die Entfernung des Planeten von der Ekliptik (Ebene der yz) bezeichnet, folglich kann $\cos\varphi$ bis zu Null abnehmen; es giebt also kein Minimum, sondern nur ein Maximum von $\cos\varphi$, und dies findet statt, wenn $\varphi = 90^0 - J$ ist, wo J die Neigung der Planetenbahn gegen die Ekliptik bedeutet. Diesem Werth entspricht daher der Minimumswerth $\sqrt{\frac{\gamma}{\beta}}$ von $\sin\varphi$, d. h. es wird

$$(6.)\qquad \sqrt{\frac{\gamma}{\beta}} = \sin(90^0 - J) = \cos J,$$

$$(7.)\qquad \sqrt{\gamma} = \cos J\sqrt{\beta} = \frac{k}{2}\cos J\sqrt{p}.$$

Um die geometrische Bedeutung der Constanten α', β', γ' zu bestimmen, muss man erst die Grenzen der in (4.) vorkommenden Integrale näher festsetzen. Man kann nämlich für die untere Grenze eines dieser Integrale entweder einen gegebenen Zahlenwerth nehmen, oder einen solchen Werth, welcher die in dem Integral enthaltene Quadratwurzel verschwinden macht. Unter der letzteren Annahme, die wir im Folgenden machen werden, hängen die Grenzen von den willkürlichen Constanten α, β, γ ab, und da die Integralgleichungen (4.) aus der Gleichung (3.) durch Differentiation nach diesen Constanten hervorgehen, so könnte man meinen, dass zu den Gleichungen (4.) neue Terme, die von den Grenzen herrühren, hinzukommen müssen. Aber die hinzukommenden Terme sind nach den bekannten Regeln der Differentiation in die Werthe multiplicirt, welche die in Gleichung (3.) unter den Integralzeichen stehenden Functionen für die unteren Integralgrenzen annehmen, und da diese Werthe verschwinden, so bleiben die Gleichungen (4.) ungeändert.

Unter diesen Voraussetzungen lassen wir das nach r genommene und in der ersten Gleichung (4.) vorkommende Integral von dem Werth $a(1-e)$, welchen r im Perihel annimmt, als der unteren Integralgrenze anfangen. Fällt alsdann die obere Grenze in den nämlichen Werth von r, so giebt die erste Gleichung (4.) $t-\alpha' = 0$, d. h.

(8.) $\qquad \alpha'$ = Werth der Zeit für den Durchgang durchs Perihel.

Um die Bedeutung von β' zu finden, bestimme man zunächst den Werth des nach φ genommenen in der zweiten Gleichung (4.) vorkommenden Integrals

$$\Phi = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{2\beta - \frac{2\gamma}{\sin\varphi^2}}} = \int \frac{\sin\varphi\, d\varphi}{\sqrt{2\beta - 2\gamma - 2\beta\cos\varphi^2}},$$

als dessen untere Grenze wir $\varphi = 90^0 - J$ zu nehmen haben. Durch die Substitution

$$\cos\varphi = \sqrt{\frac{\beta-\gamma}{\beta}}\cdot\cos\eta,$$

$$\sin\varphi\, d\varphi = \sqrt{\frac{\beta-\gamma}{\beta}}\sin\eta\, d\eta$$

geht dasselbe in

$$\Phi = \sqrt{\frac{\beta-\gamma}{\beta}} \int \frac{\sin\eta\, d\eta}{\sqrt{2(\beta-\gamma)(1-\cos\eta^2)}},$$

d. h. in

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2\beta}} \int d\eta$$

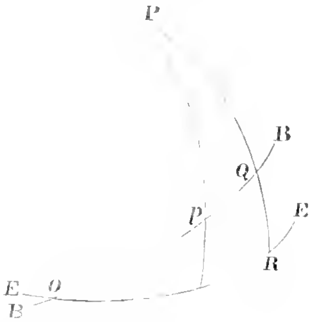
über. Für die untere Grenze $\varphi = 90^0 - J$ wird nach Gleichung (6.) $\sin\varphi = \cos J = \sqrt{\frac{\gamma}{\beta}}$, also $\cos\varphi = \sqrt{\frac{\beta-\gamma}{\beta}}$, daher $\cos\eta = 1$, $\sin\eta = 0$. Demnach ist das nach η genommene Integral von der unteren Grenze $\eta = 0$ an zu nehmen, und es wird

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2\beta}}\,\eta,$$

so dass die zweite Gleichung (4.) in

$$\beta' = -\int \frac{dr}{r^2\sqrt{\frac{2k^2}{r} - 2\alpha - \frac{2\beta}{r^2}}} + \frac{1}{\sqrt{2\beta}}\,\eta$$

übergeht. Aus der zwischen φ und η stattfindenden Relation kann man die geometrische Bedeutung von η erkennen, denn φ ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen sphärischen Dreiecks, dessen Katheten η und $90^0 - J$ sind. Nun sei EE die Ekliptik, P ihr Pol, BB die Ebene der Planetenbahn, O der aufsteigende Knoten; man ziehe durch P senkrecht gegen BB den grössten Kreis PQ, welcher EE in R trifft, dann ist $QR = J$, also $PQ = 90^0 - J$. Trifft ferner der Radius Vector, welcher vom Mittelpunkt der Kugel, der Sonne, nach dem Planeten gezogen ist, die Oberfläche der Kugel in p, so ist $pP = \varphi$, und hieraus folgt $\cos\varphi = \sin J . \cos(pQ)$, d. h.



$$\eta = pQ = 90^0 - Op.$$

Op ist die Entfernung des Planeten vom aufsteigenden Knoten O, welche wir mit ζ bezeichnen wollen. Demnach ist

$$\eta = 90^0 - \zeta,$$

$$\beta' = -\int \frac{dr}{r^2\sqrt{\frac{2k^2}{r} - 2\alpha - \frac{2\beta}{r^2}}} + \frac{1}{\sqrt{2\beta}}(90^0 - \zeta).$$

Um β' zu bestimmen, braucht man jetzt nur den Zeitpunkt zu nehmen, in welchem der Planet durch das Perihel hindurchgeht; dann wird das nach r

genommene Integral gleich Null, und man erhält

(9.) $\beta' = \frac{1}{\sqrt{2\beta}}(90^0 - \text{Entfernung des Perihels vom aufsteigenden Knoten}).$

Endlich ergiebt sich γ' aus der dritten Gleichung (4.). Für $\varphi = 90^0 - J$, d. h. wenn der Radius-Vector des Planeten die Kugel in Q trifft, wird das nach φ genommene Integral gleich Null, und man erhält

$$\gamma' = \frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\psi',$$

wo ψ' den dem Punkt Q entsprechenden Werth des Winkels ψ bedeutet. Da nun $\operatorname{tg}\psi = \frac{z}{y}$ ist, so bezeichnet ψ' den Winkel, welchen die Axe der y mit der Ebene PQR bildet, d. h., wenn die Axe der y durch den Widderpunkt V geht, $\psi' = VR = VO + OR = 90^0 +$ der Länge des aufsteigenden Knotens. Man hat also:

(10.) $\gamma' = \frac{1}{\sqrt{2\gamma}}(90^0 + \text{Länge des aufsteigenden Knotens}).$

Somit sind alle in den Gleichungen (4.) vorkommenden Constanten bestimmt.

Bei der Integration der partiellen Differentialgleichung (2.) hätten wir auch den Umstand benutzen können, dass in (2.) nicht ψ selbst vorkommt, sondern nur $\frac{\partial W}{\partial \psi}$. Die in Folge dessen anzuwendende Transformation

$$W = W_1 + \varepsilon\psi, \quad \frac{\partial W}{\partial \psi} = \varepsilon$$

würde uns zu der nur zwei unabhängige Variable enthaltenden partiellen Differentialgleichung

$$\tfrac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial W_1}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W_1}{\partial \varphi}\right)^2\right\} = \frac{k^2}{r} - \alpha - \frac{\varepsilon^2}{2r^2\sin\varphi^2}$$

geführt haben, deren alsdann übrig bleibende Integration indessen ein Verfahren erfordert, welches von dem oben angewandten nicht wesentlich verschieden ist.

Fünfundzwanzigste Vorlesung.

Lösung desselben Problems durch Einführung der Abstände des Planeten von zwei festen Punkten.

Für die elliptische Bewegung der Planeten giebt es zwischen zwei Radien Vectoren und der sie verbindenden Sehne sehr merkwürdige Formeln.

zu welchen man, von den gewöhnlichen Differentialgleichungen der elliptischen Bewegung ausgehend, nur durch complicirte Rechnungen gelangt. Wir werden diese Formeln ohne Schwierigkeit aus der partiellen Differentialgleichung herleiten und haben dabei nur die Hypothese zu machen, dass sich W durch den heliocentrischen Radius Vector r und die Entfernung ϱ des Planeten von einem anderen Punkt M ausdrücken lasse, eine Hypothese, deren Richtigkeit zwar nicht ohne Weiteres a priori einleuchtet *), die aber in der Rechnung ihre Bestätigung finden wird.

Die Coordinaten des Punkts M seien a, b, c, so dass

$$\varrho^2 = (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2$$

ist. Unter der gemachten Hypothese, dass sich W durch r und ϱ ausdrücken lasse, hat man

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial W}{\partial \varrho}\frac{\partial \varrho}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial r}\frac{x}{r}+\frac{\partial W}{\partial \varrho}\frac{x-a}{\varrho},$$

$$\frac{\partial W}{\partial y} = \frac{\partial W}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial W}{\partial \varrho}\frac{\partial \varrho}{\partial y} = \frac{\partial W}{\partial r}\frac{y}{r}+\frac{\partial W}{\partial \varrho}\frac{y-b}{\varrho},$$

$$\frac{\partial W}{\partial z} = \frac{\partial W}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z}+\frac{\partial W}{\partial \varrho}\frac{\partial \varrho}{\partial z} = \frac{\partial W}{\partial r}\frac{z}{r}+\frac{\partial W}{\partial \varrho}\frac{z-c}{\varrho}.$$

Diese Ausdrücke sind in die partielle Differentialgleichung

$$(1.)\qquad \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2 = \frac{2k^2}{r}-2\alpha$$

einzusetzen, dann verwandelt sich deren linke Seite in

$$\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial \varrho}\right)^2+\{2x(x-a)+2y(y-b)+2z(z-c)\}\frac{1}{r\varrho}\frac{\partial W}{\partial r}\frac{\partial W}{\partial \varrho}.$$

Der in Klammern stehende Ausdruck ist gleich $r^2+\varrho^2-r_0^2$, wo

$$r_0^2 = a^2+b^2+c^2,$$

also geht (1.) in

$$\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial \varrho}\right)^2+\frac{r^2+\varrho^2-r_0^2}{r\varrho}\frac{\partial W}{\partial r}\frac{\partial W}{\partial \varrho} = \frac{2k^2}{r}-2\alpha$$

über. Das Product der beiden partiellen Differentialquotienten kann man wegschaffen, wenn man anstatt r und ϱ ihre Summe und Differenz

$$\sigma = r+\varrho,\quad \sigma' = r-\varrho$$

---

*) Zum Beweise bedarf es der aus den Flächensätzen hervorgehenden Folgerung, dass die Bewegung des Planeten in einer Ebene geschieht, und der bekannten Thatsache, dass für einen innerhalb der Ebene variablen Punkt die beiden Entfernungen von zwei festen Punkten als Bestimmungsstücke angesehen werden können.

einführt, so dass

$$\frac{\partial W}{\partial r} = \frac{\partial W}{\partial \sigma} + \frac{\partial W}{\partial \sigma'}, \qquad \frac{\partial W}{\partial \varrho} = \frac{\partial W}{\partial \sigma} - \frac{\partial W}{\partial \sigma'}$$

wird. Alsdann ergiebt sich

$$2\left(\frac{\partial W}{\partial \sigma}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial W}{\partial \sigma'}\right)^2 + \frac{r^2+\varrho^2-r_0^2}{r\varrho}\left\{\left(\frac{\partial W}{\partial \sigma}\right)^2 - \left(\frac{\partial W}{\partial \sigma'}\right)^2\right\} = \frac{2k^2}{r} - 2\alpha$$

und nach Multiplication mit $r\varrho$

$$\{(r+\varrho)^2-r_0^2\}\left(\frac{\partial W}{\partial \sigma}\right)^2 - \{(r-\varrho)^2-r_0^2\}\left(\frac{\partial W}{\partial \sigma'}\right)^2 = 2\varrho(k^2-\alpha r),$$

oder, nachdem für r, ϱ ihre Werthe

$$r = \tfrac{1}{2}(\sigma+\sigma'), \qquad \varrho = \tfrac{1}{2}(\sigma-\sigma')$$

substituirt sind, schliesslich

$$(2.) \qquad (\sigma^2-r_0^2)\left(\frac{\partial W}{\partial \sigma}\right)^2 - (\sigma'^2-r_0^2)\left(\frac{\partial W}{\partial \sigma'}\right)^2 = k^2(\sigma-\sigma') - \tfrac{1}{2}\alpha(\sigma^2-\sigma'^2).$$

Diese partielle Differentialgleichung lässt sich nach dem bereits in der vorigen Vorlesung angewandten Verfahren durch Zerspaltung in zwei gewöhnliche Differentialgleichungen integriren, von denen die eine nur σ und $\frac{\partial W}{\partial \sigma}$, die andere nur σ' und $\frac{\partial W}{\partial \sigma'}$ enthält. Indem man sich auf der rechten Seite eine willkürliche Constante β zugleich additiv und subtractiv hinzugefügt denkt, gelangt man zu den beiden Differentialgleichungen

$$(\sigma^2-r_0^2)\left(\frac{\partial W}{\partial \sigma}\right)^2 = -\tfrac{1}{2}\alpha\sigma^2 + k^2\sigma + \beta, \quad (\sigma'^2-r_0^2)\left(\frac{\partial W}{\partial \sigma'}\right)^2 = -\tfrac{1}{2}\alpha\sigma'^2 + k^2\sigma' + \beta,$$

und hieraus folgt für W der Werth

$$W = \pm\int d\sigma \sqrt{\frac{-\frac{1}{2}\alpha\sigma^2+k^2\sigma+\beta}{\sigma^2-r_0^2}} \pm \int d\sigma' \sqrt{\frac{-\frac{1}{2}\alpha\sigma'^2+k^2\sigma'+\beta}{\sigma'^2-r_0^2}}.$$

Die Vorzeichen der beiden Wurzelgrössen oder, was dasselbe ist, der Integrale sind willkürlich und unabhängig von einander. Man darf also für W ebensowohl die Summe als die Differenz beider Integrale setzen, gelangt unter beiden Annahmen zu richtigen Integralgleichungen und kann nur die grössere oder geringere Einfachheit der sich ergebenden Formeln als Grund für die Wahl des einen oder anderen Ausdrucks gelten lassen. Entscheiden wir uns für die Differenz und setzen zur Abkürzung

$$(3.) \qquad F(s) = \frac{-\frac{1}{2}\alpha s^2 + k^2 s + \beta}{s^2 - r_0^2},$$

so haben wir als Lösung der Gleichung (2.) den Ausdruck

$$(4.)\qquad W = \int d\sigma \sqrt{F(\sigma)} - \int d\sigma' \sqrt{F(\sigma')},$$

dem wir auch die Form

$$(4^*.)\qquad W = \int_{\sigma'}^{\sigma} ds \sqrt{F(s)}$$

geben können. Hieraus folgt z. B. für die Einführung der Zeit in die elliptische Bewegung des Planeten die Formel

$$t - \alpha' = -\frac{\partial W}{\partial \alpha} = \tfrac{1}{4}\int \frac{\sigma^2\, d\sigma}{\sqrt{(\sigma^2 - r_0^2)(-\frac{1}{2}\alpha\sigma^2 + k^2\sigma + \beta)}} - \tfrac{1}{4}\int \frac{\sigma'^2\, d\sigma'}{\sqrt{(\sigma'^2 - r_0^2)(-\frac{1}{2}\alpha\sigma'^2 + k^2\sigma' + \beta)}},$$

deren rechte Seite im Allgemeinen aus elliptischen Integralen besteht. Da sich aber die Zeit in den Coordinaten anderweitig durch Kreisbögen ausdrücken lässt, so ergeben sich hieraus Folgerungen für die elliptischen Integrale, welche auf das Fundamentaltheorem der Addition führen.

Der Ausdruck (4.) ist eine vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung (2.), denn man kann ausser der darin enthaltenen willkürlichen Constante β noch eine zweite C additiv zu demselben hinzufügen. Aber der Ausdruck (4.) ist auch eine vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung (1.): denn in Beziehung auf diese sind nicht allein β und C, sondern auch die Grössen a, b, c willkürliche Constanten, da sie in (1.) nicht vorkommen, während sie in den Ausdruck (4.) eingehen. Als Lösung von (1.) enthält daher (4.) mehr als die nöthige Anzahl von Constanten, d. h. es sind überflüssige Constanten in demselben. Will man dergleichen vollständige Lösungen einer partiellen Differentialgleichung, in welchen überflüssige Constanten enthalten sind, zur Integration des damit zusammenhängenden Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen anwenden, so darf man zwar noch immer die nach sämmtlichen Constanten genommenen Differentialquotienten neuen willkürlichen Constanten gleich setzen, aber diese neuen Constanten sind nicht mehr unabhängig von einander. Andrerseits steht es frei, über die überflüssigen willkürlichen Constanten nach Gutdünken zu verfügen, und diese Verfügung kann im vorliegenden Fall dergestalt getroffen werden, dass das elliptische Integral $\int ds \sqrt{F(s)}$, welches den Ausdruck (4*.) von W bildet, sich in ein circulares verwandelt. Dieselbe Verwandlung findet alsdann auch für die hieraus hergeleiteten elliptischen Integrale statt, welche in den partiellen Ableitungen von W nach den in $F(s)$ enthaltenen Constanten vorkommen.

Diese Specialisirung des Integrals $\int ds\sqrt{F(s)}$ zu bewirken, giebt es zwei Arten. Die erste besteht darin, dass der Zähler $-\frac{1}{2}\alpha s^2 + k^2 s + \beta$ von $F(s)$ zu einem vollständigen Quadrat gemacht wird, die zweite darin, dass diesem Zähler ein gemeinschaftlicher Theiler $s - r_0$ mit dem Nenner $s^2 - r_0^2$ von $F(s)$ gegeben wird.

Wir wählen die zweite Art und zwar aus folgendem Grunde. Leitet man aus (4*.), ohne eine Specialisirung der Constanten vorgenommen zu haben, die Integralgleichungen her, und unter diesen die Gleichung $\alpha' = \frac{\partial W}{\partial \alpha}$, welche, da α in σ, σ' und r_0 enthalten ist, die Form

$$(5.)\qquad \alpha' = \sqrt{F(\sigma)}\cdot\frac{\partial\sigma}{\partial\alpha} - \sqrt{F(\sigma')}\cdot\frac{\partial\sigma'}{\partial\alpha} + \alpha\int d\sigma\,\frac{\sqrt{F(\sigma)}}{\sigma^2 - r_0^2} - \alpha\int d\sigma'\,\frac{\sqrt{F(\sigma')}}{\sigma'^2 - r_0^2}$$

annimmt, so darf man die hierin vorkommenden elliptischen Integrale nicht von $x = a$, $y = b$, $z = c$ anfangen lassen, weil alsdann $\varrho = 0$, $\sigma = \sigma' = r_0$ wäre, und die Integrale wegen der in ihnen enthaltenen $-\frac{3}{2}^{\text{ten}}$ Potenz von $\sigma^2 - r_0^2$, $\sigma'^2 - r_0^2$ unendlich würden. Dies Unendlichwerden der Integrale in (5.) wird durch die oben erwähnte erste Art der Specialisirung nicht verhindert, wohl aber durch die zweite. Und da für die Formeln, deren Herleitung vorliegt, es gerade nothwendig ist, dass man $\varrho = 0$ setzen könne, so entscheiden wir uns für die zweite Art.

Wir müssen also festsetzen, dass der Zähler von $F(s)$ für $s = r_0$ verschwinde, und erhalten demnach zwischen β und r_0 die Relation

$$(6.)\qquad \beta = \tfrac{1}{2}\alpha r_0^2 - k^2 r_0.$$

Dadurch wird

$$F(s) = \frac{-\frac{1}{2}\alpha(s^2 - r_0^2) + k^2(s - r_0)}{s^2 - r_0^2} = \frac{k^2}{s + r_0} - \tfrac{1}{2}\alpha,$$

also

$$(7.)\qquad W = \int_{\sigma'}^{\sigma} ds\sqrt{\frac{k^2}{s + r^0} - \tfrac{1}{2}\alpha}.$$

Dies ist der Werth von W, aus dessen Differentiation sich die merkwürdigen Formeln für die elliptische Bewegung ergeben, die von *Euler* und *Lambert* entdeckt, von *Olbers* und *Gauss* bei der Bestimmung der Elemente der Bahn benutzt worden sind.

Das System der ersten Integralgleichungen wird durch die Formeln $\frac{dx}{dt} = \frac{\partial W}{\partial x}$, $\frac{dy}{dt} = \frac{\partial W}{\partial y}$, $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial W}{\partial z}$ gebildet. Wir haben bereits oben $\frac{\partial W}{\partial x}$, $\frac{\partial W}{\partial y}$, $\frac{\partial W}{\partial z}$ durch $\frac{\partial W}{\partial r}$ und $\frac{\partial W}{\partial \varrho}$ und die letzteren Grössen durch $\frac{\partial W}{\partial \sigma}$ und $\frac{\partial W}{\partial \sigma'}$

ausgedrückt. Indem wir diese Relationen in einander substituiren und für $\frac{\partial W}{\partial \sigma}$, $\frac{\partial W}{\partial \sigma'}$ ihre aus (7.) sich ergebenden Werthe $\sqrt{\frac{k^2}{\sigma+r_0}-\frac{1}{2}\alpha}$, $-\sqrt{\frac{k^2}{\sigma'+r_0}-\frac{1}{2}\alpha}$ setzen, erhalten wir die Gleichungen

$$(8.)\quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \left(\frac{x}{r}+\frac{x-a}{\varrho}\right)\sqrt{\frac{k^2}{\sigma+r_0}-\frac{1}{2}\alpha}-\left(\frac{x}{r}-\frac{x-a}{\varrho}\right)\sqrt{\frac{k^2}{\sigma'+r_0}-\frac{1}{2}\alpha}, \\ \frac{dy}{dt} = \left(\frac{y}{r}+\frac{y-b}{\varrho}\right)\sqrt{\frac{k^2}{\sigma+r_0}-\frac{1}{2}\alpha}-\left(\frac{y}{r}-\frac{y-b}{\varrho}\right)\sqrt{\frac{k^2}{\sigma'+r_0}-\frac{1}{2}\alpha}, \\ \frac{dz}{dt} = \left(\frac{z}{r}+\frac{z-c}{\varrho}\right)\sqrt{\frac{k^2}{\sigma+r_0}-\frac{1}{2}\alpha}-\left(\frac{z}{r}-\frac{z-c}{\varrho}\right)\sqrt{\frac{k^2}{\sigma'+r^0}-\frac{1}{2}\alpha}, \end{cases}$$

deren Richtigkeit man prüfen kann, indem man sie quadrirt und addirt, was den Satz der lebendigen Kraft liefert, wie es sein muss.

Das System der eigentlichen zwischen den Coordinaten stattfindenden Integralgleichungen wird durch die Formeln $a' = \frac{\partial W}{\partial a}$, $b' = \frac{\partial W}{\partial b}$, $c' = \frac{\partial W}{\partial c}$ gebildet, wo a', b', c' neue willkürliche Constanten bedeuten. Aus Gleichung (7.) ergiebt sich

$$\frac{\partial W}{\partial a} = -\frac{1}{2}k^2\frac{a}{r_0}\int_{\sigma'}^{\sigma}\frac{ds}{(s+r_0)^2\sqrt{\frac{k^2}{s+r_0}-\frac{1}{2}\alpha}}+\frac{\partial \sigma}{\partial a}\sqrt{\frac{k^2}{\sigma+r_0}-\frac{1}{2}\alpha}-\frac{\partial \sigma'}{\partial a}\sqrt{\frac{k^2}{\sigma'+r_0}-\frac{1}{2}\alpha},$$

oder indem man für $\frac{\partial \sigma}{\partial a}$, $\frac{\partial \sigma'}{\partial a}$ ihre Werthe $-\frac{x-a}{\varrho}$, $+\frac{x-a}{\varrho}$ setzt und berücksichtigt, dass

$$-\frac{1}{2}k^2\int\frac{ds}{(s+r_0)^2\sqrt{\frac{k^2}{s+r_0}-\frac{1}{2}\alpha}} = \sqrt{\frac{k^2}{s+r_0}-\frac{1}{2}\alpha}$$

ist,

$$\frac{\partial W}{\partial a} = \left(\frac{a}{r_0}-\frac{x-a}{\varrho}\right)\sqrt{\frac{k^2}{\sigma+r_0}-\frac{1}{2}\alpha}-\left(\frac{a}{r_0}+\frac{x-a}{\varrho}\right)\sqrt{\frac{k^2}{\sigma'+r_0}-\frac{1}{2}\alpha}.$$

Mit Benutzung dieses Werthes und der entsprechenden Werthe von $\frac{\partial W}{\partial b}$, $\frac{\partial W}{\partial c}$ erhält man die gesuchten Integralgleichungen in folgender Gestalt:

$$(9.)\quad \begin{cases} a' = \left(\frac{a}{r_0}-\frac{x-a}{\varrho}\right)\sqrt{\frac{k^2}{\sigma+r_0}-\frac{1}{2}\alpha}-\left(\frac{a}{r_0}+\frac{x-a}{\varrho}\right)\sqrt{\frac{k^2}{\sigma'+r_0}-\frac{1}{2}\alpha}, \\ b' = \left(\frac{b}{r_0}-\frac{y-b}{\varrho}\right)\sqrt{\frac{k^2}{\sigma+r_0}-\frac{1}{2}\alpha}-\left(\frac{b}{r_0}+\frac{y-b}{\varrho}\right)\sqrt{\frac{k^2}{\sigma'+r_0}-\frac{1}{2}\alpha}, \\ c' = \left(\frac{c}{r_0}-\frac{z-c}{\varrho}\right)\sqrt{\frac{k^2}{\sigma+r_0}-\frac{1}{2}\alpha}-\left(\frac{c}{r_0}+\frac{z-c}{\varrho}\right)\sqrt{\frac{k^2}{\sigma'+r_0}-\frac{1}{2}\alpha}. \end{cases}$$

Die Bestimmung der Constanten a', b', c' geschieht, indem man $\varrho = 0$ setzt, was ein für ϱ statthafter Werth ist, da in Folge der in Gleichung (6.) enthaltenen Specialisirung der Constanten der Punkt (a, b, c) ein Punkt der Planetenbahn wird *).

Indem wir also den beweglichen Punkt (x, y, z) mit dem festen (a, b, c) zusammenfallen lassen, erscheinen die Brüche $\frac{x-a}{\varrho}$, $\frac{y-b}{\varrho}$, $\frac{z-c}{\varrho}$ unter der Form $\frac{0}{0}$. Ihre wahren Werthe sind $\cos\xi$, $\cos\eta$, $\cos\zeta$, wenn wir mit ξ, η, ζ die Winkel bezeichnen, welche die Tangente der Planetenbahn in (a, b, c) mit den Axen der x, y, z bildet. Da überdies $\sigma = \sigma' = r_0$ wird, so ergeben

) Um diese Behauptung zu erweisen, ist es nothwendig, auf den noch nicht specialisirten Werth (4.) von W zurückzukommen. Derselbe ist eine vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung (2.), und auf diese letztere wird das Problem der Planetenbewegung, unter Hinzufügung der Gleichung der Planetenbahn-Ebene, zurückgeführt, wenn man eine Lösung in den Variablen σ, σ' sucht und a, b, c nicht als willkürliche, sondern als gegebene Constanten ansieht. Hieraus folgt, dass, wenn man, mit β' eine willkürliche Constante bezeichnend, aus (4.) die neue Gleichung $\beta' = \frac{\partial W}{\partial \beta}$ herleitet, diese mit der Gleichung der Planetenbahn-Ebene zusammen die Bahn bestimmt. Die Ausführung der Differentiation nach β giebt, wenn zur Abkürzung

$$f(s) = (s^2 - r_0^2)(-\tfrac{1}{2}\alpha s^2 + k^2 s + \beta)$$

gesetzt wird,

$$2\beta' = 2\frac{\partial W}{\partial \beta} = \int_{\sigma'}^{\sigma} \frac{ds}{\sqrt{f(s)}}.$$

Dies ist in transcendenter Gestalt das Integral der Differentialgleichung

$$0 = \frac{d\sigma}{\sqrt{f(\sigma)}} - \frac{d\sigma'}{\sqrt{f(\sigma')}},$$

deren Integralgleichung in algebraischer Gestalt zufolge des *Euler*schen Additionstheorems der elliptischen Integrale und zwar nach der von *Lagrange* gegebenen Form desselben (Miscellanea Taurinensia IV, p. 110) die folgende ist:

$$\text{(I.)} \qquad \frac{\sqrt{f(\sigma)} + \sqrt{f(\sigma')}}{\sigma - \sigma'} = \sqrt{G^2 + k^2(\sigma + \sigma') - \tfrac{1}{2}\alpha(\sigma + \sigma')^2},$$

wo G^2 die Integrationsconstante bedeutet.

Um nun die Bedingung dafür zu erhalten, dass der Punkt (a, b, c) in der Planetenbahn liegt, d. h. dass $\varrho = 0$ gesetzt werden kann, woraus dann $x = a$, $y = b$, $z = c$, $r = r_0$, $\sigma = \sigma' = r_0$ folgt, untersuchen wir zunächst den Fall, wo ϱ unendlich klein ist.

Es sei θ der Winkel, welchen der Radius Vector r_0, von der Sonne aus nach dem Punkt (a, b, c) hin gerichtet, mit der Tangente der Planetenbahn im Punkt (a,b,c), von diesem Punkt aus nach dem unendlich nahen Punkt (x, y, z) hin gerichtet, bildet, dann hat man für unendlich kleine Werthe von ϱ

$$r - r_0 = \varrho \cos\theta$$

und demzufolge

$$\text{(II.)} \qquad \begin{cases} \sigma - r_0 = r - r_0 + \varrho = (1 + \cos\theta)\varrho, \\ \sigma' - r_0 = r - r_0 - \varrho = -(1 - \cos\theta)\varrho. \end{cases}$$

Hieraus ergiebt sich, dass für unendlich kleine Werthe von ϱ die beiden Grössen $\sqrt{f(\sigma)}$ und $\sqrt{f(\sigma')}$ proportional $\sqrt{\varrho}$ werden, dass also auf der linken Seite von Gleisich aus den Gleichungen (9.) die Bestimmungen

$$(10.)\quad a' = -2\cos\xi\sqrt{\frac{k^2}{2r_0}-\tfrac{1}{2}\alpha},\quad b' = -2\cos\eta\sqrt{\frac{k^2}{2r_0}-\tfrac{1}{2}\alpha},\quad c' = -2\cos\zeta\sqrt{\frac{k^2}{2r_0}-\tfrac{1}{2}\alpha}.$$

Dieselben Werthe mit entgegengesetzten Zeichen ergeben sich aus den Gleichungen (8.) für die Grössen $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, wenn man $\varrho = 0$ setzt, und es sind demnach $-a'$, $-b'$, $-c'$ die Componenten der Geschwindigkeit des Planeten im Punkte (a, b, c) *).

---

chung (I.) der Zähler $\sqrt{f(\sigma)}+\sqrt{f(\sigma')}$ proportional $\sqrt{\varrho}$, der Nenner $\sigma-\sigma'$ proportional ϱ, der ganze Bruch also unendlich wird, während die rechte Seite einen endlichen Werth behält. Der Werth $\varrho = 0$ ist also nur dann zulässig, wenn die Function

$$f(s) = (s^2-r_0^2)(-\tfrac{1}{2}\alpha s^2+k^2 s+\beta)$$

den Factor $s-r_0$, welcher für $s=\sigma$ und $s=\sigma'$ und für unendlich kleine Werthe von ϱ proportional ϱ wird, noch ein zweites Mal besitzt, d. h. wenn die zwischen β und r_0 oben aufgestellte Relation

$$(6.)\quad \beta = \tfrac{1}{2}\alpha r_0^2 - k^2 r_0$$

besteht.

*) Die Gleichungen (9.) quadrirt und addirt geben zwischen a', b', c' die Relation

$$a'^2+b'^2+c'^2 = 2\left(\frac{k^2}{r_0}-\alpha\right),$$

welche nichts anderes ist, als der Satz der lebendigen Kraft für den Punkt (a, b, c). Diese zwischen den Constanten a', b', c' bestehende Abhängigkeit bestätigt dasjenige, was über das Verhalten der Lösungen mit überflüssigen Constanten oben im Text bemerkt worden ist, und zeigt, dass die drei Gleichungen (9.) nur für zwei gelten. Diese zwei, auf welche sie sich reduciren lassen, kann man folgendermassen erhalten. Eliminirt man zwischen den Gleichungen (9.) die beiden in denselben enthaltenen Wurzelzeichen, so ergiebt sich

$$(\text{III.})\quad (bc'-b'c)x+(ca'-c'a)y+(ab'-a'b)z = 0$$

als die Gleichung der Ebene der Planetenbahn, welche durch die Werthe $x=a$, $y=b$, $z=c$ befriedigt wird. Multiplicirt man ferner die Gleichungen (9.) der Reihe nach mit a, b, c und addirt die Resultate, so erhält man

$$(\text{IV.})\quad \begin{cases} -(aa'+bb'+cc')(\sigma-\sigma') \\ = (\sigma+r_0)(\sigma'-r_0)\sqrt{\dfrac{k^2}{\sigma+r_0}-\tfrac{1}{2}\alpha}+(\sigma-r_0)(\sigma'+r_0)\sqrt{\dfrac{k^2}{\sigma'+r_0}-\tfrac{1}{2}\alpha} \end{cases}$$

als Gleichung der Bahncurve in der Ebene der Bahn, ein Ergebniss, dessen Identität mit dem in Gleichung (I.) der vorhergehenden Anmerkung für den vorliegenden Fall enthaltenen leicht verificirt wird. Indem man die frühere Definition des Winkels θ beibehält, hat man

$$aa'+bb'+cc' = -2r_0\cos\theta\sqrt{\frac{k^2}{2r_0}-\tfrac{1}{2}\alpha},$$

woraus unter Berücksichtigung der Gleichungen (II.) hervorgeht, dass die Gleichung (IV.) für unendlich kleine Werthe von ϱ ein identisches Resultat liefert, vorausgesetzt, dass die Wurzelgrössen $\sqrt{\frac{k^2}{\sigma+r_0}-\frac{1}{2}\alpha}$, $\sqrt{\frac{k^2}{\sigma'+r_0}-\frac{1}{2}\alpha}$ sich alsdann beide dem mit demselben Zeichen genommenen Werthe $\sqrt{\frac{k^2}{2r_0}-\frac{1}{2}\alpha}$ nähern.

Es bleibt jetzt nur noch übrig die Zeit einzuführen, was durch die Formel $\alpha'-t=\frac{\partial W}{\partial \alpha}$ oder

$$(11.)\qquad t-\alpha' = \tfrac{1}{4}\int_{\sigma'}^{\sigma}\frac{ds}{\sqrt{\frac{k^2}{s+r_0}-\frac{1}{2}\alpha}}$$

geschieht. Dies Integral führt auf Kreisbögen; indem man dieselben auf die gehörige Form bringt, erhält man die von *Gauss* in der theoria motus gegebenen Formeln *). Der Annahme $\alpha=0$ entspricht die parabolische Bewegung, sie ergiebt die zur Bestimmung der Elemente einer Kometenbahn dienenden Formeln.

Während die Gleichungen (7.) bis (11.) für zwei vom Brennpunkt ausgehende Radien Vectoren r, r_0 und die sie verbindende Sehne ϱ bei der in einem Kegelschnitt stattfindenden Bewegung eines Planeten gelten, sind es allgemeinere Formeln für diese Bewegung, welche sich ergeben, wenn die Specialisirung (6.) nicht vorgenommen wird, der Punkt (a, b, c) also nicht in der Planetenbahn liegt. Alsdann gilt für W die Gleichung (4.); in ihr sowie in den daraus abgeleiteten Integralgleichungen kommt die Differenz zweier elliptischen Integrale vor, die von derselben Form sind und sich nur durch ihre Argumente σ und σ' unterscheiden. Nach dem Additionstheorem der elliptischen Integrale lässt sich diese Differenz in *ein* Integral mit einem neuen Argument σ'', vermehrt um eine algebraische und eine circulare oder logarithmische Function von σ und σ', transformiren. Da nun die Integralgleichungen, wie wir wissen, keine elliptischen Integrale enthalten, so muss das neue Argument σ'', welches algebraisch von σ und σ' abhängt, einer Constante gleich werden. Die Gleichung $\sigma''=\text{Const.}$ ist also eine der Integralgleichungen **) und zwar die Gleichung der Bahncurve, während der alsdann übrig bleibende algebraische und logarithmische Theil den Rest der Integralchungen liefert.

Die aus (4.) folgenden allgemeinen Formeln haben auch noch die merkwürdige Eigenschaft, dass sie, abgesehen von einer zu erwähnenden Modification, noch gelten, wenn nach dem Punkt (a, b, c) eine zweite Attractionskraft wirkt. Alsdann sind aber a, b, c nicht mehr willkürliche, sondern gegebene Constanten, wir haben ausser α nur die eine Constante β und eine

---

*) Vgl. *Crelles* Journal Bd. 17, p. 122.

**) Vgl. hierüber die Anmerkung auf p. 195.

willkürliche Verfügung über dieselbe steht uns nicht mehr frei. Die Modification, welcher gegenwärtig die partielle Differentialgleichung (2.) unterliegt, deren rechte Seite

$$k^2(\sigma-\sigma')-\tfrac{1}{2}\alpha(\sigma^2-\sigma'^2) = 2r\varrho\left(\frac{k^2}{r}-\alpha\right)$$

ist, besteht darin, dass zur Kräftefunction $U=\frac{k^2}{r}$ ein zweites von der Attraction nach dem Punkte (a, b, c) herrührendes Glied $\frac{k'^2}{\varrho}$ hinzukommt, dass also die rechte Seite sich in

$$2r\varrho\left(\frac{k^2}{r}+\frac{k'^2}{\varrho}-\alpha\right) = k^2(\sigma-\sigma')+k'^2(\sigma+\sigma')-\tfrac{1}{2}\alpha(\sigma^2-\sigma'^2)$$

verwandelt. Demnach geht die partielle Differentialgleichung (2.) in die folgende über:

$$(\sigma^2-r_0^2)\left(\frac{\partial W}{\partial\sigma}\right)^2-(\sigma'^2-r_0^2)\left(\frac{\partial W}{\partial\sigma'}\right)^2 = (k^2+k'^2)\sigma-\tfrac{1}{2}\alpha\sigma^2-\{(k^2-k'^2)\sigma'-\tfrac{1}{2}\alpha\sigma'^2\}.$$

Da man diese Gleichung in die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$(\sigma^2-r_0^2)\left(\frac{\partial W}{\partial\sigma}\right)^2=\beta+(k^2+k'^2)\sigma-\tfrac{1}{2}\alpha\sigma^2,\quad (\sigma'^2-r_0^2)\left(\frac{\partial W}{\partial\sigma'}\right)^2=\beta+(k^2-k'^2)\sigma'-\tfrac{1}{2}\alpha\sigma'^2$$

zerlegen kann, so erhält man für W die Lösung

$$W = \int d\sigma\sqrt{\frac{\beta+(k^2+k'^2)\sigma-\frac{1}{2}\alpha\sigma^2}{\sigma^2-r_0^2}}\pm\int d\sigma'\sqrt{\frac{\beta+(k^2-k'^2)\sigma'-\frac{1}{2}\alpha\sigma'^2}{\sigma'^2-r_0^2}},$$

in welcher sich die beiden elliptischen Integrale nicht mehr durch das Argument allein, sondern auch durch die Form unterscheiden. Für das Problem der Attraction nach zwei festen Centren im Raume ist die hierin enthaltene Anzahl von Constanten nicht genügend. Für das Problem in der Ebene hingegen (und hierauf lässt sich das Problem im Raume zurückführen) ist der obige Werth von W eine vollständige Lösung; $\frac{\partial W}{\partial\beta}=\beta'$ giebt die Bahn des Punkts, $\frac{\partial W}{\partial\alpha}=\alpha'-t$ die Zeit.

Sechsundzwanzigste Vorlesung.

Elliptische Coordinaten.

Die Hauptschwierigkeit bei der Integration gegebener Differentialgleichungen scheint in der Einführung der richtigen Variablen zu bestehen, zu deren Auffindung es keine allgemeine Regel giebt. Man muss daher das umgekehrte Verfahren einschlagen und nach erlangter Kenntniss einer merkwürdigen Substitution die Probleme aufsuchen, bei welchen dieselbe mit Glück zu brauchen ist. Ich habe eine merkwürdige Substitution der Berliner Academie in einer auch im *Crelle*schen Journal*) abgedruckten Note mitgetheilt und eine Reihe von Problemen besonders aus der Mechanik angeführt, für welche sie anzuwenden ist. Diese Anwendbarkeit beruht vornehmlich darauf, dass der Ausdruck $\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2$ auch in den neuen Coordinaten eine einfache Gestalt annimmt. Indem wir uns vorbehalten, jene Probleme, zu welchen die bereits in der vorigen Vorlesung beiläufig behandelte Attraction nach zwei festen Centren ebenfalls gehört, der Reihe nach durchzugehen, beginnen wir damit, die erwähnte merkwürdige Substitution selbst aufzustellen, und zwar der Allgemeinheit wegen sogleich für eine beliebige Anzahl von Variablen.

Es sei die Gleichung

$$(1.)\qquad \frac{x_1^2}{a_1+\lambda}+\frac{x_2^2}{a_2+\lambda}+\cdots+\frac{x_n^2}{a_n+\lambda} = 1$$

vorgelegt. Die Grössen $a_1, a_2, \dots a_n$ seien nach ihrer Grösse geordnet, so dass

$$a_1 < a_2 < a_3 \dots < a_n,$$

wo das Zeichen $<$ so zu verstehen ist, dass die Differenzen a_2-a_1, a_3-a_2, ... positive Zahlen sein sollen. Die Zähler sind sämmtlich positiv, was dadurch angedeutet ist, dass für dieselben Quadrate gesetzt worden sind. Multiplicirt man die Gleichung (1.) mit dem Product $(a_1+\lambda)(a_2+\lambda)\dots(a_n+\lambda)$, so erhält man eine Gleichung n^{ten} Grades in λ, deren Wurzeln wir mit $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ bezeichnen wollen. Es ist leicht zu beweisen, dass diese n Wurzeln sämmtlich reell sind. In der That, lassen wir λ von $-\infty$ bis $+\infty$ alle Werthe durchlaufen und untersuchen wir, welche Werthe die linke Seite der Gleichung (1.), die wir mit L bezeichnen wollen, dabei annimmt. Für $\lambda=-\infty$ wird $L=0$; mit wachsendem λ wird L negativ und durchläuft alle negativen Werthe, bis es für $\lambda=-a_n$ unendlich wird. Da nämlich a_n die grösste der Zahlen $a_1, a_2, \dots a_n$ ist, so erreicht λ zuerst den Werth $-a_n$, d. h. $a_n+\lambda$ ist der erste Nenner, welcher verschwindet. Ehe λ den Werth $-a_n$ erreicht hat, ist $a_n+\lambda$ negativ, und indem sich $a_n+\lambda$ der Null nähert, wird $\frac{x_n^2}{a_n+\lambda}=-\infty$. Wächst λ weiter, so wird $a_n+\lambda$ positiv, $\frac{x_n^2}{a_n+\lambda}$ macht daher einen Sprung von

*) Bd. XIX, p. 309.

$-\infty$ nach $+\infty$, und da die übrigen Brüche endlich und zwar negativ sind, so gilt, was von $\frac{x_n^2}{a_n+\lambda}$ gezeigt worden ist, auch von L. Wächst nun λ weiter und kommt in die Nähe von $-a_{n-1}$, so wird $L=-\infty$, hat also von $\lambda=-a_n$ bis $\lambda=-a_{n-1}$ alle reellen Werthe durchlaufen; daher muss in diesem Intervall wenigstens eine Wurzel der Gleichung liegen und zwar nur eine, weil L von $\lambda=-a_n$ bis $\lambda=-a_{n-1}$ continuirlich abnimmt. Bei $\lambda=-a_{n-1}$ macht L wieder den Sprung von $-\infty$ nach $+\infty$, und dasselbe gilt nun für das weitere Fortschreiten, so dass in jedem der Intervalle $-a_n$ bis $-a_{n-1}$, $-a_{n-1}$ bis $-a_{n-2}$, ... $-a_3$ bis $-a_2$, $-a_2$ bis $-a_1$ eine und nur eine Wurzel der Gleichung liegt. Hat nun λ den Werth $-a_1$ soeben überschritten, so ist $L=+\infty$, und indem λ von da an weiter wächst bis nach $+\infty$, nimmt L bis 0 hin ab; in diesem Intervall $-a_1$ bis $+\infty$ muss also ebenfalls eine Wurzel liegen. So haben wir nachgewiesen, dass die Gleichung (1.) n reelle Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ hat. Wir wollen dieselben der Grösse nach geordnet annehmen, so dass λ_1 zwischen $+\infty$ und $-a_1$, λ_2 zwischen $-a_1$ und $-a_2$, u. s. w. endlich λ_n zwischen $-a_{n-1}$ und $-a_n$ liegt. Man hat also

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 \ldots > \lambda_{n-1} > \lambda_n .$$

Diese Werthe machen, für λ gesetzt, die Gleichung (1.) zu einer identischen, und daher haben wir folgendes System identischer Gleichungen:

$$(S.)\quad\left\{\begin{array}{l}
\frac{x_1^2}{a_1+\lambda_1}+\frac{x_2^2}{a_2+\lambda_1}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{a_{n-1}+\lambda_1}+\frac{x_n^2}{a_n+\lambda_1} = 1,\\
\frac{x_1^2}{a_1+\lambda_2}+\frac{x_2^2}{a_2+\lambda_2}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{a_{n-1}+\lambda_2}+\frac{x_n^2}{a_n+\lambda_2} = 1,\\
\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots\\
\frac{x_1^2}{a_1+\lambda_n}+\frac{x_2^2}{a_2+\lambda_n}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{a_{n-1}+\lambda_n}+\frac{x_n^2}{a_n+\lambda_n} = 1.
\end{array}\right.$$

Sehen wir die Grössen a als constant, die Grössen x und λ dagegen als variabel an, so ist deren gegenseitige Abhängigkeit also von der Art, dass, während die Grössen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ aus den Grössen $x_1^2, x_2^2, \ldots x_n^2$ durch Auflösung der Gleichung n^{ten} Grades (1.) gefunden werden, umgekehrt die Grössen $x_1^2, x_2^2, \ldots x_n^2$ durch ein System linearer Gleichungen als Functionen von $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ zu bestimmen sind. Es kommt jetzt auf die Auflösung des Systems (S.) an, wozu wir von den verschiedenen anwendbaren Mitteln das der successiven Elimination wählen. Zuerst eliminiren wir vermittelst der ersten Gleichung x_n^2 aus den übrigen. Um es z. B. aus der zweiten zu eliminiren, müssen wir die erste Gleichung mit $a_n+\lambda_1$ multiplicirt von der zweiten mit $a_n+\lambda_2$ multiplicirten abziehen und erhalten

$$x_1^2\left\{\frac{a_n+\lambda_2}{a_1+\lambda_2}-\frac{a_n+\lambda_1}{a_1+\lambda_1}\right\}+\cdots+x_{n-1}^2\left\{\frac{a_n+\lambda_2}{a_{n-1}+\lambda_2}-\frac{a_n+\lambda_1}{a_{n-1}+\lambda_1}\right\}=\lambda_2-\lambda_1.$$

Mit Benutzung der Identität

$$\frac{a_n+\lambda_2}{a_1+\lambda_2}-\frac{a_n+\lambda_1}{a_1+\lambda_1}=\frac{(a_1-a_n)(\lambda_2-\lambda_1)}{(a_1+\lambda_2)(a_1+\lambda_1)}$$

und nach Fortlassung des allen Gliedern gemeinschaftlichen Factors $\lambda_2-\lambda_1$ geht diese Gleichung in

$$\frac{a_1-a_n}{(a_1+\lambda_1)(a_1+\lambda_2)}x_1^2+\frac{a_2-a_n}{(a_2+\lambda_1)(a_2+\lambda_2)}x_2^2+\cdots+\frac{a_{n-1}-a_n}{(a_{n-1}+\lambda_1)(a_{n-1}+\lambda_2)}x_{n-1}^2=1$$

über. Macht man dieselbe Elimination zwischen der ersten und dritten, der ersten und vierten, ... endlich der ersten und n^{ten} Gleichung des Systems ($S.$), so erhält man folgendes System $n-1^{\text{ter}}$ Ordnung:

$$(S_1.)\left\{\begin{array}{l}
\frac{a_1-a_n}{(a_1+\lambda_1)(a_1+\lambda_2)}x_1^2+\frac{a_2-a_n}{(a_2+\lambda_1)(a_2+\lambda_2)}x_2^2+\cdots+\frac{a_{n-1}-a_n}{(a_{n-1}+\lambda_1)(a_{n-1}+\lambda_2)}x_{n-1}^2=1,\\
\frac{a_1-a_n}{(a_1+\lambda_1)(a_1+\lambda_3)}x_1^2+\frac{a_2-a_n}{(a_2+\lambda_1)(a_2+\lambda_3)}x_2^2+\cdots+\frac{a_{n-1}-a_n}{(a_{n-1}+\lambda_1)(a_{n-1}+\lambda_3)}x_{n-1}^2=1,\\
\qquad\vdots\qquad\qquad\qquad\vdots\qquad\qquad\qquad\vdots\\
\frac{a_1-a_n}{(a_1+\lambda_1)(a_1+\lambda_n)}x_1^2+\frac{a_2-a_n}{(a_2+\lambda_1)(a_2+\lambda_n)}x_2^2+\cdots+\frac{a_{n-1}-a_n}{(a_{n-1}+\lambda_1)(a_{n-1}+\lambda_n)}x_{n-1}^2=1.
\end{array}\right.$$

Von diesem ersten reducirten System $n-1^{\text{ter}}$ Ordnung kann man wieder auf dieselbe Weise zu einem zweiten reducirten System $n-2^{\text{ter}}$ Ordnung übergehen, wobei man nur zu bemerken braucht, dass, wenn man $\frac{a_1-a_n}{a_1+\lambda_1}x_1^2$, $\frac{a_2-a_n}{a_2+\lambda_1}x_2^2$, ... $\frac{a_{n-1}-a_n}{a_{n-1}+\lambda_1}x_{n-1}^2$, als neue Variable ansieht, das System ($S_1.$) auf die Form des Systems ($S.$) zurückkommt. So erhält man das zweite reducirte System:

$$(S_2.)\left\{\begin{array}{l}
\frac{(a_1-a_n)(a_1-a_{n-1})}{(a_1+\lambda_1)(a_1+\lambda_2)(a_1+\lambda_3)}x_1^2+\frac{(a_2-a_n)(a_2-a_{n-1})}{(a_2+\lambda_1)(a_2+\lambda_2)(a_2+\lambda_3)}x_2^2+\cdots+\frac{(a_{n-2}-a_n)(a_{n-2}-a_{n-1})}{(a_{n-2}+\lambda_1)(a_{n-2}+\lambda_2)(a_{n-2}+\lambda_3)}x_{n-2}^2=1,\\
\frac{(a_1-a_n)(a_1-a_{n-1})}{(a_1+\lambda_1)(a_1+\lambda_2)(a_1+\lambda_4)}x_1^2+\frac{(a_2-a_n)(a_2-a_{n-1})}{(a_2+\lambda_1)(a_2+\lambda_2)(a_2+\lambda_4)}x_2^2+\cdots+\frac{(a_{n-2}-a_n)(a_{n-2}-a_{n-1})}{(a_{n-2}+\lambda_1)(a_{n-2}+\lambda_2)(a_{n-2}+\lambda_4)}x_{n-2}^2=1,\\
\qquad\vdots\qquad\qquad\qquad\vdots\qquad\qquad\qquad\vdots\\
\frac{(a_1-a_n)(a_1-a_{n-1})}{(a_1+\lambda_1)(a_1+\lambda_2)(a_1+\lambda_n)}x_1^2+\frac{(a_2-a_n)(a_2-a_{n-1})}{(a_2+\lambda_1)(a_2+\lambda_2)(a_2+\lambda_n)}x_2^2+\cdots+\frac{(a_{n-2}-a_n)(a_{n-2}-a_{n-1})}{(a_{n-2}+\lambda_1)(a_{n-2}+\lambda_2)(a_{n-2}+\lambda_n)}x_{n-2}^2=1.
\end{array}\right.$$

und wenn man auf diese Weise fortfährt, kommt man endlich zu dem System (S_{n-1}), welches nur die eine Variable x_1^2 enthält und nur aus einer Gleichung besteht. Diese Gleichung, deren Form aus dem Fortgang der Rechnung geschlossen wird, ist

$$\frac{(a_1-a_n)(a_1-a_{n-1})\dots(a_1-a_2)}{(a_1+\lambda_1)(a_1+\lambda_2)\dots(a_1+\lambda_{n-1})(a_1+\lambda_n)}\,x_1^2 = 1,$$

und man erhält also die folgenden aus der Auflösung von $(S.)$ hervorgehenden Werthe:

$$(2.)\quad \begin{cases} x_1^2 = \dfrac{(a_1+\lambda_1)(a_1+\lambda_2)\dots(a_1+\lambda_{n-1})(a_1+\lambda_n)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\dots(a_1-a_n)}, \\ x_2^2 = \dfrac{(a_2+\lambda_1)(a_2+\lambda_2)\dots(a_2+\lambda_{n-1})(a_2+\lambda_n)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)\dots(a_2-a_n)}, \\ \vdots \\ x_m^2 = \dfrac{(a_m+\lambda_1)(a_m+\lambda_2)\dots\dots\dots\dots(a_m+\lambda_{n-1})(a_m+\lambda_n)}{(a_m-a_1)(a_m-a_2)\dots(a_m-a_{m-1})(a_m-a_{m+1})\dots(a_m-a_n)}, \\ \vdots \\ x_n^2 = \dfrac{(a_n+\lambda_1)(a_n+\lambda_2)\dots(a_n+\lambda_{n-1})(a_n+\lambda_n)}{(a_n-a_1)(a_n-a_2)\dots(a_n-a_{n-1})}. \end{cases}$$

Da diese Ausdrücke Quadraten gleich werden, so müssen sie positiv sein, was sich auch leicht nachweisen lässt. In dem Ausdruck von x_1^2 z. B. ist im Zähler der erste Factor positiv, die übrigen negativ, also hat der Zähler das Zeichen $(-1)^{n-1}$, im Nenner sind alle Factoren negativ, derselbe hat also auch das Zeichen $(-1)^{n-1}$, folglich ist der Bruch positiv. Aehnliches gilt von den Werthen der übrigen Grössen x_2^2, x_3^2, ... x_n^2.

Man kann die Ausdrücke (2.) auch prüfen, indem man sie in das System $(S.)$ substituirt und zeigt, dass dasselbe identisch erfüllt wird. Hierbei braucht man den aus der Theorie der Zerlegung in Partialbrüche bekannten Hülfssatz, wonach die Summe

$$\sum_{m=1}^{m=n}\frac{a_m^s}{(a_m-a_1)(a_m-a_2)\dots(a_m-a_{m-1})(a_m-a_{m+1})\dots(a_m-a_n)}$$

für $s=1, 2, \dots n-2$ verschwindet und für $s=n-1$ der Einheit gleich wird, während sie für jeden höheren Werth $n-1+r$ von s der Summe der Combinationen mit Wiederholungen zu r der Elemente a_1, a_2, ... a_n gleich ist, ein Satz, dessen Consequenzen ich in meiner Inaugural-Dissertation *)

---

*) Disquisitiones analyticae de fractionibus simplicibus. Berolini 1825.

erörtert habe. Die der Grösse λ_ι entsprechende Gleichung des Systems $(S.)$ ist

$$1 = \frac{x_1^2}{a_1+\lambda_\iota} + \frac{x_2^2}{a_2+\lambda_\iota} + \cdots + \frac{x_n^2}{a_n+\lambda_\iota} = \sum_{m=1}^{m=n} \frac{x_m^2}{a_m+\lambda_\iota}.$$

Damit dieselbe durch die Werthe (2.) der Grössen $x_1^2, x_2^2, \ldots x_n^2$ erfüllt werde, muss die Gleichung

$$(3.) \qquad 1 = \sum_{m=1}^{m=n} \frac{(a_m+\lambda_1)(a_m+\lambda_2)\ldots(a_m+\lambda_{\iota-1})(a_m+\lambda_{\iota+1})\ldots(a_m+\lambda_n)}{(a_m-a_1)(a_m-a_2)\ldots(a_m-a_{m-1})(a_m-a_{m+1})\ldots(a_m-a_n)}$$

eine identische sein, was in der That durch den eben erwähnten Satz verificirt wird, da im Zähler a_m^{n-1} die höchste Potenz von a_m ist und diese den Coefficienten 1 hat.

Die Grössen $x_1^2, x_2^2, \ldots x_n^2$, wie sie durch die Formeln (2.) definirt werden, genügen noch anderen Gleichungen, die sich durch den angeführten Satz ebenfalls auf der Stelle ergeben. Dividirt man nämlich die Grössen x_m^2 nicht bloss durch $a_m+\lambda_\iota$, sondern durch das Product der Factoren $a_m+\lambda_\iota$, $a_m+\lambda_k$, wo λ_i, λ_k zwei verschiedene Wurzeln der Gleichung (1.) bedeuten, so erhält man eine Summe, welche sich von der rechten Seite der Gleichung (3.) nur dadurch unterscheidet, dass der Zähler in Beziehung auf a_m nicht bis auf die $n-1^{\text{te}}$, sondern nur bis auf die $n-2^{\text{te}}$ Potenz steigt. Daher wird die Summe Null, und man hat die Gleichung

$$(4.) \qquad \frac{x_1^2}{(a_1+\lambda_\iota)(a_1+\lambda_k)} + \frac{x_2^2}{(a_2+\lambda_\iota)(a_2+\lambda_k)} + \cdots + \frac{x_n^2}{(a_n+\lambda_\iota)(a_n+\lambda_k)} = 0.$$

Untersuchen wir, was aus der linken Seite der Gleichung (4.) wird, wenn λ_ι, λ_k nicht mehr von einander verschiedene Wurzeln, sondern eine und dieselbe Wurzel der Gleichung (1.) bezeichnen. Es fragt sich also, welchen Werth der Ausdruck

$$(5.) \qquad M_\iota = \frac{x_1^2}{(a_1+\lambda_\iota)^2} + \frac{x_2^2}{(a_2+\lambda_\iota)^2} + \cdots + \frac{x_n^2}{(a_n+\lambda_\iota)^2}$$

erhält, wenn derselbe durch die λ allein dargestellt wird. Durch Substitution der Werthe (2.) an die Stelle der x^2 ergiebt sich

$$M_\iota = \sum_{m=1}^{m=n} \frac{(a_m+\lambda_1)(a_m+\lambda_2)\ldots(a_m+\lambda_{\iota-1})(a_m+\lambda_{\iota+1})\ldots(a_m+\lambda_n)}{(a_m+\lambda_\iota)(a_m-a_1)\ldots(a_m-a_{m-1})(a_m-a_{m+1})\ldots(a_m-a_n)}.$$

Der Zähler des unter dem Summenzeichen stehenden Bruches ist eine Function $n-1^{\text{ten}}$ Grades von a_m. Entwickeln wir denselben nach Potenzen von $a_m+\lambda_\iota$, so wird das von $a_m+\lambda_\iota$ freie Glied

$$(\lambda_1-\lambda_\iota)(\lambda_2-\lambda_\iota)\ldots(\lambda_{\iota-1}-\lambda_\iota)(\lambda_{\iota+1}-\lambda_\iota)\ldots(\lambda_n-\lambda_\iota).$$

Alle übrigen Glieder der Entwicklung zusammengenommen und durch den Factor $a_m+\lambda_i$ des Nenners dividirt bilden eine Function $n-2^{\text{ten}}$ Grades von a_m und fallen daher zufolge des erwähnten Hülfssatzes bei der Summation nach m heraus. Demnach reducirt sich der Ausdruck von M_i auf

$$M_i = \sum_{m=1}^{m=n} \frac{1}{a_m+\lambda_i} \frac{(\lambda_1-\lambda_i)(\lambda_2-\lambda_i)\ldots\ldots(\lambda_{i-1}-\lambda_i)(\lambda_{i+1}-\lambda_i)\ldots\ldots(\lambda_n-\lambda_i)}{(a_m-a_1)(a_m-a_2)\ldots(a_m-a_{m-1})(a_m-a_{m+1})\ldots(a_m-a_n)},$$

und da nach der Theorie der Zerlegung in Partialbrüche bekanntlich

$$\sum_{m=1}^{m=n} \frac{1}{a_m+\lambda_i} \frac{1}{(a_m-a_1)\ldots(a_m-a_{m-1})(a_m-a_{m+1})\ldots(a_m-a_n)} = \frac{(-1)^{n-1}}{(a_1+\lambda_i)(a_2+\lambda_i)\ldots(a_n+\lambda_i)}$$

ist, so ergiebt sich für M_i der schliessliche Werth

$$(6.)\qquad M_i = \frac{(\lambda_i-\lambda_1)(\lambda_i-\lambda_2)\ldots(\lambda_i-\lambda_{i-1})(\lambda_i-\lambda_{i+1})\ldots(\lambda_i-\lambda_n)}{(a_1+\lambda_i)(a_2+\lambda_i)\ldots(a_n+\lambda_i)},$$

d. h. man hat die Gleichung

$$(7.)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{x_1^2}{(a_1+\lambda_i)^2}+\frac{x_2^2}{(a_2+\lambda_i)^2}+\cdots+\frac{x_n^2}{(a_n+\lambda_i)^2} \\ &= \frac{(\lambda_i-\lambda_1)(\lambda_i-\lambda_2)\ldots(\lambda_i-\lambda_{i-1})(\lambda_i-\lambda_{i+1})\ldots(\lambda_i-\lambda_n)}{(a_1+\lambda_i)(a_2+\lambda_i)\ldots(a_n+\lambda_i)}. \end{aligned}\right.$$

Dies Resultat lässt sich auch auf einem anderen etwas einfacheren Wege herleiten. Man setze

$$(8.)\qquad u = 1-\left\{\frac{x_1^2}{a_1+\lambda}+\frac{x_2^2}{a_2+\lambda}+\cdots+\frac{x_n^2}{a_n+\lambda}\right\},$$

sodass die Gleichung $u=0$ mit der Gleichung (1.) identisch ist; dann lässt sich der durch Gleichung (5.) definirte Ausdruck M_i mit Hülfe von u in der Form

$$M_i = \left(\frac{\partial u}{\partial \lambda}\right)_{\lambda=\lambda_i}$$

darstellen, und man wird daher den Ausdruck (6.) von M_i aus u herleiten können, wenn man vorher in der rechten Seite von Gleichung (8.) die Variablen $x_1^2, x_2^2, \ldots x_n^2$ durch die Variablen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ ersetzt hat. Um diese Transformation zu erlangen multiplicire man u mit dem Product der Nenner $(a_1+\lambda)(a_2+\lambda)\ldots(a_n+\lambda)$, dann erhält man einen ganzen rationalen Ausdruck n^{ter} Ordnung in λ, welcher für die Werthe $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ von λ verschwindet, und in welchem der Coefficient von λ^n die Einheit ist. Also hat man $(a_1+\lambda)(a_2+\lambda)\ldots(a_n+\lambda)u = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\ldots(\lambda-\lambda_n)$, oder

$$(8^*.)\qquad u = \frac{(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\ldots(\lambda-\lambda_n)}{(a_1+\lambda)(a_2+\lambda)\ldots(a_n+\lambda)},$$

eine Gleichung, aus deren Zusammenstellung mit (8.) man, beiläufig bemerkt, schliessen kann, dass sich die Werthe (2.) der Grössen $x_1^2, x_2^2, \dots x_n^2$ als die negativ genommenen Zähler der Partialbrüche $\frac{1}{a_1+\lambda}, \frac{1}{a_2+\lambda}, \dots \frac{1}{a_n+\lambda}$ in der Zerlegung des Bruches (8*.) definiren lassen. Indem wir den Ausdruck (8*.) von u nach λ differentiiren und dann $\lambda = \lambda_\iota$ setzen, erhalten wir

$$M_\iota = \left(\frac{\partial u}{\partial \lambda}\right)_{\lambda=\lambda_\iota} = \frac{(\lambda_\iota-\lambda_1)(\lambda_\iota-\lambda_2)\dots(\lambda_\iota-\lambda_{\iota-1})(\lambda_\iota-\lambda_{\iota+1})\dots(\lambda_\iota-\lambda_n)}{(a_1+\lambda_\iota)(a_2+\lambda_\iota)\dots(a_n+\lambda_\iota)},$$

übereinstimmend mit (6.).

Die bisher gewonnenen Resultate setzen uns in den Stand, ohne weitere Rechnung zu der obigen Substitution die aus derselben folgenden Differentialformeln hinzuzufügen. Wenn man von dem in den Gleichungen (2.) enthaltenen Werth von x_m^2

$$x_m^2 = \frac{(a_m+\lambda_1)(a_m+\lambda_2)\dots\dots\dots\dots(a_m+\lambda_{n-1})(a_m+\lambda_n)}{(a_m-a_1)(a_m-a_2)\dots(a_m-a_{m-1})(a_m-a_{m+1})\dots(a_m-a_n)}$$

den Logarithmus nimmt und dann differentiirt, so erhält man

$$\frac{2dx_m}{x_m} = \frac{d\lambda_1}{a_m+\lambda_1} + \frac{d\lambda_2}{a_m+\lambda_2} + \dots + \frac{d\lambda_n}{a_m+\lambda_n}.$$

Hieraus ergiebt sich für die Summe der Quadrate der Differentiale von x_1, $x_2, \dots x_n$ die Formel

$$4(dx_1^2+dx_2^2+\dots+dx_n^2) = \sum_{m=1}^{m=n}\frac{x_m^2}{(a_m+\lambda_1)^2}d\lambda_1^2 + \sum_{m=1}^{m=n}\frac{x_m^2}{(a_m+\lambda_2)^2}d\lambda_2^2 + \dots + \sum_{m=1}^{m=n}\frac{x_m^2}{(a_m+\lambda_n)^2}d\lambda_n^2$$
$$+ 2\sum_{m=1}^{m=n}\frac{x_m^2}{(a_m+\lambda_1)(a_m+\lambda_2)}d\lambda_1 d\lambda_2 + \dots.$$

Nach Gleichung (4.) verschwindet der Coefficient von $d\lambda_1 d\lambda_2$, und ebenso ist es mit den Coefficienten aller Producte der Differentiale von zwei verschiedenen Grössen λ. Die Coefficienten der Quadrate $d\lambda_1^2, d\lambda_2^2, \dots d\lambda_n^2$ dagegen sind nach Gleichung (5.) die Grössen $M_1, M_2, \dots M_n$, also haben wir

$$(9.)\qquad 4(dx_1^2+dx_2^2+\dots+dx_n^2) = M_1 d\lambda_1^2 + M_2 d\lambda_2^2 + \dots + M_n d\lambda_n^2,$$

wo die Coefficienten M durch Gleichung (6.)

$$(6.)\qquad M_\iota = \frac{(\lambda_\iota-\lambda_1)(\lambda_\iota-\lambda_2)\dots(\lambda_\iota-\lambda_{\iota-1})(\lambda_\iota-\lambda_{\iota+1})\dots(\lambda_\iota-\lambda_n)}{(a_1+\lambda_\iota)(a_2+\lambda_\iota)\dots(a_n+\lambda_\iota)}$$

definirt sind. Giebt man dem Begriff der lebendigen Kraft $\frac{1}{2}(x_1'^2+x_2'^2+x_3'^2)$ eines sich frei bewegenden Punktes mit der Masse 1 eine Ausdehnung auf n Dimensionen und setzt

$$T = \tfrac{1}{2}(x_1'^2+x_2'^2+\dots+x_n'^2),$$

so kann man diesen Ausdruck T vermöge Gleichung (9.) auch durch die Variablen λ und deren Differentialquotienten nach t darstellen, und erhält

$$(10.)\qquad 8T = 4(x_1'^2+x_2'^2+\cdots+x_n'^2) = M_1\lambda_1'^2+M_2\lambda_2'^2+\cdots+M_n\lambda_n'^2.$$

Der aufgestellten Ausdehnung auf n Dimensionen entspricht die *Hamilton*sche partielle Differentialgleichung, deren linke Seite der Ausdruck

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial x_2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{\partial W}{\partial x_n}\right)^2$$

ist. Derselbe geht aus $2T$ hervor, indem man darin

$$\frac{\partial T}{\partial x_1'} = \frac{\partial W}{\partial x_1},\quad \frac{\partial T}{\partial x_2'} = \frac{\partial W}{\partial x_2},\quad \ldots\quad \frac{\partial T}{\partial x_n'} = \frac{\partial W}{\partial x_n}$$

substituirt. Kommt es nun darauf an, den Ausdruck anzugeben, in welchen der obige bei der Transformation der Variablen x in die Variablen λ übergeht, so findet man denselben nach der neunzehnten Vorlesung, indem man auf den transformirten Ausdruck von $2T$ die Gleichungen

$$\frac{\partial T}{\partial \lambda_1'} = \frac{\partial W}{\partial \lambda_1},\quad \frac{\partial T}{\partial \lambda_2'} = \frac{\partial W}{\partial \lambda_2},\quad \ldots\quad \frac{\partial T}{\partial \lambda_n'} = \frac{\partial W}{\partial \lambda_n}$$

anwendet. Im vorliegenden Fall ist nach Gleichung (10.)

$$4\frac{\partial T}{\partial \lambda_\iota'} = M_\iota\lambda_\iota' = 4\frac{\partial W}{\partial \lambda_\iota},$$

also hat man

$$\lambda_\iota' = \frac{4}{M_\iota}\frac{\partial W}{\partial \lambda_\iota}$$

in

$$2T = \tfrac{1}{4}\{M_1\lambda_1'^2+M_2\lambda_2'^2+\cdots+M_n\lambda_n'^2\}$$

einzusetzen und erhält auf diese Weise

$$(11.)\ \left(\frac{\partial W}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial x_2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{\partial W}{\partial x_n}\right)^2 = 4\left\{\frac{1}{M_1}\left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_1}\right)^2+\frac{1}{M_2}\left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_2}\right)^2+\cdots+\frac{1}{M_n}\left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_n}\right)^2\right\},$$

wo M_ι nach (6.) zu bestimmen ist, oder, was dasselbe ist,

$$(12.)\qquad \Sigma\left(\frac{\partial W}{\partial x_\iota}\right)^2 = 4\Sigma\frac{(a_1+\lambda_\iota)(a_2+\lambda_\iota)\ldots(a_n+\lambda_\iota)}{(\lambda_\iota-\lambda_1)\ldots(\lambda_\iota-\lambda_{\iota-1})(\lambda_\iota-\lambda_{\iota+1})\ldots(\lambda_\iota-\lambda_n)}\left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_\iota}\right)^2.$$

Siebenundzwanzigste Vorlesung.

Geometrische Bedeutung der elliptischen Coordinaten in der Ebene und im Raume. Quadratur der Oberfläche des Ellipsoids. Rectification seiner Krümmungslinien.

Gehen wir nun auf die geometrische Bedeutung näher ein, welche die in der vorigen Vorlesung aufgestellte Substitution für $n=2$ und $n=3$ hat. Für den Fall von zwei Variablen hat man die Gleichung

$$\frac{x_1^2}{a_1+\lambda}+\frac{x_2^2}{a_2+\lambda} = 1.$$

Sieht man x_1 und x_2 als rechtwinklige Coordinaten an, so ist diese Gleichung die eines Kegelschnitts und zwar einer Ellipse, wenn λ in den Grenzen $-a_1$ und $+\infty$ liegt, also beide Nenner positiv sind, dagegen einer Hyperbel, wenn λ zwischen $-a_1$ und $-a_2$ liegt, also der erste Nenner negativ, der zweite positiv ist. Aendert sich, indem a_1 und a_2 constant bleiben, die Grösse λ, so stellt die Gleichung ein System confocaler Kegelschnitte dar. Sind x_1 und x_2 gegeben, so giebt es immer zwei Werthe von λ, welche die Gleichung befriedigen, der eine liegt zwischen $-a_1$ und ∞, der andere zwischen $-a_1$ und $-a_2$, d. h. von einem System confocaler Kegelschnitte gehen durch einen gegebenen Punkt immer zwei und zwar eine Ellipse und eine Hyperbel. Die Variablen λ_1 und λ_2 für x_1 und x_2 einführen heisst daher geometrisch, die Punkte in der Ebene durch die Ellipse und Hyperbel bestimmen, welche durch dieselben gehen und zwei gegebene Punkte zu Brennpunkten haben. Setzt man $\lambda_1=$ Const., so erhält man alle Punkte auf einer Ellipse des Systems confocaler Kegelschnitte, setzt man $\lambda_2=$ Const., so giebt dies alle Punkte auf einer Hyperbel. Die beiden Systeme der confocalen Ellipsen und Hyperbeln haben mit dem gewöhnlichen Coordinatensystem das gemein, dass je zwei Curven *eines* Systems sich nicht schneiden, und dass jede Curve des einen Systems alle Curven des anderen Systems rechtwinklig durchschneidet. In der That, schneiden sich eine der Ellipsen und eine der Hyperbeln im Punkte (x_1, x_2), und ist demnach

$$E=\frac{x_1^2}{a_1+\lambda_1}+\frac{x_2^2}{a_2+\lambda_1}=1, \quad H=\frac{x_1^2}{a_1+\lambda_2}+\frac{x_2^2}{a_2+\lambda_2}=1,$$

so bilden die Normalen an Ellipse und Hyperbel im Punkt (x_1, x_2) mit den Axen Winkel, deren Cosinus sich wie $\frac{\partial E}{\partial x_1}:\frac{\partial E}{\partial x_2}$ und wie $\frac{\partial H}{\partial x_1}:\frac{\partial H}{\partial x_2}$ verhalten.

Sollen diese Normalen senkrecht auf einander stehen, so muss die Relation

$$\frac{\partial E}{\partial x_1}\frac{\partial H}{\partial x_1}+\frac{\partial E}{\partial x_2}\frac{\partial H}{\partial x_2} = 0$$

oder

$$\frac{x_1^2}{(a_1+\lambda_1)(a_1+\lambda_2)}+\frac{x_2^2}{(a_2+\lambda_1)(a_2+\lambda_2)} = 0$$

bestehen, und da dieselbe zufolge Gleichung (4.) der vorigen Vorlesung eine identische Gleichung ist, so ist hiermit die Orthogonalität von Ellipse und Hyperbel bewiesen. Hieraus geht eine Erleichterung bei der Bestimmung des Flächenelements hervor; denn während dasselbe im Allgemeinen gleich $\left(\frac{\partial x_1}{\partial\lambda_1}\frac{\partial x_2}{\partial\lambda_2}-\frac{\partial x_1}{\partial\lambda_2}\frac{\partial x_2}{\partial\lambda_1}\right)d\lambda_1\, d\lambda_2$ ist, braucht man im vorliegenden Fall nur die Bogenelemente von Ellipse und Hyperbel in einander zu multipliciren. Nach Formel (9.) der vorigen Vorlesung ist das Quadrat des Bogenelements einer beliebigen Curve

$$(1.)\qquad 4(dx_1^2+dx_2^2) = \frac{\lambda_1-\lambda_2}{(a_1+\lambda_1)(a_2+\lambda_1)}d\lambda_1^2+\frac{\lambda_2-\lambda_1}{(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)}d\lambda_2^2.$$

Hieraus ergiebt sich das Bogenelement der Ellipse, wenn man λ_1 constant, also $d\lambda_1=0$ setzt, das der Hyperbel, wenn man λ_2 constant, also $d\lambda_2=0$ setzt. Diese Bogenelemente sind daher

$$\tfrac{1}{2}d\lambda\sqrt{\frac{\lambda_2-\lambda_1}{(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)}} \quad\text{und}\quad \tfrac{1}{2}d\lambda_1\sqrt{\frac{\lambda_1-\lambda_2}{(a_1+\lambda_1)(a_2+\lambda_1)}},$$

und das Flächenelement ist das Product derselben, d. h.

$$\frac{\frac{1}{4}(\lambda_1-\lambda_2)\,d\lambda_1\, d\lambda_2}{\sqrt{-(a_1+\lambda_1)(a_2+\lambda_1)(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)}}.$$

Ganz analoge Betrachtungen können für drei Variable, d. h. für den Raum angestellt werden. Es seien x_1, x_2, x_3 rechtwinklige Coordinaten; dann stellt die Gleichung

$$\frac{x_1^2}{a_1+\lambda}+\frac{x_2^2}{a_2+\lambda}+\frac{x_3^2}{a_3+\lambda} = 1,$$

wenn man λ variiren lässt, ein System confocaler Oberflächen zweiten Grades dar. Die Sätze über confocale Oberflächen zweiten Grades (d. h. solche, in denen die Hauptschnitte die nämlichen Brennpunkte haben) gehören zu den merkwürdigsten der analytischen Geometrie; ich habe einige der wichtigsten im 12ten Bande des *Crelle*schen Journals *) zuerst bekannt gemacht. Wenn

---

*) Schreiben an *Steiner* p. 137.

Chasles in seinem Aperçu historique*) dieselben, ohne meine Priorität zu erwähnen, als neu bezeichnet, so muss man sich daran erinnern, dass in jenem Werk alle deutsch geschriebenen Abhandlungen des *Crelle*schen Journals unberücksichtigt geblieben sind**).

Die confocalen Oberflächen theilen sich in drei Systeme, in ein System von Ellipsoiden, für welche λ zwischen $-a_1$ und $+\infty$ liegt, in ein System von einschaligen Hyperboloiden, für welche λ zwischen $-a_1$ und $-a_2$ liegt, und in ein System von zweischaligen Hyperboloiden, für welche λ zwischen $-a_2$ und $-a_3$ liegt. Im ersten Fall sind nämlich die Nenner $a_1+\lambda$, $a_2+\lambda$, $a_3+\lambda$ sämmtlich positiv, im zweiten Fall ist $a_1+\lambda$ negativ, während $a_2+\lambda$ und $a_3+\lambda$ positiv sind, im dritten Fall sind $a_1+\lambda$ und $a_2+\lambda$ negativ, $a_3+\lambda$ positiv. Für jeden Punkt (x_1, x_2, x_3) giebt es drei Werthe λ_1, λ_2, λ_3 von λ, welche der obigen Gleichung genügen, und zwar entspricht λ_1 einem Ellipsoid, λ_2 einem einschaligen Hyperboloid und λ_3 einem zweischaligen Hyperboloid. Von einem gegebenen System confocaler Oberflächen zweiten Grades geht also durch einen gegebenen Punkt immer *ein* Ellipsoid, *ein* einschaliges Hyperboloid und *ein* zweischaliges Hyperboloid. Von diesen drei Systemen schneidet jedes die beiden anderen rechtwinklig. *Binet* hat zuerst bewiesen, dass die Schnittcurven zugleich die Krümmungscurven dieser Oberflächen sind. *Charles Dupin* in seinen Développements de géometrie hat diesen Satz dahin verallgemeinert, dass er immer gilt, wenn drei Systeme von Flächen sich gegenseitig orthogonal schneiden. *Lamé* hat in neuerer Zeit von der Theorie der confocalen Oberflächen interessante Anwendungen auf die mathematische Physik gemacht.

Dass die drei durch einen gegebenen Punkt des Raumes hindurchgehenden confocalen Oberflächen sich gegenseitig rechtwinklig schneiden, ist nichts Anderes, als die geometrische Deutung von Gleichung (4.) der vorigen Vorlesung. Es versteht sich von selbst, dass auch die drei Durchschnittscurven je zweier von diesen confocalen Oberflächen senkrecht auf einander stehen. Hieraus folgt, dass je zwei der Bogenelemente dieser Durchschnittscurven in einander multiplicirt das Flächenelement der beide Bogenelemente enthaltenden confocalen Oberfläche liefern, und dass das Product aller drei Bogenelemente der Durchschnittscurven das Raumelement im Coordinatensystem $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ darstellt.

---

*) Note XXXI, p. 384. **) Aperçu historique, p. 215 Anmerkung.

Der Ausdruck für das Quadrat des Bogenelements irgend einer Raumcurve ist nach Formel (9.) der vorigen Vorlesung

$$(2.)\quad \begin{cases} dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2 = \\ \frac{1}{4}\left\{\frac{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}{(a_1+\lambda_1)(a_2+\lambda_1)(a_3+\lambda_1)}d\lambda_1^2+\frac{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)}{(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)(a_3+\lambda_2)}d\lambda_2^2+\frac{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}{(a_1+\lambda_3)(a_2+\lambda_3)(a_3+\lambda_3)}d\lambda_3^2\right\}. \end{cases}$$

Setzt man in diesem Ausdrucke eine der Grössen λ_1, λ_2, λ_3 constant, so bezieht er sich auf eine Curve, welche auf einer der confocalen Oberflächen, z. B. für ein constantes λ_1 auf einem Ellipsoid, liegt. Setzt man ferner in diesem Ausdruck zwei der Grössen λ_1, λ_2, λ_3 constant, so bezieht er sich auf die oben erwähnten Durchschnittscurven und zwar auf diejenigen, welche auf einem confocalen Ellipsoid liegen, wenn man λ_1 und λ_2 oder λ_1 und λ_3 constant setzt, dagegen auf den Durchschnitt zweier confocalen Hyperboloide, wenn man λ_2 und λ_3 constant setzt. Hiernach erhält man für die Bogenelemente der Durchschnittscurven auf dem Ellipsoid

$$(3.)\qquad \tfrac{1}{2}d\lambda_3\sqrt{\frac{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}{(a_1+\lambda_3)(a_2+\lambda_3)(a_3+\lambda_3)}} \quad\text{und}\quad \tfrac{1}{2}d\lambda_2\sqrt{\frac{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)}{(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)(a_3+\lambda_2)}}$$

und für das Flächenelement des Ellipsoids

$$\frac{\lambda_2-\lambda_3}{4}\cdot d\lambda_2\,d\lambda_3\sqrt{-\frac{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)}{(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)(a_3+\lambda_2)(a_1+\lambda_3)(a_2+\lambda_3)(a_3+\lambda_3)}}.$$

Integrirt man dieses Differential und dehnt es auf alle möglichen Werthe von λ_2 und λ_3 aus, d. h. von $\lambda_2=-a_2$ bis $\lambda_2=-a_1$ und von $\lambda_3=-a_3$ bis $\lambda_3=-a_2$, so erhält man einen Octanten der Oberfläche des ganzen Ellipsoids. Dieses Doppelintegral theilt sich aber ganz von selbst in die Summe zweier Producte von einfachen Integralen und giebt für die Oberfläche des Ellipsoids den Ausdruck

$$(4.)\quad \begin{cases} 2\int_{-a_2}^{-a_1}d\lambda_2.\lambda_2\sqrt{\frac{\lambda_2-\lambda_1}{(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)(a_3+\lambda_2)}}\cdot\int_{-a_3}^{-a_2}d\lambda_3\sqrt{-\frac{\lambda_3-\lambda_1}{(a_1+\lambda_3)(a_2+\lambda_3)(a_3+\lambda_3)}} \\ -2\int_{-a_2}^{-a_1}d\lambda_2\sqrt{\frac{\lambda_2-\lambda_1}{(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)(a_3+\lambda_2)}}\cdot\int_{-a_3}^{-a_2}d\lambda_3.\lambda_3\sqrt{-\frac{\lambda_3-\lambda_1}{(a_1+\lambda_3)(a_2+\lambda_3)(a_3+\lambda_3)}}, \end{cases}$$

welcher aus elliptischen Integralen zusammengesetzt ist. Dies ist der Weg, auf welchem *Legendre* die Quadratur der Oberfläche des Ellipsoids gefunden hat *). Die Arbeit *Legendres* ist besonders deshalb von der grössten Wichtigkeit, weil dabei zum erstenmale die Krümmungslinien als analytisches In-

*) Exercices de calcul intégral, I., p. 185 oder Traité des fonctions elliptiques, I., p. 352.

strument zur Transformation der Coordinaten angewendet werden. Nimmt man in obigem Ausdruck die Integrale in beliebigen engeren Grenzen, so erhält man nicht die Oberfläche des ganzen Ellipsoids, sondern ein Stück der Oberfläche, welches zwischen zwei Krümmungslinien der einen Art und zweien der anderen Art eingeschlossen ist.

Um das Raumelement zu erhalten, muss man das Flächenelement des Ellipsoids mit dem Bogenelement der von den beiden Hyperboloiden gebildeten Durchschnittscurve multipliciren. Für dies Bogenelement ergiebt sich, indem man λ_2 und λ_3 constant setzt, der Ausdruck

$$\tfrac{1}{2} d\lambda_1 \sqrt{\frac{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}{(a_1+\lambda_1)(a_2+\lambda_1)(a_3+\lambda_1)}},$$

folglich ist das Raumelement

$$\frac{\tfrac{1}{8}(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_3)\,d\lambda_1\,d\lambda_2\,d\lambda_3}{\sqrt{-(a_1+\lambda_1)(a_2+\lambda_1)(a_3+\lambda_1)(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)(a_3+\lambda_2)(a_1+\lambda_3)(a_2+\lambda_3)(a_3+\lambda_3)}}.$$

Indem man dies Differential dreifach integrirt und zwar innerhalb Grenzen, welche die möglichen Werthe von λ_1, λ_2, λ_3 nicht überschreiten, bekommt man einen Raum, welcher durch zwei confocale Ellipsoide, zwei confocale einschalige Hyperboloide und zwei confocale zweischalige Hyperboloide begrenzt wird. Das dreifache Integral theilt sich ganz von selbst in 6 Glieder, deren jedes ein Product dreier einfachen Integrale ist.

Die beiden Bogenelemente

$$\tfrac{1}{2} d\lambda_3 \sqrt{\frac{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}{(a_1+\lambda_3)(a_2+\lambda_3)(a_3+\lambda_3)}} \quad \text{und} \quad \tfrac{1}{2} d\lambda_2 \sqrt{\frac{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)}{(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)(a_3+\lambda_2)}},$$

welche wir bei der Quadratur des Ellipsoids mit einander multiplicirten, sind nach dem *Binet*schen Satze die Elemente der Krümmungslinien auf dem Ellipsoid. Die Integration dieser Elemente giebt die Rectification der Krümmungslinien, und wir erhalten für die Bogen derselben die Integrale

$$(5.)\qquad \tfrac{1}{2}\int d\lambda_3 \sqrt{\frac{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}{(a_1+\lambda_3)(a_2+\lambda_3)(a_3+\lambda_3)}} \quad \text{und} \quad \tfrac{1}{2}\int d\lambda_2 \sqrt{\frac{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)}{(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)(a_3+\lambda_2)}},$$

welche zu den *Abel*schen Integralen gehören und zwar zu der Gattung, welche auf die elliptischen Integrale zunächst folgt.

Achtundzwanzigste Vorlesung.

Die kürzeste Linie auf dem dreiaxigen Ellipsoid. Das Problem der Kartenprojection.

Die Formeln der beiden letzten Vorlesungen führen auf einem sehr einfachen Wege zu der bereits in der zweiundzwanzigsten Vorlesung (p. 177) erwähnten bisher für unausführbar gehaltenen Bestimmung der kürzesten Linie auf dem dreiaxigen Ellipsoid. Die kürzeste Linie wird von einem materiellen Punkt beschrieben, der gezwungen ist, auf der Oberfläche des Ellipsoids zu bleiben, und der, ohne dass eine sollicitirende Kraft auf ihn wirkt, nur von einem anfänglichen Stoss getrieben wird, was damit übereinkommt, dass die Kräftefunction U verschwindet.

Bezeichnen x_1, x_2, x_3 die rechtwinkligen auf die Axen des Ellipsoids bezogenen Coordinaten des sich bewegenden Punktes, so wird der für denselben stattfindende Zwang, auf dem Ellipsoid zu bleiben, durch die Bedingungsgleichung

$$\frac{x_1^2}{a_1+\lambda_1}+\frac{x_2^2}{a_2+\lambda_1}+\frac{x_3^2}{a_3+\lambda_1} = 1$$

ausgedrückt. Es kommt nun darauf an, x_1, x_2, x_3 als Functionen zweier neuen Variablen so darzustellen, dass diese Werthe, in die Bedingungsgleichung eingesetzt, dieselbe identisch befriedigen. Solche Werthe sind diejenigen, welche wir für x_1^2, x_2^2, x_3^2 in λ_1, λ_2, λ_3 gefunden haben, wenn wir darin λ_1 als constant, λ_2, λ_3 als variabel ansehen. Durch die Grössen λ_2, λ_3, welche die Stelle der früher mit q bezeichneten Variablen vertreten, und durch ihre Differentialquotienten $\lambda_2'=\frac{d\lambda_2}{dt}$, $\lambda_3'=\frac{d\lambda_3}{dt}$ haben wir die lebendige Kraft auszudrücken, alsdann für λ_2' und λ_3' die neuen Variablen $\mu_2=\frac{\partial T}{\partial\lambda_2'}$ und $\mu_3=\frac{\partial T}{\partial\lambda_3'}$ einzuführen, welche den früher mit p bezeichneten Grössen entsprechen, und $\mu_2=\frac{\partial T}{\partial\lambda_2'}=\frac{\partial W}{\partial\lambda_2}$, $\mu_3=\frac{\partial T}{\partial\lambda_3'}=\frac{\partial W}{\partial\lambda_3}$ zu setzen. Auf diese Weise ergiebt sich T ausgedrückt durch λ_2, λ_3, $\frac{\partial W}{\partial\lambda_2}$, $\frac{\partial W}{\partial\lambda_3}$, und die Gleichung $T+\alpha=0$, die man auch in der Form $T=h$ schreiben kann, wenn man $\alpha=-h$ setzt, ist die partielle Differentialgleichung des Problems, durch welche W als Function von λ_2, λ_3 definirt wird. Wenn man in Gleichung (10.) der sechsundzwanzigsten Vorlesung die Zahl der Variablen auf drei beschränkt, so erhält man für die lebendige Kraft $2T$ die Transformationsformel

$$2T = x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 = \tfrac{1}{4}M_1\lambda_1'^2 + \tfrac{1}{4}M_2\lambda_2'^2 + \tfrac{1}{4}M_3\lambda_3'^2,$$

wo

$$M_1 = \frac{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}{(a_1+\lambda_1)(a_2+\lambda_1)(a_3+\lambda_1)}, \qquad M_2 = \frac{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)}{(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)(a_3+\lambda_2)},$$

$$M_3 = \frac{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}{(a_1+\lambda_3)(a_2+\lambda_3)(a_3+\lambda_3)}.$$

Aber da die Bewegung auf dem Ellipsoid geschieht, so ist λ_1 constant, $\lambda_1' = 0$ und

$$2T = \tfrac{1}{4}M_2\lambda_2'^2 + \tfrac{1}{4}M_3\lambda_3'^2.$$

Hieraus ergiebt sich

$$\frac{\partial T}{\partial \lambda_2'} = \tfrac{1}{4}M_2\lambda_2' = \frac{\partial W}{\partial \lambda_2}, \qquad \frac{\partial T}{\partial \lambda_3'} = \tfrac{1}{4}M_3\lambda_3' = \frac{\partial W}{\partial \lambda_3},$$

$$\lambda_2' = \frac{4}{M_2}\frac{\partial W}{\partial \lambda_2}, \qquad \lambda_3' = \frac{4}{M_3}\frac{\partial W}{\partial \lambda_3},$$

und man erhält für $2T$ den Ausdruck

$$2T = \frac{4}{M_2}\left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_2}\right)^2 + \frac{4}{M_3}\left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_3}\right)^2.$$

Die gesuchte partielle Differentialgleichung ist sonach

$$T = 2\frac{(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)(a_3+\lambda_2)}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)}\left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_2}\right)^2 + 2\frac{(a_1+\lambda_3)(a_2+\lambda_3)(a_3+\lambda_3)}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}\left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_3}\right)^2 = h$$

oder

$$(1.)\quad \frac{(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)(a_3+\lambda_2)}{\lambda_2-\lambda_1}\left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_2}\right)^2 - \frac{(a_1+\lambda_3)(a_2+\lambda_3)(a_3+\lambda_3)}{\lambda_3-\lambda_1}\left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_3}\right)^2 = \tfrac{1}{2}h(\lambda_2-\lambda_3).$$

Diese partielle Differentialgleichung theilt sich wieder ganz von selbst in zwei gewöhnliche Differentialgleichungen, deren jede nur eine der unabhängigen Variablen enthält, wobei man wieder auf der rechten Seite eine willkürliche Constante zugleich additiv und subtractiv hinzufügt. Auf diese Weise erhält man die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)(a_3+\lambda_2)}{\lambda_2-\lambda_1}\left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_2}\right)^2 = \tfrac{1}{2}h(\lambda_2+\beta),$$

$$\frac{(a_1+\lambda_3)(a_2+\lambda_3)(a_3+\lambda_3)}{\lambda_3-\lambda_1}\left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_3}\right)^2 = \tfrac{1}{2}h(\lambda_3+\beta).$$

Der Coefficient von $\left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_2}\right)^2$ ist positiv, denn von den drei Factoren des Zählers ist nur der erste negativ und $\lambda_2-\lambda_1$ ist ebenfalls negativ, daher muss $\frac{1}{2}h(\lambda_2+\beta)$ positiv sein; der Coefficient von $\left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_3}\right)^2$ dagegen ist negativ, denn die beiden ersten Factoren des Zählers sind negativ und der Nenner $\lambda_3-\lambda_1$

ebenfalls, folglich muss $\frac{1}{2}h(\lambda_3+\beta)$ negativ sein. Die Constante h ist aber positiv, denn sie ist gleich der halben lebendigen Kraft, welche eine ihrer Natur nach positive Grösse ist. Da sonach $\lambda_2+\beta$ positiv, $\lambda_3+\beta$ negativ sein muss, so hat man die Ungleichheiten

$$\beta+\lambda_2 > 0, \quad \beta+\lambda_3 < 0,$$
$$-\lambda_2 < \beta < -\lambda_3,$$

welche beiden Bedingungen sich sehr wohl mit einander vertragen, da $\lambda_2 > \lambda_3$ ist.

Wir erhalten aus den obigen gewöhnlichen Differentialgleichungen folgende vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung (1.):

$$(2.) \quad W = \sqrt{\tfrac{1}{2}h}\left\{\int d\lambda_2 \sqrt{\frac{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2+\beta)}{(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)(a_3+\lambda_2)}} + \int d\lambda_3 \sqrt{\frac{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3+\beta)}{(a_1+\lambda_3)(a_2+\lambda_3)(a_3+\lambda_3)}}\right\}.$$

Hieraus ergiebt sich für die kürzeste Linie auf dem dreiaxigen Ellipsoid die Gleichung $\frac{\partial W}{\partial \beta} = \text{Const.}$ oder

$$(3.) \left\{ \begin{array}{c} \text{Const.} = \\ \int d\lambda_2 \sqrt{\frac{\lambda_2-\lambda_1}{(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)(a_3+\lambda_2)(\beta+\lambda_2)}} + \int d\lambda_3 \sqrt{\frac{\lambda_3-\lambda_1}{(a_1+\lambda_3)(a_2+\lambda_3)(a_3+\lambda_3)(\beta+\lambda_3)}}. \end{array} \right.$$

Die Gleichung für die Zeit ist $\tau - t = \frac{\partial W}{\partial \alpha} = -\frac{\partial W}{\partial h}$, oder da W von h nur durch den Factor $\sqrt{h}$ abhängt und demnach $\frac{\partial W}{\partial h} = \frac{1}{2h} W$ ist,

$$(4.) \quad t-\tau = \frac{1}{2h} W.$$

Bezeichnet s den Bogen der kürzesten Linie, von dem Punkt derselben an gerechnet, in welchem sich zur Zeit τ der bewegliche Punkt befindet, so giebt der Satz der lebendigen Kraft $T = \frac{1}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = h$, $ds = \sqrt{2h}.dt$,

$$s = \sqrt{2h}(t-\tau).$$

Hieraus erhält man durch Vergleichung mit (4.) für den Bogen s die Gleichung $s = \frac{1}{\sqrt{2h}} W$ oder

$$s = \tfrac{1}{2}\left\{\int d\lambda_2 \sqrt{\frac{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2+\beta)}{(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)(a_3+\lambda_2)}} + \int d\lambda_3 \sqrt{\frac{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3+\beta)}{(a_1+\lambda_3)(a_2+\lambda_3)(a_3+\lambda_3)}}\right\},$$

wodurch auch die Rectification der kürzesten Linie ausgeführt ist.

So haben wir durch den blossen Hinblick auf die partielle Differentialgleichung ein Problem gelöst, welches bisher für unlösbar galt. Obgleich die angewandte Substitution das wesentlichste Erforderniss zu dieser Lösung ist, so erleichtert doch auch die Methode der Zurückführung auf die partielle Differentialgleichung die Durchführung bedeutend. In der That fand *Minding*, als er die von mir veröffentlichte Substitution anwenden wollte, auf dem üblichen Wege der Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung Schwierigkeiten, die er nach seiner eigenen Angabe nicht überwunden haben würde, wenn ihm nicht das von mir angegebene Resultat schon bekannt gewesen wäre *).

Durch dieselbe Substitution, welche uns schon die Lösung mehrerer schwierigen Probleme gegeben hat, können wir auch das Problem der Kartenprojection für das dreiaxige Ellipsoid erledigen. Unter den verschiedenen Arten eine krumme Oberfläche auf einer Ebene darzustellen, wie dies bei den Karten nöthig ist, zieht man diejenige Art der Projection allen übrigen vor, bei welcher die unendlich kleinen Elemente ähnlich bleiben. Mit dieser Projection hat sich im vorigen Jahrhundert *Lambert* vielseitig beschäftigt, wovon man sich in seinen Beiträgen zur Mathematik näher unterrichten kann. Dadurch veranlasst unternahm *Lamberts* damaliger College *Lagrange* eine Untersuchung desselben Gegenstandes und gelangte zur vollständigen Lösung für alle Umdrehungsflächen. Als später die Kopenhagener Gesellschaft auf die Lösung dieser Aufgabe für alle krummen Oberflächen einen Preis gesetzt hatte, wurde die von *Gauss* eingesandte Abhandlung gekrönt. In derselben geschieht der *Lagrange*schen Arbeit, der nur wenig hinzuzusetzen war, keine Erwähnung.

Die leitende Idee bei der Lösung des Problems der Kartenprojection ist folgende. Wenn man einen Punkt auf der Oberfläche mit den unendlich nahen Punkten verbindet und dasselbe mit den entsprechenden Punkten in der Ebene vornimmt, so müssen die entsprechenden Längen proportional sein, damit die unendlich kleinen Elemente ähnlich seien, und umgekehrt, sind die entsprechenden Längen proportional, so sind die unendlich kleinen Elemente ähnlich. Diese Proportionalität ist analytisch auszudrücken.

Die Coordinaten x, y, z eines Punktes der Oberfläche seien als Functionen zweier Grössen p und q gegeben; dann wird das Quadrat des Bogenelements irgend einer Curve auf der Oberfläche durch den Ausdruck

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = A\,dp^2 + 2\,B\,dp\,dq + C\,dq^2$$

dargestellt. Das Quadrat des entsprechenden Bogenelements in der Ebene ist

$$d\sigma^2 = du^2 + dv^2,$$

*) Vgl. *Crelles* Journal Bd. XX, p. 325.

wo u und v die rechtwinkligen Coordinaten in der Ebene bedeuten. Damit nun die unendlich kleinen Längen einander proportional werden, muss $d\sigma^2 = m\,ds^2$ sein, wo m irgend eine Function von p und q sein kann. Das Correlationssystem zwischen den Grössen u, v und p, q muss also ein solches sein, dass die Gleichung

$$du^2 + dv^2 = m(A\,dp^2 + 2B\,dp\,dq + C\,dq^2)$$

bestehe, wo $\sqrt{m}$ das Aehnlichkeitsverhältniss bedeutet.

Diese Differentialgleichung befriedigt man folgendermassen. Man löse $A\,dp^2 + 2B\,dp\,dq + C\,dq^2$ in die beiden linearen Factoren

$$\sqrt{A}\,.\,dp + \left(\frac{B}{\sqrt{A}} + \sqrt{C - \frac{B^2}{A}}\cdot\sqrt{-1}\right)dq, \quad \sqrt{A}\,.\,dp + \left(\frac{B}{\sqrt{A}} - \sqrt{C - \frac{B^2}{A}}\cdot\sqrt{-1}\right)dq$$

auf und denke sich m in die Factoren $a + b\sqrt{-1}$ und $a - b\sqrt{-1}$ zerlegt, dann lässt sich obige Differentialgleichung in die beiden auflösen:

$$du + dv\sqrt{-1} = (a + b\sqrt{-1})\left\{\sqrt{A}\,.\,dp + \left(\frac{B}{\sqrt{A}} + \sqrt{C - \frac{B^2}{A}}\cdot\sqrt{-1}\right)dq\right\},$$

$$du - dv\sqrt{-1} = (a - b\sqrt{-1})\left\{\sqrt{A}\,.\,dp + \left(\frac{B}{\sqrt{A}} - \sqrt{C - \frac{B^2}{A}}\cdot\sqrt{-1}\right)dq\right\}.$$

Kann man nun a und b so bestimmen, dass die rechten Seiten dieser Gleichungen vollständige Differentiale werden, so erhält man durch Integration u und v als Functionen von p und q. Die Bestimmung des integrirenden Factors $a + b\sqrt{-1}$ kommt mit der Integration der Differentialgleichungen

$$0 = \sqrt{A}\,.\,dp + \left(\frac{B}{\sqrt{A}} + \sqrt{C - \frac{B^2}{A}}\cdot\sqrt{-1}\right)dq,$$

$$0 = \sqrt{A}\,.\,dp + \left(\frac{B}{\sqrt{A}} - \sqrt{C - \frac{B^2}{A}}\cdot\sqrt{-1}\right)dq$$

überein, und diese Integration ist also die schliesslich zu lösende Aufgabe. Ist $B = 0$, so müssen die Factoren $a + b\sqrt{-1}$ und $a - b\sqrt{-1}$ gefunden werden, welche

$$\sqrt{A}\,.\,dp + \sqrt{C}\,.\sqrt{-1}\,.\,dq \quad \text{und} \quad \sqrt{A}\,.\,dp - \sqrt{C}\,.\sqrt{-1}\,.\,dq$$

integrabel machen, und alsdann ist $\sqrt{a^2 + b^2}$ das Aehnlichkeitsverhältniss.

Betrachtet man insbesondere das dreiaxige Ellipsoid, und dies geschieht, wenn man nach Einführung der Variablen λ_1, λ_2, λ_3 die erste derselben constant setzt, so erhält man nach Gleichung (2.) der siebenundzwanzigsten Vorlesung für das Bogenelement irgend einer Curve auf demselben den Ausdruck

$$ds^2 = A\,d\lambda_2^2 + C\,d\lambda_3^2 = \tfrac{1}{4}\frac{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)}{(a_1 + \lambda_2)(a_2 + \lambda_2)(a_3 + \lambda_2)}\,d\lambda_2^2 + \tfrac{1}{4}\frac{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)}{(a_1 + \lambda_3)(a_2 + \lambda_3)(a_3 + \lambda_3)}\,d\lambda_3^2,$$

und man hat also die Factoren zu finden, welche die Ausdrücke

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)}{(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)(a_3+\lambda_2)}}\cdot d\lambda_2+\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}{(a_1+\lambda_3)(a_2+\lambda_3)(a_3+\lambda_3)}}\cdot\sqrt{-1}\,.\,d\lambda_3,$$

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)}{(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)(a_3+\lambda_2)}}\cdot d\lambda_2-\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}{(a_1+\lambda_3)(a_2+\lambda_3)(a_3+\lambda_3)}}\cdot\sqrt{-1}\,.\,d\lambda_3$$

integrabel machen. Diese Factoren sind $\frac{2}{\sqrt{\lambda_2-\lambda_3}}$ für beide Ausdrücke: daher ist $a=\frac{2}{\sqrt{\lambda_2-\lambda_3}}$, $b=0$, und die Differentialgleichungen, welche die Correlation von u, v und p, q geben, werden

$$du+dv.\sqrt{-1}=\sqrt{\frac{\lambda_2-\lambda_1}{(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)(a_3+\lambda_2)}}\cdot d\lambda_2+\sqrt{\frac{\lambda_1-\lambda_3}{(a_1+\lambda_3)(a_2+\lambda_3)(a_3+\lambda_3)}}\cdot\sqrt{-1}\,.\,d\lambda_3,$$

$$du-dv.\sqrt{-1}=\sqrt{\frac{\lambda_2-\lambda_1}{(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)(a_3+\lambda_2)}}\cdot d\lambda_2-\sqrt{\frac{\lambda_1-\lambda_3}{(a_1+\lambda_3)(a_2+\lambda_3)(a_3+\lambda_3)}}\cdot\sqrt{-1}\,.\,d\lambda_3.$$

Hieraus folgt:

$$u=\int d\lambda_2\sqrt{\frac{\lambda_2-\lambda_1}{(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)(a_3+\lambda_2)}},\qquad v=\int d\lambda_3\sqrt{\frac{\lambda_1-\lambda_3}{(a_1+\lambda_3)(a_2+\lambda_3)(a_3+\lambda_3)}};$$

und das Aehnlichkeitsverhältniss ist

$$\sqrt{m}=\sqrt{a^2+b^2}=\frac{2}{\sqrt{\lambda_2-\lambda_3}}.$$

mit der so bestimmten Grösse $\sqrt{m}$ müssen also die Längen auf dem Ellipsoide multiplicirt werden, um die entsprechenden Längen in der Ebene zu geben.

Die Formeln, welche wir für die kürzeste Linie auf dem dreiaxigen Ellipsoid gefunden haben, erleiden eine wesentliche Veränderung für den Fall eines Umdrehungsellipsoids. Es sind dabei zwei Fälle zu unterscheiden, der erste ist der des abgeplatteten Sphäroids, in welchem die beiden grösseren Axen einander gleich sind, wo also $a_2=a_3$, der zweite ist der des verlängerten Sphäroids, in welchem die beiden kleineren Axen einander gleich sind, wo also $a_2=a_1$. Wir wollen von diesen beiden Fällen nur den ersteren behandeln, da der letztere ganz analog durchzuführen ist. Wie man dies in solchen Fällen immer macht, lässt man zuerst a_2 und a_3 unendlich wenig von einander verschieden sein und erst schliesslich zusammenfallen. Es sei also zunächst

$$a_3 = a_2+\omega,$$

wo ω eine unendlich kleine Grösse bezeichnet. Nach den allgemeinen Betrachtungen liegt λ_3 zwischen $-a_2$ und $-a_3$, also im vorliegenden Fall zwischen $-a_2$ und $-(a_2+\omega)$: man kann daher

$$\lambda_3 = -(a_2+\omega\sin\varphi^2)$$

setzen, d. h.

$$a_2+\lambda_3 = -\omega\sin\varphi^2,$$

$$a_3+\lambda_3 = \omega-\omega\sin\varphi^2 = \omega\cos\varphi^2,$$

$$d\lambda_3 = -\omega\,.\,2\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{d\lambda_3}{\sqrt{-(a_2+\lambda_3)(a_3+\lambda_3)}} = -2d\varphi.$$

Dies haben wir in die Gleichung der kürzesten Linie zu substituiren, d. h. in die Gleichung

$$(3.)\left\{\begin{array}{l}\text{Const.} = \\ \displaystyle\int d\lambda_2\sqrt{\frac{\lambda_2-\lambda_1}{(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)(a_3+\lambda_2)(\beta+\lambda_2)}}+\int d\lambda_3\sqrt{\frac{\lambda_3-\lambda_1}{(a_1+\lambda_3)(a_2+\lambda_3)(a_3+\lambda_3)(\beta+\lambda_3)}}.\end{array}\right.$$

Von den im ersten Integral unter dem Wurzelzeichen stehenden Factoren werden $a_2+\lambda_2$ und $a_3+\lambda_2$ einander gleich, das Integral verwandelt sich daher in ein elliptisches. Das zweite aber verwandelt sich in

$$-2\sqrt{\frac{a_2+\lambda_1}{(a_1-a_2)(\beta-a_2)}}\int d\varphi = -2\sqrt{\frac{a_2+\lambda_1}{(a_1-a_2)(\beta-a_2)}}\cdot\varphi,$$

und die Gleichung (3.) geht also über in

$$\text{Const.} = \int\frac{d\lambda_2}{a_2+\lambda_2}\sqrt{\frac{\lambda_2-\lambda_1}{(a_1+\lambda_2)(\beta+\lambda_2)}}-2\sqrt{\frac{a_2+\lambda_1}{(a_1-a_2)(\beta-a_2)}}\cdot\varphi.$$

Die Ausdrücke der Coordinaten für die Punkte der Oberfläche des dreiaxigen Ellipsoids waren

$$x_1 = \sqrt{\frac{(a_1+\lambda_1)(a_1+\lambda_2)(a_1+\lambda_3)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)}},$$

$$x_2 = \sqrt{\frac{(a_2+\lambda_1)(a_2+\lambda_2)(a_2+\lambda_3)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)}},$$

$$x_3 = \sqrt{\frac{(a_3+\lambda_1)(a_3+\lambda_2)(a_3+\lambda_3)}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)}};$$

diese werden im Falle des abgeplatteten Sphäroids

$$x_1 = \sqrt{\frac{a_1+\lambda_1}{a_1-a_2}}\sqrt{a_1+\lambda_2}.$$

$$x_2 = \sqrt{\frac{a_2+\lambda_1}{a_2-a_1}}\sqrt{a_2+\lambda_2}\,.\,\sin\varphi,$$

$$x_3 = \sqrt{\frac{a_2+\lambda_1}{a_2-a_1}}\sqrt{a_2+\lambda_2}\,.\,\cos\varphi.$$

Da die allgemeinen Formeln für x_2 und x_3 in einander übergehen, wenn a_2 mit a_3 vertauscht wird, so könnte eine oberflächliche Betrachtung glauben machen, es müsste, wenn $a_2 = a_3$ ist, auch $x_2 = x_3$ sein; dies ist aber, wie wir sehen, keineswegs der Fall. Die alsdann geltenden Formeln sind dieselben, welche man erhält, wenn man die Coordinaten x_1 und $\sqrt{x_2^2 + x_3^2}$ des Meridians des Sphäroids nach der für die Ebene gültigen Substitution durch λ_1 und λ_2 ausdrückt und für die Länge auf dem Sphäroid den Winkel φ einführt.

Auch für die im Vorigen abgehandelte Kartenprojection erhält man bei der Anwendung auf das Sphäroid besondere Formeln. Dieser besondere Fall der Projection führt den Namen der stereographischen; die charakteristische Eigenschaft derselben, dass sich die homologen Curven auf der Oberfläche und in der Ebene unter gleichen Winkeln schneiden, ist nur ein anderer Ausdruck für die Aehnlichkeit der unendlich kleinen Elemente.

Die partielle Differentialgleichung, deren Integration uns die Gleichung der kürzesten Linie auf dem Ellipsoid gab, war von der Form

$$\frac{f(\lambda_2)\left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_2}\right)^2 - f(\lambda_3)\left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_3}\right)^2}{\lambda_2 - \lambda_3} = \text{Const.},$$

wo $f(\lambda) = \frac{(a_1+\lambda)(a_2+\lambda)(a_3+\lambda)}{\lambda - \lambda_1}$. Auf der rechten Seite dieser Gleichung steht eine Constante, weil wir den sich bewegenden Punkt keiner Kraft unterworfen annehmen, ausser einem anfänglichen Stoss. Man kann sich nun die Frage stellen, von welcher Beschaffenheit Kräfte, die man auf den Punkt wirkend annimmt, sein müssen, damit die daraus hervorgehende Form der obigen Differentialgleichung die nämliche Methode der Integration zulasse, wie wir sie bisher angewendet haben. Die allgemeine Form, unter welche sich die Kräftefunction zu diesem Behufe bringen lassen muss, ist, wie man leicht einsieht,

$$\frac{\chi(\lambda_2) + \psi(\lambda_3)}{\lambda_2 - \lambda_3},$$

weil alsdann die Trennung in zwei gewöhnliche Differentialgleichungen gelingt. Aber dieser analytischen Form wird man im Allgemeinen keine mechanische Bedeutung abgewinnen: wir wollen nur einen Fall betrachten, der eine solche zulässt, nämlich den Fall, wo die Kräftefunction die Form $\lambda_2 + \lambda_3$ hat, welcher Ausdruck sich auf die Form $\frac{\lambda_2^2 - \lambda_3^2}{\lambda_2 - \lambda_3}$ bringen lässt, mithin unter die in Rede stehende Kategorie gehört. Dieser Fall entspricht dem mechanischen Problem, wo ein auf der Oberfläche des Ellipsoids sich bewegender Punkt einer Kraft unterworfen ist, die ihn nach dem Mittelpunkt proportional seiner Entfernung von demselben zieht. In der That, in diesem Fall ist die Kraft, die auf den Punkt in der Richtung des Radius Vector wirkt, gleich kr, folglich ist die Kräftefunction $\frac{1}{2}kr^2 = \frac{1}{2}k(x_1^2+x_2^2+x_3^2)$. Rufen wir uns die allgemeinen in der sechsundzwanzigsten Vorlesung (Gleichung (2.)) gegebenen Ausdrücke von $x_1^2, x_2^2, \dots x_n^2$ durch $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ ins Gedächtniss zurück, also die Ausdrücke

$$x_m^2 = \frac{(a_m+\lambda_1)(a_m+\lambda_2) \dots\dots\dots\dots\dots (a_m+\lambda_n)}{(a_m-a_1)(a_m-a_2)\dots(a_m-a_{m-1})(a_m-a_{m+1})\dots(a_m-a_n)}$$

$$= \frac{a_m^n+(\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n)a_m^{n-1}+\dots+\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n}{(a_m-a_1)(a_m-a_2)\dots(a_m-a_{m-1})(a_m-a_{m+1})\dots(a_m-a_n)},$$

so folgt nach den bekannten Sätzen über Partialbrüche die merkwürdige Formel

$$x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2 = a_1+a_2+\dots+a_n+\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n.$$

Für $n = 3$ wird

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2 = a_1+a_2+a_3+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3.$$

In dem von uns betrachteten Fall ist λ_1 constant, also erhalten wir für die Kräftefunction

$$\tfrac{1}{2}k(x_1^2+x_2^2+x_3^2) = \tfrac{1}{2}k(\lambda_2+\lambda_3)+\text{Const.},$$

so dass sich in diesem Fall die partielle Differentialgleichung mit derselben Leichtigkeit integriren lässt wie früher.

Man kann diese Betrachtung noch ausdehnen, indem man die hinzukommende Kraft nicht mehr nach dem Mittelpunkt des Ellipsoids gerichtet sein lässt. In dem eben betrachteten Fall war die Kraft in der Richtung des Radius Vector kr, daher die Seitenkräfte in der Richtung der Coordinatenaxen kx_1, kx_2, kx_3. Geben wir jetzt den Coordinaten verschiedene Coefficienten m_1, m_2, m_3, so wird die Integration auch noch möglich sein, wenn wir die Coefficienten einer Bedingungsgleichung unterwerfen. In der That, sind die Componenten in der Richtung der Coordinatenaxen m_1x_1, m_2x_2, m_3x_3, so hat die Kräftefunction den Ausdruck

$$\tfrac{1}{2}(m_1x_1^2+m_2x_2^2+m_3x_3^2) = \tfrac{1}{2}m_1\frac{(a_1+\lambda_1)(a_1+\lambda_2)(a_1+\lambda_3)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)}+\tfrac{1}{2}m_2\frac{(a_2+\lambda_1)(a_2+\lambda_2)(a_2+\lambda_3)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)}$$

$$+\tfrac{1}{2}m_3\frac{(a_3+\lambda_1)(a_3+\lambda_2)(a_3+\lambda_3)}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)},$$

lässt sich also unter der Gestalt

$$A+B(\lambda_2+\lambda_3)+C\lambda_2\lambda_3$$

darstellen und ist daher von der richtigen Form, wenn C verschwindet, d. h. wenn

$$\frac{m_1(a_1+\lambda_1)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)}+\frac{m_2(a_2+\lambda_1)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)}+\frac{m_3(a_3+\lambda_1)}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)} = 0.$$

Ist diese Bedingungsgleichung durch die Werthe von m_1, m_2, m_3 erfüllt, so bleibt die frühere Integrationsmethode zulässig.

Neunundzwanzigste Vorlesung.

Anziehung eines Punkts nach zwei festen Centren.

Wir gehen jetzt zu der Bewegung eines von zwei festen Centren angezogenen Punktes über. Beschränken wir uns zunächst auf den Fall, wo die Bewegung in der Ebene vor sich geht, was immer der Fall ist, wenn die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit mit der Verbindungslinie der festen Centren in einer Ebene liegt. Diese Verbindungslinie sei die Axe der x_2, die in der Mitte zwischen den beiden um $2f$ von einander entfernten Centren senkrecht darauf stehende die Axe der x_1. Drücken wir nun x_1 und x_2 durch λ_1 und λ_2 aus und wählen die Constanten a_1 und a_2 der Substitution so, dass die beiden festen Centren in die Brennpunkte des confocalen Systems fallen, so wird die zu integrirende Differentialgleichung

$$(1.)\qquad \frac{(a_1+\lambda_1)(a_2+\lambda_1)}{\lambda_1-\lambda_2}\left(\frac{\partial W}{\partial\lambda_1}\right)^2+\frac{(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)}{\lambda_2-\lambda_1}\left(\frac{\partial W}{\partial\lambda_2}\right)^2 = \tfrac{1}{2}U+\tfrac{1}{2}h,$$

wo U ebenfalls durch λ_1 und λ_2 ausgedrückt werden muss.

Die Entfernungen des angezogenen Punktes von den beiden Centren seien r und r_1, dann hat man

$$r^2=(x_2+f)^2+x_1^2,\qquad r_1^2=(x_2-f)^2+x_1^2,$$

oder

$$r^2=x_1^2+x_2^2+f^2+2fx_2,\qquad r_1^2=x_1^2+x_2^2+f^2-2fx_2.$$

Nach der Fundamentaleigenschaft der Ellipse ist

$$f^2=(a_2+\lambda_1)-(a_1+\lambda_1)=a_2-a_1,$$

die Substitution

$$(2.)\qquad x_1=\sqrt{\frac{(a_1+\lambda_1)(a_1+\lambda_2)}{a_1-a_2}},\qquad x_2=\sqrt{\frac{(a_2+\lambda_1)(a_2+\lambda_2)}{a_2-a_1}}$$

liefert überdies, wie wir wissen, die Gleichung

$$x_1^2+x_2^2 = a_1+a_2+\lambda_1+\lambda_2;$$

daher wird

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2 + f^2 + 2fx_2 = 2a_2 + \lambda_1 + \lambda_2 + 2\sqrt{(a_2+\lambda_1)(a_2+\lambda_2)}$$
$$= \{\sqrt{a_2+\lambda_1} + \sqrt{a_2+\lambda_2}\}^2,$$
$$r_1^2 = x_1^2 + x_2^2 + f^2 - 2fx_2 = 2a_2 + \lambda_1 + \lambda_2 - 2\sqrt{(a_2+\lambda_1)(a_2+\lambda_2)}$$
$$= \{\sqrt{a_2+\lambda_1} - \sqrt{a_2+\lambda_2}\}^2.$$

also

$$r = \sqrt{a_2+\lambda_1} + \sqrt{a_2+\lambda_2}, \quad r_1 = \sqrt{a_2+\lambda_1} - \sqrt{a_2+\lambda_2}.$$

Dies vorausgesetzt, ist die Kräftefunction

$$U = \frac{m}{r} + \frac{m_1}{r_1} = \frac{mr_1 + m_1 r}{rr_1},$$

oder wenn man hierin für r und r_1 die oben gegebenen Werthe substituirt,

$$U = \frac{(m+m_1)\sqrt{a_2+\lambda_1} - (m-m_1)\sqrt{a_2+\lambda_2}}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Setzt man diesen Werth von U in die partielle Differentialgleichung (1.) und multiplicirt mit $\lambda_1 - \lambda_2$, so erhält man:

$$3.) \quad \begin{cases} (a_1+\lambda_1)(a_2+\lambda_1)\left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_1}\right)^2 - (a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)\left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_2}\right)^2 \\ = \frac{1}{2}h\lambda_1 + \frac{1}{2}(m+m_1)\sqrt{a_2+\lambda_1} - \{\frac{1}{2}h\lambda_2 + \frac{1}{2}(m-m_1)\sqrt{a_2+\lambda_2}\}, \end{cases}$$

und da man diese Gleichung unter Einführung einer willkürlichen Constante β in die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_1}\right)^2 = \frac{\frac{1}{2}h\lambda_1 + \frac{1}{2}(m+m_1)\sqrt{a_2+\lambda_1} + \beta}{(a_1+\lambda_1)(a_2+\lambda_1)}, \quad \left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_2}\right)^2 = \frac{\frac{1}{2}h\lambda_2 + \frac{1}{2}(m-m_1)\sqrt{a_2+\lambda_2} + \beta}{(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)}$$

auflösen kann, so wird

$$4.) \quad W = \int d\lambda_1 \sqrt{\frac{\frac{1}{2}h\lambda_1 + \frac{1}{2}(m+m_1)\sqrt{a_2+\lambda_1} + \beta}{(a_1+\lambda_1)(a_2+\lambda_1)}} + \int d\lambda_2 \sqrt{\frac{\frac{1}{2}h\lambda_2 + \frac{1}{2}(m-m_1)\sqrt{a_2+\lambda_2} + \beta}{(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)}}.$$

Will man hier die Irrationalität unter dem Quadratwurzelzeichen fortschaffen, so setze man

$$\sqrt{a_2+\lambda_1} = p, \quad \sqrt{a_2+\lambda_2} = q,$$

und man erhält

$$W = \int dp \sqrt{\frac{2(hp^2 + (m+m_1)p + 2\beta - ha_2)}{p^2 - f^2}} + \int dq \sqrt{\frac{2(hq^2 + (m-m_1)q + 2\beta - ha_2)}{q^2 - f^2}}.$$

Aus (4.) ergeben sich die Integralgleichungen unter der Form:

$$\beta' = \frac{\partial W}{\partial \beta}, \quad t - \tau = \frac{\partial W}{\partial h}.$$

Lagrange hat sich in dem ersten Bande der Turiner Memoiren bemüht, Kräfte zu finden, welche man den Attractionen nach den beiden festen Centren hinzufügen kann, ohne dass die *Euler*sche Lösung dieses Problems aufhört, die Integration zu leisten. Obgleich diese Untersuchung zu keinem wesentlichen Resultat geführt hat, so ist sie dennoch von dem grössten Interesse, und zwar nicht bloss für den damaligen Stand der Wissenschaft, sondern noch gegenwärtig. Die Kraft, welche man nach *Lagrange* hinzufügen kann, ist eine nach dem in der Mitte zwischen den beiden festen Centren liegenden Punkt gerichtete und der Entfernung proportionale Attraction. Dies stimmt mit dem, was wir rücksichtlich der kürzesten Linie auf dem Ellipsoid fanden, vollkommen überein. Denn durch diese Kraft kommt in der Kräftefunction der Term $\frac{1}{2}k(x_1^2+x_2^2) = \frac{1}{2}k(\lambda_1+\lambda_2+a_1+a_2)$ hinzu, also auf der rechten Seite der partiellen Differentialgleichung, d. h. in $\frac{1}{2}U(\lambda_1-\lambda_2)$, der Ausdruck $\psi(\lambda_1)-\psi(\lambda_2)$, wenn man $\psi(\lambda) = \frac{1}{4}k\{\lambda^2+(a_1+a_2)\lambda\}$ setzt. Zugleich sind dann $\psi(\lambda_1)$ und $\psi(\lambda_2)$ respective die Glieder, um welche in den nach λ_1 und λ_2 genommenen Integralen des Ausdrucks (4.) von W die Zähler unter den Quadratwurzelzeichen zu vermehren sind.

Wir haben durch die obigen Formeln das Problem der Attraction eines Punktes nach zwei festen Centren, wenn die Bewegung in einer Ebene vor sich geht, vollständig gelöst; es bleibt jetzt noch übrig den allgemeineren Fall hierauf zu reduciren. Dies geschieht durch das Princip der Flächen.

Um die Aufgabe in ihrer grössten Allgemeinheit zu behandeln, wollen wir annehmen, ein Punkt werde nicht durch zwei, sondern durch eine beliebige Anzahl von festen Centren, die in einer Geraden liegen, angezogen. Alsdann, und selbst wenn noch überdies eine constante Kraft parallel derselben Geraden hinzukommt, gilt in Beziehung auf die Ebene, welche auf dieser Geraden senkrecht steht, das Prinzip der Flächen. Ist nun die Anfangsgeschwindigkeit des sich bewegenden Punktes mit der Geraden in einer Ebene, so findet die ganze Bewegung in dieser Ebene statt, und man hat nicht nöthig den Satz der Flächen anzuwenden. Liegt dagegen die Anfangsgeschwindigkeit mit jener Geraden nicht in einer Ebene, so beschreibt der Punkt eine Curve doppelter Krümmung, und nun ist es von grossem Vortheil, die Bewegung in zwei zu zerlegen; denkt man sich nämlich durch den Punkt und die Gerade, welche die Centra enthält, eine Ebene gelegt, so kann man sich vorstellen, dass die Ebene um die Gerade rotire, und ausserdem der Punkt sich in der rotirenden Ebene bewege. Diese Zerlegung, welche unter allen Umständen möglich ist, würde im Allgemeinen keine Vereinfachung bewirken: aber in dem betrachteten Fall wird es durch das Princip der Flächen möglich, die Bewegung des Punkts in der Ebene ganz von der Rotationsbewegung zu trennen, so dass man zuerst die Bewegung des Punkts in der Ebene sucht und, nachdem diese gefunden ist, den Rotationswinkel der Ebene (von einer bestimmten Lage derselben an gerechnet) durch eine blosse Quadratur erhält. Wie wir sehen werden, sind die Differentialgleichungen der Bewegung des Punktes in der rotirenden Ebene von den Differentialgleichungen, die man erhält, wenn die Bewegung überhaupt in einer Ebene bleibt, nur dadurch verschieden, dass ein Term hinzukommt, welcher proportional $\frac{1}{r^3}$ ist, wo r die Entfernung des Punktes von der die Centra enthaltenden Geraden bedeutet. Diese Gerade, welche die festen Centra enthält, sei die Axe der x; stellen wir ferner die Differentialgleichungen der Bewegung des Punktes, ohne die Ausdrücke der Kräfte wirklich auszuführen, in der gebraüchlichen Weise durch die Formeln

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = Y, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = Z$$

dar, so findet die Bedingungsgleichung

$$yZ - zY = 0$$

statt. Diese Gleichung, welche aussagt, dass die Kräfte Y, Z sich verhalten, wie die Coordinaten y, z, d. h. dass die Richtung ihrer Componente durch die Axe der x geht, ist mit dem Princip der Flächen gleichbedeutend: denn setzt man $\frac{d^2y}{dt^2}$ und $\frac{d^2z}{dt^2}$ für Y und Z, so erhält man

$$y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2} = 0$$

und hieraus durch Integration

$$y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt} = \alpha.$$

Um nun die Bewegung des Punktes in der durch die x-Axe gehenden Ebene von der Rotationsbewegung dieser Ebene zu trennen, müssen wir

$$y = r\cos\varphi, \quad z = r\sin\varphi$$

setzen, so dass x, r die Coordinaten des Punktes in der rotirenden Ebene sind und φ der Rotationswinkel, von der Ebene der xy an gerechnet. Dann hat man

$$r = \sqrt{y^2+z^2},$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{y\frac{dy}{dt}+z\frac{dz}{dt}}{\sqrt{y^2+z^2}},$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{y\frac{d^2y}{dt^2}+z\frac{d^2z}{dt^2}}{\sqrt{y^2+z^2}} + \frac{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}{\sqrt{y^2+z^2}} - \frac{\left(y\frac{dy}{dt}+z\frac{dz}{dt}\right)^2}{(y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Die beiden letzten Glieder geben, zu einem einzigen vereinigt,

$$\frac{(y^2+z^2)\left\{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\}-\left(y\frac{dy}{dt}+z\frac{dz}{dt}\right)^2}{(y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

oder, da nach einer bekannten Formel

$$(y^2+z^2)\left\{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\} = \left(y\frac{dy}{dt}+z\frac{dz}{dt}\right)^2+\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)^2$$

ist,

$$\frac{\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)^2}{(y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

oder schliesslich, mit Benutzung des Flächensatzes,

$$\frac{\alpha^2}{r^3}.$$

Man hat also die Gleichung

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{y\frac{d^2y}{dt^2}+z\frac{d^2z}{dt^2}}{\sqrt{y^2+z^2}} + \frac{\alpha^2}{r^3} = \frac{yY+zZ}{r}+\frac{\alpha^2}{r^3}.$$

Nun sei R die Kraft, welche auf den Punkt in der gegen die Axe der x senkrechten Richtung wirkt, also die Resultante der Kräfte Y und Z, dann hat man

$$Y = \frac{y}{r}R, \quad Z = \frac{z}{r}R,$$

$$yY+zZ = \frac{y^2+z^2}{r}R = rR,$$

und daher

$$\frac{d^2r}{dt^2} = R+\frac{\alpha^2}{r^3}.$$

Wir haben also die beiden Gleichungen der Bewegung des Punktes in der rotirenden Ebene in der Gestalt

$$(5.)\qquad \frac{d^2x}{dt^2} = X, \qquad \frac{d^2r}{dt^2} = R + \frac{\alpha^2}{r^3}.$$

Da nun in dem Fall, welchen wir betrachten, die Kräfte von dem Rotationswinkel φ ganz unabhängig sind, so hängen X und R nur von x und r ab. Man kann daher diese beiden Gleichungen selbständig integriren und erhält, wenn man durch die Integralgleichungen x und r als Functionen von t bestimmt hat, den Rotationswinkel φ aus dem Flächensatz. Derselbe verwandelt sich durch Einführung von r und φ in

$$(6.)\qquad r^2\frac{d\varphi}{dt} = \alpha,$$

so dass φ durch die Formel

$$\varphi = \alpha\int\frac{dt}{r^2}$$

bestimmt wird. Demnach haben wir das ursprüngliche System von Differentialgleichungen sechster Ordnung in x, y, z, t auf ein System vierter Ordnung in x, r, t zurückgeführt, und da hierin t nicht explicite vorkommt, so kann man es auf die dritte Ordnung reduciren, indem man es auf die Form bringt:

$$(7.)\qquad dx : dr : dx' : dr' \;=\; x' : r' : X : R + \frac{\alpha^2}{r^3}.$$

Kennt man zwei Integrale dieses Systems, so erhält man das dritte durch das Princip des letzten Multiplicators und hierauf die Zeit durch eine Quadratur. Sind z. B. alle Variablen x, x' und r' durch r ausgedrückt, so ist

$$t = \int\frac{dr}{r'},$$

eine Gleichung, mit deren Hülfe man auch φ, ehe r durch t ausgedrückt ist, als ein nach r genommenes Integral

$$\varphi = \alpha\int\frac{dr}{r^2 r'}$$

darstellen kann.

Es kommt also jetzt nur noch darauf an, von dem System dritter Ordnung (7.) zwei Integrale zu kennen, um das Problem vollständig gelöst zu haben. Aber das eine dieser Integrale giebt der Satz der lebendigen Kraft, welcher bekanntlich bei Attractionen nach festen Centren oder gegenseitigen Anziehungen immer gilt. In der That, der Satz der lebendigen Kraft ist

$$\tfrac{1}{2}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\} = \int(X\,dx+Y\,dy+Z\,dz).$$

Im vorliegenden Fall hat man hierin

$$Y = \frac{y}{r} R, \qquad Z = \frac{z}{r} R,$$

$$Y dy + Z dz = R \frac{y\,dy + z\,dz}{r} = R\,dr$$

zu substituiren, ferner

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2,$$

oder da nach dem Princip der Flächen $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\alpha}{r^2}$ wird,

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{\alpha^2}{r^2},$$

und man erhält auf diese Weise

$$\tfrac{1}{2}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right\} = \int (X\,dx + R\,dr) - \tfrac{1}{2}\frac{\alpha^2}{r^2},$$

welches eine Integralgleichung des Systems (7.) ist. Es kommt jetzt nur noch darauf an, ein einziges Integral zu finden; das Problem der Anziehung eines Punkts durch eine beliebige Anzahl fester Centren, die in einer Geraden liegen, und auf den noch überdies eine constante Kraft parallel jener Geraden wirken kann, ist demnach darauf zurückgeführt, eine einzige Integralgleichung eines Systems zweiter Ordnung zu finden.

Diese Integralgleichung findet man nun im Fall zweier festen Centren nach der am Anfang dieser Vorlesung auseinandergesetzten Methode. Die Coordinaten x und r sind dieselben, welche oben mit x_2 und x_1 bezeichnet wurden; aber die Kräftefunction ist nicht mehr die nämliche. Wenn die ganze Bewegung in einer Ebene stattfindet, ist ihr Werth $\int (X\,dx + R\,dr)$, jetzt dagegen kommt das Glied $-\frac{1}{2}\frac{\alpha^2}{r^2}$ oder nach der früheren Bezeichnung

$$-\tfrac{1}{2}\frac{\alpha^2}{x_1^2}$$

hinzu. Damit nach Hinzufügung dieses Gliedes zur Kräftefunction die partielle Differentialgleichung (1.) noch durch die nämliche Methode integrirt werden könne, muss sich dasselbe auf die Form $\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}(\chi(\lambda_1) + \psi(\lambda_2))$ bringen lassen, und dies ist wirklich der Fall; denn es ist nach (2.)

$$x_1^2 = \frac{(a_1 + \lambda_1)(a_1 + \lambda_2)}{a_1 - a_2},$$

also durch Zerlegung in Partialbrüche

$$-\tfrac{1}{2}\frac{\alpha^2}{x_1^2} = \tfrac{1}{2}\alpha^2\frac{a_2-a_1}{(a_1+\lambda_1)(a_1+\lambda_2)} = -\tfrac{1}{2}\alpha^2\frac{a_2-a_1}{\lambda_1-\lambda_2}\left\{\frac{1}{a_1+\lambda_1}-\frac{1}{a_1+\lambda_2}\right\}.$$

Zur rechten Seite von Gleichung (3.) oder, was dasselbe ist, zu $\tfrac{1}{2}U(\lambda_1-\lambda_2)$ kommt also der Ausdruck

$$-\tfrac{1}{4}\alpha^2(a_2-a_1)\left\{\frac{1}{a_1+\lambda_1}-\frac{1}{a_1+\lambda_2}\right\} = -\tfrac{1}{4}\alpha^2 f^2\cdot\frac{1}{a_1+\lambda_1}+\tfrac{1}{4}\alpha^2 f^2\cdot\frac{1}{a_1+\lambda_2}$$

hinzu, und wir erhalten demnach gegenwärtig die partielle Differentialgleichung

$$(a_1+\lambda_1)(a_2+\lambda_1)\left(\frac{\partial W}{\partial\lambda_1}\right)^2-(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)\left(\frac{\partial W}{\partial\lambda_2}\right)^2$$

$$= \tfrac{1}{2}h\lambda_1+\tfrac{1}{2}(m+m_1)\sqrt{a_2+\lambda_1}-\tfrac{1}{4}\alpha^2 f^2\cdot\frac{1}{a_1+\lambda_1}-\left\{\tfrac{1}{2}h\lambda_2+\tfrac{1}{2}(m-m_1)\sqrt{a_2+\lambda_2}-\tfrac{1}{4}\alpha^2 f^2\cdot\frac{1}{a_1+\lambda_2}\right\}.$$

Aus derselben ergiebt sich:

$$(8.)\quad\left\{\begin{aligned} W &= \int d\lambda_1\sqrt{\frac{\tfrac{1}{2}h\lambda_1+\tfrac{1}{2}(m+m_1)\sqrt{a_2+\lambda_1}-\tfrac{1}{4}\alpha^2 f^2\cdot\frac{1}{a_1+\lambda_1}+\beta}{(a_1+\lambda_1)(a_2+\lambda_1)}}\\ &+\int d\lambda_2\sqrt{\frac{\tfrac{1}{2}h\lambda_2+\tfrac{1}{2}(m-m_1)\sqrt{a_2+\lambda_2}-\tfrac{1}{4}\alpha^2 f^2\cdot\frac{1}{a_1+\lambda_2}+\beta}{(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)}}.\end{aligned}\right.$$

und hieraus durch Differentiation nach der Constante β die zu suchende zweite Integralgleichung des Systems (7.):

$$(9.)\qquad \beta' = \frac{\partial W}{\partial\beta}.$$

Dies ist die Gleichung der Curve, welche der sich bewegende Punkt in der rotirenden Ebene beschreibt. Es ist jetzt noch die Bestimmung des Rotationswinkels φ auszuführen, bei welcher indessen eine Schwierigkeit übrig bleibt. Drückt man nämlich das Differential von φ, welches nach Gleichung (6.) und in der gegenwärtigen Bezeichnung durch die Formel

$$d\varphi = \alpha\frac{dt}{x_1^2}$$

gegeben ist, in den Grössen λ_1 und λ_2 aus, so erhält man zunächst kein vollständiges Differential. Denn das Differential von t ergiebt sich, wenn man in die zur Bestimmung der Zeit dienende Gleichung

$$t-\tau = \frac{\partial W}{\partial h}$$

für W seinen Werth (8.) einsetzt, unter der Form

$$dt = F_1(\lambda_1)\,d\lambda_1+F_2(\lambda_2)\,d\lambda_2.$$

und dies mit

$$\frac{\alpha}{x_1^2} = \frac{\alpha(a_1-a_2)}{(a_1+\lambda_1)(a_1+\lambda_2)}$$

multiplicirt giebt nicht unmittelbar ein vollständiges Differential, sondern kann erst in ein solches mit Hülfe der zwischen den Variablen λ_1 und λ_2 stattfindenden Gleichung (9.) verwandelt werden.

Diese Schwierigkeit kann man vermeiden, wenn man das Problem der Anziehung nach zwei festen Centren auch für den Raum, ohne auf particulare Betrachtungen einzugehen, ganz und gar auf eine partielle Differentialgleichung zurückführt. Die allgemeine partielle Differentialgleichung für eine freie Bewegung, bei welcher der Satz der lebendigen Kraft gilt, ist

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2 = 2U+2h.$$

Indem wir für y und z Polarcoordinaten einführen, und

$$y = r\cos\varphi, \quad z = r\sin\varphi$$

setzen, erhalten wir

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2 = 2U+2h.$$

Da in U die Variable φ nicht vorkommt, so kann man nach der allgemeinen schon oft gebrauchten Methode

$$W = W_1+\alpha\varphi$$

setzen, wo W_1 eine blosse Function von x und r ohne φ ist. Hierdurch wird

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial W_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial W}{\partial r} = \frac{\partial W_1}{\partial r}, \quad \frac{\partial W}{\partial \varphi} = \alpha,$$

und die partielle Differentialgleichung in W verwandelt sich in

$$(10.) \quad \left(\frac{\partial W_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial W_1}{\partial r}\right)^2 = 2U-\frac{\alpha^2}{r^2}+2h.$$

Diese Differentialgleichung stimmt genau mit derjenigen überein, welche wir oben durch die Reduction der Bewegung im Raum auf die Bewegung in der rotirenden Ebene erhalten haben; denn auch jene Betrachtung zeigte, dass von U das Glied $\frac{\alpha^2}{2r^2}$ abzuziehen sei, so dass die jetzt eingeführte Constante α mit der früher so bezeichneten genau übereinstimmt. Der oben erhaltene Ausdruck (8.) von W genügt daher der Differentialgleichung (10.) für W_1, und man findet aus demselben W durch die Gleichung

$$W = W_1+\alpha\varphi.$$

Hieraus gehen sodann die beiden Integralgleichungen hervor:

$$\beta' = \frac{\partial W}{\partial \beta} = \frac{\partial W_1}{\partial \beta}, \quad \alpha' = \frac{\partial W}{\partial \alpha} = \frac{\partial W_1}{\partial \alpha} + \varphi.$$

von denen die erste dieselbe ist, welche wir schon oben fanden, während die zweite den Werth von φ durch die Gleichung $\alpha' - \varphi = \frac{\partial W_1}{\partial \alpha}$ liefert. Hierin ist an die Stelle von W_1 der Ausdruck (8.) von W zu setzen. Die beiden Integralgleichungen, durch deren Zusammenbestehen die Curve doppelter Krümmung definirt wird, in welcher der Punkt sich bewegt, sind also

$$\beta' = \frac{\partial W}{\partial \beta} \quad \text{und} \quad \alpha' - \varphi = \frac{\partial W}{\partial \alpha},$$

wo

$$W = \int d\lambda_1 \sqrt{\frac{\frac{1}{2}h\lambda_1 + \frac{1}{2}(m+m_1)\sqrt{a_2+\lambda_1} - \frac{1}{4}\alpha^2 f^2 \frac{1}{a_1+\lambda_1} + \beta}{(a_1+\lambda_1)(a_2+\lambda_1)}}$$
$$- \int d\lambda_2 \sqrt{\frac{\frac{1}{2}h\lambda_2 + \frac{1}{2}(m-m_1)\sqrt{a_2+\lambda_2} - \frac{1}{4}\alpha^2 f^2 \frac{1}{a_1+\lambda_2} + \beta}{(a_1+\lambda_2)(a_2+\lambda_2)}},$$

und die Zeit wird durch die Gleichung

$$t - \tau = \frac{\partial W}{\partial h}$$

eingeführt. Nach Vollziehung der Differentiationen erhält man die fertigen Formeln

$$\beta' = \int \frac{\frac{1}{2} d\lambda_1}{\sqrt{a_2+\lambda_1}\sqrt{[\frac{1}{2}h\lambda_1 + \frac{1}{2}(m+m_1)\sqrt{a_2+\lambda_1} + \beta](a_1+\lambda_1) - \frac{1}{4}\alpha^2 f^2}}$$
$$- \int \frac{\frac{1}{2} d\lambda_2}{\sqrt{a_2+\lambda_2}\sqrt{[\frac{1}{2}h\lambda_2 + \frac{1}{2}(m-m_1)\sqrt{a_2+\lambda_2} + \beta](a_1+\lambda_2) - \frac{1}{4}\alpha^2 f^2}},$$

$$\varphi - \alpha' = \int \frac{\frac{1}{4}\alpha f^2 d\lambda_1}{(a_1+\lambda_1)\sqrt{a_2+\lambda_1}\sqrt{[\frac{1}{2}h\lambda_1 + \frac{1}{2}(m-m_1)\sqrt{a_2+\lambda_1} + \beta](a_1+\lambda_1) - \frac{1}{4}\alpha^2 f^2}}$$
$$- \int \frac{\frac{1}{4}\alpha f^2 d\lambda_2}{(a_1+\lambda_2)\sqrt{a_2+\lambda_2}\sqrt{[\frac{1}{2}h\lambda_2 + \frac{1}{2}(m-m_1)\sqrt{a_2+\lambda_2} + \beta](a_1+\lambda_2) - \frac{1}{4}\alpha^2 f^2}},$$

$$t - \tau = \int \frac{\frac{1}{4}\lambda_1 d\lambda_1}{\sqrt{a_2+\lambda_1}\sqrt{[\frac{1}{2}h\lambda_1 + \frac{1}{2}(m-m_1)\sqrt{a_2+\lambda_1} + \beta](a_1+\lambda_1) - \frac{1}{4}\alpha^2 f^2}}$$
$$- \int \frac{\frac{1}{4}\lambda_2 d\lambda_2}{\sqrt{a_2+\lambda_2}\sqrt{[\frac{1}{2}h\lambda_2 + \frac{1}{2}(m-m_1)\sqrt{a_2+\lambda_2} + \beta](a_1+\lambda_2) - \frac{1}{4}\alpha^2 f^2}}.$$

Auch hier kann man, wie oben, die Irrationalität unter den Quadratwurzelzeichen dadurch beseitigen, dass man an Stelle von λ_1, λ_2 die Grössen

$$\sqrt{a_2+\lambda_1}=p, \quad \sqrt{a_2+\lambda_2}=q$$

als Variable einführt.

Dreissigste Vorlesung.

Das *Abel*sche Theorem.

Um die Wichtigkeit der in der sechsundzwanzigsten Vorlesung vorgetragenen Substitution, die uns nun schon die Lösung einer Reihe von mechanischen Problemen gegeben hat, schliesslich an einem besonders merkwürdigen Beispiel zu zeigen, wollen wir sie auf das *Abel*sche Theorem anwenden. Dieses Theorem bezieht sich nämlich auf ein gewisses System gewöhnlicher Differentialgleichungen und giebt zwei verschiedene Systeme von Integralgleichungen desselben, von denen das eine durch transcendente Functionen, das andere rein algebraisch ausgedrückt ist; und diese in ihrer Form so verschiedenen Integralgleichungen sind nichtsdestoweniger völlig identisch.

Nach unserer Methode wird das System der gewöhnlichen Differentialgleichungen auf eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung zurückgeführt; von dieser wird eine vollständige Lösung gesucht, und die nach den willkürlichen Constanten genommenen Differentialquotienten derselben, neuen Constanten gleich gesetzt, liefern das System der Integralgleichungen. So wie nun die Lösung einer partiellen Differentialgleichung die verschiedenartigsten Formen annehmen kann, so werden die hieraus hergeleiteten Systeme der Integralgleichungen ebenfalls unter der abweichendsten Gestalt erscheinen, und dennoch müssen dieselben mit einander gleichbedeutend sein. Dies ist der Weg, auf welchem wir das *Abel*sche Theorem beweisen werden. Wir gehen von der partiellen Differentialgleichung

$$1.) \quad \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x_2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{\partial V}{\partial x_n}\right)^2 = 2h$$

aus, welche für $n=3$ dem einfachsten der mechanischen Probleme, der geradlinigen gleichförmigen Bewegung eines Punkts im Raume, entspricht. Dieselbe ersetzt die gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}=0, \quad \frac{d^2x_2}{dt^2}=0, \quad \ldots \quad \frac{d^2x_n}{dt^2}=0.$$

Unter Benutzung der in der sechsundzwanzigsten Vorlesung aufgestellten Substitution ergiebt sich das *Abel*sche Theorem, und zwar in einer viel expliciteren Form, als der von *Abel* gegebenen.

Da in der Gleichung (1.) die Variablen $x_1, x_2, \dots x_n$ selbst nicht vorkommen, so erhält man eine vollständige Lösung V, indem man

$$(2.)\qquad V = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$$

setzt. Denn alsdann haben die Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ nur der Bedingung

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_{n-1}^2 + \alpha_n^2 = 2h$$

zu genügen, sodass

$$\alpha_n = \sqrt{2h - \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \cdots - \alpha_{n-1}^2},$$

und V enthält daher, abgesehen von der Constante, die man noch addiren kann, $n-1$ Constanten, ist also eine vollständige Lösung. Als Integralgleichungen erhält man

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_1} = \alpha_1', \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_2} = \alpha_2', \quad \dots \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_{n-1}} = \alpha_{n-1}', \quad \frac{\partial V}{\partial h} = t - \tau,$$

oder

$$\begin{aligned}
x_1 \; - \frac{\alpha_1}{\alpha_n} x_n &= \alpha_1', \\
x_2 \; - \frac{\alpha_2}{\alpha_n} x_n &= \alpha_2', \\
\vdots \qquad & \quad \vdots \\
x_{n-1} - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} x_n &= \alpha_{n-1}', \\
\frac{1}{\alpha_n} x_n &= t - \tau,
\end{aligned}$$

oder endlich, wenn man die letzte Gleichung in die anderen einsetzt,

$$(3.)\qquad \left\{\begin{aligned}
x_1 &= \alpha_1(t-\tau) + \alpha_1', \\
x_2 &= \alpha_2(t-\tau) + \alpha_2', \\
\vdots \quad & \qquad \vdots \\
x_{n-1} &= \alpha_{n-1}(t-\tau) + \alpha_{n-1}', \\
x_n &= \alpha_n(t-\tau),
\end{aligned}\right.$$

welches für $n=3$ in der That die Gleichungen der geradlinigen Bewegung sind.

Führen wir nun in die Gleichung (1.) an die Stelle der Variablen x die Variablen λ ein, so erhalten wir nach Formel (12.) der sechsundzwanzigsten Vorlesung:

$$(4.)\qquad \sum_{\iota=1}^{\iota=n} \frac{(a_1+\lambda_\iota)(a_2+\lambda_\iota) \dots\dots\dots\dots (a_n+\lambda_\iota)}{(\lambda_\iota-\lambda_1)(\lambda_\iota-\lambda_2)\dots(\lambda_\iota-\lambda_{\iota-1})(\lambda_\iota-\lambda_{\iota+1})\dots(\lambda_\iota-\lambda_n)} \left(\frac{\partial V}{\partial \lambda_\iota}\right)^2 = \tfrac{1}{2}h,$$

eine Gleichung, welcher man nicht auf den ersten Blick ansieht, wie die Separation der Variablen geschieht. Aber es ist nur nöthig, sich an den in der sechsundzwanzigsten Vorlesung (p. 202) gegebenen Hülfssatz aus der Theorie der Partialbrüche zu erinnern, die aus demselben folgende Formel

$$(5.)\qquad \tfrac{1}{2}h = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{c+c_1\lambda_i+c_2\lambda_i^2+\cdots\cdots\cdots+c_{n-2}\lambda_i^{n-2}+\frac{1}{2}h\lambda_i^{n-1}}{(\lambda_i-\lambda_1)(\lambda_i-\lambda_2)\ldots(\lambda_i-\lambda_{i-1})(\lambda_i-\lambda_{i+1})\ldots(\lambda_i-\lambda_n)},$$

in welcher $c, c_1, \ldots c_{n-2}$ willkürliche Constanten sind, aufzustellen und diesen Ausdruck für $\frac{1}{2}h$ in (4.) zu substituiren. Befriedigt man die hieraus hervorgehende Gleichung

$$(6.)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{i=n} \frac{(a_1+\lambda_i)(a_2+\lambda_i)\ldots\ldots\ldots\ldots(a_n+\lambda_i)}{(\lambda_i-\lambda_1)(\lambda_i-\lambda_2)\ldots(\lambda_i-\lambda_{i-1})(\lambda_i-\lambda_{i+1})\ldots(\lambda_i-\lambda_n)}\left(\frac{\partial V}{\partial\lambda_i}\right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{i=n} \frac{c+c_1\lambda_i+c_2\lambda_i^2+\cdots\cdots\cdots+c_{n-2}\lambda_i^{n-2}+\frac{1}{2}h\lambda_i^{n-1}}{(\lambda_i-\lambda_1)(\lambda_i-\lambda_2)\ldots(\lambda_i-\lambda_{i-1})(\lambda_i-\lambda_{i+1})\ldots(\lambda_i-\lambda_n)},\end{aligned}\right.$$

indem man die entsprechenden Glieder beider Seiten einander gleich setzt und auf diese Weise die partielle Differentialgleichung (6.) in die n gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$(a_1+\lambda_i)(a_2+\lambda_i)\ldots(a_n+\lambda_i)\left(\frac{\partial V}{\partial\lambda_i}\right)^2 = c+c_1\lambda_i+c_2\lambda_i^2+\cdots+c_{n-2}\lambda_i^{n-2}+\tfrac{1}{2}h\lambda_i^{n-1}$$

für $i=1, 2, \ldots n$ zerlegt, so ergiebt sich für V die vollständige Lösung

$$(7.)\qquad V = \sum_{i=1}^{i=n}\int d\lambda_i \sqrt{\frac{c+c_1\lambda_i+c_2\lambda_i^2+\cdots+c_{n-2}\lambda_i^{n-2}+\frac{1}{2}h\lambda_i^{n-1}}{(a_1+\lambda_i)(a_2+\lambda_i)\ldots\ldots\ldots(a_n+\lambda_i)}},$$

und hieraus folgen die Integralgleichungen

$$\frac{\partial V}{\partial c}=c', \quad \frac{\partial V}{\partial c_1}=c_1', \quad \ldots \quad \frac{\partial V}{\partial c_{n-2}}=c_{n-2}', \quad \frac{\partial V}{\partial h}=t-\tau,$$

welche unter Einführung der Bezeichnung

$$f(\lambda) = (c+c_1\lambda+c_2\lambda^2+\cdots+c_{n-2}\lambda^{n-2}+\tfrac{1}{2}h\lambda^{n-1})(a_1+\lambda)(a_2+\lambda)\ldots(a_n+\lambda)$$

die Gestalt annehmen:

$$(8.)\qquad \left\{\begin{aligned} 2c' &= \Sigma\int\frac{d\lambda_i}{\sqrt{f\lambda_i}}, \\ 2c_1' &= \Sigma\int\frac{\lambda_i\,d\lambda_i}{\sqrt{f\lambda_i}}, \\ &\vdots \\ 2c_{n-2}' &= \Sigma\int\frac{\lambda_i^{n-2}\,d\lambda_i}{\sqrt{f\lambda_i}}, \\ 4(t-\tau) &= \Sigma\int\frac{\lambda_i^{n-1}\,d\lambda_i}{\sqrt{f\lambda_i}}.\end{aligned}\right.$$

Dies sind die transcendenten Integralgleichungen des Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$(9.)\quad \Sigma\frac{d\lambda_\iota}{\sqrt{f\lambda_\iota}} = 0,\quad \Sigma\frac{\lambda_\iota d\lambda_\iota}{\sqrt{f\lambda_\iota}} = 0,\quad \dots\quad \Sigma\frac{\lambda_\iota^{n-2}d\lambda_\iota}{\sqrt{f\lambda_\iota}} = 0,\quad \Sigma\frac{\lambda_\iota^{n-1}d\lambda_\iota}{\sqrt{f\lambda_\iota}} = 4dt,$$

während in (3.) die algebraischen Integralgleichungen des nämlichen Systems enthalten sind.

In dieser algebraischen Integration der Differentialgleichungen (9.) besteht das *Abel*sche Theorem, und zwar tritt dasselbe hier in einer Form auf, welche vor der ursprünglich von *Abel* gegebenen den Vortheil bietet, die sonst mit grossen Schwierigkeiten verknüpften Untersuchungen über die Realität der Variablen und über die Grenzen, innerhalb deren man sie zu nehmen hat, wesentlich zu erleichtern. Der obige Beweis des *Abel*schen Theorems hat daher etwas wesentlich Neues gegeben, und wenn auch *Richelot* später aus dem *Abel*schen Theorem selbst dieselben Folgerungen hat herleiten können*), so ist doch immer der hier angegebene Weg derjenige, welcher zuerst und naturgemäss darauf geführt hat.

Da die Constanten $c, c_1, \dots c_{n-2}$ ganz willkürlich sind, so muss man sie so bestimmen, dass die unter den Wurzelzeichen stehenden Ausdrücke $f(\lambda_\iota)$ positiv, mithin alle Integrale reell werden.

Das Bisherige giebt das *Abel*sche Theorem noch nicht ganz vollständig; denn die Function $f(\lambda)$ ist von der $2n-1^{\text{ten}}$, also von ungerader Ordnung, und es ist daher nöthig, den anderen Fall, wo $f(\lambda)$ von der $2n^{\text{ten}}$ Ordnung ist, und der hier als der allgemeinere erscheint, besonders zu betrachten. Man erhält denselben dadurch, dass man auf der rechten Seite der partiellen Differentialgleichung (4.) zu der Constante $2h$ noch andere Glieder addirt. Die angewendete Integrationsmethode bleibt zulässig, wenn man zu h die Quadratsumme $x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2$ in eine Constante k multiplicirt hinzufügt. In den Variablen λ nimmt dieser Ausdruck die Form an:

$$k(x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2) = k(a_1+a_2+\dots+a_\iota+\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n),$$

und indem wir für h eine neue Constante

$$h' = h+k(a_1+a_2+\dots+a_n)$$

einführen, haben wir auf der rechten Seite von (4.) an die Stelle von $\frac{1}{2}h$ gegenwärtig den Ausdruck

$$\tfrac{1}{2}h'+\tfrac{1}{2}k(\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n)$$

*) *Crelles* Journal Bd. XXIII, p. 354.

zu setzen. Transformiren wir denselben mit Benutzung des oben erwähnten Hülfssatzes in einer der Gleichung (5.) analogen Weise, so finden wir, dass auf den rechten Seiten der Gleichungen (5.) und (6.) sich weiter nichts ändert, als dass unter dem Summenzeichen im Zähler das Glied

$$\tfrac{1}{2}k\lambda_i^n$$

hinzu kommt und h sich in h' verwandelt. In den transcendenten Integralgleichungen (8.) des *Abel*schen Theorems tritt demnach an die Stelle der früheren Function $2n-1^{\text{ter}}$ Ordnung $f(\lambda)$ gegenwärtig die Function $2n^{\text{ter}}$ Ordnung

$$(10.)\quad f(\lambda) = \{c+c_1\lambda+c_2\lambda^2+\cdots+c_{n-2}\lambda^{n-2}+\tfrac{1}{2}h'\lambda^{n-1}+\tfrac{1}{2}k\lambda^n\}(a_1+\lambda)(a_2+\lambda)\ldots(a_n+\lambda).$$

Die algebraischen Integralgleichungen werden in diesem Fall etwas complicirter. Die partielle Differentialgleichung in $x_1, x_2, \ldots x_n$ ausgedrückt lautet

$$(11.)\quad \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x_2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{\partial V}{\partial x_n}\right)^2 = 2h+2k(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)$$

und lässt sich daher in folgende zerlegen:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\right)^2 = 2kx_1^2+\beta_1,\quad \left(\frac{\partial V}{\partial x_2}\right)^2 = 2kx_2^2+\beta_2,\quad \ldots\quad \left(\frac{\partial V}{\partial x_n}\right)^2 = 2kx_n^2+\beta_n,$$

wo

$$\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n = 2h.$$

Hieraus findet sich:

$$V = \int\sqrt{2kx_1^2+\beta_1}\,dx_1+\int\sqrt{2kx_2^2+\beta_2}\,dx_2+\cdots+\int\sqrt{2kx_n^2+\beta_n}\,dx_n.$$

Denkt man sich nun mit Hülfe der obigen Relation β_n durch h und die übrigen β ausgedrückt und bezeichnet die unter dieser Hypothese gebildeten Differentialquotienten von V mit Klammern, so gehören zu den der partiellen Differentialgleichung (11.) entsprechenden gewöhnlichen Differentialgleichungen die Integrale

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \beta_1}\right) = \beta_1',\quad \left(\frac{\partial V}{\partial \beta_2}\right) = \beta_2',\quad \ldots\quad \left(\frac{\partial V}{\partial \beta_{n-1}}\right) = \beta_{n-1}',\quad \left(\frac{\partial V}{\partial h}\right) = t-\tau.$$

Bezeichnet man dagegen ohne Klammern die Differentialquotienten von V, bei deren Bildung auf die zwischen den Grössen $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$ bestehende Relation keine Rücksicht genommen wird, so ist

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \beta_1}\right) = \frac{\partial V}{\partial \beta_1}-\frac{\partial V}{\partial \beta_n},\quad \left(\frac{\partial V}{\partial \beta_2}\right) = \frac{\partial V}{\partial \beta_2}-\frac{\partial V}{\partial \beta_n},\quad \ldots\quad \left(\frac{\partial V}{\partial h}\right) = 2\frac{\partial V}{\partial \beta_n}.$$

Man kann daher den Integralgleichungen unter Einführung der Bezeichnung $\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_n$ für die Constanten $2\beta_1'-\tau$, $2\beta_2'-\tau$, $\ldots -\tau$ die symmetrische Gestalt geben:

$$2\frac{\partial V}{\partial \beta_1} = \int \frac{dx_1}{\sqrt{2kx_1^2+\beta_1}} = t+\tau_1,$$
$$2\frac{\partial V}{\partial \beta_2} = \int \frac{dx_2}{\sqrt{2kx_2^2+\beta_2}} = t+\tau_2,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$2\frac{\partial V}{\partial \beta_n} = \int \frac{dx_n}{\sqrt{2kx_n^2+\beta_n}} = t+\tau_n.$$

Diese Gleichungen drücken allerdings nicht unmittelbar einen algebraischen Zusammenhang zwischen den Variablen x aus. Aber derselbe tritt sofort hervor, wenn man die Werthe der sämmtlich auf Kreisbögen, oder sämmtlich auf Logarithmen führenden Integrale bestimmt und bemerkt, dass die hieraus sich ergebenden Werthe der Variablen x entweder alle durch Sinus und Cosinus, oder alle durch Exponentialgrössen dargestellt werden, deren Argument das Product von t in eine und dieselbe Constante bildet. Man erhält daher algebraische Relationen, wenn man t zwischen den obigen Gleichungen eliminirt. Den Werthen der Variablen x kann man die Form geben:

$$x_1 = \sqrt{-\frac{\beta_1}{2k}}\sin[\sqrt{-2k}(t+\tau_1)],$$
$$x_2 = \sqrt{-\frac{\beta_2}{2k}}\sin[\sqrt{-2k}(t+\tau_2)],$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$x_n = \sqrt{-\frac{\beta_n}{2k}}\sin[\sqrt{-2k}(t+\tau_n)].$$

Die aus der Elimination von t zwischen diesen Gleichungen hervorgehenden Relationen lassen sich so darstellen, dass eine einzige vom zweiten Grade, alle übrigen linear in Beziehung auf $x_1, x_2, \dots x_n$ werden.

Das System gewöhnlicher Differentialgleichungen, welches der partiellen Differentialgleichung (11.) entspricht, ist

$$(12.)\qquad \frac{d^2x_1}{dt^2} = 2kx_1,\quad \frac{d^2x_2}{dt^2} = 2kx_2,\quad \dots\quad \frac{d^2x_n}{dt^2} = 2kx_n.$$

Man sieht also aus dem Bisherigen, dass, wenn man von den Differentialgleichungen (9.) in $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ unter der Voraussetzung, dass $f(\lambda)$ die ganze Function $2n^{\text{ter}}$ Ordnung (10.) von λ sei, ausgeht und die Substitution der Variablen $x_1, x_2, \dots x_n$ für $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ vornimmt, man auf diese einfachen Differentialgleichungen (12.) in $x_1, x_2, \dots x_n$ kommen muss. Diesen Gang der Untersuchung habe ich in meiner Abhandlung über das *Abel*sche Theorem im

24sten Bande des *Crelle*schen Journals genommen, ohne jedoch die hier aufgedeckte Quelle anzugeben.

Auf eine ähnliche Art hat *Lagrange* im ersten Bande der Turiner Memoiren in der Abhandlung über die Attraction nach zwei festen Centren das Fundamentaltheorem der elliptischen Transcendenten bewiesen, welches ein specieller Fall ($n = 2$) dieser Untersuchung ist.

Einunddreissigste Vorlesung.

Allgemeine Untersuchungen über die partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Die verschiedenen Formen der Integrabilitätsbedingungen.

Wir werden uns jetzt mit allgemeinen Untersuchungen über die partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung beschäftigen und hierbei annehmen, dass die gesuchte Function selbst in der Differentialgleichung nicht vorkommt. Diese Annahme ist keine wesentliche Beschränkung, da sich der allgemeine Fall immer auf diesen zurückführen lässt. In der That, wenn die vorgelegte Differentialgleichung die gesuchte Function V enthält, also die Form

$$0 = \Phi\left(V, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2}, \ldots \frac{\partial V}{\partial q_n}, q_1, q_2, \ldots q_n\right)$$

hat, so führe man eine neue unabhängige Variable q und eine neue abhängige W durch die Gleichung

$$W = qV$$

ein; dann wird

$$\frac{\partial W}{\partial q} = V, \quad \frac{\partial W}{\partial q_1} = q\frac{\partial V}{\partial q_1}, \quad \ldots \quad \frac{\partial W}{\partial q_n} = q\frac{\partial V}{\partial q_n},$$

also

$$V = \frac{\partial W}{\partial q}, \quad \frac{\partial V}{\partial q_1} = \frac{1}{q}\frac{\partial W}{\partial q_1}, \quad \ldots \quad \frac{\partial V}{\partial q_n} = \frac{1}{q}\frac{\partial W}{\partial q_n}.$$

Daher geht die vorgelegte Differentialgleichung in die folgende über:

$$0 = \Phi\left(\frac{\partial W}{\partial q}, \frac{1}{q}\frac{\partial W}{\partial q_1}, \ldots \frac{1}{q}\frac{\partial W}{\partial q_n}, q_1, q_2, \ldots q_n\right),$$

welche zwar eine unabhängige Variable mehr enthält, nämlich q, in welcher aber W nicht selbst auftritt, sondern nur seine Differentialquotienten nach q, q_1, q_2, ... q_n. Wir können uns also, ohne der Allgemeinheit zu schaden, auf den Fall beschränken, wo

$$\varphi\left(\frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2}, \dots \frac{\partial V}{\partial q_n}, q_1, q_2, \dots q_n\right) = 0$$

die gegebene Differentialgleichung ist, und V selbst in der Gleichung nicht vorkommt. Setzen wir zur Abkürzung

$$\frac{\partial V}{\partial q_\iota} = p_\iota,$$

so haben wir demnach die Gleichung

$$(1.) \qquad \varphi(p_1, p_2, \dots p_n, q_1, q_2, \dots q_n) = 0.$$

Wenn wir zur Bestimmung von V dieselbe Methode anwenden wollen, die wir nach *Lagrange* für den Fall von $n=2$ in der zweiundzwanzigsten Vorlesung durchgeführt haben, so müssen wir suchen die Grössen $p_1, p_2, \dots p_n$ als Functionen von $q_1, q_2, \dots q_n$ so zu bestimmen, dass

$$(2.) \qquad p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots p_n dq_n$$

ein vollständiges Differential wird. Aber wir stossen hierbei auf eine eigenthümliche Schwierigkeit. Da nämlich die Gleichung (1.) schon eine Relation zwischen den Grössen p und q ist, so brauchen wir noch $n-1$ andere Relationen, um sämmtliche Grössen $p_1, p_2, \dots p_n$ durch $q_1, q_2, \dots q_n$ ausdrücken zu können. Wir haben also über $n-1$ Functionen der Variablen $q_1, q_2, \dots q_n$ zu verfügen und müssen diese so bestimmen, dass der Ausdruck (2.) ein vollständiges Differential wird. Um dieser Forderung zu genügen, müssen die sämmtlichen $\frac{n.n-1}{2}$ Bedingungsgleichungen der Form

$$\frac{\partial p_i}{\partial q_k} = \frac{\partial p_k}{\partial q_\iota}$$

oder, was unter Einführung der abgekürzten Bezeichnung

$$(i, k) = \frac{\partial p_\iota}{\partial q_k} - \frac{\partial p_k}{\partial q_\iota}$$

damit übereinkommt, die $\frac{n.n-1}{2}$ Bedingungsgleichungen

$$(i, k) = 0$$

erfüllt sein, während man nur über $n-1$ Functionen zu verfügen hat. Für $n=2$ sind zwar diese beiden Anzahlen einander gleich, nämlich gleich 1, in allen anderen Fällen aber übertrifft die erste Anzahl die zweite.

Diese Schwierigkeit hat bisher die Analysten davon abgehalten, die *Lagrange*sche Methode auf eine grössere Anzahl von Veränderlichen auszudehnen. Wir werden uns durch dieselbe nicht abschrecken lassen, sondern, da wir a priori wissen, dass sich die Aufgabe, obgleich sie mehr als bestimmt zu sein scheint, dennoch lösen lässt, vielmehr untersuchen, wie es zugeht, dass man durch $n-1$ Functionen die $\frac{n.n-1}{2}$ Bedingungsgleichungen erfüllen kann.

Es ist von vorn herein ein Umstand zu bemerken, der bei dieser Untersuchung zu Statten kommen muss, weil durch ihn die $\frac{n.n-1}{2}$ Bedingungsgleichungen in Verbindung mit einander gebracht werden. Sind nämlich i, i', i'' drei beliebige Indices, so hat man die Identität

$$\frac{\partial (i', i'')}{\partial q_i} + \frac{\partial (i'', i)}{\partial q_{i'}} + \frac{\partial (i, i')}{\partial q_{i''}} = 0.$$

Hieraus folgt zwar noch nicht, dass wenn $(i'', i) = 0$ und $(i, i') = 0$ ist, auch (i', i'') verschwindet, wohl aber dass dieser letztere Ausdruck alsdann unabhängig von q_i ist, so dass, wenn er für irgend einen Werth von q_i verschwindet, er überhaupt gleich Null ist.

Um die vorliegende Frage erschöpfend zu behandeln, müssen wir zunächst die Bedingungsgleichungen transformiren. In der bisherigen Form dieser Gleichungen, $\frac{\partial p_i}{\partial q_k} = \frac{\partial p_k}{\partial q_i}$, werden die Grössen p_i als blosse Functionen der Grössen q_i angesehen, d. h. die n Relationen zwischen den Grössen p und q_i, von welchen die eine in Gleichung (I.) gegeben ist, während wir über die übrigen $n-1$ zu verfügen haben, werden nach den n Grössen p_1, p_2, ... p_n aufgelöst vorausgesetzt. Dies ist eine für die in Rede stehende Untersuchung zu explicite Form. Wir wollen eine andere Hypothese über die Darstellung der Grössen p_1, p_2, ... p_n machen und annehmen, man habe

$$\begin{array}{llr}
p_n & \text{dargestellt als Function von} & q_1, q_2, \dots q_n, \\
p_{n-1} & \text{- \quad - \quad - \quad -} & p_n, q_1, q_2, \dots q_n, \\
p_{n-2} & \text{- \quad - \quad - \quad -} & p_{n-1}, p_n, q_1, q_2, \dots q_n, \\
\vdots & & \vdots \qquad\qquad \\
p_i & \text{- \quad - \quad - \quad -} & p_{i+1}, \dots p_{n-1}, p_n, q_1, q_2, \dots q_n, \\
\vdots & & \vdots \qquad\qquad\qquad \\
p_1 & \text{- \quad - \quad - \quad -} & p_2, p_3, \dots\dots\dots p_{n-1}, p_n, q_1, q_2, \dots q_n.
\end{array}$$

Wir werden die unter dieser Hypothese genommenen Differentialquotienten von p_i nach p_{i+1}, p_{i+2}, ... p_n, q_1, q_2, ... q_n ohne Klammern schreiben.

während wir die nach der ursprünglichen Hypothese gebildeten Differentialquotienten, nach welcher sämmtliche p blosse Functionen von $q_1, q_2, \dots q_n$ sind, in Klammern einschliessen. Diese Veränderung der Darstellungsweise erfordert, dass wir die in den $\frac{n.n-1}{2}$ Bedingungsgleichungen vorkommenden und jetzt einzuklammernden Differentialquotienten in andere umsetzen, was nun ausgeführt werden soll.

Die $\frac{n.n-1}{2}$ Bedingungsgleichungen können wir in folgender Weise anordnen:

$$(3.)\quad \left\{\begin{array}{r}
\left(\frac{\partial p_1}{\partial q_2}\right)=\left(\frac{\partial p_2}{\partial q_1}\right),\ \left(\frac{\partial p_1}{\partial q_3}\right)=\left(\frac{\partial p_3}{\partial q_1}\right),\ \dots \left(\frac{\partial p_1}{\partial q_{m+1}}\right)=\left(\frac{\partial p_{m+1}}{\partial q_1}\right),\ \dots \left(\frac{\partial p_1}{\partial q_n}\right)=\left(\frac{\partial p_n}{\partial q_1}\right),\\
\left(\frac{\partial p_2}{\partial q_3}\right)=\left(\frac{\partial p_3}{\partial q_2}\right),\ \dots \left(\frac{\partial p_2}{\partial q_{m+1}}\right)=\left(\frac{\partial p_{m+1}}{\partial q_2}\right),\ \dots \left(\frac{\partial p_2}{\partial q_n}\right)=\left(\frac{\partial p_n}{\partial q_2}\right),\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\left(\frac{\partial p_m}{\partial q_{m+1}}\right)=\left(\frac{\partial p_{m+1}}{\partial q_m}\right),\ \dots \left(\frac{\partial p_m}{\partial q_n}\right)=\left(\frac{\partial p_n}{\partial q_m}\right),\\
\dots\dots\dots\dots\\
\dots\dots\dots\\
\left(\frac{\partial p_{n-1}}{\partial q_n}\right)=\left(\frac{\partial p_n}{\partial q_{n-1}}\right).
\end{array}\right.$$

Irgend eine dieser Gleichungen, etwa $\left(\frac{\partial p_i}{\partial q_k}\right)=\left(\frac{\partial p_k}{\partial q_i}\right)$, wurde oben, nachdem das Glied rechts auf die linke Seite gebracht worden, durch $(i, k) = 0$ bezeichnet, so dass wir z. B. die Gleichungen der m^{ten} Reihe,

$$\left(\frac{\partial p_m}{\partial q_{m+1}}\right)=\left(\frac{\partial p_{m+1}}{\partial q_m}\right),\quad \left(\frac{\partial p_m}{\partial q_{m+2}}\right)=\left(\frac{\partial p_{m+2}}{\partial q_m}\right),\quad \dots\quad \left(\frac{\partial p_m}{\partial q_n}\right)=\left(\frac{\partial p_n}{\partial q_m}\right),$$

abgekürzt durch $(m, m+1) = 0$, $(m, m+2) = 0, \dots (m, n) = 0$ darstellen. Ist nun i irgend einer der Indices $m+1$, $m+2$, $\dots$ n, so hat man

$$\left(\frac{\partial p_m}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial p_m}{\partial p_{m+1}}\left(\frac{\partial p_{m+1}}{\partial q_i}\right)+\frac{\partial p_m}{\partial p_{m+2}}\left(\frac{\partial p_{m+2}}{\partial q_i}\right)+\dots+\frac{\partial p_m}{\partial p_n}\left(\frac{\partial p_n}{\partial q_i}\right)+\frac{\partial p_m}{\partial q_i},$$

oder wenn wir $\left(\frac{\partial p_{m+1}}{\partial q_i}\right)$, $\left(\frac{\partial p_{m+2}}{\partial q_i}\right)$, $\dots$ $\left(\frac{\partial p_n}{\partial q_i}\right)$ mit Hülfe der Bedingungsgleichungen (3.) durch die Differentialquotienten von p_i ersetzen,

$$\left(\frac{\partial p_m}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial p_m}{\partial p_{m+1}}\left(\frac{\partial p_i}{\partial q_{m+1}}\right)+\frac{\partial p_m}{\partial p_{m+2}}\left(\frac{\partial p_i}{\partial q_{m+2}}\right)+\dots+\frac{\partial p_m}{\partial p_n}\left(\frac{\partial p_i}{\partial q_n}\right)+\frac{\partial p_m}{\partial q_i}.$$

Die Bedingungsgleichungen der m^{ten} Reihe werden daher, wenn wir sie in umgekehrter Ordnung von $(m, n) = 0$ anfangend schreiben:

$$(4.)\quad\begin{cases}
\frac{\partial p_m}{\partial p_{m+1}}\left(\frac{\partial p_n}{\partial q_{m+1}}\right)+\frac{\partial p_m}{\partial p_{m+2}}\left(\frac{\partial p_n}{\partial q_{m+2}}\right)+\cdots+\frac{\partial p_m}{\partial p_n}\left(\frac{\partial p_n}{\partial q_n}\right)+\frac{\partial p_m}{\partial q_n} = \left(\frac{\partial p_n}{\partial q_m}\right),\\
\frac{\partial p_m}{\partial p_{m+1}}\left(\frac{\partial p_{n-1}}{\partial q_{m+1}}\right)+\frac{\partial p_m}{\partial p_{m+2}}\left(\frac{\partial p_{n-1}}{\partial q_{m+2}}\right)+\cdots+\frac{\partial p_m}{\partial p_n}\left(\frac{\partial p_{n-1}}{\partial q_n}\right)+\frac{\partial p_m}{\partial q_{n-1}} = \left(\frac{\partial p_{n-1}}{\partial q_m}\right),\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\frac{\partial p_m}{\partial p_{m+1}}\left(\frac{\partial p_i}{\partial q_{m+1}}\right)+\frac{\partial p_m}{\partial p_{m+2}}\left(\frac{\partial p_i}{\partial q_{m+2}}\right)+\cdots+\frac{\partial p_m}{\partial p_n}\left(\frac{\partial p_i}{\partial q_n}\right)+\frac{\partial p_m}{\partial q_i} = \left(\frac{\partial p_i}{\partial q_m}\right),\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\frac{\partial p_m}{\partial p_{m+1}}\left(\frac{\partial p_{m+1}}{\partial q_{m+1}}\right)+\frac{\partial p_m}{\partial p_{m+2}}\left(\frac{\partial p_{m+1}}{\partial q_{m+2}}\right)+\cdots+\frac{\partial p_m}{\partial p_n}\left(\frac{\partial p_{m+1}}{\partial q_n}\right)+\frac{\partial p_m}{\partial q_{m+1}} = \left(\frac{\partial p_{m+1}}{\partial q_m}\right).
\end{cases}$$

ein System von Gleichungen, welche wir, nachdem die rechts stehenden Glieder auf die linke Seite geschafft worden sind, durch die abgekürzte Bezeichnung

$$((m, n)) = 0,\quad ((m, n-1)) = 0,\quad \ldots\quad ((m, i)) = 0,\quad \ldots\quad ((m, m+1)) = 0$$

darstellen. Diese Gleichungen (4.) sind nicht mehr mit denen der m^{ten} Reihe des Systems (3.) identisch, weil wir bei ihrer Bildung die Gleichungen der folgenden Reihen dieses Systems zu Hülfe gerufen haben; die Gleichungen beider Systeme stehen vielmehr in der durch die Relation

$$((m, i)) = (m, i)-\frac{\partial p_m}{\partial p_{m+1}}(m+1, i)-\cdots-\frac{\partial p_m}{\partial p_{i-1}}(i-1, i)+\frac{\partial p_m}{\partial p_{i+1}}(i, i+1)+\cdots+\frac{\partial p_m}{\partial p_n}(i, n)$$

ausgedrückten Verbindung. Wendet man aber auf *alle* Horizontalreihen des Systems (3.) dieselbe Transformation an, vermittelst welcher aus der m^{ten} Horizontalreihe die Gleichungen (4.) hergeleitet worden sind, so *ist das transformirte System mit dem ursprünglichen System* (3.) *gleichbedeutend.* Um dies einzusehen, schreibe man das transformirte System in umgekehrter, also in folgender Ordnung:

$$\begin{array}{lll}
((n-1, n)) = 0, & & \\
((n-2, n)) = 0, & ((n-2, n-1)) = 0, & \\
((n-3, n)) = 0, & ((n-3, n-1)) = 0, & ((n-3, n-2)) = 0,\\
\cdots\cdots & &
\end{array}$$

dann ist

$$
\begin{aligned}
((n-1, n)) &= (n-1, n),\\
((n-2, n)) &= (n-2, n)-\frac{\partial p_{n-2}}{\partial p_{n-1}}(n-1, n),\\
((n-3, n)) &= (n-3, n)-\frac{\partial p_{n-3}}{\partial p_{n-2}}(n-2, n)-\frac{\partial p_{n-3}}{\partial p_{n-1}}(n-1, n).\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
((n-2, n-1)) &= (n-2, n-1)+\frac{\partial p_{n-2}}{\partial p_n}(n-1, n),\\
((n-3, n-1)) &= (n-3, n-1)-\frac{\partial p_{n-3}}{\partial p_{n-2}}(n-2, n-1)+\frac{\partial p_{n-3}}{\partial p_n}(n-1, n),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
((n-3, n-2)) &= (n-3, n-2)+\frac{\partial p_{n-3}}{\partial p_{n-1}}(n-2, n-1)+\frac{\partial p_{n-3}}{\partial p_n}(n-2, n).\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

woraus man sieht, dass aus den neuen Gleichungen auch die ursprünglichen folgen, dass also beide Systeme gleichbedeutend sind.

Um nun aus dem System der Gleichungen (4.) die eingeklammerten Differentialquotienten ganz wegzuschaffen, bilde man aus demselben das neue System

$$
\begin{aligned}
&((m, n)) = 0,\\
&((m, n-1))-\frac{\partial p_{n-1}}{\partial p_n}((m, n)) = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&((m, i))-\frac{\partial p_i}{\partial p_{i+1}}((m, i+1))-\cdots-\frac{\partial p_i}{\partial p_n}((m, n)) = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&((m, m+1))-\frac{\partial p_{m+1}}{\partial p_{m+2}}((m, m+2))-\cdots\cdots\cdots-\frac{\partial p_{m+1}}{\partial p_n}((m, n)) = 0;
\end{aligned}
$$

dann fallen aus diesem neuen System vermöge der Gleichungen

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\partial p_n}{\partial q_k}\right) &= \frac{\partial p_n}{\partial q_k},\\
\left(\frac{\partial p_{n-1}}{\partial q_k}\right) &= \frac{\partial p_{n-1}}{\partial p_n}\left(\frac{\partial p_n}{\partial q_k}\right)+\frac{\partial p_{n-1}}{\partial q_k},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\left(\frac{\partial p_i}{\partial q_k}\right) &= \frac{\partial p_i}{\partial p_{i+1}}\left(\frac{\partial p_{i+1}}{\partial q_k}\right)+\cdots+\frac{\partial p_i}{\partial p_n}\left(\frac{\partial p_n}{\partial q_k}\right)+\frac{\partial p_i}{\partial q_k},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

die eingeklammerten Differentialquotienten ganz heraus, und man erhält:

$$
5.)\left\{\begin{array}{l}
\frac{\partial p_m}{\partial p_{m+1}}\frac{\partial p_n}{\partial q_{m+1}}+\frac{\partial p_m}{\partial p_{m+2}}\frac{\partial p_n}{\partial q_{m+2}}+\cdots+\frac{\partial p_m}{\partial p_n}\frac{\partial p_n}{\partial q_n}+\frac{\partial p_m}{\partial q_n}=\frac{\partial p_n}{\partial q_m},\\
\frac{\partial p_m}{\partial p_{m+1}}\frac{\partial p_{n-1}}{\partial q_{m+1}}+\frac{\partial p_m}{\partial p_{m+2}}\frac{\partial p_{n-1}}{\partial q_{m+2}}+\cdots+\frac{\partial p_m}{\partial p_n}\frac{\partial p_{n-1}}{\partial q_n}+\frac{\partial p_m}{\partial q_{n-1}}-\frac{\partial p_{n-1}}{\partial p_n}\frac{\partial p_m}{\partial q_n}=\frac{\partial p_{n-1}}{\partial q_m},\\
\vdots\qquad\qquad\vdots\qquad\qquad\vdots\\
\frac{\partial p_m}{\partial p_{m+1}}\frac{\partial p_i}{\partial q_{m+1}}+\frac{\partial p_m}{\partial p_{m+2}}\frac{\partial p_i}{\partial q_{m+2}}+\cdots+\frac{\partial p_m}{\partial p_n}\frac{\partial p_i}{\partial q_n}+\frac{\partial p_m}{\partial q_i}-\frac{\partial p_i}{\partial p_{i+1}}\frac{\partial p_m}{\partial q_{i+1}}-\frac{\partial p_i}{\partial p_{i+2}}\frac{\partial p_m}{\partial q_{i+2}}-\cdots\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad-\frac{\partial p_i}{\partial p_n}\frac{\partial p_m}{\partial q_n}=\frac{\partial p_i}{\partial q_m},\\
\vdots\qquad\qquad\vdots\qquad\qquad\vdots\\
\frac{\partial p_m}{\partial p_{m+1}}\frac{\partial p_{m+1}}{\partial q_{m+1}}+\frac{\partial p_m}{\partial p_{m+2}}\frac{\partial p_{m+1}}{\partial q_{m+2}}+\cdots+\frac{\partial p_m}{\partial p_n}\frac{\partial p_{m+1}}{\partial q_n}+\frac{\partial p_m}{\partial q_{m+1}}-\frac{\partial p_{m+1}}{\partial p_{m+2}}\frac{\partial p_m}{\partial q_{m+2}}-\frac{\partial p_{m+1}}{\partial p_{m+3}}\frac{\partial p_m}{\partial q_{m+3}}-\cdots\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad-\frac{\partial p_{m+1}}{\partial p_n}\frac{\partial p_m}{\partial q_n}=\frac{\partial p_{m+1}}{\partial q_m}.
\end{array}\right.
$$

Dieses System ist mit dem System (4.) gleichbedeutend, so dass sowohl die Gleichungen (4.) aus den Gleichungen (5.) hergeleitet werden können, als auch diese aus jenen, was aus der Bildung der Gleichungen (5.) von selbst hervorgeht.

Sämmtliche Gleichungen des Systems (5.) sind in folgendem allgemeinen Schema enthalten:

$$
\frac{\partial p_m}{\partial p_{m+1}}\frac{\partial p_i}{\partial q_{m+1}}+\frac{\partial p_m}{\partial p_{m+2}}\frac{\partial p_i}{\partial q_{m+2}}+\cdots+\frac{\partial p_m}{\partial p_n}\frac{\partial p_i}{\partial q_n}+\frac{\partial p_m}{\partial q_i}-\frac{\partial p_i}{\partial p_{i+1}}\frac{\partial p_m}{\partial q_{i+1}}-\frac{\partial p_i}{\partial p_{i+2}}\frac{\partial p_m}{\partial q_{i+2}}-\cdots
$$
$$
\cdots-\frac{\partial p_i}{\partial p_n}\frac{\partial p_m}{\partial q_n}=\frac{\partial p_i}{\partial q_m}
$$

oder

$$
\sum_{k=m+1}^{k=n}\frac{\partial p_m}{\partial p_k}\frac{\partial p_i}{\partial q_k}-\sum_{k=i+1}^{k=n}\frac{\partial p_i}{\partial p_k}\frac{\partial p_m}{\partial q_k}+\frac{\partial p_m}{\partial q_i}-\frac{\partial p_i}{\partial q_m}=0.
$$

Diese Gleichung ist mit Ausnahme der beiden letzten Glieder ganz symmetrisch; denn wenn sich die zweite Summe nur auf die Werthe $i+1$ bis n erstreckt, während die erste auch noch die Werthe $m+1$ bis i umfasst, so rührt dies nur daher, dass unserer Hypothese nach in p_i die Variablen $p_{i+1}, p_{i+2}, \ldots p_n$ vorkommen, die Variablen $p_1, p_2, \ldots p_{i-1}$ aber nicht, so dass die Grössen $\frac{\partial p_i}{\partial p_k}$ nur dann von Null verschieden sind, wenn $k>i$ ist.

Wir können aber die Aufgabe der Transformation der Bedingungsgleichungen noch allgemeiner fassen. Irgend eine der Bedingungsgleichungen ist

$$(i, i') = 0 \quad \text{oder} \quad \left(\frac{\partial p_\iota}{\partial q_{\iota'}}\right) - \left(\frac{\partial p_{\iota'}}{\partial q_\iota}\right) = 0,$$

wo p_ι und $p_{\iota'}$ nur von den Grössen $q_1, q_2, \ldots q_n$ abhängen. Nehmen wir nun an, p_ι enthalte ausser den Grössen $q_1, q_2, \ldots q_n$ auch noch $p_\varkappa, p_\lambda, \ldots$, ebenso $p_{\iota'}$ ausser den Grössen $q_1, q_2, \ldots q_n$ auch noch $p_{\varkappa'}, p_{\lambda'}, \ldots$, und schreiben wir unter *dieser* Hypothese die Differentialquotienten ohne Klammern, so ist

$$\left(\frac{\partial p_\iota}{\partial q_{\iota'}}\right) = \frac{\partial p_\iota}{\partial q_{\iota'}} + \frac{\partial p_\iota}{\partial p_\varkappa}\left(\frac{\partial p_\varkappa}{\partial q_{\iota'}}\right) + \frac{\partial p_\iota}{\partial p_\lambda}\left(\frac{\partial p_\lambda}{\partial q_{\iota'}}\right) + \cdots,$$

$$\left(\frac{\partial p_{\iota'}}{\partial q_\iota}\right) = \frac{\partial p_{\iota'}}{\partial q_\iota} + \frac{\partial p_{\iota'}}{\partial p_{\varkappa'}}\left(\frac{\partial p_{\varkappa'}}{\partial q_\iota}\right) + \frac{\partial p_{\iota'}}{\partial p_{\lambda'}}\left(\frac{\partial p_{\lambda'}}{\partial q_\iota}\right) + \cdots,$$

oder wenn wir die Differentialquotienten $\left(\frac{\partial p_\varkappa}{\partial q_{\iota'}}\right), \left(\frac{\partial p_\lambda}{\partial q_{\iota'}}\right), \ldots \left(\frac{\partial p_{\varkappa'}}{\partial q_\iota}\right), \left(\frac{\partial p_{\lambda'}}{\partial q_\iota}\right), \ldots$ durch die Differentialquotienten von $p_{\iota'}$ und von p_ι ersetzen, denen sie nach den Bedingungsgleichungen (3.) gleich sind,

$$\left(\frac{\partial p_\iota}{\partial q_{\iota'}}\right) = \frac{\partial p_\iota}{\partial q_{\iota'}} + \frac{\partial p_\iota}{\partial p_\varkappa}\left(\frac{\partial p_{\iota'}}{\partial q_\varkappa}\right) + \frac{\partial p_\iota}{\partial p_\lambda}\left(\frac{\partial p_{\iota'}}{\partial q_\lambda}\right) + \cdots = \frac{\partial p_\iota}{\partial q_{\iota'}} + \sum_\varkappa \frac{\partial p_\iota}{\partial p_\varkappa}\left(\frac{\partial p_{\iota'}}{\partial q_\varkappa}\right),$$

$$\left(\frac{\partial p_{\iota'}}{\partial q_\iota}\right) = \frac{\partial p_{\iota'}}{\partial q_\iota} + \frac{\partial p_{\iota'}}{\partial p_{\varkappa'}}\left(\frac{\partial p_\iota}{\partial q_{\varkappa'}}\right) + \frac{\partial p_{\iota'}}{\partial p_{\lambda'}}\left(\frac{\partial p_\iota}{\partial q_{\lambda'}}\right) + \cdots = \frac{\partial p_{\iota'}}{\partial q_\iota} + \sum_{\varkappa'} \frac{\partial p_{\iota'}}{\partial p_{\varkappa'}}\left(\frac{\partial p_\iota}{\partial q_{\varkappa'}}\right),$$

wo sich die Summation nach $\varkappa$ auf die Werthe $\varkappa, \lambda, \ldots$ bezieht, und die Summation nach $\varkappa'$ auf die Werthe $\varkappa', \lambda', \ldots$. Durch Einführung dieser Ausdrücke geht die Bedingungsgleichung $(i, i') = 0$ über in

$$(6.) \qquad \frac{\partial p_\iota}{\partial q_{\iota'}} - \frac{\partial p_{\iota'}}{\partial q_\iota} + \sum_\varkappa \frac{\partial p_\iota}{\partial p_\varkappa}\left(\frac{\partial p_{\iota'}}{\partial q_\varkappa}\right) - \sum_{\varkappa'} \frac{\partial p_{\iota'}}{\partial p_{\varkappa'}}\left(\frac{\partial p_\iota}{\partial q_{\varkappa'}}\right) = 0.$$

Man kann allgemein beweisen, dass die Differenz der beiden Summen, welche eingeklammerte Differentialquotienten enthalten, ihren Werth nicht ändert, wenn man die Klammern fortlässt. In der That, es ist

$$\left(\frac{\partial p_{\iota'}}{\partial q_\varkappa}\right) = \frac{\partial p_{\iota'}}{\partial q_\varkappa} + \sum_{\varkappa'} \frac{\partial p_{\iota'}}{\partial p_{\varkappa'}}\left(\frac{\partial p_{\varkappa'}}{\partial q_\varkappa}\right), \quad \left(\frac{\partial p_\iota}{\partial q_{\varkappa'}}\right) = \frac{\partial p_\iota}{\partial q_{\varkappa'}} + \sum_\varkappa \frac{\partial p_\iota}{\partial p_\varkappa}\left(\frac{\partial p_\varkappa}{\partial q_{\varkappa'}}\right),$$

daher

$$\sum_\varkappa \frac{\partial p_\iota}{\partial p_\varkappa}\left(\frac{\partial p_{\iota'}}{\partial q_\varkappa}\right) - \sum_{\varkappa'} \frac{\partial p_{\iota'}}{\partial p_{\varkappa'}}\left(\frac{\partial p_\iota}{\partial q_{\varkappa'}}\right)$$

$$= \sum_\varkappa \frac{\partial p_\iota}{\partial p_\varkappa}\frac{\partial p_{\iota'}}{\partial q_\varkappa} - \sum_{\varkappa'} \frac{\partial p_{\iota'}}{\partial p_{\varkappa'}}\frac{\partial p_\iota}{\partial q_{\varkappa'}} + \sum_\varkappa \sum_{\varkappa'} \frac{\partial p_\iota}{\partial p_\varkappa}\frac{\partial p_{\iota'}}{\partial p_{\varkappa'}}\left(\frac{\partial p_{\varkappa'}}{\partial q_\varkappa}\right) - \sum_{\varkappa'} \sum_\varkappa \frac{\partial p_{\iota'}}{\partial p_{\varkappa'}}\frac{\partial p_\iota}{\partial p_\varkappa}\left(\frac{\partial p_\varkappa}{\partial q_{\varkappa'}}\right);$$

aber die beiden Doppelsummen heben in Folge der Bedingungsgleichungen $\left(\frac{\partial p_{\varkappa'}}{\partial q_\varkappa}\right) = \left(\frac{\partial p_\varkappa}{\partial q_{\varkappa'}}\right)$ sich gegenseitig auf, daher ist

$$\Sigma \frac{\partial p_\iota}{\partial p_\varkappa}\left(\frac{\partial p_{\iota'}}{\partial q_\varkappa}\right) - \Sigma \frac{\partial p_{\iota'}}{\partial p_{\varkappa'}}\left(\frac{\partial p_\iota}{\partial q_{\varkappa'}}\right) = \Sigma \frac{\partial p_\iota}{\partial p_\varkappa}\frac{\partial p_{\iota'}}{\partial q_\varkappa} - \Sigma \frac{\partial p_{\iota'}}{\partial p_{\varkappa'}}\frac{\partial p_\iota}{\partial q_{\varkappa'}},$$

und (6.) verwandelt sich in

$$(7.)\qquad \frac{\partial p_\iota}{\partial q_{\iota'}} - \frac{\partial p_{\iota'}}{\partial q_\iota} + \sum_\varkappa \frac{\partial p_\iota}{\partial p_\varkappa}\frac{\partial p_{\iota'}}{\partial q_\varkappa} - \sum_{\varkappa'} \frac{\partial p_{\iota'}}{\partial p_{\varkappa'}}\frac{\partial p_\iota}{\partial q_{\varkappa'}} = 0,$$

eine Gleichung, welche sich von der früheren nur durch das Fehlen der Klammern unterscheidet.

Obgleich wir (7.) aus $(i, i') = 0$ hergeleitet haben, so sind doch beide Gleichungen nicht gleichbedeutend mit einander, denn wir haben bei der Transformation von den übrigen Bedingungsgleichungen noch folgende benutzt:

$$\left(\frac{\partial p_\varkappa}{\partial q_{\iota'}}\right) = \left(\frac{\partial p_{\iota'}}{\partial q_\varkappa}\right),\quad \left(\frac{\partial p_{\varkappa'}}{\partial q_\iota}\right) = \left(\frac{\partial p_\iota}{\partial q_{\varkappa'}}\right),\quad \left(\frac{\partial p_{\varkappa'}}{\partial q_\varkappa}\right) = \left(\frac{\partial p_\varkappa}{\partial q_{\varkappa'}}\right),$$

und zwar für alle Werthe von $\varkappa$ und $\varkappa'$.

Wenden wir die Formel (7.) auf den Fall an, wo die Grössen p_1 und p_2 als Functionen von $p_3, p_4, \ldots p_n, q_1, q_2, \ldots q_n$ ausgedrückt sind. Hier ist $i = 1$, $i' = 2$ zu setzen, und $\varkappa$ sowohl als $\varkappa'$ erhalten alle Werthe von 3 bis n. Wir haben daher

$$(8.)\qquad 0 = \frac{\partial p_1}{\partial q_2} - \frac{\partial p_2}{\partial q_1} + \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial p_1}{\partial p_3}\frac{\partial p_2}{\partial q_3} + \frac{\partial p_1}{\partial p_4}\frac{\partial p_2}{\partial q_4} + \cdots + \frac{\partial p_1}{\partial p_n}\frac{\partial p_2}{\partial q_n} \\ -&\frac{\partial p_2}{\partial p_3}\frac{\partial p_1}{\partial q_3} - \frac{\partial p_2}{\partial p_4}\frac{\partial p_1}{\partial q_4} - \cdots - \frac{\partial p_2}{\partial p_n}\frac{\partial p_1}{\partial q_n}.\end{aligned}\right.$$

In dieser Gleichung sind nur die beiden ersten Terme unsymmetrisch, und dies liegt an dem Vorzug, den wir den Grössen p_1, p_2 geben, indem wir sie explicite durch die übrigen ausgedrückt voraussetzen. Die Unsymmetrie verschwindet, wenn wir statt dessen voraussetzen, dass zwei Gleichungen bestehen, welche alle Grössen $p_1, p_2, \ldots p_n$ und $q_1, q_2, \ldots q_n$ enthalten, und die man sowohl nach p_1 und p_2, als nach zwei beliebigen anderen Grössen p_ι und $p_{\iota'}$ aufgelöst annehmen kann. Diese beiden Gleichungen seien

$$\varphi = a,\quad \psi = b,$$

wo φ und ψ Functionen von $p_1, p_2, \ldots p_n, q_1, q_2, \ldots q_n$ und a, b Constanten bedeuten. Alsdann wird eine vollständige Symmetrie dadurch hergestellt, dass die in der Gleichung (8.) vorkommenden partiellen Differentialquotienten der Grössen p_1, p_2 durch die partiellen Differentialquotienten von φ und ψ ersetzt werden. Da Gleichung (8.) die Form

$$(8^*.) \qquad 0 = \frac{\partial p_1}{\partial q_2} - \frac{\partial p_2}{\partial q_1} + \sum_{k=3}^{k=n} \left(\frac{\partial p_1}{\partial p_k} \frac{\partial p_2}{\partial q_k} - \frac{\partial p_2}{\partial p_k} \frac{\partial p_1}{\partial q_k} \right)$$

hat, so ist es für die beabsichtigte Transformation erforderlich, die Grössen $\frac{\partial p_1}{\partial q_2} - \frac{\partial p_2}{\partial q_1}$ und $\frac{\partial p_1}{\partial p_k} \frac{\partial p_2}{\partial q_k} - \frac{\partial p_2}{\partial p_k} \frac{\partial p_1}{\partial q_k}$ durch die partiellen Differentialquotienten von φ und ψ auszudrücken. Wir müssen hierbei die Grössen p_1 und p_2 vermöge der Gleichungen $\varphi = a$ und $\psi = b$ als Functionen aller übrigen p_3, p_4, ... p_n, q_1, ... q_n, diese aber als von einander unabhängig betrachten. Durch Differentiation der Gleichungen $\varphi = a$ und $\psi = b$ nach q_1 und q_2 erhalten wir

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p_1} \frac{\partial p_1}{\partial q_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} \frac{\partial p_2}{\partial q_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} \frac{\partial p_1}{\partial q_2} + \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} \frac{\partial p_2}{\partial q_2} + \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} = 0,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial p_1} \frac{\partial p_1}{\partial q_1} + \frac{\partial \psi}{\partial p_2} \frac{\partial p_2}{\partial q_1} + \frac{\partial \psi}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial p_1} \frac{\partial p_1}{\partial q_2} + \frac{\partial \psi}{\partial p_2} \frac{\partial p_2}{\partial q_2} + \frac{\partial \psi}{\partial q_2} = 0.$$

Hieraus ergeben sich unter Einführung der Bezeichnung

$$N = \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} \frac{\partial \psi}{\partial p_2} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} \frac{\partial \psi}{\partial p_1}$$

die Werthe

$$-N \frac{\partial p_2}{\partial q_1} = \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} - \frac{\partial \psi}{\partial p_1} \frac{\partial \varphi}{\partial q_1}, \quad N \frac{\partial p_1}{\partial q_2} = \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} - \frac{\partial \psi}{\partial p_2} \frac{\partial \varphi}{\partial q_2},$$

$$(9.) \qquad N \left\{ \frac{\partial p_1}{\partial q_2} - \frac{\partial p_2}{\partial q_1} \right\} = \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} - \frac{\partial \psi}{\partial p_1} \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} - \frac{\partial \psi}{\partial p_2} \frac{\partial \varphi}{\partial q_2}.$$

Durch Differentiation der Gleichungen $\varphi = a$ und $\psi = b$ nach p_k und q_k erhalten wir

$$(10.) \qquad \begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} \frac{\partial p_1}{\partial p_k} + \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} \frac{\partial p_2}{\partial p_k} + \frac{\partial \varphi}{\partial p_k} = 0, & \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} \frac{\partial p_1}{\partial q_k} + \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} \frac{\partial p_2}{\partial q_k} + \frac{\partial \varphi}{\partial q_k} = 0, \\ \frac{\partial \psi}{\partial p_1} \frac{\partial p_1}{\partial p_k} + \frac{\partial \psi}{\partial p_2} \frac{\partial p_2}{\partial p_k} + \frac{\partial \psi}{\partial p_k} = 0, & \frac{\partial \psi}{\partial p_1} \frac{\partial p_1}{\partial q_k} + \frac{\partial \psi}{\partial p_2} \frac{\partial p_2}{\partial q_k} + \frac{\partial \psi}{\partial q_k} = 0. \end{cases}$$

Hieraus ergeben sich, unter Beibehaltung der obigen Bedeutung von N, für die nach p_k und q_k genommenen Differentialquotienten von p_1 und p_2 durch Auflösung der unter einander stehenden linearen Gleichungen die Werthe

$$N \frac{\partial p_1}{\partial p_k} = \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} \frac{\partial \psi}{\partial p_k} - \frac{\partial \psi}{\partial p_2} \frac{\partial \varphi}{\partial p_k}, \qquad N \frac{\partial p_1}{\partial q_k} = \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} \frac{\partial \psi}{\partial q_k} - \frac{\partial \psi}{\partial p_2} \frac{\partial \varphi}{\partial q_k},$$

$$-N \frac{\partial p_2}{\partial p_k} = \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} \frac{\partial \psi}{\partial p_k} - \frac{\partial \psi}{\partial p_1} \frac{\partial \varphi}{\partial p_k}, \quad -N \frac{\partial p_2}{\partial q_k} = \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} \frac{\partial \psi}{\partial q_k} - \frac{\partial \psi}{\partial p_1} \frac{\partial \varphi}{\partial q_k};$$

und wenn wir jetzt den Ausdruck $\frac{\partial p_1}{\partial p_k}\frac{\partial p_2}{\partial q_k} - \frac{\partial p_2}{\partial p_k}\frac{\partial p_1}{\partial q_k}$ bilden, so erhalten wir eine Gleichung, deren linke Seite durch das Quadrat von N theilbar ist, während die rechte Seite N einmal als Factor enthält. Nach Fortlassung des beiden Seiten gemeinschaftlichen Theilers N ergiebt sich die Formel

$$(11.)\qquad N\left\{\frac{\partial p_1}{\partial p_k}\frac{\partial p_2}{\partial q_k} - \frac{\partial p_2}{\partial p_k}\frac{\partial p_1}{\partial q_k}\right\} = \frac{\partial \varphi}{\partial p_k}\frac{\partial \psi}{\partial q_k} - \frac{\partial \psi}{\partial p_k}\frac{\partial \varphi}{\partial q_k},$$

bei deren Herleitung man auch die Hebung des gemeinsamen Theilers N vermeiden kann, wenn man z. B. die beiden in der ersten Horizontalreihe stehenden Gleichungen (10.) nach $\frac{\partial \varphi}{\partial p_1}$ und $\frac{\partial \varphi}{\partial p_2}$ auflöst und in dem für $\frac{\partial \varphi}{\partial p_1}$ erhaltenen Ausdruck an die Stelle von $\frac{\partial p_2}{\partial p_k}$ und $\frac{\partial p_2}{\partial q_k}$ ihre oben erhaltenen Werthe setzt. Durch die Formeln (9.) und (11.) verwandelt sich die Gleichung (8*.) in

$$0 = \frac{\partial \varphi}{\partial p_1}\frac{\partial \psi}{\partial q_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial p_2}\frac{\partial \psi}{\partial q_2} - \frac{\partial \psi}{\partial p_1}\frac{\partial \varphi}{\partial q_1} - \frac{\partial \psi}{\partial p_2}\frac{\partial \varphi}{\partial q_2} + \sum_{k=3}^{k=n}\left\{\frac{\partial \varphi}{\partial p_k}\frac{\partial \psi}{\partial q_k} - \frac{\partial \psi}{\partial p_k}\frac{\partial \varphi}{\partial q_k}\right\}.$$

Wir haben daher, wenn wir alle Glieder vereinigen, eine von 1 bis n sich erstreckende Summe

$$(12.)\qquad 0 = \sum_{k=1}^{k=n}\left\{\frac{\partial \varphi}{\partial p_k}\frac{\partial \psi}{\partial q_k} - \frac{\partial \psi}{\partial p_k}\frac{\partial \varphi}{\partial q_k}\right\}$$

und somit den Satz:

Sind $\varphi = a$ und $\psi = b$ zwei beliebige von den n Gleichungen, welche $p_1, p_2, \dots p_n$ als Functionen von $q_1, q_2, \dots q_n$ so bestimmen, dass

$$p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \dots + p_n dq_n$$

ein vollständiges Differential ist, so müssen sie der Bedingung genügen,

$$(12.)\qquad 0 = \left\{\begin{array}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial p_1}\frac{\partial \psi}{\partial q_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial p_2}\frac{\partial \psi}{\partial q_2} + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial p_n}\frac{\partial \psi}{\partial q_n} \\ - \frac{\partial \psi}{\partial p_1}\frac{\partial \varphi}{\partial q_1} - \frac{\partial \psi}{\partial p_2}\frac{\partial \varphi}{\partial q_2} - \dots - \frac{\partial \psi}{\partial p_n}\frac{\partial \varphi}{\partial q_n}, \end{array}\right.$$

und zwar ist dies eine identische Gleichung, da sie die willkürlichen Constanten a und b nicht enthält.

Die Gleichung (12.) enthält das in (7.) gegebene Resultat als besonderen Fall. Denn nimmt man an, dass die Functionen φ, ψ von der Form

$$\varphi = p_\iota - f(p_\varkappa, p_\lambda, \dots, q_1, q_2, \dots q_n),$$
$$\psi = p_{\iota'} - F(p_{\varkappa'}, p_{\lambda'}, \dots, q_1, q_2, \dots q_n)$$

sind, so geht Gleichung (12.) in Gleichung (7.) über.

Zweiunddreissigste Vorlesung.

Directer Beweis für die allgemeinste Form der Integrabilitätsbedingungen. Einführung der Functionen H, welche, willkürlichen Constanten gleich gesetzt, die p als Functionen der q bestimmen.

Wir wollen das Theorem, zu welchem wir am Ende der vorigen Vorlesung gelangt sind, *direct* beweisen.

Denken wir uns die n Gleichungen, welche $p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_n dq_n$ zu einem vollständigen Differential machen, und zu welchen die Gleichungen $\varphi = a$, $\psi = b$ gehören, nach $p_1, p_2, \ldots p_n$ aufgelöst, und diese Werthe in die Gleichungen $\varphi = a$ und $\psi = b$ substituirt, so werden dieselben identisch erfüllt. Demnach erhält man aus der partiellen Differentiation von $\varphi = a$ und $\psi = b$ nach irgend einer der Grössen q wiederum eine identische Gleichung, wenn hierbei die Grössen p als Functionen der Grössen q angesehen werden. So ergiebt sich aus der Differentiation von $\varphi = a$ nach q_ι

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p_1}\left(\frac{\partial p_1}{\partial q_\iota}\right) + \frac{\partial \varphi}{\partial p_2}\left(\frac{\partial p_2}{\partial q_\iota}\right) + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial p_n}\left(\frac{\partial p_n}{\partial q_\iota}\right) + \frac{\partial \varphi}{\partial q_\iota} = 0$$

oder

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial \varphi}{\partial p_k}\left(\frac{\partial p_k}{\partial q_\iota}\right) + \frac{\partial \varphi}{\partial q_\iota} = 0.$$

Ebenso ergiebt sich aus der Differentiation von $\psi = b$ nach q_k

$$\sum_{\iota=1}^{\iota=n} \frac{\partial \psi}{\partial p_\iota}\left(\frac{\partial p_\iota}{\partial q_k}\right) + \frac{\partial \psi}{\partial q_k} = 0.$$

Multiplicirt man die erste dieser Gleichungen mit $\frac{\partial \psi}{\partial p_\iota}$ und summirt nach i von 1 bis n, multiplicirt man die zweite mit $\frac{\partial \varphi}{\partial p_k}$ und summirt nach k von 1 bis n, so erhält man die beiden Resultate:

$$\sum_{\iota=1}^{\iota=n} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial \psi}{\partial p_\iota} \frac{\partial \varphi}{\partial p_k}\left(\frac{\partial p_k}{\partial q_\iota}\right) + \sum_{\iota=1}^{\iota=n} \frac{\partial \psi}{\partial p_\iota} \frac{\partial \varphi}{\partial q_\iota} = 0.$$

$$\sum_{k=1}^{k=n} \sum_{\iota=1}^{\iota=n} \frac{\partial \varphi}{\partial p_k} \frac{\partial \psi}{\partial p_\iota}\left(\frac{\partial p_\iota}{\partial q_k}\right) + \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial \varphi}{\partial p_k} \frac{\partial \psi}{\partial q_k} = 0.$$

Wenn man diese Gleichungen von einander abzieht, so fallen die Doppelsummen heraus, denn da die Grössen p aus den n Gleichungen bestimmt sind, welche $p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_n dq_n$ zu einem vollständigen Differential machen, so ist $\left(\frac{\partial p_\iota}{\partial q_k}\right) = \left(\frac{\partial p_k}{\partial q_\iota}\right)$: es bleibt also übrig

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial \varphi}{\partial p_k} \frac{\partial \psi}{\partial q_k} - \sum_{\iota=1}^{\iota=n} \frac{\partial \psi}{\partial p_\iota} \frac{\partial \varphi}{\partial q_\iota} = 0.$$

oder

$$(1.)\qquad \sum_{k=1}^{k=n}\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial p_k}\frac{\partial\psi}{\partial q_k}-\frac{\partial\psi}{\partial p_k}\frac{\partial\varphi}{\partial q_k}\right\} = 0,$$

übereinstimmend mit Gleichung (12.) der vorigen Vorlesung. Man sieht aus diesem Beweise, dass zur Herleitung der Gleichung (1.) die sämmtlichen Bedingungsgleichungen

$$\left(\frac{\partial p_i}{\partial q_k}\right) = \left(\frac{\partial p_k}{\partial q_i}\right)$$

nöthig sind, da die nur vermöge dieser Gleichheit sich hebenden Doppelsummen auf alle Werthe von i und k zu erstrecken sind.

Die Gleichung (1.) setzt, wie schon früher bemerkt wurde, nichts weiter voraus, als dass die Gleichungen $\varphi = a$ und $\psi = b$ irgend zwei von solchen n Gleichungen seien, welche $p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_n dq_n$ zu einem vollständigen Differential machen. In dieser Allgemeinheit genommen können a und b sowohl willkürliche Constanten sein, als auch bestimmte Zahlenwerthe, z. B. Null. Auch über die Natur der Functionen φ und ψ brauchen wir nichts fest zu setzen. Diese Functionen können selbst willkürliche Constanten in sich enthalten, können aber auch von solchen frei sein.

Nach diesen verschiedenen Umständen wird es sich richten, ob die Gleichung (1.) eine identische ist, oder nicht. Sind a und b nicht willkürliche Constanten, so braucht sie keine identische zu sein, sondern kann durch die Gleichungen $\varphi = a$ und $\psi = b$ selbst erfüllt werden. Dies ist aber der Fall, der am seltensten stattfindet; viel häufiger tritt, wenn die Gleichung (1.) nicht identisch erfüllt wird, der Fall ein, wo dieselbe eine dritte von den n Gleichungen ist, welche $p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_n dq_n$ zu einem vollständigen Differential machen, und alsdann lässt sich aus Gleichung (1.) und einer der Gleichungen $\varphi = a$, $\psi = b$ durch blosses Differentiiren eine vierte Gleichung herleiten. Diese wiederum ist entweder eine identische, oder eine Folge der uns bisher bekannten drei, oder endlich eine vierte Gleichung des Systems der n Gleichungen, u. s. w. So wird es vorkommen können, dass man aus $\varphi = a$ und $\psi = b$ durch blosses Differentiiren n verschiedene Gleichungen herleitet, welche das System der n Gleichungen erschöpfen; aber mehr als n von einander unabhängige Gleichungen ($\varphi = a$ und $\psi = b$ mitgerechnet) kann man nie erhalten, da alle durch die nämlichen n Werthe von $p_1, p_2, \ldots p_n$, welche $p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_n dq_n$ zu einem vollständigen Differential machen, befriedigt werden müssen. Wir sehen also, dass, wenn wir über den Character der Gleichungen $\varphi = a$, $\psi = b$ nichts festsetzen, sich auch nichts Bestimmtes über die Natur der Gleichung (1.) aussagen lässt.

Diese nähere Bestimmung ergiebt sich, wenn wir zu der Forderung, dass $\varphi = a$, $\psi = b$ zu dem System der n Gleichungen gehören sollen, welche $p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_n dq_n$ zu einem vollständigen Differential machen, noch die hinzufügen, dass

$$V = \int (p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_n dq_n)$$

eine vollständige Lösung der vorgelegten partiellen Differentialgleichung sei, welche also ausser der durch Addition zu V hinzukommenden Constante noch $n-1$ willkürliche Constanten enthalten muss. Nehmen wir an, die vorgelegte partielle Differentialgleichung enthalte selbst eine unbestimmte Constante h und sei nach ihr aufgelöst, sie sei also von der Form

$$\varphi(p_1, p_2, \ldots p_n, q_1, q_2, \ldots q_n) = h,$$

und die vollständige Lösung V enthalte ausser h die $n-1$ willkürlichen Constanten h_1, h_2, ... h_{n-1}; dann sind

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial V}{\partial q_2} = p_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial V}{\partial q_n} = p_n$$

die richtigen Gleichungen, welche $p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_n dq_n$ zu einem vollständigen Differential und sein Integral zu einer vollständigen Lösung der partiellen Differentialgleichung machen. Diese n Gleichungen denken wir uns nach den n darin enthaltenen Constanten h, h_1, ... h_{n-1} aufgelöst und das Resultat auf die Form

$$h = H, \quad h_1 = H_1, \quad h_2 = H_2, \quad \ldots \quad h_{n-1} = H_{n-1}$$

gebracht, wo H, H_1, ... H_{n-1} blosse Functionen von p_1, p_2, ... p_n, q_1, q_2, ... q_n sind; dann ist die erste Gleichung, $h = H$, offenbar nichts anderes als die gegebene partielle Differentialgleichung, da sie die einzige ist, welche von den willkürlichen Constanten h_1, h_2, ... h_{n-1} frei ist. Es giebt also, wie wir sehen, jedesmal ausser der gegebenen Differentialgleichung $h = H = \varphi$ noch $n-1$ von jener sowie von einander unabhängige Gleichungen der Form

$$h_1 = H_1, \quad h_2 = H_2, \quad \ldots \quad h_{n-1} = H_{n-1}$$

und von der Beschaffenheit, dass, wenn die Grössen p_1, p_2, ... p_n aus diesen n Gleichungen bestimmt werden, $\int (p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_n dq_n)$ eine vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung $h = H$ ist. Es ist unmöglich, aus diesen n Gleichungen

$$h = H, \quad h_1 = H_1, \quad \ldots \quad h_{n-1} = H_{n-1}$$

eine Gleichung herzuleiten, welche von den Constanten h, h_1, ... h_{n-1} ganz frei wäre; denn sonst könnte man aus dieser Gleichung und $h = H$ eine der Grössen p eliminiren und bekäme alsdann eine partielle Differentialgleichung, in welcher die Anzahl der Variablen, nach denen differentiirt wird, um eine Einheit geringer wäre, als in der vorgelegten, und welcher trotzdem der Ausdruck $V = \int (p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_n dq_n)$ genügte; V könnte daher keine *vollständige* Lösung von $h = H$ sein. Es ist also unmöglich alle Constanten auf einmal fortzuschaffen; hieraus folgt, dass, wenn wir eine aus den n Gleichungen $h = H$, $h_1 = H_1$, ... $h_{n-1} = H_{n-1}$ hergeleitete und von allen Constanten h, h_1, ... h_{n-1} freie Gleichung erhalten, dieselbe eine identische Gleichung sein muss. Diese Gleichung muss nämlich durch die Werthe der Grössen p_1, p_2, ... p_n erfüllt werden, welche wir aus jenen n Gleichungen bestimmen. Aber diese Werthe von p_1, p_2, ... p_n enthalten wieder ebensoviel von einander unabhängige Grössen h, h_1, ... h_{n-1}, daher muss jene hergeleitete Gleichung, wenn sie nach der Substitution der Werthe von p_1, p_2, ... p_n identisch verschwinden soll, auch schon vor der Substitution identisch verschwinden. Eine solche hergeleitete Gleichung ist die Gleichung (1.), wenn darin für φ und ψ zwei der Grössen H gesetzt werden; daher ist

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial H_\iota}{\partial p_1}\dfrac{\partial H_{\iota'}}{\partial q_1} + \dfrac{\partial H_\iota}{\partial p_2}\dfrac{\partial H_{\iota'}}{\partial q_2} + \cdots + \dfrac{\partial H_\iota}{\partial p_n}\dfrac{\partial H_{\iota'}}{\partial q_n} \\ - \dfrac{\partial H_{\iota'}}{\partial p_1}\dfrac{\partial H_\iota}{\partial q_1} - \dfrac{\partial H_{\iota'}}{\partial p_2}\dfrac{\partial H_\iota}{\partial q_2} - \cdots - \dfrac{\partial H_{\iota'}}{\partial p_n}\dfrac{\partial H_\iota}{\partial q_n} \end{array}\right\} = 0$$

eine identische Gleichung. In dem Falle also, wo $\varphi = a$ und $\psi = b$ zu dem System der Gleichungen $h_\iota = H_\iota$ gehören, bleibt über die Natur der Gleichung (1.) kein Zweifel, sondern wir wissen, dass sie alsdann eine identische Gleichung sein muss. Daher sind die $\dfrac{n.n-1}{2}$ Gleichungen, welche wir erhalten, wenn wir für φ und ψ alle Combinationen zu zweien der Grössen H_ι setzen, die Bedingungsgleichungen, denen diese Grössen genügen müssen. Wir haben auf diese Weise wiederum $\dfrac{n.n-1}{2}$ Bedingungsgleichungen, welche durch n Functionen erfüllt werden müssen, von denen die eine, H, bekannt ist, während die $n-1$ übrigen H_1, H_2, ... H_{n-1} zu suchen sind. Führen wir nun die Bezeichnung

$$(H_\iota, H_k) = \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial H_\iota}{\partial p_1}\dfrac{\partial H_k}{\partial q_1} + \dfrac{\partial H_\iota}{\partial p_2}\dfrac{\partial H_k}{\partial q_2} + \cdots + \dfrac{\partial H_\iota}{\partial p_n}\dfrac{\partial H_k}{\partial q_n} \\ - \dfrac{\partial H_k}{\partial p_1}\dfrac{\partial H_\iota}{\partial q_1} - \dfrac{\partial H_k}{\partial p_2}\dfrac{\partial H_\iota}{\partial q_2} - \cdots - \dfrac{\partial H_k}{\partial p_n}\dfrac{\partial H_\iota}{\partial q_n} \end{array}\right.$$

ein (welche mit der in der vorigen Vorlesung gebrauchten Bezeichnung (i, k) in keiner Beziehung steht), so dass für jeden beliebigen Werth von H_i und H_k

$$(H_i, H_k) = -(H_k, H_i), \quad (H_i, H_i) = 0$$

ist, und sollen $h = H$, $h_1 = H_1$, ... $h_{n-1} = H_{n-1}$ die Gleichungen sein, welche V zu einer vollständigen Lösung der vorgelegten partiellen Differentialgleichung $h = H$ machen, so müssen die Grössen H den $\frac{n.n-1}{2}$ Bedingungsgleichungen genügen, welche man erhält, wenn man in

$$(H_i, H_k) = 0$$

für die beiden von einander verschiedenen Indices i, k alle möglichen Combinationen zu zweien der Zahlen $0, 1, \dots n-1$ setzt.

Diese $\frac{n.n-1}{2}$ Bedingungsgleichungen sind nothwendig, damit die aus den Gleichungen $h_i = H_i$ hervorgehenden Werthe von $p_1, p_2, \dots p_n$ den Ausdruck

$$p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_n dq_n$$

zu einem vollständigen Differential und sein Integral zu einer vollständigen Lösung der vorgelegten partiellen Differentialgleichung machen. Es bleibt nur noch übrig zu beweisen, dass sie auch ausreichen, d. h. dass, wenn sie erfüllt sind, auch wirklich $p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_n dq_n$ ein vollständiges Differential wird, mithin die $\frac{n.n-1}{2}$ Gleichungen

$$\left(\frac{\partial p_k}{\partial q_i}\right) = \left(\frac{\partial p_i}{\partial q_k}\right)$$

bestehen. (Der zweite Theil der Aussage, dass $\int (p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_n dq_n)$ eine vollständige Lösung sei, versteht sich alsdann von selbst, da die Constanten $h_1, h_2, \dots h_{n-1}$ willkürlich und von einander unabhängig sind.) Wir haben also nachzuweisen, dass aus den Bedingungsgleichungen

$$(H_i, H_k) = 0$$

die Bedingungsgleichungen

$$\left(\frac{\partial p_k}{\partial q_i}\right) = \left(\frac{\partial p_i}{\partial q_k}\right)$$

folgen, sowie oben aus den letzteren die ersteren hergeleitet worden sind.

Um diesen Nachweis zu führen, müssen wir zu den Gleichungen zurückkehren, welche am Anfange dieser Vorlesung bei dem directen Beweise der Gleichung (1.) vorkamen. Indem wir nur von der Voraussetzung ausgingen, dass $\varphi = a$ und $\psi = b$ zu dem System der n Gleichungen gehören, welche zur Bestimmung von $p_1, p_2, \ldots p_n$ als Functionen von $q_1, q_2, \ldots q_n$ dienen, dass mithin $\varphi = a$ und $\psi = b$ durch die Ausdrücke der Grössen p in q_1, $q_2, \ldots q_n$ identisch erfüllt werden, erhielten wir die Gleichungen

$$\sum_{i=1}^{i=n}\sum_{k=1}^{k=n}\frac{\partial\psi}{\partial p_i}\frac{\partial\varphi}{\partial p_k}\left(\frac{\partial p_k}{\partial q_i}\right)+\sum_{i=1}^{i=n}\frac{\partial\psi}{\partial p_i}\frac{\partial\varphi}{\partial q_i} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{i=n}\sum_{k=1}^{k=n}\frac{\partial\psi}{\partial p_i}\frac{\partial\varphi}{\partial p_k}\left(\frac{\partial p_i}{\partial q_k}\right)+\sum_{k=1}^{k=n}\frac{\partial\varphi}{\partial p_k}\frac{\partial\psi}{\partial q_k} = 0.$$

Indem wir alsdann die Bedingungsgleichungen $\left(\frac{\partial p_k}{\partial q_i}\right)-\left(\frac{\partial p_i}{\partial q_k}\right)=0$ voraussetzten, hoben sich die Doppelsummen beim Abziehen auf, und wir erhielten die neue Form der Bedingungsgleichungen: jetzt, wo wir die Bedingungsgleichungen $\left(\frac{\partial p_k}{\partial q_i}\right)=\left(\frac{\partial p_i}{\partial q_k}\right)$ nicht voraussetzen dürfen, sondern beweisen wollen, erhalten wir durch Abziehen beider obigen Gleichungen, und wenn wir an die Stelle von φ und ψ die Functionen H_α und H_β setzen,

$$(2.)\qquad 0 = \sum_{i=1}^{i=n}\sum_{k=1}^{k=n}\frac{\partial H_\alpha}{\partial p_k}\frac{\partial H_\beta}{\partial p_i}\left\{\left(\frac{\partial p_i}{\partial q_k}\right)-\left(\frac{\partial p_k}{\partial q_i}\right)\right\}+\sum_{i=1}^{i=n}\left\{\frac{\partial H_\alpha}{\partial p_i}\frac{\partial H_\beta}{\partial q_i}-\frac{\partial H_\beta}{\partial p_i}\frac{\partial H_\alpha}{\partial q_i}\right\}.$$

Die einfache Summe, welche das zweite Glied der rechten Seite dieser Gleichung bildet, ist nichts anderes, als die oben mit (H_α, H_β) bezeichnete Grösse: die Doppelsumme, welche das erste Glied bildet, lässt sich auf $\frac{n.n-1}{2}$ Terme zurückführen, da die Glieder, in welchen $i=k$ ist, verschwinden, und von den übrigen je zwei, welche durch Vertauschung von i und k aus einander hervorgehen, sich zu einem vereinigen. Auf diese Weise verwandelt sich Gleichung (2.) in

$$(2^*.)\qquad 0 = \sum_{i,k}\left\{\frac{\partial H_\alpha}{\partial p_k}\frac{\partial H_\beta}{\partial p_i}-\frac{\partial H_\beta}{\partial p_k}\frac{\partial H_\alpha}{\partial p_i}\right\}\left\{\left(\frac{\partial p_i}{\partial q_k}\right)-\left(\frac{\partial p_k}{\partial q_i}\right)\right\}+(H_\alpha, H_\beta),$$

wo die Summe auf alle von einander verschiedenen Combinationen von i und k auszudehnen ist. Solcher Gleichungen erhält man $\frac{n.n-1}{2}$, indem man für H_α, H_β je zwei verschiedene der Grössen $H, H_1, \ldots H_{n-1}$ setzt, und es ergiebt sich so ein System von $\frac{n.n-1}{2}$ Gleichungen, welche in Beziehung auf die $\frac{n.n-1}{2}$ Grössen $\left(\frac{\partial p_i}{\partial q_k}\right)-\left(\frac{\partial p_k}{\partial q_i}\right)$ linear sind, und in welchen (H_α, H_β) die constanten Glieder bilden. Zu beweisen ist, dass, wenn diese letzteren Grössen verschwinden, auch die ersteren sämmtlich gleich Null werden. Nun ist in einem Systeme linearer Gleichungen das Verschwinden der Unbekannten stets eine nothwendige Folge des Verschwindens der constanten Glieder, wenn nicht die Determinante des Systems gleich Null ist *), in welchem Fall die Werthe der Unbekannten unbestimmt werden. Dass dieser einzige Ausnahmefall hier nicht stattfindet, kann man, ohne den Werth der in Rede stehenden Determinante selbst zu ermitteln, dadurch beweisen, dass man die Auflösungsformeln des Systems (2*.) aus der in (2.) gegebenen Form der Gleichungen dieses Systems auf folgende einfache Weise herleitet. Man setze zur Abkürzung

$$\frac{\partial H_\alpha}{\partial p_\iota} = a_\iota^{(\alpha)}$$

und bezeichne mit R die aus den n^2 Grössen $a_\iota^{(\alpha)}$ gebildete Determinante, wo α die Werthe $0, 1, \ldots n-1$ und i die Werthe $1, 2, \ldots n$ annimmt, sodass

$$R = \Sigma \pm a_1 a_2' a_3'' \ldots a_n^{(n-1)};$$

ferner setze man

$$A_\iota^{(\alpha)} = \frac{\partial R}{\partial a_\iota^{(\alpha)}}.$$

Dies vorausgesetzt, lässt sich Gleichung (2.) nach Vertauschung von α und β folgendermassen schreiben:

$$(3.)\qquad \sum_{\iota=1}^{\iota=n}\sum_{k=1}^{k=n} a_\iota^{(\alpha)} a_k^{(\beta)} \left\{\left(\frac{\partial p_\iota}{\partial q_k}\right)-\left(\frac{\partial p_k}{\partial q_\iota}\right)\right\} = (H_\alpha, H_\beta).$$

Diese Gleichung gilt nicht nur, wenn für α und β zwei von einander verschiedene Werthe aus der Reihe $0, 1, \ldots n-1$ gesetzt werden, sondern auch wenn beide Indices einem und demselben dieser n Werthe gleich werden. In diesem letzteren Fall ist Gleichung (3.) eine identische, da in der nur formell verschiedenen Gleichung (2*.) alsdann alle Glieder einzeln verschwinden.

Multipliciren wir Gleichung (3.) mit $A_r^{(\alpha)} A_s^{(\beta)}$, wo r und s Zahlen aus der Reihe $1, 2, \ldots n$ bedeuten, so ist es nach dem eben Bemerkten gestattet, in Beziehung auf jeden der Indices α und β unabhängig von dem anderen von 0 bis $n-1$ zu summiren. Aendert man im Resultat die Ordnung der Summationen, welche einerseits nach i und k, andrerseits nach α und β auszuführen sind, und bezeichnet mit $M_{\iota,k}$ die Doppelsumme

$$M_{\iota,k} = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=n-1}\sum_{\beta=0}^{\beta=n-1} a_\iota^{(\alpha)} a_k^{(\beta)} A_r^{(\alpha)} A_s^{(\beta)} = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=n-1} a_\iota^{(\alpha)} A_r^{(\alpha)} \cdot \sum_{\beta=0}^{\beta=n-1} a_k^{(\beta)} A_s^{(\beta)},$$

so ergiebt sich

$$(4.)\qquad \sum_{\iota=1}^{\iota=n}\sum_{k=1}^{k=n} M_{\iota,k}\left\{\left(\frac{\partial p_\iota}{\partial q_k}\right)-\left(\frac{\partial p_k}{\partial q_\iota}\right)\right\} = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=n-1}\sum_{\beta=0}^{\beta=n-1} A_r^{(\alpha)} A_s^{(\beta)} (H_\alpha, H_\beta).$$

---

*) S. p. 160.

Die einfachen Summen, als deren Product sich $M_{\iota,k}$ darstellt, sind *) gleich 0, oder gleich R, je nachdem i von r und k von s verschieden sind, oder i mit r und k mit s zusammenfallen. Es ist also

$$M_{\iota,k} = 0,$$

ausser wenn gleichzeitig $i=r$ und $k=s$ wird, und in diesem Falle ist

$$M_{r,s} = R^2:$$

Gleichung (4.) geht daher über in

$$R^2\left\{\left(\frac{\partial p_r}{\partial q_s}\right)-\left(\frac{\partial p_s}{\partial q_r}\right)\right\} = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=n-1}\sum_{\beta=0}^{\beta=n-1} A_r^{(\alpha)}A_s^{(\beta)}(H_\alpha, H_\beta).$$

Hieraus sieht man, dass, wenn die Grössen (H_α, H_β) sämmtlich gleich Null sind, wie wir voraussetzen, auch sämmtliche Grössen $\left(\frac{\partial p_r}{\partial q_s}\right)-\left(\frac{\partial p_s}{\partial q_r}\right)$ verschwinden, es sei denn, dass R gleich Null werde. Aber das Verschwinden des Ausdrucks

$$R = \Sigma \pm a_1 a_2' a_3'' \ldots a_n^{(n-1)} = \Sigma \pm \frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{\partial H_1}{\partial p_2}\cdots\frac{\partial H_{n-1}}{\partial p_n}$$

bedeutet, dass die Functionen H, H_1, ... H_{n-1} der Grössen p_1, p_2, ... p_n nicht unabhängig von einander sind, die Gleichungen $H=h$, $H_1=h_1$, ... $H_{n-1}=h_{n-1}$ also nicht hinreichen, um aus ihnen die Variablen p_1, p_2, ... p_n als Functionen von q_1, q_2, ... q_n zu bestimmen. Von diesem einzigen und selbstverständlichen Ausnahmefall abgesehen, kann man also auch umgekehrt aus den $\frac{n.n-1}{2}$ Bedingungsgleichungen

$$(H_\alpha, H_\beta) = 0$$

die $\frac{n.n-1}{2}$ ursprünglichen Bedingungsgleichungen

$$\left(\frac{\partial p_\iota}{\partial q_k}\right) = \left(\frac{\partial p_k}{\partial q_\iota}\right)$$

ableiten.

Dreiunddreissigste Vorlesung.

Ueber simultane Lösungen zweier linearen partiellen Differentialgleichungen.

Die Aufgabe, die vorgelegte partielle Differentialgleichung $H=h$ zu integriren, ist jetzt darauf zurückgeführt, $n-1$ von einander, sowie von H un-

*) S. elfte Vorlesung No. 3, p. 88.

abhängige Functionen $H_1, H_2, \ldots H_{n-1}$ der Variablen $p_1, p_2, \ldots p_n, q_1, q_2, \ldots q_n$ zu finden, welche die $\frac{n.n-1}{2}$ Bedingungsgleichungen

$$(H_\alpha, H_\beta) = 0$$

(für die Werthe 0, 1, ... $n-1$ der Indices α, β) befriedigen, und die man $n-1$ von einander unabhängigen willkürlichen Constanten h_1, h_2, ... h_{n-1} gleich zu setzen hat. Zwischen irgend einer dieser $n-1$ Functionen, z. B. H_1, und der uns bekannten Function H besteht also die Bedingungsgleichung $(H, H_1) = 0$, d. h. H_1 genügt der linearen partiellen Differentialgleichung

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{\partial H_1}{\partial q_1}+\frac{\partial H}{\partial p_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}+\cdots+\frac{\partial H}{\partial p_n}\frac{\partial H_1}{\partial q_n} \\ -\frac{\partial H}{\partial q_1}\frac{\partial H_1}{\partial p_1}-\frac{\partial H}{\partial q_2}\frac{\partial H_1}{\partial p_2}-\cdots-\frac{\partial H}{\partial q_n}\frac{\partial H_1}{\partial p_n} \end{array}\right\} = 0,$$

oder, was dasselbe ist, $H_1 = h_1$ ist ein Integral des Systems isoperimetrischer Differentialgleichungen *)

$$dq_1 : dq_2 : \ldots : dq_n : dp_1 : dp_2 : \ldots : dp_n = \frac{\partial H}{\partial p_1} : \frac{\partial H}{\partial p_2} : \ldots : \frac{\partial H}{\partial p_n} : -\frac{\partial H}{\partial q_1} : -\frac{\partial H}{\partial q_2} : \ldots : -\frac{\partial H}{\partial q_n},$$

welches für $H = T-U$ in das System der Differentialgleichungen der Mechanik übergeht. Das Nämliche gilt von den Functionen H_2, ... H_{n-1}, welche den analogen Bedingungsgleichungen $(H, H_2) = 0$, ... $(H, H_{n-1}) = 0$ genügen. Sämmtliche $n-1$ Gleichungen

$$H_1 = h_1, \quad H_2 = h_2, \quad \ldots \quad H_{n-1} = h_{n-1}$$

sind daher Integrale des oben aufgestellten Systems isoperimetrischer Differentialgleichungen. Aber diese Bestimmung der Functionen H_1, H_2, ... H_{n-1} ist nicht ausreichend. Durch dieselbe geschieht nur den Bedingungsgleichungen

$$(H, H_1) = 0, \quad (H, H_2) = 0, \quad \ldots \quad (H, H_{n-1}) = 0$$

Genüge, und die übrigen $\frac{n.n-1}{2} - (n-1) = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Bedingungsgleichungen $(H_\alpha, H_\beta) = 0$, welche unter Ausschluss von H zwischen je zweien der $n-1$ Functionen H_1, H_2, ... H_{n-1} bestehen sollen, werden durch die so bestimmten Werthe dieser Functionen nicht befriedigt, es sei denn, dass man die $n-1$ Integrale eigens dazu ausgewählt habe. Wir können nicht einmal a priori wissen, ob für die erste zu suchende Function H_1 ein ganz beliebiges Integral genommen

*) Vgl. p. 150.

werden darf, und ob sich alsdann die übrigen $n-2$ Functionen so bestimmen lassen, dass sie sowohl mit H und mit H_1, als auch unter sich alle jene Bedingungen erfüllen.

Eine genauere Untersuchung zeigt, dass H_1 in der That unter den Integralen ganz willkürlich ausgewählt werden kann, dass H_1 also nur der Bedingung

$$(H, H_1) = 0$$

zu genügen braucht; dass, welche Function H_1 man auch dieser Bedingung entsprechend nehmen mag, es immer eine zweite Function H_2 giebt, welche gleichzeitig die beiden Bedingungen

$$(H, H_2) = 0, \quad (H_1, H_2) = 0$$

erfüllt; dass ferner, welche Function H_2 man auch diesen beiden Bedingungen entsprechend nehmen mag, es immer eine dritte Function H_3 giebt, welche gleichzeitig die drei Bedingungen

$$(H, H_3) = 0, \quad (H_1, H_3) = 0, \quad (H_2, H_3) = 0$$

erfüllt: und dass man in dieser Weise fortzufahren hat, bis alle Functionen H_1, H_2, ... H_{n-1} bestimmt sind.

Wir sehen, dass die vorliegende Untersuchung uns mit Nothwendigkeit zu der Beantwortung der Frage drängt, ob es möglich ist, mehreren linearen partiellen Differentialgleichungen gleichzeitig zu genügen, und welche Kriterien für diese Möglichkeit stattfinden.

Die zu betrachtenden linearen partiellen Differentialgleichungen seien, um die Frage in ihrer grössten Allgemeinheit zu behandeln, von der Form

$$A_0 \frac{\partial f}{\partial x_0} + A_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + A_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0.$$

Wir wollen die linke Seite dieser Gleichung, in welcher A_0, A_1, ... A_n gegebene Functionen von x_0, x_1, ... x_n sind, mit $A(f)$ bezeichnen, so dass wir die Bildung eines solchen Ausdrucks als eine mit der unbekannten Function f vorgenommene Operation ansehen. Es sei also

$$A(f) = A_0 \frac{\partial f}{\partial x_0} + A_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + A_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = \sum_{i=0}^{i=n} A_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

und ebenso

$$B(f) = B_0 \frac{\partial f}{\partial x_0} + B_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + B_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = \sum_{k=0}^{k=n} B_k \frac{\partial f}{\partial x_k}.$$

$A(f)$ und $B(f)$ sind zwei verschiedene Operationen dieser Art, welche man mit der Function f vornehmen kann. Wendet man nach einander beide Operationen an, so ergeben sich, jenachdem man mit der Operation A, oder mit der Operation B beginnt, die beiden Ausdrücke $B(A(f))$ und $A(B(f))$, welche durch die Gleichungen

$$B(A(f)) = \sum_{k=0}^{k=n} B_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \sum_{i=0}^{i=n} A_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\} = \sum_{k=0}^{k=n} \sum_{i=0}^{i=n} B_k A_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{k=0}^{k=n} \sum_{i=0}^{i=n} B_k \frac{\partial A_i}{\partial x_k} \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

$$A(B(f)) = \sum_{i=0}^{i=n} A_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \sum_{k=0}^{k=n} B_k \frac{\partial f}{\partial x_k} \right\} = \sum_{i=0}^{i=n} \sum_{k=0}^{k=n} A_i B_k \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i=0}^{i=n} \sum_{k=0}^{k=n} A_i \frac{\partial B_k}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_k}$$

definirt werden. In beiden Ausdrücken sind im Allgemeinen nur die in Differentialquotienten zweiter Ordnung von f multiplicirten Glieder einander gleich; in der Differenz beider bleiben allein Glieder übrig, welche die ersten Differentialquotienten von f enthalten. Für diese Differenz, welche wir $C(f)$ nennen wollen, ergiebt sich

$$C(f) = B(A(f)) - A(B(f)) = \sum_{k=0}^{k=n} \sum_{i=0}^{i=n} B_k \frac{\partial A_i}{\partial x_k} \frac{\partial f}{\partial x_i} - \sum_{i=0}^{i=n} \sum_{k=0}^{k=n} A_i \frac{\partial B_k}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_k}$$

$$= \sum_{i=0}^{i=n} \left\{ \sum_{k=0}^{k=n} \left(B_k \frac{\partial A_i}{\partial x_k} - A_k \frac{\partial B_i}{\partial x_k} \right) \right\} \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

oder wenn die Bezeichnung

$$C_i = \sum_{k=0}^{k=n} \left(B_k \frac{\partial A_i}{\partial x_k} - A_k \frac{\partial B_i}{\partial x_k} \right) = \begin{cases} B_0 \dfrac{\partial A_i}{\partial x_0} + B_1 \dfrac{\partial A_i}{\partial x_1} + \cdots + B_n \dfrac{\partial A_i}{\partial x_n} \\ - A_0 \dfrac{\partial B_i}{\partial x_0} - A_1 \dfrac{\partial B_i}{\partial x_1} - \cdots - A_n \dfrac{\partial B_i}{\partial x_n} \end{cases}$$

eingeführt wird,

$$C(f) = \sum_{i=0}^{i=n} C_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = C_0 \frac{\partial f}{\partial x_0} + C_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + C_n \frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

Bestehen nun, wie wir in der folgenden Untersuchung annehmen werden, die $n+1$ Gleichungen

$$C_0 = 0, \quad C_1 = 0, \quad . \; . \; . \quad C_n = 0,$$

ist also für die Werthe 0, 1, ... n des Index i die Gleichung

$$C_i = \left\{ \begin{array}{l} B_0 \dfrac{\partial A_i}{\partial x_0} + B_1 \dfrac{\partial A_i}{\partial x_1} + \cdots + B_n \dfrac{\partial A_i}{\partial x_n} \\ - A_0 \dfrac{\partial B_i}{\partial x_0} - A_1 \dfrac{\partial B_i}{\partial x_1} - \cdots - A_n \dfrac{\partial B_i}{\partial x_n} \end{array} \right\} = 0$$

erfüllt, so hat man

$$C(f) = B(A(f)) - A(B(f)) = 0$$

oder

$$B(A(f)) = A(B(f)),$$

d. h. es ist gleichgültig, ob man zuerst die Operation A und dann die Operation B anwendet, oder zuerst die Operation B und dann die Operation A.

Diese Unabhängigkeit des Resultats von der Ordnung, in der die Operationen A und B angewendet werden, ist von grosser Wichtigkeit, denn sie lässt sich auf eine beliebige Anzahl von Wiederholungen beider Operationen ausdehnen. Bezeichnet man mit A^2, A^3, ... A^m die zweimal, dreimal, ... m mal hinter einander angewandte Operation A und ebenso mit B^2, B^3, ... $B^{m'}$ die zweimal, dreimal, ... m' mal hintereinander angewandte Operation B, so folgt aus der Gleichung $B(A(f)) = A(B(f))$ die allgemeinere

$$B^{m'}(A^m(f)) = A^m(B^{m'}(f)).$$

Aus diesem Resultat kann man bei der Untersuchung der beiden linearen partiellen Differentialgleichungen

$$A(f) = 0, \qquad B(f) = 0,$$

wenn dieselben den $n+1$ Bedingungsgleichungen $C_t = 0$ genügen, den grössten Nutzen ziehen, theils um die Lösungen jeder Differentialgleichung einzeln genommen, theils um ihre simultanen Lösungen zu finden. Gesetzt, es sei uns eine Lösung f_1 der Differentialgleichung $A(f) = 0$ bekannt, man habe also identisch

$$A(f_1) = 0,$$

so folgt hieraus

$$B(A(f_1)) = B(0) = 0.$$

Aber da nach unserer Voraussetzung die $n+1$ Bedingungen $C_t = 0$ erfüllt sind, man also die Reihenfolge der Operationen A und B umkehren kann, so geht aus der Gleichung

$$B(A(f_1)) = 0$$

die Gleichung

$$A(B(f_1)) = 0$$

hervor, d. h. $B(f)$ ist ebenfalls eine Lösung von $A(f) = 0$. Nach der Natur dieser Lösung sind drei verschiedene Fälle zu unterscheiden, wobei man sich zu erinnern hat, dass die partielle Differentialgleichung $A(f) = 0$ ausser f_1 noch $n-1$ von einander und von f_1 unabhängige Lösungen $f_2, f_3, \ldots f_n$ und ausserdem die evidente Lösung $f = \text{Const.}$ besitzt. Es kann $B(f_1)$ entweder erstens eine von f_1 unabhängige Lösung f_2 sein, oder zweitens eine Function von f_1, welche auch eine Constante werden kann; drittens aber muss es als ein besonderer Fall hervorgehoben werden, wenn $B(f_1)$ dem constanten Werthe Null gleich gefunden wird. Wir haben also die drei Fälle

$$B(f_1) = f_2, \quad B(f_1) = F(f_1), \quad B(f_1) = 0.$$

Im ersten Fall haben wir aus der Lösung f_1 der partiellen Differentialgleichung $A(f) = 0$ eine zweite Lösung $f_2 = B(f_1)$ gefunden, im dritten Fall haben wir zugleich $A(f_1) = 0$ und $B(f_1) = 0$, d. h. f_1 ist eine simultane Lösung von $A(f) = 0$ und $B(f) = 0$; den zweiten Fall werden wir später behandeln.

Im ersten Fall, wo $B(f_1)$ gleich einer neuen Lösung f_2 ist, kann man auf dieselbe Weise weitergehen. Da nämlich $A(f_2) = 0$ ist, so erhält man $B(A(f_2)) = B(0) = 0$, oder nach Vertauschung der beiden Operationen

$$0 = A(B(f_2)) = A(B^2(f_1)),$$

d. h. $B^2(f_1)$ ist ebenfalls eine Lösung von $A(f) = 0$. Es sind hier wiederum drei Fälle zu unterscheiden, nämlich:

$$B^2(f_1) = f_3, \quad B^2(f_1) = F(f_1, f_2), \quad B^2(f_1) = B(f_2) = 0.$$

Im ersten Falle hat man eine dritte von f_1 und f_2 unabhängige Lösung $f_3 = B^2(f_1)$ von $A(f) = 0$, im dritten Fall ist $f_2 = B(f_1)$ eine simultane Lösung von $A(f) = 0$ und $B(f) = 0$; auf den zweiten Fall, in welchem $B^2(f_2)$ eine Function der früheren Lösungen f_1 und $f_2 = B(f_1)$ ist, die auch in eine nicht verschwindende Constante übergehen kann, werden wir später zurückkommen. Durch wiederholte Anwendung der Operation B entsteht aus der *einen* Lösung f_1 die Reihe von Grössen f_1, $B(f_1)$, $B^2(f_1)$, $B^3(f_1)$, ..., welche sämmtlich der partiellen Differentialgleichung $A(f) = 0$ genügen. Es sind nun entweder die n ersten Grössen dieser Reihe von einander unabhängige Functionen und bilden alsdann ein vollständiges System von Lösungen der Gleichung $A(f) = 0$, oder es wird schon eine jener n Grössen, etwa $B^m(f_1)$, eine Function der vorhergehenden f_1, $B(f_1)$, $B^2(f_1)$, ... $B^{m-1}(f_1)$, welche sich auch auf eine nicht verschwindende Constante oder auf Null reduciren kann.

Der für die Auffindung der Lösungen von $A(f) = 0$ ungünstige Fall, in welchem nicht der ganze Cyclus derselben durchlaufen wird, ist gerade für die Auffindung der simultanen Lösungen von $A(f) = 0$ und $B(f) = 0$ erleichternd.

Die allgemeinste Lösung von $A(f) = 0$ ist eine willkürliche Function ihrer n von einander unabhängigen Lösungen f_1, f_2, ... f_n. Um eine simultane Lösung von $A(f) = 0$ und $B(f) = 0$ zu erhalten, muss diese willkürliche Function von f_1, f_2, ... f_n so bestimmt werden, dass sie auch der Gleichung $B(f) = 0$ genügt. Führen wir zu diesem Behuf in den Ausdruck $B(f)$ für

n der $n+1$ Variablen x_0, x_1, ... x_n z. B. für x_1, x_2, ... x_n die Functionen f_1, f_2, ... f_n als neue Variable ein, und bezeichnen wir die unter dieser neuen Hypothese gebildeten Differentialquotienten von f mit $\left(\frac{\partial f}{\partial x_0}\right)$, $\frac{\partial f}{\partial f_1}$, $\frac{\partial f}{\partial f_2}$, ... $\frac{\partial f}{\partial f_n}$, wo der neue Differentialquotient $\left(\frac{\partial f}{\partial x_0}\right)$ von dem früheren $\frac{\partial f}{\partial x_0}$ völlig verschieden ist, so erhalten wir

$$\frac{\partial f}{\partial x_0} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_0}\right) + \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial f}{\partial f_k}\frac{\partial f_k}{\partial x_0},$$

und, wenn i eine der Zahlen 1 bis n bedeutet,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial f}{\partial f_k}\frac{\partial f_k}{\partial x_i};$$

daher wird

$$\begin{aligned} B(f) &= B_0\left(\frac{\partial f}{\partial x_0}\right) + B_0\sum_{k=1}^{k=n}\frac{\partial f}{\partial f_k}\frac{\partial f_k}{\partial x_0} + \sum_{i=1}^{i=n} B_i \sum_{k=1}^{k=n}\frac{\partial f}{\partial f_k}\frac{\partial f_k}{\partial x_i} \\ &= B_0\left(\frac{\partial f}{\partial x_0}\right) + \sum_{k=1}^{k=n}\left\{\sum_{i=0}^{i=n} B_i\frac{\partial f_k}{\partial x_i}\right\}\frac{\partial f}{\partial f_k} \end{aligned}$$

oder endlich, da $\sum_{i=0}^{i=n} B_i\frac{\partial f_k}{\partial x_i}$ nichts anderes ist als $B(f_k)$,

$$B(f) = B_0\left(\frac{\partial f}{\partial x_0}\right) + \sum_{k=1}^{k=n} B(f_k)\cdot\frac{\partial f}{\partial f_k}.$$

Nun darf f, wenn es eine Lösung von $A(f)=0$ sein soll, nur von den Grössen f_k abhängen, x_0 aber nicht mehr enthalten; also hat man $\left(\frac{\partial f}{\partial x_0}\right)=0$, und die Gleichung $B(f)=0$ reducirt sich auf

$$\sum_{k=1}^{k=n} B(f_k)\frac{\partial f}{\partial f_k} = 0,$$

d. h. auf

$$B(f_1)\frac{\partial f}{\partial f_1} + B(f_2)\frac{\partial f}{\partial f_2} + \cdots + B(f_n)\frac{\partial f}{\partial f_n} = 0.$$

Aber in Folge der von uns vorausgesetzten $n+1$ für $i=0, 1, \ldots n$ stattfindenden Bedingungen

$$C_i = B(A_i) - A(B_i) = 0$$

ist mit der Lösung f_i von $A(f)=0$ gleichzeitig auch $B(f_i)$ eine Lösung von $A(f)=0$, die evidente Lösung $f=\text{Const.}$ mit dazu gerechnet, folglich sind die Grössen $B(f_1)$, $B(f_2)$, ... $B(f_n)$ sämmtlich Lösungen von $A(f)=0$; und da die allgemeinste Lösung von $A(f)=0$ eine willkürliche Function von f_1, f_2, ... f_n ist, so sind $B(f_1)$, $B(f_2)$, ... $B(f_n)$ sämmtlich Functionen der

Grössen $f_1, f_2, \ldots f_n$, folglich ist die Gleichung

$$B(f_1)\frac{\partial f}{\partial f_1}+B(f_2)\frac{\partial f}{\partial f_2}+\cdots+B(f_n)\frac{\partial f}{\partial f_n} = 0$$

eine partielle Differentialgleichung, welche f als Function von $f_1, f_2, \ldots f_n$ definirt. Sie lässt $n-1$ von einander unabhängige Lösungen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{n-1}$ zu, und ihre allgemeinste Lösung, die zugleich die allgemeinste simultane Lösung von $A(f)=0$ und $B(f)=0$ darstellt, ist daher eine willkürliche Function $F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{n-1})$ jener $n-1$ von einander unabhängigen Lösungen. Solche simultane Lösungen existiren hiernach stets, wenn die $n+1$ Bedingungen $C_i=0$ erfüllt sind.

Um nun den Nutzen zu zeigen, den die wiederholte Anwendung der Operation B auf die Lösung f_1 von $A(f)=0$ gewährt, wenn es nicht mehr auf die Bestimmung der allgemeinsten, sondern einer particularen simultanen Lösung von $A(f)=0$ und $B(f)=0$ ankommt, nehme ich an, die Grössen $B(f_1)=f_2$, $B^2(f_1)=f_3, \ldots B^{m-1}(f_1)=f_m$, wo m kleiner oder höchstens gleich n, seien von einander und von f_1 unabhängige Lösungen von $A(f)=0$, dagegen sei $B^m(f_1)$ keine von $f_1, f_2, \ldots f_m$ unabhängige Lösung; dann sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Ist $B^m(f_1)$ gleich einer Function $F(f_1, f_2, \ldots f_m)$ von $f_1, f_2, \ldots f_m$, welche auch in einen constanten nicht verschwindenden Werth übergehen kann, so lässt sich die simultane Lösung von $A(f)=0$ und $B(f)=0$ immer so bestimmen, dass sie nur von $f_1, f_2, \ldots f_m$ abhängt, die übrigen Lösungen $f_{m+1}, f_{m+2}, \ldots f_n$ aber nicht enthält. Denn durch diese Hypothese reducirt sich die obige partielle Differentialgleichung, welche die simultane Lösung f als Function der Grössen $f_1, f_2, \ldots f_n$ definirt, auf die folgende:

$$f_2\frac{\partial f}{\partial f_1}+f_3\frac{\partial f}{\partial f_2}+\cdots+f_m\frac{\partial f}{\partial f_{m-1}}+F(f_1, f_2, \ldots f_m)\frac{\partial f}{\partial f_m} = 0,$$

welche mit dem System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$df_1 : df_2 : \ldots : df_{m-1} : df_m = f_2 : f_3 : \ldots : f_m : F(f_1, f_2, \ldots f_m)$$

übereinkommt. Fügt man diesem System noch die Variable t hinzu, indem man die m gleichen Verhältnisse dem Verhältniss $dt:1$ gleich setzt, so hat man

$$\frac{df_1}{dt}=f_2, \quad \frac{df_2}{dt}=f_3, \quad \ldots \quad \frac{df_{m-1}}{dt}=f_m, \quad \frac{df_m}{dt}=F(f_1, f_2, \ldots f_m)$$

oder

$$f_2=\frac{df_1}{dt}, \quad f_3=\frac{d^2f_1}{dt^2}, \quad \ldots \quad f_m=\frac{d^{m-1}f_1}{dt^{m-1}}, \quad \frac{df_m}{dt}=\frac{d^mf_1}{dt^m},$$

und demzufolge

$$\frac{d^m f_1}{dt^m} = F\left(f_1, \frac{df_1}{dt}, \ldots \frac{d^{m-1} f_1}{dt^{m-1}}\right).$$

Ist nun $\varphi_1 = \text{Const.}$ irgend ein von t freies Integral dieser Differentialgleichung m^{ter} Ordnung, so ist $f = \varphi_1$ eine simultane Lösung von $A(f) = 0$ und $B(f) = 0$.

2. Ist $B^m(f_1) = 0$, so hat man $0 = B(B^{m-1}(f_1)) = B(f_m)$ und $0 = A(f_m)$: also ist $f_m = B^{m-1}(f_1)$ eine simultane Lösung von $A(f) = 0$ und $B(f) = 0$.

Das unter 1. erhaltene Resultat erleidet eine Ausnahme für $m = 1$, d. h. wenn bereits $B(f_1)$ sich auf eine Function von f_1 oder auf eine von Null verschiedene Constante reducirt, was man schon daraus sieht, dass die Differentialgleichung zwischen f_1 und t alsdann erster Ordnung ist, also kein von t freies Integral besitzt. Die partielle Differentialgleichung, welche f als Function von $f_1, f_2, \ldots f_m$ definirt, geht alsdann in

$$\frac{\partial f}{\partial f_1} = 0$$

über und giebt die evidente Lösung $f = \text{Const.}$, welche unbrauchbar ist. In diesem Falle kann man aus der Lösung f_1 allein gar keinen Nutzen ziehen, sondern es ist nöthig, eine neue Lösung f_2 der Gleichung $A(f) = 0$ zu kennen. Wendet man auf f_2 die Operation B an, wie früher auf f_1, und ist $B(f_2)$ nicht Function von f_2 allein, so ergiebt sich nach dem obigen Verfahren aus f_2 eine simultane Lösung von $A(f) = 0$ und $B(f) = 0$. Ist dagegen $B(f_2)$ Function von f_2 allein, so dass eine simultane Lösung auch aus f_2 allein nicht gefunden werden kann, so findet man eine solche dennoch durch gleichzeitige Benutzung von f_1 und f_2. Ist nämlich

$$B(f_1) = \Phi(f_1), \qquad B(f_2) = \Psi(f_2),$$

so kann man annehmen, dass f Function von f_1 und f_2 allein ist, und erhält zur Bestimmung dieser Function die partielle Differentialgleichung

$$\Phi(f_1) \cdot \frac{\partial f}{\partial f_1} + \Psi(f_2) \cdot \frac{\partial f}{\partial f_2} = 0,$$

welche auf die gewöhnliche Differentialgleichung

$$df_1 : df_2 = \Phi(f_1) : \Psi(f_2)$$

führt und den Ausdruck

$$f = \int \frac{df_1}{\Phi(f_1)} - \int \frac{df_2}{\Psi(f_2)}$$

als die gesuchte simultane Lösung giebt.

Vierunddreissigste Vorlesung.

Anwendung der vorhergehenden Untersuchung auf die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung und ins Besondere auf den Fall der Mechanik. Satz über das aus zwei gegebenen Integralen der dynamischen Differentialgleichungen herzuleitende dritte Integral.

Um die Ergebnisse der in der vorigen Vorlesung angestellten Untersuchung über simultane Lösungen linearer partieller Differentialgleichungen auf den Fall anzuwenden, der uns zu dieser Untersuchung veranlasste, und auf den wir bei der Integration der partiellen Differentialgleichung $H=h$ (p. 255 ff.) stiessen, wollen wir zunächst die $n+1$ unabhängigen Variablen x_0, x_1, ... x_n durch eine gerade Anzahl $2n$ von Variablen x_1, x_2, ... x_{2n} ersetzen, deren Indices wir mit 1 anstatt mit 0 beginnen lassen, so dass die Ausdrücke $A(f)$, $B(f)$ jetzt durch die Gleichungen

$$A(f) = A_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+A_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+\cdots+A_{2n}\frac{\partial f}{\partial x_{2n}},$$

$$B(f) = B_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+B_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+\cdots+B_{2n}\frac{\partial f}{\partial x_{2n}}$$

definirt werden, und die $2n$ Bedingungsgleichungen

$$C_i = B(A_i)-A(B_i) = 0$$

für $i=1, 2, \ldots 2n$ bestehen. Ferner mögen an die Stelle der $2n$ unabhängigen Variablen die Grössen p und q treten, so dass

$$x_1=q_1,\quad x_2=q_2,\quad \ldots\quad x_n=q_n,\quad x_{n+1}=p_1,\quad x_{n+2}=p_2,\quad \ldots\quad x_{2n}=p_n$$

wird, und endlich seien die Coefficienten A_i, B_i durch die Gleichungen

$$A_1=\frac{\partial\varphi}{\partial p_1},\; A_2=\frac{\partial\varphi}{\partial p_2}, \ldots A_n=\frac{\partial\varphi}{\partial p_n};\; A_{n+1}=-\frac{\partial\varphi}{\partial q_1},\; A_{n+2}=-\frac{\partial\varphi}{\partial q_2}, \ldots A_{2n}=-\frac{\partial\varphi}{\partial q_n},$$

$$B_1=\frac{\partial\psi}{\partial p_1},\; B_2=\frac{\partial\psi}{\partial p_2}, \ldots B_n=\frac{\partial\psi}{\partial p_n};\; B_{n+1}=-\frac{\partial\psi}{\partial q_1},\; B_{n+2}=-\frac{\partial\psi}{\partial q_2}, \ldots B_{2n}=-\frac{\partial\psi}{\partial q_n}$$

bestimmt.

Alsdann erhalten wir

$$A(f) = \frac{\partial\varphi}{\partial p_1}\frac{\partial f}{\partial q_1}+\frac{\partial\varphi}{\partial p_2}\frac{\partial f}{\partial q_2}+\cdots+\frac{\partial\varphi}{\partial p_n}\frac{\partial f}{\partial q_n}-\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\frac{\partial f}{\partial p_1}-\frac{\partial\varphi}{\partial q_2}\frac{\partial f}{\partial p_2}-\cdots-\frac{\partial\varphi}{\partial q_n}\frac{\partial f}{\partial p_n},$$

$$B(f) = \frac{\partial\psi}{\partial p_1}\frac{\partial f}{\partial q_1}+\frac{\partial\psi}{\partial p_2}\frac{\partial f}{\partial q_2}+\cdots+\frac{\partial\psi}{\partial p_n}\frac{\partial f}{\partial q_n}-\frac{\partial\psi}{\partial q_1}\frac{\partial f}{\partial p_1}-\frac{\partial\psi}{\partial q_2}\frac{\partial f}{\partial p_2}-\cdots-\frac{\partial\psi}{\partial q_n}\frac{\partial f}{\partial p_n},$$

oder nach der in der zweiunddreissigsten Vorlesung (p. 251) eingeführten

Bezeichnung

$$A(f) = (\varphi, f),$$
$$B(f) = (\psi, f).$$

Um die Werthe der $2n$ Grössen C_i für $i = 1, 2, \dots 2n$ zu erhalten, theilen wir dieselben in die beiden Gruppen C_i und C_{n+i} für $i = 1, 2, \dots n$; dann ergiebt sich

$$C_i \;\;\; = B(A_i) \;\; - A(B_i) \;\;\; = \left(\psi, \;\; \frac{\partial \varphi}{\partial p_i}\right) - \left(\varphi, \;\; \frac{\partial \psi}{\partial p_i}\right),$$
$$C_{n+i} = B(A_{n+i}) - A(B_{n+i}) = \left(\psi, -\frac{\partial \varphi}{\partial q_i}\right) - \left(\varphi, -\frac{\partial \psi}{\partial q_i}\right),$$

oder wenn man die Identität

$$(\psi, \varphi) = -(\varphi, \psi) = (\varphi, -\psi)$$

berücksichtigt,

$$-C_i \;\; = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p_i}, \psi\right) + \left(\varphi, \frac{\partial \psi}{\partial p_i}\right),$$
$$C_{n+i} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_i}, \psi\right) + \left(\varphi, \frac{\partial \psi}{\partial q_i}\right).$$

Aber da der Ausdruck (φ, ψ) eine lineare Function sowohl der Differentialquotienten von φ, als der Differentialquotienten von ψ ist, so sind die rechten Seiten dieser Gleichungen nichts Anderes als die nach p_i und q_i genommenen Ableitungen von (φ, ψ): es ist also

$$C_i \;\; = -\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial p_i},$$
$$C_{n+i} = \;\;\; \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial q_i},$$

und die sämmtlichen $2n$ Bedingungsgleichungen $C_i = 0$, $C_{n+i} = 0$ für $i = 1, 2, \dots n$ sind erfüllt, sobald identisch

$$(\varphi, \psi) = 0,$$

d. h. sobald $f = \psi$ eine Lösung der linearen partiellen Differentialgleichung $A(f) = (\varphi, f) = 0$ ist. Wenn diese eine Bedingungsgleichung

$$(\varphi, \psi) = 0$$

befriedigt wird, existiren also stets simultane Lösungen der Gleichungen

$$(\varphi, f) = 0, \quad (\psi, f) = 0,$$

und man kann zu ihrer Bestimmung die Ergebnisse der vorigen Vorlesung benutzen.

Hiermit ist die am Anfange der nämlichen Vorlesung aufgestellte Behauptung bewiesen, wonach man, wenn H_1 irgend eine der Bedingung $(H, H_1)=0$ genügende Function bedeutet, immer eine zweite Function H_2 bestimmen kann, welche den beiden Bedingungen $(H, H_2)=0$, $(H_1, H_2)=0$ gleichzeitig genügt; und zwar geben die Untersuchungen der vorigen Vorlesung nicht nur den Beweis für die Existenz, sondern auch die Mittel zur Bestimmung von H_2. Die weitere Verfolgung jener Untersuchungen giebt alsdann unter Voraussetzung der soeben definirten Functionen H_1, H_2 die Mittel zur Bestimmung der neuen Function H_3, welche gleichzeitig den drei Bedingungen $(H, H_3)=0$, $(H_1, H_3)=0$, $(H_2, H_3)=0$ genügt, u. s. w.

Aber in der vorigen Vorlesung haben wir nicht nur simultane Lösungen zweier linearen partiellen Differentialgleichungen $A(f)=0$, $B(f)=0$, welche den Bedingungen $C_\iota = B(A_\iota) - A(B_\iota) = 0$ genügen, bestimmt, sondern, was nicht minder wichtig ist, aus *einer* Lösung f_1 von $A(f)=0$ durch wiederholte Anwendung der Operation B eine Reihe neuer Lösungen $B(f_1)=f_2$, $B(f_2)=f_3$, ... $B(f_{m-1})=f_m$ hergeleitet, bis die nochmalige Wiederholung auf eine Lösung $B(f_m)=f_{m+1}$ führte, welche eine Function $F(f_1, f_2, \ldots f_m)$ der früheren oder eine Constante ist, insbesondere auch gleich Null werden kann.

Indem wir auch hiervon Anwendung auf den vorliegenden Fall machen, tritt indessen eine Modification ein, welche auf folgendem Umstande beruht. Im Allgemeinen besitzt $A(f)=0$ nur die eine evidente Lösung $f=$ Const., und überdies ist uns nach der Hypothese, von welcher wir ausgingen, nur die Lösung $f=f_1$ bekannt. In dem besonderen Fall aber, wo $A(f)=(\varphi, f)$, $B(f)=(\psi, f)$ wird, während die Bedingungsgleichungen $C_i=0$ durch die identische Gleichung $(\varphi, \psi)=0$ erfüllt werden, kennen wir, wenn $f=f_1$ eine Lösung von $(\varphi, f)=0$ ist, schon von Hause aus ausser f_1 eine zweite Lösung ψ, und überdies kommt zu der allgemeinen evidenten Lösung $f=$ Const. gegenwärtig noch die besondere $f=\varphi$ hinzu. Hier ist daher f_{m+1} auch dann keine neue Lösung, wenn es einer Function $F(\varphi, \psi, f_1, f_2, \ldots f_m)$ gleich wird, die ausser f_1, f_2, ... f_m noch überdies φ und ψ enthält. Mit Rücksicht hierauf, und wenn wir den Fall, wo die Function F sich auf eine Constante oder diese auf Null reducirt, nicht ausdrücklich erwähnen, sondern unter der Bezeichnung $F(\varphi, \psi, f_1, f_2, \ldots f_m)$ mit begreifen, erhalten wir das Resultat:

Ist f_1 eine Lösung der f definirenden linearen partiellen Differentialgleichung $(\varphi, f)=0$, und wird die Bedingungsgleichung $(\varphi, \psi)=0$ erfüllt, so ist $(\psi, f_1)=f_2$ wiederum eine Lösung von $(\varphi, f)=0$, und zwar im Allgemeinen eine neue Lösung, in besonderen Fällen kann es aber eine Function $F(\varphi, \psi, f_1)$ von ψ, f_1 und der evidenten Lösung φ werden. Indem man so fortfährt und $(\psi, f_2) = f_3$, $(\psi, f_3) = f_4$, ... $(\psi, f_{m-1}) = f_m$, $(\psi, f_m) = f_{m+1}$ setzt, wird man im Allgemeinen lauter neue Lösungen f_3, f_4, ... f_m von $(\varphi, f) = 0$ erhalten, bis f_{m+1} eine Function $F(\varphi, \psi, f_1, f_2, \ldots f_m)$ der schon vorher bekannten ψ, f_1, f_2, ... f_m und der evidenten Lösung φ wird.

Lässt man nun die Function φ mit der Function H zusammenfallen, welche die linke Seite der partiellen Differentialgleichung $H = h$ bildet, so ist es zweckmässig, auch die übrige Bezeichnung zu ändern. Man setze $\varphi = H$, $\psi = H_1$, $f_1 = H_2$, $f_2 = H_3$, u. s. w., und das obige Resultat lautet:

Sind die Gleichungen $(H, H_1) = 0$ und $(H, H_2) = 0$ erfüllt, d. h. sind H_1 und H_2 Lösungen der H_i definirenden linearen partiellen Differentialgleichung $(H, H_i) = 0$, so ist $(H_1, H_2) = H_3$ ebenfalls eine Lösung dieser Differentialgleichung, und zwar im Allgemeinen eine neue Lösung, in besonderen Fällen indessen kann H_3 eine Function von H, H_1, H_2 werden. Indem man mit dieser Operation fortfährt und $(H_1, H_3) = H_4$, $(H_1, H_4) = H_5$, ... $(H_1, H_{m-1}) = H_m$, $(H_1, H_m) = H_{m+1}$ setzt, wird man im Allgemeinen lauter neue Lösungen H_4, H_5, ... H_m von $(H, H_i) = 0$ erhalten *), bis H_{m+1} eine Function der bereits bekannten H, H_1, ... H_m, die evidente Lösung H mit einbegriffen, wird.

Aber, wie wir wissen, ist es von gleicher Bedeutung, ob wir sagen, H_1 sei eine Lösung der H_i definirenden linearen partiellen Differentialgleichung $(H, H_i) = 0$, d. h. der Gleichung

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{\partial H}{\partial p_1}\dfrac{\partial H_i}{\partial q_1} + \dfrac{\partial H}{\partial p_2}\dfrac{\partial H_i}{\partial q_2} + \cdots + \dfrac{\partial H}{\partial p_n}\dfrac{\partial H_i}{\partial q_n} \\ - \dfrac{\partial H}{\partial q_1}\dfrac{\partial H_i}{\partial p_1} - \dfrac{\partial H}{\partial q_2}\dfrac{\partial H_i}{\partial p_2} - \cdots - \dfrac{\partial H}{\partial q_n}\dfrac{\partial H_i}{\partial p_n} \end{array}\right\} = 0,$$

oder ob wir sagen H_1, einer willkürlichen Constante h_1 gleich gesetzt, sei ein Integral des Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$dq_1 : dq_2 : \ldots : dq_n : dp_1 : dp_2 : \ldots : dp_n$$
$$= \frac{\partial H}{\partial p_1} : \frac{\partial H}{\partial p_2} : \ldots : \frac{\partial H}{\partial p_n} : -\frac{\partial H}{\partial q_1} : -\frac{\partial H}{\partial q_2} : \ldots : -\frac{\partial H}{\partial q_n},$$

d. h. ein von t freies Integral des Systems isoperimetrischer Differential-

---

*) Es ist nicht zu übersehen, dass die Grössen H_1, H_2, H_3, ... hier irgend welche Lösungen der Gleichung $(H, H_i) = 0$ bedeuten und nicht das specielle System derjenigen Lösungen, welche, Constanten gleich gesetzt, die zur vollständigen Lösung der partiellen Differentialgleichung $H = h$ führenden Gleichungen bilden. (S. zweiunddreissigste Vorlesung p. 250.)

gleichungen

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1}, \quad \frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_2}, \quad \ldots \quad \frac{dq_n}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_n},$$
$$\frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \quad \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_2}, \quad \ldots \quad \frac{dp_n}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_n},$$

welche, wenn man $H = T - U$ setzt, wo T die halbe lebendige Kraft, U die Kräftefunction bedeutet, in das System der Differentialgleichungen der Bewegung übergehen. Wir können daher das gewonnene Resultat in folgendem Satz aussprechen:

Das System der isoperimetrischen Differentialgleichungen

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1}, \quad \frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_2}, \quad \ldots \quad \frac{dq_n}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_n},$$
$$\frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \quad \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_2}, \quad \ldots \quad \frac{dp_n}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_n},$$

in welchem H eine Function der Variablen $q_1, q_2, \ldots q_n, p_1, p_2, \ldots p_n$ ohne t bedeutet, und welches für $H = T - U$ in das System der Dynamik übergeht, sei vorgelegt. Kennt man zwei von t freie Integrale $H_1 = h_1$, $H_2 = h_2$ dieses Systems, und bildet man den Ausdruck

$$H_3 = (H_1, H_2) = \begin{cases} \dfrac{\partial H_1}{\partial p_1}\dfrac{\partial H_2}{\partial q_1} + \dfrac{\partial H_1}{\partial p_2}\dfrac{\partial H_2}{\partial q_2} + \cdots + \dfrac{\partial H_1}{\partial p_n}\dfrac{\partial H_2}{\partial q_n} \\ -\dfrac{\partial H_2}{\partial p_1}\dfrac{\partial H_1}{\partial q_1} - \dfrac{\partial H_2}{\partial p_2}\dfrac{\partial H_1}{\partial q_2} - \cdots - \dfrac{\partial H_2}{\partial p_n}\dfrac{\partial H_1}{\partial q_n}, \end{cases}$$

so ist

$$H_3 = h_3,$$

wo h_3 eine dritte willkürliche Constante bedeutet, im Allgemeinen ein neues Integral des Systems. In besonderen Fällen kann H_3 eine Function von H, H_1, H_2 sein, oder ein constanter Zahlenwerth, und dieser auch gleich Null: in diesen Fällen ist $H_3 = h_3$ kein neues Integral, sondern eine Gleichung, welche unter Voraussetzung der früheren Integrale $H_1 = h_1$, $H_2 = h_2$ und des evidenten Integrals $H = h$ identisch erfüllt wird. Fährt man mit dieser Operation fort und bildet aus H_1 und H_3 oder H_2 und H_3 den Ausdruck (H_1, H_3) oder (H_2, H_3), so giebt dieser, gleich einer Constante gesetzt, im Allgemeinen wieder ein neues Integral u. s. w.

Dies ist einer der merkwürdigsten Sätze der ganzen Integralrechnung und für den besonderen Fall, in welchem man $H = T - U$ setzt, ein Fundamentalsatz der analytischen Mechanik. Er zeigt nämlich, dass, wenn der Satz der lebendigen Kraft gilt, man aus zwei Integralen der Differentialgleichungen der Bewegung im Allgemeinen durch blosses Differentiiren ein drittes, hieraus ein viertes, etc. ableiten kann, so dass man entweder alle Integrale erhält, oder doch wenigstens eine Anzahl derselben.

Als ich diesen Satz gefunden hatte, machte ich den Akademien zu Berlin und Paris davon, als von einer ganz neuen Entdeckung, Anzeige. Aber bald darauf bemerkte ich, dass dieser Satz seit 30 Jahren schon zugleich entdeckt und verborgen war, da man seinen wahren Sinn nicht geahnt, sondern ihn nur bei einem ganz anderen Problem als Hülfssatz gebraucht hatte.

Wenn man nämlich die Integralgleichungen als gefunden annimmt und nun neue kleine Kräfte hinzutreten lässt, welche die Bewegung modificiren, oder mit anderen Worten, wenn man sich mit dem Problem der Störungen beschäftigt und dasselbe so behandelt, dass man die hinzuzufügenden Correctionen nach der Zeit t entwickelt, so werden, wie *Lagrange* und *Laplace* gefunden haben, gewisse Ausdrücke von der Zeit unabhängig, ein Resultat, welches zu den grössten Entdeckungen der genannten Geometer gehört. *Poisson*, der die Untersuchung etwas anders anordnete, fand, dass die von t unabhängigen Ausdrücke genau von der Form (H_i, H_k) seien. Dieser *Poisson*sche Satz war wegen der Schwierigkeit seines Beweises berühmt; aber man legte so wenig Werth auf denselben, dass *Lagrange* ihn nicht einmal in die zweite Ausgabe der Mécanique analytique aufnahm, sondern *seine* Formeln als die einfacheren vorzog. Und dennoch kommt der *Poisson*sche Satz im Wesentlichen mit dem oben ausgesprochenen überein. Denn wenn jene Ausdrücke (H_i, H_k), welche bei *Poisson* als Coefficienten in der Störungsfunction auftreten, unabhängig von der Zeit sind, so müssen es Functionen sein, welche im ungestörten Problem Constanten gleich werden. Aber diese Bemerkung war vorher den Geometern entgangen, und es bedurfte in der That einer neuen Entdeckung, um den Satz in seiner wahren Bedeutung hervortreten zu lassen.

Dass dieser Satz, seit so langer Zeit entdeckt, Niemand zum Bewusstsein gekommen ist, dazu hat ein eigenthümlicher Umstand beigetragen. Die Fälle, in welchen man denselben anwandte, waren nämlich gerade solche, in welchen der neugebildete Ausdruck kein neues Integral gab, sondern wo der resultirende Ausdruck identisch gleich Null oder gleich einer von Null verschiedenen Zahl, etwa $= 1$, wurde. Und diese Fälle, welche in der allgemeinen Theorie als Ausnahmsfälle erscheinen, sind überhaupt in der Praxis sehr häufig. Damit nämlich ein Integral mit irgend einem zweiten combinirt nach und nach alle Integrale liefere, muss es ein solches Integral sein, welches dem besonderen Problem eigenthümlich angehört. Aber die ersten Integrale, welche für ein vorgelegtes Problem gefunden werden, sind in der Regel diejenigen, welche aus den allgemeinen Principen (z. B. der Erhaltung der Flächen) folgen, mithin dem besonderen Problem nicht eigenthümlich angehören: daher kann man nicht verlangen, dass man aus ihnen alle Integrale des Problems soll herleiten können.

Wir sehen, dass eine gewisse Polarität, d. h. eine qualitative Verschiedenheit unter den Integralen besteht. Früher kannte man dieselbe nicht, jedes Integral galt für gleich viel werth, und der einzige Nutzen, den man daraus zu ziehen vermochte, war, die Ordnung des gegebenen Systems um eine Einheit zu erniedrigen. Jetzt aber sehen wir, dass es gewisse Integrale $H_1 = h_1$ und $H_2 = h_2$ giebt, aus denen man alle übrigen ohne Weiteres herleiten kann. Und dies ist sogar der allgemeine Fall. Stellen nämlich die Gleichungen $H_1 = h_1$, $H_2 = h_2$, ... $H_m = h_m$ sämmtliche Integrale dar, und bildet man aus den linken Seiten derselben nach Willkür eine Function

$$F(H_1, H_2, \ldots H_m) = H_{m+1},$$

welche vorher gegeben sein kann, so wird man in einer unendlich überwiegenden Mehrzahl von Fällen aus H_{m+1} und einem der gegebenen Integrale, z. B. aus H_{m+1} und H_1, alle Integrale herleiten können, und dies ist der allgemeine Fall, da H_{m+1} einer willkürlichen Constante gleich gesetzt die allgemeinste Form eines Integrals darstellt. Die ersten Integrale, die man von einem Problem findet, sind aber in der Regel nicht, wie H_{m+1}, zusammengesetzt aus denjenigen, welche dem Problem specifisch angehören und aus den generellen, welche sich als Folge der allgemeinen Principe ergeben, sondern die ersten Integrale sind gewöhnlich *nur* die von generellem Habitus, und daher erhält man aus ihnen nicht die sämmtlichen Integrale des Problems.

Die Anwendung des allgemeinen Theorems auf die freie Bewegung giebt den Satz:

Kennt man zwei von t freie Integrale $\varphi = h_1$ und $\psi = h_2$ des Systems

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \qquad m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \qquad m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z_i},$$

und bildet man den Ausdruck

$$(\varphi, \psi) = \Sigma \frac{1}{m_i} \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial \varphi}{\partial x_i'} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y_i'} \frac{\partial \psi}{\partial y_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial z_i'} \frac{\partial \psi}{\partial z_i} \\ &- \frac{\partial \psi}{\partial x_i'} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \frac{\partial \psi}{\partial y_i'} \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} - \frac{\partial \psi}{\partial z_i'} \frac{\partial \varphi}{\partial z_i} \end{aligned} \right\},$$

so ist im Allgemeinen

$$(\varphi, \psi) = h_3$$

ein neues Integral; in besonderen Fällen kann aber auch (φ, ψ) *eine Function der Constanten* h_1, h_2 *und der im Satz der lebendigen Kraft* $T - U = h$ *vorkommenden Constante* h *oder ein reiner Zahlenwerth und dieser gleich Null werden.*

Auf diese Weise kann man aus zweien der Flächensätze den dritten herleiten. Hierzu haben wir nur

$$\varphi = \Sigma m_i(x_i y_i' - y_i x_i'), \qquad \psi = \Sigma m_i(x_i z_i' - z_i x_i)$$

zu setzen, alsdann wird

$$\begin{array}{lll}
\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i} = m_i y_i', & \dfrac{\partial \varphi}{\partial y_i} = -m_i x_i', & \dfrac{\partial \varphi}{\partial z_i} = 0, \\[2ex]
\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i'} = -m_i y_i, & \dfrac{\partial \varphi}{\partial y_i'} = m_i x_i, & \dfrac{\partial \varphi}{\partial z_i'} = 0, \\[2ex]
\dfrac{\partial \psi}{\partial x_i} = m_i z_i', & \dfrac{\partial \psi}{\partial y_i} = 0, & \dfrac{\partial \psi}{\partial z_i} = -m_i x_i', \\[2ex]
\dfrac{\partial \psi}{\partial x_i'} = -m_i z_i, & \dfrac{\partial \psi}{\partial y_i'} = 0, & \dfrac{\partial \psi}{\partial z_i'} = m_i x_i,
\end{array}$$

daher

$$(\varphi, \psi) = \Sigma m_i(y_i' z_i - y_i z_i');$$

also ist

$$(\varphi, \psi) = h_3$$

der dritte Flächensatz.

Poisson macht in seiner berühmten Abhandlung über die Variation der Constanten im 15[ten] Hefte des Journals der polytechnischen Schule eine Anwendung seines oben erwähnten Störungstheorems auf die Störungen der Rotationsbewegung um einen festen Punkt. Hierbei wird er genöthigt, dieselben Rechnungsoperationen vorzunehmen, welche wir soeben gemacht haben. Daher ist in seinen Rechnungen die Herleitung des dritten Flächensatzes aus den beiden anderen enthalten; aber er erwähnt dies merkwürdige Resultat mit keiner Sylbe.

Aehnliche Betrachtungen kann man anstellen, wenn man zu den drei Flächensätzen die drei Gleichungen des Princips der Erhaltung des Schwerpunkts hinzufügt und untersucht, aus wie vielen dieser 6 Integrale sich die übrigen ergeben.

Fünfunddreissigste Vorlesung.

Die beiden Classen von Integralen, welche man nach der *Hamilton*schen Methode für die mechanischen Probleme erhält. Bestimmung der Werthe von (φ, ψ) für dieselben.

Wenn von dem System der Differentialgleichungen

$$1.)\quad dt:dq_1:dq_2:\ldots:dq_n:dp_1:dp_2:\ldots:dp_n = 1:\frac{\partial H}{\partial p_1}:\frac{\partial H}{\partial p_2}:\ldots:\frac{\partial H}{\partial p_n}:-\frac{\partial H}{\partial q_1}:-\frac{\partial H}{\partial q_2}:\ldots:-\frac{\partial H}{\partial q_n},$$

welches das evidente Integral $H = h$ besitzt, zwei von t freie Integrale $H_1 = h_1$ und $H_2 = h_2$ gegeben sind, so kann man zwar, wie wir gesehen haben, im Allgemeinen a priori nicht mit Bestimmtheit sagen, ob (H_1, H_2), einer willkürlichen Constante gleich gesetzt, ein neues Integral ist, oder ob sich (H_1, H_2) auf eine von h, h_1 und h_2 abhängige Constante oder auf eine reine Zahl und endlich diese auf Null reducirt. Diese Frage lässt sich aber vollkommen entscheiden, wenn $H_1 = h_1$ und $H_2 = h_2$ Integrale sind, welche zu dem durch die *Hamilton*sche partielle Differentialgleichung gelieferten System gehören. Wir werden nämlich sehen, dass, wenn $\varphi =$ Const. und $\psi =$ Const. zwei von den *Hamilton*schen Integralen sind, (φ, ψ) entweder $= 0$, oder $= \pm 1$ wird. Zwei Integrale dieses Systems geben also nie ein neues Integral. Um diesen Satz zu beweisen, bedürfen wir eines Hülfssatzes, welcher zeigt, was aus dem Ausdruck (φ, ψ) wird, wenn in φ und ψ ausser den Grössen q_1, q_2, ... q_n, p_1, p_2, ... p_n, noch m Grössen ϖ_1, ϖ_2, ... ϖ_k, ... ϖ_m vorkommen, welche Functionen von q_1, q_2, ... q_n und p_1, p_2, ... p_n sind. In diesem Fall kann man sowohl die nach den Variablen p und q genommenen Differentialquotienten von φ und ψ, als auch den Ausdruck (φ, ψ) in zwei verschiedenen Weisen bilden, je nachdem man auf das Vorkommen der Variablen p und q in ϖ_1, ϖ_2, ... ϖ_m Rücksicht nimmt, oder nicht. Bezeichnen wir diesen beiden Bildungsweisen gemäss die Differentialquotienten von φ und ψ mit oder ohne Klammern und den aus φ und ψ gebildeten Ausdruck mit doppelten Klammern $((\varphi, \psi))$ oder mit einfachen Klammern (φ, ψ), so ist

$$(2.)\qquad ((\varphi, \psi)) = \sum_i \left\{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial p_i}\right)\left(\frac{\partial \psi}{\partial q_i}\right) - \left(\frac{\partial \psi}{\partial p_i}\right)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_i}\right)\right\},$$

$$(3.)\qquad (\varphi, \psi) = \sum_i \left\{\frac{\partial \varphi}{\partial p_i}\frac{\partial \psi}{\partial q_i} - \frac{\partial \psi}{\partial p_i}\frac{\partial \varphi}{\partial q_i}\right\}.$$

Die nach i genommenen Summen erstrecken sich auf die Werthe $1, 2, \ldots n$, und für die eingeklammerten Differentialquotienten in (2.) gelten die Gleichungen

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p_i}\right)=\frac{\partial\varphi}{\partial p_i}+\sum_k\frac{\partial\varphi}{\partial\varpi_k}\frac{\partial\varpi_k}{\partial p_i},\quad \left(\frac{\partial\psi}{\partial p_i}\right)=\frac{\partial\psi}{\partial p_i}+\sum_{k'}\frac{\partial\psi}{\partial\varpi_{k'}}\frac{\partial\varpi_{k'}}{\partial p_i},$$

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}\right)=\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}+\sum_k\frac{\partial\varphi}{\partial\varpi_k}\frac{\partial\varpi_k}{\partial q_i},\quad \left(\frac{\partial\psi}{\partial q_i}\right)=\frac{\partial\psi}{\partial q_i}+\sum_{k'}\frac{\partial\psi}{\partial\varpi_{k'}}\frac{\partial\varpi_{k'}}{\partial q_i},$$

in welchen die Summen nach k und k' von 1 bis m zu nehmen sind. Wenn man diese Ausdrücke in (2.) substituirt, so erhält man als Resultat eine einfache Summe nach i, eine doppelte Summe nach i und k (oder k') und eine dreifache Summe nach i, k und k'. Es wird nämlich

$$\begin{aligned}((\varphi,\psi)) = {} & \sum_i\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p_i}\frac{\partial\psi}{\partial q_i}-\frac{\partial\psi}{\partial p_i}\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}\right)\\ & +\sum_i\sum_{k'}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p_i}\frac{\partial\psi}{\partial\varpi_{k'}}\frac{\partial\varpi_{k'}}{\partial q_i}-\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}\frac{\partial\psi}{\partial\varpi_{k'}}\frac{\partial\varpi_{k'}}{\partial p_i}\right)-\sum_i\sum_k\left(\frac{\partial\psi}{\partial p_i}\frac{\partial\varphi}{\partial\varpi_k}\frac{\partial\varpi_k}{\partial q_i}-\frac{\partial\psi}{\partial q_i}\frac{\partial\varphi}{\partial\varpi_k}\frac{\partial\varpi_k}{\partial p_i}\right)\\ & +\sum_i\sum_k\sum_{k'}\frac{\partial\varphi}{\partial\varpi_k}\frac{\partial\psi}{\partial\varpi_{k'}}\left(\frac{\partial\varpi_k}{\partial p_i}\frac{\partial\varpi_{k'}}{\partial q_i}-\frac{\partial\varpi_{k'}}{\partial p_i}\frac{\partial\varpi_k}{\partial q_i}\right),\end{aligned}$$

oder wenn man in den doppelten und dreifachen Summen die Ordnung der Summationen umkehrt und die in (3.) gegebene Definition der in einfache Klammern eingeschlossenen Ausdrücke von der Form (φ,ψ) berücksichtigt,

$$\begin{aligned}((\varphi,\psi)) = {} & (\varphi,\psi)\\ & +\sum_{k'}\frac{\partial\psi}{\partial\varpi_{k'}}(\varphi,\varpi_{k'})-\sum_k\frac{\partial\varphi}{\partial\varpi_k}(\psi,\varpi_k)\\ & +\sum_k\sum_{k'}\frac{\partial\varphi}{\partial\varpi_k}\frac{\partial\psi}{\partial\varpi_{k'}}(\varpi_k,\varpi_{k'}).\end{aligned}$$

Da die Summationen nach k und k' auf dieselben Werthe 1 bis m ausgedehnt werden, so kann man in der ersten Summe der zweiten Zeile k statt k' schreiben. In der dritten Zeile verschwinden die Glieder, für welche die Werthe von k und k' zusammenfallen, wegen des Factors $(\varpi_k,\varpi_{k'})$; von den übrigen Gliedern kann man je zwei in eins zusammenziehen, da $(\varpi_{k'},\varpi_k)=-(\varpi_k,\varpi_{k'})$ ist. Daher braucht man die Summe nur auf die Combinationen je zweier von einander verschiedenen Werthe k, k' zu beziehen und erhält dann $(\varpi_k,\varpi_{k'})$ in $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\varpi_k}\frac{\partial\psi}{\partial\varpi_{k'}}-\frac{\partial\psi}{\partial\varpi_k}\frac{\partial\varphi}{\partial\varpi_{k'}}\right)$ multiplicirt; also ergiebt sich schliesslich

$$(4.)\quad \left\{\begin{aligned}&((\varphi,\psi))\\ &=(\varphi,\psi)+\sum_k\frac{\partial\psi}{\partial\varpi_k}(\varphi,\varpi_k)-\sum_k\frac{\partial\varphi}{\partial\varpi_k}(\psi,\varpi_k)+\sum_{k,k'}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\varpi_k}\frac{\partial\psi}{\partial\varpi_{k'}}-\frac{\partial\psi}{\partial\varpi_k}\frac{\partial\varphi}{\partial\varpi_{k'}}\right)(\varpi_k,\varpi_{k'}).\end{aligned}\right.$$

Des späteren Gebrauchs wegen wollen wir die Formel (4.) specialisiren.

indem wir für die Grössen $\varpi_1, \varpi_2, \ldots \varpi_m$ die bereits früher*) betrachteten n von willkürlichen Constanten freien, nur von den Variablen $q_1, q_2, \ldots q_n$, $p_1, p_2, \ldots p_n$ abhängigen Functionen $H, H_1, \ldots H_{n-1}$ setzen, welche, n von einander unabhängigen willkürlichen Constanten $h, h_1, \ldots h_{n-1}$ gleich gesetzt, die Variablen $p_1, p_2, \ldots p_n$ dergestalt als Functionen der Variablen q_1, $q_2, \ldots q_n$ bestimmen, dass

$$p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_n dq_n$$

ein vollständiges Differential und sein Integral eine vollständige Lösung V der partiellen Differentialgleichung $H = h$ wird. Alsdann ist, wie wir gesehen haben, identisch

$$(H_k, H_{k'}) = 0,$$

folglich verschwindet in der allgemeinen Formel (4.) die nach k, k' genommene Doppelsumme, und wir erhalten

$$(5.) \qquad ((\varphi, \psi)) = (\varphi, \psi) + \sum_k \frac{\partial\psi}{\partial H_k}(\varphi, H_k) - \sum_k \frac{\partial\varphi}{\partial H_k}(\psi, H_k),$$

wo die Summen von $k = 0$ bis $k = n-1$ auszudehnen sind.

Specialisiren wir nun diese Formel noch mehr. Nach unserer bisherigen Annahme enthalten die Functionen φ und ψ die Variablen p und q erstens explicite und zweitens implicite vermittelst der Grössen $H, H_1, \ldots H_{n-1}$. Nehmen wir gegenwärtig an, dass die Functionen φ und ψ die Variablen p nur in der letzteren Art, also *nur implicite* enthalten, eine Form, welche durch Einführung der n Grössen H als neuer Variablen an Stelle der n Grössen p immer zu erreichen ist, dass mithin φ und ψ lediglich in $q_1, q_2, \ldots q_n$, $H, H_1, \ldots H_{n-1}$ ausgedrückt sind, so tritt unter dieser Hypothese eine wesentliche Vereinfachung der in Gleichung (5.) vorkommenden Ausdrücke

$$(\varphi, \psi) = \sum_i \left(\frac{\partial\varphi}{\partial p_i}\frac{\partial\psi}{\partial q_i} - \frac{\partial\psi}{\partial p_i}\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}\right),$$

$$(\varphi, H_k) = \sum_i \left(\frac{\partial\varphi}{\partial p_i}\frac{\partial H_k}{\partial q_i} - \frac{\partial\varphi}{\partial q_i}\frac{\partial H_k}{\partial p_i}\right), \quad (\psi, H_k) = \sum_i \left(\frac{\partial\psi}{\partial p_i}\frac{\partial H_k}{\partial q_i} - \frac{\partial\psi}{\partial q_i}\frac{\partial H_k}{\partial p_i}\right)$$

ein. Da nämlich für jeden Werth von i die Differentialquotienten $\frac{\partial\varphi}{\partial p_i}$, $\frac{\partial\psi}{\partial p_i}$ verschwinden, so wird

$$(\varphi, \psi) = 0, \quad (\varphi, H_k) = -\sum_i \frac{\partial\varphi}{\partial q_i}\frac{\partial H_k}{\partial p_i}, \quad (\psi, H_k) = -\sum_i \frac{\partial\psi}{\partial q_i}\frac{\partial H_k}{\partial p_i},$$

*) S. zweiunddreissigste Vorlesung, p. 250.

und der allgemeine Ausdruck (5.) von $((\varphi, \psi))$ nimmt jetzt die einfache Gestalt an:

$$(6.) \qquad ((\varphi, \psi)) = -\sum_k \frac{\partial \psi}{\partial H_k} \sum_\iota \frac{\partial \varphi}{\partial q_\iota} \frac{\partial H_k}{\partial p_\iota} + \sum_k \frac{\partial \varphi}{\partial H_k} \sum_\iota \frac{\partial \psi}{\partial q_\iota} \frac{\partial H_k}{\partial p_\iota}.$$

In dieser Gleichung ist die Specialisirung des Hülfssatzes (4.) enthalten, deren wir uns bei Betrachtung der *Hamilton*schen Form der Integrale zu bedienen haben.

Um von dem System der Differentialgleichungen (1.) die Integrale in der *Hamilton*schen Form vollständig hinzuschreiben, seien, unter Beibehaltung der soeben gebrauchten Bezeichnung,

$$H = h, \quad H_1 = h_1, \quad \ldots \quad H_{n-1} = h_{n-1}$$

die Gleichungen, welche die Variablen $p_1, p_2, \ldots p_n$ so bestimmen, dass

$$V = \int (p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_n dq_n)$$

eine vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung $H = h$ wird. Dann sind, wie wir wissen *), die Integralgleichungen des Systems (1.) in der *Hamilton*schen Form:

$$(7.) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial q_1} = p_1, & \dfrac{\partial V}{\partial q_2} = p_2, & \ldots & \dfrac{\partial V}{\partial q_n} = p_n, \\[2ex] \dfrac{\partial V}{\partial h} = t + h', & \dfrac{\partial V}{\partial h_1} = h'_1, & \ldots & \dfrac{\partial V}{\partial h_{n-1}} = h'_{n-1}, \end{cases}$$

wo $h', h'_1, \ldots h'_{n-1}$ neue willkürliche Constanten bedeuten. Aber diese Integralgleichungen sind noch nicht nach den willkürlichen Constanten aufgelöst. Um sie unter dieser Form d. h. nach unserer Terminologie als *Integrale* zu erhalten, setzen wir für die erste Hälfte der Integralgleichungen (7.) die damit gleichbedeutenden Integrale

$$H = h, \quad H_1 = h_1, \quad \ldots \quad H_{n-1} = h_{n-1},$$

und in die zweite Hälfte der Integralgleichungen (7.) welche bereits nach den willkürlichen Constanten $h', h'_1, \ldots h'_{n-1}$ aufgelöst sind, substituiren wir für $h, h_1, \ldots h_{n-1}$ ihre Werthe $H, H_1, \ldots H_{n-1}$. Dann ergeben sich, wenn $H', H'_1, \ldots H'_{n-1}$ die Functionen der Variablen $q_1, q_2, \ldots q_n, p_1, p_2, \ldots p_n$ bezeichnen, in welche durch diese Substitution die Grössen $\frac{\partial V}{\partial h}, \frac{\partial V}{\partial h_1}, \ldots \frac{\partial V}{\partial h_{n-1}}$ übergehen, die in der zweiten Zeile des Systems (7.) stehenden Integralgleichungen in Form der Integrale

$$H' = t + h', \quad H'_1 = h'_1, \quad H'_2 = h'_2, \quad \ldots \quad H'_{n-1} = h'_{n-1}.$$

---

*) S. zwanzigste Vorlesung, p. 157.

Die Grössen H', H'_1, ... H'_{n-1} enthalten die Variablen p_1, p_2, ... p_n nur implicite vermittelst der Grössen H, H_1, ... H_{n-1}, denn die Function V und deren Differentialquotienten $\frac{\partial V}{\partial h}$, $\frac{\partial V}{\partial h_1}$, ... $\frac{\partial V}{\partial h_{n-1}}$ sind lediglich von q_1, q_2, ... q_n, h, h_1, ... h_{n-1} abhängig, und daher die Grössen H', H'_1, ... H'_{n-1} lediglich von den Grössen q_1, q_2, ... q_n, H, H_1, ... H_{n-1}. Es sind also H', H'_1, ... H'_{n-1} genau von derjenigen Form, unter welcher wir in Gleichung (6.) die Grössen φ, ψ dargestellt angenommen haben. Dasselbe gilt, wie sich von selbst versteht, von den Grössen H, H_1, ... H_{n-1}, wenn wir sie als Functionen ihrer selbst betrachten, nur dass alsdann auch die Variablen q_1, q_2, ... q_n nicht explicite in ihnen vorkommen. Auf Ausdrücke der Form $((H'_\alpha, H'_\beta))$ oder $((H'_\alpha, H_\beta))$, deren doppelte Klammern wir von nun an zur Vereinfachung der Bezeichnung fortlassen werden, lässt sich also die Formel (6.) für $((\varphi, \psi))$ anwenden.

Wird in (6.) zunächst $\varphi = H'_\alpha$, $\psi = H'_\beta$ gesetzt, wo α und β Zahlen aus der Reihe 0, 1, ... $n-1$ bedeuten, so ergiebt sich

$$(8.)\qquad (H'_\alpha, H'_\beta) = -\sum_k \frac{\partial H'_\beta}{\partial H_k} \sum_\iota \frac{\partial H'_\alpha}{\partial q_\iota} \frac{\partial H_k}{\partial p_\iota} + \sum_k \frac{\partial H'_\alpha}{\partial H_k} \sum_\iota \frac{\partial H'_\beta}{\partial q_\iota} \frac{\partial H_k}{\partial p_\iota}.$$

Aber nach der Definition der Grössen H'_α ist

$$H'_\alpha = \frac{\partial V}{\partial h_\alpha},$$

vorausgesetzt, dass in $\frac{\partial V}{\partial h_\alpha}$ für die Grössen h_k die Grössen H_k gesetzt werden; und da aus der zur Bestimmung von V dienenden Gleichung

$$V = \int (p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_n dq_n)$$

für den Differentialquotienten von V nach h_α der Werth

$$\frac{\partial V}{\partial h_\alpha} = \int \left(\frac{\partial p_1}{\partial h_\alpha} dq_1 + \frac{\partial p_2}{\partial h_\alpha} dq_2 + \cdots + \frac{\partial p_n}{\partial h_\alpha} dq_n \right)$$

folgt, so ergiebt sich hieraus durch partielle Differentiation nach q_ι

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial V}{\partial h_\alpha} \right)}{\partial q_\iota} = \frac{\partial p_\iota}{\partial h_\alpha},$$

also nach Ersetzung der Grössen h_k durch die entsprechenden Grössen H_k

$$(9.)\qquad \frac{\partial H'_\alpha}{\partial q_\iota} = \frac{\partial p_\iota}{\partial H_\alpha}.$$

Mit Benutzung dieser Gleichung erhalten die in Formel (8.) vorkommenden nach i genommenen Summen die einfachen Werthe

$$\sum_i \frac{\partial H'_\alpha}{\partial q_i}\frac{\partial H_k}{\partial p_i} = \sum_i \frac{\partial H_k}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial H_\alpha} = \frac{\partial H_k}{\partial H_\alpha},$$

$$\sum_i \frac{\partial H'_\beta}{\partial q_i}\frac{\partial H_k}{\partial p_i} = \sum_i \frac{\partial H_k}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial H_\beta} = \frac{\partial H_k}{\partial H_\beta},$$

und (8.) geht über in

$$(H'_\alpha, H'_\beta) = -\sum_k \frac{\partial H'_\beta}{\partial H_k}\frac{\partial H_k}{\partial H_\alpha} + \sum_k \frac{\partial H'_\alpha}{\partial H_k}\frac{\partial H_k}{\partial H_\beta},$$

oder da $\frac{\partial H_k}{\partial H_\alpha}$ für alle von α verschiedenen Werthe von k verschwindet, für $k=\alpha$ aber der Einheit gleich wird,

$$(H'_\alpha, H'_\beta) = -\frac{\partial H'_\beta}{\partial H_\alpha} + \frac{\partial H'_\alpha}{\partial H_\beta}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist gleich Null; denn bezeichnet V' die Function, in welche V übergeht, wenn die Grössen h_k durch die entsprechenden H_k ersetzt werden, so ist

$$H' = \frac{\partial V'}{\partial H}, \quad H'_1 = \frac{\partial V'}{\partial H_1}, \quad H'_2 = \frac{\partial V'}{\partial H_2}, \quad \ldots \quad H'_n = \frac{\partial V'}{\partial H_n},$$

also

$$\frac{\partial H'_\alpha}{\partial H_\beta} = \frac{\partial H'_\beta}{\partial H_\alpha},$$

und hieraus folgt:

$$(H'_\alpha, H'_\beta) = 0.$$

Setzen wir nun, um Ausdrücke der Form (H'_α, H_β) zu betrachten, in (6.) für φ und ψ die Werthe $\varphi = H'_\alpha$, $\psi = H_\beta$, so ergiebt sich

$$(10.)\qquad (H'_\alpha, H_\beta) = -\sum_k \frac{\partial H_\beta}{\partial H_k}\sum_i \frac{\partial H'_\alpha}{\partial q_i}\frac{\partial H_k}{\partial p_i} + \sum_k \frac{\partial H'_\alpha}{\partial H_k}\sum_i \frac{\partial H_\beta}{\partial q_i}\frac{\partial H_k}{\partial p_i}.$$

Mit Benutzung von Gleichung (9.) erhält die erste hierin vorkommende nach i genommene Summe den Werth

$$\sum_i \frac{\partial H'_\alpha}{\partial q_i}\frac{\partial H_k}{\partial p_i} = \sum_i \frac{\partial H_k}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial H_\alpha} = \frac{\partial H_k}{\partial H_\alpha}.$$

Die zweite nach i genommene Summe dagegen verschwindet; denn da wir die Grössen $q_1, q_2, \ldots q_n$ und $H, H_1, \ldots H_{n-1}$ als unabhängige Variable ansehen, so enthält H_β kein q_i, und die Differentialquotienten $\frac{\partial H_\beta}{\partial q_i}$ sind sämmtlich gleich Null. Auf diese Weise geht Gleichung (10.) über in

$$(H'_\alpha, H_\beta) = -\sum_k \frac{\partial H_\beta}{\partial H_k} \frac{\partial H_k}{\partial H_\alpha} = -\frac{\partial H_\beta}{\partial H_\alpha},$$

und da $\frac{\partial H_\beta}{\partial H_\alpha}$ gleich 0 oder gleich 1 ist, je nachdem β von α verschieden oder demselben gleich ist, so hat man für je zwei von einander verschiedene Werthe von α und β

$$(H'_\alpha, H_\beta) = 0,$$

dagegen, wenn $\alpha = \beta$ ist,

$$(H'_\alpha, H_\alpha) = -1.$$

Endlich ist nach den Bedingungsgleichungen, durch welche die Grössen H definirt werden,

$$(H_\alpha, H_\beta) = 0.$$

Wir haben also für die Grössen H_α und H'_α folgende identische Gleichungen erhalten:

$$(H_\alpha, H_\beta) = 0, \quad (H'_\alpha, H'_\beta) = 0,$$
$$(H_\alpha, H'_\beta) = 0,$$

von welchen die beiden ersten für alle Werthe von α und β gelten, die letzte aber nur für von einander verschiedene Werthe von α und β, während für $\alpha = \beta$ die Gleichung besteht:

$$(H_\alpha, H'_\alpha) = 1.$$

Man kann diese Resultate in folgenden Satz zusammenfassen:

Es sei das System der isoperimetrischen Differentialgleichungen

$$(1.)\quad \begin{cases} \frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1}, & \frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_2}, & \ldots & \frac{dq_n}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_n}, \\ \frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_1}, & \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_2}, & \ldots & \frac{dp_n}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_n} \end{cases}$$

vorgelegt, in welchem H eine gegebene Function der Variablen $q_1, q_2, \ldots q_n$, $p_1, p_2, \ldots p_n$ bedeutet, und welches für $H = T - U$ in das System der Differentialgleichungen der Dynamik im Fall der Geltung des Prinzips der lebendigen Kraft übergeht. Man betrachte die partielle Differentialgleichung

$$H = h,$$

wo $p_1 = \frac{\partial V}{\partial q_1}$, $p_2 = \frac{\partial V}{\partial q_2}$, $\ldots$ $p_n = \frac{\partial V}{\partial q_n}$ ist, und auf welche sich das System (1.) zurückführen lässt. Es seien

$$H_1 = h_1, \quad H_2 = h_2, \quad \ldots \quad H_{n-1} = h_{n-1}$$

die Gleichungen, welche mit $H=h$ *zusammen* $p_1, p_2, \dots p_n$ *so als Functionen von* $q_1, q_2, \dots q_n$ *bestimmen, dass*

$$p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \dots + p_n dq_n$$

ein vollständiges Differential und sein Integral

$$V = \int (p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \dots + p_n dq_n)$$

eine vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung $H=h$ *wird. Bezeichnet man nun mit* $H', H'_1, \dots H'_{n-1}$ *die Functionen der Variablen* $q_1, q_2, \dots q_n, p_1, p_2, \dots p_n$, *in welche die Differentialquotienten* $\frac{\partial V}{\partial h}, \frac{\partial V}{\partial h_1}, \dots \frac{\partial V}{\partial h_{n-1}}$ *übergehen, wenn die Constanten* $h, h_1, \dots h_{n-1}$ *durch die Functionen* $H, H_1, \dots H_{n-1}$ *ersetzt werden, und stellt man das zum System der Differentialgleichungen* (I.) *gehörende System der Integrale in der Hamiltonschen Form, d. h. in den Gleichungen*

$$\begin{array}{lllll} H = h, & H_1 = h_1, & H_2 = h_2, & \dots & H_{n-1} = h_{n-1}, \\ H' = t + h', & H'_1 = h'_1, & H'_2 = h'_2, & \dots & H'_{n-1} = h'_{n-1} \end{array}$$

auf, so haben die $2n$ *die linken Seiten dieser Integrale bildenden Functionen* $H, H_1, \dots H_{n-1}, H', H'_1, \dots H'_{n-1}$ *die Eigenschaft, dass, wenn man in dem Ausdruck*

$$(\varphi, \psi) = \begin{cases} \frac{\partial\varphi}{\partial p_1}\frac{\partial\psi}{\partial q_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial p_2}\frac{\partial\psi}{\partial q_2} + \dots + \frac{\partial\varphi}{\partial p_n}\frac{\partial\psi}{\partial q_n} \\ -\frac{\partial\psi}{\partial p_1}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1} - \frac{\partial\psi}{\partial p_2}\frac{\partial\varphi}{\partial q_2} - \dots - \frac{\partial\psi}{\partial p_n}\frac{\partial\varphi}{\partial q_n} \end{cases}$$

für φ *und* ψ *irgend zwei von den* $2n$ *Grössen* $H, H_1, \dots H_{n-1}, H', H_1, \dots H_{n-1}$ *setzt, derselbe verschwindet, mit einziger Ausnahme der Combinationen von* H *und* H', H_1 *und* $H'_1, \dots H_{n-1}$ *und* H'_{n-1}, *deren jede, für* φ *und* ψ *gesetzt, den Ausdruck* (φ, ψ) *der Einheit gleich macht.*

Vermittelst dieses Satzes kann man sehr einfache Formeln für die Variation der Constanten aufstellen, was den Gegenstand der nächsten Vorlesung bilden wird.

Sechsunddreissigste Vorlesung.

Die Störungstheorie.

Wenn man in der Dynamik die Theorie der Variation der Constanten anwendet, so nimmt man an, dass sich das System der Differentialgleichungen der

Bewegung ändert, indem zu der charakteristischen Function H eine Störungsfunction Ω hinzukommt, welche ausser den Variablen $q_1, q_2, \dots q_n, p_1, p_2, \dots p_n$ auch die Zeit t explicite enthalten kann, dass also die Differentialgleichungen in folgende übergehen:

$$(1.)\qquad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} + \frac{\partial \Omega}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} - \frac{\partial \Omega}{\partial q_i}.$$

Ist nun Ω gegen H sehr klein, so kann man die Werthe der Variablen p_i und q_i im ungestörten Problem (für $\Omega = 0$) als Näherungswerthe für ihre Werthe im gestörten Problem brauchen und die neuen Werthe von p_i und q_i so darstellen, dass sie dieselbe analytische Form behalten, dass aber an die Stelle der früheren willkürlichen Constanten (oder Elemente nach astronomischem Sprachgebrauch) jetzt Functionen der Zeit treten. Statt, wie im ungestörten Problem, die Grössen p_i und q_i als die zu bestimmenden Variablen anzusehen, sucht man im gestörten vielmehr diejenigen Functionen, welche an die Stelle der alten willkürlichen Constanten oder Elemente treten, d. h. die gestörten Elemente werden die Variablen des neuen Problems. Dies gewährt den Vortheil, dass man als erste Näherung nicht Functionen der Zeit, welche constante Grössen enthalten, sondern die Constanten selbst, die Elemente des ungestörten Problems erhält.

Es kommt nun darauf an, die Differentialgleichungen der gestörten Elemente aufzustellen. Erinnern wir uns zunächst an die *Hamilton*sche Form der Integrale des ungestörten Problems, also an das in der vorigen Vorlesung betrachtete System

$$(2.)\qquad \begin{cases} H = h, & H_1 = h_1, \quad \dots \quad H_{n-1} = h_{n-1}, \\ H' = h' + t, & H_1' = h_1', \quad \dots \quad H_{n-1}' = h_{n-1}', \end{cases}$$

und bezeichnen wir irgend ein von t freies Integral des ungestörten Problems mit

$$\varphi = a,$$

wo φ eine von willkürlichen Constanten nicht afficirte Function der Variablen $q_1, q_2, \dots q_n, p_1, p_2, \dots p_n$ und a eine willkürliche Constante bedeutet, so dass sich φ als Function der $2n-1$ Variablen $H, H_1, \dots H_{n-1}, H_1', \dots H_{n-1}'$ und a als die nämliche Function der $2n-1$ Constanten $h, h_1, \dots h_{n-1}, h_1', \dots h_{n-1}'$ darstellen lassen muss. Im gestörten Problem ist a keine Constante mehr, $\frac{da}{dt}$ also nicht mehr gleich Null, man erhält vielmehr unter Benutzung der Differentialgleichungen (1.) für $\frac{da}{dt}$ den Ausdruck

$$\frac{da}{dt} = \sum_{\iota=1}^{\iota=n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_\iota}\frac{dq_\iota}{dt}+\frac{\partial\varphi}{\partial p_\iota}\frac{dp_\iota}{dt}\right)$$
$$= \sum_{\iota=1}^{\iota=n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_\iota}\frac{\partial H}{\partial p_\iota}-\frac{\partial\varphi}{\partial p_\iota}\frac{\partial H}{\partial q_\iota}\right)+\sum_{\iota=1}^{\iota=n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_\iota}\frac{\partial\Omega}{\partial p_\iota}-\frac{\partial\varphi}{\partial p_\iota}\frac{\partial\Omega}{\partial q_\iota}\right)$$

oder, was dasselbe ist,

$$(3.)\qquad \frac{da}{dt} = (H, \varphi)+(\Omega, \varphi).$$

Da $\varphi = a$ ein von t freies Integral des ungestörten Problems ist, so genügt φ der linearen partiellen Differentialgleichung $(H, \varphi) = 0$, und der Ausdruck $\frac{da}{dt}$ reducirt sich auf

$$(3^*.)\qquad \frac{da}{dt} = (\Omega, \varphi).$$

Die rechte Seite dieser Gleichung enthält ausser dem in Ω explicite vorkommenden t die $2n$ Variablen $q_1, q_2, \dots q_n, p_1, p_2, \dots p_n$, für welche wir jedoch die $2n$ Functionen $H, H_1, \dots H_{n-1}, H', H_1', \dots H_{n-1}'$ derselben als neue Variable einführen wollen. Die Einführung der neuen Variablen in Ω giebt für (Ω, φ) die Transformation

$$(4.)\qquad (\Omega, \varphi) = \sum_{k=0}^{k=n-1}\frac{\partial\Omega}{\partial H_k}(H_k, \varphi)+\sum_{k=0}^{k=n-1}\frac{\partial\Omega}{\partial H_k'}(H_k', \varphi).$$

Führen wir die neuen Variablen auch in φ ein und berücksichtigen, dass φ von der einen derselben, von H', unabhängig ist, dass also $\frac{\partial\varphi}{\partial H'}$ verschwindet, so erhalten wir für die Ausdrücke (H_k, φ), (H_k', φ) die Transformationen

$$(H_k, \varphi) = \sum_{s=0}^{s=n-1}\frac{\partial\varphi}{\partial H_s}(H_k, H_s)+\sum_{s=1}^{s=n-1}\frac{\partial\varphi}{\partial H_s'}(H_k, H_s'),$$
$$(H_k', \varphi) = \sum_{s=0}^{s=n-1}\frac{\partial\varphi}{\partial H_s}(H_k', H_s)+\sum_{s=1}^{s=n-1}\frac{\partial\varphi}{\partial H_s'}(H_k', H_s').$$

Aber nach dem in der vorigen Vorlesung bewiesenen Satze verschwinden die sämmtlichen Ausdrücke (H_k, H_s), (H_k, H_s'), (H_k', H_s), (H_k', H_s) mit Ausnahme derjenigen (H_k, H_s'), (H_k', H_s), für welche k und s in denselben Werth zusammenfallen, und von diesen werden die ersteren der positiven, die letzteren der negativen Einheit gleich. Dadurch reduciren sich die Ausdrücke von (H_k, φ), (H_k', φ) auf die einfachen Werthe

$$(H_k, \varphi) = \frac{\partial\varphi}{\partial H_k'},$$
$$(H_k', \varphi) = -\frac{\partial\varphi}{\partial H_k}.$$

Gleichung (4.) geht über in

$$(\Omega, \varphi) = \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{\partial \Omega}{\partial H_k} \frac{\partial \varphi}{\partial H'_k} - \sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{\partial \Omega}{\partial H'_k} \frac{\partial \varphi}{\partial H_k},$$

und Gleichung (3*.) giebt für $\frac{da}{dt}$ schliesslich den Werth:

$$(5.) \qquad \frac{da}{dt} = \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{\partial \Omega}{\partial H_k} \frac{\partial \varphi}{\partial H'_k} - \sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{\partial \Omega}{\partial H'_k} \frac{\partial \varphi}{\partial H_k}.$$

Die partiellen Differentialquotienten der Störungsfunction sind hier in die Grössen $\frac{\partial \varphi}{\partial H'_k}$ und $-\frac{\partial \varphi}{\partial H_k}$ multiplicirt, also in Ausdrücke, welche die Zeit nicht explicite enthalten, da t in φ nicht vorkommt. Dies ist der berühmte *Poisson*sche Satz.

Specialisiren wir die Formel (5.), indem wir für φ die einzelnen Grössen $H, H_1, \ldots H_{n-1}, H'_1, \ldots H'_{n-1}$ und demgemäss gleichzeitig für a die Grössen $h, h_1, \ldots h_{n-1}, h'_1, \ldots h'_{n-1}$ setzen, so erhalten wir für $k = 0, 1, \ldots n-1$

$$(6.) \qquad \frac{dh_k}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial H'_k}$$

und für $k = 1, \ldots n-1$

$$(7.) \qquad \frac{dh'_k}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial H_k}.$$

Es bleibt jetzt noch übrig, dasjenige Integral des ungestörten Problems zu betrachten, durch welches die Zeit eingeführt wird, d. h. das Integral

$$H' = h' + t.$$

Da jetzt $h'+t$ an die Stelle von a und H' an die Stelle von φ tritt, so verwandelt sich Gleichung (3.) in

$$\frac{dh'}{dt} + 1 = (H, H') + (\Omega, H'),$$

und da $(H, H') = 1$ ist, erhält man

$$\frac{dh'}{dt} = (\Omega, H'),$$

eine Gleichung genau von der Form (3*.), nur dass h' und H' an die Stelle von a und φ getreten sind. Indem man in Gleichung (4.) ebenfalls H' an die Stelle von φ treten lässt, ergiebt sich (Ω, H') gleich dem partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial \Omega}{\partial H}$, und man erhält daher schliesslich

$$\frac{dh'}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial H},$$

d. h. Gleichung (7.) gilt auch für $k = 0$.

Die Gleichungen (2.), welche für das ungestörte Problem das System seiner Integrale darstellen, sind für das gestörte nur die Definitionsgleichungen der neuen Variablen $h, h_1, \dots h_{n-1}, h', h'_1, \dots h'_{n-1}$ und dienen dazu, die alten Variablen $q_1, q_2, \dots q_n, p_1, p_2, \dots p_n$ oder deren Functionen $H, H_1, \dots H_{n-1}, H', H'_1, \dots H'_{n-1}$ durch die neuen Variablen auszudrücken. Indem man diese Substitution in der Störungsfunction vornimmt, also in derselben $H, H_1, \dots H_{n-1}, H', H'_1, \dots H'_{n-1}$ durch $h, h_1, \dots h_{n-1}, h'+t, h'_1, \dots h'_{n-1}$ ersetzt, so dass Ω Function der $2n+1$ Variablen $h, h_1, \dots h_{n-1}, h', h'_1, \dots h'_{n-1}$ und t wird, gehen die Differentialquotienten $\frac{\partial\Omega}{\partial H_k}, \frac{\partial\Omega}{\partial H'_k}$ in $\frac{\partial\Omega}{\partial h_k}, \frac{\partial\Omega}{\partial h'_k}$ über, und man erhält für die Variablen, welche im gestörten Problem an die Stelle der Constanten des ungestörten treten, die Differentialgleichungen

$$(8.)\quad \begin{cases} \dfrac{dh}{dt} = -\dfrac{\partial\Omega}{\partial h'}, & \dfrac{dh_1}{dt} = -\dfrac{\partial\Omega}{\partial h'_1}, \quad \dots \quad \dfrac{dh_{n-1}}{dt} = -\dfrac{\partial\Omega}{\partial h'_{n-1}}, \\[2ex] \dfrac{dh'}{dt} = \dfrac{\partial\Omega}{\partial h}, & \dfrac{dh'_1}{dt} = \dfrac{\partial\Omega}{\partial h_1}, \quad \dots \quad \dfrac{dh'_{n-1}}{dt} = \dfrac{\partial\Omega}{\partial h_{n-1}}. \end{cases}$$

Dieses System ist von der nämlichen Form, wie die Differentialgleichungen der Bewegung des ungestörten Problems, nur dass an die Stelle der Variablen $q_1, q_2, \dots q_n, p_1, p_2, \dots p_n$ und der Function H derselben die Variablen $h, h_1, \dots h_{n-1}, h', h'_1, \dots h'_{n-1}$ und die Function $-\Omega$ treten, von denen die letztere noch überdies die Zeit t explicite enthält. Die Integration dieses Systems ist daher nach den früheren allgemeinen Betrachtungen *) gleichbedeutend mit der Bestimmung einer vollständigen Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial S}{\partial t} - \Omega = 0,$$

welche, nachdem die Variablen $h', h'_1, \dots h'_{n-1}$ durch die Differentialquotienten $\frac{\partial S}{\partial h}, \frac{\partial S}{\partial h_1}, \dots \frac{\partial S}{\partial h_{n-1}}$ ersetzt worden sind, S als Function von $t, h, h_1, \dots h_{n-1}$ definirt.

Die hier aufgestellten Differentialgleichungen des Störungsproblems stimmen darin mit den von *Lagrange* und *Laplace* gegebenen Differentialgleichungen überein, dass die gestörten Elemente die gesuchten Variablen sind, und dass die rechten Seiten der Differentialgleichungen durch die Differential-

*) S. Zwanzigste Vorlesung, p. 157.

quotienten der Störungsfunction nach den gestörten Elementen ausgedrückt werden. Aber bei ihnen kommen im Allgemeinen in jeder Differentialgleichung alle Differentialquotienten der Störungsfunction vor, und die Coefficienten derselben sind Ausdrücke der Form (φ, ψ), deren Bildung sehr mühsam ist. Das Nähere hierüber findet man in *Lagranges* Mécanique analytique, in welcher die Weitläuftigkeit der nothwendigen Rechnungen mit der grössten Geschicklichkeit abgekürzt ist, sowie in *Enckes* astronomischem Jahrbuch von 1837. In dem einfachen Fall der planetarischen Störungen ist man nach den älteren Formeln genöthigt, 15 Ausdrücke der Form (φ, ψ) zu berechnen.

Nur dadurch, dass wir die Elemente des ungestörten Problems gerade in der Form genommen haben, wie sie die *Hamilton*sche Methode giebt, ist es uns möglich geworden die Differentialgleichungen so zu vereinfachen, dass in jeder nur *ein* Differentialquotient der Störungsfunction vorkommt, und dass der Coefficient desselben sich auf die positive oder negative Einheit reducirt. Diese Wahl der Elemente ist von der grössten Wichtigkeit; deshalb haben wir bei der Bestimmung der Planetenbewegung durch die *Hamilton*sche Methode die dort eingeführten willkürlichen Constanten ihrer geometrischen Bedeutung nach genau erörtert.

Anstatt die Variablen h_k und h'_k für die ursprünglichen Variablen p_i und q_i in das System gewöhnlicher Differentialgleichungen einzuführen und so auf indirectem Wege zu der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial S}{\partial t} - \Omega = 0$ zu gelangen, werden wir uns im Folgenden die Aufgabe stellen, die Einführung jener neuen Variablen unmittelbar in der zum Störungsproblem in seinen ursprünglichen Variablen gehörigen partiellen Differentialgleichung

$$(9.)\qquad \frac{\partial V}{\partial t} + H + \Omega = 0$$

zu bewerkstelligen. Indem wir hierbei von der zum ungestörten Problem gehörigen partiellen Differentialgleichung

$$(10.)\qquad \frac{\partial V_0}{\partial t} + H = 0$$

eine vollständige Lösung V_0 als bekannt voraussetzen, welche zur Bestimmung der neuen Variablen h_k und h'_k erforderlich ist, werden wir von der partiellen Differentialgleichung (9.) unmittelbar zu der partiellen Differentialgleichung

$$(11.)\qquad \frac{\partial S}{\partial t} - \Omega = 0$$

übergehen.

Die partielle Differentialgleichung (9.), in welcher die Grössen p_1, p_2, ... p_n durch die partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial V}{\partial q_1}$, $\frac{\partial V}{\partial q_2}$, ... $\frac{\partial V}{\partial q_n}$ ersetzt sind, ist gleichbedeutend mit der totalen Differentialgleichung

$$(12.)\qquad dV = -(H+\Omega)dt+p_1dq_1+p_2dq_2+\cdots+p_ndq_n,$$

wo in H und Ω wieder p_1, p_2, ... p_n an die Stelle von $\frac{\partial V}{\partial q_1}$, $\frac{\partial V}{\partial q_2}$, ... $\frac{\partial V}{\partial q_n}$ getreten sind.

Indem wir als neue Variable die Functionen einführen, welche im ungestörten Problem willkürlichen Constanten gleich werden, haben wir eine Substitution zu bewerkstelligen, welche von derselben Natur, wie die in der einundzwanzigsten Vorlesung betrachtete, aber allgemeiner als jene ist. Im vorliegenden Falle wie dort sind nicht nur für die unabhängigen Variablen q_1, q_2, ... q_n, t und für die gesuchte Function V derselben neue Variable einzuführen, sondern die neuen Variablen sind noch überdies von p_1, p_2, ... p_n d. h. von den nach q_1, q_2, ... q_n genommenen Differentialquotienten von V abhängig. Die in Rede stehende Transformation geschieht folgendermassen:

Die partielle Differentialgleichung des ungestörten Problems ist

$$(10.)\qquad \frac{\partial V_0}{\partial t}+H = 0,$$

welche wir in der einundzwanzigsten Vorlesung *) durch die Substitution

$$V_0 = W-ht$$

auf die Gleichung

$$H = h$$

zurückgeführt haben. Die vollständige Lösung W dieser partiellen Differentialgleichung ist eine Function von q_1, q_2, ... q_n, welche ausser h noch die $n-1$ willkürlichen Constanten h_1, h_2, ... h_{n-1} enthält. Haben wir sie gefunden, so ist das System der Integralgleichungen des ungestörten Problems:

$$\frac{\partial W}{\partial q_1}=p_1,\qquad \frac{\partial W}{\partial q_2}=p_2,\quad \dots\quad \frac{\partial W}{\partial q_n}=p_n,$$
$$\frac{\partial W}{\partial h}=t+h',\quad \frac{\partial W}{\partial h_1}=h_1',\quad \dots\quad \frac{\partial W}{\partial h_{n-1}}=h_{n-1}'.$$

Da h, h_1, ... h_{n-1} im ungestörten Problem Constanten sind, so genügt W der totalen Differentialgleichung

$$dW = p_1dq_1+p_2dq_2+\cdots+p_ndq_n.$$

---

*) p. 165.

Im Störungsproblem dagegen treten an die Stelle der willkürlichen Constanten Functionen der Zeit: $h, h_1, \ldots h_{n-1}$ werden variabel, und es kommt zu dem vollständigen Differential von W die Summe

$$\frac{\partial W}{\partial h}dh+\frac{\partial W}{\partial h_1}dh_1+\cdots+\frac{\partial W}{\partial h_{n-1}}dh_{n-1}$$
$$= (t+h')dh+h_1'dh_1+\cdots+h_{n-1}'dh_{n-1}$$

hinzu. Man hat also im Störungsproblem

$$(13.)\quad dW = p_1dq_1+p_2dq_2+\cdots+p_ndq_n+(t+h')dh+h_1'dh_1+h_2dh_2+\cdots+h_{n-1}'dh_{n-1}.$$

Dies ist eine Gleichung, welche durch die Integralgleichungen identisch erfüllt wird, wenn man die früheren Constanten als variabel ansieht, d. h. wenn die Integralgleichungen nicht mehr die des ungestörten, sondern des Störungsproblems sind. Im Störungsproblem also ist dies eine *identische* Gleichung. Daher wird die totale Differentialgleichung (12.) für dV nicht alterirt, wenn wir die Gleichung (13.) für dW von jener abziehen. Nehmen wir die Differenz mit entgegengesetztem Zeichen, so ergiebt sich

$$d(W-V) = (H+\Omega)dt+(t+h')dh+h_1'dh_1+h_2'dh_2+\cdots+h_{n-1}'dh_{n-1}.$$

Durch die Integralgleichungen des Störungsproblems wird aber auch identisch $H=h$, folglich ziehen sich die auf der rechten Seite stehenden Glieder $Hdt+tdh$ in $d(ht)$ zusammen. Indem wir dies auf die linke Seite bringen, erhalten wir

$$d(W-ht-V) = \Omega dt+h'dh+h_1'dh_1+\cdots+h_{n-1}'dh_{n-1}$$

oder, wenn wir

$$W-ht-V = V_0-V = S$$

setzen,

$$dS = \Omega dt+h'dh+h_1'dh_1+\cdots+h_{n-1}'dh_{n-1},$$

und diese totale Differentialgleichung ist gleichbedeutend mit der oben erhaltenen partiellen Differentialgleichung

$$(11.)\quad \frac{\partial S}{\partial t}-\Omega = 0,$$

in welcher die Grössen $h', h_1', \ldots h_{n-1}'$ durch die Differentialquotienten $\frac{\partial S}{\partial h}$, $\frac{\partial S}{\partial h_1}, \ldots \frac{\partial S}{\partial h_{n-1}}$ zu ersetzen sind. Endlich ist die partielle Differentialgleichung (11.) diejenige, auf welche sich das System gewöhnlicher Differentialgleichungen (8.) zurückführen lässt. So sind wir auf dem kürzesten Wege zu demselben System von Differentialgleichungen

$$(8.)\quad \begin{cases} \dfrac{dh}{dt} = -\dfrac{\partial\Omega}{\partial h'}, & \dfrac{dh_1}{dt} = -\dfrac{\partial\Omega}{\partial h'_1}, \quad \ldots \quad \dfrac{dh_{n-1}}{dt} = -\dfrac{\partial\Omega}{\partial h'_{n-1}}, \\[2ex] \dfrac{dh'}{dt} = \dfrac{\partial\Omega}{\partial h}, & \dfrac{dh'_1}{dt} = \dfrac{\partial\Omega}{\partial h_1}, \quad \ldots \quad \dfrac{dh'_{n-1}}{dt} = \dfrac{\partial\Omega}{\partial h_{n-1}} \end{cases}$$

gelangt, welches wir früher auf anderem Wege gefunden hatten.

Dieses System von Differentialgleichungen gewährt den Vortheil, dass man die erste Correction der Elemente durch blosse Quadraturen findet. Dieselbe ergiebt sich, wenn man in Ω die Elemente als constant ansieht und ihnen die Werthe beilegt, die sie im ungestörten Problem hatten. Dann wird Ω eine blosse Function der Zeit t, und die corrigirten Elemente werden durch blosse Quadraturen erhalten. Die Bestimmung der höheren Correctionen erfordert, dass man in das ganze Detail der Astronomie eingeht.

Es gilt noch ein anderes merkwürdiges System von Formeln, welches sich ebenfalls auf die Einführung der Constanten $h, h_1, \ldots h_{n-1}, h', h'_1, \ldots h_{n-1}$ als Elemente bezieht. Von den beiden Hauptformen, unter welchen man die Integralgleichungen darstellen kann, haben wir nämlich bisher diejenige

$$\begin{aligned} H &= h, & H_1 &= h_1, & \ldots \quad H_{n-1} &= h_{n-1}, \\ H' &= h'+t, & H_1 &= h'_1, & \ldots \quad H'_{n-1} &= h'_{n-1} \end{aligned}$$

betrachtet, in welcher die Gleichungen nach den willkürlichen Constanten h_k und h'_k aufgelöst und die Grössen H_k und H'_k lediglich Functionen der Variablen $q_1, q_2, \ldots q_n, p_1, p_2, \ldots p_n$ sind. Die zweite Hauptform ist diejenige, in welcher die $2n$ Variablen $q_1, q_2, \ldots q_n, p_1, p_2, \ldots p_n$ als Functionen von t und von den Constanten $h, h_1, \ldots h_{n-1}, h', h'_1, \ldots h'_{n-1}$ dargestellt werden. Je nachdem man die eine oder die andere Form wählt, hat man es in der Störungstheorie entweder mit den partiellen Differentialquotienten der Grössen H_k und H'_k nach den Variablen q_i und p_i, oder mit den Differentialquotienten der Variablen q_i und p_i nach den willkürlichen Constanten h_k und h'_k zu thun: d. h. man muss entweder, wie *Poisson*, die Differentialquotienten der Functionen, welche den Elementen gleich werden, nach den Variablen bilden, oder, wie *Lagrange*, die Differentialquotienten der Variablen nach den Elementen. In jedem Fall hat man ein System von $4n^2$ Differentialquotienten zu bilden. Die Constanten h_k und h'_k, welche man durch die *Hamilton*sche Form der Integralgleichungen erhält, haben nun ausser den schon angeführten merkwürdigen

Eigenschaften auch noch die, dass beide Systeme von Differentialquotienten entweder gleich, oder entgegengesetzt werden.

Nach dem in der vorigen Vorlesung bewiesenen Satz hat man nämlich:

$$(14.)\begin{cases}(H_i,H)=0,\ (H_i,H_1)=0,\ \dots\ (H_i,H_{i-1})=0,\ (H_i,H_i)=0,\ (H_i,H_{i+1})=0,\ \dots\ (H_i,H_{n-1})=0,\\ (H_i,H')=0,\ (H_i,H_1')=0,\ \dots\ (H_i,H_{i-1}')=0,\ (H_i,H_i')=1,\ (H_i,H_{i+1}')=0,\ \dots\ (H_i,H_{n-1}')=0.\end{cases}$$

In diesen $2n$ Gleichungen sind die $2n$ partiellen Differentialquotienten von H_i

$$\frac{\partial H_i}{\partial q_1},\quad \frac{\partial H_i}{\partial q_2},\quad \dots\quad \frac{\partial H_i}{\partial q_n},\quad \frac{\partial H_i}{\partial p_1},\quad \frac{\partial H_i}{\partial p_2},\quad \dots\quad \frac{\partial H_i}{\partial p_n},$$

die wir als die Unbekannten des Systems ansehen wollen, linear enthalten. Als Coefficienten dieser $2n$ Unbekannten finden sich in den Gleichungen (14.) die $2n$ Grössen

$$-\frac{\partial H}{\partial p_1},\quad -\frac{\partial H}{\partial p_2},\quad \dots\quad -\frac{\partial H}{\partial p_n},\quad \frac{\partial H}{\partial q_1},\quad \frac{\partial H}{\partial q_2},\quad \dots\quad \frac{\partial H}{\partial q_n}$$

und die entsprechenden aus der partiellen Differentiation von H_1, H_2, ... H_{n-1}, H', H_1', ... H_{i-1}', H_i', H_{i+1}', ... H_{n-1} hervorgehenden Grössen. Auf der rechten Seite der Gleichungen (14.) steht überall Null, mit alleiniger Ausnahme derjenigen Gleichung, deren Coefficienten Differentialquotienten von H_i' sind, und in welcher die rechte Seite der Einheit gleich ist.

Das nämliche System von linearen Gleichungen, d. h. ein System, in welchem die Coefficienten und die rechten Seiten ganz dieselben sind, erhält man aber für die nach h_i' genommenen Differentialquotienten von $-p_1$, $-p_2$, ... $-p_n$, q_1, q_2, ... q_n. In der That, die Integrale

$$\begin{array}{llllll} H=h, & H_1=h_1, & H_2=h_2, & \dots & H_i=h_i, & \dots\quad H_{n-1}=h_{n-1},\\ H'=t+h', & H_1'=h_1', & H_2'=h_2', & \dots & H_i'=h_i', & \dots\quad H_{n-1}'=h_{n-1}' \end{array}$$

werden identische Gleichungen, wenn man sich in denselben für die Variablen q_1, q_2, ... q_n, p_1, p_2, ... p_n ihre Werthe in t und den $2n$ willkürlichen Constanten eingesetzt denkt. Daher kann man sie nach jeder der willkürlichen Constanten partiell differentiiren und erhält durch Differentiation nach h_i' das System von Gleichungen

$$(15.)\begin{cases}\frac{\partial H}{\partial h_i'}=0,\ \frac{\partial H_1}{\partial h_i'}=0,\ \dots\ \frac{\partial H_{i-1}}{\partial h_i}=0,\ \frac{\partial H_i}{\partial h_i'}=0,\ \frac{\partial H_{i+1}}{\partial h_i'}=0,\ \dots\ \frac{\partial H_{n-1}}{\partial h_i'}=0,\\ \frac{\partial H'}{\partial h_i'}=0,\ \frac{\partial H_1'}{\partial h_i'}=0,\ \dots\ \frac{\partial H_{i-1}'}{\partial h_i}=0,\ \frac{\partial H_i'}{\partial h_i'}=1,\ \frac{\partial H_{i+1}'}{\partial h_i}=0,\ \dots\ \frac{\partial H_{n-1}'}{\partial h_i'}=0,\end{cases}$$

von welchen die erste z. B. in entwickelter Form folgendermassen lautet:

$$\frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial h_i'}+\frac{\partial H}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial h_i'}+\cdots+\frac{\partial H}{\partial p_n}\frac{\partial p_n}{\partial h_i'}+\frac{\partial H}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial h_i'}+\frac{\partial H}{\partial q_2}\frac{\partial q_2}{\partial h_i'}+\cdots+\frac{\partial H}{\partial q_n}\frac{\partial q_n}{\partial h_i'} = 0.$$

Dies System unterscheidet sich von dem System (14.) nur dadurch, dass an der Stelle der früheren Unbekannten

$$\frac{\partial H_i}{\partial q_1},\quad \frac{\partial H_i}{\partial q_2},\quad \ldots\quad \frac{\partial H_i}{\partial q_n},\quad \frac{\partial H_i}{\partial p_1},\quad \frac{\partial H_i}{\partial p_2},\quad \ldots\quad \frac{\partial H_i}{\partial p_n}$$

gegenwärtig die Grössen

$$-\frac{\partial p_1}{\partial h_i'},\quad -\frac{\partial p_2}{\partial h_i'},\quad \ldots\quad -\frac{\partial p_n}{\partial h_i'},\quad \frac{\partial q_1}{\partial h_i'},\quad \frac{\partial q_2}{\partial h_i'},\quad \ldots\quad \frac{\partial q_n}{\partial h_i'}$$

stehen. Aber wenn in zwei Systemen linearer Gleichungen die Coefficienten und die constanten Terme einander gleich sind, so sind es auch die Unbekannten, es sei denn, dass die Determinante des Systems, d. h. im vorliegenden Fall der Ausdruck

$$\Sigma \pm \frac{\partial H}{\partial q_1}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}\cdots\frac{\partial H_{n-1}}{\partial q_n}\frac{\partial H'}{\partial p_1}\frac{\partial H_1'}{\partial p_2}\cdots\frac{\partial H_{n-1}'}{\partial p_n}$$

verschwinde. Diese Determinante verschwindet indessen niemals, denn sonst wären die $2n$ Grössen H, H_1, ... H_{n-1}, H', H_1', ... H_{n-1}' nicht von einander unabhängige Functionen der $2n$ Variablen $q_1, q_2, \ldots q_n, p_1, p_2, \ldots p_n$, und das System der Integrale wäre unzulänglich, um diese $2n$ Variablen als Functionen von h, h_1, ... h_{n-1}, $h'+t$, h_1', ... h_{n-1}' zu bestimmen, was unmöglich ist. Demnach sind beide Systeme von Unbekannten einander gleich, d. h. man hat

$$(16.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial q_1}{\partial h_i'} = \dfrac{\partial H_i}{\partial p_1}, & \dfrac{\partial q_2}{\partial h_i'} = \dfrac{\partial H_i}{\partial p_2}, \quad \ldots \quad \dfrac{\partial q_n}{\partial h_i'} = \dfrac{\partial H_i}{\partial p_n}, \\[2ex] \dfrac{\partial p_1}{\partial h_i'} = -\dfrac{\partial H_i}{\partial q_1}, & \dfrac{\partial p_2}{\partial h_i'} = -\dfrac{\partial H_i}{\partial q_2}, \quad \ldots \quad \dfrac{\partial p_n}{\partial h_i'} = -\dfrac{\partial H_i}{\partial q_n}. \end{cases}$$

Diesem System von Formeln, welches aus der Vergleichung der Systeme (14.) und (15.) hervorgegangen ist, steht ein anderes zur Seite, welches durch blosse Vertauschung aus diesem hergeleitet werden kann. Die Systeme (14.) und (15.) geben nämlich wiederum richtige Gleichungssysteme, wenn man für alle Werthe des Index i an Stelle der Grössen ohne Strich H_i, h_i die negativ genommenen entsprechenden Grössen mit einem Strich $-H_i'$, $-h_i'$, dagegen an Stelle der Grössen mit einem Strich H_i, h_i' die positiv genommenen entsprechenden Grössen ohne Strich H_i, h_i schreibt. Diese

Art von Vertauschung muss daher auch auf das System (16.) anwendbar sein und ergiebt aus demselben das neue System von Formeln:

$$
(17.)\quad \begin{cases}
\dfrac{\partial q_1}{\partial h_\iota} = -\dfrac{\partial H_\iota'}{\partial p_1}, & \dfrac{\partial q_2}{\partial h_\iota} = -\dfrac{\partial H_\iota'}{\partial p_2}, \quad \dots \quad \dfrac{\partial q_n}{\partial h_\iota} = -\dfrac{\partial H_\iota'}{\partial p_n}, \\[2ex]
\dfrac{\partial p_1}{\partial h_\iota} = \dfrac{\partial H_\iota'}{\partial q_1}, & \dfrac{\partial p_2}{\partial h_\iota} = \dfrac{\partial H_\iota'}{\partial q_2}, \quad \dots \quad \dfrac{\partial p_n}{\partial h_\iota} = \dfrac{\partial H_\iota'}{\partial q_n}.
\end{cases}
$$

Wir fassen das ganze Formelsystem (16.) und (17.) in den vier Gleichungen zusammen:

$$
\frac{\partial q_k}{\partial h_\iota'} = \frac{\partial H_\iota}{\partial p_k}, \qquad \frac{\partial q_k}{\partial h_\iota} = -\frac{\partial H_\iota'}{\partial p_k},
$$

$$
\frac{\partial p_k}{\partial h_\iota'} = -\frac{\partial H_\iota}{\partial q_k}, \qquad \frac{\partial p_k}{\partial h_\iota} = \frac{\partial H_\iota'}{\partial q_k}.
$$

und sprechen das gewonnene Resultat in nachstehendem Satz *) aus:

Denkt man sich vermittelst des in der Hamiltonschen Form aufgestellten Systems der Integrale

$$
H = h, \qquad H_1 = h_1, \quad \dots \quad H_{n-1} = h_{n-1},
$$

$$
H' = h' + t, \qquad H_1' = h_1', \quad \dots \quad H_{n-1}' = h_{n-1}'
$$

einerseits die Constanten h_k, h_k' durch die Variablen p_ι, q_ι und die Zeit t ausgedrückt, andrerseits aus denselben Gleichungen diese Variablen durch die Constanten und t dargestellt, so sind die bei der ersteren Darstellungsweise gebildeten partiellen Differentialquotienten der Constanten nach den Variablen p_ι, q_ι und die bei der letzteren Darstellungsweise gebildeten partiellen Differentialquotienten der Variablen p_ι, q_ι nach den Constanten abgesehen vom Zeichen paarweise einander gleich.

---

*) Dieser Satz ist unter dem 21. Nov. 1838 der Berliner Akademie mitgetheilt. Vgl. *Crelles* Journal, Bd. XXX, p. 117; Math. Werke, Bd. I, p. 277.

(Ende der Jacobischen Vorlesungen über Dynamik.)

Die Integration der nicht linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung *).

Die Integration der partiellen Differentialgleichung $f = h$ oder $H = h$ wurde in der zweiunddreissigsten Vorlesung (pp. 251, 252) auf das System der $\frac{n.n-1}{2}$ simultanen Gleichungen

$$(1.) \qquad (H_i, H_k) = 0$$

zurückgeführt. Sind die Functionen H diesen Gleichungen gemäss bestimmt, so liefern die Gleichungen

$$(2.) \qquad H = h, \quad H_1 = h_1, \quad \dots \quad H_{n-1} = h_{n-1}$$

solche Ausdrücke der p, für welche

$$dV = p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_n dp_n$$

ein vollständiges Differential wird. Statt nun aber die simultane Integration des Systems (1.) mit Hülfe der in der vierunddreissigsten Vorlesung dargelegten Principien fortzuführen, kann man sich die Aufgabe stellen, sofort die Ausdrücke zu finden, welche $p_1, p_2, \dots p_n$ in Folge der Gleichungen (2.) annehmen. Denken wir uns zuerst p_1 als Function der q und der Grössen $p_2, p_3, \dots p_n$ gesucht; sodann, wenn dieses gefunden ist, p_2 als Function der q und der Grössen $p_3, p_4, \dots p_n$ etc., wie dieses in der einunddreissigsten Vorlesung (p. 239) angenommen wurde. Wenn $p_1, p_2, \dots p_i$ gefunden sind, so kann man, ehe man zur Aufsuchung von p_{i+1} übergeht, die erstern Grössen durch $p_{i+1}, p_{i+2}, \dots p_n$ und die q ausdrücken. Die i Gleichungen, denen die Function p_{i+1} dann gleichzeitig zu genügen hat, findet man aus Gleichung (7.) der einunddreissigsten Vorlesung (p. 245), wenn man in dieser i' der Reihe nach durch die Zahlen $1, 2, \dots i$ ersetzt und $i+1$ an die Stelle von i setzt. Da $p_{i'}$ dann von $p_{i+1}, p_{i+2}, \dots p_n$, dagegen p_{i+1} nur von $p_{i+2}, p_{i+3}, \dots p_n$ abhängt, so giebt die angeführte Gleichung folgendes System:

*) *Jacobi* wurde im Frühjahr 1843 durch schwere Krankheit verhindert, seine Vorlesungen über Dynamik zu Ende zu führen. Die Anlage derselben zeigt hinlänglich, dass er als Schluss derselben seine Methode der Integration nicht linearer partieller Differentialgleichungen erster Ordnung vorzutragen beabsichtigte, welche sich in einer im Jahre 1838 verfassten vollständig ausgearbeiteten Abhandlung unter seinen nachgelassenen Papieren vorgefunden hat, und welche von mir im 60sten Bande des mathematischen Journals veröffentlicht worden ist. Unter Zugrundelegung dieser Abhandlung versuche ich hier im Sinne *Jacobis* die Lücke zu ergänzen, welche am Schlusse seiner Vorlesungen über Dynamik geblieben war. *C.*

$$(3.)\quad \begin{cases} 0 = \dfrac{\partial p_{i+1}}{\partial q_1} - \dfrac{\partial p_1}{\partial q_{i+1}} + \dfrac{\partial p_{i+1}}{\partial p_{i+2}}\dfrac{\partial p_1}{\partial q_{i+2}} + \dfrac{\partial p_{i+1}}{\partial p_{i+3}}\dfrac{\partial p_1}{\partial q_{i+3}} + \cdots + \dfrac{\partial p_{i+1}}{\partial p_n}\dfrac{\partial p_1}{\partial q_n} \\ \qquad - \dfrac{\partial p_1}{\partial p_{i+1}}\dfrac{\partial p_{i+1}}{\partial q_{i+1}} - \dfrac{\partial p_1}{\partial p_{i+2}}\dfrac{\partial p_{i+1}}{\partial q_{i+2}} - \dfrac{\partial p_1}{\partial p_{i+3}}\dfrac{\partial p_{i+1}}{\partial q_{i+3}} - \cdots - \dfrac{\partial p_1}{\partial p_n}\dfrac{\partial p_{i+1}}{\partial q_n}, \\ 0 = \dfrac{\partial p_{i+1}}{\partial q_2} - \dfrac{\partial p_2}{\partial q_{i+1}} + \dfrac{\partial p_{i+1}}{\partial p_{i+2}}\dfrac{\partial p_2}{\partial q_{i+2}} + \dfrac{\partial p_{i+1}}{\partial p_{i+3}}\dfrac{\partial p_2}{\partial q_{i+3}} + \cdots + \dfrac{\partial p_{i+1}}{\partial p_n}\dfrac{\partial p_2}{\partial q_n} \\ \qquad - \dfrac{\partial p_2}{\partial p_{i+1}}\dfrac{\partial p_{i+1}}{\partial q_{i+1}} - \dfrac{\partial p_2}{\partial p_{i+2}}\dfrac{\partial p_{i+1}}{\partial q_{i+2}} - \dfrac{\partial p_2}{\partial p_{i+3}}\dfrac{\partial p_{i+1}}{\partial q_{i+3}} - \cdots - \dfrac{\partial p_2}{\partial p_n}\dfrac{\partial p_{i+1}}{\partial q_n}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 = \dfrac{\partial p_{i+1}}{\partial q_i} - \dfrac{\partial p_i}{\partial q_{i+1}} + \dfrac{\partial p_{i+1}}{\partial p_{i+2}}\dfrac{\partial p_i}{\partial q_{i+2}} + \dfrac{\partial p_{i+1}}{\partial p_{i+3}}\dfrac{\partial p_i}{\partial q_{i+3}} + \cdots + \dfrac{\partial p_{i+1}}{\partial p_n}\dfrac{\partial p_i}{\partial q_n} \\ \qquad - \dfrac{\partial p_i}{\partial p_{i+1}}\dfrac{\partial p_{i+1}}{\partial q_{i+1}} - \dfrac{\partial p_i}{\partial p_{i+2}}\dfrac{\partial p_{i+1}}{\partial q_{i+2}} - \dfrac{\partial p_i}{\partial p_{i+3}}\dfrac{\partial p_{i+1}}{\partial q_{i+3}} - \cdots - \dfrac{\partial p_i}{\partial p_n}\dfrac{\partial p_{i+1}}{\partial q_n}. \end{cases}$$

Wir können dies System noch dadurch umformen, dass wir nicht p_{i+1} als Function von $p_{i+2}, p_{i+3}, \ldots p_n, q_1, q_2, \ldots q_n$, sondern eine Gleichung

$$f = \text{Const.}$$

suchen, welche zwischen p_{i+1} und diesen Grössen besteht. Dann ist, wenn $h > i+1$:

$$\frac{\partial f}{\partial p_{i+1}}\frac{\partial p_{i+1}}{\partial p_h} + \frac{\partial f}{\partial p_h} = 0,$$

und für jeden Werth von h:

$$\frac{\partial f}{\partial p_{i+1}}\frac{\partial p_{i+1}}{\partial q_h} + \frac{\partial f}{\partial q_h} = 0.$$

Wenn man also die Gleichungen (3.) mit $\dfrac{\partial f}{\partial p_{i+1}}$ multiplicirt, so nehmen dieselben folgende Form an:

$$(4.)\quad \begin{cases} 0 = \dfrac{\partial f}{\partial q_1} + \dfrac{\partial p_1}{\partial q_{i+1}}\dfrac{\partial f}{\partial p_{i+1}} + \dfrac{\partial p_1}{\partial q_{i+2}}\dfrac{\partial f}{\partial p_{i+2}} + \cdots + \dfrac{\partial p_1}{\partial q_n}\dfrac{\partial f}{\partial p_n} \\ \qquad - \dfrac{\partial p_1}{\partial p_{i+1}}\dfrac{\partial f}{\partial q_{i+1}} - \dfrac{\partial p_1}{\partial p_{i+2}}\dfrac{\partial f}{\partial q_{i+2}} - \cdots - \dfrac{\partial p_1}{\partial p_n}\dfrac{\partial f}{\partial q_n}, \\ 0 = \dfrac{\partial f}{\partial q_2} + \dfrac{\partial p_2}{\partial q_{i+1}}\dfrac{\partial f}{\partial p_{i+1}} + \dfrac{\partial p_2}{\partial q_{i+2}}\dfrac{\partial f}{\partial p_{i+2}} + \cdots + \dfrac{\partial p_2}{\partial q_n}\dfrac{\partial f}{\partial p_n} \\ \qquad - \dfrac{\partial p_2}{\partial p_{i+1}}\dfrac{\partial f}{\partial q_{i+1}} - \dfrac{\partial p_2}{\partial p_{i+2}}\dfrac{\partial f}{\partial q_{i+2}} - \cdots - \dfrac{\partial p_2}{\partial p_n}\dfrac{\partial f}{\partial q_n}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 = \dfrac{\partial f}{\partial q_i} + \dfrac{\partial p_i}{\partial q_{i+1}}\dfrac{\partial f}{\partial p_{i+1}} + \dfrac{\partial p_i}{\partial q_{i+2}}\dfrac{\partial f}{\partial p_{i+2}} + \cdots + \dfrac{\partial p_i}{\partial q_n}\dfrac{\partial f}{\partial p_n} \\ \qquad - \dfrac{\partial p_i}{\partial p_{i+1}}\dfrac{\partial f}{\partial q_{i+1}} - \dfrac{\partial p_i}{\partial p_{i+2}}\dfrac{\partial f}{\partial q_{i+2}} - \cdots - \dfrac{\partial p_i}{\partial p_n}\dfrac{\partial f}{\partial q_n}. \end{cases}$$

Die simultane Integration dieses Systems stützt sich auf die Sätze, welche am Ende der einunddreissigsten Vorlesung und in der vierunddreissigsten Vorlesung gegeben wurden. Ist $p_\varkappa$ irgend eine der Grössen $p_1, p_2, \ldots p_i$, und ist

$$\varphi_\varkappa - p_\varkappa = 0$$

die Gleichung, vermöge deren $p_\varkappa$ sich durch $p_{i+1}, p_{i+2}, \ldots p_n; q_1, q_2, \ldots q_n$ ausdrückt, so ist

$$\frac{\partial(\varphi_\varkappa - p_\varkappa)}{\partial p_{i+h}} = \frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial p_{i+h}} = \frac{\partial p_\varkappa}{\partial p_{i+h}},$$

$$\frac{\partial(\varphi_\varkappa - p_\varkappa)}{\partial q_h} = \frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial q_h} = \frac{\partial p_\varkappa}{\partial q_h};$$

ist aber $h < i+1$, so hat man

$$\frac{\partial(\varphi_\varkappa - p_\varkappa)}{\partial p_h} = 0, \quad \frac{\partial(\varphi_\varkappa - p_\varkappa)}{\partial p_\varkappa} = -1.$$

Die Gleichungen (4.) können daher auch mit Hülfe der Bezeichnung (φ, ψ) so geschrieben werden:

$$(5.) \qquad (f, \varphi_1 - p_1) = 0, \quad (f, \varphi_2 - p_2) = 0, \quad \ldots \quad (f, \varphi_i - p_i) = 0.$$

Bildet man nun den Ausdruck $(\varphi_\varkappa - p_\varkappa, \varphi_\lambda - p_\lambda)$, wo $\varkappa$, λ irgend zwei der Zahlen 1, 2, ... i bedeuten, so findet man

$$(\varphi_\varkappa - p_\varkappa, \varphi_\lambda - p_\lambda) = 0.$$

Denn sowohl $\varphi_\varkappa - p_\varkappa = 0$, als $\varphi_\lambda - p_\lambda = 0$ gehören dem System von Gleichungen an, welche zur Bestimmung der p dienen; nach dem am Ende der einunddreissigsten Vorlesung gegebenen Theoreme muss also obiger Ausdruck verschwinden. Nun wurde in der vierunddreissigsten Vorlesung dargethan, dass, wenn $(\varphi, \psi) = 0$, aus einer Lösung F der Gleichung

$$(f, \varphi) = 0$$

die weiteren sich ableiten lassen:

$$F' = (F, \psi), \quad F'' = (F', \psi) \quad \text{u. s. w.}$$

Wenden wir dies auf irgend zwei Gleichungen

$$(f, \varphi_\varkappa - p_\varkappa) = 0, \quad (f, \varphi_\lambda - p_\lambda) = 0$$

des Systems (5.) an, so folgt, dass aus irgend einer Function F, welche der Gleichung

$$(F, \varphi_\varkappa - p_\varkappa) = 0$$

genügt, eine Reihe von andern Lösungen derselben Gleichung gebildet werden kann, nämlich

$$F' = (F, \varphi_\lambda - p_\lambda), \quad F'' = (F', \varphi_\lambda - p_\lambda) \quad \text{u. s. w.}$$

Endlich also auch: *ist F eine simultane Lösung der Gleichungen*

$$(f, \varphi_1 - p_1) = 0, \quad (f, \varphi_2 - p_2) = 0, \quad \dots \quad (f, \varphi_{h-1} - p_{h-1}) = 0,$$

so sind auch

$$F' = (F, \varphi_h - p_h), \quad F'' = (F', \varphi_h - p_h), \quad \dots$$

simultane Lösungen derselben Gleichungen.

Nehmen wir also an, es sei eine gemeinsame Lösung F der ersten $h-1$ Gleichungen (5.) gefunden, und es soll eine Lösung gesucht werden, welche auch noch der h^{ten} dieser Gleichungen genügt. Dann kann man versuchen, ob es eine dieser letztern Gleichung genügende Function Φ gebe, welche nur eine Function von den aus ihr entwickelten Lösungen $F, F', F'', \dots F^{(\mu-1)}$ und von den Grössen $q_h, q_{h+1}, \dots q_i$ ist, welche letzteren offenbar die $h-1$ ersten Gleichungen (5.) (oder (4.)) befriedigen. Die Zahl μ ist dadurch beschränkt, dass $F^{(\mu)}$ sich durch die vorhergehenden Functionen $F, F', \dots F^{(\mu-1)}$ und durch $q_h, q_{h+1}, \dots q_i$ ausdrücken lässt, dass also

$$F^{(\mu)} = \Pi(F, F', \dots F^{(\mu-1)}, q_h, q_{h+1}, \dots q_i).$$

Nun ist die Gesammtzahl aller gemeinsamen Lösungen, welche $h-1$ von einander unabhängige lineare partielle Differentialgleichungen mit den $2n-i$ Variablen $q_1, q_2, \dots q_i, p_{i+1}, p_{i+2}, \dots p_n$ überhaupt zulassen können:

$$2n-i-(h-1);$$

daher ist die Anzahl der Argumente der Function Π höchstens dieser Zahl gleich, also

$$\mu + i - (h-1) \leqq 2n - i - (h-1),$$

oder

$$\mu \leqq 2(n-i).$$

Sehen wir nun eine Lösung Φ der Gleichung

$$(6.) \qquad (\Phi, \varphi_h - p_h) = 0$$

als eine Function der Argumente von Π allein an, so erhalten wir

$$(7.) \quad \begin{cases} 0 = (\Phi, \varphi_h - p_h) \\ = \dfrac{\partial \Phi}{\partial F}(F, \varphi_h - p_h) + \dfrac{\partial \Phi}{\partial F'}(F', \varphi_h - p_h) + \dots + \dfrac{\partial \Phi}{\partial F^{(\mu-1)}}(F^{(\mu-1)}, \varphi_h - p_h) \\ + \dfrac{\partial \Phi}{\partial q_h}(q_h, \varphi_h - p_h) + \dfrac{\partial \Phi}{\partial q_{h+1}}(q_{h+1}, \varphi_h - p_h) + \dots + \dfrac{\partial \Phi}{\partial q_i}(q_i, \varphi_h - p_h). \end{cases}$$

Da in der h^{ten} Gleichung des Systems (4.) oder (5.) nur nach q_h, nicht aber nach q_{h+1}, q_{h+2}, ... q_i differentiirt wird, so verschwinden die Coefficienten

$$(q_{h+1}, \varphi_h - p_h), \quad (q_{h+2}, \varphi_h - p_h), \quad \dots \quad (q_i, \varphi_h - p_h),$$

und man findet ausserdem:

$$(q_h, \varphi_h - p_h) = 1.$$

Berücksichtigt man ferner das Bildungsgesetz der Functionen F, so sieht man, dass die Gleichung (6.) oder (7.) in folgende übergeht:

$$(8.) \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial q_h} + F' \frac{\partial \Phi}{\partial F} + F'' \frac{\partial \Phi}{\partial F'} + \dots + \Pi \frac{\partial \Phi}{\partial F^{(\mu-1)}} = 0.$$

Der Anblick dieser Gleichung lehrt, dass es wirklich möglich ist, eine Function Φ in der angegebenen Weise zu bestimmen; denn die Coefficienten dieser Gleichung enthalten nur die Variablen, von denen Φ abhängig gedacht wurde.

Um eine Lösung der Gleichung (8.) zu finden, braucht man nur ein Integral des Systems

$$\frac{dF}{dq_h} = F', \qquad \frac{\partial F'}{\partial q_h} = F'', \qquad \dots \qquad \frac{dF^{(\mu-1)}}{dq_h} = \Pi$$

oder, was dasselbe ist, ein erstes Integral der Differentialgleichung μ^{ter} Ordnung

$$\frac{d^\mu F}{dq_h^\mu} = \Pi$$

zu suchen, wo in Π die Grössen F', F'', ... $F^{(\mu-1)}$ durch $\frac{dF}{dq_h}$, $\frac{d^2F}{dq_h^2}$, ... $\frac{d^{\mu-1}F}{dq_h^{\mu-1}}$ zu ersetzen sind.

Man kann dieses Resultat in folgendem Satz aussprechen: *Wenn man eine simultane Lösung der ersten $h-1$ Gleichungen des Systems* (4.) *oder* (5.) *kennt, so erfordert die Auffindung einer Lösung, welche auch noch der h^{ten} Gleichung genügt, nur die Kenntniss eines ersten Integrals einer Differentialgleichung, deren Ordnung die $2(n-i)^{\text{te}}$ nicht übersteigt.*

Um nun überhaupt eine simultane Lösung des Systems (5.) zu finden, hat man nur den soeben durchgemachten Process $i$mal hintereinander auszuführen. Man sucht eine Lösung F der ersten Gleichung (5.) oder ein Integral des Systems von $2(n-i)$ Differentialgleichungen

$$\frac{dp_{i+1}}{dq_1} = \frac{\partial p_1}{\partial q_{i+1}}, \quad \frac{dp_{i+2}}{dq_1} = \frac{\partial p_1}{\partial q_{i+2}}, \quad \dots \quad \frac{dp_n}{dq_1} = \frac{dp_1}{dq_n},$$
$$\frac{dq_{i+1}}{dq_1} = -\frac{\partial p_1}{\partial p_{i+1}}, \quad \frac{dq_{i+2}}{dq_1} = -\frac{\partial p_1}{\partial p_{i+2}}, \quad \dots \quad \frac{dq_n}{dq_1} = -\frac{\partial p_1}{\partial p_n}.$$

Man entwickelt daraus die andern Lösungen derselben Gleichung

$$F' = (F, q_2 - p_2), \quad F'' = (F', q_2 - p_2), \quad \dots \quad F^{(\mu)} = \Pi(F, F', \dots F^{(\mu-1)}, q_2, q_3, \dots q_i).$$

Jedes erste Integral der Gleichung

$$\frac{d^\mu F}{dq_2^\mu} = \Pi\left(F, \frac{dF}{dq_2}, \dots \frac{d^{(\mu-1)}F}{dq_2^{(\mu-1)}}, q_2, q_3, \dots q_i\right)$$

welches eine willkürliche Constante enthält, liefert dann eine Lösung, welche den beiden ersten Gleichungen (5.) genügt. Sei Φ diese Lösung; man bilde

$$\Phi' = (\Phi, q_3 - p_3), \quad \Phi'' = (\Phi', q_3 - p_3), \quad \dots \quad \Phi^{(\nu)} = \Pi(\Phi, \Phi', \dots \Phi^{(\nu-1)}, q_3, q_4, \dots q_i).$$

Jedes erste Integral der Differentialgleichung

$$\frac{d^\nu \Phi}{dq_3^\nu} = \Pi\left(\Phi, \frac{d\Phi}{dq_3}, \frac{d^2\Phi}{dq_3^2}, \dots \frac{d^{\nu-1}\Phi}{dq_3^{\nu-1}}, q_3, q_4, \dots q_i\right),$$

welches eine willkürliche Constante enthält, giebt dann eine Function, welche den ersten drei Gleichungen (5.) genügt. u. s. w.

Die Auffindung einer simultanen Lösung des Systems (5.) oder (4.) erfordert also die Kenntniss je eines ersten Integrals von i Differentialgleichungen, deren erste von der $2(n-i)^{\text{ten}}$ Ordnung ist, während die andern auch von niedrigerer Ordnung sein können.

Der ganze Verlauf des Integrationsgeschäftes erfordert also zunächst die Bestimmung von p_1 aus der gegebenen partiellen Differentialgleichung. Hat man diese geleistet, so sucht man *erstens* ein Integral des Systems von $2n-1$ Differentialgleichungen:

$$\frac{dp_2}{dq_1} = \frac{\partial p_1}{\partial q_2}, \quad \frac{dp_3}{dq_1} = \frac{\partial p_1}{\partial q_3}, \quad \dots \quad \frac{dp_n}{dq_1} = \frac{\partial p_1}{\partial q_n},$$
$$\frac{dq_2}{dq_1} = -\frac{\partial p_1}{\partial p_2}, \quad \frac{dq_3}{dq_1} = -\frac{\partial p_1}{\partial p_3}, \quad \dots \quad \frac{dq_n}{dq_1} = -\frac{\partial p_1}{\partial p_n}.$$

Aus dem gefundenen Integral bestimmt man p_2 als Function der q und der folgenden p, und indem man diese Function in den Ausdruck von p_1 einführt, stellt man p_1 in gleicher Weise dar.

Hierauf sucht man *zweitens* ein Integral des Systems von $2(n-2)$ Differentialgleichungen:

$$\frac{dp_3}{dq_1} = \frac{\partial p_1}{\partial q_3}, \quad \frac{dp_4}{dq_1} = \frac{\partial p_1}{\partial q_4}, \quad \dots \quad \frac{dp_n}{dq_1} = \frac{\partial p_1}{\partial q_n},$$
$$\frac{dq_3}{dq_1} = -\frac{\partial p_1}{\partial p_3}, \quad \frac{dq_4}{dq_1} = -\frac{\partial p_1}{\partial p_4}, \quad \dots \quad \frac{dq_n}{dq_1} = -\frac{\partial p_1}{\partial p_n},$$

wobei die Differentialquotienten von p_1 in dem neuen jetzt festgesetzten Sinne zu nehmen sind. Ein Integral dieses Systems sei $F = \text{Const.}$ Man bilde

$$\begin{aligned} F' &= \frac{\partial F}{\partial q_2} + \frac{\partial p_2}{\partial q_3}\frac{\partial F}{\partial p_3} + \frac{\partial p_2}{\partial q_4}\frac{\partial F}{\partial p_4} + \dots + \frac{\partial p_2}{\partial q_n}\frac{\partial F}{\partial p_n} \\ &\quad - \frac{\partial p_2}{\partial p_3}\frac{\partial F}{\partial q_3} - \frac{\partial p_2}{\partial p_4}\frac{\partial F}{\partial q_4} - \dots - \frac{\partial p_2}{\partial p_n}\frac{\partial F}{\partial q_n}. \\ F'' &= \frac{\partial F'}{\partial q_2} + \frac{\partial p_2}{\partial q_3}\frac{\partial F'}{\partial p_3} + \frac{\partial p_2}{\partial q_4}\frac{\partial F'}{\partial p_4} + \dots + \frac{\partial p_2}{\partial q_n}\frac{\partial F'}{\partial p_n} \\ &\quad - \frac{\partial p_2}{\partial p_3}\frac{\partial F'}{\partial q_3} - \frac{\partial p_2}{\partial p_4}\frac{\partial F'}{\partial q_4} - \dots - \frac{\partial p_2}{\partial p_n}\frac{\partial F'}{\partial q_n}. \end{aligned}$$

u. s. w.

bis man zu einer Function $F^{(\mu)}$ gelangt ($\mu \overline{\gtrless} 2(n-2)$), welche sich als Function von q_2, F, F', ... $F^{(\mu-1)}$ darstellen lässt. Ist dieselbe

$$F^{(\mu)} = \Pi(F, F', \dots F^{(\mu-1)}, q_2),$$

so suche man ein erstes Integral

$$\Phi\left(F, \frac{dF}{dq_2}, \frac{d^2F}{dq_2^2}, \dots \frac{d^{\mu-1}F}{dq_2^{\mu-1}}, q_2\right) = \text{Const.}$$

der Differentialgleichung μ^{ter} Ordnung

$$\frac{d^\mu F}{dq_2^\mu} = \Pi\left(F, \frac{dF}{dq_2}, \frac{d^2F}{dq_2^2}, \dots \frac{d^{\mu-1}F}{dq_2^{\mu-1}}, q_2\right)$$

und bilde die Gleichung

$$\Phi(F, F', F'', \dots F^{(\mu-1)}, q_2) = \text{Const.}$$

Diese Gleichung dient zur Bestimmung von p_3. Hat man dieses durch p_4, p_5, ... p_n und die q ausgedrückt und dadurch auch p_1, p_2 als Functionen eben dieser Grössen dargestellt, so sucht man *drittens* ein Integral des Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\frac{dp_4}{dq_1} = \frac{\partial p_1}{\partial q_4}, \quad \frac{dp_5}{dq_1} = \frac{\partial p_1}{\partial q_5}, \quad \dots \quad \frac{dp_n}{dq_1} = \frac{\partial p_1}{\partial q_n},$$
$$\frac{dq_4}{dq_1} = -\frac{\partial p_1}{\partial p_4}, \quad \frac{dq_5}{dq_1} = -\frac{\partial p_1}{\partial p_5}, \quad \dots \quad \frac{dq_n}{dq_1} = -\frac{\partial p_1}{\partial p_n}.$$

Ist dieses Integral $\Psi = \text{Const.}$, so bilde man wieder

$$\varphi' = \frac{\partial \Psi}{\partial q_2} + \frac{\partial p_2}{\partial q_4}\frac{\partial \Psi}{\partial p_4} + \frac{\partial p_2}{\partial q_5}\frac{\partial \Psi}{\partial p_5} + \cdots + \frac{\partial p_2}{\partial q_n}\frac{\partial \Psi}{\partial p_n}$$
$$- \frac{\partial p_2}{\partial p_4}\frac{\partial \Psi}{\partial q_4} - \frac{\partial p_2}{\partial p_5}\frac{\partial \Psi}{\partial q_5} - \cdots - \frac{\partial p_2}{\partial p_n}\frac{\partial \Psi}{\partial q_n},$$

$$\varphi'' = \frac{\partial \Psi'}{\partial q_2} + \frac{\partial p_2}{\partial q_4}\frac{\partial \Psi'}{\partial p_4} + \frac{\partial p_2}{\partial q_5}\frac{\partial \Psi'}{\partial p_5} + \cdots + \frac{\partial p_2}{\partial q_n}\frac{\partial \Psi'}{\partial p_n}$$
$$- \frac{\partial p_2}{\partial p_4}\frac{\partial \Psi'}{\partial q_4} - \frac{\partial p_2}{\partial p_5}\frac{\partial \Psi'}{\partial q_5} - \cdots - \frac{\partial p_2}{\partial p_n}\frac{\partial \Psi'}{\partial q_n},$$

u. s. w.

bis man zu einer Function

$$\varphi^{(r)} = \Pi(\varphi, \varphi', \ldots \varphi^{(r-1)}, q_2, q_3)$$

gelangt ($r \leqq 2(n-3)$), und suche ein erstes Integral

$$X\left(\varphi, \frac{d\Psi}{dq_2}, \frac{d^2\Psi}{dq_2^2}, \cdots \frac{d^{r-1}\Psi}{dq_2^{r-1}}, q_2, q_3\right) = \text{Const.}$$

der Differentialgleichung r^{ter} Ordnung

$$\frac{d^r\Psi}{dq_2^r} = \Pi\left(\varphi, \frac{d\Psi}{dq_2}, \frac{d^2\Psi}{dq_2^2}, \cdots \frac{d^{r-1}\Psi}{dq_2^{r-1}}, q_2, q_3\right).$$

Aus der Function

$$X(\varphi, \varphi', \varphi'', \ldots \varphi^{(r-1)}, q_2, q_3)$$

bilde man nun die weitern Functionen

$$X' = \frac{\partial X}{\partial q_3} + \frac{\partial p_3}{\partial q_4}\frac{\partial X}{\partial p_4} + \frac{\partial p_3}{\partial q_5}\frac{\partial X}{\partial p_5} + \cdots + \frac{\partial p_3}{\partial q_n}\frac{\partial X}{\partial p_n}$$
$$- \frac{\partial p_3}{\partial p_4}\frac{\partial X}{\partial q_4} - \frac{\partial p_3}{\partial p_5}\frac{\partial X}{\partial q_5} - \cdots - \frac{\partial p_3}{\partial p_n}\frac{\partial X}{\partial q_n},$$

$$X'' = \frac{\partial X'}{\partial q_3} + \frac{\partial p_3}{\partial q_4}\frac{\partial X'}{\partial p_4} + \frac{\partial p_3}{\partial q_5}\frac{\partial X'}{\partial p_5} + \cdots + \frac{\partial p_3}{\partial q_n}\frac{\partial X'}{\partial p_n}$$
$$- \frac{\partial p_3}{\partial p_4}\frac{\partial X'}{\partial q_4} - \frac{\partial p_3}{\partial p_5}\frac{\partial X'}{\partial q_5} - \cdots - \frac{\partial p_3}{\partial p_n}\frac{\partial X'}{\partial q_n},$$

u. s. w.

bis man zu einer Function

$$X^{(\varrho)} = \Pi(X, X', \ldots X^{(\varrho-1)}, q_3)$$

gelangt ($\varrho \leqq 2(n-3)$). Man suche sodann ein erstes Integral

$$\Omega\left(X, \frac{dX}{dq_3}, \cdots \frac{d^{(\varrho-1)}X}{dq_3^{(\varrho-1)}}, q_3\right) = \text{Const.}$$

der Differentialgleichung ϱ^{ter} Ordnung

$$\frac{d^\varrho X}{dq_3^\varrho} = \Pi\left(X, \frac{dX}{dq_3}, \cdots \frac{d^{(\varrho-1)}X}{dq_3^{(\varrho-1)}}, q_3\right).$$

Die Gleichung

$$\Omega(X, X', \dots X^{(\varrho-1)}, q_3) = \text{Const.}$$

dient dann dazu, p_4 durch $p_5, p_6, \dots p_n$ und die q auszudrücken, und also auch p_1, p_2, p_3 durch diese Grössen darzustellen.

Indem man auf diese Weise fortfährt, gelangt man endlich dazu, dass $p_1, p_2, \dots p_{n-1}$ durch p_n und die q ausgedrückt sind. Man sucht dann die letzte Grösse p_n durch die q allein auszudrücken. Und zwar sucht man zunächst ein Integral Ξ des Systems

$$\frac{dp_n}{dq_1} = \frac{\partial p_1}{\partial q_n}, \quad \frac{dq_n}{dq_1} = -\frac{\partial p_1}{\partial p_n}.$$

Man bildet sodann

$$\Xi' = \frac{\partial \Xi}{\partial q_2} + \frac{\partial p_2}{\partial q_n}\frac{\partial \Xi}{\partial p_n} - \frac{\partial p_2}{\partial p_n}\frac{\partial \Xi}{\partial q_n},$$

$$\Xi'' = \frac{\partial \Xi'}{\partial q_2} + \frac{\partial p_2}{\partial q_n}\frac{\partial \Xi'}{\partial p_n} - \frac{\partial p_2}{\partial p_n}\frac{\partial \Xi'}{\partial q_n},$$

von denen jedenfalls die letztere, wenn nicht schon die erstere, sich durch Ξ, beziehungsweise Ξ, Ξ' und die Grössen $q_2, q_3, \dots q_{n-1}$ ausdrücken lässt. Man integrirt dann entweder, wenn

$$\Xi' = \Pi(\Xi, q_2, q_3, \dots q_{n-1})$$

ist, die Gleichung

$$\frac{d\Xi}{dq_2} = \Pi(\Xi, q_2, q_3, \dots q_{n-1}),$$

oder, wenn

$$\Xi'' = \Pi(\Xi, \Xi', q_2, q_3, \dots q_{n-1})$$

ist, die Gleichung

$$\frac{d^2\Xi}{dq_2^2} = \Pi\left(\Xi, \frac{d\Xi}{dq_2}, q_2, q_3, \dots q_{n-1}\right).$$

Indem man den Differentialquotienten von Ξ wieder durch Ξ' ersetzt, gelangt man dann im ersten Falle zu einer Function $Y = Y(\Xi, q_2, q_3, \dots q_{n-1})$, im zweiten Falle zu einer Function $Y = Y(\Xi, \Xi', q_2, q_3, \dots q_{n-1})$. Aus der Function Y werden sodann die Functionen

$$Y' = \frac{\partial Y}{\partial q_3} + \frac{\partial p_3}{\partial q_n}\frac{\partial Y}{\partial p_n} - \frac{\partial p_3}{\partial p_n}\frac{\partial Y}{\partial q_n},$$

$$Y'' = \frac{\partial Y'}{\partial q_3} + \frac{\partial p_3}{\partial q_n}\frac{\partial Y'}{\partial p_n} - \frac{\partial p_3}{\partial p_n}\frac{\partial Y'}{\partial q_n}$$

abgeleitet, u. s. w. Indem man so fortfährt, gelangt man endlich zu einer Function Z, aus welcher man die Functionen

$$Z' = \frac{\partial Z}{\partial q_{n-1}} + \frac{\partial p_{n-1}}{\partial q_n}\frac{\partial Z}{\partial p_n} - \frac{\partial p_{n-1}}{\partial p_n}\frac{\partial Z}{\partial q_n},$$

$$Z'' = \frac{\partial Z'}{\partial q_{n-1}} + \frac{\partial p_{n-1}}{\partial q_n}\frac{\partial Z'}{\partial p_n} - \frac{\partial p_{n-1}}{\partial p_n}\frac{\partial Z'}{\partial q_n}$$

ableitet. Ist schon Z' eine Function Π von Z und q_{n-1}, so integrirt man die Gleichung

$$\frac{dZ}{dq_{n-1}} = \Pi(Z, q_{n-1}),$$

und ihr Integral liefert die letzte Gleichung, vermöge deren p_n sich durch die q ausdrückt. Ist aber erst

$$Z'' = \Pi(Z, Z', q_{n-1}),$$

so sucht man ein erstes Integral der Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{d^2Z}{dq_{n-1}^2} = \Pi\left(Z, \frac{dZ}{dq_{n-1}}, q_{n-1}\right).$$

Ist dieses Integral

$$\Theta\left(Z, \frac{dZ}{dq_{n-1}}, q_{n-1}\right) = \text{Const.}$$

so ist

$$\Theta(Z, Z', q_{n-1}) = \text{Const.}$$

die Gleichung zur Bestimmung von p_n.

Durch diese Operationen ist die Aufsuchung einer vollständigen Lösung der vorgelegten partiellen Differentialgleichung soweit geführt, dass nur noch die Quadratur

$$V = \int (p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_n dq_n)$$

auszuführen bleibt. Wenn man alle vorkommenden Systeme auf je eine gewöhnliche Differentialgleichung höherer Ordnung reducirt, so ist im Ganzen je ein Integral zu suchen für

1 Differentialgleichung $2(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung,
2 Differentialgleichungen $2(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung.
. . . .
i Differentialgleichungen $2(n-i)^{\text{ter}}$ Ordnung,
. . . .
$n-1$ Differentialgleichungen 2^{ter} Ordnung.

Aber nur im ungünstigsten Falle erreichen alle Differentialgleichungen wirklich die hier angegebene Ordnung. Im allgemeinen wird von jeder Klasse nur *eine* Gleichung jene Ordnung erreichen, die Ordnungen der andern aber werden sich mehr oder minder erniedrigen.

Nachgelassene Abhandlungen.

Ueber diejenigen Probleme der Mechanik, in welchen eine Kräftefunction existirt, und über die Theorie der Störungen.

Einleitung.

Wenn ein freies System materieller Punkte von keinen andern Kräften getrieben wird, als solchen, die von ihrer gegenseitigen Anziehung oder Abstossung herrühren, so kann man die Differentialgleichungen ihrer Bewegung vermittelst der partiellen Differentialquotienten einer einzigen Function der Coordinaten der Punkte auf eine einfache Weise darstellen. *Lagrange*, welcher zuerst diese wichtige Bemerkung gemacht hat, hat zugleich aus dieser Form der Differentialgleichungen grossen Vortheil für die analytische Mechanik gezogen. Es musste daher die hohe Aufmerksamkeit der Mathematiker erregen, als Herr *Hamilton*, Professor der Astronomie in Dublin und königlicher Astronom für Irland, in den Philosophical Transactions nachwies, dass man in dem gedachten Falle der Mechanik auch sämmtliche Integralgleichungen der Bewegung vermittelst der partiellen Differentialquotienten einer einzigen Function auf eben so einfache Weise darstellen kann. Es ist dies ohne Zweifel die bedeutendste Erweiterung, welche die analytische Mechanik seit *Lagrange* erfahren hat. Ich werde im Folgenden die von *Hamilton* gefundenen neuen Fundamentaltheoreme aus den bekannten Differentialgleichungen nach Anleitung des Verfassers ableiten, und einige wesentliche Erweiterungen derselben angeben, welche in einigen Fällen sogar für die wirkliche Ausführung der Integrationen bisher nicht bemerkte Vortheile darbieten. Die Theoreme *Hamiltons*, in ihrer Verallgemeinerung aufgefasst, führen die Integration der Differentialgleichungen der Bewegung auf die Integration einer einzigen, nicht linearen, partiellen Differentialgleichung erster Ordnung zurück. Die Theorie dieser partiellen Differentialgleichungen erhält auf diese Weise eine erhöhte Wichtigkeit, indem von ihr ein bedeutender Theil der Probleme der Mechanik abhängig gemacht wird, unter welchem die Bewegung der

Körper unseres Sonnensystems mitinbegriffen ist. Man hat diese Theorie mit Unrecht bisher durch die Arbeiten von *Lagrange* und *Pfaff* für abgethan erachtet, während sie noch einen grossen Spielraum für Untersuchungen darbietet, welche eben so viel neue und wichtige Resultate für die Mechanik versprechen: die Theoreme *Hamiltons* selbst tragen auf bedeutende und unerwartete Weise zur Vervollkommnung dieser Theorie bei, obgleich der Verfasser dieses rein analytische Interesse nicht hervorgehoben hat.

§. 1. Die Bewegungsgleichungen bei Existenz einer Kräftefunction. Gleichung der lebendigen Kraft.

Lagrange hat, in einem sehr ausgedehnten Falle der Mechanik, den Differentialgleichungen der Bewegung die einfache und merkwürdige Form gegeben:

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_i},$$

$$m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y_i},$$

$$m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z_i},$$

oder die den rechtwinkligen Coordinaten parallelen Componenten der auf die verschiedenen Punkte eines Systems wirkenden Kräfte durch die nach den entsprechenden Coordinaten genommenen partiellen Differentialquotienten einer einzigen Function ausgedrückt. Der Fall der Mechanik ist der der Bewegung eines freien Systems materieller Punkte, auf welche Kräfte gegenseitiger Anziehung oder Abstossung wirken; es können überdies die einzelnen Punkte noch nach festen Centren gezogen oder von denselben abgestossen werden, auch von constanten Parallelkräften sollicitirt werden. Man braucht hierbei nicht vorauszusetzen, dass jeder Punkt nach allen übrigen und den festen Centren nach demselben Gesetze angezogen oder von denselben abgestossen wird; nur muss zwischen je zweien sich anziehenden oder abstossenden Punkten des Systems die Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung Statt finden. Die Function U, deren partielle Differentialquotienten die Kräfte geben, kann man die *Kräftefunction* nennen. Für n Punkte, die sich nach dem *Newton*schen Gesetze anziehen, wird sie z. B.

$$U = \Sigma \frac{m_i m_k}{r_{i,k}},$$

wenn $r_{i,k}$ die gegenseitige Distanz zweier Punkte des Systems bedeutet, deren

Massen m_ι und m_k sind, und die Summe auf alle Combinationen je zweier Punkte ausgedehnt wird.

Wenn das System nicht frei, sondern irgend welchen Bedingungen unterworfen ist, sei es, dass die Punkte desselben mit einander oder mit festen Punkten irgendwie verbunden, oder gezwungen sind, sich auf gegebenen Curven oder Oberflächen zu bewegen, so hat *Lagrange* durch glückliche Einführung von Multiplicatoren den Differentialgleichungen der Bewegung dieselbe einfache Form zu erhalten gewusst. Es seien die Bedingungen des Systems ausgedrückt durch die zwischen den Coordinaten der materiellen Punkte gegebenen Gleichungen

$$f = 0, \quad \varphi = 0, \quad \text{etc.},$$

so erhält man für jeden Punkt des Systems, dessen rechtwinklige Coordinaten x_ι, y_ι, z_ι sind, und dessen Masse m_ι ist, die Gleichungen:

$$m_\iota \frac{d^2 x_\iota}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_\iota} + \lambda \frac{\partial f}{\partial x_\iota} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_\iota} + \cdots,$$

$$m_\iota \frac{d^2 y_\iota}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y_\iota} + \lambda \frac{\partial f}{\partial y_\iota} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi}{\partial y_\iota} + \cdots,$$

$$m_\iota \frac{d^2 z_\iota}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z_\iota} + \lambda \frac{\partial f}{\partial z_\iota} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi}{\partial z_\iota} + \cdots,$$

in welchen Formeln die verschiedenen Multiplicatoren λ, λ_1, etc., welche in die partiellen Differentialquotienten der verschiedenen Functionen f, φ, etc. multiplicirt sind, für alle Punkte des Systems dieselben bleiben. Man erhält die Multiplicatoren vermittelst der Auflösung bloss linearer Gleichungen durch die Coordinaten der Punkte und ihre nach den Coordinatenaxen zerlegten Geschwindigkeiten ausgedrückt, indem man die vorstehenden Werthe der zweiten Differentiale der Coordinaten in die zweiten Differentiale der Bedingungsgleichungen $f = 0$, $\varphi = 0$, etc. substituirt.

Man kann immer ein Integral der vorstehenden Differentialgleichungen erhalten, welches von den Bedingungen des Systems unabhängig, und unter dem Namen des Princips der Erhaltung der lebendigen Kraft bekannt ist. Multiplicirt man nämlich die vorstehenden Differentialgleichungen mit

$$\frac{dx_\iota}{dt}, \quad \frac{dy_\iota}{dt}, \quad \frac{dz_\iota}{dt},$$

und addirt alle ähnlichen Gleichungen, die man für die verschiedenen Punkte des Systems erhält, so verschwinden die in die Multiplicatoren λ, λ_1, etc. multiplicirten Ausdrücke vermöge der Bedingungsgleichungen des Systems, und die beiden Seiten der Gleichung werden integrabel. Man erhält nach geschehener Integration die Gleichung:

$$\tfrac{1}{2}\Sigma m_\iota \left\{ \left(\frac{dx_\iota}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_\iota}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_\iota}{dt}\right)^2 \right\} = U+h,$$

oder wenn man mit v_ι die Geschwindigkeit des Punktes, dessen Masse m_ι ist, bezeichnet.

$$\tfrac{1}{2}\Sigma m_\iota v_\iota^2 = U+h,$$

wo h eine hinzugefügte willkürliche Constante ist. Bezeichnet man mit v_ι^0, U^0 die Werthe von v_ι und U zu irgend einer Zeit t_0, so kann man die vorstehende Gleichung auch so schreiben:

$$\tfrac{1}{2}[\Sigma m_\iota v_\iota v_\iota - \Sigma m_\iota v_\iota^0 v_\iota^0] = U - U^0.$$

Den Ausdruck

$$\Sigma m_\iota v_\iota^2$$

nennt man *die lebendige Kraft des Systems*, und die vorstehende Gleichung besagt, dass, wenn ein System materieller Punkte, auf welches Kräfte der oben angegebenen Art wirken, und welches irgend welchen Bedingungen unterworfen ist, in einer gewissen Zeit durch seine Bewegung aus einer Position in eine andere rückt, und man die Bedingungen des Systems, d. h. die Verbindungen der Punkte unter sich oder mit andern festen Punkten, oder die Curven oder Flächen, auf denen die einzelnen Punkte sich zu bewegen gezwungen sind, auf irgend eine beliebige Art abändert, jedoch so, dass das System wieder in einer gewissen Zeit, während dieselben Kräfte darauf wirken, durch seine Bewegung aus der ersten Position in die zweite rücken kann: der Gewinn oder Verlust an lebendiger Kraft am Ende der Bewegung in beiden Fällen ganz der nämliche ist oder sich unverändert erhält. Dieses ist die Eigenschaft des Systems, welche man die *Erhaltung* seiner lebendigen Kraft genannt und welche dem Principe seinen Namen gegeben hat.

Die obige Form der Differentialgleichungen der Bewegung kann auch noch auf den Fall ausgedehnt werden, wo die Punkte des Systems nach andern *beweglichen* Centren gezogen werden, wenn dieselben von den Punkten des Systems keine *Reaction* erleiden, und ihre Bewegung anderweitig gegeben ist. Dies wäre z. B. der Fall der Bewegung eines Cometen, der von den Körpern des Sonnensystems angezogen wird, wenn man die Bewegung dieser letztern als bekannt voraussetzt. Die Kräftefunction U enthält dann noch ausser den Coordinaten der Punkte des Systems die Zeit t *explicite*, und der Satz von der lebendigen Kraft hört auf seine Gültigkeit zu haben. Die Gleichung

$$\tfrac{1}{2}\Sigma m_i r_i'^2 = U + h$$

wird nämlich für diesen Fall

$$\tfrac{1}{2}\Sigma m_i r_i'^2 = U - \int \frac{\partial U}{\partial t}\, dt,$$

wenn $\frac{\partial U}{\partial t}$ den partiellen Differentialquotienten von U nach t bedeutet, insoweit t in U noch ausser den Coordinaten der Punkte vorkommt. Ebensowenig gelten für diesen Fall die andern Principe der Mechanik. In einem besondern Fall indessen, der für mehrere Bewegungen im Sonnensystem eine bedeutende Annäherung abgiebt, wenn man nämlich die Bewegung eines masselosen Punktes sucht, der von zwei Körpern, die sich in einem Kreise gleichförmig um ihren gemeinschaftlichen Schwerpunkt drehen, nach dem *Newton*schen Gesetze angezogen wird, habe ich ein neues Integral gefunden, welches eine gewisse Combination der beiden Principe von der Erhaltung der lebendigen Kraft und der Erhaltung der Flächen darbietet.

Die Vortheile, welche aus der obigen Form der Differentialgleichungen der Bewegung gezogen werden können, bestehen in der Leichtigkeit, mit welcher man vermittelst dieser Form die Probleme der Mechanik in Gleichung setzen, die bekannten Principien der Mechanik beweisen und gehörig begrenzen, ferner alle für nöthig erachteten analytischen Transformationen ausführen kann; endlich ist es durch diese Form möglich geworden, der Methode der Variation der Constanten die grosse Vollkommenheit und Allgemeinheit zu geben, welche sie erreicht hat. Aber in neuster Zeit hat *Hamilton* auf diese Form der Differentialgleichungen Betrachtungen gegründet, welche den Analysten bisher, trotz ihrer Einfachheit und Fruchtbarkeit, entgangen waren, und welche ihn darauf geführt haben, die oben näher bezeichneten Probleme der Mechanik, welche unter dieser Form in Gleichung gesetzt werden können, unter einem ganz neuen Gesichtspunkte darzustellen. Dieser Gesichtspunkt wird desto wichtiger, weil er in Verbindung mit andern Erweiterungen des Integralcalculs für die *Integration* der erwähnten Differentialgleichungen die merkwürdigsten Vortheile darbietet. Man findet die Arbeiten *Hamiltons*, von denen ich hier reden will, in den Philosophical Transactions der Royal Society in zwei Abhandlungen (1834 P. II., 1835 P. I.).

§. 2. Die *Hamilton*sche Form der Integralgleichungen. Die Grundfunction.

Wie *Lagrange* die Differentialgleichungen der Mechanik in den gedachten Fällen durch die partiellen Differentialquotienten einer einzigen Function darstellt: so hat *Hamilton* gezeigt, dass auch sämmtliche *Integrale* derselben durch die partiellen Differentialquotienten einer einzigen Function dargestellt werden können. Ich werde mich im Folgenden zunächst auf die Betrachtung eines ganz freien Systems materieller Punkte beschränken.

Es seien die Massen der n Punkte des Systems $m_1, m_2, m_3, \ldots m_n$, und die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes, dessen Masse m_i ist, x_i, y_i, z_i; es seien ferner die Differentialgleichungen der Bewegung des Systems, wie oben:

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_i},$$

$$m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y_i},$$

$$m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z_i},$$

in welchen Gleichungen dem Index i die Werthe $1, 2, 3, \ldots n$ zu geben sind. Man hat so $3n$ Differentialgleichungen zweiter Ordnung zwischen den $6n$ Coordinaten und der Zeit, deren vollständige Integrale $6n$ Gleichungen zwischen der Zeit, den $6n$ Coordinaten und ihren nach der Zeit genommenen Differentialquotienten sind, welche $6n$ willkürliche Constanten enthalten. Man setze, der Kürze halber, die nach der Zeit genommenen Differentialquotienten der Coordinaten

$$\frac{dx_i}{dt} = x'_i, \qquad \frac{dy_i}{dt} = y'_i, \qquad \frac{dz_i}{dt} = z'_i,$$

und bezeichne mit S das Integral:

$$S = \int_0^t [U + \tfrac{1}{2}\Sigma m_i (x'_i x'_i + y'_i y'_i + z'_i z'_i)]\, dt.$$

Zu den $6n$ willkürlichen Constanten in den $6n$ Integralgleichungen nehme man die Werthe, welche die $6n$ Grössen x_i, y_i, z_i, x'_i, y'_i, z'_i für $t = 0$ annehmen, und welche ich respective mit a_i, b_i, c_i, a'_i, b'_i, c'_i bezeichnen will, so geben die Integralgleichungen des vorgelegten Systems Differentialgleichungen die $6n$ Grössen x_i, y_i, z_i, x'_i, y'_i, z'_i als Functionen von t und von ihren $6n$ Anfangswerthen a_i, b_i, c_i, a'_i, b'_i, c'_i. Man erhält daher durch eine abermalige Integration auch S als Function derselben Grössen.

Die vollständige Integration der vorgelegten Differentialgleichungen giebt $6n$ Gleichungen zwischen der Zeit t, den $6n$ Grössen x_i, y_i, z_i, x'_i, y'_i, z'_i und den $6n$ Grössen a_i, b_i, c_i, a'_i, b'_i, c'_i. Man kann vermittelst dieser Gleichungen auch die $6n$ Grössen x'_i, y'_i, z'_i, a'_i, b'_i, c'_i durch t und die $6n$ Grössen x_i, y_i, z_i, a_i, b_i, c_i, ausdrücken. Substituirt man diese Ausdrücke in den gefundenen Werth von S, so wird auch S eine Function von t und den $6n$ Grössen x_i, y_i, z_i, a_i, b_i, c_i, d. h. S wird eine Function der Coordinaten der Orte, welche die Punkte des Systems in zwei verschiedenen Positionen desselben einnehmen, und der Zwischenzeit, welche das System gebraucht hat, um aus einer Position in die andere zu kommen. Kennt man auf irgend eine Art diesen Ausdruck von S durch t und die $6n$ Grössen x_i, y_i, z_i, a_i, b_i, c_i, so geben nach *Hamilton* die nach diesen letztern genommenen partiellen Differentialquotienten von S unmittelbar die Ausdrücke der $6n$ übrigen Grössen x'_i, y'_i, z'_i, a'_i, b'_i, c'_i durch dieselben Grössen t, x_i, y_i, z_i, a_i, b_i, c_i und mithin die sämmtlichen $6n$ Integralgleichungen des Problems.

Man hat nämlich, wie *Hamilton* zeigt, die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S}{\partial x_i} &= m_i x'_i, & \frac{\partial S}{\partial a_i} &= -m_i a'_i,\\
\frac{\partial S}{\partial y_i} &= m_i y'_i, & \frac{\partial S}{\partial b_i} &= -m_i b'_i,\\
\frac{\partial S}{\partial z_i} &= m_i z'_i, & \frac{\partial S}{\partial c_i} &= -m_i c'_i,
\end{aligned}$$

in welchen dem Index i wieder seine n Werthe $1, 2, 3, \ldots n$ zu geben sind. Die $3n$ Gleichungen rechts sind die endlichen Gleichungen der Bewegung selbst, d. h. $3n$ Gleichungen zwischen den $3n$ Coordinaten x_i, y_i, z_i und der Zeit t mit $6n$ willkürlichen Constanten a_i, b_i, c_i, a'_i, b'_i, c'_i. Die Gleichungen links sind die $3n$ Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen der Zeit t, den Coordinaten x_i, y_i, z_i, und ihren nach der Zeit genommenen Differentialquotienten x'_i, y'_i, z'_i mit nur $3n$ willkürlichen Constanten a_i, b_i, c_i. Diese letztern Gleichungen nennt *Hamilton* auch die *Zwischenintegrale*. Die Function der Zeit t, der Coordinaten der Punkte des Systems und der einer Zeit $t = 0$ entsprechenden, anfänglichen Werthe derselben, welche im Vorstehenden mit S bezeichnet ist, und welche allein sämmtliche Integralgleichungen des Problems giebt, nennt *Hamilton* die *characteristische*- oder die *Grundfunction*.

Die vorstehenden Formeln gelten auch dann, wenn die Kräftefunction U die Zeit t *explicite* enthält, auf welchen Fall *Hamilton* seine Untersuchungen nicht ausgedehnt hat. Wenn die Kräftefunction, wie *Hamilton* dieses voraussetzt, und wie es insgemein der Fall ist, eine blosse Function der Coordinaten ist, welche nicht ausserdem noch die Zeit t explicite enthält, kann man die Function S auf eine einfachere Weise definiren, als es oben geschehen ist. In diesem Falle gilt nämlich, wie wir oben gesehen haben, der Satz von der Erhaltung der lebendigen Kraft, oder die Gleichung

$$\tfrac{1}{2}\Sigma m_i(x'_i x'_i + y'_i y'_i + z'_i z'_i) = U + h,$$

und man hat daher

$$\begin{aligned} S &= \int_0^t [U + \tfrac{1}{2}\Sigma m_i(x'_i x'_i + y'_i y'_i + z'_i z'_i)]\, dt \\ &= \int_0^t \Sigma m_i(x'_i x'_i + y'_i y'_i + z'_i z'_i)\, dt - ht \\ &= 2\int_0^t U dt + ht, \end{aligned}$$

in welchen Formeln man die willkürliche Constante h ebenfalls durch die Anfangs- und Endwerthe der Coordinaten auszudrücken hat.

Um die partiellen Differentialquotienten der Function S nach allen Grössen, die sie enthält, zu kennen, muss noch der Werth von

$$\frac{\partial S}{\partial t}$$

angegeben werden. Bedient man sich, wie bereits im Vorigen geschehen ist, der Charakteristik ∂ für die partielle Differentiation, dagegen der Charakteristik d, wenn man die Coordinaten x_i, y_i, z_i als Functionen der Zeit t betrachtet und nach t vollständig differentiirt, so hat man:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \Sigma\left\{\frac{\partial S}{\partial x_i} x'_i + \frac{\partial S}{\partial y_i} y'_i + \frac{\partial S}{\partial z_i} z'_i\right\},$$

wenn man unter dem Summenzeichen dem i seine Werthe $1, 2, 3, \ldots n$ giebt. Substituirt man in diese Gleichung die Werthe

$$\frac{\partial S}{\partial x_i} = m_i x'_i, \quad \frac{\partial S}{\partial y_i} = m_i y'_i, \quad \frac{\partial S}{\partial z_i} = m_i z'_i,$$

so verwandelt sie sich in folgende:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \Sigma m_i(x'_i x'_i + y'_i y'_i + z'_i z'_i).$$

Anderseits aber erhält man aus der für S gegebenen Definition

$$\frac{dS}{dt} = U + \tfrac{1}{2}\Sigma m_i(x'_i x'_i + y'_i y'_i + z'_i z'_i),$$

und daher durch Vergleichung beider Ausdrücke

$$\frac{\partial S}{\partial t} = U - \tfrac{1}{2}\Sigma m_i(x_i' x_i' + y_i' y_i' + z_i' z_i'),$$

welches der verlangte partielle Differentialquotient von S nach t ist. Wenn U nicht t explicite enthält, so giebt diese Gleichung zufolge des dann Statt findenden Satzes von der lebendigen Kraft:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -h,$$

welche Formel den Ausdruck der Constante h durch die Zeit und die Anfangs- und Endwerthe der Coordinaten giebt.

Die Grundfunction kann auf mannichfache Weise abgeändert werden, zugleich mit den Variabeln, welche sie enthält, ohne ihre characteristische Eigenschaft zu verlieren, das heisst ohne dass sie aufhört, durch ihre partiellen Differentialquotienten die Integralgleichungen des Problems zu geben. *Hamilton* giebt mehrere Functionen an, welche man zur Grundfunction wählen kann. Die merkwürdigste von diesen ist diejenige, welche er seiner ersten Abhandlung zu Grunde gelegt hat, in welcher er statt der Zeit t die Grösse

$$\tfrac{1}{2}\Sigma m_i(x_i' x_i' + y_i' y_i' + z_i' z_i') - U = H,$$

welche nach dem Satze von der lebendigen Kraft eine Constante h wird, als Variable einführt, während die übrigen Variablen der Grundfunction unverändert bleiben. In der elliptischen Bewegung eines Planeten wird

$$h = -\frac{1}{2a},$$

wo a die halbe grosse Axe der Bahn bedeutet. Für diesen Fall ist also diese Wahl der Variablen der Grundfunction dieselbe, die man mehreren Untersuchungen in der Planeten- und Kometentheorie zu Grunde gelegt hat, in welchen man durch die Anfangs- und Endwerthe der Coordinaten und die grosse Axe die Zwischenzeit und die übrigen Elemente der Bahn ausdrückt.

Man kann die neue Grundfunction aus der Function S durch folgende Betrachtung ableiten. Differentiirt man S gleichzeitig nach allen Grössen, die es enthält, so wird zufolge der oben gegebenen Formeln:

$$\begin{aligned}\delta S &= \frac{\partial S}{\partial t}\delta t + \Sigma\left(\frac{\partial S}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial S}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial S}{\partial z_i}\delta z_i\right) \\ &\quad + \Sigma\left(\frac{\partial S}{\partial a_i}\delta a_i + \frac{\partial S}{\partial b_i}\delta b_i + \frac{\partial S}{\partial c_i}\delta c_i\right) \\ &= -H\delta t + \Sigma m_i(x_i'\delta x_i + y_i'\delta y_i + z_i'\delta z_i) \\ &\quad - \Sigma m_i(a_i'\delta a_i + b_i'\delta b_i + c_i'\delta c_i).\end{aligned}$$

Setzt man

$$S = -Ht + V,$$

so folgt hieraus

$$\delta V = t\delta H + \Sigma m_\iota (x'_\iota \delta x_\iota + y'_\iota \delta y_\iota + z'_\iota \delta z_\iota)$$
$$- \Sigma m_\iota (a'_\iota \delta a_\iota + b'_\iota \delta b + c'_\iota \delta c_\iota).$$

Wenn man daher zu Variablen der Function V die Anfangs- und Endwerthe der Coordinaten und die Grösse

$$H = \tfrac{1}{2} \Sigma m_\iota (x'_\iota x'_\iota + y'_\iota y'_\iota + z'_\iota z'_\iota) - U$$

nimmt, so erhält man unmittelbar durch die nach diesen Variablen genommenen partiellen Differentialquotienten von V die $6n$ Grössen x'_ι, y'_ι, z'_ι, a'_ι, b'_ι, c'_ι, und die Zeit t. Die vorstehende Gleichung giebt nämlich die Werthe der $6n+1$ partiellen Differentialquotienten von V:

$$\frac{\partial V}{\partial x_\iota} = m_\iota x'_\iota, \qquad \frac{\partial V}{\partial a_\iota} = -m_\iota a'_\iota,$$
$$\frac{\partial V}{\partial y_\iota} = m_\iota y'_\iota, \qquad \frac{\partial V}{\partial b_\iota} = -m_\iota b'_\iota,$$
$$\frac{\partial V}{\partial z_\iota} = m_\iota z'_\iota, \qquad \frac{\partial V}{\partial c_\iota} = -m_\iota c'_\iota,$$
$$\frac{\partial V}{\partial H} = t.$$

Die Function V wird, wenn man den Werth von S und H substituirt:

$$V = \int_0^t [\tfrac{1}{2} \Sigma m_\iota (x'_\iota x'_\iota + y'_\iota y'_\iota + z'_\iota z'_\iota) + U]\, dt$$
$$+ (\tfrac{1}{2} \Sigma m_\iota (x'_\iota x'_\iota + y'_\iota y'_\iota + z'_\iota z'_\iota) - U)\, t.$$

Dieser Ausdruck wird für den Fall, wo der Satz von der lebendigen Kraft gilt und daher H eine Constante wird, viel einfacher. Man hat dann nämlich:

$$[\tfrac{1}{2}\Sigma m_\iota (x'_\iota x'_\iota + y'_\iota y'_\iota + z'_\iota z'_\iota) - U]\, t = Ht = \int_0^t H\, dt = \int_0^t [\tfrac{1}{2}\Sigma m_\iota (x'_\iota x'_\iota + y'_\iota y'_\iota + z'_\iota z'_\iota) - U]\, dt,$$

und daher

$$V = \int_0^t \Sigma m_\iota (x'_\iota x'_\iota + y'_\iota y'_\iota + z'_\iota z'_\iota)\, dt.$$

Dies ist der von *Hamilton* gegebene Ausdruck von V. Weil in demselben die unter dem Integralzeichen in das Zeitelement multiplicirte Grösse die lebendige Kraft ist, nennt *Hamilton* die Function V auch die *angehäufte lebendige Kraft*.

Wenn die Kräftefunction U nicht t explicite enthält, kann man die Differentialgleichungen der Bewegung blos als Gleichungen erster Ordnung zwischen den $6n$ Grössen x_ι, y_ι, z_ι, x'_ι, y'_ι, z'_ι ohne t betrachten. Man kann nämlich die Differentialgleichungen der Bewegung folgendermassen darstellen:

$$\frac{dx_\iota}{dt} = x'_\iota, \qquad m_\iota \frac{dx'_\iota}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x_\iota},$$

$$\frac{dy_\iota}{dt} = y'_\iota, \qquad m_\iota \frac{dy'_\iota}{dt} = \frac{\partial U}{\partial y_\iota},$$

$$\frac{dz_\iota}{dt} = z'_\iota, \qquad m_\iota \frac{dz'_\iota}{dt} = \frac{\partial U}{\partial z_\iota},$$

oder durch die Proportion

$$\begin{array}{rcccccccc}
dx_1 & : & dx_2 & : & dx_3 & :\ldots: & dx_n & : \\
dy_1 & : & dy_2 & : & dy_3 & :\ldots: & dy_n & : \\
dz_1 & : & dz_2 & : & dz_3 & :\ldots: & dz_n & : \\
dx'_1 & : & dx'_2 & : & dx'_3 & :\ldots: & dx'_n & : \\
dy'_1 & : & dy'_2 & : & dy'_3 & :\ldots: & dy'_n & : \\
dz'_1 & : & dz'_2 & : & dz'_3 & :\ldots: & dz'_n & : \\
= x'_1 & : & x'_2 & : & x'_3 & :\ldots: & x'_n & : \\
y'_1 & : & y'_2 & : & y'_3 & :\ldots: & y'_n & : \\
z'_1 & : & z'_2 & : & z'_3 & :\ldots: & z'_n & : \\
\frac{1}{m_1}\frac{\partial U}{\partial x_1} & : & \frac{1}{m_2}\frac{\partial U}{\partial x_2} & : & \frac{1}{m_3}\frac{\partial U}{\partial x_3} & :\ldots: & \frac{1}{m_n}\frac{\partial U}{\partial x_n} & : \\
\frac{1}{m_1}\frac{\partial U}{\partial y_1} & : & \frac{1}{m_2}\frac{\partial U}{\partial y_2} & : & \frac{1}{m_3}\frac{\partial U}{\partial y_3} & :\ldots: & \frac{1}{m_n}\frac{\partial U}{\partial y_n} & : \\
\frac{1}{m_1}\frac{\partial U}{\partial z_1} & : & \frac{1}{m_2}\frac{\partial U}{\partial z_2} & : & \frac{1}{m_3}\frac{\partial U}{\partial z_3} & :\ldots: & \frac{1}{m_n}\frac{\partial U}{\partial z_n} & ,
\end{array}$$

in welcher t nicht mehr vorkommt. Diese Proportion vertritt die Stelle von $6n-1$ Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen den $6n$ Grössen x_ι, y_ι, z_ι, x'_ι, y'_ι, z'_ι, welche sich, wenn man den Satz von der lebendigen Kraft benutzen will:

$$\tfrac{1}{2}\Sigma m_\iota(x'_\iota x'_\iota + y'_\iota y'_\iota + z'_\iota z'_\iota) = U + h,$$

auf $6n-2$ Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen $6n-1$ Variablen reduciren. Hat man diese Gleichungen vollständig integrirt und dadurch alle ihre Variablen durch eine von ihnen, z. B. x_1, die willkürliche Constante h

und $6n-2$ andre willkürliche Constanten ausgedrückt, so erhält man die Zeit t durch eine einmalige Quadratur vermittelst der Formel:

$$t+\tau=\int\frac{dx_1}{x_1'},$$

wo τ eine neue willkürliche Constante ist. Die Integration der $3n$ Differentialgleichungen zweiter Ordnung kommt daher, wenn U nicht t explicite enthält, auf die Integration von $6n-2$ Differentialgleichungen erster Ordnung, den Satz von der lebendigen Kraft und eine einmalige Quadratur zurück. Wenn t auch explicite in U enthalten ist, also das *eine* Integral der lebendigen Kraft nicht mehr gilt, hat man *zwei* Integrationen mehr auszuführen.

Zur Auffindung von V braucht man nur die $6n-1$ Gleichungen zwischen den $6n$ Grössen x_i, y_i, z_i, x_i', y_i', z_i' zu kennen, *und hat nicht nöthig die Quadratur, welche t giebt, auszuführen.* Man kann nämlich den oben gegebenen Werth von V folgendermassen darstellen:

$$V=\int\Sigma m_i(x_i'dx_i+y_i'dy_i+z_i'dz_i),$$

wo das Integral, wenn man alle Grössen durch x_1 ausgedrückt hat, von $x_1=a_1$ an zu nehmen ist, für welche Grenze man gleichzeitig hat:

$$t=\int_{a_1}^{x_1}\frac{dx_1}{x_1'}.$$

Kennt man also die $6n-1$ Gleichungen zwischen den $6n$ Grössen x_i, y_i, z_i, x_i', y_i', z_i', *so werden t und V jedes unabhängig durch eine Quadratur gefunden.*

Es giebt einen sehr ausgedehnten Fall, der auch die Bewegung der Himmelskörper in sich begreift, in welchem die beiden Quadraturen, durch welche man t und V findet, auf einander zurückkommen, so dass, wenn man t bereits gefunden hat, es keiner andern Quadratur bedarf, um V zu finden, und umgekehrt. Es ist dies der Fall, wenn U eine homogene Function der Coordinaten ist. Ist nämlich U eine homogene Function der Coordinaten von der Dimension ε, so beweist man leicht die Formel:

$$\begin{aligned}\frac{2+\varepsilon}{2}\cdot V &= \varepsilon ht+\Sigma m_i(x_ix_i'+y_iy_i'+z_iz_i')\\ &\quad -\Sigma m_i(a_ia_i'+b_ib_i'+c_ic_i').\end{aligned}$$

Hat man also t und die Grösse

$$\begin{aligned}&\Sigma m_i(x_ix_i'+y_iy_i'+z_iz_i')\\ -&\Sigma m_i(a_ia_i'+b_ib_i'+c_ic_i')\end{aligned}$$

durch h und die $6n$ Grössen x_i, y_i, z_i, a_i, b_i, c_i ausgedrückt, so kennt man durch die vorstehende Formel, ohne weiter eine Quadratur auszuführen, den verlangten Ausdruck der charakteristischen Function V. Für das Weltsystem wird, wie oben angegeben ist, die Kräftefunction:

$$U = \Sigma \frac{m_i m_k}{r_{i,k}},$$

also eine homogene Function der Coordinaten von der $(-1)^{\text{ten}}$ Dimension. Setzt man daher $\varepsilon = -1$, so erhält man für das Weltsystem:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2} V = & -ht + \Sigma m_i (x_i x_i' + y_i y_i' + z_i z_i') \\ & - \Sigma m_i (a_i a_i' + b_i b_i' + c_i c_i'). \end{aligned}$$

Man sieht übrigens aus diesen Formeln, dass man, wenn U eine homogene Function der Coordinaten ist, nicht nur V, sondern auch noch das neue Integral

$$\int V dt$$

allgemein angeben kann.

Wenn U von der $(-2)^{\text{ten}}$ Dimension ist, welches der Fall ist, wenn die Anziehungen sich umgekehrt wie die Cuben der Entfernungen verhalten, so kann man nicht mehr V durch die vorstehenden Formeln bestimmen. Diese geben aber zwei neue Integrale, nämlich die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \Sigma m_i (x_i x_i + y_i y_i + z_i z_i) &= \alpha + 2\beta t + 2ht^2 \\ \Sigma m_i (x_i x_i' + y_i y_i' + z_i z_i') &= \beta + 2ht, \end{aligned}$$

wo α, β willkürliche Constanten sind.

Ich will noch bemerken, dass man aus derselben Quelle einen Satz ableiten kann, der sich auf die Stabilität des Weltsystems bezieht. Sind X, Y, Z die Coordinaten des Schwerpunkts des Systems, und setzt man

$$X' = \frac{dX}{dt}, \quad Y' = \frac{dY}{dt}, \quad Z' = \frac{dZ}{dt},$$

so kann man den Ausdruck

$$\Sigma m_i [(x_i' - X')^2 + (y_i' - Y')^2 + (z_i' - Z')^2]$$

die lebendige Kraft des Systems um seinen Schwerpunkt nennen und leicht den Satz beweisen, dass, wenn irgend ein freies System Körper, welche sich umgekehrt wie die Quadrate der Entfernungen anziehen, *stabil* sein soll, *seine lebendige Kraft um den Schwerpunkt abwechselnd grösser und kleiner werden muss als die Kräftefunction, aber immer kleiner bleiben muss als die doppelte*

Kräftefunction. Wenn für irgend einen Zeitmoment also die lebendige Kraft um den Schwerpunkt des Systems grösser als die doppelte Kräftefunction oder der doppelten Kräftefunction gleich ist, so weiss man, dass das System oder wenigstens einige seiner Theile ins Unendliche auseinandergehn.

§. 3. Die charakteristische Function für die Planetenbewegung.

Um ein einfaches und lehrreiches Beispiel zu haben, wollen wir die charakteristische Function V für die elliptische Bewegung eines Planeten aufsuchen. Man nenne r den *Radius Vector*, a die halbe grosse Axe, k^2 die anziehende Kraft für die Raumeinheit, setze ferner

$$r' = \frac{dr}{dt}$$

und nenne r_0, r'_0 die Anfangswerthe von r, r' und ϱ die den Anfangs- und Endpunkt der Bewegung verbindende Sehne, so wird nach dem von mir für V angegebenen Ausdruck in diesem speciellen Falle:

$$\tfrac{1}{2}V = \frac{k^2}{2a}\cdot t + rr' - r_0 r'_0.$$

Die Masse des bewegten Planeten, die eigentlich als gemeinschaftlicher Factor noch die Grössen V und h afficirt, habe ich hier $= 1$ gesetzt, da sie ganz aus der Rechnung herausgeht; für die Constante h habe ich ihren Ausdruck $-\frac{k^2}{2a}$, den sie für die elliptische Bewegung annimmt, eingeführt. Führt man zwei Hülfswinkel ε und ε' ein, vermittelst der Gleichungen:

$$\sin^2 \tfrac{1}{2}\varepsilon = \frac{r + r_0 + \varrho}{4a},$$

$$\sin^2 \tfrac{1}{2}\varepsilon' = \frac{r + r_0 - \varrho}{4a},$$

so findet man aus den Formeln, die *Gauss* in der *Theoria motus* gegeben,

$$rr' - r_0 r'_0 = k\sqrt{a}(\sin\varepsilon - \sin\varepsilon').$$

Es wird ferner nach der bekannten *Lambert*schen Formel der Ausdruck der Zwischenzeit t:

$$t = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{k}[\varepsilon - \sin\varepsilon - (\varepsilon' - \sin\varepsilon')],$$

und daher

$$V = \frac{k^2}{a}t + 2(rr' - r_0 r'_0)$$

$$= k\sqrt{a}[\varepsilon + \sin\varepsilon - (\varepsilon' + \sin\varepsilon')].$$

Dieser Ausdruck von V ist von dem *Lambert*schen Ausdruck von $\frac{k^2 t}{a}$ nur in dem *Zeichen* der beiden Sinus verschieden. Um denselben, wie verlangt wird, durch die Anfangs- und Endwerthe der Coordinaten auszudrücken, braucht man nur in den Werthen der Winkel ε und ε' für r, r_0 und ϱ die Ausdrücke zu substituiren:

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2},$$
$$r_0 = \sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2},$$
$$\varrho = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2},$$

wo mit x_0, y_0, z_0 die der Zeit $t=0$ entsprechenden Werthe der Coordinaten bezeichnet sind. *Hamilton* kommt auf einem andern Wege zu diesem Ausdruck von V, indem er zuerst den Ausdruck von V ohne Beweis für den allgemeinern Fall eines beliebigen Attractionsgesetzes hinstellt, und dann die besondern Formeln für die elliptische Bewegung daraus ableitet. Setzt man

$$g = \frac{\varepsilon+\varepsilon'}{2}, \quad g' = \frac{\varepsilon-\varepsilon'}{2} \text{ *)}$$

und nennt $2f$ den Winkel, welchen die beiden Radien Vectoren bilden, so erhält man nach einigen Reductionen durch die partielle Differentiation des für V gefundenen Ausdrucks die nachstehenden Formeln:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = x' = \frac{k\sqrt{a}}{\cos f\sqrt{rr_0}}\left[\frac{x-x_0}{\varrho}\sin g - \frac{x}{r}\sin g'\right],$$
$$\frac{\partial V}{\partial y} = y' = \frac{k\sqrt{a}}{\cos f\sqrt{rr_0}}\left[\frac{y-y_0}{\varrho}\sin g - \frac{y}{r}\sin g'\right],$$
$$\frac{\partial V}{\partial z} = z' = \frac{k\sqrt{a}}{\cos f\sqrt{rr_0}}\left[\frac{z-z_0}{\varrho}\sin g - \frac{z}{r}\sin g'\right],$$
$$-\frac{\partial V}{\partial x_0} = x_0' = \frac{k\sqrt{a}}{\cos f\sqrt{rr_0}}\left[\frac{x-x_0}{\varrho}\sin g + \frac{x_0}{r_0}\sin g'\right],$$
$$-\frac{\partial V}{\partial y_0} = y_0' = \frac{k\sqrt{a}}{\cos f\sqrt{rr_0}}\left[\frac{y-y_0}{\varrho}\sin g + \frac{y_0}{r_0}\sin g'\right],$$
$$-\frac{\partial V}{\partial z_0} = z_0' = \frac{k\sqrt{a}}{\cos f\sqrt{rr_0}}\left[\frac{z-z_0}{\varrho}\sin g + \frac{z_0}{r_0}\sin g'\right],$$

wo mit x_0', y_0', z_0' die der Zeit $t=0$ entsprechenden Werthe von x', y', z' bezeichnet sind. Der Winkel g' ist, wie aus den Formeln der Theoria motus erhellt, die halbe Differenz der beiden excentrischen Anomalien; die beiden

*) Die Winkel g und g' sind hier dieselben, welche in der Theoria motus mit h, g bezeichnet sind.

Grössen $\sin g$ und $\sin g'$ sind auch durch die Formel miteinander verbunden:

$$\varrho = 2a \sin g \sin g';$$

nennt man die beiden excentrischen Anomalien E und E^0, so hat man auch:

$$\cos g = e \cos \frac{E + E_0}{2},$$

wo e die Excentricität bedeutet. Nennt man p den halben Parameter, so hat man:

$$\sqrt{ap}.\sin g' = \sin f \sqrt{r r_0}.$$

Sind α, β, γ die Winkel, die die Halbirungslinie des Winkels der beiden Radien Vectoren mit den rechtwinkligen Coordinatenaxen bildet, so kann man aus den für x', y' etc. angegebenen Werthen auch folgende einfache Ausdrücke für $x' - x'_0$, $y' - y'_0$, $z' - z'_0$ ableiten:

$$x' - x'_0 = -\frac{2k \sin f}{\sqrt{p}} \cos \alpha,$$

$$y' - y_0 = -\frac{2k \sin f}{\sqrt{p}} \cos \beta,$$

$$z' - z'_0 = -\frac{2k \sin f}{\sqrt{p}} \cos \gamma,$$

welche Formeln sich ebenfalls bei *Hamilton* angedeutet finden. Von dem für V angegebenen Werthe kann man auch zu dem *Lambert*schen Ausdruck der Zeit zurückkehren vermittelst der Formel:

$$t = \frac{\partial V}{\partial h} = \frac{\partial V}{\partial \frac{-k^2}{2a}} = \frac{2a^2}{k^2} \cdot \frac{\partial V}{\partial a}.$$

Für die *parabolische* Bewegung erhält man aus den obenstehenden Formeln, indem man $a = \infty$ setzt:

$$\sqrt{a}.\varepsilon = \sqrt{a}.\sin \varepsilon = \sqrt{r + r_0 + \varrho},$$

$$\sqrt{a}.\varepsilon' = \sqrt{a}.\sin \varepsilon' = \sqrt{r + r_0 - \varrho},$$

und daher die charakteristische Function:

$$V = 2k[\sqrt{r + r_0 + \varrho} - \sqrt{r + r_0 - \varrho}],$$

während der bekannte Ausdruck der Zwischenzeit wird:

$$t = \frac{1}{6k}[\sqrt{(r + r_0 + \varrho)^3} - \sqrt{(r + r_0 - \varrho)^3}].$$

Dieses sind die hauptsächlichsten Formeln, welche dazu dienen können, die Form, in welcher die Integralgleichungen der elliptischen Bewegung nach der *Hamilton*schen Methode sich darstellen, mit den gewöhnlich bekannten Formen zu vergleichen.

§. 4. Form der Integralgleichungen für unfreie Bewegungen.

Die bisherigen Formeln bezogen sich auf die Bewegung eines freien Systems, für welche die Differentialgleichungen gegeben sind:

$$m_\iota \frac{d^2 x_\iota}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_\iota},$$
$$m_\iota \frac{d^2 y_\iota}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y_\iota},$$
$$m_\iota \frac{d^2 z_\iota}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z_\iota}.$$

Aber *Hamilton* hat bemerkt, dass durch dieselbe Einführung von Multiplicatoren, durch welche *Lagrange* den Differentialgleichungen der Bewegung eines Systems, das irgend welchen Bedingungen unterworfen ist, die Einfachheit der für ein freies System Statt findenden Differentialgleichungen erhalten hat, auch die Integralgleichungen der Bewegung die einfache Form beibehalten können, die er ihnen für den Fall der Bewegung eines freien Systems gegeben hat. Sind nämlich die Bedingungen des Systems durch die Gleichungen $f=0$, $\varphi=0$ etc. ausgedrückt, in welchem Falle *Lagrange* den Differentialgleichungen der Bewegung die Form

$$m_\iota \frac{d^2 x_\iota}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_\iota} + \lambda \frac{\partial f}{\partial x_\iota} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_\iota} + \cdots,$$
$$m_\iota \frac{d^2 y_\iota}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y_\iota} + \lambda \frac{\partial f}{\partial y_\iota} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi}{\partial y_\iota} + \cdots,$$
$$m_\iota \frac{d^2 z_\iota}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z_\iota} + \lambda \frac{\partial f}{\partial z_\iota} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi}{\partial z_\iota} + \cdots$$

gegeben hat, so werden die Integralgleichungen der Bewegung ganz ähnlich:

$$m_\iota x_\iota' = \frac{\partial S}{\partial x_\iota} + l \frac{\partial f}{\partial x_\iota} + l_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_\iota} + \cdots,$$
$$m_\iota y_\iota' = \frac{\partial S}{\partial y_\iota} + l \frac{\partial f}{\partial y_\iota} + l_1 \frac{\partial \varphi}{\partial y_\iota} + \cdots,$$
$$m_\iota z_\iota' = \frac{\partial S}{\partial z_\iota} + l \frac{\partial f}{\partial z_\iota} + l_1 \frac{\partial \varphi}{\partial z_\iota} + \cdots,$$
$$m_\iota a_\iota' = -\frac{\partial S}{\partial a_\iota} + l^0 \frac{\partial f^0}{\partial a_\iota} + l_1^0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial a_\iota} + \cdots,$$
$$m_\iota b_\iota' = -\frac{\partial S}{\partial b_\iota} + l^0 \frac{\partial f^0}{\partial b_\iota} + l_1^0 \frac{\partial \varphi^0}{\partial b_\iota} + \cdots,$$
$$m_\iota c_\iota' = -\frac{\partial S}{\partial c_\iota} + l^0 \frac{\partial f^0}{\partial c_\iota} + l_1^0 \frac{\partial \varphi^0}{\partial c_\iota} + \cdots.$$

wo f^0, φ^0 etc. die Ausdrücke für f, φ etc. bedeuten, wenn man darin für x_i, y_i, z_i ihre Anfangswerthe a_i, b_i, c_i schreibt. Die Multiplicatoren der Differentialgleichungen wurden dadurch bestimmt, dass man die Differentialgleichungen der Bewegung in die *zweiten* Differentiale der Bedingungsgleichungen des Systems,

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = 0, \quad \ldots$$

substituirt. Die Multiplicatoren der ersten $3n$ Integralgleichungen, l, l_1 etc., werden dadurch bestimmt, dass man dieselben in die *ersten* Differentiale der Bedingungsgleichungen $f = 0$, $\varphi = 0$ etc.

$$\Sigma\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} x_i' + \frac{\partial f}{\partial y_i} y_i' + \frac{\partial f}{\partial z_i} z_i'\right) = 0,$$

$$\Sigma\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} x_i' + \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} y_i' + \frac{\partial \varphi}{\partial z_i} z_i'\right) = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

substituirt; ebenso erhält man die Multiplicatoren der letzten $3n$ Integralgleichungen, indem man dieselben in die Differentialgleichungen der Bedingungsgleichungen $f^0 = 0$, $\varphi^0 = 0$, etc.:

$$\Sigma\left(\frac{\partial f^0}{\partial a_i} a_i' + \frac{\partial f^0}{\partial b_i} b_i' + \frac{\partial f^0}{\partial c_i} c_i'\right) = 0,$$

$$\Sigma\left(\frac{\partial \varphi^0}{\partial a_i} a_i' + \frac{\partial \varphi^0}{\partial b_i} b_i' + \frac{\partial \varphi^0}{\partial c_i} c_i'\right) = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

substituirt. Man erhält ganz ähnliche Formeln, wenn man die Function V zur characteristischen Function annimmt. Die Formeln

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H$$

oder

$$\frac{\partial V}{\partial H} = t$$

bleiben ganz dieselben, wie für ein freies System. Ich werde mich im Folgenden wieder auf ein freies System beschränken, jedoch den allgemeinern Fall später unten wieder aufnehmen.

§. 5. Die beiden partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, denen die charakteristische Function genügt.

Das Auffinden der characteristischen Function S oder V nach der oben gegebenen Definition setzt die bereits ausgeführte, vollständige Integration der

Differentialgleichungen der Bewegung voraus. Die *Hamilton*sche Methode giebt dann eine merkwürdige Art, wie man die bereits bekannten Integrale darstellen kann. Aber *Hamilton* hat noch eine andere Definition der charakteristischen Function gegeben, indem er gezeigt hat, wie für den Fall, wo der Satz von der lebendigen Kraft gilt, jede gleichzeitig *zweien* partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung Genüge leistet. Diese *beiden* partiellen Differentialgleichungen vereint dienen ihm zu einer neuen Definition der charakteristischen Function, welche die vollständige Integration des vorgelegten Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen nicht voraussetzt.

Wir haben oben (p. 311.) für die charakteristische Function S die Gleichung gefunden:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = U - \tfrac{1}{2}\Sigma m_i(x_i' x_i' + y_i' y_i' + z_i' z_i').$$

Substituirt man in diese Gleichung die Ausdrücke

$$\frac{\partial S}{\partial x_i} = m_i x_i',$$

$$\frac{\partial S}{\partial y_i} = m_i y_i',$$

$$\frac{\partial S}{\partial z_i} = m_i z_i',$$

so verwandelt sie sich in folgende:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \tfrac{1}{2}\Sigma \frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z_i}\right)^2\right] = U,$$

welches eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung ist. Wenn der Satz von der lebendigen Kraft gilt, ist

$$U - \tfrac{1}{2}\Sigma m_i(x_i' x_i' + y_i' y_i' + z_i' z_i')$$

einer Constante gleich. Bezeichnet man daher mit U_0, wie oben, den Anfangswerth der Kräftefunction, der erhalten wird, wenn man in U für x_i, y_i, z_i ihre der Zeit $t = 0$ entsprechenden Werthe a_i, b_i, c_i setzt, so hat man:

$$\begin{aligned} U &- \tfrac{1}{2}\Sigma m_i(x_i' x_i' + y_i' y_i' + z_i' z_i') \\ &= U_0 - \tfrac{1}{2}\Sigma m_i(a_i' a_i' + b_i' b_i' + c_i' c_i'), \end{aligned}$$

und daher auch:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = U_0 - \tfrac{1}{2}\Sigma m_i(a_i' a_i' + b_i' b_i' + c_i' c_i').$$

Substituirt man in diese Gleichung die Ausdrücke:

$$\frac{\partial S}{\partial a_i} = -m_i a'_i,$$
$$\frac{\partial S}{\partial b_i} = -m_i b'_i,$$
$$\frac{\partial S}{\partial c_i} = -m_i c'_i,$$

so verwandelt sich dieselbe in folgende:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \tfrac{1}{2}\Sigma \frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial a_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial b_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial c_i}\right)^2\right] = U_0,$$

welches eine zweite partielle Differentialgleichung erster Ordnung ist, welcher *Hamiltons* Function S Genüge leistet. *Hamilton* definirt demnach die Function S auch als eine solche Function der Grösse t, der $3n$ Grössen x_i, y_i, z_i und der $3n$ Grössen a_i, b_i, c_i, welche gleichzeitig den beiden partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \tfrac{1}{2}\Sigma \frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z_i}\right)^2\right] = U,$$
$$\frac{\partial S}{\partial t} + \tfrac{1}{2}\Sigma \frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial a_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial b_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial c_i}\right)^2\right] = U_0$$

Genüge leistet. *Hamilton* beweist auch umgekehrt, dass wenn die Function S dieser Definition gemäss bestimmt ist, die $3n$ endlichen Gleichungen:

$$\frac{\partial S}{\partial a_i} = -m_i a'_i,$$
$$\frac{\partial S}{\partial b_i} = -m_i b'_i,$$
$$\frac{\partial S}{\partial c_i} = -m_i c'_i$$

nach einmaliger Differentiation die $3n$ Integrale erster Ordnung:

$$\frac{\partial S}{\partial x_i} = m_i x'_i,$$
$$\frac{\partial S}{\partial y_i} = m_i y'_i,$$
$$\frac{\partial S}{\partial z_i} = m_i z'_i$$

geben, und nach abermaliger Differentiation die Differentialgleichungen der Bewegung:

$$m_i \frac{dx_i'}{dt} = m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_i},$$

$$m_i \frac{dy_i'}{dt} = m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y_i},$$

$$m_i \frac{dz_i'}{dt} = m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z_i},$$

so dass jene $3n$ Gleichungen die vollständigen endlichen Integrale der Differentialgleichungen der Bewegung sind.

Führt man statt der Variablen t die Grösse H und statt der charakteristischen Function S die charakteristische Function V ein, so definirt *Hamilton* ebenso die Function V als eine solche Function der Grössen H, x_i, y_i, z_i, a_i, b_i, c_i, welche gleichzeitig den partiellen Differentialgleichungen:

$$\tfrac{1}{2}\Sigma \frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z_i}\right)^2\right] = U + H,$$

$$\tfrac{1}{2}\Sigma \frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial a_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial b_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial c_i}\right)^2\right] = U_0 + H$$

Genüge leistet, und beweist, dass, wenn umgekehrt die Function V dieser Definition gemäss bestimmt ist, die Gleichungen:

$$\frac{\partial V}{\partial a_i} = -m_i a_i,$$

$$\frac{\partial V}{\partial b_i} = -m_i b_i,$$

$$\frac{\partial V}{\partial c_i} = -m_i c_i$$

die endlichen Integrale der Bewegung sind, aus deren Differentiation die vorgelegten $3n$ Differentialgleichungen zweiter Ordnung, sowie auch die oben angegebenen $3n$ Zwischenintegrale, folgen. Bei dieser letzten Betrachtung ist zu bemerken, dass die $3n$ Constanten a_i, b_i, c_i nicht, wie in den für die charakteristische Function S gegebenen Formeln, alle ganz willkürlich sind, sondern dass zwischen ihnen eine Bedingungsgleichung Statt findet, indem sie der Gleichung:

$$\tfrac{1}{2}\Sigma m_i (a_i a_i + b_i b_i + c_i c_i) = U_0 + H$$

Genüge leisten müssen. Die Grösse H wird hier bei der Integration der beiden vorgelegten Differentialgleichungen als eine Constante betrachtet, weil in ihnen kein nach H genommenes Differential vorkommt. Wenn U die Zeit t auch explicite enthält, so gilt nur jedesmal die erste der beiden angegebenen partiellen Differentialgleichungen. Ausserdem bemerke ich noch, dass man in diesem Falle in der Gleichung für V,

$$\tfrac{1}{2}\Sigma\frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y_i}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z_i}\right)^2\right] = U+H,$$

für t in die Kräftefunction U den Ausdruck zu substituiren hat:

$$t = \frac{\partial V}{\partial H},$$

so dass in diesem Falle in der partiellen Differentialgleichung H als eine der unabhängigen Variablen zu betrachten ist, und daher die partielle Differentialgleichung, wenn die Zeit t in der Kräftefunction explicite vorkommt, eine Variable mehr enthält. Ich werde im Folgenden, wenn ich mich der Function V bediene, immer voraussetzen, dass U nicht auch t explicite enthalte, und daher der Satz von der lebendigen Kraft gilt, und in diesem Falle statt der Grösse H immer ihren constanten Werth h setzen.

Wenn in dem letztern Fall U eine homogene Function von der Dimension ϵ ist, so beweist man leicht, dass $h^{-(\frac{1}{2}+\frac{1}{\epsilon})}.V$ nur von den Verhältnissen der Grössen $h^{\frac{1}{\epsilon}}$, x_i, y_i, z_i, a_i, b_i, c_i abhängt. Hierdurch kann man alsdann die Bestimmung von V auf den Fall reduciren, für welchen $h = 1$.

§. 6. Allgemeineres System von Integralgleichungen. Es genügt, die charakteristische Function der *ersten* partiellen Differentialgleichung zu unterwerfen.

Wenn man es irgendwie unternimmt, die charakteristische Function nach der zuletzt gegebenen Definition aufzusuchen, so fällt es lästig, dass man dabei, wie *Hamilton* verlangt, gleichzeitig auf zwei partielle Differentialgleichungen erster Ordnung Rücksicht nehmen soll. Betrachtet man aber die Analysis, vermittelst welcher *Hamilton* aus den von ihm aufgestellten $3n$ endlichen Gleichungen die $3n$ Zwischenintegrale und die Differentialgleichungen der Bewegung selber ableitet, so sieht man, dass er dazu auf keine Weise seine zweite partielle Differentialgleichung braucht. Mit Wegwerfung dieser Beschränkung kann man nämlich das *Hamilton*sche Theorem allgemeiner und zweckmässiger folgendermassen aussprechen:

Theorem I.

Es sei S eine Function von der Zeit t und den $3n$ rechtwinkligen Coordinaten x_i, y_i, z_i mit $3n$ willkürlichen Constanten α_1, α_2, α_3, $\ldots$ α_{3n}, *welche der partiellen Differentialgleichung Genüge leistet:*

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\tfrac{1}{2}\Sigma\frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x_i}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial y_i}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial z_i}\right)^2\right] = U,$$

wo U irgend eine gegebene Function von t und den $3n$ Grössen x_i, y_i, z_i ist; es seien ferner die Differentialgleichungen der Bewegung eines freien Systems von n materiellen Punkten:

$$m_i\frac{d^2x_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_i},$$

$$m_i\frac{d^2y_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y_i},$$

$$m_i\frac{d^2z_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z_i},$$

so werden die $3n$ vollständigen endlichen Integrale der Bewegung:

$$\beta_1 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_1},$$

$$\beta_2 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_2},$$

$$\beta_3 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_3},$$

$$\cdots\cdots$$

$$\beta_{3n} = \frac{\partial S}{\partial \alpha_{3n}},$$

wo β_1, β_2, β_3, ... β_{3n} $3n$ neue willkürliche Constanten sind: es werden ferner die $3n$ Integrale erster Ordnung:

$$m_i\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial S}{\partial x_i},$$

$$m_i\frac{dy_i}{dt} = \frac{\partial S}{\partial y_i},$$

$$m_i\frac{dz_i}{dt} = \frac{\partial S}{\partial z_i},$$

in welchen Formeln dem Index i seine Werthe 1, 2, 3, 4, ... n zu geben sind.

Es ist noch zu bemerken, dass im vorstehenden Theorem von den $3n$ willkürlichen Constanten, welche die Function S enthalten soll, keine durch blosse Addition mit S verbunden sein darf.

Wir sehen aus dem vorstehenden Theorem, dass auch bei der allgemeineren Definition, die in demselben von der Function S gegeben wird, das Charakteristische dieser Function erhalten bleibt, wenn wir als solches ihre

Eigenschaft setzen, durch ihre partiellen Differentialquotienten unmittelbar die $6n$ Integralgleichungen der Bewegung, die $3n$ endlichen Integrale und die $3n$ Integrale erster Ordnung, zu geben. Nur werden im Allgemeinen die $3n$ willkürlichen Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_{3n}$ nicht die Anfangswerthe der Coordinaten $x_\iota, y_\iota, z_\iota$, noch die $3n$ willkürlichen Constanten $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots \beta_{3n}$ die Anfangswerthe der Grössen $-m_\iota \frac{dx_\iota}{dt}$, $-m_\iota \frac{dy_\iota}{dt}$, $-m_\iota \frac{dz_\iota}{dt}$ sein. Dieses ist aber keineswegs ein Nachtheil, da gerade der Umstand, dass nach der *Hamilton*schen Methode alles durch die Anfangs- und Endwerthe der Coordinaten ausgedrückt werden soll, die Integralgleichungen unnöthig complicirt. Denn es wird in der Regel das Problem, durch die Anfangs- und Endwerthe der Coordinaten und die Zwischenzeit t oder die Constante h alles übrige auszudrücken, nicht vollkommen bestimmt, sondern lässt mehrere Lösungen zu, wie z. B. bei der elliptischen Bewegung zwei Lösungen dieses Problems möglich sind, und es wird durch die Wahl gerade dieser Grössen in die Integralgleichungen eine Irrationalität hineingebracht, die dem Problem selber fremd ist und bei der Wahl anderer Bestimmungsstücke verschwindet. Uebrigens kann man, so oft eine solche Form der Integralgleichungen gefordert wird, sie aus jeder andern herstellen, und es kommt zunächst nur darauf an, irgend eine möglichst einfache aufzufinden, wesshalb es vortheilhaft ist, der charakteristischen Function einen möglichst grossen Spielraum zu lassen. Es ist möglich, dass *Hamilton* gerade dadurch, dass er unnöthiger Weise immer gleichzeitig *zwei* partielle Differentialgleichungen erster Ordnung ins Auge fasste, verhindert worden ist, auf sein Theorem diejenigen Vorschriften anzuwenden, welche *Lagrange* in seiner merkwürdigen Abhandlung in den „Berliner Memoiren" von 1772 für die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung angiebt, und welche, wenngleich sie sich nur auf partielle Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen *drei* Variablen beziehen, selbst in dieser Beschränkung neue merkwürdige und höchst wichtige Theoreme der Mechanik geben, welche den Mathematikern bisher entgangen waren. Ein solches Theorem habe ich vor einiger Zeit der Pariser Akademie der Wissenschaften mitgetheilt*). Diese Betrachtungen erlangen aber dadurch noch eine weit grössere Wichtigkeit, dass es mir seitdem gelungen ist, die *Lagrange*sche Methode auf jede Zahl von Variablen auszudehnen, welche Ausdehnung ich an einem andern Orte bekannt machen werde.

---

*) Vgl. p. 175.

Wenn der Satz von der lebendigen Kraft gilt, und man die Function V als charakteristische Function einführt, so lässt sich das *Hamilton*sche Theorem noch bedeutend vereinfachen, indem man die charakteristische Function so bestimmen kann, dass sie eine Grösse weniger enthält als nach der *Hamilton*schen Definition. Man kann nämlich in diesem Falle folgendes Theorem aufstellen:

Theorem II.

„*Es sei V eine Function der $3n$ rechtwinkligen Coordinaten x_ι, y_ι, z_ι mit $3n-1$ willkürlichen Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{3n-1}$, welche der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung Genüge leistet:*

$$\tfrac{1}{2}\Sigma\frac{1}{m_\iota}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x_\iota}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y_\iota}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z_\iota}\right)^2\right] = U+h,$$

in welcher U eine gegebene Function der Coordinaten und h eine Constante ist; es seien ferner die Differentialgleichungen der Bewegung eines freien Systems materieller Punkte, deren Massen mit $m_1, m_2, \ldots m_n$ bezeichnet sind,

$$m_\iota\frac{d^2x_\iota}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_\iota},$$

$$m_\iota\frac{d^2y_\iota}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y_\iota},$$

$$m_\iota\frac{d^2z_\iota}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z_\iota},$$

so werden die $3n-1$ endlichen Gleichungen zwischen den $3n$ Coordinaten mit $6n-1$ willkürlichen Constanten $h, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{3n-1}, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{3n-1}$ durch die Formeln gegeben:

$$\beta_1 = \frac{\partial V}{\partial \alpha_1},$$

$$\beta_2 = \frac{\partial V}{\partial \alpha_2},$$

$$\cdots\cdots$$

$$\beta_{3n-1} = \frac{\partial V}{\partial \alpha_{3n-1}};$$

die Zeit t erhält man durch die Coordinaten und $3n+1$ willkürliche Constanten ausgedrückt vermittelst der Gleichung:

$$t+\tau = \frac{\partial V}{\partial h},$$

wo τ eine neue willkürliche Constante ist; endlich werden die $3n$ Integrale erster Ordnung:

$$m_\iota \frac{dx_\iota}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_\iota},$$
$$m_\iota \frac{dy_\iota}{dt} = \frac{\partial V}{\partial y_\iota},$$
$$m_\iota \frac{dz_\iota}{dt} = \frac{\partial V}{\partial z_\iota}.$$

welche nur die 3n willkürlichen Constanten h, α_1, α_2, ... α_{3n-1} *enthalten; von den 3n—1 willkürlichen Constanten* α_1, α_2, ... α_{3n-1} *darf keine mit V durch eine blosse Addition verbunden sein.*"

Ich werde im Folgenden im Allgemeinen unter S und V die charakteristischen Functionen verstehen, wie sie in den beiden von mir aufgestellten Theoremen jede durch *eine* partielle Differentialgleichung definirt worden sind; in dem besondern Falle, wenn sie die von *Hamilton* angegebenen bestimmten Integrale bedeuten und durch die Anfangs- und Endwerthe der Coordinaten ausgedrückt werden, werde ich ausdrücklich bemerken, dass es die *Hamilton*schen Functionen sind.

Bei den Anwendungen der beiden aufgestellten Theoreme bedient man sich des ersten Theorems oder der charakteristischen Function S mit Vortheil, wenn die Kräftefunction die Zeit auch neben den Coordinaten explicite enthält; dagegen des zweiten Theorems oder der charakteristischen Function V in dem insgemein vorkommenden Falle, wenn die Kräftefunction eine blosse Function der Coordinaten ist, oder der Satz von der lebendigen Kraft gilt.

§. 7. Ueber den Zusammenhang verschiedener Systeme von Integralgleichungen, welche aus der Benutzung verschiedener vollständiger Lösungen fliessen.

Die charakteristische Function S oder V kann nach der verallgemeinerten Definition derselben, die ich in den Theoremen I. und II. gegeben habe, sehr mannigfache Formen annehmen. Man kann aber a priori wissen, dass jede Form immer auf dieselben vollständigen Integralgleichungen der Bewegung führen muss. Denn die aus der charakteristischen Function abgeleiteten Integralgleichungen genügen den Differentialgleichungen der Bewegung, und man kann dasselbe System Differentialgleichungen nicht auf zwei Arten vollständig integriren, die sich nicht auf einander zurückführen lassen. Ich will aber, um über diesen Gegenstand grösseres Licht zu verbreiten, aus der Natur der verschiedenen Lösungen selbst, welche eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung haben kann, nachweisen, dass alle immer dieselben Differentialgleichungen der Bewegung geben.

Ist die unbekannte Function w der m unabhängigen Variablen y_1, y_2, y_3, ... y_m durch eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung gegeben, so ist im Allgemeinen eine *vollständige* Lösung derselben jeder Ausdruck von w mit m willkürlichen Constanten, welcher der gegebenen partiellen Differentialgleichung Genüge leistet. Aus irgend einer solchen gegebenen vollständigen Lösung kann man die allgemeinste Lösung ableiten, deren die partielle Differentialgleichung fähig ist, und welche eine willkürliche Function von $m-1$ Ausdrücken involvirt. Sind nämlich α_1, α_2, ... α_m die m willkürlichen Constanten, und ist

$$w = f(y_1, y_2, \dots y_m, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m)$$

eine gegebene vollständige Lösung, so setze man eine der m willkürlichen Constanten, z. B. α_m, als eine willkürliche Function der $m-1$ übrigen, α_1, α_2, ... α_{m-1}, und nehme *unter dieser Voraussetzung* die partiellen Differentialquotienten von f nach α_1, α_2, ... α_{m-1}; hiernach erhält man den allgemeinsten Ausdruck von w, indem man aus dem Ausdrucke

$$w = f$$

die $m-1$ Grössen α_1, α_2, ... α_{m-1} vermittelst der Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha_2} = 0, \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha_{m-1}} = 0$$

eliminirt. Nachdem man aus der einen vollständigen Lösung auf diese Weise die allgemeinste Lösung abgeleitet hat, kann man aus dieser wieder unzählige andre vollständige Lösungen ableiten, indem man die eingeführte willkürliche Function auf irgend eine Weise so bestimmt, dass in dieselbe wieder m willkürliche Constanten eingehen.

Die partiellen Differentialgleichungen, durch welche die charakteristischen Functionen definirt worden sind, enthalten nicht die gesuchte Function selber, sondern nur ihre partiellen Differentialquotienten. Hieraus folgt, dass man zu einem gefundenen Ausdrucke der Function, welche der partiellen Differentialgleichung Genüge leistet, immer noch eine willkürliche Constante addiren kann. Von dieser Constante ist bei der Definition der Functionen S und V abstrahirt worden, so dass man zu ihrem Ausdruck eine willkürliche Constante addiren muss, damit er eine vollständige Lösung giebt. Dem eben Gesagten zufolge will ich einer vollständigen Lösung der Differentialgleichung, durch welche w definirt wird, wenn dieselbe w nicht selber enthält, die Form geben:

$$w = f(y_1, y_2, \dots y_m, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{m-1}) + \alpha.$$

Um aus dieser Lösung auf die allgemeinste Art irgend eine andere vollständige Lösung abzuleiten, setze ich

$$\alpha = \psi(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{m-1}, \mu_1, \mu_2, \dots \mu_{m-1}) + \mu,$$

wo $\mu_1, \mu_2, \dots \mu_{m-1}, \mu$ neue m willkürliche Constanten sind und ψ eine gänzlich willkürliche Function bedeutet, und eliminire $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{m-1}$ aus dem Ausdrucke

$$w = f(y_1, y_2, \dots y_m, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{m-1}) + \alpha$$

vermittelst der Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_1} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_2} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha_3} + \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_3} = 0,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha_{m-1}} + \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_{m-1}} = 0,$$

wodurch man eine andere vollständige Lösung erhält, die statt der willkürlichen Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{m-1}, \alpha$ die willkürlichen Constanten $\mu_1, \mu_2, \dots \mu_{m-1}, \mu$ enthält. Es ist nun zu beweisen, dass, wenn man vermittelst der gegebenen vollständigen Lösung die $m-1$ Gleichungen bildet:

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha_1} = \beta_1,$$

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha_2} = \beta_2,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha_{m-1}} = \beta_{m-1},$$

wo $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{m-1}$ und $\beta_1, \beta_2, \dots \beta_{m-1}$ willkürliche Constanten sind, und vermittelst der andern vollständigen Lösung auf dieselbe Weise die Gleichungen

$$\frac{\partial w}{\partial \mu_1} = \nu_1,$$

$$\frac{\partial w}{\partial \mu_2} = \nu_2,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\frac{\partial w}{\partial \mu_{m-1}} = \nu_{m-1},$$

wo $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_{m-1}$ und $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_{m-1}$ ebenfalls willkürliche Constanten sind, beide Systeme von Gleichungen auf einander zurückkommen.

Um dieses zu beweisen, bemerke ich, dass man, weil die nach α_1, $\alpha_2, \ldots \alpha_{m-1}$ genommenen partiellen Differentialquotienten von

$$w = f + \psi$$

identisch gleich Null sind, die partiellen Differentialquotienten derselben Function, nach $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_{m-1}$ genommen, nur aus der Differentiation von ψ hervorgehen, und nur insofern ψ diese Constanten ausser in $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{m-1}$ noch explicite enthält.

Man hat daher

$$\frac{\partial w}{\partial \mu_1} = \frac{\partial \psi}{\partial \mu_1},$$
$$\frac{\partial w}{\partial \mu_2} = \frac{\partial \psi}{\partial \mu_2},$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$\frac{\partial w}{\partial \mu_{m-1}} = \frac{\partial \psi}{\partial \mu_{m-1}}.$$

Setzt man hier die Ausdrücke linker Hand willkürlichen Constanten $\nu_1, \nu_2, \ldots$ ν_{m-1} gleich, so werden auch die Ausdrücke rechter Hand willkürlichen Constanten gleich, so dass man $m-1$ Gleichungen zwischen den $m-1$ Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{m-1}$ und willkürlichen Constanten hat, wodurch diese Grössen α_1, $\alpha_2, \ldots \alpha_{m-1}$ selbst willkürlichen Constanten gleich werden. Es werden daher auch die Ausdrücke

$$\frac{\partial \psi}{\partial \alpha_1}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_2}, \quad \ldots \quad \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_{m-1}}$$

willkürlichen Constanten gleich, und daher auch nach den obigen Gleichungen die Ausdrücke

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha_2}, \quad \ldots \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha_{m-1}},$$

was zu beweisen war. Die Willkürlichkeit der Constanten $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_{m-1}$ und $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_{m-1}$ reicht hier hin, um die Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{m-1}$ und $\frac{\partial f}{\partial \alpha_1}, \frac{\partial f}{\partial \alpha_2}, \ldots \frac{\partial f}{\partial \alpha_{m-1}}$ ebenfalls ganz willkürlichen Constanten gleich zu machen.

§. 8. Die charakteristische Function für das Problem der Planetenbewegung aus der partiellen Differentialgleichung entwickelt.

Um ein Beispiel zu geben, wie es in besondern Fällen möglich ist, durch directe Betrachtung der partiellen Differentialgleichung die charakteristische Function zu finden, will ich den oben für die elliptische Bewegung eines Planeten gegebenen Ausdruck von V aus der partiellen Differentialgleichung ableiten, durch welche V für diesen Fall definirt wird. Setzt man statt der Constante h wieder $-\frac{k^2}{2a}$, so wird die für die elliptische Bewegung zu integrirende partielle Differentialgleichung erster Ordnung:

$$\tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right] = k^2\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{2a}\right).$$

Ich setze voraus, man wisse, V könne durch $r+r_0$ und durch ϱ ausgedrückt werden, oder mache diese Annahme, welche sich durch den Erfolg rechtfertigt: so reicht dieses hin, den Ausdruck von V aus der partiellen Differentialgleichung selber zu finden. Da nämlich

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2},$$
$$\varrho = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2},$$

so hat man

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial r}\cdot\frac{x}{r}+\frac{\partial V}{\partial \varrho}\cdot\frac{x-x_0}{\varrho},$$
$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial r}\cdot\frac{y}{r}+\frac{\partial V}{\partial \varrho}\cdot\frac{y-y_0}{\varrho},$$
$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial V}{\partial r}\cdot\frac{z}{r}+\frac{\partial V}{\partial \varrho}\cdot\frac{z-z_0}{\varrho},$$

und daher, da

$$2x(x-x_0)+2y(y-y_0)+2z(z-z_0) = \varrho^2+r^2-r_0^2,$$

wenn man die vorstehenden Gleichungen quadrirt und addirt,

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2$$
$$= \left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2+\frac{\varrho^2+r^2-r_0^2}{r\varrho}\,\frac{\partial V}{\partial r}\,\frac{\partial V}{\partial \varrho}+\left(\frac{\partial V}{\partial \varrho}\right)^2.$$

Man schafft bekanntlich den mittelsten Coefficienten fort, wenn man statt r und ϱ ihre Summe und Differenz einführt, oder weil man annimmt, r und r_0 seien in dem Ausdruck von V immer verbunden, setzt man:

$$r+r_0+\varrho = \sigma,$$
$$r+r_0-\varrho = \sigma':$$

dann hat man

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\partial V}{\partial \sigma}+\frac{\partial V}{\partial \sigma'},$$
$$\frac{\partial V}{\partial \varrho} = \frac{\partial V}{\partial \sigma}-\frac{\partial V}{\partial \sigma'},$$

und daher:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2 + \frac{\varrho^2+r^2-r_0^2}{r\varrho}\frac{\partial V}{\partial r}\frac{\partial V}{\partial \varrho} + \left(\frac{\partial V}{\partial \varrho}\right)^2$$
$$= \frac{(\varrho+r)^2-r_0^2}{r\varrho}\left(\frac{\partial V}{\partial \sigma}\right)^2 + \frac{r_0^2-(r-\varrho)^2}{r\varrho}\left(\frac{\partial V}{\partial \sigma'}\right)^2$$
$$= \frac{1}{r\varrho}\left[\sigma(\sigma-2r_0)\left(\frac{\partial V}{\partial \sigma}\right)^2 + \sigma'(2r_0-\sigma')\left(\frac{\partial V}{\partial \sigma'}\right)^2\right].$$

Multiplicirt man daher mit $2r\varrho$, so wird die gegebene partielle Differentialgleichung:

$$\sigma(\sigma-2r_0)\left(\frac{\partial V}{\partial \sigma}\right)^2 + \sigma'(2r_0-\sigma')\left(\frac{\partial V}{\partial \sigma'}\right)^2$$
$$= k^2\varrho\left(2-\frac{r}{a}\right) = k^2(\sigma-\sigma') - \frac{k^2}{4a}(\sigma^2-\sigma'^2) + \frac{k^2}{2a}(\sigma-\sigma')r_0.$$

Soll V eine blosse Function von σ, σ' sein, die nicht ausserdem noch r_0 enthält, so müssen in der vorstehenden Differentialgleichung die in r multiplicirten Glieder besonders einander gleich sein. Die Differentialgleichung muss daher in die beiden zerfallen:

$$\sigma^2\left(\frac{\partial V}{\partial \sigma}\right)^2 - \sigma'^2\left(\frac{\partial V}{\partial \sigma'}\right)^2 = k^2\frac{(\sigma-\sigma')}{4a}(4a-\sigma-\sigma'),$$
$$\sigma\left(\frac{\partial V}{\partial \sigma^2}\right)^2 - \sigma'\left(\frac{\partial V}{\partial \sigma'}\right)^2 = -k^2\frac{(\sigma-\sigma')}{4a}.$$

woraus

$$\sigma\left(\frac{\partial V}{\partial \sigma}\right)^2 = k^2.\frac{4a-\sigma}{4a}, \quad \text{oder} \quad \frac{\partial V}{\partial \sigma} = k\sqrt{\frac{4a-\sigma}{4a\sigma}},$$
$$\sigma'\left(\frac{\partial V}{\partial \sigma'}\right)^2 = k^2.\frac{4a-\sigma'}{4a}, \quad \text{oder} \quad \frac{\partial V}{\partial \sigma'} = -k\sqrt{\frac{4a-\sigma'}{4a\sigma'}}.$$

wo ich in der zweiten Gleichung die Wurzelgrösse negativ nehme, um eine Uebereinstimmung mit den oben aufgefundenen Formeln zu erhalten.

Hier trifft es sich nun, was die Rechtfertigung der Annahme ist, dass beide Gleichungen gleichzeitig integrirt werden können, indem die eine bloss σ, die andre bloss σ' enthält. Man erhält nämlich:

$$V = k\int\sqrt{\frac{4a-\sigma}{4a\sigma}}\,d\sigma - k\int\sqrt{\frac{4a-\sigma'}{4a\sigma'}}\,d\sigma',$$

welche Gleichung man, wenn man von der hinzuzufügenden Constante abstrahirt, auch so darstellen kann:

$$V = k\int_{\sigma'}^{\sigma}\sqrt{\frac{4a-x}{4ax}}\,dx.$$

Setzt man, um die Integration auszuführen:

$$\sin^2\varphi = \frac{x}{4a},$$

so erhält man:

$$k\int\sqrt{\frac{4a-x}{4ax}}\,dx = 4k\sqrt{a}\int\cos^2\varphi\,d\varphi = k\sqrt{a}[2\varphi+\sin 2\varphi].$$

Nennt man daher ε und ε' die Grenzwerthe von 2φ, so dass

$$\sin^2\tfrac{1}{2}\varepsilon = \frac{\sigma}{4a} = \frac{r+r_0+\varrho}{4a},$$

$$\sin^2\tfrac{1}{2}\varepsilon' = \frac{\sigma'}{4a} = \frac{r+r_0-\varrho}{4a},$$

so wird der angegebene Werth von V,

$$V = k\sqrt{a}[\varepsilon+\sin\varepsilon-(\varepsilon'+\sin\varepsilon')],$$

welches der oben gefundene Ausdruck ist, aus dem man dann alle Integralgleichungen der elliptischen Bewegung ableiten kann. Wir sehen so, dass man durch die alleinige Annahme, V sei eine Function bloss von $r+r_0$ und ϱ, auf ganz directem Wege V aus der partiellen Differentialgleichung bestimmen kann. Wenn man die beiden Quadratwurzeln, die ich mit entgegengesetztem Zeichen genommen habe, mit demselben Zeichen nimmt, erhält man die zweite Ellipse, welche dem Problem genügt. Man erhält bekanntlich die beiden Ellipsen, welche durch dieselben beiden Punkte gehen, dieselbe Länge der grossen Axe $2a$, und den einen Brennpunkt gemein haben, wenn man als ihre zweiten Brennpunkte die beiden Durchschnittspunkte der Kreise nimmt, die man aus dem Anfangspunkt mit dem Halbmesser $2a-r_0$ und aus dem Endpunkt mit dem Halbmesser $2a-r$ beschreibt.

§. 9. Andere Methoden, welche bei beliebigem Anziehungsgesetz brauchbar bleiben.

Die im Vorigen gebrauchte Methode hört für ein anderes als das *Newton*sche Anziehungsgesetz auf anwendbar zu sein. Man kann sich aber für den Fall, wo das Gesetz der Anziehung durch irgend eine beliebige Function der Entfernung ausgedrückt wird, folgender Methode bedienen.

Es sei das Gesetz der Anziehung ausgedrückt durch

$$-\frac{\partial f(r)}{\partial r},$$

so wird $f(r)$ die Kräftefunction, und die zu integrirende Differentialgleichung:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 = 2f(r)+2h.$$

Führt man Polarcoordinaten ein, indem man

$$x = r\cos\eta,$$
$$y = r\sin\eta\cos\vartheta,$$
$$z = r\sin\eta\sin\vartheta$$

setzt, so erhält man:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2$$
$$=\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial \eta}\right)^2+\frac{1}{\sin^2\eta}\left(\frac{\partial V}{\partial \vartheta}\right)^2\right]=2f(r)+2h.$$

Von dem Ausdruck

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \eta}\right)^2+\frac{1}{\sin^2\eta}\left(\frac{\partial V}{\partial \vartheta}\right)^2$$

ist bekannt, dass er bei einer Transformation der rechtwinkligen Coordinatenaxen ungeändert bleibt. Da er nun $=1$ wird, für $V=\eta$, so wird er auch $=1$ werden, wenn allgemeiner man für V den Winkel setzt, den der Radius Vector mit irgend einer constanten Linie bildet. Bedeuten $\cos\alpha$, $\sin\alpha\cos\beta$, $\sin\alpha\sin\beta$ die Cosinus der Winkel, welche die constante Linie mit den Coordinatenaxen bildet, so wird bekanntlich der Winkel, den sie mit dem Radius Vector bildet:

$$\text{Arc.}\cos(\cos\alpha\cos\eta+\sin\alpha\sin\eta\cos(\vartheta-\beta)),$$

und daher, wenn man

$$w = \text{Arc.}\cos(\cos\alpha\cos\eta+\sin\alpha\sin\eta\cos(\vartheta-\beta))$$

setzt,

$$\left(\frac{\partial w}{\partial \eta}\right)^2+\frac{1}{\sin^2\eta}\left(\frac{\partial w}{\partial \vartheta}\right)^2 = 1,$$

wovon man sich leicht durch Ausführung der Rechnung überzeugt. Setzt man daher:

$$V = bw+R,$$

wo b eine neue willkürliche Constante und R eine blosse Function von r ist, so verwandelt sich die vorgelegte partielle Differentialgleichung in folgende:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial \eta}\right)^2+\frac{1}{\sin^2\eta}\left(\frac{\partial V}{\partial \vartheta}\right)^2\right]$$
$$=\left(\frac{\partial R}{\partial r}\right)^2+\frac{b^2}{r^2}=2f(r)+2h,$$

woraus

$$R = \int\sqrt{2f(r)+2h-\frac{b^2}{r^2}}\,dr.$$

Man erhält daher für die charakteristische Function V den Ausdruck:

$$V = b\,\mathrm{Arc.}\cos(\cos\alpha\cos\eta + \sin\alpha\sin\eta\cos(\vartheta-\beta))$$
$$+\int\sqrt{2f(r)+2h-\frac{b^2}{r^2}}\,dr,$$

in welchem b, α, β, h willkürliche Constanten sind.

Nach dem Theorem II. ist es für unsern Fall, wo $n=1$, nur nöthig, dass die charakteristische Function V ausser h noch 2 willkürliche Constanten enthält. Da der Ausdruck von V, welchen wir gefunden haben, ausser h *drei* willkürliche Constanten enthält, so kann man einer von ihnen einen bestimmten Werth beilegen, oder allgemeiner, sie irgendwie durch die beiden andern ausdrücken. Man kann auch ihre Zahl dadurch um eine verringern, dass man den nach einer derselben genommenen partiellen Differentialquotienten von V gleich Null setzt, und dieselbe vermittelst dieser Gleichung eliminirt. Man kann sie aber auch alle beibehalten und nach jeder besonders V partiell differentiiren: man wird dann, wenn man diese partiellen Differentialquotienten Constanten gleich setzt, um die endlichen Integralgleichungen des Problems zu haben, zwischen diesen Constanten eine Relation erhalten. Man hat demnach für die Bahn des Punktes die Gleichungen:

$$\frac{\partial V}{\partial b} = w - b\int\frac{dr}{r^2\sqrt{2f(r)+2h-\frac{b^2}{r^2}}} = b',$$

$$\frac{\partial V}{\partial\alpha} = \frac{(b\sin\alpha\cos\eta - \cos\alpha\sin\eta\cos(\vartheta-\beta))}{\sin w} = \alpha',$$

$$\frac{\partial V}{\partial\beta} = \frac{-b\sin\alpha\sin\eta\sin(\vartheta-\beta)}{\sin w} = \beta',$$

wo w durch die Gleichung

$$\cos w = \cos\alpha\cos\eta + \sin\alpha\sin\eta\cos(\vartheta-\beta)$$

bestimmt ist. Die Relation zwischen den Constanten erhält man durch die Gleichung:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial\alpha}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2\alpha}\left(\frac{\partial V}{\partial\beta}\right)^2 = \alpha'\alpha' + \frac{\beta'\beta'}{\sin^2\alpha} = b^2,$$

so dass die beiden letzten Gleichungen nur die Stelle von einer vertreten. Die Zeit erhält man durch die Gleichung:

$$t+\tau = \frac{\partial V}{\partial h} = \int\frac{dr}{\sqrt{2f(r)+2h-\frac{b^2}{r^2}}}.$$

Die Integrale erster Ordnung werden:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{dx}{dt} = \frac{-b(\cos\alpha - \cos\eta\cos w)}{r\sin w} + \cos\eta\sqrt{2f(r)+2h-\frac{b^2}{r^2}},$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{dy}{dt} = \frac{-b(\sin\alpha\cos\beta - \sin\eta\cos\vartheta\cos w)}{r\sin w} + \sin\eta\cos\vartheta\sqrt{2f(r)+2h-\frac{b^2}{r^2}},$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{dz}{dt} = \frac{-b(\sin\alpha\sin\beta - \sin\eta\sin\vartheta\cos w)}{r\sin w} + \sin\eta\sin\vartheta\sqrt{2f(r)+2h-\frac{b^2}{r^2}}.$$

Führt man statt der Differentiale der rechtwinkligen Coordinaten die Differentiale der Polarcoordinaten ein, so erhält man hieraus

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{2f(r)+2h-\frac{b^2}{r^2}} = \frac{\partial V}{\partial r},$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{b(\cos\alpha\sin\eta - \sin\alpha\cos\eta\cos(\vartheta-\beta))}{r^2\sin w} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial V}{\partial\eta},$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{b\sin\alpha\sin(\vartheta-\beta)}{r^2\sin\eta\sin w} = \frac{1}{r^2\sin^2\eta}\frac{\partial V}{\partial\vartheta}.$$

Ich bemerke noch, dass die hier angewandte Analysis sich auf den allgemeinern Fall ausdehnen lässt, wo man statt dreier Variablen eine beliebige Anzahl derselben hat. Ist nämlich:

$$\sqrt{(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)} = r,$$

und die partielle Differentialgleichung gegeben:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x_2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{\partial V}{\partial x_n}\right)^2 = f(r),$$

so erhält man

$$V = bw+\int\sqrt{f(r)-\frac{b^2}{r^2}}\cdot dr,$$

wo

$$\cos w = \frac{\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\cdots+\alpha_n x_n}{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\cdots+\alpha_n^2}\cdot r}$$

und b, α_1, α_2, ... α_n willkürliche Constanten sind. *Hamilton* giebt in dem Fall eines beliebigen Anziehungsgesetzes seine charakteristische Function für die Bewegung beider Körper um ihren Schwerpunkt. Wenn man sie, was leicht geschieht, dahin vereinfacht, dass sie sich auf die relative Bewegung des einen um den andern bezieht, so wird man noch eine wesentliche Differenz zwischen derselben und der hier gefundenen Function V bemerken. Man erhält aus dieser letztern die complicirtere *Hamilton*sche Function, indem man b vermittelst der Gleichung

$$\frac{\partial V}{\partial b} = w - \int \frac{b\,dr}{r^2 \sqrt{2f(r) + 2h - \frac{b^2}{r^2}}} = 0$$

eliminirt, für die constante Linie die Anfangsposition des Radius Vectors nimmt und die Integration von r_0 anfangen lässt.

Man kann endlich zur Integration der vorliegenden partiellen Differentialgleichung

$$\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial V}{\partial \eta}\right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \eta}\left(\frac{\partial V}{\partial \vartheta}\right)^2 = 2f(r) + 2h$$

auch noch folgenden Weg einschlagen. Es ist bekannt, *dass man jede partielle Differentialgleichung erster Ordnung, in welcher die gesuchte Function nicht selber vorkommt, in eine andre verwandeln kann, in welcher die nach mehreren Variablen genommenen partiellen Differentialquotienten durch neue Variable, und jene Variablen durch die nach den neuen Variablen genommenen partiellen Differentialquotienten ersetzt werden, die übrigen Variablen unverändert bleiben, die nach ihnen genommenen partiellen Differentialquotienten aber sämmtlich das Zeichen ändern.* Ist nämlich x eine Function von x_1, x_2, ... x_m und setzt man

$$dx = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \cdots + p_m dx_m,$$

so giebt die Gleichung

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_k x_k - x = y,$$

folgende:

$$\begin{aligned} dy &= x_1 dp_1 + x_2 dp_2 + \cdots + x_k dp_k \\ &\quad - [p_{k+1} dx_{k+1} + p_{k+2} dx_{k+2} + \cdots + p_m dx_m]. \end{aligned}$$

Führt man daher p_1, p_2, ... p_k statt der Grössen x_1, x_2, ... x_k als Variable ein und betrachtet y statt x als gesuchte Function, so erhält man:

$$x_1 = \frac{\partial y}{\partial p_1}, \quad x_2 = \frac{\partial y}{\partial p_2}, \quad \ldots \quad x_k = \frac{\partial y}{\partial p_k},$$

$$p_{k+1} = -\frac{\partial y}{\partial x_{k+1}}, \quad p_{k+2} = -\frac{\partial y}{\partial x_{k+2}}, \quad \ldots \quad p_m = -\frac{\partial y}{\partial x_m}.$$

Hat man nun für x eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung, in welcher x nicht selber vorkommt, oder eine Gleichung zwischen x_1, x_2, ... x_m und den nach diesen Grössen genommenen partiellen Differentialquotienten der Function x, die wir p_1, p_2, ... p_m genannt haben, so erhält man die partielle Differentialgleichung für y, wenn man die vorstehenden Gleichungen substituirt, welches genau die angegebene Abänderung in der partiellen Differentialgleichung hervorbringt.

Es folgt aus dem Vorstehenden, dass man jede partielle Differentialgleichung, in welcher die unbekannte Function und ausserdem mehrere Variable nicht selber vorkommen, sondern die nach letztern genommenen partiellen Differentialquotienten, in eine andre verwandeln kann, in welcher die nach einer gleichen Anzahl Variablen genommenen partiellen Differentialquotienten fehlen. Wenn aber in einer partiellen Differentialgleichung die nach einigen Variablen genommenen partiellen Differentialquotienten fehlen, so sind diese Variablen bei Integration der Gleichung nur als Constanten zu betrachten, da bei Bildung der Differentialgleichung nach ihnen nicht differentiirt worden ist. *Hierdurch kann eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung, in welcher ausser der unbekannten Function auch mehrere Variable nicht selber vorkommen, sondern die nach letztern genommenen partiellen Differentialquotienten, immer in eine andre verwandelt werden, in welcher die Zahl der unabhängigen Variablen um eine gleiche Anzahl geringer ist.*

Durch das vorstehende Verfahren ist oben die partielle Differentialgleichung für S, wenn die Kräftefunction nicht t explicite enthält, in die andre für V transformirt worden, welche eine Variable t weniger enthält. Man kann auch leicht beweisen, dass jedesmal, wenn das System sich um eine Axe frei bewegen kann, sich durch dieselbe Methode die Zahl der Variablen noch um eine vermindern lässt. Wendet man die Methode auf das vorliegende Beispiel an, so hat man

$$\frac{\partial V}{\partial \vartheta} = \gamma, \quad W = (\vartheta + \beta)\frac{\partial V}{\partial \vartheta} - V$$

zu setzen, und γ statt ϑ in W als Variable einzuführen. Man erhält dann:

$$\vartheta + \beta = \frac{\partial W}{\partial \gamma}, \quad \frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{\partial W}{\partial r}, \quad \frac{\partial V}{\partial \eta} = -\frac{\partial W}{\partial \eta},$$

wodurch sich die vorgelegte partielle Differentialgleichung in folgende verwandelt:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \eta}\right)^2 + \frac{\gamma^2}{r^2 \sin^2 \eta} = 2f(r) + 2h,$$

bei deren Integration γ als eine Constante betrachtet wird.

Man integrirt diese Gleichung, indem man sie in die beiden Gleichungen zerfällt:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 = 2f(r) + 2h - \frac{b^2}{r^2},$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \eta}\right)^2 = b^2 - \frac{\gamma^2}{\sin^2 \eta},$$

in welchen b eine neue willkürliche Constante bedeutet. Man erhält hierdurch den vollständigen Werth von W,

$$W = -\int \left[2f(r) + 2h - \frac{b^2}{r^2}\right]^{\frac{1}{2}} dr + \int \left[b^2 - \frac{\gamma^2}{\sin^2\eta}\right]^{\frac{1}{2}} d\eta.$$

Das Zeichen der ersten Wurzelgrösse ist hier negativ genommen, um die aus der Form der Function W abzuleitenden Integralgleichungen mit den früher gefundenen in Uebereinstimmung zu setzen.

Die vollständigen Integralgleichungen der Bewegung werden hiernach:

$$\frac{\partial V}{\partial b} = -\frac{\partial W}{\partial b} = b',$$

$$\frac{\partial W}{\partial \gamma} = \vartheta + \beta, \quad \frac{\partial V}{\partial \beta} = \beta',$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{\partial W}{\partial r} = \frac{dr}{dt},$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial V}{\partial \eta} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial W}{\partial \eta} = \frac{d\eta}{dt},$$

$$\frac{1}{r^2 \sin^2\eta}\frac{\partial V}{\partial \vartheta} = \frac{\gamma}{r^2\sin^2\eta} = \frac{d\vartheta}{dt},$$

$$\frac{\partial V}{\partial h} = -\frac{\partial W}{\partial h} = t + \tau,$$

welche sich, wenn man den für W gefundenen Werth substituirt, in folgende verwandeln:

$$-b\int \frac{dr}{r^2\sqrt{2f(r) + 2h - \frac{b^2}{r^2}}} - b\int \frac{d\eta}{\sqrt{b^2 - \frac{\gamma^2}{\sin^2\eta}}} = b',$$

$$-\gamma\int \frac{d\eta}{\sin^2\eta\sqrt{b^2 - \frac{\gamma^2}{\sin^2\eta}}} = \vartheta + \beta,$$

$$\sqrt{2f(r) + 2h - \frac{b^2}{r^2}} = \frac{dr}{dt},$$

$$-\frac{1}{r^2}\sqrt{b^2 - \frac{\gamma^2}{\sin^2\eta}} = \frac{d\eta}{dt},$$

$$\frac{\gamma}{r^2\sin^2\eta} = \frac{d\vartheta}{dt},$$

$$\int \frac{dr}{\sqrt{2f(r) + 2h - \frac{b^2}{r^2}}} = t + \tau.$$

Da

$$V = \gamma \frac{\partial W}{\partial \gamma} - W = \gamma(\vartheta + \beta) - W,$$

und β nur in γ vorkommt, welches durch die Gleichung

$$\vartheta + \beta = \frac{\partial W}{\partial \gamma}$$

bestimmt wird, so erhält man

$$\beta' = \frac{\partial V}{\partial \beta} = \gamma,$$

welches zeigt, dass in den vorstehenden Formeln γ als eine Constante angesehen werden kann, so dass in denselben b, b', β, γ, h, τ die 6 willkürlichen Constanten werden.

Der für ϑ gefundene Ausdruck giebt:

$$\vartheta + \beta = \int \frac{\gamma d.\operatorname{cotg}\eta}{\sqrt{b^2 - \gamma^2 - \gamma^2 \operatorname{cotg}^2 \eta}},$$

oder wenn wir

$$\gamma = \beta' = -b \cos i$$

setzen,

$$\vartheta + \beta = -\int \frac{d.\operatorname{cotg}\eta}{\sqrt{tg^2 i - \operatorname{cotg}^2 \eta}} = \text{Arc.}\cos \operatorname{cotg} i \operatorname{cotg} \eta$$

oder

$$\cos i \cos \eta - \sin i . \sin \eta . \cos(\vartheta + \beta) = 0,$$

wo i und β die Neigung der Bahn und die Länge des aufsteigenden Knotens bedeuten.

In der vorigen Form der Integralgleichungen wird, wenn man $\beta = 0$ setzt, was der Allgemeinheit keinen Eintrag thut:

$$\sin \alpha \cos \eta - \cos \alpha \sin \eta \cos \vartheta = -\frac{\alpha'}{\beta'} \sin \alpha \sin \eta \sin \vartheta,$$

wo man

$$\alpha'^2 + \frac{\beta'^2}{\sin^2 \alpha} = b^2$$

hatte. Vergleicht man diese Formel mit der vorhin gefundenen

$$\cos i \cos \eta - \sin i \sin \eta \cos(\vartheta + \beta) = 0,$$

so erhält man

$$\operatorname{cotg} \alpha = \operatorname{tg} i \cos \beta, \quad \frac{\alpha'}{\beta'} = \operatorname{tg} i \sin \beta,$$

und daher

$$\frac{b^2}{\beta'^2} = \frac{\alpha'^2}{\beta'^2} + \frac{1}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 i}.$$

Da der Werth von $\frac{dr}{dt}$ in beiden Formen der Integralgleichungen derselbe ist, so sieht man, dass die Constante b für beide dieselbe Bedeutung hat, und daher auch die Constante $\beta' = -b\cos i$.

Nennt man r_0 und r_1 das Maximum und Minimum von r, so verschwindet $\frac{dr}{dt}$ für diese Werthe von r, wodurch man erhält:

$$2f(r_0)+2h-\frac{b^2}{r_0^2} = 0,$$

$$2f(r_1)+2h-\frac{b^2}{r_1^2} = 0,$$

und daher

$$h = -\frac{r_1^2 f(r_1)-r_0^2 f(r_0)}{r_1^2-r_0^2},$$

$$b^2 = 2r_0^2 r_1^2 \frac{f(r_0)-f(r_1)}{r_1^2-r_0^2}.$$

Für das *Newton*sche Attractionsgesetz wird:

$$f(r) = \frac{k^2}{r^2},$$

wo k^2 die Anziehungskraft für die Einheit der Distanz bedeutet, und daher:

$$h = -\frac{k^2}{r_1+r_0}, \quad \frac{b^2}{k^2} = \frac{2r_0 r_1}{r_1+r_0},$$

oder $-\frac{k^2}{h}$ die grosse Axe, $\frac{b^2}{k^2}$ der halbe Parameter der Bahn. Bezeichnet man diese, wie gewöhnlich, mit $2a$ und p, und setzt

$$r = \frac{p}{1+e\cos v} = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos v},$$

wo v die excentrische Anomalie, e die Excentricität bedeutet, so wird

$$2f(r)+2h-\frac{b^2}{r^2} = k^2\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}-\frac{p}{r^2}\right)$$

$$= \frac{k^2}{p}[2(1+e\cos v)-1+e^2-(1+e\cos v)^2] = \frac{k^2 e^2 \sin^2 v}{p},$$

und daher

$$b\int\frac{dr}{r^2\left(2f(r)+2h-\frac{b^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}}} = v.$$

Man hat ferner

$$b\int\frac{d\eta}{\sqrt{b^2-\frac{\gamma^2}{\sin^2\eta}}} = \int\frac{b\sin\eta\, d\eta}{\sqrt{b^2-\gamma^2-b^2\cos^2\eta}}$$

$$= \text{Arc.}\cos\frac{b\cos\eta}{\sqrt{b^2-\gamma^2}} = \text{Arc.}\cos\frac{\cos\eta}{\sin i},$$

wodurch die erste der aufgestellten Integralgleichungen sich in folgende verwandelt:

$$-\mathrm{Arc.cos}\,\frac{\cos\eta}{\sin i} = v + b'$$

oder

$$\cos\eta = \sin i\,.\cos(v + b').$$

Man erhält hieraus

$$\sin\eta\cos(\vartheta+\beta) = \mathrm{cotg}\, i\,.\cos\eta = \cos i\,.\cos(v + b')$$

und daher

$$\sin\eta\sin(\vartheta+\beta) = -\sin(v + b').$$

In dieser Formel ist $b' + \frac{1}{2}\pi$ die Entfernung des Perihels vom aufsteigenden Knoten.

Setzt man

$$z = r\cos\eta, \quad y = r\sin\eta\cos\vartheta, \quad x = r\sin\eta\sin\vartheta,$$

so ist i der Winkel der Ebene der Bahn und der Ebene der x, y; β der Winkel, den der Durchschnitt beider Ebenen mit der Axe der x macht. Aus den Gleichungen

$$\mathrm{cotg}\,\alpha = \mathrm{tg}\, i\cos\beta, \quad \alpha' = \beta'\,\mathrm{tg}\, i\sin\beta = -b\sin i\sin\beta$$

ersieht man ferner, dass in der ersten Form der Integralgleichungen α der Winkel ist, den der Durchschnitt der Ebene der Bahn und der Ebene der z, y mit der Axe der z macht, und $-\frac{\alpha'}{b}$ der Cosinus des Winkels beider Ebenen. Es ist ferner v der Winkel zwischen diesem Durchschnitt und dem Radius Vector, und b' der Winkel zwischen diesem Durchschnitt und dem Perihel. Die in den beiden Formen der Integralgleichungen gebrauchten Elemente erhalten daher durch blosse Vertauschung der Axe der x mit der Axe der z dieselbe Bedeutung.

Die im Vorhergehenden nach r und η ausgeführten Integrationen sind von den kleinsten Werthen an genommen, welche r und η erhalten können. Da diese Werthe Functionen der Elemente sind, so muss man eigentlich bei der Differentiation der charakteristischen Function nach den Elementen auch nach diesen untern Gränzen der Integrale differentiiren. Man kann aber hiervon abstrahiren, weil wegen der bekannten Eigenschaften des Minimums für die untern Gränzen die Ausdrücke unter dem Integralzeichen verschwinden, und daher auch die aus der Variation der untern Gränzen der Integrale hervorgehenden Terme.

Die hier eingeführten willkürlichen Constanten der charakteristischen Function und diejenigen, welche ihren nach erstern partiell genommenen Differentialquotienten gleich gesetzt werden, haben in der Theorie der Variation der Constanten merkwürdige und eigenthümliche Eigenschaften, weshalb ich in dem vorhergehenden Beispiele ihre Bedeutung genau angegeben habe.

Will man die zweite Integrationsmethode auf die allgemeinere Gleichung anwenden:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x_2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{\partial V}{\partial x_n}\right)^2 = f(r),$$

wo

$$r = \sqrt{(x_1 x_1+x_2 x_2+\cdots+x_n x_n)},$$

so setze man

$$\begin{aligned}
x_1 &= r\cos\eta_1,\\
x_2 &= r\sin\eta_1\cos\eta_2,\\
x_3 &= r\sin\eta_1\sin\eta_2\cos\eta_3,\\
&\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
x_{n-1} &= r\sin\eta_1\sin\eta_2\;\ldots\;\sin\eta_{n-2}\cos\eta_{n-1},\\
x_n &= r\sin\eta_1\sin\eta_2\;\ldots\;\sin\eta_{n-2}\sin\eta_{n-1},
\end{aligned}$$

wodurch sich die partielle Differentialgleichung in folgende verwandelt:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial V}{\partial \eta_1}\right)^2+\frac{1}{r^2\sin^2\eta_1}\left(\frac{\partial V}{\partial \eta_2}\right)^2+\frac{1}{r^2\sin^2\eta_1\sin^2\eta_2}\left(\frac{\partial V}{\partial \eta_3}\right)^2&\\
+\cdots+\frac{1}{r^2\sin^2\eta_1\sin^2\eta_2\ldots\sin^2\eta_{n-2}}\left(\frac{\partial V}{\partial \eta_{n-1}}\right)^2 &= f(r).
\end{aligned}$$

Setzt man

$$\frac{\partial V}{\partial \eta_{n-1}} = p, \qquad W = (\eta_{n-1}+\alpha)p-V,$$

und führt W statt V, p statt η_{n-1} ein, so erhält man:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \eta_1}\right)^2+\frac{1}{r^2\sin^2\eta_1}\left(\frac{\partial W}{\partial \eta_2}\right)^2\\
&+\cdots+\frac{1}{r^2\sin^2\eta_1\sin^2\eta_2\ldots\sin^2\eta_{n-3}}\left(\frac{\partial W}{\partial \eta_{n-2}}\right)^2\\
&= f(r)-\frac{p^2}{r^2\sin^2\eta_1\sin^2\eta_2\ldots\sin^2\eta_{n-2}},
\end{aligned}$$

wo p als Constante angesehen werden kann.

Diese Gleichung kann man in folgende zerfällen:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 = f(r) - \frac{\alpha_1}{r^2},$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \eta_1}\right)^2 = \alpha_1 - \frac{\alpha_2}{\sin^2\eta_1},$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \eta_2}\right)^2 = \alpha_2 - \frac{\alpha_3}{\sin^2\eta_2},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \eta_{n-3}}\right)^2 = \alpha_{n-3} - \frac{\alpha_{n-2}}{\sin^2\eta_{n-3}},$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \eta_{n-2}}\right)^2 = \alpha_{n-2} - \frac{p^2}{\sin^2\eta_{n-2}}.$$

Diese Gleichungen lassen sich, wenn $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-2}$ Constanten bedeuten, alle einzeln integriren, und man erhält daher:

$$V = (\eta_{n-1}+\alpha)p - W$$

$$= (\eta_{n-1}+\alpha)p - \int dr\left[f(r)-\frac{\alpha_1}{r^2}\right]^{\frac{1}{2}} - \int d\eta_1\left[\alpha_1 - \frac{\alpha_2}{\sin^2\eta_1}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$-\int d\eta_2\left[\alpha_2-\frac{\alpha_3}{\sin^2\eta_2}\right]^{\frac{1}{2}} - \cdots - \int d\eta_{n-2}\left[\alpha_{n-2}-\frac{p^2}{\sin^2\eta_{n-2}}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Diesen Ausdruck von V kann man entweder als eine vollständige Lösung mit den $n-1$ willkürlichen Constanten $\alpha, \alpha_1, \ldots \alpha_{n-2}$ betrachten, in welchem die Variable p durch η_{n-1} ersetzt werden muss mit Hülfe der Gleichung

$$\eta_{n-1}+\alpha = \frac{\partial W}{\partial p} = -p\int\frac{d\eta_{n-2}}{\sin^2\eta_{n-2}\left[\alpha_{n-2}-\frac{p^2}{\sin^2\eta_{n-2}}\right]^{\frac{1}{2}}},$$

oder als eine vollständige Lösung mit den $n-1$ willkürlichen Constanten p, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-2}$, wobei dann das Glied αp als blos additive Constante nicht mitzurechnen ist. Die willkürlichen Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-2}$ sind positiv zu nehmen und so, dass

$$\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 \ldots > \alpha_{n-2},$$

damit man eine reelle Lösung erhält.

Eine andere Lösung der im Vorigen behandelten allgemeinen partiellen Differentialgleichung habe ich oben gegeben. Man erhält dadurch zugleich die Integration der Differentialgleichungen

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{x_1}{r}\cdot R, \quad \frac{d^2x_2}{dt^2} = \frac{x_2}{r}\cdot R, \quad \ldots \quad \frac{d^2x_n}{dt^2} = \frac{x_n}{r}\cdot R,$$

in welchen R eine gegebene Function von r und $r = \sqrt{(x_1x_1+x_2x_2+\cdots+x_nx_n)}$ ist, wenn man

$$R = \frac{\partial f(r)}{\partial r}$$

setzt. Man findet über die Integration dieser Differentialgleichungen eine lehrreiche Abhandlung von Herrn *Binet* in dem 2ten Bande des mathematischen Journals von *Liouville*.

§. 10. Die zweite *Lagrange*sche und die *Hamilton*sche Form der Differentialgleichungen der Bewegung.

Wir haben oben bei Aufstellung der Differentialgleichungen der Mechanik zu Bestimmungsstücken der Punkte des Systems ihre rechtwinkligen Coordinaten gewählt. Man findet aber in der Mécanique Analytique die Differentialgleichungen der Bewegung auch für den allgemeinern Fall angegeben, wenn man irgend welche Bestimmungsstücke der Punkte als Variable einführt. Diese allgemeinern Formeln sind besonders dann von Vortheil, wenn das System nicht frei, sondern irgend welchen Bedingungen unterworfen ist. Man kann dann nämlich die Coordinaten so durch neue Variable ausdrücken, dass den Bedingungsgleichungen von selber genügt wird. *Hamilton* hat diesen allgemeinern Differentialgleichungen eine etwas modificirte Form gegeben, welche ich im Folgenden mittheilen will. Zuerst aber werde ich die bekannten Formeln der analytischen Mechanik selber entwickeln, aus welchen sich die von *Hamilton* gegebenen leicht ableiten lassen.

Die oben mitgetheilten Differentialgleichungen der Bewegung für den Fall, dass das System Bedingungen unterworfen ist, die durch die Gleichungen $f = 0$, $\varphi = 0$, ... ausgedrückt werden, hat *Lagrange* durch die Zeichen seiner Variationsrechnung in eine einzige *symbolische* Gleichung zusammengefasst. Bezeichnet man nämlich durch δx_i, δy_i, δz_i, wenn das System ganz frei ist, gänzlich willkürliche und von einander unabhängige Grössen, wenn aber die Bedingungen $f = 0$, $\varphi = 0$, etc. gegeben sind, willkürliche Grössen, welche die linearen Bedingungsgleichungen erfüllen:

$$\Sigma \left[\frac{\partial f}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial f}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial f}{\partial z_i} \delta z_i \right] = 0,$$

$$\Sigma \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial \varphi}{\partial z_i} \delta z_i \right] = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

die Summe auf alle Werthe von i ausgedehnt, so kann man die oben gegebenen Gleichungen

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \cdots$$
$$m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y_i} + \lambda \frac{\partial f}{\partial y_i} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} + \cdots$$
$$m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z_i} + \lambda \frac{\partial f}{\partial z_i} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi}{\partial z_i} + \cdots$$

in die einzige zusammenfassen:

$$\Sigma m_i \left[\frac{d^2 x_i}{dt^2} \delta x_i + \frac{d^2 y_i}{dt^2} \delta y_i + \frac{d^2 z_i}{dt^2} \delta z_i \right]$$
$$= \Sigma \left[\frac{\partial U}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial U}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial U}{\partial z_i} \delta z_i \right].$$

Bezeichnet man durch die einem Ausdruck vorgesetzte Charakteristik δ die Aenderung des Ausdrucks, wenn man darin $x_i + \delta x_i$, $y_i + \delta y_i$, $z_i + \delta z_i$ statt x_i, y_i, z_i schreibt und δx_i, δy_i, δz_i als unendlich kleine Grössen betrachtet, so kann man diese symbolische Gleichung kürzer so darstellen:

$$\Sigma m_i \left[\frac{d^2 x_i}{dt^2} \delta x_i + \frac{d^2 y_i}{dt^2} \delta y_i + \frac{d^2 z_i}{dt^2} \delta z_i \right] = \delta U.$$

oder wenn man wieder

$$x_i' = \frac{dx_i}{dt}, \qquad y_i' = \frac{dy_i}{dt}, \qquad z_i' = \frac{dz_i}{dt}$$

setzt,

$$\Sigma m_i \left[\frac{dx_i'}{dt} \delta x_i + \frac{dy_i'}{dt} \delta y_i + \frac{dz_i'}{dt} \delta z_i \right] = \delta U.$$

Dieser Gleichung kann man auch die Form geben:

$$\frac{d . \Sigma m_i [x_i' \delta x_i + y_i' \delta y_i + z_i' \delta z_i]}{dt} = \delta T + \delta U,$$

wenn man der Kürze halber setzt:

$$T = \tfrac{1}{2} \Sigma m_i [x_i' x_i' + y_i' y_i' + z_i' z_i'],$$

d. h. T die halbe lebendige Kraft nennt. Die Integration dieser Gleichung von $t = 0$ bis $t = t$ hat *Hamilton* zu seinen oben angeführten Theoremen geführt. Hier soll dieselbe Formel dazu dienen, die Differentialgleichungen der Bewegung auf eine allgemeine Art zu transformiren.

Es seien q_1, q_2, q_3, ... q_m irgend welche von einander unabhängige Grössen, durch welche die Punkte des Systems bestimmt werden, so dass man die $3n$ Coordinaten x_i, y_i, z_i durch diese m Grössen ausdrücken kann. Wenn das System ganz frei ist, wird $m = 3n$ sein; wenn aber l Bedingungsgleichungen gegeben sind, denen die Punkte des Systems unterworfen sind, so wird $m = 3n - l$ sein. Setzt man

$$q'_1 = \frac{dq_1}{dt}, \quad q'_2 = \frac{dq_2}{dt}, \quad \ldots \quad q'_m = \frac{dq_m}{dt},$$

so werden x'_i, y'_i, z'_i lineare homogene Functionen von q'_1, q'_2, q'_3, ... q'_m, und daher T eine homogene Function der zweiten Ordnung von denselben Grössen.

Setzt man daher:

$$\frac{\partial T}{\partial q'_1} = p_1, \quad \frac{\partial T}{\partial q'_2} = p_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial T}{\partial q'_m} = p_m,$$

so hat man nach einer bekannten Eigenschaft homogener Functionen:

$$q'_1 p_1 + q'_2 p_2 + \cdots + q'_m p_m = 2T.$$

Die Grössen p_1, p_2, ... p_m sind lineare homogene Ausdrücke von q'_1, q'_2, ... q'_m; drückt man umgekehrt diese Grössen durch jene aus, so werden auch q'_1, q'_2, ... q'_m lineare homogene Ausdrücke von p_1, p_2, ... p_m, und daher wird auch T, wenn man es durch die Grössen q_1, q_2, ... q_m und die Grössen p_1, p_2, ... p_m ausdrückt, eine homogene Function der zweiten Ordnung von diesen letztern.

Man gebe den Grössen p_1, p_2, ... p_m unendlich kleine, ganz willkürliche und von einander ganz unabhängige Aenderungen $\delta' p_1$, $\delta' p_2$, ... $\delta' p_m$ und nenne die entsprechenden Aenderungen von q'_1, q'_2, ... q'_m und T ebenfalls $\delta' q'_1$, $\delta' q'_2$, ... $\delta' q'_m$, $\delta' T$. Setzt man für T den aus der oben gegebenen Gleichung folgenden Ausdruck

$$\begin{aligned} T &= p_1 \; q'_1 + p_2 \; q'_2 + \cdots + p_m \; q'_m - T \\ &= \frac{\partial T}{\partial q'_1} q'_1 + \frac{\partial T}{\partial q'_2} q'_2 + \cdots + \frac{\partial T}{\partial q'_m} q'_m - T, \end{aligned}$$

so erhält man:

$$\begin{aligned} \delta' T = \; & q'_1 \, \delta' p_1 + q'_2 \, \delta' p_2 + \cdots + q'_m \, \delta' p_m \\ & + p_1 \, \delta' q'_1 + p_2 \, \delta' q'_2 + \cdots + p_m \, \delta' q'_m \\ & - \left[\frac{\partial T}{\partial q'_1} \delta' q'_1 + \frac{\partial T}{\partial q'_2} \delta' q'_2 + \cdots + \frac{\partial T}{\partial q'_m} \delta' q'_m \right], \end{aligned}$$

oder da

$$\frac{\partial T}{\partial q'_1} = p_1, \quad \frac{\partial T}{\partial q'_2} = p_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial T}{\partial q'_m} = p_m,$$

die Gleichung

$$\delta' T = q'_1 \delta' p_1 + q'_2 \delta' p_2 + \cdots + q'_m \delta' p_m,$$

woraus

$$\frac{\partial T}{\partial p_1} = q_1', \quad \frac{\partial T}{\partial p_2} = q_2', \quad \dots \quad \frac{\partial T}{\partial p_m} = q_m'.$$

Diese Formeln enthalten eine in mehreren Untersuchungen anwendbare Eigenschaft der homogenen Functionen zweiter Ordnung, dass nämlich, *wenn T eine homogene Function zweiter Ordnung von den Grössen* $q_1', q_2', \dots q_m'$ *ist, und man dieselbe als homogene Function zweiter Ordnung der Grössen*

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial q_1'}, \quad p_2 = \frac{\partial T}{\partial q_2'}, \quad \dots \quad p_m = \frac{\partial T}{\partial q_m'}$$

ausdrückt, die nach diesen Grössen genommenen partiellen Differentialquotienten von T wieder die vorigen Variablen geben,

$$q_1' = \frac{\partial T}{\partial p_1}, \quad q_2' = \frac{\partial T}{\partial p_2}, \quad \dots \quad q_m' = \frac{\partial T}{\partial p_m}.$$

Für 3 Variable liegt hierin der analytische Grund von Sätzen über die reciproken Polaren der Oberflächen zweiter Ordnung.

Man hat:

$$x_i' = \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial x_i}{\partial q_1} q_1' + \frac{\partial x_i}{\partial q_2} q_2' + \dots + \frac{\partial x_i}{\partial q_m} q_m',$$

$$y_i' = \frac{dy_i}{dt} = \frac{\partial y_i}{\partial q_1} q_1' + \frac{\partial y_i}{\partial q_2} q_2' + \dots + \frac{\partial y_i}{\partial q_m} q_m',$$

$$z_i' = \frac{dz_i}{dt} = \frac{\partial z_i}{\partial q_1} q_1' + \frac{\partial z_i}{\partial q_2} q_2' + \dots + \frac{\partial z_i}{\partial q_m} q_m'.$$

Wenn daher q_k eine der Grössen $q_1, q_2, \dots q_m$ bedeutet, so wird:

$$\frac{\partial x_i'}{\partial q_k'} = \frac{\partial x_i}{\partial q_k},$$

$$\frac{\partial y_i'}{\partial q_k'} = \frac{\partial y_i}{\partial q_k},$$

$$\frac{\partial z_i'}{\partial q_k'} = \frac{\partial z_i}{\partial q_k},$$

und daher

$$p_k = \frac{\partial T}{\partial q_k'} = \Sigma m_i \left[x_i' \frac{\partial x_i'}{\partial q_k'} + y_i' \frac{\partial y_i'}{\partial q_k'} + z_i' \frac{\partial z_i'}{\partial q_k'} \right]$$

$$= \Sigma m_i \left[x_i' \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + y_i' \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + z_i' \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right].$$

Es ist aber

$$\Sigma m_\iota [x'_\iota \delta x_\iota + y'_\iota \delta y_\iota + z'_\iota \delta z_\iota]$$
$$= \delta q_1 \Sigma m_\iota \left[x'_\iota \frac{\partial x_\iota}{\partial q_1} + y'_\iota \frac{\partial y_\iota}{\partial q_1} + z'_\iota \frac{\partial z_\iota}{\partial q_1} \right]$$
$$+ \delta q_2 \Sigma m_\iota \left[x'_\iota \frac{\partial x_\iota}{\partial q_2} + y'_\iota \frac{\partial y_\iota}{\partial q_2} + z'_\iota \frac{\partial z_\iota}{\partial q_2} \right]$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \delta q_m \Sigma m_\iota \left[x'_\iota \frac{\partial x_\iota}{\partial q_m} + y'_\iota \frac{\partial y_\iota}{\partial q_m} + z'_\iota \frac{\partial z_\iota}{\partial q_m} \right],$$

und daher

$$\Sigma m_\iota [x'_\iota \delta x_\iota + y'_\iota \delta y_\iota + z'_\iota \delta z_\iota] = p_1 \delta q_1 + p_2 \delta q_2 + \cdots + p_m \delta q_m.$$

Die Gleichung

$$\frac{d . \Sigma m_\iota (x'_\iota \delta x_\iota + y'_\iota \delta y_\iota + z'_\iota \delta z_\iota)}{dt} = \delta T + \delta U$$

giebt daher

$$\frac{d . (p_1 \delta q_1 + p_2 \delta q_2 + \cdots + p_m \delta q_m)}{dt}$$
$$= \frac{dp_1}{dt} \delta q_1 + \frac{dp_2}{dt} \delta q_2 + \cdots + \frac{dp_m}{dt} \delta q_m$$
$$+ p_1 \, \delta q'_1 + p_2 \, \delta q'_2 + \cdots + p_m \, \delta q'_m$$
$$= \delta T + \delta U.$$

Es ist aber, da U die Grössen q'_ι gar nicht enthält,

$$\delta T + \delta U$$
$$= \frac{\partial T}{\partial q'_1} \delta q'_1 + \frac{\partial T}{\partial q'_2} \delta q'_2 \qquad + \cdots + \frac{\partial T}{\partial q'_m} \delta q'_m$$
$$+ \frac{\partial (T+U)}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial (T+U)}{\partial q_2} \delta q_2 + \cdots + \frac{\partial (T+U)}{\partial q_m} \delta q_m.$$

Man hat daher, da wegen der Gleichung

$$\frac{\partial T}{\partial q'_k} = p_k$$

die in die Variationen $\delta q'_k$ multiplicirten Terme sich aufheben, die in der Mécanique Analytique gegebene Gleichung:

$$\frac{dp_1}{dt} \delta q_1 + \frac{dp_2}{dt} \delta q_2 \qquad + \cdots + \frac{dp_m}{dt} \delta q_m$$
$$= \frac{\partial (T+U)}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial (T+U)}{\partial q_2} \delta q_2 + \cdots + \frac{\partial (T+U)}{\partial q_m} \delta q_m,$$

woraus, wenn die Grössen q von einander unabhängig sind, die Gleichungen folgen:

$$\frac{dp_1}{dt} = \frac{\partial(T+U)}{\partial q_1},$$

$$\frac{dp_2}{dt} = \frac{\partial(T+U)}{\partial q_2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{dp_m}{dt} = \frac{\partial(T+U)}{\partial q_m}.$$

In den vorstehenden *Lagrange*schen Formeln ist T ausgedrückt durch q_1, q_2, ... q_m und durch ihre Differentiale q_1', q_2', ... q_m', und in diesem Sinne die partielle Differentiation auszuführen. *Hamilton* führt statt der letzten m Grössen die Grössen p_1, p_2, .. p_m als Variable ein. Die auf diese Wahl der Variablen bezüglichen Formeln erhält man auf folgende Weise:

Es ist nach den obigen Formeln:

$$T = p_1 q_1' + p_2 q_2' + \cdots + p_m q_m' - T,$$

und daher

$$\begin{aligned} \delta T = \quad & p_1 \delta q_1' + p_2 \delta q_2' + \cdots + p_m \delta q_m' \\ & + q_1' \delta p_1 + q_2' \delta p_2 + \cdots + q_m' \delta p_m - \delta T. \end{aligned}$$

Da wir oben

$$\frac{\partial T}{\partial p_k} = q_k'$$

fanden, so hat man

$$\begin{aligned} \delta T = \quad & q_1' \, \delta p_1 + q_2' \, \delta p_2 + \cdots + q_m' \, \delta p_m \\ & + \frac{\partial T}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial T}{\partial q_2} \delta q_2 + \cdots + \frac{\partial T}{\partial q_m} \delta q_m . \end{aligned}$$

Substituirt man diesen Ausdruck von δT in die vorhergehende Gleichung rechter Hand vom Gleichheitszeichen, so erhält man:

$$\begin{aligned} \delta T = \quad & p_1 \, \delta q_1' + p_2 \, \delta q_2' + \cdots + p_m \, \delta q_m' \\ & - \left[\frac{\partial T}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial T}{\partial q_2} \delta q_2 + \cdots + \frac{\partial T}{\partial q_m} \delta q_m \right]. \end{aligned}$$

Braucht man diesen Ausdruck von δT und setzt wieder

$$T - U = H,$$

so verwandelt sich die oben gefundene Gleichung:

$$\begin{aligned} & \frac{dp_1}{dt} \delta q_1 + \frac{dp_2}{dt} \delta q_2 + \cdots + \frac{dp_m}{dt} \delta q_m \\ & + p_1 \delta q_1' + p_2 \delta q_2' + \cdots + p_m \delta q_m' \\ & = \delta T + \delta U \end{aligned}$$

in folgende:

$$\frac{dp_1}{dt}\delta q_1 + \frac{dp_2}{dt}\delta q_2 + \cdots + \frac{dp_m}{dt}\delta q_m$$
$$= -\left[\frac{\partial H}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial H}{\partial q_2}\delta q_2 + \cdots + \frac{\partial H}{\partial q_m}\delta q_m\right],$$

woraus die Differentialgleichungen der Bewegung in der neuen Form, die ihnen *Hamilton* giebt, werden:

$$\frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_1},$$
$$\frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_2},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{dp_m}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_m}.$$

Da U die Grössen p_k nicht enthält, und daher

$$q'_k = \frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial T}{\partial p_k} = \frac{\partial H}{\partial p_k},$$

so hat man folgendes Theorem, welches die *Hamilton*sche Darstellung der *Differentialgleichungen* der Mechanik enthält.

Theorem III.

„*Es seien $q_1, q_2, \ldots q_m$ die von einander unabhängigen Bestimmungsstücke eines Systems von n materiellen Punkten, welches entweder ganz frei, oder irgend welchen Bedingungen unterworfen ist; die Zahl m der Bestimmungsstücke ist $3n$ bei einem freien System, oder wenn die Punkte desselben l Bedingungen unterworfen sind $3n-l$; man differentiire den Ausdruck der halben lebendigen Kraft T durch $q_1, q_2, \ldots q_m$ und ihre nach der Zeit genommenen Differentiale $q'_1, q'_2, \ldots q'_m$ nach diesen letzteren Grössen und setze die partiellen Differentialquotienten*

$$\frac{\partial T}{\partial q'_1} = p_1, \quad \frac{\partial T}{\partial q'_2} = p_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial T}{\partial q'_m} = p_m;$$

drückt man dann T durch die Grössen $q_1, q_2, \ldots q_m$ und die Grössen $p_1, p_2, \ldots p_m$ und die Kräftefunction U ebenfalls durch die Grössen $q_1, q_2, \ldots q_m$ aus, und nimmt die partiellen Differentialquotienten der Grösse $T-U=H$ in diesem Sinne, so werden die Differentialgleichungen der Bewegung:

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1}, \quad \frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_1},$$
$$\frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_2}, \quad \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_2},$$
$$\dots\dots \quad \dots\dots$$
$$\frac{dq_m}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_m}, \quad \frac{dp_m}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_m}.$$

Die Formeln des vorstehenden Theorems gelten, wie aus dem gegebenen Beweise erhellt, auch, was *Hamilton* nicht angemerkt hat, für den Fall, dass die Kräftefunction U die Zeit t explicite enthält, wovon man sich leicht dadurch überzeugt, dass die Charakteristik δ nur diejenigen Aenderungen anzeigt, wie ich ausdrücklich angemerkt habe, welche aus der Variation der Coordinaten hervorgehen.

Die im Vorigen gefundenen Formeln lehren, dass die partiellen Differentialquotienten von T nach $q_1, q_2, \dots q_m$ einen gerade entgegengesetzten Werth bekommen, je nachdem man T als Function von $q_1, q_2, \dots q_m$ und $q_1', q_2', \dots q_m'$, oder als Function von $q_1, q_2, \dots q_m$ und $p_1, p_2, \dots p_m$ betrachtet. Wir fanden nämlich für den letztern Fall:

$$\delta T = \quad p_1\,\delta q_1' + p_2\,\delta q_2' + \dots + p_m\,\delta q_m'$$
$$-\left[\frac{\partial T}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial T}{\partial q_2}\delta q_2 + \dots + \frac{\partial T}{\partial q_m}\delta q_m\right],$$

während man nach der erstern Annahme hat:

$$\delta T = \quad p_1\,\delta q_1' + p_2\,\delta q_2' + \dots + p_m\,\delta q_m'$$
$$+\frac{\partial T}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial T}{\partial q_2}\delta q_2 + \dots + \frac{\partial T}{\partial q_m}\delta q_m.$$

Man hat daher jedesmal genau den Sinn zu fixiren, in welchem die partiellen Differentiationen ausgeführt werden sollen.

Wenn man eine grössere Zahl der Variablen q einführt, als zur Bestimmung der Punkte des Systems nöthig ist, so dass zwischen denselben mehrere Bedingungsgleichungen $f = 0$, $\varphi = 0$ etc. Statt finden, so sind die Variationen $\delta q_1, \delta q_2, \dots \delta q_m$ nicht mehr von einander unabhängig. Man kann daher aus der Gleichung:

$$\frac{dp_1}{dt}\delta q_1 + \frac{dp_2}{dt}\delta q_2 + \dots + \frac{dp_m}{dt}\delta q_m$$
$$= -\left[\frac{\partial H}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial H}{\partial q_2}\delta q_2 + \dots + \frac{\partial H}{\partial q_m}\delta q_m\right]$$

nicht mehr auf die Gleichheit der einzelnen Terme schliessen, sondern muss vermittelst der zwischen den Variationen Statt findenden Bedingungsgleichungen:

$$\frac{\partial f}{\partial q_1}\delta q_1+\frac{\partial f}{\partial q_2}\delta q_2+\cdots+\frac{\partial f}{\partial q_m}\delta q_m = 0,$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial q_1}\delta q_1+\frac{\partial \varphi}{\partial q_2}\delta q_2+\cdots+\frac{\partial \varphi}{\partial q_m}\delta q_m = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

einige der Variationen durch die übrigen unabhängigen ausdrücken und dann nur die in diese multiplicirten Terme einzeln einander gleich setzen. Bewerkstelligt man die Elimination wieder nach der *Lagrange*schen Methode, indem man die vorstehenden Gleichungen mit Factoren λ, λ_1 etc. multiplicirt hinzufügt und dann die einzelnen in $\delta q_1, \delta q_2, \ldots \delta q_m$ multiplicirten Terme einander gleich setzt, so erhalten die Differentialgleichungen der Dynamik die Form:

$$\frac{dq_1}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_1},\quad \frac{dp_1}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_1}+\lambda\frac{\partial f}{\partial q_1}+\lambda_1\frac{\partial \varphi}{\partial q_1}+\cdots,$$
$$\frac{dq_2}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_2},\quad \frac{dp_2}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_2}+\lambda\frac{\partial f}{\partial q_2}+\lambda_1\frac{\partial \varphi}{\partial q_2}+\cdots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{dq_m}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_m},\quad \frac{dp_m}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_m}+\lambda\frac{\partial f}{\partial q_m}+\lambda_1\frac{\partial \varphi}{\partial q_m}+\cdots.$$

Die Multiplicatoren λ, λ_1 etc. werden dadurch bestimmt, dass man in die Gleichungen

$$\frac{d\left[\frac{\partial f}{\partial q_1}\frac{\partial H}{\partial p_1}+\frac{\partial f}{\partial q_2}\frac{\partial H}{\partial p_2}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial q_m}\frac{\partial H}{\partial p_m}\right]}{dt}=0,$$
$$\frac{d\left[\frac{\partial \varphi}{\partial q_1}\frac{\partial H}{\partial p_1}+\frac{\partial \varphi}{\partial q_2}\frac{\partial H}{\partial p_2}+\cdots+\frac{\partial \varphi}{\partial q_m}\frac{\partial H}{\partial p_m}\right]}{dt}=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

welche sich durch zweimalige Differentiation der Bedingungsgleichungen $f=0$, $\varphi=0$ etc. ergeben, die Werthe

$$\frac{dq_\iota}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_\iota},\quad \frac{dp_\iota}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_\iota}+\lambda\frac{\partial f}{\partial q_\iota}+\lambda_1\frac{\partial \varphi}{\partial q_\iota}\cdots$$

substituirt.

Wenn man unter δq_1, δq_2, ... δq_m die *virtuellen* Variationen versteht, d. h. solche, die den Bedingungen $\delta f=0$, $\delta\varphi=0$, etc. Genüge leisten, so kann man in allen Fällen die Differentialgleichungen in die einzige symbolische Gleichung zusammenfassen:

$$\frac{dq_1}{dt}\delta p_1+\frac{dq_2}{dt}\delta p_2+\cdots+\frac{dq_m}{dt}\delta p_m$$
$$-\left[\frac{dp_1}{dt}\delta q_1+\frac{dp_2}{dt}\delta q_2+\cdots+\frac{dp_m}{dt}\delta q_m\right]$$
$$=\delta H,$$

ein Resultat von grosser Allgemeinheit und Eleganz, welches, wie ich glaube, in dieser Form *Hamilton* zuerst aufgestellt hat.

§. 11. *Hamiltons* Methode zu der von ihm angegebenen Form der Integralgleichungen zu gelangen.

Die Darstellung der *Integralgleichungen* der Mechanik durch die partiellen Differentialquotienten der charakteristischen Function, wenn man statt der Coordinaten irgend welche Bestimmungsstücke der Punkte des Systems einführt, findet *Hamilton* durch folgende einfache Betrachtung.

Es sei wieder

$$S=\int_0^{t}(T+U)\,dt.$$

Da

$$p_1\frac{\partial H}{\partial p_1}+p_2\frac{\partial H}{\partial p_2}+\cdots+p_m\frac{\partial H}{\partial p_m}$$
$$=p_1\frac{\partial T}{\partial p_1}+p_2\frac{\partial T}{\partial p_2}+\cdots+p_m\frac{\partial T}{\partial p_m}=2T,$$

so hat man

$$T+U=2T-H=p_1\frac{\partial H}{\partial p_1}+p_2\frac{\partial H}{\partial p_2}+\cdots+p_m\frac{\partial H}{\partial p_m}-H.$$

Man kann daher den Ausdruck von S auch so darstellen:

$$S=\int_0^{t}\left[p_1\frac{\partial H}{\partial p_1}+p_2\frac{\partial H}{\partial p_2}+\cdots+p_m\frac{\partial H}{\partial p_m}-H\right]dt,$$

oder da

$$\frac{\partial H}{\partial p_k}=\frac{dq_k}{dt},$$

$$S=\int_0^{t}\left[p_1\frac{dq_1}{dt}+p_2\frac{dq_2}{dt}+\cdots+p_m\frac{dq_m}{dt}-H\right]dt.$$

Hieraus folgt

$$\delta S = \int_0^t \left[p_1 \frac{d\delta q_1}{dt} + p_2 \frac{d\delta q_2}{dt} + \cdots + p_m \frac{d\delta q_m}{dt}\right] dt$$
$$- \int_0^t \left[\frac{\partial H}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial H}{\partial q_2} \delta q_2 + \cdots + \frac{\partial H}{\partial q_m} \delta q_m\right] dt.$$

Integrirt man das erste Integral per partes und bezeichnet die Anfangswerthe von $q_1, q_2, \ldots q_m$ mit $c_1, c_2, \ldots c_m$ und die Anfangswerthe von $p_1, p_2, \ldots p_m$ mit $b_1, b_2, \ldots b_m$, so erhält man aus der vorstehenden Formel

$$0 = \delta S - [p_1 \delta q_1 + p_2 \delta q_2 + \cdots + p_m \delta q_m]$$
$$+ b_1 \delta c_1 + b_2 \delta c_2 + \cdots + b_m \delta c_m$$
$$+ \int_0^t \left[\Sigma \left(\frac{dp_k}{dt} + \frac{\partial H}{\partial q_k}\right) \delta q_k\right] dt,$$

wenn man dem Index k unter dem Summenzeichen die Werthe 1, 2. . . . m giebt. *Diese eine merkwürdige Gleichung, welche durch eine einfache Integration per partes, wie sie in der Variationsrechnung üblich ist, gefunden wird, umfasst zu gleicher Zeit die Differentialgleichungen und die Integralgleichungen des mechanischen Problems.*

Setzt man nämlich die Ausdrücke unter dem Integralzeichen und ausserhalb des Integralzeichens besonders gleich Null, so giebt ersteres die Differentialgleichungen, letzteres die Integralgleichungen, und zwar die erstern vermittelst der partiellen Differentialquotienten eines der halben lebendigen Kraft weniger der Kräftefunction gleichen Ausdrucks, die letztern vermittelst der partiellen Differentialquotienten der charakteristischen Function. In dem sogenannten Princip der *kleinsten Wirkung*, welches man analytisch durch die Gleichung $\delta S = 0$ ersetzen kann, sieht man die Grenzwerthe q_k und c_k als gegeben an, wesshalb $\delta q_k = 0$, $\delta c_k = 0$ und der Ausdruck ausserhalb des Integralzeichens von selber verschwindet. Dies Princip giebt daher nur die Differentialgleichungen des Problems, während die gleichzeitige Variation der Grenzen des Integrals ausserdem die Darstellung der Integralgleichungen durch die charakteristische Function giebt. *Hamilton* schlägt daher vor das Princip der kleinsten Wirkung *the law of stationary action*, das seinige dagegen *of varying action* zu nennen, indem das Integral, welches variirt wird, zuweilen als die *action (Kraftaufwand)* angesehen worden ist.

Um dies zu erläutern, bemerke ich, dass wenn man den Ausdruck unter dem Integralzeichen gleich Null setzt,

$$\Sigma \left(\frac{dp_k}{dt} + \frac{\partial H}{\partial q_k}\right) \delta q_k = 0,$$

diese Gleichung, wenn zwischen den m Grössen q_k keine Bedingungsgleichungen Statt finden, also die Variationen δq_k von einander unabhängig sind, in die m Gleichungen zerfällt:

$$\frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_k}.$$

oder wenn zwischen den Grössen q_k die Bedingungsgleichungen $f = 0$, $\varphi = 0$ etc. Statt finden, in die m Gleichungen:

$$\frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_k} + \lambda\frac{\partial f}{\partial q_k} + \lambda_1\frac{\partial \varphi}{\partial q_k} + \cdots,$$

in welchen die verschiedenen in die partiellen Differentialquotienten von f, φ etc. multiplicirten Factoren λ, λ_1 etc. für alle m Werthe des Index k dieselben bleiben. Dies sind die Differentialgleichungen des Problems.

Wenn die Grösse unter dem Integralzeichen verschwindet, hat man eine hinlängliche Anzahl Differentialgleichungen, um daraus die m Grössen q_k als Functionen von t und $2m$ willkürlichen Constanten bestimmen zu können; es wird daher auch S eine gegebene Function von t und den $2m$ willkürlichen Constanten; und da die Charakteristik δ sich nicht auf t bezieht, so wird δS, wenn die angegebenen Differentialgleichungen Statt finden, die Variation von S, wenn man die willkürlichen Constanten, die ihre Integration mit sich bringt, variirt, als die einzigen Grössen, welche noch variiren können. Man hatte aber, wenn die Grösse unter dem Integralzeichen

$$\Sigma\left(\frac{dp_k}{dt} + \frac{\partial H}{\partial q_k}\right)\delta q_k$$

verschwindet,

$$\begin{aligned}\delta S &= p_1\delta q_1 + p_2\delta q_2 + \cdots + p_m\delta q_m \\ &\quad - (b_1\delta c_1 + b_2\delta c_2 + \cdots + b_m\delta c_m),\end{aligned}$$

in welchem Ausdrucke δq_k, δc_k die Variationen von q_k, c_k bedeuten, wenn man diese Grössen vermittelst der Integralgleichungen des Problems durch die willkürlichen Constanten und t ausdrückt und die erstern variirt. Man kann aber auch umgekehrt vermittelst der vollständigen Integralgleichungen des Problems die willkürlichen Constanten, die in S vorkommen, durch die Grössen q_k, c_k und t ausdrücken, so dass S eine Function von t und den $2m$ Grössen q_k, c_k wird, die weiter keine Variable oder willkürliche Constante enthält. Es giebt dann die vorstehende Gleichung, wenn keine Bedingungsgleichungen zwischen den Grössen q_k gegeben sind, sogleich die partiellen Differentialquotienten von S:

$$\frac{\partial S}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial S}{\partial c_1} = -b_1,$$
$$\frac{\partial S}{\partial q_2} = p_2, \quad \frac{\partial S}{\partial c_2} = -b_2.$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{\partial S}{\partial q_m} = p_m, \quad \frac{\partial S}{\partial c_m} = -b_m,$$

oder wenn zwischen den Grössen q_k die Gleichungen $f=0$, $\varphi=0$, etc. gegeben sind, die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S}{\partial q_1} &= p_1 + \mu\frac{\partial f}{\partial q_1} + \mu_1\frac{\partial \varphi}{\partial q_1} + \cdots,\\
\frac{\partial S}{\partial q_2} &= p_2 + \mu\frac{\partial f}{\partial q_2} + \mu_1\frac{\partial \varphi}{\partial q_2} + \cdots,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\frac{\partial S}{\partial q_m} &= p_m + \mu\frac{\partial f}{\partial q_m} + \mu_1\frac{\partial \varphi}{\partial q_m} + \cdots,\\
\frac{\partial S}{\partial c_1} &= -b_1 + \mu^0\frac{\partial f^0}{\partial c_1} + \mu_1^0\frac{\partial \varphi^0}{\partial c_1} + \cdots,\\
\frac{\partial S}{\partial c_2} &= -b_2 + \mu^0\frac{\partial f^0}{\partial c_2} + \mu_1^0\frac{\partial \varphi^0}{\partial c_2} + \cdots,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\frac{\partial S}{\partial c_m} &= -b_m + \mu^0\frac{\partial f^0}{\partial c_m} + \mu_1^0\frac{\partial \varphi^0}{\partial c_m} + \cdots.
\end{aligned}$$

wo f^0, φ^0 etc. die Ausdrücke von f, φ etc. sind, wenn man darin für die Grössen q_k ihre Anfangswerthe c_k setzt. Die Multiplicatoren μ, μ_1 etc. werden bestimmt, wenn man die ersten m Gleichungen in die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
0 = \frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial q_2}\frac{dq_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial q_m}\frac{dq_m}{dt}\\
&= \frac{\partial f}{\partial q_1}\frac{\partial H}{\partial p_1} + \frac{\partial f}{\partial q_2}\frac{\partial H}{\partial p_2} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial q_m}\frac{\partial H}{\partial p_m},\\
0 = \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{\partial \varphi}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial q_2}\frac{dq_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial q_m}\frac{dq_m}{dt}\\
&= \frac{\partial \varphi}{\partial q_1}\frac{\partial H}{\partial p_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial q_2}\frac{\partial H}{\partial p_2} + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial q_m}\frac{\partial H}{\partial p_m}\\
\text{etc.} \quad & \quad \text{etc.} \quad\quad \text{etc.} \quad\quad\quad \text{etc.}
\end{aligned}$$

substituirt. Ebenso werden die Multiplicatoren μ^0, μ_1^0 etc. bestimmt, wenn man die letzten m Gleichungen in die Gleichungen:

$$0 = \frac{\partial f^0}{\partial c_1}\frac{\partial H^0}{\partial b_1} + \frac{\partial f^0}{\partial c_2}\frac{\partial H^0}{\partial b_2} + \cdots + \frac{\partial f^0}{\partial c_m}\frac{\partial H^0}{\partial b_m},$$

$$0 = \frac{\partial \varphi^0}{\partial c_1}\frac{\partial H^0}{\partial b_1} + \frac{\partial \varphi^0}{\partial c_2}\frac{\partial H^0}{\partial b_2} + \cdots + \frac{\partial \varphi^0}{\partial c_m}\frac{\partial H^0}{\partial b_m}$$

etc. etc. etc.

substituirt, in welchen H^0 wieder den Ausdruck von H bezeichnet, wenn man darin c_k, b_k statt q_k, p_k setzt. Das System der angeführten $2m$ Gleichungen bildet das System der vollständigen Integralgleichungen des Problems, zwischen t, den $2m$ Grössen q_m, p_m und den willkürlichen Constanten c_m, b_m.

Den partiellen Differentialquotienten von S nach t genommen findet man durch die Gleichung:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= p_1\frac{\partial H}{\partial p_1} + p_2\frac{\partial H}{\partial p_2} + \cdots + p_m\frac{\partial H}{\partial p_m} - H \\ &= \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial S}{\partial q_2}\cdot\frac{dq_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial S}{\partial q_m}\frac{dq_m}{dt} \\ &= \frac{\partial S}{\partial t} + p_1\frac{\partial H}{\partial p_1} + p_2\frac{\partial H}{\partial p_2} + \cdots + p_m\frac{\partial H}{\partial p_m},\end{aligned}$$

woraus

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H = U - T,$$

wie wir auch oben gefunden hatten, wo die rechtwinkligen Coordinaten zu Bestimmungsstücken der Punkte des Systems gewählt waren.

Wenn zwischen den Grössen q_k keine Bedingungsgleichungen Statt finden, und man in den Ausdruck von H oder T für die Grössen p_k ihre Werthe setzt:

$$p_k = \frac{\partial S}{\partial q_k},$$

so wird die vorstehende Gleichung

$$\frac{\partial S}{\partial t} + T = U$$

eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung zwischen der Function S und den unabhängigen Variablen t, q_1, q_2, ... q_m. Wenn das System ganz frei ist, also $m = 3n$, so muss dieses dieselbe partielle Differentialgleichung sein, wie die oben für diesen Fall angegebene,

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \Sigma\frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z_i}\right)^2\right] = U,$$

wenn man in dieselbe statt der $3n$ Grössen x_i, y_i, z_i die $3n$ Grössen q_k einführt. In der That folgen auch aus der oben gefundenen Gleichung:

$$\Sigma m_\iota [x'_\iota \delta x_\iota + y'_\iota \delta y_\iota + z'_\iota \delta z_\iota]$$
$$= p_1 \delta q_1 + p_2 \delta q_2 + \cdots + p_m \delta q_m,$$

die Gleichungen:

$$m_\iota x'_\iota = p_1 \frac{\partial q_1}{\partial x_\iota} + p_2 \frac{\partial q_2}{\partial x_\iota} + \cdots + p_m \frac{\partial q_m}{\partial x_\iota}.$$
$$m_\iota y'_\iota = p_1 \frac{\partial q_1}{\partial y_\iota} + p_2 \frac{\partial q_2}{\partial y_\iota} + \cdots + p_m \frac{\partial q_m}{\partial y_\iota}.$$
$$m_\iota z'_\iota = p_1 \frac{\partial q_1}{\partial z_\iota} + p_2 \frac{\partial q_2}{\partial z_\iota} + \cdots + p_m \frac{\partial q_m}{\partial z_\iota}.$$

und daher:

$$\begin{aligned} T = \; & \tfrac{1}{2} \Sigma \frac{1}{m_\iota} \left[p_1 \frac{\partial q_1}{\partial x_\iota} + p_2 \frac{\partial q_2}{\partial x_\iota} + \cdots + p_m \frac{\partial q_m}{\partial x_\iota} \right]^2 \\ & + \tfrac{1}{2} \Sigma \frac{1}{m_\iota} \left[p_1 \frac{\partial q_1}{\partial y_\iota} + p_2 \frac{\partial q_2}{\partial y_\iota} + \cdots + p_m \frac{\partial q_m}{\partial y_\iota} \right]^2 \\ & + \tfrac{1}{2} \Sigma \frac{1}{m_\iota} \left[p_1 \frac{\partial q_1}{\partial z_\iota} + p_2 \frac{\partial q_2}{\partial z_\iota} + \cdots + p_m \frac{\partial q_m}{\partial z_\iota} \right]^2, \end{aligned}$$

und daher, wenn man die Werthe

$$p_k = \frac{\partial S}{\partial q_k}$$

substituirt,

$$\begin{aligned} T = \; & \tfrac{1}{2} \Sigma \frac{1}{m_\iota} \left[\frac{\partial S}{\partial q_1} \frac{\partial q_1}{\partial x_\iota} + \frac{\partial S}{\partial q_2} \frac{\partial q_2}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial S}{\partial q_m} \frac{\partial q_m}{\partial x_\iota} \right]^2 \\ & + \tfrac{1}{2} \Sigma \frac{1}{m_\iota} \left[\frac{\partial S}{\partial q_1} \frac{\partial q_1}{\partial y_\iota} + \frac{\partial S}{\partial q_2} \frac{\partial q_2}{\partial y_\iota} + \cdots + \frac{\partial S}{\partial q_m} \frac{\partial q_m}{\partial y_\iota} \right]^2 \\ & + \tfrac{1}{2} \Sigma \frac{1}{m_\iota} \left[\frac{\partial S}{\partial q_1} \frac{\partial q_1}{\partial z_\iota} + \frac{\partial S}{\partial q_2} \frac{\partial q_2}{\partial z_\iota} + \cdots + \frac{\partial S}{\partial q_m} \frac{\partial q_m}{\partial z_\iota} \right]^2. \end{aligned}$$

in welchem Ausdrucke man noch vermittelst der zwischen den Grössen q_k und x_ι, y_ι, z_ι Statt findenden $3n$ Gleichungen die partiellen Differentialquotienten

$$\frac{\partial q_k}{\partial x_\iota}, \quad \frac{\partial q_k}{\partial y_\iota}, \quad \frac{\partial q_k}{\partial z_\iota}$$

durch die Grössen q_k auszudrücken hat, damit die Gleichung

$$\frac{\partial S}{\partial t} + T = U$$

eine partielle Differentialgleichung zwischen S, t und den Grössen q_k werde. Der vorstehende Werth von T ist aber offenbar

$$T = \Sigma \frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x_i}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial y_i}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial z_i}\right)^2\right],$$

welches in die Gleichung

$$\frac{\partial S}{\partial t}+T = U$$

substituirt, die früher angegebene partielle Differentialgleichung giebt.

Setzt man wieder

$$V = S+tH,$$

und führt statt t die Variable H ein, so erhält man durch ähnliche Formeln die $2m$ Integralgleichungen durch die partiellen Differentialquotienten von V ausgedrückt. Statt der Gleichung

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H$$

erhält man wieder, wie früher,

$$\frac{\partial V}{\partial H} = t.$$

Die partielle Differentialgleichung wird

$$T = U+H,$$

wenn man in T für die Grössen p_k die Werthe

$$p_k = \frac{\partial V}{\partial q_k}$$

setzt, und in U, wenn darin die Zeit t auch explicite vorkommt, seinen Werth

$$t = \frac{\partial V}{\partial H}.$$

Wenn t nicht explicite in U vorkommt, und daher vermittelst der Gleichungen der Bewegung H einer Constante gleich wird,

$$H = h,$$

erhält man noch eine zweite partielle Differentialgleichung für jede der Functionen S und V*),

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H^0 = 0,$$

$$H^0 = h,$$

wenn man in der ersten in H^0 die Grössen b_k durch ihre Werthe

$$b_k = -\frac{\partial S}{\partial c_k}.$$

*) Vgl. p. 321.

und in der zweiten durch die Werthe

$$b_\varkappa = -\frac{\partial V}{\partial c_\varkappa}$$

ersetzt.

§. 12. Die partielle Differentialgleichung für das Problem der Rotation.

Ehe ich mich zu andern Betrachtungen wende, will ich noch die partielle Differentialgleichung aufsuchen, auf welche nach der vorstehenden Theorie die Rotation eines festen Körpers um einen festen Punkt zurückkommt, wobei ich die von *Poisson* in seiner Abhandlung im 15ten Hefte des Polytechnischen Journals gebrauchte Bezeichnung beibehalten will.

Es seien X, Y zwei feste, auf einander rechtwinklig stehende Linien, XY ihre Ebene; ferner X_1, Y_1 zwei der beweglichen Hauptdrehungsaxen des Körpers, $X_1 Y_1$ ihre Ebene. Es sei:

ψ der Winkel zwischen X und dem Durchschnitt der Ebenen XY und $X_1 Y_1$;

φ der Winkel zwischen diesem Durchschnitt und X_1;

ϑ der Neigungswinkel beider Ebenen XY und $X_1 Y_1$;

es seien ferner A, B, C, die Momente der Trägheit des Körpers in Bezug auf die Axen X_1, Y_1 und die dritte auf ihnen senkrecht stehende. Setzt man

$$\frac{d\psi}{dt} = \psi', \quad \frac{d\varphi}{dt} = \varphi', \quad \frac{d\vartheta}{dt} = \vartheta',$$

ferner

$$\begin{aligned} p &= \sin\varphi \sin\vartheta \,.\, \psi' - \cos\varphi \,.\, \vartheta', \\ q &= \cos\varphi \sin\vartheta \,.\, \psi' + \sin\varphi \,.\, \vartheta', \\ r &= \varphi' - \cos\vartheta \,.\, \psi', \end{aligned}$$

so hat man die lebendige Kraft:

$$2T = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2.$$

Setzt man ferner mit *Poisson:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \varphi'} &= s, \\ \frac{\partial T}{\partial \vartheta'} &= v, \\ \frac{\partial T}{\partial \psi'} &= u, \end{aligned}$$

so giebt *Poisson* am angeführten Ort S. 326 die Formeln:

$$Cr = s,$$

$$Bq = \frac{\cos\varphi}{\sin\vartheta}(u - \cos\vartheta \,.\, s) - \sin\varphi \,.\, v,$$

$$Ap = \frac{\sin\varphi}{\sin\vartheta}(u - \cos\vartheta \,.\, s) + \cos\varphi \,.\, v,$$

woraus

$$T = \frac{1}{2C} \,.\, s^2$$

$$+ \frac{1}{2B}\left[\frac{\cos\varphi}{\sin\vartheta}(u - \cos\vartheta \,.\, s) - \sin\varphi \,.\, v\right]^2$$

$$+ \frac{1}{2A}\left[\frac{\sin\varphi}{\sin\vartheta}(u - \cos\vartheta \,.\, s) + \cos\varphi \,.\, v\right]^2.$$

Was in unsern allgemeinen Formeln die Grössen q_i waren, sind hier die Winkel φ, ψ, ϑ, und was die Grössen p_i, sind hier die den Winkeln φ, ψ, ϑ entsprechenden Grössen s, u, v. Man hat daher:

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = s,$$

$$\frac{\partial V}{\partial \psi} = u,$$

$$\frac{\partial V}{\partial \vartheta} = v,$$

so dass, wenn U die Kräftefunction ist, und h die in dem Satze von der lebendigen Kraft vorkommende Constante, die Rotation eines Körpers zurückkommt auf die Integration der partiellen Differentialgleichung:

$$\frac{1}{2C}\left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)^2$$

$$+ \frac{1}{2B}\left[\frac{\cos\varphi}{\sin\vartheta}\left(\frac{\partial V}{\partial \psi} - \cos\vartheta \frac{\partial V}{\partial \varphi}\right) - \sin\varphi \frac{\partial V}{\partial \vartheta}\right]^2$$

$$+ \frac{1}{2A}\left[\frac{\sin\varphi}{\sin\vartheta}\left(\frac{\partial V}{\partial \psi} - \cos\vartheta \frac{\partial V}{\partial \varphi}\right) + \cos\varphi \frac{\partial V}{\partial \vartheta}\right]^2$$

$$= U + h.$$

Die Integration dieser partiellen Differentialgleichung für den Fall, dass die Kräftefunction $U = 0$ oder der feste Körper durch einen augenblicklichen Impuls um den festen Punkt in Bewegung gesetzt wird, werde ich an einem andern Orte mittheilen und zeigen, wie sich das Problem in diesem Falle auf blosse Quadraturen zurückführen lässt. Dasselbe gilt bei *allen* mechanischen

Problemen, in welchen die Bestimmung der Lage der Punkte des Systems nur von drei Grössen abhängt, und die Gleichung für die Erhaltung der lebendigen Kraft, sowie die drei Gleichungen für die Erhaltung der Flächenräume gelten*).

§. 13. Zurückführung der allgemeinsten partiellen Differentialgleichung erster Ordnung auf ein einziges System gewöhnlicher Differentialgleichungen.

Die im Vorhergehenden mitgetheilte *Hamilton*sche Analysis setzt auf keine Weise voraus, dass die Function H aus t und den $2m$ Grössen q_k und p_k gerade auf die Weise zusammengesetzt sei, welche die Probleme der Mechanik erfordern, sondern diese Analyse gilt unverändert, *was auch H für eine Function von t und den Grössen q_k und p_k bedeutet.* Man erhält hierdurch wenn man für H irgend eine Function f setzt, allgemein folgendes Theorem.

Theorem IV.

„*Es sei*

$$f(t, q_1, q_2, \dots q_m, p_1, p_2, \dots p_m)$$

irgend eine Function der $2m+1$ Grössen t, q_1, q_2, ... q_m, p_1, p_2, ... p_m und zwischen diesen Variabeln folgendes System von $2m$ Differentialgleichungen erster Ordnung gegeben:

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_1}, \quad \frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_1},$$
$$\frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_2}, \quad \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_2},$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\frac{dq_m}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_m}, \quad \frac{dp_m}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_m};$$

es seien c_1, c_2, ... c_m die Werthe der Grössen q_1, q_2, ... q_m und b_1, b_2, ... b_m die Werthe der Grössen p_1, p_2, ... p_m für $t=0$, wodurch die in den $2m$ Integralen des vorgelegten Systems von Differentialgleichungen vorkommenden $2m$ willkürlichen Constanten bestimmt sind; drückt man hiernach das Integral

$$W = \int_0^t \left[p_1 \frac{\partial f}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial f}{\partial p_2} + \dots + p_m \frac{\partial f}{\partial p_m} - f\right] dt$$

durch die Grössen t, q_1, q_2, ... q_m, c_1, c_2, ... c_m aus, wie dieses vermittelst der $2m$ Integralgleichungen möglich ist, so hat man die Gleichungen:

*) Vgl. die nachgelassene Abhandlung „Nova methodus aequationes differentiales partiales primi ordinis integrandi" in dem Journal für Mathematik, Bd. 60, wo p. 149 folgg. diese Fragen behandelt sind.

$$\frac{\partial W}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial W}{\partial c_1} = -b_1,$$
$$\frac{\partial W}{\partial q_2} = p_2, \quad \frac{\partial W}{\partial c_2} = -b_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{\partial W}{\partial q_m} = p_m, \quad \frac{\partial W}{\partial q_m} = -b_m,$$

welche man als die 2m Integralgleichungen des Problems betrachten kann; zugleich ist der angegebene Ausdruck von W eine Lösung der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + f\left(t, q_1, q_2, \ldots q_m, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \frac{\partial W}{\partial q_2}, \cdots \frac{\partial W}{\partial q_m}\right) = 0$$

in welcher Lösung $c_1, c_2, \ldots c_m$ die m willkürlichen Constanten sind, denen man noch eine hinzufügen kann, welche durch blosse Addition mit W verbunden wird."

Der Beweis des ersten Theils dieses Theorems ist in der einen Gleichung enthalten:

$$\begin{aligned}
\delta W &= \delta\int_0^t \left(p_1\frac{\partial f}{\partial p_1} + p_2\frac{\partial f}{\partial p_2} + \cdots + p_m\frac{\partial f}{\partial p_m} - f\right)dt \\
&= \int_0^t \left\{\begin{array}{l} p_1\delta\frac{\partial f}{\partial p_1} + p_2\delta\frac{\partial f}{\partial p_2} + \cdots + p_m\delta\frac{\partial f}{\partial p_m} \\ -\frac{\partial f}{\partial q_1}\delta q_1 - \frac{\partial f}{\partial q_2}\delta q_2 - \cdots - \frac{\partial f}{\partial q_m}\delta q_m \end{array}\right\} dt \\
&= \int_0^t \left\{\begin{array}{l} p_1\delta\frac{dq_1}{dt} + p_2\delta\frac{dq_2}{dt} + \cdots + p_m\delta\frac{dq_m}{dt} \\ +\delta q_1\frac{dp_1}{dt} + \delta q_2\frac{dp_2}{dt} + \cdots + \delta q_m\frac{dp_m}{dt} \end{array}\right\} dt \\
&= p_1\delta q_1 + p_2\delta q_2 + \cdots + p_m\delta q_m \\
&\quad - b_1\delta c_1 - b_2\delta c_2 - \cdots - b_m\delta c_m,
\end{aligned}$$

in welcher Gleichung die Charakteristik δ sich bloss auf die Variation der in den Integralgleichungen vorkommenden willkürlichen Constanten bezieht. Man erhält dann den zweiten Theil des Theorems durch die Gleichung:

$$\begin{aligned}
&p_1\frac{\partial f}{\partial p_1} + p_2\frac{\partial f}{\partial p_2} + \cdots + p_m\frac{\partial f}{\partial p_m} - f \\
&= \frac{dW}{dt} = \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial W}{\partial q_2}\frac{dq_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial W}{\partial q_m}\frac{dq_m}{dt} \\
&\qquad = \frac{\partial W}{\partial t} + p_1\frac{\partial f}{\partial p_1} + p_2\frac{\partial f}{\partial p_2} + \cdots + p_m\frac{\partial f}{\partial p_m},
\end{aligned}$$

woraus

$$\frac{\partial W}{\partial t}+f = 0,$$

in welcher Gleichung man für die Grössen p_k ihre Werthe $\frac{\partial W}{\partial q_k}$ zu substituiren hat, wenn sie als partielle Differentialgleichung betrachtet werden soll.

Die partielle Differentialgleichung, deren vollständige Lösung vermittelst der vollständigen Integration eines einzigen Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen durch das Theorem IV. gegeben ist, hat nicht die allgemeinste Form partieller Differentialgleichungen erster Ordnung, indem sie nur die Differentialquotienten der gesuchten Function W, nicht diese Function selber involvirt. Für diesen allgemeinsten Fall habe ich folgendes Theorem gefunden.

Theorem V.

„*Es sei*

$$f(W, t, q_1, q_2, \dots q_m, p_1, p_2, \dots p_m)$$

irgend eine beliebige Function der Grössen W, t, q_1, q_2, … q_m, p_1, p_2, … p_m, *und zwischen denselben folgendes System von* $2m+1$ *gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung gegeben:*

$$\frac{dq_1}{dt}=\frac{\partial f}{\partial p_1},\quad \frac{dp_1}{dt}=-\frac{\partial f}{\partial q_1}-p_1\frac{\partial f}{\partial W},$$

$$\frac{dq_2}{dt}=\frac{\partial f}{\partial p_2},\quad \frac{dp_2}{dt}=-\frac{\partial f}{\partial q_2}-p_2\frac{\partial f}{\partial W},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{dq_m}{dt}=\frac{\partial f}{\partial p_m},\quad \frac{dp_m}{dt}=-\frac{\partial f}{\partial q_m}-p_m\frac{\partial f}{\partial W},$$

$$\frac{dW}{dt}=p_1\frac{\partial f}{\partial p_1}+p_2\frac{\partial f}{\partial p_2}+\dots+p_m\frac{\partial f}{\partial p_m}-f;$$

es seien für $W=0$ *die Werthe der Grössen* t, q_1, q_2, … q_m, p_1, p_2, … p_m *respective* t_0, e_1, e_2, … e_m, b_1, b_2, … b_m, *wodurch die in den* $2m+1$ *Integralgleichungen des vorgelegten Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen vorkommenden* $2m+1$ *willkürlichen Constanten bestimmt sind; drückt man hiernach vermittelst der* $2m+1$ *Integralgleichungen die Grösse* W *durch* t, t_0, q_1, q_2, … q_m, e_1, e_2, … e_m *aus, und nimmt in diesem Sinne die partiellen Differentialquotienten von* W, *so erhält man*

$$\frac{\partial W}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial W}{\partial c_1} = -M b_1,$$
$$\frac{\partial W}{\partial q_2} = p_2, \quad \frac{\partial W}{\partial c_2} = -M b_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{\partial W}{\partial q_m} = p_m, \quad \frac{\partial W}{\partial c_m} = -M b_m,$$

wo

$$M = e^{-\int_{t_0}^{t} \frac{\partial f}{\partial W} dt};$$

die vorstehenden Gleichungen verbunden mit dem Ausdrucke von W durch t, t_0, q_1, q_2, ... q_m, c_1, c_2, ... c_m kann man als die $2m+1$ Integralgleichungen mit $2m+1$ willkürlichen Constanten t_0, c_1, c_2, ... c_m, b_1, b_2, ... b_m ansehen; zugleich ist der angegebene Ausdruck von W eine vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{\partial W}{\partial t} + f\left(W, t, q_1, q_2, \dots q_m, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \frac{\partial W}{\partial q_2}, \dots \frac{\partial W}{\partial q_m}\right) = 0$$

in welcher Lösung t_0, c_1, c_2, ... c_m die $m+1$ willkürlichen Constanten sind".

Der Beweis des ersten Theils dieses Theorems ist in folgenden Gleichungen enthalten, in welchen die Charakteristik δ sich wieder nur auf die willkürlichen Constanten bezieht, welche in den $2m+1$ Integralgleichungen vorkommen. Man hat zuerst

$$\delta \frac{dW}{dt} = \frac{d\delta W}{dt}$$
$$= p_1 \delta \frac{\partial f}{\partial p_1} + p_2 \delta \frac{\partial f}{\partial p_2} + \cdots + p_m \delta \frac{\partial f}{\partial p_m}$$
$$- \frac{\partial f}{\partial q_1} \delta q_1 - \frac{\partial f}{\partial q_2} \delta q_2 - \cdots - \frac{\partial f}{\partial q_m} \delta q_m - \frac{\partial f}{\partial W} \delta W$$
$$= p_1 \delta \frac{dq_1}{dt} + p_2 \delta \frac{dq_2}{dt} + \cdots + p_m \delta \frac{dq_m}{dt}$$
$$+ \frac{dp_1}{dt} \delta q_1 + \frac{dp_2}{dt} \delta q_2 + \cdots + \frac{dp_m}{dt} \delta q_m$$
$$+ \frac{\partial f}{\partial W} (p_1 \delta q_1 + p_2 \delta q_2 + \cdots + p_m \delta q_m - \delta W)$$
$$= \frac{d(p_1 \delta q_1 + p_2 \delta q_2 + \cdots + p_m \delta q_m)}{dt}$$
$$+ \frac{\partial f}{\partial W} (p_1 \delta q_1 + p_2 \delta q_2 + \cdots + p_m \delta q_m - \delta W).$$

Bringt man diese Gleichung auf 0, so erhält man:

$$\frac{d(p_1\delta q_1+p_2\delta q_2+\cdots+p_m\delta q_m-\delta W)}{dt}$$

$$+\frac{\partial f}{\partial W}(p_1\delta q_1+p_2\delta q_2+\cdots+p_m\delta q_m-\delta W) = 0.$$

Dividirt man diese Gleichung mit M, und integrirt von $t=t_0$ bis $t=t$, so erhält man, wenn man durch $(\delta W)_0$ den Werth von δW für $t=t_0$ bezeichnet:

$$\frac{1}{M}(p_1\delta q_1+p_2\delta q_2+\cdots+p_m\delta q_m-\delta W)$$

$$-(b_1\delta c_1+b_2\delta c_2+\cdots+b_m\delta c_m-(\delta W)_0) = 0.$$

Bezeichnet man mit W_0 und $\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)_0$ die Werthe von W und $\frac{\partial W}{\partial t}$ für $t=t_0$, so hat man

$$\delta W_0 = (\delta W)_0+\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)_0\delta t_0,$$

oder da ich vorausgesetzt habe, dass W_0 identisch $=0$ sei, und daher auch $\delta W_0=0$ ist,

$$(\delta W)_0 = -\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)_0\delta t_0.$$

Hiernach verwandelt sich die gefundene Gleichung in folgende

$$\delta W = p_1\delta q_1+p_2\delta q_2+\cdots+p_m\delta q_m$$

$$-M\left(b_1\delta c_1+b_2\delta c_2+\cdots+b_m\delta c_m+\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)_0 dt_0\right),$$

welche den ersten Theil des Theorems umfasst, und ausserdem noch die Gleichung:

$$\frac{\partial W}{\partial t_0} = -M\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)_0.$$

Man hat ferner:

$$p_1\frac{\partial f}{\partial p_1}+p_2\frac{\partial f}{\partial p_2}+\cdots+p_m\frac{\partial f}{\partial p_m}-f$$

$$=\frac{dW}{dt}=\frac{\partial W}{\partial t}+\frac{\partial W}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt}+\frac{\partial W}{\partial q_2}\frac{dq_2}{dt}+\cdots+\frac{\partial W}{\partial q_m}\frac{dq_m}{dt}$$

$$=\frac{\partial W}{\partial t}+p_1\frac{\partial f}{\partial p_1}+p_2\frac{\partial f}{\partial p_2}+\cdots+p_m\frac{\partial f}{\partial p_m},$$

woraus

$$\frac{\partial W}{\partial t}+f = 0,$$

welche Gleichung, wenn man darin für die Grössen p_k ihre Werthe $\frac{\partial W}{\partial q_k}$ substituirt, den zweiten Theil des Theorems giebt.

Pfaff hat zuerst bemerkt (in den Abhandlungen der Berliner Academie der Wissenschaften vom Jahre 1815), dass die Integration der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial W}{\partial t}+f\left(W, t, q_1, q_2, \ldots q_m, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \frac{\partial W}{\partial q_2}, \cdots \frac{\partial W}{\partial q_m}\right) = 0,$$

die Integration des im Theorem V. aufgestellten Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen erfordert. Aber nach seiner Analysis war die vollständige Integration dieses Systems nur ein erster Schritt nach welchem noch mehrere andere Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen zu integriren blieben. Das Theorem V. lehrt aber, dass die vollständige Integration des einen Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen hinreicht, eine vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung zu finden. Man kann auch über den Zusammenhang des Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen mit der partiellen Differentialgleichung eine Abhandlung im 2ten Bande des *Crelle*schen Journals *über die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung* vergleichen.

§. 14. Es wird gezeigt, wie umgekehrt jede vollständige Lösung einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung die Integrale eines gewissen Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen liefert.

Um die vollständigen Integrale der in den Theoremen IV. und V. aufgestellten Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen zu erhalten, ist es nicht nöthig, dass man gerade diejenige vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichungen kenne, welche in diesen Theoremen als die Function W definirt worden ist, sondern es genügt, wenn man *irgend eine* vollständige Lösung dieser partiellen Differentialgleichungen kennt. Man hat nämlich folgendes Theorem, welches als die Umkehrung des Theorems IV. betrachtet werden kann:

Theorem VI.

„*Es sei W irgend eine vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung:*

$$0 = \frac{\partial W}{\partial t}+f\left(t, q_1, q_2, \ldots q_m, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \frac{\partial W}{\partial q_2}, \cdots \frac{\partial W}{\partial q_m}\right),$$

welche Lösung ausser einer zu W hinzukommenden Constante die m willkürlichen Constanten α_1, α_2, ... α_m enthalte, so sind die Gleichungen:

$$\frac{\partial W}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \beta_1,$$
$$\frac{\partial W}{\partial q_2} = p_2, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} = \beta_2,$$
$$\cdots \quad \cdots$$
$$\frac{\partial W}{\partial q_m} = p_m, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_m} = \beta_m,$$

in welchen β_1, β_2, ... β_m andere m willkürliche Constanten bedeuten, die vollständigen Integralgleichungen folgender $2m$ gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_1}, \quad \frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_1},$$
$$\frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_2}, \quad \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_2},$$
$$\cdots \quad \cdots$$
$$\frac{dq_m}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_m}, \quad \frac{dp_m}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_m},$$

in welchen f die obige Function

$$f\left(t, q_1, q_2, \ldots q_m, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \frac{\partial W}{\partial q_2}, \ldots \frac{\partial W}{\partial q_m}\right)$$

ist, wenn man darin für

$$\frac{\partial W}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial W}{\partial q_2}, \quad \ldots \quad \frac{\partial W}{\partial q_m}$$

respective

$$p_1, \quad p_2, \quad \ldots \quad p_m$$

setzt."

Der Beweis dieses Theorems ist in der zweifachen Darstellung des Ausdrucks

$$\frac{\delta\, dW}{dt} = \frac{d\,\delta W}{dt}$$

enthalten, welche man erhält, wenn man W zuerst nach t differentiirt und dann variirt, oder dasselbe zuerst variirt und dann nach t differentiirt, wobei alle Variabeln als Functionen von t betrachtet werden, wie sie sich durch die $2m$ Integralgleichungen ergeben, und das Variationszeichen δ sich wieder nur auf die in denselben enthaltenen willkürlichen Constanten bezieht.

Man hat demnach:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial W}{\partial q_2}\frac{dq_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial W}{\partial q_m}\frac{dq_m}{dt}$$

$$= -f + p_1\frac{dq_1}{dt} + p_2\frac{dq_2}{dt} + \cdots + p_m\frac{dq_m}{dt},$$

und daher:

$$\begin{aligned}\frac{\delta\, dW}{dt} = & -\frac{\partial f}{\partial q_1}\delta q_1 - \frac{\partial f}{\partial q_2}\delta q_2 - \cdots - \frac{\partial f}{\partial q_m}\delta q_m \\ & + \left(\frac{dq_1}{dt} - \frac{\partial f}{\partial p_1}\right)\delta p_1 + \left(\frac{dq_2}{dt} - \frac{\partial f}{\partial p_2}\right)\delta p_2 + \cdots + \left(\frac{dq_m}{dt} - \frac{\partial f}{\partial p_m}\right)\delta p_m \\ & + p_1\frac{\delta\, dq_1}{dt} + p_2\frac{\delta\, dq_2}{dt} + \cdots + p_m\frac{\delta\, dq_m}{dt}.\end{aligned}$$

Andererseits hat man:

$$\begin{aligned}\delta W = & \frac{\partial W}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial W}{\partial q_2}\delta q_2 + \cdots + \frac{\partial W}{\partial q_m}\delta q_m \\ & + \frac{\partial W}{\partial \alpha_1}\delta\alpha_1 + \frac{\partial W}{\partial \alpha_2}\delta\alpha_2 + \cdots + \frac{\partial W}{\partial \alpha_m}\delta\alpha_m \\ = & \; p_1\,\delta q_1 + p_2\,\delta q_2 + \cdots + p_m\,\delta q_m \\ & + \beta_1\delta\alpha_1 + \beta_2\delta\alpha_2 + \cdots + \beta_m\delta\alpha_m,\end{aligned}$$

und hieraus

$$\begin{aligned}\frac{d\,\delta W}{dt} = & \frac{dp_1}{dt}\delta q_1 + \frac{dp_2}{dt}\delta q_2 + \cdots + \frac{dp_m}{dt}\delta q_m \\ & + p_1\frac{d\,\delta q_1}{dt} + p_2\frac{d\,\delta q_2}{dt} + \cdots + p_m\frac{d\,\delta q_m}{dt}.\end{aligned}$$

Setzt man beide Ausdrücke einander gleich, und bemerkt man, dass

$$\frac{\delta\, dq_k}{dt} = \frac{d\,\delta q_k}{dt},$$

so erhält man:

$$\begin{aligned}& \left(\frac{dq_1}{dt} - \frac{\partial f}{\partial p_1}\right)\delta q_1 + \left(\frac{dq_2}{dt} - \frac{\partial f}{\partial p_2}\right)\delta q_2 + \cdots + \left(\frac{dp_m}{dt} - \frac{\partial f}{\partial p_m}\right)\delta q_m \\ & -\left(\frac{dp_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial q_1}\right)\delta p_1 - \left(\frac{dp_2}{dt} + \frac{\partial f}{\partial q_2}\right)\delta p_2 - \cdots - \left(\frac{dp_m}{dt} + \frac{\partial f}{\partial q_m}\right)\delta p_m = 0.\end{aligned}$$

Da die $2m$ Variationen δq_k, δp_k von $2m$ willkürlichen und unabhängigen Variationen $\delta\alpha_k$ und $\delta\beta_k$ abhängen, so sind sie selber willkürlich und von einander unabhängig, wesshalb die in dieselben multiplicirten Ausdrücke einzeln verschwinden müssen; wodurch man die zu erweisenden Differentialgleichungen des aufgestellten Theorems erhält.

Wenn die partielle Differentialgleichung die Function W selber enthält. so gestaltet sich das Theorem VI. folgendermassen:

Theorem VII.

„*Es sei W irgend eine vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung:*

$$\frac{\partial W}{\partial t}+f\left(W, t, q_1, q_2, \dots q_m, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \frac{\partial W}{\partial q_2}, \cdots \frac{\partial W}{\partial q_m}\right) = 0.$$

mit $m+1$ willkürlichen Constanten α, α_1, α_2, ... α_m, so sind die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W}{\partial q_1} &= p_1, & \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} &= \beta_1 \frac{\partial W}{\partial \alpha},\\
\frac{\partial W}{\partial q_2} &= p_2, & \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} &= \beta_2 \frac{\partial W}{\partial \alpha},\\
&\cdots & &\cdots\\
\frac{\partial W}{\partial q_m} &= p_m, & \frac{\partial W}{\partial \alpha_m} &= \beta_m \frac{\partial W}{\partial \alpha},
\end{aligned}$$

in welchen β_1, β_2, ... β_m neue willkürliche Constanten sind, verbunden mit dem Ausdrucke von W die $2m+1$ vollständigen Integralgleichungen der Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned}
\frac{dq_1}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial p_1}, & \frac{dp_1}{dt} &= -\frac{\partial f}{\partial q_1} - p_1 \frac{\partial f}{\partial W},\\
\frac{dq_2}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial p_2}, & \frac{dp_2}{dt} &= -\frac{\partial f}{\partial q_2} - p_2 \frac{\partial f}{\partial W},\\
&\cdots & &\cdots\\
\frac{dq_m}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial p_m}, & \frac{dp_m}{dt} &= -\frac{\partial f}{\partial q_m} - p_m \frac{\partial f}{\partial W},
\end{aligned}$$

$$\frac{dW}{dt} = p_1 \frac{\partial f}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial f}{\partial p_2} + \cdots + p_m \frac{\partial f}{\partial p_m} - f,$$

in welchen f die obige Function

$$f\left(W, t, q_1, q_2, \dots q_m, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \frac{\partial W}{\partial q_2}, \cdots \frac{\partial W}{\partial q_m}\right)$$

ist, wenn man darin für die Grössen

$$\frac{\partial W}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial W}{\partial q_2}, \quad \dots \quad \frac{\partial W}{\partial q_m}$$

respective

$$p_1, \quad p_2, \quad \dots \quad p_m$$

setzt.“

Man hat nämlich, wenn man in demselben Sinne wie bei dem vorigen Theorem differentiirt und variirt,

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial W}{\partial q_2}\frac{dq_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial W}{\partial q_m}\frac{dq_m}{dt}$$

$$= -f + p_1\frac{dq_1}{dt} + p_2\frac{dq_2}{dt} + \cdots + p_m\frac{dq_m}{dt},$$

und daher

$$\frac{\delta dW}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_1}\delta q_1 - \frac{\partial f}{\partial q_2}\delta q_2 - \cdots - \frac{\partial f}{\partial q_m}\delta q_m - \frac{\partial f}{\partial W}\delta W$$

$$+\left(\frac{dq_1}{dt} - \frac{\partial f}{\partial p_1}\right)\delta p_1 + \left(\frac{dq_2}{dt} - \frac{\partial f}{\partial p_2}\right)\delta p_2 + \cdots + \left(\frac{dq_m}{dt} - \frac{\partial f}{\partial p_m}\right)\delta p_m$$

$$+p_1\frac{\delta dq_1}{dt} + p_2\frac{\delta dq_2}{dt} + \cdots + p_m\frac{\delta dq_m}{dt}.$$

Man hat ferner

$$\delta W = \frac{\partial W}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial W}{\partial q_2}\delta q_2 + \cdots + \frac{\partial W}{\partial q_m}\delta q_m$$

$$+\frac{\partial W}{\partial \alpha}\delta\alpha + \frac{\partial W}{\partial \alpha_1}\delta\alpha_1 + \frac{\partial W}{\partial \alpha_2}\delta\alpha_2 + \cdots + \frac{\partial W}{\partial \alpha_m}\delta\alpha_m$$

$$= p_1\delta q_1 + p_2\delta q_2 + \cdots + p_m\delta q_m + \frac{\partial W}{\partial \alpha}\cdot\Delta,$$

wenn man der Kürze halber

$$\Delta = \delta\alpha + \beta_1\delta\alpha_1 + \beta_2\delta\alpha_2 + \cdots + \beta_m\delta\alpha_m$$

setzt. Hieraus folgt

$$\frac{d\delta W}{dt} = \frac{dp_1}{dt}\delta q_1 + \frac{dp_2}{dt}\delta q_2 + \cdots + \frac{dp_m}{dt}\delta q_m$$

$$+p_1\frac{d\delta q_1}{dt} + p_2\frac{d\delta q_2}{dt} + \cdots + p_m\frac{d\delta q_m}{dt}$$

$$+\frac{d\frac{\partial W}{\partial \alpha}}{dt}\cdot\Delta.$$

Setzt man diesen Ausdruck dem oben für $\frac{\delta dW}{dt}$ gefundenen gleich, und substituirt in letzterem für δW den Ausdruck:

$$\delta W = p_1\delta q_1 + p_2\delta q_2 + \cdots p_m\delta q_m + \frac{\partial W}{\partial \alpha}\cdot\Delta,$$

so erhält man:

$$0 = \left(\frac{dq_1}{dt} - \frac{\partial f}{\partial p_1}\right)\delta p_1 + \left(\frac{dq_2}{dt} - \frac{\partial f}{\partial p_2}\right)\delta p_2 + \cdots + \left(\frac{dq_m}{dt} - \frac{\partial f}{\partial p_m}\right)\delta p_m$$
$$-\left(\frac{dp_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial q_1} + p_1\frac{\partial f}{\partial W}\right)\delta q_1 - \cdots - \left(\frac{dp_m}{dt} + \frac{\partial f}{\partial q_m} + p_m\frac{\partial f}{\partial W}\right)\delta q_m$$
$$-\left(\frac{\partial f}{\partial W}\frac{\partial W}{\partial \alpha} + \frac{d\frac{\partial W}{\partial \alpha}}{dt}\right).\Delta.$$

Die $2m+1$ Grössen $\delta p_1, \delta p_2, \ldots \delta p_m, \delta q_1, \delta q_2, \ldots \delta q_m, \Delta$ sind aus den $2m+1$ Variationen $\delta\alpha, \delta\alpha_1, \delta\alpha_2, \ldots \delta\alpha_m, \delta\beta_1, \delta\beta_2, \ldots \delta\beta_m$ zusammengesetzt, und da diese willkürlich und von einander unabhängig sind, so sind es auch jene. Die vorstehende Gleichung kann daher nur erfüllt werden, wenn die in die einzelnen Variationen multiplicirten Ausdrücke verschwinden, wodurch man die zu erweisenden Differentialgleichungen des aufgestellten Theorems erhält. Die letzte dieser Gleichungen folgt nämlich aus der Gleichung:

$$\frac{dW}{dt} = -f + p_1\frac{dq_1}{dt} + p_2\frac{dq_2}{dt} + \cdots + p_m\frac{dq_m}{dt},$$

wenn man darin die Gleichungen

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_1}, \quad \frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_2}, \quad \ldots \quad \frac{dq_m}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_m}$$

substituirt. Man findet ausserdem noch, wenn man den in Δ multiplicirten Ausdruck $= 0$ setzt, die Gleichung:

$$\frac{\partial f}{\partial W}\frac{\partial W}{\partial \alpha} + \frac{d\frac{\partial W}{\partial \alpha}}{dt} = 0.$$

Ganz ähnliche Gleichungen gelten auch für jede der andern willkürlichen Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$.

Ich will für den Fall, in welchem die partielle Differentialgleichung die gesuchte Function nicht selber enthält, auch noch annehmen, dass sie die eine Variable t nicht selber involvire, wie dies in denjenigen Problemen der Mechanik der Fall ist, in welchen der Satz von der lebendigen Kraft gilt. Für diese Annahme erhält man eine vollständige Lösung der Gleichung

$$0 = \frac{\partial W}{\partial t} + f\left(q_1, q_2, \ldots q_m, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \frac{\partial W}{\partial q_2}, \ldots \frac{\partial W}{\partial q_m}\right),$$

wenn man

$$W = V - ht$$

setzt, wo h eine willkührliche Constante ist, und V eine vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung:

$$h = f\left(q_1, q_2, \ldots q_m, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2}, \cdots \frac{\partial V}{\partial q_m}\right),$$

welche ausser einer willkürlichen Constante, die hinzu addirt werden kann, noch $m-1$ willkürliche Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{m-1}$ enthält. Schreibt man in dem Theorem VI. $-h$ und $-\tau$ statt α_m und β_m, und bemerkt, dass

$$\frac{\partial W}{\partial q_1} = \frac{\partial V}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial W}{\partial q_2} = \frac{\partial V}{\partial q_2}, \quad \ldots \quad \frac{\partial W}{\partial q_m} = \frac{\partial V}{\partial q_m},$$

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial W}{\partial \alpha_1}, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} = \frac{\partial V}{\partial \alpha_2}, \quad \ldots \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_{m-1}} = \frac{\partial V}{\partial \alpha_{m-1}},$$

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_m} = -\frac{\partial W}{\partial h} = t - \frac{\partial V}{\partial h},$$

so verwandelt sich das Theorem VI. in folgendes:

Theorem VIII.

„Es sei V eine vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung:

$$h = f\left(q_1, q_2, \ldots q_m, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2}, \cdots \frac{\partial V}{\partial q_m}\right),$$

in welcher h eine Constante ist; es seien $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{m-1}$ die $m-1$ willkürlichen Constanten, welcher ausser einer, die zu V hinzu addirt werden kann, in V enthalten sind; so sind die $2m$ Gleichungen:

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = p_1, \qquad \frac{\partial V}{\partial \alpha_1} = \beta_1,$$
$$\frac{\partial V}{\partial q_2} = p_2, \qquad \frac{\partial V}{\partial \alpha_2} = \beta_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{\partial V}{\partial q_{m-1}} = p_{m-1}, \qquad \frac{\partial V}{\partial \alpha_{m-1}} = \beta_{m-1},$$
$$\frac{\partial V}{\partial q_m} = p_m, \qquad \frac{\partial V}{\partial h} = t + \tau,$$

in welchen $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{m-1}, \tau$ neue willkürliche Constanten sind, die vollständigen $2m$ willkürliche Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{m-1}, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{m-1}, h, \tau$, enthaltenden Integralgleichungen der $2m$ Differentialgleichungen:

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_1}, \qquad \frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_1},$$
$$\frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_2}, \qquad \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{dq_m}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_m}, \qquad \frac{dp_m}{dt} = -\frac{\partial f}{\partial q_m},$$

in welchen f die obige Function $f\left(q_1, q_2, \ldots q_m, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2}, \ldots \frac{\partial V}{\partial q_m}\right)$ *ist, wenn man darin* $p_1, p_2, \ldots p_m$ *für* $\frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2}, \ldots \frac{\partial V}{\partial q_m}$ *schreibt.*“

§. 15. Ausdrücke der charakteristischen Function und ihrer Differentialquotienten, bei unfreier Bewegung, durch die ursprünglichen Coordinaten.

Man erhält aus den Theoremen VI. und VIII. die auf die Mechanik bezüglichen Formeln, wenn man für f die Function $H = T - U$ setzt. Die Grössen q_ι bedeuten solche Bestimmungsstücke der Punkte, zwischen welchen keine Bedingungsgleichungen Statt finden, so dass man für sämmtliche Coordinaten vollkommen bestimmte Ausdrücke durch die Grössen q_ι hat. Diese Ausdrücke der Coordinaten und ihre Differentialquotienten hat man in die halbe lebendige Kraft T und die Kräftefunction U zu substituiren, und die partiellen Differentialquotienten von T, nach den Grössen $q_\iota' = \frac{dq_\iota}{dt}$ genommen, gleich p_ι zu setzen; endlich in T für die Grössen q_ι' die Grössen p_ι einzuführen. Es wird dann $H = T - U$ eine Function der Grössen q_ι und p_ι, welche nur dann noch ausserdem die Grösse t enthält, wenn die Kräftefunction U dieselbe ausser den Coordinaten enthält, und diese Function hat man in den genannten Theoremen für f zu setzen. Ich will nun annehmen, dass rückwärts in die *charakteristische* Function W, welche irgend ein vollständiges Integral der Gleichung

$$\frac{\partial W}{\partial t} + H = 0$$

bedeutete, statt der Grössen q_ι wieder die rechtwinkligen Coordinaten substituirt werden, so dass W eine Function von $x_\iota, y_\iota, z_\iota$ wird und von den m willkürlichen Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$: wobei ich von einer weitern Constanten abstrahire, die noch durch Addition mit W verbunden sein kann. Wenn zwischen den Coordinaten Bedingungsgleichungen gegeben sind, so wird

$$m < 3n,$$

wenn n die Zahl der bewegten materiellen Punkte ist: man kann dann die Grössen q_ι auf unendlich verschiedene Arten durch die Coordinaten $x_\iota, y_\iota, z_\iota$ ausdrücken, indem man vermittelst der zwischen den Coordinaten Statt findenden Bedingungsgleichungen, deren Anzahl $3n - m$ beträgt, die Ausdrücke variirt. Es kann daher auch die Function W, wenn man in sie statt der Grössen q_ι die Coordinaten einführt, verschiedene Formen annehmen, welche aber, wenn $F = 0$, $\Phi = 0$ etc. die Bedingungsgleichungen sind, alle aus einer erhalten werden, wenn man zu ihr die Functionen F, Φ, ..., jede mit einem Factor versehen, hinzufügt.

Hat man nun für die Grössen q_ι Ausdrücke durch die Coordinaten x_ι, y_ι, z_ι in irgend einer Form, welche dieselben vermittelst der Bedingungsgleichungen $F=0$, $\Phi=0$, ... erhalten können, angenommen und dieselben in die Function W substituirt, so wird, wenn ξ eine der Coordinaten x_ι, y_ι, z_ι bedeutet,

$$\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial \xi} &= \frac{\partial W}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial \xi}+\frac{\partial W}{\partial q_2}\frac{\partial q_2}{\partial \xi}+\cdots+\frac{\partial W}{\partial q_m}\frac{\partial q_m}{\partial \xi}\\ &= p_1\frac{\partial q_1}{\partial \xi}+p_2\frac{\partial q_2}{\partial \xi}+\cdots+p_m\frac{\partial q_m}{\partial \xi}.\end{aligned}$$

Es war aber, wenn man sich T durch die Grössen q_ι und q'_ι ausgedrückt denkt,

$$p_\iota = \frac{\partial T}{\partial q'_\iota},$$

wodurch die vorige Gleichung sich in folgende verwandelt:

$$\frac{\partial W}{\partial \xi} = \frac{\partial T}{\partial q'_1}\frac{\partial q_1}{\partial \xi}+\frac{\partial T}{\partial q'_2}\frac{\partial q_2}{\partial \xi}+\cdots+\frac{\partial T}{\partial q'_m}\frac{\partial q_m}{\partial \xi}.$$

Betrachtet man q'_ι als Function der Grössen x_ι, y_ι, z_ι, x'_ι, y'_ι, z'_ι, welche in Bezug auf die Grössen x'_ι, y'_ι, z'_ι linear sein wird, so hat man:

$$\frac{\partial q'_\iota}{\partial \xi'} = \frac{\partial q_\iota}{\partial \xi},$$

da in dem durch Differentiation erhaltenen Ausdruck von q'_ι die Grösse ξ' nur linear und in $\frac{\partial q_\iota}{\partial \xi}$ multiplicirt vorkommt. Man hat daher:

$$\frac{\partial W}{\partial \xi} = \frac{\partial T}{\partial q'_1}\frac{\partial q'_1}{\partial \xi'}+\frac{\partial T}{\partial q'_2}\frac{\partial q'_2}{\partial \xi'}+\cdots+\frac{\partial T}{\partial q_n}\frac{\partial q'_m}{\partial \xi'}$$

oder

$$\frac{\partial W}{\partial \xi} = \frac{\partial T}{\partial \xi'}.$$

Diese Gleichung gilt für jede der Coordinaten. Setzt man für ξ die Werthe x_ι, y_ι, z_ι, so erhält man:

$$\frac{\partial W}{\partial x_\iota} = \frac{\partial T}{\partial x'_\iota}, \quad \frac{\partial W}{\partial y_\iota} = \frac{\partial T}{\partial y'_\iota}, \quad \frac{\partial W}{\partial z_\iota} = \frac{\partial T}{\partial z'_\iota}.$$

Wenn man, um die Ausdrücke rechter Hand oder die partiellen Differentialquotienten von T nach x'_ι, y'_ι, z'_ι zu erhalten, in die Function T, wie sie durch die Grössen q_ι und q'_ι ausgedrückt ist, die angenommenen Ausdrücke der Grössen q_i durch die Grössen x_i, y_i, z_i substituirt, sowie die daraus durch Differentiation abgeleiteten Ausdrücke der Grössen q'_i durch die Grössen x_i, y_i, z_i, x'_i, y'_i, z'_i, so wird sich die Function T nicht in den Ausdruck

$$\tfrac{1}{2}\Sigma m_i(x'_i x'_i + y'_i y'_i + z'_i z'_i)$$

verwandeln, sondern in einen andern, der ihm vermittelst der Gleichungen:

$$F = 0, \quad \Phi = 0, \quad \ldots$$

und der daraus durch Differentiation folgenden,

$$\frac{dF}{dt} = 0, \quad \frac{d\Phi}{dt} = 0, \quad \ldots$$

gleich wird. Es wird daher der Ausdruck, in welchen sich die Function T verwandelt, folgende Form annehmen:

$$T = \tfrac{1}{2}\Sigma m_i(x'_i x'_i + y'_i y'_i + z'_i z'_i) + \lambda\frac{dF}{dt} + \mu\frac{d\Phi}{dt} + \cdots + \lambda_1 F + \mu_1 \Phi + \cdots.$$

Die Functionen F, Φ, ... enthalten die Grössen x'_i, y'_i, z'_i gar nicht, die Functionen $\frac{dF}{dt}$, $\frac{d\Phi}{dt}$, ... enthalten dieselben nur linear und in die Grössen

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \quad \ldots \quad \frac{\partial F}{\partial y_i}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y_i}, \quad \ldots \quad \frac{\partial F}{\partial z_i}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z_i}, \quad \ldots$$

multiplicirt. Wenn man daher den vorstehenden Ausdruck von T partiell nach x'_i, y'_i, z'_i differentiirt und die in F, Φ, ... $\frac{dF}{dt}$, $\frac{d\Phi}{dt}$, ... multiplicirten Terme als verschwindend fortlässt, so erhält man die Gleichungen:

$$\frac{\partial W}{\partial x_i} = \frac{\partial T}{\partial x'_i} = m_i x'_i + \lambda\frac{\partial F}{\partial x_i} + \mu\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \cdots,$$

$$\frac{\partial W}{\partial y_i} = \frac{\partial T}{\partial y'_i} = m_i y'_i + \lambda\frac{\partial F}{\partial y_i} + \mu\frac{\partial \Phi}{\partial y_i} + \cdots,$$

$$\frac{\partial W}{\partial z_i} = \frac{\partial T}{\partial z'_i} = m_i z'_i + \lambda\frac{\partial F}{\partial z_i} + \mu\frac{\partial \Phi}{\partial z_i} + \cdots.$$

Die Multiplicatoren λ, μ, ... können aus diesen Gleichungen eliminirt werden vermittelst der Gleichungen:

$$\frac{dF}{dt} = \Sigma\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}x'_i + \frac{\partial F}{\partial y_i}y'_i + \frac{\partial F}{\partial z_i}z'_i\right) = 0,$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \Sigma\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}x'_i + \frac{\partial \Phi}{\partial y_i}y'_i + \frac{\partial \Phi}{\partial z_i}z'_i\right) = 0,$$

. . . .

. . . .

welche, wenn man die Werthe von x'_ι, y'_ι, z'_ι substituirt, sich in folgende verwandeln:

$$\Sigma\frac{1}{m_\iota}\left(\frac{\partial W}{\partial x_\iota}\frac{\partial F}{\partial x_i}+\frac{\partial W}{\partial y_\iota}\frac{\partial F}{\partial y_\iota}+\frac{\partial W}{\partial z_\iota}\frac{\partial F}{\partial z_i}\right) = A\,\lambda+B\,\mu+\cdots,$$

$$\Sigma\frac{1}{m_\iota}\left(\frac{\partial W}{\partial x_\iota}\frac{\partial \Phi}{\partial x_\iota}+\frac{\partial W}{\partial y_\iota}\frac{\partial \Phi}{\partial y_\iota}+\frac{\partial W}{\partial z_\iota}\frac{\partial \Phi}{\partial z_\iota}\right) = A_1\lambda+B_1\mu+\cdots,$$

. . . .

wo

$$A = \Sigma\frac{1}{m_\iota}\left(\frac{\partial F}{\partial x_\iota}\frac{\partial F}{\partial x_\iota}+\frac{\partial F}{\partial y_i}\frac{\partial F}{\partial y_\iota}+\frac{\partial F}{\partial z_\iota}\frac{\partial F}{\partial z_i}\right),$$

$$B = A_1 = \Sigma\frac{1}{m_\iota}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial \Phi}{\partial x_\iota}+\frac{\partial F}{\partial y_\iota}\frac{\partial \Phi}{\partial y_\iota}+\frac{\partial F}{\partial z_\iota}\frac{\partial \Phi}{\partial z_\iota}\right),$$

$$B_1 = \Sigma\frac{1}{m_\iota}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_\iota}\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}+\frac{\partial \Phi}{\partial y_\iota}\frac{\partial \Phi}{\partial y_\iota}+\frac{\partial \Phi}{\partial z_\iota}\frac{\partial \Phi}{\partial z_\iota}\right),$$

. . . .

Hat man aus diesen Gleichungen die Werthe von λ, μ, ... bestimmt, welche in Bezug auf die partiellen Differentialquotienten der Function W eine lineare Form erhalten, so wird sich die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial W}{\partial t}+H = \frac{\partial W}{\partial t}+T-U = 0,$$

welcher die Function W zu genügen hat, in folgende verwandeln:

$$\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial t}&+\tfrac{1}{2}\Sigma\frac{1}{m_i}\left(\frac{\partial W}{\partial x_\iota}-\lambda\frac{\partial F}{\partial x_i}-\mu\frac{\partial \Phi}{\partial x_\iota}\cdots\right)^2\\ &+\tfrac{1}{2}\Sigma\frac{1}{m_i}\left(\frac{\partial W}{\partial y_\iota}-\lambda\frac{\partial F}{\partial y_i}-\mu\frac{\partial \Phi}{\partial y_\iota}\cdots\right)^2\\ &+\tfrac{1}{2}\Sigma\frac{1}{m_\iota}\left(\frac{\partial W}{\partial z_\iota}-\lambda\frac{\partial F}{\partial z_\iota}-\mu\frac{\partial \Phi}{\partial z_\iota}\cdots\right)^2 = U,\end{aligned}$$

wo U irgend eine gegebene Function der Grössen x_ι, y_ι, z_ι und von t sein kann. Wenn U nicht t selber enthält, so führt man besser wieder für W die Function V und für t die Grösse h ein vermittelst der Gleichungen:

$$V = W-(t+\tau)\frac{\partial W}{\partial t},\quad \frac{\partial W}{\partial t} = -h:$$

die partiellen Differentialquotienten von W nach x_ι, y_ι, z_ι verwandeln sich in die von V nach denselben Grössen genommen.

Ich bemerke noch, dass die partiellen Differentialquotienten von W oder V, welche nach den willkürlichen Constanten genommen werden, die diese Functionen enthalten, sich dadurch, dass man statt der Grössen q_ι wieder die Coordinaten x_ι, y_ι, z_ι einführt, nicht ändern, da die zwischen den Grössen q_ι, x_ι, y_ι, z_ι Statt findenden Relationen die willkürlichen Constanten nicht enthalten. Es werden daher wieder, auch wenn die Functionen W oder V durch die Coordinaten selbst ausgedrückt sind, die endlichen Integralgleichungen:

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_m} = \beta_m$$

oder

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_{m-1}} = \beta_{m-1}, \quad \frac{\partial V}{\partial h} = t + \tau,$$

wie wir sie zufolge der obigen Theoreme fanden, in welchen W und V Functionen der Grössen q_ι waren.

§. 16. Untersuchung des Falles, in welchem die vollständige Lösung eine zu grosse Anzahl von Constanten enthält, welche durch Bedingungsgleichungen mit einander verbunden sind.

Ich will noch kurz erwähnen, wie man sich der Multiplicatoren bedienen kann, wenn für die m willkürlichen Constanten eine grössere Anzahl $m+k$ eingeführt werden, zwischen denen k Bedingungsgleichungen

$$\psi_1 = 0, \quad \psi_2 = 0, \quad \ldots \quad \psi_k = 0$$

Statt finden. Der hier zu befolgende Gang weicht von dem gewöhnlichen etwas ab, wenn man in dem angeführten Falle den Integralgleichungen eine symmetrische Form erhalten will.

Es seien α_1, α_2, ... α_{m+k} die in der Function W enthaltenen willkürlichen Constanten, zwischen denen die angegebenen k Gleichungen gegeben sind. Man betrachte α_1, α_2, ... α_m als unabhängige Grössen und α_{m+1}, α_{m+2}, ... α_{m+k} als Functionen derselben, wie sie durch die k Gleichungen bestimmt sind. Schliesst man die unter dieser Annahme nach α_1, α_2, ... α_m genommenen partiellen Differentialquotienten von W in Klammern ein, so hat man

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \alpha_1}\right) = \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial W}{\partial \alpha_{m+1}} \frac{\partial \alpha_{m+1}}{\partial \alpha_1} + \cdots + \frac{\partial W}{\partial \alpha_{m+k}} \frac{\partial \alpha_{m+k}}{\partial \alpha_1},$$
$$\left(\frac{\partial W}{\partial \alpha_2}\right) = \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial W}{\partial \alpha_{m+1}} \frac{\partial \alpha_{m+1}}{\partial \alpha_2} + \cdots + \frac{\partial W}{\partial \alpha_{m+k}} \frac{\partial \alpha_{m+k}}{\partial \alpha_2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\left(\frac{\partial W}{\partial \alpha_m}\right) = \frac{\partial W}{\partial \alpha_m} + \frac{\partial W}{\partial \alpha_{m+1}} \frac{\partial \alpha_{m+1}}{\partial \alpha_m} + \cdots + \frac{\partial W}{\partial \alpha_{m+k}} \frac{\partial \alpha_{m+k}}{\partial \alpha_m}.$$

Man denke sich jetzt k Functionen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_k$ durch die Gleichungen bestimmt:

$$0 = \frac{\partial W}{\partial \alpha_{m+1}} + \varepsilon_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_{m+1}} + \cdots + \varepsilon_k \frac{\partial \psi_k}{\partial \alpha_{m+1}},$$

$$0 = \frac{\partial W}{\partial \alpha_{m+2}} + \varepsilon_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_{m+2}} + \cdots + \varepsilon_k \frac{\partial \psi_k}{\partial \alpha_{m+2}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$0 = \frac{\partial W}{\partial \alpha_{m+k}} + \varepsilon_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_{m+k}} + \cdots + \varepsilon_k \frac{\partial \psi_k}{\partial \alpha_{m+k}}.$$

Substituirt man die aus diesen Gleichungen genommenen Werthe von

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_{m+1}}, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_{m+2}}, \quad \ldots \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_{m+k}}$$

in die vorigen Gleichungen, und bemerkt die Gleichungen:

$$0 = \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_{m+1}} \frac{\partial \alpha_{m+1}}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_{m+2}} \frac{\partial \alpha_{m+2}}{\partial \alpha_i} + \cdots + \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_{m+k}} \frac{\partial \alpha_{m+k}}{\partial \alpha_i},$$

in welchen i jede der Zahlen 1, 2, 3, ... m, und ψ jede der Functionen $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_k$ bedeuten kann, so erhält man:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \alpha_1}\right) = \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} + \varepsilon_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_1} + \varepsilon_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_1} + \cdots + \varepsilon_k \frac{\partial \psi_k}{\partial \alpha_1},$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \alpha_2}\right) = \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} + \varepsilon_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_2} + \varepsilon_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_2} + \cdots + \varepsilon_k \frac{\partial \psi_k}{\partial \alpha_2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \alpha_m}\right) = \frac{\partial W}{\partial \alpha_m} + \varepsilon_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_m} + \varepsilon_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_m} + \cdots + \varepsilon_k \frac{\partial \psi_k}{\partial \alpha_m},$$

$$0 = \frac{\partial W}{\partial \alpha_{m+1}} + \varepsilon_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_{m+1}} + \varepsilon_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_{m+1}} + \cdots + \varepsilon_k \frac{\partial \psi_k}{\partial \alpha_{m+1}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$0 = \frac{\partial W}{\partial \alpha_{m+k}} + \varepsilon_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_{m+k}} + \varepsilon_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_{m+k}} + \cdots + \varepsilon_k \frac{\partial \psi_k}{\partial \alpha_{m+k}}.$$

Zufolge des gefundenen Theorems werden die endlichen Integralgleichungen, welche in einer neuen Form darzustellen sind,

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \alpha_1}\right) = \beta_1, \quad \left(\frac{\partial W}{\partial \alpha_2}\right) = \beta_2, \quad \ldots \quad \left(\frac{\partial W}{\partial \alpha_m}\right) = \beta_m,$$

wo $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_m$ neue willkürliche Constanten sind. Aus diesen Gleichungen folgt allgemein, wenn $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_m$ irgend welche Constanten sind, dass auch der Ausdruck

$$\zeta_1 \left(\frac{\partial W}{\partial \alpha_1}\right) + \zeta_2 \left(\frac{\partial W}{\partial \alpha_2}\right) + \cdots + \zeta_m \left(\frac{\partial W}{\partial \alpha_m}\right)$$

einer willkürlichen Constante gleich wird. *Bedeutet daher $\zeta_1^{(i)}$, $\zeta_2^{(i)}$, ... $\zeta_{m+k}^{(i)}$ irgend ein System von $m+k$ Constanten, für welches die k Gleichungen Statt finden:*

$$\zeta_1^{(i)}\frac{\partial\psi_1}{\partial\alpha_1}+\zeta_2^{(i)}\frac{\partial\psi_1}{\partial\alpha_2}+\cdots+\zeta_{m+k}^{(i)}\frac{\partial\psi_1}{\partial\alpha_{m+k}} = 0,$$
$$\zeta_1^{(i)}\frac{\partial\psi_2}{\partial\alpha_1}+\zeta_2^{(i)}\frac{\partial\psi_2}{\partial\alpha_2}+\cdots+\zeta_{m+k}^{(i)}\frac{\partial\psi_2}{\partial\alpha_{m+k}} = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\zeta_1^{(i)}\frac{\partial\psi_k}{\partial\alpha_1}+\zeta_2^{(i)}\frac{\partial\psi_k}{\partial\alpha_2}+\cdots+\zeta_{m+k}^{(i)}\frac{\partial\psi_k}{\partial\alpha_{m+k}} = 0,$$

und wählt man irgend m solcher von einander unabhängigen Systeme, welchen die Indices $i=1, 2, 3, \ldots m$ entsprechen mögen, so erhält man, wenn man die vorstehenden Gleichungen mit $\zeta_1^{(i)}$, $\zeta_2^{(i)}$, ... $\zeta_{m+k}^{(i)}$ multiplicirt und addirt, die m Integralgleichungen unter folgender Form:

$$\zeta_1'\frac{\partial W}{\partial\alpha_1}+\zeta_2'\frac{\partial W}{\partial\alpha_2}+\cdots+\zeta_{m+k}'\frac{\partial W}{\partial\alpha_{m+k}} = \gamma_1,$$
$$\zeta_1''\frac{\partial W}{\partial\alpha_1}+\zeta_2''\frac{\partial W}{\partial\alpha_2}+\cdots+\zeta_{m+k}''\frac{\partial W}{\partial\alpha_{m+k}} = \gamma_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\zeta_1^{(m)}\frac{\partial W}{\partial\alpha_1}+\zeta_2^{(m)}\frac{\partial W}{\partial\alpha_2}+\cdots+\zeta_{m+k}^{(m)}\frac{\partial W}{\partial\alpha_{m+k}} = \gamma_m,$$

in welchen γ_1, γ_2, ... γ_m die neuen m willkürlichen Constanten sind.

Die in dem vorstehenden Theorem enthaltenen Formeln haben in Bezug auf die Grössen α_1, α_2, ... α_{m+k} die gewünschte symmetrische Form.

§. 17. Ueber den Fall, in welchem die vollständige Lösung überzählige Constanten enthält.

Ich will nun noch einiges über den Fall sagen, wenn die Function W, welche der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial W}{\partial t}+H = 0,$$

in der H eine Function von q_1, q_2, ... q_m und $\frac{\partial W}{\partial q_1}$, $\frac{\partial W}{\partial q_2}$, ... $\frac{\partial W}{\partial q_m}$ ist, Genüge leistet, ausser einer mit ihr durch Addition verbundenen Constante, von welcher ich immer abstrahire, noch eine grössere Anzahl als m willkürlicher Constanten involvirt, zwischen welchen keine Bedingungsgleichung gegeben ist. Dieses ist um so eher möglich, weil die Function W sogar willkürliche Functionen, also *unendlich viele* willkürliche Constanten involviren kann.

Die nachstehenden Betrachtungen werden zugleich dazu dienen, die Natur der Theoreme VI. und VIII., welche als Fundamentaltheoreme betrachtet werden können, näher zu erläutern.

Man denke sich irgend eine Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial W}{\partial t}+H = 0$$

gegeben, und das System von n gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung vorgelegt:

$$\frac{dq_1}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_1},\quad \frac{dq_2}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_2},\quad \dots\quad \frac{dq_m}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_m},$$

in welchen p_i *für* $\frac{\partial W}{\partial q_i}$ *geschrieben ist: so hat man das Theorem, dass, wenn* W *irgend eine willkürliche Constante* α *enthält, die Gleichung*

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha} = \beta$$

ein Integral des vorgelegten Systems Differentialgleichungen ist.

Differentiirt man nämlich die Gleichung

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha} = \beta,$$

und substituirt die gegebenen Differentialgleichungen, so erhält man:

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{\partial^2 W}{\partial\alpha\,\partial t}+\frac{\partial^2 W}{\partial\alpha\,\partial q_1}\frac{\partial H}{\partial p_1}+\frac{\partial^2 W}{\partial\alpha\,\partial q_2}\frac{\partial H}{\partial p_2}+\dots+\frac{\partial^2 W}{\partial\alpha\,\partial q_m}\frac{\partial H}{\partial p_m}.$$

Da die Constante α in H nur vorkommt, insofern sie in den Grössen $p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i}$ enthalten ist, so ist der Ausdruck rechter Hand der nach α genommene partielle Differentialquotient des Ausdrucks

$$\frac{\partial W}{\partial t}+H$$

und also identisch gleich Null, wodurch β einer willkürlichen Constante gleich wird, was zu erweisen war.

Die Constante α ist nur willkürliche Constante genannt worden, insofern sie nicht in der partiellen Differentialgleichung, welcher W genügt, vorkommt; dagegen afficirt sie das aufgestellte System gewöhnlicher Differentialgleichungen und ist daher bei Integration desselben als *gegebene* und nur β als *willkürliche* Constante zu betrachten.

Es folgt aus dem eben bewiesenen Theorem, dass, wenn die Lösung W mehrere willkürliche Constanten enthält, welche daher auch in den gewöhnlichen Differentialgleichungen als gegebene Constanten vorkommen werden, man eben so viele Integrale derselben hat. Die Zahl der von einander unabhängigen Integrale dieser Differentialgleichungen ist m. Hat man daher eine grössere Zahl Integrale:

$$u_1 = \beta_1, \quad u_2 = \beta_2, \quad \ldots \quad u_{m+k} = \beta_{m+k},$$

in welchen $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{m+k}$ Constanten sind, so können diese nicht alle willkürlich sein, sondern es müssen k derselben durch die übrigen bestimmt sein, oder zwischen den Functionen $u_1, u_2, \ldots u_{m+k}$ müssen k Relationen Statt finden. Da in dieser Betrachtung H jede Function der unabhängigen Variablen bedeuten kann, und man durch Auflösung der Gleichung in Bezug auf den partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial W}{\partial t}$ jede partielle Differentialgleichung erster Ordnung, in welcher die gesuchte Function nicht selber vorkommt, auf die Form

$$\frac{\partial W}{\partial t} + H = 0$$

bringen kann, so folgt aus dem Vorigen folgender Satz:

„*Es sei W eine Lösung einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung mit m unabhängigen Variablen, in welcher die unbekannte Function W nicht selber vorkommt; enthält W ausser einer durch Addition hinzugefügten $m+k$ willkürliche Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{m+k}$, so müssen zwischen den $m+k$ nach diesen genommenen partiellen Differentialquotienten von W,*

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_1}, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_2}, \quad \ldots \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_{m+k}},$$

k Relationen Statt finden, d. h. k Gleichungen, die ausser den Grössen $\frac{\partial W}{\partial \alpha_1}$, $\frac{\partial W}{\partial \alpha_2}, \ldots \frac{\partial W}{\partial \alpha_{m+k}}$ zwar noch die willkürlichen Constanten enthalten können, aber nicht die unabhängigen Variablen selber.“

Ein Beispiel dieses Satzes habe ich oben bei Aufsuchung derjenigen charakteristischen Function gegeben, von welcher die elliptische Bewegung eines Planeten abhängt. Die dort gefundene charakteristische Function V enthielt eine willkürliche Constante mehr als nöthig war, und zwischen ihren nach den willkürlichen Constanten, die sie enthält, genommenen partiellen

Differentialquotienten ergab sich die Gleichung:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \alpha}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2\alpha}\left(\frac{\partial V}{\partial \beta}\right)^2 = b^2,$$

welche, wie man sieht, ausser $\frac{\partial V}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial V}{\partial \beta}$ nur die willkürlichen Constanten involvirt.

§. 18. Lösung mit überzähligen Constanten, wenn die partielle Differentialgleichung die gesuchte Function selbst enthält.

Ich will jetzt das im Vorigen gegebene Theorem auf den Fall ausdehnen, in welchem die partielle Differentialgleichung auch die unbekannte Function W selber involvirt. Die hier angestellten Betrachtungen werden ebenso dazu dienen, das Theorem VII. seiner wahren Natur nach näher zu erläutern, wie die vorstehenden Betrachtungen auf das Theorem VI. Licht werfen.

Man kann die im Theorem VII. gegebenen endlichen Integralgleichungen durch die Gleichungen ersetzen:

$$\frac{\partial f}{\partial W}\frac{\partial W}{\partial \alpha} + \frac{d\frac{\partial W}{\partial \alpha}}{dt} = 0,$$

indem man für α nach und nach die $m+1$ willkürlichen Constanten $\alpha, \alpha_1, \ldots \alpha_m$ setzt. Diese Gleichungen sind in dem Beweise, welchen ich von dem Theorem VII. gegeben habe, enthalten. Sie haben zwar die Form von Differentialgleichungen erster Ordnung; da man aber aus ihnen ersieht, dass die Differentiale der Logarithmen der Grössen

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_1}, \quad \ldots \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_m}$$

alle derselben Grösse

$$-\frac{\partial f}{\partial W}dt$$

und daher auch unter einander selbst gleich sind, so folgt hieraus, dass diese Grössen

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_1}, \quad \ldots \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_m}$$

sich wie Constanten verhalten müssen. Die Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial W}\frac{\partial W}{\partial \alpha} + \frac{d\frac{\partial W}{\partial \alpha}}{dt} = 0$$

können also an die Stelle der im Theorem VII. aufgestellten endlichen Integralgleichungen:

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha} : \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} : \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} : \ldots : \frac{\partial W}{\partial \alpha_m} = 1 : \beta_1 : \beta_2 : \ldots : \beta_m$$

gesetzt werden, in welchen $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_m$ willkürliche Constanten waren.

Man kann aber auch jede *einzelne* dieser Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial W}\frac{\partial W}{\partial \alpha} + \frac{d\frac{\partial W}{\partial \alpha}}{dt} = 0$$

besonders beweisen, ohne dass man darauf Rücksicht nimmt, ob W noch andre willkürliche Constanten ausser α enthalte. Man hat nämlich folgenden Satz:

„Es sei eine Function W gegeben, welche der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial W}{\partial t} + f\left(W, t, q_1, q_2, \ldots q_m, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \frac{\partial W}{\partial q_2}, \ldots \frac{\partial W}{\partial q_m}\right) = 0$$

Genüge leistet; es sei ferner zwischen den Grössen t, $q_1, q_2, \ldots q_m$ das System gewöhnlicher Differentialgleichungen vorgelegt:

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_1}, \quad \frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_2}, \quad \frac{dq_m}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_m},$$

wo der Kürze halber $p_1, p_2, \ldots, p_m$ für $\frac{\partial W}{\partial q_1}, \frac{\partial W}{\partial q_2}, \cdots \frac{\partial W}{\partial q_m}$ geschrieben ist; enthalt die Function W eine willkürliche Constante α, d. h. eine Constante α, die nicht in der partiellen Differentialgleichung vorkommt, so findet vermittelst der vorgelegten gewöhnlichen Differentialgleichungen die identische Gleichung Statt:

$$\frac{\partial f}{\partial W}\frac{\partial W}{\partial \alpha} + \frac{d\frac{\partial W}{\partial \alpha}}{dt} = 0;$$

enthalt die Function W irgend zwei willkürliche Constanten α, α_1, so wird

$$\frac{\frac{\partial W}{\partial \alpha_1}}{\frac{\partial W}{\partial \alpha}} = \text{Const.}$$

ein Integral des vorgelegten Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen.“

Es wird nämlich die Gleichung:

$$\frac{\partial f}{\partial W}\frac{\partial W}{\partial \alpha} + \frac{d\frac{\partial W}{\partial \alpha}}{dt} = 0,$$

wenn man die Differentiation ausführt und die vorgelegten Differentialgleichungen substituirt:

$$\frac{\partial f}{\partial W}\frac{\partial W}{\partial \alpha}+\frac{\partial^2 W}{\partial \alpha \partial t}+\frac{\partial^2 W}{\partial \alpha \partial q_1}\frac{\partial f}{\partial p_1}+\frac{\partial^2 W}{\partial \alpha \partial q_2}\frac{\partial f}{\partial p_2}+\cdots+\frac{\partial^2 W}{\partial \alpha \partial q_m}\frac{\partial f}{\partial p_m} = 0,$$

und diese Gleichung wird identisch erfüllt. Denn der Ausdruck links vom Gleichheitszeichen ist der nach α genommene partielle Differentialquotient von $\frac{\partial W}{\partial t}+f$ und also identisch null, da $\frac{\partial W}{\partial t}+f$ identisch null ist. Enthält W noch eine zweite willkürliche Constante α_1, so hat man ebenso:

$$\frac{\partial f}{\partial W}\frac{\partial W}{\partial \alpha_1}+\frac{d\frac{\partial W}{\partial \alpha_1}}{dt} = 0.$$

Man hat daher auch vermittelst des vorgelegten Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen die identische Gleichung

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha}\frac{d\frac{\partial W}{\partial \alpha_1}}{dt}-\frac{\partial W}{\partial \alpha_1}\frac{d\frac{\partial W}{\partial \alpha}}{dt} = 0,$$

oder

$$\frac{d\frac{\frac{\partial W}{\partial \alpha_1}}{\frac{\partial W}{\partial \alpha}}}{dt} = 0,\quad \frac{\frac{\partial W}{\partial \alpha_1}}{\frac{\partial W}{\partial \alpha}} = \text{Const.},$$

was zu beweisen war.

Wenn die Function W $m+k+1$ willkürliche Constanten α, α_1, α_2, ... α_{m+k} enthält, so erhält man nach dem Vorigen $m+k$ Integrale des vorgelegten Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_1}=\beta_1\frac{\partial W}{\partial \alpha},\quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_2}=\beta_2\frac{\partial W}{\partial \alpha},\quad \ldots\quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_{m+k}}=\beta_{m+k}\frac{\partial W}{\partial \alpha},$$

in welchen β_1, β_2, ... β_{m+k} Constanten sind. Diese Constanten können aber nicht alle willkürlich sein, sondern, wenn m von ihnen willkürlich sind, müssen die übrigen k durch sie und die Constanten α, α_1, ... α_{m+k} bestimmt sein. Man hat daher, wenn man m statt $m+1$ setzt, folgenden Satz:

„*Wenn man von einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung mit m unabhängigen Variablen eine Lösung mit m+k willkürlichen Constanten hat, so finden zwischen den Verhältnissen der nach diesen willkürlichen*

Constanten genommenen partiellen Differentialquotienten der Lösung k Relationen Statt, das heisst, k Gleichungen, welche ausser diesen Verhältnissen nur noch die willkürlichen Constanten enthalten."

§. 19. Andre Darstellung. Ueber die zweite von *Hamilton* aufgestellte partielle Differentialgleichung.

Man kann die im Vorigen gegebenen Beweise auch noch auf eine andre Art darstellen. Es sei

$$\varphi = 0$$

eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung mit m unabhängigen Variablen $q_1, q_2, \ldots q_m$, in welcher die abhängige Variable oder die gesuchte Function W nicht selbst vorkommt. Es enthalte ein Werth von W eine willkürliche Constante α, die mit ihm nicht durch blosse Addition verbunden sei, und man setze

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha} = u.$$

Die partiellen Differentialquotienten von W nach $q_1, q_2, \ldots q_m$ bezeichne man wieder mit $p_1, p_2, \ldots p_m$, so werden die partiellen Differentialquotienten dieser Grössen nach α die partiellen Differentialquotienten von u nach $q_1, q_2, \ldots q_m$ sein. Differentiirt man nun die Gleichung $\varphi = 0$ nach α, so erhält man

$$0 = \frac{\partial \varphi}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial \varphi}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial \alpha} + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial p_m}\frac{\partial p_m}{\partial \alpha}$$

oder

$$0 = \frac{\partial \varphi}{\partial p_1}\frac{\partial u}{\partial q_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial p_2}\frac{\partial u}{\partial q_2} + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial p_m}\frac{\partial u}{\partial q_m}.$$

Werden in dieser Gleichung die Grössen $\frac{\partial \varphi}{\partial p_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial p_2}, \ldots \frac{\partial \varphi}{\partial p_m}$ als gegebene Functionen von $q_1, q_2, \ldots q_m$ betrachtet, so giebt es $m-1$ von einander unabhängige Functionen u, welche dieser Gleichung Genüge leisten, und jede andre, welche dieses ebenfalls thut, ist eine Function derselben. Hat man daher $m+k-1$ solcher Functionen, so müssen zwischen ihnen k Relationen Statt finden. Enthält W eine Anzahl von $m+k-1$ willkürlichen Constanten, so sind nach dem Vorigen die partiellen Differentialquotienten von W nach ihnen solche $m+k-1$ Functionen; es müssen daher zwischen denselben k Relationen Statt finden, was zu beweisen war.

Wenn φ noch W selber enthält, so hat man:

$$0 = \frac{\partial \varphi}{\partial W} u + \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} \frac{\partial u}{\partial q_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} \frac{\partial u}{\partial q_2} + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial p_m} \frac{\partial u}{\partial q_m}.$$

Kennt man noch eine zweite Function u_1, welche diesen Gleichungen Genüge leistet, so hat man auch:

$$0 = \frac{\partial \varphi}{\partial W} u_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} \frac{\partial u_1}{\partial q_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} \frac{\partial u_1}{\partial q_2} + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial p_m} \frac{\partial u_1}{\partial q_m}.$$

Man dividire die erste Gleichung durch u, die zweite durch u_1 und ziehe sie nachher von einander ab, so erhält man, wenn

$$w = \log \frac{u_1}{u},$$

die Gleichung:

$$0 = \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} \frac{\partial w}{\partial q_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} \frac{\partial w}{\partial q_2} + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial p_m} \frac{\partial w}{\partial q_m}.$$

Man hat hierdurch diesen Fall auf den vorigen zurückgeführt. Man sieht daher durch dieselben Betrachtungen, dass, wenn man $m+k-1$ Functionen w kennt, welche dieser Gleichung Genüge leisten, zwischen ihnen k Relationen Statt finden müssen, oder was dasselbe ist, zwischen den Functionen $e^w = \frac{u_1}{u}$. Man erhält aber $m+k-1$ Functionen e^w, wenn man $m+k$ Functionen u kennt, welche der Gleichung:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial W} u + \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} \frac{\partial u}{\partial q_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} \frac{\partial u}{\partial q_2} + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial p_m} \frac{\partial u}{\partial q_m} = 0$$

Genüge leisten, und durch eine derselben die übrigen dividirt: es müssen daher zwischen den Verhältnissen solcher $m+k$ Functionen k Relationen Statt finden. Da nun ferner $m+k$ solcher Functionen u erhalten werden, wenn W eine gleiche Zahl willkürlicher Constanten enthält und nach ihnen partiell differentiirt wird, so müssen für den Fall, dass W $m+k$ willkürlicher Constanten enthält, zwischen den nach ihnen genommenen partiellen Differentialquotienten von W sich k Relationen ergeben, was der obige Satz war.

Die vorstehenden Betrachtungen werfen auch auf den Umstand Licht, dass *Hamilton* seine charakteristische Function durch *zwei* partielle Differentialgleichungen, denen sie gleichzeitig genügt, definiren konnte. Nach dem Vorigen nämlich ist dies immer möglich, wenn die Zahl der willkürlichen Constanten um eine grösser ist, als zu einer *vollständigen* Lösung nöthig ist. Denn es ist im Vorigen bewiesen worden, dass in diesem Falle zwischen den willkürlichen Constanten und den nach ihnen genommenen partiellen Differentialquotienten der gefundenen Lösung eine Gleichung Statt findet. *Hat man daher von einer vorgelegten partiellen Differentialgleichung erster Ordnung eine Lösung gefunden mit einer willkürlichen Constante mehr, als die Zahl der unabhängigen Variablen beträgt oder als zur vollständigen Lösung nöthig sind, so genügt dieselbe Function gleichzeitig zwei partiellen Differentialgleichungen, nämlich der vorgelegten zwischen den unabhängigen Variablen, der unbekannten Function und ihren nach den unabhängigen Variablen genommenen partiellen Differentialquotienten, welche die willkürlichen Constanten nicht enthält, und einer andern zwischen den willkürlichen Constanten und den nach ihnen genommenen partiellen Differentialquotienten der unbekannten Function, welche die unabhängigen Variablen nicht enthält.* Die charakteristischen Functionen V und W, welche *Hamilton* braucht, genügten den partiellen Differentialgleichungen:

$$H = h. \qquad \frac{\partial W}{\partial t} + H = 0.$$

welche die gesuchte Function nicht selber enthalten. In der ersten dieser Gleichungen sind die m Grössen $q_1, q_2, \ldots q_m$, in der andern die $m+1$ Grössen $q_1, q_2, \ldots q_m, t$ die unabhängigen Variablen; jedoch kommt in den Fällen, welche *Hamilton* betrachtet, in der letztern nicht t selber, sondern nur der partielle Differentialquotient von W nach t vor. Die von *Hamilton* gegebenen, oben mitgetheilten Ausdrücke von V und W enthalten als willkürliche Constanten die Anfangswerthe der Grössen $q_1, q_2, \ldots q_m$, zu denen noch durch blosse Addition eine willkürliche Constante hinzugefügt werden kann: ausserdem kann in W noch t in $t+\tau$ verwandelt werden, wo τ ebenfalls eine willkürliche Constante. Auf diese Weise erhalten beide Functionen V und W eine willkürliche Constante mehr, als die Zahl der unabhängigen Variablen beträgt, so dass sie zwei partiellen Differentialgleichungen gleichzeitig genügen. Man erhält für die Function W die zweite von *Hamilton* gegebene partielle Differentialgleichung, wenn man für $\frac{\partial W}{\partial \tau}$ den ihm gleichen Ausdruck $\frac{\partial W}{\partial t}$ und $\tau = 0$ setzt.

§. 20. Nachweis, dass sich die in grösserer Anzahl vorhandenen willkürlichen Constanten aus der gefundenen Function mit Hülfe ihrer Differentialquotienten wirklich eliminiren lassen.

Wenn eine Lösung einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung mehr willkürliche Constanten enthält, als zu einer *vollständigen* Lösung erforderlich sind, so finden, wie wir im Vorigen gesehen haben, zwischen ihren nach diesen willkürlichen Constanten genommenen partiellen Differentialquotienten Relationen Statt. Es lassen sich aber die hierüber gefundenen Sätze auch umkehren. Man kann nämlich auch umgekehrt zeigen, dass, wenn diese Relationen Statt finden, die Constanten sich sämmtlich vermittelst der partiellen Differentialquotienten der Function eliminiren lassen. Es reicht hin dies für den Fall zu zeigen, wenn die Function nur *eine* willkürliche Constante mehr enthält, als zur vollständigen Lösung erfordert wird. Denn wenn von jeder der überzähligen Constanten besonders gezeigt ist, dass sie bei der Elimination der zu einer vollständigen Lösung erforderlichen Anzahl Constanten von selbst mit herausgeht, so hat man bewiesen, dass bei der Elimination der letztern gleichzeitig *sämmtliche* andere Constanten mit herausgehn.

Ich will zuerst wieder den Fall betrachten, wenn die vorgelegte partielle Differentialgleichung nicht die unbekannte Function selber enthält. Für diesen Fall kann man den Satz, welchen ich im Vorigen bewiesen habe, so ausdrücken:

A. „*Es sei*

$$W(t, q_1, q_2, \dots q_m, \alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m)$$

irgend eine Function der $2m+2$ *Grössen* $t, q_1, q_2, \dots q_m, \alpha, \alpha_1, \dots \alpha_m$, *von denen keine mit der Function durch blosse Addition verbunden sei; es sei ferner:*

$$(1.)\quad \frac{\partial W}{\partial t} = p, \quad \frac{\partial W}{\partial q_1} = p_1, \quad \dots \quad \frac{\partial W}{\partial q_m} = p_m,$$

$$(2.)\quad \frac{\partial W}{\partial \alpha} = \beta, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \dots \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_m} = \beta_m;$$

so wird man, wenn der Fall eintritt, dass man aus dem ersten Systeme von $m+1$ *Gleichungen die* $m+1$ *Grössen* $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m$ *eliminiren kann, so dass man eine Gleichung bloss zwischen den Grössen* $t, q_1, q_2, \dots q_m, p, p_1, p_2, \dots p_m$ *erhält, immer auch aus dem zweiten Systeme von* $m+1$ *Gleichungen sämmtliche* $m+1$ *Grössen* $t, q_1, q_2, \dots q_m$ *eliminiren oder eine Gleichung bloss zwischen den Grossen* $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m, \beta, \beta_1, \beta_2, \dots \beta_m$ *erhalten konnen.*"

Wenn man diesen Satz umkehren will, so hat man zu beweisen, dass, wenn man aus den Gleichungen (2.) die Grössen $t, q_1, q_2, \dots q_m$ eliminiren kann, man immer auch aus den Gleichungen (1.) die Grössen $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m$ eliminiren kann. Dieser Satz lässt sich aber aus dem Vorigen ohne weiteres folgern, wenn man nur die Grössen $t, q_1, q_2, \dots q_m, p, p_1, p_2, \dots p_m$ mit den Grössen $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m, \beta, \beta_1, \beta_2, \dots \beta_m$ vertauscht.

Für den Fall, dass die vorgelegte partielle Differentialgleichung die unbekannte Function selber enthält, wird der oben gefundene Satz folgender:

B. „*Es sei*

$$W = \chi(q_1, q_2, \dots q_m, \alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m),$$

ferner:

$$(1.)\quad \frac{\partial\chi}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial\chi}{\partial q_2} = p_2, \quad \dots \quad \frac{\partial\chi}{\partial q_m} = p_m,$$

$$(2.)\quad \frac{\partial\chi}{\partial \alpha} = \beta, \quad \frac{\partial\chi}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial\chi}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \quad \dots \quad \frac{\partial\chi}{\partial \alpha_m} = \beta_m:$$

kann man aus der Gleichung $W = \chi$ und den m Gleichungen (**1.**) *die $m+1$ Grössen $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m$ eliminiren, so dass man bloss eine Gleichung zwischen $W, q_1, q_2, \dots q_m, p_1, p_2, \dots p_m$ erhält, so kann man auch aus den m Gleichungen*

$$(3.)\quad \frac{\partial\chi}{\partial \alpha_1} = \frac{\beta_1}{\beta}\frac{\partial\chi}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial\chi}{\partial \alpha_2} = \frac{\beta_2}{\beta}\frac{\partial\chi}{\partial \alpha}, \quad \dots \quad \frac{\partial\chi}{\partial \alpha_m} = \frac{\beta_m}{\beta}\frac{\partial\chi}{\partial \alpha_m}$$

die m Grössen $q_1, q_2, \dots q_m$ eliminiren, so dass man eine Gleichung bloss zwischen den Grössen $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m, \frac{\beta_1}{\beta}, \frac{\beta_2}{\beta}, \dots \frac{\beta_m}{\beta}$ erhält.“

Man kann diesen Satz aus dem vorigen ableiten, wenn man darin für $W, p, p_1, p_2, \dots p_m$ schreibt $t\chi, W, tp_1, tp_2, \dots tp_m$, und diese Bemerkung dient auch dazu, den umgekehrten Satz zu beweisen, da wir gesehen haben, dass man den vorigen Satz umkehren kann. Es ist nämlich, da χ nach der Voraussetzung nicht t enthalten soll, dasselbe, ob man sagt, man könne aus den Gleichungen (3.) die Grössen $q_1, q_2, \dots q_m$ eliminiren, oder, man könne aus den Gleichungen:

$$t\frac{\partial\chi}{\partial \alpha} = \beta, \quad t\frac{\partial\chi}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \dots \quad t\frac{\partial\chi}{\partial \alpha_m} = \beta_m$$

die Grössen $t, q_1, q_2, \dots q_m$ eliminiren. Denn stellt man die Elimination so an, dass man zuerst t und dann die übrigen Grössen eliminirt, so hat man, um t herauszuschaffen, die vorstehenden Gleichungen durch eine derselben zu dividiren, wodurch man auf die Gleichungen (3.) kommt. Kann man aber aus den Gleichungen:

$$t\frac{\partial\chi}{\partial \alpha} = \beta, \quad t\frac{\partial\chi}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \dots \quad t\frac{\partial\chi}{\partial \alpha_m} = \beta_m$$

sämmtliche Grössen t, q_1, q_2, ... q_m eliminiren, so folgt aus der Umkehrung des vorigen Theorems *A.*, wenn man darin $t\chi$ für W und W für p setzt. dass man auch aus den Gleichungen

$$\frac{\partial . t\chi}{\partial t} = \chi = W, \quad \frac{\partial . t\chi}{\partial q_1} = t\frac{\partial \chi}{\partial q_1} = p_1, \quad \dots \quad \frac{\partial . t\chi}{\partial q_m} = t\frac{\partial \chi}{\partial q_m} = p_m$$

sämmtliche Grössen α, α_1, α_2. ... α_m eliminiren kann, wodurch man eine Gleichung bloss zwischen W, q_1, q_2, ... q_m, $\frac{p_1}{t}$, $\frac{p_2}{t}$, ... $\frac{p_m}{t}$ erhält. Oder wenn man p_1, p_2, ... p_m für $\frac{p_1}{t}$, $\frac{p_2}{t}$, ... $\frac{p_m}{t}$ schreibt, so wird man aus den Gleichungen:

$$\chi = W, \quad \frac{\partial \chi}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial \chi}{\partial q_2} = p_2, \quad \dots \quad \frac{\partial \chi}{\partial q_m} = p_m$$

sämmtliche Grössen α, α_1, α_2, ... α_m eliminiren können, so dass man eine Gleichung bloss zwischen W, q_1, q_2, ... q_m, p_1, p_2, ... p_m erhält. Man sieht also, dass, wenn man aus den Gleichungen (3.) die Grössen q_1, q_2, ... q_m eliminiren kann, man auch aus der Gleichung $W = \chi$ und den Gleichungen (1.) die Grössen α, α_1, α_2, ... α_m eliminiren kann, welches die Umkehrung des Satzes *B.* ist, die wir beweisen wollten.

Ich will noch im Folgenden einen *directen* Beweis des Satzes *A.* geben; es wird dies nur für diesen Satz nöthig sein, da der Satz *B.* auf die von mir angedeutete Weise sich aus ihm ableiten lässt.

In dem Satze *A.* wurde angenommen, dass sich aus den Gleichungen:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = p, \quad \frac{\partial W}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial W}{\partial q_2} = p_2, \quad \dots \quad \frac{\partial W}{\partial q_m} = p_m$$

die Grössen α, α_1, α_2, ... α_m eliminiren lassen. Man kann dies auch so ausdrücken, dass, wenn man vermittelst der Gleichungen:

$$(1.) \qquad \frac{\partial W}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial W}{\partial q_2} = p_2, \quad \dots \quad \frac{\partial W}{\partial q_m} = p_m$$

die Grössen α_1, α_2, ... α_m durch t, q_1, q_2, ... q_m, p_1, p_2, ... p_m, α ausdrückt und diese Ausdrücke für dieselben in $\frac{\partial W}{\partial t}$ substituirt, in dem so erhaltenen Werthe von $\frac{\partial W}{\partial t}$ die Grösse α nicht vorkomme. Betrachtet man daher α_1, α_2, ... α_m als Functionen der angegebenen Grössen und nimmt in diesem Sinne ihre partiellen Differentialquotienten, so hat man in dem angenommenen Falle die Gleichung:

$$(2.) \qquad 0 = \frac{\partial^2 W}{\partial t \partial \alpha} + \frac{\partial^2 W}{\partial t \partial \alpha_1}\frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial^2 W}{\partial t \partial \alpha_2}\frac{\partial \alpha_2}{\partial \alpha} + \dots + \frac{\partial^2 W}{\partial t \partial \alpha_m}\frac{\partial \alpha_m}{\partial \alpha}.$$

Man denke sich ferner durch die Gleichungen:

$$(3.)\qquad \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_m} = \beta_m$$

die Grössen $q_1, q_2, \ldots q_m$ durch $t, \alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_m$ ausgedrückt und diese Ausdrücke in

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha} = \beta$$

substituirt, so soll bewiesen werden, dass der so erhaltene Werth von β die Grösse t nicht enthält, oder dass:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t \partial \alpha} + \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha \partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial t} + \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha \partial q_2}\frac{\partial q_2}{\partial t} + \cdots + \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha \partial q_m}\frac{\partial q_m}{\partial t} = 0.$$

Da die Ausdrücke, welche man in (2.) für $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ substituirt hat, die Gleichungen (1.) identisch erfüllen, so hat man, wenn man diese Gleichungen nach α differentiirt, und die Gleichung (2.) hinzufügt:

$$(4.)\qquad \left\{\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial^2 W}{\partial t \partial \alpha} + \frac{\partial^2 W}{\partial t \partial \alpha_1}\frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial^2 W}{\partial t \partial \alpha_2}\frac{\partial \alpha_2}{\partial \alpha} + \cdots + \frac{\partial^2 W}{\partial t \partial \alpha_m}\frac{\partial \alpha_m}{\partial \alpha},\\
0 &= \frac{\partial^2 W}{\partial q_1 \partial \alpha} + \frac{\partial^2 W}{\partial q_1 \partial \alpha_1}\frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial^2 W}{\partial q_1 \partial \alpha_2}\frac{\partial \alpha_2}{\partial \alpha} + \cdots + \frac{\partial^2 W}{\partial q_1 \partial \alpha_m}\frac{\partial \alpha_m}{\partial \alpha},\\
0 &= \frac{\partial^2 W}{\partial q_2 \partial \alpha} + \frac{\partial^2 W}{\partial q_2 \partial \alpha_1}\frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial^2 W}{\partial q_2 \partial \alpha_2}\frac{\partial \alpha_2}{\partial \alpha} + \cdots + \frac{\partial^2 W}{\partial q_2 \partial \alpha_m}\frac{\partial \alpha_m}{\partial \alpha},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
0 &= \frac{\partial^2 W}{\partial q_m \partial \alpha} + \frac{\partial^2 W}{\partial q_m \partial \alpha_1}\frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial^2 W}{\partial q_m \partial \alpha_2}\frac{\partial \alpha_2}{\partial \alpha} + \cdots + \frac{\partial^2 W}{\partial q_m \partial \alpha_m}\frac{\partial \alpha_m}{\partial \alpha}.
\end{aligned}\right.$$

Setzt man ferner für $q_1, q_2, \ldots q_m$ solche Ausdrücke in $t, \alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_m$, welche die Gleichungen (3.) identisch erfüllen, und differentiirt jene Gleichungen in diesem Sinne partiell nach t, so hat man:

$$(5.)\qquad \left\{\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha_1 \partial t} + \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha_1 \partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial t} + \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha_1 \partial q_2}\frac{\partial q_2}{\partial t} + \cdots + \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha_1 \partial q_m}\frac{\partial q_m}{\partial t},\\
0 &= \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha_2 \partial t} + \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha_2 \partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial t} + \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha_2 \partial q_2}\frac{\partial q_2}{\partial t} + \cdots + \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha_2 \partial q_m}\frac{\partial q_m}{\partial t},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
0 &= \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha_m \partial t} + \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha_m \partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial t} + \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha_m \partial q_2}\frac{\partial q_2}{\partial t} + \cdots + \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha_m \partial q_m}\frac{\partial q_m}{\partial t}.
\end{aligned}\right.$$

Multiplicirt man die Gleichungen (4.) der Reihe nach mit $1, \frac{\partial q_1}{\partial t}, \frac{\partial q_2}{\partial t}, \ldots \frac{\partial q_m}{\partial t}$ und addirt, so verschwinden wegen der Gleichungen (5.) die in $\frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha}$,

$\frac{\partial \alpha_2}{\partial \alpha}$, ... $\frac{\partial \alpha_m}{\partial \alpha}$ multiplicirten Grössen, und man erhält:

$$0 = \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha \partial t} + \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha \partial q_1} \frac{\partial q_1}{\partial t} + \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha \partial q_2} \frac{\partial q_2}{\partial t} + \cdots + \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha \partial q_m} \frac{\partial q_m}{\partial t},$$

welches die zu beweisende Gleichung ist.

§. 21. Gleichungen zwischen den Differentialquotienten der Variablen nach den Constanten und denen der Constanten nach den Variablen.

Die im Vorigen gebrauchte Analysis giebt noch andere Theoreme, welche sowohl auf das vorige Licht werfen, als auch an sich sehr merkwürdig sind und als Fundamentaltheoreme betrachtet werden können.

Es sei W irgend eine Function von q_1, q_2, ... q_m, α_1, α_2, ... α_m. Differentiirt man die Gleichungen:

$$(1.) \qquad \frac{\partial W}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial W}{\partial q_2} = p_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial W}{\partial q_m} = p_m$$

nach q_i, indem man α_1, α_2, ... α_m als solche Functionen von q_1, q_2, ... q_m, p_1, p_2, ... p_m betrachtet, welche diese Gleichungen identisch machen, so erhält man:

$$0 = \frac{\partial^2 W}{\partial q_1 \partial q_i} + \frac{\partial^2 W}{\partial q_1 \partial \alpha_1} \frac{\partial \alpha_1}{\partial q_i} + \frac{\partial^2 W}{\partial q_1 \partial \alpha_2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial q_i} + \cdots + \frac{\partial^2 W}{\partial q_1 \partial \alpha_m} \frac{\partial \alpha_m}{\partial q_i},$$

$$0 = \frac{\partial^2 W}{\partial q_2 \partial q_i} + \frac{\partial^2 W}{\partial q_2 \partial \alpha_1} \frac{\partial \alpha_1}{\partial q_i} + \frac{\partial^2 W}{\partial q_2 \partial \alpha_2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial q_i} + \cdots + \frac{\partial^2 W}{\partial q_2 \partial \alpha_m} \frac{\partial \alpha_m}{\partial q_i},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$0 = \frac{\partial^2 W}{\partial q_m \partial q_i} + \frac{\partial^2 W}{\partial q_m \partial \alpha_1} \frac{\partial \alpha_1}{\partial q_i} + \frac{\partial^2 W}{\partial q_m \partial \alpha_2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial q_i} + \cdots + \frac{\partial^2 W}{\partial q_m \partial \alpha_m} \frac{\partial \alpha_m}{\partial q_i}.$$

Differentiirt man ferner die Gleichungen:

$$(2.) \qquad \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_m} = \beta_m$$

nach α_k, indem man q_1, q_2, ... q_m als Functionen von α_1, α_2, ... α_m, β_1, β_2, ... β_m betrachtet, welche diese Gleichung identisch machen, so erhält man:

$$0 = \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_k} + \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha_1 \partial q_1} \frac{\partial q_1}{\partial \alpha_k} + \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha_1 \partial q_2} \frac{\partial q_2}{\partial \alpha_k} + \cdots + \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha_1 \partial q_m} \frac{\partial q_m}{\partial \alpha_k},$$

$$0 = \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_k} + \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha_2 \partial q_1} \frac{\partial q_1}{\partial \alpha_k} + \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha_2 \partial q_2} \frac{\partial q_2}{\partial \alpha_k} + \cdots + \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha_2 \partial q_m} \frac{\partial q_m}{\partial \alpha_k},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$0 = \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha_m \partial \alpha_k} + \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha_m \partial q_1} \frac{\partial q_1}{\partial \alpha_k} + \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha_m \partial q_2} \frac{\partial q_2}{\partial \alpha_k} + \cdots + \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha_m \partial q_m} \frac{\partial q_m}{\partial \alpha_k}.$$

Multiplicirt man die erstern Gleichungen der Reihe nach mit

$$\frac{\partial q_1}{\partial \alpha_k}, \quad \frac{\partial q_2}{\partial \alpha_k}, \quad \ldots \quad \frac{\partial q_m}{\partial \alpha_k}$$

und addirt, so erhält man durch die letzteren Gleichungen:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial q_1 \partial q_i} \frac{\partial q_1}{\partial \alpha_k} + \frac{\partial^2 W}{\partial q_2 \partial q_i} \frac{\partial q_2}{\partial \alpha_k} + \cdots + \frac{\partial^2 W}{\partial q_m \partial q_i} \frac{\partial q_m}{\partial \alpha_k}$$
$$= \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_k} \frac{\partial \alpha_1}{\partial q_i} + \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_k} \frac{\partial \alpha_2}{\partial q_i} + \cdots + \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha_m \partial \alpha_k} \frac{\partial \alpha_m}{\partial q_i}.$$

Addirt man zu den beiden Ausdrücken, die wir einander gleich gefunden haben, noch $\frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial \alpha_k}$, so kann man diese Gleichungen kürzer so darstellen:

$$\frac{\partial p_i}{\partial \alpha_k} = \frac{\partial \beta_k}{\partial q_i},$$

wenn man in $p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i}$ die Grössen $q_1, q_2, \ldots q_m$ durch $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_m$ vermittelst der Gleichungen

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_m} = \beta_m$$

und umgekehrt in $\beta_k = \frac{\partial W}{\partial \alpha_k}$ die Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ durch $q_1, q_2, \ldots q_m, p_1, p_2, \ldots p_m$ vermittelst der Gleichungen

$$\frac{\partial W}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial W}{\partial q_2} = p_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial W}{\partial q_m} = p_m$$

ausdrückt.

Man erhält auf dieselbe Weise, wenn man die Gleichungen (1.) nach p_i, die Gleichungen (2.) nach α_k differentiirt:

$$\frac{\partial q_i}{\partial \alpha_k} = -\frac{\partial \beta_k}{\partial p_i};$$

wenn man die Gleichungen (1.) nach q_i, die Gleichungen (2.) nach β_k differentiirt:

$$\frac{\partial p_i}{\partial \beta_k} = -\frac{\partial \alpha_k}{\partial q_i};$$

endlich, wenn man die Gleichungen (1.) nach p_i, die Gleichungen (2.) nach β_k differentiirt:

$$\frac{\partial q_i}{\partial \beta_k} = \frac{\partial \alpha_k}{\partial p_i}.$$

Ich will diese Resultate in folgendem Theorem zusammenstellen:

Fundamentaltheorem.

„Es sei

$$W(q_1, q_2, \dots q_m, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m)$$

irgend eine Function der 2m Grössen $q_1, q_2, \dots q_m, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m$; *ferner*

$$\frac{\partial W}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial W}{\partial q_2} = p_2, \quad \dots \quad \frac{\partial W}{\partial q_m} = p_m,$$

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \quad \dots \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_m} = \beta_m;$$

drückt man vermittelst dieser Gleichungen einmal die Grössen $q_1, q_2, \dots q_m$, $p_1, p_2, \dots p_m$ *als Functionen von* $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \dots \beta_m$ *aus und nimmt in diesem Sinne ihre nach den letztern Grössen genommenen partiellen Differentialquotienten, und drückt man umgekehrt wieder vermittelst derselben Gleichungen die Grössen* $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \dots \beta_m$ *durch* $q_1, q_2, \dots q_m$, $p_1, p_2, \dots p_m$ *aus und nimmt in diesem Sinne ihre nach den letztern Grössen genommenen partiellen Differentialquotienten, so hat man:*

$$\frac{\partial p_\iota}{\partial \alpha_k} = \frac{\partial \beta_k}{\partial q_\iota}, \quad \frac{\partial p_\iota}{\partial \beta_k} = -\frac{\partial \alpha_k}{\partial q_\iota},$$

$$\frac{\partial q_\iota}{\partial \beta_k} = \frac{\partial \alpha_k}{\partial p_\iota}, \quad \frac{\partial q_\iota}{\partial \alpha_k} = -\frac{\partial \beta_k}{\partial p_\iota}.\text{“}$$

In dem vorstehenden Theorem ist angenommen, dass die Grösse α_k eine der Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m$, und dass die Grösse q_k eine der Grössen $q_1, q_2, \dots q_m$ sei. Aber der von diesem Theoreme gegebene Beweis setzt dieses auf keine Weise voraus, sondern ist eben so gültig, wenn α_k und q_ι irgend welche noch ausser den angegebenen $2m$ Grössen in der Function W enthaltene Grössen sind. Man erhält dann folgendes Theorem, welches das vorige mit in sich begreift:

„Es sei

$$W(q_1, q_2, \dots q_{m+n}, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{m+l})$$

irgend eine Function der Grössen $q_1, q_2, \dots q_{m+n}, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{m+l}$, *und*

$$\frac{\partial W}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial W}{\partial q_2} = p_2, \quad \dots \quad \frac{\partial W}{\partial q_{m+n}} = p_{m+n},$$

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \quad \dots \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_{m+l}} = \beta_{m+l};$$

man drücke vermittelst dieser Gleichungen die Grössen $q_1, q_2, \dots q_m$, p_1, $p_2, \dots p_{m+n}$ *durch* $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{m+l}, \beta_1, \beta_2, \dots \beta_m, q_{m+1}, q_{m+2}, \dots q_{m+n}$, *und umgekehrt die Grössen* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{m+l}$ *durch* $q_1, q_2, \ldots q_{m+n}, p_1, p_2, \ldots p_m, \alpha_{m+1}, \alpha_{m+2}, \ldots \alpha_{m+l}$ *aus, und führe in diesem Sinne die partiellen Differentiationen aus, so hat man*

1) *wenn* i *und* k *irgend einen der Indices* 1, 2, ... m *bedeuten,*

$$\frac{\partial q_i}{\partial \beta_k} = \frac{\partial \alpha_k}{\partial p_i};$$

2) *wenn* i *einen der Indices* 1, 2, ... m *und* k *einen der Indices* 1, 2, 3, ... $m+l$ *bedeutet,*

$$\frac{\partial q_i}{\partial \alpha_k} = -\frac{\partial \beta_k}{\partial p_i};$$

3) *wenn* i *einen der Indices* 1, 2, 3, ... $m+n$ *und* k *einen der Indices* 1, 2, ... m *bedeutet,*

$$\frac{\partial p_i}{\partial \beta_k} = -\frac{\partial \alpha_k}{\partial q_i};$$

4) *wenn* i *einen der Indices* 1, 2, 3, ... $m+n$ *und* k *einen der Indices* 1, 2, 3, ... $m+l$ *bedeutet,*

$$\frac{\partial p_i}{\partial \alpha_k} = \frac{\partial \beta_k}{\partial q_i}.\text{“}$$

Man sieht, dass für den Fall 1) alle vier Gleichungen gelten, welches das obige Fundamentaltheorem ist. Ebenso gilt die Gleichung 4) auch für den Fall 2) und 3). Man kann auch in diesem zweiten Theorem, ohne seiner Allgemeinheit in etwas zu schaden, $n = 0$ setzen, indem man die Grössen q_{m+1}, $q_{m+2}, \ldots q_{m+n}$ mit zu den Grössen α_{m+1}, α_{m+2} etc. zählt. Wenn man in der Gleichung 4) eine der Grössen $q_{m+1}, q_{m+2}, \ldots q_{m+n}$ mit α und eine der Grössen $\alpha_{m+1}, \alpha_{m+2}, \ldots \alpha_{m+l}$ mit t bezeichnet, so erhält man als besondern Fall das im vorigen §. gegebene Theorem *A*. Denn die Gleichheit der beiden Ausdrücke in 4) lehrt, dass, wenn der eine verschwindet, der andere zugleich mit verschwindet, und dieses giebt das Theorem *A*., wenn man

$$\alpha_k = t, \quad \beta_k = p, \quad q_i = \alpha, \quad p_i = \beta$$

setzt. Dasselbe Theorem giebt auch sogleich die Differentialgleichungen der Dynamik aus den Integralgleichungen:

$$\frac{\partial W}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial W}{\partial q_2} = p_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial W}{\partial q_m} = p_m,$$

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_m} = \beta_m,$$

in welchen W eine Function von $q_1, q_2, \ldots q_m, t, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ ist, und die Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_m$ als Constanten angesehen werden. Wenn man nämlich in den Gleichungen 2) und 4) $\alpha_k = t$ setzt, so erhält man:

$$\frac{\partial q_i}{\partial t} = -\frac{\partial \frac{\partial W}{\partial t}}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial p_i}{\partial t} = \frac{\partial \frac{\partial W}{\partial t}}{\partial q_i}.$$

Ist nun, wie dieses in Bezug auf die Integralgleichungen der Dynamik der Fall war,

$$\frac{\partial W}{\partial t} + H = 0,$$

wo H eine Function der Grössen $q_1, q_2, \ldots q_m, p_1, p_2, \ldots p_m, t$ ist, welche die Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ nicht enthält, so hat man hieraus, wenn man bei Differentiirung einer Function von t und willkürlichen Constanten nach t wieder die Charakteristik d braucht, die Gleichungen:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i},$$

welches die Differentialgleichungen der Dynamik sind.

Das aufgestellte Theorem giebt eine merkwürdige Wechselbeziehung, die zwischen den beiden Formen, unter welchen man die Integralgleichungen eines Systems von Differentialgleichungen zu betrachten pflegt, für die Probleme der Dynamik Statt findet, wenn man diejenige Wahl der willkürlichen Constanten trifft, welche nach der oben gegebenen Theorie die Integration der partiellen Differentialgleichung, auf welche sich das Problem zurückführen lässt, von selber an die Hand giebt. Man betrachtet nämlich in der einen Form die Variablen, welche in den Integralgleichungen vorkommen, sämmtlich als Functionen einer von ihnen (der Grösse t) und der willkürlichen Constanten. Oder man stellt in der andern Form diejenigen von einander unabhängigen Ausdrücke der Variablen *) auf, welche willkürlichen Constanten gleich werden. Jede solche Gleichung, welche eine Function der Variablen einer willkürlichen Constante gleich setzt, wird vorzugsweise *ein Integral* des vorgelegten Systems von Differentialgleichungen genannt, und das Charakteristische einer solchen Integralgleichung besteht darin, dass ihr Differential vermittelst der blossen vorgelegten Differentialgleichungen, ohne auch die Integralgleichungen selbst zu Hülfe zu nehmen, *identisch* verschwindet. Man kann in

*) Wenn die Integrale auch die Differentialquotienten der Variablen enthalten, so betrachte ich diese hier als besondre Variablen.

der einen Form die Ausdrücke der Variablen nach den willkürlichen Constanten, in der andern die Ausdrücke der willkürlichen Constanten nach den Variablen partiell differentiiren, und das vorstehende Theorem lehrt, dass in dem hier betrachteten Falle und bei der hier getroffenen Wahl der willkürlichen Constanten die beiden Arten von partiellen Differentialquotienten unmittelbar auf einander zurückkommen. Wenn man die Anfangswerthe der Variablen, die einem Werthe $t=0$ entsprechen, als willkürliche Constanten einführt, so werden beide Formen der Integralgleichungen sogleich aus einander erhalten, wenn man die Variablen und ihre Anfangswerthe mit einander vertauscht, und zugleich $-t$ statt t setzt, wobei jedoch zu bemerken ist, dass die Wurzelzeichen, welche die Formeln enthalten, hierbei geändert werden können.

§. 22. Anwendung der entwickelten Formeln auf die freie Bewegung.

Ich will noch den ersten der beiden gefundenen Sätze auf den besondern Fall anwenden, wenn die Bewegung des Systems materieller Punkte ganz frei ist, und die Kräftefunction nicht die Zeit t implicirt. Für diesen Fall kann man für die Grössen q_i die rechtwinkligen Coordinaten x_i, y_i, z_i annehmen, die Grössen p_i werden dann ihre mit der zu ihnen gehörigen Masse multiplicirten Differentialquotienten $m_i x_i'$, $m_i y_i'$, $m_i z_i'$. Sind die Differentialgleichungen des Problems

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z_i},$$

wo U die Kräftefunction ist: so hat man die partielle Differentialgleichung zu integriren,

$$\tfrac{1}{2}\Sigma \frac{1}{m_i}\left\{\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y_i}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z_i}\right)^2\right\} = U+h,$$

wo h eine willkürliche Constante. Ist n die Zahl der materiellen Punkte, so enthält eine vollständige Lösung V ausser einer durch blosse Addition hinzukommenden Constante, von der ich abstrahire, und ausser h noch $3n-1$ willkürliche Constanten α. Kennt man eine solche Lösung V, so erhält man die Integralgleichungen des Problems zufolge des oben bemerkten Theorems durch die $3n$ Gleichungen:

$$m_i x_i' = \frac{\partial V}{\partial x_i}, \quad m_i y_i' = \frac{\partial V}{\partial y_i}, \quad m_i z_i' = \frac{\partial V}{\partial z_i},$$

durch die $3n-1$ Gleichungen:

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha} = \beta.$$

und durch die Gleichung:

$$\frac{\partial V}{\partial h} = \tau + t.$$

Die $3n-1$ Constanten α, die $3n-1$ Constanten β und h und τ sind die $6n$ willkürlichen Constanten des Problems. Drückt man nun einmal die Grössen x_{ι}, y_{ι}, z_{ι}, x'_{ι}, y'_{ι}, z'_{ι} durch die $6n-2$ Grössen α, β und durch h und $\tau+t$, und dann umgekehrt, α, β, h, $\tau+t$ durch jene aus, so hat man zufolge des ersten der beiden gefundenen Sätze:

$$m_{\iota}\frac{\partial x'_{\iota}}{\partial \alpha} = \frac{\partial \beta}{\partial x_{\iota}}, \quad m_{\iota}\frac{\partial x_{\iota}}{\partial \beta} = \frac{\partial \alpha}{\partial x'_{\iota}},$$
$$m_{\iota}\frac{\partial y'_{\iota}}{\partial \alpha} = \frac{\partial \beta}{\partial y_{\iota}}, \quad m_{\iota}\frac{\partial y_{\iota}}{\partial \beta} = \frac{\partial \alpha}{\partial y'_{\iota}},$$
$$m_{\iota}\frac{\partial z'_{\iota}}{\partial \alpha} = \frac{\partial \beta}{\partial z_{\iota}}, \quad m_{\iota}\frac{\partial z_{\iota}}{\partial \beta} = \frac{\partial \alpha}{\partial z'_{\iota}};$$

ferner

$$m_{\iota}\frac{\partial x'_{\iota}}{\partial \beta} = -\frac{\partial \alpha}{\partial x_{\iota}}, \quad m_{\iota}\frac{\partial x_{\iota}}{\partial \alpha} = -\frac{\partial \beta}{\partial x'_{\iota}},$$
$$m_{\iota}\frac{\partial y'_{\iota}}{\partial \beta} = -\frac{\partial \alpha}{\partial y_{\iota}}, \quad m_{\iota}\frac{\partial y_{\iota}}{\partial \alpha} = -\frac{\partial \beta}{\partial y'_{\iota}},$$
$$m_{\iota}\frac{\partial z'_{\iota}}{\partial \beta} = -\frac{\partial \alpha}{\partial z_{\iota}}, \quad m_{\iota}\frac{\partial z_{\iota}}{\partial \alpha} = -\frac{\partial \beta}{\partial z'_{\iota}};$$

endlich hat man noch:

$$m_{\iota}\frac{\partial x'_{\iota}}{\partial h} = \frac{\partial(\tau+t)}{\partial x_{\iota}}, \quad m_{\iota}\frac{\partial x_{\iota}}{\partial(\tau+t)} = \frac{\partial h}{\partial x'_{\iota}},$$
$$m_{\iota}\frac{\partial y'_{\iota}}{\partial h} = \frac{\partial(\tau+t)}{\partial y_{\iota}}, \quad m_{\iota}\frac{\partial y_{\iota}}{\partial(\tau+t)} = \frac{\partial h}{\partial y'_{\iota}},$$
$$m_{\iota}\frac{\partial z'_{\iota}}{\partial h} = \frac{\partial(\tau+t)}{\partial z_{\iota}}, \quad m_{\iota}\frac{\partial z_{\iota}}{\partial(\tau+t)} = \frac{\partial h}{\partial z'_{\iota}},$$
$$m_{\iota}\frac{\partial x'_{\iota}}{\partial(\tau+t)} = -\frac{\partial h}{\partial x_{\iota}}, \quad m_{\iota}\frac{\partial x_{\iota}}{\partial h} = -\frac{\partial(\tau+t)}{\partial x'_{\iota}},$$
$$m_{\iota}\frac{\partial y'_{\iota}}{\partial(\tau+t)} = -\frac{\partial h}{\partial y_{\iota}}, \quad m_{\iota}\frac{\partial y_{\iota}}{\partial h} = -\frac{\partial(\tau+t)}{\partial y'_{\iota}},$$
$$m_{\iota}\frac{\partial z'_{\iota}}{\partial(\tau+t)} = -\frac{\partial h}{\partial z_{\iota}}, \quad m_{\iota}\frac{\partial z_{\iota}}{\partial h} = -\frac{\partial(\tau+t)}{\partial z'_{\iota}}.$$

wo die drei letzten Gleichungen links und die drei ersten rechts die Differentialgleichungen des Problems selber sind. Es ist nämlich in ihnen für h der Ausdruck zu setzen:

$$h = \tfrac{1}{2}\Sigma m_i(x'_i x'_i + y'_i y'_i + z'_i z'_i) - U,$$

und

$$\frac{\partial x_i}{\partial(\tau+t)} = \frac{dx_i}{dt} = x'_i, \quad \frac{\partial x'_i}{\partial(\tau+t)} = \frac{dx'_i}{dt} = \frac{d^2 x_i}{dt^2},$$

und ebenso für die andern Ordinaten.

Will man für diese Formeln zum Beispiel die elliptische Bewegung eines Planeten nehmen, so wird man zufolge der oben mitgetheilten Integration der auf dieses Problem bezüglichen partiellen Differentialgleichung*) für die Constanten α_1, α_2 und die entsprechenden β_1, β_2 folgende Annahmen machen können:

α_1 . . . Länge des aufsteigenden Knotens,

α_2 . . . $k$mal der Quadratwurzel aus dem halben Parameter,

β_1 . . . $-k$mal der Quadratwurzel aus dem halben Parameter mal dem Cosinus der Neigung der Bahn,

β_2 . . . die Entfernung des Perihels vom aufsteigenden Knoten.

h . . . $-k^2$ dividirt durch die grosse Axe,

$-\tau$ . . . Durchgangszeit durch das Perihel,

welche Elemente auf unendlich viele Arten variirt werden können. Die Constante k^2 ist hier die anziehende Kraft für die Einheit der Entfernung, so dass die Differentialgleichungen

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k^2x}{r^3}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{k^2y}{r^3}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{k^2z}{r^3}$$

zu Grunde gelegt sind.

§. 23. Behandlung der Aufgabe, bei überzähligen Constanten die zu grosse Anzahl von Integralgleichungen auf die hinreichende zurückzuführen, deren Constanten Functionen der früheren sind. Fall der Planetenbewegung.

Ich will jetzt noch eine andre Aufgabe behandeln, welche man sich stellen kann, wenn die Lösung einer partiellen Differentialgleichung, aus welcher man die Integralgleichungen des vorgelegten Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen ableitet, mehr willkürliche Constanten enthält, als zu einer vollständigen Lösung nöthig ist, und man die überzähligen willkürlichen Constanten nicht auf irgend eine Art fortschaffen will, indem man sie gleich

*) Vgl. p. 340 folgg.

Null setzt oder ihnen irgend einen andern bestimmten Werth giebt, oder sie beliebigen Functionen der andern Constanten gleich setzt, oder sie durch eben so viele Gleichungen eliminirt, welche man bildet, wenn man die nach ihnen genommenen partiellen Differentialquotienten der Function gleich Null setzt, oder auf andere Art. Wir haben für diesen Fall oben gesehen, dass die $m+k$ Gleichungen

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_{m+k}} = \beta_{m+k}$$

nur die Stelle von m Gleichungen vertreten, indem k derselben, z. B.

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_{m+1}} = \beta_{m+1}, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_{m+2}} = \beta_{m+2}, \quad \ldots \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_{m+k}} = \beta_{m+k}$$

eine blosse Folge der übrigen m Gleichungen

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_m} = \beta_m,$$

und die Constanten $\beta_{m+1}, \beta_{m+2}, \ldots \beta_{m+k}$ nicht mehr willkürlich sind, sondern bestimmte Functionen der übrigen $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_m$ und der Constanten α_1, $\alpha_2, \ldots \alpha_{m+k}$. Diese letztern m Gleichungen verbunden mit den m Gleichungen:

$$\frac{\partial W}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial W}{\partial q_2} = p_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial W}{\partial q_m} = p_m$$

bilden die sämmtlichen Integralgleichungen, die aber, wie wir sehen, $2m+k$ willkürliche Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{m+k}, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_m$ enthalten, während sie nicht mehr als $2m$ willkürliche Constanten enthalten dürfen. Es muss daher immer möglich sein, die $2m$ Gleichungen:

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_m} = \beta_m,$$
$$\frac{\partial W}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial W}{\partial q_2} = p_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial W}{\partial q_m} = p_m$$

durch solche $2m$ andere Gleichungen zu ersetzen, in welchen ausser den Grössen $t, q_1, q_2, \ldots q_m, p_1, p_2, \ldots p_m$ nur $2m$ Functionen der $2m+k$ willkürlichen Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{m+k}, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_m$ vorkommen, welche man statt der letztern als willkürliche Constanten einführen kann, deren Zahl dann in der That auf $2m$ zurückgeführt ist.

Nehmen wir als Beispiel die oben für die Bewegung eines Punktes um ein anziehendes Centrum gegebenen Formeln. Es waren dort nur drei unabhängige Variablen, die drei Coordinaten des Punktes, da die Zeit t in der partiellen Differentialgleichung nicht vorkam. Die gefundene Lösung V

brauchte also nur zwei willkürliche Constanten zu impliciren, um eine vollständige Lösung zu sein, da wir immer von einer willkürlichen Constante, die noch durch blosse Addition hinzukommen kann, abstrahiren. Die Lösung, welche wir fanden (p. 336):

$$V = b \operatorname{Arc\cos}(\cos\alpha\cos\eta + \sin\alpha\sin\eta\cos(\vartheta-\beta)) + \int\sqrt{2f(r)+2h-\frac{b^2}{r^2}}\,dr$$

enthält aber deren *drei*, b, α, β, da die Constante h in dieser Lösung nicht als willkürliche Constante betrachtet wird, weil sie schon in der partiellen Differentialgleichung selbst vorkommt. Setzt man:

$$\cos w = \cos\alpha\cos\eta + \sin\alpha\sin\eta\cos(\vartheta-\beta),$$

so leiten wir aus dieser Lösung durch partielle Differentiation nach b, α, β, r, η, ϑ die Integralgleichungen ab:

$$w - b\int\frac{dr}{r^2\sqrt{2f(r)+2h-\frac{b^2}{r^2}}} = b',$$

$$\frac{b(\sin\alpha\cos\eta - \cos\alpha\sin\eta\cos(\vartheta-\beta))}{\sin w} = \alpha',$$

$$\frac{-b\sin\alpha\sin\eta\sin(\vartheta-\beta)}{\sin w} = \beta',$$

$$\sqrt{2f(r)+2h-\frac{b^2}{r^2}} = \frac{dr}{dt},$$

$$\frac{b(\cos\alpha\sin\eta - \sin\alpha\cos\eta\cos(\vartheta-\beta))}{r^2\sin w} = \frac{d\eta}{dt},$$

$$\frac{b\sin\alpha\sin(\vartheta-\beta)}{r^2\sin\eta\sin w} = \frac{d\vartheta}{dt}.$$

Es wurde schon oben bemerkt, dass die zweite und dritte Gleichung nur die Stelle von einer vertreten, weil man aus ihnen erhält:

$$\alpha'\alpha' + \frac{\beta'\beta'}{\sin^2\alpha} = b^2,$$

also eine blosse Gleichung zwischen den willkürlichen Constanten, die dadurch, wenn man wieder h nicht mitrechnet, auf *fünf* reducirt werden. Sie müssen sich aber auf *vier* reduciren lassen. Dieses kann man keineswegs auf den ersten Blick erkennen, und es würde sogar nicht ohne einige Weitläuftigkeit gezeigt werden können, wenn man nicht einige einfache geometrische Betrachtungen zu Hülfe nehmen könnte.

Zuerst leite ich aus der zweiten und dritten Gleichung folgende ab:

$$\sin\alpha\cos\eta - \cos\alpha\sin\eta\cos(\vartheta-\beta) + \frac{\alpha'}{\beta'}\sin\alpha\sin\eta\sin(\vartheta-\beta) = 0.$$

oder

$$\sin\alpha\cos\eta - \left(\cos\alpha\cos\beta + \frac{\alpha'}{\beta'}\sin\alpha\sin\beta\right)\sin\eta\cos\vartheta$$

$$-\left(\cos\alpha\,\sin\beta - \frac{\alpha'}{\beta'}\sin\alpha\cos\beta\right)\sin\eta\sin\vartheta = 0.$$

Für diese Gleichung setze ich:

$$\cos i\cos\eta + \sin i\cos u\,.\sin\eta\cos\vartheta + \sin i\sin u\,.\sin\eta\sin\vartheta = 0.$$

indem ich zwei Winkel i und u einführe, welche durch die Verhältnisse:

$$\sin\alpha : \cos\alpha\cos\beta + \frac{\alpha'}{\beta'}\sin\alpha\sin\beta : \cos\alpha\sin\beta - \frac{\alpha'}{\beta'}\sin\alpha\cos\beta$$

$$= \cos i : -\sin i\cos u \qquad\qquad : -\sin i\sin u$$

bestimmt werden. Diese Proportion giebt zugleich:

$$\cos i = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1+\frac{\alpha'\alpha'\sin^2\alpha}{\beta'\beta'}}} = -\frac{\beta'}{b} = \frac{\sin\alpha\sin\eta\sin(\vartheta-\beta)}{\sin w},$$

und es wird daher die letzte der Integralgleichungen:

$$\frac{b\cos i}{r^2\sin^2\eta} = \frac{d\vartheta}{dt};$$

ferner giebt dieselbe Proportion

$$\cos i\cos\alpha + \sin i\cos u\,.\sin\alpha\cos\beta + \sin i\sin u\,.\sin\alpha\sin\beta = 0.$$

Nennen wir l die Linie, die mit den Coordinatenaxen Winkel bildet, deren Cosinus $\cos\alpha$, $\sin\alpha\cos\beta$, $\sin\alpha\sin\beta$ sind, und E die Ebene, welche mit den Coordinatenebenen Winkel bildet, deren Cosinus $\cos i$, $\sin i\cos u$, $\sin i\sin u$ sind, so folgt aus den Gleichungen:

$$\cos i\cos\eta + \sin i\cos u\,.\sin\eta\cos\vartheta + \sin i\sin u\,.\sin\eta\sin\vartheta = 0.$$

$$\cos i\cos\alpha + \sin i\cos u\,.\sin\alpha\cos\beta + \sin i\sin u\,.\sin\alpha\sin\beta = 0,$$

dass der Radius Vector (der mit den Coordinatenaxen Winkel bildet, deren Cosinus $\cos\eta$, $\sin\eta\cos\vartheta$, $\sin\eta\sin\vartheta$ sind) und die Linie l in derselben Ebene E liegen. Die Linie l ist zugleich eine ganz willkürliche Linie in der Ebene E, so dass der Winkel w, welches der Winkel zwischen l und dem Radius Vector ist, die Bedeutung hat, dass er ein Winkel zwischen dem Radius Vector und einer willkürlichen Linie der Ebene E ist. Diese Willkürlichkeit wird aber auf keine Weise vermehrt, wenn ich von w die willkürliche Constante b' abziehe, wie die erste der Integralgleichungen:

$$w - b' = b \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{2f(r) + 2h - \frac{b^2}{r^2}}}$$

erfordert: es vereinigen sich hier nur zwei willkürliche Constanten durch Addition in eine einzige. Nennt man nämlich v und λ die Winkel, welche der Radius Vector und die Linie l mit einer bestimmten Linie der Ebene E machen, so ist

$$w = v - \lambda, \quad w - b' = v - \lambda - b',$$

und $\lambda + b'$ ist nur für *eine* willkürliche Constante anzusehen, wodurch die Anzahl der willkürlichen Constanten auf *vier* beschränkt wird, wie verlangt wurde. Es lassen sich nämlich die Integralgleichungen jetzt so darstellen:

$$v - \lambda - b' = b \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{2f(r) + 2h - \frac{b^2}{r^2}}},$$

$$\cos i \cos \eta + \sin i \sin \eta \cos(\vartheta - a) = 0.$$

$$\sqrt{2f(r) + 2h - \frac{b^2}{r^2}} = \frac{dr}{dt},$$

$$\frac{b \cos i}{r^2 \sin^2 \eta} = \frac{d\vartheta}{dt},$$

$$\frac{bb}{r^4} = \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 + \sin^2 \eta \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2.$$

wo $v - \lambda - b'$ der Winkel ist, den der Radiusvector mit einer beliebigen Linie der Ebene E bildet; zu diesen Gleichungen kommt noch der Ausdruck der Zeit:

$$t + \tau = \int \frac{dr}{\sqrt{2f(r) + 2h - \frac{b^2}{r^2}}},$$

in welchem keine Reduction vorzunehmen nöthig ist.

§. 24. Allgemeine Behandlung derselben Aufgabe.

Da das hier gewählte einfache Beispiel schon zeigt, dass die verlangte Reduction der willkürlichen Constanten auf ihre wahre Anzahl bisweilen Schwierigkeiten machen kann, welche hier nur durch einige geometrische Betrachtungen gehoben wurden, so wird es der Mühe werth sein, allgemein zu zeigen, wie diese Reduction geleistet werden kann. Zu diesem Ende nehme ich an, es sei eine vollständige Lösung gegeben.

$$W(t, q_1, q_2, \ldots q_m, a_1, a_2, \ldots a_m)$$

mit m willkürlichen Constanten $a_1, a_2, \ldots a_m$, von denen keine durch blosse Addition mit den übrigen Termen von W verbunden ist; und es sei aus dieser Lösung eine andere abgeleitet mit $m+k$ willkürlichen Constanten α_1, $\alpha_2, \ldots \alpha_{m+k}$,

$$W + \psi(a_1, a_2, \ldots a_m, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{m+k}),$$

in welcher die Grössen $a_1, a_2, \ldots a_m$ vermittelst der Gleichungen:

$$\frac{\partial(W+\psi)}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial(W+\psi)}{\partial a_2} = 0, \quad \ldots \quad \frac{\partial(W+\psi)}{\partial a_m} = 0$$

zu eliminiren sind. Diese Gleichungen zeigen, dass man bei der partiellen Differentiation von $W+\psi$ nach irgend einer Grösse auf die Veränderlichkeit der Grössen $a_1, a_2, \ldots a_m$ keine Rücksicht zu nehmen braucht. Die $2m$ Integralgleichungen sind daher, da W die Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{m+k}$ und ψ die Grössen $t, q_1, q_2, \ldots q_m$ nicht enthält:

$$\frac{\partial\psi}{\partial\alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial W}{\partial q_1} = p_1,$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial\alpha_2} = \beta_2, \quad \frac{\partial W}{\partial q_2} = p_2,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial\alpha_m} = \beta_m, \quad \frac{\partial W}{\partial q_m} = p_m.$$

Die m Gleichungen links zeigen, dass die Grössen $a_1, a_2, \ldots a_m$ ebenfalls willkürliche Constanten werden, und daher auch die Grössen

$$\frac{\partial\psi}{\partial a_1}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial a_2}, \quad \ldots \quad \frac{\partial\psi}{\partial a_m}.$$

Nennt man diese $-b_1, -b_2, \ldots -b_m$, so werden die Integralgleichungen:

$$\frac{\partial W}{\partial a_1} = b_1, \quad \frac{\partial W}{\partial a_2} = b_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial W}{\partial a_m} = b_m,$$
$$\frac{\partial W}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial W}{\partial q_2} = p_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial W}{\partial q_m} = p_m;$$

die $2m$ Functionen der $2m+k$ Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{m+k}, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_m$, welche man als die auf ihre wahre Anzahl reducirten willkürlichen Constanten zu wählen hat, sind die Grössen $a_1, a_2, \ldots a_m, b_1, b_2, \ldots b_m$, wie sie durch die Gleichungen bestimmt werden:

$$\frac{\partial\psi}{\partial\alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial\psi}{\partial\alpha_2} = \beta_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial\psi}{\partial\alpha_m} = \beta_m;$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial a_1} = -b_1, \quad \frac{\partial\psi}{\partial a_2} = -b_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial\psi}{\partial a_m} = -b_m.$$

Wenn die Lösung noch eine Constante h enthält, die auch in der partiellen Differentialgleichung selber vorkommt, und man zu den Integralgleichungen noch eine neue hinzufügt, indem man den nach h genommenen partiellen Differentialquotienten der Lösung $\frac{\partial W}{\partial h} + \frac{\partial\psi}{\partial h}$ gleich einer neuen Variablen vermehrt um eine willkürliche Constante τ setzt, so hat man, um auch in der neuen Gleichung die Reduction der Constanten zu bewerkstelligen, bloss $\tau - \frac{\partial\psi}{\partial h}$ für τ als willkürliche Constante einzuführen. Es ist dies der Fall, wenn in einem Probleme der Mechanik der Satz von der lebendigen Kraft gilt, und man die Integralgleichungen des Problems aus der Function V statt aus der Function W ableitet.

Die Lösung, welche die $m+k$ willkürlichen Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{m+k}$ enthält, kann auch aus W erhalten werden, wenn zwischen $a_1, a_2, \ldots a_m$ und $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{m+k}$ gewisse Gleichungen $\psi_1 = 0$, $\psi_2 = 0$ etc. Statt finden, und man aus $W+\psi$ die Grössen $a_1, a_2, \ldots a_m$ vermittelst der Gleichungen:

$$\frac{\partial(W+\psi)}{\partial a_1} + \lambda_1\frac{\partial\psi_1}{\partial a_1} + \lambda_2\frac{\partial\psi_2}{\partial a_1} + \cdots = 0,$$

$$\frac{\partial(W+\psi)}{\partial a_2} + \lambda_1\frac{\partial\psi_1}{\partial a_2} + \lambda_2\frac{\partial\psi_2}{\partial a_2} + \cdots = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial(W+\psi)}{\partial a_m} + \lambda_1\frac{\partial\psi_1}{\partial a_m} + \lambda_2\frac{\partial\psi_2}{\partial a_m} + \cdots = 0,$$

$$\psi_1 = 0, \quad \psi_2 = 0, \quad \ldots$$

eliminirt. Durch diese Gleichungen werden sowohl die Multiplicatoren $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, als auch die Grössen $a_1, a_2, \ldots a_m$ als Functionen von $t, q_1, q_2, \ldots q_m, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{m+k}$ bestimmt. Bedeutet α eine der Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$, so hat man, wenn β eine willkürliche Constante bedeutet,

$$\beta = \frac{\partial(W+\psi)}{\partial\alpha}$$

$$= \frac{\partial(W+\psi)}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial\alpha} + \frac{\partial(W+\psi)}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial\alpha} + \cdots + \frac{\partial(W+\psi)}{\partial a_m}\frac{\partial a_m}{\partial\alpha} + \frac{\partial\psi}{\partial\alpha},$$

oder wegen der vorstehenden Gleichungen:

$$\beta+\lambda_1\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial\alpha}+\frac{\partial\psi_1}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial\alpha}+\cdots+\frac{\partial\psi_1}{\partial a_m}\frac{\partial a_m}{\partial\alpha}\right)$$
$$+\lambda_2\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial\alpha}+\frac{\partial\psi_2}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial\alpha}+\cdots+\frac{\partial\psi_2}{\partial a_m}\frac{\partial a_m}{\partial\alpha}\right)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$=\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}.$$

Differentiirt man aber die Gleichungen $\psi_1=0$, $\psi_2=0$, ... nach α, so erhält man:

$$0=\frac{\partial\psi_1}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial\alpha}+\frac{\partial\psi_1}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial\alpha}+\cdots+\frac{\partial\psi_1}{\partial a_m}\frac{\partial a_m}{\partial\alpha}+\frac{\partial\psi_1}{\partial\alpha},$$
$$0=\frac{\partial\psi_2}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial\alpha}+\frac{\partial\psi_2}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial\alpha}+\cdots+\frac{\partial\psi_2}{\partial a_m}\frac{\partial a_m}{\partial\alpha}+\frac{\partial\psi_2}{\partial\alpha},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

und daher:

$$\beta=\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}+\lambda_1\frac{\partial\psi_1}{\partial\alpha}+\lambda_2\frac{\partial\psi_2}{\partial\alpha}+\cdots.$$

Setzt man in dieser Gleichung für α die Werthe α_1, α_2, ... α_m und für β willkürliche Constanten, so erhält man, wenn man die Gleichungen $\psi_1=0$, $\psi_2=0$ etc. hinzunimmt, eine hinlängliche Anzahl von Gleichungen um a_1, a_2, ... a_m, so wie die Multiplicatoren λ_1, λ_2, ... aus den willkürlichen Constanten α und β zu bestimmen, so dass vermittelst dieser Gleichungen a_1, a_2, ... a_m, λ_1, λ_2, ... ebenfalls willkürlichen Constanten gleich werden, und daher auch die Ausdrücke

$$\frac{\partial\psi}{\partial a_1}+\lambda_1\frac{\partial\psi_1}{\partial a_1}+\lambda_2\frac{\partial\psi_2}{\partial a_1}+\cdots$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial a_2}+\lambda_1\frac{\partial\psi_1}{\partial a_2}+\lambda_2\frac{\partial\psi_2}{\partial a_2}+\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial a_m}+\lambda_1\frac{\partial\psi_1}{\partial a_m}+\lambda_2\frac{\partial\psi_2}{\partial a_m}+\cdots.$$

Nennt man diese letztern willkürlichen Constanten $-b_1$, $-b_2$, ... $-b_m$, so hat man die Gleichungen:

$$\frac{\partial W}{\partial a_1}=b_1,\quad\frac{\partial W}{\partial a_2}=b_2,\quad\ldots\quad\frac{\partial W}{\partial a_m}=b_m.$$

Diese Gleichungen verbunden mit den Gleichungen

$$\frac{\partial W}{\partial q_1}=p_1,\quad\frac{\partial W}{\partial q_2}=p_2,\quad\ldots\quad\frac{\partial W}{\partial q_m}=p_m$$

geben die $2m$ Integralgleichungen in der verlangten Form, in welcher sie statt der $2m+k$ willkürlichen Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{m+k}, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_m$ nur noch die $2m$ willkürlichen Constanten $a_1, a_2, \ldots a_m, b_1, b_2, \ldots b_m$ enthalten.

§. 25. Wie man aus einer gegebenen vollständigen Lösung eine andre ableitet, deren Constanten die Anfangswerthe der Variablen sind.

Ich will noch zeigen, wie man aus einer gefundenen vollständigen Lösung eine andere ableiten kann, in welcher die willkürlichen Constanten die besondere Bedeutung haben, dass sie in den Integralgleichungen, die man aus der vollständigen Lösung erhält, die Anfangswerthe oder die einer bestimmten Zeit (Epoche) entsprechenden Werthe der Variablen werden.

Es sei wieder

$$W(t, q_1, q_2, \ldots q_m, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m)$$

die vollständige Lösung mit den m willkürlichen Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$; es sei ferner W_0 der Werth dieser Function, wenn man darin für $t, q_1, q_2, \ldots q_m$ die Grössen $\tau, a_1, a_2, \ldots a_m$ setzt. Eliminirt man jetzt aus $W-W_0$ Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ vermittelst der Gleichungen:

$$\frac{\partial(W-W_0)}{\partial\alpha_1}=0, \quad \frac{\partial(W-W_0)}{\partial\alpha_2}=0, \quad \ldots \quad \frac{\partial(W-W_0)}{\partial\alpha_m}=0,$$

so erhält man eine neue vollständige Lösung, in welcher $a_1, a_2, \ldots a_m$ die willkürlichen Constanten sind, und in welcher man $\tau=0$ oder einem andern bestimmten Werth gleich setzen kann. Da man nämlich zu W für den Fall, welchen ich hier betrachte, in welchem die partielle Differentialgleichung nicht W selber enthält, immer noch eine willkürliche Constante addiren muss, wenn die Lösung so viel willkürliche Constanten als unabhängige Variable enthalten soll, so nehme ich $W-W_0$ für die vollständige Lösung. Aus dieser erhalte ich nach einer bekannten Regel die sogenannte allgemeine Lösung, wenn ich die eine der willkürlichen Constanten, W_0, einer Function der übrigen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ gleich setze und diese letztern vermittelst der Gleichungen:

$$\frac{\partial(W-W_0)}{\partial\alpha_1}=0, \quad \frac{\partial(W-W_0)}{\partial\alpha_2}=0, \quad \ldots \quad \frac{\partial(W-W_0)}{\partial\alpha_m}=0$$

eliminire. Der hier betrachtete Fall ist der, wenn die willkürlich anzunehmende Function der Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ die besondre oben angegebene Form hat:

$$W_0 = W(\tau, a_1, a_2, \ldots a_m, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m).$$

in welcher ausser $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ noch die willkürlichen Constanten τ, a_1, $a_2, \ldots a_m$ vorkommen.

Hat man nach Elimination von $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ die Function $W - W_0$ durch $t, q_1, q_2, \ldots q_m, \tau, a_1, a_2, \ldots a_m$ ausgedrückt, so werden die Integralgleichungen, welche man aus der neuen Lösung $W - W_0$ ableitet,

$$\frac{\partial(W-W_0)}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial(W-W_0)}{\partial q_2} = p_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial(W-W_0)}{\partial q_m} = p_m,$$

$$\frac{\partial(W-W_0)}{\partial a_1} = -b_1, \quad \frac{\partial(W-W_0)}{\partial a_2} = -b_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial(W-W_0)}{\partial a_m} = -b_m,$$

wo $b_1, b_2, \ldots b_m$ neue willkürliche Constanten sind. Setzt man, um die partiellen Differentialquotienten von $W - W_0$ in diesen Gleichungen zu bilden, in dem ursprünglichen Ausdruck von $W - W_0$ für $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ ihre Werthe, wie sie sich aus den Gleichungen

$$\frac{\partial(W-W_0)}{\partial \alpha_1} = 0, \quad \frac{\partial(W-W_0)}{\partial \alpha_2} = 0, \quad \ldots \quad \frac{\partial(W-W_0)}{\partial \alpha_m} = 0$$

ergeben, so hat man nicht nöthig, nach $q_1, q_2, \ldots q_m, a_1, a_2, \ldots a_m$ auch in so fern zu differentiiren, als sich diese Ausdrücke auch in $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ vorfinden, weil die daraus hervorgehenden Terme wegen der vorstehenden Gleichungen verschwinden. Man kann daher die Integralgleichungen, weil in W nicht die Grössen $a_1, a_2, \ldots a_m$, in W_0 nicht die Grössen $q_1, q_2, \ldots q_m$ explicite vorkommen, folgendermassen darstellen:

$$\frac{\partial W}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial W}{\partial q_2} = p_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial W}{\partial q_m} = p_m,$$

$$\frac{\partial W_0}{\partial a_1} = b_1, \quad \frac{\partial W_0}{\partial a_2} = b_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial W_0}{\partial a_m} = b_m.$$

Die letzten m Gleichungen

$$\frac{\partial W_0}{\partial a_1} = b_1, \quad \frac{\partial W_0}{\partial a_2} = b_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial W_0}{\partial a_m} = b_m$$

lehren hier bloss, dass die Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ Constanten gleich werden, und zeigen ihre Abhängigkeit von den willkürlichen Constanten $a_1, a_2, \ldots a_m$, $b_1, b_2, \ldots b_m$. Als die eigentlichen Integralgleichungen, d. h. als die erforderlichen $2m$ Gleichungen zwischen den $2m$ Variablen $q_1, q_2, \ldots q_m, p_1, p_2, \ldots p_m$ hat man sich daher die Gleichungen zu denken:

$$\frac{\partial W}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial W}{\partial q_2} = p_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial W}{\partial q_m} = p_m,$$

$$\frac{\partial(W-W_0)}{\partial \alpha_1} = 0, \quad \frac{\partial(W-W_0)}{\partial \alpha_2} = 0, \quad \ldots \quad \frac{\partial(W-W_0)}{\partial \alpha_m} = 0.$$

in welchen für $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ die constanten Werthe zu setzen sind, wie sie sich aus den Gleichungen:

$$\frac{\partial W_0}{\partial \alpha_1} = b_1, \quad \frac{\partial W_0}{\partial \alpha_2} = b_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial W_0}{\partial \alpha_m} = b_m$$

ergeben.

Aus den angegebenen Integralgleichungen kann man die Grössen q_1, $q_2, \ldots q_m$, $p_1, p_2, \ldots p_m$ durch t und die willkürlichen Constanten bestimmen. Ich will jetzt die Werthe dieser Grössen für $t = \tau$ aufsuchen. Man setze hierzu in W für $t, q_1, q_2, \ldots q_m$ die zweitheiligen Ausdrücke $\tau + (t-\tau)$, $\alpha_1 + (q_1 - \alpha_1)$, $\alpha_2 + (q_2 - \alpha_2)$, $\ldots$ $\alpha_m + (q_m - \alpha_m)$, und entwickle die Ausdrücke

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_1}, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_2}, \quad \ldots \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_m}$$

nach den aufsteigenden Potenzen von $t-\tau$, $q_1 - \alpha_1$, $q_2 - \alpha_2$, $\ldots$ $q_m - \alpha_m$. Es verwandeln sich hierdurch in den Gleichungen

$$\frac{\partial (W - W_0)}{\partial \alpha_1} = 0, \quad \frac{\partial (W - W_0)}{\partial \alpha_2} = 0, \quad \ldots \quad \frac{\partial (W - W_0)}{\partial \alpha_m} = 0,$$

wenn man $t - \tau = 0$ setzt, die Ausdrücke links in Reihen, die nach den positiven, aufsteigenden Potenzen von $q_1 - \alpha_1$, $q_2 - \alpha_2$, $\ldots$ $q_m - \alpha_m$ fortgehen und kein ganz constantes Glied enthalten. Man wird daher aus diesen Gleichungen folgende:

$$q_1 - \alpha_1 = 0, \quad q_2 - \alpha_2 = 0, \quad \ldots \quad q_m - \alpha_m = 0$$

schliessen können, oder es werden $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ die Werthe von q_1, $q_2, \ldots q_m$ für $t = \tau$. Setzt man ferner in die Ausdrücke

$$p = \frac{\partial W}{\partial q_1}, \quad p_2 = \frac{\partial W}{\partial q_2}, \quad \ldots \quad p_m = \frac{\partial W}{\partial q_m}$$

ür t den Werth τ, und zugleich für $q_1, q_2, \ldots q_m$ die Werthe $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$, so erhält man dafür die Werthe

$$b_1 = \frac{\partial W_0}{\partial \alpha_1}, \quad b_2 = \frac{\partial W_0}{\partial \alpha_2}, \quad \ldots \quad b_m = \frac{\partial W_0}{\partial \alpha_m}.$$

Es werden daher die willkürlichen Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ die Werthe von $q_1, q_2, \ldots q_m$ und die willkürlichen Constanten $b_1, b_2, \ldots b_m$ die Werthe von $p_1, p_2, \ldots p_m$, welche dem Werthe $t = \tau$ entsprechen.

Ganz ähnliche Resultate erhalten wir in Bezug auf die Function V, welche t nicht enthält, sondern ausser den willkürlichen Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ α_{m-1} noch eine gegebene Constante h, die in der partiellen Differentialgleichung selber vorkommt. Bezeichnet man mit V_0 den Werth von V, wenn man darin $a_1, a_2, \dots a_m$ für $q_1, q_2, \dots q_m$ setzt, so erhält man die neue Lösung, wenn man aus $V - V_0$ die Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{m-1}$ vermittelst der Gleichungen

$$\frac{\partial(V-V_0)}{\partial \alpha_1} = 0, \quad \frac{\partial(V-V_0)}{\partial \alpha_2} = 0, \quad \dots \quad \frac{\partial(V-V_0)}{\partial \alpha_m} = 0$$

eliminirt. Fügt man hierzu die Gleichung

$$\frac{\partial(V-V_0)}{\partial h} = t - \tau,$$

so erhält man für $t = \tau$ aus diesen Gleichungen, ganz wie früher, die Gleichungen:

$$q_1 - a_1 = 0, \quad q_2 - a_2 = 0, \quad \dots \quad q_m - a_m = 0.$$

Es verwandeln sich ferner, wenn man diese Werthe substituirt, die Ausdrücke

$$\frac{\partial V}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial V}{\partial q_2}, \quad \dots \quad \frac{\partial V}{\partial q_m} \quad \text{in} \quad \frac{\partial V_0}{\partial a_1}, \quad \frac{\partial V_0}{\partial a_2}, \quad \dots \quad \frac{\partial V_0}{\partial a_m}.$$

Man sieht daher aus den Integralgleichungen:

$$\frac{\partial(V-V_0)}{\partial q_1} = \frac{\partial V}{\partial q_1} = p_1, \qquad \frac{\partial(V-V_0)}{\partial a_1} = -\frac{\partial V_0}{\partial a_1} = -b_1,$$

$$\frac{\partial(V-V_0)}{\partial q_2} = \frac{\partial V}{\partial q_2} = p_2, \qquad \frac{\partial(V-V_0)}{\partial a_2} = -\frac{\partial V_0}{\partial a_2} = -b_2,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{\partial(V-V_0)}{\partial q_m} = \frac{\partial V}{\partial q_m} = p_m, \qquad \frac{\partial(V-V_0)}{\partial a_m} = -\frac{\partial V_0}{\partial a_m} = -b_m,$$

dass $b_1, b_2, \dots b_m$ die Werthe von $p_1, p_2, \dots p_m$ für $t = \tau$ sind.

§. 26. Beispiel der Planetenbewegung.

Als Beispiel will ich die charakteristische Function

$$V = b \operatorname{Arc\,cos}(\cos\alpha \cos\eta + \sin\alpha \sin\eta \cos(\vartheta - \beta)) + \int \sqrt{2f(r) + 2h - \frac{b^2}{r^2}}\, dr,$$

welche wir oben (p. 336.) für die Bewegung eines nach einem festen Centrum angezogenen Punktes fanden, in eine andere verwandeln, in der die Anfangswerthe von r, η, ϑ, die ich mit r_0, η_0, ϑ_0 bezeichne, die willkürlichen Constanten sind. Setzt man

$$\cos w = \cos\alpha \cos\eta + \sin\alpha \sin\eta \cos(\vartheta - \beta),$$

$$\cos w_0 = \cos\alpha \cos\eta_0 + \sin\alpha \sin\eta_0 \cos(\vartheta_0 - \beta),$$

so wird die neue Lösung:

$$V-V_0 = b(w-w_0)+\int_{r_0}^{r}\sqrt{2f(r)+2h-\frac{b^2}{r^2}}\,dr,$$

wenn man darin die Constanten α, β, b vermittelst der Gleichungen:

$$\frac{\partial(V-V_0)}{\partial\alpha}=0,\quad \frac{\partial(V-V_0)}{\partial\beta}=0,\quad \frac{\partial(V-V_0)}{\partial b}=0$$

eliminirt. Die beiden ersten geben:

$$\frac{\partial(w-w_0)}{\partial\alpha}=0,\quad \frac{\partial(w-w_0)}{\partial\beta}=0,$$

und man kann zeigen, dass eine dieser Gleichungen aus der andern von selber folgt. Hierzu, und um die verlangte Elimination von α und β auszuführen, können folgende geometrische Betrachtungen dienen.

Man bilde ein sphärisches Dreieck, in welchem zwei Seiten α und η und der von ihnen eingeschlossene Winkel $\vartheta-\beta$ sind, und ein anderes, welches mit demselben die Seite α gemein hat, und in welchem die andere Seite und der von beiden eingeschlossene Winkel η_0 und $\vartheta_0-\beta$ seien.

Zufolge der für $\cos w$ und $\cos w_0$ angegebenen Ausdrücke sind w und w_0 die dritten Seiten dieser sphärischen Dreiecke, welche den Winkeln $\vartheta-\beta$ und $\vartheta_0-\beta$ gegenüberstehen, und man hat nach den bekannten Differentialformeln des sphärischen Dreiecks:

$$\frac{\partial w}{\partial\alpha}=\cos A,\quad \frac{\partial w}{\partial(\vartheta-\beta)}=\frac{-\partial w}{\partial\beta}=\sin\alpha\sin A,$$

wenn A der der Seite η gegenüberstehende Winkel ist. Ebenso hat man, wenn A_0 der der Seite η_0 im zweiten Dreieck gegenüberliegende Winkel ist,

$$\frac{\partial w_0}{\partial\alpha}=\cos A_0,\quad \frac{\partial w_0}{\partial(\vartheta_0-\beta)}=\frac{-\partial w_0}{\partial\beta}=\sin\alpha\sin A_0,$$

und es giebt daher jede der Gleichungen:

$$\frac{\partial w}{\partial\alpha}=\frac{\partial w_0}{\partial\alpha},\quad \frac{\partial w}{\partial\beta}=\frac{\partial w_0}{\partial\beta}$$

dasselbe Resultat

$$A = A_0,$$

oder beide Dreiecke haben auch den der Seite α anliegenden und den Seiten η und η_0 gegenüberstehenden Winkel A gemein. Man sieht hieraus, dass $w-w_0$ die dritte Seite in einem sphärischen Dreieck ist, in welchem die beiden anderen Seiten η und η_0 und der von ihnen eingeschlossene Winkel $\vartheta-\vartheta_0$ sind. Man hat daher

$$\cos(w-w_0) = \cos\eta_0\cos\eta+\sin\eta_0\sin\eta\cos(\vartheta-\vartheta_0).$$

und die charakteristische Function wird:

$$V-V_0 = b\,\mathrm{Arc}\cos(\cos\eta_0\cos\eta+\sin\eta_0\sin\eta\cos(\vartheta-\vartheta_0))$$
$$+\int_{r_0}^{r}\sqrt{2f(r)+2h-\frac{b^2}{r^2}}\,dr,$$

aus welchem Ausdruck α und β eliminirt sind, und nur noch die eine Grösse b vermittelst der Gleichung

$$\frac{\partial(V-V_0)}{\partial b} = 0$$

oder

$$w-w_0 = \int_{r_0}^{r}\frac{b\,dr}{r^2\sqrt{2f(r)+2h-\frac{b^2}{r^2}}}$$

zu eliminiren ist, wo $w-w_0$ den Winkel zwischen der Anfangs- und End-position des Radius Vectors bedeutet.

Es wird nicht ohne Nutzen sein zu zeigen, wie man die Elimination von α und β auch auf einfachem, rein analytischem Wege ausführen kann, wobei ich die Formeln auf n Variable ausdehnen werde. Es sei

$$a_1a_1+a_2a_2+\cdots+a_na_n = AA,$$
$$x_1x_1+x_2x_2+\cdots+x_nx_n = rr,$$
$$x_1^0x_1^0+x_2^0x_2^0+\cdots+x_n^0x_n^0 = r^0r^0,$$

ferner

$$\cos w = \frac{a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n}{Ar},$$
$$\cos w^0 = \frac{a_1x_1^0+a_2x_2^0+\cdots+a_nx_n^0}{Ar^0}.$$

Man soll vermittelst der Gleichungen:

$$\frac{\partial(w-w^0)}{\partial a_1} = \frac{\partial(w-w^0)}{\partial a_2} = \cdots = \frac{\partial(w-w^0)}{\partial a_n} = 0$$

die Grössen a_1, a_2, ... a_n aus dem Werthe von $w-w^0$ eliminiren. Wenn man die Werthe von $\cos w$, $\cos w^0$ substituirt, und bemerkt, dass die Gleichung $dw-dw^0=0$ sich auch so darstellen lässt:

$$\sin w^0 d.\cos w-\sin w\, d.\cos w^0 = 0,$$

so werden die angegebenen Gleichungen folgende:

$$\sin w^0 \frac{x_1}{r} - \sin w \frac{x_1^0}{r^0} = \sin(w^0 - w) \frac{a_1}{A},$$

$$\sin w^0 \frac{x_2}{r} - \sin w \frac{x_2^0}{r^0} = \sin(w^0 - w) \frac{a_2}{A},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sin w^0 \frac{x_n}{r} - \sin w \frac{x_n^0}{r^0} = \sin(w^0 - w) \frac{a_n}{A}.$$

Von diesen n Gleichungen sind zwei eine blosse Folge der übrigen, so dass sie nur die Stelle von $n-2$ Gleichungen vertreten. Denn multiplicirt man die n Gleichungen mit $\frac{a_1}{A}, \frac{a_2}{A}, \ldots \frac{a_n}{A}$ und addirt, so erhält man eine identische Gleichung, und ebenso, wenn man die n Gleichungen mit

$$\sin w^0 \frac{x_1}{r} + \sin w \frac{x_1^0}{r^0}, \quad \sin w^0 \frac{x_2}{r} + \sin w \frac{x_2^0}{r^0}, \quad \ldots \quad \sin w^0 \frac{x_n}{r} + \sin w \frac{x_n^0}{r^0}$$

multiplicirt und addirt, wodurch man die identische Gleichung

$$\sin^2 w^0 - \sin^2 w = \sin(w^0 - w) \sin(w^0 + w)$$

erhält. Multiplicirt man aber die n Gleichungen mit $\frac{x_1}{r}, \frac{x_2}{r}, \ldots \frac{x_n}{r}$ und addirt, so erhält man:

$$\sin w^0 - \sin w \frac{x_1^0 x_1 + x_2^0 x_2 + \cdots + x_n^0 x_n}{r^0 r} = \sin(w^0 - w) \cos w.$$

Es ist aber

$$\sin w^0 - \sin(w^0 - w) \cos w = \sin w . \cos(w^0 - w),$$

und daher

$$\cos(w - w^0) = \frac{x_1^0 x_1 + x_2^0 x_2 + \cdots + x_n^0 x_n}{r^0 r}$$

oder

$$w - w^0 = \operatorname{Arc\cos} \frac{x_1^0 x_1 + x_2^0 x_2 + \cdots + x_n^0 x_n}{r^0 r},$$

welches der verlangte Ausdruck ist, da $a_1, a_2, \ldots a_n$ aus ihm eliminirt sind. Man erhält aus diesen Formeln die vorigen, wenn man $n = 3$ setzt und statt der rechtwinkligen Coordinaten die Polarcoordinaten einführt.

§. 27. Die *Lagrange*schen Störungsformeln.

Die Form, welche *Hamilton* den Differentialgleichungen der Bewegung giebt, wenn man irgend welche Bestimmungsstücke der Punkte des bewegten Systems zu Variablen wählt, ist dadurch charakterisirt, dass sämmtliche Variable sich in zwei Systeme theilen, und jeder Variablen des einen Systems eine des andern Systems in der Art entspricht, dass der nach der Zeit genommene Differentialquotient einer Variablen des einen Systems gleich ist dem partiellen Differentialquotienten einer gegebenen Function, nach der entsprechenden Variablen des andern Systems genommen; und der nach der Zeit genommene Differentialquotient dieser gleich ist dem nach der erstern genommenen partiellen Differentialquotienten derselben Function mit entgegengesetzten Zeichen. Ich will der Kürze halber diese Form die *canonische* Form der Differentialgleichungen nennen. Auf dieselbe Form der Differentialgleichungen waren schon früher *Lagrange* und *Poisson* in ihren Arbeiten über die Variation der Constanten in den Problemen der Mechanik gekommen, wenn die der Zeit $t=0$ entsprechenden Anfangswerthe der Grössen q_k, p_k oder der Grössen c_k, b_k als die veränderlichen Elemente betrachtet werden. Ist nämlich H_1 die *Störungsfunction*, so dass man die Differentialgleichungen des gestörten Problems aus den Differentialgleichungen des ungestörten erhält, indem man $H+H_1$ statt H schreibt, so hat man (Mec. Analyt. T. I., pag. 336) die Formeln:

$$\frac{dc_1}{dt}=\frac{\partial H_1}{\partial b_1},\quad \frac{db_1}{dt}=-\frac{\partial H_1}{\partial c_1},$$
$$\frac{dc_2}{dt}=\frac{\partial H_1}{\partial b_2},\quad \frac{db_2}{dt}=-\frac{\partial H_1}{\partial c_2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{dc_m}{dt}=\frac{\partial H_1}{\partial b_m},\quad \frac{db_m}{dt}=-\frac{\partial H_1}{\partial c_m};$$

welche, wie man sieht, die angegebene Form haben. *Hamilton* hat diesen Formeln und den Formeln für die Variation der Constanten überhaupt die merkwürdige Ausdehnung gegeben, dass die Störungsfunction H_1 eine beliebige Function sowohl der Grössen q_k als der Grössen p_k sein kann, während man dieselbe vorher immer als eine blosse Function der Grössen q_k betrachtete. Hierdurch hört die Eigenschaft der bisherigen Formeln, dass die ersten Differentialquotienten der Coordinaten, oder was dasselbe ist, der Grössen q_k, auf dieselbe Weise im gestörten und ungestörten Problem ausgedrückt werden, auf ihre Gültigkeit zu haben. Man sieht nämlich aus den Differentialgleichungen des gestörten Problems:

$$\frac{dq_1}{dt}=\frac{\partial(H+H_1)}{\partial p_1},\quad \frac{dp_1}{dt}=-\frac{\partial(H+H_1)}{\partial q_1},$$
$$\frac{dq_2}{dt}=\frac{\partial(H+H_1)}{\partial p_2},\quad \frac{dp_2}{dt}=-\frac{\partial(H+H_1)}{\partial q_2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{dq_m}{dt}=\frac{\partial(H+H_1)}{\partial p_m},\quad \frac{dp_m}{dt}=-\frac{\partial(H+H_1)}{\partial q_m},$$

dass, wenn H_1 die Grössen p_k gar nicht enthält, die Werthe der Grössen $\frac{dq_k}{dt}$ dieselben wie im ungestörten Problem werden, dass dieses aber aufhört, sobald H_1 auch diese Grössen involvirt. In letzterem Falle werden die Grössen q_k und p_k zwar durch dieselben Formeln im gestörten Problem wie im ungestörten durch t und die Elemente ausgedrückt, aber die Art der Abhängigkeit der Grössen

$$\frac{dq_k}{dt}$$

von den Grössen p_k und q_k ist nicht mehr dieselbe.

Es giebt bekanntlich zweierlei Formen der Störungsgleichungen; die eine, die *Lagrange*sche, drückt die partiell nach den Elementen genommenen Differentialquotienten der Störungsfunction durch die Differentialquotienten der Elemente aus; die andere, die *Poisson*sche, drückt diese durch jene aus. Die *Poisson*schen Störungsformeln geben daher direct die gesuchten Ausdrücke, während die *Lagrange*schen nur lineare Gleichungen geben, aus denen man durch Elimination die gesuchten Ausdrücke abzuleiten hat. Gleichwohl haben *Lagrange* und *Poisson* selbst bemerkt, dass diese indirecten Formeln bisweilen in den Anwendungen auf bestimmte Probleme vorzuziehen sind. Denn die Bildung der *Lagrange*schen Formeln setzt die Ausdrücke der Grössen q_k und p_k durch t und die willkürlichen Constanten als gegeben voraus, welche weniger complicirt sind, als die umgekehrten Ausdrücke der willkürlichen Constanten durch t und die Grössen q_k und p_k, welche man bei der Bildung der *Poisson*schen Formeln kennen muss. Auch gelten die *Lagrange*schen Formeln unverändert für den Fall, wo zwischen den Grössen q_k Bedingungsgleichungen gegeben sind, auf welchen sich die andern Formeln nicht ausdehnen. Ich will jetzt zuerst die Gültigkeit der *Lagrange*schen Störungsformeln für den Fall nachweisen, dass H_1 ausser den Grössen q_k noch die Grössen p_k involvirt.

Beim Differentiiren nach t denke ich mir im Folgenden vermittelst der Formeln des ungestörten Problems alles durch t und die willkürlichen Constanten oder die Elemente ausgedrückt, und werde mich, wenn ich diese Elemente auch als Functionen der Zeit betrachte, wie es im gestörten Problem geschieht, der Charakteristik d bedienen; dagegen der Charakteristik ∂, wenn ich partiell nach t differentiire, oder die Elemente als constant setze. Man wird daher haben:

$$\frac{\partial q_k}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \frac{\partial p_k}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial q_k},$$

dagegen

$$\frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_k} + \frac{\partial H_1}{\partial p_k},$$

$$\frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_k} - \frac{\partial H_1}{\partial q_k},$$

und daher

$$\frac{\partial H_1}{\partial p_k} = \frac{dq_k}{dt} - \frac{\partial q_k}{\partial t},$$

$$-\frac{\partial H_1}{\partial q_k} = \frac{dp_k}{dt} - \frac{\partial p_k}{\partial t}.$$

Nennt man daher α ein Element, und dehnt das Summenzeichen Σ auf alle Elemente α aus, so hat man

$$\frac{\partial H_1}{\partial p_k} = \Sigma \frac{\partial q_k}{\partial \alpha} \frac{d\alpha}{dt},$$

$$-\frac{\partial H_1}{\partial q_k} = \Sigma \frac{\partial p_k}{\partial \alpha} \frac{d\alpha}{dt}.$$

Bezeichnet man mit β irgend ein bestimmtes Element, und setzt

$$(\alpha, \beta) = \left[\frac{\partial q_1}{\partial \alpha} \frac{\partial p_1}{\partial \beta} + \frac{\partial q_2}{\partial \alpha} \frac{\partial p_2}{\partial \beta} + \cdots + \frac{\partial q_m}{\partial \alpha} \frac{\partial p_m}{\partial \beta}\right]$$
$$-\left[\frac{\partial p_1}{\partial \alpha} \frac{\partial q_1}{\partial \beta} + \frac{\partial p_2}{\partial \alpha} \frac{\partial q_2}{\partial \beta} + \cdots + \frac{\partial p_m}{\partial \alpha} \frac{\partial q_m}{\partial \beta}\right],$$

so erhält man hieraus:

$$\frac{\partial H_1}{\partial \beta} = \Sigma(\alpha, \beta) \frac{d\alpha}{dt},$$

wo man das Summenzeichen nur auf α erstreckt, während β ein bestimmtes Element bleibt. Die vorstehende Gleichung kommt, wenn H_1 nicht die Grössen p_i enthält, mit den *Lagrange*schen Störungsformeln überein. Es bleibt noch zu zeigen übrig, dass auch für den hier betrachteten allgemeinern Fall der berühmte *Lagrange*sche Satz gilt, dass (α, β) eine blosse Function der Elemente ist, oder

$$\frac{\partial(\alpha, \beta)}{\partial t} = 0.$$

Hierzu bemerke ich, dass

$$(\alpha, \beta) = \frac{\partial\left[p_1 \frac{\partial q_1}{\partial \alpha} + p_2 \frac{\partial q_2}{\partial \alpha} + \cdots + p_m \frac{\partial q_m}{\partial \alpha}\right]}{\partial \beta} - \frac{\partial\left[p_1 \frac{\partial q_1}{\partial \beta} + p_2 \frac{\partial q_2}{\partial \beta} + \cdots + p_m \frac{\partial q_m}{\partial \beta}\right]}{\partial \alpha}.$$

Da ferner:

$$q_k = \frac{\partial q_k}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial p_k},$$

$$\frac{\partial p_k}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial q_k},$$

so erhält man:

$$\frac{\partial\left[p_1\frac{\partial q_1}{\partial\alpha}+p_2\frac{\partial q_2}{\partial\alpha}+\cdots+p_m\frac{\partial q_m}{\partial\alpha}\right]}{\partial t}$$

$$= -\left[\frac{\partial H}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial\alpha}+\frac{\partial H}{\partial q_2}\frac{\partial q_2}{\partial\alpha}+\cdots+\frac{\partial H}{\partial q_m}\frac{\partial q_m}{\partial\alpha}\right]$$

$$+\left[p_1\frac{\partial q_1}{\partial\alpha}+p_2\frac{\partial q'_2}{\partial\alpha}+\cdots+p_m\frac{\partial q'_m}{\partial\alpha}\right]$$

$$= \frac{\partial\left[p_1\frac{\partial H}{\partial p_1}+p_2\frac{\partial H}{\partial p_2}+\cdots+p_m\frac{\partial H}{\partial p_m}-H\right]}{\partial\alpha}.$$

Differentiirt man noch einmal nach β, so erhält man einen Ausdruck, in welchem man α und β vertauschen kann, weil es erlaubt ist, die Ordnung der in dem zuletzt stehenden Ausdruck erst nach α und dann nach β vorzunehmenden Differentiation umzukehren. Man erhält daher:

$$\frac{\partial\left[p_1\frac{\partial q_1}{\partial\alpha}+p_2\frac{\partial q_2}{\partial\alpha}+\cdots+p_m\frac{\partial q_m}{\partial\alpha}\right]}{\partial\beta\partial t}$$

$$-\frac{\partial\left[p_1\frac{\partial q_1}{\partial\beta}+p_2\frac{\partial q_2}{\partial\beta}+\cdots+p_m\frac{\partial q_m}{\partial\beta}\right]}{\partial\alpha\,\partial t}$$

$$= \frac{\partial(\alpha,\beta)}{\partial t} = 0,$$

was zu beweisen war. Da die Grössen (α,β) die Coefficienten der Differentialquotienten der Elemente in dem Ausdrucke der partiell nach den Elementen genommenen Differentialquotienten der Störungsfunction H_1 sind, und daher von der besondern Wahl der Variablen q_k nicht abhängen können, so folgt, dass die Grössen:

$$(\alpha,\beta) = \left[\frac{\partial q_1}{\partial\alpha}\frac{\partial p_1}{\partial\beta}+\frac{\partial q_2}{\partial\alpha}\frac{\partial p_2}{\partial\beta}+\cdots+\frac{\partial q_m}{\partial\alpha}\frac{\partial p_m}{\partial\beta}\right]$$

$$-\left[\frac{\partial p_1}{\partial\alpha}\frac{\partial q_1}{\partial\beta}+\frac{\partial p_2}{\partial\alpha}\frac{\partial q_2}{\partial\beta}+\cdots+\frac{\partial p_m}{\partial\alpha}\frac{\partial q_m}{\partial\beta}\right]$$

unverändert bleiben, welche Bestimmungsstücke der Punkte des Systems man auch als die Variablen q_k setzt, wenn nur die Elemente dieselbe Bedeutung behalten.

Man kann den Beweis des *Lagrange*schen Satzes auch auf folgende Art darstellen, indem man ihn aus einer leicht zu beweisenden identischen Gleichung ableitet. Wenn nämlich die Functionen p_k und q_k irgend drei Variable α, β und t enthalten, und man sich der angegebenen Bezeichnung bedient, so wird identisch:

$$\frac{\partial(\alpha,\beta)}{\partial t}+\frac{\partial(\beta,t)}{\partial\alpha}+\frac{\partial(t,\alpha)}{\partial\beta}=0.$$

Für den hier betrachteten Fall sind die Grössen q_k und p_k solche Functionen, dass man identisch hat:

$$\frac{\partial q_k}{\partial t}=\frac{\partial H}{\partial p_k},\quad \frac{\partial p_k}{\partial t}=-\frac{\partial H}{\partial q_k},$$

wenn man in die Ausdrücke $\frac{\partial H}{\partial p_k}$, $-\frac{\partial H}{\partial q_k}$ für die Grössen p_i und q_i ihre Werthe in t, α, β und den übrigen Elementen setzt. Hierdurch wird:

$$(\beta,t)=-\frac{\partial H}{\partial\beta},\quad (t,\alpha)=\frac{\partial H}{\partial\alpha},$$

und daher für den hier betrachteten Fall:

$$\frac{\partial(\beta,t)}{\partial\alpha}+\frac{\partial(t,\alpha)}{\partial\beta}=0,$$

wodurch die obige identische Gleichung das gesuchte Resultat giebt:

$$\frac{\partial(\alpha,\beta)}{\partial t}=0.$$

Sind α, β, γ drei beliebige Elemente, und setzt man in die angeführte identische Gleichung γ statt t, so sieht man, dass je drei Ausdrücke (β,γ), (γ,α), (α,β) durch die Gleichung:

$$\frac{\partial(\beta,\gamma)}{\partial\alpha}+\frac{\partial(\gamma,\alpha)}{\partial\beta}+\frac{\partial(\alpha,\beta)}{\partial\gamma}=0$$

verbunden sind.

§. 28. Die *Poisson*schen Störungsformeln. Der *Poisson*sche Satz.

Die von *Poisson* gegebenen Störungsformeln können auch für den allgemeinern Fall, wenn H_1 die Grössen p_i enthält, folgendermassen abgeleitet werden.

Es sei durch die Integralgleichungen der ungestörten Bewegung das Element α durch die Grössen q_k, p_k und durch t ausgedrückt, so hat man vermittelst der Differentialgleichungen der ungestörten Bewegung, indem man nach der Zeit differentiirt:

$$
\begin{aligned}
0 = & \frac{\partial\alpha}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial t} + \frac{\partial\alpha}{\partial q_2}\frac{\partial q_2}{\partial t} + \cdots + \frac{\partial\alpha}{\partial q_m}\frac{\partial q_m}{\partial t} \\
& + \frac{\partial\alpha}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial t} + \frac{\partial\alpha}{\partial p_2}\frac{\partial p_2}{\partial t} + \cdots + \frac{\partial\alpha}{\partial p_m}\frac{\partial p_m}{\partial t} + \frac{\partial\alpha}{\partial t} \\
= & \frac{\partial\alpha}{\partial q_1}\frac{\partial H}{\partial p_1} + \frac{\partial\alpha}{\partial q_2}\frac{\partial H}{\partial p_2} + \cdots + \frac{\partial\alpha}{\partial q_m}\frac{\partial H}{\partial p_m} \\
& - \left[\frac{\partial\alpha}{\partial p_1}\frac{\partial H}{\partial q_1} + \frac{\partial\alpha}{\partial p_2}\frac{\partial H}{\partial q_2} + \cdots + \frac{\partial\alpha}{\partial p_m}\frac{\partial H}{\partial q_m}\right] + \frac{\partial\alpha}{\partial t}.
\end{aligned}
$$

Vermittelst der Differentialgleichungen der gestörten Bewegung erhält man:

$$
\begin{aligned}
\frac{d\alpha}{dt} = & \frac{\partial\alpha}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial\alpha}{\partial q_2}\frac{dq_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial\alpha}{\partial q_m}\frac{dq_m}{dt} \\
& + \frac{\partial\alpha}{\partial p_1}\frac{dp_1}{dt} + \frac{\partial\alpha}{\partial p_2}\frac{dp_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial\alpha}{\partial p_m}\frac{dp_m}{dt} + \frac{\partial\alpha}{\partial t} \\
= & \frac{\partial\alpha}{\partial q_1}\frac{\partial(H+H_1)}{\partial p_1} + \frac{\partial\alpha}{\partial q_2}\frac{\partial(H+H_1)}{\partial p_2} + \cdots + \frac{\partial\alpha}{\partial q_m}\frac{\partial(H+H_1)}{\partial p_m} \\
& - \left[\frac{\partial\alpha}{\partial p_1}\frac{\partial(H+H_1)}{\partial q_2} + \frac{\partial\alpha}{\partial p_2}\frac{\partial(H+H_1)}{\partial q_2} + \cdots + \frac{\partial\alpha}{\partial p_m}\frac{\partial(H+H_1)}{\partial q_m}\right] + \frac{\partial\alpha}{\partial t},
\end{aligned}
$$

und daher, wenn man die vorstehende Gleichung abzieht:

$$
\begin{aligned}
\frac{d\alpha}{dt} = & \frac{\partial\alpha}{\partial q_1}\frac{\partial H_1}{\partial p_1} + \frac{\partial\alpha}{\partial q_2}\frac{\partial H_1}{\partial p_2} + \cdots + \frac{\partial\alpha}{\partial q_m}\frac{\partial H_1}{\partial p_m} \\
& - \left[\frac{\partial\alpha}{\partial p_1}\frac{\partial H_1}{\partial q_1} + \frac{\partial\alpha}{\partial p_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2} + \cdots + \frac{\partial\alpha}{\partial p_m}\frac{\partial H_1}{\partial q_m}\right].
\end{aligned}
$$

Bezeichnet β wieder ein Element, und dehnt man das Summenzeichen auf alle Elemente aus, so hat man:

$$
\frac{\partial H_1}{\partial p_k} = \Sigma \frac{\partial H_1}{\partial\beta}\frac{\partial\beta}{\partial p_k},
$$

$$
\frac{\partial H_1}{\partial q_k} = \Sigma \frac{\partial H_1}{\partial\beta}\frac{\partial\beta}{\partial q_k},
$$

und daher, wenn man

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial\alpha}{\partial q_1}\frac{\partial\beta}{\partial p_1} + \frac{\partial\alpha}{\partial q_2}\frac{\partial\beta}{\partial p_2} + \cdots + \frac{\partial\alpha}{\partial q_m}\frac{\partial\beta}{\partial p_m} \\
& - \left[\frac{\partial\alpha}{\partial p_1}\frac{\partial\beta}{\partial q_1} + \frac{\partial\alpha}{\partial p_2}\frac{\partial\beta}{\partial q_2} + \cdots + \frac{\partial\alpha}{\partial p_m}\frac{\partial\beta}{\partial p_m}\right] = [\alpha, \beta]
\end{aligned}
$$

setzt,

$$\frac{d\alpha}{dt} = \Sigma[\alpha, \beta]\frac{\partial H_1}{\partial \beta},$$

in welcher Formel unter dem Summenzeichen für β nach und nach alle $2m$ Elemente zu setzen sind. Diese von *Poisson* zuerst aufgestellte Gleichung giebt direct die Differentialquotienten der veränderlichen Elemente. Sie gilt, wie wir sehen, auch für den zuerst von *Hamilton* betrachteten allgemeinern Fall, wenn die Störungsfunction H_1 auch die Grössen p_ι enthält; nur werden dann wieder die Grössen $\frac{dq_\iota}{dt}$ nicht mehr durch dieselben Formeln wie im ungestörten Problem durch t und die Elemente ausgedrückt werden, indem die Terme $\frac{\partial H_1}{\partial p_\iota}$ noch hinzukommen.

Da die Gleichungen

$$\frac{d\alpha}{dt} = \Sigma[\alpha, \beta]\frac{\partial H_1}{\partial \beta}$$

durch Elimination aus den *Lagrange*schen Gleichungen:

$$\frac{\partial H_1}{\partial \beta} = \Sigma(\alpha, \beta)\frac{\partial H_1}{\partial \alpha}$$

gefunden werden müssen, so folgt daraus, dass wenn die Coefficienten (α, β) blosse Functionen der Elemente ohne t sind, dieses auch mit den Coefficienten $[\alpha, \beta]$ der Fall sein wird. Ich will indessen den directen Beweis hierfür, da er mehrere lehrreiche Formeln enthält, hier wiederholen.

Man hat, wenn man die Differentiationen nach t auf die ungestörte Bewegung bezieht, zufolge der Differentialgleichungen dieser Bewegung:

$$\frac{d\frac{\partial \alpha}{\partial q_k}}{dt} = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial q_k \partial t} + \sum_{k'}\left[\frac{\partial^2 \alpha}{\partial q_k \partial q_{k'}}\,\frac{\partial H}{\partial p_{k'}} - \frac{\partial^2 \alpha}{\partial q_k \partial p_{k'}}\,\frac{\partial H}{\partial q_{k'}}\right],$$

$$\frac{d\frac{\partial \alpha}{\partial p_k}}{dt} = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial p_k \partial t} + \sum_{k'}\left[\frac{\partial^2 \alpha}{\partial p_k \partial q_{k'}}\,\frac{\partial H}{\partial p_{k'}} - \frac{\partial^2 \alpha}{\partial p_k \partial p_{k'}}\,\frac{\partial H}{\partial q_{k'}}\right].$$

Dem Index k' sind hier die Werthe $1, 2, \ldots m$ zu geben; ich habe denselben, um dadurch anzuzeigen, dass nach ihm summirt wird, unter dem Summenzeichen Σ beigefügt. Differentiirt man die oben gegebene Gleichung:

$$0 = \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \sum_{k'}\left[\frac{\partial \alpha}{\partial q_{k'}}\,\frac{\partial H}{\partial p_{k'}} - \frac{\partial \alpha}{\partial p_{k'}}\,\frac{\partial H}{\partial q_{k'}}\right]$$

partiell nach q_k und nach p_k, und zieht die dadurch erhaltenen Ausdrücke von den vorstehenden beiden Gleichungen ab, so erhält man:

$$\frac{d\frac{\partial \alpha}{\partial q_k}}{dt} = \sum_{k'}\left[-\frac{\partial \alpha}{\partial q_{k'}}\frac{\partial^2 H}{\partial q_k \partial p_{k'}} + \frac{\partial \alpha}{\partial p_{k'}}\frac{\partial^2 H}{\partial q_k \partial q_{k'}}\right],$$

$$\frac{d\frac{\partial \alpha}{\partial p_k}}{dt} = \sum_{k'}\left[-\frac{\partial \alpha}{\partial q_{k'}}\frac{\partial^2 H}{\partial p_k \partial p_{k'}} + \frac{\partial \alpha}{\partial p_{k'}}\frac{\partial^2 H}{\partial p_k \partial q_{k'}}\right].$$

Ich multiplicire die erste Gleichung mit $\frac{\partial \beta}{\partial p_k}$, die zweite mit $\frac{\partial \beta}{\partial q_k}$, und summire auf's neue, indem ich dem Index k ebenfalls die Werthe 1, 2, ... m gebe. Wenn man dann die Differenz der aus beiden Gleichungen erhaltenen Doppelsummen nimmt, und darin die Indices k und k' vertauscht (wodurch sich der Werth der Doppelsummen nicht ändert, weil beide Indices über dieselben Werthe ausgedehnt werden), so erhält man denselben Ausdruck, als wenn man unter dem doppelten Summenzeichen die beiden Elemente α und β mit einander vertauscht. Es wird daher auch der Ausdruck:

$$\sum_k\left[\frac{\partial \beta}{\partial p_k}\frac{d\frac{\partial \alpha}{\partial q_k}}{dt} - \frac{\partial \beta}{\partial q_k}\frac{d\frac{\partial \alpha}{\partial p_k}}{dt}\right]$$

ungeändert bleiben, wenn ich darin α und β vertausche, oder man erhält

$$\sum_k\left[\frac{\partial \beta}{\partial p_k}\frac{d\frac{\partial \alpha}{\partial q_k}}{dt} + \frac{\partial \alpha}{\partial q_k}\frac{d\frac{\partial \beta}{\partial p_k}}{dt}\right]$$
$$-\sum_k\left[\frac{\partial \beta}{\partial q_k}\frac{d\frac{\partial \alpha}{\partial p_k}}{dt} + \frac{\partial \alpha}{\partial p_k}\frac{d\frac{\partial \beta}{\partial q_k}}{dt}\right] = 0.$$

Der Ausdruck linker Hand ist ein genaues Differentiale des Ausdrucks

$$[\alpha, \beta] = \sum_k\left[\frac{\partial \alpha}{\partial q_k}\frac{\partial \beta}{\partial p_k} - \frac{\partial \alpha}{\partial p_k}\frac{\partial \beta}{\partial q_k}\right],$$

wodurch sich die vorstehende Gleichung in folgende verwandelt:

$$\frac{d[\alpha, \beta]}{dt} = 0,$$

welche zu beweisen war. Man kann übrigens auch für die Grössen $[\alpha, \beta]$ bemerken, dass ihr Werth derselbe bleibt, welche Bestimmungsstücke der Punkte des Systems man auch für die Grössen q_k annimmt, wenn nur die Bedeutung der Elemente sich nicht ändert. Ich bemerke ferner noch, dass sowohl die *Lagrange*schen als die *Poisson*schen Störungsformeln ungeändert bleiben, wenn H ausser den Grössen q_i, p_i noch t explicite enthält, und dass auch für diesen Fall die Ausdrücke (α, β) und $[\alpha, \beta]$ blosse Functionen der Elemente sind.

Wenn das System ganz frei ist, und man für die Grössen q_k die rechtwinkligen Coordinaten selber nimmt, so wird die Grösse p_k, je nachdem q_k die Werthe x_i, y_i, z_i erhält, die Werthe $m_i x_i'$, $m_i y_i'$, $m_i z_i'$ annehmen. Es verschwinden für diesen Fall die Grössen

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p_k \partial q_{k'}},$$

und die Grössen

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p_k \partial p_{k'}}$$

erhalten nur einen Werth, wenn $k = k'$, und zwar den Werth $\frac{1}{m_i}$. Man erhält daher aus den obigen Formeln für ein freies System die merkwürdigen Gleichungen:

$$\frac{d\frac{\partial \alpha}{\partial x_i'}}{dt} = -\frac{\partial \alpha}{\partial x_i},$$

$$\frac{d\frac{\partial \alpha}{\partial y_i'}}{dt} = -\frac{\partial \alpha}{\partial y_i},$$

$$\frac{d\frac{\partial \alpha}{\partial z_i'}}{dt} = -\frac{\partial \alpha}{\partial z_i},$$

welche bereits *Lagrange* angemerkt hat. Man sieht aus diesen Formeln, dass jedes Integral (d. h. ein Ausdruck von t und den $6n$ Grössen x_i, y_i, z_i, x_i', y_i', z_i', welcher einer willkürlichen Constante gleich wird, ohne dass der Ausdruck selber noch andre willkürliche Constanten enthält), wenn es eine Coordinate enthält, auch ihren nach der Zeit genommenen Differentialquotienten enthalten muss, und umgekehrt, wenn der nach der Zeit genommene Differentialquotient einer Coordinate gar nicht oder bloss linear, mit einer Constante multiplicirt, in dem Integral vorkommt, auch die entsprechende Coordinate in dem Integral nicht vorkommen wird.

Ich bemerke noch, dass, wenn der Satz der lebendigen Kraft gilt, immer auch $\frac{\partial \alpha}{\partial t}$ eine blosse Function der Elemente ist. Denn man erhält in diesem Falle $2m-1$ Gleichungen mit $2m-1$ willkürlichen Constanten zwischen den $2m$ Grössen q_k, p_k, ohne t, und durch eine $2m^{\text{te}}$ Gleichung $t+\tau$, wo τ

die $2m^{te}$ willkürliche Constante ist, durch die Grössen q_k, p_k ausgedrückt. Wenn daher α eine jener $2m-1$ willkürlichen Constanten ist, wird $\frac{\partial \alpha}{\partial t} = 0$, und nur, wenn $\alpha = \tau$, wird $\frac{\partial \alpha}{\partial t} = -1$. Es wird daher auch, wenn α irgend eine Function aller willkürlichen Constanten ist,

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{\partial \alpha}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial t} = -\frac{\partial \alpha}{\partial \tau},$$

oder ebenfalls einer Constante gleich.

§. 29. Andrer Beweis des *Poisson*schen Satzes. Wie aus zwei Integralen der dynamischen Gleichungen weitere gefunden werden.

Ich will auch für den Satz, dass der Ausdruck $[\alpha, \beta]$ sich bloss durch die Elemente ohne die Zeit t darstellen lasse, den Beweis noch auf eine andere Art darstellen, indem ich wieder von einer rein *identischen* Gleichung ausgehe.

Es seien α, β, γ irgend drei Functionen der Grössen $q_1, q_2, \ldots q_m$ und der Grössen $p_1, p_2, \ldots p_m$. Man setze wieder, wenn ε, ζ zwei Functionen dieser Grössen sind,

$$\begin{aligned}[\varepsilon, \zeta] = & \frac{\partial \varepsilon}{\partial q_1}\frac{\partial \zeta}{\partial p_1} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial q_2}\frac{\partial \zeta}{\partial p_2} + \cdots + \frac{\partial \varepsilon}{\partial q_m}\frac{\partial \zeta}{\partial p_m} \\ & - \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_1}\frac{\partial \zeta}{\partial q_1} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_2}\frac{\partial \zeta}{\partial q_2} - \cdots - \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_m}\frac{\partial \zeta}{\partial q_m}.\end{aligned}$$

Nach dieser Bezeichnung *sei*

$$[\beta, \gamma] = \mathrm{A}, \quad [\gamma, \alpha] = \mathrm{B}, \quad [\alpha, \beta] = \Gamma,$$

so hat man identisch:

$$[\mathrm{A}, \alpha] + [\mathrm{B}, \beta] + [\Gamma, \gamma] = 0.$$

Indem ich den leicht zu ergänzenden Beweis dieser identischen Gleichung übergehe, will ich bloss zeigen, wie daraus der zu beweisende Satz folgt.

Es seien nämlich α und β solche Functionen von den Grössen q_i und p_i und der Zeit t, welche vermittelst der Integralgleichungen des ungestörten Problems einer willkürlichen Constante gleich werden, so müssen die Gleichungen:

$$\frac{d\alpha}{dt} = 0, \quad \frac{d\beta}{dt} = 0$$

identisch erfüllt werden, wenn man darin die Differentialgleichungen des Problems, d. h. die Werthe

$$\frac{dq_\iota}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\iota}, \quad \frac{dp_\iota}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_\iota},$$

substituirt. Dies giebt die identischen Gleichungen:

$$[\beta, \mathrm{H}] + \frac{\partial \beta}{\partial t} = 0, \quad [\mathrm{H}, \alpha] - \frac{\partial \alpha}{\partial t} = 0,$$

oder wenn man

$$[\beta, \mathrm{H}] = \mathrm{A}, \quad [\mathrm{H}, \alpha] = \mathrm{B}$$

setzt, die Gleichungen:

$$\mathrm{A} = -\frac{\partial \beta}{\partial t}, \quad \mathrm{B} = \frac{\partial \alpha}{\partial t}.$$

Wenn man daher in der oben aufgestellten identischen Gleichung:

$$[\mathrm{A}, \alpha] + [\mathrm{B}, \beta] + [\Gamma, \gamma] = 0$$

die Function H für γ setzt, so verwandelt sie sich in die Gleichung:

$$\left[-\frac{\partial \beta}{\partial t}, \alpha\right] + \left[\frac{\partial \alpha}{\partial t}, \beta\right] + [\Gamma, \mathrm{H}] = 0.$$

Man hat aber:

$$\left[-\frac{\partial \beta}{\partial t}, \alpha\right] + \left[\frac{\partial \alpha}{\partial t}, \beta\right] = \left[\frac{\partial \alpha}{\partial t}, \beta\right] + \left[\alpha, \frac{\partial \beta}{\partial t}\right] = \frac{\partial [\alpha, \beta]}{\partial t} = \frac{\partial \Gamma}{\partial t},$$

und daher die identische Gleichung:

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} + [\Gamma, \mathrm{H}] = 0.$$

Der Ausdruck links wird dem Ausdrucke $\frac{d\Gamma}{dt}$ gleich, wenn man darin die Differentialgleichungen des Problems substituirt, und daher Γ selbst vermittelst der Integralgleichungen des Problems eine Constante, was zu beweisen war.

Wie grossen Werth auch immer Alle, welche sich mit analytischer Mechanik beschäftigten, auf *Poissons* Arbeit über die Variation der Constanten in den Problemen der Mechanik gelegt haben, so scheint mir noch Niemand die wahre und merkwürdige Bedeutung des Satzes, dass $[\alpha, \beta]$ sich durch die Elemente ohne t ausdrücken lässt, gehörig hervorgehoben zu haben. In den Anwendungen, welche *Poisson* selbst von seinen Formeln auf die elliptische Bewegung eines Planeten und auf die Rotation eines festen Körpers um einen seiner Punkte gemacht hat, wurden von ihm solche Elemente α, β, gewählt, für welche fast immer der Ausdruck $[\alpha, \beta]$ eine *bestimmte* Grösse, z. B. $+1$ oder -1 oder 0 wurde, und der Zweck, welchen man sich vorgesetzt hatte, machte eine solche Wahl sehr wünschenswerth. Dies ist aber nur ein besonderer Fall und gewissermassen ein Ausnahmefall. Im Allgemeinen wird der Ausdruck $[\alpha, \beta]$ eine Function von den Grössen q_ι und p_ι und der Zeit t

sein, welche sich auf keine Weise durch die Functionen α und β ausdrücken lässt. Man hat also im Allgemeinen das merkwürdige Theorem:

„*Wenn H irgend eine Function von t, den Grössen $q_1, q_2, \ldots q_m$, und $p_1, p_2, \ldots p_m$ ist, und man von den Differentialgleichungen:*

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1}, \quad \frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_2}, \quad \ldots \quad \frac{dq_m}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_m},$$
$$\frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \quad \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_2}, \quad \ldots \quad \frac{dp_m}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_m}$$

zwei Integrale kennt, so kann man daraus durch blosse partielle Differentiation ein drittes ableiten.“

Hieraus folgt der Satz:

„*Wenn man von einem Problem der Mechanik, in welchem der Satz von der lebendigen Kraft gilt, noch zwei Integrale kennt, so kann man daraus durch blosse partielle Differentiation ein drittes ableiten.*“

Der vorige Satz ist aber auch noch auf mechanische Probleme anwendbar, in welchen der Satz der Erhaltung der lebendigen Kraft nicht gilt.

Es hindert nichts, das gefundene dritte Integral mit einem der beiden gegebenen zu combiniren, um nach derselben Regel ein viertes abzuleiten. Wenn dieses nicht bereits in den gefundenen Integralen enthalten ist, kann man so fortfahren, und *es können auf diese Weise bei jedem Problem der Mechanik, in welchem der Satz von der lebendigen Kraft gilt, aus zwei Integralen sämmtliche übrige durch blosse partielle Differentiation nach einer bestimmten Regel abgeleitet werden.*

§. 30. Einfachste Störungsformeln für ein System canonischer Elemente.

Da die Ausdrücke, welche mit

$$(\alpha, \beta), \qquad [\alpha, \beta]$$

bezeichnet worden sind, unverändert bleiben, wenn man $t = 0$ setzt, indem sie nicht von t abhängen, so hat man auch:

$$\begin{aligned}
(\alpha, \beta) = {} & \frac{\partial c_1}{\partial \alpha}\frac{\partial b_1}{\partial \beta} + \frac{\partial c_2}{\partial \alpha}\frac{\partial b_2}{\partial \beta} + \cdots + \frac{\partial c_m}{\partial \alpha}\frac{\partial b_m}{\partial \beta} \\
& - \left(\frac{\partial c_1}{\partial \beta}\frac{\partial b_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial c_2}{\partial \beta}\frac{\partial b_2}{\partial \alpha} + \cdots + \frac{\partial c_m}{\partial \beta}\frac{\partial b_m}{\partial \alpha}\right), \\
[\alpha, \beta] = {} & \frac{\partial \alpha}{\partial c_1}\frac{\partial \beta}{\partial b_1} + \frac{\partial \alpha}{\partial c_2}\frac{\partial \beta}{\partial b_2} + \cdots + \frac{\partial \alpha}{\partial c_m}\frac{\partial \beta}{\partial b_m} \\
& - \left(\frac{\partial \alpha}{\partial b_1}\frac{\partial \beta}{\partial c_1} + \frac{\partial \alpha}{\partial b_2}\frac{\partial \beta}{\partial c_2} + \cdots + \frac{\partial \alpha}{\partial b_m}\frac{\partial \beta}{\partial c_m}\right),
\end{aligned}$$

wenn wieder c_k und b_k die dem q_k und p_k für $t=0$ entsprechenden Werthe bedeuten.

Nimmt man die Grössen c_i und b_k selber zu Elementen, so folgt hieraus, wenn i und k verschieden sind,

$$(c_i, b_k) = 0, \quad [c_i, b_k] = 0,$$

wenn $k=i$,

$$(c_i, b_i) = -(b_i, c_i) = 1,$$
$$[c_i, b_i] = -[b_i, c_i] = 1.$$

Es folgen daher aus jeder der beiden Gleichungen:

$$\frac{\partial H_1}{\partial \beta} = \Sigma(\alpha, \beta)\frac{d\alpha}{dt},$$
$$\frac{d\alpha}{dt} = \Sigma[\alpha, \beta]\frac{\partial H_1}{\partial \beta}$$

für diese Annahme der Elemente die einfachen Gleichungen, welche ich bereits oben mitgetheilt habe:

$$\frac{dc_1}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial b_1}, \quad \frac{db_1}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial c_1},$$
$$\frac{dc_2}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial b_2}, \quad \frac{db_2}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial c_2},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{dc_m}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial b_m}, \quad \frac{db_m}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial c_m}.$$

Nimmt man bei einem freien System die rechtwinkligen Coordinaten für die Grössen q_k, und nennt wieder a_i, b_i, c_i, a'_i, b'_i, c'_i die Anfangswerthe von x_i, y_i, z_i, x'_i, y'_i, z'_i, so verwandeln sich die vorstehenden Gleichungen in folgende:

$$m_i\frac{da_i}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial a'_i}, \quad m_i\frac{da'_i}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial a_i},$$
$$m_i\frac{db_i}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial b'_i}, \quad m_i\frac{db'_i}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial b_i},$$
$$m_i\frac{dc_i}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial c'_i}, \quad m_i\frac{dc'_i}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial c_i}.$$

Diese von *Lagrange* in der Mécanique Analytique gegebenen Gleichungen gelten daher auch für den Fall, wenn die Störungsfunction H_1 auch die Grössen p_i oder x'_i, y'_i, z'_i enthält.

Setzt man in H_1, welches man vermittelst der Formeln der ungestörten

Bewegung durch die Elemente b_1, b_2, ... b_m, c_1, c_2, ... c_m auszudrücken hat, für b_1, b_2, ... b_m die Ausdrücke

$$\frac{\partial W}{\partial a_1}, \quad \frac{\partial W}{\partial a_2}, \quad \dots \quad \frac{\partial W}{\partial a_m},$$

so findet man nach dem Theorem VI. die Elemente als Functionen der Zeit durch die Integration der partiellen Differentialgleichung:

$$0 = \frac{\partial W}{\partial t} + H_1.$$

Ist nämlich W eine vollständige Lösung dieser Gleichung mit m willkürlichen Constanten α_1, α_2, ... α_m, zu welchen eine mit W durch blosse Addition verbundene nicht gerechnet wird, so sind die Gleichungen:

$$\frac{\partial W}{\partial a_1} = b_1, \quad \frac{\partial W}{\partial a_2} = b_2, \quad \dots \quad \frac{\partial W}{\partial a_m} = b_m,$$

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \quad \dots \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_m} = \beta_m,$$

in welchen β_1, β_2, ... β_m neue willkürliche Constanten sind, die Integralgleichungen für die veränderlichen Elemente.

§. 31. Die Störungsformeln für die Planetenbewegung.

In der Theorie der Störung der elliptischen Bewegung der Planeten haben die bekannten Differentialgleichungen für die sechs Elemente beinahe eben dieselbe einfache Form, welche oben näher bezeichnet ist. *Hamilton* führt sie *genau* auf diese Form zurück, indem er statt der Neigung den Sinus versus der Neigung, multiplicirt mit der Quadratwurzel aus dem halben Parameter, als Element einführt. Setzt man nämlich mit *Hamilton:*

M die Masse der Sonne,
m die Masse des Planeten,
w die Länge des Perihelinms,
ν die Länge des aufsteigenden Knotens,
τ die Durchgangszeit durch das Perihel,

ferner

$$\mu = -\frac{M+m}{2a},$$
$$\varkappa = \sqrt{M+m}\sqrt{p},$$
$$\lambda = \sqrt{M+m}\sqrt{p}(1-\cos i),$$

wo a, p, i die halbe grosse Axe, den halben Parameter und die Neigung der Ebene der Bahn gegen eine feste Ebene bedeuten, so giebt *Hamilton* die folgenden Formeln, welche sich leicht aus den bekannten ableiten lassen:

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial\mu}, \quad \frac{d\mu}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial\tau},$$
$$\frac{d\varkappa}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial w}, \quad \frac{dw}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial\varkappa},$$
$$\frac{d\nu}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial\lambda}, \quad \frac{d\lambda}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial\nu}.$$

Diese Gleichungen haben genau jene *canonische* Form. Sie gelten auch unverändert für jedes beliebige Anziehungsgesetz, wie *Hamilton* bemerkt, wenn man μ den constanten Theil des halben Quadrats der Geschwindigkeit und $\varkappa$ die doppelte Arealgeschwindigkeit bedeuten lässt und $\frac{\lambda}{\varkappa}$ wieder dem Sinus versus der Neigung der Bahn gleich setzt. Die Störungsfunction Ω ist hier in dem gewöhnlichen Sinne genommen, so dass

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -R\frac{x}{r},$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = -R\frac{y}{r},$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} = -R\frac{z}{r},$$

wo R durch das Gesetz der Anziehung als Function der Entfernung gegeben ist, die Differentialgleichungen der ungestörten Bewegung, und

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -R\frac{x}{r} + \frac{\partial\Omega}{\partial x},$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = -R\frac{y}{r} + \frac{\partial\Omega}{\partial y},$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} = -R\frac{z}{r} + \frac{\partial\Omega}{\partial z},$$

die Differentialgleichungen der gestörten Bewegung sind. Für die elliptische Bewegung um die Sonne, auf welche sich die obige Bedeutung der Elemente bezieht, ist

$$R = \frac{M+m}{r^2}$$

zu setzen.

Zufolge des Theorems VI. kann man die Integralgleichungen für die gestörten Elemente unmittelbar angeben, wenn man eine vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung:

$$0 = \frac{\partial W}{\partial t} + \Omega$$

kennt, in welcher für die Grössen μ, w, λ, welche in Ω vorkommen, zu setzen ist,

$$\mu = \frac{\partial W}{\partial \tau}, \quad w = \frac{\partial W}{\partial \varkappa}, \quad \lambda = \frac{\partial W}{\partial \nu}.$$

Wenn W ausser einer bloss hinzuaddirten Constante noch die drei willkürlichen Constanten α, β, γ enthält, so werden die sechs Elemente als Functionen der Zeit durch die Gleichungen

$$\mu = \frac{\partial W}{\partial \tau}, \quad w = \frac{\partial W}{\partial \varkappa}, \quad \lambda = \frac{\partial W}{\partial \nu},$$
$$\alpha' = \frac{\partial W}{\partial \alpha}, \quad \beta' = \frac{\partial W}{\partial \beta}, \quad \gamma' = \frac{\partial W}{\partial \gamma}$$

bestimmt, in welchen α', β', γ' drei neue willkürliche Constanten bedeuten.

§. 32. Uebergang von einem System canonischer Elemente zu einem andern.

Wenn man die Anfangswerthe der Grössen p und q als Elemente wählt, so erhalten in der gestörten Bewegung die Differentialgleichungen für diese Elemente in allen Problemen der Mechanik, in denen der Satz von der lebendigen Kraft gilt, wie wir gesehen haben, die einfache Form, die ich die canonische genannt habe. Aber dieselbe Form, sehen wir aus dem Vorigen, erhält man bei der elliptischen Bewegung eines Planeten auch für ein ganz anderes, wesentlich verschiedenes System von Elementen; denn unter den sechs Elementen τ, $\varkappa$, ν, μ, w, λ ist keines, welches sich als Function bloss der Anfangswerthe der Coordinaten des Planeten oder als Anfangswerth einer Grösse q betrachten liesse. Da daher die Anfangswerthe der Grössen q und p nicht das einzige System von Elementen bilden, deren Differentialgleichungen die canonische Form haben, so bietet sich die Frage dar, wie man für jedes Problem der Mechanik, für welches der Satz von der lebendigen Kraft gilt, alle solche Systeme von Elementen finden könne. Diese Frage, welche nach den bekannten Methoden schwer zu beantworten sein dürfte, wird durch die Verallgemeinerung des *Hamilton*schen Theorems, die in dem Theorem VI. enthalten ist, leicht erledigt. Man hat nämlich folgendes allgemeines Theorem, welches als ein Fundamentaltheorem in der Theorie der Variation der Constanten betrachtet werden kann.

Theorem IX.

„Es sei H eine Function von t und den Grössen p_1, p_2, ... p_m, q_1, q_2, ... q_m und

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1}, \quad \frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_1},$$
$$\frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_2}, \quad \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_2},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{dq_m}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_m}, \quad \frac{dp_m}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_m}$$

die Differentialgleichungen des ungestörten Problems, aus denen die Differentialgleichungen des gestörten erhalten werden, wenn man $H+H_1$ statt H schreibt, wo H_1 eine beliebige Function der $2m$ Grössen q_k und p_k und der Grosse t sei. Es sei W eine vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$0 = \frac{\partial W}{\partial t} + H,$$

in welcher die Grössen p_1, p_2, .. p_m, die in H vorkommen, respective durch $\frac{\partial W}{\partial q_1}$, $\frac{\partial W}{\partial q_2}$, ... $\frac{\partial W}{\partial q_m}$ zu ersetzen sind. Man nenne α_1, α_2, ... α_m die m willkürlichen Constanten, die ausser einer bloss hinzu zu addirenden die Function W enthält, und es seien

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_m} = \beta_m$$

die Integralgleichungen des ungestörten Problems, in welchen β_1, β_2, ... β_m neue m willkürliche Constanten sind. Drückt man vermittelst dieser Gleichungen und der Gleichungen

$$\frac{\partial W}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial W}{\partial q_2} = p_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial W}{\partial q_m} = p_m$$

die Storungsfunction H_1 durch t und durch die Elemente α_1, α_2, ... α_m, β_1, β_2, ... β_m aus, und betrachtet in dem gestörten Problem diese Elemente als veranderlich, so werden die Differentialgleichungen fur diese gestörten Elemente:

$$\frac{d\alpha_1}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial \beta_1}, \quad \frac{d\beta_1}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_1},$$
$$\frac{d\alpha_2}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial \beta_2}, \quad \frac{d\beta_2}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2},$$
$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$
$$\frac{d\alpha_m}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial \beta_m}, \quad \frac{d\beta_m}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_m}.“$$

In der *Hamilton*schen Darstellung der Integralgleichungen des ungestörten Problems müssen die Constanten α_1, α_2, ... α_m die Anfangswerthe der Grössen q_1, q_2, ... q_m sein, und die Constanten β_1, β_2, ... β_m die Anfangswerthe der Grössen $p_1, p_2, \ldots p_m$, mit entgegengesetztem Zeichen genommen. Das Theorem IX. giebt für diesen Fall nur die bekannten Formeln, welche oben mitgetheilt sind, in welchen die Anfangswerthe der Grössen q_i, p_i als die gestörten Elemente betrachtet werden.

Den Beweis dieses für die Theorie der Variation der Constanten wichtigen Theorems geben folgende einfache Betrachtungen. Man schliesse die partiellen Differentialquotienten von W, wenn dasselbe als Function von t und den $2m$ Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_m$ betrachtet wird, in Klammern ein, lasse dagegen, wie früher, die Klammern fort, wenn W als Function von t, den m Grössen $q_1, q_2, \ldots q_m$ und den m Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ betrachtet wird. Man hat nach dieser Bezeichnung:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \alpha_k}\right) = \frac{\partial W}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial \alpha_k} + \frac{\partial W}{\partial q_2}\frac{\partial q_2}{\partial \alpha_k} + \cdots + \frac{\partial W}{\partial q_m}\frac{\partial q_m}{\partial \alpha_k} + \frac{\partial W}{\partial \alpha_k},$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \beta_k}\right) = \frac{\partial W}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial \beta_k} + \frac{\partial W}{\partial q_2}\frac{\partial q_2}{\partial \beta_k} + \cdots + \frac{\partial W}{\partial q_m}\frac{\partial q_m}{\partial \beta_k}.$$

oder zufolge der Integralgleichungen des ungestörten Problems, welche in unveränderter Form auch für das gestörte Problem gelten sollen, nur dass darin die Elemente als variabel betrachtet werden,

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \alpha_k}\right) = p_1\frac{\partial q_1}{\partial \alpha_k} + p_2\frac{\partial q_2}{\partial \alpha_k} + \cdots + p_m\frac{\partial q_m}{\partial \alpha_k} + \beta_k,$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \beta_k}\right) = p_1\frac{\partial q_1}{\partial \beta_k} + p_2\frac{\partial q_2}{\partial \beta_k} + \cdots + p_m\frac{\partial q_m}{\partial \beta_k}.$$

Wenn α, β irgend zwei von den $2m$ willkürlichen Constanten bedeuten, so setzten wir oben:

$$\begin{aligned}(\alpha, \beta) &= \frac{\partial q_1}{\partial \alpha}\frac{\partial p_1}{\partial \beta} + \frac{\partial q_2}{\partial \alpha}\frac{\partial p_2}{\partial \beta} + \cdots + \frac{\partial q_m}{\partial \alpha}\frac{\partial p_m}{\partial \beta} \\ &\quad - \left(\frac{\partial p_1}{\partial \alpha}\frac{\partial q_1}{\partial \beta} + \frac{\partial p_2}{\partial \alpha}\frac{\partial q_2}{\partial \beta} + \cdots + \frac{\partial p_m}{\partial \alpha}\frac{\partial q_m}{\partial \beta}\right) \\ &= \frac{\partial\left(p_1\frac{\partial q_1}{\partial \alpha} + p_2\frac{\partial q_2}{\partial \alpha} + \cdots + p_m\frac{\partial q_m}{\partial \alpha}\right)}{\partial \beta} \\ &\quad - \frac{\partial\left(p_1\frac{\partial q_1}{\partial \beta} + p_2\frac{\partial q_2}{\partial \beta} + \cdots + p_m\frac{\partial q_m}{\partial \beta}\right)}{\partial \alpha}.\end{aligned}$$

Macht man daher die drei Annahmen

$$\alpha = \alpha_i, \quad \beta = \alpha_k,$$
$$\alpha = \alpha_i, \quad \beta = \beta_k,$$
$$\alpha = \beta_i, \quad \beta = \beta_k,$$

so erhält man aus den vorstehenden Formeln diesen Annahmen entsprechend, da die aus der zweifachen Differentiation von W herrührenden Terme sich aufheben, *wenn die Elemente α_i und β_i die in dem Theorem IX. angegebene Bedeutung haben:*

$$(\alpha_i, \alpha_k) = 0, \qquad (\beta_i, \beta_k) = 0,$$

ferner wenn i und k verschieden sind,

$$(\alpha_i, \beta_k) = 0,$$

wenn aber $k = i$,

$$(\alpha_i, \beta_i) = -(\beta_i, \alpha_i) = -1.$$

Wenn daher $\beta = \alpha_i$, so verschwindet (α, β) nur dann nicht, wenn $\alpha = \beta_i$, und wenn $\beta = \beta_i$, so verschwindet (α, β) nur dann nicht, wenn $\alpha = \alpha_i$; und es erhält im erstern Falle (α, β) den Werth $+1$, im zweiten den Werth -1. Die allgemeine *Lagrange*sche Formel:

$$\frac{\partial H_1}{\partial \beta} = \Sigma (\alpha, \beta) \frac{d\alpha}{dt},$$

in welcher unter dem Summenzeichen für α nach und nach sämmtliche $2m$ Elemente zu setzen sind, giebt daher:

$$\frac{\partial H_1}{\partial \alpha_i} = \frac{d\beta_i}{dt}, \quad \frac{\partial H_1}{\partial \beta_i} = -\frac{d\alpha_i}{dt},$$

was zu beweisen war.

Da man nach den *Poisson*schen Formeln auch die Gleichungen hat:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \Sigma [\alpha, \beta] \frac{\partial H_1}{\partial \beta},$$

wenn man unter dem Summenzeichen für β nach und nach alle $2m$ Elemente setzt, so folgt aus den vorstehenden Gleichungen, dass, *wenn man für die Elemente die in dem Theorem IX. angegebenen willkürlichen Constanten α_1, α_2, ... α_m und β_1, β_2, ... β_m annimmt, man die identischen Gleichungen hat:*

$$[\alpha_i, \alpha_k] = 0, \quad [\beta_i, \beta_k] = 0,$$

ferner, wenn i und k verschieden sind:

$$[\alpha_i, \beta_k] = 0,$$

wenn aber $k = i$,

$$[\alpha_i, \beta_i] = -[\beta_i, \alpha_i] = -1.$$

Diese allgemeinen Formeln sind von grosser Wichtigkeit, sowohl für die Theorie der Variation der Constanten, welche dazu die Veranlassung gab, als für die Integration der Differentialgleichungen des ungestörten Problems selber.

Ich werde im folgenden ein System von Elementen, wie das im vorstehenden Theorem angegebene, ein *canonisches* nennen.

§. 33. Eigenschaften der Ausdrücke $[a_\iota, a_k]$, (a_ι, a_k). Bestimmung einer Störungsfunction, welche beliebig gegebene Aenderungen der Elemente liefert.

Die *Poisson*schen Functionen

$$[a_\iota, a_k],$$

in welchen a_ι, a_k *irgend* zwei Elemente oder willkürliche Constanten bedeuten, haben die doppelte merkwürdige Eigenschaft, dass sie 1) von der Wahl der Variablen $q_1, q_2, \dots q_m$ oder der Bestimmungsstücke der Orte der materiellen Punkte unabhängig sind, und dass sie 2) bloss von den beiden Elementen a_ι und a_k selber abhängen, so dass der Werth des Ausdrucks $[a_\iota, a_k]$ derselbe bleibt, welches auch die willkürlichen Constanten sind, die man zu den übrigen Elementen gewählt hat. Die erste dieser Eigenschaften lässt sich durch folgende Betrachtungen erweisen.

In der Form der *Poisson*schen Störungsformeln werden die Differentialquotienten der veränderlichen Elemente gleich linearen Ausdrücken aus den nach ihnen genommenen partiellen Differentialquotienten der Störungsfunction H_1, und die Function $[a_\iota, a_k]$ ist der Coefficient von $\frac{\partial H_1}{\partial a_k}$ in dem Ausdrucke von $\frac{da_\iota}{dt}$. Um diese partiellen Differentialquotienten zu bilden, muss man H_1 durch die Elemente und t ausdrücken, und dieser Ausdruck ist gänzlich davon unabhängig, welche Functionen der Coordinaten der bewegten materiellen Punkte man als die Variablen $q_1, q_2, \dots q_m$ gewählt hat. Die Störungsfunction H_1 kann ferner in derjenigen Allgemeinheit, welche *Hamilton* den Störungsformeln gegeben hat, und in welcher ich sie oben aufgestellt habe, eine *beliebige* Function von t und den $2m$ Grössen $q_1, q_2, \dots q_m, p_1, p_2, \dots p_m$ sein, sie wird daher auch eine beliebige Function von t und den $2m$ Elementen sein können; die Functionen $[a_\iota, a_k]$ endlich sind gänzlich von der Störungsfunction unabhängig und werden bloss durch die Formeln der ungestörten Bewegung bestimmt. Hat man nun für *eine* Wahl der Variablen $q_1, q_2, \dots q_m$ gefunden:

$$\frac{da_\iota}{dt} = A_1 \frac{\partial H_1}{\partial a_1} + A_2 \frac{\partial H_1}{\partial a_2} + \dots + A_{2m} \frac{\partial H_1}{\partial a_{2m}}$$

und für eine andere Wahl,

$$\frac{da_i}{dt} = B_1 \frac{\partial H_1}{\partial a_1} + B_2 \frac{\partial H_1}{\partial a_2} + \cdots + B_{2m} \frac{\partial H_1}{\partial a_{2m}},$$

so wird

$$(A_1 - B_1)\frac{\partial H_1}{\partial a_1} + (A_2 - B_2)\frac{\partial H_1}{\partial a_2} + \cdots + (A_{2m} - B_{2m})\frac{\partial H_1}{\partial a_{2m}} = 0,$$

wo $A_1, A_2, \ldots A_{2m}, B_1, B_2, \ldots B_{2m}$ Functionen von t und den Elementen $a_1, a_2, \ldots a_{2m}$ sind. Da in dieser Gleichung H_1 eine *beliebige* Function derselben Grössen sein kann, so muss man haben:

$$A_1 = B_1, \quad A_2 = B_2, \quad \ldots \quad A_{2m} = B_{2m},$$

und da $A_1, A_2, \ldots A_{2m}, B_1, B_2, \ldots B_{2m}$ bloss durch die Formeln der ungestörten Bewegung bestimmt werden, und die Formeln der ungestörten Bewegung keine Gleichung zwischen $a_1, a_2, \ldots a_{2m}, t$, d. h. zwischen den willkürlichen Constanten und der Zeit ergeben, so müssen diese Gleichungen identisch sein, oder die Coefficienten $A_1, A_2, \ldots A_{2m}$ sind von der Wahl der Variablen $q_1, q_2, \ldots q_m$ unabhängig, was zu beweisen war. Ich habe zu diesem Beweise den Umstand nicht benutzt, dass die Coefficienten A_1, $A_2, \ldots A_{2m}$ von t unabhängig sind.

Die zweite Eigenschaft der Functionen $[a_i, a_k]$ folgt unmittelbar aus der Gleichung:

$$[a_i, a_k] = \frac{\partial a_i}{\partial q_1}\frac{\partial a_k}{\partial p_1} + \frac{\partial a_i}{\partial q_2}\frac{\partial a_k}{\partial p_2} + \cdots + \frac{\partial a_i}{\partial q_m}\frac{\partial a_k}{\partial p_m},$$
$$- \frac{\partial a_i}{\partial p_1}\frac{\partial a_k}{\partial q_1} - \frac{\partial a_i}{\partial p_2}\frac{\partial a_k}{\partial q_2} - \cdots - \frac{\partial a_i}{\partial p_m}\frac{\partial a_k}{\partial q_m}.$$

Denn diese Gleichung lehrt, dass, um den Ausdruck $[a_i, a_k]$ zu erhalten, man bloss die Ausdrücke von a_i und a_k durch $t, q_1, q_2, \ldots q_m, p_1$, $p_2, \ldots p_m$ zu kennen braucht, also nur zwei Integrale der ungestörten Bewegung. Man braucht also nicht zu wissen, welche Combinationen aus den willkürlichen Constanten für die übrigen Elemente gewählt sind, oder welche der Functionen von $t, q_1, q_2, \ldots q_m, p_1, p_2, \ldots p_m$, die zufolge der Integralgleichungen des ungestörten Problems willkürlichen Constanten gleich sind, als die übrigen $2m-2$ Grössen $a_1, a_2, \ldots a_{2m}$ angenommen werden. Man braucht sogar, wie die Natur der angegebenen Formel lehrt, die übrigen Integrale des ungestörten Problems gar nicht einmal gefunden zu haben, um den Werth von $[a_i, a_k]$ angeben zu können. Nur wenn man diesen Werth durch die willkürlichen Constanten allein ausdrücken will, was, wie oben gezeigt worden, immer möglich ist, muss man auch noch andere Integrale kennen. Und zwar kann man hierbei folgendes festhalten. Kennt man eine gewisse Anzahl Integrale, welche eine gleiche Anzahl willkürlicher Constanten enthalten, so kann man entweder vermittelst dieser Integrale die Grösse $[a_i, a_k]$ durch diese willkürlichen Constanten ausdrücken, oder wenn man dies nicht kann, so erhält man dadurch selbst ein neues Integral, dass man $[a_i, a_k]$ einer willkürlichen Constante gleich setzt, welche man als ein neues Element ansehen kann.

Die *Lagrange*schen Functionen (a_i, a_k) haben mit den *Poisson*schen Functionen die erste der beiden genannten Eigenschaften gemein, dass sie ihren Werth nicht ändern, welche Functionen der Coordinaten man auch als die unabhängigen Variablen $q_1, q_2, \ldots q_m$ angenommen hat. Man könnte dies daraus folgern, dass die *Lagrange*schen und *Poisson*schen Störungsformeln aus einander vermittelst der Auflösung von $2m$ linearen Gleichungen erhalten werden können, und man also die Functionen (a_i, a_k) und die Functionen $[a_i, a_k]$ immer durch einander ausdrücken kann; denn es ergiebt sich hieraus, dass, wenn der Werth der einen von der Wahl der Variablen $q_1, q_2, \ldots q_m$ unabhängig ist, dies auch mit der andern der Fall sein muss. Um jedoch auch für die *Lagrange*schen Functionen diese Eigenschaft direct zu beweisen, bemerke ich, dass es nicht möglich ist, für zwei verschiedene Annahmen der Variablen $q_1, q_2, \ldots q_m$ zwei verschiedene Störungsgleichungen:

$$\frac{\partial H_1}{\partial a_i} = C_1 \frac{da_1}{dt} + C_2 \frac{da_2}{dt} + \cdots + C_{2m} \frac{da_{2m}}{dt},$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial a_i} = D_1 \frac{da_1}{dt} + D_2 \frac{da_2}{dt} + \cdots + D_{2m} \frac{da_{2m}}{dt}$$

zu erhalten. Denn könnten die Grössen $C_1, C_2, \ldots C_{2m}$ von den Grössen $D_1, D_2, \ldots D_{2m}$ verschieden sein, so würde man die Differentialgleichung haben:

$$(C_1 - D_1)\, da_1 + (C_2 - D_2)\, da_2 + \cdots + (C_{2m} - D_{2m})\, da_{2m} = 0,$$

in welcher $C_1 - D_1$, $C_2 - D_2$ etc. Functionen von den Elementen $a_1, a_2, \ldots a_m$ und von t sind, die bloss durch die Gleichungen des ungestörten Problems bestimmt sind. In der oben gegebenen Ableitung der Störungsgleichungen, in welchen die Störungsfunction H_1 jede beliebige Function von $t, q_1, q_2, \ldots q_m, p_1, p_2, \ldots p_m$ sein konnte, wurde aber keine Annahme gemacht, welche auf eine Differentialgleichung zwischen den Elementen und der Zeit führen könnte, die von der Störungsfunction unabhängig ist. *Auch kann man die Störungsfunction bei der Allgemeinheit, in welcher sie hier genommen wird,* *leicht so bestimmen, dass die veränderlichen Elemente jede beliebige Function der Zeit werden*, die man immer so annehmen kann, dass sie die vorstehende Gleichung *nicht* erfüllen.

Unter den unendlich vielen Arten, wie man H_1 annehmen kann, damit die $2m$ Differentialgleichungen

$$\frac{dq_i}{dt}-\frac{\partial H}{\partial p_i}=\frac{\partial H_1}{\partial p_i},\qquad \frac{dp_i}{dt}+\frac{\partial H}{\partial q_i}=-\frac{\partial H_1}{\partial q_i}$$

erfüllt werden, wenn die Elemente der ungestörten Bewegung $a_1, a_2, \dots a_{2m}$ irgend welchen gegebenen Functionen der Zeit t gleich gesetzt werden, will ich des Beispiels wegen nur die einfachste angeben und die sich zunächst darbietet. Da $q_1, q_2, \dots q_m, p_1, p_2, \dots p_m$ gegebene Functionen von t und $a_1, a_2, \dots a_{2m}$ sind, welche durch die Gleichungen der ungestörten Bewegung bestimmt werden, so erhält man die Werthe von $q_1, q_2, \dots q_m, p_1, p_2, \dots p_m$ für die gestörte Bewegung, wenn man die für $a_1, a_2, \dots a_{2m}$ gegebenen Functionen von t substituirt, wodurch die Ausdrücke von

$$\frac{dq_i}{dt}-\frac{\partial H}{\partial p_i},\qquad \frac{dp_i}{dt}+\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

ebenfalls gegebene Functionen von t werden. Es seien diese Functionen von t,

$$T_i=\frac{dq_i}{dt}-\frac{\partial H}{\partial p_i},\qquad \tau_i=\frac{dp_i}{dt}+\frac{\partial H}{\partial q_i},$$

so kann man für H_1, welches eine beliebige Function von $t, q_1, q_2, \dots q_m, p_1, p_2, \dots p_m$ sein kann, den Ausdruck setzen:

$$\begin{aligned} H_1 &= T_1p_1+T_2p_2+\dots+T_mp_m \\ &\quad -(\tau_1q_1+\tau_2q_2+\dots+\tau_mq_m). \end{aligned}$$

Denn man erhält hierfür:

$$\frac{\partial H_1}{\partial p_i}=T_i,\qquad -\frac{\partial H_1}{\partial q_i}=\tau_i,$$

so dass die Differentialgleichungen der gestörten Bewegung durch die Functionen der Zeit, die man für die gestörten Elemente gesetzt hat, erfüllt werden.

§. 34. Beweis, dass die partiellen Differentialquotienten der Störungsfunction, den *Lagrange*schen Formeln entsprechend, sich nur auf *eine* Weise als lineare Functionen der Differentialquotienten der Constanten darstellen lassen, deren Coefficienten von der Zeit unabhängig sind.

Lagrange macht die Annahme, dass die ersten Differentialquotienten der Grössen $q_1, q_2, \dots q_m$ unverändert dieselben bleiben, ob man in ihren

Ausdrücken durch die Elemente und die Zeit die Elemente als constant oder als veränderlich betrachte. Man hat daher zwischen den Elementen und der Zeit m Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial q_1}{\partial a_1} da_1 + \frac{\partial q_1}{\partial a_2} da_2 + \cdots + \frac{\partial q_1}{\partial a_{2m}} da_{2m} = 0,$$
$$\frac{\partial q_2}{\partial a_1} da_1 + \frac{\partial q_2}{\partial a_2} da_2 + \cdots + \frac{\partial q_2}{\partial a_{2m}} da_{2m} = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{\partial q_m}{\partial a_1} da_1 + \frac{\partial q_m}{\partial a_2} da_2 + \cdots + \frac{\partial q_m}{\partial a_{2m}} da_{2m} = 0.$$

Aber ungeachtet dieser Gleichungen kann man beweisen, dass man nicht zwei Gleichungen

$$\frac{\partial H_1}{\partial a_i} = C_1 \frac{da_1}{dt} + C_2 \frac{da_2}{dt} + \cdots + C_{2m} \frac{da_{2m}}{dt},$$
$$\frac{\partial H_1}{\partial a_i} = D_1 \frac{da_1}{dt} + D_2 \frac{da_2}{dt} + \cdots + D_{2m} \frac{da_{2m}}{dt}$$

erhalten kann, in welchen die Grössen D_1, D_2, ... D_{2m} von den Grössen C_1, C_2, ... C_{2m} verschieden sind, wenn man als Bedingung die für die Coefficienten (a_i, a_k) bewiesene Eigenschaft hinzufügt, dass die Grössen C_1, C_2, ... C_{2m} und D_1, D_2, ... D_{2m} blosse Functionen der Elemente a_1, a_2, ... a_{2m} ohne die Zeit t sein sollen. Setzt man:

$$C_1 - D_1 = E_1, \quad C_2 - D_2 = E_2, \quad \ldots \quad C_{2m} - D_{2m} = E_{2m},$$

so ist zu beweisen, dass aus den angenommenen m Differentialgleichungen keine Gleichung:

$$E_1 da_1 + E_2 da_2 + \cdots + E_{2m} da_{2m} = 0$$

gefolgert werden kann, in welcher die Grössen E_1, E_2, ... E_{2m} nicht t enthalten, sondern blosse Functionen von a_1, a_2, ... a_{2m} sind. Man erhält auf die allgemeinste Weise eine Differentialgleichung:

$$E_1 da_1 + E_2 da_2 + \cdots + E_{2m} da_{2m} = 0,$$

welche aus den m angenommenen Differentialgleichungen folgt, wenn man dieselben mit m Factoren N_1, N_2, ... N_m multiplicirt, welche beliebige Functionen von a_1, a_2, ... a_{2m}, t sein können, und hernach sämmtliche Gleichungen addirt. Man erhält dann:

$$E_1 = N_1 \frac{\partial q_1}{\partial a_1} + N_2 \frac{\partial q_2}{\partial a_1} + \cdots + N_m \frac{\partial q_m}{\partial a_1},$$
$$E_2 = N_1 \frac{\partial q_1}{\partial a_2} + N_2 \frac{\partial q_2}{\partial a_2} + \cdots + N_m \frac{\partial q_m}{\partial a_2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$E_{2m} = N_1 \frac{\partial q_1}{\partial a_{2m}} + N_2 \frac{\partial q_2}{\partial a_{2m}} + \cdots + N_m \frac{\partial q_m}{\partial a_{2m}}.$$

Sollen diese Ausdrücke nicht t enthalten, so müssen folgende $2m$ Gleichungen Statt finden, in welchen

$$q'_1 = \frac{\partial q_1}{\partial t}, \quad q'_2 = \frac{\partial q_2}{\partial t}, \quad \ldots \quad q'_m = \frac{\partial q_m}{\partial t},$$
$$N'_1 = \frac{\partial N_1}{\partial t}, \quad N'_2 = \frac{\partial N_2}{\partial t}, \quad \ldots \quad N'_m = \frac{\partial N_m}{\partial t}$$

gesetzt ist:

$$\begin{aligned}
0 &= N'_1 \frac{\partial q_1}{\partial a_1} + N'_2 \frac{\partial q_2}{\partial a_1} + \cdots + N'_m \frac{\partial q_m}{\partial a_1} \\
&\quad + N_1 \frac{\partial q'_1}{\partial a_1} + N_2 \frac{\partial q'_2}{\partial a_1} + \cdots + N_m \frac{\partial q'_m}{\partial a_1}, \\
0 &= N'_1 \frac{\partial q_1}{\partial a_2} + N'_2 \frac{\partial q_2}{\partial a_2} + \cdots + N'_m \frac{\partial q_m}{\partial a_2} \\
&\quad + N_1 \frac{\partial q'_1}{\partial a_2} + N_2 \frac{\partial q'_2}{\partial a_2} + \cdots + N_m \frac{\partial q'_m}{\partial a_2}, \\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
0 &= N'_1 \frac{\partial q_1}{\partial a_{2m}} + N'_2 \frac{\partial q_2}{\partial a_{2m}} + \cdots + N'_m \frac{\partial q_m}{\partial a_{2m}} \\
&\quad + N_1 \frac{\partial q'_1}{\partial a_{2m}} + N_2 \frac{\partial q'_2}{\partial a_{2m}} + \cdots + N_m \frac{\partial q'_m}{\partial a_{2m}}.
\end{aligned}$$

Aus diesen $2m$ Gleichungen kann man die $2m$ Factoren N'_1, N'_2, ... N'_m, N_1, N_2, ... N_m eliminiren, und erhält dann eine Gleichung zwischen den partiellen Differentialquotienten von q_1, q_2, ... q_m, q'_1, q'_2, ... q'_m nach a_1, a_2, ... a_{2m}, welche anzeigt, dass zwischen den Grössen q_1, q_2, ... q_m, q'_1, q'_2, ... q'_m eine Relation existirt, welche nicht zugleich die Grössen a_1, a_2, ... a_{2m} involvirt, welche jedoch die Grösse t enthalten kann. Setzt man für q'_1, q'_2, ... q'_m ihre Werthe

$$q'_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1}, \quad q'_2 = \frac{\partial H}{\partial p_2}, \quad \ldots \quad q'_m = \frac{\partial H}{\partial p_m},$$

so erhält man eine Gleichung zwischen q_1, q_2, ... q_m, p_1, p_2, ... p_m, t ohne willkürliche Constante, welche Gleichung aus den vollständigen Integralgleichungen des ungestörten Problems folgen müsste. Dies ist aber unmöglich, denn man könnte eine solche Gleichung aus den gegebenen Differentialgleichungen des ungestörten Problems nur durch eine Integration erhalten, die, da die Differentialgleichungen vollständig integrirt sein sollen, eine willkürliche Constante mit sich führen müsste.

Wenn man $a_1, a_2, \ldots a_{2m}$ als Variable betrachtet, die Functionen $q_1, q_2, \ldots q_m$ willkürlichen Constanten gleich setzt, und ausserdem auch noch t als eine willkürliche Constante annimmt, so ergeben die im Vorigen angestellten Betrachtungen folgendes Theorem:

„Es sei zwischen den 2m Variablen $a_1, a_2, \ldots a_{2m}$ eine Differentialgleichung gegeben:

$$E_1 da_1 + E_2 da_2 + \cdots + E_{2m} da_{2m} = 0,$$

und diese Differentialgleichung durch ein System von m Gleichungen integrirt:

$$q_1 = c_1, \quad q_2 = c_2, \quad q_m = c_m,$$

in welchen $c_1, c_2, \ldots c_m$ willkürliche Constanten bedeuten, die in den Functionen $q_1, q_2, \ldots q_m$ nicht selber vorkommen; enthalten diese Functionen eine von $c_1, c_2, \ldots c_m$ ganz unabhängige willkürliche Constante t, so muss zwischen den 2m Ausdrucken

$$q_1, \quad q_2, \quad \ldots \quad q_m, \quad \frac{\partial q_1}{\partial t}, \quad \frac{\partial q_2}{\partial t}, \quad \ldots \quad \frac{\partial q_m}{\partial t}$$

eine Relation Statt finden."

Dieses Theorem ist in der wichtigen Theorie der Integration der Differentialgleichung

$$E_1 da_1 + E_2 da_2 + \cdots + E_{2m} da_{2m} = 0$$

durch ein System von m Gleichungen, welche zuerst *Pfaff* gelehrt hat, nicht ohne Interesse.

§. 35. Beweis dass, den *Poisson*schen Formeln entsprechend, die Differentialquotienten der Constanten sich nur auf *eine* Art als lineare Functionen der partiellen Differentialquotienten der Störungsfunction so darstellen lassen, dass die Coefficienten von der Zeit unabhängig sind.

Ich will auch noch in Bezug auf die *Poisson*schen Störungsformeln *a priori* zeigen, dass selbst für den Fall, dass man nach den gewöhnlichen Voraussetzungen annimmt, die Störungsfunction enthalte nicht die Grössen $p_1, p_2, \ldots p_m$, man keine zwei Gleichungen

$$\frac{da_i}{dt} = A_1 \frac{\partial H_1}{\partial a_1} + A_2 \frac{\partial H_1}{\partial a_2} + \cdots + A_{2m} \frac{\partial H_1}{\partial a_{2m}},$$

$$\frac{da_i}{dt} = B_1 \frac{\partial H_1}{\partial a_1} + B_2 \frac{\partial H_1}{\partial a_2} + \cdots + B_{2m} \frac{\partial H_1}{\partial a_{2m}}$$

erhalten kann, in welchen $B_1, B_2, \ldots B_{2m}$ von $A_1, A_2, \ldots A_{2m}$ verschieden sind, wofern man nur die Bedingung hinzufügt, dass diese Grössen blosse

Functionen von $a_1, a_2, \ldots a_{2m}$ ohne t sein sollen. Da H_1 jede beliebige Function von $a_1, a_2, \ldots a_{2m}, t$ sein kann, welche so beschaffen ist, dass nach Substitution der Ausdrücke von $a_1, a_2, \ldots a_{2m}$ durch $q_1, q_2, \ldots q_m$, $p_1, p_2, \ldots p_m, t$ die Grössen $p_1, p_2, \ldots p_m$ aus ihr gänzlich herausgehn, so kann man für H_1 jede Function von $a_1, a_2, \ldots a_{2m}, t$ setzen, welche den Gleichungen genügt:

$$\frac{\partial H_1}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial p_1}+\frac{\partial H_1}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial p_1}+\cdots+\frac{\partial H_1}{\partial a_{2m}}\frac{\partial a_{2m}}{\partial p_1}=0,$$
$$\frac{\partial H_1}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial p_2}+\frac{\partial H_1}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial p_2}+\cdots+\frac{\partial H_1}{\partial a_{2m}}\frac{\partial a_{2m}}{\partial p_2}=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{\partial H_1}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial p_m}+\frac{\partial H_1}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial p_m}+\cdots+\frac{\partial H_1}{\partial a_{2m}}\frac{\partial a_{2m}}{\partial p_m}=0.$$

Setzt man

$$A_1-B_1=F_1,\quad A_2-B_2=F_2,\quad \ldots\quad A_{2m}-B_{2m}=F_{2m},$$

so muss sich aus diesen Gleichungen die folgende

$$F_1\frac{\partial H_1}{\partial a_1}+F_2\frac{\partial H_1}{\partial a_2}+\cdots+F_{2m}\frac{\partial H_1}{\partial a_{2m}}=0$$

ableiten lassen, in welcher $F_1, F_2, \ldots F_{2m}$ blosse Functionen von $a_1, a_2, \ldots a_{2m}$ ohne t sind. Es muss daher, wenn man m Multiplicatoren $K_1, K_2, \ldots K_m$ einführt, den $2m$ Gleichungen:

$$K_1\frac{\partial a_1}{\partial p_1}+K_2\frac{\partial a_1}{\partial p_2}+\cdots+K_m\frac{\partial a_1}{\partial p_m}=F_1,$$
$$K_1\frac{\partial a_2}{\partial p_1}+K_2\frac{\partial a_2}{\partial p_2}+\cdots+K_m\frac{\partial a_2}{\partial p_m}=F_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$K_1\frac{\partial a_{2m}}{\partial p_1}+K_2\frac{\partial a_{2m}}{\partial p_2}+\cdots+K_m\frac{\partial a_{2m}}{\partial p_m}=F_{2m}$$

Genüge geschehen können. Man denke sich $q_1, q_2, \ldots q_m$ durch $a_1, a_2, \ldots a_{2m}, t$ ausgedrückt, und differentiire diese Ausdrücke nach $p_1, p_2, \ldots p_m$, wodurch man für jedes q_i die m Gleichungen erhält:

$$\frac{\partial q_i}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial p_1}+\frac{\partial q_i}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial p_1}+\cdots+\frac{\partial q_i}{\partial a_{2m}}\frac{\partial a_{2m}}{\partial p_1}=0,$$
$$\frac{\partial q_i}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial p_2}+\frac{\partial q_i}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial p_2}+\cdots+\frac{\partial q_i}{\partial a_{2m}}\frac{\partial a_{2m}}{\partial p_2}=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{\partial q_i}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial p_m}+\frac{\partial q_i}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial p_m}+\cdots+\frac{\partial q_i}{\partial a_{2m}}\frac{\partial a_{2m}}{\partial p_m}=0.$$

Vermittelst dieser Gleichungen erhält man aus den vorigen $2m$ Gleichungen, wenn man sie der Reihe nach mit den Factoren

$$\frac{\partial q_i}{\partial a_1}, \quad \frac{\partial q_i}{\partial a_2}, \quad \dots \quad \frac{\partial q_i}{\partial a_{2m}}$$

multiplicirt und addirt:

$$F_1 \frac{\partial q_i}{\partial a_1} + F_2 \frac{\partial q_i}{\partial a_2} + \dots + F_{2m} \frac{\partial q_i}{\partial a_{2m}} = 0.$$

Wenn F_1, F_2, ... F_{2m}, wie die Voraussetzung ist, blosse Functionen von a_1, a_2, ... a_{2m} ohne t sind, so erhält man, wenn man die vorstehende Gleichung nach t differentiirt und für i seine m Werthe 1, 2, 3, ... m setzt, die $2m$ Gleichungen:

$$\begin{array}{l}
F_1 \frac{\partial q_1}{\partial a_1} + F_2 \frac{\partial q_1}{\partial a_2} + \dots + F_{2m} \frac{\partial q_1}{\partial a_{2m}} = 0, \\
F_1 \frac{\partial q_2}{\partial a_1} + F_2 \frac{\partial q_2}{\partial a_2} + \dots + F_{2m} \frac{\partial q_2}{\partial a_{2m}} = 0, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
F_1 \frac{\partial q_m}{\partial a_1} + F_2 \frac{\partial q_m}{\partial a_2} + \dots + F_{2m} \frac{\partial q_m}{\partial a_{2m}} = 0, \\
F_1 \frac{\partial q'_1}{\partial a_1} + F_2 \frac{\partial q'_1}{\partial a_2} + \dots + F_{2m} \frac{\partial q'_1}{\partial a_{2m}} = 0, \\
F_1 \frac{\partial q'_2}{\partial a_1} + F_2 \frac{\partial q'_2}{\partial a_2} + \dots + F_{2m} \frac{\partial q'_2}{\partial a_{2m}} = 0, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
F_1 \frac{\partial q'_m}{\partial a_1} + F_2 \frac{\partial q'_m}{\partial a_2} + \dots + F_{2m} \frac{\partial q'_m}{\partial a_{2m}} = 0.
\end{array}$$

Aus diesen Gleichungen folgt, dass es entweder eine Gleichung zwischen den Grössen q_1, q_2, ... q_m, q'_1, q'_2, ... q'_m, t, welche keine der Grössen a_1, a_2, ... a_{2m} enthält, geben muss, oder die Grössen F_1, F_2, ... F_{2m} sämmtlich verschwinden müssen. Eine solche Gleichung aber wäre eine Integralgleichung des ungestörten Problems ohne willkürliche Constante, die es nicht geben kann, weil man das ungestörte Problem vollständig integrirt voraussetzt. Es muss also

$$F_1 = F_2 = \dots = F_{2m} = 0$$

sein, oder

$$A_1 = B_1, \quad A_2 = B_2, \quad A_{2m} = B_{2m},$$

was zu beweisen war.

§. 36. Weiteres über die Ausdrücke (a_i, a_k).

Der Satz, dass der Werth der Functionen

$$(a_i, a_k) = \frac{\partial q_1}{\partial a_i}\frac{\partial p_1}{\partial a_k} + \frac{\partial q_2}{\partial a_i}\frac{\partial p_2}{\partial a_k} + \cdots + \frac{\partial q_m}{\partial a_i}\frac{\partial p_m}{\partial a_k}$$
$$- \frac{\partial q_1}{\partial a_k}\frac{\partial p}{\partial a_i} - \frac{\partial q_2}{\partial a_k}\frac{\partial p_2}{\partial a_i} - \cdots - \frac{\partial q_m}{\partial a_k}\frac{\partial p_m}{\partial a_i}$$

von der Wahl der Functionen der Coordinaten, welche für die unabhängigen Variablen $q_1, q_2, \ldots q_m$ genommen werden, unabhängig ist, ergiebt sich von selber aus einer wichtigen Bemerkung *Poissons* in seiner zweiten Abhandlung über die Variation der Constanten, welche sich in den Memoiren der Pariser Akademie der Wissenschaften vom Jahre 1816 befindet. *Poisson* zeigt nämlich, dass man diese Functionen unmittelbar aus den Ausdrücken der Coordinaten durch die Elemente und die Zeit ableiten kann, ohne dass man nöthig hat, neue von einander unabhängige Variable $q_1, q_2, \ldots q_m$ einzuführen, wodurch also die besondere Wahl dieser Variablen bei der Bestimmung der Werthe der Functionen (a_i, a_k) gar nicht in Betracht kommt. Die neuen von *Poisson* gegebenen Ausdrücke dieser Functionen haben ferner die merkwürdige Eigenschaft, dass sie gänzlich von den zwischen den Coordinaten gegebenen Bedingungsgleichungen unabhängig sind. Sind nämlich wieder x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes, dessen Masse m ist, und setzt man:

$$x' = \frac{dx}{dt}, \quad y' = \frac{dy}{dt}, \quad z' = \frac{dz}{dt},$$

so giebt *Poisson* die Formel:

$$(a_i, a_k) = \Sigma m\left(\frac{\partial x}{\partial a_i}\frac{\partial x'}{\partial a_k} - \frac{\partial x}{\partial a_k}\frac{\partial x'}{\partial a_i} + \frac{\partial y}{\partial a_i}\frac{\partial y'}{\partial a_k} - \frac{\partial y}{\partial a_k}\frac{\partial y'}{\partial a_i} + \frac{\partial z}{\partial a_i}\frac{\partial z'}{\partial a_k} - \frac{\partial z}{\partial a_k}\frac{\partial z'}{\partial a_i}\right),$$

in welcher die Summe auf alle Punkte m des Systems auszudehnen ist. Wenn das System ganz frei ist, und man für die Grössen $q_1, q_2, \ldots q_m$ die Coordinaten der Punkte nimmt, so erhält man diese Formel aus der obigen, von *Lagrange* gegebenen. Aber, wie *Poisson* bemerkt hat, gilt dieselbe Formel auch unverändert, wenn das System irgend welchen Bedingungen unterworfen ist. Sie gilt auch noch für die verallgemeinerten *Hamilton*schen Störungsformeln, in welchen H_1 eine beliebige Function von $q_1, q_2, \ldots q_m, p_1, p_2, \ldots p_m$ ist.

§. 37. Aus den Störungsgleichungen für *ein* System canonischer Elemente werden die Störungsgleichungen für ein anderes derartiges System abgeleitet.

Da man aus *einer* vollständigen Lösung einer partiellen Differentialgleichung alle übrigen ableiten kann, so kann man auch vermittelst des Theorems IX. aus einem System von Elementen, deren Differentialquotienten die canonische Form haben, alle übrigen ableiten, deren Differentialquotienten dieselbe einfache Form annehmen. Nach der oben auseinandergesetzten Theorie erhält man auf die allgemeinste Art aus einer vollständigen Lösung W eine neue vollständige Lösung $W+\psi$, wenn man für ψ eine willkürliche Function der Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ annimmt, welche m neue willkürliche Constanten $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots \alpha'_m$ enthält,

$$\psi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m, \alpha'_1, \alpha'_2, \ldots \alpha'_m),$$

und vermittelst der Gleichungen:

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_1} = 0,$$
$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_2} = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_m} + \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_m} = 0$$

aus $W+\psi$ die Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ eliminirt, wodurch für diese Grössen in $W+\psi$ die Grössen $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots \alpha'_m$ eingeführt werden. Man erhält dann, wenn man $W+\psi$ nach $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots \alpha'_m$ differentiirt, die Integralgleichungen des ungestörten Problems unter der Form:

$$\frac{\partial (W+\psi)}{\partial \alpha'_1} = \frac{\partial \psi}{\partial \alpha'_1} = \beta'_1,$$
$$\frac{\partial (W+\psi)}{\partial \alpha'_2} = \frac{\partial \psi}{\partial \alpha'_2} = \beta'_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{\partial (W+\psi)}{\partial \alpha'_m} = \frac{\partial \psi}{\partial \alpha'_m} = \beta'_m;$$

und es müssen zufolge des Theorems IX. die neuen Constanten $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots \alpha'_m$ und $\beta'_1, \beta'_2, \ldots \beta'_m$ wieder ein solches System von Elementen bilden, deren Differentialquotienten die canonische Form haben. Es verwandeln sich ferner die Gleichungen, welche man für die ersten Elemente hatte,

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \beta_1,$$

vermittelst der Gleichungen

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_i} = 0$$

in die Gleichungen:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \alpha_i} = -\beta_i.$$

Man hat daher folgendes Theorem:

Theorem X.

„Es seien die Differentialquotienten der veränderlichen Elemente α_1, $\alpha_2, \dots \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \dots \beta_m$ durch die Gleichungen gegeben:

$$\frac{d\alpha_1}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial \beta_1}, \quad \frac{d\beta_1}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_1},$$

$$\frac{d\alpha_2}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial \beta_2}, \quad \frac{d\beta_2}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2},$$

$$\dots\dots \qquad \dots\dots$$

$$\frac{d\alpha_m}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial \beta_m}, \quad \frac{d\beta_m}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_m},$$

wo H_1 die Störungsfunction bedeutet; es sei ferner

$$\psi(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m, \alpha'_1, \alpha'_2, \dots \alpha'_m)$$

eine willkürliche Function der m Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m$ und der m neuen Grössen $\alpha'_1, \alpha'_2, \dots \alpha'_m$; bestimmt man diese neuen Grössen und die m andern neuen Grössen $\beta'_1, \beta'_2, \dots \beta'_m$ aus $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \dots \beta_m$ vermittelst der Gleichungen:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \alpha_1} = -\beta_1, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_2} = -\beta_2, \quad \dots \quad \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_m} = -\beta_m,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \alpha'_1} = \beta'_1, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \alpha'_2} = \beta'_2, \quad \dots \quad \frac{\partial \psi}{\partial \alpha'_m} = \beta'_m$$

und drückt die Störungsfunction H_1 durch t und diese neuen Elemente α'_1, $\alpha'_2, \dots \alpha'_m, \beta'_1, \beta'_2, \dots \beta'_m$ aus, so erhält man die Differentialquotienten dieser neuen Elemente durch die ganz ähnlichen Gleichungen:

$$\frac{d\alpha'_1}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial \beta'_1}, \quad \frac{d\beta'_1}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial \alpha'_1},$$

$$\frac{d\alpha'_2}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial \beta'_2}, \quad \frac{d\beta'_2}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial \alpha'_2},$$

$$\dots\dots \qquad \dots\dots$$

$$\frac{d\alpha'_m}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial \beta'_m}, \quad \frac{d\beta'_m}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial \alpha'_m}.\text{“}$$

Wenn das Theorem IX. in Verbindung mit der bekannten Methode, aus *einer* vollständigen Lösung einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung unendlich viele andere abzuleiten, auf das vorstehende Theorem geführt hat, so ist dasselbe doch seiner Natur nach von allen vorhergehenden Betrachtungen unabhängig und kann direct für sich, wie folgt, bewiesen werden.

Man denke sich durch die Gleichungen des Theorems:

$$\frac{\partial\psi}{\partial\alpha_1} = -\beta_1, \quad \frac{\partial\psi}{\partial\alpha_2} = -\beta_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial\psi}{\partial\alpha_m} = -\beta_m,$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\alpha'_1} = \beta'_1, \quad \frac{\partial\psi}{\partial\alpha'_2} = \beta'_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial\psi}{\partial\alpha'_m} = \beta'_m$$

die Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_m$ durch $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots \alpha'_m, \beta'_1, \beta'_2, \ldots \beta'_m$ ausgedrückt, und in diesem Sinne die partiellen Differentialquotienten von jenen nach diesen genommen. Giebt man dem i die Werthe 1, 2, 3, ... m, so hat man:

$$\frac{\partial H_1}{\partial\beta'_k} = \Sigma\frac{\partial H_1}{\partial\beta_i}\frac{\partial\beta_i}{\partial\beta'_k} + \Sigma\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_i}\frac{\partial\alpha_i}{\partial\beta'_k}.$$

Da nach den Gleichungen des Theorems:

$$\frac{\partial H_1}{\partial\beta_i} = -\frac{d\alpha_i}{dt}, \quad \frac{\partial H_1}{\partial\alpha_i} = \frac{d\beta_i}{dt},$$

so folgt hieraus:

$$\frac{\partial H_1}{\partial\beta'_k} = -\Sigma\frac{\partial\beta_i}{\partial\beta'_k}\frac{d\alpha_i}{dt} + \Sigma\frac{\partial\alpha_i}{\partial\beta'_k}\frac{d\beta_i}{dt}.$$

Es ist aber, da

$$\frac{\partial\psi}{\partial\alpha_i} = -\beta_i,$$

wenn man unter dem Summenzeichen dem Index i' die Werthe 1, 2, ... m beilegt,

$$-\frac{\partial\beta_i}{\partial\beta'_k} = \Sigma\frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha_i\partial\alpha_{i'}}\frac{\partial\alpha_{i'}}{\partial\beta'_k},$$

und daher:

$$\frac{\partial H_1}{\partial\beta'_k} = \Sigma\left(\frac{\partial\alpha_{i'}}{\partial\beta'_k}\left(\Sigma\frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha_i\partial\alpha_{i'}}\frac{d\alpha_i}{dt} + \frac{d\beta_{i'}}{dt}\right)\right).$$

Da ferner auch

$$\beta_{i'} = -\frac{\partial\psi}{\partial\alpha_{i'}},$$

so hat man, wenn man diese Gleichung differentiirt und dem i die Werthe

1, 2, ... m giebt:

$$\Sigma\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha_i\partial\alpha_{i'}}\frac{d\alpha_i}{dt}+\frac{d\beta_{i'}}{dt}\right) = -\Sigma\frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha'_i\partial\alpha_{i'}}\frac{d\alpha'_i}{dt},$$

und daher

$$\frac{\partial H_1}{\partial\beta_k} = -\Sigma\Sigma\frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha'_i\partial\alpha_{i'}}\frac{\partial\alpha_{i'}}{\partial\beta'_k}\frac{d\alpha'_i}{dt}.$$

Aus der Gleichung:

$$\frac{\partial\psi}{\partial\alpha'_i} = \beta_i$$

folgt aber durch partielle Differentiation nach β'_k, wenn man dem i' die Werthe 1, 2, ... m giebt:

$$\Sigma\frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha_{i'}\partial\alpha'_i}\frac{\partial\alpha_{i'}}{\partial\beta'_k} = 0 \quad \text{oder} \quad 1,$$

je nachdem i und k verschieden, oder $i=k$ ist, wodurch

$$\frac{\partial H_1}{\partial\beta'_k} = -\frac{d\alpha'_k}{dt},$$

wie zu beweisen war.

Ebenso erhält man

$$\frac{\partial H_1}{\partial\alpha'_k} = -\Sigma\Sigma\frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha'_i\partial\alpha_{i'}}\frac{\partial\alpha_{i'}}{\partial\alpha'_k}\frac{d\alpha'_i}{dt}+\Sigma\frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha_i\partial\alpha'_k}\frac{d\alpha_i}{dt}.$$

Es ist aber, wenn man dem i' die Werthe 1, 2, ... m giebt,

$$\Sigma\frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha_{i'}\partial\alpha'_i}\frac{\partial\alpha_{i'}}{\partial\alpha'_k}+\frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha'_i\partial\alpha'_k} = 0,$$

und daher:

$$\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_k} = \Sigma\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha'_i\partial\alpha'_k}\frac{d\alpha_i}{dt}+\frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha_i\partial\alpha_k}\frac{d\alpha_i}{dt}\right)$$
$$= \frac{d\beta'_k}{dt},$$

wie zu beweisen war.

§. 38. Noch andere vollständige Lösungen und andere Systeme canonischer Elemente.

Man kann bekanntlich aus *einer* vollständigen Lösung einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung auch noch andere erhalten, welche nicht in der vorhin gegebenen Methode mit einbegriffen sind. Ist nämlich:

$$W(t, q_1, q_2, \dots q_m, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m)+\alpha$$

die vollständige Lösung, in der α die willkürliche Constante bedeutet, die man immer zu W addiren kann, so nehme man k der $m+1$ Constanten als Functionen der übrigen an und setze die nach diesen genommenen partiellen Differentialquotienten von $W+\alpha$ einzeln gleich Null. Wenn die angenommenen Functionen m neue Constanten $\alpha'_1, \alpha'_2, \dots \alpha'_m$ enthalten, so wird $W+\alpha$, nachdem man durch die aufgestellten Gleichungen $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m$ eliminirt hat, eine neue vollständige Lösung sein. Sind die k Gleichungen, durch welche k von den Grössen $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m$ als Functionen der übrigen und der neuen Constanten $\alpha'_1, \alpha'_2, \dots \alpha'_m$ bestimmt werden, folgende:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \psi\ (\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m;\ \alpha'_1, \alpha'_2, \dots \alpha'_m),\\
0 &= \psi_1 (\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m;\ \alpha'_1, \alpha'_2, \dots \alpha'_m),\\
0 &= \psi_2 (\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m;\ \alpha'_1, \alpha'_2, \dots \alpha'_m),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
0 &= \psi_{k-1} (\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m;\ \alpha'_1, \alpha'_2, \dots \alpha'_m),
\end{aligned}$$

so wird $W+\psi$ die neue vollständige Lösung, wenn man vermittelst der vorstehenden Gleichungen und der m Gleichungen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_1} + \lambda_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_1} + \lambda_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_1} + \dots + \lambda_{k-1} \frac{\partial \psi_{k-1}}{\partial \alpha_1} &= 0,\\
\frac{\partial W}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_2} + \lambda_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_2} + \lambda_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_2} + \dots + \lambda_{k-1} \frac{\partial \psi_{k-1}}{\partial \alpha_2} &= 0,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots&\\
\frac{\partial W}{\partial \alpha_m} + \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_m} + \lambda_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_m} + \lambda_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_m} + \dots + \lambda_{k-1} \frac{\partial \psi_{k-1}}{\partial \alpha_m} &= 0
\end{aligned}$$

die Grössen $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m, \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_{k-1}$ eliminirt. Differentiirt man die neue vollständige Lösung nach den Constanten $\alpha'_1, \alpha'_2, \dots \alpha'_m$, die sie enthält, und setzt die partiellen Differentialquotienten respective gleich $\beta'_1, \beta'_2, \dots \beta'_m$, so erhält man:

$$\beta'_1 = \frac{\partial(W+\psi)}{\partial \alpha_1}\frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha'_1} + \frac{\partial(W+\psi)}{\partial \alpha_2}\frac{\partial \alpha_2}{\partial \alpha'_1} + \dots + \frac{\partial(W+\psi)}{\partial \alpha_m}\frac{\partial \alpha_m}{\partial \alpha'_1} + \frac{\partial \psi}{\partial \alpha'_1}.$$

Substituirt man in diesen Ausdruck die vorstehenden Gleichungen und bemerkt, dass durch partielle Differentiation der Gleichung $\psi_p = 0$ nach α'_1 erhalten wird:

$$\frac{\partial \psi_p}{\partial \alpha_1}\frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha'_1} + \frac{\partial \psi_p}{\partial \alpha_2}\frac{\partial \alpha_2}{\partial \alpha'_1} + \dots + \frac{\partial \psi_p}{\partial \alpha_m}\frac{\partial \alpha_m}{\partial \alpha'_1} = -\frac{\partial \psi_p}{\partial \alpha'_1},$$

so erhält man:

$$\beta_i' = \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_i'} + \lambda_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_i'} + \lambda_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_i'} + \cdots + \lambda_{k-1} \frac{\partial \psi_{k-1}}{\partial \alpha_i'}.$$

Verbindet man diese Betrachtungen mit dem Theorem IX., so erhält man folgendes Theorem:

Theorem XI.

„Es seien die Differentialquotienten der gestörten Elemente $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_m$ durch die Gleichungen gegeben:

$$\frac{d\alpha_1}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial \beta_1}, \quad \frac{d\beta_1}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_1},$$

$$\frac{d\alpha_2}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial \beta_2}, \quad \frac{d\beta_2}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d\alpha_m}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial \beta_m}, \quad \frac{d\beta_m}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_m},$$

in welchen H_1 die Störungsfunction bedeutet. Es sei ψ eine beliebige Function der Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ und der m neuen Grössen $\alpha_1', \alpha_2', \ldots \alpha_m'$, und zwischen diesen $2m$ Grössen seien die $k-1$ Gleichungen

$$\psi_1 = 0, \quad \psi_2 = 0, \quad \ldots \quad \psi_{k-1} = 0$$

gegeben; wenn man vermittelst dieser Gleichungen und der $2m$ Gleichungen

$$\beta_1 + \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_1} + \lambda_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_1} + \lambda_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_1} + \cdots + \lambda_{k-1} \frac{\partial \psi_{k-1}}{\partial \alpha_1} = 0,$$

$$\beta_2 + \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_2} + \lambda_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_2} + \lambda_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_2} + \cdots + \lambda_{k-1} \frac{\partial \psi_{k-1}}{\partial \alpha_2} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\beta_m + \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_m} + \lambda_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_m} + \lambda_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_m} + \cdots + \lambda_{k-1} \frac{\partial \psi_{k-1}}{\partial \alpha_m} = 0,$$

$$-\beta_1' + \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_1'} + \lambda_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_1'} + \lambda_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_1'} + \cdots + \lambda_{k-1} \frac{\partial \psi_{k-1}}{\partial \alpha_1'} = 0,$$

$$-\beta_2' + \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_2'} + \lambda_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_2'} + \lambda_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_2'} + \cdots + \lambda_{k-1} \frac{\partial \psi_{k-1}}{\partial \alpha_2'} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$-\beta_m' + \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_m'} + \lambda_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_m'} + \lambda_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_m'} + \cdots + \lambda_{k-1} \frac{\partial \alpha_{k-1}}{\partial \alpha_m'} = 0$$

nach Elimination der Multiplicatoren $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{k-1}$ die Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_m$ durch $\alpha_1', \alpha_2', \ldots \alpha_m', \beta_1', \beta_2', \ldots \beta_m'$ bestimmt, und auch *die Störungsfunction durch t und diese neuen Elemente ausdrückt, so erhält man für die Differentialquotienten derselben die den frühern ganz ähnlichen Ausdrücke:*

$$\frac{d\alpha'_1}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial \beta'_1}, \quad \frac{d\beta'_1}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial \alpha'_1},$$
$$\frac{d\alpha'_2}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial \beta'_2}, \quad \frac{d\beta'_2}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial \alpha'_2},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{d\alpha_m}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial \beta_m}, \quad \frac{d\beta_m}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial \alpha'_m}.\text{“}$$

Man sieht, dass das vorstehende Theorem sich vom Theorem X. nur dadurch unterscheidet, dass statt ψ der Ausdruck

$$\psi + \lambda_1 \psi_1 + \lambda_2 \psi_2 + \cdots + \lambda_{k-1} \psi_{k-1}$$

gesetzt ist, und dass die Gleichungen

$$\psi_1 = 0, \quad \psi_2 = 0, \quad \ldots \quad \psi_{k-1} = 0$$

hinzugefügt sind, wodurch die aus der Differentiation der Multiplicatoren λ_1, λ_2, ... λ_{k-1} hervorgehenden Terme verschwinden. Durch dieselbe Betrachtung findet man auch unmittelbar aus dem für das Theorem X. gegebenen *directen* Beweise einen *directen* Beweis für das vorstehende Theorem.

Giebt man dem k seinen äussersten Werth $k = m$, so kann man α_1, α_2, ... α_m als Functionen von α und den neuen m Grössen α'_1, α'_2, ... α'_m ansehen, und man erhält die entsprechenden Grössen β'_1, β'_2, ... β'_m vermittelst der Gleichungen:

$$\beta_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha} + \beta_2 \frac{\partial \alpha_2}{\partial \alpha} + \cdots + \beta_m \frac{\partial \alpha_m}{\partial \alpha} = -1,$$
$$\beta_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha'_1} + \beta_2 \frac{\partial \alpha_2}{\partial \alpha'_1} + \cdots + \beta_m \frac{\partial \alpha_m}{\partial \alpha'_1} = \beta'_1,$$
$$\beta_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha'_2} + \beta_2 \frac{\partial \alpha_2}{\partial \alpha'_2} + \cdots + \beta_m \frac{\partial \alpha_m}{\partial \alpha'_2} = \beta'_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\beta_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha'_m} + \beta_2 \frac{\partial \alpha_2}{\partial \alpha'_m} + \cdots + \beta_m \frac{\partial \alpha_m}{\partial \alpha'_m} = \beta'_m,$$

aus welchen man α durch die erste von ihnen zu eliminiren hat.

Auch die von *Poisson* und *Lagrange* gegebenen Formeln, in welchen die Hälfte der Elemente die Anfangswerthe der Bestimmungsstücke q_i der bewegten materiellen Punkte sind, und die andere Hälfte die Anfangswerthe der nach einer bestimmten Regel aus ihnen und ihren Differentialquotienten gebildeten Grössen p_ι, umfassen unendlich viele Systeme von Elementen, deren Differentialquotienten die canonische Form haben, da man irgend m von einander unabhängige Functionen der m Bestimmungsstücke q_ι als Bestimmungsstücke ansehen und statt der vorigen einführen kann. Aber es ist wohl zu merken, dass keines von allen Systemen von Elementen, die man auf diese Weise aus einem ableiten kann, eines von denjenigen ergiebt, welche man durch die vorstehenden Betrachtungen aus demselben Systeme ableitet. Die verschiedenen Systeme von Elementen, welche bloss den verschiedenen Arten, die Bestimmungsstücke zu wählen, entsprechen, können durch die Betrachtung erhalten werden,

Theorem XII.

„*dass man die willkürlichen Constanten* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ *als beliebige Functionen von m andern willkürlichen Constanten* $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots \alpha'_m$ *betrachten kann. Man erhält dann die andern m Elemente* $\beta'_1, \beta'_2, \ldots \beta'_m$, *welche diesen entsprechen, vermittelst der Gleichungen*:

$$\beta'_1 = \frac{\partial W}{\partial \alpha'_1} = \beta_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha'_1} + \beta_2 \frac{\partial \alpha_2}{\partial \alpha'_1} + \cdots + \beta_m \frac{\partial \alpha_m}{\partial \alpha'_1},$$

$$\beta'_2 = \frac{\partial W}{\partial \alpha'_2} = \beta_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha'_2} + \beta_2 \frac{\partial \alpha_2}{\partial \alpha'_2} + \cdots + \beta_m \frac{\partial \alpha_m}{\partial \alpha'_2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\beta'_m = \frac{\partial W}{\partial \alpha'_m} = \beta_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha'_m} + \beta_2 \frac{\partial \alpha_2}{\partial \alpha'_m} + \cdots + \beta_m \frac{\partial \alpha_m}{\partial \alpha'_m}.\text{“}$$

Die Theoreme X—XII. umfassen *alle möglichen* Systeme von Elementen, deren Differentialquotienten die angegebene canonische Form haben, und welche aus einem derselben abgeleitet werden können. Die Form der Integralgleichungen des ungestörten Problems kommt hierbei ganz ausser Betracht.

§. 39. Modificationen, welche eintreten, wenn die Kräftefunction des ungestörten Problems die Zeit nicht enthält.

Wenn in dem Theorem IX. die Function H nicht t explicite enthält, so haben die Differentialgleichungen des ungestörten Problems das eine Integral

$$H = h,$$

wo h eine willkürliche Constante ist. In der vollständigen Lösung W kommen t und eine willkürliche Constante τ immer in der Verbindung $t+\tau$ vor, und eine der Integralgleichungen wird

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} = \frac{\partial W}{\partial t} = -H = -h.$$

Man kann daher in dem Theorem IX.

$$\alpha_m = \tau, \quad \beta_m = -h$$

setzen, woraus folgt, dass in dem gestörten Problem die Differentialquotienten der beiden Elemente τ und h immer durch die Gleichungen

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial h}, \quad \frac{dh}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial \tau}$$

gegeben sind. Die zweite dieser Formeln hat *Lagrange* in der analytischen Mechanik aufgestellt und ihr, wegen ihrer Anwendung auf die Stabilität des Weltsystems, eine besondere Aufmerksamkeit gewidmet. Es hat aber diese Anwendung, welche zu den berühmtesten Resultaten der physischen Astronomie gehört, wie *Poisson* gezeigt hat, nicht diejenige Ausdehnung, welche man ihr früher geben zu können meinte.

Wenn man statt W die Function

$$V = W - (t+\tau)\frac{\partial W}{\partial t}$$

einführt, so kann man das Theorem IX. folgendermassen darstellen:

Theorem XIII.

„*Es sei H eine Function der Grössen $q_1, q_2, \dots q_m, p_1, p_2, \dots p_m$, welche die Grösse t nicht enthält, und*

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1}, \quad \frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_1},$$
$$\frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_2}, \quad \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{dq_m}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_m}, \quad \frac{dp_m}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_m}$$

die Differentialgleichungen des ungestörten Problems, aus welchen die Differentialgleichungen des gestörten Problems erhalten werden, wenn man $H+H_1$ statt H schreibt, wo H_1 eine beliebige Function der $2m$ Grössen q_k und p_k und der Grösse t bedeute. Es sei V eine vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung:

$$H = h,$$

in welcher die Grössen $p_1, p_2, \dots p_m$, *die in* H *vorkommen, respective durch* $\frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2}, \dots \frac{\partial V}{\partial q_m}$ *zu ersetzen sind. Man nenne* $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{m-1}$ *die willkürlichen Constanten, welche ausser einer bloss durch Addition mit ihr verbundenen die vollständige Lösung* V *enthalten muss, und setze*

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \quad \dots \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_{m-1}} = \beta_{m-1},$$

$$\frac{\partial V}{\partial h} = t + \tau,$$

welche Gleichungen, wenn $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{m-1}, \beta_1, \beta_2, \dots \beta_{m-1}, h, \tau$ *willkürliche Constanten bedeuten, als die vollständigen Integralgleichungen des ungestörten Problems angesehen werden können. Drückt man vermittelst derselben und der Gleichungen*

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial V}{\partial q_2} = p_2, \quad \dots \quad \frac{\partial V}{\partial q_m} = p_m$$

die Störungsfunction H_1 *durch* t *und die Elemente* $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{m-1}, \beta_1, \beta_2, \dots \beta_{m-1}, h, \tau$ *aus, und betrachtet für das gestörte Problem diese Elemente als veränderlich, so werden die Differentialquotienten dieser gestörten Elemente:*

$$\begin{array}{ll}
\frac{d\alpha_1}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial \beta_1}, & \frac{d\beta_1}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_1}, \\
\frac{d\alpha_2}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial \beta_2}, & \frac{d\beta_2}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2}, \\
\dots\dots & \dots\dots \\
\frac{d\alpha_{m-1}}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial \beta_{m-1}}, & \frac{d\beta_{m-1}}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_{m-1}}, \\
\frac{dh}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial \tau}, & \frac{d\tau}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial h}.\text{“}
\end{array}$$

Ist das System materieller Punkte ganz frei, und nimmt man ihre rechtwinkligen Coordinaten als Bestimmungsstücke an, so erhält man aus dem Theorem XIII. folgendes:

Theorem XIV.

„*Es seien die* $3n$ *Differentialgleichungen des ungestörten Problems:*

$$\begin{aligned}
m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} &= \frac{\partial U}{\partial x_i}, \\
m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} &= \frac{\partial U}{\partial y_i}, \\
&\dots\dots \\
m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} &= \frac{\partial U}{\partial z_i},
\end{aligned}$$

wo m_ι die Masse eines Punktes bedeutet, dessen rechtwinklige Coordinaten x_ι, y_ι, z_ι sind, und U eine blosse Function der $3n$ Coordinaten x_ι, y_ι, z_ι ist; es sei h die Constante, welche in diesem Falle der halben lebendigen Kraft weniger der Kräftefunction U gleich ist,

$$h = \tfrac{1}{2}\Sigma m_\iota\left(\left(\frac{dx_\iota}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy_\iota}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz_\iota}{dt}\right)^2\right)-U;$$

es sei V eine vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\tfrac{1}{2}\Sigma\frac{1}{m_\iota}\left(\left(\frac{\partial V}{\partial x_\iota}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y_\iota}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z_\iota}\right)^2\right) = U+h,$$

und α_1, α_2, ... α_{3n-1} die willkürlichen Constanten, welche ausser einer durch blosse Addition hinzugefügten die vollständige Lösung involvirt; es seien hiernach

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_1} = \beta_1,\quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_2} = \beta_2,\quad \ldots\quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_{3n-1}} = \beta_{3n-1},$$
$$\frac{\partial V}{\partial h} = t+\tau$$

die $3n$ endlichen Integralgleichungen des ungestörten Problems, und α_1, α_2, ... α_{3n-1}, β_1, β_2, ... β_{3n-1}, h, τ die ungestörten Elemente; sind jetzt die Differentialgleichungen des gestörten Problems:

$$m_\iota\frac{d^2x_\iota}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_\iota}+\frac{\partial \Omega}{\partial x_\iota},$$
$$m_\iota\frac{d^2y_\iota}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y_\iota}+\frac{\partial \Omega}{\partial y_\iota},$$
$$m_\iota\frac{d^2z_\iota}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z_\iota}+\frac{\partial \Omega}{\partial z_\iota},$$

so werden die Differentialquotienten der gestörten Elemente:

$$\frac{d\alpha_1}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial \beta_1},\quad \frac{d\beta_1}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_1},$$
$$\frac{d\alpha_2}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial \beta_2},\quad \frac{\partial\beta_2}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{d\alpha_{3n-1}}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial \beta_{3n-1}},\quad \frac{d\beta_{3n-1}}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_{3n-1}},$$
$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial \tau},\quad \frac{d\tau}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial h}.\text{“}$$

Um dieses Theorem aus IX. zu erhalten, hat man

$$H_1 = -\Omega, \quad W = V - (t+\tau)h = V - h\frac{\partial V}{\partial h}$$

zu setzen.

Ein Beispiel geben die Formeln, welche wir oben (p. 334 ff.) für die Bewegung eines nach einem festen Centrum angezogenen Punktes gefunden haben. Nach der zweiten dort angegebenen Integrationsmethode involvirte V ausser h die Constanten b, β, denen die Constanten b', β' ebenso entsprachen, wie in dem vorstehenden Theorem den Constanten α_i die Constanten β_i. Man erhält daher, wenn man die obige Bedeutung der Elemente b, β, b', β' beibehält:

$$\frac{db}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial b'}, \quad \frac{db'}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial b},$$

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial\beta'}, \quad \frac{d\beta'}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial\beta},$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial\tau}, \quad \frac{d\tau}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial h}.$$

Für das *Newton*sche Attractionsgesetz und die elliptische Bewegung fanden wir oben

$$b = k\sqrt{p}, \quad h = \frac{-k^2}{2a}, \quad \beta = \Omega, \quad b' = w - \frac{\pi}{2}, \quad \beta' = -k\sqrt{p}\,.\cos i,$$

wenn a die halbe grosse Axe, p den halben Parameter, Ω die Länge des aufsteigenden Knotens, w die Entfernung des Perihels vom aufsteigenden Knoten, i die Neigung der Bahn, k^2 die anziehende Kraft für die Einheit der Distanz bedeutet; es ist ferner $-\tau$ die Durchgangszeit durch das Perihel. Sind daher die Differentialgleichungen der gestörten elliptischen Bewegung:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k^2x}{r^3} + \frac{\partial\Omega}{\partial x},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{k^2y}{r^3} + \frac{\partial\Omega}{\partial y},$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{k^2z}{r^3} + \frac{\partial\Omega}{\partial z},$$

so werden zufolge des vorigen Theorems die Differentialquotienten der gestörten Elemente:

$$\frac{d.k\sqrt{p}}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial w}, \quad \frac{dw}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial.k\sqrt{p}},$$

$$\frac{d.k\sqrt{p}.\cos i}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial\Omega}, \quad \frac{d\Omega}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial.k\sqrt{p}.\cos i},$$

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial\cdot\frac{k^2}{2a}}, \quad \frac{d\cdot\frac{k^2}{2a}}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial\tau}.$$

Diese Formeln sind von den oben (p. 430) mitgetheilten Formeln *Hamiltons* darin verschieden, dass statt der Länge des Perihels und des Sinus versus der Neigung multiplicirt in die Quadratwurzel des halben Parameters die Entfernung des Perihels vom aufsteigenden Knoten und der Cosinus der Neigung multiplicirt in die Quadratwurzel des halben Parameters als Elemente eingeführt sind.

Die beiden Classen, in welche sich die Elemente theilen, wenn ihre Differentialquotienten die canonische Form haben, werden leicht verändert, indem man zunächst jedes Element aus der einen Classe in die andere bloss dadurch bringen kann, dass man das ihm entsprechende mit entgegengesetztem Zeichen einführt. Hierdurch kann man z. B. sechs solcher Elemente auf vier verschiedene Arten in die beiden Classen theilen; entsprechen nämlich respective den drei Elementen der einen Classe a, b, c die der andern a', b', c', so hat man die vier Classificationen:

$$\begin{array}{cc|cc|cc|cc} a, & a' & a', & -a & a, & a' & a, & a', \\ b, & b' & b, & b' & b', & -b & b, & b', \\ c, & c' & c, & c' & c, & c' & c', & -c, \end{array}$$

in welchen die Elemente derselben Classe unter einander, die entsprechenden neben einander stehen. Man kann dann ferner statt der Elemente einer Classe irgend welche Functionen derselben als Elemente einer Classe betrachten und allgemein nach dem Theorem XII. die Elemente der andern Classe bestimmen.

Sind nämlich α_1, α_2, ... α_m die Elemente der einen Classe, und betrachtet man sie als Functionen der neuen Elemente α'_1, α'_2, ... α'_m, so entspricht nach dem angeführten Theorem einem der neuen Elemente α, das Element der andern Classe

$$\beta'_i = \beta_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha'_i} + \beta_2 \frac{\partial \alpha_2}{\partial \alpha'_i} + \cdot \cdot + \beta_m \frac{\partial \alpha_m}{\partial \alpha'_i}.$$

Wenn man daher für ein Element α eine Function desselben α' einführt, so dass $\alpha = \varphi(\alpha')$, so hat man für β zu setzen:

$$\beta' = \beta \frac{\partial \varphi(\alpha')}{\partial \alpha}.$$

Führt man z. B. in den vorstehenden Formeln statt $\frac{k^2}{2a}$ das Element a ein, so hat man für das entsprechende Element τ zu setzen:

$$-\frac{k^2 \tau}{2a^2},$$

so dass man für die letzte Horizontalreihe in diesen Formeln auch schreiben kann:

$$\frac{da}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial\cdot\frac{k^2\tau}{2a^2}}, \quad \frac{d\cdot\frac{k^2\tau}{2a^2}}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial a}.$$

Will man statt $k\sqrt{p}.\cos i$ bloss $\cos i$ als Element einführen, so setze man $\alpha_1 = \alpha_1' = k\sqrt{p}$, $\alpha_2 = \alpha_1'\alpha_2' = k\sqrt{p}.\cos i$, woraus man erhält:

$$\beta_1' = \beta_1 + \beta_2\alpha_2', \quad \beta_2' = \beta_2\alpha_1',$$

so dass man statt w und Ω zu setzen hat $w + \cos i.\Omega$ und $k\sqrt{p}.\Omega$. Um die *Hamilton*schen Formeln abzuleiten, setze man $\alpha_1 = \alpha_1' = k\sqrt{p}$, $\alpha_2 = \alpha_1' - \alpha_2' = k\sqrt{p}.\cos i$, dann giebt die allgemeine Regel:

$$\beta_1' = \beta_1 + \beta_2, \quad \beta_2' = -\beta_2,$$

so dass, wenn man noch α_2' an Stelle von β_2, $-\beta_2'$ an Stelle von α_2' setzt, in der ersten Classe von Elementen $k\sqrt{p}$ und Ω, in der zweiten $\Omega + w$ und $k\sqrt{p}(1-\cos i)$ erscheinen, wie es in den *Hamilton*schen Formeln der Fall ist: u. s. w. Allgemeinere Aenderungen geben die Theoreme X. und XI., doch umfassen schon die vorstehenden Betrachtungen, wenn man die Uebertragung der Elemente aus einer Classe in die andere und die Einführung von Functionen der Elemente einer Classe statt dieser vereint und wiederholt anwendet, eine grosse Mannigfaltigkeit von Elementensystemen der angegebenen Art.

§. 40. Betrachtung der Fälle, in welchen die Kräftefunction durch Drehung oder Verschiebung des Coordinatensystems keine Aenderung erfährt.

In seiner ersten Abhandlung über die Variation der Constanten hatte *Poisson* gefunden, dass für die elliptische Bewegung eines Himmelskörpers und für die Rotation eines Körpers, der durch einen augenblicklichen Impuls um einen festen Punkt in Bewegung gesetzt wird, die Differentialquotienten der gestörten Elemente sich auf dieselbe Weise ausdrücken lassen. Es liess sich hiernach vermuthen, dass dieselben Formeln, welche für zwei so verschiedenartige mechanische Probleme gelten, überhaupt eine allgemeinere Bedeutung haben. Dies hat *Poisson* in einer zweiten merkwürdigen Abhandlung über die Variation der Constanten in den Memoiren der Pariser Akademie für 1816 gezeigt.

Ich will im Folgenden diese allgemeinen Resultate aus den im Vorigen gefundenen Sätzen ableiten.

Es seien die bekannten Formeln für die Transformation rechtwinkliger Coordinaten:

$$
\begin{aligned}
x_{\iota} &= \alpha\ \xi_{\iota}+\beta\ v_{\iota}+\gamma\ \zeta_{\iota},\\
y_{\iota} &= \alpha'\ \xi_{\iota}+\beta'\ v_{\iota}+\gamma'\ \zeta_{\iota},\\
z_{\iota} &= \alpha''\xi_{\iota}+\beta''v_{\iota}+\gamma''\zeta_{\iota},
\end{aligned}
$$

wo

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \cos\Omega\cos w-\cos i\sin\Omega\sin w,\\
\beta &= -\cos\Omega\sin w-\cos i\sin\Omega\cos w,\\
\gamma &= \sin\Omega\sin i,\\
\alpha' &= \sin\Omega\cos w+\cos i\cos\Omega\sin w,\\
\beta' &= -\sin\Omega\sin w+\cos i\cos\Omega\cos w,\\
\gamma' &= -\cos\Omega\sin i,\\
\alpha'' &= \sin i\sin w,\\
\beta'' &= \sin i\cos w,\\
\gamma'' &= \cos i.
\end{aligned}
$$

Man leitet aus diesen Ausdrücken leicht folgende ebenfalls bekannte Formeln ab, welche von einem allgemeinern Gebrauch sind:

$$
\begin{array}{lll}
\dfrac{\partial x_{\iota}}{\partial\Omega} = -y_{\iota}, & \dfrac{\partial x_{\iota}}{\partial w} = -(\cos i\,.\,y_{\iota}+\cos\Omega\sin i\,.\,z_{\iota}), & \dfrac{\partial x_{\iota}}{\partial i} = \sin\Omega\,.\,z_{\iota},\\
\dfrac{\partial y_{\iota}}{\partial\Omega} = x_{\iota}, & \dfrac{\partial y_{\iota}}{\partial w} = \cos i\,.\,x_{\iota}-\sin\Omega\sin i\,.\,z_{\iota}, & \dfrac{\partial y_{\iota}}{\partial i} = -\cos\Omega\,.\,z_{\iota},\\
\dfrac{\partial z_{\iota}}{\partial\Omega} = 0, & \dfrac{\partial z_{\iota}}{\partial w} = \cos\Omega\sin i\,.\,x_{\iota}+\sin\Omega\sin i\,.\,y_{\iota}, & \dfrac{\partial z_{\iota}}{\partial i} = \cos\Omega\,.\,y_{\iota}-\sin\Omega\,.\,x_{\iota}.
\end{array}
$$

Für die Fälle der Mechanik, welche wir hier betrachten, wird die partielle Differentialgleichung:

$$\tfrac{1}{2}\Sigma\frac{1}{m_{\iota}}\left(\left(\frac{\partial V}{\partial x_{\iota}}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y_{\iota}}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z_{\iota}}\right)^2\right) = U+h$$

durch die angeführte Substitution:

$$\tfrac{1}{2}\Sigma\frac{1}{m_{\iota}}\left(\left(\frac{\partial V}{\partial \xi_{\iota}}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial v_{\iota}}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial \zeta_{\iota}}\right)^2\right) = U+h,$$

wo in U für x_{ι}, y_{ι}, z_{ι} bloss ξ_{ι}, v_{ι}, ζ_{ι} zu setzen sind. Denn die angegebene Substitution kommt mit einer blossen Aenderung der Lage der rechtwinkligen Coordinatenaxen überein, durch welche sich, wie vorausgesetzt werden soll, die Differentialgleichungen des mechanischen Problems nicht ändern. Hat man daher einen Ausdruck von V in ξ_{ι}, v_{ι}, ζ_{ι} gefunden, so erhält man daraus sogleich einen andern mit drei neuen willkürlichen Constanten Ω, w, i, indem man für ξ_{ι}, v_{ι}, ζ_{ι} die Ausdrücke

$$x_i = \alpha\ \xi_i + \beta\ v_i + \gamma\ \zeta_i,$$
$$y_i = \alpha'\ \xi_i + \beta' v_i + \gamma'\ \zeta_i,$$
$$z_i = \alpha'' \xi_i + \beta'' v_i + \gamma'' \zeta_i$$

setzt. Nennt man die den Ω, w, i entsprechenden Constanten Ω', w', i', so werden drei Integralgleichungen des mechanischen Problems:

$$\Omega' = \frac{\partial V}{\partial \Omega}, \quad w' = \frac{\partial V}{\partial w}, \quad i' = \frac{\partial V}{\partial i},$$

oder

$$\Omega' = \Sigma\Big(\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial \Omega} + \frac{\partial V}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial \Omega} + \frac{\partial V}{\partial z_i}\frac{\partial z_i}{\partial \Omega}\Big),$$
$$w' = \Sigma\Big(\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial w} + \frac{\partial V}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial w} + \frac{\partial V}{\partial z_i}\frac{\partial z_i}{\partial w}\Big),$$
$$i' = \Sigma\Big(\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial i} + \frac{\partial V}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial i} + \frac{\partial V}{\partial z_i}\frac{\partial z_i}{\partial i}\Big) \text{*)}.$$

Da man

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = m_i \frac{dx_i}{dt}, \quad \frac{\partial V}{\partial y_i} = m_i \frac{dy_i}{dt}, \quad \frac{\partial V}{\partial z_i} = m_i \frac{dz_i}{dt}$$

hat, so verwandeln sich diese Gleichungen in folgende:

$$\Omega' = \Sigma m_i\Big(\frac{\partial x_i}{\partial \Omega}\frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial y_i}{\partial \Omega}\frac{dy_i}{dt} + \frac{\partial z_i}{\partial \Omega}\frac{dz_i}{dt}\Big),$$
$$w' = \Sigma m_i\Big(\frac{\partial x_i}{\partial w}\frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial y_i}{\partial w}\frac{dy_i}{dt} + \frac{\partial z_i}{\partial w}\frac{dz_i}{dt}\Big),$$
$$i' = \Sigma m_i\Big(\frac{\partial x_i}{\partial i}\frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial y_i}{\partial i}\frac{dy_i}{dt} + \frac{\partial z_i}{\partial i}\frac{dz_i}{dt}\Big),$$

wodurch man, vermittelst der angegebenen Werthe der partiell nach Ω, w, i genommenen Differentialquotienten von x_i, y_i, z_i, die Gleichungen erhält:

$$\Omega' = \Sigma m_i\Big(x_i \frac{dy_i}{dt} - y_i \frac{dx_i}{dt}\Big),$$
$$w' = \cos i\, \Sigma m_i\Big(x_i \frac{dy_i}{dt} - y_i \frac{dx_i}{dt}\Big)$$
$$+ \cos \Omega \sin i\, \Sigma m_i\Big(x_i \frac{dz_i}{dt} - z_i \frac{dx_i}{dt}\Big)$$
$$+ \sin \Omega \sin i\, \Sigma m_i\Big(y_i \frac{dz_i}{dt} - z_i \frac{dy_i}{dt}\Big),$$
$$i' = -\sin \Omega\, \Sigma m_i\Big(x_i \frac{dz_i}{dt} - z_i \frac{dx_i}{dt}\Big)$$
$$+ \cos \Omega\, \Sigma m_i\Big(y_i \frac{dz_i}{dt} - z_i \frac{dy_i}{dt}\Big),$$

---

*) Es braucht nicht erinnert zu werden, dass der Index i mit dem Winkel i nicht zu verwechseln ist.

welche drei Gleichungen die bekannten Sätze von der Erhaltung der Flächenräume enthalten, die hier nicht wie gewöhnlich durch Integration, sondern, wie man sieht, durch Differentiation abgeleitet werden.

Damit der Ausdruck von V in ξ_ι, v_ι, ζ_ι nicht bereits die willkürlichen Constanten enthalte, welche aus der beliebigen Annahme der Coordinatenaxen hervorgehen, kann man die von *Laplace* sogenannte unveränderliche Ebene zur Ebene der ξ, v annehmen, wodurch bekanntlich die drei Flächensätze die Form erhalten:

$$\Sigma m_\iota\left(\xi_\iota \frac{dv_\iota}{dt} - v_\iota \frac{d\xi_\iota}{dt}\right) = -k\sqrt{p},$$

$$\Sigma m_\iota\left(\xi_\iota \frac{d\zeta_\iota}{dt} - \zeta_\iota \frac{d\xi_\iota}{dt}\right) = 0,$$

$$\Sigma m_\iota\left(v_\iota \frac{d\zeta_\iota}{dt} - \zeta_\iota \frac{dv_\iota}{dt}\right) = 0,$$

wenn man mit $k\sqrt{p}$ die constante Summe der in die respectiven Massen multiplicirten und auf die unveränderliche Ebene projicirten Arealgeschwindigkeiten der einzelnen Punkte bezeichnet. Man erhält für diese Annahme:

$$-\Sigma m_\iota\left(x_\iota \frac{dy_\iota}{dt} - y_\iota \frac{dx_\iota}{dt}\right) = k\sqrt{p}.\cos i,$$

$$-\Sigma m_\iota\left(x_\iota \frac{dz_\iota}{dt} - z_\iota \frac{dx_\iota}{dt}\right) = k\sqrt{p}.\cos\Omega \sin i,$$

$$-\Sigma m_\iota\left(y_\iota \frac{dz_\iota}{dt} - z_\iota \frac{dy_\iota}{dt}\right) = k\sqrt{p}.\sin\Omega \sin i,$$

und daher

$$\frac{\partial V}{\partial \Omega} = \Omega' = -k\sqrt{p}.\cos i,$$

$$\frac{\partial V}{\partial w} = w' = -k\sqrt{p},$$

$$\frac{\partial V}{\partial i} = i' = 0.$$

Die letzte Formel zeigt, dass i in V gar nicht vorkommen wird; die beiden erstern geben nach Theorem XII.:

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial . k\sqrt{p}.\cos i}, \qquad \frac{d . k\sqrt{p}.\cos i}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial \Omega},$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial . k\sqrt{p}}, \qquad \frac{d . k\sqrt{p}}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial w},$$

welches die für die elliptische Bewegung gefundenen Formeln sind, die also.

wie wir aus dem Vorstehenden sehen, für alle Probleme der Mechanik gelten, für welche die Flächensätze Statt finden.

Kann man auch noch den Anfangspunkt des Coordinatensystems beliebig ändern, so setze man

$$x_\iota = a + \xi_\iota, \quad y_\iota = b + v_\iota, \quad z_\iota = c + \zeta_\iota;$$

dieselbe Methode, die wir im Vorigen angewendet haben, giebt dann:

$$a' = \frac{\partial V}{\partial a} = \Sigma \frac{\partial V}{\partial x_\iota} = \Sigma m_\iota \frac{dx_\iota}{dt},$$

$$b' = \frac{\partial V}{\partial b} = \Sigma \frac{\partial V}{\partial y_\iota} = \Sigma m_\iota \frac{dy_\iota}{dt},$$

$$c' = \frac{\partial V}{\partial c} = \Sigma \frac{\partial V}{\partial z_\iota} = \Sigma m_\iota \frac{dz_\iota}{dt}.$$

Diese Formeln zeigen, dass der Schwerpunkt des Systems sich mit constanter Geschwindigkeit geradlinig fortbewegt. Die Constanten a', b', c' sind die Componenten dieser Geschwindigkeit, multiplicirt in die Summe der Massen. Giebt man daher den Constanten diese Bedeutung, so erhält man für ihre Störung nach Theorem XII. die ebenfalls von *Poisson* gegebenen Formeln:

$$\frac{da}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial a'}, \quad \frac{da'}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial a},$$

$$\frac{db}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial b'}, \quad \frac{db'}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial b},$$

$$\frac{dc}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial c'}, \quad \frac{dc'}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial c}.$$

In seiner ersten Abhandlung in den Phil. Trans. vom J. 1834. P. II. leitet *Hamilton* ebenfalls die Sätze von der Erhaltung der Flächen und von der Erhaltung des Schwerpunkts aus der Form ab, welche er den Integralgleichungen vermittelst seiner charakteristischen Function V gegeben hat. Das Theorem XII. zeigt aber, wie man durch dieselben Betrachtungen zugleich allgemein die Störungsformeln für die hierbei vorkommenden Elemente erhält. Die hier angewandte Methode empfiehlt sich auch dadurch, dass sie in allen Fällen anwendbar ist, wenn man statt der Bestimmungsstücke der Punkte Ausdrücke mit einer Anzahl willkürlicher Constanten einführen kann von der Art, dass diese Constanten aus der partiellen Differentialgleichung oder, was dasselbe besagen will, aus der Formel für die lebendige Kraft gänzlich herausgehen. In allen diesen Fällen erhält man durch diese Methode vermittelst

Differentiation der charakteristischen Function nach diesen Constanten eine gleiche Zahl Integralgleichungen mit neuen willkürlichen Constanten und hierdurch zu gleicher Zeit nach Theorem XII. die Differentialquotienten der gestörten Werthe dieser Constanten.

§. 41. Ueber den Charakter und die Tragweite der oben aufgestellten Theoreme.

Die Theoreme X—XII. sind gänzlich unabhängig von der Bedeutung, welche darin den Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_m$ gegeben wurde, dass sie in einem Problem der Mechanik die constanten Elemente seien, denn alles, was sich auf ein solches Problem bezieht, ist aus diesen Theoremen herausgegangen. Hiernach geben die Theoreme X—XII. *die allgemeinste Art, wie man ein System Differentialgleichungen, welches die canonische Form hat, durch Einführung anderer Variablen in ein anderes System von der nämlichen Form transformiren kann.*

Die Differentialgleichungen der Bewegung eines freien Systems in der *Lagrange*schen Form:

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z_i}$$

erhalten die canonische Form, wenn man die Ausdrücke

$$m_i \frac{dx_i}{dt}, \quad m_i \frac{dy_i}{dt}, \quad m_i \frac{dz_i}{dt}$$

als $3n$ neue Variable und statt der Function U die Function

$$\tfrac{1}{2} \Sigma m_i \left(\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2 \right) - U = H$$

einführt. Die allgemeineren Gleichungen, welche *Poisson* und *Lagrange* für den Fall erhalten haben, dass man irgend welche andere Bestimmungsstücke der Punkte des Systems statt der rechtwinkligen Coordinaten als Variable einführt, erhalten in der Modification, die ihnen *Hamilton* gegeben hat, ebenfalls die canonische Form. Dieselbe canonische Form der Differentialgleichungen wird, wie *Poisson* und *Lagrange* gezeigt haben, erhalten, wenn man das vorgelegte mechanische Problem als ein Störungsproblem betrachtet, und die einer Zeit $t = 0$ in dem Näherungsproblem entsprechenden Werthe der oben mit q und p bezeichneten Grössen als Variable einführt. Endlich werden auch die bekannten Ausdrücke für die Differentialquotienten der gestörten Elemente der elliptischen Bewegung eines Planeten durch eine leichte Modification, wie wir oben gesehen haben, in die canonische Form gebracht, und das Gleiche gilt für die durch eine beschleunigende Kraft gestörten Rotationselemente eines festen Körpers um einen festen Punkt. Man hatte so mehrere Beispiele, in welchen ein und dasselbe System von Differentialgleichungen, welches die canonische Form hat, auf mannichfaltige Art durch Einführung neuer Variablen wieder in die canonische Form zurückkehrt. Indessen war es wünschenswerth hierfür eine allgemeine Regel und ein allgemeines Verfahren aufzufinden, wie dieses in den Theoremen X.—XII. geschehen ist. Die Formeln für die Variation der Constanten in den Problemen der Mechanik, und zwar in ihrer einfachsten Gestalt, sind hiernach nur ein Fall der Transformation einer canonischen Form in eine andere. Diesen Fall giebt das allgemeine Theorem X. auf folgende Art.

Es seien die Differentialgleichungen eines Problems:

$$\begin{aligned}
\frac{dq_1}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_1}+\frac{\partial H_1}{\partial p_1}, & \frac{dp_1}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_1}-\frac{\partial H_1}{\partial q_1},\\
\frac{dq_2}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_2}+\frac{\partial H_1}{\partial p_2}, & \frac{dp_2}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_2}-\frac{\partial H_1}{\partial q_2},\\
&\cdots\cdots & &\cdots\cdots\\
\frac{dq_m}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_m}+\frac{\partial H_1}{\partial p_m}, & \frac{dp_m}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_m}-\frac{\partial H_1}{\partial q_m},
\end{aligned}$$

in welchen H_1 eine beliebige Function der Grössen q_k, p_k und der Grösse t, H eine Function derselben Grössen q_k, p_k bedeute, die aber nicht t enthält. Setzt man in dem Theorem X. $-(H+H_1)$ für H_1, die Grössen $q_1, q_2, \ldots q_m$, für $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$, die Grössen $p_1, p_2, \ldots p_m$ für $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_m$, ferner $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$, $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_m$ für $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots \alpha'_m$, $\beta'_1, \beta'_2, \ldots \beta'_m$, so erhält man die allgemeinste Transformation der vorgelegten Differentialgleichungen in andere von der nämlichen Form, indem man eine beliebige Function der Grössen $q_1, q_2, \ldots q_m$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ annimmt,

$$\psi(q_1, q_2, \ldots q_m, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m),$$

und die Gleichungen bildet:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\psi}{\partial q_1} &= -p_1, & \frac{\partial\psi}{\partial q_2} &= -p_2, & \ldots\quad \frac{\partial\psi}{\partial q_m} &= -p_m,\\
\frac{\partial\psi}{\partial \alpha_1} &= \beta_1, & \frac{\partial\psi}{\partial \alpha_2} &= \beta_2, & \ldots\quad \frac{\partial\psi}{\partial \alpha_m} &= \beta_m;
\end{aligned}$$

führt man die durch diese Gleichungen bestimmten Variablen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$,

$\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_m$ statt der ursprünglichen Variablen $q_1, q_2, \ldots q_m, p_1, p_2, \ldots p_m$ in die gegebenen Differentialgleichungen ein, so erhalten sie zufolge des Theorems X. wieder dieselbe Form. Man erhält nämlich zufolge dieses Theorems, wenn man $H+H_1$ durch die neuen Variablen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_m$ ausdrückt, die gegebenen Differentialgleichungen in die folgenden transformirt:

$$\frac{d\alpha_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \beta_1} + \frac{\partial H_1}{\partial \beta_1}, \quad \frac{d\beta_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_1},$$
$$\frac{d\alpha_2}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \beta_2} + \frac{\partial H_1}{\partial \beta_2}, \quad \frac{d\beta_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{d\alpha_m}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \beta_m} + \frac{\partial H_1}{\partial \beta_m}, \quad \frac{d\beta_m}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \alpha_m} - \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_m}.$$

Man erhält die Formeln für die Variation der Constanten, wenn man die ganz willkürliche Function ψ so bestimmt, dass vermittelst der Gleichungen

$$\frac{\partial \psi}{\partial q_1} = -p_1, \quad \frac{\partial \psi}{\partial q_2} = -p_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial \psi}{\partial q_m} = -p_m$$

die Function H sich auf eine der Grössen α, z. B. auf α_m reducirt, was immer möglich ist. Vermittelst dieser Gleichungen wird nämlich

$$H = \alpha_m$$

eine partielle Differentialgleichung zwischen ψ und den unabhängigen Variablen $q_1, q_2, \ldots q_m$, in welcher die gesuchte Function ψ nicht selber vorkommt, sondern nur ihre ersten, nach diesen Variablen genommenen partiellen Differentialquotienten, und man wird immer eine solche Function ψ finden können, welche dieser Gleichung

$$H = \alpha_m$$

Genüge leistet und ausser den Grössen $q_1, q_2, \ldots q_m, \alpha_m$ noch $m-1$ andere Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{m-1}$ involvirt, unter welche eine bloss durch Addition mit ψ verbundene nicht mit zu rechnen ist. Hat man eine solche Function ψ gefunden, für welche der Ausdruck

$$\begin{aligned} & H(q_1, q_2, \ldots q_m, p_1, p_2, \ldots p_m) - \alpha_m \\ = & H\left(q_1, q_2, \ldots q_m, -\frac{\partial \psi}{\partial q_1}, -\frac{\partial \psi}{\partial q_2} - \cdots - \frac{\partial \psi}{\partial q_m}\right) - \alpha_m \end{aligned}$$

identisch gleich Null wird, so reduciren sich die transformirten Differentialgleichungen für diese besondere Function auf folgende:

$$\frac{d\alpha_1}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial \beta_1}, \quad \frac{d\beta_1}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial \alpha_1},$$
$$\frac{d\alpha_2}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial \beta_2}, \quad \frac{d\beta_2}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{d\alpha_{m-1}}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial \beta_{m-1}}, \quad \frac{d\beta_{m-1}}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial \alpha_{m-1}},$$
$$\frac{d\alpha_m}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial \beta_m}, \quad \frac{d\beta_m}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial \alpha_m} - 1.$$

Setzt man

$$\alpha_m = h, \quad \beta_m = -(t+\tau),$$

so werden die beiden letzten Gleichungen:

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial \tau}, \quad \frac{d\tau}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial h}.$$

Man erhält dann die nach t genommenen Differentialquotienten aller neuen Variablen durch die partiellen Differentialquotienten der Function H_1 allein ausgedrückt, welche man, wenn H den hauptsächlichsten Theil von $H+H_1$ ausmacht, als Störungsfunction betrachten kann. Setzt man in den vorstehenden Formeln

$$H_1 = 0,$$

so zeigen dieselben, dass die Differentialgleichungen:

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1}, \quad \frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_2}, \quad \ldots \quad \frac{dq_m}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_m},$$
$$\frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \quad \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_2}, \quad \ldots \quad \frac{dp_m}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_m}$$

sich vermittelst der Gleichungen

$$\frac{\partial \psi}{\partial q_1} = -p_1, \quad \frac{\partial \psi}{\partial q_2} = -p_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial \psi}{\partial q_m} = -p_m,$$
$$\frac{\partial \psi}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_{m-1}} = \beta_{m-1},$$
$$\frac{\partial \psi}{\partial h} = -(t+\tau),$$

in welchen $\psi(q_1, q_2, \ldots q_m, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{m-1}, h)$ + Constante eine vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$H(q_1, q_2, \ldots q_m, p_1, p_2, \ldots p_m)$$
$$= H\left(q_1, q_2, \ldots q_m, -\frac{\partial \psi}{\partial q_1}, -\frac{\partial \psi}{\partial q_2} - \cdots - \frac{\partial \psi}{\partial q_m}\right) = h$$

ist, in die Gleichungen

$$\frac{d\alpha_1}{dt} = 0, \quad \frac{d\alpha_2}{dt} = 0, \quad \ldots \quad \frac{d\alpha_{m-1}}{dt} = 0, \quad \frac{dh}{dt} = 0,$$

$$\frac{d\beta_1}{dt} = 0, \quad \frac{d\beta_2}{dt} = 0, \quad \ldots \quad \frac{d\beta_{m-1}}{dt} = 0, \quad \frac{d\tau}{dt} = 0$$

transformiren, oder dass ihre vollständigen Integrale erhalten werden, wenn man in den Gleichungen:

$$\frac{\partial\psi}{\partial q_1} = -p_1, \quad \frac{\partial\psi}{\partial q_2} = -p_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial\psi}{\partial q_m} = -p_m,$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial\psi}{\partial\alpha_2} = \beta_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial\psi}{\partial\alpha_{m-1}} = \beta_{m-1}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial h} = -(t+\tau)$$

die Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{m-1}, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{m-1}, h, \tau$ als willkürliche Constanten betrachtet. Diese Grössen werden aber variabel, wenn man nicht $H_1 = 0$ hat, und sind, wenn man H_1 als Störungsfunction betrachtet, gleichzeitig die gestörten oder veränderlichen Elemente.

Die vorstehenden Betrachtungen zeigen, dass das Theorem X., von dem ich oben einen directen Beweis gegeben habe, sowohl die Zurückführung eines mechanischen Problems, in welchem der Satz von der lebendigen Kraft gilt, auf die vollständige Integration einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung umfasst, als auch die allgemeinsten und einfachsten Formeln für die Variation der Constanten. Ich bemerke auch noch, dass der hier gegebene Beweis der Formeln für die Variation der Constanten sich dadurch von andern unterscheidet, dass man nicht besonders den Satz zu beweisen braucht, dass die in die partiellen Differentialquotienten der Störungsfunction multiplicirten Ausdrücke nicht t explicite enthalten, indem man durch eine directe Transformation der gegebenen Differentialgleichungen Formeln für die Variation der Elemente findet, in welchen die partiellen Differentialquotienten der Störungsfunction nur mit $+1$ oder -1 multiplicirt sind, woraus, wie man weiss, der angeführte Satz für jedes beliebige System von Elementen von selber folgt.

§. 42. Allgemeinste Transformation einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung.

Wir haben oben gesehen, dass die Integration eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen, welches die canonische Form hat, auf die vollständige Integration einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung zurückkommt, in welcher die gesuchte Function nicht selber, sondern nur ihre ersten Differentialquotienten vorkommen. Die allgemeinste Art der Transformation einer canonischen Form in eine andere muss daher zu gleicher Zeit die allgemeinste Transformation einer partiellen Differentialgleichung der erwähnten Art geben. Denn wenn man statt der unbekannten Function und der unabhängigen Variablen eine gleiche Anzahl beliebiger Functionen derselben als neue unbekannte Function und unabhängige Variablen einführt, so giebt dies noch keineswegs die allgemeinste Transformation, indem die allgemeinsten Substitutionen zu gleicher Zeit noch die partiellen Differentialquotienten selber involviren, wie dieses aus nachfolgendem Theorem erhellt, in welchem die gegebene partielle Differentialgleichung auch die unbekannte Function selber auf irgend eine Weise enthalten kann.

Theorem XV.

„Es sei die partielle Differentialgleichung gegeben:

$$F\left(W, x_1, x_2, \ldots x_n, \frac{\partial W}{\partial x_1}, \frac{\partial W}{\partial x_2}, \cdots \frac{\partial W}{\partial x_n}\right) = 0,$$

so erhält man ihre allgemeinste Transformation, wenn man eine neue unbekannte Function Z einführt, welche man einer beliebigen Function von W, x_1, x_2, $\ldots$ x_n und n neuen Grössen t_1, t_2, $\ldots$ t_n gleichsetzt,

$$Z = f(W, x_1, x_2, \ldots x_n, t_1, t_2, \ldots t_n),$$

und aus den $2n+2$ Gleichungen:

$$F = 0, \quad Z = f,$$

$$\frac{\partial f}{\partial W}\frac{\partial W}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial Z}{\partial t_1} = \frac{\partial f}{\partial t_1},$$

$$\frac{\partial f}{\partial W}\frac{\partial W}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial Z}{\partial t_2} = \frac{\partial f}{\partial t_2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial f}{\partial W}\frac{\partial W}{\partial x_n} + \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0, \quad \frac{\partial Z}{\partial t_n} = \frac{\partial f}{\partial t_n},$$

die $2n+1$ Grössen W, x_1, x_2, $\ldots$ x_n, $\frac{\partial W}{\partial x_1}$, $\frac{\partial W}{\partial x_2}$, $\cdots$ $\frac{\partial W}{\partial x_n}$ eliminirt, wonach man eine Gleichung zwischen Z, t_1, t_2, $\ldots$ t_n, $\frac{\partial Z}{\partial t_1}$, $\frac{\partial Z}{\partial t_2}$, $\cdots$ $\frac{\partial Z}{\partial t_n}$ erhält, welches die transformirte partielle Differentialgleichung ist.“

Weniger allgemein ist die in folgendem Theorem enthaltene Transformation.

Theorem XVI.

„*Es sei zwischen W und den n unabhängigen Variablen $x_1, x_2, \ldots x_n$ eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung gegeben, so erhält man eine Transformation derselben, wenn man Z einer beliebigen Function dieser und der n Variablen $t_1, t_2, \ldots t_n$ gleichsetzt,*

$$Z = f(W, x_1, x_2, \ldots x_n, t_1, t_2, \ldots t_n),$$

und ausserdem zwischen den in f enthaltenen Variablen beliebige Relationen annimmt,

$$f_1(W, x_1, x_2, \ldots x_n, t_1, t_2, \ldots t_n) = 0,$$
$$f_2(W, x_1, x_2, \ldots x_n, t_1, t_2, \ldots t_n) = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f_k(W, x_1, x_2, \ldots x_n, t_1, t_2, \ldots t_n) = 0,$$

deren Zahl k aber kleiner als n sein muss: eliminirt man vermittelst dieser $k+1$ Gleichungen und vermittelst der Gleichungen:

$$M\frac{\partial W}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \cdots + \lambda_k\frac{\partial f_k}{\partial x_1} = 0,$$
$$M\frac{\partial W}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \cdots + \lambda_k\frac{\partial f_k}{\partial x_2} = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$M\frac{\partial W}{\partial x_n} + \frac{\partial f}{\partial x_n} + \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x_n} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial x_n} + \cdots + \lambda_k\frac{\partial f_k}{\partial x_n} = 0,$$
$$\frac{\partial Z}{\partial t_1} = \frac{\partial f}{\partial t_1} + \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial t_1} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial t_1} + \cdots + \lambda_k\frac{\partial f_k}{\partial t_1},$$
$$\frac{\partial Z}{\partial t_2} = \frac{\partial f}{\partial t_2} + \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial t_2} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial t_2} + \cdots + \lambda_k\frac{\partial f_k}{\partial t_2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{\partial Z}{\partial t_n} = \frac{\partial f}{\partial t_n} + \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial t_n} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial t_n} + \cdots + \lambda_k\frac{\partial f_k}{d t_n},$$
$$M = \frac{\partial f}{\partial W} + \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial W} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial W} + \cdots + \lambda_k\frac{\partial f_k}{\partial W}$$

die Grossen $W, x_1, x_2, \ldots x_n, \frac{\partial W}{\partial x_1}, \frac{\partial W}{\partial x_2}, \cdots \frac{\partial W}{\partial x_n}, \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$, so verwandelt sich die gegebene Differentialgleichung in eine andere zwischen Z und den unabhängigen Variablen $t_1, t_2, \ldots t_n$.“

Die beiden Theoreme XV., XVI. bedürfen keines Beweises.

Ueber die vollständigen Lösungen einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung.

§. 1. Zusammenhang der vollständigen Lösung einer partiellen Differentialgleichung mit dem System der vollständigen Integralgleichungen eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen.

Wenn eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung die gesuchte Function selbst enthält, so giebt eine vollständige Lösung derselben die vollständigen Integralgleichungen eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen, welche den in der Dynamik auftretenden ähnlich, aber von allgemeinerem Charakter sind. Man hat dann folgendes Theorem:

Es sei

$$S = f(t, q_1, q_2, \ldots q_m, \alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m)$$

eine vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H = 0,$$

wo H eine Function von

$$t, \quad q_1, \quad q_2, \quad \ldots \quad q_m, \quad S, \quad \frac{\partial S}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial S}{\partial q_2}, \quad \ldots \quad \frac{\partial S}{\partial q_m}$$

und α, α_1, α_2, $\ldots$ α_m die willkürlichen Constanten bedeuten: man setze in H für $\frac{\partial S}{\partial q_1}$, $\frac{\partial S}{\partial q_2}$, $\ldots$ $\frac{\partial S}{\partial q_m}$ die Grössen p_1, p_2, $\ldots$ p_m, und bilde die Gleichungen

$$(1.)\quad \left\{\begin{array}{l} S = f(t, q_1, q_2, \ldots q_m, \alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m), \\ \frac{\partial f}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial f}{\partial q_2} = p_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial f}{\partial q_m} = p_m, \\ \frac{\partial f}{\partial \alpha} : \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} : \frac{\partial f}{\partial \alpha_2} : \cdots : \frac{\partial f}{\partial \alpha_m} = \beta : \beta_1 : \beta_2 : \cdots : \beta_m, \end{array}\right.$$

wo β, β_1, β_2, $\ldots$ β_m neue willkürliche Constanten bedeuten: so sind diese Gleichungen die vollständigen Integralgleichungen eines zwischen den Variablen

$$t, \quad q_1, \quad q_2, \quad \ldots \quad q_m, \quad S, \quad p_1, \quad p_2, \quad \ldots \quad p_m$$

Statt findenden Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen:

$$(2.)\quad \begin{cases} \dfrac{dq_1}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_1}, \quad \dfrac{dq_2}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_2}, \quad \dots \quad \dfrac{dq_m}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_m}, \\ \dfrac{dS}{dt} = p_1 \dfrac{\partial H}{\partial p_1} + p_2 \dfrac{\partial H}{\partial p_2} + \dots + p_m \dfrac{\partial H}{\partial p_m} - H, \\ \dfrac{dp_1}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_1} - p_1 \dfrac{\partial H}{\partial S}, \quad \dfrac{dp_2}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_2} - p_2 \dfrac{\partial H}{\partial S}, \quad \dots \quad \dfrac{dp_m}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_m} - p_m \dfrac{\partial H}{\partial S}. \end{cases}$$

Man kann in den Gleichungen (1.) die Proportionen

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} : \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} : \dots : \frac{\partial f}{\partial \alpha_m} = \beta : \beta_1 : \dots : \beta_m$$

durch folgende Gleichungen ersetzen:

$$(3.)\qquad \log \frac{\partial f}{\partial \alpha} = \gamma + T, \quad \log \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} = \gamma_1 + T, \quad \dots \quad \log \frac{\partial f}{\partial \alpha_m} = \gamma_m + T,$$

wo $\gamma = \log \beta$, $\gamma_1 = \log \beta_1$, ... $\gamma_m = \log \beta_m$ ebenfalls willkürliche Constanten bedeuten und

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial S}$$

zu setzen ist.

Der Beweis des vorstehenden Theorems kann folgendermassen geführt werden. Wenn man die Integralgleichungen differentiirt, und nach geschehener Differentiation die Differentialgleichungen (2.) substituirt, so hat man nur zu zeigen, dass die so erhaltenen Gleichungen durch Substitution der aus den Integralgleichungen entnommenen Werthe

$$(4.)\qquad S = f, \quad p_1 = \frac{\partial f}{\partial q_1}, \quad p_2 = \frac{\partial f}{\partial q_2}, \quad \dots \quad p_m = \frac{\partial f}{\partial q_m}$$

identisch werden. Dies folgt aber unmittelbar daraus, dass die Function

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H$$

selbst, mithin auch ihre nach den Grössen

$$q_1, \quad q_2, \quad \dots \quad q_m, \quad \alpha, \quad \alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \dots \quad \alpha_m$$

genommenen partiellen Differentialquotienten identisch gleich Null werden, wenn man in denselben vor den anzustellenden partiellen Differentiationen die nämlichen Werthe (4.) substituirt.

Ich will aber jetzt zeigen, dass, wenn die zu Grunde gelegte Lösung $S = f$ eine vollständige ist, die Gleichungen (1.) auch wirklich ein System *vollständiger* Integralgleichungen bilden können.

Damit die Lösung $S = f$ einer gegebenen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung eine vollständige sei, darf dieselbe keiner andern von den willkürlichen Constanten freien partiellen Differentialgleichung erster Ordnung zwischen denselben Variablen Genüge leisten. Da man aus zwei partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen den Variablen

$$S, \quad t, \quad q_1, \quad q_2, \quad \ldots \quad q_m$$

immer einen partiellen Differentialquotienten, z. B. $\frac{\partial S}{\partial t}$, eliminiren kann, so kann man die aufgestellte Bedingung auch so aussprechen, dass es keine identische Gleichung allein zwischen den Grössen

$$f, \quad \frac{\partial f}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial q_2}, \quad \ldots \quad \frac{\partial f}{\partial q_m}, \quad t, \quad q_1, \quad q_2, \quad \ldots \quad q_m$$

geben darf, oder dass die Ausdrücke

$$f, \quad \frac{\partial f}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial q_2}, \quad \ldots \quad \frac{\partial f}{\partial q_m}$$

als Functionen der willkürlichen Constanten

$$\alpha, \quad \alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots \quad \alpha_m$$

betrachtet, von einander unabhängig sein müssen. Es wird daher, wenn $S = f$ eine vollständige Lösung ist, die aus den Grössen

$$\begin{array}{ccccc}
\frac{\partial f}{\partial \alpha}, & \frac{\partial f}{\partial \alpha_1}, & \frac{\partial f}{\partial \alpha_2}, & \ldots & \frac{\partial f}{\partial \alpha_m}, \\[2mm]
\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial q_1}, & \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha_1 \partial q_1}, & \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha_2 \partial q_1}, & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha_m \partial q_1}, \\[2mm]
\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial q_2}, & \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha_1 \partial q_2}, & \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha_2 \partial q_2}, & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha_m \partial q_2}, \\[2mm]
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\[2mm]
\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial q_m}, & \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha_1 \partial q_m}, & \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha_2 \partial q_m}, & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha_m \partial q_m}
\end{array}$$

gebildete Determinante nicht verschwinden. Setzt man

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = u, \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} = u_1, \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha_2} = u_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha_m} = u_m,$$

so werden die vorstehenden Grössen:

$$\begin{array}{ccccc}
u, & u_1, & u_2, & \ldots & u_m, \\[2mm]
\frac{\partial u}{\partial q_1}, & \frac{\partial u_1}{\partial q_1}, & \frac{\partial u_2}{\partial q_1}, & \ldots & \frac{\partial u_m}{\partial q_1}, \\[2mm]
\frac{\partial u}{\partial q_2}, & \frac{\partial u_1}{\partial q_2}, & \frac{\partial u_2}{\partial q_2}, & \ldots & \frac{\partial u_m}{\partial q_2}, \\[2mm]
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\[2mm]
\frac{\partial u}{\partial q_m}, & \frac{\partial u_1}{\partial q_m}, & \frac{\partial u_2}{\partial q_m}, & \ldots & \frac{\partial u_m}{\partial q_m}.
\end{array}$$

Nach einer von mir in dem Aufsatze „*De binis quibuslibet functionibus homogeneis*" etc. aufgestellten und auf die Transformation der vielfachen Integrale angewandten Satze *) *ist die Determinante der vorstehenden Grössen gleich der in Bezug auf* $q_1, q_2, \dots q_m$ *gebildeten Functionaldeterminante der Grössen*

$$\frac{u_1}{u}, \quad \frac{u_2}{u}, \quad \dots \quad \frac{u_m}{u},$$

multiplicirt mit u^{m+1}. Man hat daher den folgenden Satz:

Theorem I.

Es sei f eine beliebige Function der Grössen

$$q_1, \quad q_2, \quad \dots \quad q_m, \quad \alpha, \quad \alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \dots \quad \alpha_m,$$

so ist die in Bezug auf $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m$ *gebildete Functionaldeterminante der* $m+1$ *Functionen*

$$f, \quad \frac{\partial f}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial q_2}, \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial q_m}$$

gleich der in Bezug auf $q_1, q_2, \dots q_m$ *gebildeten Functionaldeterminante der m Functionen*

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial \alpha_1}}{\frac{\partial f}{\partial \alpha}}, \quad \frac{\frac{\partial f}{\partial \alpha_2}}{\frac{\partial f}{\partial \alpha}}, \quad \dots \quad \frac{\frac{\partial f}{\partial \alpha_m}}{\frac{\partial f}{\partial \alpha}},$$

multiplicirt mit $\left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right)^{m+1}$.

Aus dem vorstehenden Theorem ergiebt sich das folgende

Theorem II.

Es sei $S = f$ *eine vollständige Lösung einer zwischen der Function S und* $m+1$ *unabhängigen Variablen gegebenen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung; es seien ferner die in f enthaltenen willkürlichen Constanten*

$$\alpha, \quad \alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \dots \quad \alpha_m:$$

so sind die n Quotienten

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial \alpha_1}}{\frac{\partial f}{\partial \alpha}}, \quad \frac{\frac{\partial f}{\partial \alpha_2}}{\frac{\partial f}{\partial \alpha}}, \quad \dots \quad \frac{\frac{\partial f}{\partial \alpha_m}}{\frac{\partial f}{\partial \alpha}}$$

*) *Crelles* Journal, Bd. XII, p. 40.

in Bezug auf je m der $m+1$ Variablen von einander unabhängige Functionen, oder es giebt zwischen diesen Quotienten, einer der $m+1$ Variablen und den willkürlichen Constanten keine identische Gleichung.

Daraus, dass zufolge der Definition einer vollständigen Lösung die Functionen

$$f, \quad \frac{\partial f}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial q_2}, \quad \ldots \quad \frac{\partial f}{\partial q_m}$$

in Bezug auf α, α_1, α_2, ... α_m von einander unabhängig sind, folgt, dass man aus den Gleichungen (1.) die willkürlichen Constanten

$$\alpha, \quad \alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots \quad \alpha_m, \quad \frac{\beta_1}{\beta}, \quad \frac{\beta_2}{\beta}, \quad \ldots \quad \frac{\beta_m}{\beta}$$

durch die Variablen

$$S, \quad q_1, \quad q_2, \quad \ldots \quad q_m, \quad p_1, \quad p_2, \quad \ldots \quad p_m$$

ausgedrückt erhalten kann. Aus dem Theorem II. ergiebt sich aber ferner, dass man, wenn $S = f$ eine vollständige Lösung ist, aus den Gleichungen (1.) immer auch die Grössen

$$S, \quad t, \quad q_1, \quad q_2, \quad \ldots \quad q_m, \quad p_1, \quad p_2, \quad \ldots \quad p_m$$

durch t und die angegebenen willkürlichen Constanten erhalten kann. Wenn daher $S = f$ eine vollständige Lösung ist, so erfüllen die Gleichungen (1.) die Bedingungen, welche im Allgemeinen zu einem System vollständiger Integralgleichungen erforderlich sind. Ist aber diesen allgemeinen Bedingungen genügt, so zeigt der im Vorigen angedeutete Beweis, dass, wenn die partielle Differentialgleichung, deren vollständige Lösung $S = f$ ist, die Gleichung

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H = 0$$

ist, durch die Gleichungen (1.) das System der gewöhnlichen Differentialgleichungen (2.) vollständig integrirt wird.

§. 2. Von den überzähligen willkürlichen Constanten.

Bei Aufsuchung einer vollständigen Lösung einer partiellen Differentialgleichung ereignet es sich bisweilen, dass durch den naturgemässen Gang der Betrachtung eine grössere Zahl willkürlicher Constanten in die Lösung eingeführt wird, als zu einer vollständigen Lösung erfordert wird. Es kann in solchen Fällen die Symmetrie zerstört werden, wenn man einige derselben, wie es verstattet ist, gleich Null setzt, und es daher rathsam sein, sämmtliche willkürliche Constanten in der Lösung beizubehalten. Die Function S enthält dann, wenn wir uns auf den Fall der Dynamik beschränken, in welchem S in der partiellen Differentialgleichung nicht vorkommt, und wenn wir von der additiven Constante abstrahiren, mehr als m willkürliche Constanten, die ich mit

$$\alpha_1,\quad \alpha_2,\quad \dots\quad \alpha_k$$

bezeichnen will, wo $k > m$. Es wird hierbei vorausgesetzt, dass diese willkürlichen Constanten sich in der Function S nicht auf eine kleinere Anzahl bringen lassen, indem man gewisse Functionen von ihnen als die willkürlichen Constanten einführt.

Um den hier betrachteten Fall auf den früheren zurückzuführen, wo die Function S gerade die gehörige Anzahl von m willkürlichen Constanten enthält, kann man sich vorstellen, dass beliebige m von den Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_k$ diese m willkürlichen Constanten, die übrigen $k-m$ aber *beliebige particulare Constanten* sind. Man kann hierdurch sämmtliche im Vorigen gefundene Resultate auf den Fall anwenden, wo die Lösung S *überzählige willkürliche Constanten enthält.*

Es folgt hieraus zunächst, dass die Gleichungen

$$(1.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial q_1} = p_1, & \dfrac{\partial S}{\partial q_2} = p_2, & \dots & \dfrac{\partial S}{\partial q_m} = p_m, \\[2ex] \dfrac{\partial S}{\partial \alpha_1} = \beta_1, & \dfrac{\partial S}{\partial \alpha_2} = \beta_2, & \dots & \dfrac{\partial S}{\partial \alpha_k} = \beta_k \end{cases}$$

wiederum Integralgleichungen des Systems der dynamischen Gleichungen sein werden, und dass, wenn man von den letztern k eine Zahl m beliebig auswählt, diese mit den erstern m zusammen als das ganze System der vollständigen dynamischen Integralgleichungen angesehen werden können. Die übrigen $k-m$ Gleichungen müssen daher aus ihnen folgen. Wenn diese Gleichungen aber auch nichts Neues ergeben, so können sie doch bemerkenswerthe Combinationen der übrigen sein, zu welchen man auf diese Weise durch die überzähligen Constanten gelangt.

Aus dem Vorhergehenden folgt, dass die Constanten $\beta_1, \beta_2, \dots \beta_k$ nicht alle willkürlich sein können, sondern dass $k-m$ unter ihnen von den übrigen und von den Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_k$ abhängen, und eben so muss eine Zahl $k-m$ von den Functionen

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_1},\quad \frac{\partial S}{\partial \alpha_2},\quad \dots\quad \frac{\partial S}{\partial \alpha_k}$$

durch die übrigen und die Constanten α_1, α_2, ... α_k bestimmt werden können. Dies ergiebt sich auch durch die folgenden Betrachtungen.

Zwischen den Functionen

$$\frac{\partial S}{\partial t}, \quad \frac{\partial S}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial S}{\partial q_2}, \quad \dots \quad \frac{\partial S}{\partial q_m}$$

und den Grössen t, q_1, q_2, ... q_m giebt es eine von allen willkürlichen Constanten freie Gleichung, die gegebene partielle Differentialgleichung. Wenn daher diese Functionen willkürliche Constanten α_1, α_2, ... α_{m+1} enthalten, so sind sie, als Functionen von diesen betrachtet, nicht von einander unabhängig, und es verschwindet daher ihre in Bezug auf α_1, α_2, ... α_{m+1} gebildete Functionaldeterminante. Aber diese ist dieselbe, wie die in Bezug auf t, q_1, q_2, ... q_m gebildete Functionaldeterminante der Functionen

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_1}, \quad \frac{\partial S}{\partial \alpha_2}, \quad \dots \quad \frac{\partial S}{\partial \alpha_{m+1}},$$

und ihr Verschwinden lehrt, dass es auch zwischen den letzteren Functionen eine von den Grössen t, q_1, q_2, ... q_m unabhängige Gleichung giebt, welche nur noch die Grössen α_1, α_2, ... α_{m+1} enthält. Dies aber giebt den zu beweisenden Satz, wenn man nach und nach α_{m+1}, α_{m+2}, ... α_k für α_{m+1} setzt, oder allgemeiner für α_1, α_2, ... α_{m+1} beliebige $m+1$ von den Grössen α_1, α_2, ... α_k nimmt.

Ich bemerke ferner, dass es zwischen den Grössen

$$t, \; q_1, \; q_2, \; \dots \; q_m, \; \alpha_1, \; \alpha_2, \; \dots \; \alpha_k$$

keine Relation giebt, sondern dass, wenn man auf eine Gleichung zwischen diesen Grössen kommt, dieselbe identisch sein muss.

In meiner Abhandlung „Dilucidationes de aequationum vulgarium systematis etc." *) habe ich die Folgerungen, welche sich aus dem Vorkommen überzähliger willkürlicher Constanten in den Integralgleichungen ziehen lassen, ausführlich und, wie ich glaube, zuerst untersucht, indem ich in dieser Abhandlung alle allgemeinen Betrachtungen über die Natur eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen und ihrer Integralgleichungen zusammenstellen wollte, durch welche die Darstellung der von mir in Bezug auf die dynamischen Differentialgleichungen gefundenen Resultate an Klarheit gewinnen kann. Man habe im Allgemeinen eine Anzahl zu einem System vollständiger

---

*) *Crelles* Journal. Bd. XXIII.

Integralgleichungen gehöriger Gleichungen

$$(2.)\qquad u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad \ldots \quad u_m = 0,$$

aus denen man durch Differentiation und Substitution der gegebenen Differentialgleichungen keine neue Gleichung erhalten kann, die sich nicht aus ihnen von selbst ergiebt. Enthalten die Gleichungen (2.) mehr als m willkürliche Constanten

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots \quad \alpha_m, \quad \alpha_{m+1}, \quad \ldots \quad \alpha_k,$$

so kann man beliebige $k-m$ derselben als überzählige betrachten. Löst man die Gleichungen (2.) nach $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ auf, und erhält dadurch die Gleichungen

$$(3.)\qquad v_1 = \alpha_1, \quad v_2 = \alpha_2, \quad \ldots \quad v_m = \alpha_m,$$

so enthalten die Functionen $v_1, v_2, \ldots v_m$ bloss die überzähligen willkürlichen Constanten

$$\alpha_{m+1}, \quad \alpha_{m+2}, \quad \ldots \quad \alpha_k.$$

Durch Substitution der gegebenen Differentialgleichungen müssen die Gleichungen

$$dv_1 = 0, \quad dv_2 = 0, \quad \ldots \quad dv_m = 0,$$

welche aus (3.) durch Differentiation hervorgehen, identisch werden, weil man sonst aus (2.) gegen die Annahme durch Differentiation und Substitution der gegebenen Differentialgleichungen neue Integralgleichungen ableiten könnte, welche nicht in (2.) enthalten sind. Differentiirt man die Functionen v_1, $v_2, \ldots v_m$ beliebig oft hinter einander und setzt für jede derselben

$$\frac{\partial^{i_1+i_2+\cdots+i_{k-m}} v}{\partial\alpha_{m+1}^{i_1}\partial\alpha_{m+2}^{i_2}\ldots\partial\alpha_k^{i_{k-m}}} = v^{i_1, i_2, \ldots i_{k-m}},$$

so folgt aus dem Umstande, dass die Gleichungen

$$dv_1 = 0, \quad dv_2 = 0, \quad \ldots \quad dv_m = 0$$

durch Substitution der gegebenen Differentialgleichungen identisch werden, auch, dass die Gleichungen

$$dv_1^{i_1, i_2, \ldots i_{k-m}} = 0, \quad dv_2^{i_1, i_2, \ldots i_{k-m}} = 0, \quad \ldots \quad dv_m^{i_1, i_2, \ldots i_{k-m}} = 0$$

durch die Substitution der gegebenen Differentialgleichungen identisch werden, weil in den zu substituirenden Differentialgleichungen die Grössen α_{m+1}, $\alpha_{m+2}, \ldots \alpha_k$ nicht vorkommen. *Wenn daher die Functionen $v_1, v_2, \ldots v_m$ überzählige willkürliche Constanten $\alpha_{m+1}, \alpha_{m+2}, \ldots \alpha_k$ enthalten, so werden* *nicht bloss diese Functionen selbst, sondern auch alle ihre beliebige Male hintereinander nach α_{m+1}, α_{m+2}, ... α_k genommenen partiellen Differentialquotienten Constanten gleich.*

Da die Gleichungen (3.) durch Auflösung aus den Gleichungen (2.) erhalten worden sind, so müssen die Gleichungen (2.) identisch werden, wenn man in ihnen für die Constanten α_1, α_2, ... α_m die ihnen gleichen Functionen v_1, v_2, ... v_m setzt. Man muss daher auch identische Gleichungen erhalten, wenn man nach dieser Substitution die Gleichungen (2.),

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad \dots \quad u_m = 0,$$

in Bezug auf die überzähligen Constanten α_{m+1}, α_{m+2}, ... α_k differentiirt. Um die hierdurch entstehenden Gleichungen zu bilden, hat man lineare Ausdrücke aus den nach den Constanten α_1, α_2, ... α_k genommenen partiellen Differentialquotienten der Functionen u_1, u_2, ... u_m mit Grössen zu multipliciren, welche aus den nach α_{m+1}, α_{m+2}, ... α_k genommenen partiellen Differentialquotienten der Functionen v_1, v_2, ... v_m zusammengesetzt sind. Da aber diese, so wie die Functionen v_1, v_2, ... v_m, Constanten gleich sind, *so erhält man aus jeder zu einem Systeme vollständiger Integralgleichungen gehörigen Gleichung $u = 0$, welche überzählige willkürliche Constanten enthält, andere $U = 0$, in welchen U eine lineare Function der nach den willkürlichen Constanten genommenen partiellen Differentialquotienten gleich hoher Ordnung ist, und die Coefficienten dieser linearen Functionen Constanten sind.*

Man erhält auf diese Weise aus den Gleichungen

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad \dots \quad u_m = 0,$$

wenn man bloss einmal nach α_{m+1} differentiirt, die folgenden:

$$(4.)\quad \begin{cases} \gamma_1 \dfrac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \gamma_2 \dfrac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} + \cdots + \gamma_m \dfrac{\partial u_1}{\partial \alpha_m} + \dfrac{\partial u_1}{\partial \alpha_{m+1}} = 0, \\ \gamma_1 \dfrac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} + \gamma_2 \dfrac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + \cdots + \gamma_m \dfrac{\partial u_2}{\partial \alpha_m} + \dfrac{\partial u_2}{\partial \alpha_{m+1}} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \gamma_1 \dfrac{\partial u_m}{\partial \alpha_1} + \gamma_2 \dfrac{\partial u_m}{\partial \alpha_2} + \cdots + \gamma_m \dfrac{\partial u_m}{\partial \alpha_m} + \dfrac{\partial u_m}{\partial \alpha_{m+1}} = 0. \end{cases}$$

Hier sind γ_1, γ_2, ... γ_m die Constanten, welchen respective die Functionen

$$\frac{\partial v_1}{\partial \alpha_{m+1}}, \quad \frac{\partial v_2}{\partial \alpha_{m+1}}, \quad \dots \quad \frac{\partial v_m}{\partial \alpha_{m+1}}$$

gleich werden. Wenn eine von den Gleichungen (4.) keine identische ist, so können auch zufolge der bekannten Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung in einer der Gleichungen (2.) die willkürlichen Constanten auf eine kleinere Anzahl gebracht werden.

Differentiirt man zweimal hinter einander nach derselben Constante α_{m+1}, so erhält man aus jeder der Gleichungen (2.), $u=0$, die Gleichung

$$0 = \varepsilon_1 \frac{\partial u}{\partial \alpha_1} + \varepsilon_2 \frac{\partial u}{\partial \alpha_2} + \cdots + \varepsilon_m \frac{\partial u}{\partial \alpha_m}$$
$$+\gamma_1\gamma_1 \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_1} + 2\gamma_1\gamma_2 \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} + \cdots + 2\gamma_m \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_m \partial \alpha_{m+1}} + \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_{m+1} \partial \alpha_{m+1}},$$

wo ε_1, ε_2, ... die constanten Werthe der Functionen

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha_{m+1} \partial \alpha_{m+1}}, \quad \frac{\partial^2 v_2}{\partial \alpha_{m+1} \partial \alpha_{m+1}}, \quad \text{etc.}$$

sind. Differentiirt man zweimal hinter einander nach verschiedenen Constanten, einmal nach α_{m+1} und dann nach α_{m+2}, so erhält man aus $u=0$ die Gleichung

$$0 = \zeta_1 \frac{\partial u}{\partial \alpha_1} + \zeta_2 \frac{\partial u}{\partial \alpha_2} + \cdots + \zeta_m \frac{\partial u}{\partial \alpha_m}$$
$$+\gamma_1\gamma_1' \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_1} + (\gamma_1\gamma_2' + \gamma_2\gamma_1') \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} + \cdots + \gamma_m' \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_m \partial \alpha_{m+1}}$$
$$+\gamma_m \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_m \partial \alpha_{m+2}} + \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_{m+1} \partial \alpha_{m+2}},$$

wo ζ_1, ζ_2, ... ζ_m, γ_1', γ_2', ... γ_m' respective die constanten Werthe der Functionen

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha_{m+1} \partial \alpha_{m+2}}, \quad \frac{\partial^2 v_2}{\partial \alpha_{m+1} \partial \alpha_{m+2}}, \quad \ldots \quad \frac{\partial^2 v_m}{\partial \alpha_{m+1} \partial \alpha_{m+2}}, \quad \frac{\partial v_1}{\partial \alpha_{m+2}}, \quad \frac{\partial v_2}{\partial \alpha_{m+2}}, \quad \ldots \quad \frac{\partial v_m}{\partial \alpha_{m+2}}$$

bedeuten. Diese durch Differentiation nach den willkürlichen Constanten abgeleiteten Gleichungen können entweder neue Integralgleichungen sein, oder sich aus den Gleichungen (2.) ergeben.

Die Werthe der Constanten γ_1, γ_2, ... lassen sich im Allgemeinen nicht angeben, sondern müssen nach der besondern Natur der Gleichungen (2.) und der gegebenen Differentialgleichungen jedesmal bestimmt werden. Nur in einem besondern Falle habe ich ihre allgemeinen Werthe angegeben. Sind nämlich die zwischen den $n+1$ Variablen x_1, x_2, ... x_n gegebenen Differentialgleichungen:

$$dx : dx_1 : dx_2 : \ldots : dx_n = X : X_1 : X_2 : \ldots : X_n,$$

und nimmt man an, dass für $x = x^0$ gleichzeitig

$$x_1 = x_1^0, \quad x_2 = x_2^0, \quad \ldots \quad x_n = x_n^0,$$

so kann man in den vollständigen Integralgleichungen die Constanten x^0, x_1^0, x_2^0, ... x_n^0 für die willkürlichen Constanten annehmen, von denen eine *überzählig* sein wird. Hat man eine dieser Integralgleichungen, $u=0$, welche diese willkürlichen Constanten sämmtlich enthält, oder jedenfalls eine mehr als die gesammte Zahl der Gleichungen beträgt, die man aus $u=0$ durch Differentiation und Substitution der gegebenen Differentialgleichungen ableiten kann, so differentiire man diese Gleichung einige Male hinter einander so, als wären nur die Grössen x^0, x_1^0, ... variabel, die Grössen x, x_1, ... dagegen constant, und als hätte man die Differentialgleichungen

$$dx^0 : dx_1^0 : \ldots : dx_n^0 \; = \; X^0 : X_1^0 : \ldots : X_n^0,$$

wo X^0, X_1^0, ... die Werthe von X, X_1, ... für $x=x^0$, $x_1=x_1^0$, ... bedeuten. Wenn man nach jeder Differentiation durch diese Gleichungen die Differentiale dx^0, dx_1^0, ... eliminirt, so erhält man immer durch dieses Verfahren wieder Integralgleichungen. Die erste und einfachste derselben ist

$$X^0\frac{\partial u}{\partial x^0}+X_1^0\frac{\partial u}{\partial x_1^0}+X_2^0\frac{\partial u}{\partial x_2^0}+\cdots+X_n^0\frac{\partial u}{\partial x_n^0} \; = \; 0,$$

welche, wie man sieht, die Form der Gleichungen (4.) hat.

§. 3. Anwendung der vorigen Betrachtungen auf das aus einer vollständigen Lösung mit überzähligen Constanten entspringende System der dynamischen Integralgleichungen.

Diese in der angeführten Abhandlung ausführlicher auseinander gesetzten Betrachtungen will ich jetzt auf den Fall anwenden, wo die zur Bildung der Integralgleichungen gebrauchte vollständige Lösung S die willkürlichen Constanten α_1, α_2, ... α_k enthält, von denen $k-m$ überzählige sind. Die Anzahl dieser überzähligen willkürlichen Constanten kann auch unendlich gross sein.

Die Integralgleichungen

$$(1.) \qquad p_1=\frac{\partial S}{\partial q_1}, \quad p_2=\frac{\partial S}{\partial q_2}, \quad \ldots \quad p_m=\frac{\partial S}{\partial q_m}$$

sind solche, aus denen durch Differentiation und Substitution der gegebenen Differentialgleichungen keine nicht in ihnen enthaltene abgeleitet werden kann. Es ergeben sich daher durch die Formeln (4.) des vorigen §. aus diesen die neuen Integralgleichungen:

$$(2.)\quad \begin{cases} 0 = \gamma_1 \frac{\partial p_1}{\partial \alpha_1} + \gamma_2 \frac{\partial p_1}{\partial \alpha_2} + \cdots + \gamma_m \frac{\partial p_1}{\partial \alpha_m} + \frac{\partial p_1}{\partial \alpha_{m+1}}, \\ 0 = \gamma_1 \frac{\partial p_2}{\partial \alpha_1} + \gamma_2 \frac{\partial p_2}{\partial \alpha_2} + \cdots + \gamma_m \frac{\partial p_2}{\partial \alpha_m} + \frac{\partial p_2}{\partial \alpha_{m+1}}, \\ \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot \\ 0 = \gamma_1 \frac{\partial p_m}{\partial \alpha_1} + \gamma_2 \frac{\partial p_m}{\partial \alpha_2} + \cdots + \gamma_m \frac{\partial p_m}{\partial \alpha_m} + \frac{\partial p_m}{\partial \alpha_{m+1}}, \end{cases}$$

wo der Kürze wegen $p_1, p_2, \ldots p_m$ für $\frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \cdots \frac{\partial S}{\partial q_m}$ gesetzt ist. Erhält man durch Auflösung der Gleichungen (1.) nach den Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ die Gleichungen

$$\alpha_1 = A_1, \quad \alpha_2 = A_2, \quad \ldots \quad \alpha_m = A_m,$$

so sind $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_m$ zufolge der im vorigen §. mitgetheilten Sätze diejenigen Werthe, welchen die Functionen

$$\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_{m+1}}, \quad \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_{m+1}}, \quad \ldots \quad \frac{\partial A_m}{\partial \alpha_{m+1}}$$

gleich werden müssen. Substituirt man für $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_m$ diese Functionen, so werden die Gleichungen (2.) identisch.

Man kann aber zu den Gleichungen (1.) auch noch die anderen Integralgleichungen

$$(3.)\quad \beta_1 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_1}, \quad \beta_2 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_2}, \quad \ldots \quad \beta_k = \frac{\partial S}{\partial \alpha_k}$$

hinzunehmen, und erhält dann folgendes System von Integralgleichungen:

$$(4.)\quad \begin{cases} \delta_1 = \gamma_1 \frac{\partial \beta_1}{\partial \alpha_1} + \gamma_2 \frac{\partial \beta_1}{\partial \alpha_2} + \cdots + \gamma_m \frac{\partial \beta_1}{\partial \alpha_m} + \frac{\partial \beta_1}{\partial \alpha_{m+1}}, \\ \delta_2 = \gamma_1 \frac{\partial \beta_2}{\partial \alpha_1} + \gamma_2 \frac{\partial \beta_2}{\partial \alpha_2} + \cdots + \gamma_m \frac{\partial \beta_2}{\partial \alpha_m} + \frac{\partial \beta_2}{\partial \alpha_{m+1}}, \\ \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot \\ \delta_k = \gamma_1 \frac{\partial \beta_k}{\partial \alpha_1} + \gamma_2 \frac{\partial \beta_k}{\partial \alpha_2} + \cdots + \gamma_m \frac{\partial \beta_k}{\partial \alpha_m} + \frac{\partial \beta_k}{\partial \alpha_{m+1}}, \end{cases}$$

wo die Grössen $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_k$ der Kürze halber für die Functionen $\frac{\partial S}{\partial \alpha_1}$, $\frac{\partial S}{\partial \alpha_2}, \cdots \frac{\partial S}{\partial \alpha_k}$ gesetzt sind. Erhält man durch Substitution der Werthe

$$\alpha_1 = A_1, \quad \alpha_2 = A_2, \quad \ldots \quad \alpha_m = A_m$$

in die Gleichungen (3.) die Gleichungen

$$\beta_1 = B_1, \quad \beta_2 = B_2, \quad \ldots \quad \beta_k = B_k,$$

so werden $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_k$ die constanten Werthe, welchen nach den im vorigen §.

angestellten Betrachtungen die Functionen

$$\frac{\partial B_1}{\partial \alpha_{m+1}},\quad \frac{\partial B_2}{\partial \alpha_{m+1}},\quad \ldots \quad \frac{\partial B_k}{\partial \alpha_{m+1}}$$

gleich werden. Die Gleichungen (4.) werden identisch wenn man in denselben für $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_m, \delta_1, \delta_2, \ldots \delta_k$ die aequivalenten Ausdrücke

$$(5.)\quad \begin{cases} \gamma_1 = \dfrac{\partial A_1}{\partial \alpha_{m+1}}, & \gamma_2 = \dfrac{\partial A_2}{\partial \alpha_{m+1}}, \quad \ldots \quad \gamma_m = \dfrac{\partial A_m}{\partial \alpha_{m+1}}, \\ \delta_1 = \dfrac{\partial B_1}{\partial \alpha_{m+1}}, & \delta_2 = \dfrac{\partial B_2}{\partial \alpha_{m+1}}, \quad \ldots \quad \delta_k = \dfrac{\partial B_k}{\partial \alpha_{m+1}} \end{cases}$$

substituirt. Die Werthe, welche die Constanten

$$\gamma_1,\quad \gamma_2,\quad \ldots \quad \gamma_m,\quad \delta_1,\quad \delta_2,\quad \ldots \quad \delta_k$$

in den Integralgleichungen (2.) und (4.) oder in den Integralgleichungen (5.) annehmen, sind Functionen der Constanten

$$\alpha_1,\quad \alpha_2,\quad \ldots \quad \alpha_k,\quad \beta_1,\quad \beta_2,\quad \ldots \quad \beta_k.$$

Man erhält diese Functionen, wenn man in (5.) die Werthe von $q_1, q_2, \ldots q_m$ durch t und die willkürlichen Constanten

$$\alpha_1,\quad \alpha_2,\quad \ldots \quad \alpha_k,\quad \beta_1,\quad \beta_2,\quad \ldots \quad \beta_m$$

ausgedrückt substituirt, nach welcher Substitution die Variable t aus den Ausdrücken rechts vom Gleichheitszeichen ganz herausgehen muss. Man kann daher in (5.) auch $t = 0$ setzen, und für $q_1, q_2, \ldots q_m$ gleichzeitig die Functionen der willkürlichen Constanten substituiren, welche ihren Anfangswerthen gleich sind. Aehnliche Formeln, wie die vorstehenden, erhält man in Bezug auf jede der übrigen überzähligen willkürlichen Constanten $\alpha_{m+2}, \alpha_{m+3}, \ldots \alpha_k$.

Die Gleichungen (2.) und (4.) kann man auch folgendermassen schreiben:

$$(6.)\quad \begin{cases} 0 = \gamma_1 \dfrac{\partial \beta_1}{\partial q_1} + \gamma_2 \dfrac{\partial \beta_2}{\partial q_1} + \cdots + \gamma_m \dfrac{\partial \beta_m}{\partial q_1} + \dfrac{\partial \beta_{m+1}}{\partial q_1}, \\ 0 = \gamma_1 \dfrac{\partial \beta_1}{\partial q_2} + \gamma_2 \dfrac{\partial \beta_2}{\partial q_2} + \cdots + \gamma_m \dfrac{\partial \beta_m}{\partial q_2} + \dfrac{\partial \beta_{m+1}}{\partial q_2}, \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ 0 = \gamma_1 \dfrac{\partial \beta_1}{\partial q_m} + \gamma_2 \dfrac{\partial \beta_2}{\partial q_m} + \cdots + \gamma_m \dfrac{\partial \beta_m}{\partial q_m} + \dfrac{\partial \beta_{m+1}}{\partial q_m}, \\ \delta_1 = \gamma_1 \dfrac{\partial \beta_1}{\partial \alpha_1} + \gamma_2 \dfrac{\partial \beta_2}{\partial \alpha_1} + \cdots + \gamma_m \dfrac{\partial \beta_m}{\partial \alpha_1} + \dfrac{\partial \beta_{m+1}}{\partial \alpha_1}, \\ \delta_2 = \gamma_1 \dfrac{\partial \beta_1}{\partial \alpha_2} + \gamma_2 \dfrac{\partial \beta_2}{\partial \alpha_2} + \cdots + \gamma_m \dfrac{\partial \beta_m}{\partial \alpha_2} + \dfrac{\partial \beta_{m+1}}{\partial \alpha_2}, \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ \delta_k = \gamma_1 \dfrac{\partial \beta_1}{\partial \alpha_k} + \gamma_2 \dfrac{\partial \beta_2}{\partial \alpha_k} + \cdots + \gamma_m \dfrac{\partial \beta_m}{\partial \alpha_k} + \dfrac{\partial \beta_{m+1}}{\partial \alpha_k}, \end{cases}$$

wo die Grössen $\beta_1, \beta_2, \ldots$ immer die Functionen (3.) bedeuten. Es ist aber β_{m+1} einer Function der Grössen

$$\beta_1, \quad \beta_2, \quad \ldots \quad \beta_m, \quad \alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots \quad \alpha_k$$

gleich, welche ausser diesen Grössen keine der Variablen enthält, wie wir oben gesehen haben. Substituirt man diese Function für β_{m+1}, so zeigen die Gleichungen (6.), *dass die Constanten* $-\gamma_1, -\gamma_2, \ldots -\gamma_m$ *den partiellen Differentialquotienten von* β_{m+1}, *nach* $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_m$ *genommen, die Constanten* $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_k$ *den partiellen Differentialquotienten von* β_{m+1}, *nach* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k$ *genommen, gleich werden, oder dass man die Gleichungen hat:*

$$\begin{array}{ll}
\gamma_1 = \dfrac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha_{m+1}} = -\dfrac{\partial \beta_{m+1}}{\partial \beta_1}, & \delta_1 = \dfrac{\partial \beta_1}{\partial \alpha_{m+1}} = \dfrac{\partial \beta_{m+1}}{\partial \alpha_1}, \\
\gamma_2 = \dfrac{\partial \alpha_2}{\partial \alpha_{m+1}} = -\dfrac{\partial \beta_{m+1}}{\partial \beta_2}, & \delta_2 = \dfrac{\partial \beta_2}{\partial \alpha_{m+1}} = \dfrac{\partial \beta_{m+1}}{\partial \alpha_2}, \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
\gamma_m = \dfrac{\partial \alpha_m}{\partial \alpha_{m+1}} = -\dfrac{\partial \beta_{m+1}}{\partial \beta_m}, & \delta_k = \dfrac{\partial \beta_k}{\partial \alpha_{m+1}} = \dfrac{\partial \beta_{m+1}}{\partial \alpha_k},
\end{array}$$

wo in jeder Gleichung in den partiellen Differentialquotienten links die Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_k$ *als Functionen der Variablen und der überzähligen Constanten* $\alpha_{m+1}, \alpha_{m+2}, \ldots \alpha_k$ *betrachtet werden, in den partiellen Differentialquotienten rechts dagegen die Grösse* β_{m+1} *als Function der Constanten* $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_m, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k$. Es folgt hieraus von selbst, dass die Grössen $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \delta_1, \delta_2, \ldots$ constante Werthe haben.

Man sieht aus der vorstehenden Untersuchung, dass der in den Formeln (4.) des vorigen §. enthaltene allgemeine Satz für den besonderen hier betrachteten Fall sich unmittelbar daraus ergiebt, dass in demselben die Constanten $\beta_{m+1}, \beta_{m+2}, \ldots \beta_k$ Functionen der willkürlichen Constanten

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots \quad \alpha_k, \quad \beta_1, \quad \beta_2, \quad \ldots \quad \beta_m$$

sind. Die complicirteren Formeln, welche sich durch *wiederholte* Differentiation nach den überzähligen Constanten ergeben, übergehe ich, da auch diese Formeln sich für den hier betrachteten Fall daraus ableiten lassen, dass die Constanten $\beta_{m+1}, \beta_{m+2}, \ldots \beta_k$ Functionen der übrigen sind.

§. 4. Wie man aus einer beliebigen vollständigen Lösung einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung alle ihre übrigen Lösungen ableitet.

Lagrange hat gezeigt, wie man aus jeder vollständigen Lösung einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung *allgemeinere* ableiten kann. Es gehört diese wichtige Untersuchung zu seinen frühesten Arbeiten über die partiellen Differentialgleichungen. Aber zur Vollständigkeit seiner Theorie gehört der Nachweis, welchen er nicht gegeben hat, dass die von ihm eingeführten allgemeinen Formen wirklich alle Lösungen umfassen, oder dass die *willkürlichen Functionen*, welche sie enthalten, immer so bestimmt werden können, dass eine gegebene Lösung erhalten wird. Es scheint ferner die Natur der verschiedenen allgemeinen Formen nicht in das rechte Licht gesetzt worden zu sein. Ich werde im Folgenden eine neue Darstellung dieses Gegenstandes zu geben versuchen.

Es sei eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung gegeben, in welcher wieder die gesuchte Function S heisse, und die Grössen

$$t,\quad q_1,\quad q_2,\quad \dots\quad q_m$$

die unabhängigen Variablen seien. Man kenne irgend eine vollständige Lösung dieser partiellen Differentialgleichung mit den willkürlichen Constanten $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m$,

$$S = f(t, q_1, q_2, \dots q_m, \alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m).$$

Setzt man in f für $\alpha, \alpha_1, \dots \alpha_{i-1}$ beliebige Functionen der übrigen α_i, $\alpha_{i+1}, \dots \alpha_m$, und nimmt nach dieser Substitution die partiellen Differentialquotienten von f, so will ich der Unterscheidung wegen dieselben in Klammern einschliessen, so dass also z. B.

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \alpha_i}\right) = \frac{\partial f}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial f}{\partial \alpha_1}\frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha_i} + \dots + \frac{\partial f}{\partial \alpha_{i-1}}\frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial f}{\partial \alpha_i},$$

ferner, da die Functionen von $\alpha_i, \alpha_{i+1}, \dots \alpha_m$, welche man für $\alpha, \alpha_1, \dots \alpha_{i-1}$ gesetzt hat, nicht noch ausserdem die Grössen $t, q_1, q_2, \dots q_m$ enthalten:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial q_1}\right) = \frac{\partial f}{\partial q_1},\quad \left(\frac{\partial f}{\partial q_2}\right) = \frac{\partial f}{\partial q_2},\quad \dots\quad \left(\frac{\partial f}{\partial q_m}\right) = \frac{\partial f}{\partial q_m},\quad \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) = \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Man bestimme jetzt die Grössen $\alpha_i, \alpha_{i+1}, \dots \alpha_m$ als Functionen der unabhängigen Variablen mittelst der Gleichungen

$$(1.)\qquad \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha_i}\right) = 0,\quad \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha_{i+1}}\right) = 0,\quad \dots\quad \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha_m}\right) = 0,$$

so werden auch $\alpha, \alpha_1, \dots \alpha_{i-1}$ Functionen der unabhängigen Variablen. Aus den Gleichungen (1.) folgt, dass die partiellen Differentialquotienten von f, nach den Variablen $t, q_1, q_2, \dots q_m$ genommen, dieselben Werthe erhalten, ob man vor oder nach der partiellen Differentiation ihre veränderlichen Werthe substituirt. Wird durch diese Substitution

$$(2.)\qquad f = F,$$

so hat man demnach auch

$$(3.)\qquad \frac{\partial F}{\partial q_1} = \frac{\partial f}{\partial q_1},\quad \frac{\partial F}{\partial q_2} = \frac{\partial f}{\partial q_2},\quad \dots\quad \frac{\partial F}{\partial q_m} = \frac{\partial f}{\partial q_m},\quad \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t},$$

wenn man nach der partiellen Differentiation für $\alpha, \alpha_1, \dots \alpha_m$ ihre veränderlichen Werthe setzt. Die gegebene partielle Differentialgleichung giebt eine *identische* Gleichung zwischen den Grössen

$$f,\quad \frac{\partial f}{\partial q_1},\quad \frac{\partial f}{\partial q_2},\quad \dots\quad \frac{\partial f}{\partial q_m},\quad \frac{\partial f}{\partial t},\quad q_1,\quad q_2,\quad \dots\quad q_m,\quad t,$$

in welcher ausserdem nicht noch die Grössen $\alpha, \alpha_1, \dots \alpha_m$ vorkommen. Es bleibt diese Gleichung daher identisch, was für Werthe man diesen Grössen auch beilegt. Setzt man aber dafür die veränderlichen Werthe, welche nach der im Vorhergehenden angegebenen Art bestimmt sind, so verwandeln sich die vorstehenden Grössen in

$$F,\quad \frac{\partial F}{\partial q_1},\quad \frac{\partial F}{\partial q_2},\quad \dots\quad \frac{\partial F}{\partial q_m},\quad \frac{\partial F}{\partial t},\quad q_1,\quad q_2,\quad \dots\quad q_m,\quad t,$$

oder es ist $S = F$ ebenfalls eine Lösung der gegebenen partiellen Differentialgleichung.

Ich will jetzt zeigen, dass man auf die angegebene Art alle Lösungen der gegebenen partiellen Differentialgleichung erhält. Ist nämlich umgekehrt F irgend eine beliebig gegebene Lösung, so will ich beweisen, dass man diese bestimmte Lösung aus jeder beliebigen vollständigen Lösung f erhalten kann, wenn man eine bestimmte Zahl i ihrer $m+1$ willkürlichen Constanten bestimmten Functionen der übrigen gleich setzt, und für diese letzteren wiederum die durch die Gleichungen (1.) bestimmten Functionen substituirt. *Es ist daher, wenn F und f gegeben sind, zuerst die Zahl i zu bestimmen, oder wie viele der Grössen $\alpha, \alpha_1, \dots \alpha_m$ man als Functionen der übrigen zu setzen hat, und dann, welche Functionen diese sein müssen.*

Da die beiden Functionen f und F Lösungen derselben Differentialgleichung sind, so ist von den $m+2$ Gleichungen (2.) und (3.) eine die Folge der übrigen, so dass sie die Stelle von nur $m+1$ Gleichungen vertreten, zu welchen man die Gleichungen

$$(4.)\qquad f = F,\quad \frac{\partial f}{\partial q_1} = \frac{\partial F}{\partial q_1},\quad \frac{\partial f}{\partial q_2} = \frac{\partial F}{\partial q_2},\quad \dots\quad \frac{\partial f}{\partial q_m} = \frac{\partial F}{\partial q_m}$$

wählen kann. Aus diesen $m+1$ Gleichungen können immer die Werthe der $m+1$ Functionen α, α_1, α_2, ... α_m bestimmt werden. Denn diese Grössen kommen in diesen Gleichungen nur in den Ausdrücken

$$f,\ \frac{\partial f}{\partial q_1},\ \frac{\partial f}{\partial q_2},\ \dots\ \frac{\partial f}{\partial q_m}$$

vor, welche als Functionen von α, α_1, α_2, ... α_m betrachtet von einander unabhängig sind, weil sonst die Function f noch einer zweiten partiellen Differentialgleichung genügt, welche die willkürlichen Constanten α, α_1, α_2, ... α_m nicht enthält, und daher nach der oben gegebenen Definition keine *vollständige* Lösung sein kann. Man kann daher die Grössen α, α_1, α_2, ... α_m umgekehrt und auf identische Weise als Functionen der Grössen

$$f,\ \frac{\partial f}{\partial q_1},\ \frac{\partial f}{\partial q_2},\ \dots\ \frac{\partial f}{\partial q_m},\ t,\ q_1,\ q_2,\ \dots\ q_m$$

darstellen, und erhält hieraus, wenn man zufolge (4.) für f, $\frac{\partial f}{\partial q_1}$, $\frac{\partial f}{\partial q_2}$, ... $\frac{\partial f}{\partial q_m}$, die Functionen F, $\frac{\partial F}{\partial q_1}$, $\frac{\partial F}{\partial q_2}$, ... $\frac{\partial F}{\partial q_m}$ setzt, die verlangten Werthe der Grössen α, α_1, α_2, ... α_m, die ich mit

$$(5.)\qquad A = \alpha,\quad A_1 = \alpha_1,\quad A_m = \alpha_m$$

bezeichnen will.

Durch Substitution der Werthe (5.) für α, α_1, ... α_m werden die Gleichungen (4.) identisch, und daher auch die Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial t},$$

welche eine Folge von ihnen ist. Ich will nun beweisen, *dass die Functionen A, A_1, ... A_m nicht von einander unabhängig sind.*

Wenn man nämlich die identische Gleichung

$$f(t, q_1, q_2, \dots q_m, A, A_1, \dots A_m) = F$$

partiell nach t, q_1, q_2, ... q_m differentiirt, so erhält man, weil durch die Gleichungen (5.) die Gleichungen (3.) identisch werden,

$$(6.)\quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial A}\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial A_1}\frac{\partial A_1}{\partial t} + \dots + \frac{\partial f}{\partial A_m}\frac{\partial A_m}{\partial t} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial A}\frac{\partial A}{\partial q_1} + \frac{\partial f}{\partial A_1}\frac{\partial A_1}{\partial q_1} + \dots + \frac{\partial f}{\partial A_m}\frac{\partial A_m}{\partial q_1} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial A}\frac{\partial A}{\partial q_2} + \frac{\partial f}{\partial A_1}\frac{\partial A_1}{\partial q_2} + \dots + \frac{\partial f}{\partial A_m}\frac{\partial A_m}{\partial q_2} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{\partial f}{\partial A}\frac{\partial A}{\partial q_m} + \frac{\partial f}{\partial A_1}\frac{\partial A_1}{\partial q_m} + \dots + \frac{\partial f}{\partial A_m}\frac{\partial A_m}{\partial q_m} = 0. \end{cases}$$

Es sind dies zwischen den $m+1$ Grössen

$$\frac{\partial f}{\partial A}, \quad \frac{\partial f}{\partial A_1}, \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial A_m}$$

eine gleiche Anzahl $m+1$ linearer Gleichungen, in denen die ganz constanten Glieder gleich Null sind. Man kann daher aus ihnen diese Grössen eliminiren, wodurch man

$$\Sigma \pm \frac{\partial A}{\partial t} \frac{\partial A_1}{\partial q_1} \cdots \frac{\partial A_m}{\partial q_m} = 0$$

erhält, d. h. es verschwindet die Functionaldeterminante von A, A_1, ... A_m, oder diese Functionen sind von einander nicht unabhängig.

Da von den Functionen A, A_1, ... A_m bewiesen ist, dass sie von einander nicht unabhängig sind, so werden eine oder mehrere von ihnen Functionen der übrigen sein. Es seien i von diesen Grössen Functionen der übrigen. Die $m+1$ Gleichungen (4.) lassen sich in diesem Falle durch successive Elimination immer in die Form der Gleichungen

$$(7.) \qquad \alpha = \mathfrak{A}, \quad \alpha_1 = \mathfrak{A}_1, \quad \dots \quad \alpha_{i-1} = \mathfrak{A}_{i-1},$$

$$(8.) \qquad q_i = Q, \quad q_{i+1} = Q_1, \quad \dots \quad q_m = Q_{m-i}$$

bringen, wo die Functionen Q, Q_1, ... Q_{m-i} die Grössen t, q_1, q_2, ... q_{i-1}, α_i, α_{i+1}, ... α_m, die Functionen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$, ... $\mathfrak{A}_{i-1}$ nur die Grössen α_i, α_{i+1}, ... α_m enthalten. Die Zahl und Beschaffenheit der Gleichungen (7.) ist durch die Gleichungen (4.), also durch die beiden gegebenen Lösungen f und F, von denen die eine eine vollständige, die andere eine beliebige ist, vollkommen bestimmt. Die Zahl i wird wenigstens 1 und kann den Werth $m+1$ erreichen. Es wird daher von den Gleichungen (7.) immer wenigstens eine geben, und dieses wird sogar im Allgemeinen der Fall sein. Die Gleichungen (8.) dagegen werden nicht Statt finden, wenn $i = m+1$, in welchem Falle die Grössen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$, ... Constanten werden. Die Functionen f und F kommen dann dadurch mit einander überein, dass man für α, α_1, ... α_m constante Werthe setzt, oder die gegebene Lösung F ist in der vollständigen Lösung f selbst enthalten. Aus den Gleichungen (8.) erhält man α_i, α_{i+1}, ... α_m als Functionen der unabhängigen Variablen:

$$(9.) \qquad A_i = \alpha_i, \quad A_{i+1} = \alpha_{i+1}, \quad \dots \quad A_m = \alpha_m.$$

Umgekehrt folgen aus (9.) die Gleichungen (8.); es müssen daher die Functionen A_i, A_{i+1}, ... A_m in Bezug auf die Grössen q_i, q_{i+1}, ... q_m von einander unabhängig sein. Setzt man in (7.) für α_i, α_{i+1}, ... α_m ihre Werthe

(9.), so erhält man die Werthe von $\alpha, \alpha_1, \dots \alpha_{\iota-1}$:

$$\alpha = A, \quad \alpha_1 = A_1, \quad \dots \quad \alpha_{\iota-1} = A_{\iota-1},$$

als Functionen von $A_\iota, A_{\iota+1}, \dots A_m$.

Substituirt man diese Functionen für $A, A_1, \dots A_{\iota-1}$ in die identische Gleichung

$$f(t, q_1, q_2, \dots q_m, A, A_1, \dots A_m) = F,$$

und differentiirt hierauf diese identische Gleichung partiell nach den Grössen $q_\iota, q_{\iota+1}, \dots q_m$, so erhält man wegen (3.):

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial f}{\partial A_\iota}\right)\frac{\partial A_\iota}{\partial q_\iota}+\left(\frac{\partial f}{\partial A_{\iota+1}}\right)\frac{\partial A_{\iota+1}}{\partial q_\iota}+\dots+\left(\frac{\partial f}{\partial A_m}\right)\frac{\partial A_m}{\partial q_\iota} = 0,\\
&\left(\frac{\partial f}{\partial A_\iota}\right)\frac{\partial A_\iota}{\partial q_{\iota+1}}+\left(\frac{\partial f}{\partial A_{\iota+1}}\right)\frac{\partial A_{\iota+1}}{\partial q_{\iota+1}}+\dots+\left(\frac{\partial f}{\partial A_m}\right)\frac{\partial A_m}{\partial q_{\iota+1}} = 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\left(\frac{\partial f}{\partial A_\iota}\right)\frac{\partial A_i}{\partial q_m}+\left(\frac{\partial f}{\partial A_{\iota+1}}\right)\frac{\partial A_{\iota+1}}{\partial q_m}+\dots+\left(\frac{\partial f}{\partial A_m}\right)\frac{\partial A_m}{\partial q_m} = 0,
\end{aligned}$$

wobei die Klammern andeuten, dass vor den partiellen Differentiationen von f die Grössen $A, A_1, \dots A_{\iota-1}$ durch die aequivalenten Functionen von A_ι, $A_{i+1}, \dots A_m$ ersetzt worden sind. In den vorstehenden zwischen den $m+1-i$ Grössen

$$\left(\frac{\partial f}{\partial A_\iota}\right), \quad \left(\frac{\partial f}{\partial A_{\iota+1}}\right), \quad \dots \quad \left(\frac{\partial f}{\partial A_m}\right)$$

Statt findenden linearen Gleichungen fehlen die ganz constanten Glieder. Die Determinante dieser Gleichungen

$$\Sigma \pm \frac{\partial A_\iota}{\partial q_\iota}\frac{\partial A_{\iota+1}}{\partial q_{\iota+1}}\dots\frac{\partial A_m}{\partial q_m}$$

kann nicht verschwinden, weil $A_\iota, A_{i+1}, \dots A_m$ in Bezug auf $q_\iota, q_{\iota+1}, \dots q_m$ von einander unabhängige Functionen sind. Es müssen daher die Grössen verschwinden, welche in den linearen Gleichungen die Stelle der Unbekannten einnehmen, wodurch man die Gleichungen

$$(10.) \quad \left(\frac{\partial f}{\partial A_\iota}\right) = 0, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial A_{\iota+1}}\right) = 0, \quad \dots \quad \left(\frac{\partial f}{\partial A_m}\right) = 0$$

erhält. Auf diese Weise kommt man auf dem umgekehrten Wege zu den Gleichungen (1.) zurück, von welchen oben ausgegangen worden ist, um aus der vollständigen Lösung andere in ihr nicht enthaltene abzuleiten, und man sieht daher, dass man auf dem angegebenen Wege von irgend einer vollständigen Lösung zu jeder beliebigen andern gelangen kann, und dass sowohl die Zahl als die Natur der Relationen, welche zwischen den willkürlichen Constanten der vollständigen Lösungen angenommen werden müssen, durch die Lösung, zu welcher man gelangen will, bestimmt ist.

Die vorstehenden Betrachtungen lassen nur einen einzigen Ausnahmefall zu. Es ist nämlich oben angenommen worden, dass die Determinante der linearen Gleichungen (6.) verschwindet, weil ihre ganz constanten Glieder sämmtlich gleich Null sind. Diese Annahme ist aber in dem Falle nicht nothwendig, wenn sämmtliche Grössen

$$\frac{\partial f}{\partial A}, \quad \frac{\partial f}{\partial A_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial A_2}, \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial A_m}$$

verschwinden. Dieser Fall kann in der That eintreten. Hat man nämlich die Functionen $A, A_1, \dots A_m$ durch die Gleichungen

$$(11.) \qquad \frac{\partial f}{\partial A} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial A_1} = 0, \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial A_m} = 0$$

bestimmt, und setzt dann

$$f(t, q_1, q_2, \dots q_m, A, A_1, \dots A_m) = F,$$

so wird

$$\frac{\partial f}{\partial q_1} = \frac{\partial F}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial q_2} = \frac{\partial F}{\partial q_2}, \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial q_m} = \frac{\partial F}{\partial q_m}, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial t},$$

und daher die zwischen f und seinen partiellen Differentialquotienten bestehende Gleichung auch für F gültig oder F eine Lösung. Aber es kann nur für ganz besonders gebildete, leicht erkennbare, partielle Differentialgleichungen sich ereignen, dass die Gleichungen (11.) *legitim* sind, wie ich diesen Begriff in meiner Abhandlung über den Multiplicator näher entwickelt habe. Für diese besonderen partiellen Differentialgleichungen kann man diese sogenannte *singuläre* Lösung, welche man mittelst (11.) aus der vollständigen ableitet, auch *a priori* aus der partiellen Differentialgleichung ohne eine Integration finden. Für alle andern partiellen Differentialgleichungen haben die Functionen

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha_1}, \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha_m}$$

immer den Charakter von Exponentialgrössen oder von Brüchen, und können nicht als verschwindend gesetzt werden, ohne den Variablen unendliche Werthe beizulegen. Ich werde diese singulären Fälle hier um so eher übergehen, als sie in dem Falle der Dynamik nicht eintreten können, in welchem die gesuchte

Function in der partiellen Differentialgleichung fehlt. Denn man kann für diesen Fall die Constante α als bloss durch Addition mit der vollständigen Lösung f verbunden ansehen, wodurch man

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 1$$

erhält, so dass man also die Grösse $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ nicht als verschwindend ansehen darf.

§. 5. Wie man aus *einer* vollständigen Lösung *alle* vollständigen Lösungen ableiten kann, wenn die partielle Differentialgleichung die gesuchte Function selbst nicht enthält, und wie alle verschiedenen vollständigen Lösungen dieselben dynamischen Integralgleichungen geben.

Man hat im Vorigen gesehen, dass man aus einer vollständigen Lösung f, welche die willkürlichen Constanten $\alpha, \alpha_1, \ldots \alpha_m$ enthält, alle andern ableiten kann, wenn man für einige der willkürlichen Constanten, $\alpha, \alpha_1, \ldots \alpha_{i-1}$, willkürliche Functionen der übrigen $\alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots \alpha_m$ setzt, und dann $\alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots \alpha_m$ als Functionen der unabhängigen Variablen bestimmt. Wenn die willkürlichen Functionen von $\alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots \alpha_m$, welche man für $\alpha, \alpha_1, \ldots \alpha_{i-1}$ setzt, $m+1$ willkürliche Constanten

$$a, \quad a_1, \quad a_2, \quad \ldots \quad a_m$$

enthalten, so wird die abgeleitete neue Lösung F wieder, wie die Lösung f, von der man ausgegangen ist, $m+1$ willkürliche Constanten enthalten. Es fragt sich, auf welche Art die neuen willkürlichen Constanten in die angenommenen willkürlichen Functionen eingehen müssen, damit die neue Lösung F ebenfalls als eine vollständige Lösung angesehen werden kann.

Ich will diese Untersuchung mit einem einfacheren Falle beginnen, der aber in Bezug auf die dynamischen Probleme von hauptsächlichem Interesse ist. Ich will nämlich annehmen, dass die gegebene partielle Differentialgleichung nicht S selbst enthält, und demgemäss α mit f bloss durch Addition verbunden ist, ferner dass bloss diese eine Grösse α durch die übrigen mittelst einer Gleichung

$$\alpha = \varphi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m, a_1, a_2, \ldots a_m) + a$$

ausgedrückt wird, wo $a, a_1, a_2, \ldots a_m$ die neuen willkürlichen Constanten bedeuten. Die Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ werden als Functionen der unabhängigen Variablen durch die Gleichungen

$$(1.) \qquad \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_2} = 0, \quad \ldots \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha_m} + \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_m} = 0$$

bestimmt, worauf die neue Lösung

$$F = f(t, q_1, q_2, \ldots q_m, a_1, a_2, \ldots a_m) + \varphi + a$$

wird.

Zufolge der oben für die Vollständigkeit einer Lösung gegebenen Kriterien wird die Function F, welche ausser der mit ihr durch blosse Addition verbundenen willkürlichen Constante a noch die m andern a_1, a_2, ... a_m enthält, dann immer eine *vollständige* Lösung, wenn man aus den m Gleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial a_1} = b_1, \quad \frac{\partial F}{\partial a_2} = b_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial F}{\partial a_m} = b_m$$

die Variablen q_1, q_2, ... q_m durch t und die Grössen a_1, a_2, ... a_m, b_1, b_2, ... b_m ausgedrückt erhalten kann. Zufolge (1.) ist aber

$$\frac{\partial F}{\partial a_1} = \frac{\partial \varphi}{\partial a_1}, \quad \frac{\partial F}{\partial a_2} = \frac{\partial \varphi}{\partial a_2}, \quad \ldots \quad \frac{\partial F}{\partial a_m} = \frac{\partial \varphi}{\partial a_m}.$$

Es müssen also die Werthe von q_1, q_2, ... q_m, durch t, a_1, a_2, ... a_m, b_1, b_2, ... b_m ausgedrückt, aus den Gleichungen

$$(2.) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} = b_1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial a_2} = b_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial \varphi}{\partial a_m} = b_m$$

erhalten werden können. Aber weil f eine vollständige Lösung ist, kann man q_1, q_2, ... q_m identisch durch

$$t, \quad \alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots \quad \alpha_m, \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha_2}, \quad \ldots \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha_m}$$

ausdrücken. Die Gleichungen (1.) ergeben daher q_1, q_2, ... q_m als Functionen von

$$t, \quad \alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots \quad \alpha_m, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_1}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_2}, \quad \ldots \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_m},$$

oder von

$$t, \quad \alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots \quad \alpha_m, \quad a_1, \quad a_2, \quad \ldots \quad a_m.$$

Es wird daher das Verlangte erfüllt, wenn man aus den Gleichungen (2.) die Grössen α_1, α_2, ... α_m als Functionen von

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots \quad a_m, \quad b_1, \quad b_2, \quad \ldots \quad b_m$$

erhalten kann. *Man erhält daher aus der vollständigen Lösung*

$$S = f(t, q_1, q_2, \ldots q_m, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m) + \alpha$$

durch Elimination von α_1, α_2, ... α_m *aus den Gleichungen*

$$F = f + \varphi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m, a_1, a_2, \ldots a_m) + a,$$
$$\frac{\partial f}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_2} = 0, \quad \ldots \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha_m} + \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_m} = 0$$

eine neue vollständige Lösung F mit den willkürlichen Constanten a, a_1, a_2, ... a_m, wenn die willkürliche Function φ so beschaffen ist, dass die Functionen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a_1}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial a_2}, \quad \ldots \quad \frac{\partial \varphi}{\partial a_m}$$

in Bezug auf α_1, α_2, ... α_m von einander unabhängig sind, oder auch, was dasselbe ist, wenn die Functionen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_1}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_2}, \quad \ldots \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_m}$$

in Bezug auf a_1, a_2, ... a_m von einander unabhängig sind.

Vermöge der ersten Bestimmung kann man α_1, α_2, ... α_m identisch durch a_1, a_2, ... a_m, $\frac{\partial \varphi}{\partial a_1}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial a_2}$, ... $\frac{\partial \varphi}{\partial a_m}$, vermöge der letzten Bestimmung kann man a_1, a_2, ... a_m identisch durch α_1, α_2, ... α_m und $\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_1}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_2}$, ... $\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_m}$ ausdrücken. Setzt man daher:

$$(3.) \quad \begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} = b_1, & \frac{\partial \varphi}{\partial a_2} = b_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial \varphi}{\partial a_m} = b_m, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_1} = -\beta_1, & \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_2} = -\beta_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_m} = -\beta_m, \end{cases}$$

so kann man von den beiden Systemen von Grössen

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots \quad \alpha_m, \quad \beta_1, \quad \beta_2, \quad \ldots \quad \beta_m$$

und

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots \quad a_m, \quad b_1, \quad b_2, \quad \ldots \quad b_m$$

jede Grösse des einen Systems durch die Grössen des andern ausdrücken. Sind dann die Grössen des einen Systems willkürliche von einander unabhängige Constanten, so sind es auch die Grössen des andern Systems.

Wenn man zwischen den Variablen t, q_1, q_2, ... q_m und den willkürlichen Constanten des ersten Systems die Gleichungen

$$(4.) \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha_m} = \beta_m$$

aufstellt, welches die endlichen Integralgleichungen sind, und mittelst der Gleichungen (3.) statt der willkürlichen Constanten α_1, α_2, ..., β_1, β_2, ... die willkürlichen Constanten a_1, a_2, ..., b_1, b_2, ... einführt, so verwandeln sich die Gleichungen (4.) in:

$$(5.)\quad \frac{\partial f}{\partial \alpha_1}+\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_1}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial \alpha_2}+\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_2}=0,\quad \ldots\quad \frac{\partial f}{\partial \alpha_m}+\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_m}=0.$$

Aus (5.) ergeben sich die Werthe der Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ durch $t, q_1, q_2, \ldots q_m, a_1, a_2, \ldots a_m$ ausgedrückt. Substituirt man diese Werthe in die Function

$$F = f(t, q_1, q_2, \ldots q_m, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m)+\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m, a_1, a_2, \ldots a_m),$$

in welcher ich die durch blosse Addition hinzukommende Constante fortgelassen habe, so wird F ebenfalls eine Function der Grössen $t, q_1, q_2, \ldots q_m, a_1, a_2, \ldots a_m$, und man erhält wegen (5.):

$$\frac{\partial F}{\partial a_1}=\frac{\partial \varphi}{\partial a_1},\quad \frac{\partial F}{\partial a_2}=\frac{\partial \varphi}{\partial a_2},\quad \ldots\quad \frac{\partial F}{\partial a_m}=\frac{\partial \varphi}{\partial a_m},$$

und daher wegen (3.):

$$(6.)\quad \frac{\partial F}{\partial a_1}=b_1,\quad \frac{\partial F}{\partial a_2}=b_2,\quad \ldots\quad \frac{\partial F}{\partial a_m}=b_m.$$

Man sieht also, dass man dieselben endlichen Integralgleichungen erhält, ob man zu ihrer Bildung die vollständige Lösung f, oder ob man die vollständige Lösung F anwendet. Denn wenn man für die willkürlichen Constanten $\alpha_1, \beta_1, \ldots$ die willkürlichen Constanten $a_1, b_1, \ldots$ einführt, verwandeln sich, wie wir gesehen haben, die Gleichungen (4.) in (6.). Ebenso verwandeln sich auch die intermediären Integralgleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial q_1}=p_1,\quad \frac{\partial f}{\partial q_2}=p_2,\quad \ldots\quad \frac{\partial f}{\partial q_m}=p_m$$

in die analog gebildeten

$$\frac{\partial F}{\partial q_1}=p_1,\quad \frac{\partial F}{\partial q_2}=p_2,\quad \ldots\quad \frac{\partial F}{\partial q_m}=p_m,$$

da aus (5.) auch die Gleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial q_1}=\frac{\partial f}{\partial q_1},\quad \frac{\partial F}{\partial q_2}=\frac{\partial f}{\partial q_2},\quad \ldots\quad \frac{\partial F}{\partial q_m}=\frac{\partial f}{\partial q_m}$$

folgen.

Ich will jetzt annehmen, dass man für $\alpha, \alpha_1, \ldots \alpha_{i-1}$ Functionen der Grössen

$$\alpha_i,\quad \alpha_{i+1},\quad \ldots\quad \alpha_m,\quad a_1,\quad a_2,\quad \ldots\quad a_m$$

setzt, welche ich mit

$$(7.)\quad \varphi=\alpha,\quad \varphi_1=\alpha_1,\quad \varphi_2=\alpha_2,\quad \ldots\quad \varphi_{i-1}=\alpha_{i-1}$$

bezeichnen will, und aus der vollständigen Lösung f eine neue Lösung F dadurch ableitet, dass man mittelst der Gleichungen

$$(8.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial \varphi_1}\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha_i}+\dfrac{\partial f}{\partial \varphi_2}\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial \alpha_i}+\cdots+\dfrac{\partial f}{\partial \varphi_{i-1}}\dfrac{\partial \varphi_{i-1}}{\partial \alpha_i}+\dfrac{\partial f}{\partial \alpha_i}+\dfrac{\partial \varphi}{\partial \alpha_i} = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial \varphi_1}\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha_{i+1}}+\dfrac{\partial f}{\partial \varphi_2}\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial \alpha_{i+1}}+\cdots+\dfrac{\partial f}{\partial \varphi_{i-1}}\dfrac{\partial \varphi_{i-1}}{\partial \alpha_{i+1}}+\dfrac{\partial f}{\partial \alpha_{i+1}}+\dfrac{\partial \varphi}{\partial \alpha_{i+1}} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial \varphi_1}\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha_m}+\dfrac{\partial f}{\partial \varphi_2}\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial \alpha_m}+\cdots+\dfrac{\partial f}{\partial \varphi_{i-1}}\dfrac{\partial \varphi_{i-1}}{\partial \alpha_m}+\dfrac{\partial f}{\partial \alpha_m}+\dfrac{\partial \varphi}{\partial \alpha_m} = 0 \end{cases}$$

die Werthe der Grössen $\alpha_i, \alpha_{i+1}, \dots \alpha_m$ durch

$$t, \; q_1, \; q_2, \; \dots \; q_m, \; a_1, \; a_2, \; \dots \; a_m$$

ausdrückt, und diese Werthe in die Function

$$f(t, q_1, q_2, \dots q_m, \varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \dots \alpha_m)+\varphi = F$$

substituirt. Die Grössen $a_1, a_2, \dots a_m$ bedeuten hier wieder willkürliche Constanten, und es fragt sich, wie dieselben in die Functionen

$$\varphi, \; \varphi_1, \; \dots \; \varphi_{i-1}$$

eingehen müssen, damit die Lösung F eine vollständige sei.

Man erhält zufolge (8.):

$$(9.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial a_1} = \dfrac{\partial f}{\partial \varphi_1}\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial a_1}+\dfrac{\partial f}{\partial \varphi_2}\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial a_1}+\cdots+\dfrac{\partial f}{\partial \varphi_{i-1}}\dfrac{\partial \varphi_{i-1}}{\partial a_1}+\dfrac{\partial \varphi}{\partial a_1}, \\ \dfrac{\partial F}{\partial a_2} = \dfrac{\partial f}{\partial \varphi_1}\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial a_2}+\dfrac{\partial f}{\partial \varphi_2}\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial a_2}+\cdots+\dfrac{\partial f}{\partial \varphi_{i-1}}\dfrac{\partial \varphi_{i-1}}{\partial a_2}+\dfrac{\partial \varphi}{\partial a_2}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial F}{\partial a_m} = \dfrac{\partial f}{\partial \varphi_1}\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial a_m}+\dfrac{\partial f}{\partial \varphi_2}\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial a_m}+\cdots+\dfrac{\partial f}{\partial \varphi_{i-1}}\dfrac{\partial \varphi_{i-1}}{\partial a_m}+\dfrac{\partial \varphi}{\partial a_m}. \end{cases}$$

Betrachtet man $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m, a_1, a_2, \dots a_m$ als willkürliche Constanten, so folgt aus den endlichen Integralgleichungen

$$(10.)\quad \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha_m} = \beta_m,$$

wo $\beta_1, \beta_2, \dots \beta_m$ ebenfalls willkürliche Constanten bedeuten, und aus den Gleichungen (7.) und (9.), dass auch die Functionen $\dfrac{\partial F}{\partial a_1}, \dfrac{\partial F}{\partial a_2}, \dots \dfrac{\partial F}{\partial a_m}$ constanten Werthen gleich werden, welche ich mit

$$(11.)\quad b_1 = \frac{\partial F}{\partial a_1}, \quad b_2 = \frac{\partial F}{\partial a_2}, \quad \dots \quad b_m = \frac{\partial F}{\partial a_m}$$

bezeichnen will. Wenn zwischen diesen Constanten $b_1, b_2, \dots b_m$ und den willkürlichen Constanten $a_1, a_2, \dots a_m$ keine Relation Statt findet, so ist F eine vollständige Lösung, und die vollständigen endlichen Integralgleichungen können auch durch die Gleichungen (11.) dargestellt werden. Die Gleichungen, welche die beiden Systeme willkürlicher Constanten mit einander verbinden, sind zufolge (7.), (8.), (10.), (11.):

$$\alpha_1 = \varphi_1, \quad \alpha_2 = \varphi_2, \quad \dots \quad \alpha_{i-1} = \varphi_{i-1},$$

$$(12.) \quad \begin{cases} -\beta_i = \dfrac{\partial \varphi}{\partial \alpha_i} + \beta_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha_i} + \beta_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial \alpha_i} + \dots + \beta_{i-1} \dfrac{\partial \varphi_{i-1}}{\partial \alpha_i}, \\ -\beta_{i+1} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial \alpha_{i+1}} + \beta_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha_{i+1}} + \beta_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial \alpha_{i+1}} + \dots + \beta_{i-1} \dfrac{\partial \varphi_{i-1}}{\partial \alpha_{i+1}}, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ -\beta_m = \dfrac{\partial \varphi}{\partial \alpha_m} + \beta_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha_m} + \beta_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial \alpha_m} + \dots + \beta_{i-1} \dfrac{\partial \varphi_{i-1}}{\partial \alpha_m}; \end{cases}$$

$$(13.) \quad \begin{cases} b_1 = \dfrac{\partial \varphi}{\partial a_1} + \beta_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial a_1} + \beta_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial a_1} + \dots + \beta_{i-1} \dfrac{\partial \varphi_{i-1}}{\partial a_1}, \\ b_2 = \dfrac{\partial \varphi}{\partial a_2} + \beta_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial a_2} + \beta_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial a_2} + \dots + \beta_{i-1} \dfrac{\partial \varphi_{i-1}}{\partial a_2}, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ b_m = \dfrac{\partial \varphi}{\partial a_m} + \beta_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial a_m} + \beta_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial a_m} + \dots + \beta_{i-1} \dfrac{\partial \varphi_{i-1}}{\partial a_m}. \end{cases}$$

Kann man aus (13.) die Werthe von

$$\beta_1, \quad \beta_2, \quad \dots \quad \beta_{i-1}, \quad \alpha_i, \quad \alpha_{i+1}, \quad \dots \quad \alpha_m$$

durch die Constanten des zweiten Systems a_1, b_1; a_2, b_2; ... a_m, b_m bestimmen, so erhält man aus (12.) die Werthe der übrigen Constanten des ersten Systems

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \dots \quad \alpha_{i-1}, \quad \beta_i, \quad \beta_{i+1}, \quad \dots \quad \beta_m$$

durch dieselben Grössen a_1, b_1, ... bestimmt. Kann man aus (12.) die Werthe von a_1, a_2, ... a_m durch die Constanten des ersten Systems α_1, β_1, ... ausgedrückt erhalten, so geben die Gleichungen (13.) auch die Werthe von b_1, b_2, ... b_m durch die Constanten des ersten Systems α_1, β_1, ... ausgedrückt. Beide Bedingungen aber finden immer gleichzeitig Statt. Setzt man nämlich

$$\varphi + \beta_1 \varphi_1 + \beta_2 \varphi_2 + \dots + \beta_{i-1} \varphi_{i-1} = \Phi,$$

so dass

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \beta_1} = \varphi_1, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \beta_2} = \varphi_2, \quad \dots \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \beta_{i-1}} = \varphi_{i-1},$$

so fordert die erstere Bedingung, dass die in Bezug auf die Grössen β_1, β_2, ... β_{i-1}, α_i, α_{i+1}, ... α_m gebildete Functionaldeterminante der partiellen

Differentialquotienten

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_1}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial a_2}, \quad \ldots \quad \frac{\partial \Phi}{\partial a_m},$$

die zweite Bedingung, dass die in Bezug auf die Grössen $a_1, a_2, \ldots a_m$ gebildete Functionaldeterminante der partiellen Differentialquotienten

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \beta_1}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \beta_2}, \quad \ldots \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \beta_{i-1}}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_i}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_{i+1}}, \quad \ldots \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_m}$$

nicht verschwindet. Beide Functionaldeterminanten sind aber dieselbe Grösse, welche ich mit Δ bezeichnen will. Wenn dieses Δ nicht verschwindet, kann man nach dem Vorhergehenden mittelst der Gleichungen (12.) und (13.) die beiden Systeme von Grössen

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots \quad \alpha_m, \quad \beta_1, \quad \beta_2, \quad \ldots \quad \beta_m$$

und

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots \quad a_m, \quad b_1, \quad b_2, \quad \ldots \quad b_m$$

durch einander ausdrücken, woraus folgt, dass, wenn die Grössen des einen Systems von einander unabhängige willkürliche Constanten sind, auch die Grössen des andern Systems als solche angesehen werden können, so dass zwischen den Grössen $a_1, a_2, \ldots a_m, b_1, b_2, \ldots b_m$ keine Relation Statt findet. Wenn daher Δ nicht verschwindet, so wird F eine vollständige Lösung, und wenn man mittelst der Gleichungen (12.) und (13.) die willkürlichen Constanten des zweiten Systems für die des ersten Systems in die vollständigen endlichen Integralgleichungen (10.) einführt, so erhalten sie die Form der Integralgleichungen (11.).

Ich bemerke, dass die Gleichung $\Delta = 0$, welche Statt finden muss, wenn die Lösung F keine vollständige ist, in mehrere andere zerfällt. Es ist nämlich Δ in Bezug auf die Grössen $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{i-1}$ eine ganze rationale Function der $(m-i+1)^{\text{ten}}$ Ordnung, deren einzelne Glieder jedes besonders für sich verschwinden müssen. Die Gleichung $\Delta = 0$ zerfällt daher in

$$\frac{m.(m-1)\ldots i}{1.2\ldots(m-i+1)}$$

andere, von den Grössen $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{i-1}$ freie Gleichungen.

§. 6. Ueber die bei der Ableitung einer vollständigen Lösung aus einer andern auftretenden Functionaldeterminanten.

Wenn man die $2m$ Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_m$ durch $2m$ andere $a_1, a_2, \ldots a_m, b_1, b_2, \ldots b_m$ oder umgekehrt diese durch jene ausdrückt, so haben nach einem bekannten Satze die in Bezug auf $a_1, a_2, \dots a_m, b_1, b_2, \dots b_m$ gebildete Functionaldeterminante von $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \dots \beta_m$ und die in Bezug auf $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \dots \beta_m$ gebildete Functionaldeterminante der ersteren reciproke Werthe. Wenn daher die eine Functionaldeterminante ± 1 wird, erhält auch die andere diesen Werth. Ich will jetzt zeigen, dass die erste der beiden Functionaldeterminanten und also auch die zweite diesen Werth annimmt, wenn zwischen den $4m$ Grössen die Gleichungen (12.) und (13.) gelten.

Eine Functionaldeterminante ändert nach einem ebenfalls bekannten Satze ihren Werth nicht, wenn man in die Ausdrücke einiger der Functionen die andern einführt, und diese bei den partiellen Differentiationen als constant betrachtet. So enthalten die Ausdrücke von $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{i-1}, \beta_i, \beta_{i+1}, \dots \beta_m$, die durch die Gleichungen (12.) gegeben werden, die andern Functionen $\alpha_i, \alpha_{i+1}, \dots \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \dots \beta_{i-1}$. Man kann daher bei Bildung der Functionaldeterminante von $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \dots \beta_m$ in Bezug auf $a_1, a_2, \dots a_m, b_1, b_2, \dots b_m$ für $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{i-1}, \beta_i, \beta_{i+1}, \dots \beta_m$ die in (12.) rechts vom Gleichheitszeichen befindlichen Functionen setzen, und bei ihrer partiellen Differentiation die Grössen $\beta_1, \beta_2, \dots \beta_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \dots \alpha_m$ als constant betrachten. Da diese Functionen die Grössen $b_1, b_2, \dots b_m$ nicht enthalten, so wird die Functionaldeterminante das Product zweier einfachern,

$$\begin{aligned}&\Sigma \pm \frac{\partial \alpha_1}{\partial a_1} \frac{\partial \alpha_2}{\partial a_2} \cdots \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial a_{i-1}} \frac{\partial \beta_i}{\partial a_i} \frac{\partial \beta_{i+1}}{\partial a_{i+1}} \cdots \frac{\partial \beta_m}{\partial a_m}\\ \times\, &\Sigma \pm \frac{\partial \beta_1}{\partial b_1} \frac{\partial \beta_2}{\partial b_2} \cdots \frac{\partial \beta_{i-1}}{\partial b_{i-1}} \frac{\partial \alpha_i}{\partial b_i} \frac{\partial \alpha_{i+1}}{\partial b_{i+1}} \cdots \frac{\partial \alpha_m}{\partial b_m}.\end{aligned}$$

Die Ausdrücke von $\beta_1, \beta_2, \dots \beta_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \dots \alpha_m$, welche bei Bildung des zweiten Factors dieses Productes gebraucht werden, erhält man durch Auflösung der Gleichungen (13.). Setzt man für diesen Factor, wie es verstattet ist, den reciproken Werth der in Bezug auf $\beta_1, \beta_2, \dots \beta_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \dots \alpha_m$ gebildeten Determinante von $b_1, b_2, \dots b_m$, so verwandelt sich das vorstehende Product in

$$\frac{\Sigma \pm \frac{\partial \alpha_1}{\partial a_1} \frac{\partial \alpha_2}{\partial a_2} \cdots \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial a_{i-1}} \frac{\partial \beta_i}{\partial a_i} \frac{\partial \beta_{i+1}}{\partial a_{i+1}} \cdots \frac{\partial \beta_m}{\partial a_m}}{\Sigma \pm \frac{\partial b_1}{\partial \beta_1} \frac{\partial b_2}{\partial \beta_2} \cdots \frac{\partial b_{i-1}}{\partial \beta_{i-1}} \frac{\partial b_i}{\partial \alpha_i} \frac{\partial b_{i+1}}{\partial \alpha_{i+1}} \cdots \frac{\partial b_m}{\partial \alpha_m}}.$$

Der Zähler dieses Bruches ist, abgesehen vom Zeichen, die in Bezug auf die Grössen $a_1, a_2, \dots a_m$ gebildete Functionaldeterminante von

$$\varphi_1, \quad \varphi_2, \quad \dots \quad \varphi_{i-1}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_i}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_{i+1}}, \quad \dots \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_m}$$

oder von

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \beta_1}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \beta_2}, \quad \dots \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \beta_{i-1}}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_i}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_{i+1}}, \quad \dots \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_m}.$$

Der Nenner des Bruches ist dagegen die in Bezug auf die Grössen β_1, β_2, ... β_{i-1}, α_i, α_{i+1}, ... α_m gebildete Functionaldeterminante von

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_1}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial a_2}, \quad \dots \quad \frac{\partial \Phi}{\partial a_m},$$

und da nach einem oben bemerkten Satze diese beiden Functionaldeterminanten identisch sind, so wird der Bruch gleich ± 1, wie zu beweisen war. Es ergiebt sich hieraus das folgende

Theorem I.

Wenn zwischen den 4m Grössen

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \dots \quad \alpha_m, \quad \beta_1, \quad \beta_2, \quad \dots \quad \beta_m,$$
$$a_1, \quad a_2, \quad \dots \quad a_m, \quad b_1, \quad b_2, \quad \dots \quad b_m$$

die 2m Gleichungen (12.) *und* (13.) *Statt finden, in welchen* φ, φ_1, ... φ_{i-1} *Functionen von*

$$\alpha_i, \quad \alpha_{i+1}, \quad \dots \quad \alpha_m, \quad a_1, \quad a_2, \quad \dots \quad a_m$$

sind, und man mittelst dieser Gleichungen die Grössen α_1, α_2, ... α_m, β_1, β_2, ... β_m *als Functionen von* a_1, a_2, ... a_m, b_1, b_2, ... b_m, *oder die Grössen* a_1, a_2, ... a_m, b_1, b_2, ... b_m *als Functionen von* α_1, α_2, ... α_m, β_1, β_2, ... β_m *ausdrückt, so ist in beiden Fällen die Functionaldeterminante gleich* ± 1.

Wenn $i = 1$ ist, reducirt sich die Function Φ auf φ, und die zwischen den $4m$ Grössen Statt findenden Gleichungen werden die obigen Gleichungen (3.). Man erhält dann das folgende einfachere

Theorem II.

Wenn φ *eine Function von* α_1, α_2, ... α_m, a_1, a_2, ... a_m *ist, und man mittelst der Gleichungen*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a_1} = b_1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial a_2} = b_2, \quad \dots \quad \frac{\partial \varphi}{\partial a_m} = b_m,$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_1} = -\beta_1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_2} = -\beta_2, \quad \dots \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_m} = -\beta_m$$

die Grössen α_1, α_2, ... α_m, β_1, β_2, ... β_m *als Functionen der Grössen*

a_1, a_2, ... a_m, b_1, b_2, ... b_m oder diese Grössen als Functionen von jenen ausdrückt, so wird in beiden Fällen die Functionaldeterminante ± 1.

Wenn man aus den dynamischen Integralgleichungen

$$(A.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial q_1} = p_1, & \dfrac{\partial S}{\partial q_2} = p_2, \quad \ldots \quad \dfrac{\partial S}{\partial q_m} = p_m, \\ \dfrac{\partial S}{\partial \alpha_1} = \beta_1, & \dfrac{\partial S}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \quad \ldots \quad \dfrac{\partial S}{\partial \alpha_m} = \beta_m \end{cases}$$

die Functionen der Variablen bestimmt, welche den willkürlichen Constanten gleich werden, oder die Variablen q_1, q_2, ... q_m, p_1, p_2, ... p_m als Functionen von t und den willkürlichen Constanten ausdrückt, so folgt aus dem vorstehenden Theorem, dass in beiden Fällen die Functionaldeterminante ± 1 wird, wenn man bei der Bildung der zweiten die Grösse t als constant betrachtet.

Legt man der Bildung der dynamischen Integralgleichungen eine andere vollständige Lösung F zum Grunde, welche die willkürlichen Constanten a_1, a_2, ... a_m enthält, und bezeichnet die willkürlichen Constanten, welche ihren nach a_1, a_2, ... a_m genommenen partiellen Differentialquotienten gleich werden, respective mit b_1, b_2, ... b_m, so muss auch die in Bezug auf q_1, q_2, ... q_m, p_1, p_2, ... p_m gebildete Functionaldeterminante von a_1, a_2, ... a_m, b_1, b_2, ... b_m den Werth ± 1 erhalten, da der vorstehende Satz in Bezug auf jede vollständige Lösung gilt. Nach einem Satze über die Functionaldeterminanten unterscheiden sich die in Bezug auf dieselben Grössen

$$q_1, \quad q_2, \quad \ldots \quad q_m, \quad p_1, \quad p_2, \quad \ldots \quad p_m$$

gebildeten Functionaldeterminanten von α_1, α_2, ... α_m, β_1, β_2, ... β_m und a_1, a_2, ... a_m, b_1, b_2, ... b_m durch einen Factor, welcher der in Bezug auf a_1, a_2, ... a_m, b_1, b_2, ... b_m gebildeten Functionaldeterminante von α_1, α_2, ... α_m, β_1, β_2, ... β_m gleich ist. Es muss also diese letztere Functionaldeterminante für je zwei vollständige Lösungen ebenfalls den Werth ± 1 haben, was das obige allgemeine Theorem I. giebt, da hierbei die Art, wie die vollständigen Lösungen aus einander abgeleitet werden können, gar nicht in Betracht kommt.

Durch die Gleichungen (A.) wird das System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$(B.)\quad \begin{cases} \dfrac{dq_1}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_1}, & \dfrac{dq_2}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_2}, \quad \ldots \quad \dfrac{dq_m}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_m}, \\ \dfrac{dp_1}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_1}, & \dfrac{dp_2}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_2}, \quad \ldots \quad \dfrac{dp_m}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_m} \end{cases}$$

vollständig integrirt. Wenn man aus ($A.$) die Functionen bestimmt, welche den willkürlichen Constanten gleich werden,

$$A_1 = \alpha_1, \quad A_2 = \alpha_2, \quad \dots \quad A_m = \alpha_m,$$
$$B_1 = \beta_1, \quad B_2 = \beta_2, \quad \dots \quad B_m = \beta_m,$$

so erhält man durch Differentiation der vorstehenden Gleichungen $2m$ lineare Gleichungen zwischen den ersten Differentialquotienten

$$\frac{dq_1}{dt}, \quad \frac{dq_2}{dt}, \quad \dots \quad \frac{dq_m}{dt}, \quad \frac{dp_1}{dt}, \quad \frac{dp_2}{dt}, \quad \dots \quad \frac{dp_m}{dt}.$$

Die Determinante dieser linearen Gleichungen wird die nach $q_1, q_2, \dots q_m, p_1, p_2, \dots p_m$ gebildete Functionaldeterminante von $A_1, A_2, \dots A_m, B_1, B_2, \dots B_m$, und erhält daher dem Obigen zufolge den Werth ± 1. Hieraus folgt durch Auflösung der linearen Gleichungen ferner, *dass, wenn man von den Ausdrücken $A_1, A_2, \dots A_m, B_1, B_2, \dots B_m$, welche in den dynamischen Integralgleichungen den willkürlichen Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ gleich werden, die verschiedenen Functionaldeterminanten bildet, indem man die Grösse t als eine der Variablen annimmt, dagegen immer eine der andern Variablen $q_1, q_2, \dots q_m, p_1, p_2, \dots p_m$ als constant betrachtet, diese Functionaldeterminanten, abgesehen vom Vorzeichen, respective den Functionen*

$$\frac{\partial H}{\partial p_1}, \quad \frac{\partial H}{\partial p_2}, \quad \dots \quad \frac{\partial H}{\partial p_m}, \quad -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \quad -\frac{\partial H}{\partial q_2}, \quad \dots \quad -\frac{\partial H}{\partial q_m}$$

gleich werden.

Aus demselben Theorem II. folgt auch noch, dass, *wenn man aus den dynamischen Differentialgleichungen ($B.$) die Grössen*

$$p_1, \quad p_2, \quad \dots \quad p_m, \quad \frac{dq_1}{dt}, \quad \frac{dq_2}{dt}, \quad \dots \quad \frac{dq_m}{dt}$$

durch Functionen von

$$q_1, \quad q_2, \quad \dots \quad q_m, \quad \frac{dp_1}{dt}, \quad \frac{dp_2}{dt}, \quad \dots \quad \frac{dp_m}{dt},$$

oder diese Grössen durch Functionen von jenen ausdruckt, und die Grösse t selbst, wenn sie in diesen Functionen vorkommt, als constant betrachtet, die Functionaldeterminante in beiden Fällen den Werth ± 1 annimmt. Bei allen diesen Sätzen aber setzt man voraus, dass überhaupt aus den jedesmaligen Gleichungen die Werthe der Grössen, deren Functionaldeterminante man zu bilden hat, gezogen werden können, welches z. B. bei den dynamischen Differentialgleichungen ($B.$) nicht der Fall ist, wenn für ein ganz freies System die Grössen $q_1, q_2, \dots q_m$ die rechtwinkligen Coordinaten der materiellen Punkte sind.

§. 7. Ausdehnung der vorhergehenden Untersuchungen auf den allgemeinern Fall, in welchem die partielle Differentialgleichung auch die gesuchte Function selbst enthält.

Ich will noch die im Vorhergehenden angestellten Untersuchungen auf den Fall ausdehnen, in welchem die partielle Differentialgleichung auch die gesuchte Function enthält.

Es enthalte die vollständige Lösung f die willkürlichen Constanten α, α_1, α_2, ... α_m, so erhält man eine neue Lösung F mit den willkürlichen Constanten a, a_1, a_2, ... a_m, wenn man in f zunächst

$$\alpha = \varphi, \quad \alpha_1 = \varphi_1, \quad \dots \quad \alpha_{i-1} = \varphi_{i-1}$$

setzt, wo φ, φ_1, ... φ_{i-1} Functionen von

$$\alpha_i, \quad \alpha_{i+1}, \quad \dots \quad \alpha_m, \quad a, \quad a_1, \quad \dots \quad a_m$$

sind, und dann mittelst der Gleichungen

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \alpha_i}\right) = 0, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha_{i+1}}\right) = 0, \quad \dots \quad \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha_m}\right) = 0$$

aus f die Grössen α_i, α_{i+1}, ... α_m eliminirt. Die Klammern zeigen hier wieder an, dass man vor den partiellen Differentiationen von f die angegebenen Werthe von α, α_1, ... α_{i-1} substituirt hat. Um zu entscheiden, ob die Lösung F eine vollständige sei, bilde man die Gleichungen:

$$(1.)\quad \begin{cases} \alpha = \varphi, \quad \alpha_1 = \varphi_1, \quad \alpha_{i-1} = \varphi_{i-1}, \\ -\beta_i = \dfrac{\partial \varphi}{\partial \alpha_i} + \beta_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha_i} + \beta_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial \alpha_i} + \dots + \beta_{i-1} \dfrac{\partial \varphi_{i-1}}{\partial \alpha_i}, \\ -\beta_{i+1} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial \alpha_{i+1}} + \beta_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha_{i+1}} + \beta_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial \alpha_{i+1}} + \dots + \beta_{i-1} \dfrac{\partial \varphi_{i-1}}{\partial \alpha_{i+1}}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ -\beta_m = \dfrac{\partial \varphi}{\partial \alpha_m} + \beta_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha_m} + \beta_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial \alpha_m} + \dots + \beta_{i-1} \dfrac{\partial \varphi_{i-1}}{\partial \alpha_m}, \end{cases}$$

oder die Gleichungen

$$(2.)\quad \begin{cases} b_1 = \dfrac{\dfrac{\partial \varphi}{\partial a_1} + \beta_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial a_1} + \beta_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial a_1} + \dots + \beta_{i-1} \dfrac{\partial \varphi_{i-1}}{\partial a_1}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial a} + \beta_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial a} + \beta_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial a} + \dots + \beta_{i-1} \dfrac{\partial \varphi_{i-1}}{\partial a}}, \\ b_2 = \dfrac{\dfrac{\partial \varphi}{\partial a_2} + \beta_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial a_2} + \beta_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial a_2} + \dots + \beta_{i-1} \dfrac{\partial \varphi_{i-1}}{\partial a_2}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial a} + \beta_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial a} + \beta_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial a} + \dots + \beta_{i-1} \dfrac{\partial \varphi_{i-1}}{\partial a}}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_m = \dfrac{\dfrac{\partial \varphi}{\partial a_m} + \beta_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial a_m} + \beta_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial a_m} + \dots + \beta_{i-1} \dfrac{\partial \varphi_{i-1}}{\partial a_m}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial a} + \beta_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial a} + \beta_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial a} + \dots + \beta_{i-1} \dfrac{\partial \varphi_{i-1}}{\partial a}}. \end{cases}$$

Die Gleichungen (1.) unterscheiden sich von (12.) des §. 6. nur durch die hinzutretende Gleichung $a = \varphi$, und dadurch, dass die Function φ auch noch die Grösse a enthält. Die Gleichungen (2.) unterscheiden sich von (13.) des §. 6. nur durch den allen Ausdrücken rechts vom Gleichheitszeichen gemeinschaftlichen Nenner. Die Bedingung dafür, dass F eine vollständige Lösung sei, ist, dass man aus (1.) die Werthe von $a, a_1, \dots a_m$ erhalten kann, und diese kommt, wie ich unten zeigen werde, mit der Bedingung überein, dass man aus (2.) die Werthe von β_1, $\beta_2, \dots \beta_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \dots \alpha_m$ erhalten kann. Man kann dann mittelst der $2n+1$ Gleichungen (1.) und (2.) sowohl die Grössen $\alpha, \alpha_1, \dots \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \dots \beta_m$ durch $a, a_1, \dots a_m, b_1, b_2, \dots b_m$, als auch umgekehrt die Grössen $a, a_1, \dots a_m, b_1, b_2, \dots b_m$ durch $\alpha, \alpha_1, \dots \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \dots \beta_m$ ausdrücken. Es verwandeln sich ferner die Gleichungen

$$(3.)\quad \begin{cases} f = S, \quad \dfrac{\partial f}{\partial q_1} = p_1, \quad \dfrac{\partial f}{\partial q_2} = p_2, \quad \dots \quad \dfrac{\partial f}{\partial q_m} = p_m, \\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial \alpha_1} = \beta_1 \dfrac{\partial f}{\partial \alpha}, \quad \dfrac{\partial f}{\partial \alpha_2} = \beta_2 \dfrac{\partial f}{\partial \alpha}, \quad \dots \quad \dfrac{\partial f}{\partial \alpha_m} = \beta_m \dfrac{\partial f}{\partial \alpha} \end{cases}$$

durch Anwendung der Gleichungen (1.) und (2.) in die analog gebildeten

$$(4.)\quad \begin{cases} F = S, \quad \dfrac{\partial F}{\partial q_1} = p_1, \quad \dfrac{\partial F}{\partial q_2} = p_2, \quad \dots \quad \dfrac{\partial F}{\partial q_m} = p_m, \\[2mm] \dfrac{\partial F}{\partial a_1} = b_1 \dfrac{\partial F}{\partial a}, \quad \dfrac{\partial F}{\partial a_2} = b_2 \dfrac{\partial F}{\partial a}, \quad \dots \quad \dfrac{\partial F}{\partial a_m} = b_m \dfrac{\partial F}{\partial a}. \end{cases}$$

Die Gleichungen (3.) waren oben §. 1. die vollständigen Integralgleichungen des dort aufgestellten Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen, indem man die Grössen $\alpha, \alpha_1, \dots \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \dots \beta_m$ als willkürliche Constanten betrachtete. (Die dort der Symmetrie wegen eingeführte Grösse β habe ich hier gleich 1 gesetzt.) Um statt dieser die Grössen $a, a_1, \dots a_m, b_1, b_2, \dots b_m$, welche mit ihnen durch die Gleichungen (1.) und (2.) verbunden sind, als willkürliche Constanten in das System der Integralgleichungen (3.) einzuführen, hat man daher nur nöthig, die eine Function f mittelst der aufgestellten Gleichungen in die Function F zu verwandeln, d. h. sie durch die Grössen $t, q_1, q_2, \dots q_m, a, a_1, \dots a_m$ auszudrücken, worauf man durch blosse partielle Differentiation von F die transformirten Integralgleichungen (4.) erhält.

Setzt man wieder

$$\varphi + \beta_1 \varphi_1 + \beta_2 \varphi_2 + \dots + \beta_{i-1} \varphi_{i-1} = \Phi,$$

so werden in den Gleichungen (2.) die den Grössen $b_1, b_2, \dots b_m$ gleich gesetzten Brüche

$$\frac{\frac{\partial\Phi}{\partial a_1}}{\frac{\partial\Phi}{\partial a}}, \quad \frac{\frac{\partial\Phi}{\partial a_2}}{\frac{\partial\Phi}{\partial a}}, \quad \ldots \quad \frac{\frac{\partial\Phi}{\partial a_m}}{\frac{\partial\Phi}{\partial a}}.$$

Damit aus den Gleichungen (2.) die Werthe der Grössen $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots \alpha_m$ erhalten werden können, darf die nach diesen Grössen gebildete Functionaldeterminante der vorstehenden Ausdrücke, die ich mit

$$\Sigma \pm \frac{\partial b_1}{\partial\beta_1}\frac{\partial b_2}{\partial\beta_2}\cdots\frac{\partial b_{i-1}}{\partial\beta_{i-1}}\frac{\partial b_i}{\partial\alpha_i}\cdots\frac{\partial b_m}{\partial\alpha_m}$$

bezeichne, nicht verschwinden. Aber diese Functionaldeterminante wird gleich $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial a}\right)^{-(m+1)}$ multiplicirt mit der nach den Grössen $a, a_1, \ldots a_m$ gebildeten Functionaldeterminante der Functionen

$$\Phi, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial\beta_1}, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial\beta_2}, \quad \ldots \quad \frac{\partial\Phi}{\partial\beta_{i-1}}, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial\alpha_i}, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial\alpha_{i+1}}, \quad \ldots \quad \frac{\partial\Phi}{\partial\alpha_m},$$

oder der Functionen

$$\Phi, \quad \varphi_1, \quad \varphi_2, \quad \ldots \quad \varphi_{i-1}, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial\alpha_i}, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial\alpha_{i+1}}, \quad \ldots \quad \frac{\partial\Phi}{\partial\alpha_m},$$

wie aus dem oben §. 1. mitgetheilten Theorem I. erhellt, wenn man in demselben für $f;\ q_1, q_2, \ldots q_m;\ \alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ respective die Buchstaben $\Phi;\ \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots \alpha_m;\ a, a_1, a_2, \ldots a_m$ setzt. Für die Function Φ kann man auch die Function φ setzen, da eine Functionaldeterminante sich nicht ändert, wenn man zu einer der Functionen die andern, mit Constanten multiplicirt, addirt oder abzieht, wo unter Constanten alle Grössen zu verstehen sind, die von denen, nach welchen bei Bildung der Functionaldeterminante differentiirt wird, unabhängig sind. Hat man φ für Φ gesetzt, so werden die Ausdrücke, deren Functionaldeterminante in Bezug auf die Grössen $a, a_1, \ldots a_m$ zu bilden ist, dieselben wie die in den Gleichungen (1.) rechts vom Gleichheitszeichen befindlichen Ausdrücke. Wenn man daher aus den Gleichungen (1.) die Werthe von

$$\alpha, \quad \alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots \quad \alpha_{i-1}, \quad \beta_i, \quad \beta_{i+1}, \quad \ldots \quad \beta_m,$$

und aus den Gleichungen (2.) die Werthe von

$$b_1, \quad b_2, \quad \ldots \quad b_m$$

entnimmt, so hat man:

$$(5.)\quad \left\{\begin{aligned} &(-1)^{m-i+1}\Sigma \pm \frac{\partial b_1}{\partial\beta_1}\frac{\partial b_2}{\partial\beta_2}\cdots\frac{\partial b_{i-1}}{\partial\beta_{i-1}}\frac{\partial b_i}{\partial\alpha_i}\frac{\partial b_{i+1}}{\partial\alpha_{i+1}}\cdots\frac{\partial b_m}{\partial\alpha_m} \\ &= \left(\frac{\partial\Phi}{\partial a}\right)^{-m-1}\Sigma \pm \frac{\partial\alpha}{\partial a}\frac{\partial\alpha_1}{\partial a_1}\cdots\frac{\partial\alpha_{i-1}}{\partial a_{i-1}}\frac{\partial\beta_i}{\partial a_i}\frac{\partial\beta_{i+1}}{\partial a_{i+1}}\cdots\frac{\partial\beta_m}{\partial a_m}.\end{aligned}\right.$$

Damit aus den Gleichungen (1.) die Werthe von $a, a_1, \dots a_m$ erhalten werden können, darf die Functionaldeterminante

$$\Sigma \pm \frac{\partial \alpha}{\partial a} \frac{\partial \alpha_1}{\partial a_1} \cdots \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial a_{i-1}} \frac{\partial \beta_i}{\partial a_i} \frac{\partial \beta_{i+1}}{\partial a_{i+1}} \cdots \frac{\partial \beta_m}{\partial a_m}$$

nicht verschwinden. Die Gleichung (5.) zeigt daher, dass, wenn man aus (2.) die Werthe von $\beta_1, \beta_2, \dots \beta_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \dots \alpha_m$ entnehmen kann, man immer auch aus (1.) die Werthe von $a, a_1, a_2, \dots a_m$ erhält. Die Grösse $\frac{\partial \Phi}{\partial a}$ kann weder verschwinden, noch unendlich werden, da aus Gleichungen wie (1.) und (2.) keine Relation zwischen den Grössen $\beta_1, \beta_2, \dots \beta_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \dots \alpha_m, a, a_1, \dots a_m$ folgen kann, welche von den Grössen $\alpha, \alpha_1, \dots \alpha_{i-1}, \beta_i, \dots \beta_m, b_1, b_2, \dots b_m$ frei ist.

Es seien nun

$$u = 0, \quad u_1 = 0, \quad \dots \quad u_{2m} = 0$$

die zwischen den Grössen

$$\alpha, \quad \alpha_1, \quad \dots \quad \alpha_m, \quad \beta_1, \quad \beta_2, \quad \dots \quad \beta_m$$

einerseits, und den Grössen

$$a, \quad a_1, \quad \dots \quad a_m, \quad b_1, \quad b_2, \quad \dots \quad b_m$$

andrerseits bestehenden Gleichungen, welche man erhält, indem man in den Gleichungen (1.), (2.) die auf der rechten Seite befindlichen Grössen auf die linke hinüberschafft. Es wird dann zufolge der in meiner Abhandlung „*De determinantibus Functionalibus*“ bewiesenen Formeln die Functionaldeterminante von $\alpha, \alpha_1, \dots \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \dots \beta_m$ in Bezug auf $a, a_1, \dots a_m, b_1, b_2, \dots b_m$, oder der reciproke Werth der Functionaldeterminante von $a, a_1, \dots a_m, b_1, b_2, \dots b_m$ in Bezug auf $\alpha, \alpha_1, \dots \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \dots \beta_m$ gleich der Functionaldeterminante von $u, u_1, \dots u_{2m}$ in Bezug auf $a, a_1, \dots a_m, b_1, b_2, \dots b_m$, dividirt durch die Functionaldeterminante von $u, u_1, \dots u_{2m}$ in Bezug auf $\alpha, \alpha_1, \dots \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \dots \beta_m$. Es werden ferner, abgesehen vom Zeichen, die Functionaldeterminanten von $u, u_1, \dots u_{2m}$ in Bezug auf $a, a_1, \dots a_m, b_1, b_2, \dots b_m$ und in Bezug auf $\alpha, \alpha_1, \dots \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \dots \beta_m$ dieselben, wie die beiden Functionaldeterminanten, welche sich in der obigen Gleichung (5.) respective auf der rechten und linken Seite des Gleichheitszeichens befinden, und deren Quotient $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial a}\right)^{m+1}$ ist. Man hat daher den folgenden Satz:

Wenn man durch die Gleichungen (1.) *und* (2.) *die Werthe der Grössen* $\alpha, \alpha_1, \dots \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \dots \beta_m$ *als Functionen von* $a, a_1, \dots a_m, b_1, b_2, \dots b_m$ *ausdrückt, so ist ihre Functionaldeterminante*

$$\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial a}+\beta_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial a}+\beta_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial a}+\cdots+\beta_{i-1}\frac{\partial\varphi_{i-1}}{\partial a}\right\}^{m+1}.$$

In dem den dynamischen Problemen entsprechenden Falle wird

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a}=1,\quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial a}=\frac{\partial\varphi_2}{\partial a}=\cdots=\frac{\partial\varphi_{i-1}}{\partial a}=0.$$

Der vorstehende Satz verwandelt sich dann in den in §. 6. bewiesenen.

§. 8. Wie man von einer abgeleiteten Lösung zu der ursprünglichen zurückgelangt.

Ich will jetzt zeigen, wie man von einer abgeleiteten vollständigen Lösung F zu der ursprünglich gegebenen f zurückkehrt, wobei ich gleich den allgemeinen Fall betrachten werde, in welchem die partielle Differentialgleichung die gesuchte Function selber enthält. Auf ähnliche Art nämlich, wie man aus f eine andere vollständige Lösung F abgeleitet hat, kann man auch aus F andere vollständige Lösungen ableiten. Man hat dann in dem Ausdruck F für einige von den Grössen $a, a_1, \dots a_m$, z. B. $a, a_1, \dots a_{k-1}$ Functionen der übrigen $a_k, a_{k+1}, \dots a_m$ zu setzen, welche $m+1$ willkürliche Constanten enthalten, und nach geschehener Substitution der Werthe von $a, a_1, \dots a_{k-1}$ die Werthe von $a_k, a_{k+1}, \dots a_m$ so zu bestimmen, dass die nach ihnen genommenen partiellen Differentialquotienten von F gleich Null werden. *Nimmt man* $k=i$ *und für die Relationen, durch welche* $a, a_1, \dots a_{i-1}$ *als Functionen von* $a_i, a_{i+1}, \dots a_m$ *bestimmt werden, welche ausserdem noch die willkürlichen Constanten* $\alpha, \alpha_1, \dots \alpha_m$ *enthalten, dieselben Gleichungen, welche dazu dienen, aus* f *die Lösung* F *abzuleiten, nämlich die Gleichungen*

$$(1.)\qquad a=\varphi,\quad a_1=\varphi_1,\quad a_2=\varphi_2,\quad \dots\quad a_{i-1}=\varphi_{i-1},$$

in welchen $\varphi, \varphi_1, \dots \varphi_{i-1}$ *Functionen von* $a_i, a_{i+1}, \dots a_m, \alpha, \alpha_1, \dots \alpha_m$ *waren, so kommt man von der vollständigen Lösung* F *auf die ursprünglich gegebene* f *zurück.* Man beweist dies durch die folgenden Betrachtungen.

Die Lösung F ergab sich, indem man mittelst der Gleichungen (1.) und der Gleichungen

$$(2.)\qquad \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha_i}\right)=0,\quad \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha_{i+1}}\right)=0,\quad \dots\quad \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha_m}\right)=0$$

die Grössen $\alpha, \alpha_1, \dots \alpha_m$ aus f eliminirte. Die Gleichung $F=f$ wird daher mittelst der Gleichungen (1.) und (2.) identisch. Hieraus folgt, dass umgekehrt die ursprünglich gegebene Lösung f erhalten wird, wenn man aus F mittelst derselben Gleichungen (1.) und (2.) die Grössen $a, a_1, \dots a_m$ eliminirt. Man erhält aber auch nach der angegebenen Regel eine Lösung, indem man aus F die Grössen $a, a_1, \dots a_m$ vermittelst der Gleichungen (1.) und der Gleichungen

$$(3.)\qquad \frac{\partial F}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial a_k}+\frac{\partial F}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial a_k}+\cdots+\frac{\partial F}{\partial a_{i-1}}\frac{\partial a_{i-1}}{\partial a_k}+\frac{\partial F}{\partial a_k} = 0$$

eliminirt, wo a_k jede der Grössen $a_i, a_{i+1}, \dots a_m$ und $a, a_1, \dots a_{i-1}$ Functionen von $a_i, a_{i+1}, \dots a_m$ und willkürlichen Constanten bedeuten. Setzt man insbesondere für $a, a_1, \dots a_{i-1}$ die sich als ihre Werthe aus (1.) ergebenden Functionen von $a_i, a_{i+1}, \dots a_m, \alpha, \alpha_1, \dots \alpha_m$, so folgen, wie ich unten zeigen werde, aus (1.) und (2.) auch die Gleichungen (3.), so dass man für die Gleichungen (1.) und (2.) auch die Gleichungen (1.) und (3.) setzen kann. Es ist daher gleich, ob man sagt, dass man mittelst der Gleichungen (1.) und (2.), oder mittelst der Gleichungen (1.) und (3.) die Grössen $a, a_1, \dots a_m$ aus F eliminirt, und es ist daher die Lösung, die sich durch die letztere Elimination ergiebt, die ursprünglich gegebene f, wie zu beweisen war.

Es bleibt noch zu zeigen übrig, dass aus (1.) und (2.) die Gleichungen (3.) folgen. Die Function F wurde aus f gefunden, indem man in f für $\alpha, \alpha_1, \dots \alpha_{i-1}$ die Functionen $\varphi, \varphi_1, \dots \varphi_{i-1}$ setzte, und mittelst (2.) die Grössen $\alpha_i, \alpha_{i+1}, \dots \alpha_m$ durch die unabhängigen Variablen und die Grössen $a, a_1, \dots a_m$ ausdrückte. Es wird daher, wenn man mit a_r eine beliebige von den Grössen $a, a_1, \dots a_m$ bezeichnet,

$$\frac{\partial F}{\partial a_r} = \frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial a_r}+\frac{\partial f}{\partial \varphi_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial a_r}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial \varphi_{i-1}}\frac{\partial \varphi_{i-1}}{\partial a_r},$$

da wegen (2.) die in die partiellen Differentialquotienten von $\alpha_i, \alpha_{i+1}, \dots \alpha_m$ multiplicirten Ausdrücke verschwinden. Substituirt man diesen Werth von $\frac{\partial F}{\partial a_r}$ in die Gleichung (3.), welche zu beweisen ist, so erhält der Ausdruck links vom Gleichheitszeichen die Form

$$\Phi\frac{\partial f}{\partial \varphi}+\Phi_1\frac{\partial f}{\partial \varphi_1}+\cdots+\Phi_{i-1}\frac{\partial f}{\partial \varphi_{i-1}},$$

wo

$$\Phi_h = \frac{\partial \varphi_h}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial a_k}+\frac{\partial \varphi_h}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial a_k}+\cdots+\frac{\partial \varphi_h}{\partial a_{i-1}}\frac{\partial a_{i-1}}{\partial a_k}+\frac{\partial \varphi_h}{\partial a_k}.$$

Da aber $a, a_1, \ldots a_{i-1}$ diejenigen Functionen von $a_i, a_{i+1}, \ldots a_m, \alpha, \alpha_1, \ldots \alpha_m$ sind, welche, in die Ausdrücke $\varphi, \varphi_1, \ldots \varphi_{i-1}$ gesetzt, dieselben respective den Grössen $\alpha, \alpha_1, \ldots \alpha_{i-1}$ identisch gleich machen, wodurch also $\varphi_h = \alpha_h$ wird, so verschwindet der vorstehende Ausdruck von Φ_h, und es sind daher die Gleichungen (3.) bewiesen.

Man hat oben gesehen, dass man aus einer gegebenen vollständigen Lösung jede andere bestimmte nur auf eine einzige Art ableiten kann, d. h. dass die hierzu zwischen den willkürlichen Constanten der vollständigen Lösung anzunehmenden Relationen sowohl ihrer Zahl als Natur nach bestimmt sind. Wenn man daher aus einer gegebenen vollständigen Lösung f eine andere F abgeleitet hat, und die gegebene Lösung f ihrerseits aus F ableiten will, so kann dies nur mittelst derjenigen Relationen geschehen, welche im Vorhergehenden zwischen den in F enthaltenen willkürlichen Constanten angenommen worden sind. Diese Relationen, welche gemeinschaftlich dazu dienen, F aus f und f aus F abzuleiten, wo f und F zwei *beliebige* vollständige Lösungen bedeuten können, werden erhalten, wenn man aus den Gleichungen

$$F = f, \quad \frac{\partial F}{\partial q_1} = \frac{\partial f}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial F}{\partial q_2} = \frac{\partial f}{\partial q_2}, \quad \ldots \quad \frac{\partial F}{\partial q_m} = \frac{\partial f}{\partial q_m}$$

die sämmtlichen unabhängigen Variablen $t, q_1, q_2, \ldots q_m$ eliminirt.

Wenn man eine bestimmte vollständige Lösung zum Grunde legt, so theilen sich alle Lösungen in verschiedene Classen, je nachdem man, um sie aus der vollständigen Lösung abzuleiten, eine oder zwei etc. oder $m+1$ Relationen zwischen den in denselben enthaltenen willkürlichen Constanten anzunehmen hat. Die erste Classe ist die allgemeinste, die letzte umfasst die Lösungen selbst, welche in der zum Grunde gelegten vollständigen Lösung enthalten sind. Diese Eintheilung drückt aber nichts den Lösungen selbst Immanentes aus, sondern nur ihre Beziehung zu der zum Grunde gelegten vollständigen Lösung. Denn es kann jede gegebene Lösung zu jeder beliebigen Classe gehören, je nachdem man verschiedene vollständige Lösungen zum Grunde legt. Man kann nämlich, wenn die gegebene Lösung ebenfalls eine vollständige ist, leicht solche vollständigen Lösungen angeben, in Bezug auf welche die gegebene Lösung zu einer bestimmten Classe gehört. Denn man hat nur aus der gegebenen Lösung irgend eine der i^{ten} Classe abzuleiten und diese zum Grunde zu legen, so gehört die gegebene Lösung auch ihrerseits in Bezug auf dieselbe zur i^{ten} Classe, wie im Vorigen bewiesen worden ist. Es kann aber jede gegebene Lösung, welche keine vollständige Lösung selbst ist, als particularer Fall einer vollständigen Lösung angesehen werden. Denn man kann sie immer aus irgend einer zum Grunde gelegten vollständigen Lösung mittelst gewisser Relationen ableiten, die man zwischen den willkürlichen Constanten derselben annimmt. Bezeichnet man diese Relationen mit $u = 0$, $v = 0$, etc., so kann man allgemeinere

$$u + \delta u_1 = 0, \quad v + \varepsilon v_1 = 0, \quad \text{etc.}$$

annehmen, in welchen δ, ε, etc. willkürliche Constanten sind, und u_1, v_1, etc. ebenfalls willkürliche Constanten enthalten, so, dass die mittelst dieser allgemeineren Relationen abgeleitete Lösung eine vollständige wird. In dem besonderen Fall, wo $\delta = 0$, $\varepsilon = 0$, etc., erhält man dann aus dieser vollständigen Lösung die gegebene.

Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen vier Variablen.

1.

Historisches.

Lagrange hat in den Berliner Memoiren von 1772 die partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen *drei* Variablen integriren gelehrt. Nach seiner dort gegebenen Methode wird zuerst ein System von drei gewöhnlichen Differentialgleichungen zwischen *vier* Variablen aufgestellt; da diese Differentialgleichungen von der *ersten* Ordnung sind, so kann die Integration dieses Systems auf die Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung *dritter* Ordnung zwischen nur *zwei* Variablen zurückgeführt werden. *Lagrange* fordert aber zur Auffindung eines vollständigen Integrals der vorgelegten partiellen Differentialgleichung nicht die vollständige Integration des Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen, sondern er zeigt, dass, wenn man *ein* Integral desselben kennt, man nur noch zwei Differentialgleichungen *erster* Ordnung zwischen *zwei* Variablen zu integriren hat. Da man, wie ich im 17ten Bande des *Crelle*schen Journals nach einer von *Hamilton* gegebenen Methode gezeigt habe, immer umgekehrt die vollständigen Integrale des Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen angeben kann, wenn man irgend ein vollständiges Integral der partiellen Differentialgleichung kennt, so folgt für den von *Lagrange* behandelten Fall, dass das von ihm aufgestellte System gewöhnlicher Differentialgleichungen, welches auf eine Differentialgleichung dritter Ordnung zwischen zwei Variablen zurückkommt, die merkwürdige Eigenschaft hat, dass, wenn man *ein* Integral davon kennt, man nur noch Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen zwei Variablen und keine Differentialgleichung zweiter Ordnung zu integriren braucht, um die vollständigen Integralgleichungen zu haben; oder was dasselbe ist, es wird die Differentialgleichung zweiter Ordnung, die man noch zu integriren hat, sich immer auf zwei Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen zwei Variablen reduciren lassen. Es bekommen hierdurch die gewöhnlichen Differentialgleichungen, welche in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen vorkommen, einen besondern Character, der sie von andern Differentialgleichungen unterscheidet und für ihre Integration Vortheile darbieten kann. Besonders einfach wird die *Lagrange*sche Methode, wenn die partielle Differentialgleichung nicht die unbekannte Function selber involvirt, sondern nur die beiden unabhängigen Variablen und die nach ihnen genommenen partiellen Differentialquotienten der gesuchten Function. In diesem Falle ist nur ein Integral eines Systems von zwei Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen drei Variablen, oder einer Differentialgleichung zweiter Ordnung zwischen zwei Variablen zu suchen, wonach das Problem auf Quadraturen zurückgeführt ist. Man kann hier also zufolge der obigen Betrachtungen die Differentialgleichung erster Ordnung, welche nach Auffindung des einen Integrals noch zu integriren bleibt, immer auf Quadraturen zurückführen oder nach einer allgemeinen Regel den Multiplicator angeben, welcher die Differentialgleichung integrabel macht. Die Differentialgleichung zweiter Ordnung, auf welche die zwei Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen drei Variablen zurückgeführt werden können, hat daher die Eigenschaft mit den *linearen* Differentialgleichungen zweiter Ordnung gemein, dass nach einem gefundenen Integral man das zweite durch blosse Quadratur erhält, sie lässt sich aber desshalb nicht, wie die *linearen*, auf die erste Ordnung zurückführen.

2.

Die *Lagrange*sche Methode der Integration einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen, in welcher die abhängige Veränderliche selbst nicht vorkommt.

Da der zuletzt erwähnte Fall, in welchem die partielle Differentialgleichung die unbekannte Function selbst nicht enthält, in der *Mechanik* von Wichtigkeit ist, so will ich für ihn die *Lagrange*sche Methode kurz auseinander setzen.

Es sei

$$(1.) \qquad dV = p\,dx + q\,dy,$$

wo q eine gegebene Function von x, y, p ist; man soll p und V so als Functionen von x und y bestimmen, dass die Gleichung (1.) erfüllt wird. Auf diese Weise kann man ganz allgemein die Aufgabe der Integration einer Gleichung zwischen x und y und den partiellen Differentialquotienten

$$\frac{\partial V}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = q$$

darstellen, d. h. die Integration einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung zwischen drei Variablen, welche die abhängige Variable selbst (die gesuchte Function) nicht enthält. Die Bedingung der Integrabilität von

$$p\,dx + q\,dy$$

ergiebt

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x},$$

in welcher Gleichung auch $\frac{\partial q}{\partial x}$ und $\frac{\partial q}{\partial p}$ gegebene Functionen von x, y, p sind. Es sei nun

$$f(x, y, p) = a$$

irgend ein Integral der Differentialgleichungen:

$$dx : dy : dp = \frac{\partial q}{\partial p} : -1 : -\frac{\partial q}{\partial x},$$

wo die Grösse a eine willkürliche Constante bedeutet, welche ebenso wenig als eine andere willkürliche Constante in der Function $f(x, y, p)$ selber vorkommt.

Man nennt $f = a$ ein Integral der vorgelegten Differentialgleichungen, wenn die Gleichung

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial p}dp$$

durch dieselben *identisch* erfüllt wird, d. h. ohne dass eine Integralgleichung zu Hülfe genommen wird.

Man muss daher für die aufgestellten Differentialgleichungen die identische Gleichung haben:

$$\frac{\partial q}{\partial p}\cdot\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial p} = 0.$$

Bestimmt man p als Function von x, y durch die Gleichung

$$f(x, y, p) = a$$

so hat man

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial p},$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial y} : \frac{\partial f}{\partial p},$$

und es verwandelt sich die vorige Gleichung in folgende:

$$-\frac{\partial q}{\partial p}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\partial q}{\partial x} = 0.$$

Diese Gleichung wird also erfüllt, oder es wird $p\,dx+q\,dy$ integrabel, wenn man p als Function von x und y durch eine Gleichung

$$f(x, y, p) = a$$

bestimmt, welche ein Integral nachfolgender Differentialgleichungen ist:

$$dx : dy : dp = \frac{\partial q}{\partial p} : -1 : -\frac{\partial q}{\partial x},$$

in welchen $\frac{\partial q}{\partial x}$ und $\frac{\partial q}{\partial p}$ die nach x und p genommenen partiellen Differentialquotienten der als Function von x, y, p gegebenen Grösse q sind. Hat man auf diese Art $p\,dx+q\,dy$ integrabel gemacht, so findet man

$$V = \int(p\,dx+q\,dy),$$

und zufolge der von mir modificirten *Hamilton*schen Theorie wird das *letzte* Integral der Differentialgleichungen

$$dx : dy : dp = \frac{\partial q}{\partial p} : -1 : -\frac{\partial q}{\partial x}$$

die Gleichung

$$\frac{\partial V}{\partial a} = \int\left(\frac{\partial p}{\partial a}\,dx+\frac{\partial q}{\partial a}\,dy\right) = b,$$

wo b die zweite willkürliche Constante ist.

Wenn die zwischen x, y, p, q gegebene Gleichung

$$\psi(x, y, p, q) = 0$$

ist, so kann man auf eine mehr *symmetrische* Art statt der Gleichungen:

$$dx : dy : dp = \frac{\partial q}{\partial p} : -1 : -\frac{\partial q}{\partial x}$$

die folgenden setzen:

$$dx : dy : dp : dq = \frac{\partial \psi}{\partial p} : \frac{\partial \psi}{\partial q} : -\frac{\partial \psi}{\partial x} : -\frac{\partial \psi}{\partial y},$$

von denen wegen der Gleichung

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}\,dx+\frac{\partial \psi}{\partial y}\,dy+\frac{\partial \psi}{\partial p}\,dp+\frac{\partial \psi}{\partial q}\,dq = 0$$

eine die Folge der übrigen ist.

3.

Anwendung auf eine Classe mechanischer Probleme.

Es gelte in einem Problem der Mechanik das Princip von der Erhaltung der lebendigen Kraft, und es seien die Bedingungen, denen das System materieller Punkte, welche man betrachtet, unterworfen ist, so beschaffen, dass der Ort sämmtlicher bewegten Punkte durch nur zwei Grössen x und y bestimmt ist. Es sei T die halbe lebendige Kraft, und der Satz von der lebendigen Kraft:

$$T = U+h,$$

wo h eine willkürliche Constante und U eine blosse Function von x und y ist.

Es sei

$$x' = \frac{dx}{dt}, \quad y' = \frac{dy}{dt},$$

so wird T eine Function von x, y, x', y' sein, und in Bezug auf die letzten beiden Grössen eine homogene Function der zweiten Ordnung.

Setzt man

$$\frac{\partial T}{\partial x'} = p, \quad \frac{\partial T}{\partial y'} = q,$$

so kann man auch durch Auflösung zweier linearen Gleichungen x' und y' durch p, q, x, y ausdrücken. Wenn man dieses thut, wird T eine Function von p und q, und setzt man in derselben

$$p = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial V}{\partial y},$$

so wird die Gleichung für die lebendige Kraft

$$T = U+h$$

eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung zwischen x, y, V, in welcher die abhängige Variable V nicht selbst vorkommt, sondern ausser x und y nur die nach x und y genommenen partiellen Differentialquotienten von V. Setzt man daher

$$\varphi = T-U-h,$$

so wird nach §. 2. das aufzustellende System gewöhnlicher Differentialgleichungen:

$$dx : dy : dp : dq = \frac{\partial T}{\partial p} : \frac{\partial T}{\partial q} : \frac{\partial (U-T)}{\partial x} : \frac{\partial (U-T)}{\partial y},$$

welches die Differentialgleichungen des mechanischen Problems selbst sind.

Um diese daher vollständig zu integriren, braucht man nur *ein* Integral von ihnen

$$f = a$$

zu kennen. Die aus den Gleichungen

$$f = a, \quad T = U + h$$

gezogenen Werthe von p und q in x und y substituirt man dann in die Gleichung

$$dV = p\,dx + q\,dy,$$

so wird zufolge der *Lagrange*schen Theorie der Ausdruck rechter Hand integrabel, und daher auch seine nach a und h genommenen Differentialquotienten:

$$\frac{\partial p}{\partial a}dx + \frac{\partial q}{\partial a}dy, \quad \frac{\partial p}{\partial h}dx + \frac{\partial q}{\partial h}dy.$$

Die Integration dieser Ausdrücke giebt die vollständigen endlichen Integralgleichungen des mechanischen Problems. Man hat nämlich nach §. 2.:

$$\int\left(\frac{\partial p}{\partial a}dx + \frac{\partial q}{\partial a}dy\right) = b.$$

Die Zeit findet man, wie ich in meinen Abhandlungen über die *Hamilton*sche Methode gezeigt habe, durch die Gleichung:

$$\int\left(\frac{\partial p}{\partial h}dx + \frac{\partial q}{\partial h}dy\right) = t + \tau.$$

In diesen Gleichungen sind a, b, h, τ die vier willkürlichen Constanten, welche die vollständige Integration des mechanischen Problems erfordert.

Ich habe die vorstehenden Resultate für den Fall der freien Bewegung eines Punctes in einer Ebene bereits vor längerer Zeit der Pariser Akademie der Wissenschaften mitgetheilt. In der Allgemeinheit, in welcher ich sie im Vorstehenden vorgetragen habe, umfassen sie auch die freie Bewegung eines Punktes auf irgend einer gegebenen Oberfläche, so wie mehrere andere merkwürdige mechanische Probleme. Wenn das System sich frei um eine Axe drehen kann, so hat man immer das verlangte Integral $f = a$ mittelst des Flächenprincips.

4.

Ueber die Weiterbildung der *Lagrange*schen Methode.

Die Ausdehnung der *Lagrange*schen Methode auf eine partielle Differentialgleichung mit mehr als drei Variablen scheint beim ersten Anblick ein sehr complicirtes Problem. Diese Complication, und der Umstand, dass man sich wegen der physikalischen Anwendungen seit längerer Zeit auf die Untersuchung der *linearen* partiellen Differentialgleichungen beschränkt, mögen Schuld daran sein, dass in dem langen Zeitraum seit dem Jahre 1772 diese Lücke in der Integralrechnung geblieben ist. Denn die Arbeit von *Pfaff*, welche grosse Wichtigkeit man ihr auch beilegen muss, ist weit entfernt, für jede Zahl von Variablen Aehnliches, wie *Lagrange* für drei Variablen gethan hat, zu leisten. Denn wenn *Lagrange* nicht die vollständige Integration des aufzustellenden Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen nöthig hat, sondern nur die Kenntniss *eines* Integrals statt *zweier* fordert, so braucht *Pfaff* nicht nur sämmtliche Integrale der von ihm aufgestellten Differentialgleichungen, oder ihre vollständige Integration, sondern selbst diese ist ihm nur ein erster Schritt zu der Lösung des Problems. Ich habe nun zwar durch eine leichte Verallgemeinerung der *Hamilton*schen Methode in einer andern Abhandlung *) gezeigt, dass man die *Pfaff*sche Methode so vervollständigen kann, dass die vollständige Integration des Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen in allen Fällen ausreicht; aber es bleibt noch zu zeigen übrig, dass man auch diese nicht einmal nöthig habe. Bei einer näheren Untersuchung dieses Gegenstandes ist es mir gelungen, die hierbei vorkommenden Schwierigkeiten zu heben, wodurch auch die analytische Mechanik eine wesentliche Bereicherung erhält, indem die dynamischen Grundgleichungen für den weitverbreiteten Fall des Princips der Erhaltung der lebendigen Kraft und selbst noch in andern Fällen einer eigenthümlichen Behandlung hinsichtlich ihrer Integration fähig werden. Wenn nun gleich die Ausdehnung der *Lagrange*schen Methode bei näherer Betrachtung nicht die grosse Complication hat, welche sie beim ersten Anblick darbietet, so will ich mich doch hier nur auf den nächsten Fall, auf die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen vier Variablen, beschränken; ja ich werde sogar, um eine klarere Einsicht in das Wesen der von mir verfolgten Methode zu geben, wieder nur den in der Mechanik vorkommenden Fall behandeln, in welchem die partielle Differentialgleichung ausser den unabhängigen Variablen nur die nach ihnen genommenen partiellen Differentialquotienten der gesuchten Function, nicht diese selbst enthält. Die analogen, von mir für eine beliebige Zahl von Variablen gefundenen Resultate habe ich in einem in *Crelles* Journal Bd. XVII abgedruckten Schreiben an Herrn Professor *Enke* kurz angedeutet.

---

*) *Crelles* Journal Bd. 17.

5.

Partielle Differentialgleichung mit drei unabhängigen Veränderlichen, welche die gesuchte Function nicht enthält. Exposition der Aufgabe. Erstes System gewöhnlicher Differentialgleichungen, von welchem ein Integral zu suchen ist.

Es sei
$$dV = p\,dx + q\,dy + r\,dz$$
und r eine gegebene Function von x, y, z, p, q, welche V nicht enthält. Man soll p und q so als Functionen von x, y, z bestimmen, dass der Ausdruck
$$p\,dx + q\,dy + r\,dz$$
integrabel wird. Die Ausführung der Integration giebt dann die Function V. Damit ihr Ausdruck vollständig sei, müssen die Ausdrücke von p und q in x, y, z *zwei* willkürliche Constanten enthalten: bei der Integration kann man dann dem Ausdruck von V noch eine dritte willkürliche Constante durch blosse Addition zufügen.

Die Aufgabe scheint beim ersten Anblick mehr als bestimmt zu sein. Betrachtet man nämlich p, q, r als Functionen von x, y, z, und setzt:
$$(1.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial q}{\partial z} - \dfrac{\partial r}{\partial y} = A, \\[2mm] \dfrac{\partial r}{\partial x} - \dfrac{\partial p}{\partial z} = B, \\[2mm] \dfrac{\partial p}{\partial y} - \dfrac{\partial q}{\partial x} = C, \end{cases}$$
so hat man nur *zwei* Functionen p und q zu bestimmen und soll damit den *drei* Gleichungen:
$$A = 0,\quad B = 0,\quad C = 0$$
genügen, welche erfüllt werden müssen, wenn der Ausdruck
$$p\,dx + q\,dy + r\,dz,$$
wie verlangt worden, integrabel werden soll. Indessen wenn die drei zu erfüllenden Gleichungen sich auch nicht auf zwei reduciren lassen, so sind sie doch auch nicht von einander unabhängig. Man hat nämlich, wie man leicht sieht, die identische Gleichung:
$$(2.)\qquad \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0,$$
so dass, wenn zwei von den Ausdrücken A, B, C verschwinden, man von dem dritten weiss, dass er die eine von den drei Variablen x, y, z nicht

enthalten kann. In dieser Gleichung (2.) hat man die Lösung des Problems zu suchen.

Ich will die Aufgabe, die beiden Functionen p und q so als Functionen von x, y, z zu bestimmen, dass der Ausdruck $p\,dx+q\,dy+r\,dz$ integrabel, oder die drei Gleichungen $A=0$, $B=0$, $C=0$ erfüllt werden, in *zwei* Aufgaben theilen, weil die *gleichzeitige* Behandlung und Bestimmung zweier Functionen mit grossen Schwierigkeiten verbunden ist. Wir wollen nämlich zuerst q als Function von x, y, z, p und hernach p als Function von x, y, z bestimmen. So lange man q nur als Function von x, y, z, p bestimmt, ohne p als Function von x, y, z zu bestimmen, wird es nicht möglich sein, einer der drei Gleichungen $A=0$, $B=0$, $C=0$ zu genügen. Man wird aber eine gewisse Combination dieser Gleichungen bilden können, der schon durch die Bestimmung der einen Grösse q als Function von x, y, z, p Genüge geschehen kann, während die Function p noch unbestimmt bleibt. Betrachtet man nämlich die beiden Grössen r und q als Functionen von x, y, z, p, so werden die drei Gleichungen $C=0$, $B=0$, $A=0$ folgende Gestalt annehmen:

$$(3.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial y} = \dfrac{\partial q}{\partial x}+\dfrac{\partial q}{\partial p}\cdot\dfrac{\partial p}{\partial x}, \\[2ex] \dfrac{\partial p}{\partial z} = \dfrac{\partial r}{\partial x}+\dfrac{\partial r}{\partial p}\cdot\dfrac{\partial p}{\partial x}, \\[2ex] \dfrac{\partial q}{\partial z}+\dfrac{\partial q}{\partial p}\cdot\dfrac{\partial p}{\partial z} = \dfrac{\partial r}{\partial y}+\dfrac{\partial r}{\partial p}\cdot\dfrac{\partial p}{\partial y}. \end{cases}$$

Substituirt man die ersten beiden Gleichungen in die letzte, so erhält man:

$$\frac{\partial q}{\partial z}+\frac{\partial q}{\partial p}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial r}{\partial p}\cdot\frac{\partial q}{\partial x},$$

oder die Gleichung

$$(4.)\quad \frac{\partial q}{\partial z}-\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial q}{\partial p}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}-\frac{\partial r}{\partial p}\cdot\frac{\partial q}{\partial x} = 0,$$

welche Gleichung man auch so darstellen kann, was zugleich die Art ihrer Ableitung angiebt:

$$(5.)\quad A+B\frac{\partial q}{\partial p}+C\frac{\partial r}{\partial p} = 0,$$

in welcher Formel, so wie in (3.) und (4.) die beiden Grössen q und r als Functionen von x, y, z, p betrachtet werden.

Wenn man wieder q als Function von x, y, z, p, aber r als Function von x, y, z, p, q betrachtet, wie es durch die gegebene partielle Differentialgleichung bestimmt ist, und in diesem Sinne partiell differentiirt, so verwandelt sich die Gleichung (4.) oder (5.), wenn man die sich aufhebenden Terme

$$\frac{\partial q}{\partial p}\cdot\frac{\partial r}{\partial q}\cdot\frac{\partial q}{\partial x}-\frac{\partial r}{\partial q}\cdot\frac{\partial q}{\partial p}\cdot\frac{\partial q}{\partial x}$$

fortlässt, in folgende:

$$(6.)\qquad -\frac{\partial r}{\partial p}\cdot\frac{\partial q}{\partial x}-\frac{\partial r}{\partial q}\cdot\frac{\partial q}{\partial y}+\frac{\partial q}{\partial z}+\frac{\partial r}{\partial x}\cdot\frac{\partial q}{\partial p} = \frac{\partial r}{\partial y}.$$

In dieser Gleichung sind die Grössen

$$\frac{\partial r}{\partial p},\quad \frac{\partial r}{\partial q},\quad \frac{\partial r}{\partial x},\quad \frac{\partial r}{\partial y}$$

gegebene Functionen von x, y, z, p, q, und die Gleichung ist daher eine lineare partielle Differentialgleichung zwischen q und den unabhängigen Variablen x, y, z, p. Um eine Function q der Grössen x, y, z, p zu finden, welche der Gleichung (6.) genügt, hat man bekanntlich das System von Differentialgleichungen aufzustellen:

$$(7.)\qquad dx:dy:dz:dp:dq = -\frac{\partial r}{\partial p}:-\frac{\partial r}{\partial q}:1:\frac{\partial r}{\partial x}:\frac{\partial r}{\partial y}.$$

Ist ein Integral derselben *)

$$f(x, y, z, p, q) = a,$$

wo a eine willkürliche Constante bedeutet, so ist der aus dieser Gleichung gezogene Werth von q die verlangte Function von x, y, z, p, welche die Gleichung (6.) erfüllt. Diese Function enthält, wie man sieht, eine willkürliche Constante a.

Um die Gleichungen (7.) in einer mehr symmetrischen Form darzustellen, sei

$$\psi(x, y, z, p, q, r) = 0$$

die gegebene partielle Differentialgleichung. Führt man die Werthe der partiellen Differentialquotienten von r, wie sie sich aus dieser Gleichung ergeben, in die Gleichungen (7.) ein, so erhält man:

$$(8.)\qquad dx:dy:dz:dp:dq:dr = \frac{\partial\psi}{\partial p}:\frac{\partial\psi}{\partial q}:\frac{\partial\psi}{\partial r}:-\frac{\partial\psi}{\partial x}:-\frac{\partial\psi}{\partial y}:-\frac{\partial\psi}{\partial z}.$$

Ich habe hier der Symmetrie wegen sogleich das Verhältniss von dr zu den

*) Hier, wie immer, nenne ich $f = a$ ein Integral eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen, wenn die Gleichung $df = 0$ blos mit Hülfe der Differentialgleichungen *identisch* erfüllt wird.

übrigen Differentialen beigefügt, welches sich aus der Gleichung

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy + \frac{\partial\psi}{\partial z}dz + \frac{\partial\psi}{\partial p}dp + \frac{\partial\psi}{\partial q}dq + \frac{\partial\psi}{\partial r}dr = 0$$

ergiebt.

6.

Aufstellung zweier linearer partieller Differentialgleichungen, von denen eine gemeinsame Lösung zu suchen ist.

Im Vorigen ist die Function q so als Function von x, y, z, p bestimmt worden, dass einer gewissen Combination der Gleichungen $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, nämlich der Gleichung (5.):

$$A + B\frac{\partial q}{\partial p} + C\frac{\partial r}{\partial p} = 0$$

Genüge geschieht, was für eine Function von x auch p bedeute. Dieses war der erste Schritt in unserer Untersuchung. Es war hierzu die Kenntniss eines Integrals der Gleichungen (7.) nöthig, welche vier verschiedene Integrale haben, die ich mit

$$f = a, \quad f_1 = a_1, \quad f_2 = a_2, \quad f_3 = a_3$$

bezeichnen will. Man kann im Voraus nicht wissen, ob der Verlauf der weiteren Untersuchung uns gestatten wird, irgend ein beliebiges dieser Integrale oder eine *beliebige* Combination derselben zu wählen, um daraus q als Function von x, y, z, p zu bestimmen, oder ob nicht die Erfüllung aller Gleichungen $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ fordern wird, dass diese Combination eine bestimmte sei, oder wenigstens noch gewissen Bestimmungen genüge. Ich werde aber zeigen, dass wenn man auch für die Gleichung $f = a$ ein ganz beliebiges Integral der Gleichungen (7.) annimmt, es immer möglich ist, die Function p so zu bestimmen, dass den beiden Gleichungen

$$B = 0, \quad C = 0$$

Genüge geschieht, welche, nachdem die Gleichung (5.) erfüllt worden, allein noch übrig sind.

Betrachten wir q und r als Functionen von x, y, z, p, wie sie durch die beiden Gleichungen

$$\psi = 0, \quad f = a$$

bestimmt sind, so sind die Gleichungen $B = 0$, $C = 0$ folgende:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial p}\cdot\frac{\partial p}{\partial x},$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial p}\cdot\frac{\partial p}{\partial x},$$

wie ich sie bereits oben hingestellt habe. Es kann nun durch eine besondere Beschaffenheit dieser Gleichungen möglich sein, dass sie beide durch dieselbe Function p erfüllt werden können. Ich will mich hier auf die allgemeine Untersuchung nicht einlassen, wie man die Bedingungen findet, damit zwei partielle Differentialgleichungen gleichzeitig erfüllt werden können, sondern mich auf den vorliegenden Fall beschränken.

Um auf die allgemeinste Art die erste der beiden aufgestellten Gleichungen zu integriren,

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial x},$$

in welcher $\frac{\partial q}{\partial x}$, $\frac{\partial q}{\partial p}$ gegebene Functionen von x, y, z, p sind, sucht man die beiden Integrale der Gleichungen:

$$dy : dx : dp = 1 : -\frac{\partial q}{\partial p} : \frac{\partial q}{\partial x}.$$

Sind diese

$$\varphi = \alpha, \quad \chi = \beta,$$

wo α, β die willkürlichen Constanten sind, die in φ und χ nicht vorkommen, so hat man die identischen Gleichungen:

$$(9.) \quad \begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial p} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial p} = 0, \\ \frac{\partial \chi}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial p} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial x} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial p} = 0; \end{cases}$$

und allgemeiner, wenn Π irgend eine Function von φ, χ und der Grösse z ist (welche letztere hier als Constante betrachtet wird):

$$\frac{\partial \Pi}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial p} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial p} = 0.$$

Aus dieser Gleichung folgt, dass, wenn man irgend eine beliebige Function von φ, χ und z einer willkürlichen Constante gleich setzt,

$$\Pi(\varphi, \chi, z) = b,$$

und aus dieser Gleichung den Werth von p in x, y, z zieht, die Gleichung

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}$$

erfüllt wird. Es fragt sich nun, ob es möglich ist, diese Function Π von φ, χ und z so zu bestimmen, dass durch denselben Ausdruck von p auch die andere Gleichung erfüllt wird:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial x},$$

oder, was dasselbe ist, ob man Π so als Function von φ, χ und z bestimmen kann, dass auch die Gleichung

$$\frac{\partial \Pi}{\partial z} - \frac{\partial r}{\partial p} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial p} = 0$$

identisch erfüllt wird.

Um diese letztere Gleichung durch die partiellen Differentialquotienten von Π nach φ, χ und z genommen auszudrücken, sei:

$$d\Pi = \Pi'(\varphi)\,d\varphi + \Pi'(\chi)\,d\chi + \Pi'(z)\,dz;$$

es sei ferner:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial r}{\partial p} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial p} = \varphi_1,$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial z} - \frac{\partial r}{\partial p} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial x} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial p} = \chi_1,$$

so wird die zu erfüllende Gleichung:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \Pi}{\partial z} - \frac{\partial r}{\partial p} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial p} \\ &= \Pi'(\varphi) . \varphi_1 + \Pi'(\chi) . \chi_1 + \Pi'(z). \end{aligned}$$

Diese Gleichung würde eine partielle Differentialgleichung zwischen den Grössen Π, φ, χ, z, wenn sich die Grössen φ_1 und χ_1 durch φ, χ, z ausdrücken liessen, oder was dasselbe ist, wenn sie, in die Gleichungen (9.) für φ oder χ gesetzt, dieselben ebenfalls erfüllten. Und dieses wird man in der That bei näherer Untersuchung finden.

7.

Hülfssatz zur Aufsuchung der gemeinsamen Lösung.

Man hat nämlich folgendes Theorem:

Wenn q und r Functionen von x, y, z, p sind, welche der Gleichung (4.)

$$\frac{\partial q}{\partial z} - \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial q}{\partial p} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} - \frac{\partial r}{\partial p} \cdot \frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

genugen, und φ ein Integral der Gleichung

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial p} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial p} = 0$$

ist, so wird die Function

$$\varphi_1 = \frac{\partial q}{\partial z} - \frac{\partial r}{\partial p}\cdot\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial x}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial p}$$

ebenfalls ein Integral dieser Gleichung, und man hat ebenfalls

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial p}\cdot\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial x}\cdot\frac{\partial \varphi_1}{\partial p} = 0.$$

Es seien nämlich φ, q und r irgend welche Functionen von x, y, z, p und der Kürze halber:

$$\frac{\partial q}{\partial z} - \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial q}{\partial p}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} - \frac{\partial r}{\partial p}\cdot\frac{\partial q}{\partial x} = \varDelta,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial p}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial x}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial p} = K,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial r}{\partial p}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial x}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial p} = L,$$

so findet man, wenn man alle sich aufhebenden Terme fortlässt:

$$(10.)\quad \left\{\begin{aligned}
&\left\{\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial p}\cdot\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial x}\cdot\frac{\partial L}{\partial p}\right\} \\
&-\left\{\frac{\partial K}{\partial z} - \frac{\partial r}{\partial p}\cdot\frac{\partial K}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial x}\cdot\frac{\partial K}{\partial p}\right\} \\
&= \frac{\partial \varphi}{\partial x}\cdot\left\{\begin{aligned}&-\frac{\partial^2 r}{\partial p\,\partial y} + \frac{\partial q}{\partial p}\cdot\frac{\partial^2 r}{\partial p\,\partial x} - \frac{\partial q}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 r}{\partial p^2} \\ &+\frac{\partial^2 q}{\partial p\,\partial z} - \frac{\partial r}{\partial p}\cdot\frac{\partial^2 q}{\partial p\,\partial x} + \frac{\partial r}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 q}{\partial p^2}\end{aligned}\right\} \\
&+\frac{\partial \varphi}{\partial p}\cdot\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial q}{\partial p}\cdot\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial q}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial p} \\ &-\frac{\partial^2 q}{\partial x\,\partial z} + \frac{\partial r}{\partial p}\cdot\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} - \frac{\partial r}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 q}{\partial x\,\partial p}\end{aligned}\right\}
\end{aligned}\right.$$

$$= \frac{\partial \varDelta}{\partial p}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \varDelta}{\partial x}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial p}.$$

Aus dieser Gleichung folgt, dass, wenn die Functionen q, r und φ so beschaffen sind, dass die Ausdrücke K und $\varDelta$ identisch gleich Null sind, die Function L der Gleichung genügt:

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial p}\cdot\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial x}\cdot\frac{\partial L}{\partial p} = 0,$$

was das zu beweisende Theorem war.

8.

Bestimmung der gemeinsamen Lösung. Vollständige Integration des in §. 5. benutzten Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen.

Aus dem soeben bewiesenen Theorem folgt, dass man aus einem Integral φ der Gleichung

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial p}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial p} = 0$$

immer ein zweites durch blosse partielle Differentiation ableiten kann; es wird nämlich

$$\varphi_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{\partial r}{\partial p}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial p}$$

ein Integral derselben Gleichung, oder man hat ebenfalls:

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial p}\cdot\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi_1}{\partial p} = 0.$$

Ja man kann diese Operation wiederholen und, indem man φ_1 statt φ setzt, aus φ_1 ein drittes Integral ableiten:

$$\varphi_2 = \frac{\partial\varphi_1}{\partial z} - \frac{\partial r}{\partial p}\cdot\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi_1}{\partial p}.$$

Sind aber φ und φ_1 zwei Integrale einer Gleichung:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial p}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial p} = 0,$$

so ist bekanntlich jedes andere Integral eine Function dieser beiden Integrale, und es muss daher φ_2 eine Function von φ und φ_1 sein, und von der Grösse z, welche bei der Integration der vorstehenden Gleichung als Constante angesehen wird.

Ich nannte aber χ ein zweites Integral der vorstehenden Gleichung, und χ_1 eine Function, welche durch dieselben Operationen aus χ abgeleitet wird, wie φ_1 aus φ, und welche daher nach dem obigen Theorem ein Integral derselben Gleichung ist. Nimmt man φ_1 für dieses zweite Integral χ, so wird

$$\chi = \varphi_1, \quad \chi_1 = \varphi_2,$$

und die Function Π wird eine Function von φ, φ_1 und z, welche der Gleichung genügen muss:

$$\varphi_1 . \Pi'(\varphi) + \varphi_2 . \Pi'(\varphi_1) + \Pi'(z) = 0,$$

in welcher φ_2 eine gegebene Function von φ, φ_1 und z ist. Hat man daher ein Integral

$$\varphi(x, y, z, p) = c$$

der Gleichungen:

$$dy : dx : dp = 1 : -\frac{\partial q}{\partial p} : \frac{\partial q}{\partial x}$$

gefunden, in welchen z als Constante angesehen wird, so leitet man aus φ die Function φ_1 und aus φ_1 die Function φ_2 ab vermittelst der Formeln:

$$\varphi_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{\partial r}{\partial p}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial p}.$$

$$\varphi_2 = \frac{\partial\varphi_1}{\partial z} - \frac{\partial r}{\partial p}\cdot\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi_1}{\partial p}.$$

und drückt φ_2 durch φ, φ_1 und z aus, was immer möglich ist. Hierauf bildet man die Differentialgleichungen:

$$(11.)\qquad d\varphi : d\varphi_1 : dz = \varphi_1 : \varphi_2 : 1.$$

und sucht ein Integral derselben

$$\Pi(\varphi, \varphi_1, z) = b.$$

Diese Gleichung, verbunden mit den Gleichungen

$$\psi = 0, \quad f = a,$$

giebt für p, q, r Ausdrücke in x, y, z mit zwei willkürlichen Constanten a und b, welche den Ausdruck

$$p\,dx + q\,dy + r\,dz$$

integrabel machen. Setzt man dann

$$V = \int (p\,dx + q\,dy + r\,dz),$$

so dass V eine Function von x, y, z, a, b wird, so erhält man zufolge der in einer andern Abhandlung (*Crelles* Journal Bd. 17. p. 97) von mir gegebenen Theorie die vollständigen Integrale der Differentialgleichungen (7.) gegeben durch das System der Gleichungen:

$$f = a, \quad \Pi = b, \quad \frac{\partial V}{\partial a} = a', \quad \frac{\partial V}{\partial b} = b'.$$

in welchen a', b' zwei neue willkürliche Constanten sind. Die beiden letzten Gleichungen kann man auch so darstellen:

$$\int\left(\frac{\partial p}{\partial a}dx + \frac{\partial q}{\partial a}dy + \frac{\partial r}{\partial a}dz\right) = a'.$$

$$\int\left(\frac{\partial p}{\partial b}dx + \frac{\partial q}{\partial b}dy + \frac{\partial r}{\partial b}dz\right) = b'.$$

in welchen Formeln die unter dem Integralzeichen enthaltenen Ausdrücke ebenfalls integrabel sind.

9.

Besonderer Charakter der erhaltenen Integrale des Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen.

Differentiirt man die Gleichung, durch welche die zweite willkürliche Constante eingeführt wurde, $\Pi = b$, indem man Π wieder, wie oben, als Function von x, y, z, p betrachtet, so erhält man:

$$d\Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Pi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Pi}{\partial z} dz + \frac{\partial \Pi}{\partial p} dp = 0.$$

Die Function Π war aber so bestimmt worden, dass sie gleichzeitig den beiden Gleichungen genügte

$$\frac{\partial \Pi}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial p} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial p} = 0,$$
$$\frac{\partial \Pi}{\partial z} - \frac{\partial r}{\partial p} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial p} = 0.$$

Multiplicirt man die erste Gleichung mit dy, die zweite mit dz, und zieht die Summe beider Producte von der Gleichung $d\Pi = 0$ ab, so verwandelt sich diese Gleichung in folgende:

$$0 = \frac{\partial \Pi}{\partial x} \left\{ dx + \frac{\partial q}{\partial p} dy + \frac{\partial r}{\partial p} dz \right\}$$
$$+ \frac{\partial \Pi}{\partial p} \left\{ dp - \frac{\partial q}{\partial x} dy - \frac{\partial r}{\partial x} dz \right\}.$$

Wenn man r als Function von x, y, z, p, q betrachtet, so werden die beiden in $\frac{\partial \Pi}{\partial x}$ und $\frac{\partial \Pi}{\partial p}$ multiplicirten Ausdrücke:

$$dx + \frac{\partial r}{\partial p} dz + \frac{\partial q}{\partial p}\left(dy + \frac{\partial r}{\partial q} dz \right),$$
$$dp - \frac{\partial r}{\partial x} dz - \frac{\partial q}{\partial x}\left(dy + \frac{\partial r}{\partial q} dz \right).$$

Diese Ausdrücke verschwinden, wenn die Gleichungen (7.) Statt finden, da aus diesen Gleichungen folgt:

$$dx + \frac{\partial r}{\partial p} dz = 0, \quad dy + \frac{\partial r}{\partial q} dz = 0, \quad dp - \frac{\partial r}{\partial x} dz = 0.$$

Man sieht daher, dass die Gleichung $d\Pi = 0$ eine der Combinationen ist, welche man aus den Gleichungen (7.) oder (8.) bilden kann, oder dass die Gleichung

$\Pi = b$, ebenso wie diejenige, durch welche die erste willkürliche Constante a eingeführt wurde, $f = a$, ein Integral dieser Differentialgleichungen ist. Aber die Gleichung $\Pi = b$ ist nicht, wie die Gleichung $f = a$, ein beliebiges Integral dieser Differentialgleichungen, sondern nur einer Combination derselben, welche zwischen den drei Variablen φ, φ_1 und z stattfindet, während die Gleichungen (7.), nachdem durch das erste Integral $f = a$ die Grösse q als Function von x, y, z, p bestimmt wurde, zwischen diesen *vier* Variablen gegeben waren.

10.

Die Ordnung der zur Aufsuchung der gemeinsamen Lösung nothwendigen Integrationen kann sich unter Umständen erniedrigen.

Ich habe oben gesagt, dass der allgemeinste Ausdruck einer Function χ, welche der Gleichung

$$\frac{\partial \chi}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial p} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial x} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial p} = 0$$

Genüge leistet, eine beliebige Function von z und zwei Integralen dieser Gleichung, φ und φ_1, sei, und dass daher, da auch φ_2 dieser Gleichung Genüge leistet, φ_2 eine Function von φ, φ_1 und z sein müsse. Dieses hört auf, seine Gültigkeit zu haben, wenn es sich trifft, dass der Ausdruck

$$\varphi_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial r}{\partial p} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial p}$$

selber schon eine Function von φ und z ist. In diesem Falle aber erfährt die Aufsuchung der Function Π eine bedeutende Vereinfachung, indem sie nur eine Function der beiden Grössen φ und z wird. Denn da es nur darauf ankommt, Π so zu bestimmen, dass es gleichzeitig den beiden Gleichungen

$$\frac{\partial \Pi}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial p} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial p} = 0,$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial z} - \frac{\partial r}{\partial p} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial p} = 0$$

genügt, und jede Function $\Pi(\varphi, z)$ schon von selbst die erste erfüllt, so hat man nur noch der Gleichung

$$\Pi'(\varphi) \cdot \varphi_1 + \Pi'(z) = 0$$

zu genügen, in welcher, wie angenommen wurde, φ_1 eine Function von φ und z ist. Diese Gleichung wird aber erfüllt, wenn $\Pi = b$ das Integral der Gleichung

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \varphi_1$$

ist. Man hat also in diesem Falle nur eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen zwei Grössen φ und z zu integriren, während man vorher von zwei Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen den drei Grössen φ, φ_1 und z, oder was dasselbe ist, von einer Differentialgleichung *zweiter* Ordnung zwischen φ und z ein Integral zu finden hatte.

Trifft man zufällig ein Integral φ, für welches $\varphi_1 = 0$ wird, so hat man keine Differentialgleichung weiter zu integriren, sondern $\Pi = \varphi$ zu setzen.

11.

Zahl und Ordnung der nach dieser Methode erforderlichen Integrationen.

Die Differentialgleichungen (7.) sind vier Gleichungen erster Ordnung zwischen fünf Grössen, welche die Stelle einer Differentialgleichung vierter Ordnung zwischen zwei Grössen vertreten. Wollte man diese successive integriren, so hätte man nach und nach ein Integral einer Differentialgleichung vierter, dritter, zweiter und erster Ordnung zu suchen. Vergleichen wir dagegen die im Vorigen geforderten Integrationen, so haben wir ausser dem Integrale der vier Differentialgleichungen erster oder einer der vierten Ordnung nur Differentialgleichungen der zweiten Ordnung zwischen zwei Variablen zu integriren und keine der dritten; woraus wir ersehen, dass nach der angewandten Methode die Differentialgleichung dritter Ordnung, auf welche nach gefundenem ersten Integral das Problem zurückkommt, sich immer auf Differentialgleichungen zweiter Ordnung zurückführen lässt. Wir hatten nämlich zwei Differentialgleichungen erster oder eine zweiter Ordnung, um die Functionen φ und φ_1 zu bestimmen; hiervon brauchten wir aber nur *ein* Integral zu kennen, $\varphi = \alpha$, da sich nach einer bestimmten Regel ein zweites Integral $\varphi_1 = \beta$ daraus ableiten liess. Nachdem die Functionen φ und φ_1 gefunden, hatten wir zwischen diesen und z wieder zwei Differentialgleichungen erster oder eine zweiter Ordnung, von denen wieder nur *ein* Integral $\Pi = b$ zu suchen war. Alles übrige war dann auf Quadraturen zurückgeführt. Statt also nach und nach ein Integral einer Differentialgleichung dritter, zweiter, erster Ordnung, haben wir nur zweimal ein Integral einer Differentialgleichung zweiter Ordnung zu suchen, und blosse Quadraturen auszuführen, was eine bedeutende Vereinfachung ist.

Wir haben nach dem Vorigen zweierlei Arten Differentialgleichungen, von denen ein Integral zu suchen ist, solche, von denen ein Integral mit einer willkürlichen Constante eine Gleichung zwischen den Grössen x, y, z,

p, q, r mit einer willkürlichen Constante liefert, die als eine der Integralgleichungen des Problems zu betrachten ist, und ein Hülfssystem, das nur dazu dient, passende Variable aufzufinden, die an Stelle der ursprünglichen zu wählen sind. Diejenigen Integrale, welche die willkürlichen Constanten geben, sind zugleich Integrale desselben ursprünglichen Systems von Differentialgleichungen (7.) oder (8.).

12.

Das bei der Aufsuchung der gemeinsamen Lösung benutzte System gewöhnlicher Differentialgleichungen. Seine vollständige Integration. Sein Multiplicator.

Zur bessern Einsicht in die Natur der hier vorkommenden Differential- und Integralgleichungen bemerke ich noch, dass die Gleichung

$$\frac{\partial V}{\partial b} = \int \left\{ \frac{\partial p}{\partial b} dx + \frac{\partial q}{\partial b} dy + \frac{\partial r}{\partial b} dz \right\} = b'$$

nicht nur ein Integral der Gleichungen (7.) ist, wenn man sich daraus die Constanten a und b vermittelst der Gleichungen $f = a$, $H = b$ eliminirt denkt, sondern auch der Gleichungen (11.), wenn man nur die Constante b vermittelst der Gleichung $H = b$ eliminirt, so dass also

$$H = b, \quad \frac{\partial V}{\partial b} = b'$$

die beiden Integrale der Gleichungen (11.):

$$dq : dq_1 : dz = q_1 : q_2 : 1$$

werden. Wenn nämlich $H = b$, $H_1 = b'$ die beiden Integrale dieser Gleichungen sind, so hat man, wie ich in §. 9. gezeigt habe:

$$0 = \frac{\partial H}{\partial x} \left\{ dx + \frac{\partial q}{\partial p} dy + \frac{\partial r}{\partial p} dz \right\} - \frac{\partial H}{\partial p} \left\{ dp - \frac{\partial q}{\partial x} dy - \frac{\partial r}{\partial x} dz \right\},$$

$$0 = \frac{\partial H_1}{\partial x} \left\{ dx + \frac{\partial q}{\partial p} dy + \frac{\partial r}{\partial p} dz \right\} - \frac{\partial H_1}{\partial p} \left\{ dp - \frac{\partial q}{\partial x} dy - \frac{\partial r}{\partial x} dz \right\}.$$

Denn dasselbe Resultat, welches ich dort in Bezug auf die Function H erhalten habe, erhält man auch in Bezug auf die Function H_1. Aus diesen folgen aber die Gleichungen:

$$0 = dx + \frac{\partial q}{\partial p} dy + \frac{\partial r}{\partial p} dz,$$

$$0 = dp - \frac{\partial q}{\partial x} dy - \frac{\partial r}{\partial x} dz,$$

welche mit den Gleichungen (11.) äquivalent sein müssen, oder von denen jede eine Combination der Gleichungen (11.) sein muss. Substituirt man in q und r den Werth von p als Function von x, y, z und der willkürlichen Constante b, der durch die Gleichung $\Pi = b$ gegeben ist, so enthalten q und r die Grösse b nur, insofern dieselbe in p vorkommt, oder man hat:

$$\frac{\partial q}{\partial b} = \frac{\partial q}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial b}, \quad \frac{\partial r}{\partial b} = \frac{\partial r}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial b}.$$

Multiplicirt man daher die erste der beiden vorstehenden Gleichungen mit $\frac{\partial p}{\partial b}$, so erhält man

$$0 = \frac{\partial p}{\partial b} dx + \frac{\partial q}{\partial b} dy + \frac{\partial r}{\partial b} dz.$$

Der Ausdruck rechts ist integrabel, und man erhält durch seine Integration das zweite Integral der Gleichungen (11.):

$$\frac{\partial V}{\partial b} = \int \left\{ \frac{\partial p}{\partial b} dx + \frac{\partial q}{\partial b} dy + \frac{\partial r}{\partial b} dz \right\} = b',$$

was zu beweisen war.

Ich will noch den integrablen Ausdruck

$$\frac{\partial p}{\partial b} dx + \frac{\partial q}{\partial b} dy + \frac{\partial r}{\partial b} dz$$

$$= \frac{\partial p}{\partial b} \left\{ dx + \frac{\partial q}{\partial p} dy + \frac{\partial r}{\partial p} dz \right\},$$

dessen Integration ein Integral der Gleichungen

$$d\varphi : d\varphi_1 : dz = \varphi_1 : \varphi_2 : 1$$

giebt, durch die Variablen φ, φ_1, z selbst auszudrücken suchen. Aus den Gleichungen:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial p} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial p} = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial p} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial p} = 0$$

erhält man, wenn man der Kürze halber

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial p} - \frac{\partial \varphi}{\partial p} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = M$$

setzt, die Gleichungen:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \varphi_1}{\partial p} - \frac{\partial \varphi}{\partial p} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = M \cdot \frac{\partial q}{\partial p},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = M \cdot \frac{\partial q}{\partial x}.$$

Man differentiire die erste Gleichung nach x, die zweite nach p, und ziehe die erhaltenen Ausdrücke von einander ab. Bemerkt man nun die identische Gleichung:

$$\frac{\partial\cdot\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\varphi_1}{\partial p}-\frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right\}}{\partial x}+\frac{\partial\cdot\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi_1}{\partial p}\right\}}{\partial y}+\frac{\partial\cdot\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}-\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right\}}{\partial p}=0,$$

so erhält man durch die angegebenen Operationen:

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial q}{\partial p}\cdot\frac{\partial M}{\partial x}-\frac{\partial q}{\partial x}\cdot\frac{\partial M}{\partial p},$$

woraus wir ersehen, dass, *wenn φ und φ_1 irgend zwei Integrale einer Gleichung*

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\partial q}{\partial p}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{\partial q}{\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial p}$$

sind, der Ausdruck

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi_1}{\partial p}-\frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}$$

ebenfalls ein Integral dieser Gleichung ist. Es folgt hieraus, dass M eine Function von φ, φ_1 und z ist.

Aus den beiden Gleichungen

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}-\varphi_1=\frac{\partial r}{\partial p}\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial p},$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}-\varphi_2=\frac{\partial r}{\partial p}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}-\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial\varphi_1}{\partial p}$$

folgt ferner:

$$M\frac{\partial r}{\partial p}=\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\varphi_1}{\partial p}-\frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}-\varphi_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial p}+\varphi_2\frac{\partial\varphi}{\partial p},$$

$$M\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}-\varphi_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\varphi_2\frac{\partial\varphi}{\partial x}.$$

Substituirt man die für $M\frac{\partial q}{\partial p}$, $M\frac{\partial r}{\partial p}$ gefundenen Werthe, so erhält man:

$$M\left\{dx+\frac{\partial q}{\partial p}dy+\frac{\partial r}{\partial p}dz\right\}=$$

$$\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi_1}{\partial p}-\frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right\}dx+\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\varphi_1}{\partial p}-\frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right\}dy+\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\varphi_1}{\partial p}-\frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\right\}dz$$
$$+\left\{\varphi_2\frac{\partial\varphi}{\partial p}-\varphi_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial p}\right\}dz,$$

oder

$$M\left\{dx+\frac{\partial q}{\partial p}dy+\frac{\partial r}{\partial p}dz\right\}=\frac{\partial\varphi_1}{\partial p}d\varphi-\frac{\partial\varphi}{\partial p}d\varphi_1+\left\{\varphi_2\frac{\partial\varphi}{\partial p}-\varphi_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial p}\right\}dz$$
$$=\frac{\partial\varphi_1}{\partial p}\left\{d\varphi-\varphi_1 dz\right\}-\frac{\partial\varphi}{\partial p}\left\{d\varphi_1-\varphi_2 dz\right\}.$$

Es ist ferner, wenn man die Gleichung $\Pi = b$ nach b differentiirt:

$$1 = \frac{\partial \Pi}{\partial p}\cdot\frac{\partial p}{\partial b} = \left\{ \Pi'(\varphi)\frac{\partial \varphi}{\partial p} + \Pi'(\varphi_1)\frac{\partial \varphi_1}{\partial p} \right\} \frac{\partial p}{\partial b}.$$

Man hat daher den integrablen Ausdruck:

$$\frac{\partial p}{\partial b}dx + \frac{\partial q}{\partial b}dy + \frac{\partial r}{\partial b}dz = \frac{\frac{\partial \varphi_1}{\partial p}\{d\varphi - \varphi_1 dz\} - \frac{\partial \varphi}{\partial p}\{d\varphi_1 - \varphi_2 dz\}}{M\left\{\Pi'(\varphi)\frac{\partial \varphi}{\partial p} + \Pi'(\varphi_1)\frac{\partial \varphi_1}{\partial p}\right\}}.$$

Es ist nicht möglich, aus diesem Ausdruck den Quotienten $\frac{\partial \varphi_1}{\partial p} : \frac{\partial \varphi}{\partial p}$ fortzuschaffen, welcher allein darin keine Function von φ, φ_1 und z ist, ohne dass man die Gleichung:

$$d\Pi = \Pi'(\varphi)\,d\varphi + \Pi'(\varphi_1)\,d\varphi_1 + \Pi'(z)\,dz = 0$$

zu Hülfe ruft. Eliminirt man aber vermittelst dieser Gleichung dz, und setzt:

$$\frac{\partial V}{\partial b} = \Pi_1, \qquad d\Pi_1 = \frac{\partial p}{\partial b}dx + \frac{\partial q}{\partial b}dy + \frac{\partial r}{\partial b}dz,$$

so verwandelt sich die Gleichung in:

$$d\Pi_1 + \frac{\left(\varphi_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial p} - \varphi_2\frac{\partial \varphi}{\partial p}\right)d\Pi}{M\Pi'(z)\left\{\Pi'(\varphi)\frac{\partial \varphi}{\partial p} + \Pi'(\varphi_1)\frac{\partial \varphi_1}{\partial p}\right\}} = d\Pi_1 =$$

$$\frac{\left\{\frac{\partial \varphi_1}{\partial p}\Pi'(z) + \left(\varphi_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial p} - \varphi_2\frac{\partial \varphi}{\partial p}\right)\Pi'(\varphi)\right\}d\varphi + \left\{-\frac{\partial \varphi}{\partial p}\Pi'(z) + \left(\varphi_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial p} - \varphi_2\frac{\partial \varphi}{\partial p}\right)\Pi'(\varphi_1)\right\}d\varphi_1}{M\Pi'(z)\left\{\Pi'(\varphi)\frac{\partial \varphi}{\partial p} + \Pi'(\varphi_1)\frac{\partial \varphi_1}{\partial p}\right\}}.$$

Substituirt man in diesem Ausdruck für $\Pi'(z)$ den Werth (§. 8.):

$$\Pi'(z) = -\Pi'(\varphi).\varphi_1 - \Pi'(\varphi_1).\varphi_2,$$

so kann man im Zähler und Nenner den Factor

$$\Pi'(\varphi)\frac{\partial \varphi}{\partial p} + \Pi'(\varphi_1)\frac{\partial \varphi_1}{\partial p}$$

fortheben und man erhält:

$$d\Pi_1 + \frac{\left\{\varphi_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial p} - \varphi_2\frac{\partial \varphi}{\partial p}\right\}d\Pi}{M\Pi'(z)\left\{\Pi'(\varphi)\frac{\partial \varphi}{\partial p} + \Pi'(\varphi_1)\frac{\partial \varphi_1}{\partial p}\right\}} = d\Pi_1 = \frac{\varphi_1 d\varphi_1 - \varphi_2 d\varphi}{M\Pi'(z)}.$$

Hat man also φ_2 und M durch φ, φ_1 und z ausgedrückt, und von den

Differentialgleichungen

$$d\varphi : d\varphi_1 : dz = \varphi_1 : \varphi_2 : 1$$

ein Integral

$$\Pi(\varphi, \varphi_1, z) = b$$

gefunden, vermittelst dessen man z durch φ und φ_1 ausdrückt, so hat man zur vollständigen Integration dieser Differentialgleichungen noch eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen φ und φ_1 zu integriren:

$$\varphi_1 d\varphi_1 - \varphi_2 d\varphi = 0.$$

Nach dem Obigen kann man aber zu dieser Gleichung immer den Multiplicator finden, indem

$$d\Pi_1 = \frac{\varphi_1 d\varphi_1 - \varphi_2 d\varphi}{M\Pi'(z)}$$

ein integrabler Ausdruck ist, wenn man vermittelst der Gleichung $\Pi = b$ in φ_2 und in dem Multiplicator

$$\frac{1}{M\Pi'(z)}$$

die Grösse z durch φ und φ_1 ausdrückt.

De aequationum differentialium isoperimetricarum transformationibus earumque reductione ad aequationem differentialem partialem primi ordinis non linearem.

Transformatio Prima.

1.

Proponatur integrale $\int U dt$ *Maximum Minimumve* reddere, sive proponatur aequatio

$$\delta \int U dt = 0,$$

designante δ notum variationis signum. Statuatur primum, expressionem U unicam involvere ipsius t functionem x una cum ejus differentialibus $x', x'', \ldots x^{(m)}$. Integranda erit aequatio differentialis $2m^{ti}$ ordinis

$$(1.) \qquad 0 = \frac{d^m U_m}{dt^m} - \frac{d^{m-1} U_{m-1}}{dt^{m-1}} \cdots \pm U_0,$$

in qua brevitatis causa posui

$$U_i = \frac{\partial U}{\partial x^{(i)}}, \quad U_0 = \frac{\partial U}{\partial x}.$$

Sit

$$(2.) \qquad \xi = U_m = \frac{\partial U}{\partial x^{(m)}},$$

ejusque aequationis ope e functione

$$(3.) \qquad V = U - x^{(m)} \xi$$

eliminetur $x^{(m)}$. Quam functionem ubi variamus habendo V pro quantitatum t, x, x', ... $x^{(m-1)}$, ξ functione, ipsam U autem pro quantitatum t, x, x', ... $x^{(m-1)}$, $x^{(m)}$ functione, rejectis terminis se mutuo destruentibus

$$\xi \delta x^{(m)} - \frac{\partial U}{\partial x^{(m)}} \delta x^{(m)},$$

prodit

$$\frac{\partial V}{\partial t}\delta t+\frac{\partial V}{\partial x}\delta x+\frac{\partial V}{\partial x'}\delta x'+\cdots+\frac{\partial V}{\partial x^{(m-1)}}\delta x^{(m-1)}+\frac{\partial V}{\partial \xi}\delta \xi$$

$$=\frac{\partial U}{\partial t}\delta t+\frac{\partial U}{\partial x}\delta x+\frac{\partial U}{\partial x'}\delta x'+\cdots+\frac{\partial U}{\partial x^{(m-1)}}\delta x^{(m-1)}-x^{(m)}\delta \xi.$$

Hinc obtinemus

$$\frac{\partial V}{\partial t}=\frac{\partial U}{\partial t},\quad \frac{\partial V}{\partial x}=\frac{\partial U}{\partial x},\quad \frac{\partial V}{\partial x'}=\frac{\partial U}{\partial x'},\quad \ldots$$

$$\frac{\partial V}{\partial x^{(m-1)}}=\frac{\partial U}{\partial x^{(m-1)}},\quad \frac{\partial V}{\partial \xi}=-x^{(m)},$$

vel si etiam ponimus $V_i=\dfrac{\partial V}{\partial x^{(i)}}$, $V_0=\dfrac{\partial V}{\partial x}$, fit

$$(4.)\qquad U_0=V_0,\; U_1=V_1,\; U_2=V_2,\;\ldots\; U_{m-1}=V_{m-1},\; U_m=\xi,\; \frac{\partial V}{\partial \xi}=-x^{(m)}.$$

Unde aequationi differentiali (1.) inter variabiles t et x propositae substitui potest hoc systema duarum aequationum:

$$(5.)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^m x}{dt^m} = -\dfrac{\partial V}{\partial \xi}, \\[2ex] \dfrac{d^m \xi}{dt^m} = \dfrac{d^{m-1}V_{m-1}}{dt^{m-1}}-\dfrac{d^{m-2}V_{m-2}}{dt^{m-2}}\cdots \pm V_0. \end{cases}$$

Differentiationes in dextra parte aequationis posterioris ita transigantur, ut post quamque differentiationem loco ipsius $dx^{(m-1)}$ substituatur ejus valor ex aequatione priore

$$dx^{(m-1)} = -\frac{\partial V}{\partial \xi}dt.$$

Unde aequationis illius dextra pars revocatur ad functionem quantitatum

$$t,\quad x,\quad x',\quad \ldots\quad x^{(m-1)},\quad \xi,\quad \xi',\quad \ldots\quad \xi^{(m-1)},$$

quam designabo per

$$(6.)\qquad \Xi = \frac{d^m \xi}{dt^m}.$$

Simul patet, ipsius Ξ unicum fore terminum ipsa $\xi^{(m-1)}$ affectum $\dfrac{\partial V_{m-1}}{\partial \xi}\xi^{(m-1)}$, e quantitate $\dfrac{d^{m-1}V_{m-1}}{dt^{m-1}}$ provenientem. Unde erit

$$(7.)\qquad \frac{\partial \Xi}{\partial \xi^{m-1}} = \frac{\partial V_{m-1}}{\partial \xi}.$$

Aequatio differentialis (1.) $2m^{\text{ti}}$ ordinis, inter x et t proposita, antecedentibus transformata est in systema duarum aequationum differentialium

m^{ti} ordinis inter t, x et ξ:

$$(8.) \qquad \frac{d^m x}{dt^m} = -\frac{\partial V}{\partial \xi}, \quad \frac{d^m \xi}{dt^m} = \Xi.$$

Quae aequationes differentiales ea forma gaudent, quam aequationibus differentialibus tanquam normalem tribuere convenit, in qua scilicet ad singularum aequationum alteram partem singularum variabilium dependentium differentialia altissima relegata sunt, ita ut alterae aequationum partes nonnisi inferiora involvunt differentialia.

Secundum praecepta in Commentatione *De Novo Multiplicatore* tradita definitur aequationum (8.) Multiplicator formula

$$\frac{d \log M}{dt} - \frac{\partial^2 V}{\partial \xi\, \partial x^{(m-1)}} + \frac{\partial \Xi}{\partial \xi^{(m-1)}} = 0.$$

Fit autem e (7.)

$$\frac{\partial \Xi}{\partial \xi^{(m-1)}} = \frac{\partial V_{m-1}}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^{(m-1)} \partial \xi}$$

unde

$$\frac{d \log M}{dt} = 0.$$

Quae docet formula, *aequationum* (8.), *in quas propositam transformari, Multiplicatorem esse unitati aequalem.*

2.

Faciamus jam, ipsam U duas involvere functiones x et y una cum earum differentialibus x', x'', ... $x^{(m)}$, y', y'', ... $y^{(n)}$. Posito

$$(1.) \qquad \frac{\partial U}{\partial x^{(m)}} = \xi, \quad \frac{\partial U}{\partial y^{(n)}} = v,$$

$$(2.) \qquad V = U - x^{(m)}\xi - y^{(n)} v,$$

sequitur:

$$\delta V = \frac{\partial U}{\partial t}\delta t + \frac{\partial U}{\partial x}\delta x + \frac{\partial U}{\partial x'}\delta x' + \cdots + \frac{\partial U}{\partial x^{(m-1)}}\delta x^{(m-1)} - x^{(m)}\delta \xi$$
$$+ \frac{\partial U}{\partial y}\delta y + \frac{\partial U}{\partial y'}\delta y' + \cdots + \frac{\partial U}{\partial y^{(n-1)}}\delta y^{(n-1)} - y^{(n)}\delta v,$$

rejectis terminis se mutuo destruentibus

$$\frac{\partial U}{\partial x^{(m)}}\delta x^{(m)} + \frac{\partial U}{\partial y^{(n)}}\delta y^{(n)} - \xi \delta x^{(m)} - v\, \delta y^{(n)}.$$

Unde si aequationum (1.) ope in ipsa V loco quantitatum $x^{(m)}$ et $y^{(n)}$ introducimus quantitates ξ et r, eruitur

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{\partial U}{\partial x},\quad \frac{\partial V}{\partial x'}=\frac{\partial U}{\partial x'},\quad \dots \quad \frac{\partial V}{\partial x^{(m-1)}}=\frac{\partial U}{\partial x^{(m-1)}},$$

$$\frac{\partial V}{\partial y}=\frac{\partial U}{\partial y},\quad \frac{\partial V}{\partial y'}=\frac{\partial U}{\partial y'},\quad \dots \quad \frac{\partial V}{\partial y^{(n-1)}}=\frac{\partial U}{\partial y^{(n-1)}},$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}=\frac{\partial U}{\partial t},\quad \frac{\partial V}{\partial \xi}=-x^{(m)},\quad \frac{\partial V}{\partial r}=-y^{(n)}.$$

His substitutis, aequationes differentiales, quae integrandae proponuntur:

$$(3.)\quad \begin{cases} 0=\dfrac{d^m\dfrac{\partial U}{\partial x^{(m)}}}{dt^m}-\dfrac{d^{m-1}\dfrac{\partial U}{\partial x^{(m-1)}}}{dt^{m-1}}\cdots\pm\dfrac{\partial U}{\partial x},\\[2ex] 0=\dfrac{d^n\dfrac{\partial U}{\partial y^{(n)}}}{dt^n}-\dfrac{d^{n-1}\dfrac{\partial U}{\partial y^{(n-1)}}}{dt^{n-1}}\cdots\pm\dfrac{\partial U}{\partial y},\end{cases}$$

abeunt in sequentes:

$$(4.)\quad \begin{cases} \dfrac{d^m x}{dt^m}=-\dfrac{\partial V}{\partial \xi},\quad \dfrac{d^n y}{dt^n}=-\dfrac{\partial V}{\partial r},\\[2ex] \dfrac{d^m \xi}{dt^m}=\dfrac{d^{m-1}\dfrac{\partial V}{\partial x^{(m-1)}}}{dt^{m-1}}-\dfrac{d^{m-2}\dfrac{\partial V}{\partial x^{(m-2)}}}{dt^{m-2}}+\cdots,\\[2ex] \dfrac{d^n r}{dt^n}=\dfrac{d^{n-1}\dfrac{\partial V}{\partial y^{(n-1)}}}{dt^{n-1}}-\dfrac{d^{n-2}\dfrac{\partial V}{\partial y^{(n-2)}}}{dt^{n-2}}+\cdots.\end{cases}$$

Si $n \leqq m$, in dextra parte aequationis postremae ita transigantur differentiationes, ut post unamquamque substituantur valores

$$\frac{dx^{(m-1)}}{dt}=-\frac{\partial V}{\partial \xi},\quad \frac{dy^{(n-1)}}{dt}=-\frac{\partial V}{\partial r},$$

unde quantitas ad dextram aequabitur functioni ipsarum

$$\begin{array}{llllll} t, & x, & x', & x'', & \dots & x^{(m-1)},\\ & y, & y', & y'', & \dots & y^{(n-1)},\\ & \xi, & \xi', & \xi'', & \dots & \xi^{(n-1)},\\ & r, & r', & r'', & \dots & r^{(n-1)},\end{array}$$

quam designo per

$$Y=\frac{d^n r}{dt^n}.$$

In qua functione ipsum $r^{(n-1)}$ tantum invenitur in unico termino, ex ipso

$$\frac{d^{n-1}\dfrac{\partial V}{\partial y^{(n-1)}}}{dt^{n-1}}$$

proveniente:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^{(n-1)}\partial v} v^{(n-1)},$$

unde fit:

$$(5.)\qquad \frac{\partial Y}{\partial v^{(n-1)}} = \frac{\partial^2 V}{\partial y^{(n-1)}\partial v}.$$

Deinde in expressione, quae ipsi $\frac{d^m \xi}{dt^m}$ aequatur, differentiationes ita transigendae sunt, ut post quamque differentiationem ipsis $dx^{(m-1)}$, $dy^{(n-1)}$ substituantur valores $-\frac{\partial V}{\partial \xi}dt$, $-\frac{\partial V}{\partial v}dt$, atque insuper ubi ipsum $\frac{d^n v}{dt^n} = v^{(n)}$ differentiatione provenit, ei valor Y substituatur. Unde ipsum $\frac{d^m \xi}{dt^m}$ aequale invenitur functioni quantitatum

$$\begin{array}{cccccccc} t, & x, & x', & \dots & x^{(m-1)}, & y, & y', & \dots & y^{(n-1)}, \\ & \xi, & \xi', & \dots & \xi^{(m-1)}, & v, & v', & \dots & v^{(n-1)}, \end{array}$$

quae designetur per

$$\Xi = \frac{d^m \xi}{dt^m}.$$

In qua functione ipsum $\xi^{(m-1)}$ tantum invenitur in unico termino, ex ipso

$$\frac{d^{m-1}\frac{\partial V}{\partial x^{(m-1)}}}{dt^{m-1}}$$

proveniente:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^{(m-1)}\partial \xi}\xi^{(m-1)},$$

unde fit:

$$(6.)\qquad \frac{\partial \Xi}{\partial \xi^{(m-1)}} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^{(m-1)}\partial \xi}.$$

Aequationes differentiales quatuor

$$(7.)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^m x}{dt^m} = -\dfrac{\partial V}{\partial \xi}, & \dfrac{d^n y}{dt^n} = -\dfrac{\partial V}{\partial v}, \\ \dfrac{d^m \xi}{dt^m} = \Xi, & \dfrac{d^n v}{dt^n} = Y, \end{cases}$$

in quas systema duarum aequationum propositarum (3.) transformatum est, dextris partibus gaudent, quae nonnisi inferiora differentialia implicant iis, quae in laeva parte posita sunt. Unde aequatio differentialis, qua ipsarum (7.) Multiplicator definitur, fit

$$-\frac{d\log M}{dt} = -\frac{\partial^2 V}{\partial \xi\,\partial x^{(m-1)}} - \frac{\partial^2 V}{\partial v\,\partial y^{(n-1)}} + \frac{\partial \Xi}{\partial \xi^{(m-1)}} + \frac{\partial Y}{\partial v^{(n-1)}}.$$

Cujus dextra pars secundum (5.) et (6.) identice evanescit, unde ponere licet $M = 1$.

Eadem methodus casui applicari potest, quo functio U praeter variabilem independentem t implicat quotlibet functiones $x_1, x_2, \ldots x_n$ una cum earum differentialibus, quae respective in ipsa U ad ordinem $m_1^{\text{tum}}, m_2^{\text{tum}}, \ldots m_n^{\text{tum}}$ ascendant. Introducendo ipsarum $x_1^{(m_1)}, x_2^{(m_2)}, \ldots x_n^{(m_n)}$ loco quantitates

$$\xi_1 = \frac{\partial U}{\partial x_1^{(m_1)}}, \quad \xi_2 = \frac{\partial U}{\partial x_2^{(m_2)}}, \quad \ldots \quad \xi_n = \frac{\partial U}{\partial x_n^{(m_n)}},$$

poterunt n aequationes differentiales integrandae in alias $2n$ transformari, quibus differentialia

$$\frac{d^{m_1} x_1}{dt^{m_1}}, \quad \frac{d^{m_2} x_2}{dt^{m_2}}, \quad \ldots \quad \frac{d^{m_n} x_n}{dt^{m_n}},$$

$$\frac{d^{m_1} \xi_1}{dt^{m_1}}, \quad \frac{d^{m_2} \xi_2}{dt^{m_2}}, \quad \ldots \quad \frac{d^{m_n} \xi_n}{dt^{m_n}}$$

exprimuntur per formulas nonnisi ipsis illis inferiora differentialia involventes. Quarum aequationum differentialium Multiplicator aequabitur *unitati*.

Transformatio altera. Reductio problematum isoperimetricorum ad aequationes differentiales partiales primi ordinis non lineares.

Jam alteram tradam transformationem valde memorabilem aequationum differentialium, a quarum integratione solutio aequationis

$$\delta \int U dt = 0$$

pendet. Methodus adhibenda quum sine negotio ad quemlibet functionum numerum pateat, sufficiet eam tribus ipsius t functionibus x, y, z applicare, quae ipsam U afficiant una cum earum differentialibus

$$x', \quad x'', \quad \ldots \quad x^{(m)}, \quad y', \quad y'', \quad \ldots \quad y^{(n)}, \quad z', \quad z'', \quad \ldots \quad z^{(p)}.$$

Sunt eo casu tres aequationes differentiales integrandae sequentes:

$$(1.)\quad \begin{cases} 0 = \dfrac{d^m \dfrac{\partial U}{\partial x^{(m)}}}{dt^m} - \dfrac{d^{m-1} \dfrac{\partial U}{\partial x^{(m-1)}}}{dt^{m-1}} \cdots \pm \dfrac{\partial U}{\partial x}, \\[2ex] 0 = \dfrac{d^n \dfrac{\partial U}{\partial y^{(n)}}}{dt^n} - \dfrac{d^{n-1} \dfrac{\partial U}{\partial y^{(n-1)}}}{dt^{n-1}} \cdots \pm \dfrac{\partial U}{\partial y}, \\[2ex] 0 = \dfrac{d^p \dfrac{\partial U}{\partial z^{(p)}}}{dt^p} - \dfrac{d^{p-1} \dfrac{\partial U}{\partial z^{(p-1)}}}{dt^{p-1}} \cdots \pm \dfrac{\partial U}{\partial z}. \end{cases}$$

Pono:

$$
(2.)\qquad
\left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial U}{\partial x^{(m)}} = \xi,\\
&\frac{\partial U}{\partial x^{(m-1)}} - \frac{d\frac{\partial U}{\partial x^{(m)}}}{dt} = \xi_1,\\
&\frac{\partial U}{\partial x^{(m-2)}} - \frac{d\frac{\partial U}{\partial x^{(m-1)}}}{dt} + \frac{d^2\frac{\partial U}{\partial x^{(m)}}}{dt^2} = \xi_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{\partial U}{\partial x'} - \frac{d\frac{\partial U}{\partial x''}}{dt} - \frac{d^2\frac{\partial U}{\partial x'''}}{dt^2} \cdots \pm \frac{d^{m-1}\frac{\partial U}{\partial x^{(m)}}}{dt^{m-1}} = \xi_{m-1};\\
&\frac{\partial U}{\partial y^{(n)}} = v,\\
&\frac{\partial U}{\partial y^{(n-1)}} - \frac{d\frac{\partial U}{\partial y^{(n)}}}{dt} = v_1,\\
&\frac{\partial U}{\partial y^{(n-2)}} - \frac{d\frac{\partial U}{\partial y^{(n-1)}}}{dt} + \frac{d^2\frac{\partial U}{\partial y^{(n)}}}{dt^2} = v_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{\partial U}{\partial y'} - \frac{d\frac{\partial U}{\partial y''}}{dt} + \frac{d^2\frac{\partial U}{\partial y'''}}{dt^2} \cdots \pm \frac{d^{n-1}\frac{\partial U}{\partial y^{(n)}}}{dt^{n-1}} = v_{n-1};\\
&\frac{\partial U}{\partial z^{(p)}} = \zeta,\\
&\frac{\partial U}{\partial z^{(p-1)}} - \frac{d\frac{\partial U}{\partial z^{(p)}}}{dt} = \zeta_1,\\
&\frac{\partial U}{\partial z^{(p-2)}} - \frac{d\frac{\partial U}{\partial z^{(p-1)}}}{dt} + \frac{d^2\frac{\partial U}{\partial z^{(p)}}}{dt^2} = \zeta_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{\partial U}{\partial z'} - \frac{d\frac{\partial U}{\partial z''}}{dt} + \frac{d^2\frac{\partial U}{\partial z'''}}{dt^2} \cdots \pm \frac{d^{p-1}\frac{\partial U}{\partial z^{(p)}}}{dt^{p-1}} = \zeta_{p-1}.
\end{aligned}
\right.
$$

Ex his expressionibus sequitur:

$$
(3.)\quad\begin{cases}
\dfrac{\partial U}{\partial x^{(m)}} = \xi, & \dfrac{\partial U}{\partial y^{(n)}} = v, & \dfrac{\partial U}{\partial z^{(p)}} = \zeta, \\[2ex]
\dfrac{\partial U}{\partial x^{(m-1)}} = \xi_1 \quad + \dfrac{d\xi}{dt}, & \dfrac{\partial U}{\partial y^{(n-1)}} = v_1 \quad + \dfrac{dv}{dt}, & \dfrac{\partial U}{\partial z^{(p-1)}} = \zeta_1 \quad + \dfrac{d\zeta}{dt}, \\[2ex]
\dfrac{\partial U}{\partial x^{(m-2)}} = \xi_2 \quad + \dfrac{d\xi_1}{dt}, & \dfrac{\partial U}{\partial y^{(n-2)}} = v_2 \quad + \dfrac{dv_1}{dt}, & \dfrac{\partial U}{\partial z^{(p-2)}} = \zeta_2 \quad + \dfrac{d\zeta_1}{dt}, \\
\dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\
\dfrac{\partial U}{\partial x'} = \xi_{m-1} + \dfrac{d\xi_{m-2}}{dt}, & \dfrac{\partial U}{\partial y'} = v_{n-1} + \dfrac{dv_{n-2}}{dt}, & \dfrac{\partial U}{\partial z'} = \zeta_{p-1} + \dfrac{d\zeta_{p-2}}{dt}.
\end{cases}
$$

His aequationibus jungendae sunt sequentes, quae ex ipsis aequationibus differentialibus propositis fluunt:

$$
(4.)\qquad \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{d\xi_{m-1}}{dt}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{dv_{n-1}}{dt}, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{d\zeta_{p-1}}{dt}.
$$

Ponatur jam:

$$
V = U - x^{(m)}\xi - y^{(n)}v - z^{(p)}\zeta,
$$

sequitur rejiciendo terminos se mutuo destruentes:

$$
\begin{aligned}
\delta V = {} & \frac{\partial U}{\partial t}\delta t + \frac{\partial U}{\partial x}\delta x + \frac{\partial U}{\partial x'}\delta x' + \cdots + \frac{\partial U}{\partial x^{(m-1)}}\delta x^{(m-1)} - x^{(m)}\delta\xi, \\
& + \frac{\partial U}{\partial y}\delta y + \frac{\partial U}{\partial y'}\delta y' + \cdots + \frac{\partial U}{\partial y^{(n-1)}}\delta y^{(n-1)} - y^{(n)}\delta v, \\
& + \frac{\partial U}{\partial z}\delta z + \frac{\partial U}{\partial z'}\delta z' + \cdots + \frac{\partial U}{\partial z^{(p-1)}}\delta z^{(p-1)} - z^{(p)}\delta\zeta.
\end{aligned}
$$

Sit $x^{(i)}$ una quantitatum $x, x', \dots x^{(m-1)}$, atque $y^{(i)}$ una quantitatum $y, y', \dots y^{(n-1)}$, et $z^{(i)}$ una quantitatum $z, z', \dots z^{(p-1)}$: patet e formula praecedente fieri

$$
(5.)\quad\begin{cases}
\left(\dfrac{\partial V}{\partial x^{(i)}}\right) = \dfrac{\partial U}{\partial x^{(i)}}, & \left(\dfrac{\partial V}{\partial y^{(i)}}\right) = \dfrac{\partial U}{\partial y^{(i)}}, & \left(\dfrac{\partial V}{\partial z^{(i)}}\right) = \dfrac{\partial U}{\partial z^{(i)}}, \\[2ex]
\left(\dfrac{\partial V}{\partial \xi}\right) = -x^{(m)}, & \left(\dfrac{\partial V}{\partial v}\right) = -y^{(n)}, & \left(\dfrac{\partial V}{\partial \zeta}\right) = -z^{(p)},
\end{cases}
$$

ubi uncis includendo differentialia partialia innuo, ipsarum $x^{(m)}$, $y^{(n)}$, $z^{(p)}$ loco introducendas esse ξ, v, ζ in variabilium independentium systema ad quod differentiationes partiales referuntur. Quae ipsarum $x^{(m)}$, $y^{(n)}$, $z^{(p)}$ eliminatio efficienda est ope aequationum supra propositarum:

$$
\frac{\partial U}{\partial x^{(m)}} = \xi, \quad \frac{\partial U}{\partial y^{(n)}} = v, \quad \frac{\partial U}{\partial z^{(p)}} = \zeta.
$$

E formulis (5.) sequitur ipsius U per V expressio:

$$U = V - \xi\left(\frac{\partial V}{\partial \xi}\right) - v\left(\frac{\partial V}{\partial v}\right) - \zeta\left(\frac{\partial V}{\partial \zeta}\right).$$

Substituendo (5.) in aequationibus (3.) et (4.), jam uncis omissis *hoc nanciscimur systema aequationum differentialium vulgarium transformatum:*

$$(6.)\quad \left\{\begin{array}{lll}
\dfrac{d^m x}{dt^m} = -\dfrac{\partial V}{\partial \xi}, & \dfrac{d^n y}{dt^n} = -\dfrac{\partial V}{\partial v}, & \dfrac{d^p z}{dt^p} = -\dfrac{\partial V}{\partial \zeta}, \\[2ex]
\dfrac{d\xi}{dt} = \dfrac{\partial V}{\partial x^{(m-1)}} - \xi_1, & \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{\partial V}{\partial y^{(n-1)}} - v_1, & \dfrac{d\zeta}{dt} = \dfrac{\partial V}{\partial z^{(p-1)}} - \zeta_1, \\[2ex]
\dfrac{d\xi_1}{dt} = \dfrac{\partial V}{\partial x^{(m-2)}} - \xi_2, & \dfrac{dv_1}{dt} = \dfrac{\partial V}{\partial y^{(n-2)}} - v_2, & \dfrac{d\zeta_1}{dt} = \dfrac{\partial V}{\partial z^{(p-2)}} - \zeta_2, \\[2ex]
\dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\[2ex]
\dfrac{d\xi_{m-2}}{dt} = \dfrac{\partial V}{\partial x'} - \xi_{m-1}, & \dfrac{dv_{n-2}}{dt} = \dfrac{\partial V}{\partial y'} - v_{n-1}, & \dfrac{d\zeta_{p-2}}{dt} = \dfrac{\partial V}{\partial z'} - \zeta_{p-1}, \\[2ex]
\dfrac{d\xi_{m-1}}{dt} = \dfrac{\partial V}{\partial x}, & \dfrac{dv_{n-1}}{dt} = \dfrac{\partial V}{\partial y}, & \dfrac{d\zeta_{p-1}}{dt} = \dfrac{\partial V}{\partial z}.
\end{array}\right.$$

Aequationes Differentiales antecedentes, quae locum tenent trium aequationum differentialium propositarum (1.), constituunt systema $m+n+p+3$ aequationum differentialium inter variabiles:

$$t,\quad x,\quad y,\quad z,$$

$$\xi,\quad \xi_1,\quad \dots\quad \xi_{m-1},\quad v,\quad v_1,\quad \dots\quad v_{n-1},\quad \zeta,\quad \zeta_1,\quad \dots\quad \zeta_{p-1},$$

quarum aequationum tres sunt resp. ordinis m^{ti}, n^{ti}, p^{ti}, reliquae omnes $m+n+p$ primi ordinis. Atque gaudent aequationes forma illa quasi canonica, qua in dextra parte inferiora tantum differentialia inveniuntur, quam quae ad laevam posita sunt. In quam formam jam redactae sunt aequationes differentiales propositae, nullis factis differentiationibus, quae in priore transformatione requirebantur, neque aliis adhibitis eliminationibus, quam quod ipsarum $x^{(m)}$, $y^{(n)}$, $z^{(p)}$ loco introducendae erant in functione

$$V = U - x^{(m)}\frac{\partial U}{\partial x^{(m)}} - y^{(n)}\frac{\partial U}{\partial y^{(n)}} - z^{(p)}\frac{\partial U}{\partial z^{(p)}}$$

quantitates

$$\xi = \frac{\partial U}{\partial x^{(m)}},\quad v = \frac{\partial U}{\partial y^{(n)}},\quad \zeta = \frac{\partial U}{\partial z^{(p)}}.$$

Porro facile aequationum antecedentium (6.) invenitur Multiplicator M.

Nam quum aequationes illae forma canonica gaudeant, aequatur $-\frac{d\log M}{dt}$ aggregato differentialium partialium expressionum, quae ad dextram positae sunt, siquidem harum expressionum quaeque ejus respectu quantitatis differentiatur, cujus differentiali aequatur. At e numero aequationum (6.) sunt tantum sex, videlicet

$$\frac{d^m x}{dt^m} = -\frac{\partial V}{\partial \xi}, \quad \frac{d^n y}{dt^n} = -\frac{\partial V}{\partial v}, \quad \frac{d^p z}{dt^p} = -\frac{\partial V}{\partial \zeta},$$

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x^{(m-1)}} - \xi_1, \quad \frac{dv}{dt} = \frac{\partial V}{\partial y^{(n-1)}} - v_1, \quad \frac{d\zeta}{dt} = \frac{\partial V}{\partial z^{(p-1)}} - \zeta_1,$$

in quibus dextrae partes non iis vacant quantitatibus, quarum differentialibus aequantur. Secundum regulam assignatam trium priorum aequationum dextrae partes resp. differentiandae erunt ipsarum $x^{(m-1)}$, $y^{(n-1)}$, $z^{(p-1)}$ respectu, trium posteriorum dextrae partes ipsarum ξ, v, ζ respectu omniumque sex differentialium partialium provenientium formandum erit aggregatum. Quod patet aggregatum identice evanescere, binis terminis

$$-\frac{\partial^2 V}{\partial \xi \partial x^{(m-1)}} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^{(m-1)} \partial \xi},$$

$$-\frac{\partial^2 V}{\partial v \partial y^{(n-1)}} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^{(n-1)} \partial v},$$

$$-\frac{\partial^2 V}{\partial \zeta \partial z^{(p-1)}} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^{(p-1)} \partial \zeta}$$

sese mutuo destruentibus. Unde fit

$$\frac{d\log M}{dt} = 0,$$

sive aequationum differentialium transformatarum (5.) Multiplicatorem aequare licet *unitati*.

Aequationibus differentialibus (6.) formam conciliare licet magis concinnam ponendo

$$(7.) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi = V &- \xi_1 x^{(m-1)} - \xi_2 x^{(m-2)} - \dots - \xi_{m-1} x' \\ &- v_1 y^{(n-1)} - v_2 y^{(n-2)} - \dots - v_{n-1} y' \\ &- \zeta_1 z^{(p-1)} - \zeta_2 z^{(p-2)} - \dots - \zeta_{p-1} z'. \end{aligned} \right.$$

Sic enim introducendo functionem φ loco ipsius V, hoc modo repraesentari poterit aequationum vulgarium (6.) systema:

$$
(8.)\quad\left\{\begin{array}{ll}
\dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial\xi_{m-1}}, & \dfrac{d\xi_{m-1}}{dt} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}, \\
\dfrac{dx'}{dt} = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial\xi_{m-2}}, & \dfrac{d\xi_{m-2}}{dt} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x'}, \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots \\
\dfrac{dx^{(m-1)}}{dt} = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial\xi}, & \dfrac{d\xi}{dt} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x^{(m-1)}}, \\
\dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial v_{n-1}}, & \dfrac{dv_{n-1}}{dt} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}, \\
\dfrac{dy'}{dt} = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial v_{n-2}}, & \dfrac{dv_{n-2}}{dt} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial y'}, \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots \\
\dfrac{dy^{(n-1)}}{dt} = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}, & \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial y^{(n-1)}}, \\
\dfrac{dz}{dt} = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial\zeta_{p-1}}, & \dfrac{d\zeta_{p-1}}{dt} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial z}, \\
\dfrac{dz'}{dt} = -\dfrac{d\varphi}{d\zeta_{p-2}}, & \dfrac{d\zeta_{p-2}}{dt} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial z'}, \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots \\
\dfrac{dz^{(p-1)}}{dt} = -\dfrac{d\varphi}{d\zeta}, & \dfrac{d\zeta}{dt} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial z^{(p-1)}}.
\end{array}\right.
$$

Videlicet quum functio V omnino non involvat quantitates

$$\xi_1,\quad \xi_2,\quad \ldots\quad \xi_{m-1},\quad v_1,\quad v_2,\quad \ldots\quad v_{n-1},\quad \zeta_1,\quad \zeta_2,\quad \ldots\quad \zeta_{p-1},$$

fit e (7.) excluso valore $i=0$:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_i} &= -x^{(m-i)} = -\frac{dx^{(m-i-1)}}{dt}, \\
\frac{\partial\varphi}{\partial v_i} &= -y^{(n-i)} = -\frac{dy^{(n-i-1)}}{dt}, \\
\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta_i} &= -z^{(p-i)} = -\frac{dz^{(p-i-1)}}{dt},
\end{aligned}
$$

porro

$$
\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} = \frac{\partial V}{\partial\xi},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial v} = \frac{\partial V}{\partial v},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial\zeta} = \frac{\partial V}{\partial\zeta},
$$

$$
\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial x},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial y},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\partial V}{\partial z},
$$

$$
\frac{\partial\varphi}{\partial x^{(m-i)}} = \frac{\partial V}{\partial x^{(m-i)}} - \xi_i,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y^{(n-i)}} = \frac{\partial V}{\partial y^{(n-i)}} - v_i,\quad \frac{\partial V}{\partial z^{(p-i)}} = \frac{\partial V}{\partial z^{(p-i)}} - \zeta_i.
$$

Quas formulas substituendo ex aequationibus differentialibus (6.) antecedentes (8.) prodeunt.

Demonstravi, designante φ functionem quamcunque quantitatum

$$t,\quad q_1,\quad q_2,\quad \ldots\quad q_m,\quad p_1,\quad p_2,\quad \ldots\quad p_m$$

systema aequationum differentialium vulgarium:

$$(9.)\quad \begin{cases} \dfrac{dq_1}{dt} = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial p_1}, & \dfrac{dp_1}{dt} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial q_1}, \\ \dfrac{dq_2}{dt} = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial p_2}, & \dfrac{dp_2}{dt} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial q_2}, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \dfrac{dq_m}{dt} = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial p_m}, & \dfrac{dp_m}{dt} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial q_m} \end{cases}$$

arctissimo vinculo connexum esse cum aequatione differentiali primi ordinis

$$(10.)\qquad \frac{\partial W}{\partial t} = \varphi,$$

in qua quantitates p_i designant differentialia partialia functionis incognitae W ipsarum q_i respectu sumta. Sit enim W solutio completa aequationis differentialis partialis (10.), affecta praeter Constantem additione jungendam m Constantibus Arbitrariis $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$, datur aequationum differentialium vulgarium integratio completa formulis:

$$(11.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial q_1} = p_1, & \dfrac{\partial W}{\partial q_2} = p_2, & \ldots & \dfrac{\partial W}{\partial q_m} = p_m, \\ \dfrac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \beta_1, & \dfrac{\partial W}{\partial \alpha_2} = \beta_2, & \ldots & \dfrac{\partial W}{\partial \alpha_m} = \beta_m, \end{cases}$$

designantibus $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_m$ novas Constantes Arbitrarias, una cum ipsis α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_m$, quae functionem W afficiunt, numerum Constantium Arbitrariarum requisitum $2m$ implentes. Vice versa si aequationum (9.) integratione completa eruuntur valores quantitatum $q_1, q_2, \ldots q_m, p_1, p_2, \ldots p_m$ exhibiti per quantitatem t ipsarumque valores initiales

$$q_1^0,\quad q_2^0,\quad \ldots\quad q_m^0,\quad p_1^0,\quad p_2^0,\quad \ldots\quad p_m^0,$$

obtinetur aequationis differentialis partialis (10.) solutio completa W per formulam

$$(12.)\qquad W = \int \left\{ \varphi - p_1\frac{\partial\varphi}{\partial p_1} - p_2\frac{\partial\varphi}{\partial p_2} - \cdots - p_m\frac{\partial\varphi}{\partial p_m} \right\} dt,$$

siquidem post integrationem factam ope aequationum integralium mutetur functio quantitatum $t, q_1^0, q_2^0, \ldots q_m^0, p_1^0, p_2^0, \ldots p_m^0$ sic inventa in aliam quantitatum

$$q_1,\quad q_2,\quad \ldots\quad q_m,\quad q_1^0,\quad q_2^0,\quad \ldots\quad q_m^0.$$

Scilicet per $2m$ aequationes integrales, quae inter $2m+1$ variabiles atque $2m$ Constantes Arbitrarias locum habent, quamlibet harum $4m+1$ quantitatum functionem in aliam mutare licet, quae quaslibet $2m+1$ ex earum numero solas involvat.

Systema aequationum differentialium (8.) ipso intuitu patet eadem gaudere forma atque aequationes (9.), modo ipsis q_1, q_2, ... q_m substituantur $m+n+p$ quantitates

$$x,\ x',\ \ldots\ x^{(m-1)};\quad y,\ y',\ \ldots\ y^{(n-1)};\quad z,\ z',\ \ldots\ z^{(p-1)},$$

ipsis vero p_1, p_2, ... p_m quantitates

$$\xi_{m-1},\ \xi_{m-2},\ \ldots\ \xi;\quad v_{n-1},\ v_{n-2},\ \ldots\ v;\quad \zeta_{p-1},\ \zeta_{p-2},\ \ldots\ \zeta.$$

Unde aequationum differentialium (8.) integratio completa eruitur quaerendo variabilium

$$t,\ x,\ x',\ \ldots\ x^{(m-1)},\ y,\ y',\ \ldots\ y^{(n-1)},\ z,\ z',\ \ldots\ z^{(p-1)}$$

functionem W, praeter Constantem additione accedentem affectam $m+n+p$ Constantibus Arbitrariis, quae satisfaciat aequationi differentiali partiali

$$(13.)\qquad \frac{\partial W}{\partial t} = \varphi,$$

siquidem in ipsa φ quantitatibus

$$\xi_{m-1},\ \xi_{m-2},\ \ldots\ \xi,\ v_{n-1},\ v_{n-2},\ \ldots\ v,\ \zeta_{p-1},\ \zeta_{p-2},\ \ldots\ \zeta$$

substituantur respective functionis W differentialia partialia

$$\begin{array}{cccc}
\dfrac{\partial W}{\partial x}, & \dfrac{\partial W}{\partial x'}, & \ldots & \dfrac{\partial W}{\partial x^{(m-1)}},\\[2ex]
\dfrac{\partial W}{\partial y}, & \dfrac{\partial W}{\partial y'}, & \ldots & \dfrac{\partial W}{\partial y^{(n-1)}},\\[1ex]
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\[1ex]
\dfrac{\partial W}{\partial z}, & \dfrac{\partial W}{\partial z'}, & \ldots & \dfrac{\partial W}{\partial z^{(p-1)}}.
\end{array}$$

Quum sit e (7.)

$$\begin{aligned}
\varphi = V &- \xi_1 x^{(m-1)} - \xi_2 x^{(m-2)} - \cdots - \xi_{m-1} x'\\
&- v_1 y^{(n-1)} - v_2 y^{(n-2)} - \cdots - v_{n-1} y'\\
&- \zeta_1 z^{(p-1)} - \zeta_2 z^{(p-2)} - \cdots - \zeta_{p-1} z',
\end{aligned}$$

designante V functionem quantitatum

$$t,\ x,\ x',\ \ldots\ x^{(m-1)};\ y,\ y',\ \ldots\ y^{(n-1)};\ z,\ z',\ \ldots\ z^{(p-1)};\ \xi,\ v,\ \zeta;$$

poterit aequatio differentialis partialis (13.) hoc modo repraesentari:

$$(14.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial t}+x'\dfrac{\partial W}{\partial x}+x''\dfrac{\partial W}{\partial x'}+\cdots+x^{(m-1)}\dfrac{\partial W}{\partial x^{(m-2)}} \\ \quad +y'\dfrac{\partial W}{\partial y}+y''\dfrac{\partial W}{\partial y'}+\cdots+y^{(n-1)}\dfrac{\partial W}{\partial y^{(n-2)}} \\ \quad +z'\dfrac{\partial W}{\partial z}+z''\dfrac{\partial W}{\partial z'}+\cdots+z^{(p-1)}\dfrac{\partial W}{\partial z^{(p-2)}} = V, \end{cases}$$

ubi functio V praeter variabiles independentes sola involvit differentialia partialia

$$\frac{\partial W}{\partial x^{(m-1)}},\quad \frac{\partial W}{\partial y^{(n-1)}},\quad \frac{\partial W}{\partial z^{(p-1)}}.$$

Videmus igitur aequationem differentialem partialem (14.) et ab ipsa functione incognita vacuam esse, et omnia praeter tria differentialia partialia tantum lineariter implicare.

Si in formula (12.) evenit ut functio φ complures quantitatum p_1, p_2, ... p_m tantum lineariter implicet, illae omnino abeunt e quantitate quae sub signo integrationis est:

$$\varphi-p_1\frac{\partial\varphi}{\partial p_1}-p_2\frac{\partial\varphi}{\partial p_2}-\cdots-p_m\frac{\partial\varphi}{\partial p_m}.$$

Unde casu nostro haec quantitas simpliciter evadit:

$$V-\xi\frac{\partial V}{\partial\xi}-v\frac{\partial V}{\partial v}-\zeta\frac{\partial V}{\partial\zeta} = U,$$

quum omnia $\xi_{\prime}$, $v_{\prime}$, $\zeta_{\prime}$ praeter ipsa ξ, v, ζ functionem φ tantum lineariter afficiant. Hinc e formula (12.) eruitur

$$(15.)\qquad W = \int U dt.$$

Quae supponit formula, aequationibus differentialibus (8.) complete integratis, expressas esse variabiles omnes per t ipsarumque valores initiales, unde etiam U solius t functio evadit; post integrationem autem ope aequationum integralium quantitates omnes $\xi_{\prime}$, $v_{\prime}$, $\zeta_{\prime}$ una cum earum valoribus initialibus eliminari, unde W ipsius t atque solarum $x_{\prime}$, $y_{\prime}$, $z_{\prime}$ earumque valorum initialium functio fit, quae erit aequationis differentialis partialis (14.) solutio completa.

Si reductio problematis isoperimetrici ad aequationem differentialem partialem primi ordinis, antecedentibus pro tribus functionibus explicata, extenditur ad numerum quemlibet functionum ipsam U afficientium, nanciscimur hanc Propositionem:

Propositio de reductione problematum isoperimetricorum ad aequationes differentiales partiales primi ordinis.

Implicet U praeter variabilem independentem t ejus functiones incognitas quotcunque x_1, x_2, ... una cum earum differentialibus

$$x_1', \quad x_1'', \quad \dots \quad x_1^{(\alpha)}; \quad x_2', \quad x_2'', \quad \dots \quad x_2^{(\beta)}; \quad \text{etc.}$$

functiones x_1, x_2, ... ita determinandae proponuntur ut fiat

$$\delta \int U dt = 0;$$

eum in finem pono

$$\frac{\partial U}{\partial x_1^{(\alpha)}} = \frac{\partial W}{\partial x_1^{(\alpha-1)}}, \quad \frac{\partial U}{\partial x_2^{(\beta)}} = \frac{\partial W}{\partial x_2^{(\beta-1)}}, \quad \text{etc.},$$

earumque aequationum ope elimino $x_1^{(\alpha)}$, $x_2^{(\beta)}$ etc. de functione

$$V = U - x_1^{(\alpha)} \frac{\partial W}{\partial x_1^{(\alpha-1)}} - x_2^{(\beta)} \frac{\partial W}{\partial x_2^{(\beta-1)}} - \text{etc.},$$

quo facto evadit V functio quantitatum

$$t, \quad x_1, \quad x_1', \quad \dots \quad x_1^{(\alpha-1)}; \quad x_2, \quad x_2', \quad \dots \quad x_2^{(\beta-1)}; \quad \text{etc.};$$

quas pro variabilibus independentibus habeo, atque differentialium partialium

$$\frac{\partial W}{\partial x_1^{(\alpha-1)}}, \quad \frac{\partial W}{\partial x_2^{(\beta-1)}}, \quad \text{etc.};$$

eruta functione V, formo aequationem differentialem partialem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} + x_1' \frac{\partial W}{\partial x_1} + x_1'' \frac{\partial W}{\partial x_1'} + \dots + x_1^{(\alpha-1)} \frac{\partial W}{\partial x^{(\alpha-2)}} & \\ + x_2' \frac{\partial W}{\partial x_2} + x_2'' \frac{\partial W}{\partial x_2'} + \dots + x_2^{(\beta-1)} \frac{\partial W}{\partial x_2^{(\beta-2)}} & \\ + \cdots & \\ = V; & \end{aligned}$$

cujus inventa sit solutio completa W, quae praeter Constantem additione accedentem involvit Constantes $\mu = \alpha + \beta + \cdots$ Arbitrarias a_1, a_2, ... a_μ, numero μ aequante summam ordinum ad quos in ipsa U singularum functionum incognitarum differentialia ascendunt; determinabuntur functiones incognitae x_1, x_2, ... earumque differentialia

$$x_1', \quad x_1'', \quad \dots \quad x_1^{(\alpha-1)}; \quad x_2', \quad x_2'', \quad \dots \quad x_2^{(\beta-1)}; \quad \text{etc.}$$

per μ aequationes sequentes inter illas μ quantitates ipsamque t:

$$\frac{\partial W}{\partial a_1} = b_1, \quad \frac{\partial W}{\partial a_2} = b_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial W}{\partial a_\mu} = b_\mu,$$

in quibus designant $b_1, b_2, \ldots b_\mu$ novas Constantes Arbitrarias.

Ad aequationes differentiales partiales primi ordinis etiam revocari possunt problemata isoperimetrica, in quibus inter functiones incognitas variae dantur aequationes differentiales conditionales, atque adeo functio U, quae sub signo integrationis invenitur, tantum per aequationem differentialem datur cui satisfacere debet. Sed non amplius generaliter assignare licet Multiplicatorem systematis aequationum differentialium vulgarium a cujus integratione problemata illa pendent.

De aequationum differentialium systemate non normali ad formam normalem revocando *).

In commentatione mea „Theoria novi Multiplicatoris etc.“ **) Multiplicatorem determinavi aequationum differentialium *isoperimetricarum* i. e. ad problemata illa isoperimetrica pertinentium, in quibus variatio dati integralis variabilem unam independentem, ceteras dependentes continentis ad nihilum redigitur. Quam determinationem multo majoribus difficultatibus obnoxiam esse exposui, si variabilium dependentium differentialia altissima datum integrale afficientia non ejusdem ordinis sint. Eo enim casu aequationum differentialium isoperimetricarum systema non ea gaudet forma, ut singularum variabilium dependentium differentialia altissima pro incognitis haberi possint, quarum valores ipsis aequationibus differentialibus determinentur. Ad quam formam casu quem innui aequationes differentiales isoperimetricae post certas tantum differentiationes et eliminationes revocantur, id quod Multiplicatoris valorem indagandi negotium intricatum reddit.

Operae pretium duxi totam materiem de aequationum differentialium systemate non normali ad formam normalem revocando accurate tractare. In qua disquisitione ad propositiones quasdam generales perveni, quae theoriae aequationum differentialium vulgarium lacunam quandam implere videntur et quarum summam hic breviter indicabo.

*) Alia Ill. *Jacobi* commentatio postuma de eadem quaestione demonstrationes regularum hic enuntiatarum continens invenitur in Diarii mathematici vol. 64, p. 297.

**) §§ 30—33 commentationis citatae, Diarii *Crell.* vol. 29 sive Opusculorum math. vol. I.

§. 1.

Systematis m aequationum differentialium ordo et brevissima in formam normalem reductio determinantur per solutionem problematis, datum m^2 quantitatum schema quadraticum per numeros minimos $l_1, l_2, \ldots l_m$ singulis horizontalibus addendos ita transformandi, ut m maximorum transversalium systemate praeditum evadat. Solutio exemplo illustratur.

Variabilem independentem vocemus t, ejus functiones sive variabiles pro dependentibus habitas $x_1, x_2, \ldots x_m$: inter quas variabiles propositae sint m aequationes differentiales

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad \ldots \quad u_m = 0.$$

Sit $a_{i,\varkappa}$ ordo altissimi quod in aequatione $u_i = 0$ obvenit differentialis variabilis $x_\varkappa$, dico

1) ordinem systematis aequationum differentialium propositarum sive numerum Constantium Arbitrariarum, quem earum integratio completa poscit, aequari *maximo* inter omnes valores quos aggregatum

$$a_{i_1,1} + a_{i_2,2} + \cdots + a_{i_m,m}$$

induat, si pro indicibus $i_1, i_2, \ldots i_m$ quibuscunque modis fieri potest sumantur m diversi ex indicibus $1, 2, \ldots m$.

Illud *maximum* sive systematis ordinem designabo per O; aequabitur O summae ordinum differentialium singularum variabilium altissimorum, quae obveniunt in systemate normali ad quod propositum revocari potest. Ipse numerus O superabitur summa respectu systematis propositi aeque formata.

Variae exstant formae normales semperque certe duae, ad quas idem systema propositum reduci potest, quae reductiones non efficiuntur nisi auxilio diversarum differentiationum et eliminationum. Qua in re haec est propositio fundamentalis

2) inter diversos modos aequationes differentiales propositas differentiandi, ut nascantur aequationes auxiliares, quarum adjumento per solas eliminationes systema propositum ad aliud normale reduci possit, *unicum* exstare *modum* qui *paucissimas* differentiationes poscat, nam in alio quolibet modo aequationum differentialium propositarum aliquot vel omnes pluribus vicibus iteratis quam in illo differentiandas esse, neque in ullo alio modo fieri posse ut aequationum differentialium propositarum una paucioribus vicibus differentietur.

Modum illum expeditissimum insigniamus nomine *brevissimae reductionis*, in qua brevissima reductione semper erunt aequationum differentialium propositarum una pluresve quae omnino non differentiantur sive quae nullas differentiationibus ex iis derivatas ad aequationum auxiliarium systema contribuunt. Unde si ponimus in reductione brevissima ad aequationes auxiliares formandas aequationem $u_\iota = 0$ esse l_ι vicibus iteratis differentiandam, e numeris integris non negativis

$$l_1, \quad l_2, \quad \ldots \quad l_m$$

semper unus pluresve nullitati aequantur. Ad eos numeros l_1, l_2, ... l_m investigandos, a quorum inventione reductio brevissima tota pendet, solvendum est hoc problema.

Problema.

„Datis m^2 quantitatibus $a_{\iota,\varkappa}$ quibuscunque, in quibus et ι et $\varkappa$ valores 1, 2, ... m induere debent, investigare m quantitates *minimas* positivas seu evanescentes l_1, l_2, ... l_m ita comparatas, ut, posito $a_{\iota,\varkappa} + l_\iota = p_{\iota,\varkappa}$, inter m^2 quantitates $p_{\iota,\varkappa}$ eligere liceat m quantitates

$$p_{i_1,1}, \quad p_{i_2,2}, \quad \ldots \quad p_{i_m,m}$$

in seriebus diversis cum horizontalibus tum verticalibus positas, quarum quaeque inter ejusdem verticalis quantitates maximum valorem tueatur seu certe nulla alia quantitate ejusdem verticalis minor sit.“

Solutio.

Solutionis problematis propositi momenta praecipua breviter innuam. Disponamus quantitates $a_{\iota,\varkappa}$ in schema quadraticum

$$A. \quad \left\{ \begin{array}{llll} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,m} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \ldots & a_{m,m}. \end{array} \right.$$

Si qua ejus quadrati series horizontalis reprehenditur, cujus terminus nullus inter omnes ejusdem *verticalis* est maximus (quo nomine hic semper etiam comprehendo terminos nullo reliquorum minores) ejus seriei horizontalis terminis omnibus eandem quantitatem addo positivam eamque minimam pro qua unus ejus terminus maximo ejusdem verticalis aequetur.

Post praeparationem indicatam si mutatur quadratum propositum A. in hoc

$$B. \quad \left\{ \begin{matrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdot\;\cdot\;\cdot & b_{1,m} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdot\;\cdot\;\cdot & b_{2,m} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{m,1} & b_{m,2} & \cdot\;\cdot\;\cdot & b_{m,m} \end{matrix} \right.$$

quadrati B. nulla exstabit series horizontalis, in qua non insit terminus inter omnes ejusdem verticalis maximus. Ad ejusmodi quadratum sequentes denominationes refero, quae bene tenendae sunt.

Systema *maximorum transversalium* voco systema quantitatum $b_{\iota,\varkappa}$, quae cum in seriebus horizontalibus diversis tum in seriebus verticalibus diversis positae sunt et quarum unaquaeque inter omnes quantitates in eadem verticali positas *maxima* est.

Sumo in quadrato B. maximum numerum maximorum transversalium, et ubi pluribus modis idem numerus maximus maximorum transversalium prodit, unum eorum systema ex arbitrio eligo ejusque terminos *asteriscis* noto. Quorum maximorum transversalium maximus numerus esse potest aut 2*), aut 3 etc. aut m: si eorum numerus est m, problema propositum solutum est. Si iste numerus ipso m minor est, id ago, ut serierum horizontalium quasdam numeris minimis talibus augeam, ut in novo quadrato proveniente numerus maximorum transversalium auctus inveniatur. Quo negotio repetito, tandem perveniatur ad quadratum necesse est, in quo maximorum transversalium numerus est m, quo reperto problematis solutio inventa est. Dico autem *augeri seriem horizontalem*, si ejus terminis omnibus eadem quantitas positiva additur.

Series horizontales et verticales, ad quas maximorum transversalium systema electum pertinet, voco series H et V, reliquas series horizontales et verticales voco series H' et V'. Terminos in una verticalium V' maximos et ipsos *asteriscis* noto. Terminos asteriscis notatos voco *maxima stellata*.

Ponamus in serie horizontali h_1 esse maximum stellatum eique in eadem verticali aequari terminum in serie horizontali h_2 positum; in serie

*) Adhibita praeparatione, qua schema quadraticum A. in schema B. mutatum est, fit, ut 2 sit minimus valor hujus numeri, qui valor tum occurrit, si omnia *maxima* in una eademque serie horizontali jacent atque insuper in una verticali termini omnes inter se aequales sunt. Vid. Diarium Mathem. vol. 64, p. 312.

horizontali h_2 esse maximum stellatum eique in eadem verticali aequari terminum in horizontali h_3 positum etc.; si ea ratione ad seriem horizontalem h_α pervenitur, ubi h_α unam serierum h_2, h_3 etc. designat, dicam, *a serie* h_1 *ad seriem* h_α *transitum dari.* Si dicitur, a serie h_1 ad seriem h_α transitum dari, ipsa series h_1 omnesque intermediae h_2, h_3, ... $h_{\alpha-1}$ ad series H pertinebunt; series h_α sive ad series H sive ad series H' pertinere potest. Si a nulla serie horizontali, in qua duo plurave maxima stellata insunt, transitus datur ad aliquam serierum H' et si nullus exstat serierum H' terminus in aliqua serierum V' maximus, id certo criterio est, maximorum transversalium numerum *maximum* electum fuisse.

His praemissis, series horizontales omnes in tres classes distribuo.

Ad *classem primam* serierum horizontalium refero eas series, in quibus inveniuntur *duo plurave* maxima stellata, neque minus series horizontales omnes, ad quas ab illis seriebus transitus datur; quarum serierum primae classis nulla ad series H' pertinebit.

Ad *classem secundam* serierum horizontalium refero eas serierum H ad classem primam non pertinentes, a quibus ad aliquam serierum H' transitus non datur.

Ad *classem tertiam* serierum horizontalium refero omnes series H' easque serierum H, a quibus ad series H' transitus datur.

Hac serierum horizontalium distributione facta series ad tertiam classem pertinentes omnes eadem quantitate augeo eaque minima, qua addita fit ut earum serierum terminorum unus aequalis evadat alicui ejusdem verticalis maximo stellato primae aut secundae classis. Si illud maximum stellatum pertinet ad seriem horizontalem classis secundae, haec in novo quadrato proveniente transmigrat ad classem tertiam, neque alia in serierum horizontalium distributione fit mutatio. Quo casu operatio iteranda est nova serie e secunda classe in tertiam recepta, idque eo usque repetendum est, dum serierum tertiae classis terminus aliquis alicui maximo stellato seriei *primae* classis aequalis evadat. Id quod nisi antea certe tum necessario eveniet, quum series secundae classis omnes ad classem tertiam transmigraverint. Simulatque autem evenit, adepti sumus quadratum, in quo numerus major maximorum transversalium quam in quadrato B. invenitur. Tum nova maximorum stellatorum dispositione novaque serierum horizontalium distributione in tres classes facta, per eandem methodum novum quadratum formandum est, in quo rursus maximorum transversalium numerus auctus invenitur, idque eo usque continuandum est, dum perveniatur ad quadratum, in quo m maxima transversalia habentur. Quadratum sic inventum derivatum erit e proposito A. addendo seriebus horizontalibus quam minimas quantitates positivas, quae ipsae erunt quantitates quaesitae $l_1, l_2, \ldots l_m$.

Propter regulae complicationem unum saltem apponere exemplum iuvat, quod sequentibus schematis continetur.

A.

	α	β	γ	δ	ε	ζ	η	ϑ	ι	$\varkappa$
a	14	23	1	5	73	$\underline{91}$	10	$\underline{34}$	5	$\underline{99}$
b	25	32	2	4	62	81	9	23	4	88
c	14	1	7	16	21	7	13	12	3	77
d	11	$\underline{53}$	$\underline{61}$	4	3	1	12	1	4	91
e	9	21	23	18	27	3	6	9	12	15
f	4	16	18	13	5	12	23	21	14	81
g	25	43	13	16	$\underline{83}$	10	$\underline{91}$	3	7	13
h	$\underline{27}$	7	17	$\underline{37}$	73	8	11	24	$\underline{23}$	22
i	25	12	18	27	32	18	21	23	14	88
k	16	28	30	25	34	10	13	16	19	42

Quadratum A. est ipsum propositum, in cujus sicuti in quadratorum derivatorum seriebus verticalibus terminos maximos lineola subnotavi. Series horizontales elementis $a, b, \ldots k$ designavi. Quarum b, c, e, f, i, k omnino nullos terminos subnotatos continent. Seriei b terminos ab earundem verticalium terminis subnotatis detrahendo eruuntur differentiae

$$2,\ 21,\ 59,\ 33,\ 21,\ 10,\ 82,\ 11,\ 19,\ 11,$$

quarum 2 est minima, unde seriem b quantitate 2 augeo. Seriei c termini ab earundem verticalium terminis subnotatis differunt quantitatibus

$$13,\ 52,\ 54,\ 21,\ 62,\ 84,\ 78,\ 22,\ 20,\ 22,$$

quarum quum 13 minima sit, seriem c quantitate 13 augeo. Simili ratione series e, f, i, k respective quantitatibus 11, 9, 2, 4 augendo quadratum B. deduco, cujus originem designo per symbolum

$$B. \qquad a,\ b+2,\ c+13,\ d,\ e+11,\ f+9,\ g,\ h,\ i+2,\ k+4,$$

B.

		V	V	V'	V	V'	V'	V	V'	V	V
I	*a*	14	23	1	5	73	$\underline{91}$*	10	$\underline{34}$*	5	$\underline{99}$*
III	*b*	$\underline{27}$*	34	4	6	64	83	11	25	6	90
III	*c*	$\underline{27}$	14	20	29	34	20	26	25	16	90
I	*d*	11	$\underline{53}$*	$\underline{61}$*	4	3	1	12	1	4	91
III	*e*	20	32	34	29	38	14	17	20	$\underline{23}$*	26
III	*f*	13	25	27	22	14	21	32	30	$\underline{23}$	90
I	*g*	25	43	13	16	$\underline{83}$*	10	$\underline{91}$*	3	7	13
II	*h*	$\underline{27}$	7	17	$\underline{37}$*	73	8	11	24	$\underline{23}$	22
III	*i*	$\underline{27}$	14	20	29	34	20	26	25	16	90
III	*k*	20	32	34	29	38	14	17	20	$\underline{23}$	46
			19	27	8	19	8	59	4		9

In quadrato *B. sex* nec plura assignari possunt maxima transversalia; series verticales, in quibus posita sunt, suprascripta V, reliquas suprascripta V', ipsa maxima asteriscis noto. Si in aliqua verticalium V' terminus subnotatus reperitur, eum et ipsum asterisco noto. Seriebus horizontalibus *a, d, g,* in quibus bina plurave maxima stellata reperiuntur, classis I. numerum praefigo. In septem verticalibus, ad quas maxima illa pertinent, nullus alius terminus subnotatus reperitur, unde a seriebus *a, d, g* ad aliam seriem transitus non datur ideoque solae *a, d, g* primam classem constituunt. Series *c, f, i, k,* quippe in quibus omnino nullus reperitur terminus stellatus, ad classem III. pertinent. Porro ad series *f* et *k* ab *e,* ad series *c* et *i* a *b* transitus datur, unde etiam series *b* et *e* ad tertiam classem pertinent. Scilicet ex definitione supra stabilita colligitur ad seriem horizontalem s ab alia s_1 transitum dari, si in s sit terminus subnotatus non stellatus atque in eadem verticali terminus stellatus ad seriem horizontalem s_1 pertinens. Quum series *a, d, g* ad primam, series *b, c, e, f, i, k* ad tertiam classem pertineant, restat series *h,* quae secundam classem constituit. Jam in quaque serie verticali, in qua inest maximum stellatum ad seriem primae aut secundae classis pertinens, sumatur terminus seriERUM tertiae classis *proxime minor,* atque infra seriem verticalem notetur utriusque termini differentia. Quarum differentiarum

$$53-34=19,\ 61-34=27,\ 37-29=8,\ 83-64=19,\ 91-83=8,$$
$$91-32=59,\ 34-30=4,\ 99-90=9$$

sumatur minima 4; series tertiae classis omnes quantitate 4 augendo deducitur proximum quadratum *C*. Quod quadratum per symbolum

$$C. \qquad (a,\, b+6,\, c+17,\, d,\, e+15,\, f+13,\, g,\, h,\, i+6,\, k+8)$$

denotari potest.

C.

		V	V	V'	V	V'	V'	V	V	V	V
I	a	14	23	1	5	73	91*	10	34	5	99*
III	b	31*	38	8	10	68	87	15	29	10	94
III	c	31	18	24	33	38	24	30	29	20	94
I	d	11	53*	61*	4	3	1	12	1	4	91
III	e	24	36	38	33	42	18	21	24	27*	30
II	f	17	29	31	26	18	25	36	31*	27	94
I	g	25	43	13	16	83*	10	91*	3	7	13
II	h	27	7	17	37*	73	8	11	24	23	22
III	i	31	18	24	33	38	24	30	29	20	94
III	k	24	36	38	33	42	18	21	24	27	50
			15	23	4	15	4	61	5		5

In quadrato *C.* videmus *septem* maxima transversalia reperiri, novumque in serie *f* accessisse terminum stellatum: ipsa *f* ad classem secundam a tertia transit. Subscribo quantitates, quibus in quadrato *C.* termini stellati serierum primae et secundae classis terminos *proxime minores* ad tertiam classem et eandem verticalem pertinentes superant. Quarum quantitatum quum minima sit 4, series classis III. omnes eodem numero 4 augendo formo quadratum

$$D. \qquad (a,\, b+10,\, c+21,\, d,\, e+19,\, f+13,\, g,\, h,\, i+10,\, k+12)$$

in quo jam *octo* maxima transversalia insunt.

D.

		Γ'	Γ'	Γ''	Γ'	Γ''	Γ'	Γ'	Γ'	Γ'	Γ'
II	*a*	14	23	1	5	73	91	10	34	5	99*
II	*b*	35	42	12	14	72	91*	19	33	14	98
III	*c*	35*	22	28	37	42	28	34	33	24	98
I	*d*	11	53*	61*	4	3	1	12	1	4	91
III	*e*	28	40	42	37	46	22	25	28	31*	34
II	*f*	17	29	31	26	18	25	36	34*	27	94
I	*g*	25	43	13	16	83*	10	91*	3	7	13
III	*h*	27	7	17	37*	73	8	11	24	23	22
III	*i*	35	22	28	37	42	28	34	33	24	98
III	*k*	28	40	42	37	46	22	25	28	31	54
			13	19		10	63	57	1		1

E.

		Γ'	Γ'	Γ''	Γ'	Γ''	Γ'	Γ'	Γ'	Γ'	Γ'
III	*a*	14	23	1	5	73	91	10	34	5	99*
III	*b*	35	42	12	14	72	91*	19	33	14	98
III	*c*	36*	23	29	38	43	29	35	34	25	99
I	*d*	11	53*	61*	4	3	1	12	1	4	91
III	*e*	29	41	43	38	47	23	26	29	32*	35
III	*f*	17	29	31	26	18	25	36	34*	27	94
I	*g*	25	43	13	16	83*	10	91*	3	7	13
III	*h*	28	8	18	38*	74	9	12	25	24	23
III	*i*	36	23	29	38	43	29	35	34	25	99
III	*k*	29	41	43	38	47	23	26	29	32	55
			11	18		9		55			

Dispositio asteriscorum secundum regulas traditas in novo quadrato *D.* paullo mutari debet, quo facto series *a*, *b*, *h* inveniuntur e classe I, III, II ad classem II, II, III transmigrasse. Termini stellati classis I et II terminos classis III atque earundem verticalium *proxime minores* superant numeris

13, 19, 10, 63, 57, 1, 1; quorum minimo 1 omnes classis III series augendo deduco quadratum

E. $(a, b+10, c+22, d, e+20, f+13, g, h+1, i+11, k+13)$

in quo *idem* est maximorum transversalium numerus.

Quadrati *E.* habitus a quadrati *D.* habitu non differt nisi quod simul tres classis II series a, b, f ad classem III transierunt. Scilicet f et a ad classem III transeunt, quia earum terminis stellatis 34 et 99 aequales evadunt serierum i et c termini in iisdem verticalibus positi; deinde b et ipsa ad classem III transit, quum ejus termino stellato 91 aequalis evadat terminus ejusdem verticalis in serie a, quae jam ad classem III transmigravit. De quadrato *E.* per regulas traditas deducitur quadratum

F. $(a+9, b+19, c+31, d, e+29, f+22, g, h+10, i+20, k+22)$

in quo *novem* maxima transversalia insunt.

F.

		V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
III	a	23	32	10	14	82	100	19	43	14	108*
III	b	44	51	21	23	81	100*	28	42	23	107
III	c	45*	32	38	47	52	38	44	43	34	108
I	d	11	53*	61*	4	3	1	12	1	4	91
III	e	38	50	52	17	56	32	35	38	41*	44
III	f	26	38	40	35	27	31	45	43*	36	103
II	g	25	43	13	16	83	10	91*	3	7	13
II	h	37	17	27	17	83*	18	21	34	33	32
III	i	45	32	38	47*	52	38	41	43	34	108
III	k	38	50	52	17	56	32	35	38	41	64
			2	9		1		46			

E quadrato *F.* deducitur quadratum

G. $(a+10, b+20, c+32, d, e+30, f+23, g, h+10, i+21, k+23)$

in quo et ipso *novem* maxima transversalia insunt: e *G.* tandem provenit quadratum quaesitum

H. $(a+11, b+21, c+33, d, e+31, f+24, g, h+11, i+22, k+24)$

in quo *decem* maxima transversalia deprehenduntur, qui est ipse serierum horizontalium aut verticalium numerus.

G.

		Γ	Γ	Γ	Γ	Γ	Γ	Γ	Γ	Γ	Γ
III	*a*	24	33	11	15	$\underline{83}$	$\underline{101}$	20	$\underline{44}$	15	$\underline{109}$*
III	*b*	45	52	22	24	82	$\underline{101}$*	29	43	24	108
III	*c*	$\underline{46}$*	33	39	$\underline{48}$	53	39	45	$\underline{44}$	35	$\underline{109}$
I	*d*	11	$\underline{53}$*	$\underline{61}$*	4	3	1	12	1	4	91
III	*e*	39	51	53	$\underline{48}$	57	33	36	39	$\underline{42}$*	45
III	*f*	27	39	41	36	28	35	46	$\underline{44}$*	37	104
II	*g*	25	43	13	16	$\underline{83}$	10	$\underline{91}$*	3	7	13
III	*h*	37	17	27	47	$\underline{83}$*	18	21	34	33	32
III	*i*	$\underline{46}$	33	39	$\underline{48}$*	53	39	45	$\underline{44}$	35	$\underline{109}$
III	*k*	39	51	53	$\underline{48}$	57	33	36	39	$\underline{42}$	65
			1	8				15			

H.

		α	β	γ	δ	ε	ζ	η	ϑ	ι	$\varkappa$
S_3	*a*	25	34	12	16	$\underline{84}$	$\underline{102}$*	21	$\underline{45}$	16	$\underline{110}$
S_2	*b*	46	$\underline{53}$*	23	25	83	$\underline{102}$	30	44	25	109
S_5	*c*	$\underline{47}$*	34	40	$\underline{49}$	54	40	46	$\underline{45}$	36	$\underline{110}$
S_1	*d*	11	$\underline{53}$	$\underline{61}$*	4	3	1	12	1	4	91
S_6	*e*	40	52	54	$\underline{49}$	58	34	37	40	$\underline{43}$*	46
S_4	*f*	28	40	42	37	29	36	47	$\underline{45}$*	38	105
S_1	*g*	25	43	13	16	83	10	$\underline{91}$*	3	7	13
S_4	*h*	38	18	28	48	$\underline{84}$*	19	22	35	34	33
S_4	*i*	$\underline{47}$	34	40	$\underline{49}$	54	40	46	$\underline{45}$	36	$\underline{110}$*
S_5	*k*	40	52	54	$\underline{49}$*	58	34	37	40	$\underline{43}$	66

Quadrati H.*) repraesentatio symbolica docet, esse

$$11,\ 21,\ 33,\ 0,\ 31,\ 24,\ 0,\ 11,\ 22,\ 24$$

minimos numeros quadrati propositi A. seriebus addendos, ut aliud nascatur quadratum, in quo termini in diversis seriebus verticalibus maximi omnes ad diversas series horizontales pertineant, neque ullum ejusmodi quadratum ex A. deduci posse vel uni seriernm horizontalium numerum minorem addendo quam assignatum.

Si numerus quantitatum, e quibus quadrata conflantur, permagnus est, non difficile erit artificia comminisci, quibus numerorum scribendi taedium evitetur, quippe e quorum magna mole pauci tantum ad quodque novum quadratum formandum poscantur.

§. 2.

Regula exponitur ad inveniendos numeros minimos $l_1, l_2, \ldots l_m$, dato quocunque eorum numerorum systemate, aut datis tantum schematis quadratici terminis, qui post numerorum $l_1, l_2, \ldots l_m$ additionem m maxima transversalia praebent. Exemplum regulae adjicitur.

Sint rursus l_ι quantitates positivae seu evanescentes, positoque

$$a_{\iota,\varkappa} + l_\iota = p_{\iota,\varkappa},$$

quadratum

$$\begin{array}{cccc} p_{1,1}, & p_{1,2}, & \ldots & p_{1,m} \\ p_{2,1}, & p_{2,2}, & \ldots & p_{2,m} \\ \vdots & & & \vdots \\ p_{m,1}, & p_{m,2}, & \ldots & p_{m,m} \end{array}$$

ita comparatum sit, ut termini in diversis ejus seriebus verticalibus maximi omnes ad diversas quoque series horizontales pertineant, sive ut in eo unum plurave maximorum transversalium systemata completa **) assignari possint. Quorum unum quodcunque asteriscis distinguendo, reliqua vero singularum verticalium maxima iis aequalia lineolis subnotando, habetur hoc criterium

---

*) signorum S_1, S_2 etc. in tabula quadrati H. adhibitorum explicatio in sequenti paragrapho praestabitur.

**) i. e. ex m terminis composita.

certum quo cognosci potest, sitne ejusmodi quadratum e dato A, quod quantitatibus $a_{\iota,\varkappa}$ formatur, per *minimas* quantitates positivas seu evanescentes l_ι seriebus horizontalibus additas derivatum. Sumantur enim series horizontales pro quibus $l_\iota = 0$ seu quae omnino eaedem sunt atque in quadrato proposito A. Quas series, quarum certe una exstare debet, per S_1 designabo. In seriebus S_1 sumantur termini subnotati atque in horum verticalibus termini stellati, quorum series horizontales, quae non jam forte ad ipsas S_1 pertinent, designo per S_2. Rursus in seriebus verticalibus, ad quas serierum S_2 termini subnotati pertinent, sumantur termini stellati, quorum series horizontales a S_1 et S_2 diversas per S_3 denoto. *Si ea ratione pergendo series horizontales omnes exhauriuntur, quadratum e quantitatibus $p_{\iota,\varkappa}$ formatum de quadrato proposito e quantitatibus $a_{\iota,\varkappa}$ formato per minimas quantitates positivas seu evanescentes l_ι seriebus ejus horizontalibus additas deductum est.* Ita in exemplo nostro *omnes* series horizontales ad systemata S_1, S_2 etc. successive inventa sequenti modo referuntur:

S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
d	b	a	f	c	e
g			h	k	
			i		

Unde certo concludi potest in exemplo nostro ad eruendam problematis propositi solutionem quantitates seriebus horizontalibus addendas quam minimas adhibitas esse.

Iisdem principiis, quibus erutum est criterium, sitne problema modo simplicissimo sive per quantitates quam minimas l_i solutum, etiam nititur methodus, qua solutio simplicissima de solutione quacunque deduci potest. Statuendo

$$a_{i,\varkappa}+h_i = q_{i,\varkappa},$$

ubi quantitates h_ι sint positivae aut evanescentes, formatoque quadrato e quantitatibus $q_{\iota,\varkappa}$ ad instar quadrati A, e quantitatibus $a_{\iota,\varkappa}$ formati, ponamus in seriebus ejus verticalibus diversis assignari posse maxima, quae omnia in diversis quoque seriebus horizontalibus posita sint. Ejusmodi maximorum transversalium systema completum quodcunque asteriscis noto. Quantitatum h_ι minima, quam h vocabo, de omnibus $q_{\iota,\varkappa}$ detracta prodit quadratum, cujus series horizontales una pluresve immutatae i. e. eaedem sunt atque in quadrato $A.$, quas series rursus per S_1 denoto. Deinde terminis praeter ipsos stellatos in suis ipsorum verticalibus maximis lineola subnotatis, lege supra exposita de seriebus S_1 successive serierum horizontalium systemata deducantur $S_2, S_3, \ldots S_\alpha$. Quae si omnes series horizontales amplectuntur, solutio simplicissima inventa est, si vero relinquuntur series horizontales, in quibus nullus datur terminus stellatus, qui cum aliquo termino subnotato serierum $S_1, S_2, \ldots S_\alpha$ in eadem verticali positus sit, de omnibus illis seriebus horizontalibus detraho eandem quantitatem minimam h' talem, ut aut earum terminus aliquis stellatus termino alicui ejusdem verticalis ad unam serierum $S_1, S_2, \ldots S_\alpha$ pertinenti aequalis evadat, aut earum una in seriem quadrati $A.$ correspondentem redeat. Quare serierum horizontalium ad complexus S_1, S_2 etc. pertinentium numerus major factus erit atque in quadrato e quantitatibus $q_{\iota,\varkappa} - h$ formato. Eadem procedendi ratione si opus est continuata, pauciores paucioresque series horizontales relinquentur e complexibus S_1, S_2 etc. exclusae, donec perveniatur ad quadratum, in quo serierum S_1, S_2 etc. systemata *omnes* series horizontales amplectuntur.

Si quantitatibus quibuscunque $h_1, h_2, \ldots h_m$ ad series quadrati $A.$ horizontales additis deducitur quadratum m maximis transversalibus gaudens, summa terminorum, qui eadem loca in quadrato $A.$ atque illa maxima transversalia in quadrato derivato occupant, inter omnia quadrati $A.$ aggregata m terminorum transversalium valore maximo gaudet. Unde problema inaequalitatum

dati quadrati $A.$ e m^2 terminis formati invenire m terminos transversales summa *maxima* gaudentes

tot habebit solutiones quot in quadrato derivato assignari possunt maximorum transversalium systemata. Quae systemata omnia inveniuntur, si quadrati derivati terminos tantum conservamus in suis verticalibus maximos, reliquos omnes *nullitati* aequiparamus, eorumque deinde terminorum formamus Determinans. Quippe cujus Determinantis termini singuli singulas problematis solutiones suppeditant. Vice versa demonstrari potest, quamque problematis inaequalitatum antecedentis solutionem suppeditare quadrati derivati systema maximorum transversalium.

In exemplo nostro e quadrati $II.$ terminis subnotatis formandum erit Determinans, reliquis quadrati $II.$ terminis nullitati aequiparatis. Quod Determinans successive revocari potest ad Determinantia simpliciora formata e quantitatibus quadratorum

I.

	α	β	δ	ζ	ι	$\varkappa$
a				102		110
b		53		102		
c	47		49			110
e			49		43	
i	47		49			110
k			49		43	

II.

	α	δ	ζ	ι	$\varkappa$
a			102		110
c	47	49			110
e		49		43	
i	47	49			110
k		49		43	

III.

	α	δ	ι	$\varkappa$
c	47	49		110
e		49	43	
i	47	49		110
k		49	43	

Designemus enim quadrati terminos per serierum horizontalium et verticalium, ad quas pertinent, indicationem, quarum illas elementis a, b, e etc., has elementis α, β, γ etc. notavi. In quadrato *II.* termini (d, γ), (g, η) sunt in suis verticalibus unici subnotati, termini (f, ϑ), (g, η), (h, ε) in suis seriebus horizontalibus unici subnotati. Unde Determinantis formandi termini omnes habere debent factorem communem

$$(d, \gamma)(h, \varepsilon)(g, \eta)(f, \vartheta).$$

Quo factore reiecto remanet Determinans e quantitatibus quadrati *I.*, quod seriebus horizontalibus d, f, g, h, verticalibus γ, ε, η ϑ reiectis e quadrato *II.* nascitur. In eo quadrato terminus (b, β) in sua verticali unicus est non evanescens, quo et ipso ut factore communi separato, quaerendum manet Determinans quantitatum quadrati *II.* In quo quadrato rursus termino (a, ζ), in sua verticali unico, ut factore communi separato, formandum manet quantitatum *III.* Determinans

$$\begin{gathered}(c, \alpha)(e, \delta)(k, \iota)(i, \varkappa)+(i, \alpha)(k, \delta)(e, \iota)(c, \varkappa)\\ -(e, \alpha)(k, \delta)(e, \iota)(i, \varkappa)-(i, \alpha)(e, \delta)(k, \iota)(c, \varkappa)\\ =\{(c, \alpha)(i, \varkappa)-(i, \alpha)(c, \varkappa)\}\{(e, \delta)(k, \iota)-(k, \delta)(e, \iota)\}.\end{gathered}$$

Quod quum quatuor terminis constet, in quadrato proposito *A.* quatuor habentur systemata maximorum transversalium summa maxima gaudentium, videlicet

$$(b,\beta)+(d,\gamma)+(h,\varepsilon)+(a,\zeta)+(g,\eta)+(f,\vartheta)+$$

$$1)\ (c,\alpha)+(e,\delta)+(k,\iota)+(i,\varkappa)$$

$$\text{aut } 2)\ (c,\alpha)+(k,\delta)+(e,\iota)+(i,\varkappa)$$

$$\text{aut } 3)\ (i,\alpha)+(k,\delta)+(e,\iota)+(c,\varkappa)$$

$$\text{aut } 4)\ (i,\alpha)+(e,\delta)+(k,\iota)+(c,\varkappa).$$

Qui in exemplo nostro numeris expressi sunt

$$32+61+73+91+91+21 \qquad =369$$

$$+1)\ 14+18+19+88 \qquad =139$$

$$\text{aut } 2)\ 14+25+12+88 \qquad =139$$

$$\text{aut } 3)\ 25+25+12+77 \qquad =139$$

$$\text{aut } 4)\ 25+18+19+77 \qquad =139,$$

unde terminorum transversalium aggregatum maximum fit 508.

Vice versa, si undecunque cognoscuntur quadrati propositi A. termini transversales summa maxima gaudentes, sequenti ratione e quadrato proposito A. per quantitates minimas l_i seriebus horizontalibus addendas derivatur quadratum, in quo diversarum verticalium maxima omnia in diversis quoque seriebus horizontalibus jacent.

Datos scilicet terminos transversales summa maxima gaudentes asteriscis noto et seriebus horizontalibus tales quantitates addo, ut termini earum stellati maximis in ipsorum seriebus verticalibus aequentur. Quamque seriem auctam reliquis seriebus subscribo eamque in reliquarum serierum et antecedentium et sequentium examine adhibeo. Qua in re series horizontales elementis a, b etc. denotatas iisdem elementis post augmenta capta designo, atque terminis stellatis post augmenta capta asteriscos conservo. Procedendi rationem exemplo nostro sequens schema illustrabit. Dati supponantur termini transversales summa maxima gaudentes

(a,ζ),	(b,β),	(c,α),	(d,γ),	(e,δ),	(f,ϑ),	(g,η),	(h,ε),	$(i,\varkappa)$,	(k,ι)
91	32	14	61	18	21	91	73	88	19

		α	β	γ	δ	ε	ζ	η	ϑ	ι	$\varkappa$
1.	*a*	14	23	1	5	73	91*	10	34	5	99
2.	*b*	25	32*	2	4	62	81	9	23	4	88
3.	*c*	14*	1	7	16	21	7	13	12	3	77
4.	*d*	11	53	61*	4	3	1	12	1	4	91
5.	*e*	9	21	23	18*	27	3	6	9	12	15
6.	*f*	4	16	18	13	5	12	23	21*	14	81
7.	*g*	25	43	13	16	83	10	91*	3	7	13
8.	*h*	27	7	17	37	73*	8	11	24	23	22
9.	*i*	25	12	18	27	32	18	24	23	14	88*
10.	*k*	16	28	30	25	34	10	13	16	19*	42
11.	*b*	46	53*	23	25	83	102	30	44	25	109
12.	*a*	25	34	12	16	84	102*	21	45	16	110
13.	*c*	46*	33	39	48	53	39	45	44	35	109
14.	*e*	39	51	53	48*	57	33	36	39	42	45
15.	*f*	28	40	42	37	29	36	47	45*	38	105
16.	*h*	38	18	28	48	84*	19	22	35	34	33
17.	*i*	47	34	40	49	54	40	46	45	36	110*
18.	*c*	47*	34	40	49	54	40	46	45	36	110
19.	*e*	40	52	54	49*	58	34	37	40	43	46
20.	*k*	40	52	54	49	58	34	37	40	43*	66

In verticali ζ terminus stellatus ipse est maximus, unde ab initio certe series horizontalis a non mutatur; in verticali β est maximus 53, unde horizontalis b numero 21 augenda auctaque subscribenda est, quo linea 11. formatur. Jam ad primum terminum regressi, in serie ζ invenimus maximum 102 unde a numero 11 augenda est, quod lineam 12. suppeditat. Ad terminum (c, α) progredientes, in α invenimus maximum 46 in linea 11. positum, unde c numero 32 augenda est, quod lineam 13. suppeditat. Eadem ratione series d et g immutatas relinquo, series e, f, h, i numeris 30, 24, 11, 22 augeo, quod lineas 14., 15., 16., 17. suppeditat. Jam quum in linea 17. inveniatur verticalis a terminus 47, ejusdem verticalis termino stellato 46 in linea 13. posito major, lineae 13. addo 1, unde linea 18. formatur. In 17. et 18. est verticalis δ terminus 49 ejusdem verticalis termino stellato in 14. posito major, unde lineam 14. et ipsam unitate augeo, quod lineam 19. suppeditat. Denique ad terminum $(k, \iota) = 19$ procedo et quum verticalis ι sit maximum 43 in 19. positum, seriei k addendo 24 formo lineam 20. Quo facto jam negotium transactum erit. Inventae enim sunt series

$$a, \quad b, \quad c, \quad d, \quad e, \quad f, \quad g, \quad h, \quad i, \quad k$$

lineas 12., 11., 18., 4., 19., 15., 7., 16., 17., 20.

formantes, quarum stellati termini in ipsorum verticalibus maximi sunt, quod requirebatur. Quas series videmus constituere quadratum H. supra alia methodo inventum.

Antecedentium ope novam nanciscimur solutionem problematis supra propositi, si innotuerint quantitates m quaecunque, quae seriebus quadrati A. horizontalibus additae hoc quadratum in aliud transforment, cujus termini in diversis verticalibus maximi omnes ad diversas series horizontales pertineant, invenire illarum m quantitatum valores minimos positivos seu evanescentes. Nam quum secundum suppositionem factam aliquod innotescat quadratum ex A. derivatum m maximis transversalibus gaudens, etiam in A. innotescunt m termini transversales summa maxima gaudentes. Quibus cognitis, secundum regulam antecedentibus traditam facile per quantitates minimas positivas addendas ex A. derivatur quadratum m maximis transversalibus gaudens. Simul patet, quomodo uno cognito systemate terminorum quadrati A. transversalium summa maxima gaudentium reliqua omnia systemata facile inveniantur. Nam uno illo systemate cognito facile vidimus ex A. derivari quadratum systemate m maximorum transversalium gaudens; in quo si singularum verticalium sola maxima conservantur, reliquis terminis nihilo aequiparatis, Determinantis e quadrati quantitatibus formati singuli termini non evanescentes suggerunt singula maximorum transversalium systemata ideoque singula systemata terminorum quadrati A. transversalium summa maxima gaudentium; utrorumque enim systematum termini in duobus quadratis eadem loca occupant.

§. 3.

Solutio problematis de schemate quadratico m^2 quantitatum ad systema m aequationum differentialium applicatur. Forma aut formae normales, ad quas systema propositum per reductionem brevissimam revocari possit. Aliae reductiones in formam normalem.

Aequationes differentiales propositae

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad . \; . \; . \quad u_m = 0$$

ut per brevissimam reductionem ad alias forma normali gaudentes revocentur, l_1, l_2, ... l_m vicibus differentiandae sunt. Numeri l_1, l_2 etc. ipsi sunt, quorum in antecedentibus tradidi inventionem. Qui quum omnino determinati sint, etiam systema aequationum auxiliarium ad reductionem brevissimam requisitum, quod illis differentiationibus nascitur, omnino determinatum erit. At plerumque variae sunt formae normales, ad quas aequationes differentiales propositae illius aequationum auxiliarium systematis ope revocari possunt. Sit enim rursus $a_{i,\varkappa}$ ordo differentialis variabilis $x_\varkappa$ altissimi, quod in aequatione $u_\iota = 0$ reperitur, atque rursus quantitates $a_{\iota,\varkappa}$ in formam quadrati A. disponantur, cujus i^{tam} seriem horizontalem constituunt termini $a_{i,1}$, $a_{i,2}$, ... $a_{\iota,m}$, $\varkappa^{\text{tam}}$ verticalem termini $a_{1,\varkappa}$, $a_{2,\varkappa}$, ... $a_{m,\varkappa}$. Sumatur in quadrato A. aliquod systema terminorum transversalium summa maxima gaudentium

$$a_{\alpha_1,1},\quad a_{\alpha_2,2},\quad \dots\quad a_{\alpha_m,m}$$

aequationes differentiales propositae per brevissimam reductionem ad has revocari possunt forma normali gaudentes

$$x_1^{(a_{\alpha_1,1})} = X_1,\quad x_2^{(a_{\alpha_2,2})} = X_2,\quad \dots\quad x_m^{(a_{\alpha_m,m})} = X_m,$$

ubi diversarum variabilium differentialia ad laevam posita sunt altissima, quae in systemate reducto reperiuntur, a quibus functiones ad dextram positae X_1, X_2 etc. prorsus vacuae supponantur. Atque habebuntur tot ejusmodi systemata inter se diversa aequationum differentialium, ad quas aequationes differentiales propositae per brevissimam reductionem revocari possint, quot in quadrato A. habentur systemata terminorum transversalium summa maxima gaudentium. Conditis aequationibus auxiliaribus ad brevissimam reductionem adhibendis, ponamus variabilis $x_\varkappa$ differentiale altissimum sive in aequationibus propositis $u_i = 0$, $u_{i_1} = 0$ etc. sive in aequationibus auxiliaribus ex his per iteratas differentiationes derivatis reperiri; in iis locis quadrati, quae ad $\varkappa^{\text{tam}}$ seriem verticalem atque ad i^{tam}, i_1^{tam} etc. seriem horizontalem pertinent, colloco unitatem sive aliam quantitatem non evanescentem, in reliquis autem $\varkappa^{\text{tae}}$ verticalis loculis colloco nullitatem. Quo facto pro singulis variabilibus $x_\varkappa$ terminorum quadrati formo Determinans. Cujus terminus non evanescens si conflatur e quantitatibus primae, secundae etc. m^{tae} verticalis, ad α_1^{tam}, α_2^{tam} etc. α_m^{tam} seriem horizontalem pertinentis, dabitur forma normalis, in qua variabilium x_1, x_2, ... x_m altissima differentialia respective eadem sunt atque in aequationibus propositis

$$u_{\alpha_1} = 0,\quad u_{\alpha_2} = 0,\quad \dots\quad u_{\alpha_m} = 0.$$

Quum ad alios Determinantis terminos alius pertineat indicum $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ ordo, ea ratione e Determinantis terminis non evanescentibus singulis singulae prodeunt formae normales, ad quas aequationes differentiales propositae per brevissimam reductionem revocari possunt.

Vidimus methodum, qua per quantitates minimas positivas seriebus horizontalibus addendas ex A. deducatur quadratum, in quo verticalium maxima omnia in diversis seriebus horizontalibus reperiantur, magis expeditam reddi posse, si undecunque cognosceretur quadrati A. systema m terminorum transversalium summa maxima gaudentium. Hac methodo expeditiore invenitur quot vicibus iteratis in reductione brevissima singulae aequationes propositae ad formandas aequationes auxiliares differentiandae sint, quoties undecunque datur forma aliqua normalis, ad quam aequationes differentiales propositae tali reductione revocantur. Quae forma normalis innotescit, si aequationes differentiales propositae ita comparatae sunt, ut in aliis aliarum variabilium differentialia ad altissimum ordinem ascendant. Tum enim illa diversarum variabilium differentialia in diversis aequationibus propositis altissima ipsa altissima erunt in forma normali, ad quam aequationes differentiales propositae brevissima reductione revocari possunt. Namque illorum differentialium ordines in quadrato A. constituunt m terminorum transversalium systema.

Ut hujus paragraphi disquisitiones exemplo illustrentur, ponamus dari *decem* aequationes differentiales $u_1 = 0, u_2 = 0, \ldots u_{10} = 0$ inter variabilem independentem t et decem dependentes $x_1, x_2, \ldots x_{10}$, atque numeros quadrati A. p. 555 propositi indicare ordines altissimos, ad quos singularum variabilium dependentium differentialia in diversis aequationibus ascendant, ita ut ex. gr. altissima variabilium $x_1, x_2, \ldots x_{10}$ differentialia in aequatione $u_1 = 0$ occurrentia sint

$$x_1^{(14)},\ x_2^{(23)},\ x_3^{(1)},\ x_4^{(5)},\ x_5^{(73)},\ x_6^{(91)},\ x_7^{(10)},\ x_8^{(34)},\ x_9^{(5)},\ x_{10}^{(90)}.$$

Quum ultimum quadratum H. ex proposito A. deductum sit addendo seriebus horizontalibus numeros

$$11,\ 21,\ 33,\ 0,\ 31,\ 24,\ 0,\ 11,\ 22,\ 24,$$

reductio brevissima perficitur per aequationes auxiliares formatas differentiando aequationes propositas

$u_1=0,$	$u_2=0,$	$u_3=0,$	$u_4=0,$	$u_5=0,$	$u_6=0,$	$u_7=0,$	$u_8=0,$	$u_9=0,$	$u_{10}=0$
11,	21,	33,		31,	24,		11,	22,	24

vicibus iteratis, aequationibus duabus $u_4 = 0, u_7 = 0$ omnino non ad formandas aequationes auxiliares advocatis. Earumque aequationum auxiliarium ope propositae per solas eliminationes ad *quatuor* diversas formas normales revocari possunt. In quibus omnibus inter altissima diversarum variabilium differentialia, quae per inferiora ipsasque variabiles exprimenda sunt, secundum ea quae supra tradidi inveniuntur

$$x_2^{(32)},\quad x_3^{(61)},\quad x_5^{(73)},\quad x_6^{(91)},\quad x_7^{(91)},\quad x_8^{(21)};$$

porro in forma normali

$$\begin{array}{rllll} \textit{prima:} & x_1^{(14)}, & x_4^{(18)}, & x_9^{(19)}, & x_{10}^{(88)} \\ \textit{secunda:} & x_1^{(14)}, & x_4^{(25)}, & x_9^{(12)}, & x_{10}^{(88)} \\ \textit{tertia:} & x_1^{(25)}, & x_4^{(25)}, & x_9^{(12)}, & x_{10}^{(77)} \\ \textit{quarta:} & x_1^{(25)}, & x_4^{(18)}, & x_9^{(19)}, & x_{10}^{(77)}. \end{array}$$

Unde decem illarum aequationum differentialium propositarum integratio completa 508 Constantibus Arbitrariis afficitur, qui numerus est summa ordinum, ad quos altissima diversarum variabilium differentialia in formis normalibus ascendunt. Altissima illa formarum normalium differentialia omnia in ipsis aequationibus differentialibus propositis reperiuntur neque vero in his altissima sunt praeter $x_3^{(61)}$, $x_6^{(91)}$, $x_7^{(91)}$.

Consideremus reductionem quamcunque atque e toto aequationum differentialium propositarum et auxiliarium numero eligamus m, quae ex singulis aequationibus propositis per altissimam differentiationem derivatae sint, inter quas nonnullae ex propositarum numero esse possunt, si quae earum ad aequationes auxiliares per differentiationes formandas omnino non in usum vocatae sunt. In quaque earum m aequationum colligamus altissimorum singularum variabilium differentialium ordines eosque more consueto in quadratum disponamus: in ejusmodi quadrato necessario maxima diversarum serierum verticalium omnia in diversis quoque seriebus horizontalibus versantur. Ex praeceptis autem supra traditis de ejusmodi quadrato redire licet in aliud de proposito A. per minimos numeros positivos $l^{(i)}$ deductum. Unde colligitur, *de aequationum differentialium propositarum reductione in formam normalem quacunque deduci posse brevissimam.*

§. 4.

Reductio systematis propositi ad unicam aequationem differentialem. Regula ad reductionem inveniendam datur et exemplo illustratur. Forma elegans qua regulam enuntiare liceat.

Aequationum differentialium systema in genere ad unicam aequationem differentialem inter duas variabiles revocari potest. Sint duae illae variabiles independens t et dependens x_1; uni illi aequationi differentiali inter t et x_1

intercedenti jungi debent aliae aequationes quibus reliquae variabiles dependentes x_2, x_3 etc. ipsae per t, x_1 atque variabilis x_1 differentialia exprimantur, quae differentialia non ascendunt ad ordinem aequationis differentialis inter t et x_1 locum habentis. Ejusmodi forma normalis quum prae ceteris ab Analystis considerari soleat, indicabo quot vicibus iteratis singulae aequationes differentiales propositae $u_1 = 0$, $u_2 = 0$ etc. differentiandae sint, ut aequationes differentiales ad reductionem illam necessariae nascantur.

Aequationes differentiales propositas $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, . . . $u_m = 0$ ponamus l_1, l_2, . . . l_m vicibus differentiandas esse, ut aequationes auxiliares ad reductionem brevissimam requisitae prodeant. Qui numeri l_1, l_2, etc. quomodo inveniantur, supra praecepi. Quadrati A, seriebus horizontalibus addendo numeros l_1, l_2, . . . l_m alterum formo quadratum A', in eoque aliquod maximorum transversalium systema completum asteriscis distinguo, reliqua diversarum verticalium maxima lineolis subnoto. Si variabiles omnes praeter independentem t et dependentem $x_\varkappa$ eliminandae sunt, in $\varkappa^{ta}$ verticali quaero terminum stellatum, qui sit in i^{ta} serie horizontali; in i^{ta} serie horizontali quaero terminos subnotatos, in eorum verticalibus singulis singulos terminos stellatos, in horum seriebus horizontalibus rursus terminos subnotatos, in eorum verticalibus rursus terminos stellatos et ita porro. Qua in re ad terminos stellatos jam notatos amplius recurrere non opus est. Continuato negotio quantum fieri potest, omnes series horizontales ad quas ea procedendi ratione pervenitur i^{tae}, a qua auspicati sumus, dicam *annexas*. Quas series una cum ipsa i^{ta} omnes minima quantitate augeo tali ut earum terminus aliquis neque stellatus neque subnotatus aequalis evadat termino suae verticalis stellato. Cujus termini serie horizontali accedente ad series i^{tae} annexas, rursus i^{tam} seriem eique annexas, quarum jam auctus est numerus, quantitate minima augeo tali ut earum terminus aliquis neque stellatus neque subnotatus aequalis evadat termino suae verticalis stellato, quo facto serierum i^{tae} annexarum numerus rursus augebitur; et sic harum serierum numerum magis magisque augeo, donec perveniatur ad quadratum A'', cujus omnes series horizontales i^{tae} annexae sunt. Jam ex A'', quadratum A''', deduco augendo series horizontales eadem quantitate tali ut terminus ad i^{tam} seriem horizontalem, $\varkappa^{tam}$ verticalem pertinens fiat aequalis *summae maximae quam systema n terminorum transversalium quadrati A, induere potest.* Numeri quibus quadrati A, series horizontales augendae sunt, ut quadratum A''', efficiatur, indicant, quot vicibus singulae aequationes differentiales propositae differentiandae sint ad aequationes eruendas auxiliares necessarias, ut per solas eliminationes nascantur aequatio differentialis inter solas variabiles t et $x_\varkappa$ aliaeque aequationes quibus reliquae variabiles ipsae per t, $x_\varkappa$ et variabilis $x_\varkappa$ differentialia exprimantur. —

Quadratum A'. est idem quod supra in exemplo nostro per H. designavi. Ponamus $\varkappa^{\text{tam}}$ verticalem esse seriem ζ cujus terminus stellatus 102 ad seriem horizontalem a pertinet, in qua insunt termini subnotati 84, 45, 110, ad verticales ε, ϑ, $\varkappa$ pertinentes, quarum termini stellati ad series h, f, i pertinent, in quibus habentur termini subnotati 47 et 49 ad verticales α et δ pertinentes (45 non adhibeo quippe cujus verticalem jam in usum vocavimus); in verticalibus α et δ termini stellati ad series c et k pertinent, in qua posteriore habetur terminus subnotatus 43 ad verticalem ι pertinens cujus terminus stellatus in e jacet, quae series unicum subnotatum 49 continet cujus verticalis jam in usum vocata est. Hinc seriei a inventae sunt annexae h, f, i, c, k, e. Series a, h, f, i, c, k, e omnes *unitate* augendo seriebus ipsi a annexis accedit b, nam eo incremento seriei e vel k terminus 52 ad verticalem β pertinens abit in 53, qui numerus aequatur termino verticalis β stellato, qui ad horizontalem b pertinet. Rursus series a, h, f, i, c, k, e, b augeo numero 6, quo facto seriebus ipsi a annexis accedit d: tandem series omnes praeter g augeo numero 37, ut ipsa quoque g in series ipsi a annexas redeat. Unde quadratum A''. ex A'. sive H. efficitur, seriebus

a, h, f, i, c, k, e	addendo	44
seriei b	-	43
- d	-	37

serie g immutata manente. Quum sit $102+44=146$, $508-146=362$, quadrati A''. series horizontales eodem numero 362 augendae sunt ut quadratum A'''. eruatur. Quadratum A'. ut supra per symbolum

$$A'. \quad (a+11, b+21, c+33, d, e+31, f+24, g, h+11, i+22, k+24)$$

denotando, pro quadratis A''., A'''. nanciscimur

$$A''. \quad (a+55, b+64, c+77, d+37, e+75, f+68, g, h+55, i+66, k+68)$$

$$A'''. \; (a+417, b+426, c+439, d+399, e+437, f+430, g+362, h+417, i+428, k+430).$$

Unde in exemplo nostro, ut variabiles praeter t et x_0 omnes ex decem aequationibus differentialibus propositis eliminentur, eae ad eruendas aequationes auxiliares requisitas 417, 426, 439, 399, 437, 430, 362, 417, 428, 430 vicibus iteratis differentiandae sunt.

Eadem methodo eruimus quadrata A''., in quibus series horizontales omnes cuilibet seriernm a, b, c, ... k annexae sunt, addendo quadrati A'. seriebus

$a, h, f, i, c, k, e \ldots + 44;\ b \ldots + 43;\ d \ldots + 37;\ g \ldots 0;$

$b, a, h, f, i, c, k, e \ldots + 44;\ d \ldots + 37;\ g \ldots 0;$

$c, k, f, i, e \ldots + 44;\ b, a, h \ldots + 43;\ d \ldots + 37;\ g \ldots 0;$

$d, b, a, c, e, f, h, i, k \ldots + 44;\ g \ldots 0;$

$e, k \ldots + 45;\ b, a, h, f, i, c \ldots + 44;\ d \ldots + 38;\ g \ldots 0;$

$f \ldots + 44;\ c, i, k, e \ldots + 39;\ b, a, h \ldots + 38;\ d \ldots + 32;\ g \ldots 0;$

$g \ldots + 9;\ h \ldots + 8;\ k, e \ldots + 7;\ b, a, f, i, c \ldots + 6;\ d \ldots 0;$

$h \ldots + 46;\ k, e \ldots + 45;\ b, a, f, i, c \ldots + 44;\ d \ldots + 38;\ g \ldots 0;$

$i, c, k, f, e \ldots + 44;\ b, a, h \ldots + 43;\ d \ldots + 37;\ g \ldots 0;$

$k, e \ldots + 45;\ b, a, h, f, i, c \ldots + 44;\ d \ldots + 38;\ g \ldots 0.$

Tertium et nonum, quintum et decimum quadratum eadem ratione ex A'. prodire videmus. Modus, quo quadrata illa A''. ex ipso proposito A. deducantur, sequentibus schematis indicatur:

	S.	A''.
x_6	146	$(a+55, b+64, c+77, d+37, e+75, f+68, g, h+55, i+66, k+68)$
x_2	97	$(a+55, b+65, c+77, d+37, e+75, f+68, g, h+55, i+66, k+68)$
x_1	91	$(a+54, b+64, e+77, d+37, e+75, f+68, g, h+54, i+66, k+68)$
x_3	105	$(a+55, b+65, e+77, d+44, e+75, f+68, g, h+55, i+66, k+68)$
x_9	88	$(a+55, b+65, c+77, d+38, e+76, f+68, g, h+55, i+66, k+69)$
x_8	89	$(a+49, b+59, c+72, d+32, e+70, f+68, g, h+49, i+61, k+63)$
x_7	100	$(a+17, b+27, c+39, d, e+38, f+30, g+9, h+19, i+28, k+31)$
x_5	130	$(a+55, b+65, c+77, d+38, e+76, f+68, g, h+57, i+66, k+69)$
x_{10}	154	$(a+54, b+64, c+77, d+37, e+75, f+68, g, h+54, i+66, k+68)$
x_4	94	$(a+55, b+65, c+77, d+38, e+76, f+68, g, h+55, i+66, k+69)$

In quadrati A'. sive H. seriebus horizontalibus prima, secunda, etc. decima habentur termini stellati

102, 53, 47, 61, 43, 45, 91, 84, 110, 49

pertinentes ad verticalem

sextam, secundam, primam, tertiam, nonam, octavam, septimam, quintam, decimam, quartam.

Quibus terminis addendo

44, 44. 44. 44. 45, 44. 9. 46. 44. 45

prodeunt numeri

146. 97. 91. 105. 88. 89. 100. 130, 154. 94

quos per S denotatos in margine posui una cum variabilibus quae diversis verticalibus respondent.

In quadrato aliquo A''. sit S terminus stellatus seriei horizontalis cui reliquae annexae sunt: ab S ad quemlibet alium terminum stellatum poterit perveniri per continuum transitum termini stellati ad sublineatum ejusdem seriei horizontalis, termini sublineati ad stellatum ejusdem verticalis. Proponamus ex. gr. quadratum primum supra exhibitum

A''. $(a+55, b+64, c+77, d+37, e+75, f+68, g, h+55, i+66, k+68)$

sive

	α	β	γ	δ	ε	ζ	η	ϑ	ι	$\varkappa$
a					128	146*		89		154
b		96*								
c	91*			93				89		154
d			98*							
e		96	98	93					87*	
f							91	89*		
g							91*			
h					128*					
i	91			93				89		154*
k		96	98	93*					87	

in quo solos terminos stellatos et sublineatos seu stellato ejusdem verticalis aequales (omissa lineola) apposui. In eo quadrato series horizontales omnes a serie α pendent, cujus terminus stellatus est 146. De quo ad reliquos terminos stellatos sic descenditur:

146 154 93 96; 146 154 91_α; 146 154 93 98; 146 154 93 87;
146 154 89; 146 154 89 91_η; 146 128; 146 154; 146 154 93.

Bini termini juxta positi T et U sunt stellati tales, ut terminus in serie horizontali ipsius T, verticali ipsius U positus sit ipsi U aequalis sive sublineatus, quae est transitus propositi lex. —

Si de quadrato A''. proposito rejicitur termini S, a quo proficiscimur, series verticalis et alia quaecunque horizontalis, in quadrato remanente maximorum transversalium systema facile assignatur. Designemus per $\widehat{TU}$ terminum ipsi U aequalem in serie horizontali ipsius T, verticali ipsius U positum, atque ponamus, seriei horizontalis rejiciendae terminum stellatum esse $S^{(f)}$; porro in quadrato proposito A''. ab S ad $S^{(f)}$ secundum legem stabilitam transiri per terminos stellatos intermedios S', S'', ... $S^{(f-1)}$. His positis quadrati propositi A''. termini stellati reliqui ipsi erunt quadrati remanentis maxima transversalia: in locum autem ipsorum S', S'', ... $S^{(f)}$ sumendi sunt termini

$$\widehat{SS'},\quad \widehat{S'S''},\quad \widehat{S''S'''},\quad \ldots\quad \widehat{S^{(f-1)}S^{(f)}}$$

qui termini ipsis S', S'', ... $S^{(f)}$ aequales sunt. Ex hac propositione colligitur, in quadratis, quae, serie termini S verticali et alia quaecunque horizontali rejecta, remanent, eandem fore maximorum transversalium summam, videlicet eadem quantitate S minorem quam in quadrato proposito A''.

Consideremus quadratum aliquod $A''_\varkappa$. in quo seriei horizontalis, cui reliquae omnes annexae sunt, terminus stellatus pertinet ad $\varkappa^{\text{tam}}$ verticalem, quem terminum designabo per $S_\varkappa$. Quadratum illud $A''_\varkappa$. ipsum est, quod formari debet, quoties variabiles omnes praeter t et $x_\varkappa$ eliminare proponitur. Statuamus porro quadratum $A_\varkappa$. provenire addendo quadrati A. seriebus horizontalibus quantitates

$$h_1^{(\varkappa)},\quad h_2^{(\varkappa)},\quad \ldots\quad h_m^{(\varkappa)}.$$

Vocemus O ordinem systematis aequationum differentialium propositarum sive summam maximam terminorum transversalium in quadrato $A.$, sitque $O-S_\varkappa=P_\varkappa$; secundum praecepta supra tradita ad formandum aequationum auxiliarium systema, cujus ope eliminatio proposita praestari possit, m aequationum differentialium propositarum unaquaeque i^{ta} erit $P_\varkappa+h_i^{(\varkappa)}$ vicibus iteratis differentianda. Cui numero $P_\varkappa+h_i^{(\varkappa)}$ significationem memorabilem tribuere licet. Fit in quadrato $A''_\varkappa$. summa maximorum transversalium, quae est terminorum transversalium summa maxima

$$O+h_1^{(\varkappa)}+h_2^{(\varkappa)}+\cdots+h_m^{(\varkappa)}.$$

Unde si $\varkappa^{\text{tam}}$ seriem verticalem, i^{tam} horizontalem rejicimus, secundum propositionem inventam in quadrato remanente summa maxima terminorum transversalium erit

$$O-S_\varkappa+h_1^{(\varkappa)}+h_2^{(\varkappa)}+\cdots+h_m^{(\varkappa)} = P_\varkappa+h_1^{(\varkappa)}+h_2^{(\varkappa)}+\cdots+h_m^{(\varkappa)}$$

ideoque, si de ipso quadrato A. rejicitur $\varkappa^{\text{ta}}$ series verticalis, i^{ta} horizontalis, in quadrato remanente summa maxima terminorum transversalium erit $P_\varkappa + h_i^{(\varkappa)}$. Hinc problematis hic transacti nacti sumus hanc solutionem:

Problema.

Inter variabilem independentem t et m variabiles dependentes $x_1, x_2, \dots x_m$ datae sint aequationes differentiales

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad \dots \quad u_m = 0,$$

quas si ad unicam aequationem differentialem inter t et $x_\varkappa$ revocare postulatur, propositas aequationes differentiales differentiando novae formandae sunt aequationes auxiliares eaeque necessariae, ut earum beneficio per solas eliminationes sine ullis ulterioribus differentiationibus aequatio differentialis inter t et $x_\varkappa$ prodeat: quaeritur quot vicibus ad formandum illud aequationum auxiliarium systema aequatio $u_i = 0$ differentianda sit.

Solutio.

Formetur quadratum m seriebus verticalibus totidemque horizontalibus constans; in α^{ta} verticali, a^{ta} horizontali ponatur ordo differentialis variabilis x_α altissimi quod in aequatione $u_a = 0$ obvenit. De eo quadrato rejecta i^{ta} serie horizontali, $\varkappa^{\text{ta}}$ verticali, in quadrato remanente quaeratur summa maxima $\sigma_{i,\varkappa}$, quam ejus assequi possunt $m-1$ termini omnes in diversis seriebus horizontalibus et in diversis verticalibus positi: ad formandum aequationum auxiliarium systema, cujus ope aequatio differentialis inter t et $x_\varkappa$ nascatur, aequatio $u_i = 0$ iteratis $\sigma_{i,\varkappa}$ vicibus differentianda est. Qui numerus quaesitus $\sigma_{i,\varkappa}$ etiam aequatur ordini aequationum differentialium provenientium, si de aequationibus propositis rejicimus ipsam $u_i = 0$, ipsam autem variabilem $x_\varkappa$ pro constante habemus.

Numeri $\sigma_{i,\varkappa} = P_\varkappa + h_i^{(\varkappa)} = O - S_\varkappa + h_i^{(\varkappa)}$ ipso quadrato $A'_\varkappa$. suppeditantur, quod quomodo e quadrato A'. deducatur docui. Dedi supra numerorum $S_\varkappa$ et $h_i^{(\varkappa)}$ valores exemplo proposito respondentes: quibus numeris soluta habentur centum inaequalitatum problemata, videlicet si de quadrato proposito simul una series horizontalis quaecunque et una quaecunque verticalis rejiciuntur, in quoque centum quadratorum remanentium summam maximam terminorum transversalium invenire. Facile etiam in horum quadratorum unoquoque ipsi termini transversales summa maxima gaudentes inveniuntur, si ea repetis, quae supra de modo a termino S quadrati A''. ad alium quemlibet stellatum $S^{(f)}$ per terminos stellatos intermedios transeundi tradidi.

§. 5.

Conditio determinatur, qua fiat ut systematis aequationum differentialium propositi ordo deprimatur.

Casibus particularibus evenire potest, ut ordo systematis aequationum differentialium non ascendat ad valorem summae maximae terminorum quadrati A. transversalium. Qui habitus aequationum particularis certa conditione analytica indicatur. Sit rursus $x_\varkappa^{(a_{\iota,\varkappa})}$ differentiale variabilis $x_\varkappa$ altissimum quod in aequatione $u_\iota = 0$ invenitur; differentialium partialium

$$\begin{array}{llll}
\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1^{(a_{1,1})}}, & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2^{(a_{1,2})}}, & \ldots & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_m^{(a_{1,m})}}, \\[2ex]
\dfrac{\partial u_2}{\partial x_1^{(a_{2,1})}}, & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2^{(a_{2,2})}}, & \ldots & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_m^{(a_{2,m})}}, \\
\vdots & & & \\
\dfrac{\partial u_m}{\partial x_1^{(a_{m,1})}}, & \dfrac{\partial u_m}{\partial x_2^{(a_{m,2})}}, & \ldots & \dfrac{\partial u_m}{\partial x_m^{(a_{m,m})}}
\end{array}$$

fingo Determinans, ejusque terminos tantum hos

$$\pm \frac{\partial u_1}{\partial x_{\iota'}^{(a_{1,\iota'})}} \frac{\partial u_2}{\partial x_{\iota''}^{(a_{2,\iota''})}} \cdots \frac{\partial u_m}{\partial x_{\iota^{(m)}}^{(a_{m,\iota^{(m)}})}}$$

conservo, in quibus aggregatum ordinum

$$a_{1,\iota'} + a_{2,\iota''} + \cdots + a_{m,\iota^{(m)}}$$

valorem *maximum* O adipiscitur; reliquos omnes Determantis terminos rejicio. Terminorum remanentium aggregatum quod quodammodo est Determinans mutilatum designo per ∇, *erit*

$$\nabla = 0$$

conditio qua definitur, aequationum differentialium propositarum systema habitu particulari indutum esse, quo fiat ut ordo ejus deprimatur.

Non evanescente ∇, ordo systematis semper valorem O theoria generali a me proposita assignatum assequitur. Quantitatem ∇ voco *systematis aequationum differentialium propositarum Determinans.*

In exemplo nostro fit

$$\nabla = \frac{\partial u_1}{\partial x_6^{(91)}} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x_2^{(32)}} \cdot \frac{\partial u_4}{\partial x_3^{(64)}} \cdot \frac{\partial u_6}{\partial x_8^{(21)}} \cdot \frac{\partial u_7}{\partial x_7^{(91)}} \cdot \frac{\partial u_8}{\partial x_5^{(73)}}$$

$$\times \left\{ \frac{\partial u_3}{\partial x_1^{(14)}} \frac{\partial u_9}{\partial x_{10}^{(88)}} - \frac{\partial u_9}{\partial x_1^{(25)}} \frac{\partial u_3}{\partial x_{10}^{(77)}} \right\} \left\{ \frac{\partial u_5}{\partial x_4^{(18)}} \frac{\partial u_{10}}{\partial x_9^{(19)}} - \frac{\partial u_{10}}{\partial x_4^{(25)}} \frac{\partial u_5}{\partial x_9^{(12)}} \right\}.$$

Hujus formulae quatuor termini, qui resolutis uncis proveniunt, respondent quatuor supra a me investigatis systematis terminorum quadrati A. transversalium summa *maxima* gaudentium. Quoties igitur in exemplo nostro neutra locum habet aequationum

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_1^{(14)}}\frac{\partial u_9}{\partial x_{10}^{(88)}}-\frac{\partial u_9}{\partial x_1^{(25)}}\frac{\partial u_3}{\partial x_{10}^{(77)}} = 0,$$

$$\frac{\partial u_5}{\partial x_4^{(18)}}\frac{\partial u_{10}}{\partial x_9^{(19)}}-\frac{\partial u_{(10)}}{\partial x_4^{(25)}}\frac{\partial u_5}{\partial x_9^{(12)}} = 0,$$

aequationum differentialium propositarum systema est ordinis 508, sive 508 Constantibus Arbitrariis earum integratio completa afficitur. Si vero duarum aequationum antecedentium altera locum habet, systematis ordo valore 508 inferior manet. Quo casu aequationes differentiales propositae praeparatione quadam egent, quae facta esse debet, antequam procedas ad tractandas aequationes differentiales propositas. Systematis aequationum differentialium propositarum Determinans non evanescere est conditio, cui nisi satisfactum sit, ejus ordinem determinare non licet. Quoties inaequalitatum problema, terminos quadrati A. transversales summa maxima gaudentes determinandi, *unicam* solutionem habet, ordo systematis aequationum differentialium propositarum summae illi maximae aequatur neque fieri potest ut inferior evadat. Tum enim systematis Determinans unico termino constat neque potest evanescere.