VORLESUNGEN

ÜBER

MATHEMATISCHE PHYSIK

VON

DR. GUSTAV KIRCHHOFF,
PROFESSOR DER PHYSIK AN DER UNIVERSITÄT ZU BERLIN.

MECHANIK.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1876.

Vorrede.

Die Vorlesungen, die ich hiermit der Oeffentlichkeit übergebe, behandeln insofern das ganze Gebiet der *reinen Mechanik*, d. h. der Lehre von denjenigen Erscheinungen, bei welchen ausschliesslich *Bewegungen* ins Auge zu fassen sind, als sie sich mit der Bewegung materieller Punkte, starrer, flüssiger und elastischer fester Körper beschäftigen. Es ist aber bei ihnen die Annahme festgehalten, dass die Materie stetig den Raum erfüllt, wie sie es zu thun scheint; die Theorieen, die auf der Annahme von Molekülen beruhen, sind in ihnen nicht berührt.

Der Ausgangspunkt der Darstellung, den ich gewählt habe, ist von dem gewöhnlichen verschieden. Man pflegt die Mechanik als die Wissenschaft von den *Kräften* zu definiren, und die Kräfte als die *Ursachen*, welche Bewegungen hervorbringen oder hervorzubringen *streben*. Gewiss ist diese Definition bei der Entwicklung der Mechanik von dem grössten Nutzen gewesen, und sie ist es auch noch bei dem Erlernen dieser Wissenschaft, wenn sie durch Beispiele von Kräften, die der Erfahrung des gewöhnlichen Lebens entnommen sind, erläutert wird. Aber ihr haftet die Unklarheit an, von der die Begriffe der Ursache und des Strebens sich nicht befreien lassen. Diese Unklarheit hat sich z. B. gezeigt in der Verschiedenheit der Ansichten darüber, ob der Satz von der Trägheit und der Satz vom Parallelogramm der Kräfte anzusehn sind als Resultate der Erfahrung, als Axiome oder als Sätze, die logisch bewiesen werden können und bewiesen werden müssen. Bei der Schärfe, welche die Schlüsse in der Mechanik sonst gestatten, scheint es mir wünschenswerth, solche Dunkelheiten aus ihr zu entfernen, auch wenn das nur möglich ist durch eine Einschränkung ihrer Aufgabe. Aus diesem Grunde stelle ich es als die Aufgabe der Mechanik hin, die in der Natur vor sich gehenden Bewegungen zu *beschreiben*, und zwar vollständig und auf die einfachste Weise zu beschreiben. Ich will damit sagen, dass es sich nur darum handeln soll, anzugeben, *welches* die Erscheinungen sind, die stattfinden, nicht aber darum, ihre *Ursachen* zu ermitteln. Wenn man hiervon ausgeht und die Vorstellungen von Raum, Zeit und Materie voraussetzt, so gelangt man durch rein mathematische Betrachtungen zu den allgemeinen Gleichungen der Mechanik. Man hat auch auf diesem Wege es mit dem Begriffe der Kraft zu thun und ist nicht im Stande, eine vollständige Definition desselben zu geben. Die Unvollständigkeit dieser Definition hat hier aber keine Unklarheit zur Folge, da die Einführung der Kräfte hier nur ein Mittel bildet, um die Ausdrucksweise zu vereinfachen, um nämlich in kurzen Worten Gleichungen auszudrücken, die ohne Hülfe dieses Namens nur schwerfällig durch Worte sich würden wiedergeben lassen. Hier reicht es aus, um jede Dunkelheit zu entfernen, die Kräfte soweit zu definiren, dass jeder Satz der Mechanik, in dem von Kräften die Rede ist, in Gleichungen übersetzt werden kann; und das geschieht auf dem eingeschlagenen Wege.

Bei dem grossen Umfange des Stoffes, der in verhältnissmässig kleinem Raume behandelt worden ist, kann eine Erschöpfung des Gegenstandes nicht erwartet werden; möge die getroffene Auswahl als eine zweckmässige befunden werden!

Berlin, im Januar 1876.

Der Verfasser.

Inhaltsverzeichniss.

Verbesserungen.

Seite 2 Zeile 21 von oben lies „im“ statt „in“.
„ 3 „ 10 von oben lies „im Allgemeinen eindeutig“ statt „eindeutig“.
„ 5 „ 5 von oben lies „im Allgemeinen vollkommen“ statt „vollkommen“.
„ 17 „ 8 von unten lies „$\frac{dy}{dt}$“ statt „$\frac{\partial y}{dt}$“.
„ 17 „ 1 von unten lies „Gleichungen“ statt „Gleichung“.
„ 52 „ 5 von unten lies „Angriffspunkt“ statt „Angriffspunkte“.
„ 93 „ 4 von oben lies „sin“ statt „cos“.
„ 95 „ 8 von unten lies „Relation“ statt „Rotation“.
„ 105 „ 4 von oben lies „ζ'^2“ statt „ζ^2“.
„ 231 „ 7, 4, 3, 2 von unten lies „$+$“ statt „$-$“.
„ 232 „ 6, 5, 4 von unten lies „$+ \frac{3}{4} RR'^3$“ statt „$- \frac{RR'^3}{4}$“.
„ 248 Gleichung 14) lies „$-\pi$“ statt „$\frac{\pi}{3}$“.
„ 249 Zeile 10 von unten lies „$-\pi$“ statt „$\frac{\pi}{3}$“.
„ 250 „ 1, 5 von oben lies „$-\pi$“ statt „$\frac{\pi}{3}$“.
„ 250 „ 21 von oben lies „π“ statt „$\frac{\pi}{3}$“.

Dreiundzwanzigste Vorlesung.

(Bewegung der Luft oder einer anderen compressibeln Flüssigkeit, auf deren Theile keine Kräfte wirken. Es wird die Existenz eines Geschwindigkeitspotentials vorausgesetzt und die Geschwindigkeit als unendlich klein angenommen. Aufstellung der Bedingungen, durch welche das Geschwindigkeitspotential bestimmt ist. Ebene Wellen. Reflexion derselben. Kugelförmige Wellen. Berechnung des Geschwindigkeitspotentials aus dem Anfangszustande für den Fall, dass der Luftraum unbegrenzt ist. Bewegung einer festen Kugel in der Luft. Schwingungen einer Kugel. Intensität des erzeugten Tones. Schwingungen zweier kleiner Kugeln.)

§ 1.

Wir haben bis jetzt die Bewegung einer Flüssigkeit nur unter der Voraussetzung näher untersucht, dass diese als incompressibel betrachtet werden kann; wir wollen nun auf die Aenderungen der Dichtigkeit Rücksicht nehmen. Zu den Erscheinungen, mit denen wir es hier zu thun haben werden, gehören vornehmlich die *Schallschwingungen der Luft;* wir wollen uns vorstellen, dass die Flüssigkeit, um die es sich handelt, die *Luft* ist, obwohl die Rechnungen, die wir durchführen werden, für jede Flüssigkeit gelten. Wir setzen die Existenz eines Geschwindigkeitspotentials voraus, nehmen an, dass Kräfte nicht wirken, und dass die Geschwindigkeiten überall stetig sich ändern; für den Punkt (x, y, z) und die Zeit t bezeichnen wir das Geschwindigkeitspotential durch φ, den Druck durch p, die Dichtigkeit durch μ. Nach den Gleichungen 20), 21) und 6) der fünfzehnten Vorlesung ist dann

$$-P = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \tfrac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right) \tag{1}$$

$$0 = \frac{\partial \mu}{\partial t} + \frac{\partial \mu \frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\partial x} + \frac{\partial \mu \frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\partial y} + \frac{\partial \mu \frac{\partial \varphi}{\partial z}}{\partial z} \tag{2}$$

$$P = \int \frac{dp}{\mu}, \tag{3}$$

wo das für P angegebene Integral aus der Relation zu berechnen ist, die zwischen p und μ besteht, und die untere Grenze der Integration dabei beliebig gewählt werden kann. Wir werden uns auf die Betrachtung des Falles beschränken, dass die Geschwindigkeiten, so wie die Aenderungen des Druckes und der Dichtigkeit als unendlich klein anzusehn sind. Wir können dann zunächst

$$dp = a^2 d\mu \tag{4}$$

setzen, wo a eine positive Constante bedeutet, die, wie wir sehen werden, die *Fortpflanzungsgeschwindigkeit* des Schalles in der Luft ist. Wir machen ferner

$$\mu = \mu_0 (1 + \sigma), \tag{5}$$

indem wir unter μ_0 eine Constante verstehen, die unendlich wenig von den Werthen, die μ erhält, verschieden ist; die Grösse σ nennen wir die *Verdichtung* im Punkte (x, y, z) zur Zeit t. Berücksichtigen wir nur die Glieder niedrigster Ordnung, so folgt aus 3), 4) und 5), wenn wir P und σ gleichzeitig verschwinden lassen,

$$P = a^2 \sigma$$

und aus 1) und 2)

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + a^2 \sigma &= 0 \\ \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \varDelta \varphi &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Hieraus ergiebt sich für φ die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \varDelta \varphi . \tag{7}$$

Nach dem Begriffe des Geschwindigkeitspotentials sind $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ die Componenten der Geschwindigkeit und nach der Gleichung 6) ist $-\frac{1}{a^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ die Verdichtung σ im Punkte (x, y, z) zur Zeit t; alle diese Grössen sind daher gefunden, wenn φ als Function von x, y, z und t bis auf eine additive, von diesen 4 Argumenten unabhängige Constante ermittelt ist. Wir wollen beweisen, dass durch die Gleichung 7) φ vollkommen bestimmt ist, wenn φ und $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ für $t = 0$ als Functionen von x, y, z und für alle Elemente der Grenzfläche der betrachteten Luftmasse $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ als Function von t gegeben sind und φ als stetig angenommen wird. Man bezeichne durch $d\tau$ das Volumen, welches ein Element der Luftmasse zur Zeit t einnimmt, multiplicire die Gleichung 7) mit $\frac{\partial \varphi}{\partial t} d\tau$ und integrire noch $d\tau$; die so entstehende Gleichung lässt sich schreiben

$$\frac{d}{dt}\int \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^2 d\tau = 2a^2 \int \frac{\partial \varphi}{\partial t} \varDelta \varphi \, d\tau , \tag{8}$$

da das Glied, welches bei der Entwicklung der linken Seite von 8) in Folge davon auftritt, dass $d\tau$ mit der Zeit sich ändert, unendlich klein von höherer Ordnung ist, als die übrigen Glieder. Dieselbe Erwägung ergiebt

$$\frac{d}{dt}\int\left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right)d\tau$$

$$=2\int\left(\frac{\partial\frac{\partial\varphi}{\partial t}}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\frac{\partial\varphi}{\partial t}}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial\frac{\partial\varphi}{\partial t}}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)d\tau.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung — mithin auch ihre linke — ist nach dem durch die Gleichung 14) der sechszehnten Vorlesung ausgesprochenen Green'schen Satze

$$=-2\int\frac{\partial\varphi}{\partial t}\Delta\varphi\,d\tau-2\int\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial n}ds,$$

wo ds ein Element der Oberfläche der Luftmasse und n die nach dem Innern dieser gerichtete Normale von ds bedeutet; es gilt diese Behauptung auch in dem Falle, dass φ vielwerthig ist, weil auch dann die Differentialquotienten von φ nach x, y, z und t einwerthig sind. Die Gleichung 8) wird hiernach

$$\frac{d}{dt}\int\left(\frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right)d\tau=-2\int\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial n}ds;$$

sie spricht den Satz von der lebendigen Kraft für den Fall, den wir betrachten, aus. Ist für alle Elemente der Oberfläche und für alle Werthe der Zeit $\frac{\partial\varphi}{\partial n}=0$, so ist die gefundene Gleichung integrabel und giebt

$$\int\left(\frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right)d\tau=C,$$

wo C eine von t unabhängige Grösse bedeutet. Verschwinden überall φ und $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ für $t=0$, so ist $C=0$; es ist dann φ unabhängig von x, y, z und t, es ist dann also immer und überall $\varphi=0$. Wir haben somit bewiesen, dass, wenn φ der Differentialgleichung 7) genügt, für $t=0$ φ und $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ verschwinden und an der Oberfläche für alle Werthe der Zeit $\frac{\partial\varphi}{\partial n}=0$ ist, allgemein $\varphi=0$ ist. Es folgt hieraus, dass, wenn φ_1 und φ_2 der Gleichung 7) genügen, für $t=0$

$$\varphi_1=\varphi_2 \quad\text{und}\quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial t}=\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}$$

und für die Oberfläche

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}=\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}$$

ist, man allgemein $\varphi_1=\varphi_2$ hat.

Für ein gewisses Zeitintervall lässt sich φ für einen jeden Punkt der Luftmasse in einfacher Weise durch die Werthe ausdrücken, die φ und $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ im Anfangspunkte der Zeit besitzen. Um das zu zeigen, wollen wir eine particuläre Lösung der Gleichung 7) benutzen, die im nächsten § abgeleitet werden soll.

§ 2.

Nimmt man an, dass φ von x und y unabhängig ist, so geht die Gleichung 7) über in diese

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}. \tag{9}$$

Setzt man

$$x = z - at, \quad y = z + at,$$

indem man den Zeichen x und y eine neue Bedeutung giebt, so hat man

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= a^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right) \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} &= \quad\;\; \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}; \end{aligned}$$

die Gleichung 9) wird also

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 0;$$

hieraus folgt, dass $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ von y unabhängig, φ also die Summe einer Function von x und einer Function von y sein muss. Die allgemeine Lösung der partiellen Differentialgleichung 9) ist daher

$$\varphi = F_1(z - at) + F_2(z + at), \tag{10}$$

wo F_1 und F_2 willkührliche Functionen der beigefügten Argumente bedeuten.

Gesetzt, es sei

$$\varphi = F_1(z - at)$$

und es habe F_1 variable Werthe nur, wenn sein Argument zwischen 0 und ε liegt; zur Zeit t hat dann φ variable Werthe nur, wenn z zwischen at und $at + \varepsilon$ liegt, und zwar immer dieselben Werthe, welches auch der Werth von t sein möge; man sagt: eine *Welle* von gleichbleibender Gestalt pflanzt sich mit der Geschwindigkeit a in der Richtung der z-Achse fort. Ist

$$\varphi = F_2(z + at)$$

und hat F_2 variable Werthe nur, wenn das Argument innerhalb eines gewissen Intervalls liegt, so hat man eine Welle, die mit derselben Geschwindigkeit in der entgegengesetzten Richtung sich fortpflanzt. Die allgemeinere, durch die Gleichung 10) dargestellte Bewegung bezeichnet man als eine, bei der zwei Wellen oder zwei Wellensysteme vorhanden sind, die mit der Geschwindigkeit a in der Richtung der z-Achse und in der entgegengesetzten Richtung fortschreiten.

Wir wollen nun annehmen, dass eine feste Wand vorhanden sei, für welche $z = l$ ist, so dass für diesen Werth von z immer $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$ sein muss; für die betrachtete Luftmasse sei $z < l$ und t sei positiv; zur Zeit $t = 0$ sei eine Welle verhanden, die in der Richtung der z-Achse fortschreitet und jene Wand noch nicht erreicht hat. Für $t = 0$ und für hinreichend kleine Werthe von t ist dann

$$\varphi = F_1(z - at);$$

die Function $F_1(x)$ ist dabei für alle Werthe von x, die $< l$ sind, bis auf eine additive Constante bestimmt durch die Verdichtungen oder durch die Geschwindigkeiten, die zur Zeit $t = 0$ stattfinden; sie ist für die genannten Werthe von x völlig bestimmt, wenn wir noch festsetzen, dass $F_1(x) = 0$ ist, wenn x nahe $= l$ ist. Wenden wir die Gleichung 10) auf unsern Fall an, so haben wir $F_2(y) = 0$ zu setzen für alle Werthe von y, die kleiner als l sind; für grössere Werthe des Arguments bestimmt sich F_2 aus der Bedingung, die für $z = l$ zu erfüllen ist. Bezeichnet man nämlich durch F_1' und F_2' die nach ihren Argumenten genommenen Differentialquotienten von F_1 und F_2, so muss für alle positiven Werthe von t

$$F_1'(l - at) + F_2'(l + at) = 0$$

sein, oder, wenn man $y = l + at$ setzt, für alle Werthe von y, die grösser als l sind,

$$F_2'(y) = -F_1'(2l - y).$$

Integrirt man diese Gleichung, nachdem man sie mit dy multiplicirt hat und wählt die Constante der Integration so, dass $F_2(y)$ bei $y = l$ stetig bleibt, so erhält man

$$F_2(y) = F_1(2l - y).$$

Diese Gleichung gilt zunächst nur für den Fall, dass $y > l$; man kann sie auch für den Fall, dass $y < l$, in dem $F_2(y) = 0$ ist, gültig machen, indem man $F_1(x)$, welches bisher nur für Werthe von x definirt ist, die kleiner als l sind, für grössere Werthe gleich Null annimmt. Man hat dann allgemein

$$\varphi = F_1(z - at) + F_1(2l - z - at). \tag{11)}$$

Das zweite Glied in diesem Ausdrucke von φ stellt eine Welle dar, die in der der z-Achse entgegengesetzten Richtung fortschreitet; man sagt von dieser, sie sei *reflectirt*, sei entstanden durch *Reflexion* an der bei $z = l$ vorhandenen Wand.

Wir wollen den betrachteten Fall noch durch die Annahme specialisiren, dass l unendlich gross ist und $F_1(x)$ für unendlich grosse positive Werthe von x verschwindet. Für endliche Werthe von t ist dann die Gleichung 11)

$$\varphi = F_1(z - at),$$

d. h. die Bewegung geht so vor sich, als ob die Wand bei $z = l$ gar nicht vorhanden wäre. Für unendlich grosse Werthe von t gilt das aber nicht mehr; es hört an irgend einem Orte auf zu gelten, sobald die an der Wand reflectirte Welle ihn erreicht hat.

Wir haben jetzt *ebene* Wellen untersucht, wir wollen nun *kugelförmige* ins Auge fassen. Wir setzen

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

und nehmen an, dass φ ausser von t nur von r abhängig ist. Da dann

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}$$

ist, so wird die Gleichung 7)

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right),$$

oder nach Multiplication mit r

$$\frac{\partial^2(r\varphi)}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2(r\varphi)}{\partial r^2}.$$

Diese Gleichung ist von derselben Form wie 9); ihre allgemeine Lösung ist

$$\varphi = \frac{1}{r}F_1(r - at) + \frac{1}{r}F_2(r + at), \tag{12}$$

wo F_1 und F_2 wieder willkührliche Functionen bedeuten. Hierdurch sind zwei Systeme von Kugelwellen dargestellt, von denen das eine von dem Anfangspunkt der Coordinaten nach Aussen, das andere von Aussen nach diesem Punkte hin mit der Geschwindigkeit a sich fortpflanzt. Bei diesen Wellen bleiben aber während des Fortschreitens die Geschwindigkeiten und die Aenderungen der Dichtigkeit nicht sich gleich, wie es bei den ebenen Wellen der Fall ist, sondern wegen des Factors $\frac{1}{r}$ nehmen diese Grössen bei den sich ausbreitenden Wellen ab, bei den sich zusammenziehenden zu.

§ 3.

Wir sind jetzt vorbereitet, die am Ende des § 1. ausgesprochene Behauptung zu beweisen. Es seien U und V zwei Functionen der rechtwinkligen Coordinaten x, y, z, die mit ihren ersten Differentialquotienten innerhalb eines vollständig begrenzten, einfach zusammenhängenden Raumes stetig sind; es sei $d\tau$ ein Element dieses Raumes, ds ein Element seiner Oberfläche und n die nach seinem Innern gerichtete Normale von ds; nach dem Green'schen Satze ist dann

$$\int d\tau\,(U \varDelta V - V \varDelta U) = \int ds \left(V \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial V}{\partial n}\right).$$

In dieser Gleichung setze man U gleich einem Geschwindigkeitspotential φ, wie wir es hier betrachten, das also der Gleichung 7) genügt, und wähle V so, dass

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2 \varDelta V$$

ist; man hat dann

$$\int d\tau\,(\varphi \varDelta V - V \varDelta \varphi) = \frac{1}{a^2} \int d\tau \left(\varphi \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - V \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\right)$$
$$= \frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial t} \int d\tau \left(\varphi \frac{\partial V}{\partial t} - V \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)$$

und erhält also, wenn man durch T einen beliebigen Werth von t bezeichnet,

$$\int_0^T dt \int ds \left(V \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial V}{\partial n}\right) = \frac{1}{a^2} \left[\int d\tau \left(\varphi \frac{\partial V}{\partial t} - V \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)\right]_0^T. \quad 13)$$

Den Anfangspunkt der Coordinaten legen wir in einen beliebigen Punkt des Luftraums, auf den φ sich bezieht, und machen

$$V = \frac{F(r + at)}{r}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$$

aus der Bedeutung, welche die Gleichung 12) hat, folgt, dass dieses V der dafür angenommenen partiellen Differentialgleichung genügt. Ueber die Function F nehmen wir an, dass sie von Null verschiedene Werthe nur hat, wenn ihr Argument zwischen at' und $at' + \varepsilon$ liegt, und hier positiv ist; dabei soll

$$0 < at' < at' + \varepsilon < aT$$

$$\int_{at'}^{at'+\varepsilon} F(r)\,dr = 1$$

und ε unendlich klein sein; es hat dann $F(r)$ Werthe, welche unendlich gross von der Ordnung von $\frac{1}{\varepsilon}$ sind. Der Raum, dessen Element $d\tau$ ist, soll durch zwei Kugelflächen begrenzt sein, deren gemeinsamer Mittelpunkt der Anfangspunkt der Coordinaten ist, und von denen die eine einen Radius hat, der unendlich klein auch gegen ε ist, die andere einen Radius R, der gleich der kürzesten Entfernung des Anfangspunktes von der Oberfläche des Luftraums ist, auf den φ sich bezieht; dabei soll die Grösse t' so gewählt sein, dass

$$at' + \varepsilon < R\,.$$

Um unter diesen Voraussetzungen die Gleichung 13) zu entwickeln, bemerken wir zunächst, dass das Integral

$$\int ds \left(V \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial V}{\partial n} \right),$$

ausgedehnt über die Kugel vom Radius R, für alle positiven Werthe von t verschwindet, weil hier für diese V und $\frac{\partial V}{\partial n}$ $\left(\text{oder, was dasselbe ist, } -\frac{\partial V}{\partial r}\right)$ gleich Null sind. Ueber die unendlich kleine Kugel ausgedehnt, ist

$$\int ds\, V \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$$

$$\int ds\, \varphi \frac{\partial V}{\partial n} = -4\pi \varphi_0 F(at),$$

wenn φ_0 den Werth von φ im Punkte $r = 0$ zur Zeit t bedeutet, wie man sieht, wenn man ds durch Polarcoordinaten ausdrückt. Durch Ausführung der Integration nach t findet man hiernach die linke Seite der Gleichung 13)

$$= \frac{4\pi}{a} \varphi_0,$$

wo φ_0 auf die Zeit t' sich bezieht.

Der in den eckigen Klammern auf der rechten Seite derselben Gleichung stehende Ausdruck verschwindet für $t = T$, weil für diesen Werth von t V und $\frac{\partial V}{\partial t}$ gleich Null sind; um seinen Werth für $t = 0$ zu finden, führen wir die Polarcoordinaten r, ϑ, ω ein und bezeichnen durch F' den Differentialquotienten der Function F nach ihrem Argument. Die rechte Seite der Gleichung 13) wird dann

$$\frac{1}{a^2} \int\!\!\int\!\!\int \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\omega\, r\, dr \left(F(r) \frac{\partial \varphi}{\partial t} - a F'(r)\, \varphi \right),$$

wo $t = 0$ in φ und $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ zu setzen und zu integriren ist in Bezug auf ϑ von 0 bis π, in Bezug auf ω von 0 bis 2π und in Bezug auf r von 0 bis R. Die letzte dieser Integrationen lässt sich ausführen; in der That hat man

$$\int_0^R r\, dr\, F(r) \frac{\partial \varphi}{\partial t} = at' \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

$$\int_0^R r\, dr\, F'(r)\, \varphi = \Big[r\varphi F(r) \Big]_0^R - \int_0^R \frac{\partial (r\varphi)}{\partial r} F(r)\, dr$$

$$= -\frac{\partial (t'\varphi)}{\partial t'},$$

wo in $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ und φ auf der rechten Seite der Gleichheitszeichen

$$r = at'$$

zu setzen ist. Die Gleichung 13) giebt daher

$$4\pi\varphi_0 = \int\int \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\omega \left(t' \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial (t'\varphi)}{\partial t'}\right);$$

sie drückt den Werth, den φ im Punkte $r = 0$ zur Zeit t' hat, aus durch die Werthe, die zur Zeit $t = 0$ $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ in der Kugelfläche und φ in und unendlich nahe an der Kugelfläche besitzt, welche mit dem Radius at' um den Punkt $r = 0$ beschrieben ist. Dieser Punkt kann beliebig in dem zu betrachtenden Luftraume gewählt werden; auch t' ist beliebig, nur muss es in dem Intervall von 0 bis $\frac{R}{a}$ liegen. Sind φ und $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ für $t = 0$ überall gegeben, so kann man also φ für jeden Punkt und ein gewisses Zeitintervall ermitteln; ist der Luftraum als unbegrenzt zu betrachten, so findet man auf diese Weise φ vollständig.

§ 4.

Wir haben früher die Bewegung eines festen Körpers in einer als unbegrenzt zu betrachtenden Flüssigkeit ausführlich unter der Voraussetzung untersucht, dass diese als incompressibel angesehen werden kann; wir wollen nun eine solche Bewegung unter den einfachsten Annahmen mit Rücksicht auf die dabei eintretenden Dichtigkeitsänderungen verfolgen. Wir fassen die Luftbewegung ins Auge, für welche

$$\varphi = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{F(r - at)}{r}\right) \tag{14}$$

ist, wo r wieder die Linie bezeichnet, die vom Anfangspunkte der rechtwinkligen Coordinaten nach dem Punkte gezogen ist, auf den φ sich bezieht, F eine Function, über die zu verfügen wir uns vorbehalten; diesen Ausdruck kann man für das Geschwindigkeitspotential annehmen, da er der Gleichung 7) genügt. Gleichbedeutend mit der Gleichung 14) ist

$$\varphi = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{F(r - at)}{r}\right) \cdot \frac{\partial r}{\partial z}$$

oder

$$\varphi = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{F(r - at)}{r}\right) \cdot \cos\vartheta,$$

wenn ϑ den Winkel zwischen der z-Achse und der Richtung von r bedeutet. Die Componente der Geschwindigkeit eines Lufttheilchens nach der Richtung von r, d. h. $\frac{\partial \varphi}{\partial r}$, ist daher bestimmt durch

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\frac{F(r-at)}{r}\right) \cdot \cos\vartheta .$$

Nun sei R ein specieller Werth von r und

$$\frac{\partial^2}{\partial R^2}\left(\frac{F(R-at)}{R}\right) = f(t); \tag{15}$$

für $r = R$ ist dann

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = f(t)\cos\vartheta .$$

Hieraus folgt, dass die Gleichung 14) für den Fall gilt, dass eine feste Kugel vom Radius R, deren Mittelpunkt dem Anfangspunkt der Coordinaten unendlich nahe ist, in der Richtung der z-Achse so sich bewegt, dass $f(t)$ ihre unendlich kleine Geschwindigkeit zur Zeit t ist. Ist f beliebig gegeben, so dient die Gleichung 15) zur Bestimmung von F; bezeichnet man den ersten und zweiten Differentialquotienten der Function F nach ihrem Argument durch F' und F'', so ist nämlich

$$\frac{\partial^2}{\partial R^2}\left(\frac{F(R-at)}{R}\right) = \frac{2}{R^3}F(R-at) - \frac{2}{R^2}F'(R-at) + \frac{1}{R}F''(R-at);$$

setzt man

$$F(R-at) = U(t) \quad \text{oder kürzer} \quad = U, \tag{16}$$

so hat man

$$F'(R-at) = -\frac{1}{a}\frac{dU}{dt}, \qquad F''(R-at) = \frac{1}{a^2}\frac{d^2U}{dt^2};$$

die Gleichung 15) wird daher

$$\frac{2}{R^2}U + \frac{2}{aR^2}\frac{dU}{dt} + \frac{1}{a^2R}\frac{d^2U}{dt^2} = f(t). \tag{17}$$

Die Integration dieser Differentialgleichung bietet keine Schwierigkeit dar; es seien λ_1 und λ_2 die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$2\frac{a^2}{R^2} + 2\frac{a}{R}\lambda + \lambda^2 = 0,$$

d. h. es sei

$$\lambda_1 = -\frac{a}{R}(1+i), \quad \lambda_2 = -\frac{a}{R}(1-i), \quad i = \sqrt{-1},$$

dann ist

$$U = U_1 e^{\lambda_1 t} + U_2 e^{\lambda_2 t},$$

wenn U_1 und U_2 als Functionen von t aus den Gleichungen

$$\frac{dU_1}{dt}e^{\lambda_1 t} + \frac{dU_2}{dt}e^{\lambda_2 t} = 0$$

$$\lambda_1\frac{dU_1}{dt}e^{\lambda_1 t} + \lambda_2\frac{dU_2}{dt}e^{\lambda_2 t} = a^2 R f(t)$$

bestimmt werden, d. h. wenn

$$U_1 = \frac{a^2 R}{\lambda_1 - \lambda_2} \int f(t)\, e^{-\lambda_1 t} dt$$

$$U_2 = \frac{a^2 R}{\lambda_2 - \lambda_1} \int f(t)\, e^{-\lambda_2 t} dt$$

gemacht wird, wo die unteren Grenzen der beiden Integrale willkührliche Constanten sind. Hat man U ermittelt, so findet man φ aus den Gleichungen 14) und 16), von denen die zweite

$$F(r - at) = U\left(t - \frac{r - R}{a}\right) \tag{18}$$

giebt.

Wir wollen nun über die Function $f(t)$ die Voraussetzung machen, dass sie für alle negativen Werthe verschwindet, dass also die Kugel zur Zeit $t = 0$ sich zu bewegen anfängt; zugleich wollen wir als untere Grenze der in den Ausdrücken von U_1 und U_2 vorkommenden Integrale 0 annehmen; es verschwindet dann $U(t)$ für alle negativen Werthe von t und es verschwinden φ und $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$, wenn $t = 0$ und $r > R$ ist; die gemachte Annahme entspricht also dem Falle, dass zur Zeit $t = 0$ die Geschwindigkeit und die Verdichtung aller Lufttheilchen gleich Null sind. Dabei ist

$$F(r - at) = 0, \quad \text{wenn} \quad at < r - R;$$

ein jedes Lufttheilchen bleibt in Ruhe, so lange diese Ungleichung besteht.

Für positive Werthe von t kann $f(t)$ noch willkührlich gewählt werden. Gesetzt, es sei für diese

$$f(t) = c\,,$$

wo c eine Constante bedeutet, oder, was im Resultat auf dasselbe hinauskommt, es nehme, während t von Null bis zu einem unendlich kleinen Werthe wächst, $f(t)$ stetig von Null bis zu dem constanten Werthe c zu; es ergiebt sich dann

$$U(t) = \frac{a^2 R c}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(\frac{1}{\lambda_1}(e^{\lambda_1 t} - 1) - \frac{1}{\lambda_2}(e^{\lambda_2 t} - 1)\right)$$

oder, wenn man die Werthe von λ_1 und λ_2 einführt,

$$U(t) = \frac{R^3 c}{2}\left(1 - \sqrt{2}\, e^{-\frac{at}{R}} \cos\left(\frac{at}{R} - \frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Nach 18) ist daher, wenn $at > r - R$

$$F(r - at) = \frac{R^3 c}{2}\left(1 - \sqrt{2}\, e^{\frac{r - R - at}{R}} \cos\left(\frac{r - R - at}{R} + \frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Für sehr grosse Werthe von t wird

$$F(r - at) = \frac{R^3 c}{2}\,,$$

und es erhält das Geschwindigkeitspotential φ denselben Werth, den wir früher bei der Untersuchung der Bewegung einer Kugel in einer incompressibeln Flüssigkeit gefunden haben.

Es lässt sich U auch leicht berechnen, wenn man für positive Werthe von t

$$f(t) = c \cos \varkappa a t \tag{19}$$

annimmt, wo $\varkappa$ eine Constante bedeutet; man kommt dabei am bequemsten zum Ziele, wenn man benutzt, dass die für $f(t)$ angenommene Function der reelle Theil von

$$c\, e^{i \varkappa a t}$$

ist, diese Exponentialgrösse für $f(t)$ in den Ausdruck von U einsetzt und den reellen Theil desselben bildet; diese Methode ist richtig, weil, wenn $f(t)$ der Summe zweier Functionen von t gleichgesetzt wird, man für U die Summe derjenigen Ausdrücke erhält, die für U gelten, wenn $f(t)$ gleich der einen oder gleich der andern jener Functionen ist, und weil U reell ist, wenn $f(t)$ es ist; so findet man $U(t)$ gleich dem reellen Theile von

$$\frac{R^3 c}{2}\left(\frac{e^{i\varkappa a t} - e^{-\frac{at}{R}} e^{-i\frac{at}{R}}}{1 + \varkappa R - i} + \frac{e^{i\varkappa a t} - e^{-\frac{at}{R}} e^{i\frac{at}{R}}}{1 - \varkappa R + i}\right).$$

Für sehr grosse Werthe von t ist hiernach

$$U = A \cos \varkappa a t + B \sin \varkappa a t, \tag{20}$$

wo A und B Constanten sind. Da dieser Ausdruck für U der reelle Theil von

$$(A - iB)(\cos \varkappa a t + i \sin \varkappa a t)$$

ist, so müssen dieselben der Gleichung

$$\frac{R^3 c}{2}\left(\frac{1}{1 + \varkappa R - i} + \frac{1}{1 - \varkappa R + i}\right) = A - iB$$

oder der Gleichung

$$A - iB = \frac{R^3 c}{2 - \varkappa^2 R^2 + i 2 \varkappa R}$$

genügen, woraus

$$A = R^3 c \frac{2 - \varkappa^2 R^2}{4 + \varkappa^4 R^4}, \quad B = R^3 c \frac{2 \varkappa R}{4 + \varkappa^4 R^4}$$

$$\sqrt{A^2 + B^2} = \frac{R^3 c}{\sqrt{4 + \varkappa^4 R^4}}$$

folgt. Diese Werthe von A und B findet man auch leicht aus der Gleichung 17), wenn man in diese aus 19) und 20) die Ausdrücke für $f(t)$ und U einsetzt.

Für das Geschwindigkeitspotential φ ergiebt sich aus 20) mit Hülfe von 18) und 14)

$$\varphi = \frac{\partial}{\partial r}\left(A\,\frac{\cos \varkappa\,(r - R - a t)}{r} - B\,\frac{\sin \varkappa\,(r - R - a t)}{r}\right) \cos \vartheta\,. \qquad 21)$$

Bei einer Luftbewegung, wie sie durch diese Gleichung dargestellt ist, ist, wenn $\varkappa a$ zwischen gewissen Grenzen liegt, ein *einfacher Ton* vorhanden. Die *Höhe* desselben ist durch die eben genannte Grösse bedingt, oder, was dasselbe ist, durch die *Schwingungsdauer* eines Lufttheilchens; mit diesem Namen wollen wir die Dauer einer Doppelschwingung belegen, d. h. den Werth von

$$\frac{2\pi}{\varkappa a}.$$

Das Reciproke hiervon nennt man die *Schwingungszahl* des Tones. Die Strecke, um welche der Schall während einer Schwingungsdauer sich fortpflanzt, also

$$\frac{2\pi}{\varkappa},$$

heisst die *Wellenlänge* des Tones. Unter der *Intensität* eines Tones von gewisser Höhe verstehen wir eine Grösse, die mit dem Quadrate der grössten Verdichtung, welche ein Lufttheilchen erleidet, proportional ist, also proportional mit dem Werthe der Maxima, welche

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^2$$

für gewisse Werthe von t hat. Bei der durch die Gleichung 21) dargestellten Luftbewegung ist die Intensität des Tones von r und ϑ abhängig; von r in ziemlich complicirter Weise, von ϑ einfach so, dass sie mit $\cos^2\vartheta$ proportional ist; sie ist also gleich Null in der Ebene, die durch den Mittelpunkt der schwingenden Kugel, senkrecht zur Schwingungsrichtung dieser gelegt ist.

§ 5.

In der achtzehnten Vorlesung haben wir den Fall untersucht, dass zwei unendlich kleine Kugeln in einer incompressibeln Flüssigkeit sich bewegen, und gesehn, dass in ihm das Geschwindigkeitspotential gleich der Summe der Werthe zu setzen ist, die es hat, wenn nur die eine oder die andere der beiden Kugeln vorhanden ist, für alle Flüssigkeitstheile, die nicht unendlich nahe an einer der Kugeln liegen. Es gilt dieses auch, wenn die Dichtigkeitsänderungen der Flüssigkeit zu berücksichtigen sind. Stellen wir uns zwei unendlich kleine, gleiche Kugeln vor, deren Mittelpunkte auf der z-Achse unendlich kleine Pendelschwingungen der Art ausführen, dass ihre Geschwindigkeiten in jedem Augenblicke gleich und entgegengesetzt gerichtet sind. Es seien r und r' die Entfernungen des Punktes, auf den φ sich bezieht, von den Mittelpunkten der Kugeln; die Luftbewegung, die der am Ende des vorigen § untersuchten entspricht, ist dann, wenn der Anfangspunkt der Zeit passend verlegt wird, dargestellt durch die Gleichung

$$\varphi = C \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\sin \varkappa (r - at)}{r} - \frac{\sin \varkappa (r' - at)}{r'}\right),$$

wo C eine Constante bedeutet.

Suchen wir die Punkte, in denen die Intensität des Tones gleich Null ist, also $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ immer verschwindet, so finden wir für diese

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\sin \varkappa r}{r} - \frac{\sin \varkappa r'}{r'}\right) = 0$$

und

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\cos \varkappa r}{r} - \frac{\cos \varkappa r'}{r'}\right) = 0.$$

Nennt man ϱ den Abstand des Punktes, auf den sich φ bezieht, von der z-Achse, so sind dieses zwei Gleichungen für ϱ und z. Im Allgemeinen kann daher die Intensität des Tones nur in einzelnen Kreislinien verschwinden, deren gemeinsame Achse die z-Achse ist. Es giebt aber eine *Fläche*, in der die Intensität $= 0$ ist, wenn $\frac{1}{\varkappa}$, d. h. wenn die Wellenlänge des Tones unendlich gross gegen r und r' ist; dann wird die erste jener beiden Gleichungen überall erfüllt und die zweite ist

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right) = 0$$

oder, wenn für die Mittelpunkte der beiden Kugeln $z = c$ und $z = -c$ ist,

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\sqrt{(z-c)^2 + \varrho^2}} - \frac{1}{\sqrt{(z+c)^2 + \varrho^2}}\right) = 0.$$

Diese Gleichung stellt eine Rotationsfläche dar, deren erzeugende Curve eine hyperbelartige Gestalt hat, durch die Mittelpunkte der beiden Kugeln geht und Asymptoten besitzt, die mit der z-Achse Winkel bilden, deren Cosinus $\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$ sind.

In der Nähe der Enden einer tönenden Stimmgabel ist durch den Versuch eine Fläche von ähnlicher Art nachgewiesen, in der die Intensität des Tones verschwindet.

Vierundzwanzigste Vorlesung.

(Einfache Töne. Anwendung des Green'schen Satzes auf das Geschwindigkeitspotential eines einfachen Tones. Ebene Wellen. Stehende und fortschreitende Schwingungen. Eigentöne einer Luftsäule. Schwingungen der Luft in einer offenen Röhre Resonanz. Kugelförmige Wellen. Schwingungen der Luft in einem Raume, dessen Dimensionen gegen die Wellenlänge unendlich klein sind. Cubische Pfeifen. Berechnung der Resonanz und Tonhöhe cubischer Pfeifen, wenn die Oeffnung eine Ellipse oder ein Kreis ist. Berechnung der Resonanz und Tonhöhe cylindrischer Pfeifen für gewisse Fälle.)

§ 1.

Wir wollen uns jetzt näher mit den Bewegungen der Luft beschäftigen, die einem einfachen Tone entsprechen, und eine Reihe von particulären Lösungen der Differentialgleichung, mit der wir es hier zu thun haben, aufstellen, welche für die Akustik und namentlich für die Theorie der Pfeifen von hervorragendem Interesse sind. Für einen einfachen Ton von der Schwingungszahl n ist das Geschwindigkeitspotential von der Form

$$\varphi = \psi' \cos 2\pi n t + \psi'' \sin 2\pi n t, \tag{1}$$

wo ψ' und ψ'' Functionen von x, y, z sind; aus der Gleichung 7) der vorigen Vorlesung folgt für jede von diesen, wenn man wieder

$$\varkappa = \frac{2\pi n}{a}$$

setzt, dass sie der partiellen Differentialgleichung

$$\Delta\psi + \varkappa^2 \psi = 0 \tag{2}$$

genügt.

Bevor wir auf die Betrachtung specieller Fälle eingehn, wollen wir anführen, was der Green'sche Satz über die Functionen ergiebt, welche in einem vollkommen begrenzten Raume dieser Differentialgleichung genügen und mit ihren ersten Differentialquotienten einwerthig und stetig sind. Eine Lösung der Gleichung 2) ist

$$\frac{\cos \varkappa r}{r},$$

wo r die Entfernung des variabeln Punktes von irgend einem festen Punkte bedeutet; man kann das leicht durch Rechnung direct beweisen oder auch aus der Gleichung 12) der vorigen Vorlesung ableiten.

In der Gleichung, die den Ausgangspunkt der Betrachtungen des § 3. der vorigen Vorlesung gebildet hat und die den Green'schen Satz, soweit wir ihn hier gebrauchen, ausspricht, setzen wir

$$U = \frac{\cos \varkappa r}{r}, \quad V = \psi,$$

wobei wir den Anfangspunkt von r in dem Raume annehmen, in dem ψ die genannten Eigenschaften hat, und wenden sie auf *den* Raum an, der von diesem übrig bleibt, wenn man eine unendlich kleine Kugel ausschliesst, deren Mittelpunkt der Anfangspunkt von r ist. Durch eine Betrachtung, wie sie im § 3. der vorigen Vorlesung und für einfachere Bedingungen im § 4. der sechszehnten durchgeführt ist, findet man dann

$$\psi = \frac{1}{4\pi}\int ds\, \psi \frac{\partial \frac{\cos \varkappa r}{r}}{\partial n} - \frac{1}{4\pi}\int ds \frac{\cos \varkappa r}{r}\frac{\partial \psi}{\partial n},$$

wo auf der linken Seite des Gleichheitszeichens ψ sich auf den Anfangspunkt von r bezieht, und ds ein Element der Oberfläche des ursprünglich gedachten Raumes bezeichnet. Wir heben hervor, dass, wie diese Gleichung zeigt, bei den Voraussetzungen, die wir über ψ gemacht haben, alle höheren Differentialquotienten desselben stetig sind.

Wir fassen nun den Fall ins Auge, dass φ, also auch ψ (mit welchem Zeichen wir jede der beiden Grössen ψ' und ψ'' bezeichnen wollen), von x und y unabhängig ist. Die Gleichung 2) ist dann

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} = -\varkappa^2\psi$$

und ihr allgemeines Integral

$$\psi = A\cos \varkappa z + B \sin \varkappa z\,.$$

Wir haben daher

$$\begin{aligned}\varphi = &(A'\cos \varkappa z + B'\sin \varkappa z)\cos 2\pi n t \\ &+ (A''\cos \varkappa z + B''\sin \varkappa z)\sin 2\pi n t\,,\end{aligned} \tag{3)}$$

wo A', B', A'', B'' willkührliche Constanten bedeuten. Diese Gleichung lässt sich auch schreiben

$$\varphi = A\cos \varkappa(z - z_0)\cos 2\pi n(t - t_0) + B\sin \varkappa(z - z_0)\sin 2\pi n(t - t_0),$$

wo A, B, z_0, t_0 neue Constanten sind, oder, wenn man den Anfangspunkt der z und den Anfangspunkt der Zeit passend verlegt,

$$\varphi = A\cos \varkappa z \cos 2\pi n t + B \sin \varkappa z \sin 2\pi n t\,. \tag{4)}$$

Wir discutiren zuerst die Fälle, dass A oder B oder $A - B$ oder $A + B$ verschwindet.

Ist

$$B = 0\,,$$

so wird

$$\varphi = \quad A \cos \varkappa z \cos 2\pi n t$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = - \varkappa A \sin \varkappa z \cos 2\pi n t \, .$$

$$\sigma = - \frac{1}{a^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \quad \frac{\varkappa}{a} A \cos \varkappa z \sin 2\pi n t \, .$$

Ist ξ die Verrückung, die ein Lufttheilchen zur Zeit t in der Richtung der z-Achse aus einer gewissen Lage, seiner Mittellage, erlitten hat, so ist, da ξ unendlich klein ist,

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

und

$$\xi = - \frac{A}{a} \sin \varkappa z \sin 2 \varkappa n t \, .$$

Man sieht hieraus, dass ein jedes Lufttheilchen gerade so sich bewegt, wie ein Punkt eines Pendels bei unendlich kleinen Schwingungen; $- \frac{A}{a} \sin \varkappa z$, oder auch der absolute Werth dieser Grösse, wird die *Amplitude*, $2\pi n t$, oder auch der Ueberschuss hiervon über das zunächst liegende Vielfache von 2π, die *Phase* der Schwingungen des betrachteten Theilchens genannt. Die Phase für einen Augenblick ist überall dieselbe; die Amplitude ändert sich mit z. Nennt man λ die Wellenlänge, d. h. setzt man

$$\lambda = \frac{2\pi}{\varkappa},$$

so ist die Amplitude $= 0$, wo z ein Vielfaches von $\frac{\lambda}{2}$, ein Maximum, wo z ein ungerades Vielfaches von $\frac{\lambda}{4}$ ist; jene Orte nennt man *Knoten*, diese *Bäuche*. Die Verdichtung σ ändert sich nach einem ähnlichen Gesetze, wie die Verrückung ξ; ihre Maxima finden aber in den Knoten statt und in den Bäuchen ist sie $= 0$.

Ganz Aehnliches gilt, wenn in der Gleichung 4) nicht B, sondern A verschwindet.

Schwingungen der betrachteten Art, nämlich solche, bei denen die Phase für einen Augenblick überall dieselbe ist, nennt man *stehende* Schwingungen.

Ist

$$A = \pm B \, ,$$

so hat man sogenannte *fortschreitende* Schwingungen; es ist dann

$$\varphi = A \cos \varkappa \, (z \mp a t)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = - \varkappa A \sin \varkappa \, (z \mp a t)$$

$$\xi = \mp \frac{A}{a} \cos \varkappa \, (z \mp a t)$$

$$\sigma = - \frac{1}{a^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \mp \frac{\varkappa}{a} A \sin \varkappa \, (z \mp a t) \, ;$$

je nachdem die oberen oder unteren Vorzeichen gelten, schreiten die Schwingungen in der Richtung der z-Achse oder in der entgegengesetzten Richtung fort; die Amplitude ist hier überall dieselbe, die Phase für einen Augenblick ändert sich von Ort zu Ort.

Die Bewegung, die durch die Gleichung 4) dargestellt ist, wenn die Constanten A und B keiner der gemachten Annahmen genügen, kann man als zusammengesetzt ansehn aus irgend zweien der 4 Schwingungsarten, die wir erörtert haben. Direct findet man aus der Gleichung 4)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\varkappa A \sin \varkappa z \cos 2\pi n t + \varkappa B \cos \varkappa z \sin 2\pi n t$$

$$= \varkappa \sqrt{A^2 \sin^2 \varkappa z + B^2 \cos^2 \varkappa z} \sin(2\pi n t - \delta)$$

$$\zeta = -\frac{1}{a}\sqrt{A^2 \sin^2 \varkappa z + B^2 \cos^2 \varkappa z} \cos(2\pi n t - \delta)$$

$$\sigma = \frac{\varkappa}{a} A \cos \varkappa z \sin 2\pi n t - \frac{\varkappa}{a} B \sin \varkappa z \cos 2\pi n t$$

$$= \frac{\varkappa}{a}\sqrt{A^2 \cos^2 \varkappa z + B^2 \sin^2 \varkappa z} \sin(2\pi n t - \varepsilon),$$

wo

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{A}{B} \operatorname{tg} \varkappa z, \qquad \operatorname{tg} \varepsilon = \frac{B}{A} \operatorname{tg} \varkappa z.$$

Hiernach ändert sich mit z sowohl die Amplitude, als die Phase für einen Augenblick. Die Amplitude verschwindet an keinem Orte; ist

$$A^2 > B^2,$$

so finden ihre Minima statt, wo z ein Vielfaches von $\frac{\lambda}{2}$, ihre Maxima, wo z ein ungerades Vielfaches von $\frac{\lambda}{4}$ ist. Auch hier nennt man jene Orte Knoten, diese Bäuche, und auch hier ist die Aenderung der Dichtigkeit in den Knoten ein Maximum, in den Bäuchen ein Minimum.

Ist die Luftmasse durch eine feste, zur z-Achse senkrechte Ebene begrenzt, so muss für diese immer

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$$

sein. Stellen, an denen die Geschwindigkeit immer gleich Null ist, finden sich nach den durchgeführten Betrachtungen aber nur bei *stehenden* Schwingungen; es müssen also in dem bezeichneten Falle die Schwingungen stehende und es muss die begrenzende Ebene ein Knoten sein.

Ist die Luftmasse durch zwei feste, zur z-Achse senkrechte Ebenen begrenzt, so muss jede von diesen ein Knoten, ihr Abstand also ein Vielfaches der halben Wellenlänge sein. Ausser durch diese beiden Ebenen wollen wir uns die Luftmasse durch eine feste, cylindrische Röhre, deren Achse der z-Achse parallel ist, von beliebigem Querschnitt begrenzt denken; das ist erlaubt, da der an der Röhrenwand zu erfüllenden Bedingung, der Bedingung $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$ nämlich, in Folge davon, dass φ von x und y unabhängig ist, genügt wird. Ist für die Endflächen der Röhre

$$z = 0 \quad \text{und} \quad z = l,$$

so ist also

$$l = h\frac{\lambda}{2} = h\frac{\pi}{\varkappa} = h\frac{a}{2n},$$

wo h eine ganze Zahl bedeutet. Die bei gegebenem Werthe von l hierdurch bestimmten Werthe von n sind die Schwingungszahlen der sogenannten *Eigentöne* der betrachteten Luftsäule. Die Schwingungen dieser können gemäss der Gleichung

$$\varphi = A \cos \varkappa z \cos 2\pi n (t - t_0)$$

geschehen, wo A und t_0 willkührliche Constanten sind.

Wir wollen jetzt annehmen, dass der Querschnitt $z = 0$ der Röhre fest sei, der Querschnitt $z = l$ aber von Aussen in einer solchen Bewegung erhalten werde, dass er zur Zeit t die Geschwindigkeit

$$G \cos 2\pi n t$$

in der Richtung der z-Achse habe, wo G und n beliebig gegebene Constanten bedeuten. Dieser Ausdruck muss dann immer dem Werthe gleich sein, den $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ für $z = l$ annimmt; hieraus folgt

$$\varphi = -\frac{G}{\varkappa \sin \varkappa l} \cos \varkappa z \,.\, \cos 2\pi n t.$$

Bei derselben Bewegung des Querschnitts $z = l$ hängt daher die Bewegung der Lufttheilchen wesentlich von dem Werthe von $\varkappa l$ ab; sie wird unendlich, wenn $\sin \varkappa l = 0$ ist, d. h. wenn n einem der Eigentöne der Luftsäule entspricht.

Die hier vorausgesetzten Bedingungen lassen sich näherungsweise erfüllen, wenn man eine Glasröhre durch zwei Stempel verschliesst, von denen der eine fest, der andere etwas beweglich und mit dem Stiele einer Stimmgabel oder einem andern Körper verbunden ist, der kräftig schwingen kann. Wenn dieser Körper Schwingungen ausführt, deren Dauer nahe der Schwingungsdauer eines der Eigentöne der abgegrenzten Luftsäule gleich ist, so geräth diese in so intensive Schwingungen, dass ein feines Pulver, welches in die Röhre gebracht ist, lebhaft bewegt wird und die Lage der Knoten mit Genauigkeit zu erkennen erlaubt. Dass bei keinem Werthe von n die Bewegung der Luft ins Unbegrenzte wächst, liegt daran, dass die Röhrenwände nicht absolut fest sind, dass der bewegliche Stempel nicht volkommen dicht schliesst, und hauptsächlich an der Reibung der Luft. Auf der angedeuteten Erscheinung beruht eine, von Kundt angegebene, Methode zur Messung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in verschiedenen Gasen.

§ 2.

Wir stellen uns jetzt wieder eine Luftsäule von der Länge l, wie bei unserer letzten Untersuchung vor, nehmen aber an, dass in dem Querschnitt $z = 0$ nicht die Geschwindigkeit, sondern die Verdichtung immer gleich Null ist. Bildet der Querschnitt $z = l$ eine feste Wand, so sind Schwingungen nach der Gleichung

$$\varphi = A \sin \varkappa z \cos 2\pi n (t - t_0)$$

möglich, wenn $\cos \varkappa l = 0$, d. h. l gleich einem ungeraden Vielfachen der Viertelwellenlänge ist. Wird der Querschnitt $z = l$ so bewegt, dass seine Geschwindigkeit zur Zeit t

$$= G \cos 2\pi n t$$

ist, so ist

$$\varphi = \frac{G}{\varkappa \cos \varkappa l} \sin \varkappa z \cos 2\pi n t. \tag{5}$$

D. Bernoulli, Euler und Lagrange haben angenommen, dass, wenn die cylindrische Röhre bei $z = 0$ in den unendlichen Luftraum mündet, hier die Verdichtung immer gleich Null ist, dass also die Luft in einer Röhre, die einerseits geschlossen, andererseits offen ist, den aufgestellten Gleichungen gemäss schwingen kann. Helmholtz*) hat gezeigt, in wie weit diese Annahme richtig ist. Sie setzt voraus, dass die Dimensionen des Querschnitts unendlich klein gegen die Länge der Röhre und gegen die Wellenlänge sind; dabei darf die Röhre auf einer unendlich kleinen Strecke an der Mündung erweitert oder in endlichem Verhältniss zusammengezogen sein. Für Punkte im Innern der Röhre, die in endlicher Entfernung von der Mündung liegen, geben die aufgestellten Gleichungen dann das Geschwindigkeitspotential bis auf einen unendlich kleinen Bruchtheil seines Werthes richtig an, wenn l nicht bis auf unendlich Kleines einem ungeraden Vielfachen der Viertelwellenlänge gleich ist. Ueber den Zusammenhang der Bewegung innerhalb der Röhre und ausserhalb derselben lernt man bei der genannten Annahme Nichts. Wir wollen jetzt, ohne diese Annahme zu machen, die Luftschwingungen in einer einseitig offenen Röhre untersuchen, deren Querschnitt Dimensionen hat, die gegen ihre Länge und gegen die Wellenlänge unendlich klein sind.

*) Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden; Crelle's Journal, Bd. 57.

Wir denken uns einen Luftraum, der sich in die Unendlichkeit erstreckt, also nur theilweise durch Wände begrenzt ist; einen Theil dieser Wände soll eine cylindrische Röhre bilden, die der z-Achse parallel ist und die in der Nähe ihrer Mündung von der Cylinderform abweichen kann; die Dimensionen ihres Querschnitts wollen wir als endlich bezeichnen, ihre Länge und die Wellenlänge als unendlich gross, wobei dann $\varkappa$ unendlich klein ist. Wir nehmen an, dass im Innern der Röhre in unendlich grosser Entfernung von der Mündung ebene Wellen vorhanden sind, legen den Anfangspunkt der z in die Region der ebenen Wellen, aber so, dass sein Abstand von der Mündung noch unendlich klein gegen die Wellenlänge ist, und lassen die positive z-Achse nach dem Grunde der Röhre gekehrt sein. Der Querschnitt $z=0$ theilt den ganzen Luftraum, den wir zu betrachten haben, in zwei Theile; wir fassen diese einzeln ins Auge. Für den einen, der ganz in der Röhre sich befindet, und für den z überall positiv ist, gilt die Gleichung 3), d. h.

$$\varphi=(A'\cos\varkappa z+B'\sin\varkappa z)\cos 2\pi nt+(A''\cos\varkappa z+B''\sin\varkappa z)\sin 2\pi nt, \tag{6}$$

für den andern die allgemeinere Gleichung 1), d. h.

$$\varphi=\psi'\cos 2\pi nt+\psi''\sin 2\pi nt.$$

Für den Querschnitt $z=0$ müssen diese beiden Ausdrücke von φ und die aus ihnen sich ergebenden Ausdrücke von $\frac{d\varphi}{\partial z}$ einander gleich sein, da die Dichtigkeit und die Geschwindigkeit überall sich stetig ändern soll. Die Gleichungen, welche dieses aussprechen, wollen wir bilden, nachdem wir mit dem zweiten Ausdruck von φ eine Veränderung vorgenommen haben. Wir wollen in ihn specielle Werthe von ψ' und ψ'' einführen, die sich auf eine gewisse Bewegung des Querschnitts $z=0$ beziehen, und die wir f' und f'' nennen wollen; es sei

$$\varphi=f'\cos 2\pi nt+f''\sin 2\pi nt,$$

wenn für den Querschnitt $z=0$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\cos 2\pi nt$$

ist und an den übrigen Theilen der Grenze des Luftraumes, auf den wir ψ' und ψ'' beziehen, der nach der Normale genommene Differentialquotient von φ verschwindet. Es sind dann f' und f'' Functionen von x, y, z, die die Eigenschaft haben, dass für den Querschnitt $z=0$

$$\frac{\partial f'}{\partial z}=1, \qquad \frac{\partial f''}{\partial z}=0 \tag{7}$$

ist. Aus dieser speciellen Lösung der für φ geltenden Differentialgleichung erhalten wir eine allgemeinere, wenn wir sie mit dem constanten Factor c multipliciren und zu t die Constante δ addiren; setzen wir

$$\varphi = c\left(f' \cos 2\pi n\,(t+\delta) + f'' \sin 2\pi n\,(t+\delta)\right),$$

so ist für den Querschnitt $z = 0$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = c \cos 2\pi n\,(t+\delta)$$

und an den übrigen Theilen der Grenze ist dieselbe Bedingung, wie früher, erfüllt. Denken wir uns c und δ als variabel, so ist an jedem Orte die grösste Verdichtung mit c, die Intensität des Tones also mit c^2 proportional, dabei aber mit dem Orte veränderlich. Führen wir an Stelle von c und δ zwei andere Grössen c' und c'' ein, indem wir

$$c' = c \cos 2\pi n\delta\,, \qquad c'' = -c \sin 2\pi n\delta$$

setzen, so wird

$$\varphi = (c'f' - c''f'') \cos 2\pi nt + (c'f'' + c''f') \sin 2\pi nt,$$

für den Querschnitt $z = 0$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = c' \cos 2\pi nt + c'' \sin 2\pi nt$$

und die Intensität des Tones proportional mit

$$c'^2 + c''^2\,.$$

Diesen Ausdruck von φ vergleichen wir nun mit dem in 6) gegebenen, der für die Region der ebenen Wellen gilt, und stellen die Bedingungen dafür auf, dass für den Querschnitt $z = 0$ aus beiden dieselben Werthe für die Verdichtung und für die Geschwindigkeit sich ergeben. Bezeichnen wir die Werthe, die f' und f'' in dem Querschnitt $z = 0$ besitzen, durch f_0' und f_0'', so werden dieselben bei Rücksicht auf 7)

$$\begin{aligned} A' &= c'f_0' - c''f_0'' & \qquad \varkappa B' &= c' \\ A'' &= c'f_0'' + c''f_0' & \qquad \varkappa B'' &= c''\,. \end{aligned} \tag{8}$$

Nun wollen wir annehmen, dass der Querschnitt der Röhre $z = l$, wo l von der Ordnung der Wellenlänge ist, von Aussen her in einer solchen Bewegung erhalten werde, dass er zur Zeit t die Geschwindigkeit

$$G \cos 2\pi nt$$

in der Richtung der z-Achse habe. Dieser Ausdruck muss dann dem Werthe gleich sein, den $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ der Gleichung 6) zufolge für $z = l$ hat; d. h. es muss

$$\begin{aligned} G &= \varkappa\,(-A' \sin \varkappa l + B' \cos \varkappa l) \\ 0 &= \varkappa\,(-A'' \sin \varkappa l + B'' \cos \varkappa l) \end{aligned}$$

sein. Eliminirt man aus diesen Gleichungen und den Gleichungen 8) die Grössen A', B', A'', B'', so erhält man

$$\begin{aligned} G &= c' (\cos \varkappa l - \varkappa f_0' \sin \varkappa l) + c'' \varkappa f_0'' \sin \varkappa l \\ 0 &= c' \varkappa f_0'' \sin \varkappa l - c'' (\cos \varkappa l - \varkappa f_0' \sin \varkappa l) . \end{aligned} \tag{9}$$

Sind die Constanten f_0' und f_0'' bekannt, so lehren diese Gleichungen c' und c'' kennen und die Gleichungen 8) A', B', A'', B''; sind auch die Functionen f' und f'' bekannt, so ist die Bewegung in dem ganzen zu betrachtenden Luftraume bestimmt.

Von besonderem Interesse ist die Kenntniss der Grösse $c'^2 + c''^2$, mit der, wie wir gesehn haben, die Intensität des Tones in irgend einem Punkte des äusseren Luftraumes proportional ist; wenn man die Gleichungen 9) quadrirt und addirt, so findet man

$$c'^2 + c''^2 = \frac{G^2}{(\cos \varkappa l - \varkappa f_0' \sin \varkappa l)^2 + (\varkappa f_0'' \sin \varkappa l)^2} . \tag{10}$$

Wenn l sich ändert, während G und $\varkappa$ dieselben Werthe behalten, so ändert sich hiernach die Intensität des Tones periodisch und durchläuft abwechselnd Maxima und Minima. Da $c'^2 + c''^2$ das Reciproke einer homogenen Function zweiten Grades von $\cos \varkappa l$ und $\sin \varkappa l$ ist, so sind die Maxima und Minima durch die Gleichung

$$\operatorname{tg} 2 \varkappa l = \gamma$$

bestimmt, wo γ eine von den Coefficienten dieser Function abhängende Constante bedeutet, oder, wenn λ wieder die Wellenlänge bezeichnet, durch die Gleichung

$$\operatorname{tg} 4 \pi \frac{l}{\lambda} = \gamma .$$

Ist l_m ein Werth von l, der einem Maximum der Tonstärke entspricht, so sind hiernach die übrigen Maximumswerthe von l

$$l_m + h \frac{\lambda}{2}$$

und die Minimumswerthe

$$l_m + (2h + 1) \frac{\lambda}{4} ,$$

wo h eine ganze Zahl ist.

Bei einem Beispiele, bei dem wir die Rechnungen zu Ende führen werden, werden wir sehn, dass $k f_0''$ eine unendlich kleine Zahl ist; berücksichtigen wir hier diesen Umstand, so zeigt die Gleichung 10), dass für die Maxima der Tonstärke

$$\cos \varkappa l - \varkappa f_0' \sin \varkappa l = 0 ,$$

d. h.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varkappa l &= \frac{1}{\varkappa f_0'} \\ c'^2 + c''^2 &= G^2 \frac{1}{(\varkappa f_0'' \sin \varkappa l)^2} = G^2 \frac{1 + \varkappa^2 f_0'^2}{\varkappa^2 f_0''^2} , \end{aligned} \tag{11}$$

und dass der Werth dieser Maxima unendlich gross gegen die Werthe ist, die die Tonstärke hat, wenn die Gleichung 11) nicht erfüllt ist. Zugleich sieht man ein, dass diese Sätze auch gelten, wenn l einen gegebenen Werth hat und die Tonhöhe, d. h. $\varkappa$, veränderlich ist.

Definirt man einen Winkel $\varkappa\alpha$ durch die Gleichung

$$\operatorname{tg} \varkappa\alpha = \varkappa f_0',$$

so wird die Gleichung 10)

$$c'^2 + c''^2 = \frac{G^2}{\frac{\cos^2 \varkappa (l+\alpha)}{\cos^2 \varkappa\alpha} + (\varkappa f_0'' \sin \varkappa l)^2}.$$

Bei dem schon oben erwähnten Beispiele werden wir sehn, dass unter gewissen Umständen auch $\varkappa f_0'$ unendlich klein ist; dann kann man setzen

$$\alpha = f_0'.$$

§ 3.

Wir haben im vorigen § angenommen, dass die ganze Begrenzung des Theiles des Luftraumes, auf den die Functionen ψ' und ψ'' sich beziehen, mit Ausnahme des Querschnitts $z = 0$, ruht und der Querschnitt $z = l$ in einer gewissen Bewegung erhalten wird; wir wollen nun annehmen, dass ein anderer Theil jener Begrenzung in gewisser Bewegung erhalten wird und der Querschnitt $z = l$ ruht. Um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, wollen wir uns vorstellen, dass vor der Mündung der Röhre eine tönende Stimmgabel aufgestellt ist, deren Oberfläche dann mit zu der genannten Begrenzung gehört. Für den Fall, dass die Stimmgabel in bestimmter Weise schwingt und der Querschnitt $z = 0$ ruht, setzen wir das Geschwindigkeitspotential für einen Punkt des äusseren Luftraumes

$$= F' \cos 2\pi n t + F'' \sin 2\pi n t,$$

und für den Fall, dass die Stimmgabel ruht und der Querschnitt $z = 0$ so sich bewegt, dass für ihn

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \cos 2\pi n t$$

ist,

$$= f' \cos 2\pi n t + f'' \sin 2\pi n t;$$

F' und F'' sind dann gewisse Functionen von x, y, z, die die Eigenschaft haben, dass für $z = 0$

$$\frac{\partial F'}{\partial z} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial F''}{\partial z} = 0 \qquad 12)$$

ist, und f' und f'' haben dieselbe Bedeutung, wie im vorigen §. Tönt die Stimmgabel und bewegt der Querschnitt $z = 0$ sich so, dass für ihn

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = c' \cos 2\pi n t + c'' \sin 2\pi n t$$

ist, so hat man dann

$$\varphi = (F' + c'f' - c''f'') \cos 2\pi n t + (F'' + c'f'' + c''f') \sin 2\pi n t . \qquad 13)$$

Für die Region der ebenen Wellen im Innern der Röhre gilt wieder die Gleichung 6). Sucht man die Bedingungen dafür, dass die beiden Ausdrücke von φ und die beiden Ausdrücke von $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$, die man hiernach für $z = 0$ hat, für alle Werthe von t einander gleich sind, so erhält man bei Rücksicht auf 7) und 12)

$$A' = F_0' + c'f_0' - c''f_0'', \quad \varkappa B' = c'$$
$$A'' = F_0'' + c'f_0'' + c''f_0', \quad \varkappa B'' = c'',$$

wo F_0' und F_0'' die Werthe bezeichnen, die F' und F'' für $z = 0$ haben. Ist, wie wir annehmen, der Querschnitt $z = l$ in Ruhe, so folgt aus 6)

$$A' \sin \varkappa l - B' \cos \varkappa l = 0$$
$$A'' \sin \varkappa l - B'' \cos \varkappa l = 0 .$$

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich

$$c' (\cos \varkappa l - \varkappa f_0' \sin \varkappa l) + c'' \varkappa f_0'' \sin \varkappa l = \varkappa F_0' \sin \varkappa l$$
$$c' \varkappa f_0'' \sin \varkappa l - c'' (\cos \varkappa l - \varkappa f_0' \sin \varkappa l) = - \varkappa F_0'' \sin \varkappa l ,$$

und hieraus weiter

$$c'^2 + c''^2 = \frac{(F_0'^2 + F_0''^2) \varkappa^2 \sin^2 \varkappa l}{(\cos \varkappa l - \varkappa f_0' \sin \varkappa l)^2 + (\varkappa f_0'' \sin \varkappa l)^2} . \qquad 14)$$

Die Bewegung in dem sich ins Unendliche erstreckenden Luftraume kann der Gleichung 13) zufolge angesehn werden als zusammengesetzt aus derjenigen, die stattfinden würde, wenn der Querschnitt $z = 0$ ruht, während die Stimmgabel in der gegebenen Weise sich bewegt, und einer gewissen andern. Von dieser andern sagt man, dass sie durch die *Resonanz* der Röhre hervorgebracht ist. Die Intensität des durch Resonanz erzeugten Tones ist proportional mit $c'^2 + c''^2$. Wenn l sich ändert, so ist diese Grösse ein Maximum und zwar

$$= \frac{F_0'^2 + F_0''^2}{f_0''^2},$$

sobald

$$\operatorname{tg} \varkappa l = \frac{1}{\varkappa f_0'} , \qquad 15)$$

ein Minimum und zwar $= 0$, sobald

$$\sin \varkappa l = 0$$

ist. Benutzt man, dass $\varkappa f_0''$ eine unendlich kleine Zahl ist, und bezeichnet die Maxima der Resonanz als endlich, so folgt aus 14), dass die Resonanz immer unendlich klein ist, sobald $\varkappa l$ um etwas Endliches von jeder Wurzel der Gleichung 15) abweicht. Dieses gilt auch, wenn l constant und $\varkappa$ variabel ist. Wird vor der Mündung der Röhre eine Bewegung unterhalten, die als zusammengesetzt aus verschiedenen Tönen betrachtet werden kann, so werden diejenigen von diesen Tönen durch Resonanz sehr verstärkt, welche der Gleichung 15) entsprechen. Daraus erklärt man, dass diese Töne auftreten, wenn die Mündung der Röhre in passender Weise angeblasen wird.

§ 4.

Ganz ähnliche Betrachtungen, wie wir sie in den drei ersten §§ dieser Vorlesung in Bezug auf ebene Wellen durchgeführt haben, lassen sich in Bezug auf kugelförmige anstellen. Eine Lösung der Differentialgleichung, der das Geschwindigkeitspotential φ zu genügen hat, ist der Gleichung 12) der vorigen Vorlesung zufolge

$$\begin{aligned}\varphi = &\frac{1}{r}(A' \cos \varkappa r + B' \sin \varkappa r) \cos 2\pi n t \\ &+ \frac{1}{r}(A'' \cos \varkappa r + B'' \sin \varkappa r) \sin 2\pi n t;\end{aligned} \tag{16}$$

es ist das eine Gleichung, die von ähnlicher Form, wie die Gleichung 3) ist und an die ähnliche Schlüsse, wie an diese sich knüpfen lassen. Eine Bewegung gemäss der Gleichung 16) ist möglich in einem Luftraume, der vollständig begrenzt ist durch zwei concentrische Kugelflächen, deren Punkte in passender Weise radial bewegt werden, oder durch zwei solche Kugelflächen und eine feste Kegelfläche, die ihre Spitze in dem Mittelpunkte jener hat.

Einen speciellen Fall der Gleichung 16) bildet die Gleichung

$$\varphi = \frac{1}{r}(A \cos \varkappa r + B \sin \varkappa r) \cos 2\pi n (t - t_0); \tag{17}$$

sie stellt stehende Schwingungen dar; in gewissen Kugelflächen ist bei diesen die Verdichtung immer Null; die Radien derselben sind durch die Gleichung

$$A \cos \varkappa r + B \sin \varkappa r = 0$$

bestimmt; in andern Kugelflächen, den Knoten, verschwindet immer die Geschwindigkeit; für die Radien der Knoten gilt die complicirtere Gleichung

$$A \frac{d \frac{\cos \varkappa r}{r}}{dr} + B \frac{d \frac{\sin \varkappa r}{r}}{dr} = 0,$$

d. h. $$A(\cos \varkappa r + \varkappa r \sin \varkappa r) + B(\sin \varkappa r - \varkappa r \cos \varkappa r) = 0. \tag{18}$$

Sind die die Luftmasse begrenzenden Kugelflächen *fest* und sind R und R' die Radien derselben, so ist die durch 17) dargestellte Bewegung möglich, wenn $\varkappa$ einen solchen Werth hat, dass der Gleichung 18) durch Werthe von A und B, die nicht beide verschwinden, für $r = R$ und $r = R'$ genügt werden kann; die Bedingung hierfür ist die Gleichung

$$\operatorname{tg} \varkappa (R - R') = \frac{\varkappa (R - R')}{1 - \varkappa^2 R R'},$$

die, wenn $R' = 0$ ist, in die einfachere

$$\operatorname{tg} \varkappa R = \varkappa R$$

übergeht. Diese Gleichungen bestimmen die *Eigentöne* der betrachteten Luftmasse.

Ein anderer specieller Fall der Gleichung 16) ist die Gleichung

$$\varphi = \frac{A}{r} \cos (\varkappa r - 2 \pi n t) + \frac{B}{r} \sin (\varkappa r - 2 \pi n t) ; \tag{19}$$

sie stellt Wellen dar, welche von ihrem Mittelpunkte nach Aussen hin fortschreiten. Setzen wir in 19) unter den Zeichen cos und sin statt des Zeichens — das Zeichen +, so haben wir Wellen, welche von Aussen nach ihrem Mittelpunkte hin fortschreiten.

Aehnliche Rechnungen, wie wir sie in den §§ 2 und 3 in Bezug auf eine unendlich dünne, cylindrische Röhre durchgeführt haben, könnten wir hier durchführen in Bezug auf eine conische Röhre, die durch eine unendlich kleine Oeffnung an der Spitze mit dem unendlichen Luftraume communicirt und andererseits durch eine Kugelfläche geschlossen ist, die ihren Mittelpunkt in der Spitze hat.

§ 5.

Nach den ebenen Wellen und den Kugelwellen wollen wir nun eine dritte Art von Schwingungen, die einem einfachen Tone entsprechen, ins Auge fassen. Es soll sich um die Schwingungen eines Luftraumes handeln, dessen sämmtliche Dimensionen unendlich klein gegen die Wellenlänge des Tones sind. Die Dimensionen des Luftraumes wollen wir als endlich, die Wellenlänge als unendlich gross bezeichnen; die Grösse $\varkappa$ ist dann unendlich klein. Wir wenden wieder die in den Gleichungen 1) und 2) gebrauchte Bezeichnungsweise an, d. h. wir setzen

$$\varphi = \psi' \cos 2 \pi n t + \psi'' \sin 2 \pi n t$$

und verstehen unter ψ eine beliebige der beiden von x, y, z abhängigen Grössen ψ' und ψ''. Die Gleichung 2), nämlich

$$\Delta \psi + \varkappa^2 \psi = 0 , \tag{20}$$

geht, wenn $\varkappa$ unendlich klein und ψ nicht unendlich gross gegen seine zweiten Differentialquotienten ist, über in die Gleichung

$$\Delta \psi = 0 ,$$

welche für das Geschwindigkeitspotential einer incompressibeln Flüssigkeit gilt. Eine jede einwerthige Lösung derselben können wir hier für ψ annehmen; einwerthig muss ψ sein, auch wenn der Luftraum ein mehrfach zusammenhängender ist, da die Verdichtung, also auch $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ einwerthig sein muss. In jedem Augenblicke bewegt sich die Luft dann so, wie eine incompressible Flüssigkeit. Bedeutet ds ein Element der Oberfläche des Luftraums und n die nach seinem Innern gerichtete Normale von ds, so ist dabei

$$\int ds \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0; \tag{21}$$

ist $\frac{\partial \psi}{\partial n}$ dieser Bedingung gemäss gegeben, so giebt es aber auch immer ein, eine willkührliche additive Constante enthaltendes ψ, welches der Gleichung $\Delta \psi = 0$ genügt.*)

Ist die Bedingung 21) nicht erfüllt, so findet man eine Lösung der Gleichung 20) auf die folgende Weise. Man setze

$$\psi = \frac{C}{\varkappa^2} + U,$$

wo C und U von $\varkappa$ unabhängig sind, C eine Constante, U eine Function von x, y, z ist, die in passender Weise bestimmt werden sollen. Für U erhält man dann die partielle Differentialgleichung

$$\Delta U + C = 0;$$

man genügt dieser, wenn man

$$U = \frac{C}{4\pi} \Omega + V$$

macht, wo Ω das Potential einer Masse, die mit der Dichtigkeit 1 den betrachteten Luftraum erfüllt, und V eine Lösung der Gleichung

$$\Delta V = 0$$

bedeutet. Diese Lösung kann man so wählen, dass $\frac{\partial \psi}{\partial n}$ beliebig gegebene Werthe erhält, wenn über die Constante C passend verfügt ist. Es ist

---

*) In seiner Abhandlung „Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungs-Kräfte“ hat Gauss (seine Werke, Bd. V, p. 197) den Satz aufgestellt, dass für einen vollkommen begrenzten Raum es immer eine, mit ihren Differentialquotienten stetige und einwerthige Function giebt, die der Gleichung $\Delta \psi = 0$ genügt und an der Oberfläche beliebig gegebene Werthe annimmt. Auf ähnlichen Wegen, wie dieser Satz, lässt sich der oben angeführte beweisen. Gegen die völlige Strenge der für jenen gegebenen Beweise sind aber Bedenken erhoben, und dieselben Bedenken lassen sich bei den entsprechenden Beweisen dieses geltend machen.

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = \frac{C}{4\pi}\frac{\partial \Omega}{\partial n} + \frac{\partial V}{\partial n};$$

da

$$\int ds \frac{\partial V}{\partial n} = 0$$

sein muss, so hat man

$$\frac{C}{4\pi}\int ds \frac{\partial \Omega}{\partial n} = \int ds \frac{\partial \psi}{\partial n}$$

zu setzen, oder, da

$$\int ds \frac{\partial \Omega}{\partial n} = 4\pi T$$

ist, wenn T das Volumen des betrachteten Luftraumes bedeutet,

$$CT = \int ds \frac{\partial \psi}{\partial n}. \qquad 22)$$

Dabei ist dann

$$\psi = \frac{C}{\varkappa^2} + \frac{C}{4\pi}\Omega + V \qquad 23)$$

Diese Lösung der Gleichung 20) führt zur Theorie der sogenannten *cubischen Pfeifen.* Mit diesem Namen bezeichnet man ein Gefäss, dessen Dimensionen von gleicher Grössenordnung sind, und das durch eine kleine Oeffnung mit dem unendlichen Luftraume communicirt; wird die Oeffnung in passender Weise angeblasen, so entsteht ein Ton. Wir werden die Dimensionen des Gefässes als endlich annehmen, die der Oeffnung als unendlich klein, die Wellenlänge des Tones, um den es sich handeln wird, als unendlich gross. In Bezug auf die bezeichnete Anordnung können wir dann ähnliche Betrachtungen anstellen, wie wir sie in § 2. und § 3. in Bezug auf eine cylindrische Röhre durchgeführt haben. Zuerst werden wir den Fall ins Auge fassen, dass ein Theil der Gefässwand, der nicht bis zum Rande der Oeffnung heranreichen soll, in einer gewissen, periodischen Bewegung erhalten wird.

Um die Oeffnung als Mittelpunkt denken wir uns eine Kugelfläche beschrieben mit einem Radius, der unendlich klein, aber unendlich gross gegen die Dimensionen der Oeffnung ist; den Theil dieser Kugelfläche, der innerhalb des Gefässes liegt, wollen wir die Fläche 0 nennen, ihr Element durch ds_0 bezeichnen; sie entspricht dem Querschnitt $z = 0$ der cylindrischen Röhre. Wir nehmen an, dass für alle Elemente der Fläche 0 die Geschwindigkeit die Richtung des Radius und gleiche Grösse hat; die Berechtigung zu dieser Annahme wird, wenigstens für die Fälle, in denen wir die Rechnung zu Ende führen werden, sich darin zeigen, dass bei ihr für den ganzen zu betrachtenden Luftraum ein φ sich finden lässt, welches mit seinen ersten Differentialquotienten überall, auch an der Fläche 0, stetig ist. Für den Fall, dass die Bewegung in der Fläche 0 eine solche ist, dass

$$\int ds_0 \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \cos 2\pi n t,$$

wo n die nach dem Innern des Gefässes gerichtete Normale von ds_0 bedeutet, sei für irgend einen Punkt des Theiles des ganzen zu betrachtenden Luftraumes, der sich in die Unendlichkeit erstreckt und durch die Fläche 0 begrenzt ist,

$$\varphi = f' \cos 2\pi n t + f'' \sin 2\pi n t;$$

es bedeuten dann f' und f'' gewisse Functionen von x, y, z, die die Eigenschaft haben, dass

$$\int ds_0 \frac{\partial f'}{\partial n} = 1, \quad \int ds_0 \frac{\partial f''}{\partial n} = 0 \tag{24}$$

ist, und für den Fall, dass die Bewegung der Fläche 0 nach der Gleichung

$$\int ds_0 \frac{\partial \varphi}{\partial n} = c' \cos 2\pi n t + c'' \sin 2\pi n t$$

geschieht, hat man

$$\varphi = (c'f' - c''f'') \cos 2\pi n t + (c'f'' + c''f') \sin 2\pi n t; \tag{25}$$

die Intensität des Tones ist dabei überall mit $c'^2 + c''^2$ proportional.

In dem zweiten Theile des zu betrachtenden Luftraumes, der durch die Fläche 0 und die Gefässwand vollständig begrenzt ist, gilt für jede der beiden Grössen ψ' und ψ'' die Gleichung 23); bezeichnet man die Werthe von C für diese Functionen durch C' und C'', so folgt daher daraus, dass φ an der Fläche 0 stetig ist, bei Vernachlässigung von Gliedern, die unendlich klein gegen die berücksichtigten sind,

$$\begin{aligned} C' &= \varkappa^2 (c'f_0' - c''f_0'') \\ C'' &= \varkappa^2 (c'f_0'' + c''f_0'), \end{aligned} \tag{26}$$

wo f_0' und f_0'' die Werthe von f' und f'' für irgend einen Punkt der Fläche 0 bedeuten. Zwei andere Gleichungen ergeben sich daraus, dass auch $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ an der Fläche 0 stetig ist. Einerseits folgt aus 25) bei Rücksicht auf 24)

$$\int ds_0 \frac{\partial \psi'}{\partial n} = c', \quad \int ds_0 \frac{\partial \psi''}{\partial n} = c''.$$

Den Theil der Gefässwand, der von Aussen in Bewegung erhalten wird, nennen wir die Fläche l und bezeichnen ihr Element durch ds_l; die Bewegung sei eine solche, dass

$$\int ds_l \frac{\partial \varphi}{\partial n} = G \cos 2\pi n t$$

ist, wo n die nach dem Innern des Gefässes gerichtete Normale von $ds_{/}$, G eine Constante bedeutet. Die Gleichung 22) giebt dann andererseits

$$G + \int ds_0 \frac{\partial \psi'}{\partial n} = C' T$$
$$\int ds_0 \frac{\partial \psi''}{\partial n} = C'' T,$$

wenn T das Volumen des Gefässes ist; es ist daher

$$G + c' = C' T$$
$$c'' = C'' T.$$

Setzt man hier für C' und C'' ihre Werthe aus 26), so findet man

$$c'(1 - \varkappa^2 f_0' T) + c'' \varkappa^2 f_0'' T = -G$$
$$c' \varkappa^2 f_0'' T - c''(1 - \varkappa^2 f_0' T) = 0,$$

und hieraus

$$c'^2 + c''^2 = \frac{G^2}{(1 - \varkappa^2 f_0' T)^2 + (\varkappa^2 f_0'' T)^2}.$$

Bei einem Beispiele werden wir sehen, dass das zweite Glied im Nenner dieses Ausdrucks eine unendlich kleine Zahl ist. Machen wir hiervon Gebrauch, so können wir schliessen, dass die Intensität des Tones unendlich gross ist gegen die Werthe, die sie sonst hat, falls

$$1 - \varkappa^2 f_0' T = 0 \tag{27}$$

ist.

Wir wollen nun annehmen, dass die Gefässwand ruht und der Ton ausserhalb des Gefässes, etwa durch eine schwingende Stimmgabel erzeugt wird. In Bezug auf diesen Fall können wir Betrachtungen anstellen, die den im § 3. durchgeführten vollkommen entsprechen. Für den unendlichen Luftraum sei, wenn die Fläche 0 ruht,

$$\varphi = F' \cos 2\pi n t + F'' \sin 2\pi n t,$$

wobei

$$\int ds_0 \frac{\partial F'}{\partial n} = 0 \quad \text{und} \quad \int ds_0 \frac{\partial F''}{\partial n} = 0$$

ist; wenn für die Fläche 0

$$\int ds_0 \frac{\partial \varphi}{\partial n} = c' \cos 2\pi n t + c'' \sin 2\pi n t$$

ist, so hat man dann

$$\varphi = (F' + c' f' - c'' f'') \cos 2\pi n t + (F'' + c' f'' + c'' f') \sin 2\pi n t.$$

Setzt man wieder für den durch die Gefässwand und die Fläche 0 begrenzten Raum

$$\varkappa^2 \varphi = C' \cos 2\pi n t + C'' \sin 2\pi n t,$$

so giebt die Bedingung, dass φ und $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ an der Fläche 0 stetig sind, die Gleichungen

$$C' = \varkappa^2 (F_0' + c' f_0' - c'' f_0'') \qquad c' = C' T$$
$$C'' = \varkappa^2 (F_0'' + c' f_0'' + c'' f_0') \qquad c'' = C'' T,$$

wo F_0' und F_0'' die Werthe von F' und F'' für irgend einen Punkt der Fläche 0 bedeuten. Hieraus folgt

$$\varkappa^2 T F_0' = c' (1 - \varkappa^2 f_0' T) + c'' \varkappa^2 f_0'' T$$
$$\varkappa^2 T F_0'' = - c' \varkappa^2 f_0'' T + c'' (1 - \varkappa^2 f_0' T)$$

und weiter

$$c'^2 + c''^2 = \frac{(F_0'^2 + F_0''^2)\varkappa^4 T^2}{(1 + \varkappa^2 f_0' T)^2 + (\varkappa^2 f_0'' T)^2}.$$

Mit dieser Grösse ist die Intensität des durch Resonanz erzeugten Tones proportional. Ist $\varkappa^2 f_0'' T$ unendlich klein, so ist dieselbe unendlich gross gegen die Werthe, die sie sonst hat, falls die Gleichung 27) besteht. Diese Gleichung bestimmt den Ton, der, wenn die Oeffnung in passender Weise angeblasen wird, auftritt.

§ 6.

In den Gleichungen, die wir in den Paragraphen 2, 3 und 5 für eine cylindrische und eine cubische Pfeife aufgestellt haben, kommen zwei Constanten vor, die wir f_0' und f_0'' genannt haben, und durch die die Resonanz wesentlich bedingt ist; wir wollen nun suchen, diese Constanten für gewisse Fälle zu berechnen. Hierbei ist es erforderlich, das Geschwindigkeitspotential φ für den ganzen zu betrachtenden Luftraum und für eine Bewegung zu ermitteln, die bei der cylindrischen Pfeife durch ihre Grundfläche, bei der cubischen durch einen beliebigen Theil der Gefässwand unterhalten wird; das ist wieder nur möglich bei bestimmten Voraussetzungen über die ganze Begrenzung des Luftraums. Wir wollen festsetzen, dass für Entfernungen von der Oeffnung, die von der Ordnung der Wellenlänge oder grösser sind, der ins Unendliche sich erstreckende Luftraum entweder gar nicht oder durch einen Theil einer beliebigen Kegelfläche begrenzt ist, die ihre Spitze in der Oeffnung hat. Wir nennen r die Entfernung eines variabeln Punktes von dieser Spitze und nehmen an, dass für Werthe von r, die von der Ordnung der Wellenlänge oder grösser sind, die Gleichung 19)

$$\varphi = \frac{A}{r} \cos(\varkappa r - 2\pi n t) + \frac{B}{r} \sin(\varkappa r - 2\pi n t) \qquad 28)$$

besteht, d. h. dass für Werthe von r von der bezeichneten Grössenordnung kugelförmige Wellen, die nach Aussen hin fortschreiten, vorhanden sind. Die Berechtigung zu dieser Annahme liegt darin, dass man bei ihr ein φ finden kann, welches allen Bedingungen genügt, die es erfüllen soll.

Um den Anfangspunkt der r denken wir uns eine Kugelfläche beschrieben, die noch in der Region der kugelförmigen Wellen liegt, deren Radius aber unendlich klein gegen die Wellenlänge ist. Wir nennen dieselbe die Fläche 1 und bezeichnen ihr Element durch $d s_1$; in Bezug auf dieses soll n die nach Aussen gerichtete Normale bedeuten. Um die cylindrische Pfeife und die cubische zusammen besprechen zu können, nennen wir den Querschnitt jener, den wir früher als den Querschnitt $z = 0$ bezeichnet haben, auch die Fläche 0; wir haben schon angenommen, dass sein Abstand von der Oeffnung unendlich klein gegen die Wellenlänge ist. Die beiden Flächen 1 und 0 theilen den ganzen zu betrachtenden Luftraum in drei Theile; für jeden von den beiden äusseren dieser Theile haben wir einen Ausdruck für φ bereits aufgestellt, nämlich in den Gleichungen 6), 23) und 28); wir müssen noch für den mittleren Theil, der durch die Flächen 0 und 1 begrenzt ist, einen solchen bilden und zwar so, dass φ und $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ an den Flächen 0 und 1 stetig ist. Die Dimensionen dieses Theiles sind unendlich klein gegen die Wellenlänge; bezeichnet wiederum ψ eine beliebige der beiden Functionen ψ' und ψ'', so kann man daher nach den im § 5. gemachten Auseinandersetzungen für ψ eine Lösung der Gleichung $\Delta \psi = 0$ nehmen, falls die Gleichung 21) erfüllt wird, die bei unserer jetzigen Bezeichnung

$$\int d s_0 \frac{\partial \psi}{\partial n} + \int d s_1 \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$$

ist; dieser Bedingung lässt sich neben den übrigen genügen. Wir können dann ψ als das Geschwindigkeitspotential einer incompressibeln Flüssigkeit ansehn, die so sich bewegt, wie die Luft in einem gewissen Augenblick. Unter den Annahmen, die wir im § 2. und im § 5. gemacht haben, befindet sich auch die, dass ψ in allen Punkten der Fläche 0 denselben Werth hat; in der That haben wir dort angenommen, dass der Querschnitt $z = 0$ in der Region der ebenen Wellen liegt, und hier, dass die Geschwindigkeit in allen Punkten der Fläche 0 senkrecht zu dieser ist; aus der Gleichung 28) folgt, dass ψ auch in allen Punkten der Fläche 1 gleiche Werthe hat; für die feste Wand, die die Ränder der Fläche 0 und 1 verbindet, ist $\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$. Es ergiebt sich hieraus nach Betrachtungen, die in der siebenzehnten Vorlesung angestellt sind, dass

$$\int d s_0 \frac{\partial \psi}{\partial n} = - \int d s_1 \frac{\partial \psi}{\partial n} = \frac{1}{W} (\psi_0 - \psi_1) \tag{29}$$

ist, wo W eine von der Gestalt des zwischen den Flächen 0 und 1 liegenden Raumes abhängige Constante bedeutet, die wir dort den Widerstand dieses Raumes nannten, indem wir einen Ausdruck der Elektricitätslehre auf die Hydrodynamik übertrugen.

Die Functionen f' und f'', deren Werthe für Punkte der Fläche 0 zu ermitteln unsere Aufgabe ist, sind, soweit sie sich auf Punkte in oder zwischen den Flächen 0 und 1 beziehn, specielle Fälle der jetzt betrachteten Function ψ; es kann daher in den Gleichungen 29) $\psi = f'$ und $\psi = f''$ gesetzt werden. Das soll geschehen; dabei sollen die Werthe von f' und f'' in einem Punkte der Fläche 1 durch f_1' und f_1'' bezeichnet werden; r_1 sei der Radius dieser Fläche und K die Oeffnung des Kegels, welcher den ins Unendliche sich erstreckenden Luftraum in hinreichender Entfernung von der Oeffnung, wie wir annehmen, begrenzt. Aus 28) folgt dann bei Rücksicht darauf, dass $\varkappa r_1$ unendlich klein ist,

$$f_1' = \frac{A}{r_1} + B\varkappa, \quad f_1'' = A\varkappa - \frac{B}{r_1}$$
$$\int ds_1 \frac{\partial f'}{\partial n} = -KA, \quad \int ds_1 \frac{\partial f''}{\partial n} = KB. \qquad 30)$$

Bei der cylindrischen Pfeife ist für die Fläche 0 nach 7)

$$\frac{\partial f'}{\partial n} = 1, \quad \frac{\partial f''}{\partial n} = 0,$$

also, wenn Q den Querschnitt der Röhre bezeichnet,

$$\int ds_0 \frac{\partial f'}{\partial n} = Q, \quad \int ds_0 \frac{\partial f''}{\partial n} = 0. \qquad 31)$$

Bei Rücksicht auf 30) und 31) geben die Gleichungen 29)

$$Q = KA = \frac{1}{W}\left(f_0' - \frac{A}{r_1} - B\varkappa\right)$$
$$0 = KB = \frac{1}{W}\left(f_0'' - A\varkappa + \frac{B}{r_1}\right)$$

also

$$A = \frac{Q}{K}, \quad B = 0$$
$$f_0' = Q\left(W + \frac{1}{Kr_1}\right), \quad f_0'' = \frac{\varkappa Q}{K}.$$

Der Ausdruck von f_0' lässt sich noch einfacher schreiben. Diese Grösse muss ihrer ursprünglichen Definition zufolge unabhängig von r_1 sein, welches von einer gewissen Grössenordnung sein soll, im Uebrigen aber willkührlich gewählt werden kann. Es muss daher W in gewisser Weise von r_1 abhängen. In den Bedingungen, aus welchen das durch 29) definirte W zu bestimmen ist, kommt $\varkappa$ nicht vor; es sind diese Bedingungen dadurch erhalten, dass $\varkappa = 0$ gesetzt ist. Die Festsetzung, dass $\varkappa r_1$ unendlich klein sein soll, beschränkt daher die Grösse nicht, die dem

r_1 bei der Bestimmung von W gegeben werden darf. Wir wollen jetzt, die Bezeichnung ändernd, den Werth, den W erhält, wenn r_1 unendlich angenommen wird, W nennen; dann hat man

$$f_0' = QW, \quad f_0'' = \frac{\varkappa Q}{K}. \tag{32}$$

Bei der cubischen Pfeife treten an Stelle der Gleichungen 31) die Gleichungen 24), nämlich

$$\int ds_0 \frac{\partial f'}{\partial n} = 1, \quad \int ds_0 \frac{\partial f''}{\partial n} = 0,$$

während die Gleichungen 30) ihre Gültigkeit behalten; hier ergiebt sich daher aus 29)

$$f_0' = W, \quad f_0'' = \frac{\varkappa}{K}. \tag{33}$$

§ 7.

Wir wollen nun für einige Fälle den Werth von W aufsuchen; es ist das ein Problem, welches der Lehre von der Bewegung einer incompressibeln Flüssigkeit angehört. Von den Betrachtungen, welche wir im § 4. der siebenzehnten Vorlesung über die Strömungen einer incompressibeln Flüssigkeit in den Normalen confocaler Ellipsoide angestellt haben, können wir eine Anwendung auf eine cubische Pfeife unter der Voraussetzung machen, dass die Oberfläche des Gefässes in der Nähe der Oeffnung und bis zu Entfernungen von dieser, die gegen ihre Dimensionen unendlich gross sind, ein einschaliges Hyperboloid ist. Schreiben wir die Gleichung dieses Hyperboloids

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

und nennen K die Oeffnung seines Asymptotenkegels, so ist nach dem Ausdruck 31) der siebenzehnten Vorlesung

$$W = \frac{2}{K} \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{(a^2 + c^2 + x^2)(b^2 + c^2 + x^2)}}. \tag{34}$$

Nimmt man

$$c = 0$$

an, so kommt man auf den Fall einer Oeffnung, die in einer dünnen, ebenen Wand sich befindet und von einer Ellipse, deren Halbachsen a und b sind, begrenzt ist; dabei wird

$$K = 2\pi.$$

Setzt man noch

$$a = b = R,$$

so wird die Oeffnung ein Kreis vom Radius R und

$$W = \frac{1}{2R}.$$

Für den Ton stärkster Resonanz oder den Ton, der durch passendes Anblasen der Oeffnung entsteht, erhält man daher in diesem Falle nach 33) und 27)

$$\varkappa^2 = \frac{2R}{T}. \tag{35}$$

Nun war

$$\varkappa = \frac{2\pi n}{a}$$

gesetzt, wo n die Zahl der Doppelschwingungen in der Zeiteinheit, a die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in der Luft bedeutet; nimmt man als Einheiten der Zeit und der Länge eine Sekunde und ein Millimeter an, setzt, trockener atmosphärischer Luft von der Temperatur von $0^0 C$ entsprechend,

$$a = 332\ 260$$

und führt an Stelle des Radius R die Fläche S der Oeffnung ein, so giebt die Gleichung 35)

$$n = 56\ 174 \frac{\sqrt[4]{S}}{\sqrt{T}}.$$

Lange bevor dieses theoretische Resultat von Helmholtz abgeleitet war, hatte Sondhauss seine Beobachtungen über die Töne cubischer Pfeifen durch die Formel

$$n = 52\ 400 \frac{\sqrt[4]{S}}{\sqrt{T}}$$

dargestellt.

Wir wollen nun den Widerstand W auch für eine gewisse Art von cylindrischen Pfeifen berechnen. Dabei schicken wir Folgendes voraus. Auf einem Theile der xy-Ebene eines Coordinatensystems sei eine Masse mit der veränderlichen Dichtigkeit h verbreitet und es sei V das Potential dieser Masse in Bezug auf den Punkt (x, y, z). In zwei Punkten, denen gleiche Werthe von x und y und entgegengesetzte von z entsprechen, hat dann V denselben Werth. Hieraus folgt erstens, dass, wenn z unendlich klein ist, V immer denselben Werth hat, mag z positiv oder negativ sein; was wir auch aus dem allgemeinen Satze schliessen können, dass das Potential einer einfachen Massenschicht bei dem Durchgange durch diese stetig ist. Zweitens folgt daraus, dass $\frac{\partial V}{\partial z}$ für $z = 0$ auf beiden Seiten der xy-Ebene entgegengesetzte Werthe hat. Verbindet man diese Thatsache mit dem durch die Gleichung 9) der sechszehnten Vorlesung ausgesprochenen Satze, indem man etwa die Richtung von n_i mit der Richtung der z-Achse zusammenfallen lässt, so findet man, dass für ein unendlich kleines z

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -2\pi h, \text{ wenn } z \text{ positiv}$$

und

$$= +2\pi h, \text{ wenn } z \text{ negativ}$$

ist; es folgt daraus unter Anderem, dass für die Theile der xy-Ebene, die nicht mit Masse belegt sind, für die also $h = 0$ ist, $\frac{\partial V}{\partial z}$ verschwindet.

Nun wollen wir durch ds ein Element eines Theiles der xy-Ebene bezeichnen, der die Fläche S heissen möge; r sei die Entfernung des Punktes (x, y, z) von ds, e eine solche Function der Coordinaten von ds, dass immer, wenn der Punkt (x, y, z) in der Fläche S liegt,

$$\int \frac{e\,ds}{r} = 1$$

ist, endlich c eine willkührliche Constante. Wir betrachten eine Function ψ von x, y, z, die wir dadurch definiren, dass wir für negative Werthe von z

$$\psi = \int \frac{e\,ds}{r} + c\int \frac{ds}{r},$$

für positive Werthe von z

$$\psi = -\int \frac{e\,ds}{r} + c\int \frac{ds}{r} + 2 + 4\pi c z$$

setzen. Dieses ψ genügt im ganzen Raume der Gleichung $\Delta\psi = 0$; es hat ferner die Eigenschaft, wie aus den vorausgeschickten Bemerkungen sich ergiebt, dass ψ und $\frac{\partial \psi}{\partial z}$ an der Fläche S stetig sind, während sie an dem übrigen Theile der xy-Ebene Sprünge erleiden; in der That ist an einem Punkte der Fläche S auf der einen, wie auf der andern Seite

$$\psi = 1 + c\int \frac{ds}{r}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = 2\pi(e + c); \tag{36)}$$

weiter ist an der xy-Ebene ausserhalb der Fläche S auf der Seite der negativen z

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = 0,$$

und in der Unendlichkeit ist für negative Werthe von z

$$\psi = 0,$$

für positive 37)

$$\psi = 2 + 4\pi c z.$$

Dem Punkte (x, y, z) weisen wir nun ein Gebiet an, das durch folgende Flächen vollständig begrenzt ist: durch eine Halbkugel, die auf der Seite der negativen z mit einem unendlich grossen Radius um den Anfangspunkt der Coordinaten beschrieben ist, durch den Theil der xy-Ebene, der zwischen dem Rande dieser Halbkugel und dem Rande der Fläche S liegt, durch einen Theil der Ebene, für welche z den unendlich grossen positiven Werth L hat, und einen Theil der Fläche, welche durch den Rand von S geht und die Flächen $\psi =$ const. senkrecht schneidet, einer Fläche, welche für unendlich grosse positive Werthe von z eine der z-Achse parallele Cylinderfläche ist. In diesem Gebiete hat die Function ψ alle Eigenschaften eines Geschwindigkeitspotentials einer incompressibeln Flüssigkeit; betrachten wir sie als ein solches, so sind die unendlich grosse Halbkugel und die Ebene $z = L$ Flächen gleichen Geschwindigkeitspotentials, die übrigen Grenzflächen können als feste Wände angesehen werden. Bezeichnet man durch Q den Querschnitt der Röhre, welche zu diesen gehört, für unendlich grosse positive Werthe von z, so ergiebt sich dabei aus 37) für den Widerstand W des von der betrachteten Flüssigkeit erfüllten Raumes

$$W = \frac{2 + 4\pi c L}{4\pi c Q} = \frac{1}{Q}\left(L + \frac{1}{2\pi c}\right).$$

Dieser Ausdruck von W lässt sich noch auf eine andere Form bringen; wir setzen

$$\int ds = S, \quad \int \varepsilon ds = \gamma,$$

d. h. wir bezeichnen durch S die Grösse der Fläche, die wir schon mit demselben Buchstaben benannt haben, durch γ die elektrische Capacität der Fläche S; berechnen wir aus 36) und aus 37) das Volumen der in der Zeiteinheit durch einen Querschnitt tretenden Flüssigkeitsmasse und setzen die beiden so erhaltenen Ausdrücke einander gleich, so erhalten wir

$$2\pi(\gamma + cS) = 4\pi c Q,$$

d. h.

$$c = \frac{\gamma}{2Q - S},$$

also

$$W = \frac{1}{Q}\left(S + \frac{2Q - S}{2\pi\gamma}\right).$$

Ist die Fläche S oder, wie wir nun sagen wollen, die Oeffnung der Pfeife eine Ellipse, so gilt für $\frac{1}{\gamma}$ der Ausdruck 30) der siebenzehnten Vorlesung; aber es ist in diesem Falle schwierig, die Gestalt der Röhre, d. h. der Fläche, die die Flächen $\psi =$ const. senkrecht schneidet und durch den Rand der Oeffnung geht, zu finden. Verhältnissmässig leicht ist dieses, wenn die Oeffnung ein Kreis ist, da dann die Röhrenwand eine Rotationsfläche ist und die im § 2. der achtzehnten Vorlesung besprochene Methode zu ihrer Berechnung benutzt werden kann. Ist die Fläche S ein Kreis von dem Radius R_1, so ist

$$\gamma = \frac{2 R_1}{\pi};$$

nennt man R den Radius des Querschnitts Q, so ist daher

$$W = \frac{1}{Q}\left(L + \frac{\pi}{4}\,\frac{2 R^2 - R_1^2}{R_1}\right).$$

Ist dabei noch

$$R_1 = R,$$

so erhält man hieraus

$$W = \frac{1}{Q}\left(L + \frac{\pi}{4} R\right).$$

Für den letzten Fall hat Helmholtz die Berechnung der Röhrenwand durchgeführt und gefunden, dass diese fast genau cylindrisch ist; ihr Radius ist an keiner Stelle kleiner als R und das Maximum desselben ungefähr 1,02 R.

Fünfundzwanzigste Vorlesung.

(Bewegung einer incompressibeln Flüssigkeit, auf deren Theile Kräfte wirken. Ausfluss einer schweren Flüssigkeit aus der Oeffnung eines Gefässes. Torricelli'sches Theorem. Stationäre Bewegung eines flüssigen Ellipsoids, dessen Theile gegen einander gravitiren. Bewegung eines solchen, die stationär ist in Bezug auf ein rotirendes Achsensystem. Unendlich kleine Schwingungen einer schweren Flüssigkeit. Wellen einer schweren Flüssigkeit von endlicher Höhe. Nichtstationäre Bewegung eines gravitirenden, flüssigen Ellipsoids.)

§ 1.

Unsere bisherigen Entwickelungen setzten voraus, dass auf die Theile der Flüssigkeit nicht Kräfte wirken; wir wollen jetzt annehmen, dass solche vorhanden sind, dabei aber uns auf die Betrachtung einer incompressibeln Flüssigkeit beschränken.

Wenn ein Geschwindigkeitspotential, φ, existirt und die wirkenden Kräfte das Potential V haben, so ist nach den Gleichungen 20) und 21) der fünfzehnten Vorlesung

$$V - p = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \tfrac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right) \qquad 1)$$

und

$$\Delta \varphi = 0, \qquad 2)$$

wo p den Druck bedeutet und die Dichtigkeit $= 1$ gesetzt ist. Ist der Raum, den die betrachtete Flüssigkeit erfüllt, ein einfach zusammenhängender, und ist für alle Elemente seiner Oberfläche $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ gegeben, so bestimmt, wie wir gesehn haben, die Gleichung 2), in der die Kräfte nicht vorkommen, die Bewegung vollständig. Um die Bewegung unter den genannten Voraussetzungen zu ermitteln, ist die Kenntniss der Kräfte gar nicht nöthig; diese wird nur erfordert, wenn man die Aenderungen finden will, die der Druck der Zeit und dem Orte nach erfährt, und hierzu dient die Gleichung 1). Wenn aber für einen Theil der Oberfläche der Flüssigkeit $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$, für den anderen der Druck gegeben ist, so haben die wirkenden Kräfte wesentlichen Einfluss auf die Bewegung, und diese lässt sich nur berechnen, wenn man die Gleichung 1) zu Hülfe zieht.

Es sei die Schwere die einzige wirkende Kraft und die z-Achse vertikal abwärts gekehrt; wir können dann

$$V = g z$$

setzen, und, bezeichnen wir für den Augenblick die ganze Geschwindigkeit durch v, so wird die Gleichung 1)

$$g z - p = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \tfrac{1}{2} v^2 . \qquad 3)$$

Nun denken wir uns, dass die Flüssigkeit in einem ruhenden Gefässe enthalten ist und aus einer Oeffnung desselben in einem Strahle ausfliesst; auf ihre Oberfläche in dem Gefässe und auf die Oberfläche des Strahls übe die Atmosphäre einen constanten Druck aus. Wenn die Dimensionen der Ausflussöffnung klein genug sind gegen die Dimensionen des Gefässes, so ist eine Bewegung möglich, bei der die Oberfläche im Gefässe in jedem Augenblicke unendlich wenig von einer horizontalen Ebene abweicht, die Geschwindigkeit in dieser unendlich klein ist und die Differentialquotienten der Componenten der Geschwindigkeit nach der Zeit überall unendlich klein sind. Diese Bewegung fassen wir ins Auge. Wenden wir die Gleichung 3) einmal auf einen Punkt der Oberfläche des Strahls an, dann auf einen Punkt der Oberfläche im Gefässe, ziehen beide Resultate von einander ab und erwägen, dass

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz \right)$$

unendlich klein ist, wenn die Integration über eine beliebige Linie ausgedehnt wird, die die beiden gedachten Punkte verbindet und ganz in der Flüssigkeit liegt, so erhalten wir

$$v = \sqrt{2 g z} ,$$

wo v die Geschwindigkeit in dem in der Oberfläche des Strahls gewählten Punkte, z die Tiefe dieses Punktes unter der Oberfläche im Gefässe bedeutet. Diese Gleichung spricht das sogenannte *Torricelli'sche Theorem* aus.

Ueber die Gestalt des Strahles lässt sich bei den jetzigen Hülfsmitteln der Analysis nur sehr Weniges feststellen; es ist das nicht auffallend, da schon in dem Falle, dass keine Kräfte wirken, nur einzelne Strahlenformen unter der Voraussetzung sich finden lassen, dass die Bewegung überall *einer* Ebene parallel ist. Nimmt man die Dimensionen des Querschnitts des Strahles als unendlich klein an, so kann man den Druck, der in der Oberfläche allgemein dem der Atmosphäre gleich ist, als in dem ganzen Strahle constant betrachten ausser in dem Theile, der unendlich nahe an der Ausflussöffnung liegt, in dem die Componenten der Geschwindigkeit unendlich schnell sich ändern. Fasst man einen Theil des Strahles ins Auge, der durch zwei unendlich nahe Querschnitte begrenzt ist, so kann man hiernach schliessen, dass dieser so sich bewegt, wie ein freier materieller

Punkt, auf den die Schwere wirkt, d. h. in einer Parabel, deren Achse vertikal ist. Ist die Bewegung als eine stationäre anzusehn, so ist der Strahl die Bahn, welche alle Theilchen beschreiben, also eine solche Parabel.

Dieselbe Schlussweise lässt sich auch auf einen etwas allgemeineren Fall anwenden. Es ströme die Flüssigkeit durch einen unendlich engen Schlitz aus, der gerade oder gekrümmt, und in dem letzten Falle in sich zurückkehrend oder nicht sein kann; sie bildet dann eine unendlich dünne Lamelle, in der man den Druck überall als gleich ansehn darf. Irgend ein Theilchen derselben bewegt sich daher, wie ein freier materieller Punkt, also in einer Parabel mit vertikaler Achse, und, ist die Bewegung eine stationäre, so ist die flüssige Schicht aus solchen Parabeln zusammengesetzt, die durch die einzelnen Punkte des Schlitzes gehn.

§ 2.

Wir wollen uns jetzt mit einer stationären Bewegung einer incompressibeln Flüssigkeit beschäftigen, bei der andere Kräfte als die Schwere wirken und kein Geschwindigkeitspotential vorhanden ist. Es soll sich um eine Flüssigkeit handeln, deren Theile einander nach dem Newton'schen Gesetze anziehen und auf deren Oberfläche ein constanter Druck wirkt; wir werden aus den Euler'schen hydrodynamischen Gleichungen beweisen, dass diese in einer gewissen stationären Bewegung sein kann, während ihre Oberfläche ein dreiachsiges Ellipsoid ist, zwischen dessen Achsen eine bestimmte Relation besteht. Zu diesem Zwecke nehmen wir an, dass zwischen den Geschwindigkeitscomponenten u, v, w und den Coordinanten x, y, z des Punktes, auf den diese sich beziehn, die Gleichungen

$$\begin{aligned} u &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ v &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ w &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{aligned} \tag{4}$$

bestehn, in denen die 9 Grössen a_{11}, a_{12}, . . Constanten sind. Die Gleichung 12) der fünfzehnten Vorlesung giebt für diese die Bedingung

$$a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0\,. \tag{5}$$

Setzt man die Werthe von u, v, w aus 4) in die Gleichungen 10) der fünfzehnten Vorlesung, so werden die linken Seiten derselben lineare, homogene Functionen von x, y, z; die rechten Seiten werden es auch, wenn man über P (das ist dasselbe, wie p, da wir die Dichtigkeit $= 1$ gesetzt haben) passend verfügt. Schreibt man die Gleichung der Oberfläche der Flüssigkeit

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\,, \tag{6}$$

so ist nämlich

$$V = \text{Const} - \pi\,(Ax^2 + By^2 + Cz^2)\,, \tag{7}$$

wo A, B, C die durch die Gleichungen 4) der zwölften Vorlesung bestimmten Constanten sind, wenn man die Einheiten der Masse, Länge und Zeit so gewählt hat, dass die Kraft, mit der zwei Massen einander anziehn, gleich ihrem Producte, dividirt durch das Quadrat ihrer Entfernung ist. Man erreicht daher den genannten Zweck, wenn man p einer homogenen Function zweiten Grades von x, y, z, zu der eine Constante addirt ist, gleichsetzt. Man erreicht zugleich, dass der Druck an der Oberfläche constant wird, wenn man

$$p = \text{Const} + \sigma\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z}{c^2}\right) \tag{8}$$

macht, wo σ eine Constante bedeutet.

Die in Rede stehenden Differentialgleichungen werden für alle Werthe von x, y, z erfüllt, wenn man die Coefficienten dieser Variabeln in ihnen einander gleichsetzt; mit Hülfe von 7) und 8) erhält man dadurch

$$\begin{aligned}
&a_{11}a_{11} + a_{12}a_{21} + a_{13}a_{31} = \frac{2\sigma}{a^2} - 2\pi A\\
&a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{32} = 0\\
&a_{11}a_{13} + a_{12}a_{23} + a_{13}a_{33} = 0\\
&a_{21}a_{11} + a_{22}a_{21} + a_{23}a_{31} = 0\\
&a_{21}a_{12} + a_{22}a_{22} + a_{23}a_{32} = \frac{2\sigma}{b^2} - 2\pi B\\
&a_{21}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{23}a_{33} = 0\\
&a_{31}a_{11} + a_{32}a_{21} + a_{33}a_{31} = 0\\
&a_{31}a_{12} + a_{32}a_{22} + a_{33}a_{32} = 0\\
&a_{31}a_{13} + a_{32}a_{23} + a_{33}a_{33} = \frac{2\sigma}{c^2} - 2\pi C\,.
\end{aligned} \tag{9}$$

Noch zu erfüllen ist die Bedingung, dass die Theilchen der Oberfläche in dieser bleiben; nach der Gleichung 31) der zehnten Vorlesung ist hierzu erforderlich, dass, wenn die Gleichung 6) besteht,

$$\frac{ux}{a^2} + \frac{vy}{b^2} + \frac{wz}{c^2} = 0$$

ist, dass also allgemein diese Gleichung erfüllt wird.

Hieraus ergeben sich die sechs Gleichungen

$$\begin{gathered}
a_{11} = 0\quad,\qquad a_{22} = 0\quad,\qquad a_{33} = 0\\
\frac{a_{12}}{a^2} + \frac{a_{21}}{b^2} = 0,\quad \frac{a_{23}}{b^2} + \frac{a_{32}}{c^2} = 0,\quad \frac{a_{31}}{c^2} + \frac{a_{13}}{a^2} = 0\,.
\end{gathered} \tag{10}$$

In Folge der drei ersten von diesen wird die Gleichung 5) erfüllt und die Gleichungen 9) nehmen diese einfachere Form an:

$$
\begin{aligned}
&a_{12}a_{21}+a_{13}a_{31}=\frac{2\sigma}{a^2}-2\pi A, \quad a_{13}a_{32}=0, \quad a_{12}a_{23}=0\\
&a_{23}a_{32}+a_{21}a_{12}=\frac{2\sigma}{b^2}-2\pi B, \quad a_{21}a_{13}=0, \quad a_{23}a_{31}=0 \qquad 11)\\
&a_{31}a_{13}+a_{32}a_{23}=\frac{2\sigma}{c^2}-2\pi C, \quad a_{32}a_{21}=0, \quad a_{31}a_{12}=0.
\end{aligned}
$$

Diesen und den drei letzten der Gleichungen 10) kann durch mehrere Werthsysteme der Unbekannten genügt werden. Ihnen kann genügt werden, wenn man

$$a_{13}=0, \quad a_{23}=0, \quad a_{31}=0, \quad a_{32}=0$$

annimmt, so dass von den 9 Grössen $a_{11}, a_{12}, \ldots$ nur die beiden a_{12} und a_{21} von Null verschieden bleiben. Die Gleichungen 10) und 11) werden dann

$$\frac{a_{12}}{a^2}+\frac{a_{21}}{b^2}=0$$

$$a_{12}a_{21}=\frac{2\sigma}{a^2}-2\pi A=\frac{2\sigma}{b^2}-2\pi B, \quad 0=\frac{2\sigma}{c^2}-2\pi C,$$

oder, wenn man

$$a_{12}a_{21}=-\varkappa^2$$

setzt und σ eliminirt,

$$a_{12}=\frac{a}{b}\varkappa, \quad a_{21}=-\frac{b}{a}\varkappa$$

$$a^2\left(A-\frac{\varkappa^2}{2\pi}\right)=b^2\left(B-\frac{\varkappa^2}{2\pi}\right)=c^2C^2.$$

Diese Doppelgleichung ist dieselbe, wie die Gleichung 6) der zwölften Vorlesung, wenn man die dort mit v bezeichnete Grösse $=\frac{\varkappa^2}{2\pi}$, d. h., da wir hier $\mu=1$ angenommen haben, wenn man die dort mit w bezeichnete Grösse $=\varkappa$ macht. Hieraus folgt, dass die durch die Gleichungen

$$u=\frac{a}{b}\varkappa y, \quad v=-\frac{b}{a}\varkappa x, \quad w=0$$

bestimmte Bewegung bestehen kann, wenn die Flüssigkeit ein Ellipsoid bildet, welches mit der Drehungsgeschwindigkeit $\varkappa$ um die z-Achse wie ein fester Körper rotiren kann. Nach den an dem angeführten Orte gemachten Angaben giebt es drei solche Ellipsoide, zwei abgeplattete Rotationsellipsoide, deren Rotationsachse die z-Achse ist, und ein dreiachsiges, vorausgesetzt, dass $\varkappa$ innerhalb gewisser Grenzen liegt. Bildet die Flüssigkeit eins der beiden Rotationsellipsoide, so sind die hier und dort betrachteten Bewegungen ganz dieselben; sie sind aber verschieden im Falle des dreiachsigen Ellipsoids.

Die Bewegung der Theile eines dreiachsigen flüssigen Ellipsoids, die wir so gefunden haben, ist von Dirichlet*) entdeckt; die Betrachtungen, die uns zur Kenntniss derselben geführt haben, lassen sich, wie wir zeigen wollen, leicht so verallgemeinern, dass sie eine Bewegung geben, von der die eben besprochene *einen* speciellen Fall bildet und die Bewegung, bei der das dreiachsige Ellipsoid wie ein fester Körper rotirt, einen *anderen*.

Wir nehmen an, dass die Flüssigkeit durch ein Ellipsoid begrenzt ist, welches um eine seiner Achsen mit der constanten Winkelgeschwindigkeit λ rotirt; wir beziehen die Bewegung aller Flüssigkeitstheile auf ein Coordinatensystem, dessen Achsen die Achsen dieses Ellipsoids sind; die z-Achse sei die Rotationsachse, die Gleichung 6) wieder die Gleichung des Ellipsoids. Nach den Betrachtungen, welche zu den Ausdrücken 5) der neunten Vorlesung geführt haben, darf man bei der Bildung der Differentialgleichungen der Bewegung davon absehn, dass das eingeführte Coordinatensystem rotirt, falls man zur x- und y-Componente der auf die Masseneinheit bezogenen, auf ein Flüssigkeitstheilchen wirkenden Kraft resp. hinzufügt

$$\lambda^2 x - 2\lambda v \quad \text{und} \quad \lambda^2 y + 2\lambda u\,.$$

Nimmt man an, dass die Bewegung, bezogen auf das genannte Coordinatensystem, eine stationäre ist, so ergeben daher die Gleichungen 10) der fünfzehnten Vorlesung bei Rücksicht auf die Gleichungen 7) und 8)

$$\begin{aligned}
u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} &= \left(\frac{2\sigma}{a^2} - 2\pi A + \lambda^2\right) x - 2\lambda v \\
u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} &= \left(\frac{2\sigma}{b^2} - 2\pi B + \lambda^2\right) y + 2\lambda u \\
u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} &= \left(\frac{2\sigma}{c^2} - 2\pi C\right) z\,.
\end{aligned}$$

Setzt man in diese Gleichungen für u, v, w ihre Werthe aus 4), so werden sie für alle Werthe von x, y, z erfüllt, falls die neun Gleichungen bestehn, deren linke Theile die linken Theile der Gleichungen 9) und deren rechte Theile

$$\begin{array}{ccc}
\frac{2\sigma}{a^2} - 2\pi A + \lambda^2 - 2\lambda a_{21}, & -2\lambda a_{22}, & -2\lambda a_{23} \\[2ex]
2\lambda a_{11}, & \frac{2\sigma}{b^2} - 2\pi B + \lambda^2 + 2\lambda a_{12}, & 2\lambda a_{13} \\[2ex]
0, & 0, & \frac{2\sigma}{c^2} - 2\pi C
\end{array}$$

sind. Zu diesen neun Gleichungen kommen, wenn die gedachte Bewegung eine mögliche sein soll, ungeändert die Gleichungen 5) und 10). Allen diesen Bedingungen genügt man, wenn man

---

*) Abhandlungen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, achter Band, 1860.

$$a_{11}=0\,,\quad a_{22}=0\,,\quad a_{33}=0$$
$$a_{13}=0\,,\quad a_{23}=0\,,\quad a_{31}=0\,,\quad a_{32}=0$$

und

$$\frac{a_{12}}{a^2}+\frac{a_{21}}{b^2}=0$$

$$a_{12}a_{21}=\frac{2\sigma}{a^2}-2\pi A+\lambda^2-2\lambda a_{21}=\frac{2\sigma}{b^2}-2\pi B+\lambda^2+2\lambda a_{12}$$
$$0=\frac{2\sigma}{c^2}-2\pi C$$

macht. Setzt man wieder

$$a_{12}=\frac{a}{b}\varkappa\,,\quad a_{21}=-\frac{b}{a}\varkappa\,,\quad \text{also}\quad a_{12}a_{21}=-\varkappa^2$$

und eliminirt σ, so erhält man die beiden Gleichungen zwischen $\varkappa$, λ, a, b, c

$$\begin{aligned} a^2(\varkappa^2+\lambda^2)+2\varkappa\lambda ab &= 2\pi(a^2A-c^2C)\\ b^2(\varkappa^2+\lambda^2)+2\varkappa\lambda ab &= 2\pi(b^2B-c^2C)\,. \end{aligned} \tag{12)}$$

Sind a, b, c beliebig gegeben, so können $\varkappa$ und λ aus diesen Gleichungen berechnet werden; die Werthe, die man dafür findet, und die gegen einander vertauscht werden können, sind aber nicht immer reell, d. h. die durch die entwickelten Gleichungen dargestellte Bewegung ist nicht immer eine mögliche. Wir wollen hier die Grenzen des Gebietes nicht aufsuchen, in dem die Verhältnisse $a:b:c$ liegen müssen, damit die Gleichungen 12) reelle Werthe von $\varkappa$ und λ ergeben; ein einfacher Fall, in dem dieses stattfindet, ist der, dass

$$b^2=c^2\quad\text{und}\quad a^2>c^2$$

ist, in welchem Falle die zweite der Gleichungen 12)

$$c(\varkappa^2+\lambda^2)+2\varkappa\lambda a=0$$

wird.

§ 3.

Die Euler'schen hydrodynamischen Differentialgleichungen sind denen von Lagrange vorzuziehn, wenn die Bewegung, um die es sich handelt, eine stationäre oder eine solche ist, die, wie die im vorigen § zuletzt betrachtete, sich dadurch auf eine stationäre zurückführen lässt, dass man sie auf ein bewegtes Coordinatensystem bezieht. Ihre Anwendung ist auch dann bequem, wenn die Verrückungen und Geschwindigkeiten der Flüssigkeitstheile unendlich klein sind; solche Fälle bildeten den Gegenstand der beiden vorigen Vorlesungen; mit einem Falle, der auch hierher gehört, wollen wir uns nun beschäftigen, nämlich mit den unendlich kleinen Schwingungen einer schweren incompressibeln Flüssigkeit.

Wir setzen voraus, dass ein Geschwindigkeitspotential φ existirt; die partielle Differentialgleichung, mit der wir es zu thun haben, ist dann wieder die Gleichung $\Delta\varphi = 0$. Die Flüssigkeit soll theilweise von festen Wänden begrenzt sein; für alle Elemente dieser ist dann

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0; \tag{13}$$

sie soll aber auch eine freie Oberfläche darbieten, welche unendlich wenig von einer horizontalen Ebene abweicht, und auf welche ein constanter Druck ausgeübt wird; es muss zunächst die Grenzbedingung aufgesucht werden, der φ an dieser freien Oberfläche zu genügen hat. Wir nehmen die xy-Ebene des Coordinatensystems unendlich nahe an der freien Oberfläche, die z-Achse vertikal abwärts gekehrt an; in der Gleichung 1) können wir dann

$$V = C + gz$$

setzen, wo C eine Constante bedeutet, über die wir nach Willkühr verfügen dürfen. Bezeichnen wir die Geschwindigkeiten als unendlich kleine Grössen erster Ordnung und vernachlässigen in der Gleichung 1) unendlich kleine Grössen zweiter Ordnung, so erhalten wir

$$C + gz - p = \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Setzen wir $C =$ dem constanten Druck, der auf die Oberfläche wirken soll und wenden diese Gleichung auf die Oberfläche an, so erhalten wir als Gleichung derselben

$$gz = \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \tag{14}$$

Wir beziehn diese auf ein gewisses Flüssigkeitstheilchen an der Oberfläche, differentiiren sie nach t und vernachlässigen die auf der rechten Seite dabei auftretenden unendlich kleinen Grössen zweiter Ordnung; wir erhalten dann

$$g\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}. \tag{15}$$

In dieser Gleichung sind für z die unendlich kleinen Werthe zu setzen, die der Oberfläche entsprechen; statt dessen kann man in ihr

$$z = 0$$

machen.

Die Gleichungen 13) und 15) sind die Grenzbedingungen, denen gemäss φ zu bestimmen ist. Es ist leicht, ihnen für gewisse specielle Fälle zu genügen. Wir setzen

$$\varphi = ZU \tag{16}$$

und nehmen an, dass Z eine Function von z und t, U eine Function von x und y ist; der Gleichung 13) kann dann genügt werden, falls die Flüssigkeit seitlich durch eine vertikale Cylinderfläche, unten durch einen horizontalen Boden begrenzt ist; für jene muss dann

$$\frac{\partial U}{\partial n} = 0, \tag{17)}$$

für diesen

$$\frac{\partial Z}{\partial z} = 0 \tag{18)}$$

gemacht werden. Die Gleichung $\Delta \varphi = 0$ wird durch 16)

$$Z\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right) + U\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0;$$

ihr wird genügt, wenn man

$$\frac{\partial^2 Z}{d z^2} = \varkappa^2 Z \tag{19)}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = - \varkappa^2 U \tag{20)}$$

setzt, wo $\varkappa$ eine Constante sein soll. Ist für den Boden

$$z = h,$$

so folgt aus 19) und 18)

$$Z = M\left(e^{\varkappa(h-z)} + e^{-\varkappa(h-z)}\right), \tag{21)}$$

wo e die Basis der natürlichen Logarithmen bedeutet und M eine Function von t ist. Diese bestimmt sich aus der Gleichung 15), welche durch 16) und 21) wird

$$\frac{d^2 M}{d t^2} = - g \varkappa \frac{e^{\varkappa h} - e^{-\varkappa h}}{e^{\varkappa h} + e^{-\varkappa h}} M;$$

hieraus folgt

$$M = A \cos \frac{t - t_0}{T} 2\pi, \tag{22)}$$

wo A und t_0 zwei willkührliche Constanten bedeuten und

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{1}{g\varkappa} \frac{e^{\varkappa h} + e^{-\varkappa h}}{e^{\varkappa h} - e^{-\varkappa h}}} \tag{23)}$$

ist. Die Gleichung, die man aus 16) durch 21) und 22) erhält, stellt, vorausgesetzt, dass U den Gleichungen 20) und 17) gemäss bestimmt werden kann, eine Bewegung dar, bei der jedes Flüssigkeitstheilchen Schwingungen ausführt, deren Dauer T ist. Der für T angegebene Ausdruck vereinfacht sich wesentlich in den Fällen, dass $\varkappa h$ als unendlich gross oder als unendlich klein angesehen werden kann: im ersten Falle ist

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{g\varkappa}},$$

im zweiten, wie die Entwicklung der Exponentialgrössen zeigt,

$$T = \frac{2\pi}{\varkappa\sqrt{g h}} .$$

Wir wollen die Bestimmung der Function U nur für den einfachsten Fall ausführen; wir wollen nämlich annehmen, dass der horizontale Querschnitt der Flüssigkeit ein Rechteck ist, dessen Seiten den Achsen der x und y parallel sind, und dass U von y unabhängig ist. Die Gleichung 20) wird dann

$$\frac{d^2 U}{d x^2} = - \varkappa^2 U$$

und ihr allgemeines Integral ist

$$\cos \varkappa (x - x_0) ,$$

wo x_0 eine willkührliche Constante bedeutet, multiplicirt mit einer zweiten willkührlichen Constanten. Wenn für die Wände, die die Flüssigkeit in der Richtung der x-Achse begrenzen,

$$x = 0 \quad \text{und} \quad x = l$$

ist, so erfordert die Gleichung 17), dass für diese Werthe von x

$$\frac{d U}{d x} = 0$$

ist; man genügt dem, wenn man

$$x_0 = 0 , \quad \varkappa = \frac{n\pi}{l} \tag{24}$$

macht, wo n eine ganze Zahl bedeutet. Man hat hiernach

$$\varphi = A \cos \frac{t - t_0}{T} 2\pi \, . \cos \frac{n x}{l} \pi \, . \left(e^{\frac{n(h-z)}{l}\pi} + e^{-\frac{n(h-z)}{l}\pi} \right) .$$

Man erfüllt auch alle Bedingungen, die zu erfüllen sind, wenn man φ gleich einer Summe solcher Ausdrücke setzt, wie der aufgestellte einer ist, und die sich von einander unterscheiden durch die Werthe der ganzen Zahl n und der Constanten A und t_0; man kann also auch

$$\varphi = \sum \left(A_n \cos \frac{t}{T_n} 2\pi + B_n \sin \frac{t}{T_n} 2\pi \right) \left(e^{\frac{n(h-z)}{l}\pi} + e^{-\frac{n(h-z)}{l}\pi} \right) \cos \frac{n x}{l} \pi$$

setzen, wo die Summe nach n zu nehmen ist, A_n, B_n willkührliche Constanten sind und T_n den aus 23) und 24) zu berechnenden Werth von T bedeutet. Wir bemerken, ohne näher darauf einzugehn, dass die Constanten A_n, B_n mit Hülfe der sogenannten Fourier'schen Reihen, sich so bestimmen lassen, dass die Bewegung einem beliebigen Anfangszustande entspricht, d. h. dass für $t = 0$ und für die Oberfläche z —, d. i. nach 14) $\frac{1}{g}\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ — und $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ beliebig gegebenen Functionen von x gleich werden.

Wir wollen noch den Fall ins Auge fassen, dass die Flüssigkeit in der Richtung der x-Achse als unbegrenzt angesehn werden kann, d. h. dass für keinen Werth von x einer Grenzbedingung zu genügen ist. Die Gleichungen 24) brauchen dann nicht erfüllt zu werden; es bleibt $\varkappa$ und, wenn wir

$$\varkappa = \frac{2\pi}{\lambda}$$

machen, λ willkührlich, und wir können

$$\varphi = A \cos\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) 2\pi \,.\left(e^{\frac{h-z}{\lambda} 2\pi} + e^{-\frac{h-z}{\lambda} 2\pi}\right) \qquad 25)$$

$$T = \sqrt{\frac{2\pi\lambda}{g} \frac{e^{\frac{h 2\pi}{\lambda}} + e^{-\frac{h 2\pi}{\lambda}}}{e^{\frac{h 2\pi}{\lambda}} - e^{-\frac{h 2\pi}{\lambda}}}}$$

setzen. Die hierdurch dargestellte Bewegung besteht in Wellen, die in der Richtung der x-Achse fortschreiten, deren Wellenlänge λ und deren Fortpflanzungsgeschwindigkeit

$$= \frac{\lambda}{T}, \text{ d. h. } = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} \frac{e^{\frac{h 2\pi}{\lambda}} - e^{-\frac{h 2\pi}{\lambda}}}{e^{\frac{h 2\pi}{\lambda}} + e^{-\frac{h 2\pi}{\lambda}}}}$$

ist. Diese Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist im Allgemeinen von der Wellenlänge abhängig; sie ist es nur dann nicht, wenn λ als unendlich gross gegen die Tiefe h angesehn werden kann, in welchem Falle sie

$$= \sqrt{gh}$$

ist. Ist im Gegentheil h unendlich gross gegen λ, so ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit

$$= \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}.$$

Die Bahn, welche ein Flüssigkeitstheilchen beschreibt, findet man auf dem folgenden Wege. Es seien $x + \xi$, y, $z + \zeta$ die Coordinaten zur Zeit t des Theilchens, dessen Coordinaten x, y, z zur Zeit $t = 0$ sind; es ist dann

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad \frac{d\zeta}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

d. h. nach 25)

$$\frac{d\xi}{dt} = \quad \frac{A\, 2\pi}{\lambda}\left(e^{\frac{h-z}{\lambda} 2\pi} + e^{-\frac{h-z}{\lambda} 2\pi}\right) \sin\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) 2\pi$$

$$\frac{d\zeta}{dt} = -\frac{A\, 2\pi}{\lambda}\left(e^{\frac{h-z}{\lambda} 2\pi} - e^{-\frac{h-z}{\lambda} 2\pi}\right) \cos\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) 2\pi,$$

woraus folgt

$$\xi = -\frac{AT}{\lambda}\left(e^{\frac{h-z}{\lambda}2\pi} + e^{-\frac{h-z}{\lambda}2\pi}\right)\left(\cos\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)2\pi - \cos\frac{x\,2\pi}{\lambda}\right)$$

$$\zeta = -\frac{AT}{\lambda}\left(e^{\frac{h-z}{\lambda}2\pi} - e^{-\frac{h-z}{\lambda}2\pi}\right)\left(\sin\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)2\pi + \sin\frac{x\,2\pi}{\lambda}\right).$$

Durch Elimination von t ergiebt sich hieraus

$$\left(\frac{\xi}{a} - \cos\frac{x\,2\pi}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\zeta}{c} + \sin\frac{x\,2\pi}{\lambda}\right)^2 = 1,$$

wenn

$$a = \frac{AT}{\lambda}\left(e^{\frac{h-z}{\lambda}2\pi} + e^{-\frac{h-z}{\lambda}2\pi}\right)$$

$$c = \frac{AT}{\lambda}\left(e^{\frac{h-z}{\lambda}2\pi} - e^{-\frac{h-z}{\lambda}2\pi}\right)$$

gesetzt wird. Das ist die Gleichung einer Ellipse, deren Halbachsen horizontal und vertical sind und die Längen a und c haben. Ist h unendlich gross, während λ und z endlich sind, so ist $a = c$; alle Flüssigkeitstheilchen beschreiben dann Kreise.*)

§ 4.

Wir wollen jetzt die hydrodynamischen Differentialgleichungen von Lagrange auf einige Bewegungen einer incompressibeln Flüssigkeit, auf deren Theile Kräfte wirken, und auf deren freie Oberfläche ein constanter Druck ausgeübt wird, anwenden. Der erste Fall, den wir betrachten, ist der, dass Wellen gewisser Art von endlicher Höhe in einer schweren Flüssigkeit fortschreiten. Wir setzen wieder die Dichtigkeit der Flüssigkeit $= 1$, wählen die z-Achse vertical abwärts gekehrt und nehmen an, dass die Bewegung überall parallel der xz-Ebene vor sich geht. Die Gleichungen 7) der fünfzehnten Vorlesung geben dann, wenn man

$$b = y$$

setzt,

$$\frac{d^2x}{dt^2}\frac{\partial x}{\partial a} + \left(\frac{d^2z}{dt^2} - g\right)\frac{\partial z}{\partial a} + \frac{\partial p}{\partial a} = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}\frac{\partial x}{\partial c} + \left(\frac{d^2z}{dt^2} - g\right)\frac{\partial z}{\partial c} + \frac{\partial p}{\partial c} = 0; \qquad 26)$$

die Gleichungen 8) und 3) derselben Vorlesung werden

$$\frac{dD}{dt} = 0, \quad D = \frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial c} - \frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial a}.$$

Es können hier a und c irgend zwei Variable sein, deren Werthe zusammen mit y ein Flüssigkeitstheilchen eindeutig bestimmen;

*) Vergl. Holtzmann, Programm der Polytechnischen Schule in Stuttgart, 1858.

hierzu ist erforderlich, dass in dem von der betrachteten Flüssigkeit erfüllten Raume D weder unendlich wird noch verschwindet; im Uebrigen lassen wir die Bedeutung von a und c vorläufig unbestimmt. Wir werden zeigen, dass den aufgestellten Gleichungen genügt wird durch

$$x - a = r \sin \vartheta, \quad z - c = r \cos \vartheta$$
$$\vartheta = \left(\frac{a}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) 2\pi, \tag{27}$$

wo λ und T zwei Constanten, r eine Function von c bedeuten, über die zu verfügen wir uns vorbehalten. Hierdurch ist ausgesprochen, dass ein jedes Flüssigkeitstheilchen in einem Kreise mit gleichbleibender Geschwindigkeit so sich bewegt, dass T die Dauer eines Umlaufs ist. Aus den für x und z angenommenen Ausdrücken folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial a} &= 1 + \frac{2\pi}{\lambda} r \cos \vartheta, & \frac{\partial x}{\partial c} &= \frac{dr}{dc} \sin \vartheta \\ \frac{\partial z}{\partial a} &= \quad - \frac{2\pi}{\lambda} r \sin \vartheta, & \frac{\partial z}{\partial c} &= 1 + \frac{dr}{dc} \cos \vartheta, \end{aligned} \tag{28}$$

also

$$D = 1 + \frac{2\pi}{\lambda} r \frac{dr}{dc} + \left(\frac{dr}{dc} + \frac{2\pi}{\lambda} r\right) \cos \vartheta.$$

Da D von t unabhängig sein soll und ϑ von t abhängt, so muss

$$\frac{dr}{dc} = -\frac{2\pi}{\lambda} r \tag{29}$$

und

$$D = 1 + \frac{2\pi}{\lambda} r \frac{dr}{dc} \tag{30}$$

sein. Die erste von diesen Gleichungen giebt

$$r = R e^{-\frac{2\pi}{\lambda} c}, \tag{31}$$

wo R eine willkührliche Constante ist.

Aus den für x und z angenommenen Ausdrücken folgt weiter

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r \sin \vartheta, \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r \cos \vartheta.$$

Substituirt man diese Werthe in die Gleichungen 26) und benutzt 28) und 29), so werden dieselben

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial a} &= \left(\frac{2\pi}{T^2} - \frac{g}{\lambda}\right) 2\pi r \sin \vartheta \\ \frac{\partial p}{\partial c} &= \left(\frac{2\pi}{T^2} - \frac{g}{\lambda}\right) 2\pi r \cos \vartheta + g - \frac{8\pi^3}{T^2 \lambda} r^2. \end{aligned}$$

Man genügt beiden, wenn man zwischen den bisher willkührlich gelassenen Constanten T und λ die Relation

$$\frac{g}{\lambda} = \frac{2\pi}{T^2}$$

festsetzt und p so als Function der *einen* Variabeln c bestimmt, dass

$$\frac{dp}{dc} = g\left(1 - \frac{4\pi^2}{\lambda^2} R^2 e^{-\frac{4\pi}{\lambda}c}\right)$$

ist. Ist $p = p_0$ für $c = 0$, so folgt aus dieser Gleichung

$$p = p_0 + g\left(c - \frac{\pi}{\lambda} R^2 \left(1 - e^{-\frac{4\pi}{\lambda}c}\right)\right).$$

An der freien Oberfläche müssen stets dieselben Flüssigkeitstheilchen sich befinden und der Druck soll in ihr ein constanter sein; wir genügen diesen beiden Bedingungen, wenn wir annehmen, dass für die freie Oberfläche

$$p = p_0 \quad \text{und} \quad c = 0$$

ist. Im Uebrigen nehmen wir die Flüssigkeit als unbegrenzt an; es variirt dann a zwischen $-\infty$ und $+\infty$, c zwischen 0 und $+\infty$.

Die Constante R darf einen gewissen Werth nicht überschreiten, damit in keinem Punkte der Flüssigkeit D verschwinde. Aus 30) und 31) folgt

$$D = 1 - \left(\frac{2\pi}{\lambda} R\right)^2 e^{-\frac{4\pi}{\lambda}c};$$

es darf also R nicht grösser als

$$\frac{\lambda}{2\pi} \tag{32}$$

sein.

In x und z ausgedrückt, erhält man die Gleichung der freien Oberfläche zur Zeit t, wenn man in 27) $c = 0$ setzt und a und ϑ eliminirt; sie ist daher das Resultat der Elimination von ϑ aus den Gleichungen

$$x - \frac{\lambda}{T} t = R \sin\vartheta + \frac{\lambda}{2\pi}\vartheta$$
$$z = R\cos\vartheta.$$

Da x und t hier nur in der Verbindung $x - \frac{\lambda}{T} t$ vorkommen, so schreitet die Oberfläche mit der Geschwindigkeit $\frac{\lambda}{T}$ in der Richtung der x-Achse ohne Gestaltsänderung fort. Für irgend einen Werth von t ist ihr Schnitt mit der xz-Ebene eine Cycloide; der Kreis, bei dessen Rollen sie durch einen Punkt beschrieben wird, hat den Radius R, sein Mittelpunkt bewegt sich auf der x-Achse; der Punkt, der sie beschreibt, befindet sich im Abstande $\frac{\lambda}{2\pi}$ vom Mittelpunkte.

Erhält R seinen in 32) angegebenen Grenzwerth, so erhält die Cycloide Spitzen.

Bei der hier betrachteten Bewegung existirt nicht ein Geschwindigkeitspotential, es rotiren die Flüssigkeitstheilchen um die y-Achse. Nennt man χ die Rotationsgeschwindigkeit, so erhält man aus den Gleichungen 15) und 14) der fünfzehnten Vorlesung

$$-2\,D\chi = \frac{\partial \frac{dx}{dt}}{\partial a}\frac{\partial x}{\partial c} - \frac{\partial \frac{dx}{dt}}{\partial c}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial \frac{dz}{dt}}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial c} - \frac{\partial \frac{dz}{dt}}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial a},$$

also nach 28) und 29)

$$-2\,D\chi = \frac{8\pi^2}{\lambda T}\, r\, \frac{dr}{dc}.$$

Die in diesem § erörterte Bewegung ist von Rankine*) entdeckt.

§ 5.

Wir kehren nun noch einmal zur Betrachtung einer Flüssigkeit zurück, wie wir sie im § 2. uns gedacht haben, also einer Flüssigkeit, deren Theile nach dem Newton'schen Gesetze einander anziehn und auf deren Oberfläche ein constanter Druck wirkt, lassen aber die dort gemachte Voraussetzung fallen, dass ihre Bewegung eine stationäre ist oder auf eine solche dadurch zurückgeführt werden kann, dass man sie auf ein passend bewegtes Coordinatensystem bezieht. Wie Dirichlet in der schon im § 2. angeführten Abhandlung gezeigt hat, erhält man mögliche Bewegungen einer solchen Flüssigkeit, wenn man annimmt, dass die Coordinaten eines jeden Theilchens lineare Functionen ihrer Anfangswerthe sind und im Anfange die Flüssigkeit ein Ellipsoid bildet.

Unter a, b, c verstehen wir jetzt die Anfangswerthe von x, y, z, schreiben die Gleichung der Oberfläche zur Zeit $t = 0$

$$\frac{a^2}{A^2} + \frac{b^2}{B^2} + \frac{c^2}{C^2} = 1, \tag{33}$$

und setzen

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 a + \beta_1 b + \gamma_1 c \\ y &= \alpha_2 a + \beta_2 b + \gamma_2 c \\ z &= \alpha_3 a + \beta_3 b + \gamma_3 c, \end{aligned} \tag{34}$$

wo die 9 Grössen α, β, γ zu bestimmende Functionen der Zeit bedeuten. Es müssen diese zunächst der Gleichung

*) London Philos. Transactions, 1863, Part. I, p. 227.

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 1 \qquad 35)$$

genügen; ihre Anfangswerthe sind

$$\alpha_1 = \beta_2 = \gamma_3 = 1$$
$$\alpha_2 = \beta_1 = \alpha_3 = \gamma_1 = \beta_3 = \gamma_2 = 0\,,$$

die Anfangswerthe ihrer nach t genommenen Differentialquotienten sind beliebig bis auf die Bedingung, der sie genügen müssen, die durch Differentiation aus 35) folgt, d. h. der Bedingung

$$\frac{d\alpha_1}{dt} + \frac{d\beta_2}{dt} + \frac{d\gamma_3}{dt} = 0\,.$$

Die Gleichung 33) ist auch die Gleichung der Oberfläche der Flüssigkeit zur Zeit t; führt man in sie x, y, z an Stelle von a, b, c mit Hülfe von 34) ein, so sieht man, dass die Flüssigkeit immer ein Ellipsoid bildet, dessen Mittelpunkt der Anfangspunkt der Coordinaten ist, dessen Achsen der Grösse und Richtung nach aber von der Zeit abhängen.

Das Potential V der Flüssigkeit zur Zeit t in Bezug auf den inneren Punkt (x, y, z) ist gleich der Summe einer homogenen Function zweiten Grades von x, y, z und einer von x, y, z unabhängigen Grösse; denn diese Eigenschaft hat V, wenn die Achsen der x, y, z mit den Hauptachsen des flüssigen Ellipsoids zusammenfallen, und sie geht nicht verloren, wenn man statt eines solchen Coordinatensystems ein anderes mit demselben Anfangspunkte einführt. Bei Rücksicht auf 34) folgt hieraus, dass

$$V = H - Ka^2 - Lb^2 - Mc^2 - 2K'bc - 2L'ca - 2M'ab \qquad 36)$$

ist, wo die 7 neu eingeführten Zeichen Functionen der Zeit bedeuten, die durch die 9 Functionen α, β, γ und die 3 Constanten A, B, C in gewisser Weise ausdrückbar sind.

Endlich setzen wir

$$p = \text{const.} + \sigma\left(1 - \frac{a^2}{A^2} - \frac{b^2}{B^2} - \frac{c^2}{C^2}\right),$$

wo σ eine unbekannte Function von t bedeutet.

Bei diesen Annahmen genügen wir der Bedingung, dass der Druck an der Oberfläche der Flüssigkeit ein constanter ist, und die Gleichungen 7) der fünfzehnten Vorlesung werden in Bezug auf a, b, c linear und homogen. Allen Bedingungen des Problems wird genügt, wenn die 10 Functionen der Zeit α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2, γ_2, α_3, β_3, γ_3, und σ den folgenden Differentialgleichungen gemäss bestimmt werden:

$$
\begin{aligned}
&\alpha_1 \frac{d^2\alpha_1}{dt^2} + \alpha_2 \frac{d^2\alpha_2}{dt^2} + \alpha_3 \frac{d^2\alpha_3}{dt^2} = -2K + \frac{2\sigma}{A^2}\\
&\alpha_1 \frac{d^2\beta_1}{dt^2} + \alpha_2 \frac{d^2\beta_2}{dt^2} + \alpha_3 \frac{d^2\beta_3}{dt^2} = -2M'\\
&\alpha_1 \frac{d^2\gamma_1}{dt^2} + \alpha_2 \frac{d^2\gamma_2}{dt^2} + \alpha_3 \frac{d^2\gamma_3}{dt^2} = -2L'\\
&\beta_1 \frac{d^2\alpha_1}{dt^2} + \beta_2 \frac{d^2\alpha_2}{dt^2} + \beta_3 \frac{d^2\alpha_3}{dt^2} = -2M'\\
&\beta_1 \frac{d^2\beta_1}{dt^2} + \beta_2 \frac{d^2\beta_2}{dt^2} + \beta_3 \frac{d^2\beta_3}{dt^2} = -2L + \frac{2\sigma}{B^2}\\
&\beta_1 \frac{d^2\gamma_1}{dt^2} + \beta_2 \frac{d^2\gamma_2}{dt^2} + \beta_3 \frac{d^2\gamma_3}{dt^2} = -2K'\\
&\gamma_1 \frac{d^2\alpha_1}{dt^2} + \gamma_2 \frac{d^2\alpha_2}{dt^2} + \gamma_3 \frac{d^2\alpha_3}{dt^2} = -2L'\\
&\gamma_1 \frac{d^2\beta_1}{dt^2} + \gamma_2 \frac{d^2\beta_2}{dt^2} + \gamma_3 \frac{d^2\beta_3}{dt^2} = -2K'\\
&\gamma_1 \frac{d^2\gamma_1}{dt^2} + \gamma_2 \frac{d^2\gamma_2}{dt^2} + \gamma_3 \frac{d^2\gamma_3}{dt^2} = -2M + \frac{2\sigma}{C^2}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad D = \quad 1\,.
\end{aligned}
\tag{37}
$$

7 Integrale dieser Gleichungen können wir nach allgemeinen Betrachtungen, die wir durchgeführt haben, angeben. Drei von diesen folgen aus den Gleichungen 14) der fünfzehnten Vorlesung, wenn man in diese die Werthe von x, y, z aus 34) einführt; sie sagen aus, dass die drei Ausdrücke

$$
\begin{aligned}
&\beta_1 \frac{d\gamma_1}{dt} - \gamma_1 \frac{d\beta_1}{dt} + \beta_2 \frac{d\gamma_2}{dt} - \gamma_2 \frac{d\beta_2}{dt} + \beta_3 \frac{d\gamma_3}{dt} - \gamma_3 \frac{d\beta_3}{dt}\\
&\gamma_1 \frac{d\alpha_1}{dt} - \alpha_1 \frac{d\gamma_1}{dt} + \gamma_2 \frac{d\alpha_2}{dt} - \alpha_2 \frac{d\gamma_2}{dt} + \gamma_3 \frac{d\alpha_3}{dt} - \alpha_3 \frac{d\gamma_3}{dt}\\
&\alpha_1 \frac{d\beta_1}{dt} - \beta_1 \frac{d\alpha_1}{dt} + \alpha_2 \frac{d\beta_2}{pt} - \beta_2 \frac{d\alpha_2}{dt} + \alpha_3 \frac{d\beta_3}{dt} - \beta_3 \frac{d\alpha_3}{dt}
\end{aligned}
\tag{38}
$$

Constanten gleich sind. Die vier andern findet man durch die folgende Ueberlegung. Wir haben im § 6. der eilften Vorlesung nachgewiesen, dass für eine Flüssigkeit, wie wir sie hier betrachten, das d'Alembert'sche Princip in derselben Form gilt, wie für ein System discreter Punkte. Aus den in der vierten Vorlesung gemachten Auseinandersetzungen folgt daher, dass für die Bewegung, die wir hier betrachten, der Satz von der lebendigen Kraft, der Satz von der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunkts und die Sätze von der Erhaltung der Flächen gelten. Bilden wir zuerst die Gleichung, welche den Satz von der lebendigen Kraft ausspricht.

Wir bezeichnen durch $d\tau$ ein Element der Masse der Flüssigkeit welches zur Zeit $t = 0$ die Coordinaten a, b, c hat; die lebendige Kraft T zur Zeit t ist dann bestimmt durch

$$T = \frac{1}{2}\int\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right)d\tau .$$

Hier setze man für $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ die aus 34) sich ergebenden Werthe ein und benutze, dass

$$\begin{aligned}
&\int a^2 d\tau = \frac{4\pi}{3} ABC\frac{A^2}{5} \qquad && \int bc\,d\tau = 0 \\
&\int b^2 d\tau = \frac{4\pi}{3} ABC\frac{B^2}{5} && \int ca\,d\tau = 0 \\
&\int c^2 d\tau = \frac{4\pi}{3} ABC\frac{C^2}{5} && \int ab\,d\tau = 0
\end{aligned} \tag{39}$$

ist, welche Gleichungen mit Leichtigkeit sich ergeben, wenn man $d\tau = da\,db\,dc$ setzt und an Stelle von a, b, c als Integrationsvariable $\frac{a}{A}$, $\frac{b}{B}$, $\frac{c}{C}$ einführt; man erhält dann

$$T = \frac{2\pi}{15} ABC \left\{\begin{aligned} & A^2\left(\left(\frac{d\alpha_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha_3}{dt}\right)^2\right) \\ + & B^2\left(\left(\frac{d\beta_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\beta_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\beta_3}{dt}\right)^2\right) \\ + & C^2\left(\left(\frac{d\gamma_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma_3}{dt}\right)^2\right)\end{aligned}\right\} .$$

Ferner sei U das Potential aller wirkenden Kräfte; es ist dann

$$U = \int V d\tau$$

oder, wie wir sagen wollen, = dem Potential des flüssigen Ellipsoids in Bezug auf sich selbst. Nach einem Satze, der in der unten stehenden Anmerkung*) bewiesen ist, ist dieses $= \frac{4}{5}$ mal dem

*) Das Potential einer Masse, die mit der Dichtigkeit 1 das Ellipsoid erfüllt, dessen Oberfläche die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

hat, in Bezug auf den innern Punkt (x, y, z) ist nach der Gleichung 4) der achtzehnten Vorlesung

$$= \pi abc \int_0^\infty d\lambda \frac{1 - \frac{x^2}{a^2+\lambda} - \frac{y^2}{b^2+\lambda} - \frac{z^2}{c^2+\lambda}}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}} ;$$

die Coefficienten von x^2, y^2, z^2 in diesem Ausdrucke sind, wie schon auf Seite 129 bemerkt ist, nur von den Verhältnissen von a, b, c, nicht aber von den absoluten Werthen dieser Grössen abhängig; daraus folgt, dass das Potential einer Masse, die mit der Dichtigkeit 1 den Raum erfüllt, der durch die beiden Flächen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = n^2$$

und $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = n'^2$$

Volumen, mal dem Potential desselben in Bezug auf seinen Mittelpunkt, d. h. es ist

$$U = \frac{16\pi}{15} ABC \,.\, H.$$

wo H die in 36) definirte Bedeutung hat. Der Satz von der lebendigen Kraft sagt aus, dass zwischen diesen Grössen T und U die Gleichung besteht

$$T = U + \text{const.}$$

Der Satz von der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes giebt, auf unser Problem angewendet, nur identische Gleichungen; auf ihm beruht die Zulässigkeit der Annahme, die wir gemacht haben, dass der Mittelpunkt des flüssigen Ellipsoids an demselben Orte bleibt.

Die Sätze von der Erhaltung der Flächen geben 3 Integrale; sie sagen aus, dass die Ausdrücke

---

begrenzt ist, in Bezug auf einen Punkt in der Höhlung derselben constant und so gross ist, wie in Bezug auf den Mittelpunkt, also

$$= \pi abc\,(n'^2 - n^2)\int_0^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}},$$

wenn $n' > n$.

Um nun das Potential des Ellipsoids, dessen Halbachsen a, b, c sind, in Bezug auf sich selbst zu finden, suche man zunächst das Potential desselben in Bezug auf die Schicht, die durch die beiden Flächen begrenzt ist, welche mit seiner Oberfläche ähnlich sind, ähnlich liegen und die Halbachsen an, bn, cn und $a(n+dn)$, $b(n+dn)$, $c(n+dn)$ haben. Dieses Potential setzt sich aus zwei Theilen zusammen, von denen der erste herrührt von der Masse ausserhalb der Schicht, der zweite von der Masse, die von der Schicht umschlossen wird. Der erste Theil ist

$$\frac{4\pi}{3} abc\, 3n^2 dn \,.\, \pi abc\,(1 - n^2)\int_0^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}},$$

den zweiten findet man, wenn man erwägt, dass das Potential einer Masse M in Bezug auf eine Masse M' gleich dem Potential der Masse M' in Bezug auf die Masse M ist,

$$= \frac{4\pi}{3} abcn^3 \,.\, \pi abc\, 2n\,dn \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}.$$

Addirt man diese beiden Ausdrücke und integrirt ihre Summe nach n von $n = 0$ bis $n = 1$, so ergiebt sich das gesuchte Potential des Ellipsoids (a, b, c) in Bezug auf sich selbst

$$= \frac{4}{5} \cdot \frac{4\pi}{3} abc \,.\, \pi abc \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}},$$

wodurch der im Texte ausgesprochene Satz bewiesen ist.

$$\int\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)d\tau\,,\quad \int\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)d\tau\,,\quad \int\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)d\tau\,,$$

d. h. nach 34) und 39) die Ausdrücke

$$\begin{aligned}
&A^2\left(\alpha_2\frac{d\alpha_3}{dt}-\alpha_3\frac{d\alpha_2}{dt}\right)+B^2\left(\beta_2\frac{d\beta_3}{dt}-\beta_3\frac{d\beta_2}{dt}\right)+C^2\left(\gamma_2\frac{d\gamma_3}{dt}-\gamma_3\frac{d\gamma_2}{dt}\right)\\
&A^2\left(\alpha_3\frac{d\alpha_1}{dt}-\alpha_1\frac{d\alpha_3}{dt}\right)+B^2\left(\beta_3\frac{d\beta_1}{dt}-\beta_1\frac{d\beta_3}{dt}\right)+C^2\left(\gamma_3\frac{d\gamma_1}{dt}-\gamma_1\frac{d\gamma_3}{dt}\right)\\
&A^2\left(\alpha_1\frac{d\alpha_2}{dt}-\alpha_2\frac{d\alpha_1}{dt}\right)+B^2\left(\beta_1\frac{d\beta_2}{dt}-\beta_2\frac{d\beta_1}{dt}\right)+C^2\left(\gamma_1\frac{d\gamma_2}{dt}-\gamma_2\frac{d\gamma_1}{dt}\right)
\end{aligned} \tag{40}$$

Constanten gleich sind.

§ 6.

Wir wollen nun die vereinfachende Annahme machen, dass die Hauptachsen des flüssigen Ellipsoids immer dieselben Richtungen behalten. Das ist der Fall, wenn wir

$$x=\alpha_1 a\,,\quad y=\beta_2 b\,,\quad z=\gamma_3 c$$

an Stelle der Gleichungen 34), also

$$\alpha_2=\alpha_3=\beta_1=\beta_3=\gamma_1=\gamma_2=0$$

setzen. Die Werthe der Grössen H, K, L, ... sind dann aus der Vergleichung der Gleichung 36) mit der Gleichung

$$V=\pi ABC\int_0^\infty d\lambda\,\frac{1-\dfrac{\alpha_1^2a^2}{\alpha_1^2A^2+\lambda}-\dfrac{\beta_2^2b^2}{\beta_2^2B^2+\lambda}-\dfrac{\gamma_3^2c^2}{\gamma_3^2C^2+\lambda}}{\sqrt{(\alpha_1^2A^2+\lambda)(\beta_2^2B^2+\lambda)(\gamma_3^2C^2+\lambda)}}$$

zu entnehmen, und die Gleichungen 37) geben zur Bestimmung der vier unbekannten Functionen α_1, β_2, γ_3, σ, wenn man

$$\sqrt{(\alpha_1^2A^2+\lambda)(\beta_2^2B^2+\lambda)(\gamma_3^2C^2+\lambda)}=N$$

setzt,

$$\alpha_1\frac{d^2\alpha_1}{dt^2}=\frac{2\sigma}{A^2}-2\pi ABC\int_0^\infty\frac{d\lambda}{N}\,\frac{\alpha_1^2}{\alpha_1^2A^2+\lambda}$$

$$\beta_2\frac{d^2\beta_2}{dt^2}=\frac{2\sigma}{B^2}-2\pi ABC\int_0^\infty\frac{d\lambda}{N}\,\frac{\beta_2^2}{\beta_2^2B^2+\lambda}$$

$$\gamma_3\frac{d^2\gamma_3}{dt^2}=\frac{2\sigma}{C^2}-2\pi ABC\int_0^\infty\frac{d\lambda}{N}\,\frac{\gamma_3^2}{\gamma_3^2C^2+\lambda}$$

$$\alpha_1\beta_2\gamma_3=1\,.$$

Die Ausdrücke 38) werden $=0$; es findet keine Rotation der

Flüssigkeitstheilchen statt, für die Bewegung existirt ein Geschwindigkeitspotential. Auch die Ausdrücke 40) sind $= 0$. Ein erstes Integral hat man in dem Satze von der lebendigen Kraft. Auf Quadraturen ist das Problem nicht zurückgeführt.

Die Richtungen der Achsen des flüssigen Ellipsoids kann man als gleichbleibend auch dann betrachten, wenn dasselbe immer ein Rotationsellipsoid ist, dessen Rotationsachse mit der z-Achse zusammenfällt. Auch bei dieser Annahme kann den Gleichungen 37) genügt werden. Bei derselben ist die Gleichung der Oberfläche, in a, b, c ausgedrückt,

$$\frac{a^2+b^2}{A^2}+\frac{c^2}{C^2}=1;$$

in x, y, z ausgedrückt, kann sie geschrieben werden

$$\frac{x^2+y^2}{X^2}+\frac{z^2}{Z^2}=1,$$

wobei dann X und Z die Halbachsen bedeuten; stellt man die Bedingungen dafür auf, dass diese beiden Gleichungen bei Rücksicht auf 34) identische werden, so findet man

$$\gamma_1=0, \quad \gamma_2=0, \quad \alpha_3=0, \quad \beta_3=0$$
$$\alpha_1=\pm\beta_2, \quad \alpha_2=\mp\beta_1,$$

wo die beiden oberen oder die beiden unteren Vorzeichen zu wählen sind. Diese Zweideutigkeit hebt sich, wenn man γ_3 als positiv annimmt und die Gleichung $D=1$ berücksichtigt; es ergiebt sich dann

$$\alpha_1=\beta_2, \quad \alpha_2=-\beta_1.$$

Dabei wird die Gleichung $D=1$

$$(\alpha_1^2+\beta_1^2)\gamma_3=1$$

und man findet

$$X^2=\frac{A^2}{\gamma_3}, \quad Z^2=C^2\gamma_3^2$$

$$x=\alpha_1 a+\beta_1 b, \quad y=-\beta_1 a+\alpha_1 b, \quad z=\gamma_3 c.$$

Man erhält hieraus

$$V=\pi A^2 C\int_0^\infty d\lambda\,\gamma_3\frac{1-\frac{a^2+b^2}{A^2+\gamma_3\lambda}-\frac{\gamma_3^2c^2}{\gamma_3^2C^2+\lambda}}{(A^2+\gamma_3\lambda)\sqrt{\gamma_3^2C^2+\lambda}};$$

indem man diese Gleichung mit 36) vergleicht, bekommt man die Werthe von H, K, L . . Benutzt man dieselben, so reduciren sich die Gleichungen 37) auf die folgenden:

$$\alpha_1 \frac{d^2 \alpha_1}{dt^2} + \beta_1 \frac{d^2 \beta_1}{dt^2} = \frac{2\sigma}{A^2} - 2\pi A^2 C \int_0^\infty \frac{\gamma_3 d\lambda}{(A^2 + \gamma_3 \lambda)^2 \sqrt{\gamma_3^2 C^2 + \lambda}}$$

$$\gamma_3 \frac{d^2 \gamma_3}{dt^2} = \frac{2\sigma}{C^2} - 2\pi A^2 C \int_0^\infty \frac{\gamma_3^3 d\lambda}{(A^2 + \gamma_3 \lambda)(\gamma_3^2 C^2 + \lambda)^{3/2}}$$

$$\alpha_1 \frac{d^2 \beta_1}{dt^2} - \beta_1 \frac{d^2 \alpha_1}{dt^2} = 0$$

$$(\alpha_1^2 + \beta_1^2)\gamma_3 = 1 .$$

Die bei 38) und 40) angegebenen Integrale des allgemeineren Problems liefern *ein* Integral dieser Gleichungen, der Satz von der lebendigen Kraft liefert ein zweites. Diese beiden reichen aus, um das jetzt betrachtete Problem auf Quadraturen zurückzuführen Die Discussion derselben lehrt die Schwingungen kennen, die die Oberfläche des Rotationsellipsoids im Allgemeinen ausführt In Bezug auf diese Discussion verweisen wir auf die bereits im § 2. genannte Abhandlung von Dirichlet; in Bezug auf allgemeinere Untersuchungen, die die Bewegung eines flüssigen Ellipsoids betreffen, dessen Theile nach dem Newton'schen Gesetze sich anziehn, auf eine Abhandlung von Riemann, die sich im neunten Bande der Abhandlungen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen befindet.

Sechsundzwanzigste Vorlesung.

(Reibung einer incompressibeln Flüssigkeit. Aufstellung der Differentialgleichungen und der Grenzbedingungen. Strömung der Flüssigkeit durch eine lange, cylindrische Röhre. Einführung der Annahme, dass die Flüssigkeit an festen Körpern, mit denen sie in Berührung ist, haftet, und dass die Geschwindigkeiten unendlich klein sind. Gleichmässige Drehung einer Kugel in der Flüssigkeit um einen Durchmesser oder eines Rotationsellipsoids um seine Symmetrieachse in dem Falle, dass die Flüssigkeit äusserlich unbegrenzt oder durch eine concentrische Kugelfläche, resp. durch ein confocales Ellipsoid begrenzt ist. Berechnung des Drehungsmomentes der Kräfte, welche auf die Kugel oder das Ellipsoid wirken müssen. Widerstand einer Kugel, die gleichmässig in der Flüssigkeit fortschreitet. Drehende Schwingungen einer Kugel. Schwingungen einer Kugel, bei denen der Mittelpunkt auf einer Geraden hin- und hergeht.)

§ 1.

Wir wollen unsere hydrodynamischen Untersuchungen beschliessen mit der Betrachtung gewisser Bewegungen einer incompressibeln Flüssigkeit, bei denen die *Reibung* von Einfluss ist. Die Differentialgleichungen für solche Bewegungen haben wir bereits in der eilften Vorlesung aufgestellt. Wir bezeichnen wieder durch u, v, w die Componenten der Geschwindigkeit im Punkte (x, y, z) zur Zeit t, setzen

$$\begin{aligned}
X_x &= p - 2k\frac{\partial u}{\partial x} \qquad & Y_z &= Z_y = -k\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\
Y_y &= p - 2k\frac{\partial v}{\partial y} \qquad & Z_x &= X_z = -k\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) \\
Z_z &= p - 2k\frac{\partial w}{\partial z} \qquad & X_y &= Y_x = -k\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right),
\end{aligned} \tag{1}$$

wo k eine, die Reibung bedingende Constante der Flüssigkeit, p eine unbekannte Function von x, y, z, t bedeutet, und drücken die Componenten der Beschleunigung so aus, wie es im § 2. der fünfzehnten Vorlesung geschehen ist; die Differentialgleichungen, um die es sich handelt, sind dann, wenn man annimmt, dass auf die Theile der Flüssigkeit keine Kräfte wirken, und die Dichtigkeit derselben durch μ bezeichnet,

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}\right) = 0\\
&\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z}\right) = 0\\
&\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z}\right) = 0\\
&\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0\,.
\end{aligned} \tag{2}$$

Substituirt man hier für X_x, Y_y .. ihre Werthe aus 1) und benutzt die vierte der Gleichungen 2) zur Vereinfachung der übrigen, so erhält man

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{k}{\mu}\Delta u = 0\\
&\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{k}{\mu}\Delta v = 0\\
&\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{k}{\mu}\Delta w = 0\\
&\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0\,.
\end{aligned} \tag{3}$$

An der Oberfläche der Flüssigkeit, also an den Flächen, in denen dieselbe einen andern Körper, der fest oder flüssig sein kann, berührt, sind gewisse Bedingungen zu erfüllen. Einige von diesen sind aus dem § 6. der zehnten Vorlesung und dem § 4. der eilften zu entnehmen. Nennen wir ds ein Element der Berührungsfläche und n die nach dem Innern der betrachteten Flüssigkeit gerichtete Normale von ds, so muss die Componente der Geschwindigkeit nach der Richtung von n für die Theilchen auf den beiden Seiten von ds gleichen Werth haben und es müssen X_n, Y_n, Z_n für diese Theilchen gleiche Werthe haben. Diese Bedingungen sind aber nicht ausreichend, um die Lösungen der Differentialgleichungen 2) oder 3) zu bestimmen; es ist eine Hypothese nöthig, um dieselben zu ergänzen. Eine geeignete Hypothese, die in gewissen Fällen sich bewährt hat, ist die, dass u, v, w selbst für die Theilchen auf beiden Seiten von ds dieselben Werthe besitzen, dass also die Theilchen der beiden Körper, die einmal mit einander in Berührung sind, immer mit einander in Berührung bleiben. Wir führen noch eine allgemeinere Hypothese, die aufgestellt ist, an. Wir beziehen u, v, w auf die Theilchen der betrachteten Flüssigkeit, die an ds liegen, u_1, v_1, w_1 auf die Theilchen auf der andern Seite von ds; es ist dann, wie erwähnt,

$$(u - u_1)\cos(nx) + (v - v_1)\cos(ny) + (w - w_1)\cos(nz) = 0\,.$$

$u - u_1$, $v - v_1$, $w - w_1$ können wir als die Componenten der *relativen Geschwindigkeit* der betreffenden Theilchen bezeichnen und diese Gleichung dahin aussprechen, dass diese relative Geschwindigkeit senkrecht auf n, also parallel mit ds ist. Den Druck, der auf

ds ausgeübt wird, den Druck nämlich, dessen Componenten nach den Coordinatenachsen X_n, Y_n, Z_n sind, denken wir uns in zwei Componenten zerlegt, von denen die eine parallel mit n, die andere parallel mit ds ist; die letztere hat nach der in Rede stehenden Hypothese die entgegengesetzte Richtung, als jene relative Geschwindigkeit und ist dieser proportional. Den analytischen Ausdruck dieser Hypothese findet man durch die folgende Ueberlegung. Es ist

$$X_n \cos(nx) + Y_n \cos(ny) + Z_n \cos(nz)$$

die Componente des auf ds ausgeübten Druckes nach der Richtung von n; multiplicirt man diesen Ausdruck mit $\cos(nx)$, $\cos(ny)$, $\cos(nz)$, so erhält man die Componenten nach den Coordinatenachsen dieser Componente; zieht man diese Producte von X_n, Y_n, Z_n ab, so hat man in den Differenzen die Componenten nach den Coordinatenachsen der mit ds parallelen Componente des auf ds wirkenden Druckes. Nach der ausgesprochenen Hypothese ist daher

$$\begin{aligned} X_n - \big(X_n \cos(nx) + Y_n \cos(ny) + Z_n \cos(nz)\big)\cos(nx) &= \lambda(u_1 - u) \\ Y_n - \big(X_n \cos(nx) + Y_n \cos(ny) + Z_n \cos(nz)\big)\cos(ny) &= \lambda(v_1 - v) \qquad 4) \\ Z_n - \big(X_n \cos(nx) + Y_n \cos(ny) + Z_n \cos(nz)\big)\cos(nz) &= \lambda(w_1 - w), \end{aligned}$$

wo λ eine von der Natur der Flüssigkeit und des berührenden Körpers abhängige Constante bedeutet.

Nimmt man λ unendlich gross an, so führen die Gleichungen 4) zu der specielleren, vorher erwähnten Hypothese, nach der $u = u_1$, $v = v_1$, $w = w_1$ ist. Der andere Grenzfall ist der, dass $\lambda = 0$. Für ihn geben die Gleichungen 4)

$$X_n : Y_n : Z_n = \cos(nx) : \cos(ny) : \cos(nz),$$

wie man sieht, wenn man sie durch $\cos(nx)$, $\cos(ny)$, $\cos(nz)$ dividirt, und je zwei von einander abzieht; der Druck, dessen Componenten X_n, Y_n, Z_n sind, ist hiernach ein senkrechter; dieses muss stattfinden, wenn der berührende Körper eine Flüssigkeit ist, in der man die Reibung vernachlässigen darf.

§ 2.

Wir wollen jetzt particuläre Lösungen der im vorigen § aufgestellten Gleichungen suchen. Wir nehmen zuerst an, dass

$$u = 0 \quad \text{und} \quad v = 0,$$

d. h., dass die Bewegung überall parallel der z-Achse ist. Die erste, zweite und vierte der Gleichungen 3) werden dann

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

d. h. es ist p von x und y, w von z unabhängig. Die dritte der Gleichungen 3) wird

$$\mu\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial p}{\partial z}-k\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)=0,$$

woraus der eben gemachten Bemerkung wegen folgt

$$\frac{\partial p}{\partial z}=c,\quad k\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)-\mu\frac{\partial w}{\partial t}=c,$$

wo c von x, y, z unabhängig, also eine Function der einen Variabeln t ist. Wir specialisiren den betrachteten Fall noch weiter, indem wir annehmen, dass die Bewegung eine stationäre ist; es ist dann c eine Constante und

$$\frac{dp}{dz}=c,\quad k\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)=c. \tag{5}$$

Diesen Gleichungen gemäss kann eine Flüssigkeit sich bewegen in einer festen und unbewegten, der z-Achse parallelen, cylindrischen Röhre. Bilden wir die Grenzbedingungen, die an der inneren Oberfläche einer solchen Röhre zu erfüllen sind. Aus 1) ergiebt sich für unsern Fall

$$\begin{aligned}
X_x&=p & Y_z&=Z_y=-k\frac{\partial w}{\partial y}\\
Y_y&=p & Z_x&=X_z=-k\frac{\partial w}{\partial x}\\
Z_z&=p & X_y&=Y_x=\quad 0,
\end{aligned}$$

und, da

$$\cos(nz)=0$$

ist, so folgt daher aus den Gleichungen 7) der eilften Vorlesung

$$X_n=p\cos(nx),\quad Y_n=p\cos(ny),\quad Z_n=-k\left(\frac{\partial w}{\partial x}\cos(nx)+\frac{\partial w}{\partial y}\cos(ny)\right)$$

und

$$X_n\cos(nx)+Y_n\cos(ny)+Z_n\cos(nz)=p.$$

In den Gleichungen 4), die wir als Grenzbedingungen anwenden wollen, hat man $u_1=v_1=w_1=0$ zu setzen; die beiden ersten derselben werden daher identisch erfüllt und die dritte giebt

$$k\left(\frac{\partial w}{\partial x}\cos(nx)+\frac{\partial w}{\partial y}\cos(ny)\right)=\lambda w$$

oder, was dasselbe ist,

$$\frac{\partial w}{\partial n}=\frac{\lambda}{k}w. \tag{6}$$

Nun nehmen wir an, dass der Querschnitt der Röhre ein Kreis von dem Radius R ist, dessen Mittelpunkt in der z-Achse liegt, und dass die Bewegung in gleichem Abstand von dieser Achse die gleiche ist. Setzt man

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2},$$

so wird dann die zweite der Gleichungen 5)

$$\frac{d^2 w}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{dw}{d\varrho} = \frac{c}{k},$$

woraus

$$w = \frac{1}{4}\frac{c}{k}\varrho^2 + A \lg \varrho + B$$

folgt, wo A und B willkührliche Constanten bedeuten. Die erste von diesen muss verschwinden, da w für $\varrho = 0$ nicht unendlich werden darf; die zweite ergiebt sich aus 6), d. h. aus der Bedingung, dass für $\varrho = R$

$$\frac{dw}{d\varrho} = -\frac{\lambda}{k} w$$

ist; es folgt hieraus

$$B = -\frac{c}{2\lambda} R - \frac{c}{4k} R^2,$$

also

$$w = -\frac{c}{4k}\left(R^2 + \frac{2k}{\lambda} R - \varrho^2\right).$$

Die Constante c findet man aus der ersten der Gleichungen 5), wenn die Werthe von p für zwei Werthe von z bekannt sind; ist $p = p_0$ für $z = 0$ und $p = p_l$ für $z = l$, so ist

$$c = \frac{p_l - p_0}{l}.$$

Nennt man Q das Volumen der in der Richtung der z-Achse durch einen Querschnitt in der Zeiteinheit strömenden Flüssigkeit, so ist

$$Q = 2\pi \int_0^R w \varrho \, d\varrho,$$

also

$$Q = \pi \frac{p_0 - p_l}{8kl}\left(R^4 + 4\frac{k}{\lambda} R^3\right). \qquad 7)$$

Diese Resultate sind sehr nahe für den Fall gültig, dass eine schwere Flüssigkeit durch eine horizontale, sehr lange und dünne Röhre aus einem geräumigen Gefässe in die Atmosphäre ausströmt; die Querschnitte $z = 0$ und $z = l$ kann man dann in Entfernungen von den beiden Enden der Röhre wählen, die gross gegen den Durchmesser derselben, aber klein gegen l sind, und p_0 dem Drucke gleichsetzen, welcher in der Röhre stattfindet, wenn die Flüssigkeit ruht, p_l dem Drucke der Atmosphäre.

Messungen über die Ausflussmenge bei einer Anordnung der bezeichneten Art sind von Poiseuille ausgeführt; es fand dieser

$$Q = K \frac{p_0 - p_l}{l} R^4,$$

wo K eine Grösse bedeutet, die ungeändert blieb, wenn p_0, l oder R geändert wurde. Die Vergleichung dieser Gleichung mit 7) führt zunächst zu dem Schlusse, dass λ als unendlich gross anzusehn, also anzunehmen war, dass die Flüssigkeitstheilchen, die die Röhrenwand berührten, an dieser hafteten; die für K gefundenen Werthe erlauben dann weiter die Werthe von k für die den Versuchen unterworfenen Flüssigkeiten zu berechnen.

§ 3.

Die ferneren Betrachtungen, die wir über die Reibung einer Flüssigkeit anstellen wollen, wollen wir durch die Annahme vereinfachen, dass die Flüssigkeitstheile, die einen festen Körper berühren, an diesem haften, und durch die Annahme, dass die Geschwindigkeiten unendlich klein sind. Die letztere macht, dass die Gleichungen 3)

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} &= k \Delta u \\ \mu \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial y} &= k \Delta v \\ \mu \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial z} &= k \Delta w \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \tag{8}$$

werden: Ist die Bewegung eine stationäre, so gehen sie über in

$$\begin{gathered} \frac{\partial p}{\partial x} = k \Delta u, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = k \Delta v, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = k \Delta w \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \end{gathered} \tag{9}$$

Eine Lösung dieser Gleichungen ist

$$p = \text{const.}, \quad u = \frac{\partial W}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial W}{\partial x}, \quad w = 0, \tag{10}$$

wenn W der Gleichung

$$\Delta W = \text{const.}$$

genügt.

Wir können hiernach in 10)

$$W = \frac{c}{r}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

setzen, wenn c eine Constante bedeutet, und haben in

$$p = \text{const.}, \quad u = -\frac{c}{r^3} y, \quad v = \frac{c}{r^3} x, \quad w = 0 \tag{11}$$

eine particuläre Lösung unserer Differentialgleichungen. Die durch dieselbe dargestellte Bewegung ist leicht zu übersehn. Betrachtungen, wie wir sie zuerst im § 5. der vierten Vorlesung durchgeführt haben, zeigen, dass Punkte, für welche

$$u = -\psi y, \quad v = \psi x, \quad w = 0 \tag{12}$$

ist, wo ψ eine Constante bedeutet, ihre relative Lage nicht ändern und so sich bewegen, als gehörten sie einem festen Körper an, der mit der Winkelgeschwindigkeit ψ um die z-Achse sich dreht. Den Gleichungen 11) zufolge werden die Bedingungen 12) erfüllt für die Punkte einer mit dem beliebigen Radius r um den Anfangspunkt der Coordinaten beschriebenen Kugelfläche, wenn man

$$\psi = \frac{c}{r^3}$$

macht.

Befindet sich in der Flüssigkeit eine feste Kugel, deren Oberfläche die Gleichung $r = r_1$ hat, und die mit der constanten Winkelgeschwindigkeit ψ_1 um die z-Achse sich dreht, so stellen die Gleichungen 11) eine mögliche Bewegung der Flüssigkeit dar, wenn man in ihnen

$$c = \psi_1 r_1^3$$

setzt.

Ist die Flüssigkeit durch zwei concentrische Kugelflächen begrenzt, deren Gleichungen $r = r_1$ und $r = r_2$ sind, von denen die erste, kleinere, mit der constanten Winkelgeschwindigkeit ψ_1 um die z-Achse sich dreht, die zweite, grössere, ruht, so geben die Gleichungen 10) eine mögliche Bewegung, wenn man in ihnen

$$W = \frac{c}{r} - \frac{b}{2}(x^2 + y^2)$$

setzt und die Constanten b und c passend bestimmt. Es wird bei dieser Annahme über W

$$u = -\left(\frac{c}{r^3} + b\right) y, \quad v = \left(\frac{c}{r^3} + b\right) x, \quad w = 0, \tag{13}$$

und die Grenzbedingungen werden erfüllt, wenn man

$$\psi_1 = \frac{c}{r_1^3} + b, \quad 0 = \frac{c}{r_2^3} + b$$

macht; woraus

$$c\left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3}\right) = \psi_1$$

folgt.

Soll die Kugel vom Radius r_1 mit gleichbleibender Geschwindigkeit sich drehen, so muss auf sie im Sinne der Bewegung ein Drehungsmoment M wirken, welches dem Drehungsmoment der

Drucke gleich ist, welche sie auf die Flüssigkeit ausübt. Ist ds ein Element der Oberfläche der Kugel und n die mit der Verlängerung des Radius zusammenfallende Normale von ds, so ist daher

$$M = \int ds\,(x\,Y_n - y\,X_n)\,. \qquad 14)$$

Man hat aber

$$Y_n = \frac{1}{r}(x\,Y_x + y\,Y_y + z\,Y_z)$$

$$X_n = \frac{1}{r}(x\,X_x + y\,X_y + z\,X_z)$$

und nach 1) und 13)

$$\begin{aligned} X_x &= p - 6\,k\,c\,\frac{x\,y}{r^5} & Y_z &= Z_y = 3\,k\,c\,\frac{x\,z}{r^5} \\ Y_y &= p + 6\,k\,c\,\frac{x\,y}{r^5} & Z_x &= X_z = -3\,k\,c\,\frac{y\,z}{r^5} \\ Z_z &= p & X_y &= Y_x = 3\,k\,c\,\frac{x^2 - y^2}{r^5}\,, \end{aligned} \qquad 15)$$

in welchen Gleichungen überall $r = r_1$ zu setzen ist. Hieraus ergiebt sich

$$Y_n = \frac{y}{r}\,p + \frac{3\,k\,c}{r^4}\,x\,, \quad X_n = \frac{x}{r}\,p - \frac{3\,k\,c}{r^4}\,y\,,$$

also

$$M = \frac{3\,k\,c}{r^4}\int ds\,(x^2 + y^2)$$

oder, da

$$\int x^2\,ds = \int y^2\,ds = \int z^2\,ds = \frac{4\,\pi}{3}\,r^4\,,$$

$$M = 8\,\pi\,k\,c\,.$$

Da r in diesem Ausdrucke nicht vorkommt, so erleidet derselbe dadurch keine Veränderung, dass $r = r_1$ gesetzt wird.

Die Gleichungen 10) lassen sich auch dem Falle anpassen, dass die Flüssigkeit durch zwei confocale Rotationsellipsoide begrenzt ist, deren Rotationsachse die z-Achse bildet, und von denen das äussere ruht, das innere mit der constanten Winkelgeschwindigkeit ψ_1 um die z-Achse sich dreht. Wir schreiben die Gleichung des inneren Ellipsoids

$$\frac{x^2 + y^2}{a_1^2} + \frac{z^2}{c_1^2} = 1 \qquad 16)$$

und bezeichnen durch Ω das Potential der Masse 1, die mit gleicher Dichtigkeit den durch dasselbe begrenzten Raum erfüllt, in Bezug auf den äusseren Punkt (x, y, z). In dem Falle, dass die Flüssigkeit äusserlich als unbegrenzt anzusehen ist, welchen Fall wir zuerst betrachten, lässt sich den Grenzbedingungen genügen, wenn man

$$W = c\,\Omega$$

setzt und die Constante c passend bestimmt. Der Gleichung 3) der achtzehnten Vorlesung zufolge ist nämlich

$$\Omega = \tfrac{3}{4} \int_\sigma^\infty d\lambda \frac{1 - \frac{x^2 + y^2}{a_1^2 + \lambda} - \frac{z^2}{c_1^2 + \lambda}}{(a_1^2 + \lambda)\sqrt{c_1^2 + \lambda}},$$

wo σ die positive Wurzel der Gleichung

$$\frac{x^2 + y^2}{a_1^2 + \sigma} + \frac{z^2}{c_1^2 + \sigma} = 1$$

bedeutet; die Gleichungen 10) geben daher

$$u = -\psi y, \quad v = \psi x, \quad w = 0,$$

wenn

$$\psi = \tfrac{3}{2} c \int_\sigma^\infty \frac{d\lambda}{(a_1^2 + \lambda)^2 \sqrt{c_1^2 + \lambda}}$$

gemacht wird. Hiernach bewegen sich die Punkte der Flüssigkeit, die auf dem durch einen Werth von σ bestimmten, mit dem Ellipsoide 16) confocalen Ellipsoide liegen, so als ob sie einem festen Körper angehörten, der mit der Winkelgeschwindigkeit ψ um die z-Achse sich dreht; der Werth von c ist daher aus der Gleichung

$$\psi_1 = \tfrac{3}{2} c \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a_1^2 + \lambda)^2 \sqrt{c_1^2 + \lambda}} \tag{17}$$

zu bestimmen.

Für das Drehungsmoment M, welches auf das Ellipsoid wirken muss, um dieses in gleichmässiger Drehung zu erhalten, gilt auch hier die Gleichung 14). Die Berechnung desselben wird durch die folgende Bemerkung erleichtert, die sich an die Definition anknüpft, die von den Druckkräften in den Gleichungen 1) und 2) der eilften Vorlesung gegeben worden ist. Wenden wir die letzte dieser Gleichungen auf einen beliebigen Theil der Flüssigkeit an, beachten, dass die Bewegung eine stationäre ist, die Geschwindigkeiten unendlich klein sind und Kräfte auf die Theile der Flüssigkeit nicht wirken, so erhalten wir

$$\int ds\,(x Y_n - y X_n) = 0,$$

wo ds ein Element der Oberfläche des gewählten Theiles, n die nach dem Innern dieses gerichtete Normale von ds bedeutet. Nun sei dieser Theil begrenzt durch das Ellipsoid und eine unendlich grosse, concentrische Kugelfläche; die eben gemachte Bemerkung lehrt dann, dass M gleich dem Integrale

$$\int ds\,(x Y_n - y X_n)$$

ist, wenn dieses über die unendliche Kugelfläche ausgedehnt und unter n die Normale verstanden wird, die mit der Verlängerung des Radius zusammenfällt. In der Unendlichkeit gelten aber auch hier die Gleichungen 15); auch hier ist also

$$M = 8\pi k c\,, \tag{18}$$

wo c aber durch 17) zu bestimmen ist.

Ist die Flüssigkeit äusserlich durch das ruhende Ellipsoid

$$\frac{x^2+y^2}{a_2^2} + \frac{z^2}{c_2^2} = 1$$

begrenzt, welches mit dem Ellipsoid 16) confocal ist, so dass

$$a_2^2 - a_1^2 = c_2^2 - c_1^2\,,$$

so hat man

$$W = c\,\Omega - \frac{b}{2}(x^2+y^2)$$

zu setzen und die Constanten b und c so zu bestimmen, dass

$$\psi_1 = \tfrac{3}{2}\,c\int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a_1^2+\lambda)^2\sqrt{c_1^2+\lambda}} + b$$

$$0 = \tfrac{3}{2}\,c\int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a_2^2+\lambda)^2\sqrt{c_2^2+\lambda}} + b$$

ist, woraus folgt

$$\psi_1 = \tfrac{3}{2}\,c\int_0^{a_2^2-a_1^2} \frac{d\lambda}{(a_1^2+\lambda)^2\sqrt{c_1^2+\lambda}}\,. \tag{19}$$

Berechnet man das Drehungsmoment M, welches auf das innere Ellipsoid wirken muss, um die Bewegung gleichmässig zu erhalten, mit Hülfe der Gleichung 14), so tritt die Constante b nicht auf und man findet dasselbe durch die Constante c gerade so ausgedrückt, wie wenn die Flüssigkeit äusserlich unbegrenzt ist; auch hier gilt also die Gleichung 18), wenn der Werth von c aus 19) genommen wird.

§ 4.

Aus den Gleichungen 9) folgt

$$\Delta p = 0\,;$$

hat man dieser Bedingung gemäss p angenommen und eine Function V bestimmt, die der Gleichung

$$\Delta V = \frac{1}{k}\,p$$

genügt, so erfüllt man die Gleichungen 9), wenn man

$$u = \frac{\partial V}{\partial x} + u', \quad v = \frac{\partial V}{\partial y} + v', \quad w = \frac{\partial V}{\partial z} + w'$$

setzt und u', v', w' so wählt, dass

$$\Delta u' = 0, \quad \Delta v' = 0, \quad \Delta w' = 0$$

und

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = -\frac{1}{k} p$$

ist.

Wir können hiernach

$$\frac{1}{k} p = 2c \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}, \quad u' = 0, \quad v' = 0, \quad w' = -\frac{2c}{r}$$

und, da

$$\Delta \frac{r}{2} = \frac{1}{r}$$

ist,

$$V = az + b \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} + c \frac{\partial r}{\partial z}$$

und

$$\begin{aligned} u &= \quad 3b\frac{xz}{r^5} - c\frac{xz}{r^3} \\ v &= \quad 3b\frac{yz}{r^5} - c\frac{yz}{r^3} \\ w &= a + b\left(\frac{3z^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}\right) - c\left(\frac{z^2}{r^3} + \frac{1}{r}\right) \end{aligned} \tag{20}$$

machen, wo a, b, c willkührliche Constanten bedeuten. Es lassen diese sich so bestimmen, dass für einen Werth von r, der R genannt werden möge,

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0$$

ist; hierzu dienen die Gleichungen

$$\frac{3b}{R^2} = c, \quad a = \frac{b}{R^3} + \frac{c}{R},$$

aus denen folgt

$$b = \frac{R^3 a}{4}, \quad c = \frac{3Ra}{4}.$$

Es stellen dann die Gleichungen 20) die Bewegung einer Flüssigkeit dar, die in der Unendlichkeit überall mit der Geschwindigkeit a in der Richtung der z-Achse strömt, und in der eine um den Anfangspunkt der Coordinaten mit dem Radius R beschriebene Kugel ruht.

Es sei Z die Kraft, die in der Richtung der z-Achse auf die Kugel ausgeübt werden muss, um sie an ihrer Stelle zu halten; es ist dann

$$Z = \int ds\, Z_n = \int \frac{ds}{r}\,(x Z_x + y Z_y + z Z_z)\,, \qquad 21)$$

wo ds ein Element der mit dem Radius r um den Anfangspunkt der Coordinaten beschriebenen Kugel bedeutet, und $r = R$ zu setzen ist. Statt dieses Werthes von r kann aber auch ein beliebiger grösserer gewählt werden; denn aus der dritten der Gleichungen 1) der eilften Vorlesung geht hervor, dass

$$\int ds\, Z_n = 0$$

ist, wenn ds ein Element der Oberfläche eines beliebigen Theiles der Flüssigkeit bedeutet. Es gewährt einen Vortheil in der Gleichung 21) r unendlich gross anzunehmen; man kann dann nämlich bei der Berechnung von Z_x, Z_y, Z_z aus den Gleichungen 1) mit Hülfe von 20) hier die mit dem Factor b behafteten Glieder vernachlässigen. Für ein unendlich grosses r findet man

$$Z_x = -\,6\,k c\,\frac{x z^2}{r^5}\,, \quad Z_y = -\,6\,k c\,\frac{y z^2}{r^5}\,, \quad Z_z = -\,6\,k c\,\frac{z^3}{r^5}\,,$$

und daher ist

$$\begin{aligned} Z &= -\,6\,k c\,\frac{1}{r^4}\int z^2 ds \\ &= -\,8\,\pi k c \quad \text{oder} \quad = -\,6\,\pi k R a\,. \end{aligned} \qquad 22)$$

Nach einer von uns schon mehrfach benutzten Bemerkung gelten die hier entwickelten Gleichungen auch in dem Falle, dass das Coordinatensystem, auf welches sie sich beziehn, statt zu ruhen, in irgend einer Richtung mit gleichbleibender Geschwindigkeit fortschreitet. Lassen wir dasselbe in der Richtung der z-Achse mit der Geschwindigkeit $-\,a$ fortschreiten, so ist die Flüssigkeit in der Unendlichkeit in Ruhe und in ihr bewegt sich die Kugel vom Radius R in der Richtung der z-Achse mit der Geschwindigkeit $-\,a$. Die Gleichung 22) lehrt den *Widerstand* kennen, den diese Kugel dabei erleidet.

§ 5.

Wir wollen nun noch von den Gleichungen 8), die für nicht stationäre Bewegungen gelten, zwei Anwendungen machen, die sich auf Schwingungen beziehn, die eine Kugel in einer äusserlich unbegrenzten Flüssigkeit unter dem Einfluss gewisser Kräfte ausführen kann.

Den genannten Gleichungen wird genügt, wenn man

$$p = \text{const.}$$

setzt und u, v, w so wählt, dass

$$\frac{\mu}{k}\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u\,, \quad \frac{\mu}{k}\frac{\partial v}{\partial t} = \Delta v\,, \quad \frac{\mu}{k}\frac{\partial w}{\partial t} = \Delta w$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

ist; diese Gleichungen erfüllt man, wenn man

$$u = \frac{\partial W}{\partial y}\,, \quad v = -\frac{\partial W}{\partial x}\,, \quad w = 0$$

macht und W der Gleichung

$$\frac{\mu}{k}\frac{\partial W}{\partial t} = \Delta W \tag{23}$$

gemäss bestimmt. Nun nehmen wir an, dass W eine Function der beiden Variabeln t und r ist, wo r wieder die Grösse $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ bedeutet; wir haben dann

$$u = \frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial r}\,y\,, \quad v = -\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial r}\,x\,, \quad w = 0\,.$$

Diese Gleichungen stellen eine Bewegung dar, bei der die Punkte, die in dem Abstande r vom Anfangspunkt der Coordinaten liegen, so sich bewegen, als gehörten sie einem festen Körper an, der um die z-Achse mit der Winkelgeschwindigkeit ψ sich dreht, wenn

$$\psi = -\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial r} \tag{24}$$

gesetzt wird. Wir dürfen daher annehmen, dass in der Flüssigkeit eine Kugel sich befindet, für deren Oberfläche $r = R$ ist, und die um die z-Achse mit einer Winkelgeschwindigkeit sich dreht, die dem Werthe gleich ist, den der für ψ gegebene Ausdruck für $r = R$ erhält.

Ist M das Drehungsmoment der Drucke, welche die gedachte Kugel auf die Flüssigkeit ausübt, so gilt auch hier die Gleichung 14) und eine Rechnung, die derjenigen ganz ähnlich ist, welche wir an diese Gleichung geknüpft haben, giebt

$$M = \frac{8\pi}{3}\,k r^4\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial r}\right) \quad \text{für} \quad r = R\,.$$

Nun sei ϑ der Winkel, um den die Kugel zur Zeit t aus einer gewissen Lage gedreht ist, so dass

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \psi \quad \text{für} \quad r = R\,; \tag{25}$$

ferner sei M' das Drehungsmoment der Kräfte, welche ausser den von der Flüssigkeit ausgeübten Drucken auf die Kugel wirken, und K das Trägheitsmoment dieser; dann ist

$$K\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = M' - M\,.$$

Diese Gleichungen bilden, wenn M' gegeben ist, eine Grenzbedingung für die, bis jetzt nur durch die partielle Differentialgleichung 23) definirte Function W. Gesetzt, es sei

$$M' = -\alpha^2 \vartheta,$$

wo α eine beliebig gegebene Constante sein soll; dann wird diese Bedingung, wenn man sie nach t differentiirt,

$$\frac{\alpha^2}{r}\frac{\partial W}{\partial r} - \frac{8\pi}{3} k r^4 \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 W}{\partial r \partial t}\right) + \frac{K}{r}\frac{\partial^3 W}{\partial r \partial t^2} = 0 \text{ für } r = R. \qquad 26)$$

Die Gleichung 23), die sich

$$\frac{\mu}{k}\frac{\partial (r W)}{\partial t} = \frac{\partial^2 (r W)}{\partial r^2}$$

schreiben lässt, hat die particuläre Lösung

$$W = C e^{\beta^2 t} \frac{1}{r} e^{\beta \sqrt{\frac{\mu}{k}}\, r} \qquad 27)$$

wo C und β willkührliche Constanten bedeuten; die zweite von diesen lässt sich so bestimmen, dass der Gleichung 26) genügt wird; es ist hierzu nöthig, dass β eine Wurzel der Gleichung

$$\left(\sqrt{\frac{k}{\mu}} - R\beta\right)\left(\alpha^2 + K\beta^4\right) + \frac{8\pi}{3} R^3 \mu \sqrt{\frac{k}{\mu}}\, \beta^2 \left(3\frac{k}{\mu} - 3\sqrt{\frac{k}{\mu}}\, R\beta + R^2\beta^2\right) = 0 \qquad 28)$$

ist. Wenn $k = 0$ ist, so sind die Wurzeln derselben

$$0, \qquad \pm \sqrt[4]{\frac{\alpha^2}{K}}\, \frac{1 \pm \sqrt{-1}}{\sqrt{2}};$$

wir nehmen an, dass k so klein ist, dass, wie in diesem Falle, von den fünf Wurzeln zwei complex mit negativem reellen Theile sind, und setzen in 27) für β eine von diesen beiden Wurzeln; dann wird die Geschwindigkeit in der Unendlichkeit Null. Es ist dabei W complex; aber auch der reelle Theil des in 27) für W aufgestellten Ausdrucks genügt, für W gesetzt, den Gleichungen 23) und 26). Diesen reellen Theil wählen wir für W. Setzen wir dann

$$\beta = -a + b\sqrt{-1},$$

berechnen ϑ mit Hülfe von 24) und 25) aus W, bezeichnen durch C eine neue, reelle willkührliche Constante und verlegen den Anfangspunkt der Zeit, so finden wir

$$\vartheta = C e^{(a^2 - b^2)t} \sin 2abt.$$

Diese Gleichung bestimmt die Schwingungen, die die Kugel ausführt. Nennt man T die Dauer einer einfachen Schwingung und δ das *logarithmische Decrement* der Schwingungen, d. h. den natürlichen Logarithmus des Verhältnisses zweier auf einander folgenden Schwingungsbögen, so ist hiernach

$$T = \frac{\pi}{2\,a\,b}$$

$$\delta = (b^2 - a^2)\,T = \frac{b^2 - a^2}{2\,a\,b}\,\pi\,.$$

Es ist leicht a und b zu finden, wenn man k als unendlich klein annimmt und von den Gliedern, auf die der Werth von k von Einfluss ist, nur diejenigen der niedrigsten Ordnung berücksichtigt. Man bezeichne zu diesem Zwecke den Werth, den β für $k = 0$ erhält, durch β_0, setze

$$\beta = \beta_0 + \varepsilon\,,$$

schreibe die Gleichung 28)

$$F(\beta) = 0$$

und mache

$$F'(\beta) = \frac{d\,F(\beta)}{d\beta}\,;$$

man hat dann ε aus der Gleichung

$$F(\beta_0) + \varepsilon\,F'(\beta_0) = 0$$

zu berechnen. So ergiebt sich

$$F(\beta_0) = \frac{8\,\pi}{3}\,R^5 \sqrt{k\,\mu}\;\beta_0{}^4\,, \quad F'(\beta_0) = -\,4\,R\,K\,\beta_0{}^1\,,$$

also

$$\varepsilon = \frac{2\,\pi}{3}\,R^4 \sqrt{k\,\mu}\;\frac{1}{K}\,.$$

Bezeichnet man noch die Schwingungsdauer der Kugel für den Fall, dass die Flüssigkeit keine Einwirkung auf sie ausübt, durch T_0, d. h. setzt man

$$T_0 = \frac{\pi}{\alpha}\sqrt{K}\,,$$

so hat man hiernach

$$a = \sqrt{\frac{\pi}{2\,T_0}} - \varepsilon\,, \quad b = \sqrt{\frac{\pi}{2\,T_0}}$$

und

$$T = T_0\left(1 + \varepsilon\sqrt{\frac{2\,T_0}{\pi}}\right), \quad \delta = \varepsilon\sqrt{2\,\pi\,T_0}\,.$$

Die particuläre Lösung der Gleichungen 23) und 26), die wir jetzt discutirt haben, setzt einen gewissen Anfangszustand der Flüssigkeit voraus; wir wollen noch andere particuläre Lösungen derselben Gleichungen, die sich auf andere Anfangszustände beziehn, aufsuchen. Eine Lösung der Gleichung 23) ist

$$W = e^{\beta^2 t}\,\frac{1}{r}\left(C e^{\beta\sqrt{\frac{\mu}{k}}\,r} + C' e^{-\beta\sqrt{\frac{\mu}{k}}\,r}\right),$$

wo C, C' und β willkührliche, complexe Constanten bedeuten. Es genügt dieselbe der Bedingung 26), wenn zwischen diesen Constanten die Gleichung

$$0 = C\left\{\left(\sqrt{\frac{k}{\mu}} - R\beta\right)\left(\alpha^2 + K\beta^1\right) + \frac{8\pi}{3}R^3\mu\sqrt{\frac{k}{\mu}}\,\beta^2\left(3\frac{k}{\pi} - 3\sqrt{\frac{k}{\mu}}\,R\beta + R^2\beta^2\right)\right\}e^{\beta\sqrt{\frac{\mu}{k}}R}$$
$$+ C'\left\{\left(\sqrt{\frac{k}{\mu}} + R\beta\right)\left(\alpha^2 + K\beta^4\right) + \frac{8\pi}{3}R^3\mu\sqrt{\frac{k}{\mu}}\,\beta^2\left(3\frac{k}{\mu} + 3\sqrt{\frac{k}{\mu}}\,R\beta + R^2\beta^2\right)\right\}e^{-\beta\sqrt{\frac{\mu}{k}}R}$$

besteht. Diese Gleichung bestimmt das Verhältniss $C : C'$, wenn β beliebig angenommen ist. Der Ausdruck, den man auf diese Weise für W erhält, ist complex; sein reeller Theil genügt auch den Gleichungen 23) und 26). Wählt man diesen reellen Theil für W, so wird im Allgemeinen die Geschwindigkeit in der Unendlichkeit unendlich; eine Ausnahme hiervon kann nur stattfinden und die Geschwindigkeit in der Unendlichkeit verschwinden, wenn entweder eine von den beiden Constanten C und C' gleich Null oder die Constante β rein imaginär ist. Der erste Fall ist derjenige, den wir vorher betrachtet haben, und auf den die Gleichung 27) sich bezieht; der zweite führt auf die neuen Lösungen, die wir bezeichnen wollten.

§ 6.

Die folgenden Betrachtungen werden uns auf die Schwingungen einer in einer reibenden Flüssigkeit befindlichen Kugel führen, deren Mittelpunkt in einer geraden Linie sich hin und her bewegt.

Eine particuläre Lösung der Gleichung 8) ist

$$u = \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial z}, \quad v = \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z}, \quad w = \frac{\partial^2 P}{\partial z^2}$$
$$p = -\mu\frac{\partial^2 P}{\partial z \partial t},$$

wenn

$$\Delta P = 0;$$

eine zweite ist

$$u = \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z}, \quad v = \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z}, \quad w = -\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}$$
$$p = 0,$$

wenn

$$k\Delta W = \mu\frac{\partial W}{\partial t};$$

die genannten Gleichungen werden daher auch erfüllt durch

$$u = \frac{\partial^2(P+W)}{\partial x \partial z}, \quad v = \frac{\partial^2(P+W)}{\partial y \partial z}, \quad w = -\frac{\partial^2(P+W)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2(P+W)}{\partial y^2}$$
$$p = -\mu\frac{\partial^2 P}{\partial z \partial t},$$

wenn

$$\Delta P = 0, \quad k\Delta W = \mu\frac{\partial W}{\partial t}. \tag{29}$$

Nun nehmen wir an, dass P und W nur Functionen der beiden Variabeln r und t sind; wir erhalten dann

$$\left.\begin{aligned}
u &= \frac{xz}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(P+W)}{\partial r}\right)\\
v &= \frac{yz}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(P+W)}{\partial r}\right)\\
w &= -\frac{x^2+y^2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(P+W)}{\partial r}\right)-\frac{2}{r}\frac{\partial(P+W)}{\partial r}\\
p &= -\mu\frac{z}{r}\frac{\partial^2 P}{\partial r\,\partial t};
\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

wir nehmen ferner an, dass für $r = R$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(P+W)}{\partial r}\right) = 0 \tag{31}$$

ist; dann ist für $r = R$

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = -\frac{2}{r}\frac{\partial(P+W)}{\partial r}, \tag{32}$$

und die entwickelten Gleichungen stellen eine mögliche Bewegung in dem Falle dar, dass in der Flüssigkeit eine Kugel sich befindet, für deren Oberfläche $r = R$ ist, und die in der Richtung der z-Achse mit einer Geschwindigkeit sich bewegt, die gleich dem Werthe von

$$-\frac{2}{r}\frac{\partial(P+W)}{\partial r} \quad \text{für} \quad r = R$$

ist.

Es sei Z die Summe der z-Componenten der Drucke, welche die Kugel auf die Flüssigkeit ausübt; es gilt dann die Gleichung 21), d. h.

$$Z = \int\frac{ds}{r}(xZ_x + yZ_y + zZ_z).$$

Erwägt man, dass nach 1)

$$\begin{aligned}
xZ_x + yZ_y + zZ_z = zp &- k\left(x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} + z\frac{\partial w}{\partial z}\right)\\
&- k\left(x\frac{\partial u}{\partial z} + y\frac{\partial v}{\partial z} + z\frac{\partial w}{\partial z}\right),
\end{aligned}$$

dass ferner

$$\int x^2 ds = \int y^2 ds = \int z^2 ds = \frac{4\pi}{3}r^4$$

ist und benutzt die Gleichung 31), so findet man aus 30)

$$Z = \frac{4\pi}{3}r^2\left\{2kr\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(P+W)}{\partial r}\right) - \mu\frac{\partial^2 P}{\partial r\,\partial t}\right\} \text{ für } r = R.$$

Nun sei ξ die Verrückung der Kugel zur Zeit t aus einer gewissen Lage, so dass

$$\frac{d\zeta}{dt} = w \quad \text{für} \quad r = R, \tag{33)}$$

m die Masse der Kugel und Z' die Kraft, die in der Richtung der z-Achse auf die Kugel wirkt, abgesehen von den Drucken, die die Flüssigkeit auf sie ausübt; es ist dann

$$m \frac{d^2\zeta}{dt^2} = Z' - Z.$$

Gesetzt, es sei

$$Z' = -\alpha^2 \zeta,$$

wo α eine beliebig gegebene Constante bedeutet; dann erhält man, der Gleichung 26) entsprechend,

$$\begin{gathered}\frac{2\alpha^2}{r}\frac{\partial(P+W)}{\partial r} - \frac{4\pi}{3} r^2 \frac{\partial}{\partial t}\left\{2kr \frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(P+W)}{\partial r}\right) - \mu \frac{\partial^2 P}{\partial r \partial t}\right\} \\ + \frac{2m}{r}\frac{\partial^3(P+W)}{\partial r \partial t^2} = 0 \text{ für } r = R.\end{gathered} \tag{34)}$$

Den beiden für P und W in 29) aufgestellten Gleichungen genügt man durch

$$P = Be^{\beta^2 t}\frac{1}{r}, \quad W = Ce^{\beta^2 t}\frac{1}{r} e^{\beta\sqrt{\frac{\mu}{k}}\, r}, \tag{35)}$$

wo B, C und β willkührliche Constanten sind. Die Bedingungen 31) und 34) geben für diese Constanten zwei Gleichungen, die in Bezug auf B und C linear und homogen sind, und aus denen das Verhältniss $B : C$ und β zu berechnen sind. Mit Hülfe der Differentialgleichungen 29) findet man leicht für $r = R$ aus 31)

$$\frac{\partial(P+W)}{\partial r} = \frac{1}{3}\frac{\mu}{k}\beta^2 r W$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(P+W)}{\partial r}\right) = \frac{\mu}{k}\beta^2 \frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial r}$$

und dann aus 34)

$$0 = (\alpha^2 + m\beta^4) W - \frac{2\pi}{3} r^2\beta^2 \left(9k\frac{\partial W}{\partial r} - \mu\beta^2 r W\right)$$

oder, da für jeden Werth von r

$$\frac{\partial W}{\partial r} = \left(-\frac{1}{r} + \beta\sqrt{\frac{\mu}{k}}\right) W$$

ist,

$$0 = \alpha^2 + m\beta^4 + \frac{2\pi}{3} R\beta^2 \left(\mu R^2\beta^2 - 9\sqrt{k\mu}\, R\beta + 9k\right). \tag{36)}$$

Setzt man

$$\frac{4\pi}{3} R^3\mu = m',$$

bezeichnet also durch m' die Masse der von der Kugel verdrängten Flüssigkeit, so geht diese Gleichung für $k = 0$ über in

$$0 = \alpha^2 + \left(m + \frac{m'}{2}\right)\beta^4 .$$

Daraus folgt, dass, wenn k klein genug ist (was wir annehmen), ihre 4 Wurzeln in der Nähe der Werthe

$$\pm \sqrt[4]{\frac{\alpha^2}{m + \frac{m'}{2}}} \; \frac{1 \pm \sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$$

liegen. Wir wählen für β eine der beiden Wurzeln, deren reeller Theil negativ ist; dann wird die Geschwindigkeit in der Unendlichkeit gleich Null. Dabei sind die in 35) für P und W aufgestellten Ausdrücke complex; aber auch die reellen Theile dieser Ausdrücke genügen den Gleichungen 29), 31) und 34), und diese reellen Theile denken wir uns nun für P und W gesetzt. Machen wir wieder

$$\beta = -a + b\sqrt{-1} ,$$

berechnen ζ mit Hülfe von 32) und 33) aus P und W, bezeichnen durch C eine neue, reelle, willkührliche Constante und verlegen den Anfangspunkt der Zeit, so ergiebt sich dann

$$\zeta = C e^{(a^2 - b^2)t} \sin 2abt ,$$

woraus für die Schwingungsdauer T und das logarithmische Decrement der Schwingungen δ wieder die Gleichungen

$$T = \frac{\pi}{2ab} , \qquad \delta = (b^2 - a^2)\, T$$

folgen. Nimmt man k als unendlich klein an, so findet man hieraus und aus der Gleichung 36) durch eine Rechnung, wie sie für einen ähnlichen Fall im vorigen § durchgeführt ist,

$$T = T_0\left(1 + \varepsilon\sqrt{\frac{2T_0}{\pi}}\right), \qquad \delta = \varepsilon\sqrt{2\pi T_0} ,$$

wo

$$T_0 = \frac{\pi}{\alpha}\sqrt{m + \frac{m'}{2}}$$

$$\varepsilon = \frac{9}{8}\,\frac{1}{R}\sqrt{\frac{k}{\mu}}\;\frac{m'}{m + \frac{m'}{2}} .$$

Es hat keine Schwierigkeit andere particuläre Lösungen der Gleichungen 29), 31) und 34), welche einem andern Anfangszustande der Flüssigkeit entsprechen, als die erörterte, anzugeben; es hat *diese* ein hervorragendes Interesse, weil sie sehr nahe den Einfluss zu beurtheilen erlaubt, den die Luft auf die Schwingungen eines Pendels ausübt, das aus einer Kugel und einem dünnen Faden besteht. Wir verweisen in Bezug hierauf auf eine Abhandlung von Stokes (Transactions of the Cambridge philosophical society, Vol. IX, part. 2, p. 8) und eine von Emil Meyer (Borchardt's Journal, Bd. 73).

Siebenundzwanzigste Vorlesung.

(Gleichgewicht und Bewegung elastischer fester Körper. Aufstellung der Differentialgleichungen für Körper, die in verschiedenen Richtungen verschiedene Elasticität besitzen. Die Zahl der Constanten der Elasticität ist im Allgemeinen 21, sie verringert sich, wenn Ebenen der Symmetrie vorhanden sind, und reducirt sich bei einem isotropen Körper auf 2. Das Gleichgewichtsproblem hat nur *eine* Lösung. Wenn keine Kräfte auf die Theile des Körpers wirken, so kann derselbe im Gleichgewicht sein, wenn die Druckcomponenten Constanten gleich sind. Zusammendrückbarkeit, Elasticitätscoefficient. Gleichgewicht eines isotropen, cylindrischen Körpers, auf dessen Grundflächen Drucke von gewisser Art wirken. Durchführung der Rechnung für den Fall, dass der Querschnitt ein Kreis ist. Gleichgewicht einer Hohlkugel, auf deren Oberflächen constante und senkrechte Drucke wirken.)

§ 1.

Wir wenden uns jetzt zur Betrachtung des Gleichgewichts und der Bewegung *elastischer fester* Körper. Die allgemeinen Differentialgleichungen hierfür haben wir bereits im § 7. der eilften Vorlesung unter gewissen Voraussetzungen aufgestellt; diese Voraussetzungen werden wir beibehalten und aus jenen Gleichungen Folgerungen ziehen; die dort gebrauchten Bezeichnungen werden wir auch hier anwenden, nur die Verrückungen, die dort ξ, η, ζ genannt sind, sollen hier u, v, w heissen. Wir denken uns also einen Körper, dessen Punkte in eine solche relative Lage gebracht werden können, dass die sämmtlichen Druckcomponenten in ihm gleich Null sind; den Zustand, in dem der Körper dann sich befindet, wollen wir seinen *natürlichen* nennen. x, y, z sind die Coordinaten eines Punktes des Körpers, wenn dieser in seinem natürlichen Zustande in irgend einer Lage ist, $x+u$, $y+v$, $z+w$ die Coordinaten desselben Punktes zur Zeit t; u, v, w sind unendlich klein. Wir setzen

$$\begin{aligned} x_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad y_z = z_y = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ y_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, \quad z_x = x_z = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \\ z_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, \quad x_y = y_x = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \qquad 1)$$

und bezeichnen durch f eine gewisse homogene Function zweiten Grades der 6 Argumente x_x, y_y, . . mit constanten Coefficienten; es ist dann

$$
\begin{aligned}
X_x &= \frac{\partial f}{\partial x_x}, & Y_z = Z_y &= \frac{\partial f}{\partial y_z} \\
Y_y &= \frac{\partial f}{\partial y_y}, & Z_x = X_z &= \frac{\partial f}{\partial z_x} \\
Z_z &= \frac{\partial f}{\partial z_z}, & X_y = Y_x &= \frac{\partial f}{\partial x_y}
\end{aligned} \tag{2}
$$

und

$$
\begin{aligned}
\mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \mu X - \frac{\partial X_x}{\partial x} - \frac{\partial X_y}{\partial y} - \frac{\partial X_z}{\partial z} \\
\mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \mu Y - \frac{\partial Y_x}{\partial x} - \frac{\partial Y_y}{\partial y} - \frac{\partial Y_z}{\partial z} \\
\mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \mu Z - \frac{\partial Z_x}{\partial x} - \frac{\partial Z_y}{\partial y} - \frac{\partial Z_z}{\partial z},
\end{aligned} \tag{3}
$$

wo μ die Dichtigkeit, X, Y, Z die Componenten der beschleunigenden Kraft, die im Punkte (x, y, z) wirkt, bedeuten. Die Function f hat dabei die Eigenschaft, dass $\int f d\tau$, wo $d\tau$ ein Element des Volumens des Körpers bedeutet, das Potential der Kräfte ist, die durch die relativen Verschiebungen der Theile des Körpers erzeugt sind, d. h. der Kräfte, welche wir an dem angeführten Orte *innere* genannt haben. Aus dieser Bemerkung folgt, dass der Werth von f für irgend einen Zustand eines unendlich kleinen, den Punkt (x, y, z) enthaltenden Theiles des Körpers unabhängig von dem Coordinatensysteme ist, das man benutzt; die in f vorkommenden Coefficienten, die die *Constanten der Elasticität* des Körpers heissen, sind aber durch die Richtungen der Coordinatenachsen bedingt. Die Zahl dieser Constanten ist im Allgemeinen 21; bietet die Substanz des Körpers aber Symmetrieen dar und wählt man die Richtungen der Coordinatenachsen passend, so wird sie erheblich verringert.

Wir setzen

$$
\begin{aligned}
f = a_{11} x_x^2 &+ 2 a_{12} x_x y_y + 2 a_{13} x_x z_z + 2 a_{14} x_x y_z + 2 a_{15} x_x z_x + 2 a_{16} x_x x_y \\
&+ a_{22} y_y^2 + 2 a_{23} y_y z_z + 2 a_{24} y_y y_z + 2 a_{25} y_y z_x + 2 a_{26} y_y x_y \\
&\qquad + a_{33} z_z^2 + \quad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \\
&\qquad\qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot
\end{aligned} \tag{4}
$$

und sagen: in Bezug auf die Elasticität des Körpers ist die xy-Ebene eine *Symmetrie-Ebene*, falls dieser Ausdruck für f gültig bleibt, wenn man die Richtung der z-Achse in die entgegengesetzte verkehrt. Wenn die Richtung der z-Achse in die entgegengesetzte verwandelt wird, während der Anfangspunkt der Coordinaten derselbe bleibt, so nehmen z und w die entgegengesetzten Werthe an und x, y, u, v werden nicht geändert; den Gleichungen 1) zufolge behalten daher dabei x_x, y_y, z_z, x_y ihre ursprünglichen Werthe, y_z und z_x aber bekommen die entgegengesetzten. Soll hierbei der in 4) für f angegebene Ausdruck ungeändert bleiben, welches auch die Werthe seiner Argumente sind, so müssen

$$a_{14},\quad a_{24},\quad a_{34},\quad a_{46}$$
$$a_{15},\quad a_{25},\quad a_{35},\quad a_{56}$$

verschwinden. Ist die xy-Ebene eine Symmetrie-Ebene, so ist daher

$$\begin{aligned} f = a_{11} x_x^2 &+ 2\,a_{12} x_x y_y + 2\,a_{13} x_x z_z + 2\,a_{16} x_x y_y \\ &+ 2\,a_{22} y_y^2 \;\; + 2\,a_{23} y_y z_z + 2\,a_{26} y_y x_y \\ &\qquad + 2\,a_{33} z_z^2 \;\; + 2\,a_{36} z_z x_y \\ &\qquad\qquad + 2\,a_{66} x_y^2 \\ &\qquad + \;\; a_{44} y_z^2 \;\; + 2\,a_{45} y_z z_x + a_{55} z_x^2\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Sind die xy-Ebene und die yz-Ebene Symmetrie-Ebenen, so ist hiernach

$$\begin{aligned} f = a_{11} x_x^2 + a_{22} y_y^2 + a_{33} z_z^2 + a_{44} y_z^2 + a_{55} z_x^2 + a_{66} x_y^2 \\ + 2\,a_{23} y_y z_z + 2\,a_{13} z_z x_x + 2\,a_{12} x_x y_y\,, \end{aligned} \tag{6}$$

woraus hervorgeht, dass dann auch die zx-Ebene eine Symmetrie-Ebene ist.

Sind die 3 Coordinatenebenen Symmetrie-Ebenen, gilt also die Gleichung 6), und behält diese Gleichung Gültigkeit, wenn man die x-Achse und die y-Achse mit einander vertauscht, so sollen die yz-Ebene und die xz-Ebene *gleichwerthige* Symmetrie-Ebenen heissen. Bei der Vertauschung der x-Achse und y-Achse gehen x_x und y_y, sowie z_x und y_z in einander über, während z_z und x_y ungeändert bleiben; soll sich dabei der in 6) für f gegebene Ausdruck nicht ändern, so muss

$$a_{11} = a_{22}\,,\quad a_{44} = a_{55}\,,\quad a_{13} = a_{23}$$

sein.

Es folgt hieraus, dass, wenn die 3 Coordinatenebenen gleichwerthige Symmetrie-Ebenen sind,

$$\begin{aligned} f = a_{11}\,(x_x^2 + y_y^2 + z_z^2) + 2\,a_{23}\,(y_y z_z + z_z x_x + x_x y_y) \\ + a_{44}\,(y_z^2 + z_x^2 + x^2) \end{aligned} \tag{7}$$

ist. Ein Beispiel für diesen Fall bietet das Steinsalz dar.*)

Man nennt den Körper isotrop, wenn derselbe Ausdruck von f für jedes Coordinatensystem gilt. Um diesen Ausdruck für einen solchen Körper zu finden, können wir von dem in 7) angegebenen ausgehn, der den gesuchten als speciellen Fall in sich enthalten muss. Wir schreiben die Gleichung 7), indem wir an Stelle der Constanten a_{11}, a_{23}, a_{44} andere, K, θ, L einführen,

*) Untersuchung der Elasticitätsverhältnisse des Steinsalzes, Inauguraldissertation von Woldemar Voigt (1874).

$$f = -K\left(x_x^2 + y_y^2 + z_z^2 + \tfrac{1}{2} y_z^2 + \tfrac{1}{2} z_x^2 + \tfrac{1}{2} x_y^2 + \vartheta (x_x + y_y + z_z)^2\right) \\ + L\,(x_x^2 + y_y^2 + z_z^2)\,, \tag{8}$$

und bemerken, dass

$$x_x + y_y + z_z$$

und

$$x_x^2 + y_y^2 + z_z^2 + \tfrac{1}{2} y_z^2 + \tfrac{1}{2} z_x^2 + \tfrac{1}{2} x_y^2$$

ungeändert bleiben, wenn das Coordinatensystem geändert wird. Um diese Behauptung zu beweisen, führen wir die Hauptdilationen ein, und nennen

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \lambda_3$$

die Grössen dieser,

$$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \qquad \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \qquad \alpha_3, \beta_3, \gamma_3$$

die Cosinus der Winkel, welche ihre Richtungen mit den Coordinatenachsen bilden; nach den Gleichungen 21) der zehnten Vorlesung und den 9 letzten Gleichungen der Seite 121 ist dann

$$\begin{aligned}
x_x &= \alpha_1^2 \lambda_1 + \alpha_2^2 \lambda_2 + \alpha_3^2 \lambda_3 \\
y_y &= \beta_1^2 \lambda_1 + \beta_2^2 \lambda_2 + \beta_3^2 \lambda_3 \\
z_z &= \gamma_1^2 \lambda_1 + \gamma_2^2 \lambda_2 + \gamma_3^2 \lambda_3 \\
\tfrac{1}{2} y_z &= \beta_1 \gamma_1 \lambda_1 + \beta_2 \gamma_2 \lambda_2 + \beta_3 \gamma_3 \lambda_3 \\
\tfrac{1}{2} z_x &= \gamma_1 \alpha_1 \lambda_1 + \gamma_2 \alpha_2 \lambda_2 + \gamma_3 \alpha_3 \lambda_3 \\
\tfrac{1}{2} x_y &= \alpha_1 \beta_1 \lambda_1 + \alpha_2 \beta_2 \lambda_2 + \alpha_3 \beta_3 \lambda_3\,,
\end{aligned}$$

woraus bei Rücksicht auf die Relationen, die zwischen den Grössen α, β, γ bestehen, die Richtigkeit der Behauptung hervorgeht. Zugleich sehen wir, dass der mit L multiplicirte Ausdruck in der Gleichung 8) von der Richtung der Coordinatenachsen abhängig ist. Soll diese Gleichung für jedes Coordinatensystem bestehen, so muss also

$$L = 0$$

sein; so sind wir für einen isotropen Körper zu demselben Ausdrucke von f gelangt, der schon in der Gleichung 30) der eilften Vorlesung aufgestellt ist.

§ 2.

Für den Fall des Gleichgewichts gehen die Gleichungen 3) in die einfacheren

$$\begin{aligned}
\mu X &= \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} \\
\mu Y &= \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} \\
\mu Z &= \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z}
\end{aligned} \tag{9}$$

über. Hierzu kommt, wenn die Druckkräfte gegeben sind, die au die Elemente der Oberfläche des Körpers wirken, die Bedingung, dass für diese Elemente X_n, Y_n, Z_n, wo n wieder die nach dem Innern des Körpers gerichtete Normale bedeutet, gegebene Werthe erhalten. Diese Werthe und die Werthe von X, Y, Z müssen dabei 6 gewisse Relationen erfüllen; es müssen nämlich die Summen ihrer Componenten und ihre Drehungsmomente in Bezug auf die Coordinatenachsen verschwinden, wie aus den Gleichungen 1) und 2) der eilften Vorlesung hervorgeht.

Durch die angegebenen Bedingungen sind die Grössen u, v, w noch nicht völlig bestimmt; es kommen diese sowohl in den Gleichungen 9), als in den Grenzbedingungen nur in den Verbindungen x_x, y_y, z_z, y_z, z_x, x_y vor; gesetzt, es seien die letzteren bestimmt, so sind u, v, w aus den Differentialgleichungen 1) zu ermitteln; hat man Ausdrücke für u, v, w gefunden, die diesen genügen, so kann man zu ihnen u', v', w' resp. hinzufügen; wenn

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial u'}{\partial x}, & 0 &= \frac{\partial v'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial y} \\ 0 &= \frac{\partial v'}{\partial y}, & 0 &= \frac{\partial w'}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial z} \\ 0 &= \frac{\partial w'}{\partial z}, & 0 &= \frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} \end{aligned} \tag{10}$$

ist. Es ist leicht, die allgemeinsten Lösungen dieser Gleichungen zu finden; differentiirt man nämlich jede von ihnen noch einmal nach x, y und z, so ergiebt sich, dass die sämmtlichen zweiten Differentialquotienten von u', v', w' nach x, y, z verschwinden; es sind also u', v', w' lineare Functionen von x, y, z mit constanten Coefficienten; substituirt man diese Functionen in 10), so findet man zwischen den Coefficienten solche Relationen, dass

$$\begin{aligned} u' &= a_0 + bz - cy \\ v' &= b_0 + cx - az \\ w' &= c_0 + ay - bx \end{aligned}$$

wird, wo a_0, b_0, c_0, a, b, c willkührliche Constanten sind. Die Veränderung des Körpers, welche der Hinzufügung dieser Ausdrücke zu u, v, w entspricht, besteht nach den in der fünften Vorlesung gemachten Auseinandersetzungen in einer Verschiebung und einer Drehung um den Anfangspunkt, deren Componenten a_0, b_0, c_0 und a, b, c sind. Statt dessen kann man auch sagen: Eine Veränderung der Grössen a_0, b_0, c_0, a, b, c entspricht einer Veränderung der *Lage* des Körpers in seinem natürlichen Zustande, von der aus die Verrückungen u, v, w gerechnet werden. Sollen u, v, w vollständig bestimmt sein, wenn x_x, y_y, . . es sind, so müssen noch Bedingungen festgesetzt werden, welche zur Bestimmung der 6 Constanten a_0, b_0, c_0, a, b, c genügen; solche Bedingungen sind z. B. die, dass für $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$

$$\begin{gathered} u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{gathered} \tag{11}$$

ist. Die 3 ersten von diesen Gleichungen sprechen aus, dass der Anfangspunkt der Coordinaten keine Verrückung erlitten hat; die Bedeutung der 3 letzten erkennt man leicht mit Hülfe der Gleichungen 7) der zehnten Vorlesung. Bei der dort gebrauchten Bezeichnung sind die 3 letzten der Gleichungen 11), wie die Gleichungen am Ende der Seite 121 zeigen,

$$a_{13} = 0, \quad a_{23} = 0, \quad a_{21} = 0;$$

die Gleichungen 7) der zehnten Vorlesung werden hierdurch

$$\begin{aligned} r'\alpha' &= r\,(a_{11}\alpha + a_{12}\beta) \\ r'\beta' &= \qquad\qquad r\,a_{22}\beta \\ r'\gamma' &= r\,(a_{31}\alpha + a_{32}\beta + a_{33}\gamma). \end{aligned}$$

Daraus folgt erstens: wenn $\alpha = 0$ und $\beta = 0$ ist, so ist auch $\alpha' = 0$ und $\beta' = 0$, d. h. ein der z-Achse paralleles, durch den Anfangspunkt gehendes Linienelement erleidet keine Drehung; zweitens folgt: wenn $\beta = 0$ ist, so ist auch $\beta' = 0$, d. h. ein der zx-Ebene paralleles, durch den Anfangspunkt gehendes Flächenelement bleibt sich selbst parallel.

Wollte man in den Gleichungen 1) x_x, y_y, . . als willkührliche Functionen von x, y, z annehmen, so würden dieselben, da sie nur 3 zu bestimmende Functionen, u, v, w, enthalten, im Allgemeinen sich widersprechen; wir bemerken, dass sie immer vereinbar mit einander sind, wenn x_x, y_y, . . . von x, y, z unabhängig sind, aber beliebige Werthe haben. Setzt man nämlich u, v, w linearen Functionen von x, y, z gleich, so kann man die 12 Coefficienten dieser so bestimmen, dass x_x, y_y, . . beliebig gegebene constante Werthe erhalten und zugleich den Bedingungen 11) genügt wird.

Diese Bemerkung benutzen wir, um eine wichtige Eigenschaft der Function f, die bis jetzt nicht erwähnt ist, abzuleiten. Wir setzen von dem Körper voraus, dass er, wenn auf seine Theile keine Kräfte, auf seine Oberfläche keine Druckkräfte wirken, und er den Bedingungen 11) unterworfen ist, in *stabilem* Gleichgewichte sich befindet, wenn überall $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$ ist. Nach der Bedeutung von f, an die wir erinnert haben, und nach § 2. der vierten Vorlesung muss dann unter den Bedingungen 11)

$$\int f\,d\tau$$

ein *Maximum* sein, wenn überall $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$ ist, d. h.

wenn überall x_x, y_y, . . verschwinden. Dieses Maximum muss auch stattfinden, wenn den Grössen x_x, y_y, . . die Beschränkung aufgelegt wird, dass sie von x, y, z unabhängig sind, ihre Werthe aber willkührlich bleiben. Es muss also f ein Maximum sein für $x_x = 0$, $y_y = 0$, . ., wenn x_x, y_y, . . . als unabhängige Variable angesehn werden. Da nun f eine homogene Function zweiten Grades der genannten Argumente ist, so ist dieser Ausspruch gleichbedeutend mit dem, dass f *nie positiv ist und nur verschwindet, wenn jedes seiner Argumente verschwindet.* Die letztere Eigenschaft hat f nicht, wenn der Körper eine compressible, nicht reibende Flüssigkeit ist. Wir können eine solche als einen isotropen Körper ansehn, bei dem die Constanten K und ϑ, die wir in Bezug auf einen isotropen Körper eingeführt haben, solche Werthe besitzen, dass $K = 0$ und $K\vartheta$ endlich ist; in diesem Falle verschwindet f immer, sobald $x_x + y_y + z_z = 0$ ist.

Aus dem Umstande, dass für einen festen Körper, wie wir ihn hier betrachten, f nie positiv ist und nur verschwindet, wenn jedes seiner Argumente gleich Null ist, lässt sich weiter beweisen, dass u, v, w eindeutig bestimmt sind durch die Gleichungen 9), die Bedingung, dass an der Oberfläche X_n, Y_n, Z_n gegebene Werthe erhalten und die Gleichungen 11). Um das darzuthun, braucht man nur zu zeigen, dass diese Bedingungen $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$ ergeben, wenn X, Y, Z, X_n, Y_n, Z_n überall verschwinden. Zu diesem Zwecke addire man die Gleichungen 9), nachdem sie mit $u d\tau$, $v d\tau$, $w d\tau$ multiplicirt sind, und integrire über das Volumen des Körpers; mit der resultirenden Gleichung nehme man eine Umformung vor, ähnlich derjenigen, die uns zu der Gleichung 18) der eilften Vorlesung geführt hat; benutzt man, dass

$$2f = X_x x_x + Y_y y_y + Z_z z_z + Y_z y_z + Z_x z_x + X_y x_y$$

ist, so findet man dann für den genannten Fall

$$\int f d\tau = 0 .$$

Hieraus folgt aber bei Rücksicht auf die Eigenschaften, die f besitzt, dass x_x, y_y, . . überall verschwinden, und dann weiter aus 11), dass auch u, v, w überall $= 0$ sind.

Lässt man die Bedingungen 11) fallen, so bestimmen die Gleichungen 9) und die Werthe von X_n, Y_n, Z_n den *Zustand* des Körpers, wie wir sagen wollen, nämlich die relativen Verschiebungen seiner Theile, während die Lage des Körpers unbekannt bleibt.

§ 3.

Verschwinden die Kräfte X, Y, Z, so werden die Gleichungen 9)

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} \\ 0 &= \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} \\ 0 &= \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z}. \end{aligned} \tag{12}$$

Von diesen Gleichungen wollen wir nun particuläre Lösungen bilden, die mit den Bedingungen 1) verträglich sind.

Man erhält eine solche, wenn man die 6 Druckcomponenten X_x, Y_y, . . beliebigen Constanten gleichsetzt; dann werden nämlich auch die Grössen x_x, y_y, . . gleich Constanten und wir haben bereits im vorigen § gesehn, dass in diesem Falle die Gleichungen 1) erfüllt werden können, und zwar dadurch, dass man u, v, w linearen Functionen von x, y, z gleichmacht. Der letzte Umstand bewirkt, dass bei der genannten Annahme die Veränderung, die der Körper aus seinem natürlichen Zustande erfahren hat, der Art ist, dass die neuen Coordinaten eines jeden seiner Punkte lineare Functionen der alten sind, dass also eine jede Ebene eine Ebene, eine jede Kugel ein Ellipsoid geblieben ist.

Ist

$$\begin{aligned} X_x &= Y_y = Z_z = p \\ Y_z &= Z_x = X_y = 0, \end{aligned}$$

wo p eine Constante bedeutet, so erleidet ein jedes Flächenelement im Innern des Körpers und ein jedes Element seiner Oberfläche einen senkrechten Druck, der $= p$ ist. Bei einer beliebigen Gestalt des Körpers lässt dieser Fall sich verwirklichen, wenn der Körper in eine Flüssigkeit gebracht ist und der Druck in dieser vergrössert wird; die Wirkung der Schwere ist dabei unmerklich. Im Allgemeinen bleibt der Körper dabei nicht sich selbst ähnlich; das findet aber statt, wenn er isotrop ist, oder, wenn es drei gleichwerthige, auf einander senkrechte Symmetrie-Ebenen für seine Substanz giebt. Unter der *Zusammendrückbarkeit* des Körpers versteht man den negativ genommenen Werth, den die räumliche Dilatation für $p = 1$ besitzt; für einen isotropen Körper ergiebt sich aus den Gleichungen 28) der eilften Vorlesung die Zusammendrückbarkeit

$$= \frac{3}{2K(1+3\theta)}.$$

Wenn

$$X_x, \quad Y_y, \quad X_y, \quad Y_z, \quad Z_x$$

verschwinden und Z_z einen constanten Werth hat, so erleidet irgend ein Flächenelement, welches der z-Achse parallel ist, keinen Druck und ein Flächenelement, welches senkrecht zu dieser Achse ist, den senkrechten Druck Z_z. Dieser Fall lässt sich verwirklichen, wenn der Körper die Gestalt eines geraden, der z-Achse parallelen Cylinders von beliebigem Querschnitt hat, indem man die Mantelfläche frei lässt und an jedem Element der Grundflächen einen senkrechten, constanten Druck anbringt. Den Werth, den

$$-\frac{Z_z}{z_z}$$

dann hat, nennt man den *Elasticitäts-Coefficienten* der Substanz für die Richtung der z-Achse; dieser ist immer von der Richtung der z-Achse abhängig, ausser, wenn der Körper isotrop ist. Für einen isotropen Körper ist er den Gleichungen 28) der eilften Vorlesung zufolge

$$= 2K\frac{1+3\theta}{1+2\theta}.$$

§ 4.

Ist der Körper isotrop, so lässt sich ohne Schwierigkeit eine allgemeinere Lösung der Gleichungen 12), die mit den Bedingungen 1) verträglich ist, finden, bei der

$$X_x = 0, \quad X_y = 0, \quad Y_y = 0,$$

ist; ist der Körper überdies durch eine der z-Achse parallele Cylinderfläche und zwei Querschnitte dieser begrenzt, so lässt diese Lösung dem Falle sich anpassen, dass die Cylinderfläche frei ist und auf die Elemente eines der Querschnitte Druckkräfte wirken, deren Componentensummen und Drehungsmomente beliebig gegeben sind. Die so bestimmte Lösung ist deshalb von besonderer Wichtigkeit, weil sie die Formänderungen eines cylindrischen Stabes, auf dessen Enden beliebige Druckkräfte wirken, im Allgemeinen mit grosser Genauigkeit darstellt, falls die Länge des Stabes gross gegen die Dimensionen des Querschnitts ist. Wir werden in den beiden folgenden Vorlesungen uns ausführlich mit den Formänderungen eines dünnen Stabes beschäftigen, indem wir von vornherein die Voraussetzung einführen, dass die Dimensionen des Querschnitts des Stabes unendlich klein sind, während seine Länge endlich ist. Die Betrachtungen, die wir hier durchführen wollen, sind in gewisser Hinsicht specieller, in anderer aber allgemeiner, als jene späteren.

Um die bezeichnete Lösung abzuleiten, untersuchen wir zuerst, welche Beziehungen zwischen den 6 Grössen x_x, y_y, . . stattfinden müssen, damit die Gleichungen 1) erfüllbar sind. Wir erhalten dieselben, indem wir die Gleichungen aufstellen, durch welche die Functionen u, v, w, wenn sie existiren, aus x_x, y_y, . . zu berechnen sind. Von dem Punkte $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, den wir im Innern des Körpers annehmen, denken wir uns in diesem eine beliebige Linie nach dem Punkte (x, y, z) gezogen und bezeichnen durch dx, dy, dz die Projectionen eines Elementes derselben. Ist $(u)_0$ der Werth von u für $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, so haben wir dann

$$u = (u)_0 + \int\left(\frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy + \frac{\partial u}{\partial z}\,dz\right).$$

$\frac{\partial u}{\partial x}$ ist hier als unmittelbar gegeben zu betrachten, denn es ist $= x_x$; $\frac{\partial u}{\partial y}$ und $\frac{\partial u}{\partial z}$ aber sind erst zu berechnen. Aus den Gleichungen 1) folgt leicht

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial x_x}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial y_x}{\partial y} - \frac{\partial y_y}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \tfrac{1}{2}\left(-\frac{\partial y_z}{\partial x} + \frac{\partial z_x}{\partial y} + \frac{\partial x_y}{\partial z}\right)$$

und

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \frac{\partial x_x}{\partial z}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \tfrac{1}{2}\left(-\frac{\partial y_z}{\partial x} + \frac{\partial z_x}{\partial y} + \frac{\partial x_y}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial z_x}{\partial z} - \frac{\partial z_z}{\partial x};$$

diese Werthe sind in die Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 + \int\left(\frac{\partial u^2}{\partial x \partial y}\,dx + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}\,dz\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0 + \int\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}\,dx + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}\,dy + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\,dz\right),$$

in denen der Index 0 dieselbe Bedeutung, wie eben, hat, zu setzen.

Der für $\frac{\partial u}{\partial x}$ angenommene Ausdruck, nämlich x_x, ist eine Function von x, y, z; auch die für $\frac{\partial u}{\partial y}$ und $\frac{\partial u}{\partial z}$ aufgestellten Ausdrücke müssen solche Functionen, d. h. unabhängig von dem Integrationswege sein, die in ihnen unter den Integralzeichen stehenden Grössen also vollständige Differentiale. Die Bedingungen hierfür sind durch die folgenden 5 Gleichungen ausgesprochen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 x_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 y_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 x_y}{\partial x \partial y} \\
\frac{\partial^2 z_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 x_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 z_x}{\partial z \partial x} \\
2\frac{\partial^2 x_x}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 y_z}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 y_x}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 z_x}{\partial y \partial x} \\
2\frac{\partial^2 y_y}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 z_x}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 z_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 x_y}{\partial z \partial y} \\
2\frac{\partial^2 z_z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 x_y}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 x_z}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 y_z}{\partial x \partial z}\,.
\end{aligned} \tag{13}$$

Dass die Ausdrücke, die dann für $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ erhalten werden, die partiellen Differentialquotienten *einer* Function sind, bringt keine neue Bedingung hinzu.

Ersetzt man in den durchgeführten Betrachtungen u durch v oder w, so erhält man nur die eine neue Gleichung

$$\frac{\partial^2 y_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 z_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 y_z}{\partial y \partial z}, \tag{14}$$

welche den Gleichungen 13) hinzuzufügen ist.

Substituirt man die für die ersten Differentialquotienten von u aufgestellten Ausdrücke und die entsprechenden der ersten Differentialquotienten von v und w in die Gleichungen 1), so werden diese für alle Werthe von x, y, z erfüllt, wenn nur $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0$, $\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0$, $\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_0$, $\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0$, $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0$, $\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0$ so gewählt sind, dass sie für den Punkt $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ erfüllt werden.

Das Resultat dieser Betrachtungen ist, dass die Gleichungen 13) und 14) die vollständigen Bedingungen dafür sind, dass u, v, w den Gleichungen 1) gemäss sich als Functionen von x, y, z bestimmen lassen. Um die Beziehungen zu finden, die dabei zwischen den Druckcomponenten X_x, Y_y, . . stattfinden müssen, hat man nur noch zu erwägen, dass x_x, y_y, . . lineare homogene Functionen dieser Druckcomponenten sind, deren Coefficienten von den Constanten der Elasticität in gewisser Weise abhängen.

Wir haben bereits bemerkt, dass die Gleichungen 1) mit der Annahme verträglich sind, dass X_x, Y_y, . . beliebige constante Werthe besitzen; wir sehen jetzt, dass sie auch gestatten, X_x, Y_y, . . beliebigen linearen Functionen von x, y, z gleichzusetzen, da die Gleichungen 13) und 14) nur zweite Differentialquotienten nach x, y, z enthalten.

Ist der Körper, wie wir nun annehmen wollen, isotrop, so hat man nach den Gleichungen 28) der eilften Vorlesung

$$
\begin{aligned}
x_x &= -\frac{1}{2K}\left(X_x - \frac{\theta}{1+3\theta}(X_x + Y_y + Z_z)\right)\\
y_y &= -\frac{1}{2K}\left(Y_y - \frac{\theta}{1+3\theta}(X_x + Y_y + Z_z)\right)\\
z_z &= -\frac{1}{2K}\left(Z_z - \frac{\theta}{1+3\theta}(X_x + Y_y + Z_z)\right)\\
y_z &= -\frac{1}{K} Y_z\\
z_x &= -\frac{1}{K} Z_x\\
x_y &= -\frac{1}{K} X_y .
\end{aligned}
$$

Führt man ferner die Voraussetzung

$$X_x = 0, \quad X_y = 0, \quad Y_y = 0 \tag{15}$$

ein, so erhält man hieraus

$$
\begin{aligned}
x_x &= \frac{1}{2K}\frac{\theta}{1+3\theta} Z_z, & y_z &= -\frac{1}{K} Y_z\\
y_y &= \frac{1}{2K}\frac{\theta}{1+3\theta} Z_z, & z_x &= -\frac{1}{K} Z_x\\
z_z &= -\frac{1}{2K}\frac{1+2\theta}{1+3\theta} Z_z, & x_y &= 0 .
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Die Gleichungen 12) werden dabei

$$\frac{\partial X_z}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial Y_z}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial Z_z}{\partial z} = -\frac{\partial X_z}{\partial x} - \frac{\partial Y_z}{\partial y}. \tag{17}$$

Die Gleichungen 13) und 14) ergeben daher

$$\frac{\partial^2 Z_z}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 Z_z}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 Z_z}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 Z_z}{\partial x \partial y} = 0$$

und

$$
\begin{aligned}
\frac{\theta}{1+3\theta}\frac{\partial^2 Z_z}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial^2 Y_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 X_z}{\partial x \partial y}\\
\frac{\theta}{1+3\theta}\frac{\partial^2 Z_z}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial^2 X_z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 Y_z}{\partial x \partial y}.
\end{aligned}
$$

Die vier ersten dieser 6 Gleichungen sagen aus, dass Z_z linear ist in Bezug auf jede der Grössen x, y, z und auch das Product xy nicht enthält; es ist daher

$$Z_z = a + a_1 x + a_2 y + z(b + b_1 x + b_2 y), \tag{18}$$

wo a, a_1, a_2, b, b_1, b_2 willkührliche Constanten bedeuten; die beiden letzten werden dadurch

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Y_z}{\partial x} - \frac{\partial X_z}{\partial y}\right) &= \frac{\theta}{1+3\theta} b_2\\
\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial Y_z}{\partial x} - \frac{\partial X_z}{\partial y}\right) &= -\frac{\theta}{1+3\theta} b_1 .
\end{aligned}
$$

Hieraus folgt

$$\frac{\partial Y_z}{\partial x} - \frac{\partial X_z}{\partial y} = c + \frac{\theta}{1+3\theta}(b_2 x - b_1 y) \tag{19}$$

wo c eine willkührliche Grösse bedeutet, die von x, y und, wegen 17) auch von z unabhängig ist. Diese Gleichung verbinden wir mit der Gleichung

$$\frac{\partial X_z}{\partial x} + \frac{\partial Y_z}{\partial y} = -(b + b_1 x + b_2 y), \tag{20}$$

die aus 17) und 18) folgt. Gesetzt es seien X_z' und Y_z' die Differenzen der Werthe von X_z und Y_z in zwei verschiedenen Lösungen der Gleichungen 19) und 20), so ist

$$\frac{\partial Y_z'}{\partial x} - \frac{\partial X_z'}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial X_z'}{\partial x} + \frac{\partial Y_z'}{\partial y} = 0,$$

also

$$X_z' = \frac{\partial \Omega}{\partial x}, \quad Y_z' = \frac{\partial \Omega}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} = 0. \tag{21}$$

Hiernach kann man die allgemeine Lösung der Gleichungen 19) und 20) angeben, sobald man eine particuläre gefunden hat; eine solche findet man aber, indem man für X_z und Y_z Ausdrücke zweiten Grades in x und y annimmt und die Coefficienten derselben passend bestimmt, wobei der Willkühr nach einiger Spielraum bleibt. So findet man als allgemeine Lösung der Gleichungen 19) und 20)

$$\begin{aligned} X_z &= -\frac{b}{2}x - \frac{c}{2}y - \frac{b_1}{4}\frac{1+2\theta}{1+3\theta}(x^2+y^2) - \frac{b_2}{2}\frac{1+4\theta}{1+3\theta}xy + \frac{\partial \Omega}{\partial x} \\ Y_z &= \frac{c}{2}x - \frac{b}{2}y - \frac{b_2}{4}\frac{1+2\theta}{1+3\theta}(x^2+y^2) - \frac{b_1}{2}\frac{1+4\theta}{1+3\theta}xy + \frac{\partial \Omega}{\partial y}, \end{aligned} \tag{22}$$

wo Ω der Gleichung 21) gemäss zu wählen ist.

Nun wollen wir annehmen, dass der Körper, um den es sich handelt, durch eine der z-Achse parallele Cylinderfläche und zwei senkrechte Querschnitte begrenzt ist, und wollen die aufgestellten Formeln dem Falle anzupassen suchen, dass die Cylinderfläche frei von jedem Drucke ist. Es sei dl ein Element des Umfangs eines zur z-Achse senkrechten Querschnitts, n die nach dem Innern dieses gerichtete Normale von dl; es muss dann

$$\begin{aligned} 0 &= X_x \cos(nx) + X_y \cos(ny) + X_z \cos(nz) \\ 0 &= Y_x \cos(nx) + Y_y \cos(ny) + Y_z \cos(nz) \\ 0 &= Z_x \cos(nx) + Z_y \cos(ny) + Z_z \cos(nz) \end{aligned}$$

sein. In Folge der Gleichungen 15) und des Umstandes, dass

$$\cos(nz) = 0$$

ist, sind die beiden ersten dieser Gleichungen erfüllt; die dritte wird

$$0 = X_z \cos(nx) + Y_z \cos(ny)\,. \tag{23}$$

Substituirt man hier für X_z und Y_z ihre Werthe aus 22), so erhält man einen Ausdruck für

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x}\cos(nx) + \frac{\partial \Omega}{\partial y}\cos(ny), \quad \text{d. h. für} \quad \frac{\partial \Omega}{\partial n},$$

der die, bis jetzt nur durch 21) definirte Function Ω bis auf eine additive Constante, deren Werth gleichgültig ist, bestimmt.

Damit es eine Function gebe, die den für Ω aufgestellten Bedingungen genügt, muss, wie wir in der sechszehnten Vorlesung gesehn haben,

$$\int \frac{\partial \Omega}{\partial n}\, dl = 0 \tag{24}$$

sein. Bildet man diese Gleichung mit Hülfe von 22) und 23), so spricht sie aus, dass eine Summe von Gliedern verschwindet, die von der Form

$$\int V \cos(nx)\, dl \qquad \text{oder} \qquad \int V \cos(ny)\, dl$$

sind, wo V eine, in dem Querschnitt des cylindrischen Körpers stetige Function von x und y bedeutet. Ist df ein Element dieses Querschnitts, so hat man aber, den Gleichungen 6) der eilften Vorlesung entsprechend,

$$\int V \cos(nx)\, dl = -\int \frac{\partial V}{\partial x}\, df$$

$$\int V \cos(ny)\, dl = -\int \frac{\partial V}{\partial y}\, df\,.$$

Wir wollen die z-Achse so legen, dass

$$\int x\, df = 0 \qquad \text{und} \qquad \int y\, df = 0$$

ist, d. h. die Linie, auf der die Schwerpunkte der Querschnitte liegen, zur z-Achse wählen; ein Blick auf die Gleichungen 22) zeigt dann, dass die Gleichung 24)

$$b \int df = 0\,, \qquad \text{d. h.} \qquad b = 0$$

wird. Die 6 übrigen Constanten, die wir eingeführt haben,

$$a, \ a_1, \ a_2, \ b_1, \ b_2, \ c$$

bleiben unbestimmt und können so gewählt werden, dass die Componentensummen und Drehungsmomente der auf die Elemente einer Endfläche wirkenden Drucke, nämlich die Grössen

$$\int X_z df, \quad \int (yZ_z - zY_z)\, df$$
$$\int Y_z df, \quad \int (zX_z - xZ_z)\, df$$
$$\int Z_z df, \quad \int (xY_z - yX_z)\, df,$$

beliebig gegebene Werthe annehmen.

Wir wollen die Rechnung nur weiterführen für den Fall, dass der Querschnitt des Körpers ein Kreis von dem Radius R, die Gleichung seines Umfangs also

$$x^2 + y^2 = R^2$$

ist. Der Gleichung 21) genügt man durch

$$\Omega = A_1 x + A_2 y + B_1 (x^3 - 3xy^2) + B_2 (y^3 - 3x^2 y),$$

wo A_1, A_2, B_1, B_2 willkührliche Constanten bedeuten; es wird sich zeigen, dass diese sich so bestimmen lassen, dass $\frac{\partial \Omega}{\partial n}$ den verlangten Werth erhält. Da

$$\cos(nx) = -\frac{x}{R}, \quad \cos(ny) = -\frac{y}{R},$$

so ist

$$-R\frac{\partial \Omega}{\partial n} = x\frac{\partial \Omega}{\partial x} + y\frac{\partial \Omega}{\partial y},$$

also

$$= A_1 x + A_2 y + 3B_1 (x^3 - 3xy^2) + 3B_2 (y^3 - 3x^2 y),$$

oder auch, da das Zeichen $\frac{\partial \Omega}{\partial n}$ sich nur auf den Umfang des Querschnitts bezieht,

$$-R\frac{\partial \Omega}{\partial n} = A_1 x + A_2 y + 3B_1 (x^3 - 3xy^2) + 3B_2 (y^3 - 3x^2 y)$$
$$+ (C_1 x + C_2 y)(x^2 + y^2 - R^2),$$

wo C_1, C_2 zwei neue Constanten bedeuten. Andererseits folgt aus den Gleichungen 22) und 23)

$$-R\frac{\partial \Omega}{\partial n} = \frac{b_1 x}{4(1+3\theta)}\Big((1+2\theta)x^2 + (3+10\theta)y^2\Big) + \frac{b_2 y}{4(1+3\theta)}\Big((3+10\theta)x^2 + (1+2\theta)y^2\Big).$$

Diese beiden für $-R\frac{\partial \Omega}{\partial n}$ aufgestellten Ausdrücke werden identisch, wenn man

$$A_1 = R^2 \frac{b_1}{8}\frac{3+4\theta}{1+3\theta} \qquad A_2 = R^2 \frac{b_2}{8}\frac{3+4\theta}{1+3\theta}$$
$$B_1 = -\frac{b_1}{24}\frac{1+4\theta}{1+3\theta} \qquad B_2 = -\frac{b_2}{24}\frac{1+4\theta}{1+3\theta}$$
$$C_1 = \frac{b_1}{8}\frac{3+4\theta}{1+3\theta} \qquad C_2 = \frac{b_2}{8}\frac{3+4\theta}{1+3\theta}$$

macht. Bei diesen Werthen von A_1, A_2, B_1, B_2 werden die Gleichungen 22)

$$X_z = -\frac{c}{2}\,y + \frac{b_1}{8}\,\frac{(3+8\theta)(R^2-x^2)-y^2}{1+3\theta} - \frac{1+4\theta}{1+3\theta}\,\frac{b_2}{4}\,xy$$

$$Y_z = \frac{c}{2}\,x - \frac{1+4\theta}{1+3\theta}\,\frac{b_1}{4}\,xy + \frac{b_2}{8}\,\frac{(3+8\theta)(R^2-y^2)-x^2}{1+3\theta},$$

wozu wir fügen

$$Z_z = a + a_1 x + a_2 y + z\,(b_1 x + b_2 y)\,.$$

Die Berechnung der Constanten a, a_1, a_2, b_1, b_2, c aus den Componentensummen und Drehungsmomenten der Druckkräfte, die auf ein Ende des Cylinders wirken, ist hier sehr einfach, nehmen wir dieses Ende zur xy-Ebene und benutzen, dass

$$\int x^2 df = \int y^2 df = \frac{\pi}{4}\,R^4$$

$$\int xy\,df = \int x^2 y\,df = \int xy^2 df = 0$$

ist, so finden wir

$$\int X_z\,df = b_1\,\frac{\pi}{4}\,R^4, \qquad \int (y Z_z - z Y_z)\,df = a_2\,\frac{\pi}{4}\,R^4$$

$$\int Y_z\,df = b_2\,\frac{\pi}{4}\,R^4, \qquad \int (z X_z - x Z_z)\,df = -a_1\,\frac{\pi}{4}\,R^4$$

$$\int Z_z\,df = a\,\pi\,R^2, \qquad \int (x Y_z - y X_z)\,df = c\,\frac{\pi}{4}\,R^4.$$

In Bezug auf die weitere und allgemeinere Discussion der in diesem § entwickelten Formeln verweisen wir auf Clebsch*) und Saint-Venant.**)

§ 5.

Für einen isotropen Körper lassen sich in Folge der Gleichungen 28) der eilften Vorlesung, wenn man

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \sigma \tag{25)}$$

und wieder

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \Delta \varphi$$

setzt, die Gleichungen 3) schreiben

$$\begin{aligned} \mu\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \mu X + K\left(\Delta u + (1+2\theta)\frac{\partial \sigma}{\partial x}\right) \\ \mu\,\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \mu Y + K\left(\Delta v + (1+2\theta)\frac{\partial \sigma}{\partial y}\right) \\ \mu\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \mu Z + K\left(\Delta w + (1+2\theta)\frac{\partial \sigma}{\partial z}\right) \end{aligned} \tag{26)}$$

---

*) Theorie der Elasticität fester Körper von A. Clebsch, Leipzig 1862.

**) Mém. sur la flexion des prismes, Liouville Journal II ème série, Tome I (1856).

Für den Fall, dass das Gleichgewicht besteht und keine Kräfte auf die Theile des Körpers wirken, gehen dieselben über in

$$
\begin{aligned}
0 &= \Delta u + (1 + 2\theta)\frac{\partial \sigma}{\partial x} \\
0 &= \Delta v + (1 + 2\theta)\frac{\partial \sigma}{\partial y} \\
0 &= \Delta w + (1 + 2\theta)\frac{\partial \sigma}{\partial z},
\end{aligned}
\qquad 27)
$$

woraus folgt

$$0 = \Delta \sigma .$$

Es ist leicht, eine particuläre Lösung der Gleichungen 25) und 27) zu finden, deren Kenntniss von Interesse ist. Man genügt ihnen, wenn man

$$\sigma = a$$

setzt, wo a eine willkührliche Constante bedeutet, und

$$u = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial V}{\partial z},$$

wo V die Gleichung

$$\Delta V = a$$

erfüllt. Demgemäss kann man annehmen

$$V = \frac{a}{6} r^2 + \frac{b}{r},$$

wo

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

und b eine zweite willkührliche Constante ist. Für die Druckcomponenten hat man dann die Ausdrücke

$$
\begin{aligned}
X_x &= -2K\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \theta a\right) & Y_z &= -2K\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} \\
Y_y &= -2K\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \theta a\right) & Z_x &= -2K\frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x} \\
Z_z &= -2K\left(\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \theta a\right) & X_y &= -2K\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y},
\end{aligned}
$$

d. h.

$$
\begin{aligned}
X_x &= -2K\left((1 + 3\theta)\frac{a}{3} - \frac{b}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5} b\right) & Y_z &= -2K\frac{3yz}{r^5} b \\
Y_y &= -2K\left((1 + 3\theta)\frac{a}{3} - \frac{b}{r^3} + \frac{3y^2}{r^5} b\right) & Z_x &= -2K\frac{3zx}{r^5} b \\
Z_z &= -2K\left((1 + 3\theta)\frac{a}{3} - \frac{b}{r^3} + \frac{3z^2}{r^5} b\right) & X_y &= -2K\frac{3xy}{r^5} b
\end{aligned}
$$

Dieselben haben die Eigenschaft, die Gleichungen

$$
\begin{aligned}
(X_x - p)\,x + X_y y + X_z z &= 0 \\
Y_x x + (Y_y - p)\,y + Y_z z &= 0 \\
Z_x x + Z_y y + (Z_z - p)\,z &= 0
\end{aligned}
$$

zu befriedigen, wenn

$$p = -2K\left((1+3\theta)\frac{a}{3}+2\frac{b}{r^3}\right)$$

gesetzt wird. Erinnert man sich an den Begriff der *Hauptdrucke*, der im § 3. der eilften Vorlesung definirt ist, so ist hieraus zu schliessen, dass die durch den Punkt (x, y, z) und den Anfangspunkt der Coordinaten gezogene Gerade die Richtung einer Hauptdruckachse für jenen Punkt hat und die Grösse des entsprechenden Hauptdruckes der für p angegebene Ausdruck ist. Da dieser Ausdruck eine Function von r ist und zwei willkührliche Constanten enthält, so folgt weiter, dass die aufgestellten Formeln dem Falle sich anpassen lassen, dass der Körper durch zwei um den Anfangspunkt der Coordinaten als Mittelpunkt beschriebene Kugelflächen begrenzt ist, auf deren jede ein constanter und senkrechter Druck ausgeübt wird. Sind die Radien der beiden Kugelflächen r_1 und r_2, und p_1 und p_2 die entsprechenden Drucke, so sind a und b aus den Gleichungen

$$p_1 = -2K\left((1+3\theta)\frac{a}{3}+2\frac{b}{r_1^3}\right)$$

$$p_2 = -2K\left((1+3\theta)\frac{a}{3}+2\frac{b}{r_2^3}\right)$$

zu bestimmen.

Achtundzwanzigste Vorlesung.

(Endliche Formänderungen eines unendlich dünnen, ursprünglich cylindrischen Stabes. Dilatationen eines kleinen Theiles desselben. Vereinfachungen, die eintreten, wenn der Querschnitt eine Ellipse, oder seine Ebene eine Symmetrie-Ebene ist. Potential der durch die Dilatationen erzeugten Kräfte. Lebendige Kraft des Stabes. Gleichgewicht des Stabes unter dem Einfluss von Druckkräften, die auf seine Enden wirken. Uebereinstimmung des hierauf bezüglichen Problems mit dem Problem der Rotation eines schweren Körpers um einen festen Punkt. Der Stab kann eine Schraubenlinie bilden. Gleichgewicht eines krummen Stabes, der ursprünglich eine Schraubenlinie bildet.)

§ 1.

Wir werden uns jetzt mit dem Gleichgewicht und der Bewegung von Körpern beschäftigen, deren Dimensionen theilweise unendlich klein sind; dünne Stäbe und Platten können näherungsweise als solche angesehen werden. Körper, wie wir sie nun betrachten wollen, können *endliche* Formänderungen erleiden, ohne dass die Dilatationen aufhören unendlich klein zu sein. Auch auf solche Fälle können wir unsere Theorie anwenden, indem wir den Körper in Theile getheilt denken, deren jeder Dimensionen hat, die alle von derselben Ordnung sind, und die aufgestellten Gleichungen zunächst auf *einen* dieser Theile beziehen.

Denken wir uns einen Körper (oder Körpertheil), dessen Dimensionen alle von der Ordnung der unendlich kleinen Grösse i sind, und stellen für diesen die Bedingungen des Gleichgewichts zusammen. Zu diesen gehören zunächst die Gleichungen 9) der vorigen Vorlesung, also die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\mu X &= \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} \\
\mu Y &= \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} \\
\mu Z &= \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z}\,.
\end{aligned} \tag{1}$$

Es sei g eine Function von x, y, z,

$$g = 0$$

die Gleichung der Oberfläche des Körpers und g positiv im Innern desselben; n wiederum die nach dem Innern gerichtete Normale eines Elementes der Oberfläche. Es ist dann

$$\cos(nx) : \cos(ny) : \cos(nz) = \frac{\partial g}{\partial x} : \frac{\partial g}{\partial y} : \frac{\partial g}{\partial z}$$

und jene Cosinus haben *dieselben* Vorzeichen wie diese Differentialquotienten, da $\frac{\partial g}{\partial n}$ positiv ist. Hiernach ist an der Oberfläche

$$\begin{aligned} X_x \frac{\partial g}{\partial x} + X_y \frac{\partial g}{\partial y} + X_z \frac{\partial g}{\partial z} &= X_n \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)^2} \\ Y_x \frac{\partial g}{\partial x} + Y_y \frac{\partial g}{\partial y} + Y_z \frac{\partial g}{\partial z} &= Y_n \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)^2} \\ Z_x \frac{\partial g}{\partial x} + Z_y \frac{\partial g}{\partial y} + Z_z \frac{\partial g}{\partial z} &= Z_n \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)^2}, \end{aligned} \tag{2}$$

wo die Wurzelgrösse positiv zu nehmen ist und X_n, Y_n, Z_n als gegeben betrachtet werden sollen.

Damit u, v, w völlig bestimmt seien, setzen wir noch fest, dass die Lage des Körpers in seinem natürlichen Zustande, von der aus u, v, w gerechnet werden, so gewählt sei, dass für den Anfangspunkt der Coordinaten, der im Innern des Körpers sich befinden soll, also für $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$

$$\begin{aligned} u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

ist.

Nun setzen wir

$$x = ix', \quad y = iy', \quad z = iz'; \tag{4}$$

den gemachten Voraussetzungen zufolge sind dann x', y', z' in dem Körper endlich und, ist

$$g' = 0$$

die Gleichung zwischen x', y', z', die der Oberfläche entspricht, so enthält g' nur endliche Constanten.

Die Substitutionen 4) denke man sich auch in den Gleichungen 1), 2) und 3) ausgeführt. Macht man

$$\begin{aligned} x_x' &= \frac{\partial u}{\partial x'}, & y_z' &= \frac{\partial v}{\partial z'} + \frac{\partial w}{\partial y'} \\ y_y' &= \frac{\partial v}{\partial y'}, & z_x' &= \frac{\partial w}{\partial x'} + \frac{\partial u}{\partial z'} \\ z_z' &= \frac{\partial w}{\partial z'}, & x_y' &= \frac{\partial u}{\partial y'} + \frac{\partial v}{\partial x'} \end{aligned}$$

und bezeichnet durch X_x', X_y', . . die Ausdrücke, die man erhält, wenn man x_x, x_y, . . durch x_x', x_y', . . in den Ausdrücken ersetzt, die X_x, X_y, . . als Functionen von x_x, x_y, . . darstellen, so erhält man dadurch:

$$\frac{\partial X_x'}{\partial x'} + \frac{\partial X_y'}{\partial y'} + \frac{\partial X_z'}{\partial z'} = i^2 X \mu$$
$$\frac{\partial Y_x'}{\partial x'} + \frac{\partial Y_y'}{\partial y'} + \frac{\partial Y_z'}{\partial z'} = i^2 Y \mu \tag{5}$$
$$\frac{\partial Z_x'}{\partial x'} + \frac{\partial Z_y'}{\partial y'} + \frac{\partial Z_z'}{\partial z'} = i^2 Z \mu,$$

für $g' = 0$

$$X_x' \frac{\partial g'}{\partial x'} + X_y' \frac{\partial g'}{\partial y'} + X_z' \frac{\partial g'}{\partial z'} = i X_n \sqrt{\left(\frac{\partial g'}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial g'}{\partial y'}\right)^2 + \left(\frac{\partial g'}{\partial z'}\right)^2}$$
$$Y_x' \frac{\partial g'}{\partial x'} + Y_y' \frac{\partial g'}{\partial y'} + Y_z' \frac{\partial g'}{\partial z'} = i Y_n \sqrt{\left(\frac{\partial g'}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial g'}{\partial y'}\right)^2 + \left(\frac{\partial g'}{\partial z'}\right)^2} \tag{6}$$
$$Z_x' \frac{\partial g'}{\partial x'} + Z_y' \frac{\partial g'}{\partial y'} + Z_z' \frac{\partial g'}{\partial z'} = i Z_n \sqrt{\left(\frac{\partial g'}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial g'}{\partial y'}\right)^2 + \left(\frac{\partial g'}{\partial z'}\right)^2}$$

und für $x' = 0$, $y' = 0$, $z' = 0$

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0$$
$$\frac{\partial u}{\partial z'} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z'} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x'} = 0. \tag{7}$$

Die Werthe von u, v, w, welche aus 5), 6) und 7) sich ergeben, lassen sich darstellen als die Summen von Gliedern, von denen die einen die Gleichungen 6) und 7), statt der Gleichungen 5) aber diejenigen erfüllen, die aus 5) entstehen, wenn man die rechten Theile durch Null ersetzt, und von denen die anderen die Gleichungen 5) und 7), statt der Gleichungen 6) aber diejenigen erfüllen, die aus 6) entstehen, wenn man hier die rechten Theile durch Null ersetzt. Die erstgenannten Glieder sind von der Ordnung von iX_n, iY_n, iZ_n, die andern von der Ordnung von $i^2 X\mu$, $i^2 Y\mu$, $i^2 Z\mu$; diese sind also unendlich klein gegen jene, wenn wir annehmen, dass die Kräfte X, Y, Z nicht unendlich gross gegen die Druckkräfte X_n, Y_n, Z_n sind, d. h. dass die relativen Verrückungen, die jene bei einem Körper, dessen Dimensionen alle endlich sind, hervorbringen, nicht unendlich gross sind gegen diejenigen, die bei demselben Körper diese erzeugen. Unter dieser Voraussetzung sind also für unsern unendlich kleinen Körper die Gleichungen 5) zu ersetzen durch diejenigen, die aus ihnen entstehen, wenn man X, Y, Z gleich Null setzt, die Gleichungen 1) also durch

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} = 0$$
$$\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} = 0$$
$$\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} = 0$$

Die durchgeführte Betrachtung zeigt zugleich, dass u, v, w von der Ordnung von iX_n, iY_n, iZ_n sind; von derselben Ordnung sind die

Differentialquotienten von u, v, w nach x', y', z', die Differentialquotienten von u, v, w nach x, y, z also von der Ordnung von X_n, Y_n, Z_n.

Auch für den Fall der Bewegung gelten diese Resultate und die Gleichungen 8) treten an die Stelle der Gleichungen 1) der vorigen Vorlesung, vorausgesetzt, dass die Beschleunigungen $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ die Grenzen nicht überschreiten, die wir für die Kräfte X, Y, Z angenommen haben. Es folgt das daraus, dass, um vom Gleichgewicht zur Bewegung überzugehn, wir X, Y, Z zu ersetzen haben durch $X - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $Y - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$, $Z - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$.

§ 2.

Nun wollen wir annehmen, dass der Körper, um den es sich handelt, ein unendlich dünner, in seinem natürlichen Zustande cylindrischer Stab ist. Bei diesem Zustande denke man sich in dem Stabe ein rechtwinkliges Achsensystem; eine Achse soll die Linie sein, in der die Schwerpunkte der Querschnitte liegen, die beiden andern sollen parallel den Hauptachsen eines Querschnitts sein, die durch den Schwerpunkt desselben gehn. Auf der erstgenannten Achse wähle man einen Punkt P, nenne s den Abstand desselben von dem Anfange des Stabes und fasse drei Linienelemente ins Auge, welche von P aus in den Richtungen der drei Achsen gezogen sind; sie mögen 3, 1, 2 heissen und 3 soll dasjenige sein, welches die Richtung der Länge des Cylinders hat. Diese drei Linienelemente werden, wenn der Zustand des Stabes geändert ist, im Allgemeinen nicht mehr senkrecht auf einander stehen, sondern Winkel bilden, die von rechten um Grössen abweichen, die von der Ordnung der Dilatationen sind, die stattgefunden haben. Es soll die Lage der Punkte des Stabes in der Nähe von P auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem bezogen werden, dessen Anfangspunkt P ist, dessen z-Achse die Richtung des Linienelementes 3 hat, und dessen zx-Ebene durch die Linienelemente 3 und 1 hindurchgeht. In Bezug auf dieses Coordinatensystem seien $x + u$, $y + v$, $z + w$ die Coordinaten eines Punktes des Stabes nach der Veränderung, x, y, z die Coordinaten desselben Punktes, wenn der Stab in seinem natürlichen Zustande und in der Lage sich befindet, bei der die Linienelemente 1, 2, 3 in die Achsen der x, y, z fallen. Bei diesen Festsetzungen gelten die Gleichungen 3) oder die Gleichungen 11) der vorigen Vorlesung, wie aus der Bemerkung hervorgeht, die bei diesen gemacht ist; für die Oberfläche des Stabes besteht eine Gleichung zwischen x und y; es ist

$$\int x\,dx\,dy = 0\,, \quad \int y\,dx\,dy = 0\,, \quad \int xy\,dx\,dy = 0\,, \tag{9}$$

wenn die Integrationen über den Querschnitt ausgedehnt werden; endlich ist jeder materielle Punkt des Stabes charakterisirt durch gewisse Werthe von x, y und $s+z$.

Es seien ferner ξ, η, ζ die Coordinaten des Punktes P nach der Formänderung des Stabes in Bezug auf ein beliebig im Raume gewähltes Coordinatensystem, das die Eigenschaft haben möge, dass durch Drehung die Achsen der x, y, z parallel den Achsen der ξ, η, ζ gemacht werden können;

$$\begin{matrix} \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1 \\ \alpha_2, & \beta_2, & \gamma_2 \\ \alpha_3, & \beta_3, & \gamma_3 \end{matrix}$$

seien die Cosinus der Winkel, die die Achsen der ξ, η, ζ mit den Achsen der x, y, z bilden, so dass die Indices 1, 2, 3 sich auf die Achsen der x, y, z resp. beziehn. Diese 9 Grössen, so wie ξ, η, ζ, sind im Falle des Gleichgewichtes Functionen der einen Variabeln s, im Falle der Bewegung Functionen von s und t.

Bei diesen Bezeichnungen sind

$$\begin{aligned} &\xi + \alpha_1(x+u) + \alpha_2(y+v) + \alpha_3(z+w) \\ &\eta + \beta_1(x+u) + \beta_2(y+v) + \beta_3(z+w) \\ &\zeta + \gamma_1(x+u) + \gamma_2(y+v) + \gamma_3(z+w) \end{aligned} \tag{10}$$

die Coordinaten in Beziehung auf die Achsen der ξ, η, ζ des Punktes, dessen Coordinaten in Beziehung auf die Achsen der x, y, z sind $x+u$, $y+v$, $z+w$. Die Ausdrücke 10) müssen Functionen von $s+z$ sein, da die Werthe von $s+z$, x und y einen materiellen Punkt des Stabes bestimmen; die partiellen Differentialquotienten dieser Ausdrücke nach z und nach s müssen daher einander gleich sein. Es ist also

$$\begin{aligned} \alpha_1\frac{\partial u}{\partial z} + \alpha_2\frac{\partial v}{\partial z} + \alpha_3\left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right) &= \alpha_1\frac{\partial u}{\partial s} + \alpha_2\frac{\partial v}{\partial s} + \alpha_3\frac{\partial w}{\partial s} \\ &+ \frac{d\xi}{ds} + \frac{d\alpha_1}{ds}(x+u) + \frac{d\alpha_2}{ds}(y+v) + \frac{d\alpha_3}{ds}(z+w) \\ \beta_1\frac{\partial u}{\partial z} + \beta_2\frac{\partial v}{\partial z} + \beta_3\left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right) &= \beta_1\frac{\partial u}{\partial s} + \beta_2\frac{\partial v}{\partial s} + \beta_3\frac{\partial w}{\partial s} \\ &+ \frac{d\eta}{ds} + \frac{d\beta_1}{ds}(x+u) + \frac{d\beta_2}{ds}(y+v) + \frac{d\beta_3}{ds}(z+w) \\ \gamma_1\frac{\partial u}{\partial z} + \gamma_2\frac{\partial v}{\partial z} + \gamma_3\left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right) &= \gamma_1\frac{\partial u}{\partial s} + \gamma_2\frac{\partial v}{\partial s} + \gamma_3\frac{\partial w}{\partial s} \\ &+ \frac{d\zeta}{ds} + \frac{d\gamma_1}{ds}(x+u) + \frac{d\gamma_2}{ds}(y+v) + \frac{d\gamma_3}{ds}(z+w)\,. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen multiplicire man der Reihe nach mit α_1, β_1, γ_1, mit α_2, β_2, γ_2, mit α_3, β_3, γ_3 und addire sie jedesmal. Dabei setze man

$$\sigma = \sqrt{\left(\frac{d\xi}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{ds}\right)^2} - 1\,; \tag{11}$$

da nach den gemachten Festsetzungen

$$\frac{d\xi}{ds} : \frac{d\eta}{ds} : \frac{d\zeta}{ds} = \alpha_3 : \beta_3 : \gamma_3$$

ist, so folgt hieraus

$$\frac{d\xi}{ds} = \alpha_3 (1 + \sigma)\,, \qquad \frac{d\eta}{ds} = \beta_3 (1 + \sigma)\,, \qquad \frac{d\zeta}{ds} = \gamma_3 (1 + \sigma) \tag{12}$$

und es ist σ die Dilatation, die das Element ds erfahren hat; man setze ferner

$$\begin{aligned} p &= \alpha_3 \frac{d\alpha_2}{ds} + \beta_3 \frac{d\beta_2}{ds} + \gamma_3 \frac{d\gamma_2}{ds} \\ q &= \alpha_1 \frac{d\alpha_3}{ds} + \beta_1 \frac{d\beta_3}{ds} + \gamma_1 \frac{d\gamma_3}{ds} \\ r &= \alpha_2 \frac{d\alpha_1}{ds} + \beta_2 \frac{d\beta_1}{ds} + \gamma_2 \frac{d\gamma_1}{ds}\,. \end{aligned} \tag{13}$$

Vergleichen wir diese Ausdrücke mit den in den Gleichungen 19) der fünften Vorlesung gleich p', q', r' gesetzten und erinnern uns an die Bedeutung, die dort für p', q', r' sich ergab, so sehen wir, dass $p\,ds$, $q\,ds$, $r\,ds$ die Winkel sind, um welche das Achsensystem der x, y, z um die Achsen der x, y, z gedreht wird, wenn sein Anfangspunkt das Element ds durchläuft. Es heisst $r\,ds$ die *Torsion* des dem Elemente ds entsprechenden Theiles des Stabes und p, q sind die reciproken Krümmungsradien der Projectionen des Elementes ds auf die yz- und die xz-Ebene.

Mit Hülfe der 6 Relationen, die zwischen den Cosinus α, β, γ bestehen, und derjenigen, die durch Differentiation nach s aus diesen sich ergeben, erhält man dann

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\partial u}{\partial s} + q\,(z + w) - r\,(y + v) \\ \frac{\partial v}{\partial z} &= \frac{\partial v}{\partial s} + r\,(x + u) - p\,(z + w) \\ \frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{\partial w}{\partial s} + p\,(y + v) - q\,(x + u) + \sigma\,. \end{aligned}$$

Gestützt auf die am Ende des vorigen § gemachte Bemerkung nehmen wir an, dass $\frac{\partial u}{\partial z}$, $\frac{\partial v}{\partial z}$, $\frac{\partial w}{\partial z}$ unendlich gross gegen u, v, w sind, wenn wir dem z nur Werthe geben, die von der Ordnung der Dimensionen des Querschnitts des Stabes sind. Ferner nehmen wir an, dass $\frac{\partial u}{\partial s}$, $\frac{\partial v}{\partial s}$, $\frac{\partial w}{\partial s}$ von derselben Grössenordnung als u, v, w sind.

Benutzen wir ausserdem, dass u, v, w unendlich klein gegen x, y, z sind, so werden die abgeleiteten Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial z} = qz - ry$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = rx - pz$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = py - qx + \sigma\,.$$

Durch Integration folgt hieraus

$$\left.\begin{aligned} u &= u_0 + \frac{q}{2} z^2 - ryz \\ v &= v_0 + rxz - \frac{p}{2} z^2 \\ w &= w_0 + (py - qx + \sigma)\, z\,, \end{aligned}\right\} \quad 14)$$

wo u_0, v_0, w_0 Functionen von x und y bedeuten, nämlich die Werthe, die u, v, w für $z = 0$ erhalten. Diese Functionen finden ihre Bestimmung durch die Gleichungen 8), 2) und 3).

Die für u, v, w gefundenen Ausdrücke ergeben

$$\left.\begin{aligned} x_x &= \frac{\partial u_0}{\partial x} & y_z &= \frac{\partial w_0}{\partial y} + rx \\ y_y &= \frac{\partial v_0}{\partial y} & z_x &= \frac{\partial w_0}{\partial x} - ry \\ z_z &= py - qx + \sigma & x_y &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}\,. \end{aligned}\right\} \quad 15)$$

Alle diese Werthe sind unabhängig von z; in Folge hiervon vereinfachen sich die Gleichungen 8) in

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} &= 0\,. \end{aligned}\right\} \quad 16)$$

Wir wollen annehmen, dass auf die ursprünglich cylindrische Oberfläche des Stabes keine Drucke wirken, und unter g die Function von x und y verstehen, die gleich Null gesetzt, die Gleichung der Grenzlinie des Querschnitts bildet; die Gleichungen 2) geben dann für $g = 0$

$$\left.\begin{aligned} X_x \frac{\partial g}{\partial x} + X_y \frac{\partial g}{\partial y} &= 0 \\ Y_x \frac{\partial g}{\partial x} + Y_y \frac{\partial g}{\partial y} &= 0 \\ Z_x \frac{\partial g}{\partial x} + Z_y \frac{\partial g}{\partial y} &= 0\,. \end{aligned}\right\} \quad 17)$$

Von den Gleichungen 3) endlich werden zwei identisch erfüllt, die andern erfordern, dass für $x = 0$ und $y = 0$

$$u_0 = 0, \quad v_0 = 0, \quad w_0 = 0, \quad \frac{\partial v_0}{\partial x} = 0 \qquad 18)$$

ist.

Die Gleichungen 17) haben wir aus der Voraussetzung abgeleitet, dass die Drucke, die auf die Mantelfläche des Stabes wirken, gleich Null sind. Dieselben Gleichungen dürfen wir aber auch beibehalten, wenn diese Drucke irgend welche Werthe haben, die nur gewisse Grenzen nicht übersteigen. Sie müssen solche Werthe haben, dass Drucke von ihrer Grössenordnung bei einem Körper, dessen Dimensionen alle von gleicher Ordnung sind, nur Dilatationen hervorbringen, die unendlich klein gegen die durch 15) bestimmten Dilatationen sind. Indem man die Grössen, die die linken Seiten der Gleichungen 17) bilden sollten, vernachlässigt, vernachlässigt man dann nur Grössen, die gegen die einzelnen Terme, welche die linken Seiten zusammensetzen, unendlich klein sind.

Setzt man in den Gleichungen 16) und 17) für X_x, X_y, . . ihre Ausdrücke durch x_x, x_y, . . und für diese Grössen die in 15) angegebenen Werthe, so bestimmen die Gleichungen 16), 17) und 18) die Grössen u_0, v_0, w_0 eindeutig als lineare homogene Functionen von p, q, r, σ. Um diese Behauptung zu beweisen, hat man zu zeigen, dass die genannten Gleichungen, wenn p, q, r, σ verschwinden, nur erfüllt werden können durch $u_0 = 0$, $v_0 = 0$, $w_0 = 0$, und das gelingt durch Betrachtungen, die denen ganz ähnlich sind, durch welche im § 2. der vorigen Vorlesung ein ähnlicher Satz bewiesen ist. Sind u_0, v_0, w_0 auf die genannte Weise ausgedrückt, so ergeben die Gleichungen 15) x_x, x_y, . . als lineare homogene Functionen von p, q, r, σ; eben solche Functionen werden die Druckcomponenten X_x, X_y, . . und f wird eine homogene Function zweiten Grades derselben 4 Elemente.

Wir wollen hier eine Bemerkung anknüpfen, welche die Anwendbarkeit unserer Betrachtungen wesentlich erweitert. Wir denken uns den Stab aus seinem natürlichen, cylindrischen Zustande durch Kräfte, die auf sein Inneres, und Druckkräfte, die auf seine Endflächen wirken, einmal in einen, dann in einen andern Zustand übergeführt. Auf den zweiten dieser Zustände mögen sich die Zeichen x_x, x_y, . . p, q, r, σ beziehen, auf den ersten die Zeichen x_x', x_y', . . p', q', r', σ'. Wird der Stab aus dem ersten in den zweiten Zustand übergeführt, so bestimmen die Differenzen $x_x - x_x'$, $x_y - x_y'$, . . die dabei stattfindenden Dilatationen gerade so, wie x_x, x_y, . . selbst die Dilatationen bestimmen, die bei dem Uebergange des Stabes aus seinem cylindrischen Zustande in denjenigen, den wir den zweiten genannt haben, eintreten; das gilt auch, wenn nicht der cylindrische, sondern der als der erste bezeichnete Zustand der natürliche ist, wenn der Stab also in seinem natürlichen Zustande so gekrümmt und tordirt ist, wie es den Werthen von p', q', r' entspricht. In diesem Falle sind daher die Druckcomponenten X_x, X_y, .. und die Grösse f dieselben Functionen von $x_x - x_x'$, $x_y - x_y'$, .., wie in dem bisher betrachteten von x_x, x_y, ..., und (da $x_x - x_x'$, $x_y - x_y'$, .. dieselben linearen Functionen von $p - p'$, $q - q'$, $r - r'$, $\sigma - \sigma'$ sind, wie x_x, x_y, .. von p, q, r, σ) dieselben Functionen von $p - p'$, $q - q'$, $r - r'$, $\sigma - \sigma'$, wie in dem bisher betrachteten Falle von p, q, r, σ. Diese Bemerkung ist namentlich dann von Wichtigkeit, wenn die Substanz des Stabes isotrop ist; mit Hülfe derselben kann man dann immer die Gleichungen des Gleichgewichts und der Bewegung für einen unendlich dünnen Stab aufstellen, dessen Querschnitt überall dieselbe Gestalt hat, wenn er in seinem natürlichen Zustande beliebig gekrümmt und tordirt ist. Die Grösse, die wir mit σ' bezeichnet haben, kann dabei $= 0$ gesetzt werden.

§ 3.

Die Ausführung der Bestimmung von u_0, v_0, w_0 ist verhältnissmässig leicht, wenn der Querschnitt des Stabes eine Ellipse ist, welches auch die Constanten der Elasticität sein mögen. Setzen wir dieser Annahme entsprechend

$$g = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2};$$

die Gleichungen 16) und 17) (die letzteren nicht allein für $g = 0$, sondern allgemein) werden dann erfüllt durch

$$X_x = 0, \quad Y_y = 0, \quad X_y = 0$$

$$Z_x = c\,\frac{y}{b^2}, \quad Z_y = -c\,\frac{x}{a^2},$$

wo c eine willkührliche Constante bedeutet. Diese 5 Gleichungen in Verbindung mit der in 15) vorkommenden Gleichung

$$z_z = py - qx + \sigma$$

erlauben mit Hülfe der Relationen, die zwischen den 6 Grössen x_x, z_y, .. und den 6 Druckcomponenten X_x, X_y, .. bestehen, x_x, y_y, x_y, und z_x, z_y als lineare Functionen von x und y auszudrücken. Die 3 ersten von ihnen führen bei Rücksicht auf die Gleichungen 15) zur Bestimmung von u_0, v_0, die beiden letzten zur Bestimmung von w_0. Damit diese Bestimmungen möglich sind, muss

$$\frac{\partial^2 x_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 y_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 x_y}{\partial x \partial y}$$

und

$$\frac{\partial y_z}{\partial x} - \frac{\partial x_z}{\partial y} = 2r$$

sein; die erste von diesen Gleichungen, die aus Betrachtungen sich ergiebt, die denjenigen ganz ähnlich sind, durch welche wir die Gleichungen 13) und 14) der vorigen Vorlesung abgeleitet haben, ist in Folge davon erfüllt, dass x_x, y_y, x_y linear in Bezug auf x und y sind; die zweite bestimmt die Grösse c. Die Integrationen, die ausgeführt werden müssen, um dann u_0 und v_0 zu berechnen, bringen 3 willkührliche Constanten mit sich, die Integration, die w_0 giebt, führt *eine* solche ein; diese Constanten sind gerade ausreichend, um die Gleichungen 18) zu erfüllen. So ergeben sich u_0, v_0, w_0 als Functionen zweiten Grades von x und y.

Eine Vereinfachung in der Bestimmung von u_0, v_0, w_0 tritt bei beliebiger Gestalt des Querschnitts ein, wenn die Ebene desselben eine Symmetrie-Ebene ist. In diesem Falle hat man nach der Gleichung 5) der vorigen Vorlesung

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2} X_x &= a_{11} x_x + a_{12} y_y + a_{13} z_z + a_{16} x_y \\
\tfrac{1}{2} Y_y &= a_{21} x_x + a_{22} y_y + a_{23} z_z + a_{26} x_y \\
\tfrac{1}{2} Z_z &= a_{31} x_x + a_{32} y_y + a_{33} z_z + a_{36} x_y \\
\tfrac{1}{2} X_y &= a_{61} x_x + a_{62} y_y + a_{63} z_z + a_{66} x_y \\
\tfrac{1}{2} Z_y &= a_{44} z_y + a_{45} z_x \\
\tfrac{1}{2} Z_x &= a_{54} z_y + a_{55} z_x ,
\end{aligned}$$

wo

$$a_{12} = a_{21}, \quad a_{13} = a_{31}, \quad . \quad . \quad .$$

Bei Rücksicht auf die Gleichungen 15) wird hiernach die letzte der Gleichungen 16)

$$a_{55} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + 2\, a_{45} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + a_{44} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = 0 \tag{19)}$$

und die letzte der Gleichungen 17)

$$\begin{aligned}
&\left(a_{54}\left(\frac{\partial w_0}{\partial y} + r x\right) + a_{55}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x} - r y\right)\right)\frac{\partial g}{\partial x} \\
&+ \left(a_{44}\left(\frac{\partial w_0}{\partial y} + r x\right) + a_{45}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x} - r y\right)\right)\frac{\partial g}{\partial y} = 0 .
\end{aligned} \tag{20)}$$

Aus diesen beiden Gleichungen und der dritten der Gleichungen 18) ist w_0 zu bestimmen. Die übrigen der Gleichungen 16), 17) und 18) dienen zur Bestimmung von u_0 und v_0; man genügt ihnen, indem man

$$X_x = 0, \quad Y_y = 0, \quad X_y = 0 \tag{20a)}$$

setzt. Löst man nämlich diese Gleichungen nach x_x, y_y, x_y auf, so erhält man für diese Grössen, indem man für z_z seinen Werth aus 15) setzt, lineare Ausdrücke von x und y; in Folge hiervon ist es möglich u_0 und v_0 den Gleichungen

$$x_x = \frac{\partial u_0}{\partial x}, \quad y_y = \frac{\partial v_0}{\partial y}, \quad x_y = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}$$

gemäss zu bestimmen; die Integration dieser führt 3 willkührliche Constanten ein, durch die man die noch zu berücksichtigenden der Gleichungen 18) erfüllen kann.

§ 4.

Sind u_0, v_0, w_0 gefunden, so handelt es sich darum, p, q, r, σ im Falle des Gleichgewichts als Functionen von s, im Falle der Bewegung als Functionen von s und t zu bestimmen. Zu diesem Zwecke kann im ersten Falle das Princip der virtuellen Verrückungen, im zweiten das Hamilton'sche Princip dienen. In beiden ist es dann zunächst erforderlich, einen Ausdruck für das Potential der durch die Dilatationen erzeugten Kräfte aufzustellen. Bezeichnet f dieselbe homogene Function zweiten Grades von x_x, x_y, . ., wie früher, so ist dieses Potential

$$= \int f\, dx\, dy\, ds\,,$$

wo die Integration nach x und y über den Querschnitt, nach s über die Länge des Stabes auszudehnen ist. Hier setze man für x_x, y_y, . . ihre Werthe aus 15); da diese Werthe lineare homogene Functionen von p, q, r, σ sind, so ist f eine homogene Function zweiten Grades von p, q, r, σ; die Coefficienten hängen nur von x und y ab. Nun mache man

$$F = \int f\, dx\, dy\,, \tag{21}$$

dann ist F eine homogene Function zweiten Grades von p, q, r, σ mit constanten Coefficienten und jenes Potential ist

$$= \int F\, ds\,.$$

Bezeichnet man durch U' die Arbeit der Kräfte, die auf das Innere, und der Druckkräfte, die auf die Mantelfläche und die Endflächen des Stabes wirken, für gewisse Variationen von p, q, r, σ, durch T die lebendige Kraft, so ist also die Bedingung für das Gleichgewicht

$$U' + \delta \int F\, ds = 0\,, \tag{22}$$

und für die Bewegung gilt die Gleichung

$$\int dt\, \left(U' + \delta T + \delta \int F\, ds\right) = 0\,. \tag{23}$$

Um den Werth von T zu bilden, haben wir die Ausdrücke 10) nach t zu differentiiren, die Summe der Quadrate der Differentialquotienten mit dem halben Elemente der Masse des Stabes zu multipliciren und über diesen zu integriren. Wir vernachlässigen dabei $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$, $\frac{\partial w}{\partial t}$ als unendlich klein gegen Glieder, die damit additiv verbunden auftreten, und setzen $z = 0$, was erlaubt ist, da die Ausdrücke 10) Functionen von $s + z$ sind, und wir s als variabel betrachten. Die Differentialquotienten dieser Ausdrücke sind dann

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + x\frac{\partial \alpha_1}{\partial t} + y\frac{\partial \alpha_2}{\partial t}$$
$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + x\frac{\partial \beta_1}{\partial t} + y\frac{\partial \beta_2}{\partial t}$$
$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + x\frac{\partial \gamma_1}{\partial t} + y\frac{\partial \gamma_2}{\partial t}.$$

Die Summe der Quadrate dieser Ausdrücke, mit $dx\,dy$ multiplicirt und über den Querschnitt des Stabes integrirt, ist in Folge der Gleichungen 9)

$$\begin{aligned}&\left(\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)^2\right)\int dx\,dy\\ &+\left(\left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \beta_1}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial t}\right)^2\right)\int x^2\,dx\,dy\\ &+\left(\left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \beta_2}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \gamma_2}{\partial t}\right)^2\right)\int y^2\,dx\,dy.\end{aligned} \tag{24}$$

Nun setze man

$$\begin{aligned}-P &= \alpha_2\frac{\partial \alpha_3}{\partial t} + \beta_2\frac{\partial \beta_3}{\partial t} + \gamma_2\frac{\partial \gamma_3}{\partial t}\\ Q &= \alpha_1\frac{\partial \alpha_3}{\partial t} + \beta_1\frac{\partial \beta_3}{\partial t} + \gamma_1\frac{\partial \gamma_3}{\partial t}\\ R &= \alpha_2\frac{\partial \alpha_1}{\partial t} + \beta_2\frac{\partial \beta_1}{\partial t} + \gamma_2\frac{\partial \gamma_1}{\partial t}.\end{aligned} \tag{25}$$

Aus den Gleichungen, die dann nach dem Muster der Gleichungen 20) der fünften Vorlesung gebildet werden können, ergiebt sich

$$\left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \beta_1}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial t}\right)^2 = Q^2 + R^2$$
$$\left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \beta_2}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \gamma_2}{\partial t}\right)^2 = P^2 + R^2.$$

Man erwäge nun, dass den Gleichungen 12) zufolge $\frac{\partial \alpha_3}{\partial t}, \frac{\partial \beta_3}{\partial t}, \frac{\partial \gamma_3}{\partial t}$ nicht unendlich gross gegen $\frac{\partial \xi}{\partial t}, \frac{\partial \eta}{\partial t}, \frac{\partial \zeta}{\partial t}$ sein können, vorausgesetzt, dass die Differentialquotienten dieser Grössen nach s nicht unendlich gross gegen sie sind. Daraus folgt, dass P und Q nicht unendlich gross gegen $\frac{\partial \xi}{\partial t}, \frac{\partial \eta}{\partial t}, \frac{\partial \zeta}{\partial t}$ sein können, während das Entsprechende in Bezug auf R sich nicht behaupten lässt. Bedenkt man endlich, dass von den 3 Integralen, die in dem Ausdrucke 24) vorkommen, die beiden letzten unendlich klein gegen das erste sind, so sieht man, dass dieser Ausdruck

$$= \left(\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)^2\right)\int dx\,dy + R^2\int (x^2 + y^2)\,dx\,dy$$

ist. Macht man

$$\int dx\,dy = \lambda\,, \quad \int (x^2 + y^2)\,dx\,dy = \varkappa \tag{26}$$

und bezeichnet wieder durch μ die Dichtigkeit, so ist daher

$$T = \frac{\mu}{2}\int ds \left\{\lambda \left(\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)^2\right) + \varkappa R^2\right\}. \tag{27}$$

§ 5.

Wir wollen nun das Gleichgewicht des Stabes unter der Voraussetzung näher untersuchen, dass auf seine Theile keine Kräfte und nur auf seine Endflächen Druckkräfte wirken. Statt aber von dem Princip der virtuellen Verrückungen dabei Gebrauch zu machen, wollen wir unmittelbar anknüpfen an die Definition des Druckes, die durch die Gleichungen 1) und 2) der eilften Vorlesung gegeben ist. Wir wenden diese auf den Theil des Stabes zwischen zwei beliebigen Querschnitten an. Bezeichnen wir durch A, B, Γ die Summen der Componenten nach den Achsen der ξ, η, ζ der Drucke, welche in den Elementen des Querschnitts, der durch einen beliebigen Werth von s bestimmt ist, von *dem* Theile des Stabes, in dem s kleinere Werthe hat, auf denjenigen ausgeübt werden, in dem s grössere Werthe besitzt, und durch M_α, M_β, M_γ die Drehungsmomente derselben Drucke in Bezug auf dieselben Achsen, so erhalten wir in Folge der Voraussetzung, dass Gleichgewicht besteht und keine Kräfte auf das Innere des Stabes wirken,

$$A = \text{const.} \qquad B = \text{const.} \qquad \Gamma = \text{const.}$$
$$M_\alpha = \text{const.} \qquad M_\beta = \text{const.} \qquad M_\gamma = \text{const.}$$

Ist für das eine Ende des Stabes $s = 0$, für das andere $s = l$ und l positiv, so sind hiernach A, B, Γ, M_α, M_β, M_γ gleich den Componentensummen und Drehungsmomenten der Drucke, die auf die Elemente des Querschnitts $s = 0$ von Aussen ausgeübt werden; dieselbe Bedeutung haben $-A$, $-B$, $-\Gamma$, $-M_\alpha$, $-M_\beta$, $-M_\gamma$ für das andere Ende.

Wir wollen nun die Drehungsmomente derselben Drucke, von denen M_α, M_β, M_γ herrühren, in Bezug auf die Achsen der x, y, z, die dem gewählten Werthe von s entsprechen, einführen und durch M_x, M_y, M_z bezeichnen. Zugleich wählen wir (was immer möglich ist) die ζ-Achse so, dass $A = 0$, $B = 0$ und Γ negativ oder $= 0$ ist. Den im § 4. der fünften Vorlesung abgeleiteten Relationen zufolge ist dann

$$\begin{aligned} M_\alpha &= \alpha_1 M_x + \alpha_2 M_y + \alpha_3 M_z + \eta\,\Gamma = \text{const.} \\ M_\beta &= \beta_1 M_x + \beta_2 M_y + \beta_3 M_z - \xi\,\Gamma = \text{const.} \\ M_\gamma &= \gamma_1 M_x + \gamma_2 M_y + \gamma_3 M_z \qquad\;\; = \text{const.} \end{aligned} \tag{28}$$

Diese Gleichungen differentiire man nach s, multiplicire sie mit α_1, β_1, γ_1 oder α_2, β_2, γ_2 oder α_3, β_3, γ_3 und addire sie jedesmal. Bei Rücksicht auf die Relationen, die zwischen diesen 9 Cosinus bestehn, und auf die Gleichungen 12) und 13) ergiebt sich so

$$\begin{aligned} \frac{dM_x}{ds} &= r\,M_y - q\,M_z + \gamma_2 \Gamma \\ \frac{dM_y}{ds} &= p\,M_z - r\,M_x - \gamma_1 \Gamma \\ \frac{dM_z}{ds} &= q\,M_x - p\,M_y\,. \end{aligned} \tag{29}$$

Wir leiten nun ab, in welcher Beziehung die Drehungsmomente M_x, M_y, M_z zu der im vorigen § besprochenen Function F stehen. Zu diesem Zwecke betrachten wir den Zuwachs δf, den f erfährt, wenn der Zustand des Stabes in der Nähe des einem constanten Werthe von s entsprechenden Querschnitts so geändert wird, dass p, q, r, σ um δp, δq, δr, $\delta\sigma$ wachsen. Zunächst hat man

$$\delta f = X_x \delta x_x + Y_y \delta y_y + Z_z \delta z_z + Y_z \delta y_z + Z_x \delta z_x + X_y \delta x_y\,,$$

da X_x, Y_y, . . die partiellen Differentialquotienten von f nach x_x, y_y, . . sind. Mit Hülfe der Gleichungen 15) erhält man hieraus

$$\delta f = X_x \delta \frac{\partial u_0}{\partial x} + Y_y \delta \frac{\partial v_0}{\partial y} + Z_z \left(y\,\delta p - x\,\delta q + \delta\sigma \right)$$
$$+ Y_z \left(\delta \frac{\partial w_0}{\partial y} + x\,\delta r \right) + Z_x \left(\delta \frac{\partial w_0}{\partial x} - y\,\delta r \right) + X_y \delta \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right).$$

Diese Gleichung multiplicire man mit $dx\,dy$ und integrire über den Querschnitt des Stabes. Die linke Seite derselben ist nach 21) dann δF; die rechte transformire man mit Hülfe der Gleichung

$$0 = \int dx\,dy \left\{ X_x \delta \frac{\partial u_0}{\partial x} + Y_y \delta \frac{\partial v_0}{\partial y} \right.$$
$$\left. + Y_z \delta \frac{\partial w_0}{\partial y} + Z_x \delta \frac{\partial w_0}{\partial x} + X_y \delta \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \right\},$$

die man durch partielle Integrationen bei Rücksicht auf die Gleichungen 17), in denen $\cos(nx)$ und $\cos(ny)$ für $\frac{\partial g}{\partial x}$ und $\frac{\partial g}{\partial y}$ geschrieben werden können, erhält, wenn man die Gleichungen 16) mit $dx\,dy\,\delta u_0$, $dx\,dy\,\delta v_0$, $dx\,dy\,\delta w_0$ multiplicirt, addirt und über den Querschnitt integrirt. Setzt man

$$\begin{aligned} Z &= \int dx\,dy\; Z_z \\ M_x &= \int dx\,dy\; y Z_z \\ M_y &= -\int dx\,dy\; x Z_z \\ M_z &= \int dx\,dy\; (x Y_z - y X_z)\,, \end{aligned}$$

wobei Z die Componente der Kraft Γ nach der z-Achse bezeichnet und M_x, M_y, M_z die Bedeutung haben, in der sie in den Gleichungen 28) und 29) gebraucht sind, so erhält man dadurch

$$\delta F = M_x \delta p + M_y \delta q + M_z \delta r + Z \delta \sigma ,$$

woraus folgt

$$\frac{\partial F}{\partial p} = M_x , \quad \frac{\partial F}{\partial q} = M_y , \quad \frac{\partial F}{\partial r} = M_z , \quad \frac{\partial F}{\partial \sigma} = Z . \qquad 30)$$

Es ist $2F$ eine homogene Function zweiten Grades von p, q, r, σ, deren Coefficienten von den Constanten der Elasticität und den Constanten des Querschnitts des Stabes abhängen; man hat daher

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \sigma} &= \gamma_3 \Gamma = A_{00}\sigma + A_{01} p + A_{02} q + A_{03} r \\ \frac{\partial F}{\partial p} &= M_x \quad = A_{10}\sigma + A_{11} p + A_{12} q + A_{13} r \\ \frac{\partial F}{\partial q} &= M_y \quad = A_{20}\sigma + A_{21} p + A_{22} q + A_{23} r \\ \frac{\partial F}{\partial r} &= M_z \quad = A_{30}\sigma + A_{31} p + A_{32} q + A_{33} r , \end{aligned} \qquad 31)$$

wo A_{00}, $A_{01} = A_{10}$, A_{11}, .. die genannten Coefficienten sind. Es sind diese nicht alle von derselben Grössenordnung. Da σ eine reine Zahl ist, p, q, r aber reciproke Längen sind, so müssen die A, welche einmal den Index 0 haben, eine Dimension weniger enthalten, als diejenigen, bei welchen der Index 0 nicht vorkommt, und eine Dimension mehr, als A_{00}; die Längen, welche in den Ausdrücken der Grössen A vorkommen, sind aber von der Ordnung der Dimensionen des Querschnitts des Stabes, also unendlich klein; es müssen daher A_{01}, A_{02}, A_{03} unendlich klein gegen A_{00} und unendlich gross gegen die andern A sein; aus diesem Grunde dürfen die mit σ behafteten Glieder in 31) nicht vernachlässigt werden, obwohl σ unendlich klein ist, p, q, r aber als endlich angesehen werden sollen. Aus der ersten der Gleichungen 31) folgt

$$\sigma = -\frac{A_{01} p + A_{02} q + A_{03} r - \gamma_3 \Gamma}{A_{00}} ; \qquad 32)$$

setzt man diesen Werth von σ in die für M_x, M_y, M_z in 31) angegebenen Ausdrücke und nimmt an, dass Γ nicht unendlich gross gegen M_x, M_y, M_z ist, so folgt aus den oben angeführten Verhältnissen zwischen den Grössen A, dass die dann auftretenden, von Γ abhängenden Glieder als unendlich klein gegen M_x, M_y, M_z vernachlässigt werden können. So ergeben sich diese Drehungsmomente als lineare homogene Functionen von p, q, r. Es lassen dieselben sich folgendermassen darstellen: Es sei G die Function von p, q, r, in welche F übergeht, wenn man hier σ mit Hülfe der Gleichung $\frac{\partial F}{\partial \sigma} = 0$ durch p, q, r ausdrückt; dann ist

$$M_x = \frac{\partial G}{\partial p}, \quad M_y = \frac{\partial G}{\partial q}, \quad M_z = \frac{\partial G}{\partial r}. \tag{33}$$

In der That wird, wenn σ aus $\frac{\partial F}{\partial \sigma} = 0$ durch p, q, r ausgedrückt wird,

$$\frac{\partial F}{\partial p} = \frac{\partial G}{\partial p},$$

da, wenn G dadurch aus F abgeleitet würde, dass man eine beliebige Function von p, q, r für σ setzte,

$$\frac{\partial G}{\partial p} = \frac{\partial F}{\partial p} + \frac{\partial F}{\partial \sigma}\frac{\partial \sigma}{\partial p}$$

wäre; und ähnlich verhält es sich mit den entsprechenden Differentialquotienten nach q und r. Die Gleichungen 29) werden daher

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\frac{\partial G}{\partial p} &= r\frac{\partial G}{\partial q} - q\frac{\partial G}{\partial r} + \Gamma\gamma_2 \\ \frac{d}{ds}\frac{\partial G}{\partial q} &= p\frac{\partial G}{\partial r} - r\frac{\partial G}{\partial p} - \Gamma\gamma_1 \\ \frac{d}{ds}\frac{\partial G}{\partial r} &= q\frac{\partial G}{\partial p} - p\frac{\partial G}{\partial q}. \end{aligned} \tag{34}$$

Diese Gleichungen, in denen G eine homogene Function zweiten Grades von p, q, r mit constanten Coefficienten bedeutet, haben dieselbe Form als die Gleichungen 17) der siebenten Vorlesung, welche sich auf die Rotation eines schweren, starren Körpers um einen festen Punkt beziehn; sie stimmen mit diesen völlig überein, wenn man $s = t$, $G = T$ und $-\Gamma =$ dem Producte aus dem Gewichte des Körpers in den Abstand seines Schwerpunktes von dem festen Punkte setzt. Auch die Bedeutung der 9 Cosinus α, β, γ und der Grössen p, q, r wird dabei, hier und dort, dieselbe. Da dort als z-Achse die von dem festen Punkte durch den Schwerpunkt gezogene Linie gewählt war, hier aber die z-Achse die Tangente des Stabes ist, so giebt es daher stets einen schweren, starren, um einen festen Punkt rotirenden Körper, der dem Stabe in der Art entspricht, dass die durch den festen Punkt und den Schwerpunkt gehende Linie immer der Tangente des Stabes parallel ist, wenn $s = t$ angenommen wird. Ist das Rotationsproblem gelöst, so hat man, um die Gestalt des Stabes kennen zu lernen, noch die Gleichungen

$$\xi = \int \alpha_3 ds, \quad \eta = \int \beta_3 ds, \quad \zeta = \int \gamma_3 ds \tag{34a}$$

zu bilden.

§ 6.

Das Problem der Rotation eines schweren Körpers um einen festen Punkt ist, wie in der siebenten Vorlesung aus einander gesetzt, nicht allgemein lösbar; ein Fall, in dem es gelöst werden kann, ist der, dass die Schwere nicht wirkt; diesem Falle entspricht hier der, dass $\Gamma = 0$ ist, d. h. dass die Summe der Componenten nach irgend einer Richtung der Druckkräfte verschwindet, die auf die Elemente eines Endes des Stabes ausgeübt werden. Ein anderer Fall, in dem das Rotationsproblem gelöst worden ist, ist der, dass die Schwere wirkt, der Körper aber ein Rotationskörper und der feste Punkt ein Punkt der Rotationsachse ist; diesem Falle entspricht hier der, dass zwischen den Constanten der Elasticität des Stabes und den Constanten seines Querschnitts gewisse Beziehungen bestehn. Diese Beziehungen bestehen, wie wir nun zeigen wollen, wenn die Substanz des Stabes isotrop und sein Querschnitt ein Kreis ist.

Für einen isotropen Körper ist nach § 1. der vorigen Vorlesung

$$f = -K\left\{x_x^2 + y_y^2 + z_z^2 + \tfrac{1}{2}y_z^2 + \tfrac{1}{2}z_x^2 + \tfrac{1}{2}x_y^2 + \vartheta(x_x + y_y + z_z)^2\right\}.$$

Aus den Gleichungen 20_a) folgt daher

$$x_x = y_y = -\frac{\vartheta}{1+2\vartheta}z_z\,, \quad x_y = 0\,.$$

Die Gleichungen 19) und 20) werden

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = 0 \tag{35}$$

und für $g = 0$

$$\left(\frac{\partial w_0}{\partial x} - ry\right)\frac{\partial g}{\partial x} + \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} + rx\right)\frac{\partial g}{\partial y} = 0\,. \tag{36}$$

Der Querschnitt des Stabes soll ein Kreis sein; wir haben daher

$$g = x^2 + y^2 - \text{const.}$$

zu setzen. Bei diesem Werthe von g folgt aus 35), 36) und 18)

$$w_0 = 0\,.$$

Die Gleichungen 15) geben daher

$$z_z = py - qx + \sigma\,, \quad y_z = rx\,, \quad x_z = -ry\,.$$

Es ist also

$$f = -K\left(\frac{1+3\vartheta}{1+2\vartheta}(py - qx + \sigma)^2 + \tfrac{1}{2}r^2(x^2 + y^2)\right)$$

und nach 21), wenn man die durch 26) definirten Zeichen $\varkappa$, λ benutzt,

$$F = -K\left(\frac{1+3\theta}{1+2\theta}\frac{\varkappa}{2}(p^2+q^2)+\frac{\varkappa}{2}r^2+\frac{1+3\theta}{1+2\theta}\lambda\sigma^2\right).$$

Hiernach erhält man endlich für die bei 33) definirte Function G

$$G = -K\frac{\varkappa}{2}\left(\frac{1+3\theta}{1+2\theta}(p^2+q^2)+r^2\right). \tag{37}$$

Hierdurch ist die oben ausgesprochene Behauptung bewiesen, dass für den isotropen Stab von kreisförmigem Querschnitt G dieselbe Function von p, q, r ist, wie die lebendige Kraft für einen Rotationskörper, der um einen Punkt seiner Symmetrie-Achse rotirt, und es ist gezeigt, dass die allgemeine Lösung der Gleichungen 34) für einen Stab der genannten Art auf demselben Wege gefunden werden kann, der für das entsprechende Rotationsproblem im § 4. der siebenten Vorlesung angegeben ist.

Wir wollen uns darauf beschränken, die Lösung für einen speciellen Fall wirklich zu bilden. Wir setzen

$$A_{11} = -K\varkappa\frac{1+3\theta}{1+2\theta}, \quad A_{33} = -K\varkappa \tag{38}$$

und führen die durch die Gleichungen 8) der fünften Vorlesung definirten Winkel ϑ, φ, f ein, wodurch das Zeichen f eine andere Bedeutung erhält, als diejenige, in der wir es bisher in unseren jetzigen Untersuchungen gebraucht haben. Die Gleichungen 34) werden dann

$$\begin{aligned} A_{11}\frac{dp}{ds} &= rq(A_{11}-A_{33}) + \Gamma\sin f\sin\vartheta \\ A_{11}\frac{dq}{ds} &= rp(A_{33}-A_{11}) - \Gamma\cos f\sin\vartheta \\ \frac{dr}{ds} &= 0. \end{aligned} \tag{39}$$

Zu diesen fügen wir die Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{d\vartheta}{ds} &= p\sin f - q\cos f \\ \sin\vartheta\frac{d\varphi}{ds} &= p\cos f + q\sin f \\ \frac{df}{ds} &= \cos\vartheta\frac{d\varphi}{ds} - r, \end{aligned} \tag{40}$$

welche aus den Gleichungen 21), 13) und 16) der siebenten Vorlesung bei Rücksicht auf die Gleichungen 8) der fünften sich ergeben, wenn man s statt t schreibt. Wir werden sehn, dass den Gleichungen 39) und 40) bei der Annahme

$$\vartheta = \text{const.}$$

genügt werden kann; die Lösung, die unter dieser Annahme gilt, ist eben diejenige, die wir bilden wollen; sie entspricht *der* Bewegung eines um einen Punkt der Symmetrieachse rotirenden schweren Rotationskörpers, bei der diese Achse einen geraden Kegel um eine verticale Linie beschreibt. Ist ϑ constant, so ist die erste der Gleichungen 40)

$$0 = p \sin f - q \cos f,$$

wofür wir schreiben können

$$p = \sqrt{p^2 + q^2} \cos f, \quad q = \sqrt{p^2 + q^2} \sin f, \tag{41}$$

wo das Vorzeichen von $\sqrt{p^2 + q^2}$ unbestimmt bleibt. Hiernach geben die beiden ersten der Gleichungen 39), wenn man sie mit p und q multiplicirt und addirt,

$$p^2 + q^2 = \text{const.},$$

während aus der dritten immer

$$r = \text{const.}$$

folgt. Weiter ergeben dann die beiden letzten der Gleichungen 40), wenn man unter φ_0 und f_0 zwei willkührliche Constanten versteht,

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{\sin \vartheta} s, \quad f - f_0 = \left(\frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{\operatorname{tg} \vartheta} - r\right) s. \tag{42}$$

Es ist noch eine der beiden ersten der Gleichungen 39) zu erfüllen; setzt man in sie für p und q ihre Werthe aus 41), so verwandelt sie sich in eine Gleichung zwischen Constanten, nämlich in die Gleichung

$$0 = A_{11} \frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{\operatorname{tg} \vartheta} - A_{33} r + \Gamma \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{p^2 + q^2}}. \tag{43}$$

Um die Gestalt zu finden, die der Stab hat, wenn die aufgestellten Gleichungen gelten, hat man noch die Gleichungen 34a) zu entwickeln. Setzt man in diesen, den Gleichungen 8) der fünften Vorlesung gemäss

$$\alpha_3 = \cos \varphi \sin \vartheta, \quad \beta_3 = \sin \varphi \sin \vartheta, \quad \gamma_3 = \cos \vartheta,$$

macht bei der Berechnung von ξ und η nach 42)

$$ds = \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{p^2 + q^2}} d\varphi$$

und verfügt auf gewisse Weise über den Anfangspunkt der ξ, η, ζ, so erhält man

$$\xi = \frac{\sin^2 \vartheta}{\sqrt{p^2 + q^2}} \sin \varphi, \quad \eta = -\frac{\sin^2 \vartheta}{\sqrt{p^2 + q^2}} \cos \varphi, \quad \zeta = s \cos \vartheta. \tag{44}$$

Hiernach bildet der Stab eine *Schraubenlinie,* deren Achse die ζ-Achse ist; der Radius des Cylinders, auf dem sie liegt, ist

$$= \frac{\sin^2 \vartheta}{\sqrt{p^2 + q^2}}, \tag{45}$$

die Höhe eines Schraubenganges

$$= \frac{2\pi \sin \vartheta \cos \vartheta}{\sqrt{p^2 + q^2}}. \tag{46}$$

Was die Druckkräfte betrifft, die auf das Ende $s = 0$ des Stabes von Aussen ausgeübt werden müssen, damit dieser in der berechneten Gestalt, bei beliebig gegebenen Werthen der Constanten ϑ, $\sqrt{p^2 + q^2}$ und r im Gleichgewichte sei, so ist die Kraft Γ durch 43) bestimmt. Wir haben, um die Analogie zwischen dem Problem des Gleichgewichts eines elastischen Stabes und dem Problem der Rotation eines schweren Körpers vollständig zu machen, die ζ-Achse so gewählt, dass Γ, wenn es nicht verschwindet, negativ ist. Halten wir diese Annahme fest, so müssen wir es als eine Bedingung, der die Werthe von ϑ, $\sqrt{p^2 + q^2}$, r zu genügen haben, ansehn, dass die Gleichung 43) nicht einen positiven Werth für Γ ergiebt. Diese Bedingung fällt aber fort, wenn wir, was wir thun wollen, auf die Vollständigkeit jener Analogie verzichtend, positive und negative Werthe von Γ zulassen. Es bleibt noch übrig, die Drehungsmomente M_α, M_β, M_γ zu ermitteln. Aus 33), 37), und 38) findet man zunächst

$$M_x = A_{11} p, \quad M_y = A_{11} q, \quad M_z = A_{33} r,$$

wofür nach 41) sich schreiben lässt

$$M_x = A_{11} \frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{\sin \vartheta} \gamma_1, \qquad M_y = A_{11} \frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{\sin \vartheta} \gamma_2,$$

$$M_z = A_{11} \frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{\sin \vartheta} \gamma_3 + A_{33} r - A_{11} \frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{\operatorname{tg} \vartheta}.$$

Substituirt man diese Werthe in die Gleichungen 28), so findet man bei Rücksicht auf die Relationen, die zwischen den 9 Cosinus $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ bestehen, und auf die Gleichungen 43) und 44)

$$M_\alpha = 0, \quad M_\beta = 0$$

$$M_\gamma = A_{11} \sqrt{p^2 + q^2} \sin \vartheta + A_{33} r \cos \vartheta.$$

Ein specieller, hierher gehöriger Fall möge noch erwähnt werden. Besteht zwischen den Constanten ϑ, $\sqrt{p^2 + q^2}$, r die Relation

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{r}, \tag{47}$$

so ist Γ, wie aus 42) folgt, einer Constanten, nämlich Γ_0, gleich; nach 41) sind daher dann auch p und q, wie r, constant. Den 3 Grössen p, q, r kann man beliebige constante Werthe ertheilen, indem man über $\sqrt{p^2 + q^2}$, Γ_0, r passend verfügt; der Fall, dass p, q, r constant sind, ist also immer in dem vorher behandelten einbegriffen. Auch in ihm bildet der Stab eine Schraubenlinie; der Radius des Cylinders, auf dem sie liegt, ist

$$= \frac{\sqrt{p^2+q^2}}{p^2+q^2+r^2},$$

die Höhe eines Schraubenganges

$$= \frac{2\pi r}{p^2+q^2+r^2},$$

wie aus den Ausdrücken 45) und 46) folgt, wenn man erwägt, dass aus 47)

$$\cos\vartheta = \frac{r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}, \qquad \sin\vartheta = \frac{\sqrt{p^2+q^2}}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}} \tag{48}$$

sich ergiebt, wo das Vorzeichen der Wurzelgrösse $\sqrt{p^2+q^2+r^2}$ passend zu bestimmen ist.

§ 7.

Es soll nun ein Beispiel für das Gleichgewicht eines isotropen, im natürlichen Zustande *gekrümmten* Stabes behandelt werden. Nach der am Ende des § 2. gemachten Auseinandersetzung haben wir, um von dem Falle eines ursprünglich *geraden* zu dem eines ursprünglich *gekrümmten*, isotropen Stabes überzugehn, in dem Ausdrucke der Function f an Stelle von p, q, r zu setzen $p-p'$, $q-q'$, $r-r'$, wo p', q', r' die Werthe bezeichnen, die p, q, r erhalten, wenn der Stab aus einem Zustande, in dem er *gerade* ist, in seinen natürlichen Zustand übergeht. Nimmt man dieselbe Substitution bei F und G vor, so gelten auch dann alle Schlüsse, welche in den §§ 4. und 5. an die Function f geknüpft sind, und es behalten die Gleichungen 34) ihre Gültigkeit.

Ist der Querschnitt des Stabes ein Kreis, so treten daher an Stelle der Gleichungen 39) die folgenden

$$\begin{aligned}
A_{11}\frac{d(p-p')}{ds} &= A_{11}r(q-q') - A_{33}q(r-r') + \Gamma\sin f\sin\vartheta \\
A_{11}\frac{d(q-q')}{ds} &= A_{33}p(r-r') - A_{11}r(p-p') - \Gamma\cos f\sin\vartheta \\
A_{33}\frac{d(r-r')}{ds} &= A_{11}\Big(q(p-p') - p(q-q')\Big).
\end{aligned} \tag{49}$$

Dazu kommen ungeändert die Gleichungen 40).

Im Allgemeinen werden p', q', r' Functionen von s sein, die bedingt sind durch die ursprüngliche Gestalt des Stabes; wir wollen annehmen, dass sie constant sind, d. h. nach der am Ende des vorigen § gemachten Bemerkung, dass der Stab ursprünglich eine Schraubenlinie bildet. Wir wollen zeigen, dass den Gleichungen 49) und 40) sich dann durch die Annahme genügen lässt, dass auch

p, q, r constant sind, d. h. durch die Annahme, dass der Stab eine Schraubenlinie bleibt. Die letzte der Gleichungen 49) giebt bei dieser Annahme

$$\frac{p'}{p} = \frac{q'}{q}$$

und die beiden andern reduciren sich bei Rücksicht hierauf auf die eine

$$0 = A_{11} r \left(1 - \frac{p'}{p}\right) - A_{33}(r - r') + \frac{\Gamma}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}},$$

wenn man benutzt, dass nach 41) und 48)

$$\sin f \sin \vartheta = \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}, \qquad \cos f \sin \vartheta = \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}$$

ist. Die Gleichungen 40) aber werden erfüllt, wenn man

$$\cos \vartheta = \frac{r}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}$$

$$\varphi = \varphi_0 + s \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$$

$$\operatorname{tg} f = \frac{q}{p}$$

setzt, welche Gleichungen im vorigen § aus den Gleichungen 40) unter der Voraussetzung, dass ϑ und f constant sind, abgeleitet sind.

Weiter ergiebt sich dann

$$\xi = \frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{p^2 + q^2 + r^2} \sin \varphi, \quad \eta = -\frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{p^2 + q^2 + r^2} \cos \varphi, \quad \zeta = \frac{r}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}} s$$

und, wenn man benutzt, dass

$$M_x = A_{11}(p - p'), \quad M_y = A_{11}(q - q'), \quad M_z = A_{33}(r - r')$$

ist,

$$M_\alpha = 0, \qquad M_\beta = 0,$$

$$M_\gamma = A_{11} \frac{p^2 + q^2}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}} \left(1 - \frac{p'}{p}\right) + A_{33} \frac{r(r - r')}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}.$$

Neunundzwanzigste Vorlesung.

(Unendlich kleine Formänderungen eines unendlich dünnen, ursprünglich cylindrischen Stabes. Biegung und Torsion für den Fall, dass der Stab isotrop und nicht gespannt ist. Arbeit der durch die Dilatationen erzeugten Kräfte für einen isotropen gespannten Stab. Biegung eines gespannten Stabes. Methode von s'Gravesande zur Bestimmung des Elasticitätscoefficienten von Drähten. Biegung eines horizontal ausgespannten Drahtes durch seine Schwere. Longitudinal- und Torsionsschwingungen eines Stabes. Transversalschwingungen eines ungespannten Stabes. Transversalschwingungen einer schwach gespannten und einer stark gespannten Saite.)

§ 1.

Es sollen nun Gleichgewicht und Bewegung eines cylindrischen, unendlich dünnen Stabes unter der Voraussetzung weiter untersucht werden, dass die Verschiebungen seiner Theile unendlich klein sind, dass also p, q und r unendlich klein sind. Wir fassen zuerst den Fall ins Auge, dass der Stab im Gleichgewichte ist und auf seine Theile keine Kräfte wirken. Dann gelten die Gleichungen 34) der vorigen Vorlesung. Da die Aenderungen, welche die 9 Cosinus $\alpha_1, \beta_1, \ldots$ auf der ganzen Länge des Stabes erfahren, unendlich klein sind, so können in ihnen γ_1 und γ_2 als constant angenommen werden, vorausgesetzt, dass sie selbst endlich sind, dass also die Richtungen der Theile des Stabes nicht bis auf unendlich kleine Unterschiede mit der Richtung der Kraft Γ übereinstimmen. Diesen Fall schliessen wir vorläufig aus. Wir können dann

$$\gamma_1 \Gamma = A, \qquad \gamma_2 \Gamma = B$$

setzen, indem wir unter A und B Constanten verstehn. Bei Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen höherer Ordnung werden die genannten Gleichungen dadurch

$$\frac{d}{ds}\frac{\partial G}{\partial p} = B, \qquad \frac{d}{ds}\frac{\partial G}{\partial q} = -A, \qquad \frac{d}{ds}\frac{\partial G}{\partial r} = 0, \tag{1}$$

und diese Gleichungen gelten, welches auch das Coordinatensystem der ξ, η, ζ sein möge, obwohl die Gleichungen 34) eine gewisse Richtung der ζ-Achse voraussetzen; man sieht das ein, wenn man erwägt, dass die Grössen p, q, r ihrer Bedeutung nach von dem Achsensystem der ξ, η, ζ ganz unabhängig sind, ebenso wie die in der Function G vorkommenden Coefficienten. Durch Integration dieser Gleichungen erhält man p, q, r als lineare Functionen von s ausgedrückt, die drei willkührliche Constanten enthalten, diese lassen sich durch die Werthe bestimmen, die $\frac{\partial G}{\partial p}$, $\frac{\partial G}{\partial q}$, $\frac{\partial G}{\partial r}$, d. h. die Drehungsmomente M_x, M_y, M_z, an einem Ende des Stabes besitzen. Die Achsen der ξ, η, ζ können und wollen wir so legen, dass die Richtungen der Achsen der x, y, z überall unendlich wenig von ihren Richtungen abweichen; es sind dann α_1, β_2, γ_3 unendlich wenig von 1 verschieden und α_2, α_3, β_3, β_1, γ_1, γ_2 unendlich klein. Aus

$$-p = \alpha_2 \frac{d\alpha_3}{ds} + \beta_2 \frac{d\beta_3}{ds} + \gamma_2 \frac{d\gamma_3}{ds}$$

$$q = \alpha_1 \frac{d\alpha_3}{ds} + \beta_1 \frac{d\beta_3}{ds} + \gamma_1 \frac{d\gamma_3}{ds}$$

$$r = \alpha_2 \frac{d\alpha_1}{ds} + \beta_2 \frac{d\beta_1}{ds} + \gamma_2 \frac{d\gamma_1}{ds}$$

folgt daher

$$p = -\frac{d\beta_3}{ds}, \quad q = \frac{d\alpha_3}{ds}, \quad r = \frac{d\beta_1}{ds}.$$

Berücksichtigen wir die Gleichungen 12) der vorigen Vorlesung und schreiben ψ für β_1, so erhalten wir hieraus

$$p = -\frac{d^2\eta}{ds^2}, \quad q = \frac{d^2\xi}{ds^2}, \quad r = \frac{d\psi}{ds}. \tag{2}$$

Durch Integration dieser Gleichungen ergeben sich ξ und η als Functionen dritten Grades und ergiebt sich ψ als Function zweiten Grades von s; ξ und η bestimmen dann die Biegung und ψ bestimmt die Torsion des Stabes.

Wir specialisiren den betrachteten Fall nun weiter durch die Annahme, dass die Substanz des Stabes isotrop ist; den Querschnitt desselben lassen wir aber unbestimmt. Den am Ende des § 3. der siebenundzwanzigsten Vorlesung definirten Elasticitätscoefficienten, d. h. die Grösse

$$2K\frac{1+3\theta}{1+2\theta},$$

bezeichnen wie durch E, setzen

$$\int x^2 dx dy = \varkappa_1, \quad \int y^2 dx dy = \varkappa_2, \quad \int dx dy = \lambda \tag{3}$$

und benutzen, dass die Achsen der x und y so gewählt sind, dass

$$\int x dx dy = 0, \quad \int y dx dy = 0, \quad \int xy dx dy = 0$$

ist. Eine Betrachtung, die ähnlich der im Anfange des § 6. der vorigen Vorlesung durchgeführten ist, lehrt F und G kennen. Die dort mit w_0 bezeichnete Grösse muss den Factor r enthalten; mit Benutzung hiervon findet man

$$F = -\frac{E}{2}\left(\varkappa_1 q^2 + \varkappa_2 p^2 + \varrho r^2 + \lambda \sigma^2\right), \tag{4}$$

wo ϱ eine Constante bedeutet, die für den Fall, dass der Querschnitt des Stabes ein Kreis ist,

$$= \frac{1+2\vartheta}{1+3\vartheta} \frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2}$$

ist, während für einen anders gestalteten Querschnitt $\varrho =$ diesem Ausdrucke, multiplicirt mit einem Zahlenfactor ist, der für eine elliptische Gestalt nach der im § 3. der vorigen Vorlesung durchgeführten Rechnung sich leicht angeben lässt. Aus 4) folgt weiter

$$G = -\frac{E}{2}\left(\varkappa_1 q^2 + \varkappa_2 p^2 + \varrho r^2\right).$$

Die Gleichungen 1) geben hiernach

$$E\varkappa_2 \frac{dp}{ds} = -B, \quad E\varkappa_1 \frac{dq}{ds} = A, \quad \frac{dr}{ds} = 0.$$

Für die beiden Enden des Stabes sei $s = 0$ und $s = l$; dabei sei l positiv. A und B lassen sich dann definiren als die Summen der Componenten nach der x- und der y-Achse der Druckkräfte, welche von Aussen auf das Ende des Stabes $s = 0$ ausgeübt werden. Statt A und B wollen wir lieber die entsprechenden Componentensummen der Drucke einführen, welche auf das andere Ende von Aussen her wirken; nennen wir diese X' und Y', so ist

$$A = -X', \quad B = -Y'$$

und also

$$E\varkappa_2 \frac{dp}{ds} = Y', \quad E\varkappa_1 \frac{dq}{ds} = -X', \quad \frac{dr}{ds} = 0.$$

Diese Gleichungen integrire man und bestimme die Integrationsconstanten durch die Drehungsmomente der auf das Ende $s = l$ von Aussen wirkenden Druckkräfte in Bezug auf die diesem Ende entsprechenden Achsen der x, y, z. Nennt man diese Drehungsmomente M_x', M_y', M_z', so ist für $s = l$ den Gleichungen 33) der vorigen Vorlesung zufolge

$$E\varkappa_2 p = M_x', \quad E\varkappa_1 q = M_y', \quad E\varrho r = M_z'.$$

Daraus folgt für andere Werthe von s

$$E\varkappa_2 p = M_x' - Y'(l-s), \quad E\varkappa_1 q = M_y' + X'(l-s), \quad E\varrho r = M_z'.$$

Mit Hülfe der Gleichungen 2) erhält man hieraus bei passender Wahl des Coordinatensystems der ξ, η, ζ

$$E\varkappa_1 \xi = \frac{s^2}{2}\left(X'\left(l - \frac{s}{3}\right) + M_y'\right), \quad E\varkappa_2 \eta = \frac{s^2}{2}\left(Y'\left(l - \frac{s}{3}\right) - M_x'\right),$$

$$E\varrho\psi = M_z' s.$$

Auf den beiden ersten dieser Gleichungen beruht eine vielfach benutzte Methode zur Bestimmung des Elasticitätscoefficienten E aus Messungen über die Biegung eines Stabes. Ist der Elasticitätscoefficient bekannt, so bietet die dritte Gleichung ein Mittel, um die Constante θ, die in dem Ausdrucke von ϱ vorkommt, aus Messungen über die Torsion zu berechnen. Es ist von Poisson die Behauptung ausgesprochen, dass bei allen Körpern, wie wir sie hier betrachten, $\theta = \frac{1}{2}$ sei; man hat diese Behauptung mit Sicherheit weder beweisen, noch widerlegen können, weil man bei keinem Körper mit Sicherheit voraussetzen kann, dass er homogen und isotrop ist.

§ 2.

Wir haben im vorigen § den Fall ausgeschlossen, dass die Richtungen der Theile des Stabes bis auf unendlich kleine Abweichungen mit der Richtung der Kraft übereinstimmen, die in der vorigen Vorlesung mit Γ bezeichnet ist. Wir wollen jetzt diesen Fall mit ins Auge fassen. Dabei wollen wir das Princip der virtuellen Verrückungen benutzen und von der Gleichung 4) ausgehn. Für p, q, r haben wir ihre Werthe aus 2) zu setzen. Um einen Ausdruck für σ zu bilden, machen wir

$$\zeta = s + \omega\,,$$

wo dann ω eine unendlich kleine Grösse bedeutet. Nach der in der Gleichung 11) der vorigen Vorlesung von σ gegebenen Definition ist dann

$$(1+\sigma)^2 = \left(\frac{d\xi}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{ds}\right)^2 + \left(1 + \frac{d\omega}{ds}\right)^2,$$

und hieraus folgt, wenn wir es unbestimmt lassen, in welchen Beziehungen die Grössenordnungen zu einander stehen, von welchen ξ, η, ω unendlich klein sind,

$$\sigma = \frac{d\omega}{ds} + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{d\xi}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{ds}\right)^2\right). \tag{5}$$

Der Ausdruck der Arbeit, welche die durch die Verschiebungen erzeugten Kräfte für eine Verrückung leisten, bei denen ξ, η, ω, ψ um $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\omega$, $\delta\psi$ wachsen, also der Ausdruck von

$$\delta \int_0^l F ds\,,$$

wo 0 und l als die den Enden des Stabes entsprechenden Werthe von s angenommen sind, ist dann

$$-E\int_0^l ds\left(\varkappa_1 \frac{d^2\xi}{ds^2}\frac{d^2\delta\xi}{ds^2} + \varkappa_2 \frac{d^2\eta}{ds^2}\frac{d^2\delta\eta}{ds^2} + \varrho \frac{d\psi}{ds}\frac{d\delta\psi}{ds}\right.$$
$$\left. + \lambda\sigma\left(\frac{d\delta\omega}{ds} + \frac{d\xi}{ds}\frac{d\delta\xi}{ds} + \frac{d\eta}{ds}\frac{d\delta\eta}{ds}\right)\right).$$

Durch partielle Integrationen lässt sich derselbe in die folgende Form bringen:

$$\begin{aligned}
&-E\int_0^l ds\left(\varkappa_1 \frac{d^4\xi}{ds^4} - \lambda\frac{d}{ds}\left(\sigma\frac{d\xi}{ds}\right)\right)\delta\xi\\
&-E\varkappa_1\left[\frac{d^2\xi}{ds^2}\frac{d\delta\xi}{ds}\right]_0^l + E\left[\left(\varkappa_1\frac{d^3\xi}{ds^3} - \lambda\sigma\frac{d\xi}{ds}\right)\delta\xi\right]_0^l\\
&-E\int_0^l ds\left(\varkappa_2 \frac{d^4\eta}{ds^4} - \lambda\frac{d}{ds}\left(\sigma\frac{d\eta}{ds}\right)\right)\delta\eta\\
&-E\varkappa_2\left[\frac{d^2\eta}{ds^2}\frac{d\delta\eta}{ds}\right]_0^l + E\left[\left(\varkappa_2\frac{d^3\eta}{ds^3} - \lambda\sigma\frac{d\eta}{ds}\right)\delta\eta\right]_0^l\\
&+E\lambda\int_0^l ds\frac{d\sigma}{ds}\delta\omega\\
&-E\lambda\Big[\sigma\delta\omega\Big]_0^l\\
&+E\varrho\int_0^l ds\frac{d^2\psi}{ds^2}\delta\psi\\
&-E\varrho\left[\frac{d\psi}{ds}\delta\psi\right]_0^l.
\end{aligned} \tag{6}$$

Den Variationen $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\frac{d\xi}{ds}$, $\delta\frac{d\eta}{ds}$, $\delta\omega$, $\delta\psi$ wollen wir nun die Beschränkung auflegen, dass sie für $s = 0$ verschwinden, und einen Ausdruck für die Arbeit der Druckkräfte bilden, welche von Aussen auf das Ende des Stabes wirken, für welches $s = l$ ist. Mit Hülfe des Ausdrucks 24) und der Gleichungen 18) und 19) der fünften Vorlesung, so wie der Gleichungen 12) der vorigen finden wir diese Arbeit

$$= X'\delta\xi + Y'\delta\eta + Z'\delta\omega - M_x'\delta\frac{d\eta}{ds} + M_y'\delta\frac{d\xi}{ds} + M_z'\delta\psi, \tag{7}$$

wo die Variationen für $s = l$ zu nehmen sind, die Zeichen X', Y', M_x', M_y', M_z' dieselbe Bedeutung, wie im vorigen § haben und Z' die Summe der Componenten nach der z-Achse der Druckkräfte bedeutet, auf welche jene Zeichen sich beziehn.

Die Bedingung für das Gleichgewicht ist die, dass die Summe der Ausdrücke 6) und 7) verschwindet, welches auch die willkührlich gebliebenen Werthe der in ihnen vorkommenden Variationen sind. Die hieraus folgenden Gleichungen enthalten die im vorigen § für einen isotropen Stab abgeleiteten Resultate, sind aber insofern allgemeiner, als sie auch den dort ausgeschlossenen Fall umfassen.

Für die Torsion ψ ergiebt sich hier derselbe Ausdruck, der dort gefunden wurde. Es folgt ferner, dass σ constant, und zwar durch die Gleichung

$$E\lambda\sigma = Z' \tag{8}$$

bestimmt ist. Mit Hülfe dieses Werthes von σ ist jede der Grössen ξ, η, welche die Biegung bestimmen, aus der für sie geltenden Differentialgleichung und den zugehörigen Grenzbedingungen zu berechnen. Ist das geschehn, so lehrt die Gleichung 5) $\frac{d\omega}{ds}$ und, wenn man noch festsetzt, dass ω mit s verschwindet, ω selbst kennen.

Die Differentialgleichung für ξ ist

$$E\varkappa_1 \frac{d^4\xi}{ds^4} - Z' \frac{d^2\xi}{ds^2} = 0; \tag{9}$$

dazu kommen die Grenzbedingungen, dass für $s = 0$

$$\xi = 0, \quad \frac{d\xi}{ds} = 0 \tag{10}$$

und für $s = l$

$$E\varkappa_1 \frac{d^2\xi}{ds^2} = M_y', \qquad E\varkappa_1 \frac{d^3\xi}{ds^3} - Z' \frac{d\xi}{ds} = -X' \tag{11}$$

ist.

Wenn Z' nicht unendlich gross gegen X' ist, so ist das zweite Glied der linken Seite der letzten dieser Gleichungen unendlich klein gegen ihre rechte Seite; die genannte Gleichung kann daher geschrieben werden

$$E\varkappa_1 \frac{d^3\xi}{ds^3} = -X'.$$

Vorausgesetzt, dass $\frac{d^3\xi}{ds^3}$ und $\frac{d\xi}{ds}$ von derselben Grössenordnung sind, folgt zugleich, dass Z' unendlich klein gegen $E\varkappa_1$ ist und hieraus wieder, dass die Gleichung 9) sich schreiben lässt

$$\frac{d^4\xi}{ds^4} = 0.$$

Daraus ergiebt sich dann derselbe Werth von ξ, der im vorigen § abgeleitet ist.

Aehnliche Betrachtungen, wie über ξ, lassen sich über η anstellen.

§ 3.

Um die allgemeineren, im vorigen § für die Biegung aufgestellten Formeln auf ein Beispiel anzuwenden, behandeln wir eine Methode zur Bestimmung der Elasticitätscoefficienten, die für dünne Drähte sehr bequem ist und von s'Gravesande herrührt. Die Methode ist diese: es wird der Draht horizontal zwischen 2 Klemmen ausgespannt, an seine Mitte ein Gewicht gehängt und die Senkung beobachtet, die dadurch diese Mitte erfährt. Eine Hälfte des Drahtes sehen wir als den Stab an, auf den unsere Formeln sich beziehn, den Punkt, welcher das Gewicht trägt, als das Ende $s = 0$; die ξ-Achse nehmen wir vertical aufwärts gekehrt an. Der Stab befindet sich dann in der $\xi\zeta$-Ebene, es ist $\eta = 0$, l die halbe Länge des Drahtes, ξ für $s = l$ die beobachtete Senkung und X' die Grösse des angehängten Gewichtes. M_y' und Z' sind hier nicht direct gegeben; zur Bestimmung dieser Grössen hat man die Bedingungen, dass für $s = l$

$$\frac{d\xi}{ds} = 0 \quad \text{und} \quad \omega = \omega'$$

ist, wenn ω' die Verlängerung bedeutet, die die Hälfte des Drahtes erfuhr, als dieser zwischen den Klemmen ausgespannt wurde.

Man setze

$$h^2 = \frac{Z'}{E\varkappa_1}$$

oder, was nach 8) dasselbe ist,

$$h^2 = \frac{\lambda}{\varkappa_1}\sigma; \tag{12}$$

die Gleichung 9) wird dann

$$\frac{d^4\xi}{ds^4} = h^2\frac{d^2\xi}{ds^2}.$$

Das Integral derselben, das den für $s = 0$ zu erfüllenden Bedingungen 10) genügt, ist

$$\xi = A\,(e^{hs} - hs - 1) + B\,(e^{-hs} + hs - 1),$$

wo A und B willkührliche Constanten sind. Die Bedingungen 11) geben für diese

$$E\varkappa_1 h^3 A\,(e^{hl} + e^{-hl}) = hM_y' - e^{-hl}X'$$
$$E\varkappa_1 h^3 B\,(e^{hl} + e^{-hl}) = hM_y' + e^{hl}X',$$

während daraus, dass $\frac{d\xi}{ds}$ für $s = l$ verschwindet,

$$A\,(e^{hl} - 1) + B\,(-e^{-hl} + 1) = 0$$

folgt. Aus diesen 3 Gleichungen ergiebt sich

$$h M_y' \left(e^{\frac{hl}{2}} + e^{-\frac{hl}{2}}\right) = -\left(e^{\frac{hl}{2}} - e^{-\frac{hl}{2}}\right) X'$$

$$E \varkappa_1 h^3 A \left(e^{\frac{hl}{2}} + e^{-\frac{hl}{2}}\right) = - e^{-\frac{hl}{2}} X'$$

$$E \varkappa_1 h^3 B \left(e^{\frac{hl}{2}} + e^{-\frac{hl}{2}}\right) = \quad e^{\frac{hl}{2}} X'.$$

Bezeichnet man den Werth von ξ für $s = l$ durch ξ' und setzt zur Abkürzung

$$\frac{hl}{2} = p,$$

so findet man hieraus

$$\xi' = \frac{X' l^3}{4 E \varkappa_1} \frac{1}{p^2} \left(1 - \frac{1}{p} \frac{e^p - e^{-p}}{e^p + e^{-p}}\right). \tag{13}$$

Um nach dieser Gleichung den Elasticitätscoefficienten E berechnen zu können, muss man p noch ermitteln. Aus 5) und 12) folgt

$$4 p^2 \frac{\varkappa_1}{\lambda} = \omega' l + \frac{l}{2} \int_0^l \left(\frac{d\xi}{ds}\right)^2 ds.$$

Es ist aber

$$\frac{d\xi}{ds} = \frac{X' l^2}{4 E \varkappa_1} \frac{1}{p^2} \left(1 - \frac{e^{p\left(\frac{2s}{l} - 1\right)} + e^{-p\left(\frac{2s}{l} - 1\right)}}{e^p + e^{-p}}\right);$$

hiernach wird die letzte Gleichung, wenn man das durch 13) bestimmte ξ' einführt,

$$4 p^2 \frac{\varkappa_1}{\lambda} = \omega' l + \frac{\xi'^2}{2} \frac{e^{2p} + e^{-2p} + 4 - \frac{3}{2} \frac{1}{p} \left(e^{2p} - e^{-2p}\right)}{\left(e^p + e^{-p} - \frac{1}{p}\left(e^p - e^{-p}\right)\right)^2}. \tag{14}$$

Der Factor von ξ'^2 ist stets positiv, ω' nehmen wir als positiv an. Hieraus folgt, dass, wenn eine der Grössen $\omega' l$ und ξ'^2 unendlich gross gegen $\frac{\varkappa_1}{\lambda}$ ist, oder, wenn beide es sind, p unendlich gross sein muss. Dieser Fall ist bei den in Rede stehenden Versuchen näherungsweise verwirklicht. Für sie ist daher nach 13) und 14) in erster Näherung

$$\xi' = \frac{X' l^3}{4 E \varkappa_1} \frac{1}{p^2}, \quad 4 p^2 \frac{\varkappa_1}{\lambda} = \omega' l + \frac{\xi'^2}{2},$$

also

$$E \lambda \xi' \left(\omega' l + \frac{\xi'^2}{2}\right) = X' l^3.$$

Will man die Glieder nächst kleinerer Ordnung berücksichtigen, so hat man hierzu die Gleichungen

$$\xi' = \frac{X' l^3}{4 E \varkappa_1} \frac{1}{p^2} \left(1 - \frac{1}{p}\right), \quad 4 p^2 \frac{\varkappa_1}{\lambda} = \omega' l + \frac{\xi'^2}{2} \left(1 + \frac{1}{2p}\right)$$

zu benutzen, deren zweite p kennen lehrt, wenn man in ihrer rechten Seite für p seinen ersten Näherungswerth setzt.

Wir merken noch Folgendes an. Der Factor von ξ'^2 in der Gleichung 14) wird für keinen endlichen Werth von p unendlich; daraus folgt, dass, wenn $\omega' l$ und ξ'^2 unendlich klein gegen $\frac{\varkappa_1}{\lambda}$ sind, p unendlich klein sein muss. In diesem Falle giebt daher die Gleichung 13)

$$\xi' = \frac{X' l^3}{12 E \varkappa_1}.$$

§ 4.

Wir wollen nun ein Beispiel für das Gleichgewicht eines Stabes behandeln, auf dessen Theile *Kräfte* wirken. Einen Draht denken wir uns horizontal zwischen zwei Klemmen ausgespannt und suchen die Biegung, die er erleidet, wenn auf seine Theile die Schwere wirkt.

Die ξ-Achse sei vertical abwärts gekehrt, g die Schwere, μ die Dichtigkeit des Drahtes; aus dem Ausdruck 6) folgt dann

$$\varkappa_1 \frac{d^4 \xi}{d s^4} - \lambda \sigma \frac{d^2 \xi}{d s^2} = \frac{\mu \lambda g}{E}, \quad \frac{d\sigma}{ds} = 0;$$

ist für die Enden des Drahtes $s = l$ und $s = -l$, so soll für diese Werthe von s

$$\xi = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d\xi}{ds} = 0$$

sein; bedeutet ω' die Verlängerung, welche eine Drahthälfte bei dem Ausspannen erlitten hat, so ist endlich

$$\sigma = \frac{\omega'}{l} + \frac{1}{2l} \int_0^l ds \left(\frac{d\xi}{ds}\right)^2.$$

Diese Gleichungen lassen sich in ganz ähnlicher Weise behandeln, wie die Gleichungen, die wir im vorigen § entwickelt haben. Wir wollen uns hier aber auf die Betrachtung der Grenzfälle beschränken, der Fälle, dass $\varkappa_1$ gegen $\lambda \sigma$ (oder gegen $\lambda l^2 \sigma$, was dasselbe ist, da wir l als endlich ansehn) unendlich gross oder unendlich klein ist.

Ist $\varkappa_1$ unendlich gross gegen $\lambda \sigma$, so wird die für ξ aufgestellte Differentialgleichung

$$\frac{d^4 \xi}{d s^4} = \frac{\mu \lambda g}{E \varkappa_1},$$

vorausgesetzt, dass $\frac{d^2 \xi}{d s^2}$ nicht unendlich gross gegen $\frac{d^4 \xi}{d s^4}$ ist. Ihr und den 4 Grenzbedingungen wird genügt durch

$$\xi = \frac{\mu \lambda g}{24 E \varkappa_1} (l^2 - s^2)^2 .$$

Es wird $\varkappa_1$ unendlich gross gegen $\lambda \sigma$, wenn $\sqrt{\omega'}$ und ξ unendlich klein sind gegen die Dimensionen des Querschnitts des Drahtes.

Ist eine der Grössen $\sqrt{\omega'}$ und ξ dagegen unendlich gross gegen die Dimensionen des Querschnitts, oder sind es beide, so ist $\varkappa_1$ unendlich klein gegen $\lambda \sigma$ und die Differentialgleichung für ξ wird

$$\frac{d^2 \xi}{ds^2} = - \frac{\mu g}{E \sigma},$$

vorausgesetzt, dass nicht $\frac{d^4 \xi}{d s^4}$ unendlich gross gegen $\frac{d^2 \xi}{d s^2}$ ist. Das Integral dieser Gleichung, das der Bedingung genügt, dass ξ für $s = \pm l$ verschwindet, ist

$$\xi = \frac{\mu g}{2 E \sigma} (l^2 - s^2) .$$

Der Bedingung, dass für die Enden des Drahtes auch $\frac{d \xi}{d s}$ verschwindet, kann dasselbe nicht angepasst werden; unendlich nahe an den Enden ändert sich $\frac{d \xi}{d s}$ unendlich schnell, hier ist $\frac{d^4 \xi}{d s^4}$ unendlich gross gegen $\frac{d^2 \xi}{d s^2}$ und es gilt nicht die vereinfachte Differentialgleichung. Zur Bestimmung von σ ergiebt sich die Gleichung

$$\sigma = \frac{\omega'}{l} + \frac{l^2}{6} \left(\frac{\mu g}{E \sigma} \right)^2 .$$

§ 5.

Die folgenden Betrachtungen sollen sich auf die *Schwingungen* eines unendlich dünnen Stabes beziehn. Wir beschränken dieselben auf den Fall, dass die Schwingungen unendlich klein sind und der Stab ursprünglich gerade und isotrop ist. Die Differentialgleichungen der Bewegung findet man leicht mit Hülfe des Hamilton'schen Princips aus dem Ausdrucke 6) und der Gleichung 27) der vorigen Vorlesung. Bei der letzteren hat man zunächst zu beachten, dass bei unseren jetzigen Annahmen nach 25) der vorigen Vorlesung

$$R = \frac{\partial \beta_1}{\partial t},$$

oder, wenn wir wieder ψ für β_1 schreiben,

$$R = \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

ist; setzen wir ferner wieder

$$\zeta = s + \omega$$

und führen die durch 3) definirten Constanten $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ ein, so wird die genannte Gleichung

$$T = \frac{\mu}{2}\int ds \left\{\lambda\left(\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial t}\right)^2\right) + (\varkappa_1 + \varkappa_2)\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^2\right\}.$$

Daraus folgt für

$$\delta \int T\,dt,$$

wenn man für die Grenzen der Zeit $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\omega$, $\delta\psi$ gleich Null setzt, der Ausdruck

$$\begin{aligned} &- \mu\lambda \int\int ds\,dt \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}\,\delta\xi + \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}\,\delta\eta + \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2}\,\delta\omega\right) \\ &- \mu(\varkappa_1 + \varkappa_2)\int\int ds\,dt\,\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\,\delta\psi. \end{aligned} \tag{15}$$

Wir untersuchen specielle Fälle. Zuerst nehmen wir an, dass der Stab bei seiner Bewegung gerade bleibt, d. h. wir setzen

$$\xi = 0 \quad \text{und} \quad \eta = 0.$$

Da dann nach 5)

$$\sigma = \frac{\partial \omega}{\partial s}$$

ist, so liefert das Hamilton'sche Princip die Differentialgleichungen

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = \frac{E}{\mu}\frac{\partial^2 \omega}{\partial s^2}$$

und

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{E\varrho}{\mu(\varkappa_1 + \varkappa_2)}\frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2}.$$

Die erste von diesen bestimmt die *Longitudinal-Schwingungen*, die zweite die *Torsions-Schwingungen* des Stabes. Beide sind von derselben Form, einer Form, die wir schon in der dreiundzwanzigsten Vorlesung zu behandeln gehabt haben. Sie stellen Wellen dar, die theils in der Richtung, in der s wächst, theils in der entgegengesetzten Richtung mit einer constanten Geschwindigkeit sich fortpflanzen. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen Wellen ist

$$\sqrt{\frac{E}{\mu}},$$

die der Torsionswellen

$$\sqrt{\frac{E\varrho}{\mu(\varkappa_1 + \varkappa_2)}}.$$

Sowohl durch longitudinale, als durch Torsions-Schwingungen kann der Stab einfache Töne geben; es ist leicht die Schwingungszahlen derselben und die Lage der *Knoten*, die ihnen entsprechen, zu berechnen. Es wird ausreichen, das für die Longitudinalschwingungen zu zeigen, da die Torsionsschwingungen sich von diesen in der Rechnung nur durch einen andern Werth der Fortpflanzungsgeschwindigkeit unterscheiden. Wir schreiben die Differentialgleichung der Bewegung

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial s^2},$$

indem wir mit a die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer longitudinalen Welle bezeichnen, und setzen

$$\omega = u \sin 2\pi n t$$

wo u eine Function der einen Variabeln s sein soll; n ist dann die Schwingungszahl das Tones. Für u ergiebt sich dabei die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{d^2 u}{d s^2} = -\left(\frac{2\pi n}{a}\right)^2 u;$$

das allgemeine Integral derselben ist

$$u = A \sin \frac{2\pi n}{a} s + B \cos \frac{2\pi n}{a} s,$$

wo A und B willkührliche Constanten bedeuten. Es sind nun 3 Fälle zu unterscheiden, der Fall, dass beide Enden fest, der Fall, dass beide Enden frei sind, und der Fall, dass das eine Ende fest, das andere frei ist. Für ein festes Ende ist immer

$$\omega = 0, \quad \text{also} \quad u = 0,$$

für ein freies, wie aus dem Ausdruck 6) hervorgeht,

$$\frac{\partial \omega}{\partial s} = 0, \quad \text{also} \quad \frac{du}{ds} = 0.$$

Für die Enden des Stabes sei

$$s = 0 \quad \text{und} \quad s = l.$$

Sind beide Enden fest, so genügt man den für u geltenden Bedingungen, wenn man

$$u = A \sin \frac{2\pi n}{a} s$$

$$n = h \frac{a}{2}$$

setzt, wo h eine ganze Zahl bedeutet, sind beide Enden frei, so hat man

$$u = B \cos \frac{2\pi n}{a} s,$$

während n denselben Werth besitzt; ist das erste Ende fest, das zweite frei, so ist

$$u = A \sin \frac{2\pi n}{a} s$$

$$n = (2h - 1) \frac{a}{4l}.$$

Bei jeder dieser Schwingungsarten giebt es Punkte, für welche $u = 0$ ist, die also in Ruhe bleiben; es sind dieses die *Knoten;* für dieselben ist in den 3 unterschiedenen Fällen, wenn k eine ganze Zahl bedeutet,

$$s = l\,\frac{k}{h}$$

$$s = l\,\frac{2k-1}{2h}$$

und

$$s = l\,\frac{2k}{2h-1}\,.$$

§ 6.

Wir lassen jetzt die Voraussetzung fallen, dass der Stab gerade bleibt, machen aber die Annahme, dass $\psi = 0$ und $\eta = 0$ ist. Ebenso, wie dieser Fall, wäre der zu behandeln, dass $\psi = 0$ und $\xi = 0$.

Aus den Ausdrücken 15), 6) und 5) folgt mit Hülfe des Hamilton'schen Princips

$$\begin{aligned} &\mu\,\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + E\,\frac{\varkappa_1}{\lambda}\,\frac{\partial^4 \xi}{\partial s^4} - E\,\frac{\partial}{\partial s}\left(\sigma\,\frac{\partial \xi}{\partial s}\right) = 0 \\ &\mu\,\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} - E\,\frac{\partial \sigma}{\partial s} = 0 \qquad\qquad 16) \\ &\sigma = \frac{\partial \omega}{\partial s} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial s}\right)^2. \end{aligned}$$

Hierzu kommen gewisse für die Enden des Stabes, $s = 0$ und $s = l$, geltende Bedingungen, die aus dem Ausdrucke 6) abzulesen sind.

Man erhält eine particuläre Lösung des vorgelegten Problems, wenn man

$$\omega = 0 \quad \text{und} \quad \sigma = 0$$

setzt. Dabei ergiebt sich aus 16) für ξ die partielle Differentialgleichung

$$\mu\lambda\,\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\,E\varkappa_1\,\frac{\partial^4 \xi}{\partial s^4}\,;$$

für ein freies Ende muss nach 6)

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial s^2} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^3 \xi}{\partial s^3} = 0,$$

für ein Ende, das so befestigt ist, dass es sich weder verschieben, noch drehen kann,

$$\xi = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \xi}{\partial s} = 0$$

sein.

Wir nehmen an, dass der Stab einen einfachen Ton von der Schwingungszahl n giebt, und setzen

$$\xi = u \sin 2\pi n t\,, \tag{17)}$$

wo u eine Function von s bedeutet, die der Differentialgleichung

$$\frac{d^4 u}{d s^4} = \frac{\mu \lambda}{E \varkappa_1} (2\pi n)^2 u$$

genügt. Führt man eine Constante p durch die Gleichung

$$\frac{\mu \lambda}{E \varkappa_1} (2\pi n)^2 = \left(\frac{p}{l}\right)^4 \tag{18)}$$

ein, so ist das allgemeine Integral derselben

$$u = A \cos \frac{ps}{l} + B \sin \frac{ps}{l} + C\, \frac{e^{\frac{ps}{l}} + e^{-\frac{ps}{l}}}{2} + D\, \frac{e^{\frac{ps}{l}} - e^{-\frac{ps}{l}}}{2}\,,$$

wo A, B, C, D willkührliche Constanten bedeuten. Die 4 Grenzbedingungen bestimmen 3 von diesen und geben für p eine transcendente Gleichung, deren Wurzeln bei Rücksicht auf 18) die Werthe kennen lehren, die n haben kann.

Das Ende $s = 0$ sei frei; die beiden hier zu erfüllenden Bedingungen geben dann

$$C = A\,, \qquad D = B\,,$$

also

$$u = A\left(\cos \frac{ps}{l} + \frac{e^{\frac{ps}{l}} + e^{-\frac{ps}{l}}}{2}\right) + B\left(\sin \frac{ps}{l} + \frac{e^{\frac{ps}{l}} - e^{-\frac{ps}{l}}}{2}\right). \tag{19)}$$

Ist auch das Ende $s = l$ frei, so müssen hiernach die Gleichungen

$$A\left(\frac{e^p + e^{-p}}{2} - \cos p\right) + B\left(\frac{e^p - e^{-p}}{2} - \sin p\right) = 0$$

$$A\left(\frac{e^p - e^{-p}}{2} + \sin p\right) + B\left(\frac{e^p + e^{-p}}{2} - \cos p\right) = 0$$

bestehen. Sie bestimmen das Verhältniss $A : B$ und geben für p die Gleichung

$$\left(\frac{e^p + e^{-p}}{2} - \cos p\right)^2 - \left(\frac{e^p - e^{-p}}{2}\right)^2 + \sin^2 p = 0\,,$$

d. h. die Gleichung

$$\cos p\, \frac{e^p + e^{-p}}{2} = 1\,.$$

Die Wurzeln derselben sind die Werthe von x, die den Durchschnittspunkten der Curven entsprechen, deren Gleichungen

$$y = \cos x \quad \text{und} \quad y = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

sind. Die Discussion dieser Gleichungen zeigt, dass $p = 0$ eine Wurzel, und zwar eine 4-fache, ist, dass die nächst grössere Wurzel etwas grösser als $\frac{3\pi}{2}$, die folgende etwas kleiner als $\frac{5\pi}{2}$ u. s. f. ist, und dass die Wurzeln um so mehr einem ungeraden Vielfachen von $\frac{\pi}{2}$ sich nähern, je grösser ihre Ordnungszahl wird. $p = 0$ entspricht einer unendlichen Schwingungsdauer, also keinem Tone; für den tiefsten Ton des Stabes, für seinen *Grundton*, ist näherungsweise $p = \frac{3\pi}{2}$, d. h. $= 4{,}712$; einen genaueren Näherungswerth erhält man, wenn man p aus der Gleichung

$$\cos p = \frac{2}{e^{\frac{3\pi}{2}} + e^{-\frac{3\pi}{2}}}$$

berechnet, aus der $p = 4{,}730$ sich ergiebt. Durch ein ähnliches Verfahren kann man alle Wurzeln der in Rede stehenden Gleichung mit beliebiger Genauigkeit finden.

Die *Knoten* sind durch die Gleichung

$$u = 0$$

bestimmt; setzt man

$$\frac{s}{l} = x,$$

so ist dieselbe

$$\left(\frac{e^p - e^{-p}}{2} - \sin p\right)\left(\frac{e^{px} + e^{-px}}{2} + \cos px\right)$$
$$= \left(\frac{e^p + e^{-p}}{2} - \cos p\right)\left(\frac{e^{px} - e^{-px}}{2} + \sin px\right).$$

Nach der Rechnung von Strehlke*) sind die Werthe von x für die ersten Töne

Ton 1.	Ton 2.	Ton 3.
0,2242	0,1321	0,0944
0,7758	0,5	0,3585
	0,8679	0,6415
		0,9056.

Ist das Ende $s = l$ fest, während das Ende $s = 0$ frei ist, so gilt auch die Gleichung 19), aber zur Bestimmung von $A : B$ und p hat man

$$A\left(\frac{e^p + e^{-p}}{2} + \cos p\right) + B\left(\frac{e^p - e^{-p}}{2} + \sin p\right) = 0$$
$$A\left(\frac{e^p - e^{-p}}{2} - \sin p\right) + B\left(\frac{e^p + e^{-p}}{2} + \cos p\right) = 0,$$

woraus

$$\cos p \frac{e^p + e^{-p}}{2} = -1$$

*) Dove's Repertorium der Physik III, 110.

sich ergiebt. Die kleinste positive Wurzel dieser Gleichung ist etwas grösser als $\frac{\pi}{2}$ (genauer 1,875), die folgende etwas kleiner als $\frac{3\pi}{2}$, die nächste etwas grösser als $\frac{5\pi}{2}$ u. s. f.

Für die Knoten ist, wenn wieder $\frac{s}{l} = x$ gesetzt wird,

$$\left(\frac{e^p - e^{-p}}{2} + \sin p\right)\left(\frac{e^{px} + e^{-px}}{2} + \cos px\right)$$
$$= \left(\frac{e^p + e^{-p}}{2} + \cos p\right)\left(\frac{e^{px} - e^{-px}}{2} + \sin px\right).$$

Wir wollen noch den Fall betrachten, dass, während das Ende $s = 0$ frei ist, das Ende $s = l$ in einer gewissen periodischen Bewegung erhalten wird. Es sei für $s = l$

$$\xi = \alpha \sin 2\pi n t, \quad \frac{\partial \xi}{\partial s} = \beta \sin 2\pi n t, \tag{20}$$

wo α, β und n gegebene Constanten sind. Der für ξ geltenden partiellen Differentialgleichung und den für $s = 0$ zu erfüllenden Grenzbedingungen genügt man auch dann durch die Gleichungen 17) und 19), wenn man p aus 18) berechnet; die für $s = l$ aufgestellten Bedingungen geben

$$\alpha = A\left(\frac{e^p + e^{-p}}{2} + \cos p\right) + B\left(\frac{e^p - e^{-p}}{2} + \sin p\right)$$
$$\frac{l}{p}\beta = A\left(\frac{e^p - e^{-p}}{2} - \sin p\right) + B\left(\frac{e^p + e^{-p}}{2} + \cos p\right),$$

zwei Gleichungen, die im Allgemeinen A und B vollständig bestimmen. Nur wenn die Determinante der Coefficienten von A und B verschwindet, d. h. wenn p und n einem der Töne entsprechen, die der Stab bei einem freien und einem befestigten Ende geben kann, werden A und B unbestimmt, falls das Verhältniss $\alpha : \beta$ einen gewissen Werth hat, unendlich bei andern Werthen dieses Verhältnisses.

In ganz ähnlicher Weise lässt sich der Fall behandeln, dass statt der Gleichungen 20) die Gleichungen

$$\xi = \alpha' \cos 2\pi n t, \quad \frac{\partial \xi}{\partial s} = \beta' \cos 2\pi n t$$

für $s = l$ bestehen sollen. Setzt man ξ gleich der Summe der Ausdrücke, die in diesen beiden Fällen für ξ gelten, so lernt man die Bewegung des Stabes in dem Falle kennen, dass für $s = l$

$$\xi = \alpha \sin 2\pi n t + \alpha' \cos 2\pi n t$$
$$\frac{\partial \xi}{\partial s} = \beta \sin 2\pi n t + \beta' \cos 2\pi n t$$

ist.

§ 7.

Wir wollen jetzt particuläre Lösungen der Gleichungen 16) aufsuchen, bei denen nicht ω und σ verschwinden und die auf die Transversalschwingungen der *Saiten* sich beziehn. Man nennt einen gespannten Stab eine *Saite*, wenn seine Querdimensionen hinreichend klein sind auch gegen die Verschiebungen seiner Theile. In dem zweiten Gliede der ersten der Gleichungen 16) kommt der Factor $\frac{\varkappa_1}{\lambda}$ vor; dieser Factor ist von der Ordnung des Querschnitts; wir werden annehmen, dass der Querschnitt so klein ist gegen die Verschiebungen, die stattfinden, dass das genannte Glied unendlich klein ist gegen das dritte Glied derselben Gleichung. Die Gleichungen 16) sind dann

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{E}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma}{\partial s}\frac{\partial \xi}{\partial s} + \sigma \frac{\partial^2 \xi}{\partial s^2} \\ \frac{\mu}{E}\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma}{\partial s} \\ \sigma &= \frac{\partial \omega}{\partial s} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial s}\right)^2. \end{aligned} \tag{21}$$

Wir fügen die Bedingungen hinzu, dass

$$\text{für } s = 0 \qquad \xi = 0 \qquad \omega = 0$$
$$\text{für } s = l \qquad \xi = 0 \qquad \omega = \omega'$$

ist, wo ω' eine gegebene Constante bedeutet; hierdurch ist ausgesprochen, dass die beiden Enden der Saite befestigt sind; der Werth von ω' bestimmt die *Spannung*, die ihr gegeben ist.

Wir wollen nur solche Bewegungen aufsuchen, bei welchen $\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2}$ unendlich klein gegen $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$ ist. Bei dieser Annahme folgt aus den beiden ersten der Gleichungen 21), dass $\frac{\partial \sigma}{\partial s}$ unendlich klein gegen $\frac{\partial \sigma}{\partial s}\frac{\partial \xi}{\partial s} + \sigma \frac{\partial^2 \xi}{\partial s^2}$ ist; es ist aber $\frac{\partial \sigma}{\partial s}\frac{\partial \xi}{\partial s}$ unendlich klein gegen $\frac{\partial \sigma}{\partial s}$, es muss also $\sigma \frac{\partial^2 \xi}{\partial s^2}$ unendlich gross gegen $\frac{\partial \sigma}{\partial s}$ und um so mehr unendlich gross gegen $\frac{\partial \sigma}{\partial s}\frac{\partial \xi}{\partial s}$ sein. Hiernach ist die erste der Gleichungen 21)

$$\frac{\mu}{E}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \sigma \frac{\partial^2 \xi}{\partial s^2}. \tag{22}$$

Daraus, dass $\frac{\partial \sigma}{\partial s}$ unendlich klein gegen $\sigma \frac{\partial^2 \xi}{\partial s^2}$ ist, folgt, dass $\frac{\partial \sigma}{\partial s}$ um so mehr unendlich klein gegen σ, dass also σ unabhängig von s ist; nach der dritten der Gleichungen 21) hat man daher

$$\sigma = \frac{\omega'}{l} + \frac{1}{2l}\int_0^l \left(\frac{\partial \xi}{\partial s}\right)^2 ds,$$

und also nach 22)

$$\frac{\mu}{E}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \left(\frac{\omega'}{l} + \frac{1}{2l}\int_0^l \left(\frac{\partial \xi}{\partial s}\right)^2 ds\right)\frac{\partial^2 \xi}{\partial s^2}. \tag{23}$$

Diese Gleichung vereinfacht sich sehr wesentlich, wenn die Spannung der Saite gross genug ist, wenn nämlich ω' so gross gegen ξ ist, dass das zweite Glied des Factors von $\frac{\partial^2 \xi}{\partial s^2}$ gegen das erste vernachlässigt werden kann. Bevor wir auf die Betrachtung dieses Falles näher eingehn, wollen wir gewisse particuläre Lösungen der Gleichung 23) ableiten, welche gelten, wie klein auch die Spannung sein möge.

Wir setzen

$$\xi = u \sin \frac{ms}{l}\pi,$$

wo m eine ganze Zahl, u eine zu bestimmende Function von t bedeutet; den Bedingungen, die ξ für $s = 0$ und $s = l$ zu erfüllen hat, wird dadurch genügt; es wird auch der Gleichung 23) genügt, wenn man u aus der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = -\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 \frac{E}{\mu} u \left(\frac{\omega'}{l} + \left(\frac{m\pi}{2l}\right)^2 u^2\right) \tag{24}$$

bestimmt. Das allgemeine Integral dieser ist

$$u = a \cos \operatorname{am} h(t - t_0), \quad \text{mod. } \varkappa,$$

wo a und t_0 zwei willkührliche Constanten sind, h und $\varkappa$ zwei Constanten, die in gewisser Weise von a abhängen. Aus dieser Annahme für u ergiebt sich nämlich

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = -h^2 u\left(1 - 2\varkappa^2 + \frac{2\varkappa^2}{a^2}u^2\right)$$

und diese Gleichung wird mit 24) identisch, wenn man

$$2\varkappa^2 = \frac{m^2\pi^2 a^2}{m^2\pi^2 a^2 + 4l\omega'},$$

$$h^2 = \frac{m^2\pi^2}{4l^4}\frac{E}{\mu}\left(m^2\pi^2 a^2 + 4l\omega'\right)$$

macht.

§ 8.

Wir wenden uns zur Erörterung des Falles, auf den schon hingewiesen wurde, dass die Spannung der Saite so gross ist, dass in der Gleichung 23) das zweite Glied des Factors von $\frac{\partial^2 \xi}{\partial s^2}$ gegen das erste vernachlässigt werden kann. Die genannte Gleichung ist dann

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{E}{\mu}\frac{\omega'}{l}\frac{\partial^2 \xi}{\partial s^2}.$$

Dazu kommen die Bedingungen, dass ξ für $s = 0$ und für $s = l$ verschwindet.

Dieselbe Differentialgleichung haben wir schon mehrmals zu behandeln gehabt, zuletzt bei der Untersuchung der Longitudinal- und Torsions-Schwingungen eines elastischen Stabes; unter den dort betrachteten Fällen befindet sich auch der, dass dieselben Grenzbedingungen, wie hier, zu erfüllen sind. Die für diesen Fall angegebenen particulären Lösungen gelten auch hier, und auch hier gilt, was dort über die möglichen einfachen Töne und die entsprechenden Knoten gesagt ist. Aus den bezeichneten particulären Lösungen wollen wir nun für die transversal schwingende Saite allgemeinere zusammensetzen. Um die Formeln etwas zu kürzen, führen wir dabei solche Einheiten der Länge und der Zeit ein, dass $l = \pi$ und die Dauer einer einfachen Schwingung beim Grundton $= \pi$ wird. Eine particuläre Lösung ist dann

$$\xi = \sin mt \sin ms,$$

eine andere

$$\xi = \cos mt \sin ms,$$

wo m irgend eine positive ganze Zahl bedeutet; eine Lösung ist daher auch

$$\xi = \sum \left(A_m \sin mt + B_m \cos mt\right) \sin ms,$$

wo A_m, B_m willkührliche Constanten sind und die Summe in Bezug auf m von $m = 1$ bis $m = \infty$ zu nehmen ist. Diese Lösung lässt sich der Bedingung anpassen, dass ξ und $\frac{\partial \xi}{\partial t}$ für $t = 0$ und für die ganze Saite beliebig gegebene Functionen von s sind. Gesetzt, es sei für $t = 0$

$$\xi = U, \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = U',$$

wo U und U' Functionen von s bedeuten, die von $s = 0$ bis $s = \pi$ beliebig gegeben sind, so wird erfordert, dass für dieses Intervall

$$\begin{aligned} U &= \sum B_m \sin ms \\ U' &= \sum m A_m \sin ms \end{aligned} \qquad 25)$$

ist. Vorausgesetzt, dass die Functionen U und U' in dieser Weise darstellbar sind, lassen sich die Werthe, die den Constanten A_m und B_m zu geben sind, leicht finden mit Hülfe des Satzes, dass, wenn m und m' zwei verschiedene ganze Zahlen sind,

$$\int_0^\pi \sin ms \sin m's \, ds = 0,$$

und, wenn m eine beliebige ganze Zahl ist,

$$\int_0^\pi \sin^2 ms \, ds = \frac{\pi}{2}$$

ist. Man beweist diesen Satz leicht, indem man benutzt, dass

$$2 \sin ms \sin m's = \cos(m - m')s - \cos(m + m')s$$

$$2 \sin^2 ms = 1 - \cos 2ms$$

ist. Mit seiner Hülfe findet man aus 25)

$$B_m = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi U \sin ms \, ds$$

$$m A_m = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi U' \sin ms \, ds .$$

Dass U und U' immer in der gedachten Weise darstellbar sind, hat zuerst Dirichlet*) strenge bewiesen, indem er gezeigt hat, dass die unendliche Reihe (eine sogenannte Fourier'sche Reihe)

$$\sum C_m \sin ms,$$

in der die Coefficienten durch die Gleichung

$$C_m = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(s) \sin ms \, ds$$

bestimmt sind, wo $f(s)$ eine beliebige überall einwerthige, endliche und stetige Function von s bedeutet, für alle Werthe von s zwischen 0 und π gegen $f(s)$ convergirt.

Wir erwähnen noch eine andere Form der Lösung des behandelten Problems der Saitenschwingungen. Behalten wir die zuletzt gebrauchten Einheiten der Länge und der Zeit bei, d. h. setzen wir wieder die Länge der Saite und die Dauer einer einfachen Schwingung des Grundtons $= \pi$, so ist die Differentialgleichung für die Verrückung ξ

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial s^2}$$

und das allgemeine Integral derselben

$$\xi = \varphi(t + s) + \psi(t - s),$$

*) Dove's Repertorium der Physik I, 152; Crelle's Journal, Bd. 4, p. 157.

wo φ und ψ zwei willkührliche Functionen der beigesetzten Argumente bedeuten. Aus der Bedingung, dass für $s = 0$ immer ξ verschwindet, folgt

$$0 = \varphi(t) + \psi(t),$$

also

$$\xi = \varphi(t + s) - \varphi(t - s),$$

und aus der Bedingung, dass auch für $s = \pi$ immer $\xi = 0$ ist,

$$\varphi(t + \pi) = \varphi(t - \pi)$$

oder

$$\varphi(x + 2\pi) = \varphi(x);$$

d. h. φ ist eine um 2π periodische Function. Es würde hiernach φ, und damit ξ, vollständig bestimmt sein, wenn $\varphi(x)$ für das Intervall von $x = -\pi$ bis $x = \pi$ ermittelt wäre. Hierzu führt die Kenntniss des Anfangszustandes der Saite. Es sei für $t = 0$ wieder

$$\xi = U, \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = U',$$

wo U und U' Functionen von s bedeuten, die von $s = 0$ bis $s = \pi$ gegeben sind. Es muss dann für dieses Intervall

$$\begin{aligned} U &= \varphi(s) - \varphi(-s) \\ U' &= \varphi'(s) - \varphi'(-s) \end{aligned}$$

sein, wenn φ' den nach dem Argumente genommenen Differentialquotienten der Function φ bedeutet. Multiplicirt man die letzte Gleichung mit ds und integrirt sie, so erhält man

$$\int U' ds = \varphi(s) + \varphi(-s),$$

wo die untere Grenze des Integrals eine willkührliche Constante ist, und dann weiter

$$\begin{aligned} \varphi(s) &= \tfrac{1}{2} U + \tfrac{1}{2} \int U' ds \\ \varphi(-s) &= -\tfrac{1}{2} U + \tfrac{1}{2} \int U' ds. \end{aligned}$$

Durch diese Gleichungen ist $\varphi(s)$ für das Integral von $s = -\pi$ bis $s = +\pi$, und somit allgemein, bestimmt bis auf eine additive Constante; der Werth dieser ist aber ohne Einfluss auf den Werth von ξ, da dieses der Differenz zweier Werthe von φ gleich ist.

Dreissigste Vorlesung.

(Gleichgewicht und Bewegung einer unendlich dünnen, ursprünglich ebenen, isotropen Platte. Dilatationen eines kleinen Theiles der Platte. Potential der durch die Dilatationen erzeugten Kräfte. Unendlich kleine Formänderung. Gleichgewicht bei longitudinalen Verrückungen. Differentialgleichungen für die Transversalschwingungen einer freien Platte. Integration derselben für den Fall, dass die Platte kreisförmig ist. Transversalschwingungen einer gespannten Membran.)

§ 1.

Aehnliche Betrachtungen, wie wir sie in Bezug auf einen unendlich dünnen, elastischen Stab in den letzten Vorlesungen durchgeführt haben, lassen sich auch in Bezug auf eine unendlich dünne, elastische Platte anstellen. Mit dem Gleichgewicht und der Bewegung einer solchen Platte wollen wir uns jetzt beschäftigen, dabei aber allein den Fall ins Auge fassen, dass dieselbe in ihrem natürlichen Zustande eben ist.

In der *Mittelfläche* der Platte, d. h. in der Fläche, die in der Mitte zwischen den parallelen Oberflächen derselben sich befindet, denken wir uns bei dem natürlichen Zustande ein rechtwinkliges Coordinatensystem und nennen s_1 und s_2 die Coordinaten eines Punktes P der Mittelfläche in Bezug auf dieses. Wir stellen uns ferner 3 Linienelemente, 1, 2, 3, vor, welche von dem Punkte P ausgehen, und von denen die beiden ersten den Achsen der s_1 und s_2 parallel sind, während das dritte senkrecht auf diesen steht. Nach der Formänderung der Platte sollen diese Linienelemente die Achsen eines rechtwinkligen Coordinatensystems bestimmen, auf welches wir die Punkte in der Nähe von P beziehn; P soll der Anfangspunkt sein, das Linienelement 1 in der x-Achse liegen und die Ebene der Elemente 1 und 2 die xy-Ebene bilden; die letztere berührt dann die durch die Formänderung gekrümmte Mittelfläche im Punkte P, und die y-Achse bildet einen unendlich kleinen Winkel mit dem Element 2, die z-Achse einen unendlich kleinen Winkel mit dem Element 3. In Bezug auf dieses Coordinatensystem seien $x + u$, $y + v$, $z + w$ die Coordinaten eines materiellen Punktes der Platte nach der Formänderung, während x, y, z die Coordinaten desselben materiellen Punktes in Bezug auf dasselbe Coordinatensystem sein sollen, wenn die Platte in ihrem natürlichen Zustande und in *der* Lage sich befindet, bei der die

Linienelemente 1, 2, 3 in die Achsen der x, y, z fallen Es sind dann u, v, w solche Functionen von x, y, z, dass für $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \qquad 1)$$

wird. Ferner seien wieder ξ, η, ζ die Coordinaten des Punktes P nach der Formänderung in Bezug auf ein beliebiges im Raume festes Coordinatensystem und α_1, β_1, γ_1 α_2, β_2, γ_2 α_3, β_3, γ_3 die Cosinus der Winkel, welche die Achsen der x, y, z mit den Achsen der ξ, η, ζ bilden, so dass die Indices 1, 2, 3 den Buchstaben x, y, z, die Buchstaben α, β, γ den Buchstaben ξ, η, ζ entsprechen. In Bezug auf das System der ξ, η, ζ sind die Coordinaten des materiellen Punktes, der durch die Werthe von $s_1 + x$, $s_2 + y$, z charakterisirt ist, nach der Formänderung

$$\begin{aligned} &\xi + \alpha_1 (x + u) + \alpha_2 (y + v) + \alpha_3 (z + w) \\ &\eta + \beta_1 (x + u) + \beta_2 (y + v) + \beta_3 (z + w) \qquad 2) \\ &\zeta + \gamma_1 (x + u) + \gamma_2 (y + v) + \gamma_3 (z + w) . \end{aligned}$$

Es sind diese Grössen Functionen von $s_1 + x$ und $s_2 + y$ und daher sind ihre Differentialquotienten nach x gleich denen nach s_1 und ihre Differentialquotienten nach y gleich denen nach s_2. So ergeben sich die beiden folgenden Systeme von Gleichungen:

$$\begin{aligned} \alpha_1 \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \alpha_2 \frac{\partial v}{\partial x} + \alpha_3 \frac{\partial w}{\partial x} &= \alpha_1 \frac{\partial u}{\partial s_1} + \alpha_2 \frac{\partial v}{\partial s_1} + \alpha_3 \frac{\partial w}{\partial s_1} \\ &+ \frac{\partial \xi}{\partial s_1} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial s_1}(x + u) + \frac{\partial \alpha_2}{\partial s_1}(y + v) + \frac{\partial \alpha_3}{\partial s_1}(z + w) \\ \beta_1 \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \beta_2 \frac{\partial v}{\partial x} + \beta_3 \frac{\partial w}{\partial x} &= \beta_1 \frac{\partial u}{\partial s_1} + \beta_2 \frac{\partial v}{\partial s_1} + \beta_3 \frac{\partial w}{\partial s_1} \\ &+ \frac{\partial \eta}{\partial s_1} + \frac{\partial \beta_1}{\partial s_1}(x + u) + \frac{\partial \beta_2}{\partial s_1}(y + v) + \frac{\partial \beta_3}{\partial s_1}(z + w) \\ \gamma_1 \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \gamma_2 \frac{\partial v}{\partial x} + \gamma_3 \frac{\partial w}{\partial x} &= \gamma_1 \frac{\partial u}{\partial s_1} + \gamma_2 \frac{\partial v}{\partial s_1} + \gamma_3 \frac{\partial w}{\partial s_1} \\ &+ \frac{\partial \zeta}{\partial s_1} + \frac{\partial \gamma_1}{\partial s_1}(x + u) + \frac{\partial \gamma_2}{\partial s_1}(y + v) + \frac{\partial \gamma_3}{\partial s_1}(z + w) \end{aligned}$$

und 3)

$$\begin{aligned} \alpha_1 \frac{\partial u}{\partial y} + \alpha_2 \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \alpha_3 \frac{\partial w}{\partial y} &= \alpha_1 \frac{\partial u}{\partial s_2} + \alpha_2 \frac{\partial v}{\partial s_2} + \alpha_3 \frac{\partial w}{\partial s_2} \\ &+ \frac{\partial \xi}{\partial s_2} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial s_2}(x + u) + \frac{\partial \alpha_2}{\partial s_2}(y + v) + \frac{\partial \alpha_3}{\partial s_2}(z + w) \\ \beta_1 \frac{\partial u}{\partial y} + \beta_2 \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \beta_3 \frac{\partial w}{\partial y} &= \beta_1 \frac{\partial u}{\partial s_2} + \beta_2 \frac{\partial v}{\partial s_2} + \beta_3 \frac{\partial w}{\partial s_2} \\ &+ \frac{\partial \eta}{\partial s_2} + \frac{\partial \beta_1}{\partial s_2}(x + u) + \frac{\partial \beta_2}{\partial s_2}(y + v) + \frac{\partial \beta_3}{\partial s_2}(z + w) \\ \gamma_1 \frac{\partial u}{\partial y} + \gamma_2 \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \gamma_3 \frac{\partial w}{\partial y} &= \gamma_1 \frac{\partial u}{\partial s_2} + \gamma_2 \frac{\partial v}{\partial s_2} + \gamma_3 \frac{\partial w}{\partial s_2} \\ &+ \frac{\partial \zeta}{\partial s_2} + \frac{\partial \gamma_1}{\partial s_2}(x + u) + \frac{\partial \gamma_2}{\partial s_2}(y + v) + \frac{\partial \gamma_3}{\partial s_2}(z + w) . \end{aligned}$$

Die Gleichungen eines jeden dieser beiden Systeme multiplicire man einmal mit $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, dann mit $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, dann mit $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ und addire jedesmal. Dabei setze man

$$1 + \sigma_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial \xi}{\partial s_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial s_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial s_1}\right)^2}$$

$$1 + \sigma_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial \xi}{\partial s_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial s_2}\right) + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial s_2}\right)^2}\,. \qquad 4)$$

Es verhalten sich aber $\frac{\partial \xi}{\partial s_1} : \frac{\partial \eta}{\partial s_1} : \frac{\partial \zeta}{\partial s_1}$ wie die Cosinus der Winkel, die das Linienelement 1 nach der Formänderung mit den Achsen der ξ, η, ζ bildet, und da dieses Linienelement auch nach der Formänderung in die x-Achse fällt, so ist

$$\frac{\partial \xi}{\partial s_1} : \frac{\partial \eta}{\partial s_1} : \frac{\partial \zeta}{\partial s_1} = \alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1 .$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial \xi}{\partial s_1} = \alpha_1 (1 + \sigma_1), \quad \frac{\partial \eta}{\partial s_1} = \beta_1 (1 + \sigma_1), \quad \frac{\partial \zeta}{\partial s_1} = \gamma_1 (1 + \sigma_1). \qquad 5)$$

Bezeichnet man durch $(2, \xi)$, $(2, \eta)$, $(2, \zeta)$ die Winkel, die das Linienelement 2 nach der Formänderung mit den Achsen der ξ, η, ζ bildet, so hat man

$$\frac{\partial \xi}{\partial s_2} : \frac{\partial \eta}{\partial s_2} : \frac{\partial \zeta}{\partial s_2} = \cos (2, \xi) : \cos (2, \eta) ; \cos (2, \zeta),$$

und daher

$$\frac{\partial \xi}{\partial s_2} = (1 + \sigma_2) \cos (2, \xi), \quad \frac{\partial \eta}{\partial s_2} = (1 + \sigma_2) \cos (2, \eta), \quad \frac{\partial \zeta}{\partial s_2} = (1 + \sigma_2) \cos (2, \zeta).$$

Die Cosinus der Winkel, welche das Linienelement 2 nach der Formänderung mit den Achsen der x, y, z bildet, findet man aber aus den Gleichungen 7) der zehnten Vorlesung bei Rücksicht auf die Gleichungen am Ende der Seite 121 (in denen u, v, w für ξ, η, ζ gesetzt zu denken ist) bei Vernachlässigung von Grössen, die von höherer Ordnung unendlich klein sind, als die stattfindenden Dilatationen

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0, \quad 1, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0,$$

wo $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0$ und $\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0$ die Werthe bedeuten, die $\frac{\partial u}{\partial y}$ und $\frac{\partial w}{\partial y}$ für $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ erhalten. Der zweite von diesen Werthen verschwindet nach 1); bezeichnet man den ersten mit τ, wo dann τ den unendlich kleinen Winkel bedeutet, um den der Winkel zwischen den Linienelementen 1 und 2 nach der Formänderung von einem rechten sich unterscheidet, so folgt hieraus

$$\cos (2, \xi) = \alpha_2 + \alpha_1 \tau, \quad \cos (2, \eta) = \beta_2 + \beta_1 \tau, \quad \cos (2, \zeta) = \gamma_2 + \gamma_1 \tau$$

und daher

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \xi}{\partial s_2} &= (\alpha_2 + \alpha_1 \tau)(1 + \sigma_2) \\
\frac{\partial \eta}{\partial s_2} &= (\beta_2 + \beta_1 \tau)(1 + \sigma_2) \\
\frac{\partial \zeta}{\partial s_2} &= (\gamma_2 + \gamma_1 \tau)(1 + \sigma_2).
\end{aligned} \qquad 6)$$

Setzt man ferner

$$\begin{aligned}
p_1 &= \alpha_3 \frac{\partial \alpha_2}{\partial s_1} + \beta_3 \frac{\partial \beta_2}{\partial s_1} + \gamma_3 \frac{\partial \gamma_2}{\partial s_1} \\
q_1 &= \alpha_1 \frac{\partial \alpha_3}{\partial s_1} + \beta_1 \frac{\partial \beta_3}{\partial s_1} + \gamma_1 \frac{\partial \gamma_3}{\partial s_1} \\
r_1 &= \alpha_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial s_1} + \beta_2 \frac{\partial \beta_1}{\partial s_1} + \gamma_2 \frac{\partial \gamma_1}{\partial s_1} \\
p_2 &= \alpha_3 \frac{\partial \alpha_2}{\partial s_2} + \beta_3 \frac{\partial \beta_2}{\partial s_2} + \gamma_3 \frac{\partial \gamma_2}{\partial s_2} \\
q_2 &= \alpha_1 \frac{\partial \alpha_3}{\partial s_2} + \beta_1 \frac{\partial \beta_3}{\partial s_2} + \gamma_1 \frac{\partial \gamma_3}{\partial s_2} \\
r_2 &= \alpha_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial s_2} + \beta_2 \frac{\partial \beta_1}{\partial s_2} + \gamma_2 \frac{\partial \gamma_1}{\partial s_2},
\end{aligned} \qquad 7)$$

so werden die auf die angegebene Weise aus den Gleichungen 3) gebildeten Gleichungen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial s_1} + q_1 (z + w) - r_1 (y + v) + \sigma_1 \\
\frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial s_1} + r_1 (x + u) - p_1 (z + w) \\
\frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{\partial w}{\partial s_1} + p_1 (y + v) - q_1 (x + u)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial s_2} + q_2 (z + w) - r_2 (y + v) + \tau (1 + \sigma_2) \\
\frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial v}{\partial s_2} + r_2 (x + u) - p_2 (z + w) + \sigma_2 \\
\frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{\partial w}{\partial s_2} + p_2 (y + v) - q_2 (z + w).
\end{aligned}$$

Betrachtungen, die mit denen übereinstimmen, welche wir an die entsprechenden Gleichungen bei der Untersuchung eines unendlich dünnen Stabes geknüpft haben, zeigen, dass diese Gleichungen in die folgenden sich vereinfachen lassen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= q_1 z - r_1 y + \sigma_1 & \qquad \frac{\partial u}{\partial y} &= q_2 z - r_2 y + \tau \\
\frac{\partial v}{\partial x} &= r_1 x - p_1 z & \qquad \frac{\partial v}{\partial y} &= r_2 x - p_2 z + \sigma_2 \\
\frac{\partial w}{\partial x} &= p_1 y - q_1 x & \qquad \frac{\partial w}{\partial y} &= p_2 y - q_2 x.
\end{aligned}$$

Hier tritt aber noch eine weitere Vereinfachung ein; die für

$\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ und $\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial w}{\partial x}$ und $\frac{\partial w}{\partial y}$ aufgestellten Ausdrücke müssen die nach x und y genommenen Differentialquotienten derselben Functionen sein; daraus folgt

$$r_1 = 0\,, \quad r_2 = 0\,, \quad p_1 + q_2 = 0$$

und also

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= q_1 z + \sigma_1 & \frac{\partial u}{\partial y} &= -p_1 z + \tau \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= -p_1 z & \frac{\partial v}{\partial y} &= -p_2 z + \sigma_2 \\ \frac{\partial w}{\partial x} &= p_1 y - q_1 x & \frac{\partial w}{\partial y} &= p_2 y + p_1 x\,. \end{aligned}$$

Durch Integration findet man hieraus

$$\begin{aligned} u &= u_0 - p_1 y z + q_1 z x + \sigma_1 x + \tau y \\ v &= v_0 - p_2 y z - p_1 z x + \sigma_2 y \\ w &= w_0 - \frac{q_1}{2} x^2 + p_1 x y + \frac{p_2}{2} y^2\,, \end{aligned}$$

wo u_0, v_0, w_0 die Werthe sind, die u, v, w für $x = 0$ und $y = 0$ annehmen. Man hat hiernach

$$\begin{aligned} x_x &= q_1 z + \sigma_1 & y_z &= \frac{d v_0}{dz} \\ y_y &= -p_2 z + \sigma_2 & z_x &= \frac{d u_0}{dz} \\ z_z &= \frac{d w_0}{dz} & x_y &= -2 p_1 z + \tau\,. \end{aligned} \tag{8}$$

Alle diese Grössen sind von x und y unabhängig; dieselbe Eigenschaft haben daher auch die Druckcomponenten X_x, Y_y, Z_z, Y_z, Z_x, X_y, und die Gleichungen 8) der achtundzwanzigsten Vorlesung werden

$$\frac{d X_z}{dz} = 0 \qquad \frac{d Y_z}{dz} = 0 \qquad \frac{d Z_z}{dz} = 0\,.$$

Nun wollen wir annehmen, dass auf die beiden Oberflächen der Platte Druckkräfte von solcher Grössenordnung wirken, dass sie bei einem Körper, dessen Dimensionen alle von gleicher Ordnung sind, nur Dilatationen erzeugen würden, die unendlich klein sind gegen die Dilatationen, die in der Platte stattfinden. Man darf dann, zunächst für die Oberflächen der Platte, und dann in Folge der abgeleiteten Gleichungen allgemein

$$X_z = 0\,, \quad Y_z = 0\,, \quad Z_z = 0 \tag{9}$$

setzen; man vernachlässigt dabei in den Dilatationen und in dem Ausdrucke des Potentials der durch diese erzeugten Kräfte, den wir zu bilden haben werden, nur Glieder, welche unendlich klein sind gegen die beibehaltenen.

Die Gleichungen 9) führen in Verbindung mit der Bedingung, dass u_0, v_0, w_0 für $z = 0$ verschwinden, die aus 1) sich ergiebt, zur Bestimmung von u_0, v_0, w_0. Ist die Substanz der Platte, wie wir voraussetzen wollen, isotrop, so sind diese Gleichungen

$$x_z = 0, \quad y_z = 0, \quad z_z + \frac{\theta}{1+\theta}(x_x + y_y) = 0,$$

oder

$$\frac{du_0}{dz} = 0, \quad \frac{dv_0}{dz} = 0, \quad \frac{dw_0}{dz} = \frac{\theta}{1+\theta}\Big((p_2 - q_1)z - \sigma_1 - \sigma_2\Big),$$

und es ergiebt sich aus 8)

$$\begin{aligned} x_x &= q_1 z + \sigma_1 & y_z &= 0 \\ y_y &= -p_2 z + \sigma_2 & z_x &= 0 \\ z_z &= \frac{\theta}{1+\theta}\Big((p_2 - q_1)z - \sigma_1 - \sigma_2\Big) & x_y &= -2p_1 z + \tau . \end{aligned}$$

Da

$$f = -K\left\{x_x^2 + y_y^2 + z_z^2 + \tfrac{1}{2}y_z^2 + \tfrac{1}{2}z_x^2 + \tfrac{1}{2}x_y^2 + \theta(x_x + y_y + z_z)^2\right\},$$

so folgt hieraus

$$f = -K\Big\{(q_1 z + \sigma_1)^2 + (p_2 z - \sigma_2)^2 + \tfrac{1}{2}(2p_1 z - \tau)^2 + \frac{\theta}{1+\theta}\Big((p_2 - q_1)z - \sigma_1 - \sigma_2\Big)^2\Big\}.$$

Wir schreiben die Gleichungen der Oberflächen der Platte

$$z = h \quad \text{und} \quad z = -h$$

und setzen

$$F = \int_{-h}^{+h} f\,dz\,;$$

dann wird

$$F = -\tfrac{2}{3}Kh^3\left(q_1^2 + p_2^2 + 2p_1^2 + \frac{\theta}{1+\theta}(q_1 - p_2)^2\right) - 2Kh\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \tfrac{1}{2}\tau^2 + \frac{\theta}{1+\theta}(\sigma_1 + \sigma_2)^2\right),$$

und das Integral

$$\int F\,ds_1\,ds_2,$$

ausgedehnt über die Mittelfläche der Platte ist das Potential der durch die Formänderung dieser erzeugten Kräfte. Die 6 unbekannten Grössen σ_1, σ_2, τ, p_1, p_2, q_1, welche Functionen von s_1, s_2 sind und in dem Ausdrucke von F vorkommen, sind alle durch die Differentialquotienten von ξ, η, ζ nach s_1 und s_2 ausdrückbar: σ_1 und σ_2 sind durch die Gleichungen 4) bestimmt, τ ergiebt sich aus der Gleichung

$$(1+\sigma_1)(1+\sigma_2)\tau = \frac{\partial\xi}{\partial s_1}\frac{\partial\xi}{\partial s_2} + \frac{\partial\eta}{\partial s_1}\frac{\partial\eta}{\partial s_2} + \frac{\partial\zeta}{\partial s_1}\frac{\partial\zeta}{\partial s_2}, \qquad 10)$$

die aus den Gleichungen 5) und 6) folgt, wenn man diese mit einander multiplicirt und addirt; die Gleichungen 5) lehren dann weiter α_1, β_1, γ_1 und die Gleichungen 6) α_2, β_2, γ_2 kennen; aus diesen sechs Cosinus sind die Cosinus α_3, β_3, γ_3 nach bekannten Formeln zu berechnen; die Gleichungen 7) erlauben dann endlich p_1, p_2, q_1 auszudrücken.

Ist die Platte endlich gekrümmt, so hat man bei der Berechnung der Gestalten, die sie haben kann, statt der Gleichungen 4) und 10), da σ_1, σ_2, τ unendlich klein sind, die Gleichungen

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial s_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial s_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial s_1}\right)^2 = 1$$

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial s_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial s_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial s_2}\right)^2 = 1$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial s_1}\frac{\partial \xi}{\partial s_2} + \frac{\partial \eta}{\partial s_1}\frac{\partial \eta}{\partial s_2} + \frac{\partial \zeta}{\partial s_1}\frac{\partial \zeta}{\partial s_2} = 0$$

zu setzen, welche aussprechen, dass σ_1, σ_2, τ verschwinden, d. h. dass die Elemente der Mittelfläche keine Deformation erleiden. Eine Fläche, die dieser Bedingung genügt, nennt man eine *abwickelbare* Fläche. Um die Beziehungen zwischen der Gestalt der Platte und den Kräften und Druckkräften zu finden, die auf die Platte wirken müssen, um Gleichgewicht hervorzubringen, kann man von dem Princip der virtuellen Verrückungen ausgehn; auch dabei darf man $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = 0$, $\tau = 0$ annehmen, weil bei dieser Annahme den Gleichungen genügt werden kann, welche das Princip der virtuellen Verrückungen ergiebt. In dem Falle, dass die Platte endlich gekrümmt ist, darf man daher

$$F = -\tfrac{2}{3} K h^3 \left(q_1{}^2 + p_2{}^2 + 2 p_1{}^2 + \frac{\theta}{1+\theta}(q_1 - p_2)^2\right)$$

setzen. Auf diesen Fall gehen wir nicht näher ein, sondern verweisen in Bezug auf ihn auf die „Theorie der Elasticität fester Körper“ von Clebsch, der zuerst die endlichen Formänderungen unendlich dünner Platten untersucht hat.

§ 2.

Wenn die Platte unendlich wenig gekrümmt ist, so handelt es sich darum die unendlich kleinen Verrückungen zu finden, die die Punkte ihrer Mittelfläche erlitten haben, und hierbei darf man im Allgemeinen die Grössen σ_1, σ_2, τ nicht vernachlässigen. Wir wollen nun für diesen Fall den Werth von F bilden. Dabei möge x und y für s_1 und s_2 geschrieben werden.

Das Achsensystem der ξ, η, ζ denken wir uns so gewählt, dass ζ unendlich klein, ξ unendlich wenig von x, η unendlich wenig von y verschieden ist, und setzen

$$\xi = x + u, \qquad \eta = y + v.$$

Wir verfolgen zuerst die Annahme, dass u, v und ζ auch gegen die Dicke der Platte, d. h. gegen h unendlich klein sind, eine Annahme, die deshalb eine wesentliche ist, weil von den beiden Gliedern, aus denen F sich zusammensetzt, das eine den Factor h^3, das andere nur den Factor h hat. Bei dieser Annahme ist es ausreichend, in beiden Gliedern nur die ersten Potenzen der Differentialquotienten von u, v, ζ zu berücksichtigen. Die Gleichungen 4) und 10) geben dann

$$\sigma_1 = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \sigma_2 = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \tau = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x},$$

die Gleichungen 5) und 6)

$$\begin{array}{lll} \alpha_1 = 1 & \alpha_2 = -\dfrac{\partial v}{\partial x} & \alpha_3 = -\dfrac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \beta_1 = \dfrac{\partial v}{\partial x} & \beta_2 = 1 & \beta_3 = -\dfrac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \gamma_1 = \dfrac{\partial \zeta}{\partial x} & \gamma_2 = \dfrac{\partial \zeta}{\partial y} & \gamma_3 = 1, \end{array}$$

und endlich die Gleichungen 7)

$$p_1 = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \quad p_2 = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \quad q_1 = -\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}.$$

Lassen wir die Voraussetzung fallen, dass u, v, ζ auch gegen h unendlich klein sind, so können wir für p_1, p_2, q_1, die nur in dem mit h multiplicirten Gliede von F vorkommen, immer noch die oben abgeleiteten Ausdrücke setzen, bei der Berechnung von σ_1, σ_2, τ, die in dem Gliede von F vorkommen, das den Factor h enthält, müssen aber gewisse Terme höherer Ordnung berücksichtigt werden. Es werden in F nur Glieder vernachlässigt, welche unendlich klein gegen die beibehaltenen sind, wenn man

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\partial u}{\partial x} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2 \\ \sigma_2 &= \frac{\partial v}{\partial y} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)^2 \\ \tau &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial x}\frac{\partial \zeta}{\partial y} \end{aligned} \tag{11}$$

setzt.

Wir berechnen nun die Arbeit der durch die Dilatationen erzeugten Kräfte für eine unendlich kleine Aenderung derselben, d. h. die Variation

$$\delta \iint F\, dx\, dy; \tag{12}$$

dieselbe besteht aus zwei Theilen, von denen der erste den Factor h^3, der zweite den Factor h enthält; wir entwickeln zuerst jenen Theil. Er ist

$$- \tfrac{2}{3} K h^3 \delta \int\!\!\int dx\,dy \left\{ \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}\right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\right)^2 \right.$$
$$\left. + \frac{\theta}{1+\theta} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\right)^2 \right\} . \qquad 12_a)$$

Mit jedem der Glieder, in welche dieser Ausdruck sich spalten lässt, können Transformationen nach dem Muster derer vorgenommen werden, die für das erste Glied angegeben werden sollen. Es ist

$$\delta \int\!\!\int dx\,dy \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}\right)^2 = 2 \int\!\!\int dx\,dy \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \delta \zeta}{\partial x^2}$$
$$= 2 \int\!\!\int dx\,dy \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \frac{\partial \delta \zeta}{\partial x}\right) - \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} \frac{\partial \delta \zeta}{\partial x} \right)$$
$$= 2 \int\!\!\int dx\,dy \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \frac{\partial \delta \zeta}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} \delta \zeta\right) + \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} \delta \zeta \right) .$$

Nennt man dl ein Element des Umfanges der Mittelfläche der Platte und n die nach dem Innern dieser gerichtete Normale von dl, so ist derselbe Ausdruck

$$= 2 \int\!\!\int dx\,dy \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} \delta \zeta - 2 \int dl \cos(nx) \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \frac{\partial \delta \zeta}{\partial x} - \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} \delta \zeta \right) .$$

Mit dem ersten Theile des hier vorkommenden einfachen Integrals nehmen wir noch eine Umformung vor. Wir schreiben dem Elemente dl eine von den beiden Richtungen zu, die wir ihm zuschreiben können, und zwar diejenige, die die x-Achse erhält, wenn die Coordinatenachsen so gedreht werden, dass die y-Achse der Normale n parallel wird; wir nennen ferner φ den Winkel, den eine Linie beschreibt, wenn sie aus einer Lage, in der sie der x-Achse parallel ist, in *dem* Sinne gedreht wird, bis sie parallel mit n ist, in dem sie um einen rechten Winkel gedreht werden muss, um der y-Achse parallel zu werden, wenn sie der x-Achse parallel war. Es ist dann

$$\frac{\partial \delta \zeta}{\partial x} = \frac{\partial \delta \zeta}{\partial l} \sin \varphi + \frac{\partial \delta \zeta}{\partial n} \cos \varphi , \quad \cos(nx) = \cos \varphi .$$

Benutzt man ferner, dass, da die Integration nach l über eine geschlossene Linie auszudehnen,

$$\int dl \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \sin \varphi \cos \varphi \frac{\partial \delta \zeta}{\partial l} = - \int dl \frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \sin \varphi \cos \varphi \right) \delta \zeta$$

ist, so findet man

$$\delta \int\!\!\int dx\,dy \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}\right)^2 = 2 \int\!\!\int dx\,dy \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} \delta \zeta - 2 \int dl \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \cos^2 \varphi \frac{\partial \delta \zeta}{\partial n}$$
$$+ 2 \int dl \left(\frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} \cos \varphi + \frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \sin \varphi \cos \varphi \right) \right) \delta \zeta .$$

Transformirt man in entsprechender Weise die übrigen von den Gliedern, in die der Ausdruck $12_a)$ sich zerlegen lässt, so findet man diesen Ausdruck

$$
\begin{aligned}
= &- \tfrac{1}{3} K h^3 \frac{1+2\theta}{1+\theta} \iint dx\,dy \left(\frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \zeta}{\partial y^4}\right) \delta \zeta \\
&+ \tfrac{1}{3} K h^3 \int dl \left\{ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \cos^2 \varphi + 2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \sin \varphi \cos \varphi + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \sin^2 \varphi \right. \\
&\qquad \left. + \frac{\theta}{1+\theta} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\right) \right\} \frac{\partial \delta \zeta}{\partial n} \qquad 13) \\
&- \tfrac{1}{3} K h^3 \int dl \left\{ \frac{\partial}{\partial l} \left(\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\right) \sin \varphi \cos \varphi + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} (\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi) \right) \right. \\
&\qquad \left. + \frac{1+2\theta}{1+\theta} \left(\left(\frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x \partial y^2}\right) \cos \varphi + \left(\frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \zeta}{\partial y^3}\right) \sin \varphi \right) \right\} \delta \zeta .
\end{aligned}
$$

Er bildet den einen Theil der durch 12) definirten Arbeit. Der andere Theil derselben, der den Factor h enthält, findet sich bei Rücksicht auf die Gleichungen 4) und 10)

$$
\begin{aligned}
= &\, 4 K h \iint dx\,dy \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial x} + \tfrac{1}{2} \frac{\partial \tau}{\partial y} + \frac{\theta}{1+\theta} \frac{\partial (\sigma_1 + \sigma_2)}{\partial x} \right) \delta u \\
&+ 4 K h \int dl \left(\sigma_1 \cos \varphi + \tfrac{1}{2} \tau \sin \varphi + \frac{\theta}{1+\theta} (\sigma_1 + \sigma_2) \cos \varphi \right) \delta u \\
&+ 4 K h \iint dx\,dy \left(\frac{\partial \sigma_2}{\partial y} + \tfrac{1}{2} \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\theta}{1+\theta} \frac{\partial (\sigma_1 + \sigma_2)}{\partial y} \right) \delta v \\
&+ 4 K h \int dl \left(\sigma_2 \sin \varphi + \tfrac{1}{2} \tau \cos \varphi + \frac{\theta}{1+\theta} (\sigma_1 + \sigma_2) \sin \varphi \right) \delta v \qquad 14) \\
&+ 4 K h \int dx\,dy \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \sigma_1 + \tfrac{1}{2} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \tau + \frac{\theta}{1+\theta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} (\sigma_1 + \sigma_2) \right) \right. \\
&\qquad \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} \sigma_2 + \tfrac{1}{2} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \tau + \frac{\theta}{1+\theta} \frac{\partial \zeta}{\partial y} (\sigma_1 + \sigma_2) \right) \right\} \delta \zeta \\
&+ 4 K h \int dl \left\{ \cos \varphi \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \sigma_1 + \tfrac{1}{2} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \tau + \frac{\theta}{1+\theta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} (\sigma_1 + \sigma_2) \right) \right. \\
&\qquad \left. + \sin \varphi \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} \sigma_2 + \tfrac{1}{2} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \tau + \frac{\theta}{1+\theta} \frac{\partial \zeta}{\partial y} (\sigma_1 + \sigma_2) \right) \right\} \delta \zeta.
\end{aligned}
$$

Von den Ausdrücken 13) und 14), deren Summe die Arbeit der durch die Dilatationen erzeugten Kräfte für die durch die Werthe von δu, δv, $\delta \zeta$ bestimmten Verrückungen ist, wollen wir nun einige Anwendungen machen.

§ 3.

Wir denken uns eine Platte, auf die keine Kräfte und keine Druckkräfte wirken; die Punkte ihres Randes sind so befestigt, dass für sie $\zeta = 0$ ist, u und v gegebene Werthe haben; es sollen u, v, ζ für den Fall des Gleichgewichts gefunden werden.

Den Gleichungen, welche das Princip der virtuellen Verrückungen giebt, wird genügt, wenn man

$$\zeta = 0$$

macht und u, v aus den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}2(1+2\theta)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+(1+\theta)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+(1+3\theta)\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}=0\\ 2(1+2\theta)\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+(1+\theta)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+(1+3\theta)\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}=0\end{aligned}\right\} \quad 15)$$

so bestimmt, dass sie für den Rand die gegebenen Werthe annehmen.

Eine Platte, die unter den gedachten Verhältnissen sich befindet, nennt man *gespannt;* im Allgemeinen ist sie, wie man sagt, ungleichmässig gespannt; sie heisst *gleichmässig* gespannt, wenn

$$u = ax, \quad v = ay$$

ist, wo a eine Constante bedeutet, durch welche Ausdrücke den Gleichungen 15) offenbar genügt wird.

§ 4.

Die weiteren Anwendungen, die wir von den Ausdrücken 13) und 14) machen wollen, sollen sich auf die Schwingungen, und zwar die sogenannten *Transversalschwingungen* einer Platte beziehn. Wir machen dabei von dem Hamilton'schen Princip Gebrauch und bemerken zunächst, dass, wenn T die lebendige Kraft, μ die Dichtigkeit der Platte bedeutet,

$$T = \mu h \iint dx\,dy \left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)^2\right)$$

ist, die Integration über die Fläche der Platte ausgedehnt. Hieraus folgt

$$\delta \int T\,dt = -2\mu h \iiint dt\,dx\,dy \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,\delta u + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\,\delta v + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}\,\delta\zeta\right). \quad 16)$$

Wir nehmen an, dass der Rand der Platte entweder fest oder frei ist, so dass keine Arbeit geleistet wird von Druckkräften, die auf diesen Rand wirken; dann ist das Hamilton'sche Princip durch die Gleichung

$$\delta \int T\,dt + \delta \iiint F\,dt\,dx\,dy = 0 \quad 17)$$

ausgesprochen, deren Glieder die durch 16), 13) und 14) bestimmten Werthe haben.

Wir wollen zuerst voraussetzen, dass der Rand der Platte frei und ζ auch gegen die Dicke der Platte unendlich klein ist; wir dürfen dann annehmen, dass u und v gleich Null sind; indem wir das thun, gelangen wir zu den Gleichungen für die *Transversalschwingungen* der Platte. Diese sind

$$0 = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + \tfrac{2}{3}\,\frac{1+2\theta}{1+\theta}\,\frac{h^2 K}{\mu}\left(\frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \zeta}{\partial y^4}\right)$$

und für den Rand

$$0 = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}\cos^2\varphi + 2\,\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x\,\partial y}\sin\varphi\cos\varphi + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\sin^2\varphi + \frac{\theta}{1+\theta}\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\right)$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial l}\left(\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\right)\sin\varphi\cos\varphi + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x\,\partial y}(\sin^2\varphi - \cos^2\varphi)\right) \tag{18}$$

$$+ \frac{1+2\theta}{1+\theta}\left(\left(\frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x\,\partial y^2}\right)\cos\varphi + \left(\frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^2\,\partial y} + \frac{\partial^3 \zeta}{\partial y^3}\right)\sin\varphi\right).$$

Die Lösungen derselben zu finden, ist bis jetzt nur für den Fall, dass die Platte eine kreisförmige ist, gelungen. Man gelangt zu ihnen für diesen Fall auf dem folgenden Wege.

Man setze

$$\frac{2}{3}\,\frac{1+2\theta}{1+\theta}\,\frac{h^2 K}{\mu} = a^2$$

$$\zeta = U \sin(4\,\lambda^2 a t),$$

wo U eine Function von x und y, λ eine Constante bedeutet. Diese Annahme entspricht dem Falle, dass die Platte einen einfachen Ton giebt; die Dauer einer Doppelschwingung desselben ist

$$\frac{\pi}{2\,\lambda^2 a}.$$

Für U ergiebt sich dabei die partielle Differentialgleichung

$$16\,\lambda^4 U = \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + 2\,\frac{\partial^4 U}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial y^4};$$

zu dieser treten *die* Grenzbedingungen, die aus 18) entstehen, indem man U an Stelle von ζ schreibt. Die partielle Differentialgleichung lässt sich durch die zwei Gleichungen

$$4\,\lambda^2 V = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$$

$$4\,\lambda^2 U = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$$

ersetzen, und diese geben, wenn man sie addirt oder subtrahirt und

$$U = S + D, \quad V = S - D$$

macht,

$$4\,\lambda^2 S = \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2}$$

$$-\,4\,\lambda^2 D = \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 D}{\partial y^2}.$$

Nun führe man statt der rechtwinkligen Coordinaten Polarcoordinaten r, ψ ein, so dass

$$x = r\cos\psi, \quad y = r\sin\psi$$

ist; dann erhält man

$$4\,\lambda^2 S = \frac{\partial^2 S}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial S}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 S}{\partial \psi^2}$$

$$-\,4\,\lambda^2 D = \frac{\partial^2 D}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial D}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 D}{\partial \psi^2}.$$

Diesen Gleichungen wird genügt durch

$$S = A \cos n\psi\, X\,, \quad D = B \cos n\psi\, Y\,,$$

wenn n eine ganze Zahl, A und B willkührliche Constanten, X und Y Functionen von r bedeuten, die die Gleichungen

$$\frac{d^2 X}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dX}{dr} - \left(\frac{n^2}{r^2} + 4\lambda^2\right) X = 0$$

$$\frac{d^2 Y}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dY}{dr} - \left(\frac{n^2}{r^2} - 4\lambda^2\right) Y = 0$$

erfüllen. Setzt man

$$\lambda r = x\,,$$

so werden diese

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dX}{dx} - \left(\frac{n^2}{x^2} + 4\right) X = 0$$

$$\frac{d^2 Y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dY}{dx} - \left(\frac{n^2}{x^2} - 4\right) X = 0\,.$$

Ein particuläres Integral der ersten von diesen Gleichungen findet man, indem man

$$X = A_0 x^\varkappa + A_2 x^{\varkappa+2} + A_4 x^{\varkappa+4} + .$$

setzt; dann ist

$$\frac{dX}{dx} = \varkappa A_0 x^{\varkappa-1} + (\varkappa+2) A_2 x^{\varkappa+1} + (\varkappa+4) A_4 x^{\varkappa+3} + .$$

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = \varkappa\,.(\varkappa-1) A_0 x^{\varkappa-2} + (\varkappa+2)(\varkappa+1) A_2 x^\varkappa + (\varkappa+4)(\varkappa+3) A_4 x^{\varkappa+2} + .$$

und die genannte Gleichung wird

$$\begin{aligned} 0 = {} & A_0\left(\varkappa^2 - n^2\right) x^{\varkappa-2} && - 4 A_0 x^\varkappa \\ & + A_2\left((\varkappa+2)^2 - n^2\right) x^\varkappa && - 4 A_2 x^{\varkappa+2} \\ & + A_4\left((\varkappa+4)^2 - n^2\right) x^{\varkappa+2} && - 4 A_4 x^{\varkappa+4} \\ & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{aligned}$$

Man erfüllt sie, wenn man

$$\varkappa^2 - n^2 = 0$$

$$A_2\left((\varkappa+2)^2 - n^2\right) = 4 A_0$$

$$A_4\left((\varkappa+4)^2 - n^2\right) = 4 A_2$$

macht. Wir genügen diesen Gleichungen, indem wir

$$\varkappa = n$$

$$A_2 = \frac{A_0}{1 \cdot n + 1}\,, \quad A_4 = \frac{A_2}{2\,.\,n + 2}\,, \quad A_6 = \frac{A_4}{3\,.\,n + 3}\,, \,.$$

setzen und über A_0 nach Willkühr verfügen. Ein particuläres Integral, das wir X_n nennen wollen, der für X aufgestellten Differentialgleichung ist daher

$$X_n = \frac{x^n}{1.2.3..n}\left(1 + \frac{x^2}{1 \cdot n+1} + \frac{x^4}{1.2.n+1.n+2} + ..\right)$$

und ein entsprechendes der für Y aufgestellten Differentialgleichung

$$Y_n = \frac{x^n}{1.2.3..n}\left(1 - \frac{x^2}{1.n+1} + \frac{x^4}{1.2.n+1.n+2} - ..\right).$$

Man sieht leicht, dass diese beiden unendlichen Reihen für jeden Werth ihres Arguments convergiren.

Andere particuläre Werthe von X und Y mögen noch erwähnt werden, obwohl sie bei dem vorliegenden Probleme eine Anwendung nicht finden. Man setze

$$X = W X_n,$$

also

$$\frac{dX}{dx} = W\frac{dX_n}{dx} + X_n\frac{dW}{dx}$$

$$\frac{d^2X}{dx^2} = W\frac{d^2X_n}{dx^2} + 2\frac{dX_n}{dx}\frac{dW}{dx} + X_n\frac{d^2W}{dx^2}.$$

Diese Gleichungen multiplicire man der Reihe nach mit

$$-\left(\frac{n^2}{x^2}+4\right),\quad \frac{1}{x},\quad 1$$

und addire sie dann; da X und X_n Integrale der in Rede stehenden Differentialgleichung sind, so erhält man dadurch

$$X_n\frac{d^2W}{dx^2} + \left(\frac{X_n}{x} + 2\frac{dX_n}{dx}\right)\frac{dW}{dx} = 0$$

oder, wenn

$$\frac{dW}{dx} = W'$$

gesetzt wird,

$$\frac{dW'}{W'} + \left(\frac{1}{x} + 2\frac{\frac{dX_n}{dx}}{X_n}\right)dx = 0,$$

d. h.

$$\lg W' + \lg x + 2\lg X_n = \text{Const.}$$

oder

$$W' = \text{Const.}\,\frac{1}{x X_n X_n},$$

also

$$W = \text{Const.}\int\frac{dx}{x X_n X_n},$$

wo die untere Grenze des Integrals beliebig gewählt werden kann. Ein zweiter particulärer Werth von X ist daher

$$X = X_n\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{x X_n X_n}$$

und einer von Y

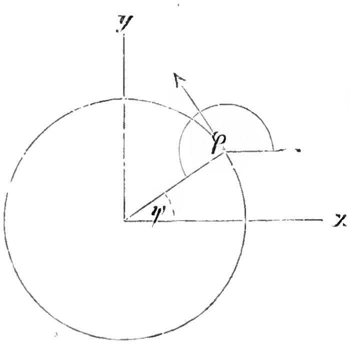
$$Y = Y_n \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x Y_n Y_n},$$

wo x_0 eine willkührliche Constante ist. Diese Werthe von X und Y werden aber, wie aus den Ausdrücken von X_n und Y_n hervorgeht, für $x = 0$, d. h. für $r = 0$ unendlich und können daher keine Anwendung finden, wenn die Platte, wie wir voraussetzen, eine volle Kreisfläche bildet.

Wir setzen also

$$S = A \cos n\psi \, X_n, \quad D = B \cos n\psi \, Y_n$$

und suchen nun die Constanten A, B, λ so zu bestimmen, dass den beiden Grenzbedingungen genügt wird.



Wir nennen den Radius der Platte α. Bei Rücksicht auf die Bestimmungen, die wir bei Ableitung des Ausdrucks 13) getroffen haben über den Sinn, in dem l wächst, und über den Winkel φ, haben wir dann, wie ein Blick auf die nebenstehende Figur lehrt,

$$l = \alpha\psi \quad \text{und} \quad \varphi = 180^0 + \psi.$$

Mit Hülfe hiervon werden die aus 18) herzuleitenden Grenzbedingungen

$$0 = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{\theta}{1+\theta}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \psi^2}\right)$$

$$0 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \psi}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \psi} - \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \psi}\right) + \frac{1+2\theta}{1+\theta}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \psi^2}\right),$$

oder, wenn man benutzt, dass

$$4\lambda^2 V = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \psi^2}$$

ist,

$$0 = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + 4\lambda^2 \frac{\theta}{1+\theta} V$$

$$0 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^3 U}{\partial r \partial \psi^2} - \frac{1}{r^3}\frac{\partial^2 U}{\partial \psi^2} + 4\lambda^2 \frac{1+2\theta}{1+\theta}\frac{\partial V}{\partial r}.$$

Nun drücke man U und V durch S und D, diese durch X_n, Y_n, und die zweiten Differentialquotienten von X_n und Y_n, die dann auftreten, mit Hülfe der für diese Functionen aufgestellten Differentialgleichungen, durch sie selbst und ihre ersten Differentialquotienten aus. Setzt man noch

$$\frac{1+2\theta}{1+\theta} = \gamma,$$

so findet man dann als die für $r = \alpha$, d. h. $x = \lambda \alpha$ zu erfüllenden Gleichungen

$$0 = A\left(n^2 X_n - x(n^2 - 4\gamma x^2)\frac{dX_n}{dx}\right) + B\left(n^2 Y_n - x(n^2 + 4\gamma x^2)\frac{dY_n}{\partial x}\right)$$

$$0 = A\left((n^2 + 4\gamma x^2) X_n - x\frac{dX_n}{dx}\right) + B\left((n^2 - 4\gamma x^2) Y_n - x\frac{dY_n}{dx}\right).$$

Nennt man die Determinante derselben $\varDelta$, so hat man aus der transcendenten Gleichung

$$\varDelta = 0$$

λ zu bestimmen und dann aus einer von ihnen das Verhältniss $A : B$.

Ist λ_{nm} eine Wurzel jener Gleichung und setzt man

$$W_{nm} = X_n \left[(n^2 - 4\gamma x^2)\, Y_n - x\frac{dY_n}{dx}\right] x = \alpha\lambda_{nm}$$
$$- Y_n\left[(n^2 + 4\gamma x^2)\, X_n - x\frac{dX_n}{dx}\right] x = \alpha\lambda_{nm},$$

so ist

$$\zeta = C \, . \sin(4\lambda^2_{nm} a t)\, W_{nm} \cos n\psi,$$

wo C eine willkührliche Constante bedeutet. Die *Knotenlinien*, die dem durch λ_{nm} bestimmten Tone entsprechen, haben zu Gleichungen

$$\cos n\psi = 0 \quad \text{und} \quad W_{nm} = 0;$$

die erste von diesen stellt ein System von n Durchmessern dar, die gleiche Winkel mit einander bilden, die zweite ein System von concentrischen Kreisen. In Bezug auf die numerische Berechnung der Töne und Knotenkreise möge auf die unten genannte Abhandlung*) verwiesen werden.

§ 5.

Wir wollen schliesslich die Differentialgleichung für die Transversalschwingungen einer *gespannten Membran* aufstellen. Wir gelangen zu dieser, indem wir uns eine Platte vorstellen, die, nachdem ihren Theilen Verrückungen in ihrer Ebene, u und v, ertheilt sind, die den Gleichungen 15) genügen, an ihrem Rande befestigt ist. Diese Verrückungen sollen so gross gegen die Dicke der Platte sein, dass bei der Bildung der Gleichung 17) der Ausdruck 13) gegen den Ausdruck 14) vernachlässigt werden kann, und so gross gegen ζ, dass die Gleichungen 11)

$$\sigma_1 = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \sigma_2 = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \tau = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

---

*) Kirchhoff, Ueber das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe; Crelle's Journal, Bd. 40.

geschrieben werden können. Die Gleichung 17) wird dann erfüllt, wenn man u und v als unabhängig von der Zeit annimmt und ζ aus der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \frac{2K}{\mu}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\theta}{1+\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)$$
$$+ \frac{2K}{\mu}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\theta}{1+\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)$$

und der Bedingung bestimmt, dass es am Rande verschwindet.

Die Verrückungen u, v müssen den Differentialgleichungen 15) genügen, können dabei aber noch sehr mannigfaltige Functionen von x und y sein. In dem Falle, auf den oben schon hingewiesen wurde, dass die Membran *gleichmässig gespannt* ist, kann man

$$u = ax \qquad v = ay$$

setzen, wo a eine Constante bezeichnet; dann wird die Differentialgleichung für ζ

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \frac{2K}{\mu}\frac{1+3\theta}{1+\theta}\, a\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\right).$$

Ohne Schwierigkeit lässt sich dieselbe lösen, wenn die Membran rechteckig oder kreisförmig ist; die Töne, die die Membran geben kann, und die diesen entsprechenden Knotenlinien lassen sich dann leicht berechnen. Bei der rechteckigen Gestalt hat man es dabei nur mit trigonometrischen Functionen, bei der kreisförmigen mit *den* Functionen zu thun, die wir bei der Untersuchung der Schwingungen einer kreisförmigen Platte durch V bezeichnet haben; das sind die sogenannten Bessel'schen Functionen. Die Knotenlinien der rechteckigen Membran sind gerade Linien, die ihren Seiten parallel sind, die der kreisförmigen Durchmesser, die gleiche Winkel mit einander bilden, und mit ihrem Rande concentrische Kreise.