



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

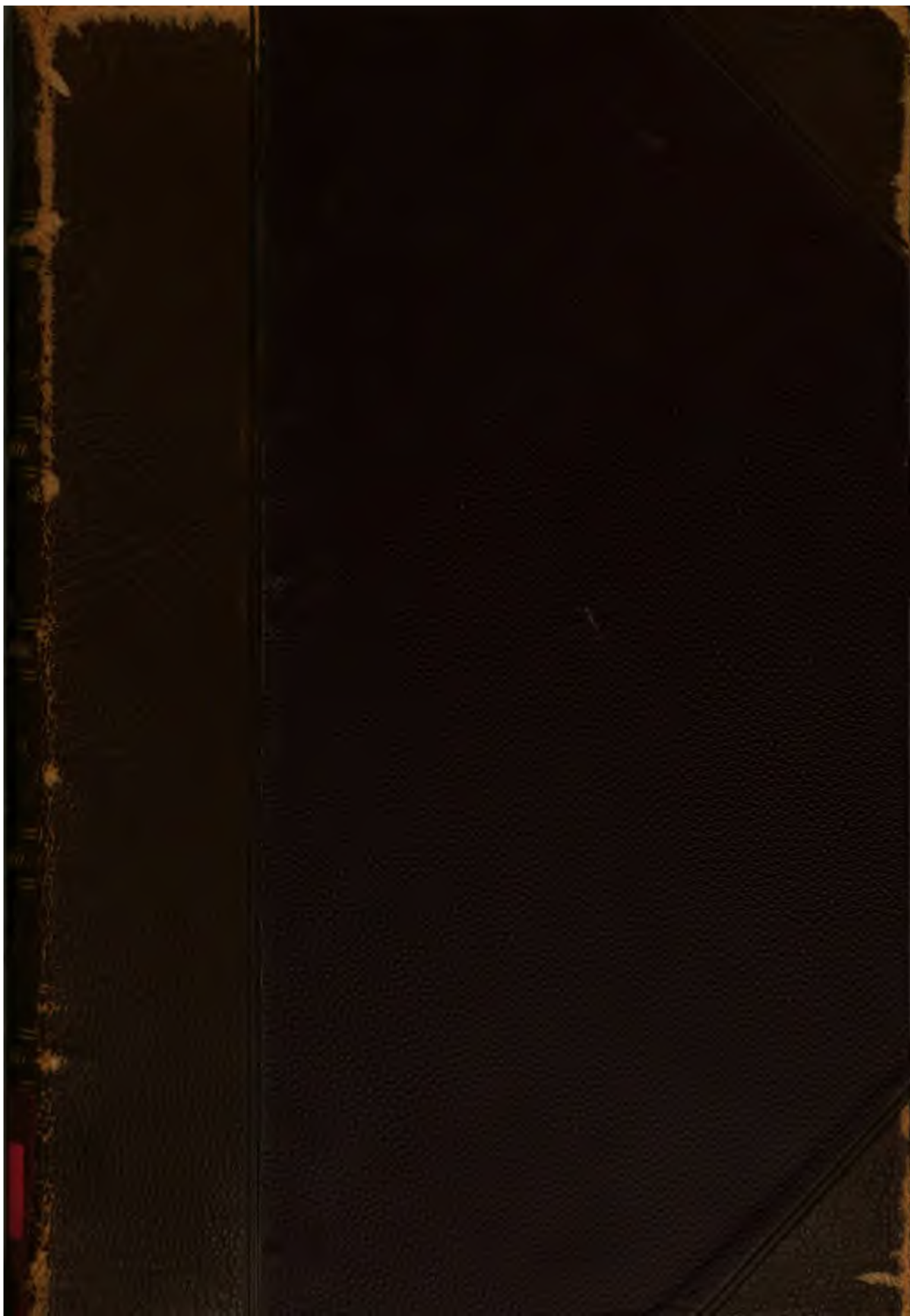
Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

- + *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
- + *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
- + *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
- + *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter <http://books.google.com> durchsuchen.



5
7.5

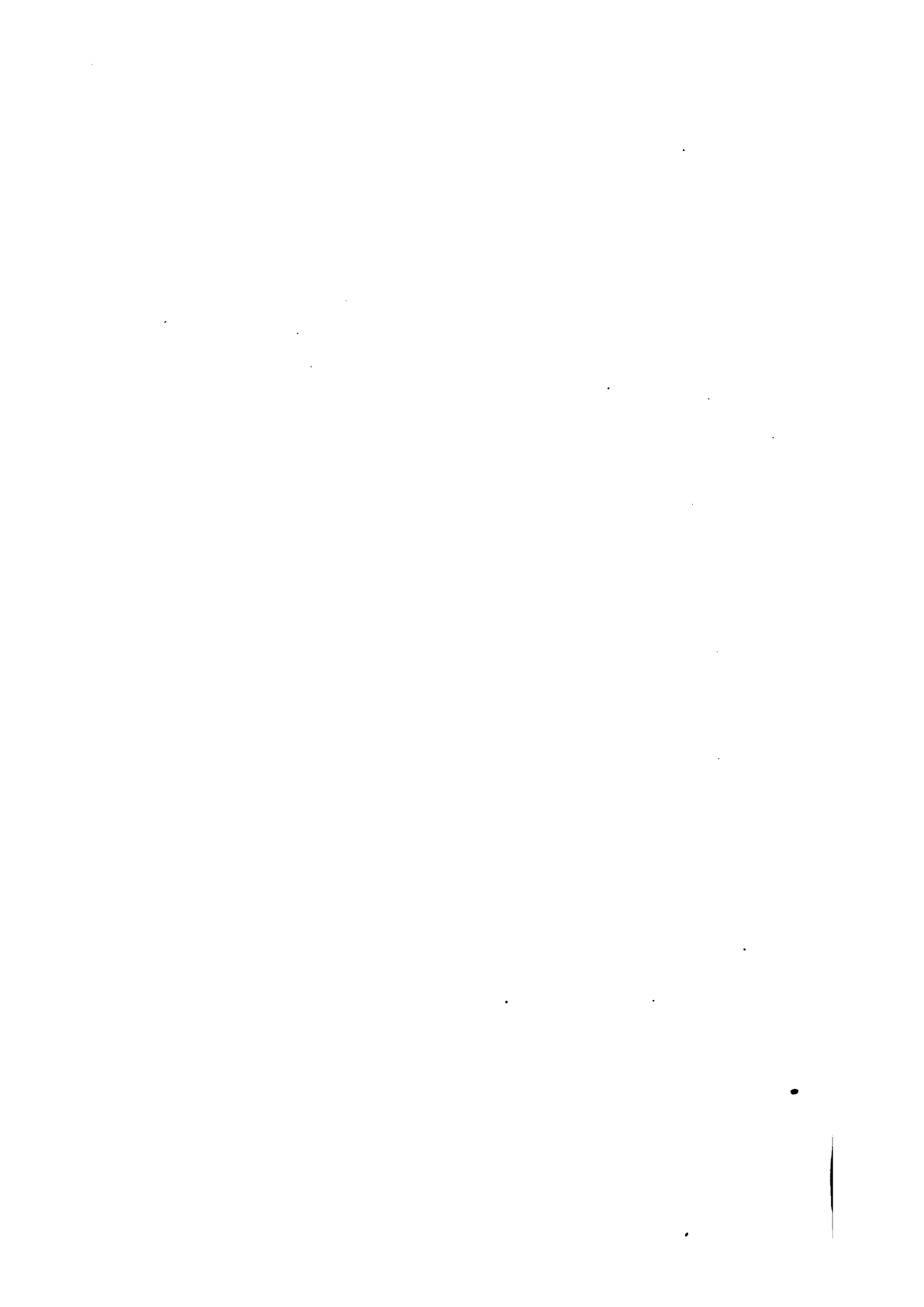
James Walker,
Christ Church.

ENG
QA931
N48
TIMO-
SHEMID
COLL.

ENGINEERING LIBRARY

17





5
7.5

James Walker,
Christ Church.

ENG
Q4931
N48
TINO-
SHIELD
COLL.

ENGINEERING LIBRARY

7
H



Vorwort des Herausgebers.

Der Gedanke, die von Franz Neumann gehaltenen Vorlesungen dem Drucke zu übergeben, um sie weiteren Kreisen zugänglich zu machen, entstand unter seinen Schülern schon vor Jahrzehnten zu der Zeit, als die Universität Königsberg die einzige deutsche Hochschule war, an welcher mathematische Physik gelehrt und gepflegt wurde. Zur Reife ist dieser Plan leider erst gelangt, nachdem die damaligen Schüler selber seit längerer Zeit als akademische Lehrer gewirkt haben. Wenn sie jetzt noch ihren alten Wunsch zur Ausführung bringen, so muss nicht bloss die Dankbarkeit und die Liebe, welche sie gegen ihren Lehrer hegen und bewahren, sie zu der Arbeit angetrieben haben, sondern mehr noch die Ueberzeugung, dass diese Vorlesungen, durch welche einstmals die mathematische Physik in Deutschland ins Leben gerufen wurde, auch noch heutigen Tages eine vortreffliche Schule für alle Diejenigen bilden werden, welche in den Geist und den Inhalt der physikalischen Theorien eindringen wollen.

Der grosse Werth dieser Vorlesungen liegt einerseits in dem meisterhaft ausgedachten Plane derselben und der vorzüglichen Auswahl des Inhalts begründet, andererseits in den zahlreichen Mittheilungen über eigene Arbeiten des Verfassers, welche bisher entweder gar nicht oder wenigstens nicht in ihrem ganzen Umfange veröffentlicht worden sind. Zu den Gebieten, mit welchen Professor Neumann sich in jüngeren und späteren Jahren mit besonderer Vorliebe beschäftigt hat, gehört auch die Theorie der Elasticität; es konnte daher nicht fehlen, dass seine Vorlesungen über diesen Gegenstand häufig eigene Arbeiten betrafen. Seinem ausgesprochenen Wunsche,

dass alle in verschiedenen Semestern vorgetragenen eigenen Untersuchungen in dieses Werk aufgenommen werden sollten, bin ich gern soweit nachgekommen, als es mir zu erreichen möglich war.

Aus diesem Grunde durfte ich mich nicht darauf beschränken, eine bestimmte Vorlesung so, wie sie gehalten war, wiederzugeben, sondern ich musste das, was in anderen Semestern mehr geboten wurde, an gehöriger Stelle einfügen, wobei neben Neumann's eigenen Untersuchungen zugleich fremde von ihm benutzte Arbeiten mit aufzunehmen waren. So ist ein Buch entstanden, welches alles Wesentliche enthält, was Geheimrath Neumann jemals in seinen Vorlesungen über Elasticität vorgetragen hat.

Der Inhalt, welchen ich in 21 Abschnitte eingetheilt habe, ist zum grossen Theile geistiges Eigenthum Neumann's. Eine noch nicht veröffentlichte grössere Arbeit bildet den 12. Abschnitt über die Elasticität der Krystalle; ebenso sind bis jetzt noch nicht gedruckt die Theorie des Stosses cylindrischer Stäbe im 20. Abschnitt und die im 21. enthaltenen Untersuchungen über die Biegung eines Stabes. Arbeiten Neumann's, welche bereits ganz oder wenigstens theilweise bekannt sind, enthält der 9. Abschnitt, ebenso auch der 17. Abschnitt; ersterer handelt über den Einfluss ungleichmässiger Temperatur auf elastische Formveränderungen, letzterer über Neumann's Erklärung der Dispersion. Besonders aber ist hervorzuheben, dass sich im 13. Abschnitt die wichtige Abhandlung findet, in welcher Neumann nachwies, dass die von Fresnel gefundenen Gesetze der Doppelbrechung und Polarisation als nothwendige Folgerungen aus der Elasticitätstheorie sich ergeben, wenn im Gegensatze zu Fresnel die sogenannte Polarisationssebene als Schwingungsebene definirt wird. Ueberdiess würden noch zahlreiche einzelne Paragraphen und Bemerkungen anzuführen sein, welche auf Neumann's eigenen Arbeiten beruhen.

Dem reichen Inhalte des Bandes noch umfangreiche Zusätze und Nachträge anzuhängen, erschien mir als Herausgeber nicht passend. Da ich aber die Pflicht hatte, die neuere Literatur des Gegenstandes zu berücksichtigen, so habe ich da, wo es mir nöthig zu sein schien, kurze Noten unter den Text gesetzt und auch an den Schluss mehrerer Abschnitte Bemerkungen angeknüpft, in welchen ich durch kurze Verweise auf die neueren Arbeiten aufmerksam machte oder auch einiges Wichtige aus ihrem Inhalte anführte. Auf diese Weise hoffe ich meine doppelte Pflicht am besten erfüllt zu haben, sowohl gegen meinen Lehrer, als auch gegen die jetzt heran-

wachsende Jugend, welcher ich den Eindruck der durch erstaunliches Wissen unterstützten Genialität Neumann's ungestört erhalten wollte.

Zur Grundlage meiner Arbeit wählte ich eine Vorlesung, welche Professor Neumann im Wintersemester 1857/58 gehalten hat; von derselben standen mir die von meinem Bruder Lothar Meyer, jetzt Professor in Tübingen, und mir nachgeschriebenen stenographischen Aufzeichnungen und die von uns beiden ausgearbeiteten Hefte zur Verfügung. Diese Vorlesung umfasste die Abschnitte 1 bis 7, ferner 9, 11, 13, 15 bis 20. Eine zweite Vorlesung, welche ich im Wintersemester 1859/60 über denselben Gegenstand hörte, unterschied sich durch eine etwas andere Auswahl und Reihenfolge der Gegenstände; aus meinem damals ausgearbeiteten Collegheft habe ich die Abschnitte 8, 10 und 14, so wie hie und da einzelne Paragraphen eingeschaltet, auch nach demselben manche Verbesserung meiner ersten Ausarbeitung vorgenommen.

Aus späteren Jahren konnte ich zwei Hefte benutzen, von welchen das ältere im Wintersemester 1869/70 und im Sommersemester 1870 von Herrn Dr. Baumgarten, jetzt Oberlehrer in Dresden, das neuere von Herrn Woldemar Voigt, jetzt Professor in Göttingen, in der letzten von Geheimrath Neumann über die Elasticität gehaltenen Vorlesung im Winter 1873/74 nachgeschrieben worden ist. Aus dem Voigt'schen Hefte entnahm ich den von der Energie der elastischen Kräfte handelnden § 63 und den 12. Abschnitt über die Krystall-Elasticität. Aus den Aufzeichnungen beider Herren, denen ich meinen Dank für ihre freundliche Unterstützung hier ausspreche, konnte ich dann noch den 21. Abschnitt über das Verhalten elastischer Stäbe zusammenstellen.

Diese Einschaltungen machten keine erheblichen Aenderungen nöthig. Zu der wichtigsten wurde ich dadurch veranlasst, dass ich die von Neumann verschiedentlich berührte Frage nach dem constanten Verhältniss der beiden Poisson'schen Elasticitätsconstanten und die Methoden zur Entscheidung dieser Frage nur an einer Stelle im Zusammenhange glauben zu sollen. Ich habe deshalb vor dem von diesen Dingen handelnden § 77 zwei andere einschalten müssen, in welchen ich Biegung und Torsion etwas abweichend untersuchte. Die Theorie der letzteren Erscheinung wurde von Neumann entweder am Schlusse der Untersuchungen über den Stoss oder im Zusammenhange mit den im 21. Abschnitt enthaltenen Gegenständen vorgetragen.

So übergebe ich denn diese Arbeit der Oeffentlichkeit mit dem Wunsche, dass das Studium der nun gedruckten Vorlesung so anregend wirken möge, wie einst der mündliche Vortrag, aus welchem zahlreiche Hörer, unter ihnen Borchardt, Kirchhoff, Strehlke, Clebsch, Carl Neumann, VonderMühl, Minnigerode, Zöppritz, Gehring, Saalschütz, Wangerin, Baumgarten, Voigt den ersten Antrieß zu ihren Arbeiten über Elasticität empfangen, und desgleichen auf einem mit dieser Theorie aufs engste zusammenhängenden Gebiete

der Herausgeber.

Inhaltsverzeichniss.

	Seite
1. Einleitung.	
§ 1. Entstehung und Grundlage der Theorie	1
§ 2. Urheber der Theorie	3
§ 3. Hypothesen	3
§ 4. Molekulardruck	4
§ 5. Berechnung des Drucks durch Molekularsummen	6
2—5. Entwicklung der allgemeinen Theorie auf mechanischer Grundlage. 8—59	
2. Allgemeine Lehrsätze über die Druckkräfte.	
§ 6. Feststellung der Aufgabe	8
§ 7. Theorem A.	10
§ 8. Theorem B.	14
§ 9. Theorem C.	16
§ 10. Gleichungen für die Bewegung.	19
§ 11. Oberflächen-Bedingungen	20
§ 12. Satz über das Gleichgewicht eines Körpers	22
§ 13. Satz über die Drehungsmomente	23
§ 14. Gleichgewicht beliebiger Theile des Körpers	24
3. Symmetrische Vertheilung der Druckkräfte.	
§ 15. Erstes Druckellipsoid	26
§ 16. Lage der Hauptdruckaxen. Zweites Druckellipsoid	27
§ 17. Die Hauptdruckkräfte stehen senkrecht gegen ihre Ebenen	29
§ 18. Die Hauptdruckebenen sind die einzigen Ebenen dieser Eigenschaft.	30
§ 19. Gleichungen der Druckellipsoide	31
§ 20. Bestimmung der Druckebene zu einem gegebenen Drucke	32
§ 21. Bestimmung der Druckebene, wenn eine der Hauptdruckkräfte = 0 ist	34
§ 22. Bestimmung der Druckebene, wenn zwei Hauptdruckkräfte verschwinden.	36
4. Das System der Dilatationen.	
§ 23. Dilatationsoberfläche	37
§ 24. Aussonderung einer gemeinschaftlichen Drehung	39
§ 25. Dilatationsellipsoide	42
§ 26. Eigenschaften der Hauptdilatationsaxen	43
§ 27. Bestimmung der Hauptdilatationen	45

	Seite
§ 28. Bestimmung der Lage eines einzelnen Theilchens vor der Verrückung aus seiner Lage nach derselben und umgekehrt	46
§ 29. Räumliche Dilatation	48
5. Beziehungen zwischen den Druckkräften und den Verrückungen.	
§ 30. Relationen für unkrystallinische Medien, bezogen auf die Hauptaxen.	52
§ 31. Dieselben Relationen für ein beliebiges Coordinatensystem	54
§ 32. Gleichungen des Gleichgewichts und der Bewegung eines unkrystallini- schen Mediums.	57
§ 33. Bedingungen für die Grenze zweier elastischen Medien.	57
6—8. Entwicklung der allgemeinen Theorie aus der Molekular- hypothese. 60—106	
6. Navier's Differentialgleichungen.	
§ 34. Summirung der Molekularkräfte	60
§ 35. Beziehung zwischen den Constanten. Differentialgleichungen	63
7. Poisson's Ableitung der allgemeinen Gleichungen.	
§ 36. Molekulardruckcomponenten	67
§ 37. Reduction auf dreifache Summen	69
§ 38. Natürlicher Zustand	71
§ 39. Zustand nach Verrückung	72
§ 40. Gleichungen für unkrystallinische Körper	74
§ 41. Krystallinische Medien	75
§ 42. Bedeutung der Constante k und ihre Beziehung zum Elasticitätsmodul	77
8. Entwicklung der Gleichungen aus dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten.	
§ 43. Virtuelles Moment der Kräfte	80
§ 44. Transformation der Summen für ein unkrystallinisches Medium . . .	83
§ 45. Betrachtung des natürlichen Zustandes	86
§ 46. Entwicklung der Differentialgleichungen	88
§ 47. Allgemeine Untersuchung der Kräftefunction	90
§ 48. Untersuchung des ersten Theiles der Kräftefunction	95
§ 49. Untersuchung des zweiten Theiles der Kräftefunction	98
§ 50. Untersuchung des dritten Theiles der Kräftefunction	100
§ 51. Schluss. Aufstellung der Differentialgleichungen und Grenzbedingungen	103
9. Die Temperaturveränderungen als Ursache der molekularen Verrückungen.	
§ 52. Ausdehnung durch die Wärme	107
§ 53. Thermischer Druck	109
§ 54. Ungleichförmige Temperatur	111
§ 55. Aufstellung der Differentialgleichungen mit Rücksicht auf die Temperatur	112
§ 56. Oberflächen-Bedingungen	113
§ 57. Beziehung zwischen thermischer und elastischer Ausdehnung	114
§ 58. Krystallinische Körper.	115
§ 59. Correction der Fourier'schen Differentialgleichung	118

10. Kirchhoffs allgemeine Lehrsätze.		Seite
§ 60.	Eindeutigkeit der Lösung für den Fall des Gleichgewichts	121
§ 61.	Beweis für die einzige Lösung im Falle der Bewegung	125
§ 62.	Verallgemeinerung des Beweises für Krystalle	128
§ 63.	Energie der elastischen Kräfte	129
11–12. Untersuchungen über den Gleichgewichtszustand deformirter elastischer Körper		133–202
11. Anwendungen auf unkrystallinische Körper.		
§ 64.	Vorbemerkungen	133
§ 65.	Ausdehnung eines prismatischen Körpers durch Zug	134
§ 66.	Längsdilatation und Quercontraction	136
§ 67.	Dilatationen eines hohlen Cylinders	138
§ 68.	Theorie der Wertheim'schen Methode	141
§ 69.	Hohlcylinder unter innerem Druck	142
§ 70.	Hohlkugel unter innerem und äusserem Druck	146
§ 71.	Oersted's Piezometer	148
§ 72.	Anwendung auf Thermometerkugeln	149
§ 73.	Spannung in der sphärischen Schale	151
§ 74.	Compression einer von einer Kugelschale umgebenen Kugel	153
§ 75.	Torsion eines Cylinders	155
§ 76.	Biegung eines Stabes	158
§ 77.	Beobachtungen zur Bestimmung des Verhältnisses der beiden Elasticitätsconstanten	161
12. Elasticität krystallinischer Stoffe.		
§ 78.	Allgemeine Formeln	164
§ 79.	Krystalle mit einer Symmetrie-Ebene	165
§ 80.	Krystalle mit zwei und drei Symmetrie-Ebenen	168
§ 81.	Krystalle mit zwei gleichen Axen	170
§ 82.	Reguläre Krystalle	173
§ 83.	Hexagonale Krystalle	174
§ 84.	Rhomboëdrische Krystalle	176
§ 85.	Zusammendrückung eines Krystalls durch allseitigen Druck	179
§ 86.	Krystallprisma unter einseitigem Druck	181
§ 87.	Prisma aus einem regulären Krystall	183
§ 88.	Zusammendrückung in der Druckrichtung	185
§ 89.	Querdilatation	188
§ 90.	Änderung der Winkel eines regulären Krystalls durch Druck	190
§ 91.	Rhomboëdrisches Krystallprisma unter einseitigem Druck	195
§ 92.	Rhomboëdrischer Krystall unter allseitigem Druck	199
§ 93.	Neuere Untersuchungen über die Elasticität der Krystalle	201
13–17. Gesetze für die Fortpflanzung ebener Wellen		203–299
13. Theorie der Wellenbewegung auf Grund der Molekularhypothese.		
§ 94.	Allgemeine Formeln	203
§ 95.	Integration	204

	Seite
§ 96. Bestimmung der willkürlichen Functionen	207
§ 97. Entstehung von sechs Wellenebenen	208
§ 98. Richtung der Bewegung in den sechs Wellen	210
§ 99. Fortpflanzungsellipsoid	211
§ 100. Die Formeln bezogen auf die Hauptaxen des Ellipsoids	213
§ 101. Untersuchung der aus einer Verrückung entstandenen Welle	215
§ 102. Eine aus einem Stoss entstandene Welle	216
§ 103. Warum sich Wellen nicht auch rückwärts fortpflanzen	217
§ 104. Fortpflanzung von Schwingungen einer Ebene	219
§ 105. Statische Bedeutung des Fortpflanzungs-Ellipsoides	223
§ 106. Beziehung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit zum Elasticitätscoefficienten	225
§ 107. Relationen zwischen den Constanten bei den verschiedenen Classen von Medien	226
§ 108. Wellenbewegung in unkrystallinischen Medien	227
§ 109. Fresnel'sche Gesetze. Welle in der Richtung einer Hauptaxe	228
§ 110. Wellennormale in einem Hauptschnitt	230
§ 111. Allgemeiner Fall. Gesetz der Fortpflanzung	234
§ 112. Gesetz der Polarisation	237
14. Theorie der Lichtwellen im incompressiblen Aether.	
§ 113. Herleitung der Differentialgleichungen	241
§ 114. Transformation der Differentialgleichungen	245
§ 115. Integration für ebene Wellen. Bestimmung der Drehungen	247
§ 116. Bestimmung der Verrückungen	249
§ 117. Herleitung der Fresnel'schen Gesetze	250
§ 118. Bestimmung des Druckes im Aether	252
§ 119. Ueber die Beziehungen zwischen den sechs Constanten des Mediums	253
15. Theorie transversaler Wellen in Krystallen.	
§ 120. Lamé's Differentialgleichungen	257
§ 121. Umgestaltung durch ein neues Coordinatensystem	262
§ 122. Integration. Longitudinale Welle	267
§ 123. Transversale Wellen. Fresnel's Gesetze	269
§ 124. Bedingung der Incompressibilität	272
§ 125. Verschiedene Axensysteme eines krystallinischen Mediums	272
§ 126. Ueber die Aenderung der optischen Axen mit der Temperatur	274
16. Cauchy's Erklärung der Farbenzerstreuung.	
§ 127. Begründung der Theorie	276
§ 128. Bildung der Differentialgleichungen	278
§ 129. Angenäherte Form der Differentialgleichungen	280
§ 130. Integration der angenäherten Gleichungen	282
§ 131. Gesetz der Farbenzerstreuung	283
§ 132. Integration der vollständigen Gleichungen	285
§ 133. Dispersion in einem unkrystallinischen Medium	287

17. F. Neumann's Erklärung der Farbenzerstreuung.	
	Seite
§ 134. Differentialgleichungen	290
§ 135. Angenäherte Integration für ein unkrystallinisches Medium	293
§ 136. Schlussbemerkungen	296
§ 137. Neuere Literatur des Gegenstandes	297
18—21. Gesetze der Bewegungen dünner Körper	300—374
18. Schwingungen gespannter Saiten.	
§ 138. Entwicklung der Gleichungen für eine Saite	300
§ 139. Vereinfachung für unendlich kleine Oscillationen	303
§ 140. Einführung der anfänglichen Spannung	305
§ 141. Integration. Verlängerung der Function	306
§ 142. Schwingungen nach einer anfänglichen Verrückung	308
§ 143. Bewegungen, welche aus einer anfänglichen Geschwindigkeit entstehen	310
§ 144. Schwingungen von zwei mit einander verbundenen Saiten	311
§ 145. Integration	313
§ 146. Reflexion und Brechung	315
19. Schwingungen einer gespannten Membran.	
§ 147. Allgemeine Gleichungen	318
§ 148. Unendlich kleine Amplituden	320
§ 149. Transversaltöne einer einseitig gespannten Membran	323
§ 150. Gleichmässig gespannte quadratische Membran	327
20. Theorie des geraden Stosses cylindrischer Stäbe.	
§ 151. Mechanische Theorie des elastischen Stosses	332
§ 152. Componenten des elastischen Druckes in Cylindercoordinaten	334
§ 153. Differentialgleichungen und Grenzbedingungen	336
§ 154. Annäherungs-Verfahren	338
§ 155. Integration	340
§ 156. Erstes Beispiel. Zwei Stäbe gleicher Masse	343
§ 157. Zweites Beispiel. Ungleiche Massen	344
§ 158. Reflexion eines Stosses	347
21. Theorie der Elasticität dünner Stäbe.	
§ 159. Allgemeine Formeln und Bemerkungen	351
§ 160. Cylindrischer Stab. Druckkräfte	352
§ 161. Formeln für die Verrückungen	355
§ 162. Biegung eines an einem Ende befestigten Stabes	358
§ 163. Vierkantiger Stab	362
§ 164. Biegung eines in zwei Punkten unterstützten Stabes	364
§ 165. Schwingungen eines Stabes	368
§ 166. Schwingungsknoten	371

1. Einleitung.

§ 1. Entstehung und Grundlage der Theorie.

Die Theorie der Elasticität gehört zu den neuesten Zweigen der mathematischen Physik; ihre Anfänge reichen nur bis in die zwanziger Jahre unseres Jahrhunderts zurück. Wenn auch schon von den Bernoulli und von Euler einzelne Aufgaben aus der Lehre von der Elasticität mathematisch behandelt worden sind, so wurde eine allgemeine Theorie, welche alle an elastischen Körpern beobachteten Erscheinungen einheitlich zu erklären und sämmtlich auf dieselben Fundamentalconstanten zurückzuführen versuchte, doch erst veranlasst durch Fresnel's neue Theorie des Lichtes. Die exacte Beurtheilung seiner Beobachtungen führte Fresnel zu Thatsachen, welche im geraden Widerspruch standen zu den anerkannten Principien der Wellenbewegung in elastischen Medien. In der Schallwelle ist die Bewegung der Theilchen parallel dem Strahl, die Welle eine longitudinale; Fresnel fand, dass in der Lichtwelle jene Bewegung senkrecht gegen den Strahl gerichtet, die Welle also eine transversale ist, und doch soll der Unterschied der Eigenschaften beider Medien, der Luft und des Lichtäthers, nur quantitativ, nicht qualitativ sein. Die Mechaniker jener Zeit läugneten die Möglichkeit einer solchen Bewegung, weil sie unverträglich sei mit den hydrodynamischen Grundgleichungen, welche auf elastische Flüssigkeiten, auf Luft angewandt nur longitudinale Wellen kennen lehren. Fresnel, sich vertheidigend, machte darauf aufmerksam, dass möglicherweise in diesen Gleichungen nicht alle Kräfte berücksichtigt sein möchten, welche in elastischen Medien zur Wirkung kommen können. Er fand in der That, dass in den hydrodynamischen Gleichungen nur solche inneren Kräfte enthalten sind, welche aus einer Verdünnung oder Verdichtung des Mediums entstehen und welche wiederum eine Aenderung der Dichtigkeit hervorbringen. Er stellte sich daher die Frage, ob es in einem elastischen Medium keine anderen Kräfte gebe, ob in einem solchen System, wie es die Theilchen eines elastischen Körpers bilden, nicht auch Kräfte

entstehen können aus einer Verschiebung der Theilchen, durch welche die Dichtigkeit nicht geändert wird. Wie jetzt die Sachen liegen, ist es leicht, den Standpunkt, auf den Fresnel sich stellte, klar zu machen.

Wir denken uns einen festen geraden Cylinder, dessen oberes Ende festgehalten, während das untere tordirt wird. In Folge der Torsion ändern die Theilchen des Cylinders ihre gegenseitige Lage, ohne dass gleichzeitig eine Aenderung der Dichtigkeit oder des Volumens einträte. Hört die tordirende Kraft auf zu wirken, so streben die Theilchen in ihre ursprüngliche Lage zurückzukehren. Denken wir uns nun statt des festen einen flüssigen Cylinder, einen Wasserstrahl, ebenso tordirt, so tritt auch hier keine Aenderung der Dichtigkeit ein. Die hydrodynamischen Gleichungen würden in diesem Falle ergeben, dass keine Kraft nöthig sei, um alle Querschnitte des Strahls nach und nach in die neue Lage zu bringen. Eine Folge hiervon ist, dass jedes Theilchen nach dem Aufhören der Torsion in der Lage bleiben wird, die es angenommen hat. Wir wissen jetzt, dass allerdings eine Kraft erforderlich ist, um die Torsion hervorzubringen. Diese Kraft würde als Reibung der einen Schicht gegen die andere erscheinen. Wir können auch behaupten, dass, wenn die Torsion innerhalb so enger Grenzen stattgefunden hätte, dass keine neue Gleichgewichtslage der Theilchen hätte eintreten können, diese Kraft alle einzelnen Querschnitte in ihre ursprüngliche Lage zurückführen würde.

Diese einfache Betrachtung zeigt, dass in den elastischen Medien wirklich noch andere Kräfte thätig sind, als in den hydrodynamischen Gleichungen berücksichtigt werden. Sie zeigt ferner, wie in dieser Hinsicht die Unterschiede zwischen festen und flüssigen Medien verschwinden, und sie lässt es als möglich erkennen, dass eine zugleich für feste und für flüssige Körper gültige Theorie der elastischen Kräfte aufgestellt werde. Der Unterschied des Aggregatzustandes fällt fort, wenn alle Bedingungen erfüllt sind, welche nöthig sind, dass keine neue Gleichgewichtslage eintrete. Es liegt im Begriffe eines Systems, sei es aus fester oder aus flüssiger Masse gebildet, dass die Kraft, welche ein beliebiges Theilchen bis zu einer gewissen Grenze aus seiner Gleichgewichtslage entfernt, es in dieselbe zurückzuführen vermag, an Grösse derjenigen gleichkommt, durch welche es aus der Gleichgewichtslage heraus bewegt wurde. Wird jene Grenze eingehalten, und ist diese Voraussetzung erfüllt, so ist es kein Widerspruch, wenn wir den Lichtäther und die Luft den festen Körpern zuzählen.

Hiernach vermögen wir zu übersehen, wie die für feste Körper

entwickelte Theorie der Elasticität ebensowohl für die Theorie des Schalles, als auch für die des Lichtes als Grundlage dienen kann, wie sie nicht bloss die Gesetze der Chladni'schen Klangfiguren, sondern auch die der Doppelbrechung und der Polarisation des Lichtes zu erklären vermag. Die Theorie wird von den natürlichen, wie von den künstlich hervorgebrachten Zuständen der Körper Rechenschaft geben; sie findet z. B. Anwendung, ob die Polarisation von Natur bestehen oder durch Compression hervorgebracht sein mag; sie wird auch die Methoden angeben zur Bestimmung der Constanten, von denen alle diese merkwürdigen Erscheinungen abhängen.

Die Anwendbarkeit der Theorie geht aber noch weiter; denn unsere Theorie vermag auch Erscheinungen aus anderen Gebieten der Physik, besonders aus der Wärmelehre zu erläutern. Dahin gehören die Gesetze der Ausdehnung krystallinischer Körper durch die Wärme, die nach verschiedenen Richtungen verschieden ist, ja sogar zu einer Zusammenziehung werden kann; ferner die optischen Erscheinungen in einem durchsichtigen Medium, in welchem die Temperatur nicht überall gleichförmig vertheilt ist. Ein solches Medium erhält die Eigenschaft, das Licht zu polarisiren und doppelt zu brechen. Die Beobachtung dieser Doppelbrechung kann mit Vortheil benutzt werden, den Zustand im Innern des Mediums, die elastische Verschiebung der Theile gegen einander zu bestimmen.

§ 2. Urheber der Theorie.

Begründet wurde die allgemeine Theorie der Elasticität durch eine Abhandlung von Navier¹⁾, welche in den Schriften der Pariser Akademie vom Jahre 1824 erschien. Einige Jahre später veröffentlichte Poisson²⁾ seine erste allgemeine Arbeit über diesen Gegenstand im 8ten Bande der Schriften der Akademie. Etwa gleichzeitig beschäftigte sich mit dieser Theorie auch Cauchy, der eine grosse Anzahl von Abhandlungen sowohl über die Grundprincipien als über die Anwendungen geschrieben hat. Neuere Abhandlungen, welche von allgemeiner oder von hervorragender Wichtigkeit für unseren Gegenstand geworden sind, werden wir an gehöriger Stelle anführen.

§ 3. Hypothesen.

Wir beginnen die Behandlung des Gegenstandes mit der Betrachtung eines begrenzten elastischen Mediums, eines festen Körpers.

1) Mém. de l'Acad. T. 7. p. 375. Paris 1827.

2) Mém. de l'Acad. T. 8. p. 357. Paris 1829. Journ. de l'école pol. Cah. 20. T. 13. p. 1. 1831.

Dieses ist der allgemeinere Fall, aus welchem, wenn wir die Grenzen unendlich weit annehmen, der speciellere eines unbegrenzten Mediums hervorgeht.

Die Grundanschauung ist, dass wir es zu thun haben mit einem System frei beweglicher Massentheilchen, welches sich im stabilen Gleichgewicht befindet. Die Dimensionen dieser Massentheilchen sind äusserst klein im Verhältniss zu ihren Entfernungen. Sie wirken auf einander mit anziehenden und abstossenden Kräften, deren Stärke eine solche Function der Entfernung ist, dass sie für sehr kleine Entfernungen merkliche Werthe haben, dagegen für jede merkliche Entfernung verschwindend klein sind. Die Wirkungssphäre eines Theilchens ist also äusserst klein, kleiner als jede mikroskopische Grösse, sie erstreckt sich aber auf viele benachbarte Theilchen.

Die Kraft, mit welcher zwei Theilchen m und m' auf einander wirken, stellen wir dar durch den Ausdruck

$$mm'(\varphi(\varrho) - \chi(\varrho)),$$

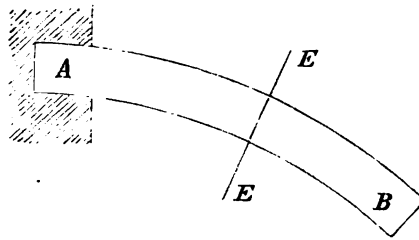
indem wir sie den Massen m und m' proportional setzen und unter $\varphi(\varrho)$ eine abstossende, unter $\chi(\varrho)$ eine anziehende Kraft verstehen. Beide, $\varphi(\varrho)$ sowohl als auch $\chi(\varrho)$, sind Functionen der Entfernung ϱ , in welcher sich die beiden Theilchen von einander befinden; sie bedeuten jedoch verschiedenartige Functionen dieser Entfernung, und zwar in der Weise, dass es einen bestimmten Werth von ϱ giebt, für welchen $\varphi(\varrho) = \chi(\varrho)$ ist, dass es also eine gewisse Entfernung giebt, in welcher Anziehung und Abstossung sich aufheben. Für jeden kleineren Werth von ϱ ist $\varphi(\varrho) > \chi(\varrho)$, es überwiegt die Abstossung; für jeden grösseren Werth, den ϱ erhalten kann, ohne dass überhaupt alle Wirkung aufhört, ist $\chi(\varrho)$ grösser als $\varphi(\varrho)$, hat die Anziehung das Uebergewicht. Werden also die Theilchen durch äussere Kräfte in eine grössere Entfernung gebracht, als in der Ruhelage, so üben sie gegenseitige Anziehung auf einander aus; werden sie dagegen einander näher gerückt, so stossen sie sich ab.

§ 4. Molekulardruck.

Wir denken uns irgend ein mit einer homogenen elastischen Masse erfülltes Prisma durch eine Ebene EE in zwei Hälften, etwa in eine obere und in eine untere Hälfte getheilt. Es soll sich im natürlichen Zustande befinden, d. h. in dem Zustande, in welchem keine anderen als innere Kräfte wirksam sind. In diesem Zustande befindet sich das System in einer bestimmten Ruhelage, welche

dadurch bestimmt ist, dass an jeder Stelle die auf ein dort befindliches Theilchen wirkende Kraft $= 0$ ist. Ist dies der Fall, so können wir die obere Hälfte von der unteren ohne Anwendung einer Kraft entfernen. In dem Augenblicke aber, in welchem die Trennung beginnt, entstehen Kräfte, welche den alten Zustand wieder herzustellen streben. Die Grösse dieser eintretenden Kraft ist eine Function der hervorgebrachten Verrückungen. Diese Kraft erscheint als Druck oder Spannung gegen die Ebene EE .

Der Druck braucht nicht an jeder Stelle der Ebene EE derselbe zu sein. Wir nehmen Beispiels halber einen prismatischen Stab in horizontaler Lage an; das Ende A sei unbeweglich befestigt, das andere Ende B nach unten niedergebogen; wir theilen den Stab durch eine ihn quer durchschneidende senkrechte Ebene EE in zwei Theile. An der obern Seite dieser Ebene wird der Druck



durch das Bestreben der verschobenen Theilchen, sich zu nähern, hervorgebracht, am untern dagegen durch die Abstossung der einander übermässig genäherten Theilchen. Dieser einfache Fall macht klar, dass der Druck an verschiedenen Stellen derselben theilenden Fläche verschiedenen Werth haben kann.

Wie aber auch der Druck gegen eine Ebene beschaffen sein mag, er ist jedenfalls proportional der Grösse des Flächenelementes der betrachteten Stelle. Nennen wir dieses Element $d\omega$, so ist der gegen dasselbe ausgeübte Druck $P d\omega$, wenn P den Druck auf die Flächeneinheit bezeichnet, vorausgesetzt, dass innerhalb derselben der Druck überall derselbe ist.

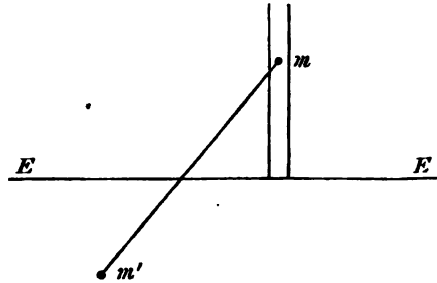
Wir sind gewohnt, uns den Druck senkrecht gegen die theilende Ebene zu denken, da der Begriff Druck aus der Hydrostatik hergenommen ist. Dies ist aber eine sehr particuläre Vorstellung. Wir werden aus folgendem Beispiel sehen, dass der Druck auch schief gegen die theilende Fläche gerichtet sein kann.

Wir denken uns einen verticalen Stab AB an seinem oberen Ende A festgehalten und am unteren B tordirt. In einer durch die Mitte des Stabes gelegten Horizontalebene EE kommt dann ein Druck zur Geltung, welcher die untere Hälfte des Stabes zurückzudrehen strebt. In diesem Falle fällt also die Richtung der Druckkraft in die Ebene EE , auf welche der Druck wirkt. Demnach

braucht der Druck in einem elastischen Körper keineswegs senkrecht gegen die theilende Ebene zu wirken, sondern er wird im Allgemeinen schief gegen die Ebene gerichtet sein.

§ 5. Berechnung des Drucks durch Molekularsummen.

Um uns eine noch präzisere Vorstellung vom molekularen Druck zu bilden, denken wir uns auf dem Elemente $d\omega$ der theilenden Ebene EE einen geraden Cylinder errichtet und durch die ganze Ausdehnung der einen Hälfte des Mediums verlängert. Wir suchen die Wirkung, welche die andere Hälfte auf diesen Cylinder ausübt, also die Summe der Wirkungen, welche die Theilchen m des Cylinders von den Theilchen m' der untern Hälfte erfahren. Die Resultante dieser Wirkungen ist der Druck auf das Flächenelement $d\omega$. Bilden wir dieselbe für jedes $d\omega$ und vereinigen darauf alle diese Kräfte, so erhalten wir den auf die Trennungsebene EE der beiden Hälften des Mediums, ausgeübten Druck. Bezeichnen wir



$$F(\varrho) = \varphi(\varrho) - \chi(\varrho),$$

so ist die abstoßende Wirkung, welche ein Theilchen m vom Theilchen m' erfährt, nach unserer in § 3 eingeführten Voraussetzung

$$mm'F(\varrho).$$

Nennen wir die drei Cosinus der Winkel, welche die Richtung dieser Wirkung mit drei rechtwinkligen Coordinatenrichtungen bildet, α , β , γ , so sind die Componenten dieser Wirkung

$$mm'F(\varrho) \cdot \alpha \quad mm'F(\varrho) \cdot \beta \quad mm'F(\varrho) \cdot \gamma.$$

Folglich sind die Componenten des auf das Flächenelement $d\omega$ ausgeübten Drucks $Pd\omega$

$$\begin{aligned} X' &= \Sigma \Sigma m \cdot m' F(\varrho) \cdot \alpha \\ Y' &= \Sigma \Sigma m \cdot m' F(\varrho) \cdot \beta \\ Z' &= \Sigma \Sigma m \cdot m' F(\varrho) \cdot \gamma, \end{aligned} \quad (1.)$$

wenn die doppelten Summenzeichen die Summirung über alle m' und alle m des Cylinders bedeuten. Bezeichnen wir durch S die Summation für alle Cylinder oder alle Elemente $d\omega$, so sind die Componenten des auf die ganze Theilungsebene ausgeübten Gesamtdrucks

$$\begin{aligned}
 X &= S\Sigma\Sigma mm' F(\varrho) \cdot \alpha \\
 Y &= S\Sigma\Sigma mm' F(\varrho) \cdot \beta \\
 Z &= S\Sigma\Sigma mm' F(\varrho) \cdot \gamma.
 \end{aligned}
 \tag{2.}$$

In dem von uns betrachteten Falle eines unbegrenzten elastischen Mediums sind freilich diese Summen bis in die Unendlichkeit auszu-
dehnen. Wir brauchen uns indess nur der über die Functionen $\varphi(\varrho)$
und $\psi(\varrho)$, folglich auch über $F(\varrho)$ gemachten Voraussetzungen zu
erinnern, um sofort einzusehen, dass die Werthe der Summen X', Y', Z'
trotzdem von endlicher Grösse bleiben. Da nämlich $F(\varrho)$ nur dann
von Null verschiedene Werthe annimmt, wenn ϱ sehr klein, kleiner
als eine mikroskopische Grösse wird, so ist klar, dass zu den Werthen
jener Summen nur diejenigen Theilchen m und m' , welche der Ebene
 EE unmessbar nahe liegen, oder nur die oberflächlichen Grenz-
schichten beitragen. Hierin liegt der Grund, weshalb wir diese
Summen als Druck auf eine Fläche bezeichnen dürfen.

Entwicklung der allgemeinen Theorie auf mechanischer Grundlage.

2. Allgemeine Lehrsätze über die Druckkräfte.

§ 6. Feststellung der Aufgabe.

Ehe wir nun unternehmen, die Grösse der Drucksummen nach dem Eintritt irgend einer in einem elastischen Medium geschehenen Verrückung zu bilden, beweisen wir einige allgemeine Sätze über die Druckkräfte. Dabei setzen wir über die Anordnung der Theilchen nichts voraus; die Sätze gelten sowohl für krystallinische, als für unkrystallinische Medien. Ebenso wenig beruht die Gültigkeit dieser Lehrsätze auf irgend welcher Annahme über die Natur der molekularen Kräfte; wir bedürfen zum Beweise nicht einmal der Hypothese, dass der elastische Druck aus molekularen anziehenden oder abstossenden Kräften entspringt; es genügt die Voraussetzung, dass in einem elastischen Medium überhaupt Druckkräfte vorhanden sind.

Legen wir durch einen Punkt eines elastischen Mediums verschiedene Ebenen, so erhalten wir jedesmal andere Werthe für den Druck auf das an der Stelle des angenommenen Punktes liegende Element $d\omega$ der betreffenden Ebene. Kennt man die 9 Druckcomponenten für irgend welche 3 gegen einander rechtwinklige durch den Punkt gelegte Ebenen, so kann man aus den Werthen derselben mittelst des ersten unserer Theoreme leicht den Druck bestimmen, welcher gegen eine in irgend einer andern Richtung durch denselben Punkt gelegte Ebene ausgeübt wird. (Theorem C. § 9.)

Ein zweiter Satz wird zeigen, dass man zur Entwicklung dieser Grösse nicht aller jener 9 Componenten bedarf, sondern dass 6 Grössen zu kennen ausreichend ist. (Theorem B. § 8.)

Das dritte Theorem giebt die Beziehung an, in welcher die Componenten des Drucks an irgend einer Stelle zu den Kräften stehen,

durch welche die Verrückung an dieser Stelle hervorgebracht ist. (Theorem A. § 7.)

Um diese Sätze zu beweisen, führen wir folgende Bezeichnung ein. Wir legen durch einen beliebigen Punkt, dessen Coordinaten x, y, z sind, drei Ebenen parallel den durch die Coordinatenaxen gelegten Ebenen, und ausserdem eine Ebene in beliebiger Neigung oder auch eine gekrümmte Fläche. Wir nehmen in jeder dieser vier Flächen an der Stelle xyz ein Flächenelement $d\omega$ an und nennen den Druck, den dasselbe erfährt,

$$\begin{aligned} P_x d\omega, & \text{ wenn } x \\ P_y d\omega, & \text{ „ } y \\ P_z d\omega, & \text{ „ } z \end{aligned}$$

die Normale des Flächenelements $d\omega$ bildet, dagegen

$$P_s d\omega,$$

wenn das Element $d\omega$ der vierten geneigten Ebene angehört, deren Normale durch s bezeichnet werden möge. Dabei bestimmen wir weiter, dass die genannten Grössen in allen vier Fällen immer denjenigen Druck vorstellen sollen, welchen die nach der negativen Seite der Coordinaten, also kürzer nach dem Ursprunge derselben hin gelegene Hälfte des durch die betreffende Ebene getheilten Mediums auf einen in der andern Hälfte über $d\omega$ construirten Cylinder ausübt. Die umgekehrten Grössen, d. h. die Drucke, welche die von dem Anfang der Coordinaten abgewandten Hälften auf einen in der zugewandten Hälfte construirten Cylinder ausüben, bezeichnen wir den obigen analog durch

$$P'_x d\omega, \quad P'_y d\omega, \quad P'_z d\omega, \quad P'_s d\omega.$$

Wir zerlegen darauf jene sechs verschiedenen Druckkräfte jede in drei Componenten parallel den Richtungen der Coordinaten und nennen die Componenten

von P_x	$X_x,$	$Y_x,$	Z_x
„ P_y	$X_y,$	$Y_y,$	Z_y
„ P_z	$X_z,$	$Y_z,$	Z_z
„ P'_x	$X'_x,$	$Y'_x,$	Z'_x
„ P'_y	$X'_y,$	$Y'_y,$	Z'_y
„ P'_z	$X'_z,$	$Y'_z,$	Z'_z

Die Werthe dieser Componenten sind, wie die Grössen P und P' , Functionen der Coordinaten, und zwar so, dass sie nicht bloss

mit dem Orte, an welchem sich der Punkt xyz im Raume befindet, sondern auch mit der gewählten Richtung der Coordinatenachsen ihre Werthe ändern.

Ausser diesen im Inneren des elastischen Körpers thätigen Druckkräften haben wir in den folgenden Betrachtungen die Kräfte zu berücksichtigen, welche, wie etwa die Schwerkraft, von aussen her auf die Masse des Körpers wirken. Wir bezeichnen die Componenten dieser bewegenden Kräfte, welche auf die an der Stelle xyz in der Einheit des Volumens in constanter Dichtigkeit befindliche Masse wirken, durch

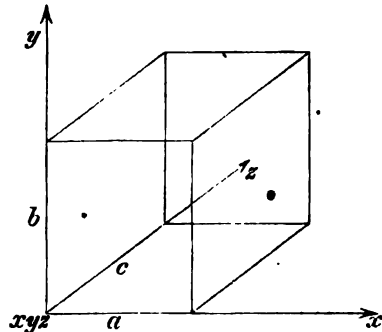
$$X, \quad Y, \quad Z.$$

§ 7. Theorem A.

Von den drei Theoremen beweisen wir zunächst das an dritter Stelle genannte, welches uns zu den Bedingungen für das Gleichgewicht eines elastischen Mediums führen wird.

Wir knüpfen unsere Untersuchung an die Betrachtung eines kleinen rechtwinkligen Parallelepipeds an, dessen Kanten parallel

den Coordinatenachsen laufen und dessen dem Coordinatenanfange zugekehrte Ecke im Punkte xyz liegt. Die Kanten a, b, c desselben sollen nicht unendlich klein sein, aber doch so klein, dass, wenn wir einen Punkt im Innern des Prismas durch relative Coordinaten ξ, η, ζ auf den Punkt xyz als Anfangspunkt beziehen, wir die Componenten der Drucke und der bewegenden Kräfte an diesem Punkte



aus den Werthen derselben Grössen im Punkte xyz durch Entwicklung nach den Potenzen von ξ, η, ζ mittelst des Taylor'schen Lehrsatzes ableiten können. Im Uebrigen bleiben diese 3 Grössen a, b, c vollkommen willkürlich, mit der einzigen Einschränkung, dass keine von ihnen Null sei.

Wir entwickeln jetzt die Summe der gesammten Druckcomponenten, welche die 6 Seiten des Parallelepipeds erfahren; wir bilden darauf die diesen Druckcomponenten angehörenden Drehungsmomente um 3 rechtwinklige Axen. Wir bilden auf dieselbe Weise die resultirenden Componenten und Drehungsmomente der auf das Parallelepipeton wirkenden bewegenden Kräfte. Das Bestehen des Gleich-

gewichts erfordert, dass die Summe der Componenten nach den drei Richtungen der Coordinaten, und ebenso, dass die Summe der Drehungsmomente um dieselben drei Linien als Axen = 0 seien.

Wir führen die folgende Rechnung nur für die Summe der Componenten nach x und für die der Drehungsmomente um z durch, da evidenten Maassen, was für eine Coordinatenrichtung gilt, für die beiden andern nicht unrichtig sein kann.

Nach unserer Bestimmung über die Grösse von a, b, c gilt, so lange $\xi < a, \eta < b$ und $\xi < c$ bleibt, für jedes X , sowohl mit, als auch ohne Index, folgende Entwicklung. Es ist der Werth dieser Function für die Stelle mit den Coordinaten $x + \xi, y + \eta, z + \xi$

$$\begin{aligned} X + \frac{\partial X}{\partial x} \xi + \frac{\partial X}{\partial y} \eta + \frac{\partial X}{\partial z} \xi \\ + \frac{1}{1 \cdot 2} \left\{ \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \xi^2 + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} \eta^2 + \frac{\partial^2 X}{\partial z^2} \xi^2 + 2 \frac{\partial^2 X}{\partial x \partial y} \xi \eta + 2 \frac{\partial^2 X}{\partial y \partial z} \eta \xi \right. \\ \left. + 2 \frac{\partial^2 X}{\partial z \partial x} \xi \xi \right\} + \dots \end{aligned} \quad (1.)$$

Auf ein Element $d\eta \cdot d\xi$, welches in der dem Coordinaten-Anfangspunkte zugekehrten Seite bc des Prismas an der Stelle $x, y + \eta, z + \xi$ liegt, wirkt folgende Druckkraft in der Richtung von x

$$d\eta \cdot d\xi \left\{ X_x + \frac{\partial X_x}{\partial y} \eta + \frac{\partial X_x}{\partial z} \xi + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 X_x}{\partial y^2} \eta^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 X_x}{\partial z^2} \xi^2 + \frac{\partial^2 X_x}{\partial y \partial z} \eta \xi + \dots \right\}$$

Ebenso erhalten wir die auf ein Element $d\eta \cdot d\xi$, welches sich in der gegenüberliegenden Seite an der Stelle $x + a, y + \eta, z + \xi$ befindet, wirkende Druckcomponente nach x

$$d\eta \cdot d\xi \left\{ X'_x + \frac{\partial X'_x}{\partial x} a + \frac{\partial X'_x}{\partial y} \eta + \frac{\partial X'_x}{\partial z} \xi + \dots \right\}$$

Auf ein Element $d\xi \cdot d\xi$ der dem Anfangspunkt zugewandten Seite ac wirkt

$$d\xi \cdot d\xi \left\{ X_y + \frac{\partial X_y}{\partial x} \xi + \frac{\partial X_y}{\partial z} \xi + \dots \right\}$$

und auf ein gegenüberliegendes

$$d\xi \cdot d\xi \left\{ X'_y + \frac{\partial X'_y}{\partial x} \xi + \frac{\partial X'_y}{\partial y} b + \frac{\partial X'_y}{\partial z} \xi + \dots \right\}$$

Ferner auf ein Element $d\xi \cdot d\eta$ der zugewandten Seite

$$d\xi \cdot d\eta \cdot \left\{ X_z + \frac{\partial X_z}{\partial x} \xi + \frac{\partial X_z}{\partial y} \eta + \dots \right\}$$

und auf ein solches der abgewandten Seite

$$d\xi \cdot d\eta \left\{ X'_z + \frac{\partial X'_z}{\partial x} \xi + \frac{\partial X'_z}{\partial y} \eta + \frac{\partial X'_z}{\partial z} c + \dots \right\}.$$

Ausserdem wirkt auf ein räumliches Element $d\xi d\eta d\xi$ des Parallel-epipeds die bewegende Kraft

$$d\xi d\eta d\xi \left\{ X + \frac{\partial X}{\partial x} \xi + \frac{\partial X}{\partial y} \eta + \frac{\partial X}{\partial z} \xi + \dots \right\}.$$

Folglich sind die sämtlichen auf das Prisma ausgeübten X-Compo-
nenten im Zustand des Gleichgewichts

$$\begin{aligned} 0 = & \int_0^b d\eta \int_0^c d\xi \left\{ (X_x + X'_x) + \frac{\partial X'_x}{\partial x} a + \left(\frac{\partial X_x}{\partial y} + \frac{\partial X'_x}{\partial y} \right) \eta \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial X_x}{\partial z} + \frac{\partial X'_x}{\partial z} \right) \xi + \dots \right\} \\ & + \int_0^a d\xi \int_0^c d\xi \left\{ (X_y + X'_y) + \left(\frac{\partial X_y}{\partial x} + \frac{\partial X'_y}{\partial x} \right) \xi + \frac{\partial X'_y}{\partial y} b \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial X'_y}{\partial z} + \frac{\partial X_y}{\partial z} \right) \xi + \dots \right\} \quad (2) \\ & + \int_0^a d\xi \int_0^b d\eta \left\{ (X_z + X'_z) + \left(\frac{\partial X_z}{\partial x} + \frac{\partial X'_z}{\partial x} \right) \xi + \left(\frac{\partial X_z}{\partial y} + \frac{\partial X'_z}{\partial y} \right) \eta \right. \\ & \left. + \frac{\partial X'_z}{\partial z} c + \dots \right\} \\ & + \int_0^a d\xi \int_0^b d\eta \int_0^c d\xi \left\{ X + \frac{\partial X}{\partial x} \xi + \frac{\partial X}{\partial y} \eta + \frac{\partial X}{\partial z} \xi + \dots \right\}. \end{aligned}$$

Die Ausführung der angedeuteten Integrationen giebt

$$\begin{aligned} 0 = & bc (X_x + X'_x) + abc \frac{\partial X'_x}{\partial x} + \frac{1}{2} b^2 c \left(\frac{\partial X_x}{\partial y} + \frac{\partial X'_x}{\partial y} \right) \\ & + \frac{1}{2} bc^2 \left(\frac{\partial X_x}{\partial z} + \frac{\partial X'_x}{\partial z} \right) + \dots \\ & + ac (X_y + X'_y) + \frac{1}{2} a^2 c \left(\frac{\partial X_y}{\partial x} + \frac{\partial X'_y}{\partial x} \right) + abc \frac{\partial X'_y}{\partial y} \\ & + \frac{1}{2} ac^2 \left(\frac{\partial X_y}{\partial z} + \frac{\partial X'_y}{\partial z} \right) + \dots \quad (3) \\ & + ab (X_z + X'_z) + \frac{1}{2} a^2 b \left(\frac{\partial X_z}{\partial x} + \frac{\partial X'_z}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} ab^2 \left(\frac{\partial X_z}{\partial y} + \frac{\partial X'_z}{\partial y} \right) \\ & + abc \frac{\partial X'_z}{\partial z} + \dots \\ & + a_1 b_1 c_1 X + \frac{1}{2} a^2 bc \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{1}{2} ab^2 c \frac{\partial X}{\partial y} + \frac{1}{2} abc^2 \frac{\partial X}{\partial z} + \dots \end{aligned}$$

Da a, b, c willkürliche Grössen sind, so kann diese Gleichung nur bestehen, wenn die Glieder gleicher Ordnung für sich verschwinden; da ferner a, b, c in keinem Zusammenhange untereinander stehen, so müssen unter diesen Gliedern gleicher Ordnung die Coefficienten der gleichen Potenzen für sich Null sein. Es müssen also, damit zunächst die mit den Factoren bc, ca, ab, abc behafteten Glieder fortfallen, folgende Gleichungen erfüllt werden:

$$\begin{aligned} 0 &= X_x + X'_x \\ 0 &= X_y + X'_y \\ 0 &= X_z + X'_z \\ 0 &= X + \frac{\partial X'_x}{\partial x} + \frac{\partial X'_y}{\partial y} + \frac{\partial X'_z}{\partial z} \dots \end{aligned} \tag{4.}$$

Alle weiteren Gleichungen des auf diese Weise erhaltenen unendlichen Systems lassen sich auf diese vier ersten einfach zurückführen. So erhalten wir z. B., indem wir den Factor von b^2c verschwinden lassen, die Gleichung

$$0 = \frac{\partial X_x}{\partial y} + \frac{\partial X'_x}{\partial y};$$

ferner liefert der Coefficient von ab^2c die Gleichung

$$0 = \frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial^2 X_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 X_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 X_z}{\partial y \partial z}$$

u. s. f. Ueberhaupt erkennt man aus dem Bildungsgesetz der Taylor'schen Reihe, auf welcher unsere Rechnung beruht, leicht als allgemeines Gesetz, dass die Coefficienten aller höheren Potenzen aus denen der niederen durch einfache Differentiation unmittelbar herzuleiten sind.

Dehnen wir das in den Formeln (4.) enthaltene Resultat auf die Y und Z aus, so haben wir zunächst

$$\begin{aligned} X_x + X'_x &= 0 & Y_x + Y'_x &= 0 & Z_x + Z'_x &= 0 \\ X_y + X'_y &= 0 & Y_y + Y'_y &= 0 & Z_y + Z'_y &= 0 \\ X_z + X'_z &= 0 & Y_z + Y'_z &= 0 & Z_z + Z'_z &= 0 \end{aligned} \tag{5.}$$

d. h. der auf eine Fläche in einer Richtung wirkende Druck ist gleich dem in der entgegengesetzten Richtung auf dieselbe Fläche wirkenden, von der andern Hälfte des Mediums ausgeübten Drucke.

Mit Benutzung dieser Formeln stellt sich das zweite Resultat unserer Untersuchung dar in der Form

$$\begin{aligned}
 X &= \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} \\
 Y &= \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} \\
 Z &= \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z}.
 \end{aligned}
 \tag{A.}$$

Mit diesen Formeln ist das in § 6 an dritter Stelle angekündigte Theorem bewiesen. Dasselbe enthält eine wichtige Relation zwischen den Componenten der Drucke und denen der Kräfte, welche dieselben hervorgebracht haben; es bildet daher die hauptsächlichste Grundlage für die Bedingungen des Gleichgewichts eines elastischen Körpers.

§ 8. Theorem B.

Wollen wir die Bedingungen für das Gleichgewicht vollständig aufstellen, so haben wir in Bezug auf die Drehungsmomente der auf den elastischen Körper wirkenden Kräfte eine ähnliche Untersuchung anzustellen, wie wir sie im vorigen § für die Componenten der resultirenden Kraft durchgeführt haben. Es genügt, die Rechnung für nur eine der drei Coordinatenrichtungen auszuführen.

Wenn wir als Drehungsaxe die der z -Axe parallel durch den Eckpunkt xyz des Parallelepipeds gehende Kante c desselben annehmen, so ist die für den Ruhezustand verschwindende Summe der Drehungsmomente nach dem Schema

$$0 = \Sigma(\xi Y - \eta X)$$

für alle inneren und äusseren Kräfte zu bilden. Die somit in Betracht kommenden Grössen enthält folgende tabellarische Zusammenstellung, welche für jedes Flächen- oder Raumelement die Kräfte und die Abstände von der Drehungsaxe angiebt:

1) für die drei vorderen im Punkte xyz zusammenstossenden Flächen:

$d\eta d\xi$	X_x	+	$\frac{dX_x}{dy} \eta$	+	$\frac{dX_x}{dz} \xi$	+	\dots	$\cdot \eta$
	Y_x	+	$\frac{dY_x}{dy} \eta$	+	$\frac{dY_x}{dz} \xi$	+	\dots	0
$d\xi d\xi$	$X_y + \frac{dX_y}{dx} \xi$			+	$\frac{dX_y}{dz} \xi$	+	\dots	0
	$Y_y + \frac{dY_y}{dx} \xi$			+	$\frac{dY_y}{dz} \xi$	+	\dots	ξ
$d\xi d\eta$	$X_z + \frac{dX_z}{dx} \xi + \frac{dX_z}{dy} \eta$					+	\dots	η
	$Y_z + \frac{dY_z}{dx} \xi + \frac{dY_z}{dy} \eta$					+	\dots	ξ

2) für die hinteren im Punkte $x + a, y + b, z + c$ zusammenstossenden Flächen:

$$\begin{array}{l}
 d\eta d\xi \left| \begin{array}{l} - \left\{ X_x + \frac{dX_x}{dx} a + \frac{dX_x}{dy} \eta + \frac{dX_x}{dz} \xi + \dots \right\} \\ - \left\{ Y_x + \frac{dY_x}{dx} a + \frac{dY_x}{dy} \eta + \frac{dY_x}{dz} \xi + \dots \right\} \end{array} \right| \begin{array}{l} \eta \\ a \end{array} \\
 d\xi d\xi \left| \begin{array}{l} - \left\{ X_y + \frac{dX_y}{dx} \xi + \frac{dX_y}{dy} b + \frac{dX_y}{dz} \xi + \dots \right\} \\ - \left\{ Y_y + \frac{dY_y}{dx} \xi + \frac{dY_y}{dy} b + \frac{dY_y}{dz} \xi + \dots \right\} \end{array} \right| \begin{array}{l} b \\ \xi \end{array} \\
 d\xi d\eta \left| \begin{array}{l} - \left\{ X_z + \frac{dX_z}{dx} \xi + \frac{dX_z}{dy} \eta + \frac{dX_z}{dz} c + \dots \right\} \\ - \left\{ Y_z + \frac{dY_z}{dx} \xi + \frac{dY_z}{dy} \eta + \frac{dY_z}{dz} c + \dots \right\} \end{array} \right| \begin{array}{l} \eta \\ \xi; \end{array}
 \end{array}$$

3) für die innere Masse:

$$d\xi d\eta d\xi \left| \begin{array}{l} X + \frac{dX}{dx} \xi + \frac{dX}{dy} \eta + \frac{dX}{dz} \xi + \dots \\ Y + \frac{dY}{dx} \xi + \frac{dY}{dy} \eta + \frac{dY}{dz} \xi + \dots \end{array} \right| \begin{array}{l} \eta \\ \xi. \end{array}$$

Nach dieser Tabelle ist das gesuchte Drehungsmoment

$$\begin{aligned}
 0 = & \int_0^b d\eta \int_0^c d\xi \left\{ -a \left(Y_x + \frac{dY_x}{dx} a + \frac{dY_x}{dy} \eta + \frac{dY_x}{dz} \xi + \dots \right) \right. \\
 & \left. + \eta \left(\frac{dX_x}{dx} a + \dots \right) \right\} \\
 & + \int_0^c d\xi \int_0^a d\xi \left\{ -\xi \left(\frac{dY_y}{dy} b + \dots \right) \right. \\
 & \left. + b \left(X_y + \frac{dX_y}{dx} \xi + \frac{dX_y}{dy} b + \frac{dX_y}{dz} \xi + \dots \right) \right\} \quad (1.) \\
 & - \int_0^a d\xi \int_0^b d\eta \left\{ c \left(\xi \frac{dY_z}{dz} - \eta \frac{dX_z}{dz} \right) + \dots \right\} \\
 & + \int_0^a d\xi \int_0^b d\eta \int_0^c d\xi \left\{ \xi(Y + \dots) - \eta(X + \dots) \right\}
 \end{aligned}$$

und nach Ausführung der Integrationen

$$0 = abc \left(X_y - Y_x \right) - \frac{1}{2} a^2 bc \left(\frac{dY_x}{dx} + \frac{dY_y}{dy} + \frac{dY_z}{dz} - Y \right) \quad (2.)$$

$$- \frac{1}{2} ab^2 c \left(\frac{dY_x}{dy} - \frac{dX_x}{dx} - 2 \frac{dX_y}{dy} - \frac{dX_z}{dz} + X \right) - \frac{1}{2} abc^2 \left(\frac{dY_x}{dz} - \frac{dX_y}{dz} \right) - \dots$$

Diese Gleichung kann nur bestehen, wenn die Coefficienten der einzelnen Potenzen der von einander unabhängigen Grössen a, b, c sämmtlich verschwinden. Man erhält auf diese Weise wiederum ein unendliches System von Gleichungen, unter welchen nur die erste

$$0 = X_y - Y_x$$

ein neues Theorem enthält. Alle folgenden ergeben sich aus dieser und aus dem im vorigen § bewiesenen Theorem A.

Dehnen wir das erhaltene Resultat auch auf die beiden anderen Coordinatenrichtungen aus, so erhalten wir den zweiten Lehrsatz:

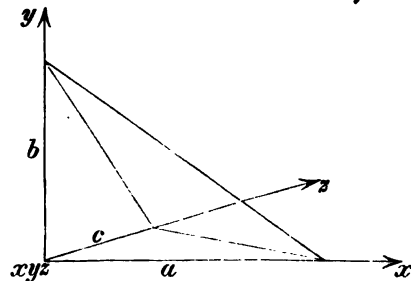
$$\begin{aligned} X_y &= Y_x \\ Y_z &= Z_y \\ Z_x &= X_z. \end{aligned} \quad (B.)$$

Es darf also in den Bezeichnungen der Druckcomponenten der Hauptbuchstabe mit dem angehängten Index vertauscht werden. Diese Regel bedeutet, dass der Werth einer Druckcomponente un geändert bleibt, wenn die Richtung der Kraft mit der Richtung des auf die gedrückte Ebene gefällten Lothes vertauscht wird.

Durch dieses Theorem ist die Aufgabe, die 9 Componenten der elastischen Druckkräfte zu bestimmen, dahin vereinfacht, dass nur noch 6 Grössen aufzusuchen sind.

§ 9. Theorem C.

Um endlich den in § 6 an erster Stelle genannten Lehrsatz zu beweisen, wiederholen wir die bisher an einem Parallelepipiped durchgeführte Betrachtung für ein Tetraeder. Die eine Ecke desselben liegt im Punkte x, y, z und ist rechtwinklig. Sie wird gebildet durch den Zusammenstoss dreier Kanten a, b, c , welche den Coordinatenachsen parallel sind. Die gegenüberliegende Fläche, die Basis, bezeichnen wir in Uebereinstimmung mit § 6 durch ω , den auf dieselbe ausgeübten Druck mit P_s ,



und dessen Componenten durch X_s, Y_s, Z_s . Endlich nennen wir s die aus dem Punkte xyz auf die Basis ω gefällte Normale.

Damit das Tetraeder im Gleichgewicht bleibe, müssen sämtliche auf dasselbe wirkenden Kräfte sich zerstören; es müssen also die Summen sämtlicher Componenten nach x, y, z jede für sich = 0 sein. Beispielsweise haben wir für die X -Componenten nach unserer früheren Bezeichnung

$$\begin{aligned} & \iint d\eta d\xi \left\{ X_x + \frac{\partial X_x}{\partial y} \eta + \frac{\partial X_x}{\partial z} \xi + \dots \right\} \\ & + \iint d\xi d\xi \left\{ X_y + \frac{\partial X_y}{\partial x} \xi + \frac{\partial X_y}{\partial z} \xi + \dots \right\} \\ & + \iint d\xi d\eta \left\{ X_z + \frac{\partial X_z}{\partial x} \xi + \frac{\partial X_z}{\partial y} \eta + \dots \right\} \\ & - \int d\omega \left\{ X_s + \frac{\partial X_s}{\partial x} \xi + \frac{\partial X_s}{\partial y} \eta + \frac{\partial X_s}{\partial z} \xi + \dots \right\} \\ & + \iiint d\xi d\eta d\xi \left\{ X + \frac{\partial X}{\partial x} \xi + \frac{\partial X}{\partial y} \eta + \frac{\partial X}{\partial z} \xi + \dots \right\} = 0, \end{aligned} \quad (1.)$$

wenn die Integrationen über die ganze Fläche oder das ganze Volumen ausgedehnt werden, dessen Element unter dem Integralzeichen steht. Die Ausführung der Integrationen giebt eine nach den Potenzen von a, b, c fortschreitende Reihe. Da alle drei Grössen willkürlich sind, müssen die Glieder gleicher Ordnung für sich verschwinden, also auch die Glieder zweiter Ordnung. Wir haben demnach

$$0 = \frac{1}{2} bc X_x + \frac{1}{2} ca X_y + \frac{1}{2} ab X_z - \omega X_s. \quad (2.)$$

Es ist aber keineswegs nöthig, dass in dieser Gleichung die einzelnen Terme verschwinden, weil sowohl X_s , als auch die Grösse der Dreiecksfläche ω von den Werthen von a, b, c abhängt. Die letztere Beziehung findet ihren Ausdruck darin, dass die Dreiecke $\frac{1}{2} bc, \frac{1}{2} ca, \frac{1}{2} ab$ nichts anderes sind, als die Projectionen von ω auf die Ebenen der Coordinaten. Bezeichnen wir also durch $(s, x), (s, y), (s, z)$ die Winkel, welche die auf ω senkrecht stehende Höhe s des Tetraeders mit den Coordinatenachsen bildet, so ist

$$\frac{1}{2} bc = \omega \cos(s, x), \quad \frac{1}{2} ca = \omega \cos(s, y), \quad \frac{1}{2} ab = \omega \cos(s, z).$$

Somit erhalten wir, indem wir zugleich die entsprechenden Gleichungen für die beiden andern Coordinatenrichtungen hinzufügen, die Formeln:

$$\begin{aligned}
 X_s &= X_x \cos(s, x) + X_y \cos(s, y) + X_z \cos(s, z) \\
 Y_s &= Y_x \cos(s, x) + Y_y \cos(s, y) + Y_z \cos(s, z) \\
 Z_s &= Z_x \cos(s, x) + Z_y \cos(s, y) + Z_z \cos(s, z),
 \end{aligned}
 \tag{C.}$$

welche das in § 6 zuerst erwähnte Theorem enthalten.

Wir können nach denselben P_s und seine Componenten leicht ausdrücken durch die Componenten der gegen die Coordinatenebenen wirkenden Drucke, deren Anzahl sich nach dem im vorigen § bewiesenen Theorem B von 9 auf 6 verringert.

Die Untersuchung der Coefficienten, mit welchen die höheren Potenzen von a, b, c in Gleichung (1.) behaftet sind, liefert kein weiteres neues Resultat. Wir zeigen dies an dem Beispiele der Glieder 3. Ordnung, deren Bedeutung einfach zu erkennen ist. Die vorkommenden Flächen-Integrale sind nämlich dieselben, wie diejenigen, welche dazu dienen, die Coordinaten der Schwerpunkte für die Dreiecksflächen zu bestimmen; es ist also

$$\iint d\eta \, d\xi \, \eta = \frac{1}{2} bc \cdot \frac{1}{3} b, \quad \iint d\eta \, d\xi \, \xi = \frac{1}{2} bc \cdot \frac{1}{3} c$$

und ähnlich die übrigen, ebenso

$$\int d\omega \, \xi = \omega \cdot \frac{1}{3} a, \quad \int d\omega \, \eta = \omega \cdot \frac{1}{3} b, \quad \int d\omega \, \xi = \omega \cdot \frac{1}{3} c;$$

ferner ist das Raumintegral

$$\iiint d\xi \, d\eta \, d\xi = \frac{1}{6} abc.$$

Demnach erhalten wir, wenn wir die Summe der Glieder 3. Ordnung = 0 setzen, nach einer einfachen Abänderung der Reihenfolge derselben die Gleichung

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{6} abc X &= a \frac{\partial}{\partial x} (\omega X_s - \frac{1}{2} ca X_y - \frac{1}{2} ab X_z) \\
 &+ b \frac{\partial}{\partial y} (\omega X_s - \frac{1}{2} ab X_x - \frac{1}{2} bc X_z) \\
 &+ c \frac{\partial}{\partial z} (\omega X_s - \frac{1}{2} bc X_x - \frac{1}{2} ca X_y),
 \end{aligned}$$

welche durch Benutzung der Formel (2.) die bekannte Relation

$$X = \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}$$

liefert. Aehnlich könnte der Beweis für die höheren Glieder geführt werden; doch ist dieses unnöthig, weil wir durch eine später folgende Betrachtung (§ 14) nachweisen werden, dass unsere drei Theoreme sämtliche Bedingungen des Gleichgewichts enthalten.

§ 10. Gleichungen für die Bewegung.

Vorher verallgemeinern wir die für das Gleichgewicht erhaltenen Gleichungen so, dass sie auch den Fall der Bewegung umfassen. Dies kann nach dem allgemein in der Mechanik geltenden d'Alembert'schen Princip geschehen, indem von den bewegendenden Kräften die mit der Masse des bewegten Körpers multiplicirten Beschleunigungen abgezogen werden.

Um die letzteren zu bilden, haben wir die Grösse der Ver-
rückung einzuführen, welche die Theile des elastischen Körpers aus der Gleichgewichtslage erlitten haben. Ein Theilchen, welches sich im natürlichen Zustande des Gleichgewichts an der Stelle x, y, z befunden hatte, möge durch die Bewegung zur Zeit t an eine Stelle gelangt sein, deren Coordinaten $x + u, y + v, z + w$ sind. Dann sind u, v, w die Componenten der erlittenen Verschiebung, ferner

$$\frac{du}{dt}, \quad \frac{dv}{dt}, \quad \frac{dw}{dt}$$

diejenigen der Geschwindigkeit, mit welcher das Theilchen sich bewegt, und endlich

$$\frac{d^2u}{dt^2}, \quad \frac{d^2v}{dt^2}, \quad \frac{d^2w}{dt^2}$$

die gesuchten Componenten der beschleunigenden Kräfte. Bezeichnet nun noch ϵ die als gleichmässig vorausgesetzte Dichtigkeit des betrachteten elastischen Körpers, so haben wir zu der Gleichung (2.) § 7, welche für den Fall des Gleichgewichts die Summe der in der Richtung der x auf ein Parallelepiped wirkenden bewegendenden Kräfte enthält, für den Fall der Bewegung noch hinzuzufügen

$$-\int_0^a \int_0^b \int_0^c d\xi d\eta d\zeta \epsilon \left\{ \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{d^2u}{dt^2} \right) \xi + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{d^2u}{dt^2} \right) \eta + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{d^2u}{dt^2} \right) \zeta + \dots \right\}$$

Verfährt man mit der so modificirten Gleichung auf dieselbe Weise, wie in § 7 geschehen ist, so erhält man statt der Gleichung A § 7

$$\begin{aligned} X - \epsilon \frac{d^2u}{dt^2} &= \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} \\ Y - \epsilon \frac{d^2v}{dt^2} &= \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} \\ Z - \epsilon \frac{d^2w}{dt^2} &= \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z}. \end{aligned} \tag{A'}$$

Dieses sind die allgemeinen Gleichungen für die Bewegung eines elastischen Mediums.

Die beiden andern Theoreme B und C erfahren keinerlei Abänderung für den Fall der Bewegung; denn in die Formeln, welche diese Lehrsätze enthalten, können die beschleunigenden Kräfte, wie man sich durch einen Rückblick auf die §§ 8 und 9 leicht überzeugt, ebensowenig eintreten, wie die bewegenden Kräfte X, Y, Z . Es gelten daher ganz allgemein, sowohl für den Fall der Ruhe, als auch für den der Bewegung, die beiden Theoreme:

$$X_y = Y_x, \quad Y_z = Z_y, \quad Z_x = X_z; \quad (\text{B.})$$

$$\begin{aligned} X_s &= X_x \cos(s, x) + X_y \cos(s, y) + X_z \cos(s, z) \\ Y_s &= Y_x \cos(s, x) + Y_y \cos(s, y) + Y_z \cos(s, z) \\ Z_s &= Z_x \cos(s, x) + Z_y \cos(s, y) + Z_z \cos(s, z). \end{aligned} \quad (\text{C.})$$

§ 11. Oberflächenbedingungen.

Die bisher entwickelten Gleichungen gelten jedoch nur für einen Punkt im Innern eines Mediums. Wenn sie auch für ein unbegrenztes Medium vollständig ausreichen, so können wir sie doch nicht auf eine Stelle unmittelbar unter der Oberfläche eines begrenzten Mediums anwenden.

Wir construiren ein rechtwinkliges Prisma, dessen eine Seitenfläche ein Oberflächenelement $d\omega$ der Oberfläche des elastischen Körpers bildet, dessen Kanten also theils parallel, theils normal gegen die Oberfläche gerichtet sind. Auf die äussere Seite $d\omega$ soll, auf die Einheit der Fläche bezogen, ein Druck P' wirken, unter dem man sich etwa den Druck der Atmosphäre vorstellen kann. Die Componenten dieses Druckes $P'd\omega$ seien

$$X'd\omega, \quad Y'd\omega, \quad Z'd\omega.$$

Wir denken uns jetzt die Summen der Componenten der Molekulardrucke auf die inneren fünf Flächen des Prismas, wie bisher, gebildet; dazu addiren wir die Componenten des auf $d\omega$ lastenden Druckes und endlich die Componenten der von aussen her auf die Masse des Prismas wirkenden Kräfte, so erfordert das Bestehen des Gleichgewichts, dass sich die Componenten dieser sieben Kräfte gegenseitig zerstören. Im Falle der Bewegung kommt als 8. Glied noch die negativ genommene Beschleunigung hinzu.

Entwickeln wir diese Summen wieder, wie früher, nach steigenden Potenzen der Kanten des Parallelepipeds, so müssen die Glieder gleicher Grössenordnung für sich allein verschwinden. In den Gliedern von niedrigster, d. h. zweiter Ordnung zerstören (wie in Gleichung (3.) § 7) die Glieder, welche die Drucke auf die vier normal gegen die

Oberfläche gerichteten Seitenflächen darstellen, sich paarweise untereinander. Die äusseren Kräfte geben kein Glied zweiter Ordnung. Es bleibt also zum Bestehen des Gleichgewichts erforderlich, dass sich untereinander diejenigen Glieder zweiter Ordnung aufheben, welche aus den auf das Element $d\omega$ der freien Oberfläche und auf die ihm parallel gegenüber liegende innere Fläche wirkenden Drücken entstehen. Wir nennen den auf die Einheit der letzteren Fläche wirkenden Druck P_n und seine Componenten

$$X_n, Y_n, Z_n,$$

indem wir unter n die Richtung der nach aussen hin verlängerten Normale der Oberfläche verstehen. Dann sind die nöthigen Bedingungen

$$0 = X'd\omega + X_n d\omega$$

$$0 = Y'd\omega + Y_n d\omega$$

$$0 = Z'd\omega + Z_n d\omega,$$

da beide Flächenelemente in ihrer Grösse sich nur um ein unendlich Kleines zweiter Ordnung von einander unterscheiden. Es muss also für jedes Element der Oberfläche

$$0 = X' + X_n, \quad 0 = Y' + Y_n, \quad 0 = Z' + Z_n \quad (\text{D. 1.})$$

sein, wo wir den inneren Druckkräften X_n, Y_n, Z_n diejenigen Werthe ertheilen dürfen, welche sie unmittelbar an der Oberfläche annehmen.

Diese Werthe finden wir durch das Theorem C, wenn wir die bisher beliebige Richtung s in die der Normale n der Oberfläche fallen lassen, aus den gegen die Coordinatenebenen wirkenden Drücken. Unser Theorem lässt sich also auch in der Form

$$0 = X' + X_x \cos(n, x) + X_y \cos(n, y) + X_z \cos(n, z)$$

$$0 = Y' + Y_x \cos(n, x) + Y_y \cos(n, y) + Y_z \cos(n, z) \quad (\text{D. 2.})$$

$$0 = Z' + Z_x \cos(n, x) + Z_y \cos(n, y) + Z_z \cos(n, z)$$

darstellen und gilt für jeden Punkt einer stetig gekrümmten freien Oberfläche.

Der Lehrsatz gilt nicht bloss für den Zustand der Ruhe und des Gleichgewichts, sondern auch für den der Bewegung; denn die von den beschleunigenden Kräften abhängige Reihenentwicklung beginnt mit Gliedern, welche in Bezug auf a, b, c von der dritten Ordnung sind, also auf die betrachteten Glieder zweiter Ordnung keinen Einfluss haben können.

Die Untersuchung der Glieder dritter und höherer Ordnung

ergibt keine neue Relation zwischen den Kräften. Wir sind somit zur vollständigen Kenntniss des Systems von Gleichungen gelangt, durch welche Ruhe und Bewegung eines elastischen Körpers bestimmt werden.

§ 12. Satz über das Gleichgewicht eines Körpers.

Haben die bewiesenen Sätze wirklich diese Bedeutung, so müssen sich aus ihnen alle die Bedingungen herleiten lassen, welche nach den Principien der Mechanik für das Gleichgewicht eines Systems von Massen ausreichend und erforderlich sind.

Es muss also aus unseren Theoremen zunächst der Satz der Mechanik hergeleitet werden können, dass zum Bestehen des Gleichgewichts eines elastischen Körpers, ebenso wie für jeden anderen Körper oder für jedes andere System, erforderlich ist, dass die sämtlichen von aussen her auf ihn wirkenden Kräfte, nämlich die auf seine innere Masse ausgeübten Kräfte und die auf seine Oberfläche wirkenden Drucke sich in Gleichgewicht halten. In Formeln ausgedrückt, lautet dieser Satz

$$\begin{aligned} 0 &= \int dV X + \int d\omega X' \\ 0 &= \int dV Y + \int d\omega Y' \\ 0 &= \int dV Z + \int d\omega Z', \end{aligned} \quad (1.)$$

wenn wir die Integrationen nach dV über den ganzen Raum und die nach $d\omega$ über die ganze Oberfläche des Körpers ausdehnen.

Um diese Gleichungen aus unseren Theoremen abzuleiten, multipliciren wir die Gleichungen A § 7 mit dem Raumelemente

$$dV = dx dy dz$$

und integriren über das ganze Volumen des Körpers. Dies giebt für die erste Componente

$$\begin{aligned} \int dV X &= \iiint dx dy dz \left\{ \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} \right\} \\ &= \iint dy dz [X_x]_{x_1}^{x_{11}} + \iint dz dx [X_y]_{y_1}^{y_{11}} + \iint dx dy [X_z]_{z_1}^{z_{11}}, \end{aligned} \quad (2.)$$

wo die mit den Indices $x_1, x_{11}, y_1, y_{11}, z_1, z_{11}$ versehenen eckigen Parenthesen die Differenz der Functionswerthe für je zwei gegenüberliegende Stellen (x_1, y, z und x_{11}, y, z u. s. w.) der Oberfläche bezeichnen. Drücken wir jetzt die Flächenelemente $dy dz, dz dx, dx dy$

als Projection der an den Enden einer und derselben Ordinate gelegenen Oberflächenelemente aus, so haben wir

$$\begin{aligned} dy dz &= d\omega \cos(n, x) \\ dz dx &= d\omega \cos(n, y) \\ dx dy &= d\omega \cos(n, z) \end{aligned} \quad (3.)$$

für alle diejenigen Stellen der Oberfläche zu setzen, an welchen die nach dem äusseren Raume gerichtete Normale n derselben mit der positiven Richtung der betreffenden Coordinate einen spitzen Winkel bildet, d. h. an den Stellen $x_1y_1z_1, x_2y_2z_2, x_3y_3z_3$; dagegen ist für die Punkte $x_1y_1z_1, x_2y_2z_2, x_3y_3z_3$, an welchen dieser Winkel stumpf ist,

$$\begin{aligned} dy dz &= -d\omega \cos(n, x) \\ dz dx &= -d\omega \cos(n, y) \\ dx dy &= -d\omega \cos(n, z) \end{aligned} \quad (3.)$$

zu setzen. Dadurch wird die Formel (2.)

$$\int dVX = \int d\omega \{ X_x \cos(n, x) + X_y \cos(n, y) + X_z \cos(n, z) \}, \quad (4.)$$

wo die Integration nach $d\omega$ über alle Elemente der Oberfläche auszudehnen und für die Druckcomponenten die ihnen an der Oberfläche zukommenden Werthe einzusetzen sind. Demnach ist nach dem Theorem D § 11

$$0 = \int dVX + \int d\omega X',$$

womit die Gleichungen (1.) bewiesen sind.

§ 13. Satz über die Drehungsmomente.

Zum Gleichgewicht eines Körpers ist ausser den bewiesenen drei Bedingungen weiter erforderlich, dass die Summen der Drehungsmomente um die drei Coordinatenachsen verschwinden, dass also

$$\begin{aligned} \int dV(yX - xY) + \int d\omega(yX' - xY') &= 0 \\ \int dV(zY - yZ) + \int d\omega(zY' - yZ') &= 0 \\ \int dV(xZ - zX) + \int d\omega(xZ' - zX') &= 0, \end{aligned} \quad (1.)$$

wenn die Integrationen ebenfalls über den ganzen Körper und seine Oberfläche ausgedehnt werden.

Den Beweis für dieses Theorem führen wir, indem wir, ebenfalls von den Gleichungen A § 7 ausgehend, die Formel

$$\begin{aligned}
& \int dV (yX - xY) \\
&= \iiint dx dy dz \left\{ y \frac{dX_x}{dx} - x \frac{dY_x}{dx} + y \frac{dX_y}{dy} - x \frac{dY_y}{dy} + y \frac{dX_z}{dz} - x \frac{dY_z}{dz} \right\} \\
&= \iiint dx dy dz \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (yX_x - xY_x) + Y_x + \frac{\partial}{\partial y} (yX_y - xY_y) - X_y \right. \\
&\qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \left. + \frac{\partial}{\partial z} (yX_z - xY_z) \right\}
\end{aligned}$$

ansetzen. Hierin dürfen wir die nach dem Theorem B § 8 verschwindende Grösse

$$0 = Y_x - X_y$$

fortlassen. Die übrigen Glieder unterwerfen wir einer partiellen Integration, wie im vorigen §, und erhalten bei gleicher Bezeichnung

$$\begin{aligned}
\int dV (yX - xY) &= \iint dy dz [yX_x - xY_x]_{x_1}^{x_2} + \iint dx dz [yX_y - xY_y]_{y_1}^{y_2} \\
&\qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad + \iint dx dy [yX_z - xY_z]_{z_1}^{z_2} \\
&= \int d\omega \{ y \{ X_x \cos(n, x) + X_y \cos(n, y) + X_z \cos(n, z) \} - x \{ Y_x \cos(n, x) \\
&\qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad + Y_y \cos(n, y) + Y_z \cos(n, z) \} \}
\end{aligned}$$

und nach dem Theorem D

$$\int dV (yX - xY) + \int d\omega (yX' - xY') = 0.$$

Dies ist die zu beweisende Relation.

§ 14. Gleichgewicht beliebiger Theile des Körpers.

Wir können unsern Schluss weiter ausdehnen. Damit Gleichgewicht stattfinde, müssen die auf jedes beliebige abgeschnittene Stück des Körpers wirkenden Kräfte sich selbst zerstören. Die Untersuchung, ob auch dieses Resultat in unsern Gleichungen enthalten sei, ist deshalb wichtig, weil sie auf indirectem Wege uns überzeugt, dass wir bei der Nichtberücksichtigung der Glieder höherer Ordnung in der Herleitung nicht irgend eine Bedingung übergangen haben, dass wir auf keine neue Bedingung würden gekommen sein, wenn wir ausser Prisma und Tetraeder noch andere Figuren betrachtet hätten.

Damit ein beliebiges im Innern des Mediums gelegenes, von einer geschlossenen Oberfläche begrenztes Stück in Ruhe bleibe, müssen die drei Gesamtcomponenten und die drei Drehungsmomente aller auf dieses Stück wirkenden Kräfte verschwinden. Gegen die Ober-

fläche des Stückes wirkt nach der in § 6 eingeführten Bezeichnung von innen der Druck P_s , von aussen also $-P_s$. Die auf das Element $d\omega$ der gedachten Oberfläche wirkende X-Componente dieses Drucks ist $-X_s d\omega$; die Summe dieser sämtlichen Druckcomponenten muss die Componente der bewegenden Kräfte zerstören; es muss also sein

$$\int dvX - \int d\omega X_s = 0,$$

ebenso

$$\int dvY - \int d\omega Y_s = 0 \quad (1.)$$

$$\int dvZ - \int d\omega Z_s = 0.$$

Es gilt aber der früher aus dem Theorem A abgeleitete Satz (Gleichung 4 § 12)

$$\int dVX = \int d\omega \{ X_x \cos(s, x) + X_y \cos(s, y) + X_z \cos(s, z) \} \quad (2.)$$

nicht bloss für die freie, sondern für jede beliebige gedachte Oberfläche, falls sie nur eine geschlossene ist; denn es wurde über die Grenzen der Integration nichts vorausgesetzt.

Nach dem Theorem C ist auch

$$\int d\omega X_s = \int d\omega \{ X_x \cos(s, x) + X_y \cos(s, y) + X_z \cos(s, z) \}. \quad (3.)$$

Der Ausdruck (1.) ist also identisch $= 0$.

Umgekehrt könnten wir, ohne den Satz C voranzusetzen, diese Betrachtung anstellen, um ihn zu beweisen. Wir würden dadurch aus (1.) und (2.) als Bedingung für das Gleichgewicht eines beliebigen Stückes des betrachteten Körpers erhalten, dass die Gleichung (3.) bestehe, und zwar muss diese bestehen, welches auch die Natur der das Stück umschliessenden Oberfläche sei. Vergrössern wir nun diese um irgend ein Element, so müssen die auf beiden Seiten der Gleichung (3.) hinzutretenden Grössen sich einander aufheben, d. h. es muss die Grösse, welche unter dem Integralzeichen steht, beiderseits gleich sein

$$X_s = X_x \cos(s, x) + X_y \cos(s, y) + X_z \cos(s, z).$$

Dies ist aber das Theorem C.

3. Symmetrische Vertheilung der Druckkräfte.

§. 15. Erstes Druckellipsoid.

Wir ziehen eine andere Klasse von Folgerungen aus unseren Fundamentalgleichungen; sie beziehen sich auf die Vertheilung der Druckkräfte. Wir werden den merkwürdigen und interessanten Satz beweisen, dass, welches auch die (natürlich von den erzeugenden Kräften abhängende) Beschaffenheit der Molekulardruckkräfte sei, diese Druckkräfte immer eine, in Bezug auf drei gegen einander rechtwinklige Ebenen symmetrische Vertheilung haben, und dass die in der Richtung der Durchschnittslinien dieser drei Ebenen wirkenden Drucke Maxima und Minima sind.

Gegen eine durch den Punkt xyz gelegte Ebene, deren Lage durch die Cosinus a, b, c der von ihr gegen die Coordinatenaxen gebildeten Winkel bestimmt werde, wirke der Druck P , dessen Componenten X, Y, Z , seien. Die Richtung dieses Druckes P ist bestimmt durch die Winkel mit den Axen, deren Cosinus $\frac{X}{P}, \frac{Y}{P}, \frac{Z}{P}$ sind. Wir denken uns in dieser Richtung von dem Punkte xyz aus eine Linie aufgetragen, deren Länge die Grösse des Druckes P darstellt. Verändern wir nun die Lage der Ebene, so erhält diese Linie stets andere Richtung und Grösse. Wir betrachten diese P proportionale Linie als den Radiusvector einer um xyz beschriebenen Oberfläche, deren Gestalt wir bestimmen wollen.

Es seien die auf xyz bezogenen laufenden Coordinaten dieser Oberfläche ξ, η, ζ ; diese sind den Componenten des durch den zugehörigen Radiusvector dargestellten Druckes proportional; also ist

$$\lambda \xi = X; \quad \lambda \eta = Y; \quad \lambda \zeta = Z, \quad (1.)$$

wo λ ein Factor ist, dessen Werth wir durch angemessene Wahl der Längen- oder Zeit-Einheit = 1 machen wollen.

Nach dem Theorem C haben wir dann

$$\begin{aligned}\xi &= X_s = X_x a + X_y b + X_z c \\ \eta &= Y_s = Y_x a + Y_y b + Y_z c \\ \xi &= Z_s = Z_x a + Z_y b + Z_z c,\end{aligned}\quad (2.)$$

wofür wir unter Berücksichtigung des Theorems B § 8 mit etwas einfacheren Zeichen

$$\begin{aligned}\xi &= Ma + pb + nc \\ \eta &= pa + Nb + mc \\ \xi &= na + mb + Pc\end{aligned}\quad (3.)$$

schreiben. Die Auflösung dieser Gleichung nach a, b, c giebt Ausdrücke von der Form

$$\begin{aligned}a &= M\xi + \varpi\eta + \nu\xi \\ b &= \varpi\xi + N\eta + \mu\xi \\ c &= \nu\xi + \mu\eta + \Pi\xi.\end{aligned}\quad (4.)$$

Diese Gleichungen quadirt und addirt geben, da

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

ist, die Gleichung der gesuchten Oberfläche in der Gestalt

$$1 = (M\xi + \varpi\eta + \nu\xi)^2 + (\varpi\xi + N\eta + \mu\xi)^2 + (\nu\xi + \mu\eta + \Pi\xi)^2. \quad (5.)$$

Diese Oberfläche, deren Radien der Grösse und Richtung nach die Drucke darstellen, ist ein dreiaxiges Ellipsoid. Daraus folgt, dass es immer an jeder Stelle eines elastischen Körpers drei gegen einander rechtwinklige Richtungen und drei durch diese bestimmte, rechtwinklig sich schneidende Ebenen giebt, in Bezug auf welche der Druck im Medium symmetrisch vertheilt ist.

Jene drei rechtwinkligen Richtungen, die Axen des Druck-Ellipsoids, nennen wir die Hauptdruckaxen. In den Richtungen dieser Axen erreicht der Werth des ausgeübten Druckes ein Maximum oder ein Minimum, während die Richtung desselben senkrecht gegen eine der Symmetrieebenen gerichtet ist.

§ 16. Lage der Hauptdruckaxen. Zweites Ellipsoid.

Um die Lage der Hauptdruckaxen zu finden, führen wir den Radiusvector ρ des Ellipsoids und die Cosinus α, β, γ der Winkel ein, welche er mit den Coordinatenaxen bildet. Dann ist die Gleichung des Ellipsoids in Polarcoordinaten

$$\frac{1}{\rho^2} = (M\alpha + \varpi\beta + \nu\gamma)^2 + (\varpi\alpha + N\beta + \mu\gamma)^2 + (\nu\alpha + \mu\beta + \Pi\gamma)^2 \quad (1.)$$

oder abgekürzt

$$\frac{1}{\varrho^2} = A^2 + B^2 + \Gamma^2.$$

Für ein Minimum oder Maximum von ϱ oder, was auf dasselbe hinauskommt, von $\frac{1}{\varrho^2}$ haben wir, wenn wir γ als Function von α und β betrachten,

$$0 = \frac{\partial \left(\frac{1}{\varrho}\right)^2}{\partial \alpha} + \frac{\partial \left(\frac{1}{\varrho}\right)^2}{\partial \gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha}$$

$$0 = \frac{\partial \left(\frac{1}{\varrho}\right)^2}{\partial \beta} + \frac{\partial \left(\frac{1}{\varrho}\right)^2}{\partial \gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial \beta}.$$

Da nun

$$\gamma^2 = 1 - \alpha^2 - \beta^2$$

und

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \alpha} = -\frac{\alpha}{\gamma}, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial \beta} = -\frac{\beta}{\gamma} \quad (2.)$$

ist, so wird die Bedingung für ein Maximum oder Minimum

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial \left(\frac{1}{\varrho}\right)^2}{\partial \alpha} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \left(\frac{1}{\varrho}\right)^2}{\partial \beta} = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \left(\frac{1}{\varrho}\right)^2}{\partial \gamma} \quad (3.)$$

oder, wenn wir die Differentiation ausführen,

$$\frac{MA + \varpi B + \nu \Gamma}{\alpha} = \frac{\varpi A + NB + \mu \Gamma}{\beta} = \frac{\nu A + \mu B + \Pi \Gamma}{\gamma}. \quad (4.)$$

Diese Gleichungen geben, combinirt mit der Relation

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1, \quad (2')$$

die erforderlichen drei Gleichungen zur Bestimmung der einem Maximum oder Minimum von ϱ angehörigen Werthe von α , β , γ .

Die sehr complicirte Form der so erhaltenen Ausdrücke vereinfacht sich bedeutend durch die Einführung folgender Relation, die, wie wir behaupten, diesen Gleichungen genügt,

$$\frac{A}{\alpha} = \frac{B}{\beta} = \frac{\Gamma}{\gamma}. \quad (5.)$$

Eliminiren wir mittelst derselben B und Γ aus (4.), so erhalten wir

$$\frac{M\alpha + \varpi\beta + \nu\gamma}{\alpha} = \frac{\varpi\alpha + N\beta + \mu\gamma}{\beta} = \frac{\nu\alpha + \mu\beta + \Pi\gamma}{\gamma}, \quad (5')$$

d. h. nichts anderes, als die eingeführte Relation (5); dieselbe genügt also den Gleichungen (4).

Aber nicht allein dieses, sie ist sogar mit jenen völlig identisch; denn, da sie in Bezug auf die gesuchten Unbekannten α , β , γ in genau derselben Form wie jene gebildet ist, so muss sie dieselbe

Anzahl Wurzeln liefern. Besitzen also die Gleichungen (4.) und (2') 3 Systeme von Auflösungen, so bestimmen auch die Gleichungen (5') und (2') nur 3 Richtungen, und zwar dieselben 3 Richtungen.

Dass diesen letzteren Gleichungen (2') und (5) wirklich nur dreierlei Werthe für α , β , γ genügen, ergibt sich daraus, dass durch die Gleichung (5) die Axen einer Oberfläche zweiter Ordnung, welche unter Umständen ebenfalls ein dreiaxiges Ellipsoid ist, bestimmt werden; die Gleichung derselben ist

$$Mx^2 + Ny^2 + \Pi z^2 + 2\mu yz + 2\nu xz + 2\varpi xy = \pm 1 \quad (6).$$

oder in Polarcoordinaten

$$M\alpha^2 + N\beta^2 + \Pi\gamma^2 + 2\mu\beta\gamma + 2\nu\alpha\gamma + 2\varpi\alpha\beta = \pm \frac{1}{\rho^2}. \quad (6')$$

Hieraus geht hervor, dass die Axen dieser Oberfläche, welche wir das zweite Druckellipsoid nennen wollen, in der Richtung zusammenfallen mit denen des ersten Ellipsoids, keineswegs aber auch in der Länge. Wir bemerken vorgreifend, dass die Halbaxen des zweiten durch die Quadratwurzeln aus den Halbaxen des ersten dargestellt werden.

§ 17. Die Hauptdruckkräfte stehen senkrecht gegen ihre Ebenen.

Lassen wir nun das beliebige Coordinatensystem zusammenfallen mit den Axen der Ellipsoide, so müssen in Gleichung (6), § 16 die Terme verschwinden, welche die Producte verschiedener Coordinaten enthalten; es ist also für diesen Fall

$$0 = \mu = \nu = \varpi. \quad (1)$$

Dadurch werden die Gleichungen (4) § 15

$$\begin{aligned} a &= M\xi & \xi &= \frac{a}{M} \\ b &= N\eta & \eta &= \frac{b}{N} \\ c &= \Pi\xi & \xi &= \frac{c}{\Pi}. \end{aligned} \quad (2)$$

Die Combination dieser Relationen mit den Gleichungen (3) § 15 giebt

$$\begin{aligned} 0 &= \left(M - \frac{1}{M}\right) a + pb + nc \\ 0 &= pa + \left(N - \frac{1}{N}\right) b + mc \\ 0 &= na + mb + \left(P - \frac{1}{\Pi}\right) c. \end{aligned} \quad (3)$$

Da aber die Gleichungen für jeden Werth der a, b, c gelten, so folgt, dass, bezogen auf die Hauptdruckaxen, auch die Relationen bestehen müssen

$$0 = m = n = p, \quad (4.)$$

$$M = \frac{1}{\bar{M}}, \quad N = \frac{1}{\bar{N}}, \quad P = \frac{1}{\bar{\Pi}}, \quad (5.)$$

und, wenn wir die Werthe aus den Gleichungen (2) § 15 einsetzen und die auf die Hauptaxen bezogenen Componenten durch einen Strich unterscheiden,

$$\bar{X}_y = \bar{Y}_x = 0, \quad \bar{Y}_z = \bar{Z}_y = 0, \quad \bar{Z}_x = \bar{X}_z = 0. \quad (6.)$$

Dies will sagen, die gegen die Hauptdruckaxen senkrechten Ebenen erfahren nur einen senkrechten Druck oder mit anderen Worten, die Hauptdruckkräfte stehen senkrecht gegen ihre Druckebenen, welche die das ganze System symmetrisch theilenden Ebenen sind.

§ 18. Die Hauptdruckebenen sind die einzigen Ebenen dieser Eigenschaft.

Es fragt sich, ob dies das einzige System von Ebenen ist, welches diese merkwürdige Eigenschaft hat. Besitzt irgend eine durch xyz gelegte Ebene dieselbe Eigenschaft, so sind die Componenten des Drucks P_x gegen diese Ebene, wenn a, b, c , wie bisher, die Cosinus der Neigungswinkel ihrer Normale gegen die Coordinatenaxen sind,

$$X_x = P_x a, \quad Y_x = P_x b, \quad Z_x = P_x c. \quad (1.)$$

Nach dem Theorem C § 9 haben wir demnach mit der in § 15 eingeführten Bezeichnung

$$P_x = \frac{M a + p b + n c}{a} = \frac{p a + N b + m c}{b} = \frac{n a + m b + P c}{c}. \quad (2.)$$

Die durch Elimination von P_x sich hieraus ergebenden beiden Gleichungen combiniren wir mit der dritten

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1 \quad (3.)$$

und erhalten so ein den Gleichungen (5') § 16 vollkommen analoges System von Gleichungen, von welchem leicht nachzuweisen ist, dass es mit ihnen identisch ist. Löst man nämlich die Gl. (5') § 16 in der Form

$$\begin{aligned} Q\alpha &= M\alpha + \varpi\beta + \nu\gamma \\ Q\beta &= \varpi\alpha + N\beta + \mu\gamma \\ Q\gamma &= \nu\alpha + \mu\beta + \Pi\gamma \end{aligned}$$

nach α , β , γ auf, so erhält man, wie die Vergleichung mit den Gleichungen (3) und (4) § 15 lehrt,

$$\alpha = \{M\alpha + p\beta + n\gamma\} Q$$

$$\beta = \{p\alpha + N\beta + m\gamma\} Q$$

$$\gamma = \{n\alpha + m\beta + P\gamma\} Q$$

oder

$$\frac{M\alpha + p\beta + n\gamma}{\alpha} = \frac{p\alpha + N\beta + m\gamma}{\beta} = \frac{n\alpha + m\beta + P\gamma}{\gamma},$$

d. h. die Gleichungen (2).

Da somit die gesuchten Richtungen des senkrechten Druckes mit den Hauptaxen zusammenfallen, so giebt es im Allgemeinen nur drei Ebenen, gegen welche der Druck in senkrechter Richtung ausgeübt wird, mit Ausnahme der Fälle, in denen das dreiaxige Ellipsoid in ein Rotationsellipsoid oder in eine Kugel übergeht. In diesen Fällen giebt es unendlich viele Ebenen, gegen welche der Druck in der Richtung ihrer Normale wirkt.

§ 19. Gleichungen der Druckellipsoide.

Dieses Resultat erleichtert wesentlich die Bestimmung der Hauptdruckaxen. Die Cosinus a , b , c der Winkel, welche sie mit den Coordinatenaxen bilden, sind bestimmt durch die Relationen (2) und (3) des vorigen §, welche nach Einführung der ursprünglichen Bezeichnung nachstehende Form erhalten

$$\frac{X_x a + X_y b + X_z c}{a} = \frac{Y_x a + Y_y b + Y_z c}{b} = \frac{Z_x a + Z_y b + Z_z c}{c} \quad (1)$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1. \quad (2)$$

Die in Gleichung (1) vorkommenden Grössen bestimmen aber auch die Werthe der Maxima und Minima des Druckes, welche den Hauptdruckaxen angehören. Dieselben sind die Werthe von P_i , welche folgenden drei Gleichungen genügen (Gleichg. (2) § 18)

$$\begin{aligned} 0 &= (X_x - P_i) a + X_y b + X_z c \\ 0 &= Y_x a + (Y_y - P_i) b + Y_z c \\ 0 &= Z_x a + Z_y b + (Z_z - P_i) c. \end{aligned} \quad (3)$$

Durch Elimination von a , b , c erhalten wir hieraus zur Bestimmung der Hauptdrucke die Gleichung

$$\begin{aligned} (X_x - P_i)(Y_y - P_i)(Z_z - P_i) - Y_z^2(X_x - P_i) - Z_x^2(Y_y - P_i) \\ - X_y^2(Z_z - P_i) + 2X_y Y_z Z_x = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Nehmen wir wieder die Hauptaxen zu Coordinatenaxen, so ergeben sich nach den Relationen (6) § 17 die Wurzeln dieser Gleichung

$$P_x = \bar{X}_x, \quad P_y = \bar{Y}_y, \quad P_z = \bar{Z}_z. \quad (5.)$$

Dies sind die Halbaxen des ersten Druckellipsoids oder allgemeiner, wenn wir den Factor λ^1) nicht = 1 angenommen hätten, denselben proportionale Grössen. Die Gleichung des Ellipsoids bezogen auf seine Hauptaxen ist demnach

$$\frac{\xi^2}{\bar{X}_x^2} + \frac{\eta^2}{\bar{Y}_y^2} + \frac{\zeta^2}{\bar{Z}_z^2} = 1. \quad (6.)$$

Aus Gleichung (6) § 16 erhalten wir dagegen, wenn wir die Werthe der M, N, Π aus den Gleichungen (5) § 17 einsetzen, die Gleichung des zweiten Druckellipsoids, bezogen auf die Hauptaxen,

$$\frac{\xi^2}{\bar{X}_x} + \frac{\eta^2}{\bar{Y}_y} + \frac{\zeta^2}{\bar{Z}_z} = \pm 1. \quad (7.)$$

Damit ist die in § 16 ausgesprochene Behauptung gerechtfertigt, dass die Halbaxen des zweiten Druckellipsoids die Quadratwurzeln aus denen des ersten sind.

§ 20. Bestimmung der Druckebene zu einem gegebenen Drucke.

Sind die drei Hauptdruckkräfte gegeben, so können wir durch Construction des ersten Druckellipsoides die Grösse des Druckes für jede beliebige Richtung finden. Es fragt sich aber, zu welcher Druckebene der durch irgend einen Radius dargestellte Druck gehört.

Wir bezeichnen die laufenden Coordinaten dieser durch xyz gelegten Ebene mit ξ' , η' , ζ' ; dann ist die Gleichung derselben

$$a\xi' + b\eta' + c\zeta' = 0, \quad (1.)$$

wo a , b , c , wie bisher, die Cosinus der Winkel bezeichnen, welche die Normale der Ebene mit den Coordinatenaxen bildet. Nehmen wir nun die Hauptdruckaxen zu Coordinatenaxen, so ist nach Gleichung (2) und (5) § 17

$$\begin{aligned} \xi &= \bar{X}_x a & a &= \frac{\xi}{\bar{X}_x} \\ \eta &= \bar{Y}_y b & b &= \frac{\eta}{\bar{Y}_y} \\ \zeta &= \bar{Z}_z c & c &= \frac{\zeta}{\bar{Z}_z}, \end{aligned} \quad (2.)$$

wo ξ , η , ζ , wie bisher, die Coordinaten des Endpunktes desjenigen

1) Vergl. § 15.

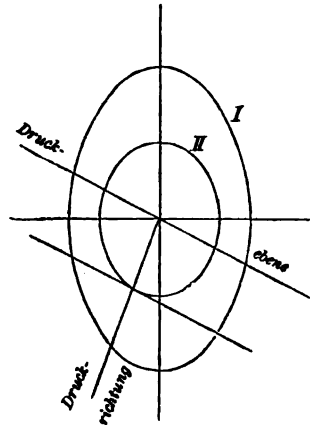
Radiusvector des Druckellipsoids bezeichnen, welcher den Druck gegen die gesuchte Ebene darstellt.

Die Einführung der Werthe von a, b, c in Gl. (1) giebt

$$\frac{\xi\xi'}{\bar{X}_x} + \frac{\eta\eta'}{\bar{Y}_y} + \frac{\zeta\zeta'}{\bar{Z}_z} = 0. \quad (3.)$$

Dies ist die Gleichung einer Ebene, welche durch den Punkt xyz parallel einer andern gelegt ist, welche das zweite Druckellipsoid an dem Punkte tangirt, an welchem dieses vom Radius $\xi\eta\zeta$ des ersten geschnitten wird.

Um also die Druckebene zu irgend einem durch einen beliebigen Radius des ersten Druckellipsoids in Richtung und Grösse dargestellten Drucke zu finden, haben wir das zweite Druckellipsoid zu construiren, an der Stelle, wo dieses von dem Radius geschnitten wird, eine Tangentialebene an dasselbe und zu dieser eine parallele Ebene durch den Punkt xyz zu legen. Diese ist die gesuchte Druckebene.



Ueber die Anwendung dieser Regel ist nichts weiter zu bemerken, wenn die Oberfläche, welche wir als zweites Druckellipsoid bezeichnet haben, wirklich ein Ellipsoid ist; dieses ist der Fall, wenn die drei Hauptdruckkräfte $\bar{X}_x, \bar{Y}_y, \bar{Z}_z$ sämmtlich positive oder sämmtlich negative Werthe besitzen. Wenn aber eine dieser drei Grössen das entgegengesetzte Vorzeichen wie die beiden andern hat, so kommen in der Gleichung (7.) § 19 beide Vorzeichen zur Anwendung; es bestimmen dann die beiden Gleichungen

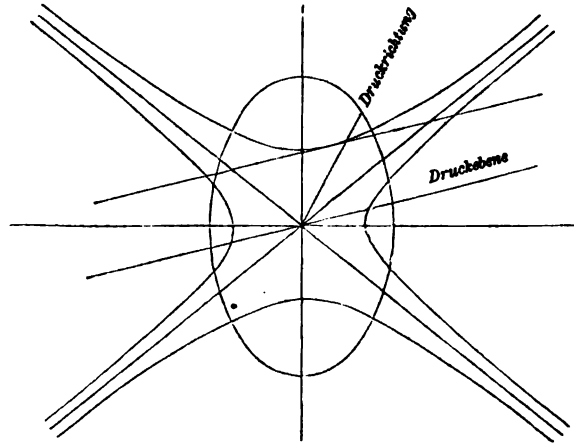
$$\frac{\xi^2}{\bar{X}_x} + \frac{\eta^2}{\bar{Y}_y} + \frac{\zeta^2}{\bar{Z}_z} = 1$$

und

$$\frac{\xi^2}{\bar{X}_x} + \frac{\eta^2}{\bar{Y}_y} + \frac{\zeta^2}{\bar{Z}_z} = -1$$

je ein Hyperboloid, und zwar die eine Gleichung ein einschaliges, die andere ein zweischaliges; beide Hyperboloide besitzen einen gemeinsamen Asymptotenkegel.

In diesem Falle haben wir, um die Regel für jede beliebige Richtung des Druckes anwenden zu können, beide Hyperboloide zu construiren. Die gesuchte Druckebene ist immer der Tangen-



tialebene derjenigen der beiden Oberflächen parallel, welche von dem gegebenen Radius des ersten Druckellipsoids getroffen wird.

Diejenigen Radien, welche in den Asymptotenkegel fallen, haben zu Druckebenen solche Ebenen, in denen sie selbst liegen. Es giebt also, wenn eine Druckcomponente das entgegengesetzte Zeichen der andern beiden hat, immer ein System von Ebenen, die Tangentialebenen dieses Asymptotenkegels, welche nur in ihrer eigenen Richtung durch den Druck gezogen werden. Die auf diese Ebenen wirkende Druckcomponente liegt ganz in der Ebene selbst. Dies ist, wenn alle drei Componenten dasselbe Zeichen haben, nie möglich.

§ 21. Bestimmung der Druckebene, wenn eine der Hauptdruckkräfte = 0 ist.

Ist von den drei Druckcomponenten $\bar{X}_x, \bar{Y}_y, \bar{Z}_z$ eine = 0, verschwindet also die eine Axe des ersten Ellipsoids, so verwandelt sich dasselbe in eine elliptische Scheibe. Alle Drücke sind parallel dieser Scheibe. Sie werden indess nicht, wie es auf den ersten Blick scheinen möchte, durch die Radien dieser Ellipse dargestellt. Man würde ihren richtigen Werth erhalten durch eine zweckmäßige Discussion der Scheibe als der Grenze eines dreiaxigen Ellipsoids. Viel einfacher gelangt man direct zum Ziele.

Es sei z. B.

$$\bar{Z}_z = 0,$$

dann ist nach den Gleichungen (2.) § 20

$$\begin{aligned} \xi &= a \bar{X}_x & a &= \frac{\xi}{\bar{X}_x} \\ \eta &= b \bar{Y}_y & b &= \frac{\eta}{\bar{Y}_y} \\ \zeta &= c \bar{Z}_z = 0 & c &= c. \end{aligned} \quad (1.)$$

Durch Quadriren und Addiren folgt hieraus

$$1 - c^2 = \left(\frac{\xi}{\bar{X}_x}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{\bar{Y}_y}\right)^2. \quad (2.)$$

Die Drücke werden also dargestellt durch die Radien eines Systems von ähnlichen concentrischen Ellipsen, deren Axen sich proportional dem Sinus des Winkels ändern, welchen die Normale der Druckebene mit der Z -Axe bildet, d. h. der Axe, in deren Richtung der Druck = 0 ist.

Auch das zweite, die Druckebenen bestimmende Ellipsoid verwandelt sich in eine Scheibe, deren Discussion wiederum weitläufiger sein würde, als die directe Behandlung der Druckebene. Die Gleichung der letzteren ist

$$\xi' a + \eta' b + \zeta' c = 0 \quad (3.)$$

und durch Einsetzen der Werthe aus den Gleichungen (1.)

$$\frac{\xi \xi'}{\bar{X}_x} + \frac{\eta \eta'}{\bar{Y}_y} + \zeta' c = 0. \quad (4.)$$

Die Normale der Druckebene bildet also mit der Z -Axe einen Winkel, durch dessen Sinus der zugehörige Druck (Gl. 2) bestimmt wird. Ferner zeigt Gl. 4, dass die Druckebene die xy -Ebene in einer Linie schneidet, welche einer Tangente der durch die Gleichung

$$\frac{\xi^2}{\bar{X}_x} + \frac{\eta^2}{\bar{Y}_y} = \sqrt{1 - c^2}$$

dargestellten Curve zweiten Grades parallel ist. Die Halbaxen derselben sind die Quadratwurzeln aus den Halbaxen der durch Gleichung (2.) bestimmten Ellipse. Die beiden Curven dienen auf ganz analoge Weise, wie früher die Ellipsoide (§ 20), zur Bestimmung der Druckebene zu gegebenem Drucke. (Vergl. die Figuren zu § 20.)

§ 22. Bestimmung der Druckebene, wenn zwei Hauptdruckkräfte verschwinden.

Sind endlich zwei der Druckcomponenten $= 0$,

$$\bar{Y}_y = 0, \quad \bar{Z}_z = 0,$$

so verwandeln sich beide Ellipsoide in gerade Linien von begrenzter Länge. Alle Drücke sind parallel derselben. Wir haben in diesem Falle

$$\begin{aligned} \xi &= a \bar{X}_x & a &= \frac{\xi}{\bar{X}_x} \\ \eta &= 0 & b &= b \\ \zeta &= 0 & c &= c. \end{aligned} \quad (1.)$$

Es ist also der jetzt durch $\xi = \rho$ dargestellte Druck proportional dem Cosinus a des Winkels, welchen die Normale der Druckebene mit der X -Axe bildet, d. h. mit der Axe, in welcher allein der Druck stattfindet.

Die Gleichung der zugehörigen Druckebene wird jetzt

$$\xi'a + \eta'b + \zeta'c = 0$$

oder

$$\frac{\xi\xi'}{\bar{X}_x} + \eta'b + \zeta'c = 0. \quad (2.)$$

Zu einem bestimmten Druck gehören also unendlich viele Druckebenen, deren Normalen alle mit der X -Axe denselben Winkel bilden, durch dessen Cosinus a die Grösse des Druckes gemessen wird. Ist $a = 0$, die Ebene also parallel der X -Axe, so erfährt sie keinen Druck.

4. Das System der Dilatationen.

§ 23. Dilatationsoberfläche.

Alle unsere bisherigen Betrachtungen enthalten durchaus keine Hypothese über die Natur der Molekularkräfte ausser der alleinigen Annahme ihrer Existenz. Ebenso allgemein lässt sich eine der vorigen ganz ähnliche Untersuchung über das System der Dilatationen oder das System der Verrückungen durchführen, welche durch Druck, Zug, Biegung, Wärme oder irgend welche andere Ursache in der Nähe eines Punktes xyz hervorgerufen sind.

Die Coordinaten des von xyz nach irgend einer Seite gerückten Massentheilchens seien nach der Verrückung

$$x + u \quad y + v \quad z + w,$$

also u, v, w die Ortsverrückungen dieses Theilchens. Diese können wir immer ansehen als stetige Functionen der Coordinaten x, y, z , und zwar auch dann noch, wenn das Medium selbst nicht stetig ist, sondern aus einem System discreter Theilchen besteht.

Denken wir uns z. B. eine Reihe, ein lineares System discreter Theilchen aus seiner Lage gerückt, und zwar so, dass sämtliche Theilchen eine nur geringe Verrückung erlitten haben, so können wir auch nach der Verrückung noch eine stetige Curve durch sämtliche Theilchen legen. Die Ordinaten bestimmter Punkte dieser Curve sind die Verrückungen der Theilchen; und, wenn die ersteren stetig veränderliche Grössen sind, so können wir auch die letzteren als stetige Functionen ansehen. Lagen die Theilchen vor der Verrückung nicht auf einer geraden Linie, sondern auf einer Curve im Raume, so bilden die Unterschiede der Coordinaten entsprechender Punkte der beiden Curven, welche die Lage nach und vor der Verrückung angeben, die Ortsveränderungen der an diesen Punkten liegenden

Theilchen. Da die Curven stetig sind, so sind es auch die Unterschiede ihrer Ordinaten. Liegen die Theilchen auf einer Oberfläche, so können wir auch nach der Verrückung eine solche durch dieselbe legen und ganz dieselbe Betrachtung anwenden. Sind sie endlich im Raume vertheilt, so gilt dasselbe für jede einzelne Schicht.

Ein in der Nähe von xyz gelegenes Theilchen habe vor der Verrückung die Coordinaten

$$x + a, \quad y + b, \quad z + c,$$

nach derselben

$$x + a + u', \quad y + b + v', \quad z + c + w'.$$

Da die Ortsverrückungen, wie eben bewiesen, als stetige Functionen der Coordinaten anzusehen sind, so erhalten wir die des zweiten Theilchens u', v', w' aus denen des ersten, wenn wir darin x, y, z mit $x + a, y + b, z + c$ vertauschen; also ist

$$\begin{aligned} u' - u &= \Delta u = \frac{\partial u}{\partial x} a + \frac{\partial u}{\partial y} b + \frac{\partial u}{\partial z} c + \dots \\ v' - v &= \Delta v = \frac{\partial v}{\partial x} a + \frac{\partial v}{\partial y} b + \frac{\partial v}{\partial z} c + \dots \\ w' - w &= \Delta w = \frac{\partial w}{\partial x} a + \frac{\partial w}{\partial y} b + \frac{\partial w}{\partial z} c + \dots \end{aligned} \quad (1.)$$

Wir können die Entwicklung mit diesen Gliedern abbrechen, da a, b, c sehr kleine Grössen sein sollen.

Die ursprüngliche Entfernung des zweiten Theilchens von dem ersten in xyz

$$\varrho^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

geht über in

$$(\varrho + \Delta\varrho)^2 = (a + \Delta u)^2 + (b + \Delta v)^2 + (c + \Delta w)^2. \quad (2.)$$

Alle diejenigen Theilchen, welche vor der Verrückung auf einer mit dem Radius ϱ um xyz beschriebenen Kugeloberfläche

$$\varrho^2 = a^2 + b^2 + c^2 = \text{const.} \quad (3.)$$

lagen, befinden sich nach Eintritt der Verrückung auf einer andern Oberfläche, deren Radiusvector, von demselben Theilchen aus gerechnet, $\varrho + \Delta\varrho$ ist. Die rechtwinkligen Coordinaten dieser Oberfläche, also die Projectionen von $\varrho + \Delta\varrho$, sind

$$\begin{aligned}
 \xi_1 &= \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) a + \frac{\partial u}{\partial y} b + \frac{\partial u}{\partial z} c \\
 \eta_1 &= \frac{\partial v}{\partial x} a + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) b + \frac{\partial v}{\partial z} c \\
 \xi_1 &= \frac{\partial w}{\partial x} a + \frac{\partial w}{\partial y} b + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right) c.
 \end{aligned}
 \tag{4.}$$

Durch Combination dieser Gleichungen mit Gleichung (3.) und Elimination von a , b , c erhalten wir die Gleichung der Oberfläche, auf welcher die ursprünglich auf der Kugeloberfläche liegenden Theilchen sich nach der Verrückung befinden, bezogen auf den Ort desselben Theilchens als Mittelpunkt. Wir nennen diese Oberfläche die Dilatationsoberfläche.

Es ist auch ohne Rechnung leicht zu übersehen, dass dieser Ort der Theilchen nach der Verrückung durch ein dreiaxiges Ellipsoid dargestellt wird.

§ 24. Aussonderung einer gemeinschaftlichen Drehung.

Ehe wir die Rechnung anstellen, erinnern wir uns, dass durch die Construction der Dilatationsoberfläche nicht der Zweck erreicht werden soll, die absolute Ortsveränderung zu bestimmen, welche die Theilchen durch die Verrückung erlitten haben; sondern wir suchen nur die Veränderung, welche alle diejenigen Theilchen, die vor der Verrückung auf einer um den Punkt xyz construirten Kugel lagen, in ihrer relativen Lage gegen einander und gegen den Mittelpunkt der Kugel erfahren haben. Wir haben daher die Verschiebung des Mittelpunktes um die Grössen u , v , w bereits in Abzug gebracht. Es kann aber noch eine andere Ortsveränderung eingetreten sein, ohne dass die relative Lage sich geändert hätte; es kann sich nämlich das ganze kugelförmige System um einen Durchmesser als gemeinschaftliche Axe gedreht haben. Eine solche gemeinsame Drehung bleibt ohne Einfluss auf die Gestalt der Dilatationsoberfläche. Aus den für ξ_1 , η_1 , ξ_1 gefundenen Ausdrücken können wir deshalb noch diejenigen Theile der Verschiebung aussondern, welche von einer gleichmässigen Drehung des ganzen Systems herrühren. Wir betrachten zu dem Ende eine reine Drehung.

Wir nehmen an, die relativen Verrückungen seien sehr kleine Grössen, so klein, dass $\Delta\varphi$ noch klein ist gegen das an sich schon kleine φ ; daraus folgt, dass auch die Projectionen $\varphi + \Delta\varphi$, also $a + \Delta u$, $b + \Delta v$, $c + \Delta w$ nur sehr wenig von a , b , c , den Pro-

jectionen von ϱ , verschieden sind, dass mithin auch $\frac{a + \Delta u}{\varrho + \Delta \varrho}$ von $\frac{a}{\varrho}$ u. s. w. sich sehr wenig unterscheidet. Hieraus endlich ergibt sich, dass die Differentialquotienten $\frac{\partial u}{\partial x}$ u. s. w. sehr kleine Grössen sein müssen, und dies kommt darauf hinaus, dass die Dilatationen sehr klein sind gegen die ursprünglichen Abstände der Theilchen. Demgemäss setzen wir auch den Winkel, um welchen die Drehung stattfindet, als sehr klein voraus.

Die durch den Punkt xyz gehende Drehungsaxe D bilde mit den Coordinatenaxen die Winkel A, B, C . Denken wir uns nun mit dem Systeme auch die von xyz aus aufgetragenen Coordinaten des Punktes abc gedreht, so ist die Bestimmung der neuen Coordinaten ξ_2, η_2, ζ_2 dieses Punktes eine einfache Frage der Veränderung des Coordinatensystems. Wir erhalten unter der Voraussetzung, dass der Drehungswinkel ε so klein sei, dass wir nur die erste Potenz desselben zu berücksichtigen haben, und also auch ε statt $\sin \varepsilon$ schreiben können, die neuen Coordinaten ausgedrückt durch die alten nach den Formeln

$$\begin{aligned}\xi_2 &= a && - b\varepsilon \cos C + c\varepsilon \cos B \\ \eta_2 &= a\varepsilon \cos C + b && - c\varepsilon \cos A \\ \zeta_2 &= -a\varepsilon \cos B + b\varepsilon \cos A + c.\end{aligned}\quad (1.)$$

Diese Ausdrücke zeigen, dass wir für die Drehung um eine beliebige Axe D immer drei Drehungen

$$\alpha = \varepsilon \cos A, \quad \beta = \varepsilon \cos B, \quad \gamma = \varepsilon \cos C$$

um drei den Coordinaten parallele Axen substituiren können, wie wir für eine Kraft ihre Componenten setzen dürfen. Dadurch werden die Gleichungen (1.)

$$\begin{aligned}\xi_2 &= a - b\gamma + c\beta \\ \eta_2 &= a\gamma + b - c\alpha \\ \zeta_2 &= -a\beta + b\alpha + c.\end{aligned}\quad (2.)$$

Die durch eine reine Drehung hervorgebrachten Lagenveränderungen sind also characterisirt durch Formeln von der Gestalt:

$$\begin{aligned}\xi_3 &= -b\gamma + c\beta \\ \eta_3 &= a\gamma - c\alpha \\ \zeta_3 &= -a\beta + b\alpha.\end{aligned}\quad (3.)$$

Dies benutzen wir, um die früher gefundenen allgemeinen Ausdrücke für die Verrückungen ξ_1, η_1, ζ_1 von den Theilen zu befreien,

welche von einer gemeinschaftlichen Drehung des Systems herrühren. Zu dem Ende bringen wir die Gleichungen (4.) § 23 in die Form

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) a + \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right) b \\ &\quad + \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\right) c, \\ \eta_1 &= \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right) a + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) b \\ &\quad + \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\right) c, \\ \xi_1 &= \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\right) a + \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)\right. \\ &\quad \left.+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\right) b + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right) c,\end{aligned}$$

welche sofort erkennen lässt, dass die Functionen in zwei Theile

$$\xi_1 = \xi + \xi_3, \quad \eta_1 = \eta + \eta_3, \quad \xi_1 = \xi + \xi_3 \quad (4.)$$

zerfallen, von denen der zweite

$$\begin{aligned}\xi_3 &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) b + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) c \\ \eta_3 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) a - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) c \\ \xi_3 &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) a + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) b\end{aligned} \quad (5.)$$

die Gestalt der Formeln (3.) besitzt. Um beide Systeme von Gleichungen zur vollständigen Uebereinstimmung zu bringen, müssen wir die Drehungswinkel

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) \\ \beta &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \gamma &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\end{aligned} \quad (6.)$$

setzen. Wir können also ξ_3 , η_3 , ξ_3 als diejenigen Theile der relativen Verrückungen ansehen, welche eine gleichmässige Drehung des ganzen kugelförmigen Systems um den Mittelpunkt bedeuten; und es sind demnach die nach Abzug derselben von ξ_1 , η_1 , ξ_1 übrig bleibenden Theile

$$\begin{aligned}\xi &= \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) a + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) b + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) c \\ \eta &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) a + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) b + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) c \\ \zeta &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) a + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) b + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right) c\end{aligned}\quad (7.)$$

als die von dem Einflusse einer gemeinsamen Drehung befreiten relativen Verrückungen zu bezeichnen.

§ 25. Dilatationsellipsoide.

Die Grössen ξ , η , ζ in den vorstehenden Gleichungen sind die Coordinaten der Dilatationsoberfläche, bezogen auf das neue Coordinatensystem, dessen Lage gegen das frühere durch die geschehene gemeinsame Drehung bestimmt ist. Die neuen Formeln sind in genau derselben Weise gebildet, wie die Gleichungen (2.) § 15, welche die Coordinaten des ersten Druckellipsoids angeben. Die weitere Behandlung kann daher nach demselben Verfahren durchgeführt werden.

Durch Einführung entsprechender Abkürzungen erhalten wir

$$\begin{aligned}\xi &= Ma + pb + nc \\ \eta &= pa + Nb + mc \\ \zeta &= na + mb + Pc.\end{aligned}\quad (1.)$$

Trotz der geänderten Bedeutung der Constanten können wir alle Schlüsse, welche wir aus den früheren Gleichungen gezogen haben, unmittelbar auf die neuen übertragen. Wir erhalten, wenn wir die Gleichungen nach a , b , c auflösen, Formeln von der Gestalt

$$\begin{aligned}a &= M\xi + \varpi\eta + \nu\zeta \\ b &= \varpi\xi + N\eta + \mu\zeta \\ c &= \nu\xi + \mu\eta + \Pi\zeta,\end{aligned}\quad (2.)$$

aus welchen unmittelbar folgt, dass die Function.

$$(M\xi + \varpi\eta + \nu\zeta)^2 + (\varpi\xi + N\eta + \mu\zeta)^2 + (\nu\xi + \mu\eta + \Pi\zeta)^2 = \varrho^2$$

einen constanten, von ξ , η , ζ unabhängigen Werth besitzt.

Die Dilatationsoberfläche ist also ein dreiaxiges Ellipsoid; und es giebt, wie auch das System von Verrückungen beschaffen sei, im Allgemeinen immer drei auf einander rechtwinklige Richtungen, in welchen die Verrückungen Maxima und Minima sind. Diese Richtungen nennen wir die

Hauptdilationsachsen. Die Lage derselben hängt von einer cubischen Gleichung ab, für welche wir (Gl. 5'. § 16) fanden

$$\frac{M\xi + \varpi\eta + \nu\xi}{\xi} = \frac{\varpi\xi + N\eta + \mu\xi}{\eta} = \frac{\nu\xi + \mu\eta + \Pi\xi}{\xi}. \quad (3.)$$

Die Richtungen dieser Hauptachsen fallen zusammen mit der Lage der Axen eines andern Ellipsoids, des zweiten Dilatationsellipsoids,

$$M\xi^2 + N\eta^2 + \Pi\xi^2 + 2\varpi\xi\eta + 2\nu\xi\xi + 2\mu\eta\xi = \rho^2, \quad (4.)$$

welches dem zweiten Druckellipsoid analog ist.

Aus letzterer Formel geht hervor, dass, wenn wir die Coordinatenachsen mit den Hauptdilationsachsen zusammenfallen lassen, die Grössen

$$\mu = \nu = \varpi = 0$$

zum Verschwinden gebracht werden, und dass ferner (5.)

$$m = n = p = 0$$

wird. Demnach ist, bezogen auf die Hauptachsen, die Gleichung des ersten Dilatationsellipsoids

$$\left(\frac{\xi}{M}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{N}\right)^2 + \left(\frac{\xi}{P}\right)^2 = \rho^2$$

oder nach Einführung der Werthe der Constanten

$$\left(\frac{\xi}{1 + \frac{\partial u}{\partial x}}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{1 + \frac{\partial v}{\partial y}}\right)^2 + \left(\frac{\xi}{1 + \frac{\partial w}{\partial z}}\right)^2 = \rho^2. \quad (6.)$$

Aehnlich ist die Gleichung des zweiten Dilatationsellipsoides nach Gl. (4.)

$$\frac{\xi^2}{1 + \frac{\partial u}{\partial x}} + \frac{\eta^2}{1 + \frac{\partial v}{\partial y}} + \frac{\xi^2}{1 + \frac{\partial w}{\partial z}} = \rho^2. \quad (7.)$$

Diese zweite Oberfläche, welche uns bei der Bestimmung der Lage eines Theilchens nach der Verrückung wesentliche Dienste leisten wird, ist ebenfalls stets ein Ellipsoid; es kann niemals ein Hyperboloid werden, weil die Dilatationen $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial w}{\partial z}$ sehr kleine Grössen, also stets kleiner als 1 sind. Das Verhältniss der Axen beider Ellipsoide zu einander entspricht dem bei den Druckellipsoiden gefundenen.

§ 26. Eigenschaften der Hauptdilationsachsen.

Noch ein anderes sehr merkwürdiges Resultat geht aus den Gleichungen (7.) § 24 hervor. Bezogen auf die Hauptdilationsachsen werden dieselben

$$\begin{aligned}\xi &= \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) a \\ \eta &= \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) b \\ \zeta &= \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right) c.\end{aligned}\tag{1}$$

Lag nun der Punkt, welcher nach der Verrückung diese Coordinaten ξ, η, ζ hat, vor derselben in einer der Richtungen, welche durch die Verrückung zu Hauptdilatationsaxen werden, waren also seine Coordinaten z. B.

$$a \quad 0 \quad 0,$$

so sind dieselben nach der Verrückung

$$\xi = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) a, \quad \eta = 0, \quad \zeta = 0.$$

Das Theilchen ist also in der Hauptaxe geblieben. Demnach bleiben alle in der Richtung einer Hauptaxe auf einer Geraden liegenden Theilchen auch nach der Verrückung auf dieser Geraden; sie ändern nur ihre Abstände. Auch die auf einer beliebigen andern von xyz aus gezogenen Geraden liegenden Punkte bleiben gleichfalls auf einer geraden Linie, da ξ, η, ζ linear von a, b, c abhängen; aber die Gerade, auf welcher sie liegen, ändert ausser ihrer Länge noch ihre Richtung, während die Axen sich nur verlängern oder verkürzen, ohne die Richtung zu ändern. Mit andern Worten, wie auch das System von Verrückungen beschaffen sein mag, man kann durch jeden Punkt immer drei auf einander senkrechte Linien legen, auf welchen auch nach eingetretener Verrückung sich dieselben Massentheile befinden, welche vor derselben auf diesen Geraden lagen.

Es fragt sich, ob es nur drei solcher Richtungen giebt. Um diese Frage zu entscheiden, bestimmen wir, ohne uns auf die Hauptaxen zu beziehen, alle Richtungen, welche die erwähnte Eigenschaft haben. Für diese Richtungen gelten die Relationen

$$\frac{\xi}{a} = \frac{\eta}{b} = \frac{\zeta}{c}\tag{2}$$

und durch Einsetzen der Werthe aus den Gleichungen (1.) § 25

$$\frac{Ma + pb + nc}{a} = \frac{pa + Nb + mc}{b} = \frac{na + mb + Pc}{c}.\tag{3}$$

Diese Gleichungen sind aber keine andern, als die, durch welche die Richtungen der drei Axen eines Ellipsoides bestimmt werden, dessen Gleichung ist

$$M\xi^2 + N\eta^2 + P\zeta^2 + 2p\xi\eta + 2m\eta\zeta + 2n\xi\zeta = \varrho^2. \quad (4.)$$

Daraus geht hervor, dass es nur drei solcher Richtungen giebt; und da die Axen des Dilatationsellipsoides die geforderte Eigenschaft besitzen, so folgt, dass diese die einzigen Richtungen dieser Eigenschaft sind, mit alleiniger Ausnahme der Fälle, in denen nicht alle drei Axen verschieden sind und somit das dreiaxige Ellipsoid in ein zweiaxiges oder in eine Kugel übergeht.

§ 27. Bestimmung der Hauptdilatationen.

Die eben gefundenen Relationen können wir benutzen, die Lage der Axen des Dilatationsellipsoides auf einfachere Weise aufzufinden, als durch die frühere Untersuchung § 25.

Für den Radiusvector des Dilatationsellipsoides haben wir nach der in § 23 eingeführten Bezeichnung

$$(\varrho + \Delta\varrho)^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$$

oder nach Gl. (1.) § 25

$$(\varrho + \Delta\varrho)^2 = (Ma + pb + nc)^2 + (pa + Nb + mc)^2 + (na + mb + Pc)^2. \quad (1.)$$

Liegt nun dieser Radius in einer der Hauptaxen, so gelten die Relationen Gl. (3.) § 26; wir erhalten mittelst derselben

$$(\varrho + \Delta\varrho)^2 = \frac{(Ma + pb + nc)^2}{a^2} \{a^2 + b^2 + c^2\},$$

woraus nach Division durch $\varrho^2 = a^2 + b^2 + c^2$

$$1 + \frac{\Delta\varrho}{\varrho} = \frac{Ma + pb + nc}{a}$$

sich ergibt; also ist nach Gleichung (3.) § 26

$$\frac{\Delta\varrho}{\varrho} = \frac{(M-1)a + pb + nc}{a} = \frac{pa + (N-1)b + mc}{b} = \frac{na + mb + (P-1)c}{c}$$

oder, wenn wir für die in § 25 eingeführten Abkürzungen ihre ursprünglichen Bedeutungen wieder einsetzen,

$$\begin{aligned} a \frac{\Delta\varrho}{\varrho} &= a \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{b}{2} \left\{ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right\} + \frac{c}{2} \left\{ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right\} \\ b \frac{\Delta\varrho}{\varrho} &= \frac{a}{2} \left\{ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right\} + b \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{c}{2} \left\{ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right\} \\ c \frac{\Delta\varrho}{\varrho} &= \frac{a}{2} \left\{ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right\} + \frac{b}{2} \left\{ \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right\} + c \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned} \quad (2.)$$

Durch Elimination von a, b, c erhalten wir hieraus zur Bestimmung der Hauptdilatationen die für $\frac{\Delta\varrho}{\varrho}$ cubische Gleichung

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\Delta \varrho}{\varrho} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\Delta \varrho}{\varrho} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\Delta \varrho}{\varrho} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\Delta \varrho}{\varrho} \right) \\ & - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\Delta \varrho}{\varrho} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\Delta \varrho}{\varrho} \right) \quad (3.) \\ & + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0, \end{aligned}$$

welche der Gl. (4.) § 19 analog ist. Die drei Wurzeln dieser Gleichung sind die drei den Hauptaxen angehörenden Werthe der Dilatation $\frac{\Delta \varrho}{\varrho}$. Wir werden indess vorzugsweise von den Gleichungen (2.) Gebrauch machen.

§ 28. Bestimmung der Lage eines einzelnen Theilchens vor der Verrückung aus seiner Lage nach derselben, und umgekehrt.

Nachdem wir die Oberfläche bestimmt, auf welcher sich nach der Verrückung sämmtliche Theilchen befinden, die vor derselben auf einer Kugelfläche lagen, haben wir noch zu untersuchen, welchen Ort auf dem Ellipsoid ein bestimmtes Theilchen, dessen Lage auf der Kugel gegeben ist, nach der Verrückung einnimmt, und umgekehrt, welcher Ort auf der Kugel einer bestimmten Stelle des Ellipsoids entspricht. Wir bedienen uns zu diesem Zwecke eines Verfahrens, welches dem in § 20 angewandten ganz analog ist.

Es sei der Punkt Q der Dilatationsoberfläche gegeben, in welchem sich nach der Verrückung ein bestimmtes Theilchen befindet, das vorher auf der Kugel in dem gesuchten Punkte Q' lag. Bezogen auf die Hauptdilatationsaxen sind die Coordinaten von Q

$$\begin{aligned} \xi &= aM = a \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ \eta &= bN = b \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ \zeta &= cP = c \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z} \right), \end{aligned} \quad (1.)$$

wo, wie bisher, a, b, c die Coordinaten des Punktes Q' bezogen auf xyz bezeichnen.

Die laufenden Coordinaten einer vom Mittelpunkte xyz der Kugel aus durch Q' gelegten Geraden seien ξ', η', ζ' , also

$$\frac{\xi'}{\eta'} = \frac{a}{b}; \quad \frac{\eta'}{\zeta'} = \frac{b}{c}; \quad \frac{\zeta'}{\xi'} = \frac{c}{a},$$

mithin nach den Gleichungen (1.)

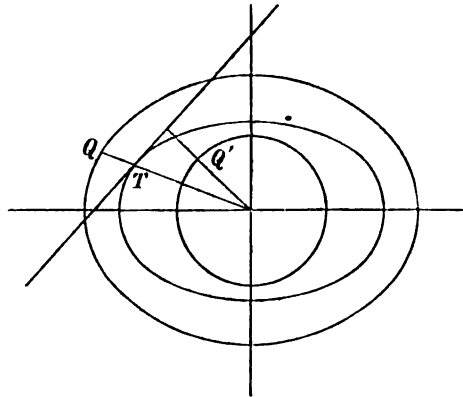
$$\frac{\xi'}{\eta'} = \frac{\xi}{\eta} \cdot \frac{1 + \frac{\partial v}{\partial y}}{1 + \frac{\partial u}{\partial x}}; \quad \frac{\eta'}{\zeta'} = \frac{\eta}{\zeta} \cdot \frac{1 + \frac{\partial w}{\partial z}}{1 + \frac{\partial v}{\partial y}}; \quad \frac{\zeta'}{\xi'} = \frac{\zeta}{\xi} \cdot \frac{1 + \frac{\partial u}{\partial x}}{1 + \frac{\partial w}{\partial z}}. \quad (2.)$$

Diese Gleichungen sagen aus, dass der nach Q' gezogene Radius senkrecht steht gegen die an das zweite Dilatationsellipsoid gelegte Tangentialebene, deren laufende Coordinaten ξ'' , η'' , ζ'' der Gleichung

$$\rho^2 = \frac{\xi\xi''}{1 + \frac{\partial u}{\partial x}} + \frac{\eta\eta''}{1 + \frac{\partial v}{\partial y}} + \frac{\zeta\zeta''}{1 + \frac{\partial w}{\partial z}}$$

genügen, wenn ξ , η , ζ den Punkt in der Oberfläche des Ellipsoids bezeichnet.

Dieses Resultat lässt sich sehr einfach construiren. An das zweite Dilatationsellipsoid legen wir durch den Punkt T , in welchem es von dem nach Q gezogenen Radius geschnitten wird, eine Tangentialebene. Die durch den Mittelpunkt xyz gehende Normale dieser Ebene schneidet die Kugel in dem gesuchten Punkte Q' , in welchem sich das Theilchen vor der Verrückung befand.



Umgekehrt erhält man aus dem ursprünglichen Ort Q' des Theilchens seine Stelle Q nach der Verrückung, wenn man senkrecht gegen den nach Q' gezogenen Radius der Kugel eine Tangentialebene an das zweite Druckellipsoid legt. Verbindet man dann den Berührungspunkt T mit dem Mittelpunkte, so findet man den gesuchten Punkt Q da, wo die Verlängerung dieses Radiusvectors das erste Druckellipsoid trifft.

Durch die benutzten Formeln (2.) lassen sich leicht, indem man den Radius ρ der Kugel verändert, folgende zwei Sätze beweisen:

1) Alle Theilchen, welche ursprünglich auf einem Radius der Kugel, also überhaupt auf einer geraden Linie lagen, befinden sich auch nach der Verrückung stets auf einer geraden Linie.

2) Alle Theilchen, welche sich vorher in einer Ebene befanden, liegen auch nach der Verrückung stets in einer Ebene. Parallele Ebenen bleiben parallel.

Diese Sätze gelten, da die Variation der kleinen Grösse ρ nur in unendlich engen Grenzen gestattet ist, im Allgemeinen nur für das unendlich kleine System der dem Punkte xyz unmittelbar benachbarten Theilchen. Bei gleichmässiger Dilatation gelten sie jedoch für den ganzen Körper.

§ 29. Räumliche Dilatation.

Zum Schlusse dieser Untersuchungen über die Verrückungen berechnen wir eine für das Folgende wichtige Grösse, die räumliche Dilatation, welche das Volumen des elastischen Körpers durch Dehnung, Biegung, Erwärmung oder andere Ursachen erfährt.

Der Rauminhalt der um den Punkt xyz mit dem Radius ρ construirten Kugel

$$\frac{4}{3} \pi \rho^3$$

erweitert sich durch die Verrückungen zu demjenigen des ersten Dilatationsellipsoides, dessen Formel die Gleichung (6.) § 25 auf die Hauptaxen bezogen angiebt; seine halben Axen sind also in diesem Coordinatensystem

$$\rho \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad \rho \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right), \quad \rho \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

und sein Rauminhalt

$$\frac{4}{3} \pi \rho^3 \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right).$$

Das Volumen hat sich also in dem Verhältnisse von

$$\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right) : 1$$

ausgedehnt.

Derselbe Werth ergibt sich aus der Betrachtung eines Parallelepipedes, welches eine seiner Ecken im Punkte xyz hat, während die gegenüberliegende in einem Punkte $x + a, y + b, z + c$ der Kugel liegt. Die Kanten a, b, c ändern durch die Verrückung dieses Prismas im Allgemeinen sowohl Länge als Richtung. Nehmen wir aber die Hauptdilatationsaxen zu Coordinatenaxen, so bleibt nach § 26 die Richtung der Kanten ungeändert, nur ihre Länge erhält einen andern Werth, nämlich

$$\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) a, \quad \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) b, \quad \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right) c.$$

Das Volumen des Prismas, das vor der Verrückung

$$V = abc$$

war, wird nach derselben

$$V + \Delta V = abc \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right). \quad (1.)$$

Wenn wir die Quadrate der Dilatationen vernachlässigen, erhalten wir

$$V + \Delta V = abc \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right).$$

Also ist die Vergrößerung der Raumeinheit

$$\frac{\Delta V}{V} = \Delta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (2.)$$

Dies ist die räumliche Dilatation, bezogen auf die Hauptdilatationsaxen als Coordinatenaxen.

Es ist wichtig sich zu überzeugen, dass die Form dieses Ausdruckes unabhängig vom Coordinatensystem ist, und dass er, welches auch die Lage und Richtung der Axen sei, immer die räumliche Dilatation darstellt.

Wir nehmen ein beliebiges Coordinatensystem an. Die den Axen parallelen Kanten des Prismas vor der Verrückung seien wieder a, b, c , das Volumen also

$$V = abc.$$

Nach der Verrückung haben dieselben die Werthe a_1, b_1, c_1 , sind aber nicht mehr den Axen parallel; das Prisma ist jetzt im Allgemeinen schiefwinklig. Die Ecke desselben, welche vor der Verrückung die Coordinaten $a, 0, 0$ hatte, liegt auf derjenigen Dilatationsoberfläche, welche aus einer mit dem Radius a um xyz beschriebenen Kugel entstanden ist. Wir finden also a_1 , wenn wir in dem Werthe von $(\varrho + \Delta\varrho)$ Gl. (1.) § 27 $b = 0$ und $c = 0$ setzen, durch die Formel

$$a_1^2 = a^2 \{M^2 + p^2 + n^2\}$$

oder

$$a_1 = a \sqrt{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)^2},$$

folglich unter Vernachlässigung der höheren Potenzen der kleinen Grössen $\frac{\partial u}{\partial x}$ etc.

$$a_1 = a \left\{ 1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right\}$$

und entsprechend

$$b_1 = b \left\{ 1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right\} \quad (3.)$$

$$c_1 = c \left\{ 1 + \frac{\partial w}{\partial z} \right\}.$$

Der Inhalt des Prismas nach der Verrückung ist also

$$V + \Delta V = abc \left\{ 1 + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right\} \sin(a_1, b_1) \cdot \sin(c_1, [a_1 b_1]), \quad (4.)$$

wenn wir durch (a_1, b_1) den Winkel bezeichnen, den die Kanten a_1 und b_1 mit einander einschliessen, und durch $(c_1, [a_1 b_1])$ den Winkel, den die Kante c_1 mit der Ebene $a_1 b_1$ einschliesst.

Nun sind nach (4.) § 23 die relativen Coordinaten des Eckpunktes

der Kante a_1	$a \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right)$	$a \frac{\partial v}{\partial x}$	$a \frac{\partial w}{\partial x}$	
" " b_1	$b \frac{\partial u}{\partial y}$	$b \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$	$b \frac{\partial w}{\partial y}$	(4.)
" " c_1	$c \frac{\partial u}{\partial z}$	$c \frac{\partial v}{\partial z}$	$c \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z} \right)$	

Mithin sind bis auf Grössen zweiter Ordnung die Winkel, welche die Kanten mit den festen Coordinatenrichtungen bilden, durch die Formeln

$$\begin{aligned} \cos(a_1, x) &= 1 & \cos(a_1, y) &= \frac{\partial v}{\partial x} & \cos(a_1, z) &= \frac{\partial w}{\partial x} \\ \cos(b_1, x) &= \frac{\partial u}{\partial y} & \cos(b_1, y) &= 1 & \cos(b_1, z) &= \frac{\partial w}{\partial y} \quad (5.) \\ \cos(c_1, x) &= \frac{\partial u}{\partial z} & \cos(c_1, y) &= \frac{\partial v}{\partial z} & \cos(c_1, z) &= 1 \end{aligned}$$

bestimmt, aus welchen sich nach Anleitung der Formel

$$\begin{aligned} \cos(a_1, b_1) &= \cos(a_1, x) \cos(b_1, x) + \cos(a_1, y) \cos(b_1, y) \\ &\quad + \cos(a_1, z) \cos(b_1, z). \end{aligned}$$

die Cosinus der Kantenwinkel

$$\begin{aligned} \cos(a_1, b_1) &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \cos(b_1, c_1) &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \cos(a_1, c_1) &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned} \quad (6.)$$

als kleine Grössen erster Ordnung ergeben. Hieraus geht hervor, dass die in Formel (4.) vorkommenden Sinus sich nur um Grössen zweiter Ordnung von 1 unterscheiden, dass also auch für ein beliebiges Coordinatensystem

$$\frac{\Delta V}{V} = \Delta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (7.)$$

ist, d. h. dass der Ausdruck für die räumliche Dilatation von der Lage des Coordinatensystems unabhängig ist.

5. Beziehungen zwischen den Druckkräften und den Verrückungen.

§ 30. Relationen für unkrystallinische Medien, bezogen auf die Hauptaxen.

Nach diesen Untersuchungen, welche eine durchgreifende Analogie zwischen der Vertheilung der elastischen Druckkräfte und dem Gesetze der Verschiebungen hervortreten liessen, stellen wir die Frage, ob sich aus dieser Analogie nicht Nutzen ziehen lässt. Wir sind zu dieser Frage berechtigt, weil es auf der Hand liegt, dass in jedem Medium, sei es krystallinisch oder unkrystallinisch, Druckkräfte und Verrückungen immer zugleich entstehen und vergehen. Von diesen beiden in ursächlichem Zusammenhange mit einander stehenden Klassen von Grössen muss sich also die eine durch die andere mathematisch so ausdrücken lassen, dass die Function, welche die Abhängigkeit der einen von der andern bestimmt, zugleich mit ihrem Argumente verschwindet.

Haben wir es mit einem Medium zu thun, welches nach allen Richtungen gleich elastisch, also unkrystallinisch ist, so können wir die Analogie zwischen Druck und Verrückung noch um einen wichtigen Schritt weiter führen. Es kann in diesem Falle kein Zweifel obwalten, dass die Richtungen der grössten Druckkräfte zusammenfallen müssen mit den Richtungen der stärksten Dilatationen, dass also die Hauptaxen der Druck- und Dilatationsellipsoide dieselbe Lage haben. Bei krystallinischen Medien ist dies nicht mehr richtig, weil die Lage des Druckellipsoids noch von der der Krystallaxen abhängig ist. Wir beschränken daher die Betrachtung auf den Fall eines unkrystallinischen Mediums.

Aus unserer Annahme, dass die Dilatationen kleine Grössen seien, folgt, dass die Druckkräfte, welche wir als Functionen jener anzusehen haben, in der Gestalt einer Entwicklung nach Potenzen der Dilatationen dargestellt werden können. Da ferner nach unserer Annahme die Dilatationen so kleine Grössen sind, dass wir nur ihre

erste Potenz zu berücksichtigen brauchen, so müssen die Hauptdruckkräfte lineare Functionen der Dilatationen sein; und zwar werden sie, da sie mit jenen zugleich verschwinden, ohne Hinzufügung eines constanten Gliedes ihnen einfach proportional zu setzen sein. Nun hängt das ganze System der Dilatationen von den Hauptdilata-tionen ab und ist durch diese drei Grössen vollständig bestimmt; ebenso ist das ganze System der Druckkräfte durch die drei Hauptdruckkräfte allein völlig bestimmt. Wir geben also dem ausgesprochenen Gedanken in Formeln vollständig Ausdruck, wenn wir die Hauptdruckkräfte den Hauptverschiebungen proportional setzen. Wir erhalten daher, wenn wir nach der in § 17 eingeführten Bezeichnung die auf die Hauptaxen bezüglichen Grössen durch einen horizontalen Strich auszeichnen, für unkrystallinische Medien die Relationen

$$\begin{aligned} -\bar{X}_x &= A \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + B \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + C \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \\ -\bar{Y}_y &= A' \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + B' \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + C' \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \\ -\bar{Z}_z &= A'' \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + B'' \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + C'' \frac{\partial \bar{w}}{\partial z}, \end{aligned} \quad (1.)$$

in denen die Coefficienten A, B, C constante Grössen sind. Den Formeln sind die negativen Vorzeichen vorgesetzt, damit wir diese Coefficienten als positive Grössen bezeichnen können. Die Richtigkeit dieser Bemerkung ist wenigstens für einige Glieder von vornherein leicht ersichtlich. Ist z. B. $\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}$ eine positive Grösse, so bedeutet das, dass in der Richtung der positiven x -Coordinate eine Dehnung eingetreten ist. Eine solche Dehnung verursacht einen in der negativen Richtung wirkenden Zug; die Kraftcomponente \bar{X}_x , deren genauere Definition wir in § 6 gegeben haben, besitzt also in diesem Falle einen negativen Werth.

Es kann sich aber \bar{X}_x nicht ändern, wenn wir diejenige Dilatation, welche in der y -Axe stattfand, statt dessen in der z -Richtung eintreten lassen, und umgekehrt, weil im Medium kein Grund für einen Unterschied beider Richtungen vorhanden ist. Wir haben also

$$B \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + C \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = C \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} + B \frac{\partial \bar{v}}{\partial y},$$

folglich ist

$$B = C$$

und ebenso

$$A' = C'$$

$$B'' = A''.$$

Vertauschen wir ferner z. B. die Verrückungen in der x -Axe mit den in der y -Axe geschehenen, so muss aus demselben Grunde jetzt \bar{X}_x den Werth erhalten, den vorher \bar{Y}_y hatte, und umgekehrt. Daraus folgt, dass die 9 Constanten der Gleichungen (1.) sich auf 2 in der Weise reduciren lassen, dass

$$\begin{aligned} -\bar{X}_x &= A \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + B \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + B \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \\ -\bar{Y}_y &= B \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + A \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + B \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \\ -\bar{Z}_z &= B \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + B \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + A \frac{\partial \bar{w}}{\partial z}. \end{aligned} \quad (2.)$$

Durch Einführung der räumlichen Dilatation Δ werden diese Gleichungen

$$\begin{aligned} -\bar{X}_x &= (A - B) \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + B\Delta \\ -\bar{Y}_y &= (A - B) \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + B\Delta \\ -\bar{Z}_z &= (A - B) \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} + B\Delta, \end{aligned} \quad (3.)$$

wobei es nach § 29 nicht nöthig ist, in der Grösse

$$\Delta = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z}$$

die unterscheidenden Horizontalstriche hinzuzufügen.

Damit haben wir bewiesen, dass in einem unkrystallinischen Medium die Druckkräfte als Functionen der Veränderungen von höchstens zwei Constanten abhängen. Nach Theorien, welche wir im folgenden Abschnitt mittheilen werden, stehen auch diese zwei Constanten unter einander in einer einfachen Beziehung. Ohne die Hypothesen, welche jenen Theorien zu Grunde liegen, anzunehmen, können wir die Frage, ob die zwei Constanten unserer Theorie sich auf eine einzige zurückführen lassen, nur durch Vergleichung mit Beobachtungen entscheiden.

§ 31. Dieselben Relationen für ein beliebiges Coordinatensystem.

Die Gleichungen des vorigen § beziehen sich auf das bestimmte Coordinatensystem, dessen Axen die Hauptaxen der Ellipsoide sind. Es ist für die Anwendung nothwendig, die Ausdrücke für die Molekularkräfte auf ein beliebiges Coordinatensystem zu beziehen. Diese Verallgemeinerung kann die Zahl der Constanten A und B nicht vermehren.

Die Umgestaltung geschieht mittelst des Theorems C § 9, welches in dem Falle, dass durch Wahl der Hauptdruckaxen zu Koordinatenaxen die Componenten

$$\bar{X}_y = \bar{Y}_x = \bar{Z}_z = 0$$

gemacht werden, die einfachere Form

$$\begin{aligned}\bar{X}_x &= \bar{X}_x \cos(s, \bar{x}) \\ \bar{Y}_y &= \bar{Y}_y \cos(s, \bar{y}) \\ \bar{Z}_z &= \bar{Z}_z \cos(s, \bar{z})\end{aligned}\quad (1.)$$

annimmt. Aus diesen nach den Hauptaxen $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ gerichteten Componenten des auf eine Fläche, deren Normale s ist, ausgeübten Druckes erhalten wir die in der Richtung der Normale wirkenden Druckcomponenten durch die Formel

$$\begin{aligned}S_s &= \bar{X}_x \cos(s, \bar{x}) + \bar{Y}_y \cos(s, \bar{y}) + \bar{Z}_z \cos(s, \bar{z}) \\ &= \bar{X}_x \cos^2(s, \bar{x}) + \bar{Y}_y \cos^2(s, \bar{y}) + \bar{Z}_z \cos^2(s, \bar{z}).\end{aligned}\quad (2.)$$

Ebenso ist eine Componente dieses Druckes, deren Richtung mit irgend einer in der Druckfläche gelegenen, also senkrecht gegen s gerichteten Linie r zusammenfällt, zu berechnen nach der Formel

$$\begin{aligned}R_r &= \bar{X}_x \cos(r, \bar{x}) + \bar{Y}_y \cos(r, \bar{y}) + \bar{Z}_z \cos(r, \bar{z}) \\ &= \bar{X}_x \cos(r, \bar{x}) \cos(s, \bar{x}) + \bar{Y}_y \cos(r, \bar{y}) \cos(s, \bar{y}) + \bar{Z}_z \cos(r, \bar{z}) \cos(s, \bar{z}).\end{aligned}\quad (3.)$$

Diese Formeln benutzen wir zur Bildung der Componenten im neuen Coordinatensystem x, y, z , indem wir die beliebigen Richtungen s und r der Reihe nach mit x, y, z zusammenfallen lassen.

Wenn die neuen Coordinaten mit den nach den Hauptaxen gerichteten durch die Gleichungen

$$\begin{aligned}x &= \kappa_{11} \bar{x} + \kappa_{12} \bar{y} + \kappa_{13} \bar{z} \\ y &= \kappa_{21} \bar{x} + \kappa_{22} \bar{y} + \kappa_{23} \bar{z} \\ z &= \kappa_{31} \bar{x} + \kappa_{32} \bar{y} + \kappa_{33} \bar{z}\end{aligned}\quad (4.)$$

zusammenhängen, so werden die auf das neue System bezogenen Componenten

$$\begin{aligned}X_x &= \kappa_{11}^2 \bar{X}_x + \kappa_{12}^2 \bar{Y}_y + \kappa_{13}^2 \bar{Z}_z \\ Y_y &= \kappa_{21}^2 \bar{X}_x + \kappa_{22}^2 \bar{Y}_y + \kappa_{23}^2 \bar{Z}_z \\ Z_z &= \kappa_{31}^2 \bar{X}_x + \kappa_{32}^2 \bar{Y}_y + \kappa_{33}^2 \bar{Z}_z, \\ X_y &= Y_x = \kappa_{11} \kappa_{21} \bar{X}_x + \kappa_{12} \kappa_{22} \bar{Y}_y + \kappa_{13} \kappa_{23} \bar{Z}_z \\ Y_z &= Z_y = \kappa_{21} \kappa_{31} \bar{X}_x + \kappa_{22} \kappa_{32} \bar{Y}_y + \kappa_{23} \kappa_{33} \bar{Z}_z \\ Z_x &= X_z = \kappa_{31} \kappa_{11} \bar{X}_x + \kappa_{32} \kappa_{12} \bar{Y}_y + \kappa_{33} \kappa_{13} \bar{Z}_z,\end{aligned}\quad (5.)$$

und durch Einsetzen der Werthe aus den Gleichungen (3.) § 30

$$\begin{aligned}
 -X_x &= (A - B) \left\{ \kappa_{11}^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \kappa_{12}^2 \frac{\partial v}{\partial y} + \kappa_{13}^2 \frac{\partial w}{\partial z} \right\} + B\Delta \\
 -Y_y &= (A - B) \left\{ \kappa_{21}^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \kappa_{22}^2 \frac{\partial v}{\partial y} + \kappa_{23}^2 \frac{\partial w}{\partial z} \right\} + B\Delta \\
 -Z_z &= (A - B) \left\{ \kappa_{31}^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \kappa_{32}^2 \frac{\partial v}{\partial y} + \kappa_{33}^2 \frac{\partial w}{\partial z} \right\} + B\Delta, \\
 -X_y &= -Y_x = (A - B) \left\{ \kappa_{11}\kappa_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + \kappa_{12}\kappa_{22} \frac{\partial v}{\partial y} + \kappa_{13}\kappa_{23} \frac{\partial w}{\partial z} \right\} \\
 -Y_z &= -Z_y = (A - B) \left\{ \kappa_{21}\kappa_{31} \frac{\partial u}{\partial x} + \kappa_{22}\kappa_{32} \frac{\partial v}{\partial y} + \kappa_{23}\kappa_{33} \frac{\partial w}{\partial z} \right\} \\
 -Z_x &= -X_z = (A - B) \left\{ \kappa_{31}\kappa_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + \kappa_{32}\kappa_{12} \frac{\partial v}{\partial y} + \kappa_{33}\kappa_{13} \frac{\partial w}{\partial z} \right\}.
 \end{aligned} \tag{6.}$$

In diesen Ausdrücken sind nun noch die Differentialquotienten auf das neue Coordinatensystem umzuformen. Ebenso wie für die Coordinaten die Gleichungen (4.) gelten, so bestehen für die Verrückungen die Formeln

$$\begin{aligned}
 u &= \kappa_{11}\bar{u} + \kappa_{12}\bar{v} + \kappa_{13}\bar{w} \\
 v &= \kappa_{21}\bar{u} + \kappa_{22}\bar{v} + \kappa_{23}\bar{w} \\
 w &= \kappa_{31}\bar{u} + \kappa_{32}\bar{v} + \kappa_{33}\bar{w}.
 \end{aligned} \tag{4.*}$$

Bilden wir hiernach die Differentialquotienten für das neue Coordinatensystem, so finden wir Ausdrücke von ähnlicher Form, wie die in den Gleichungen (6.) vorkommenden; und unter Rücksicht darauf, dass nach den Formeln (5.) § 25 für das Haupttaxensystem die Grössen

$$0 = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

verschwinden, erhalten wir schliesslich die für ein beliebiges Coordinatensystem gültigen Formeln für die Druckcomponenten

$$\begin{aligned}
 -X_x &= (A - B) \frac{\partial u}{\partial x} + B\Delta \\
 -Y_y &= (A - B) \frac{\partial v}{\partial y} + B\Delta \\
 -Z_z &= (A - B) \frac{\partial w}{\partial z} + B\Delta, \\
 -X_y &= -Y_x = \frac{1}{2} (A - B) \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\
 -Y_z &= -Z_y = \frac{1}{2} (A - B) \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\
 -Z_x &= -X_z = \frac{1}{2} (A - B) \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right).
 \end{aligned} \tag{7.}$$

Hierin ist, wie früher,

$$\Delta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Es ist also die analytische Form der normal gegen die Druckfläche wirkenden Druckcomponenten genau dieselbe wie die der Hauptdruckcomponenten in den Gleichungen (3.) § 30.

§ 32. Gleichungen des Gleichgewichts und der Bewegung eines unkrystallinischen Mediums.

Setzen wir diese Werthe der Druckcomponenten in die Gleichungen des Systems A' § 10 ein, so erhalten wir die allgemeinen Gleichungen des Gleichgewichts und der Bewegung für ein unkrystallinisches, elastisches Medium in der Gestalt

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - X &= \frac{1}{2}(A - B) \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right\} + \frac{1}{2}(A + B) \frac{\partial \Delta}{\partial x} \\ \varepsilon \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - Y &= \frac{1}{2}(A - B) \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right\} + \frac{1}{2}(A + B) \frac{\partial \Delta}{\partial y} \\ \varepsilon \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - Z &= \frac{1}{2}(A - B) \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right\} + \frac{1}{2}(A + B) \frac{\partial \Delta}{\partial z}. \end{aligned} \quad (1.)$$

Diese Differentialgleichungen enthalten nicht mehr die molekularen Druckcomponenten, sondern ausser den äusseren Kräften, welche auf das Medium wirken, nur die Verrückungen u, v, w . Unsere Aufgabe, den Zustand des betrachteten elastischen Körpers zu untersuchen, ist also darauf zurückgeführt, dass wir die genannten drei Grössen durch Integration von drei partiellen Differentialgleichungen bestimmen.

Die willkürlichen Functionen, welche durch diese Integration eingeführt werden, sind, wenn das Medium begrenzt ist, aus den für die Oberfläche desselben geltenden Bedingungen mittelst des Theorems D § 11, oder durch die zu Anfang der Bewegung stattfindenden Zustände zu bestimmen.

§ 33. Bedingungen für die Grenze zweier elastischen Medien.

Ganz ähnlich gestalten sich die Differentialgleichungen und Grenzbedingungen, wenn wir unsere Betrachtung nicht auf einen einzigen elastischen Körper beschränken, sondern auf ein System elastischer Medien ausdehnen, welche dadurch, dass sie unter einander in Berührung sind und gegenseitig auf einander einwirken, ihre Verrückungen und Bewegungen wechselseitig bedingen. In diesem allgemeineren Falle treten nur noch eigenthümliche Bedingungen für jede Grenzfläche zu den übrigen unverändert geltenden Gleichungen hinzu.

Dass in dem Falle von zwei sich berührenden Körpern, auf den wir uns der Einfachheit wegen beschränken, die Differentialgleichungen (1.) § 32 oder A § 7 keinerlei Veränderung erleiden, folgt aus ihrer Herleitung; nur erhalten wir ein zwiefaches System von Gleichungen A, so dass sich je eines auf eins der beiden Medien bezieht; diese beiden Systeme unterscheiden sich durch die Verschiedenheit der Werthe der beiden Elasticitätsconstanten A und B . Ebenso bleibt das Gleichungssystem D § 11 für die freie Oberfläche unverändert. Wir erhalten aber noch neue Bedingungsgleichungen für die gemeinschaftliche Grenze, wenn wir die Bedingungen des Gleichgewichts eines kleinen rechtwinkligen Prismas untersuchen, welches, halb in dem einen, halb in dem anderen Medium gelegen, das Element der Normale n der Grenzfläche zur Höhe hat, während seine Basis gleich dem Element $d\omega$ der Grenzfläche ist. Nach demselben Verfahren, wie in § 11 bei der Aufstellung der Bedingungsgleichungen D, bilden wir die Summen der sämtlichen auf das Prisma wirkenden Componenten, entwickeln diese Summen nach Potenzen der Dimensionen des Prismas und setzen jede Summe = 0, um die Bedingungen für den Zustand des Gleichgewichts zu finden. Suchen wir die analogen für die Bewegung, so fügen wir noch die Beschleunigung, die das Prisma erfährt, negativ hinzu und setzen die Summe = 0. In beiden Fällen verschwinden in den Summen wiederum nicht alle Glieder zweiter Ordnung von selbst, sondern nur dann, wenn folgende Gleichungen bestehen:

$$\begin{aligned} 0 &= (X'_x - X''_x) \cos(n, x) + (X'_y - X''_y) \cos(n, y) + (X'_z - X''_z) \cos(n, z) \\ 0 &= (Y'_x - Y''_x) \cos(n, x) + (Y'_y - Y''_y) \cos(n, y) + (Y'_z - Y''_z) \cos(n, z) \quad (1.) \\ 0 &= (Z'_x - Z''_x) \cos(n, x) + (Z'_y - Z''_y) \cos(n, y) + (Z'_z - Z''_z) \cos(n, z), \end{aligned}$$

welche aussagen, dass die in der Bezeichnung durch ' unterschiedenen Componenten des Molekulardrucks in dem einen Medium den durch '' bezeichneten entsprechenden Druckkräften in dem andern Medium in der Grenzfläche das Gleichgewicht halten. Da sich die Werthe dieser beiden Systeme von Druckcomponenten nur durch die verschiedenen in den Differentialgleichungen A beider Systeme enthaltenen Elasticitätsconstanten A' , B' , A'' , B'' unterscheiden, so folgt daraus, dass sich die Gleichungen (1.) von selbst erfüllen, wenn wir auf beiden Seiten der Grenze dasselbe Medium, also überhaupt nur ein homogenes Medium annehmen.

Zu diesen Gleichungen, welche sich auf die Gleichheit der Drücke beziehen, kommen noch drei Bedingungsgleichungen, welche aussagen,

dass die Medien sich an der Grenze durch die Verrückungen der Theilchen nicht von einander trennen. Diese Bedingung wird erfüllt, wenn für jedes Element der Grenze

$$u' = u'', \quad v' = v'', \quad w' = w'' \quad (2.)$$

ist, worin u', v', w' die Verrückungen eines Theilchens des ersten Mediums, u'', v'', w'' die eines Theilchens des zweiten bedeuten. Jedes Grenzelement muss also sechs Bedingungen genügen.

Diese Bedingungsgleichungen, die von grosser Wichtigkeit, namentlich für die Optik, sind, gelten unabhängig davon, ob die Verrückungen Functionen der Zeit sind oder nicht, also sowohl für den Zustand der Ruhe, als auch für den der Bewegung.

Entwicklung der allgemeinen Theorie aus der Molekularhypothese.

6. Navier's Differentialgleichungen.

§ 34. Summirung der Molekularkräfte.

Ehe wir zu Anwendungen der gefundenen Gleichungen übergehen, stellen wir noch eine andere allgemeine Betrachtung an, bei welcher wir an die in der Einleitung erörterten Vorstellungen über die Natur der elastischen Kräfte anknüpfen. Dort nahmen wir als Ursache der Elasticität die anziehenden und abstossenden Kräfte an, welche zwischen den Theilchen des elastischen Körpers je nach der Grösse der eingetretenen Verschiebungen eine mehr oder minder starke Cohäsion zu Stande bringen. Diese Hypothese der molekularen Kräfte haben wir in den vorausgegangenen Untersuchungen in keiner Weise benutzt oder verwerthet.

Indem wir jetzt dazu übergehen, die Theorie der Elasticität auf Grund dieser Molekularhypothese aufzubauen, gehen wir historisch zu Werke. Die Differentialgleichungen der Elasticität wurden zuerst aus dieser Hypothese entwickelt und zwar von Navier¹⁾, dessen Gedankengang wir zunächst verfolgen.

Die Navier'schen Differentialgleichungen setzen ein unkrystallinisches Medium voraus, d. h. ein Medium, dessen Theilchen so regelmässig oder unregelmässig angeordnet sind, dass man keine Richtung von der andern unterscheiden kann. Navier geht aus, nicht von der Betrachtung des natürlichen Zustandes, sondern des Zustandes, in dem schon eine Verrückung aus der Gleichgewichtslage eingetreten ist. Er abstrahirt von den Kräften, welche im natürlichen Zustande zwischen den Theilchen wirksam sind, weil diese Kräfte sich gegenseitig zerstören. Die Wirkung, welche nach der Verrückung zwei Theilchen auf einander ausüben, wird nach Navier's Hypothese in der Richtung der Verbindungslinie ausgeübt und ist proportional der

1) Mém. de l'Acad. de Paris. 1824. T. 7. p. 375.

durch die Verrückung hervorgebrachten Vergrößerung der Entfernung. Bezeichnet ϱ die Entfernung zweier Theilchen im natürlichen Zustande, $\varrho + \Delta\varrho$ die Entfernung derselben nach eingetretener Verrückung, so wird die Kraft, welche dieselben in Folge dieser Verrückung auf einander ausüben, proportional

$$\varphi(\varrho)\Delta\varrho$$

gesetzt, wo $\varphi(\varrho)$ eine unbekante Function der Entfernung ist. Von dieser Function wissen wir nur, dass sie für endliche Argumente ϱ verschwinden muss, da auch nach der Verrückung sich die Wirkung eines Theilchens nur auf sehr kleine Entfernungen erstreckt.

Wir suchen die Resultante der Kräfte, welche ein Theilchen m an der Stelle xyz erfährt. In der Entfernung ϱ befinde sich ein zweites Theilchen m_1 . Wir bezeichnen, wie früher, die Projectionen von ϱ auf die Coordinatenaxen mit a, b, c und von $\varrho + \Delta\varrho$ mit $a + \Delta u, b + \Delta v, c + \Delta w$. Dann sind die Componenten der Wirkung des Theilchens m_1 auf das Theilchen m nach den drei Coordinatenrichtungen

$$mm_1 \frac{a + \Delta u}{\varrho + \Delta\varrho} \Delta\varrho \cdot \varphi(\varrho), \quad mm_1 \frac{b + \Delta v}{\varrho + \Delta\varrho} \Delta\varrho \cdot \varphi(\varrho),$$

$$mm_1 \frac{c + \Delta w}{\varrho + \Delta\varrho} \Delta\varrho \varphi(\varrho).$$

Hierin vernachlässigen wir die höheren Potenzen der kleinen Grössen $\Delta u, \Delta v, \Delta w, \Delta\varrho$ und, indem wir über alle benachbarten m_1 summiren, erhalten wir als Componenten der Gesamtwirkung auf das Theilchen m

$$mA = m \sum m_1 \frac{a}{\varrho} \Delta\varrho \cdot \varphi(\varrho)$$

$$mB = m \sum m_1 \frac{b}{\varrho} \Delta\varrho \cdot \varphi(\varrho) \quad (1.)$$

$$m\Gamma = m \sum m_1 \frac{c}{\varrho} \Delta\varrho \cdot \varphi(\varrho).$$

Setzen wir nun den aus den Gleichungen (2.) § 23 unter Vernachlässigung der höheren Potenzen folgenden Werth

$$\Delta\varrho = \frac{a}{\varrho} \Delta u + \frac{b}{\varrho} \Delta v + \frac{c}{\varrho} \Delta w$$

ein, so finden wir

$$A = \sum m_1 \frac{a}{\varrho} \left\{ \frac{a}{\varrho} \Delta u + \frac{b}{\varrho} \Delta v + \frac{c}{\varrho} \Delta w \right\} \varphi(\varrho)$$

$$B = \sum m_1 \frac{b}{\varrho} \left\{ \frac{a}{\varrho} \Delta u + \frac{b}{\varrho} \Delta v + \frac{c}{\varrho} \Delta w \right\} \varphi(\varrho) \quad (2.)$$

$$\Gamma = \sum m_1 \frac{c}{\varrho} \left\{ \frac{a}{\varrho} \Delta u + \frac{b}{\varrho} \Delta v + \frac{c}{\varrho} \Delta w \right\} \varphi(\varrho).$$

Wenn wir hierin die Werthe von Δu , Δv , Δw aus den Gleichungen (1.) § 23 entnehmen, so müssen wir die Entwicklung so weit führen, bis Glieder erscheinen, deren Werth von Null verschieden ist:

$$\begin{aligned}
 \Delta u &= a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + c \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{b^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{c^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\
 &\quad + ab \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + ac \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + bc \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \dots \\
 \Delta v &= a \frac{\partial v}{\partial x} + b \frac{\partial v}{\partial y} + c \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{b^2}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{c^2}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \\
 &\quad + ab \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + ac \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} + bc \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} + \dots \\
 \Delta w &= a \frac{\partial w}{\partial x} + b \frac{\partial w}{\partial y} + c \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{b^2}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{c^2}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \\
 &\quad + ab \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + ac \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + bc \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} + \dots
 \end{aligned} \tag{3}$$

Die Summen (2.) sind über alle wirksamen m_1 auszudehnen oder, da die Wirkung in merklicher Entfernung verschwindet, nach a , b , c von $-\infty$ bis ∞ . Es treten also positive und negative Werthe von a , b , c in gleicher Weise auf. Da nun die Differentialquotienten von u , v , w nicht von a , b , c , sondern von x , y , z abhängen, so ist klar, dass nach dem Einsetzen der Reihenentwicklungen (3.) in die Summen (2.) nur diejenigen Glieder von Null verschiedene Werthe geben können, welche nur gerade Potenzen von a , b , c enthalten. Demnach nehmen unsere Summen folgende Gestalt an

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{2} \sum m_1 \left\{ a^4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a^2 b^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a^2 c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2a^2 b^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right. \\
 &\quad \left. + 2a^2 c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right\} \frac{\varphi(\rho)}{\rho^3} \\
 B &= \frac{1}{2} \sum m_1 \left\{ a^2 b^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + b^4 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + b^2 c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + 2a^2 b^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right. \\
 &\quad \left. + 2b^2 c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \right\} \frac{\varphi(\rho)}{\rho^3} \\
 \Gamma &= \frac{1}{2} \sum m_1 \left\{ a^2 c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b^2 c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + c^4 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + 2a^2 c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \right. \\
 &\quad \left. + 2b^2 c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} \right\} \frac{\varphi(\rho)}{\rho^3}.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Diese Gleichungen enthalten die sechs Summen

$$\begin{aligned}
 &\sum m_1 a^4 \frac{\varphi(\rho)}{\rho^3}; \quad \sum m_1 b^4 \frac{\varphi(\rho)}{\rho^3}; \quad \sum m_1 c^4 \frac{\varphi(\rho)}{\rho^3}; \\
 &\sum m_1 a^2 b^2 \frac{\varphi(\rho)}{\rho^3}; \quad \sum m_1 a^2 c^2 \frac{\varphi(\rho)}{\rho^3}; \quad \sum m_1 b^2 c^2 \frac{\varphi(\rho)}{\rho^3}
 \end{aligned}$$

Nun liegt es im Begriffe des unkrystallinischen Zustandes, dass die drei Summen der ersten Reihe unter sich gleich sind, weil alle Richtungen gleich sind; ebenso müssen wegen der Unterschiedslosigkeit der Richtungen die drei andern Summen einander gleich sein. Wir erhalten also

$$\begin{aligned} \sum m_1 a^4 \frac{\varphi(\varrho)}{\varrho^3} &= \sum m_1 b^4 \frac{\varphi(\varrho)}{\varrho^3} = \sum m_1 c^4 \frac{\varphi(\varrho)}{\varrho^3} = 2G, \\ \sum m_1 a^2 b^2 \frac{\varphi(\varrho)}{\varrho^3} &= \sum m_1 a^2 c^2 \frac{\varphi(\varrho)}{\varrho^3} = \sum m_1 b^2 c^2 \frac{\varphi(\varrho)}{\varrho^3} = 2H, \end{aligned} \quad (5.)$$

wo G und H zwei constante Grössen sind, die von der Natur des Mediums abhängen.

Durch Einführung derselben erhalten wir

$$\begin{aligned} A &= G \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + H \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right\} \\ B &= G \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + H \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \right\} \\ \Gamma &= G \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + H \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} \right\}, \end{aligned}$$

und, wenn wir wieder die räumliche Dilatation

$$\Delta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

einführen, so finden wir schliesslich als Ausdruck der an der Stelle xyz wirkenden Molekularkräfte

$$\begin{aligned} A &= (G - 2H) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + H \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + H \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2H \frac{\partial \Delta}{\partial x} \\ B &= H \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (G - 2H) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + H \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + 2H \frac{\partial \Delta}{\partial y} \\ \Gamma &= H \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + H \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (G - 2H) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + 2H \frac{\partial \Delta}{\partial z}. \end{aligned} \quad (6.)$$

§ 35. Beziehung zwischen den Constanten. Differentialgleichungen.

Die Constanten G und H sind nicht von einander unabhängig. Um die zwischen ihnen stattfindende Beziehung zu finden, gestalten wir die Summe

$$2G = \sum m_1 a^4 \frac{\varphi(\varrho)}{\varrho}$$

durch Einführung eines neuen Coordinatensystems a_1, b_1, c_1 um. Wir setzen

$$a = \alpha a_1 + \beta b_1 + \gamma c_1,$$

worin α , β , γ drei durch die Relation

$$1 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$$

verbundene Cosinus sind. Dadurch wird

$$\varrho^2 = a^2 + b^2 + c^2 = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2;$$

weiter haben wir

$$\begin{aligned} G &= \frac{1}{2} \sum m_1 (\alpha a_1 + \beta b_1 + \gamma c_1)^4 \frac{\varphi(\varrho)}{\varrho} \\ &= (\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4) G + 6(\alpha^2 \beta^2 + \beta^2 \gamma^2 + \gamma^2 \alpha^2) H, \end{aligned} \quad (2.)$$

da auch in dem neuen Coordinatensystem wegen der Gleichheit aller Richtungen

$$\begin{aligned} \sum m_1 a_1^4 \frac{\varphi(\varrho)}{\varrho} &= \sum m_1 b_1^4 \frac{\varphi(\varrho)}{\varrho} = \sum m_1 c_1^4 \frac{\varphi(\varrho)}{\varrho} = 2G \\ \sum m_1 a_1^2 b_1^2 \frac{\varphi(\varrho)}{\varrho} &= \sum m_1 b_1^2 c_1^2 \frac{\varphi(\varrho)}{\varrho} = \sum m_1 c_1^2 a_1^2 \frac{\varphi(\varrho)}{\varrho} = 2H \end{aligned}$$

ist, während die ungerade Potenzen enthaltenden Glieder fortfallen. Nun ist

$$1 = \alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 + 2(\alpha^2 \beta^2 + \beta^2 \gamma^2 + \gamma^2 \alpha^2),$$

folglich ergibt die Gleichung (2.) das einfache Verhältniss

$$G = 3H \quad (3.)$$

zwischen den beiden Constanten.

Dieses Resultat beruht, abgesehen von der Hypothese der molekularen Structur der Körper, nur auf der Voraussetzung, dass im Medium eine solche Regel- oder Unregelmässigkeit herrsche, dass eine in irgend einer Richtung gezogene Gerade immer gleich viel Theilchen trifft; die Relation gilt also für jedes homogene unkrystallinische Medium.

Setzen wir dies in die Gleichg. (6.) § 34 ein, so werden dieselben

$$\begin{aligned} A &= H \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial \Delta}{\partial x} \right\} \\ B &= H \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial \Delta}{\partial y} \right\} \\ \Gamma &= H \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial \Delta}{\partial z} \right\}. \end{aligned} \quad (4.)$$

Durch diese einfachste Form, auf welche die Ausdrücke für die Molekularkräfte zurückgeführt werden können, sind alle Erscheinungen eines homogenen und unkrystallinischen elastischen Mediums abhängig gemacht von einer einzigen Constanten.

Soll Gleichgewicht stattfinden unter dem Einfluss äusserer Kräfte X, Y, Z), so haben wir, wenn ε die Dichtigkeit des Mediums ist,

$$\begin{aligned} 0 &= \varepsilon A + X \\ 0 &= \varepsilon B + Y \\ 0 &= \varepsilon \Gamma + Z \end{aligned} \quad (5.)$$

zu setzen oder, wenn Bewegung stattfindet,

$$\begin{aligned} 0 &= \varepsilon A + X - \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ 0 &= \varepsilon B + Y - \varepsilon \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ 0 &= \varepsilon \Gamma + Z - \varepsilon \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (6.)$$

wo die Werthe aus den Gl. (4.) einzusetzen sind. So erhalten wir als allgemeine Differentialgleichungen der Bewegung eines elastischen Mediums, vorausgesetzt, dass es homogen und unkrystallinisch sei,

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \varepsilon H \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial \Delta}{\partial x} \right\} + X \\ \varepsilon \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \varepsilon H \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial \Delta}{\partial y} \right\} + Y \\ \varepsilon \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \varepsilon H \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial \Delta}{\partial z} \right\} + Z. \end{aligned} \quad (7.)$$

Mit diesen Gleichungen müssen nothwendig die Gleichungen des § 32 identisch sein, es müssen also unter den Constanten folgende Relationen

$$\begin{aligned} A - B &= 2\varepsilon H \\ A + B &= 4\varepsilon H \end{aligned}$$

bestehen, oder es muss

$$A = 3\varepsilon H, \quad B = \varepsilon H \quad (8.)$$

sein, wodurch auch die früheren Constanten auf eine einzige zurückgeführt sind.

Der Constanten H kann man noch einen Werth geben, der von a, b, c unabhängig ist. Es ist nämlich die nach ϱ innerhalb der Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ ausgeführte Summe

$$\begin{aligned} \sum m_1 \frac{\varphi(\varrho)}{\varrho^3} \varrho^4 &= \sum m_1 \frac{\varphi(\varrho)}{\varrho^3} \{a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2\} \\ &= 6G + 12H = 30H; \end{aligned}$$

also erhalten wir als theoretischen Ausdruck der Constanten

1) Genommen wie früher als die bewegende Kraft dividirt durch das Volumen, nicht durch die Masse.

$$H = \frac{1}{30} \sum (m_1 \varphi(\rho) \cdot \rho^2), \quad (9.)$$

der den Vortheil hat, unabhängig von der Lage des Coordinatensystems zu sein.

Gegen die in § 34 und 35 gegebene Ableitung der Navier'schen Differentialgleichungen ist eine Bemerkung zu machen. Es liegt in einem Punkte etwas Willkürliches, nämlich in der Annahme, dass zwei Theilchen auf einander keine Wirkung ausüben, wenn ihre Entfernung von einander sich nicht ändert. Diese Voraussetzung kann man nicht gelten lassen; denn, wenn auch die Kraft zwischen zwei Theilchen, deren Entfernung sich nicht ändert, ihrer Stärke nach ebenfalls unverändert bleibt, so kann sich doch ihre Richtung durch die Verschiebung geändert haben und mit ihr die Componenten der Wirkung. Dies ist der Fall bei allen Theilchen auf der Durchschnittsline der Kugel mit dem Radius ρ und des Ellipsoids, in das sich die Kugel durch die Verrückung verwandelt; ihre Entfernung vom Theilchen m im Mittelpunkte hat sich nicht geändert; sie haben sich aber auf der Kugel verschoben; ihre Wirkung auf m kann demnach nicht Null sein. Dies ist das Hauptbedenken gegen diese Ableitung.

Ferner hat der Weg einen andern Mangel. Er führt nicht zur Kenntniss der Druckcomponenten. Diese brauchen wir allerdings nicht zu kennen, wenn wir ein unbegrenztes Medium behandeln. Haben wir aber ein begrenztes Medium, so treten zu den Differentialgleichungen noch Bedingungen hinzu, welche die Druckcomponenten an der Oberfläche enthalten.

7. Poisson's Ableitung der allgemeinen Gleichungen.

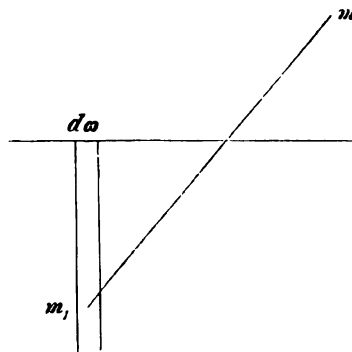
§ 36. Molekulardruckcomponenten.

Die Kenntniss der Druckcomponenten erlangen wir auf einem andern Wege, den wohl Poisson¹⁾ zuerst eingeschlagen hat, vielleicht gleichzeitig mit Cauchy²⁾. Dieser Weg unterscheidet sich von der Navier'schen Ableitung in zwei wesentlichen Punkten. Er geht erstens vom natürlichen, d. h. von demjenigen Zustande aus, in welchem weder auf die Masse noch auf die Oberfläche des Körpers äussere Kräfte wirken; zweitens führt er zu den Werthen der Druckcomponenten, aus denen die Differentialgleichungen nebst den Grenzbedingungen sich mittelst der schon bewiesenen Theoreme A und C herleiten lassen.

Wir legen durch das Medium und zwar durch den Punkt xyz eine Ebene senkrecht gegen die z -Axe. Es soll der Druck der nach der positiven Seite der z -Richtung hin gelegenen Hälfte des Mediums, welche wir kurz als die obere bezeichnen wollen, gegen die untere gefunden werden, also der Druck, dessen Componenten wir nach der in § 6 getroffenen Festsetzung durch

$$- X_z, \quad - Y_z, \quad - Z_z$$

zu bezeichnen haben. Um den auf ein an der Stelle xyz gelegenes Flächenelement $d\omega$ wirkenden Druck zu erhalten, benutzen wir das in § 5 bereits erläuterte Verfahren; wir construiren über $d\omega$ als Basis einen Canal, den wir in die untere Hälfte hinein verlängern; dann ist der auf die Basis $d\omega$ wirkende Druck nichts anderes als die Resultante aller Wirkungen, welche die im Canal enthaltene Theilchenreihe von sämtlichen Theilchen der oberen Hälfte empfängt.



1) Mém. de l'Acad. de Paris, T. 8, p. 357, 14. Avr. 1828.

2) Exerc. de math. T. 3, p. 188, 1828; T. 4, p. 129, 1829.

Wir bezeichnen ein Theilchen der oberen Hälfte mit m und seine Coordinaten im Gleichgewichtszustande durch $x + a$, $y + b$, $z + c$, ferner ein Theilchen der Molekelreihe im untern Medium mit m_1 und seine Coordinaten durch x , y , $z - d$; die Entfernung beider Theilchen von einander sei ρ , so dass

$$\rho^2 = a^2 + b^2 + (c + d)^2$$

ist; endlich nennen wir die Anziehung, welche sie in der Richtung der Verbindungslinie auf einander ausüben¹⁾,

$$mm_1\psi(\rho).$$

Dann sind die gesuchten Componenten des im natürlichen Zustande ausgeübten Druckes

$$\begin{aligned} -X_z d\omega &= \sum_d m_1 \sum_a \sum_b \sum_c m \frac{a}{\rho} \psi(\rho) \\ -Y_z d\omega &= \sum_d m_1 \sum_a \sum_b \sum_c m \frac{b}{\rho} \psi(\rho) \\ -Z_z d\omega &= \sum_d m_1 \sum_a \sum_b \sum_c m \frac{c}{\rho} \psi(\rho), \end{aligned} \quad (1.)$$

worin von den vierfachen Summationen zwei nach a und b zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ auszuführen sind, während die beiden andern sich auf die zwischen 0 und ∞ liegenden Werthe von c und d erstrecken.

Analog bilden wir weiter die Druckcomponenten nach dem Eintritt einer Verrückung, durch welche das an der Stelle xyz befindliche Theilchen an den Ort $x + u$, $y + v$, $z + w$ gelangt. Bezeichnen wir, wie früher (§ 23), die Coordinaten des Theilchens m nach der Verrückung durch $x + a + u'$, $y + b + v'$, $z + c + w'$ und ähnlich die des Theilchens m_1 durch $x + u_1$, $y + v_1$, $z - d + w_1$, so werden die Druckcomponenten

$$\begin{aligned} -X_z d\omega &= \sum_d m_1 \sum_a \sum_b \sum_c m \frac{a + u' - u_1}{\rho + \Delta\rho} \psi(\rho + \Delta\rho) \\ -Y_z d\omega &= \sum_d m_1 \sum_a \sum_b \sum_c m \frac{b + v' - v_1}{\rho + \Delta\rho} \psi(\rho + \Delta\rho) \\ -Z_z d\omega &= \sum_d m_1 \sum_a \sum_b \sum_c m \frac{c + d + w' - w_1}{\rho + \Delta\rho} \psi(\rho + \Delta\rho), \end{aligned} \quad (2.)$$

wenn die veränderte Entfernung durch die Gleichung

$$(\rho + \Delta\rho)^2 = (a + u' - u_1)^2 + (b + v' - v_1)^2 + (c + d + w' - w_1)^2 \quad (3.)$$

bestimmt wird. Hierin können wir, da a , b , c , d nur als kleine Grössen in Betracht kommen, wiederum die Potenzentwicklungen

1) Nach der Bezeichnung in § 3 ist $\psi(\rho) = \chi(\rho) - \varphi(\rho)$.

$$\begin{aligned}
 u' - u_1 &= a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + (c + d) \frac{\partial u}{\partial z} + \dots \\
 v' - v_1 &= a \frac{\partial v}{\partial x} + b \frac{\partial v}{\partial y} + (c + d) \frac{\partial v}{\partial z} + \dots \\
 w' - w_1 &= a \frac{\partial w}{\partial x} + b \frac{\partial w}{\partial y} + (c + d) \frac{\partial w}{\partial z} + \dots
 \end{aligned} \tag{4}$$

wie in § 23 eintreten lassen.

§ 37. Reduction auf dreifache Summen.

Da in den beiden Systemen von Gleichungen (1.) und (2.) die Grössen c und d nie getrennt, sondern nur als Summe vorkommen, so können die vierfachen Summationen sofort auf dreifache zurückgeführt werden.

Es ist eine Summe von der Form

$$\sum_c \sum_d F(c + d)$$

gegeben, in welchen nach den beiden Grössen c und d über Werthe zwischen 0 und ∞ summirt werden soll. Sie bezieht sich auf ein System discreter Massentheilchen, die regelmässig in der Entfernung γ von einander angeordnet sind. Schreiben wir nun die einzelnen Summanden getrennt und zwar die für jedes einzelne Theilchen der oberen Hälfte in die Summe eingehenden Terme in dieselbe Reihe, so erhalten wir, indem wir nach und nach von einem Theilchen der oberen Hälfte zum nächstfolgenden übergehen,

$$\begin{aligned}
 \sum_c \sum_d F(c + d) &= F(\gamma) + F(2\gamma) + F(3\gamma) + F(4\gamma) + \dots \\
 &\quad + F(2\gamma) + F(3\gamma) + F(4\gamma) + \dots \\
 &\quad \quad + F(3\gamma) + F(4\gamma) + \dots \\
 &\quad \quad \quad + F(4\gamma) + \dots \\
 &\quad \quad \quad \quad + \dots \\
 &= F\gamma + 2F(2\gamma) + 3F(3\gamma) + 4F(4\gamma) + \dots + nF(n\gamma) + \dots \\
 &= \sum_n nF(n\gamma) \\
 &= \sum_c \frac{c}{\gamma} F(c),
 \end{aligned} \tag{1.}$$

wo die einfache Summe ebenfalls in den Grenzen 0 und ∞ auszuführen ist.

Dasselbe Resultat würden wir in dem Falle erhalten haben, dass wir statt der Doppelsumme ein Doppelintegral gehabt hätten. Da

das Integral nichts weiter ist, als der Grenzfall der Summe, so wird ein Doppel-Integral obiger Form sich immer auf ein einfaches reduciren lassen.

Durch Benutzung dieser Methode erhalten wir statt der Gleichung (1.) § 36, wenn wir ρ die neue Bedeutung

$$\rho^2 = a^2 + b^2 + c^2 \quad (2.)$$

geben, folgende für den natürlichen Zustand geltende Gleichungen

$$\begin{aligned} - X_s &= \frac{1}{\gamma^3} \sum_c m_1 \sum_a \sum_b m a c \frac{\psi(\rho)}{\rho} \\ - Y_s &= \frac{1}{\gamma^3} \sum_c m_1 \sum_a \sum_b m b c \frac{\psi(\rho)}{\rho} \\ - Z_s &= \frac{1}{\gamma^3} \sum_c m_1 \sum_a \sum_b m c^2 \frac{\psi(\rho)}{\rho}, \end{aligned} \quad (3.)$$

wobei wir von der Bemerkung Gebrauch gemacht haben, dass nach der eingeführten Vorstellung discreter Theilchen das Flächenelement $d\omega$ dem Quadrate entspricht, dessen Seite der Abstand zwischen zwei benachbarten Theilchen ist, dass also

$$d\omega = \gamma^2$$

zu setzen ist.

Dagegen gelten nach Eintritt der Verrückungen die allgemeineren Gleichungen

$$\begin{aligned} - X_s &= \frac{1}{\gamma^3} \sum_c m_1 \sum_a \sum_b m c (a + \Delta u) \frac{\psi(\rho + \Delta\rho)}{\rho + \Delta\rho} \\ - Y_s &= \frac{1}{\gamma^3} \sum_c m_1 \sum_a \sum_b m c (b + \Delta r) \frac{\psi(\rho + \Delta\rho)}{\rho + \Delta\rho} \\ - Z_s &= \frac{1}{\gamma^3} \sum_c m_1 \sum_a \sum_b m c (c + \Delta \kappa) \frac{\psi(\rho + \Delta\rho)}{\rho + \Delta\rho}, \end{aligned} \quad (4.)$$

in welchen zur Abkürzung gesetzt ist

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{\partial u}{\partial x} a + \frac{\partial u}{\partial y} b + \frac{\partial u}{\partial z} c + \dots \\ \Delta r &= \frac{\partial r}{\partial x} a + \frac{\partial r}{\partial y} b + \frac{\partial r}{\partial z} c + \dots \\ \Delta \kappa &= \frac{\partial \kappa}{\partial x} a + \frac{\partial \kappa}{\partial y} b + \frac{\partial \kappa}{\partial z} c + \dots \end{aligned} \quad (5.)$$

$$(\rho + \Delta\rho)^2 = (a + \Delta u)^2 + (b + \Delta r)^2 + (c + \Delta \kappa)^2.$$

Ebenso sind die Componenten des Molekulardrucks gegen ein Element der beiden andern den Coordinaten parallelen Ebenen zu bilden.

§ 38. Natürlicher Zustand.

Im natürlichen Zustande, in welchem keine Kräfte von aussen auf den Körper wirken, muss jede der Druckcomponenten für sich = 0 sein.

$$\begin{aligned} X_x &= 0, & Y_y &= 0, & Z_z &= 0, \\ X_y &= Y_x = 0, & Y_z &= Z_y = 0, & Z_x &= X_z = 0. \end{aligned} \quad (1.)$$

Denn aus der Bemerkung, dass in einem homogenen Medium keine Stelle sich von einer anderen unterscheidet, ergibt sich zunächst, dass diese Grössen constant sein müssen. Weiter nehmen die Grenzbedingungen nach dem Theorem D § 11 für den natürlichen Zustand, in welchem $X' = Y' = Z' = 0$ ist, die Form

$$\begin{aligned} 0 &= X_x \cos(n, x) + X_y \cos(n, y) + X_z \cos(n, z) \\ 0 &= Y_x \cos(n, x) + Y_y \cos(n, y) + Y_z \cos(n, z) \\ 0 &= Z_x \cos(n, x) + Z_y \cos(n, y) + Z_z \cos(n, z) \end{aligned} \quad (2.)$$

für jeden Punkt der Oberfläche des Mediums an. Sie gelten also, welche Richtung auch die Normale n habe, oder welche Werthe auch die drei Cosinus haben mögen. Daraus folgt, dass in den Gleichg. (2.) jeder Factor eines Cosinus für sich verschwinden muss, dass also im natürlichen Zustande für die Oberfläche die Gleichungen (1.) gelten müssen, folglich auch für das Innere¹⁾.

Dass von den Gleichungen (1.) die drei letzten erfüllt sind, lässt sich auf den ersten Blick übersehen, weil die Ausdrücke nach den Formeln (3.) § 37 ungerade Potenzen von a, b, c enthalten. Als Resultat unserer über den natürlichen Zustand angestellten Betrachtung ergibt sich demnach, dass folgende drei Grössen = 0 sein müssen:

1) Anmerkung des Herausgebers. Will man diesen Schluss vermeiden, so kann man sich darauf beschränken, dass die drei letzten Gleichungen (1.) identisch verschwinden. Man setzt die unter (3.) § 38 verzeichneten Summen vorläufig nicht = 0, sondern betrachtet sie als Constanten. Dieselben fallen dann aus den Gleichungen (1.) § 39 nicht fort; dadurch wird der in den Gleichungen (2.) § 39 angegebene Ausdruck der Componenten um einige hinzutretende Glieder vermehrt, X_x z. B. um ein $\frac{\partial u}{\partial x}$ proportionales Glied. Dieses Glied fehlt jedoch im Z_x , welches X_x gleich sein sollte; statt seiner erscheint ein anderes mit dem Factor $\frac{\partial w}{\partial x}$. Demnach müssen die Coefficienten der hinzutretenden Glieder = 0 sein, diese sind aber nichts anderes als die unter (3.) § 38 verzeichneten Summen.

$$\begin{aligned} \sum_a \sum_b \sum_c m m_1 a^2 \frac{\psi(\varrho)}{\varrho} &= 0 \\ \sum_a \sum_b \sum_c m m_1 b^2 \frac{\psi(\varrho)}{\varrho} &= 0 \\ \sum_a \sum_b \sum_c m m_1 c^2 \frac{\psi(\varrho)}{\varrho} &= 0. \end{aligned} \quad (3.)$$

Hierin dürfen wir alle drei Summationen gleichmässig bis zu den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ ausdehnen, weil die zu summirende Function gerade Potenzen enthält, so dass der Werth der Summe für positive Werthe der Grössen a, b, c so gross ist wie für negative.

Ist das betrachtete Medium unkrystallinisch, so reduciren sich wegen der Unterschiedslosigkeit der Richtungen diese drei Gleichungen auf eine, welche wir nach Addition der drei Gleichungen in der Form

$$\sum_a \sum_b \sum_c m m_1 \varrho \psi(\varrho) = 0 \quad (4.)$$

schreiben können. Wäre uns die Function $\psi(\varrho)$ bekannt, so könnten wir aus ihr die Entfernung γ berechnen, in der die Theilchen im natürlichen Zustande von einander abstehen müssen¹⁾. Bei dem jetzigen Stande unserer Kenntnisse müssen wir uns auf den Schluss beschränken, dass die Function $\psi(\varrho)$ beim Wachsen von ϱ ihr Zeichen wechselt, weil nur dadurch die Summen $= 0$ werden können.

§ 39. Zustand nach Verrückung.

Um auch nach Eintritt einer Verrückung die Werthe der molekularen Druckcomponenten zu beurtheilen, haben wir die Gleichungen (4.) § 37 weiter zu entwickeln. Durch Benutzung der Abkürzung

$$\Psi(\varrho) = \frac{d \frac{\psi(\varrho)}{\varrho}}{d \varrho}$$

und unter Vernachlässigung der Quadrate von $\Delta u, \Delta v, \Delta w, \Delta \varrho$ bringen wir sie zunächst auf die Form

$$\begin{aligned} -X_s &= \frac{1}{\gamma^3} \sum_a m_1 \sum_b \sum_c m \left\{ ca \frac{\psi(\varrho)}{\varrho} + c \Delta u \frac{\psi(\varrho)}{\varrho} + ca \Psi(\varrho) \varrho \Delta \varrho \right\} \\ -Y_s &= \frac{1}{\gamma^3} \sum_a m_1 \sum_b \sum_c m \left\{ cb \frac{\psi(\varrho)}{\varrho} + c \Delta v \frac{\psi(\varrho)}{\varrho} + cb \Psi(\varrho) \varrho \Delta \varrho \right\} \\ -Z_s &= \frac{1}{\gamma^3} \sum_a m_1 \sum_b \sum_c m \left\{ c^2 \frac{\psi(\varrho)}{\varrho} + c \Delta w \frac{\psi(\varrho)}{\varrho} + c^2 \Psi(\varrho) \varrho \Delta \varrho \right\}. \end{aligned} \quad (1.)$$

Hierin sind die Summen, wie bisher nach a und b von $-\infty$ bis $+\infty$, nach c von 0 bis ∞ auszudehnen; ferner ist

1) Vergl. § 52.

$$\begin{aligned} \rho \Delta \varrho &= a \Delta u + b \Delta v + c \Delta w \\ \Delta u &= a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + c \frac{\partial u}{\partial z} \\ \Delta v &= a \frac{\partial v}{\partial x} + b \frac{\partial v}{\partial y} + c \frac{\partial v}{\partial z} \\ \Delta w &= a \frac{\partial w}{\partial x} + b \frac{\partial w}{\partial y} + c \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned}$$

Nach Einsetzen dieser Werthe in die Summen übersieht man, dass in jeder derselben die beiden ersten Glieder wegen der Gleichungen (3.) § 38 verschwinden müssen. Es bleibt also von jeder nur das dritte Glied und von diesem nur diejenigen Theile, in denen a und b , folglich auch c nur in geraden Potenzen vorkommen, weil alle andern Theile wegen der Ausdehnung der Summe von $-\infty$ bis $+\infty$ in der Summe Null geben müssen. Demnach erhalten wir

$$\begin{aligned} -X_x &= \frac{1}{\gamma^3} \sum_c m_1 \sum_a \sum_b m a^2 c^2 \left\{ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right\} \Psi(\varrho) \\ -Y_x &= \frac{1}{\gamma^3} \sum_c m_1 \sum_a \sum_b m b^2 c^2 \left\{ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right\} \Psi(\varrho) \\ -Z_x &= \frac{1}{\gamma^3} \sum_c m_1 \sum_a \sum_b m \left\{ a^2 c^2 \frac{\partial u}{\partial x} + b^2 c^2 \frac{\partial v}{\partial y} + c^4 \frac{\partial w}{\partial z} \right\} \Psi(\varrho). \end{aligned} \quad (2.)$$

Dehnen wir hierin alle drei Summirungen gleichmässig von $-\infty$ bis $+\infty$ aus, so verdoppelt sich ihr Werth, was wir durch Hinzufügung des Factors $\frac{1}{2}$ ausgleichen können. Wir bemerken ferner, dass γ^3 den würfelförmigen Raum bedeutet, welcher nur ein einziges Massentheilchen enthält; sind also alle Theilchen einander gleich, so ist

$$\frac{m_1}{\gamma^3} = \varepsilon$$

nichts anderes, als die Dichtigkeit des Stoffes. Somit erhalten wir, wenn wir zur Abkürzung die dreifache Summirung durch ein einfaches Σ andeuten, für alle Druckcomponenten folgende Ausdrücke

$$\begin{aligned} -X_x &= \frac{1}{2} \varepsilon \sum m \left\{ a^4 \frac{\partial u}{\partial x} + a^2 b^2 \frac{\partial v}{\partial y} + a^2 c^2 \frac{\partial w}{\partial z} \right\} \Psi(\varrho) \\ -Y_y &= \frac{1}{2} \varepsilon \sum m \left\{ b^2 a^2 \frac{\partial u}{\partial x} + b^4 \frac{\partial v}{\partial y} + b^2 c^2 \frac{\partial w}{\partial z} \right\} \Psi(\varrho) \\ -Z_z &= \frac{1}{2} \varepsilon \sum m \left\{ c^2 a^2 \frac{\partial u}{\partial x} + c^2 b^2 \frac{\partial v}{\partial y} + c^4 \frac{\partial w}{\partial z} \right\} \Psi(\varrho) \\ -X_y &= -Y_x = \frac{1}{2} \varepsilon \sum m a^2 b^2 \left\{ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right\} \Psi(\varrho) \\ -Y_z &= -Z_y = \frac{1}{2} \varepsilon \sum m b^2 c^2 \left\{ \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right\} \Psi(\varrho) \\ -Z_x &= -X_z = \frac{1}{2} \varepsilon \sum m c^2 a^2 \left\{ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right\} \Psi(\varrho). \end{aligned} \quad (3.)$$

§ 40. Gleichungen für unkrystallinische Körper.

Für nicht krystallinische Körper, in denen alle Richtungen gleichartig sind, können wir

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum m a^4 \Psi(\rho) &= \frac{1}{2} \sum m b^4 \Psi(\rho) = \frac{1}{2} \sum m c^4 \Psi(\rho) = G \\ \frac{1}{2} \sum m a^2 b^2 \Psi(\rho) &= \frac{1}{2} \sum m b^2 c^2 \Psi(\rho) = \frac{1}{2} \sum m c^2 a^2 \Psi(\rho) = H \end{aligned} \quad (1.)$$

setzen, und erhalten dadurch

$$\begin{aligned} -X_x &= \varepsilon \left\{ G \frac{\partial u}{\partial x} + H \frac{\partial v}{\partial y} + H \frac{\partial w}{\partial z} \right\} \\ -Y_y &= \varepsilon \left\{ H \frac{\partial u}{\partial x} + G \frac{\partial v}{\partial y} + H \frac{\partial w}{\partial z} \right\} \\ -Z_z &= \varepsilon \left\{ H \frac{\partial u}{\partial x} + H \frac{\partial v}{\partial y} + G \frac{\partial w}{\partial z} \right\} \\ -X_y &= -Y_x = \varepsilon H \left\{ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right\} \\ -Y_z &= -Z_y = \varepsilon H \left\{ \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right\} \\ -Z_x &= -X_z = \varepsilon H \left\{ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right\}. \end{aligned} \quad (2.)$$

Nun aber lässt sich mit den Grössen G und H dieselbe Umgestaltung vornehmen, wie wir sie in § 35 mit den gleich bezeichneten — welche, wie wir gleich sehen werden, mit den jetzt eingeführten identisch sind — ausgeführt haben. Es ist auch jetzt

$$G = 3H. \quad (3.)$$

Setzen wir noch nach Gleichung (9.) § 35

$$\varepsilon H = \frac{\varepsilon}{30} \sum m \rho^4 \Psi(\rho) = k, \quad (4.)$$

wo k eine neue, nur von der Natur des Mediums abhängende Constante bedeutet, so werden die Gleichungen (2.)

$$\begin{aligned} -X_x &= k \left\{ 2 \frac{\partial u}{\partial x} + \Delta \right\} \\ -Y_y &= k \left\{ 2 \frac{\partial v}{\partial y} + \Delta \right\} \\ -Z_z &= k \left\{ 2 \frac{\partial w}{\partial z} + \Delta \right\}, \end{aligned} \quad (5a.)$$

worin

$$\Delta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

ist, und

$$\begin{aligned}
 -X_y &= -Y_x = k \left\{ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right\} \\
 -Y_z &= -Z_y = k \left\{ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right\} \\
 -Z_x &= -X_z = k \left\{ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right\}.
 \end{aligned} \tag{5b}$$

Diese Gleichungen fallen mit den Gleichungen (7.) § 31, die wir direct aus der Analogie der Molekulardrücke und der Dilatationen ableiteten, zusammen, wenn

$$A = 3k, \quad B = k \tag{6.}$$

gesetzt wird.

Aus den obigen Gleichungen lassen sich ebenfalls wieder die Navier'schen Differentialgleichungen nach dem Theorem A § 10 ableiten:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= k \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial \Delta}{\partial x} \right\} + X \\
 \varepsilon \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= k \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial \Delta}{\partial y} \right\} + Y \\
 \varepsilon \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= k \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial \Delta}{\partial z} \right\} + Z,
 \end{aligned} \tag{7.}$$

entsprechend den Glchg. (7.) § 35.

Alle drei Wege führen demnach zu demselben Resultat. Dazu treten nach dem Theorem D § 11 folgende Bedingungen, die an der Oberfläche des Mediums erfüllt sein müssen,

$$0 = X' + X_x \cos(n, x) + X_y \cos(n, y) + X_z \cos(n, z)$$

$$0 = Y' + Y_x \cos(n, x) + Y_y \cos(n, y) + Y_z \cos(n, z)$$

$$0 = Z' + Z_x \cos(n, x) + Z_y \cos(n, y) + Z_z \cos(n, z),$$

Gleichungen, welche uns die Navier'sche Entwicklung nicht lieferte.

§ 41. Krystallinische Medien.

Diese Resultate lassen sich sehr leicht auf krystallinische Medien ausdehnen, wenigstens auf diejenigen, deren Gestalt und molekulare Structur Symmetrie in Bezug auf drei auf einander rechtwinklige Richtungen zeigen. Zu diesen Krystallen, deren Zahl sehr gross ist, gehören alle Formen des regulären, viergliedrigen, zwei- und zweigliedrigen und sechsgliedrigen Systems mit Ausnahme gewisser, hemiëdrischer Formen, bei denen die parallelen Krystallflächen fehlen, z. B. beim regulären Tetraeder. Wir nennen diese Formen die geneigtflächigen Hemiëder. Ferner findet eine solche symmetrische Vertheilung nicht mehr statt bei allen Krystallen des zwei- und eingliedrigen und des ein- und eingliedrigen Systems.

Nehmen wir zu Coordinatenaxen die Durchschnitte dieser symmetrisch theilenden Ebenen, also die krystallographischen Axen, so fallen bei der Ausführung der Summen in den Glchg. (1.) § 39, welche auch in diesem Falle gültig bleiben, wiederum diejenigen Glieder fort, welche die Grössen a , b , c in ungeraden Potenzen enthalten, weil wegen der Symmetrie jeder positive Term eines solchen Gliedes durch einen gleich grossen negativen zerstört wird. Wir erhalten also auch für die aufgezählten krystallinischen Medien die Glchg. (3.) § 39. Es sind aber nicht, wie bei unkrystallinischen Medien, nothwendiger Weise je drei der darin enthaltenen Summen unter sich gleich. Wir erhalten vielmehr durch Ausführung der Summen im Allgemeinen sechs verschiedene Constanten A , B , C , a , b , c , von denen die Druckcomponenten in folgender Weise abhängen:

$$\begin{aligned}
 -X_x &= A \frac{\partial u}{\partial x} + c \frac{\partial v}{\partial y} + b \frac{\partial w}{\partial z} \\
 -Y_y &= c \frac{\partial u}{\partial x} + B \frac{\partial v}{\partial y} + a \frac{\partial w}{\partial z} \\
 -Z_z &= b \frac{\partial u}{\partial x} + a \frac{\partial v}{\partial y} + C \frac{\partial w}{\partial z} \quad (1.) \\
 -X_y &= -Y_x = c \left\{ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right\} \\
 -Y_z &= -Z_y = a \left\{ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right\} \\
 -Z_x &= -X_z = b \left\{ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right\}.
 \end{aligned}$$

Ueber den Zusammenhang dieser Constanten unter sich können wir theoretisch nichts weiter angeben; es kann nur die experimentelle Bestimmung derselben für ein bestimmtes Medium Aufschluss darüber geben, ob ein solcher Zusammenhang existirt.

Die Differentialgleichungen werden für krystallinische Medien nach dem Theorem A § 10

$$\begin{aligned}
 0 &= X - \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2c \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 2b \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \\
 0 &= Y - \varepsilon \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + c \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + a \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + 2a \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} + 2c \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \quad (2.) \\
 0 &= Z - \varepsilon \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + C \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + 2a \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z}.
 \end{aligned}$$

Das System der Grenzbedingungen D § 11 bleibt für krystallinische Medien der Form nach ungeändert.

Die Gleichungen gelten nicht bloss für den Krystall selbst, sondern auch für den in ihm enthaltenen Lichtäther. Wir werden sie

daher anwenden, um die Gesetze der doppelten Strahlenbrechung abzuleiten. In diesem Falle vermindert sich, wie wir sehen werden, die Zahl der Constanten von 6 auf 3; um den Fresnel'schen Gesetzen der optischen Erscheinungen zu genügen, müssen wir noch drei Relationen zwischen den sechs Constanten einführen.

§ 42. Bedeutung der Constante k und ihre Beziehung zum Elasticitätsmodul.

Wir kehren zurück zu den für den speciellen Fall unkrystallinischer Medien geltenden Formeln in § 40, um uns, ehe wir in der allgemeinen Theorie weiter gehen, eine klare Vorstellung von der Bedeutung der Constante k zu bilden.

Wir nehmen einen begrenzten Raum mit Theilchen erfüllt, also einen Körper, an. Auf denselben wirken keine inneren Kräfte, also X, Y, Z sollen $= 0$ sein. Er wird aber durch einen gleichförmig wirkenden Druck D senkrecht gegen die Oberfläche comprimirt. Es handelt sich darum, den Werth der Grössen u, v, w , also das Gesetz der Dilatationen als Function der Coordinaten zu bestimmen.

Es ist leicht zu sehen, dass in diesem Falle u, v, w lineare Functionen von x, y, z sind. Wir schneiden durch eine der yz -Ebene parallele Ebene EE ein Stück O vom Körper ab, und suchen die Bedingungen des Gleichgewichts dieses Stückes O . Bezeichnen wir durch do das Flächenelement der Ebene EE und durch $d\omega$ das der äussern Oberfläche des Theils O , und verstehen ferner unter

$$\int do \text{ und } \int d\omega$$

Summen, welche über sämmtliche Elemente von EE , resp. der äussern Oberfläche von O auszudehnen sind, so werden nach dem Theorem (1.) § 14 unter der Voraussetzung, dass der Druck D constant ist, die Gleichgewichtsbedingungen von O

$$\begin{aligned} D \int \cos(n, x) d\omega + \int X_x do &= 0 \\ D \int \cos(n, y) d\omega + \int Y_x do &= 0 \\ D \int \cos(n, z) d\omega + \int Z_x do &= 0, \end{aligned} \quad (1.)$$

in denen n die Richtung der nach aussen errichteten Normale bezeichnet. Da die Ebene EE der yz -Ebene parallel liegt, so ist

$$\begin{aligned} \int d\omega \cos(n, x) &= \int do \\ \int d\omega \cos(n, y) &= 0 \\ \int d\omega \cos(n, z) &= 0, \end{aligned} \quad (2.)$$

und hieraus folgt

$$\int \{X_x + D\} do = 0, \quad \int Y_x do = 0, \quad \int Z_x do = 0.$$

Diese Gleichungen gelten, an welcher Stelle auch der Querschnitt EE durchgelegt sein mag, und ähnliche gelten für die anderen Coordinatenrichtungen; also ist für jede Stelle

$$\begin{aligned} X_x + D &= 0, & Y_y + D &= 0, & Z_z + D &= 0, \\ Y_x = Z_y &= 0, & Z_x = X_z &= 0, & X_y = Y_z &= 0. \end{aligned} \quad (4.)$$

Daraus folgt nach den Glchg. (5.) § 40

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad (5.)$$

$$\begin{aligned} k \left\{ 3 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right\} &= D \\ k \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + 3 \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right\} &= D \end{aligned} \quad (6.)$$

$$k \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + 3 \frac{\partial w}{\partial z} \right\} = D.$$

Zu diesen Bedingungen treten noch drei andere, welche enthalten, dass keine gemeinschaftliche Drehung eintritt. Dieselben werden nach den Gleichungen (6.) § 24

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} = 0. \quad (7.)$$

Aus den Glchg. (5.), (6.) und (7.) folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{D}{5k}, & \frac{\partial v}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial w}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= 0, & \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{D}{5k}, & \frac{\partial w}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= 0, & \frac{\partial v}{\partial z} &= 0, & \frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{D}{5k}. \end{aligned} \quad (8.)$$

Also haben (bei passender Wahl des Anfangspunktes der Coordinaten) die Dilatationen u, v, w folgende Werthe

$$u = \frac{D}{5k} x, \quad v = \frac{D}{5k} y, \quad w = \frac{D}{5k} z; \quad (9.)$$

→ sind, wie behauptet wurde, lineare Functionen der Coordinaten.

→ der Relation

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{D}{5k}$$

folgt, dass die Dilatation nach allen Richtungen dieselbe, dass also das Dilatationsellipsoid eine Kugel ist. Ist der Körper z. B. eine Kugel, so bleibt er auch unter einem gleichmässigen, äusseren Druck eine Kugel. War der Halbmesser vorher 1, so vergrössert er sich durch die positive Druckkraft D , die also eigentlich ein Zug ist, um die Grösse

$$\delta = \frac{D}{5k}. \quad (10.)$$

Bezeichnen wir den Elasticitätsmodul¹⁾ mit M , so wissen wir auf der andern Seite aus der Experimentalphysik, dass die durch einen allseitigen gleichförmigen Druck D hervorgebrachte Längendilatation

$$\delta = \frac{D}{M} \quad (11.)$$

ist. Es besteht demnach die einfache Relation

$$k = \frac{1}{5} M. \quad (12.)$$

Wir haben das Resultat aus den Grenzbedingungen für die Oberfläche abgeleitet und dabei die allgemeinen Differentialgleichungen (7.) § 40 unberücksichtigt gelassen. Diese erfüllen sich aber von selbst durch die Annahme linearer Functionen, da sie nur zweite Differentialquotienten enthalten.

1) Mit dieser durch Beziehung auf allseitig ausgeübten Druck definirten Elasticitätsconstante ist der in § 65 erörterte auf einseitigen Zug bezügliche Elasticitätscoefficient nicht zu verwechseln.

8. Entwicklung der Gleichungen aus dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten.

§ 43. Virtuelles Moment der Kräfte.

Zur Herleitung der Navier'schen Differentialgleichungen führt noch ein anderer Weg, auf welchem wir zugleich zur Kenntniss der an der Oberfläche des Mediums geltenden Grenzbedingungen gelangen. Diese von Carl Neumann¹⁾ auf die Elasticitätskräfte angewandte Methode beruht auf der Benutzung des Princip's der virtuellen Geschwindigkeiten.

Wir beginnen mit der Betrachtung des natürlichen Zustandes, welchen wir dadurch definiren, dass ohne Einwirkung äusserer Kräfte alle im Inneren des Körpers thätigen Molekularkräfte sich gegenseitig zerstören. Hieran schliessen wir dann die Untersuchung der Verhältnisse, welche mit dem Eintritt einer Verrückung der Theilchen gegen einander Platz greifen.

Die Hypothesen, welche wir einführen, und die Bezeichnungen, welche wir gebrauchen, sind im Wesentlichen dieselben wie früher. Die Coordinaten eines Massentheilchens m seien im natürlichen Zustande des Mediums x, y, z ; ein zweites Massentheilchen m' , welches in der Nähe des ersten im Punkte $x + a, y + b, z + c$ liegt, wirke auf dasselbe mit der Kraft

$$mm' \psi(\varrho)$$

längs der Verbindungslinie ϱ , deren Länge durch die Gleichung

$$\varrho^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

bestimmt ist, und zwar nach einem solchen Gesetze, dass $\psi(\varrho)$ verschwindet, sobald das Argument ϱ eine messbare Grösse erreicht hat. Indem wir hiernach die Summe aller auf m einwirkenden Kräfte bilden, erhalten wir für den natürlichen Zustand

$$0 = m \sum m' \frac{a}{\varrho} \psi(\varrho); \quad 0 = m \sum m' \frac{b}{\varrho} \psi(\varrho); \quad 0 = m \sum m' \frac{c}{\varrho} \psi(\varrho). \quad (1.)$$

1) Crelle's Journal für Mathematik, Band 57, S. 281. 1860.

Wenn nun nach eingetretener Verrückung das Theilchen m an die Stelle $x + u$, $y + v$, $z + w$ gelangt ist, während m' sich an die Stelle $x + a + u'$, $y + b + v'$, $z + c + w'$ begeben hat, so werden die Componenten der gesammten auf m ausgeübten Molekularwirkung

$$\begin{aligned} m \sum m' A &= m \sum m' \frac{a + \Delta u}{\varrho + \Delta \varrho} \psi(\varrho + \Delta \varrho) \\ m \sum m' B &= m \sum m' \frac{b + \Delta v}{\varrho + \Delta \varrho} \psi(\varrho + \Delta \varrho) \\ m \sum m' \Gamma &= m \sum m' \frac{c + \Delta w}{\varrho + \Delta \varrho} \psi(\varrho + \Delta \varrho), \end{aligned} \quad (2.)$$

worin zur Abkürzung, wie früher,

$$\Delta u = u' - u, \quad \Delta v = v' - v, \quad \Delta w = w' - w \quad (3.)$$

und

$$(\varrho + \Delta \varrho)^2 = (a + \Delta u)^2 + (b + \Delta v)^2 + (c + \Delta w)^2,$$

oder mit Vernachlässigung höherer Potenzen

$$\varrho \Delta \varrho = a \Delta u + b \Delta v + c \Delta w \quad (4.)$$

gesetzt ward. Mit demselben Grade der Annäherung können obige Gleichungen (2.)

$$\begin{aligned} m \sum m' A &= m \sum m' \left\{ \frac{a}{\varrho} \psi(\varrho) + \frac{\psi(\varrho)}{\varrho} \Delta u + a \Psi(\varrho) \varrho \Delta \varrho \right\} \\ m \sum m' B &= m \sum m' \left\{ \frac{b}{\varrho} \psi(\varrho) + \frac{\psi(\varrho)}{\varrho} \Delta v + b \Psi(\varrho) \varrho \Delta \varrho \right\} \\ m \sum m' \Gamma &= m \sum m' \left\{ \frac{c}{\varrho} \psi(\varrho) + \frac{\psi(\varrho)}{\varrho} \Delta w + c \Psi(\varrho) \varrho \Delta \varrho \right\} \end{aligned} \quad (5.)$$

geschrieben werden, wenn zur Abkürzung gesetzt wird

$$\Psi(\varrho) = \frac{d \psi(\varrho)}{\varrho d \varrho}.$$

Damit Gleichgewicht stattfinde, ist erforderlich, dass

$$\begin{aligned} 0 &= mX + m \sum m' A \\ 0 &= mY + m \sum m' B \\ 0 &= mZ + m \sum m' \Gamma \end{aligned} \quad (6.)$$

sei, wo X , Y , Z die Componenten der von aussen her auf die Einheit der Masse wirkenden Kräfte sind; und zwar müssen je drei solcher Gleichungen für jedes einzelne Massentheilchen erfüllt werden. Sind also N Massentheilchen vorhanden, so sind $3N$ Gleichungen

zu erfüllen. Diese $3N$ Gleichungen können wir durch eine einzige ersetzen, wenn wir sie addiren, nachdem eine jede mit einem willkürlichen Factor, den wir als unendlich klein voraussetzen, multiplicirt ist. Für die erste Gleichung eines jeden Systems sei dieser Factor δu , für die zweite δv und für die dritte δw . So erhalten wir

$$0 = \sum m \left\{ (X + \sum m' A) \delta u + (Y + \sum m' B) \delta v + (Z + \sum m' \Gamma) \delta w \right\}, \quad (7.)$$

wo die einfachen Summationen über alle Massentheilchen des Mediums m , die Doppelsummen über alle m und m' auszuführen sind. Diese Gleichung stellt das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten dar, wenn den Grössen δu , δv , δw die Bedeutung untergelegt wird, dass sie die Componenten der durch die wirkenden Kräfte hervorgebrachten virtuellen Verrückungen repräsentiren.

Die weitere Entwicklung beschäftigt sich mit der Ausführung der angedeuteten Summationen. Wir behandeln zunächst die Doppelsumme

$$\sum m \sum m' A \delta u,$$

mit welcher wir eine kleine, aber wichtige Transformation vornehmen. In dieser Summe, welche zweimal über das ganze Medium auszuführen ist, kommt sowohl die Wirkung von m' auf m , als auch die von m auf m' vor, deren Werth sich nur durch das Vorzeichen von jener unterscheidet. Fassen wir beide zusammen, so erhält dadurch die obige Summe die Form¹⁾

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum \sum m m' A (\delta u - \delta u') &= \frac{1}{2} \sum \sum m m' A \delta (u - u') \\ &= -\frac{1}{2} \sum \sum m m' A \delta \Delta u \end{aligned} \quad (8.)$$

und es wird, wenn wir die gleiche Transformation auch auf B und Γ ausdehnen, die Gl. (7.)

$$0 = \sum m \left\{ X \delta u - \frac{1}{2} \sum m' A \delta \Delta u + Y \delta v - \frac{1}{2} \sum m' B \delta \Delta v + Z \delta w - \frac{1}{2} \sum m' \Gamma \delta \Delta w \right\}, \quad (9.)$$

endlich nach Einsetzen der Werthe von A, B, Γ aus den Glchg. (5.)

1) Vergl. F. Neumann, Einl. in die theor. Physik. S. 195.

$$\begin{aligned}
0 &= \sum m \{ X\delta u + Y\delta v + Z\delta w \} \\
&- \frac{1}{2} \sum \sum m m' \frac{\psi(\varrho)}{\varrho} \{ a\delta\Delta u + b\delta\Delta v + c\delta\Delta w \} \\
&- \frac{1}{2} \sum \sum m m' \frac{\psi(\varrho)}{\varrho} \{ \Delta u\delta\Delta u + \Delta v\delta\Delta v + \Delta w\delta\Delta w \} \\
&- \frac{1}{2} \sum \sum m m' \Psi(\varrho) \varrho \Delta \varrho \{ a\delta\Delta u + b\delta\Delta v + c\delta\Delta w \}.
\end{aligned} \tag{10.}$$

Dieser Ausdruck lässt sich dadurch, dass er als vollständige Variation eines anderen aufgefasst werden kann, bedeutend vereinfachen. Unter Rücksicht auf die Gleichung (4.) erhalten wir

$$\begin{aligned}
0 &= \sum m \{ X\delta u + Y\delta v + Z\delta w \} - \frac{1}{2} \delta \sum \sum m m' \psi(\varrho) \Delta \varrho \\
&- \frac{1}{4} \delta \sum \sum m m' \frac{\psi(\varrho)}{\varrho} \{ (\Delta u)^2 + (\Delta v)^2 + (\Delta w)^2 \} \\
&- \frac{1}{4} \delta \sum \sum m m' \Psi(\varrho) (\varrho \Delta \varrho)^2.
\end{aligned} \tag{11.}$$

Rühren die Componenten X, Y, Z von Potentialkräften her, ist also

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad Y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad Z = -\frac{\partial V}{\partial z}, \tag{12.}$$

so können wir die Gleichung (11.) schreiben:

$$0 = \delta \sum m V + \frac{1}{4} \delta \left\{ \begin{aligned} &2 \sum \sum m m' \frac{\psi(\varrho)}{\varrho} (a\Delta u + b\Delta v + c\Delta w) \\ &+ \sum \sum m m' \frac{\psi(\varrho)}{\varrho} ((\Delta u)^2 + (\Delta v)^2 + (\Delta w)^2) \\ &+ \sum \sum m m' \Psi(\varrho) (a\Delta u + b\Delta v + c\Delta w)^2 \end{aligned} \right\}. \tag{13.}$$

In dieser Form ist der Sinn des Ausdrucks: Das Gesamtpotential der auf den elastischen Körper wirkenden äusseren und Molekular-Kräfte ist ein Minimum.

§ 44. Transformation der Summen für ein unkrystallinisches Medium.

Die hierin noch enthaltenen drei Klassen von Summen transformiren wir durch Einsetzen der Werthe von $\Delta u, \Delta v, \Delta w$ aus den Gleichg. (1.) § 23, wobei wir nur die ersten Glieder berücksichtigen. Zunächst ist

$$\begin{aligned}
&2 \sum \sum m m' \frac{\psi(\varrho)}{\varrho} a \Delta u \\
&= 2 \sum \sum m m' \frac{\psi(\varrho)}{\varrho} \left\{ a^2 \frac{\partial u}{\partial x} + ab \frac{\partial u}{\partial y} + ac \frac{\partial u}{\partial z} \right\}.
\end{aligned}$$

Wenn wir die Voraussetzung, dass die Structur des Mediums in Bezug auf die drei rechtwinkligen Coordinatenebenen symmetrisch

sei, wiederum einführen, so verschwinden alle Summen, welche ungerade Potenzen von a, b, c enthalten, und es wird

$$2 \sum \sum m m' \frac{\psi(\varrho)}{\varrho} a \Delta u = 2 \sum \sum m m' \frac{\psi(\varrho)}{\varrho} a^3 \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Also wird die erste der in Gl. (11.) und (13.) vorkommenden Molekularsummen

$$\begin{aligned} & 2 \sum \sum m m' \frac{\psi(\varrho)}{\varrho} \{a \Delta u + b \Delta v + c \Delta w\} \\ &= 2 \sum \sum m m' \frac{\psi(\varrho)}{\varrho} \left\{ a^3 \frac{\partial u}{\partial x} + b^3 \frac{\partial v}{\partial y} + c^3 \frac{\partial w}{\partial z} \right\}. \end{aligned} \quad (1.)$$

Nehmen wir noch an, das Medium sei unkrystallinisch, so werden die Richtungen a, b, c unterschiedslos; mithin setzen wir

$$p = \sum m' a^2 \frac{\psi(\varrho)}{\varrho} = \sum m' b^2 \frac{\psi(\varrho)}{\varrho} = \sum m' c^2 \frac{\psi(\varrho)}{\varrho} \quad (2.)$$

oder durch Addition aller drei Werthe

$$3p = \sum m' \varrho \psi(\varrho). \quad (2')$$

Durch Einführung dieser Grösse wird

$$\begin{aligned} & 2 \sum \sum m m' \frac{\psi(\varrho)}{\varrho} \{a \Delta u + b \Delta v + c \Delta w\} \\ &= 2 \sum m p \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right\}. \end{aligned} \quad (3.)$$

Ebenso einfach lässt sich die zweite Summe transformiren. Es wird, da nur die geraden Potenzen von a, b, c zu berücksichtigen sind,

$$\begin{aligned} & \sum \sum m m' \frac{\psi(\varrho)}{\varrho} \{(\Delta u)^2 + (\Delta v)^2 + (\Delta w)^2\} \\ &= \sum m p \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right\}. \end{aligned} \quad (4.)$$

Auf dieselbe Weise wird die dritte Summe der Gl. (11.) oder (13.)

$$\begin{aligned} & \sum \sum m m' \Psi(\varrho) (a \Delta u + b \Delta v + c \Delta w)^2 \\ &= \sum \sum m m' \Psi(\varrho) \left\{ \left(a^3 \frac{\partial u}{\partial x} + b^3 \frac{\partial v}{\partial y} + c^3 \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right. \\ & \quad \left. + a^2 b^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + b^2 c^2 \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + c^2 a^2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right\}. \end{aligned} \quad (5.)$$

Wir setzen, wie in § 39, für das unkrystallinische Medium

$$\begin{aligned} 2G &= \sum m' a^4 \Psi(\rho) = \sum m' b^4 \Psi(\rho) = \sum m' c^4 \Psi(\rho) \\ 2H &= \sum m' a^2 b^2 \Psi(\rho) = \sum m' b^2 c^2 \Psi(\rho) = \sum m' c^2 a^2 \Psi(\rho), \end{aligned}$$

so dass nach § 35 auch

$$\begin{aligned} G &= 3H, \\ G &= \frac{1}{10} \sum m' \rho^4 \Psi(\rho), \quad H = \frac{1}{30} \sum m' \rho^4 \Psi(\rho) \end{aligned} \quad (6.)$$

angenommen werden kann. Dann ist

$$\begin{aligned} &\sum \sum m m' \Psi(\rho) (a \Delta u + b \Delta v + c \Delta w)^2 \\ &= 2 \sum m \left\{ (G - H) \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] \right. \\ &+ H \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] \right\}. \end{aligned}$$

Damit sind sämmtliche in Gl. (11.) § 43 vorkommende Summationen nach m' ausgeführt. Durch Einsetzen der gefundenen Werthe wird

$$\begin{aligned} 0 &= \sum m \{ X \delta u + Y \delta v + Z \delta w \} \\ &- \frac{1}{2} \delta \left\{ \begin{aligned} &\sum m p \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right\} \\ &+ \frac{1}{2} \sum m p \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right\} \\ &+ \sum m (G - H) \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right\} \\ &+ \sum m H \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right\} \end{aligned} \right\}. \quad (7.) \end{aligned}$$

Bei Ausführung der bisher betrachteten Summen haben wir uns wohl gehütet, statt dieser Summen Integrale einzuführen, da die zu summirenden Functionen nicht allein innerhalb äusserst kleiner Intervalle in hohem Grade ihren Werth, sondern auch ihr Vorzeichen wechseln. Bei den noch bleibenden Summen verhält es sich anders.

Diese dürfen wir in Integrale verwandeln. Denn die zu summirenden Functionen u, v, w, p, G, H erleiden keine solchen Sprünge, wie bei der ersten Summirung die Function $\psi(\rho)$.

In der Einheit des Volumens befinde sich die Anzahl N von Massentheilchen; dann ist die in der Volumeneinheit befindliche Masse

$$Nm = \varepsilon$$

gleich der constanten Dichtigkeit. Wir theilen darauf die Volumeneinheit in N Volumenelemente, so dass

$$N dx dy dz = 1$$

und ersetzen m durch

$$m = \varepsilon dx dy dz$$

und dabei zugleich die Summation durch ein dreifaches Integral über den Raum des Körpers:

$$\begin{aligned} 0 &= \iiint dx dy dz \{ X\delta u + Y\delta v + Z\delta w \} \\ &- \frac{1}{2} \delta \iiint dx dy dz p \left\{ 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right\} \\ &- \frac{1}{2} \delta \iiint dx dy dz \left\{ (G - H) \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right\} \right. \\ &\quad \left. + H \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right\} \right\}. \end{aligned} \quad (8.)$$

§ 45. Betrachtung des natürlichen Zustandes.

Die weitere Behandlung der Integrale führen wir zunächst für den Fall durch, dass die äusseren Kräfte

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0$$

sind, dass sich also das Medium im natürlichen Zustande befindet. Dann sind auch die Verrückungen

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0,$$

nicht aber die virtuellen Verschiebungen $\delta u, \delta v, \delta w$. Demnach bleibt von der Gleichung (8.) nur übrig

$$\begin{aligned} 0 &= \delta \iiint dx dy dz p \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ &= \iiint dx dy dz p \left(\frac{\partial \delta u}{\partial x} + \frac{\partial \delta v}{\partial y} + \frac{\partial \delta w}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (1.)$$

Durch partielle Integration jedes Theiles für sich wird

$$\begin{aligned} 0 &= \int \int dy dz [p \delta u] - \int \int \int dx dy dz \frac{\partial p}{\partial x} \delta u \\ &+ \int \int dx dz [p \delta v] - \int \int \int dx dy dz \frac{\partial p}{\partial y} \delta v \\ &+ \int \int dx dy [p \delta w] - \int \int \int dx dy dz \frac{\partial p}{\partial z} \delta w, \end{aligned}$$

wo die ersten Integrale sich nur auf die Grenzwerte der zu integrierenden Functionen beziehen, also sich über die Oberfläche des Körpers erstrecken. Durch Einführung des Oberflächenelements $d\omega$ und der Winkel der nach aussen gerichteten Normale n der Oberfläche gegen die positiven Richtungen der Coordinaten wird

$$\begin{aligned} 0 &= \int d\omega \{ \bar{\delta u} \cos(n, x) + \bar{\delta v} \cos(n, y) + \bar{\delta w} \cos(n, z) \} \bar{p} \\ &- \int \int \int dx dy dz \left\{ \frac{\partial p}{\partial x} \delta u + \frac{\partial p}{\partial y} \delta v + \frac{\partial p}{\partial z} \delta w \right\}, \end{aligned} \quad (2.)$$

wo das erste Integral über die ganze Oberfläche auszudehnen ist, und wo die horizontalen Striche bedeuten, dass den so bezeichneten Grössen diejenigen Werthe beizulegen sind, die ihnen an der Oberfläche zukommen.

Ueber das zweite Integral, das sich auf den ganzen Raum des Körpers bezieht, ist zu bemerken, dass die zu integrierende Function nur für solche Stellen Werthe hat, die der Oberfläche sehr nahe liegen. Denn wegen der Eigenschaft der Function $\psi(\rho)$, für endliche Argumente zu verschwinden, erreicht die Summe p für endliche Entfernung von der Oberfläche des Körpers einen durch das ganze innere Medium constanten Grenzwert (\bar{p}). Für einen Punkt der Oberfläche hat p den Werth

$$\bar{p} = \frac{1}{2}(p). \quad (3.)$$

Denn, wie (p) eine Summe über den Raum einer Kugel mit endlichem oder unendlich grossem Radius ist, ebenso ist \bar{p} dieselbe Summe über den Raum der Halbkugel, welche, da die zu summirende Function nur vom Radius abhängt, den halben Werth der Summe über die ganze Kugel hat. Ganz dasselbe gilt für die Functionen G und H . Es ist mit gleicher Bezeichnung

$$\bar{G} = \frac{1}{2}(G), \quad \bar{H} = \frac{1}{2}(H), \quad (4.)$$

was wir später verwerthen werden.

Indem wir uns zur Gl. (2.) zurückwenden, bemerken wir, dass dieselbe wegen der vollkommenen Willkürlichkeit der Functionen

δu , δv , δw nur erfüllt wird, wenn für jeden Punkt in der Oberfläche

$$\bar{p} = 0$$

und für jeden Punkt unter der Oberfläche

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

ist. Es muss also auch sein

$$(p) = 0$$

und überhaupt

$$p = 0. \quad (4.)$$

Es fällt demnach auch in der allgemeinen Gl. (8.) § 44 das von p abhängige Integral fort. Es bleibt nur in dem von G und H abhängigen Theile die Variation auszuführen, was keine Schwierigkeit mehr hat.

§ 46. Entwicklung der Differentialgleichungen.

Vorher verallgemeinern und ergänzen wir die Gleichung (8.) § 44 durch die Annahme, dass auch auf die Oberfläche des Körpers ein Druck ausgeübt werde, dessen Componenten, bezogen auf die Einheit der Fläche, wiederum durch

$$X', \quad Y', \quad Z'$$

bezeichnet werden mögen. So wird

$$\begin{aligned} 0 = & \iiint dx dy dz \{ X\delta u + Y\delta v + Z\delta w \} \\ & + \int d\omega \{ X'\bar{\delta u} + Y'\bar{\delta v} + Z'\bar{\delta w} \} \\ & - \frac{1}{2}\delta \iiint dx dy dz \left\{ (G - H) \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 \right\} \right. \\ & \left. + H \left\{ \Delta^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 \right\} \right\}, \end{aligned} \quad (1.)$$

wo die Grössen $d\omega$, $\bar{\delta u}$, $\bar{\delta v}$, $\bar{\delta w}$ die schon gebrauchte Bedeutung haben, und zur Abkürzung geschrieben ist:

$$\Delta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (2.)$$

Der von δu abhängige Theil der totalen Variation des letzten Integrals wird

$$2 \iiint dx dy dz \left\{ \left((G - H) \frac{\partial u}{\partial x} + H \Delta \right) \frac{\partial \delta u}{\partial x} + H \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial \delta u}{\partial y} \right. \\ \left. + H \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \frac{\partial \delta u}{\partial z} \right\} \quad (3.)$$

und durch partielle Integration des ersten Gliedes nach x , des zweiten nach y , des dritten nach z

$$2 \iint d\omega \left\{ \left((\bar{G} - \bar{H}) \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{H} \bar{\Delta} \right) \cos(n, x) + \bar{H} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \cos(n, y) \right. \\ \left. + \bar{H} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right) \cos(n, z) \right\} \bar{\delta u} \\ - 2 \iiint dx dy dz \left\{ (G - H) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + H \frac{\partial \Delta}{\partial x} + H \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right. \\ \left. + H \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right\} \delta u \quad (4.) \\ - 2 \iiint dx dy dz \left\{ \frac{\partial \cdot (G - H)}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial x} \Delta + \frac{\partial H}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right. \\ \left. + \frac{\partial H}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right\} \delta u.$$

Das erste dieser drei Integrale bezieht sich auf die Oberfläche, das zweite auf den ganzen innern Raum, das dritte hat, da G und H im Innern constant sind, nur Werthe für eine unmittelbar unter der Oberfläche gelegene Schicht, deren Dicke kleiner als jede mikroskopische Grösse ist. Analog gebildete drei Integrale erhält man für den von δv und δw abhängenden Theil der totalen Variation.

Setzt man die so erhaltenen neun Integrale in die Gl. (1.), so findet man eine Formel, in welcher die willkürlichen Functionen δu , δv , δw lediglich als Factoren in erster Potenz auftreten. Die Formel kann nur dadurch erfüllt werden, dass jede der mit den virtuellen Verrückungen multiplicirten Grössen für sich verschwindet; sie zerfällt auf diese Weise in mehrere Gleichungen, aber nicht bloss in drei, sondern in neun Gleichungen, weil die virtuellen Verrückungen im Innern des Körpers δu , δv , δw nicht bloss von denen der Oberfläche $\bar{\delta u}$, $\bar{\delta v}$, $\bar{\delta w}$ unabhängig sind, sondern auch von den Werthen, welche in der unter der Oberfläche liegenden sehr dünnen Schicht gelten. So erhalten wir neun Gleichungen, von denen drei sich auf den inneren von der Oberfläche entfernten Theil des Körpers beziehen, drei auf die dünne oberflächliche Schicht und drei auf die Oberfläche selbst. Die drei ersteren werden

$$\begin{aligned}
0 &= X + (G - H) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + H \frac{\partial \Delta}{\partial x} + H \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\
&\quad + H \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\
0 &= Y + (G - H) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + H \frac{\partial \Delta}{\partial y} + H \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\
&\quad + H \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\
0 &= Z + (G - H) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + H \frac{\partial \Delta}{\partial z} + H \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\
&\quad + H \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right),
\end{aligned} \tag{5.}$$

worin G und H die ihnen im Innern zukommenden constanten Werthe annehmen.

Nach einer kleinen Umgestaltung erhalten wir, indem wir zugleich, um den allgemeineren Fall der Bewegung mit zu berücksichtigen, das d'Alembert'sche Princip zur Anwendung bringen,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= (G - 3H) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + H \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial \Delta}{\partial x} \right\} + X \\
\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= (G - 3H) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + H \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial \Delta}{\partial y} \right\} + Y \\
\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= (G - 3H) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + H \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial \Delta}{\partial z} \right\} + Z.
\end{aligned} \tag{6.}$$

Aus diesen Gleichungen verschwindet noch das erste von G abhängende Glied, wenn wir die Relation (6.) § 44 einführen. Die Formeln befinden sich, abgesehen von einer geringen Aenderung in der Bedeutung der Grössen X, Y, Z , in vollkommener Uebereinstimmung mit den Navier'schen Differentialgleichungen (7.) § 35 und (7.) § 40.

§ 47. Allgemeine Untersuchung der Kräftefunction.

Dagegen finden wir für die Oberflächenbedingungen, welche entstehen, indem die Factoren von $\bar{\delta}u, \bar{\delta}v, \bar{\delta}w$ der Null gleichgesetzt werden, keine Uebereinstimmung mit den auf anderem Wege abgeleiteten Gleichungen. Wir erhalten in denselben die Factoren \bar{G} und \bar{H} statt (G) und (H) oder statt $2\bar{G}$ und $2\bar{H}$. Zudem entsteht eine Unsicherheit über die Art und Weise, wie die für die oberflächliche dünne Schicht geltenden Gleichungen zu benutzen sind.

Der Grund hiervon liegt darin, dass wir in § 44 bei der Einführung der Werthe von $\Delta u, \Delta v, \Delta w$ in die Gl. (11.) § 43 alle die-

jenigen Summen = 0 gesetzt haben, welche ungerade Potenzen von a, b, c enthielten. Dies ist für jeden Punkt, der nicht nahe an der Oberfläche liegt, streng richtig, dagegen nicht für solche, die der Oberfläche selbst oder der unmittelbar unter ihr befindlichen dünnen Schicht angehören. Die beiden ersten Integrale der Gl. (4.) § 46 und der entsprechenden von δv und δw abhängenden sind also nicht vollständig, sondern es fehlen Glieder, die nicht Null zu sein brauchen. Ueber diese Glieder werden wir im Folgenden eine Untersuchung anstellen, die zwar nicht auf die Strengste Anspruch machen kann, mit welcher wir die Differentialgleichungen für das Innere abgeleitet haben, die indess für die meisten speciellen Fälle vollständig zu rechtfertigen ist. Wir werden nämlich von den Vorgängen in jener unendlich dünnen Schicht abstrahiren. Dies ist ohne Zweifel in den vorzugsweise mit der Theorie verfolgten Beispielen erlaubt; doch giebt es Erscheinungen, z. B. die Dispersion des Lichts und die Fluorescenz, für welche dies nicht gestattet ist. Diese bleiben also von der Betrachtung ausgeschlossen.

Ausser den Summen p, G, H treten in dem vollständigen Ausdruck, wie er aus der Gl. (11.) § 43 sich ergibt, wenn man alle Glieder berücksichtigt, noch eine Reihe von Summen auf, zunächst

$$\begin{aligned} p_{11} &= \sum m_1 a^2 \frac{\psi(\varrho)}{\varrho} & p_{12} &= \sum m_1 a b \frac{\psi(\varrho)}{\varrho} & p_{13} &= \sum m_1 a c \frac{\psi(\varrho)}{\varrho} \\ p_{21} &= \sum m_1 b a \frac{\psi(\varrho)}{\varrho} & p_{22} &= \sum m_1 b^2 \frac{\psi(\varrho)}{\varrho} & p_{23} &= \sum m_1 b c \frac{\psi(\varrho)}{\varrho} \\ p_{31} &= \sum m_1 c a \frac{\psi(\varrho)}{\varrho} & p_{32} &= \sum m_1 c b \frac{\psi(\varrho)}{\varrho} & p_{33} &= \sum m_1 c^2 \frac{\psi(\varrho)}{\varrho}, \end{aligned} \quad (1.)$$

wo

$$p_{12} = p_{21}, \quad p_{13} = p_{31}, \quad p_{23} = p_{32},$$

und für unkrystallinische Medien, doch nur für Punkte im Innern,

$$\begin{aligned} p_{11} &= p_{22} = p_{33} = p \\ p_{12} &= p_{13} = p_{23} = 0 \end{aligned}$$

ist; ferner

$$\begin{aligned} 2G_1 &= \sum m' a^4 \Psi(\varrho) & 2G_2 &= \sum m' b^4 \Psi(\varrho) & 2G_3 &= \sum m' c^4 \Psi(\varrho) \\ 2G_{12} &= \sum m' a^3 b \Psi(\varrho) & 2G_{23} &= \sum m' b^3 c \Psi(\varrho) & 2G_{31} &= \sum m' c^3 a \Psi(\varrho) \\ 2G_{21} &= \sum m' a b^3 \Psi(\varrho) & 2G_{32} &= \sum m' b c^3 \Psi(\varrho) & 2G_{13} &= \sum m' a^3 c \Psi(\varrho) \\ 2H_1 &= \sum m' b^2 c^2 \Psi(\varrho) & 2H_2 &= \sum m' c^2 a^2 \Psi(\varrho) & 2H_3 &= \sum m' a^2 b^2 \Psi(\varrho) \\ 2I_1 &= \sum m' a^2 b c \Psi(\varrho) & 2I_2 &= \sum m' a b^2 c \Psi(\varrho) & 2I_3 &= \sum m' a b c^2 \Psi(\varrho), \end{aligned} \quad (2.)$$

welche Grössen ebenfalls für unkrystallinische Medien und für Punkte im Inneren durch die Relationen

$$\begin{aligned} G_1 &= G_2 = G_3 = (G) \\ G_{12} &= G_{21} = G_{23} = G_{32} = G_{31} = G_{13} = 0 \\ H_1 &= H_2 = H_3 = (H) \\ I_1 &= I_2 = I_3 = 0 \end{aligned} \quad (2^a)$$

verbunden sind. An Punkten, welche sehr nahe an der Oberfläche liegen, haben wir dagegen für alle diese Functionen ungleiche Werthe einzuführen, da die Ausdehnung der Summationen nach a , b , c verschieden sein kann.

Unsere Untersuchung wird auf zwei besondere Punkte gerichtet sein. Wir werden zunächst nachweisen, dass, wenn auf die Aenderung der Constanten in der Nähe der Oberfläche Rücksicht genommen wird, ebenfalls diejenigen Glieder fortfallen, welche p enthalten, sowie diejenigen, in denen ungerade Potenzen von a , b , c vorkommen, dass also die sich unmittelbar aus dem Vorigen ergebenden Oberflächenbedingungen der Anzahl der Glieder nach vollständig sind. Zweitens werden wir zeigen, dass wir bei der Herleitung dieser Oberflächenbedingungen verfahren können, als seien die Functionen G und H überall constant.

Der vollständige Ausdruck der Variation der Kräftefunction ist nach Gl. (11.) § 43 unter Hinzufügung des in Gl. (1.) § 46 eingeführten über die Oberfläche sich erstreckenden Integrals

$$\begin{aligned} 0 &= \left\{ \begin{aligned} &\sum m(X\delta u + Y\delta v + Z\delta w) \\ &+ \varepsilon \int d\omega \{X'\delta u + Y'\delta v + Z'\delta w\} \end{aligned} \right\} \\ &- \frac{1}{2} \delta \left\{ \begin{aligned} &2 \sum \sum m m' \frac{\psi(\rho)}{\rho} (a\Delta u + b\Delta v + c\Delta w) \\ &+ \sum \sum m m' \frac{\psi(\rho)}{\rho} \{(\Delta u)^2 + (\Delta v)^2 + (\Delta w)^2\} \\ &+ \sum \sum m m' \frac{\psi(\rho)}{\rho} (a\Delta u + b\Delta v + c\Delta w)^2 \end{aligned} \right\}. \end{aligned} \quad (3.)$$

Nun ist nach den Gleichg. (1.) § 23

$$\begin{aligned} \Delta u &= a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + c \frac{\partial u}{\partial z} \\ \Delta v &= a \frac{\partial v}{\partial x} + b \frac{\partial v}{\partial y} + c \frac{\partial v}{\partial z} \\ \Delta w &= a \frac{\partial w}{\partial x} + b \frac{\partial w}{\partial y} + c \frac{\partial w}{\partial z}, \end{aligned} \quad (4.)$$

also ist

$$\begin{aligned} a\Delta u + b\Delta v + c\Delta w &= a^2 \frac{\partial u}{\partial x} + b^2 \frac{\partial v}{\partial y} + c^2 \frac{\partial w}{\partial z} + ab \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ &\quad + bc \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + ca \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ (\Delta u)^2 + (\Delta v)^2 + (\Delta w)^2 &= a^2 \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\} \\ &\quad + 2ab \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right\} \\ &\quad + b^2 \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} \quad (5.) \\ &\quad + 2bc \left\{ \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \right\} \\ &\quad + c^2 \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right\} \\ &\quad + 2ca \left\{ \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x} \right\}. \end{aligned}$$

Setzen wir diese Werthe in die Gl. (3.) und benutzen wir die in den Glchg. (1.) und (2.) gegebenen Abkürzungen, führen wir ferner, wie in § 44, für die zweite Summe ein dreifaches Integral ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= \iiint dx dy dz \{ X\delta u + Y\delta v + Z\delta w \} \quad (6.) \\ &\quad + \int d\omega \{ X'\delta \bar{u} + Y'\delta \bar{v} + Z'\delta \bar{w} \} - \frac{1}{2} \delta P - \frac{1}{2} \delta Q - \delta R, \end{aligned}$$

worin die Grössen P , Q , R folgende Bedeutung haben:

$$\begin{aligned} \delta P &= \iiint dx dy dz \left\{ p_{11} \frac{\partial \delta u}{\partial x} + p_{12} \frac{\partial \delta u}{\partial y} + p_{13} \frac{\partial \delta u}{\partial z} \right. \\ &\quad + p_{12} \frac{\partial \delta v}{\partial x} + p_{22} \frac{\partial \delta v}{\partial y} + p_{23} \frac{\partial \delta v}{\partial z} \quad (7.) \\ &\quad \left. + p_{13} \frac{\partial \delta w}{\partial x} + p_{23} \frac{\partial \delta w}{\partial y} + p_{33} \frac{\partial \delta w}{\partial z} \right\}. \end{aligned}$$

Setzen wir ferner zur Abkürzung

$$\begin{aligned} u_1 &= p_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + p_{12} \frac{\partial u}{\partial y} + p_{13} \frac{\partial u}{\partial z} & v_1 &= p_{11} \frac{\partial v}{\partial x} + p_{12} \frac{\partial v}{\partial y} + p_{13} \frac{\partial v}{\partial z} \\ u_2 &= p_{12} \frac{\partial u}{\partial x} + p_{22} \frac{\partial u}{\partial y} + p_{23} \frac{\partial u}{\partial z} & v_2 &= p_{12} \frac{\partial v}{\partial x} + p_{22} \frac{\partial v}{\partial y} + p_{23} \frac{\partial v}{\partial z} \\ u_3 &= p_{13} \frac{\partial u}{\partial x} + p_{23} \frac{\partial u}{\partial y} + p_{33} \frac{\partial u}{\partial z} & v_3 &= p_{13} \frac{\partial v}{\partial x} + p_{23} \frac{\partial v}{\partial y} + p_{33} \frac{\partial v}{\partial z} \\ w_1 &= p_{11} \frac{\partial w}{\partial x} + p_{12} \frac{\partial w}{\partial y} + p_{13} \frac{\partial w}{\partial z} & & \\ w_2 &= p_{12} \frac{\partial w}{\partial x} + p_{22} \frac{\partial w}{\partial y} + p_{23} \frac{\partial w}{\partial z} & & \\ w_3 &= p_{13} \frac{\partial w}{\partial x} + p_{23} \frac{\partial w}{\partial y} + p_{33} \frac{\partial w}{\partial z}, & & \quad (8.) \end{aligned}$$

so wird ebenso

$$\begin{aligned} \delta Q = \iiint dx dy dz \left\{ u_1 \frac{\partial \delta u}{\partial x} + u_2 \frac{\partial \delta u}{\partial y} + u_3 \frac{\partial \delta u}{\partial z} \right. \\ + v_1 \frac{\partial \delta v}{\partial x} + v_2 \frac{\partial \delta v}{\partial y} + v_3 \frac{\partial \delta v}{\partial z} \\ \left. + w_1 \frac{\partial \delta w}{\partial x} + w_2 \frac{\partial \delta w}{\partial y} + w_3 \frac{\partial \delta w}{\partial z} \right\}. \end{aligned} \quad (9.)$$

Endlich erhalten wir

$$\begin{aligned} \delta R = \iiint dx dy dz \left\{ U_{11} \frac{\partial \delta u}{\partial x} + U_{12} \frac{\partial \delta u}{\partial y} + U_{13} \frac{\partial \delta u}{\partial z} \right. \\ + U_{12} \frac{\partial \delta v}{\partial x} + U_{22} \frac{\partial \delta v}{\partial y} + U_{23} \frac{\partial \delta v}{\partial z} \\ \left. + U_{13} \frac{\partial \delta w}{\partial x} + U_{23} \frac{\partial \delta w}{\partial y} + U_{33} \frac{\partial \delta w}{\partial z} \right\}, \end{aligned} \quad (10.)$$

wenn wir bezeichnen

$$\begin{aligned} U_{11} &= G_1 \frac{\partial u}{\partial x} + H_3 \frac{\partial v}{\partial y} + H_2 \frac{\partial w}{\partial z} + I_1 \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ &\quad + G_{13} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) + G_{12} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ U_{22} &= H_3 \frac{\partial u}{\partial x} + G_2 \frac{\partial v}{\partial y} + H_1 \frac{\partial w}{\partial z} + G_{23} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ &\quad + I_2 \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) + G_{21} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ U_{33} &= H_2 \frac{\partial u}{\partial x} + H_1 \frac{\partial v}{\partial y} + G_3 \frac{\partial w}{\partial z} + G_{32} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ &\quad + G_{31} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) + I_3 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ U_{23} &= I_1 \frac{\partial u}{\partial x} + G_{23} \frac{\partial v}{\partial y} + G_{32} \frac{\partial w}{\partial z} + H_1 \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ &\quad + I_3 \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) + I_2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ U_{13} &= G_{13} \frac{\partial u}{\partial x} + I_2 \frac{\partial v}{\partial y} + G_{31} \frac{\partial w}{\partial z} + I_3 \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ &\quad + H_2 \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) + I_1 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ U_{12} &= G_{12} \frac{\partial u}{\partial x} + G_{31} \frac{\partial v}{\partial y} + I_3 \frac{\partial w}{\partial z} + I_2 \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ &\quad + I_1 \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) + H_3 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (11.)$$

In dieser entwickelten Form unterwerfen wir die Glieder der Gl. (6.) einer näheren Discussion, und zwar jedes der drei letzten

Glieder δP , δQ , δR für sich, wobei wir die schon erwähnte Voraussetzung benutzen, dass von den Vorgängen in der unendlich dünnen Oberflächenschicht abstrahirt werden kann.

§ 48. Untersuchung des ersten Theils der Kräftefunction.

Wir untersuchen zunächst den ersten Theil δP . Die Function δP ist nach Formel (7.) § 47 ein aus neun Termen bestehendes dreifaches Integral. Die drei ersten Terme, welche Differentialquotienten nach ∂x enthalten, integriren wir partiell nach dieser Variablen, die drei zweiten nach y , endlich die drei letzten nach z . So erhalten wir, indem wir in die integrierten Theile das Oberflächenelement $d\omega$ durch die Formeln

$dy dz = d\omega \cos(n, x)$; $dz dx = d\omega \cos(n, y)$; $dx dy = d\omega \cos(n, z)$ (1.)
einführen, in welchen n die nach aussen gerichtete Normale des Elements $d\omega$ bedeutet,

$$\begin{aligned} \delta P = & \int d\omega \left\{ \{ \bar{p}_{11} \cos(n, x) + \bar{p}_{12} \cos(n, y) + \bar{p}_{13} \cos(n, z) \} \bar{\delta u} \right. \\ & + \{ \bar{p}_{12} \cos(n, x) + \bar{p}_{22} \cos(n, y) + \bar{p}_{23} \cos(n, z) \} \bar{\delta v} \\ & \left. + \{ \bar{p}_{13} \cos(n, x) + \bar{p}_{23} \cos(n, y) + \bar{p}_{33} \cos(n, z) \} \bar{\delta w} \right\} \\ & - \iiint dx dy dz \left\{ \left\{ \frac{\partial p_{11}}{\partial x} + \frac{\partial p_{12}}{\partial y} + \frac{\partial p_{13}}{\partial z} \right\} \delta u \right. \\ & + \left\{ \frac{\partial p_{12}}{\partial x} + \frac{\partial p_{22}}{\partial y} + \frac{\partial p_{23}}{\partial z} \right\} \delta v \\ & \left. + \left\{ \frac{\partial p_{13}}{\partial x} + \frac{\partial p_{23}}{\partial y} + \frac{\partial p_{33}}{\partial z} \right\} \delta w \right\}. \end{aligned} \quad (2.)$$

Hierin erstreckt sich das erste Integral über alle Elemente $d\omega$ der Oberfläche des elastischen Körpers, das dreifache über sein ganzes Volumen. Die Grössen \bar{p}_{11} , \bar{p}_{12} etc., $\bar{\delta u}$, $\bar{\delta v}$, $\bar{\delta w}$ bezeichnen die Werthe, welche die Functionen p_{11} , p_{12} etc., δu , δv , δw an der Oberfläche annehmen.

Da die Grössen p nach dem Früheren im Innern des Körpers constant sind und nur in unmittelbarster Nähe der Oberfläche variiren, so verschwindet in der Gleichg. (2.) die unter dem dreifachen Integralzeichen stehende Function für alle Werthe im Innern, und die Integration braucht nur über die zunächst unter der Oberfläche liegenden Theile des Körpers ausgedehnt zu werden. Es ist demnach vortheilhaft, das Raumelement durch das Oberflächenelement und das der Normale auszudrücken; also zu setzen

$$dx dy dz = d\omega dn,$$

so dass man nach $d\omega$ über die ganze Oberfläche zu integrieren hat, nach dn von einem negativen n , dessen absoluter Werth gleich oder grösser ist als die sehr kleine Dicke der oberflächlichen Schicht, in der die p variiren, bis an die Oberfläche, also bis $n = 0$.

Wegen dieser sehr geringen Dicke der Schicht können wir uns ohne Bedenken die Vorstellung machen, dass die p nur in der Richtung der Normale variiren, dass sie also innerhalb eines nicht zu grossen Stückes der oberflächlichen Schicht in gleicher Tiefe unter der Oberfläche überall gleichen Werth haben. Unter dieser Voraussetzung können wir alle Differentialquotienten der p durch den nach der Normale, durch $\frac{dp}{dn}$ ausdrücken, und zwar nach den für alle p geltenden Formeln

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial n} \cos(n, x); \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial n} \cos(n, y); \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial n} \cos(n, z). \quad (4.)$$

So erhalten wir statt der Gleichg. (3.)

$$\begin{aligned} \delta P = & \int d\omega \left\{ \bar{p}_{11} \cos(n, x) + \bar{p}_{12} \cos(n, y) + \bar{p}_{13} \cos(n, z) \right\} \delta \bar{u} \\ & + \left\{ \bar{p}_{12} \cos(n, x) + \bar{p}_{22} \cos(n, y) + \bar{p}_{23} \cos(n, z) \right\} \delta \bar{v} \\ & + \left\{ \bar{p}_{13} \cos(n, x) + \bar{p}_{23} \cos(n, y) + \bar{p}_{33} \cos(n, z) \right\} \delta \bar{w} \quad (5.) \\ - \int d\omega \int_{-n}^0 dn & \left\{ \frac{dp_{11}}{dn} \cos(n, x) + \frac{dp_{12}}{dn} \cos(n, y) + \frac{dp_{13}}{dn} \cos(n, z) \right\} \delta u \\ & + \left\{ \frac{dp_{12}}{dn} \cos(n, x) + \frac{dp_{22}}{dn} \cos(n, y) + \frac{dp_{23}}{dn} \cos(n, z) \right\} \delta v \\ & + \left\{ \frac{dp_{13}}{dn} \cos(n, x) + \frac{dp_{23}}{dn} \cos(n, y) + \frac{dp_{33}}{dn} \cos(n, z) \right\} \delta w \end{aligned}$$

Wir lassen ausserdem eine Voraussetzung in Bezug auf die Functionen δu , δv , δw eintreten. Dieselben sind Functionen der Lage von $d\omega$ und dn . Wir nehmen an, dass alle Theile des Cylinders, dessen Axe n und dessen Basis $d\omega$ ist, dieselbe Verschiebung erleiden, dass also δu , δv , δw in jener Schicht von n unabhängig sind. Hiergegen ist kein Einwand möglich, wenn wir uns nur bewusst sind, dass wir nur einen speciellen Fall betrachten. Unsere Voraussetzung fingirt, der kleine Cylinder sei ein fester Körper, der sich ganz bewegt, ohne innere Aenderung zu erleiden, d. h. wir abstrahiren von den innern Bewegungen in dieser Oberflächenschicht.

Unter dieser Voraussetzung nun, dass δu , δv , δw von n unabhängig sind, kann man im zweiten Theile der Gleichg. (5.) die Integration nach n ausführen, da dann nur die p als Functionen von n zu betrachten sind. Man erhält so

$$\begin{aligned} \delta P = \int d\omega \{ & p_{11} \cos(n, x) + p_{12} \cos(n, y) + p_{13} \cos(n, z) \} \delta u \\ & + \{ p_{12} \cos(n, x) + p_{22} \cos(n, y) + p_{23} \cos(n, z) \} \delta v \quad (6.) \\ & + \{ p_{13} \cos(n, x) + p_{23} \cos(n, y) + p_{33} \cos(n, z) \} \delta w \}, \end{aligned}$$

wo den Grössen p und den Variationen δu , δv , δw diejenigen Werthe zu ertheilen sind, welche ihnen unter der Oberflächenschicht zukommen. Was die letzteren δu , δv , δw betrifft, so sind ihre Werthe nach der soeben benutzten Voraussetzung dieselben, wie in der Oberfläche selbst $\bar{\delta u}$, $\bar{\delta v}$, $\bar{\delta w}$. Dagegen stimmen die Werthe der p unter jener Oberflächenschicht vielmehr überein mit den Werthen (p), welche sie im Innern des Körpers besitzen. Es ist also aus der Formel die Veränderlichkeit der Molekularsumme p in der Nähe der Oberfläche vollständig verschwunden, sie enthält nur die constanten Werthe im Innern des Körpers.

Wegen der Voraussetzung über die Symmetrie des Körpers verschwinden nun von diesen Grössen alle diejenigen im Innern des Mediums, welche von ungeraden Potenzen der relativen Coordinaten a , b , c abhängen. Es ist also

$$0 = (p_{12}) = (p_{13}) = (p_{23}) \quad (7.)$$

und es wird

$$\delta P = \int d\omega \{ (p_{11}) \cos(n, x) \bar{\delta u} + (p_{22}) \cos(n, y) \bar{\delta v} + (p_{33}) \cos(n, z) \bar{\delta w} \}. \quad (8.)$$

Wenn das Medium unkrystallinisch ist, so ist

$$(p_{11}) = (p_{22}) = (p_{33}) = p, \quad (7')$$

also folgt

$$\delta P = \int d\omega (p) \{ \bar{\delta u} \cos(n, x) + \bar{\delta v} \cos(n, y) + \bar{\delta w} \cos(n, z) \}. \quad (9.)$$

Für den Ruhezustand des Körpers im natürlichen Zustande, d. h. ohne äussere Kräfte, muss diese Function verschwinden. Denn, wenn die Kräfte

$$X = 0, Y = 0, Z = 0 \text{ und } X' = 0, Y' = 0, Z' = 0$$

sind, so sind auch keine Verrückungen vorhanden, also ist

$$u = 0, v = 0, w = 0;$$

es verschwinden aber nicht δu , δv , δw , sondern dies sind total willkürliche Functionen. Für den natürlichen Zustand des Körpers

reducirt sich also die Formel (6.) § 47 auf die einfache Gleichung

$$0 = \delta P.$$

Wegen der vollkommenen Willkürlichkeit der Grössen $\bar{\delta u}$, $\bar{\delta v}$, $\bar{\delta w}$, welche nach Gleichg. (9.) in δP enthalten sind, kann die letzte Gleichung nur erfüllt werden, wenn

$$(p) = 0. \quad (10.)$$

Diese Grösse aber ist eine Constante; der erste Theil der Kräftefunction δP verschwindet also bei jedem Zustande des Körpers:

$$\delta P = 0.$$

Dies ist bewiesen mit Rücksicht auf die Verschiedenheit des Mediums an der Oberfläche, unter der Voraussetzung, dass von den Vorgängen in der Oberfläche selbst abgesehen werden könne.

Dasselbe Resultat hätte sich auch für einen krystallinischen Körper aus der Formel (8.) ersehen lassen; damit für den natürlichen Zustand δP verschwinde, müsste sein

$$0 = (p_{11}) = (p_{22}) = (p_{33}). \quad (11.)$$

Es ist also allgemein

$$0 = \delta P \quad (12.)$$

für krystallinische, sowie für unkrystallinische Körper.

§ 49. Untersuchung des zweiten Theils der Kräftefunction.

Wir beweisen ebenso, dass der zweite Theil des Potentials der elastischen Kräfte Q aus dem Resultate verschwindet, und dass wir somit in der ersten Betrachtung (§ 45 und 46) Recht gehabt haben, nur den dritten zu berücksichtigen.

Die Variation des zweiten Theils ist in Formel (9.) § 47 angegeben. Durch partielle Integration verwandelt sich dieselbe mit Hülfe der Formeln (1.) § 48 in

$$\delta Q = \sum \left[\int d\omega \{ \bar{u}_1 \cos(n, x) + \bar{u}_2 \cos(n, y) + \bar{u}_3 \cos(n, z) \} \bar{\delta u} - \iiint dx dy dz \left\{ \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z} \right\} \delta u \right]. \quad (1.)$$

Hierin bedeutet das Zeichen Σ eine Summe nach dem Zeichen u , dem die Werthe x , y , z beizulegen sind. Die horizontalen Striche

bezeichnen wie bisher die speciellen Werthe der Functionen an der Oberfläche.

Beziehen wir das dreifache Integral auf Stellen im Innern, so erhalten wir einen Ausdruck, der nach den Formeln (8.) und (9.) § 47 die Grössen (p) als Factoren enthält, also nach Gleichg. (11.) § 48 gleich Null ist. Demnach kann man sagen, dass die Integrationen in Gleichg. (1.) nur über diejenigen Theile des Körpers auszudehnen sind, welche näher als eine mikroskopische Grösse an der Oberfläche liegen. Wir führen daher das Raumelement wieder in der Form $d\omega dn$ ein

$$d\omega dn = dx dy dz,$$

wo dn das Element der Normale, $d\omega$ das der Oberfläche ist;

$$\delta Q = \sum \int d\omega \left[\{ \bar{u}_1 \cos(n, x) + \bar{u}_2 \cos(n, y) + \bar{u}_3 \cos(n, z) \} \delta \bar{u} - \int_{-n}^0 dn \left\{ \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z} \right\} \delta u \right], \quad (2.)$$

wo n in der Grenze des Integrals wieder die Dicke der sehr dünnen Schicht unter der Oberfläche bezeichnet, in welcher die p und damit die mit Indices versehenen u , v und w variiren.

Aus dieser sehr dünnen Schicht denken wir uns ein prismatisches Stück ausgeschnitten, dessen Basis zwar sehr klein, aber doch im Verhältniss zur Höhe, welche gleich der Dicke der Schicht ist, als sehr gross angesehen werden darf. In diesem abgeschnittenen Stücke — setzen wir voraus — sollen alle Stellen dieselbe Verrückung erleiden. Das Prisma verhält sich also wie ein vollkommen fester Körper.

Wir bilden den Theil von δQ , welcher diesem Prisma entspricht, wir führen also die Integrale in Gleichg. (2.) über Oberfläche und Inhalt dieses Prismas aus. Dabei vernachlässigen wir wegen der Kleinheit der Höhe die vier Seitenflächen gegen die beiden Grundflächen. Da nach der Voraussetzung im vorigen § die p nur insofern von x , y , z abhängen, als sie mit n variiren, so gilt nach den Gleichg. (8.) § 47 dasselbe von den Grössen u_1 , u_2 , u_3 , v_1 etc. Es ist also

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{du_1}{dn} \cos(n, x); \quad \frac{\partial u_2}{\partial y} = \frac{du_2}{dn} \cos(n, y); \quad \frac{\partial u_3}{\partial z} = \frac{du_3}{dn} \cos(n, z) \quad (3.)$$

und daraus

$$\begin{aligned}
& \int_{-\bar{n}}^0 d\bar{n} \left\{ \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z} \right\} \delta u \\
&= \int_{-\bar{n}}^0 d\bar{n} \left\{ \frac{du_1}{dn} \cos(n, x) + \frac{du_2}{dn} \cos(n, y) + \frac{du_3}{dn} \cos(n, z) \right\} \delta u \quad (4.) \\
&= \{ \bar{u}_1 \cos(n, x) + \bar{u}_2 \cos(n, y) + \bar{u}_3 \cos(n, z) \} \delta u \\
&\quad - \{ u_1 \cos(n, x) + u_2 \cos(n, y) + u_3 \cos(n, z) \} \delta u,
\end{aligned}$$

da die Cosinus und δu von n nicht abhängen. Das erste Glied dieses letzten Ausdrucks bezieht sich, wie die horizontalen Striche andeuten, auf die äussere Oberfläche, das zweite auf die nahe unter der Oberfläche liegende Basis des Prismas.

Setzen wir aus Glchg. (4.) den Werth des Integrals in Glchg. (2.), so folgt

$$\delta Q = \sum \int d\omega \{ u_1 \cos(n, x) + u_2 \cos(n, y) + u_3 \cos(n, z) \} \delta u, \quad (5.)$$

worin alle variablen Grössen sich auf Stellen beziehen, welche die innere Grenze der Oberflächenschicht bilden. Die auf die Oberfläche bezüglichen Functionen sind demnach auch hier verschwunden. Da nun nach den im vorigen § gegebenen Formeln die Functionen p im Innern und auf der Grenze gegen die Oberflächenschicht $= 0$ sind, so sind an diesen Stellen auch u_1, u_2, u_3, v_1 etc. $= 0$. Es verschwindet also auch die rechte Seite der Glchg. (5.) und es wird der zweite Theil der Variation des Potentials

$$\delta Q = 0. \quad (6.)$$

Dieses Resultat ist nach dem Schlusse des vorigen § unabhängig von einer Voraussetzung darüber, ob der Körper krystallinisch oder unkrystallinisch ist; es ist nur erforderlich, dass abstrahirt werden kann von den Verschiebungen in der Oberflächenschicht.

§ 50. Untersuchung des dritten Theils der Kräftefunction.

Der dritte Theil der Kräftefunction bedarf kaum noch einer näheren Erörterung; es genügt vielmehr eine Recapitulation des über die beiden ersten Theile schon Gesagten. Behandeln wir den in der Glchg. (10.) § 47 angegebenen Ausdruck dieses dritten Theils ebenfalls durch partielle Integration, so finden wir

$$\delta R = \int d\omega \left\{ \begin{aligned} & \{ \bar{U}_{11} \cos(n, x) + \bar{U}_{12} \cos(n, y) + \bar{U}_{13} \cos(n, z) \} \delta u \\ & + \{ \bar{U}_{12} \cos(n, x) + \bar{U}_{22} \cos(n, y) + \bar{U}_{23} \cos(n, z) \} \delta v \\ & + \{ \bar{U}_{13} \cos(n, x) + \bar{U}_{23} \cos(n, y) + \bar{U}_{33} \cos(n, z) \} \delta w \end{aligned} \right\} \\ - \iiint dx dy dz \left\{ \begin{aligned} & \left\{ \frac{\partial U_{11}}{\partial x} + \frac{\partial U_{12}}{\partial y} + \frac{\partial U_{13}}{\partial z} \right\} \delta u \\ & \left\{ \frac{\partial U_{12}}{\partial x} + \frac{\partial U_{22}}{\partial y} + \frac{\partial U_{23}}{\partial z} \right\} \delta v \\ & \left\{ \frac{\partial U_{13}}{\partial x} + \frac{\partial U_{23}}{\partial y} + \frac{\partial U_{33}}{\partial z} \right\} \delta w \end{aligned} \right\}, \quad (1.)$$

wo das erste Integral sich über die Oberfläche, das zweite sich über den Raum des Körpers erstreckt. Dieses zweite dreifache Integral zerfallen wir in zwei Theile, von denen sich einer auf den inneren Raum des Körpers bezieht, der zweite auf solche Stellen, welche unmittelbar unter der Oberfläche liegen.

Im innern Raume haben wir nach den Formeln (11.) § 47, da hier die in den Gleichungen (2^a.) § 47 = 0 gesetzten Glieder fortfallen,

$$\begin{aligned} U_{11} &= G_1 \frac{\partial u}{\partial x} + H_3 \frac{\partial v}{\partial y} + H_2 \frac{\partial w}{\partial z} & U_{22} &= H_1 \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ U_{22} &= H_3 \frac{\partial u}{\partial x} + G_2 \frac{\partial v}{\partial y} + H_1 \frac{\partial w}{\partial z} & U_{13} &= H_2 \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ U_{33} &= H_2 \frac{\partial u}{\partial x} + H_1 \frac{\partial v}{\partial y} + G_3 \frac{\partial w}{\partial z} & U_{12} &= H_3 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \end{aligned} \quad (2.)$$

wo die G und H constante Grössen sind. Also wird der auf den inneren Raum bezügliche Theil des Integrals

$$\delta I = \iiint dx dy dz \left[\begin{aligned} & \left\{ G_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + H_3 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + 2 \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right. \\ & \quad \left. + H_2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + 2 \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right\} \delta u \\ & + \left\{ H_3 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \right) + G_2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right. \\ & \quad \left. + H_1 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + 2 \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right\} \delta v \\ & + \left\{ H_2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + 2 \frac{\partial u}{\partial z} \right) + H_1 \left(\frac{\partial w}{\partial y} + 2 \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right. \\ & \quad \left. + G_3 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right\} \delta w \end{aligned} \right] \quad (3.)$$

worin, wenn das Medium unkrystallinisch ist,

$$G_1 = G_2 = G_3 = (G), \quad H_1 = H_2 = H_3 = (H)$$

zu setzen ist.

Mit dem zweiten Theile des dreifachen Integrals, der sich auf die Oberflächenhülle bezieht, verfahren wir wie in den beiden letzten Paragraphen. Wir setzen

$$dx dy dz = d\omega dn$$

und führen ein, dass die G und H und daher auch die U in dieser Schicht nur mit n merklich variiren. Dann wird dieser Theil des Raumintegrals

$$\delta O = \iint d\omega dn \left\{ \begin{aligned} & \left\{ \frac{dU_{11}}{dn} \cos(n,x) + \frac{dU_{12}}{dn} \cos(n,y) + \frac{dU_{13}}{dn} \cos(n,z) \right\} \delta u \\ & + \left\{ \frac{dU_{12}}{dn} \cos(n,x) + \frac{dU_{22}}{dn} \cos(n,y) + \frac{dU_{23}}{dn} \cos(n,z) \right\} \delta v \\ & + \left\{ \frac{dU_{13}}{dn} \cos(n,x) + \frac{dU_{23}}{dn} \cos(n,y) + \frac{dU_{33}}{dn} \cos(n,z) \right\} \delta w \end{aligned} \right\} \quad (5.)$$

worin für die U die vollständigen Werthe aus den Glchg. (11.) § 47 einzusetzen sind. Beziehen wir dieses Integral wieder auf ein Prisma, wie im letzten §, das wir als vollkommen starr ansehen, so dass δu , δv , δw constant sind und gleich den Oberflächen-Werthen

$$\delta u = \overline{\delta u}; \quad \delta v = \overline{\delta v}; \quad \delta w = \overline{\delta w},$$

so können wir die Integration nach dn ausführen und erhalten

$$\delta O = \int d\omega \left\{ \begin{aligned} & \left\{ \overline{U}_{11} \cos(n,x) + \overline{U}_{12} \cos(n,y) + \overline{U}_{13} \cos(n,z) \right\} \overline{\delta u} \\ & - \left\{ U_{11} \cos(n,x) + U_{12} \cos(n,y) + U_{13} \cos(n,z) \right\} \overline{\delta u} \\ & + \left\{ \overline{U}_{12} \cos(n,x) + \overline{U}_{22} \cos(n,y) + \overline{U}_{23} \cos(n,z) \right\} \overline{\delta v} \\ & - \left\{ U_{12} \cos(n,x) + U_{22} \cos(n,y) + U_{23} \cos(n,z) \right\} \overline{\delta v} \\ & + \left\{ \overline{U}_{13} \cos(n,x) + \overline{U}_{23} \cos(n,y) + \overline{U}_{33} \cos(n,z) \right\} \overline{\delta w} \\ & - \left\{ U_{13} \cos(n,x) + U_{23} \cos(n,y) + U_{33} \cos(n,z) \right\} \overline{\delta w} \end{aligned} \right\} \quad (6.)$$

worin die U ohne Strich denselben Werth haben, wie im Innern des Körpers, also aus den Glchg. (2.) zu entnehmen sind.

Setzt man endlich die Werthe von δI und δO aus den Glchg. (3.) und (6.) in die Glchg. (1.) statt des letzten Integrals, dessen Werth sie zusammen darstellen, so findet man

$$\delta R = - \delta I + \int d\omega \left\{ \begin{aligned} & \left\{ U_{11} \cos(n,x) + U_{12} \cos(n,y) + U_{13} \cos(n,z) \right\} \overline{\delta u} \\ & + \left\{ U_{12} \cos(n,x) + U_{22} \cos(n,y) + U_{23} \cos(n,z) \right\} \overline{\delta v} \\ & + \left\{ U_{13} \cos(n,x) + U_{23} \cos(n,y) + U_{33} \cos(n,z) \right\} \overline{\delta w} \end{aligned} \right\}. \quad (7.)$$

Es sind also ebenfalls aus diesem dritten Theile der Variation des Potentials die Werthe von G und H an der Oberfläche verschwunden, und nur die Werthe eingetreten, die ihnen im Innern des Körpers zukommen. Folglich sind wir berechtigt, unsere frühere Betrachtung so durchzuführen, als seien die mit G und H bezeichneten Summen constant; aber immer mit der Beschränkung, dass wir uns nicht bekümmern um den Vorgang der Verrückungen in der oberflächlichen Schicht.

§ 51. Schluss. Aufstellung der Differentialgleichungen und Grenzbedingungen.

Setzen wir nun die Werthe der Functionen δP , δQ , δR aus den Formeln (11.) § 48, (6.) § 49 und (7.) § 50 in die Formel (6.) § 47, welche der Ausdruck des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten ist, so findet man

$$\begin{aligned}
 0 = & \iiint dx dy dz \{ X\delta u + Y\delta v + Z\delta w \} + \int d\omega \{ X'\overline{\delta u} + Y'\overline{\delta v} + Z'\overline{\delta w} \} \\
 & + \iiint dx dy dz \left\{ \begin{aligned} & \left\{ G_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + H_3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + H_2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2H_3 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. + 2H_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right\} \delta u \\ & + \left\{ H_3 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + G_2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + H_1 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + 2H_1 \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. + 2H_3 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \right\} \delta v \\ & + \left\{ H_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + H_1 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + G_3 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + 2H_2 \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. + 2H_1 \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial y} \right\} \delta w \end{aligned} \right. \quad (1.) \\
 & - \int d\omega \left\{ \begin{aligned} & + \{ U_{11} \cos(n, x) + U_{12} \cos(n, y) + U_{13} \cos(n, z) \} \overline{\delta u} \\ & + \{ U_{12} \cos(n, x) + U_{22} \cos(n, y) + U_{23} \cos(n, z) \} \overline{\delta v} \\ & + \{ U_{13} \cos(n, x) + U_{23} \cos(n, y) + U_{33} \cos(n, z) \} \overline{\delta w} \end{aligned} \right\}
 \end{aligned}$$

worin die dreifachen Integrale über das ganze Volumen, die andern über die ganze Oberfläche des elastischen Körpers auszudehnen sind; die Werthe der Functionen U sind aus den Gleichg. (2.) § 50 zu entnehmen.

Die Gleichung (1.) kann bei der vollkommnen Willkürlichkeit der Functionen δu , δv , δw und ihrer Grenzwerte $\overline{\delta u}$, $\overline{\delta v}$, $\overline{\delta w}$ nur bestehen, wenn die Factoren dieser sechs Grössen jeder für sich verschwinden. Sie zerfällt also in sechs Gleichungen, von denen drei

für jede Stelle im Innern des Körpers, drei für jeden Punkt der Oberfläche gelten. Bei der Aufstellung dieser Gleichungen ändern wir, um Uebereinstimmung mit den früher in § 41 gebrauchten Zeichen zu erreichen, die Bezeichnung dahin ab, dass wir setzen

$$\begin{aligned} G_1 &= A; & G_2 &= B; & G_3 &= C; \\ H_1 &= a; & H_2 &= b; & H_3 &= c; \end{aligned} \quad (2.)$$

so erhalten wir, indem wir die Factoren der Variationen δu , δv , δw der Null gleich setzen, die drei Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= X + A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2c \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 2b \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \\ 0 &= Y + c \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + a \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + 2a \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} + 2c \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \\ 0 &= Z + b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + C \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} + 2a \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial y}, \end{aligned} \quad (3.)$$

welche die Bedingungen für das Gleichgewicht jedes Punktes im Innern des Körpers enthalten. Setzen wir ebenso die Factoren von $\overline{\delta u}$, $\overline{\delta v}$, $\overline{\delta w}$ gleich Null, so erhalten wir als Bedingungen für die Grenze des elastischen Mediums die Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= X' - \left(A \frac{\partial u}{\partial x} + c \frac{\partial v}{\partial y} + b \frac{\partial w}{\partial z} \right) \cos(n, x) - c \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \cos(n, y) \\ &\quad - b \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \cos(n, z) \\ 0 &= Y' - \left(c \frac{\partial u}{\partial x} + B \frac{\partial v}{\partial y} + a \frac{\partial w}{\partial z} \right) \cos(n, y) - a \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \cos(n, z) \\ &\quad - c \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \cos(n, x) \\ 0 &= Z' - \left(b \frac{\partial u}{\partial x} + a \frac{\partial v}{\partial y} + C \frac{\partial w}{\partial z} \right) \cos(n, z) - b \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \cos(n, x) \\ &\quad - a \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \cos(n, y). \end{aligned} \quad (4.)$$

Für den Fall der Bewegung ist zu den Glchg. (3.) die Componente der Beschleunigung negativ hinzuzufügen. Bezeichnet ε die Dichtigkeit des Körpers, so werden diese Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= X - \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2c \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 2b \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \\ 0 &= Y - \varepsilon \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + B \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + a \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + c \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2a \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} + 2c \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \\ 0 &= Z - \varepsilon \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + C \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} + 2a \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial y}. \end{aligned} \quad (5.)$$

Die Grenzbedingungen (4.) bleiben für diesen Fall ungeändert. Die Glchg. (4.) und (5.) stimmen mit den in § 41 für krystallinische Medien abgeleiteten Gleichungen vollkommen überein.

Für unkrystallinische Medien ist

$$A = B = C = K; \quad a = b = c = k; \quad (6.)$$

für diese werden also die Glchg. (5.)

$$\begin{aligned} 0 &= X - \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + k \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial \Delta}{\partial x} \right\} + (K - 3k) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ 0 &= Y - \varepsilon \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + k \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial \Delta}{\partial y} \right\} + (K - 3k) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad (7.) \\ 0 &= Z - \varepsilon \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + k \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial \Delta}{\partial z} \right\} + (K - 3k) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}, \end{aligned}$$

in vollkommener Uebereinstimmung mit den oben entwickelten Glchg. (6.) § 46.

Führen wir aber die Beziehungen (6.) in die Grenzbedingungen (4.) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= X' - \left\{ \left(K \frac{\partial u}{\partial x} + k \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right) \cos(n, x) \right. \\ &\quad \left. + k \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \cos(n, y) + k \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \cos(n, z) \right\} \\ 0 &= Y' - \left\{ \left(K \frac{\partial v}{\partial y} + k \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right) \cos(n, y) \right. \\ &\quad \left. + k \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \cos(n, z) + k \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \cos(n, x) \right\} \quad (8.) \\ 0 &= Z' - \left\{ \left(K \frac{\partial w}{\partial z} + k \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) \cos(n, z) \right. \\ &\quad \left. + k \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \cos(n, x) + k \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \cos(n, y) \right\}. \end{aligned}$$

Mit den Resultaten von Navier und Poisson sind die erhaltenen Gleichungen in Uebereinstimmung, wenn noch gesetzt wird

$$K = 3k.$$

Sind zwei Medien in Berührung mit einander gegeben, so kann man die Gleichungen nach derselben Methode herleiten. Man hat in diesem Falle die Summe von zwei Integralen über beide Körper zu untersuchen. Man erhält daraus zwei solche Systeme von Gleichungen wie (5.) oder (7.), aber beide mit verschiedenen Con-

stanten, und wenn man an der gemeinschaftlichen Grenze von den Vorgängen in der Oberflächenschicht abstrahirt, so findet man als Bedingung für dieselbe drei solcher Gleichungen, wie (4.) und (8.), wenn in denselben X' , Y' , Z' ersetzt werden durch Glieder, welche den übrigen Theilen dieser Gleichungen analog mit andern Constanten gebildet sind. Zu diesen treten noch drei neue Bedingungen, welche aussagen, dass die Componenten der Verrückungen in beiden Medien gleich sind. Diese Bedingungen ergeben sich ohne Weiteres daraus, dass das kleine in der Oberfläche gedachte Prisma fest sein soll. Vergl. § 33.

9. Die Temperaturveränderungen als Ursache der molekularen Verrückungen.¹⁾

§ 52. Ausdehnung durch die Wärme.

Wir haben bisher immer angenommen, dass äussere Kräfte und Druckkräfte auf die Oberfläche die einzigen Ursachen der Verrückungen und der Molekulardrücke seien. Es giebt aber noch eine andere Ursache, durch welche gleichfalls Verschiebungen innerhalb des Mediums hervorgebracht werden. Dies sind die Temperaturveränderungen. Um diese in die Betrachtung einzuschliessen, bestimmen wir die Werthe von u, v, w , wenn die Temperatur nicht gleichförmig, sondern an verschiedenen Stellen des Mediums verschieden, also eine Function von x, y, z ist. Diese Untersuchung bleibt nicht ohne Einfluss auf die Differentialgleichungen für die Bewegung der Wärme, vielmehr erfahren die Fourier'schen Differentialgleichungen eine wesentliche Berichtigung.

Der natürliche Zustand, wie wir ihn bisher betrachtet haben, bezieht sich auf einen bestimmten constanten Temperaturzustand des Mediums. Legen wir eine Ebene durch das Medium, so erhalten wir dadurch zwei Theile, deren Entfernung von einander gleich dem Abstände γ zweier Nachbartheilchen ist. So lange sie sich in dieser Entfernung befinden, sind keine Kräfte thätig, die eine Bewegung veranlassen könnten. Die obere Hälfte O ist also frei beweglich gegen die untere. Es entstehen aber sogleich Kräfte, sowie eine Bewegung der einen Hälfte erfolgt ist. Die Entfernung γ , in der keine Kräfte thätig sind, ist durch die Gleichung (4.) § 38 bestimmt, welche die Bedingung ausdrückt, dass die der Trennung beider Theile sich widersetzende Normalcomponente des Molekulardrucks = 0 sei. Statt dieser Gleichung schreiben wir die Abkürzung

$$F(\gamma) = 0 \quad (1.)$$

1) Duhamel, Mém. prés. à l'Acad. de Paris. T. V. 1838. p. 440. F. Neumann, Abhandl. d. Berl. Akad. aus d. Jahre 1841. C. W. Borchardt, Monatsber. d. Berl. Akad. 1873. S. 9.

oder, da die zwischen zwei Theilchen wirksame Molekularkraft $\psi(\rho)$ aus einem abstossenden und einem anziehenden Theile besteht,

$$A_1 \xi(\gamma) - B_1 \xi(\gamma) = 0, \quad (2.)$$

wo $\xi(\gamma)$ eine Function ist, welche aus der Abstossung und $\xi(\gamma)$ eine solche ist, welche aus der Anziehung entsteht; A_1 und B_1 sind Constante.

Nehmen wir nun an, die Temperatur wachse um s Grade, so wächst, wenn s nicht sehr gross ist, die Abstossung s proportional. Das Gesetz der Abstossung $\xi(\gamma)$ als Function der Entfernung γ wird sich daher nicht ändern, wohl aber die Intensität der Wirkung, weil wir uns die Temperaturerhöhung so vorstellen können, als habe der abstossende Theil eines jeden Theilchens, etwa seine Aetheratmosphäre zugenommen. Ist nun q eine der specifischen Wärme proportionale Constante, also qs der zugeführten Wärmequantität proportional, so wird die Abstossung

$$(A_1 + qs) \xi(\gamma) - B_1 \xi(\gamma) > 0. \quad (3.)$$

Es tritt also eine Entfernung ein, und γ wächst um $\Delta\gamma = \sigma$. Durch Entwicklung nach Potenzen von σ erhalten wir hieraus nach der Gleichung (3.) die Formel

$$\begin{aligned} 0 &= (A_1 + qs) \xi(\gamma + \sigma) - B_1 \xi(\gamma + \sigma) \\ &= qs \xi(\gamma) + \gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} \{A_1 \xi(\gamma) - B_1 \xi(\gamma)\} \frac{\sigma}{\gamma} + \dots, \end{aligned} \quad (4.)$$

welche wir zur Bestimmung von σ verwenden können.

Hierfür schreiben wir einfacher

$$0 = p_1 s + q_1 \frac{\sigma}{\gamma} \quad (5.)$$

und bemerken, dass p_1 und q_1 constante Grössen; denn in die Entwicklung (4.) ist γ mit dem constanten Werthe einzusetzen, welcher durch die Gleichung (2.) bestimmt ist und für den Nullpunkt der Temperatur $s = 0$ gilt.

Aus dieser Gleichung folgt, dass die Temperatur s der linearen Ausdehnung $\frac{\sigma}{\gamma}$ proportional ist. Dies Resultat giebt die Grenze an, innerhalb deren wir die noch folgenden Ergebnisse der Theorie anwenden dürfen, nämlich so lange, als die Zunahme der Temperatur der linearen Dilatation proportional bleibt. Ist dies nicht mehr der Fall, so müssen auch die höheren Potenzen von σ berücksichtigt werden. Bei festen Körpern ist jenes Gesetz, dass Temperatur und

Dilatation proportional seien, noch erfüllt innerhalb eines Temperaturintervalls von etwa 50° .¹⁾

§ 53. Thermischer Druck.

Wir beziehen unsere Formel (5.) § 52 statt auf den Querschnitt einer Molekelreihe auf die Einheit der Fläche und erhalten so durch die dazu nöthige Aenderung der Constanten die Gleichung

$$0 = ps + h \frac{\sigma}{\gamma}. \quad (1.)$$

In dieser Gleichung hat jedes Glied seine physikalische Bedeutung; das zweite Glied ist der bisher betrachtete Theil des Molekular-drucks, bei dem die Temperatur noch nicht berücksichtigt ist, und zwar der Druck, der bei einer Entfernung der beiden Hälften des Mediums um die Grösse σ über den bei der Temperatur $s = 0$ statt-habenden Molekularabstand γ hinaus eintritt. Das erste Glied ist der Theil des Molekular-drucks, der von der Temperaturerhöhung s herrührt, oder, wie man sich ausdrückt, der thermische Druck.

Ebenso wie wir in unseren früheren Untersuchungen für den zweiten Theil des Molekular-drucks die theoretischen Werthe der

1) Ist das Intervall grösser, so setzt man gewöhnlich die lineare Ausdehnung

$$\delta = \frac{s}{M} + \frac{s^2}{M_1} + \dots,$$

wo $M, M_1 \dots$ Constante sind. Wenn man die Formel (4.) in der Gestalt

$$s = \frac{1}{q} \frac{B_1 \xi(\gamma + \sigma) - A_1 \xi(\gamma + \sigma)}{\xi(\gamma + \sigma)}$$

nach Potenzen von

$$\delta = \frac{\sigma}{\gamma}$$

entwickelt, so ergibt sich, dass man viel bessere Interpolationsformeln für die Beobachtungen erhalten wird, wenn man dieselben nach dem Schema

$$s = \frac{M + M_1 \delta + \dots}{N + N_1 \delta + \dots}$$

berechnet, wo $M, M_1 \dots, N, N_1 \dots$ Constante sind. Dieses hat man in der That, ohne sich theoretisch Rechenschaft davon zu geben, schon versucht, um Beobachtungen über die Ausdehnung von Flüssigkeiten darzustellen. Man hat gefunden, dass diese Formel mit zwei bis drei Constanten weit mehr leistet, als jene mit der doppelten Anzahl. Statt der Gleichung für s kann man auch schreiben

$$\delta = \frac{m + m_1 s + \dots}{n + n_1 s + \dots},$$

wo $m \dots$ und $n \dots$ wieder Constanten sind.

Componenten entwickelt haben, lässt sich auch der erste Theil durch Molekularsummen darstellen, wenn wir die Vorstellung benutzen, dass der thermische Druck von der durch die Temperatur vermehrten Abstossung der Theilchen gegen einander herrührt. Man kann die Berechnung der resultirenden Kräfte auf Grund einer älteren Hypothese durchführen, nach welcher die Theilchen mit Wärmeatmosphären umgeben sein sollen, welche letzteren einander abstossen, während die Theilchen selber sich gegenseitig anziehen.

Bei dieser Berechnung verfahren wir genau so wie in § 36, indem wir das an der Stelle xyz einer Ebene gelegene Element $d\omega = \gamma^2$, welches den thermischen Druck $ps d\omega$ erfährt, als Basis eines Canals ansehen, welchen wir in der negativen Richtung der gegen die Ebene senkrechten z -Coordinate verlängern, und den Druck als die Summe der Abstossungen betrachten, welche die Wärmeatmosphären W_1 der im Canal befindlichen Theilchen von den Wärmeatmosphären W sämtlicher Theilchen, die auf der andern Seite der Ebene liegen, erleidet. Wenn die beiden in der Entfernung ϱ befindlichen Wärmeatmosphären die Kraft

$$W W_1 f(\varrho)$$

auf einander ausüben, so sind analog den Gleichungen (1.) § 36 die Componenten der Gesamtwirkung

$$\begin{aligned} \sum_d W_1 \sum_a \sum_b \sum_c W \frac{a}{\varrho} f(\varrho) \\ \sum_d W_1 \sum_a \sum_b \sum_c W \frac{b}{\varrho} f(\varrho) \\ \sum_d W_1 \sum_a \sum_b \sum_c W \frac{c}{\varrho} f(\varrho), \end{aligned} \quad (2.)$$

wo $x, y, z - d$ den Ort von W_1 , $x + a, y + b, z + c$ den von W bezeichnen. Transformiren wir diese Summen nach dem in § 37 erörterten Verfahren, so finden wir

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma} \sum_c W_1 \sum_a \sum_b W a c \frac{f(\varrho)}{\varrho} &= 0 \\ \frac{1}{\gamma} \sum_c W_1 \sum_a \sum_b W b c \frac{f(\varrho)}{\varrho} &= 0 \\ \frac{1}{\gamma} \sum_c W_1 \sum_a \sum_b W c^2 \frac{f(\varrho)}{\varrho} &= ps\gamma^2, \end{aligned} \quad (3.)$$

worin, wie in den obigen Summen, nach a und b von $-\infty$ bis $+\infty$, nach c von 0 bis ∞ zu summiren ist.

Hieraus folgt, dass der thermische Druck immer senkrecht gegen die den Druck erleidende Ebene gerichtet ist. Die Stärke des auf die Einheit der Fläche wirkenden Druckes ist, wenn wir alle Summen von $-\infty$ bis $+\infty$ ausdehnen,

$$ps = \frac{W}{2\gamma^3} \sum Wc^2 \frac{f(\varrho)}{\varrho}, \quad (4.)$$

wo wir zugleich den Unterschied von W und W_1 , da sie einander gleich sind, haben fortfallen lassen. Denselben Druck erfährt in einem unkrystallinischen Medium eine senkrecht gegen die x - oder y -Coordinate gelegene Ebene; es ist ebenso

$$ps = \frac{W}{2\gamma^3} \sum Wa^2 \frac{f(\varrho)}{\varrho} = \frac{W}{2\gamma^3} \sum Wb^2 \frac{f(\varrho)}{\varrho},$$

so dass auch

$$ps = \frac{W}{6\gamma^3} \sum W\varrho f(\varrho) \quad (5.)$$

gesetzt werden darf.

§ 54. Ungleichförmige Temperatur.

Wir verallgemeinern diese Untersuchung, indem wir annehmen, die Temperatur s sei nicht mehr constant durch den ganzen Körper, sondern eine Function der Coordinaten x, y, z . Das abstossende Princip ist also in m und m_1 nicht mehr dasselbe, sondern es unterscheiden sich beide, W und W_1 von einander. Vor der Erhöhung der Temperatur waren aber bei der ursprünglichen constanten Temperatur beide gleich, ihr damaliger Werth sei W . Die Temperatur in m_1 nennen wir s_1 und in m s_2 . Dann werden, wenn β eine Constante bedeutet, die abstossenden Principien nach Erhöhung der Temperatur

$$\begin{aligned} \text{in } m_1 & \quad W + \beta s_1 \\ \text{in } m & \quad W + \beta s_2, \end{aligned}$$

und es wird die Abstossung von m auf m_1

$$(W + \beta s_1)(W + \beta s_2) f(\varrho)$$

oder mit Vernachlässigung von s^2

$$\{W\{W + \beta(s_1 + s_2)\} f(\varrho)\}.$$

Demnach verwandeln sich die Summen (3.) § 53 im Falle variabler Temperatur in folgende:

$$\begin{aligned} \frac{W}{\gamma} \sum \sum \sum (W + \beta(s_1 + s_2)) a c \frac{f(\varrho)}{\varrho} &= \frac{W}{\gamma} \sum \sum \sum \alpha(s_1 + s_2) a c \frac{f(\varrho)}{\varrho} \\ \frac{W}{\gamma} \sum \sum \sum (W + \beta(s_1 + s_2)) b c \frac{f(\varrho)}{\varrho} &= \frac{W}{\gamma} \sum \sum \sum \alpha(s_1 + s_2) b c \frac{f(\varrho)}{\varrho} \\ \frac{W}{\gamma} \sum \sum \sum (W + \beta(s_1 + s_2)) c^2 \frac{f(\varrho)}{\varrho} &. \end{aligned}$$

Nun aber unterscheiden sich die Werthe s_1 und s_2 von der Temperatur s an der Stelle xyz nur um kleine Grössen von der Ordnung der Molekularabstände a, b, c, d . Mit Vernachlässigung dieser kleinen Grössen werden die obigen Summen

$$\begin{aligned} 2 \frac{W}{\gamma} \sum \sum \sum \beta s f(\varrho) \frac{a c}{\varrho} &= 0 \\ 2 \frac{W}{\gamma} \sum \sum \sum \beta s f(\varrho) \frac{b c}{\varrho} &= 0 \\ 2 \frac{W}{\gamma} \sum \sum \sum \{ W + 2\beta s \} f(\varrho) \frac{c^2}{\varrho} &= p s \gamma^2. \end{aligned}$$

Hieraus folgt, dass auch bei ungleichförmiger Vertheilung der Temperatur der thermische Druck normal gegen das Element der trennenden Ebene wirkt; der Werth des Drucks hängt allein ab von der Temperatur des Elements; er ist aber unabhängig von der Richtung des Elements.

§ 55. Aufstellung der Differentialgleichungen mit Rücksicht auf die Temperatur.

Wir nehmen, wie in § 7, im Innern des Körpers ein kleines rechtwinkliges Prisma an, dessen Kanten a, b, c den Coordinatenachsen parallel sind. Das Prisma ist frei beweglich und befindet sich unter dem Einfluss der auf dasselbe wirkenden Druckkräfte in Ruhe. Wir bilden die Summen sämtlicher Componenten nach der Richtung von x, y, z , entwickelt nach den Potenzen von a, b, c , und setzen in jeder der drei erhaltenen Gleichungen die Glieder gleicher Ordnung für sich = 0. Die Glieder zweiter und dritter Ordnung in den Werthen der X-Componenten, welche vom elastischen Druck, vom thermischen Druck und von den von aussen her einwirkenden Kräften herrühren, sind folgende:

$$\begin{aligned} 0 &= a b \left\{ X_x + \frac{\partial X_x}{\partial x} \frac{a}{2} + \frac{\partial X_x}{\partial y} \frac{b}{2} \right\} \\ &- a b \left\{ X_x + \frac{\partial X_x}{\partial x} \frac{a}{2} + \frac{\partial X_x}{\partial y} \frac{b}{2} + \frac{\partial X_x}{\partial z} c \right\} \\ &+ a c \left\{ X_y + \frac{\partial X_y}{\partial x} \frac{a}{2} + \frac{\partial X_y}{\partial z} \frac{c}{2} \right\} \\ &- a c \left\{ X_y + \frac{\partial X_y}{\partial x} \frac{a}{2} + \frac{\partial X_y}{\partial y} b + \frac{\partial X_y}{\partial z} \frac{c}{2} \right\} \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
 &+ bc \left\{ X_x + \frac{\partial X_x}{\partial y} \frac{b}{2} + \frac{\partial X_x}{\partial z} \frac{c}{2} \right\} \\
 &- bc \left\{ X_x + \frac{\partial X_x}{\partial x} a + \frac{\partial X_x}{\partial y} \frac{b}{2} + \frac{\partial X_x}{\partial z} \frac{c}{2} \right\} \\
 &+ bc \left\{ ps + p \frac{\partial s}{\partial y} \frac{b}{2} + p \frac{\partial s}{\partial z} \frac{c}{2} \right\} \\
 &- bc \left\{ ps + p \frac{\partial s}{\partial x} a + p \frac{\partial s}{\partial y} \frac{b}{2} + p \frac{\partial s}{\partial z} \frac{c}{2} \right\} \\
 &- abc X.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Daraus ergibt sich, wenn wir das Resultat zugleich auf die beiden andern Richtungen y und z ausdehnen, als allgemeinere Form des Theorems A § 7

$$\begin{aligned}
 X &= p \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} \\
 Y &= p \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} \\
 Z &= p \frac{\partial s}{\partial z} + \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z}.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Ist das Medium nicht in Ruhe, so erhalten wir statt der Gleichungen A' § 10 folgendes allgemeinere Theorem

$$\begin{aligned}
 X - \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= p \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} \\
 Y - \varepsilon \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= p \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} \\
 Z - \varepsilon \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= p \frac{\partial s}{\partial z} + \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z}.
 \end{aligned} \tag{3}$$

Diese Gleichungen gelten ganz allgemein für jedes homogene krystallinische oder unkrystallinische Medium, mit alleiniger Ausnahme der in § 41 angegebenen Krystallformen. Zur vollständigen Bestimmung des Zustandes des Mediums treten zu diesen Gleichungen noch die an der Oberfläche geltenden Bedingungen und eine neue Gleichung, welche s bestimmt.

§ 56. Oberflächenbedingungen.

Um die Oberflächenbedingungen abzuleiten, suchen wir wieder, wie in § 11, die Bedingungen dafür, dass ein rechtwinkliges Prisma, dessen Basis das Element $d\omega$ der Oberfläche ist, in Ruhe bleibt. Zu dem Ende entwickeln wir die Componenten der auf das Prisma wirkenden Kräfte nach Potenzen der Dimensionen des kleinen Prismas

und setzen die Glieder gleicher Ordnung für sich = 0. Aus den Gliedern niedrigster, d. h. zweiter Ordnung fallen die sich gegenseitig aufhebenden Drucke gegen die vier Seitenflächen fort; es ist also zur Erhaltung des Gleichgewichts nur noch erforderlich dass der gegen die innere Basis wirkende Gesamtdruck dem auf das Oberflächenelement wirkenden Drucke das Gleichgewicht halte. Da der thermische Druck immer normal gegen die Druckebene gerichtet ist, so werden diese Bedingungen, ganz analog § 11 Gl. (2.),

$$\begin{aligned} 0 &= X' + ps \cos(n, x) + X_x \cos(n, x) + X_y \cos(n, y) + X_z \cos(n, z) \\ 0 &= Y' + ps \cos(n, y) + Y_x \cos(n, x) + Y_y \cos(n, y) + Y_z \cos(n, z) \quad (1.) \\ 0 &= Z' + ps \cos(n, z) + Z_x \cos(n, x) + Z_y \cos(n, y) + Z_z \cos(n, z). \end{aligned}$$

In dem besonderen Falle, dass auf die Oberfläche ein gleichmässiger Druck D senkrecht einwirke, werden diese Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= (D + ps) \cos(n, x) + X_x \cos(n, x) + X_y \cos(n, y) + X_z \cos(n, z) \\ 0 &= (D + ps) \cos(n, y) + Y_x \cos(n, x) + Y_y \cos(n, y) + Y_z \cos(n, z) \quad (2.) \\ 0 &= (D + ps) \cos(n, z) + Z_x \cos(n, x) + Z_y \cos(n, y) + Z_z \cos(n, z). \end{aligned}$$

Nach der Schlussbemerkung von § 11 braucht kaum mehr gesagt zu werden, dass diese Gleichungen nicht allein für die Ruhe, sondern auch für jeden Zustand der Bewegung gültig bleiben.

§ 57. Beziehung zwischen thermischer und elastischer Ausdehnung.

Aus den letzten Formeln geht ein sehr bemerkenswerther Satz über den Einfluss der Temperaturerhöhung eines Körpers hervor. Die Wirkung einer solchen unterscheidet sich nicht von der eines auf die Oberfläche wirkenden Druckes, wenn

$$D = ps$$

ist. Wir können also eine gleichmässige Temperaturänderung uns immer ersetzt denken durch einen gleichförmigen normal gegen die Oberfläche wirkenden Druck.

Zwischen den Constanten p und k unserer allgemeinen Differentialgleichungen besteht eine diesem Satze entsprechende einfache Relation, welche sich durch Vergleichung der Grösse der eintretenden Dilatation bei Aenderung des Druckes und bei Aenderung der Temperatur ergibt.

Wir haben in § 42 nachgewiesen, dass, wenn ein unkrystallinischer

Körper einem allseitigen Druck D ausgesetzt wird, er eine lineare Dilatation

$$\delta = \frac{D}{5k} \quad (1.)$$

erfährt, und jetzt schliessen wir, dass, wenn seine Temperatur um s erhöht wird, eine Dilatation

$$\delta = \frac{ps}{5k} \quad (2.)$$

eintritt. Nun wissen wir auf der andern Seite, dass eine Temperaturerhöhung s eine Dilatation

$$\delta = \alpha s \quad (3.)$$

hervorbringt, wenn α der lineare thermische Ausdehnungscoefficient ist. Hieraus ergibt sich die Relation

$$p = 5k\alpha \quad (4.)$$

oder nach § 42

$$p = M\alpha. \quad (5.)$$

Für den Elasticitätsmodul M und für α existiren zahlreiche Beobachtungen und Tafeln, in denen die Werthe zusammengestellt sind. Aus diesen kann man p berechnen.

§ 58. Krystallinische Körper.

Ob diese für unkrystallinische Körper gefundenen Resultate unmittelbar auf Krystalle zu übertragen sind, kann nach der Theorie zweifelhaft sein, würde sich aber durch Beobachtungen entscheiden lassen.

Wir wissen durch die Erfahrung, dass eine Aenderung der Temperatur eines Krystalls eine Aenderung der Winkel seiner Flächen hervorbringt. Da seine Ausdehnung in verschiedenen Richtungen verschieden ist, so müssen seine Axen sich ändern, wenn die Temperatur sich ändert, und seine Flächen, seien sie natürliche oder künstliche, müssen sich unter andern Winkeln schneiden.

Aus unserm theoretischen Resultat würde nun folgen, dass ein Krystall bei einer Aenderung des Druckes sich ebenso verhalten muss, wie bei einer Veränderung der Temperatur. Dass die Winkel und Axen eines Krystalls unter verschiedenem Drucke ebenfalls verschieden sein müssen, ist freilich noch keineswegs durch die Erfahrung bestätigt; es kann aber wohl kein Zweifel an ihrer Richtigkeit stattfinden.

Zweifelhaft aber ist die Voraussetzung, dass der thermische Druck im Innern des Körpers nach allen Richtungen dieselbe Wirkung

ausübe. Wie nämlich der Krystall in verschiedenen Richtungen der Zusammendrückung verschiedene Widerstände bietet, d. h. wie die Constanten A, B, C, a, b, c (§ 41) verschieden sind, so ist es auch wohl möglich, dass der thermische abstossende Effect im Innern nach verschiedenen Richtungen auch eine Verschiedenheit darbietet, oder dass die Constante p von der Richtung abhängt. Es erscheint also möglich, dass für die drei rechtwinkligen Symmetrieebenen des Krystalls die drei in § 53 entwickelten Summen

$$\begin{aligned} p_x s &= \frac{W}{2\gamma^3} \sum W a^2 \frac{f(\varrho)}{\varrho} \\ p_y s &= \frac{W}{2\gamma^3} \sum W b^2 \frac{f(\varrho)}{\varrho} \\ p_z s &= \frac{W}{2\gamma^3} \sum W c^2 \frac{f(\varrho)}{\varrho} \end{aligned} \quad (1.)$$

ungleiche Werthe besitzen.

Durch diese Unterscheidung der p verwandelt sich, wenn wir von äusseren Kräften absehen, das System (2.) § 55 in das folgende

$$\begin{aligned} 0 &= p_x \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} \\ 0 &= p_y \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} \\ 0 &= p_z \frac{\partial s}{\partial z} + \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z}, \end{aligned} \quad (2.)$$

die Bedingungsgleichungen (1.) § 56 in die nachstehenden

$$\begin{aligned} 0 &= p_x s \cos(n, x) + X_x \cos(n, x) + X_y \cos(n, y) + X_z \cos(n, z) \\ 0 &= p_y s \cos(n, y) + Y_x \cos(n, x) + Y_y \cos(n, y) + Y_z \cos(n, z) \\ 0 &= p_z s \cos(n, z) + Z_x \cos(n, x) + Z_y \cos(n, y) + Z_z \cos(n, z). \end{aligned} \quad (3.)$$

Nehmen wir nun an, es sei die Temperatur durch den ganzen Körper dieselbe, so fallen in den Differentialgleichungen (2.) zwar die ersten Glieder fort, die Bedingungsgleichungen (3.) zeigen aber, dass die Temperaturerhöhung nicht durch einen gleichförmigen Druck gegen die Oberfläche ersetzt werden kann.

Hierauf beruht die Entscheidung durch die Beobachtung. Man bestimmt durch directe Messung die Aenderung der Winkel, wenn der Druck auf die Oberfläche des Krystalls geändert wird, wenn man ihn z. B. aus dem Drucke einer Atmosphäre in den von 10 Atmosphären oder in den luftleeren Raum bringt. Auf dieselbe Weise misst man die Winkeländerung, welche durch eine Erhöhung der Temperatur, z. B. von 0° auf 100° , hervorgebracht wird. Erhält

man beide Male ein entsprechendes System von Winkeländerungen, so sind alle drei Werthe von p unter sich gleich; befolgen die Aenderungen verschiedene Gesetze, so sind sie verschieden.

Die Aenderung der Winkel ist sehr klein; so ändert sich z. B. der Winkel des Kalkspaths bei einer Erhöhung der Temperatur von 0° auf 100° um etwa 4 Minuten. Es bedarf also sehr scharfer Mittel zur Messung. Man kann sich folgender Methode bedienen. Man legt zwei gleiche rechtwinklig geschliffene Prismen, welche etwa durch eine Feder in unmittelbarer Berührung erhalten werden, symmetrisch so zusammen, dass zwei in einer Ebene liegende spiegelnde Flächen der beiden Krystalle nur ein Bild eines leuchtenden Punktes geben. Aendert man dann die Temperatur der Krystalle, so bleiben die Winkel nicht mehr rechte Winkel, und dadurch werden die symmetrisch gelegten Flächen, welche vor der Erwärmung eine einzige Ebene bildeten, gegen einander geneigt, so dass man von jeder derselben ein anderes Bild des leuchtenden Punktes erhält. Wenn man mittelst einer Mikrometerschraube am Goniometer die Trennung beider Bilder beobachtet, so kann man ihre Lage Grad für Grad verfolgen und damit die Aenderung der Krystallwinkel bis etwa auf Secunden genau messen. Ebenso verfährt man bei der schwierigeren Aufgabe, die Aenderung der Winkel durch äussern Druck zu beobachten.

Die Aenderung der Krystallwinkel mit der Temperatur hat Eilhard Mitscherlich¹⁾ am Kalkspath beobachtet und dabei die schöne Entdeckung gemacht, dass dieses Mineral sich bei Erwärmung in der Richtung der Axe ausdehnt, während es sich in einer gegen die Axe senkrechten Richtung zusammenzieht. Die Ausdehnung in der Richtung der Hauptaxe beträgt bei einer Zunahme der Temperatur um 100° C.

$$P = + 0,00286,$$

und in einer darauf senkrechten Richtung die Zusammenziehung

$$Q = - 0,00056.$$

Die Volumenvergrößerung für 100° C. wird hiernach

$$2Q + P = 0,00174.$$

Ein ähnliches Verhalten zeigt das Fraueneis (Gypsspath, Marienglas), das in den drei Richtungen verschiedene Dilatation, theils Ausdehnung, theils Zusammenziehung zeigt.

1) Abh. d. Berl. Akad. 1825. Pogg. Ann. Bd. 1 u. 10, S. 151.

Es ergibt sich aus dieser Beobachtung noch das andere merkwürdige Resultat, dass es Richtungen im Krystalle giebt, welche bei Aenderungen der Temperatur weder Verlängerung noch Verkürzung erfahren. Man könnte aus dem Kalkspath Stäbe schneiden, deren Länge sich mit der Temperatur nicht ändern würde; hier löst also eine krystallinische Substanz ein Problem, dessen Lösung oft sehr gewünscht wird.

§ 59. Correction der Fourier'schen Differentialgleichung.

Es bleibt nach Aufstellung der Differentialgleichungen und Grenzbedingungen für die elastischen Verrückungen zur vollständigen Bestimmung des Zustandes des Mediums noch übrig, die Gleichung zu entwickeln, aus der die Temperatur s bestimmt wird. Zu diesem Zwecke könnte die Fourier'sche Differentialgleichung

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\mathfrak{t}}{\varepsilon C} \left\{ \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} \right\}, \quad (1.)$$

in welcher \mathfrak{t} die Leitungsfähigkeit für Wärme, ε die Dichtigkeit und C die spezifische Wärme des Stoffes bedeutet, dienen nebst der für die Oberfläche geltenden Grenzbedingung

$$0 = \mathfrak{t} \frac{\partial s}{\partial n} + \mathfrak{h}(s - \sigma), \quad (2.)$$

in welcher n die Normale, \mathfrak{h} die äussere Leitungsfähigkeit und σ die Temperatur der Umgebung darstellt. Jedoch bedarf die Differentialgleichung nach unseren bisherigen Betrachtungen einer wesentlichen Modification; denn ihre Herleitung beruht auf der Annahme, dass ein Volumenelement des Körpers keine andere Wärmequelle habe, als in der Differenz der ein- und ausströmenden Wärmequantität. Dem ist aber nicht so. Da nämlich nach dem Bisherigen Temperaturerhöhung und Dilatation in Zusammenhang stehen, so ist die Erhöhung der Temperatur, welche das Element durch eine bestimmte Quantität einströmender Wärme erfährt, verschieden, je nachdem dasselbe sich vermöge der höheren Temperatur frei ausdehnen kann oder gezwungen ist, sein Volumen beizubehalten.

Um das Verhältniss mathematisch zum Ausdruck zu bringen, unterscheidet man zweierlei Art von spezifischer Wärme. Ist C_p die spezifische Wärme bei constantem Druck, C_v dieselbe bei constantem Volumen, so ist die Differenz $C_p - C_v$ der Betrag derjenigen Wärmemenge, welcher die Masseneinheit des Körpers bei Erwärmung um 1° mehr bedarf, wenn sie sich frei ausdehnt, als wenn sie gezwungen wird, ihren früheren Raum zu behalten. Es ist also $C_p - C_v$ diejenige

Wärme, welche bei der Ausdehnung zur Ueberwindung der Cohäsion der Masseneinheit verbraucht wird und deshalb zur Temperaturerhöhung nicht beitragen kann. Nun nennen wir die Ausdehnung, welche die Raumeinheit bei einer Erwärmung um 1° erfährt, den Ausdehnungscoefficienten, den wir durch α bezeichnen. Zur Ausdehnung der Raumeinheit um

$$\Delta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

wird eine im Verhältniss von Δ zu α grössere Wärmemenge verbraucht, also die Wärme

$$(C_p - C_v) \frac{\Delta}{\alpha}.$$

Um die in der Zeiteinheit eintretende Vermehrung der Dilatation Δ um

$$\frac{\partial \Delta}{\partial t}$$

ausführen zu können, wird also für die Masseneinheit des Körpers die Wärmemenge

$$(C_p - C_v) \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \Delta}{\partial t}$$

verbraucht werden müssen, welche bei verhinderter Ausdehnung ihre Temperatur um

$$\frac{C_p - C_v}{C_p} \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \Delta}{\partial t}$$

erhöht haben würde. Dieser Betrag fällt aus, wenn der Körper sich unter dem constanten Druck der Atmosphäre frei ausdehnt.

Folglich ist in der Gleichung (1.), welche ohne Rücksicht auf die Ausdehnung hergeleitet ist, die Grösse, welche den Temperaturzuwachs in der Zeiteinheit angiebt, um diesen Betrag zu vermindern. Zugleich muss das unbestimmte Zeichen C für die spezifische Wärme durch das der Herleitung entsprechende C_v ersetzt werden. So erhalten wir die Gleichung

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{1}{s C_p} \left\{ \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} \right\} - \frac{C_p - C_v}{C_p} \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \Delta}{\partial t} \quad (3.)$$

als verbesserte Form der Fourier'schen Differentialgleichung.

Die Bedingungsgleichung für die Temperatur der Oberfläche (2.) erleidet durch Berücksichtigung der Volumänderung keine Aenderung, da sie sich nur auf das Oberflächenelement bezieht.

Fügt man die beiden Gleichungen (3.) und (2.) zu den Systemen (3.) § 55 und (1.) § 56 hinzu, so hat man zur vollständigen Bestimmung des Zustandes des Körpers durch die vier Grössen u, v, w, s vier

Differentialgleichungen und vier Bedingungsgleichungen für die Oberfläche, wozu noch die nöthigen Bedingungen für die Zeit $t = 0$ treten.

Nehmen wir an, der Zustand der Temperatur sei stationär, so erhalten wir

$$0 = \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2}, \quad (4.)$$

also dieselbe Form, wie die gewöhnliche Form der Fourier'schen Gleichung. Es ist nur der Unterschied, dass der fortgefallene Factor nicht, wie man anzunehmen pflegt, C_p ist, sondern C_v . Dies kann unter Umständen auch auf den stationären Zustand Einfluss haben, wenn nämlich in der ursprünglichen Differentialgleichung noch eine Function der Coordinaten enthalten war, durch welche eine im Körper liegende Wärmequelle berücksichtigt wurde.

10. Kirchhoff's allgemeine Lehrsätze.

§ 60. Eindeutigkeit der Lösung für den Fall des Gleichgewichts.

Ehe wir zu Anwendungen der entwickelten allgemeinen Theorie übergehen, beweisen wir, dass wir diese Theorie in der erforderlichen Vollständigkeit entwickelt haben. Wir zeigen, dass die aufgestellten Gleichungen ausreichen, um den Verrückungszustand des elastischen Mediums eindeutig zu bestimmen, dass es also nur ein einziges System von Grössen u, v, w giebt, welche den Differentialgleichungen und Grenzbedingungen genügen¹⁾.

Wir führen diesen Beweis zunächst für den Fall des Gleichgewichts. Nach dem Theorem A § 7 ist in diesem Falle

$$\begin{aligned} X &= \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} \\ Y &= \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} \\ Z &= \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} \end{aligned} \quad (1.)$$

für jeden Punkt im Innern des Körpers, während nach den Gleichungen (D.) § 11 für jeden Punkt der Oberfläche

$$\begin{aligned} 0 &= X' + X_x \cos(n, x) + X_y \cos(n, y) + X_z \cos(n, z) \\ 0 &= Y' + Y_x \cos(n, x) + Y_y \cos(n, y) + Y_z \cos(n, z) \\ 0 &= Z' + Z_x \cos(n, x) + Z_y \cos(n, y) + Z_z \cos(n, z) \end{aligned} \quad (2.)$$

ist. Hierin sind die äusseren Kräfte X, Y, Z und X', Y', Z' als gegebene Functionen anzusehen. Die Werthe der inneren Druckkräfte aber hängen von den gesuchten Functionen u, v, w nach Gleichungen ab, welche in dem Falle eines unkrystallinischen Mediums durch die Gleichungen (7.) § 31 in ihrer allgemeinsten Form dargestellt werden. Wir wollen uns zunächst auf diesen besonderen Fall eines nicht krystallinischen Körpers beschränken, behalten aber, um

1) G. Kirchhoff, Crelle's Journal f. Math. Bd. 66, S. 291.

den Beweis möglichst allgemein zu führen, die Form mit zwei Constanten bei, ohne die aus der Hypothese der molekularen Kräfte folgende Zurückführung auf eine einzige zu benutzen. Doch ersetzen wir die Constanten A und B nach den Formeln

$$A - B = 2\mu, \quad B = \lambda \quad (3.)$$

durch zwei neue μ und λ , von denen wir bemerken, dass ihre Werthe positiv sein müssen, weil die Formeln

$$\begin{aligned} -X_x &= 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \Delta & -X_y &= -Y_x = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ -Y_y &= 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \Delta & -Y_z &= -Z_y = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ -Z_z &= 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \Delta & -Z_x &= -X_z = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (4.)$$

sonst Kräfte darstellen würden, durch welche die vorhandene Verrückung vergrößert, nicht aber nach dem Aufhören der äusseren Ursachen wieder aufgehoben würde.

Um nun zu beweisen, dass die Gleichungen (1.), (2.), (4.) nur eine einzige Auflösung zulassen, gehen wir von der Annahme aus, dass zwei Lösungen bestehen; dann werden wir zu beweisen haben, dass beide zusammenfallen. Wir nehmen also an, dass die Gleichungen erfüllt werden, sowohl wenn statt u, v, w u_1, v_1, w_1 gesetzt wird, als auch wenn u_2, v_2, w_2 substituirt wird. Genügen wirklich diese verschiedenen Functionen, so erhalten wir, wenn wir in die Gleichg. (1.) und (2.) einmal u_1, v_1, w_1 , das andere Mal u_2, v_2, w_2 einsetzen und darauf die so erhaltenen Gleichungen von einander subtrahiren, Gleichungen, aus welchen die äusseren Kräfte fortgefallen sind, und welche die Grössen u, v, w nur in der Verbindung

$$U = u_1 - u_2; \quad V = v_1 - v_2; \quad W = w_1 - w_2 \quad (5.)$$

enthalten. Diese Differenzen müssen folglich den Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} \\ 0 &= \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} \\ 0 &= \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} \end{aligned} \quad (6.)$$

im Inneren des Körpers genügen, ferner an der Oberfläche den Bedingungen

$$\begin{aligned}
0 &= X_x \cos(n, x) + X_y \cos(n, y) + X_z \cos(n, z) \\
0 &= Y_x \cos(n, x) + Y_y \cos(n, y) + Y_z \cos(n, z) \\
0 &= Z_x \cos(n, x) + Z_y \cos(n, y) + Z_z \cos(n, z),
\end{aligned} \tag{7}$$

und hierin ist

$$\begin{aligned}
-X_x &= 2\mu \frac{\partial U}{\partial x} + \lambda \Delta & -X_y &= -Y_x = \mu \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \\
-Y_y &= 2\mu \frac{\partial V}{\partial y} + \lambda \Delta & -Y_z &= -Z_y = \mu \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) \\
-Z_z &= 2\mu \frac{\partial W}{\partial z} + \lambda \Delta & -Z_x &= -X_z = \mu \left(\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z} \right)
\end{aligned} \tag{8}$$

$$\Delta = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}.$$

Es ist zu beweisen, dass diese Gleichungen nur bestehen können, wenn die Theile des Körpers keine inneren Verschiebungen gegen einander erlitten haben.

Aus den Glchg. (6.) erhalten wir

$$\begin{aligned}
0 &= \iiint dx dy dz \left\{ U \left\{ \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} \right\} \right. \\
&\quad \left. + V \left\{ \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} \right\} + W \left\{ \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} \right\} \right\},
\end{aligned}$$

wo die Integrationen über das ganze Volumen des elastischen Mediums ausgedehnt werden sollen. Durch partielle Integration der einzelnen Glieder nach resp. x, y, z wird hieraus

$$\begin{aligned}
0 &= \int d\omega \{ X_x \cos(n, x) + X_y \cos(n, y) + X_z \cos(n, z) \} U \\
&\quad - \iiint dx dy dz \left\{ X_x \frac{\partial U}{\partial x} + X_y \frac{\partial U}{\partial y} + X_z \frac{\partial U}{\partial z} \right\} \\
&\quad + \int d\omega \{ Y_x \cos(n, x) + Y_y \cos(n, y) + Y_z \cos(n, z) \} V \\
&\quad - \iiint dx dy dz \left\{ Y_x \frac{\partial V}{\partial x} + Y_y \frac{\partial V}{\partial y} + Y_z \frac{\partial V}{\partial z} \right\} \\
&\quad + \int d\omega \{ Z_x \cos(n, x) + Z_y \cos(n, y) + Z_z \cos(n, z) \} W \\
&\quad - \iiint dx dy dz \left\{ Z_x \frac{\partial W}{\partial x} + Z_y \frac{\partial W}{\partial y} + Z_z \frac{\partial W}{\partial z} \right\},
\end{aligned}$$

wo die ersten Integrale sich auf die ganze Oberfläche des Körpers beziehen. In Folge der Glchg. (7.) verschwinden aber dieselben und es bleibt

$$0 = \iiint dx dy dz \left\{ X_x \frac{\partial U}{\partial x} + X_y \frac{\partial U}{\partial y} + X_z \frac{\partial U}{\partial z} \right. \quad (9.) \\ \left. + Y_x \frac{\partial V}{\partial x} + Y_y \frac{\partial V}{\partial y} + Y_z \frac{\partial V}{\partial z} + Z_x \frac{\partial W}{\partial x} + Z_y \frac{\partial W}{\partial y} + Z_z \frac{\partial W}{\partial z} \right\}.$$

Durch Einsetzen der Werthe aus den Gleichungen (8.) wird

$$0 = \iiint dx dy dz \left\{ 2\mu \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)^2 \right\} \right. \quad (10.) \\ \left. + \lambda \Delta^2 + \mu \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \right\} \right\}.$$

Da μ und λ positiv sind, und da im Uebrigen unter den Integralzeichen nur Quadrate reeller Grössen enthalten sind, so kann diese Gleichung nur erfüllt werden, wenn jedes Quadrat für sich verschwindet. Es ist also

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial U}{\partial x} & 0 &= \frac{\partial V}{\partial y} & 0 &= \frac{\partial W}{\partial z} \\ 0 &= \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} & 0 &= \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} & 0 &= \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z}. \end{aligned} \quad (11.)$$

Demnach ist U von x , V von y , W von z unabhängig, ferner $\frac{\partial U}{\partial y}$ von y , $\frac{\partial U}{\partial z}$ von z unabhängig u. s. f.; es ist also U eine lineare Function von y und z allein, V von z und x allein und endlich W von x und y allein, und zwar ist

$$U = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}y - \mathfrak{B}_2z; \quad V = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{B}_1z - \mathfrak{B}x; \quad W = \mathfrak{A}_2 + \mathfrak{B}_2x - \mathfrak{B}_1y, \quad (12.)$$

wo die sechs Grössen \mathfrak{A} und \mathfrak{B} Constanten bedeuten.

In diesen Formeln bedeuten die ersten Glieder \mathfrak{A} , \mathfrak{A}_1 , \mathfrak{A}_2 eine constante Verschiebung, die anderen eine Drehung des ganzen Körpers, deren Componenten um die drei Coordinatenaxen \mathfrak{B} , \mathfrak{B}_1 , \mathfrak{B}_2 sind. Die Ausdrücke für U , V , W enthalten folglich keine relativen Verrückungen der Theile des elastischen Körpers gegen einander. Wofern wir also, wie wir es in dieser Theorie thun, unter den Lösungen u , v , w unserer Gleichungen nur die relativen Verrückungen der Theilchen verstehen, können wir behaupten, dass die Lösungen der Gldg. (6.), (7.), (8.)

$$U = 0, \quad V = 0, \quad W = 0$$

sind, dass also nach den Gleichungen (5.) die angenommenen Auflösungen der Gleichungen (1.), (2.) und (4.)

$$u_1 = u_2, \quad v_1 = v_2, \quad w_1 = w_2$$

einander gleich sind. Damit ist bewiesen, dass diese Gleichungen nur eine Lösung besitzen.

Dasselbe lässt sich auch ohne Integration der Gleichungen (11.) einsehen, wenn man das System von Gleichungen (7.) § 24

$$\xi = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) a + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) b + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) c \text{ u. s. f.}$$

benutzt, in welchem ξ, η, ζ die von einer gemeinschaftlichen Drehung befreiten Coordinaten der Dilatationsoberfläche bezeichnen. In Folge der Gleichg. (11.) erhält man aus denselben

$$\xi = a, \quad \eta = b, \quad \zeta = c,$$

also gleich Constanten, und zwar gleich den Constanten, welche dem natürlichen Zustande entsprechen.

§ 61. Beweis für die einzige Lösung im Falle der Bewegung.

Einen ähnlichen Beweis führen wir für den Fall der Bewegung, in welchem wir statt der Gleichungen (1.) des vorigen Paragraphen erhalten

$$\begin{aligned} X - \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} \\ Y - \varepsilon \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} \\ Z - \varepsilon \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z}, \end{aligned} \quad (1.)$$

während die Gleichungen (2.) und (4.) § 60 unveränderte Gültigkeit behalten. Zu diesen zwölf Gleichungen treten aber noch sechs weitere hinzu, welche sich auf den Anfangszustand der Bewegung beziehen. Die Functionen u, v, w haben noch den Bedingungen zu genügen, dass sie und ihre Differentialquotienten nach der Zeit für einen bestimmten Zeitmoment $t = t_0$ gegebenen Functionen der Coordinaten gleich werden:

$$\begin{aligned} u &= f_1(xyz) & v &= f_2(xyz) & w &= f_3(xyz) \\ t = t_0 \quad \frac{\partial u}{\partial t} &= \varphi_1(xyz) & \frac{\partial v}{\partial t} &= \varphi_2(xyz) & \frac{\partial w}{\partial t} &= \varphi_3(xyz). \end{aligned} \quad (2.)$$

Wenn diesen Gleichungen zwei verschiedene Systeme von Functionen u_1, v_1, w_1 und u_2, v_2, w_2 genügen, so erfüllen die Differenzen

$$U = u_1 - u_2, \quad V = v_1 - v_2, \quad W = w_1 - w_2 \quad (3.)$$

folgende Gleichungen. Für jeden Werth von x, y, z, t gelten die Gleichungen

$$\begin{aligned}
 0 &= \varepsilon \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} \\
 0 &= \varepsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} \\
 0 &= \varepsilon \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z};
 \end{aligned} \tag{4}$$

ferner für jeden Werth von t und für solche Werthe von x, y, z , welche Punkte der Oberfläche des elastischen Körpers bestimmen, ist

$$\begin{aligned}
 0 &= X_x \cos(n, x) + X_y \cos(n, y) + X_z \cos(n, z) \\
 0 &= Y_x \cos(n, x) + Y_y \cos(n, y) + Y_z \cos(n, z) \\
 0 &= Z_x \cos(n, x) + Z_y \cos(n, y) + Z_z \cos(n, z);
 \end{aligned} \tag{5}$$

dann ist für jeden Werth der Coordinaten x, y, z , aber für den speciellen Werth der Zeit $t = t_0$,

$$\begin{aligned}
 t = t_0 \quad U &= 0; & V &= 0; & W &= 0; \\
 \frac{\partial U}{\partial t} &= 0; & \frac{\partial V}{\partial t} &= 0; & \frac{\partial W}{\partial t} &= 0;
 \end{aligned} \tag{6}$$

endlich gilt noch allgemein für jeden Werth von x, y, z, t

$$\begin{aligned}
 -X_x &= 2\mu \frac{\partial U}{\partial x} + \lambda \Delta & -X_y &= -Y_x = \mu \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \\
 -Y_y &= 2\mu \frac{\partial V}{\partial y} + \lambda \Delta & -Y_z &= -Z_y = \mu \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) \\
 -Z_z &= 2\mu \frac{\partial W}{\partial z} + \lambda \Delta & -Z_x &= -X_z = \mu \left(\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z} \right) \\
 \Delta &= \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}.
 \end{aligned} \tag{7}$$

Es ist zu beweisen, dass allen diesen Bedingungen nur genügt wird, wenn

$$U = 0, \quad V = 0, \quad W = 0$$

gesetzt wird.

Aus den Gleichungen (4.) folgt

$$\begin{aligned}
 0 &= \iiint dx dy dz \left\{ \left\{ \varepsilon \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} \right\} \frac{\partial U}{\partial t} \right. \\
 &\quad + \left\{ \varepsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} \right\} \frac{\partial V}{\partial t} \\
 &\quad \left. + \left\{ \varepsilon \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} \right\} \frac{\partial W}{\partial t} \right\}
 \end{aligned} \tag{8}$$

und hieraus durch partielle Integration der Glieder, welche Druckcomponenten X, Y, Z enthalten,

$$\begin{aligned}
0 = & \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial}{\partial t} \iiint dx dy dz \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 \right\} \\
& + \int d\omega \left\{ \bar{X}_x \cos(n, x) + \bar{X}_y \cos(n, y) + \bar{X}_z \cos(n, z) \right\} \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} \\
& - \iiint dx dy dz \left\{ \bar{X}_x \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} + \bar{X}_y \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial t} + \bar{X}_z \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial t} \right\} \\
& + \int d\omega \left\{ \bar{Y}_x \cos(n, x) + \bar{Y}_y \cos(n, y) + \bar{Y}_z \cos(n, z) \right\} \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} \quad (9.) \\
& - \iiint dx dy dz \left\{ \bar{Y}_x \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial t} + \bar{Y}_y \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial t} + \bar{Y}_z \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial t} \right\} \\
& + \int d\omega \left\{ \bar{Z}_x \cos(n, x) + \bar{Z}_y \cos(n, y) + \bar{Z}_z \cos(n, z) \right\} \frac{\partial \bar{W}}{\partial t} \\
& - \iiint dx dy dz \left\{ \bar{Z}_x \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial t} + \bar{Z}_y \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial t} + \bar{Z}_z \frac{\partial^2 W}{\partial z \partial t} \right\}.
\end{aligned}$$

Hierin fallen in Folge der Gleichg. (5.) die Oberflächen-Integrale fort, und wenn wir aus den Gleichungen (7.) die Werthe der Druckkräfte einsetzen, so verwandelt sich die rechte Seite der Gleichung in ein vollständiges Differential nach t . Integriren wir von t_0 bis t , so erhalten wir mit Rücksicht auf die Gleichungen (6.)

$$\begin{aligned}
0 = & \varepsilon \iiint dx dy dz \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 \right\} \\
& + \iiint dx dy dz \left\{ 2\mu \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)^2 \right\} \right. \quad (10.) \\
& \left. + \lambda \Delta^2 + \mu \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \right\} \right\}.
\end{aligned}$$

Diese Gleichung, welche rechterseits nur positive Grössen enthält, kann nur erfüllt werden, wenn jedes der Quadrate für sich verschwindet. Es muss also sein

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial t} = 0 & \qquad \frac{\partial V}{\partial t} = 0 & \qquad \frac{\partial W}{\partial t} = 0 \\
\frac{\partial U}{\partial x} = 0 & \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = 0 & \qquad \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \quad (11.) \\
\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0 & \qquad \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} = 0 & \qquad \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z} = 0
\end{aligned}$$

und zwar für jeden Werth von x, y, z, t . Aus den drei ersten dieser Gleichungen in Verbindung mit den ersten Gleichg. (6.) folgt, dass für alle Zeit und jeden Werth von x, y, z

$$U = 0 \qquad V = 0 \qquad W = 0 \quad (12.)$$

sein muss. Damit ist auch für den Fall der Bewegung bewiesen, dass die elastischen Gleichungen nur eine einzige Lösung zulassen.

§ 62. Verallgemeinerung des Beweises für Krystalle.

Der durchgeführte Beweis bezieht sich nur auf unkrystallinische Medien. Man kann ihn ebenfalls auf krystallinische ausdehnen, freilich unter einer Beschränkung, aber unter einer solchen, welche in der Natur erfüllt ist.

In dem Falle eines krystallinischen Mediums hat man an der Beweisführung nichts zu ändern. Es sind alle Formeln ebenso anzusetzen, mit alleiniger Ausnahme der Werthe der Druckcomponenten, welche nach Anleitung der Formeln (1.) § 41 zu bilden sind. Also ist nichts weiter zu ändern, als dass statt der Formeln (8.) § 60 und (7.) § 61 allgemeiner zu schreiben ist:

$$\begin{aligned} -X_x &= A \frac{\partial U}{\partial x} + c \frac{\partial V}{\partial y} + b \frac{\partial W}{\partial z} & -X_y &= -Y_x = c \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \\ -Y_y &= c \frac{\partial U}{\partial x} + B \frac{\partial V}{\partial y} + a \frac{\partial W}{\partial z} & -Y_z &= -Z_y = a \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) \\ -Z_z &= b \frac{\partial U}{\partial x} + a \frac{\partial V}{\partial y} + C \frac{\partial W}{\partial z} & -Z_x &= -X_z = b \left(\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (1.)$$

Hierin sind die Constanten A, B, C, a, b, c positive Grössen.

Ebenso bleibt die Rechnung bis zu den Formeln (9.) beider Paragraphen unverändert gültig, auch die Gleichungen (10.) bleiben der Form nach bestehen, nur ändern sich in denselben die Coefficienten, mit welchen die Quadrate der Dilatationen multiplicirt sind. Um diese allgemeineren Werthe der Coefficienten zu erhalten, bilden wir die in den Gleichungen (9.) unter dem Integralzeichen vorkommenden Grössen

$$\begin{aligned} -X_x \frac{\partial U}{\partial x} - Y_y \frac{\partial V}{\partial y} - Z_z \frac{\partial W}{\partial z} &= (A - b - c) \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + (B - c - a) \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 \\ &+ (C - a - b) \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)^2 + c \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + a \left(\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right)^2 + b \left(\frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 \\ -X_y \frac{\partial U}{\partial y} - Y_x \frac{\partial V}{\partial x} &= c \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \\ -Y_z \frac{\partial V}{\partial z} - Z_y \frac{\partial W}{\partial y} &= a \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 \\ -Z_x \frac{\partial W}{\partial x} - X_z \frac{\partial U}{\partial z} &= b \left(\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2. \end{aligned} \quad (2.)$$

Die drei letzten Grössen werden also auch hier unbedingt von positivem Werthe, dagegen die erste nur dann, wenn

$$A - b - c, \quad B - c - a, \quad C - a - b$$

positiv sind. Diese Bedingungen sind aber in der Natur wirklich erfüllt¹⁾; denn es wird allgemein bei allen Krystallen beobachtet, dass die Aenderung ihrer Elasticität mit der Richtung sehr klein ist gegen den Werth, den die Elasticität im Ganzen hat. Wir können also setzen

$$\begin{aligned} A &= 3k + \kappa_1 & B &= 3k + \kappa_2 & C &= 3k + \kappa_3 \\ a &= k + \varpi_1 & b &= k + \varpi_2 & c &= k + \varpi_3 \end{aligned}$$

und behaupten, dass der absolute Werth der Grössen κ und ϖ sehr klein ist im Verhältniss zur mittleren Elasticitätsconstante k . Setzen wir die κ und $\varpi = 0$, so erhalten wir die für unkrystallinische Medien geltenden Formeln. Nach dieser Beobachtung sind die Grössen

$$\begin{aligned} A - b - c &= k + \kappa_1 - \varpi_2 - \varpi_3; & B - c - a &= k + \kappa_2 - \varpi_1 - \varpi_3; \\ C - a - b &= k + \kappa_3 - \varpi_1 - \varpi_2 \end{aligned}$$

allerdings positiv.

Wir setzen demnach als erfahrungsmässig festgestellt voraus, dass

$$A > b + c, \quad B > c + a, \quad C > a + b$$

sei, und schliessen, dass auch für krystallinische Medien das über die Grössen (2.) ausgeführte Raumintegral nur dann verschwinden kann, wenn die unter (11.) § 60 oder 61 angegebenen Differentialquotienten verschwinden. Damit ist auch für krystallinische Medien, wie sie in der Natur vorkommen, der Beweis geliefert, dass die aufgestellten Gleichungen nur eine einzige Auflösung für jeden Fall der Ruhe oder der Bewegung zulassen.

§ 63. Energie der elastischen Kräfte.

Zum Schlusse dieser allgemeinen Untersuchungen bestimmen wir die lebendige Kraft, welche ein elastisches System bei einer be-

1) Wie später folgende Untersuchungen (§ 110) zeigen werden, sind die Bedingungen auch für den Lichtäther erfüllt. Durch die experimentell bestätigten Gesetze der Doppelbrechung werden die Relationen

$$A = 3(b + c - a), \quad B = 3(c + a - b), \quad C = 3(a + b - c)$$

gefunden, aus denen sich die Werthe

$A - b - c = 2(b + c) - 3a$, $B - c - a = 2(c + a) - 3b$, $C - a - b = 2(a + b) - 3c$ ergeben, welche in der That positiv sind, da die Unterschiede von a, b, c klein gegen a, b, c selber sind; ihre Summe beträgt $a + b + c$.

stimmten Temperaturvertheilung besitzt, und stellen die Gleichung für die Erhaltung der Energie auf. Wir beschränken uns dabei auf unkrystallinische Medien.

Um den Ausdruck für die geleistete Arbeit in dem System zu finden, gehen wir von den Gleichungen (3.) § 55 aus, welche wir mit der entsprechenden Componente der Geschwindigkeit sowie mit dem Raumelement multipliciren, um sie dann über den ganzen Raum des elastischen Systems zu integriren. Wir erhalten

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \iiint dx dy dz \varepsilon \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right\} \\ & = \frac{\partial}{\partial t} \iiint dx dy dz \{ Xu + Yv + Zw \} \\ & - \iiint dx dy dz \left\{ \left(p \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} \right) \frac{\partial u}{\partial t} \right. \\ & \quad + \left(p \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} \right) \frac{\partial v}{\partial t} \\ & \quad \left. + \left(p \frac{\partial s}{\partial z} + \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} \right) \frac{\partial w}{\partial t} \right\}, \end{aligned} \quad (1.)$$

falls die äusseren Kräfte X, Y, Z von der Zeit t unabhängig sind. Durch partielle Integration der einzelnen Glieder nach dx, dy, dz finden wir

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \iiint dx dy dz \varepsilon \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right\} \\ & = \frac{\partial}{\partial t} \iiint dx dy dz \{ Xu + Yv + Zw \} \\ & - \int d\omega \left\{ \left((ps + X_x) \cos(n, x) + X_y \cos(n, y) + X_z \cos(n, z) \right) \frac{\partial u}{\partial t} \right. \\ & \quad + \left(Y_x \cos(n, x) + (ps + Y_y) \cos(n, y) + Y_z \cos(n, z) \right) \frac{\partial v}{\partial t} \\ & \quad \left. + \left(Z_x \cos(n, x) + Z_y \cos(n, y) + (ps + Z_z) \cos(n, z) \right) \frac{\partial w}{\partial t} \right\} \\ & + \iiint dx dy dz \left\{ X_x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + Y_y \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial t} + Z_z \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial t} + X_y \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right. \\ & \quad \left. + Y_x \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + Z_x \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) + ps \frac{\partial \Delta}{\partial t} \right\}. \end{aligned} \quad (2.)$$

Das über die gesammte Oberfläche sich erstreckende Integral nach $d\omega$ lässt sich vermöge der an der Oberfläche gültigen Gleichungen (1.) § 56 vereinfachen und, wenn die auf die Oberfläche wirkenden Druckkräfte von der Zeit unabhängig sind, als ein nach dt auszuführender Differentialquotient darstellen. Dasselbe gelingt

mit den Gliedern des letzten Integrals, sobald wir den Zusammenhang berücksichtigen, welcher zwischen den Verrückungen und den Werthen der Druckcomponenten besteht. Aus den Gleichungen (4.) § 60 folgt

$$-(X_x + Y_y + Z_z) = (2\mu + 3\lambda)\Delta,$$

also ist

$$\Delta = -\frac{1}{2\mu + 3\lambda} (X_x + Y_y + Z_z)$$

und daraus

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{1}{2\mu} \left\{ X_x - \frac{\lambda}{2\mu + 3\lambda} (X_x + Y_y + Z_z) \right\} & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{1}{\mu} X_y \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{2\mu} \left\{ Y_y - \frac{\lambda}{2\mu + 3\lambda} (X_x + Y_y + Z_z) \right\} & \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} &= -\frac{1}{\mu} Y_z \quad (3.) \\ \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{2\mu} \left\{ Z_z - \frac{\lambda}{2\mu + 3\lambda} (X_x + Y_y + Z_z) \right\} & \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\mu} Z_x. \end{aligned}$$

Also erhalten wir

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \iiint dx dy dz \varepsilon \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right\} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \iiint dx dy dz \{ Xu + Yv + Zw \} + \frac{\partial}{\partial t} \int d\omega \{ X'u + Y'v + Z'w \} \\ &+ \frac{1}{4\mu} \frac{\partial}{\partial t} \iiint dx dy dz \left\{ \frac{\lambda}{2\mu + 3\lambda} (X_x + Y_y + Z_z)^2 - (X_x^2 + Y_y^2 + Z_z^2) \right. \\ & \quad \left. - 2(X_y^2 + Y_z^2 + Z_x^2) + 4\mu ps \Delta \right\}. \end{aligned} \quad (4.)$$

Jedoch ist diese Umformung des letzten Gliedes nur erlaubt, wenn die Temperatur s von der Zeit nicht abhängt. Im anderen Falle müssen wir auf die Fourier'sche Gleichung (§ 59) zurückgehen, um $\frac{\partial s}{\partial t}$ auszudrücken.

Durch Integration der Gleichung (4.) nach der Zeit erhalten wir die Gleichung der lebendigen Kräfte

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \iiint dx dy dz \varepsilon \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right\} + \text{const.} \\ &= \iiint dx dy dz \{ Xu + Yv + Zw \} + \int d\omega \{ X'u + Y'v + Z'w \} \\ &+ \frac{1}{2\mu} \iiint dx dy dz \left\{ -\frac{\mu + \lambda}{2\mu + 3\lambda} (X_x + Y_y + Z_z)^2 \right. \\ & \quad \left. + X_x Y_y + Y_y Z_z + Z_z X_x - X_y^2 - Y_z^2 - Z_x^2 + 2\mu ps \Delta \right\}. \end{aligned} \quad (5.)$$

Das letzte Integral giebt die im Innern des elastischen Systems geleistete Arbeit an.

Für die letztere Grösse lässt sich noch eine andere öfter benutzte Form angeben. Indem wir die Molekulardruck-Componenten durch die Verrückungen ausdrücken, erhalten wir

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \iiint dx dy dz \varepsilon \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right\} + \text{const.} \\ &= \iiint dx dy dz \{ Xu + Yv + Zw \} + \int d\omega \{ X'u + Y'v + Z'w \} \\ &= \frac{1}{2} \iiint dx dy dz \left\{ \lambda \Delta^2 + 2\mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] \right. \\ & \quad \left. + \mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] - 2ps\Delta \right\}. \end{aligned} \quad (6.)$$

Aus dieser Gleichung folgt, dass die lebendige Kraft der Bewegung im System immer durch die eingetretenen Verrückungen vermindert wird.

Findet Gleichgewicht statt, so wird die Kräftefunction zu einem Maximum. Diese Bemerkung kann man benutzen, um aus der Gleichung (6.) die uns bereits auf verschiedenen Wegen bekannt gewordenen Bedingungen für das Gleichgewicht eines elastischen Körpers herzuleiten. Aus dem letzten Integral, welches als das Potential der elastischen Kräfte zu bezeichnen ist, erhält man die Werthe der Druckcomponenten durch Differentiation nach den Verrückungen¹⁾

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}.$$

1) W. Thomson, quart. journ. of math. April 1856. G. Kirchhoff, Crelle's Journal f. Math. Bd. 56. S. 290. 1859.

Untersuchungen über den Gleichgewichtszustand deformirter elastischer Körper.

11. Anwendungen auf unkrystallinische Körper.

§ 64. Vorbemerkungen.

Die entwickelten allgemeinen Gleichungen sollen jetzt auf einige besondere Aufgaben angewandt werden, bei denen es sich um die Deformationen handelt, welche einfach gestaltete unkrystallinische Körper durch Zug- oder Druckkräfte erleiden. Diese Untersuchungen werden geeignet sein, einen zweifelhaften Punkt der Navier'schen und aller derjenigen Theorien, welche von der Hypothese molekularer Anziehung ausgehen, in's Licht treten zu lassen. Dieser Punkt betrifft die aus jener Annahme gezogene Folgerung (§ 35), dass zwischen den beiden Elasticitätsconstanten eine einfache allgemein gültige Beziehung bestehe, eine Beziehung, welche sich nach der im fünften Abschnitt gegebenen Herleitung der Gleichungen nicht als nothwendig erwies. Wir werden daher auch jetzt diese Beziehung nicht einführen, sondern die Formeln für die Druckcomponenten in der allgemeineren Gestalt der Gleichungen (4.) § 60 benutzen, sowie die Differentialgleichungen (1.) § 32 in der entsprechenden Form

$$\begin{aligned}
 \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \mu \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right\} + (\mu + \lambda) \frac{\partial \Delta}{\partial x} + X \\
 \varepsilon \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \mu \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right\} + (\mu + \lambda) \frac{\partial \Delta}{\partial y} + Y \\
 \varepsilon \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \mu \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right\} + (\mu + \lambda) \frac{\partial \Delta}{\partial z} + Z
 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\Delta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Es wird dann die Aufgabe unserer theoretischen Betrachtungen sein, Formeln zu gewinnen, aus denen durch Vergleichung mit angestellten Beobachtungen die Frage entschieden werden kann, ob wirklich, wie

jene Theorien verlangen, die beiden Constanten μ und λ für alle unkrystallinischen Stoffe einander gleich sind.

Bei der Auflösung unserer Gleichungen werden wir nicht in allen Fällen mathematisch strenge Integrationsmethoden anwenden; wir werden uns vielmehr öfter damit begnügen, nachzuweisen, dass die aufgestellten Lösungen die Gleichungen erfüllen. Ein solches Verfahren reicht aus, weil wir im vorigen Abschnitt den Beweis geführt haben, dass den Gleichungen nur eine einzige Lösung genügt. Haben wir also eine befriedigende Auflösung gefunden, so können wir sicher sein, die einzig richtige getroffen zu haben.

§ 65. Ausdehnung eines prismatischen Körpers durch Zug.

Es sei ein prismatischer Körper gegeben. Gegen zwei einander gegenüberliegende Flächen wirken gleiche, aber entgegengesetzte Kräfte. Die Seitenflächen sind frei. Andere äussere Kräfte sollen nicht auf den Körper wirken. Wir rechnen die Coordinaten von dem Punkte in der Mitte des prismatischen Körpers aus parallel den Seiten des Prismas und bezeichnen die halben Längen der Kanten mit a, b, c . Die auf die beiden Flächen wirkenden Drücke nennen wir C und $-C$, bezogen auf die Einheit der Fläche, und nehmen an, dass diese Drücke die positive Richtung der Coordinate z haben, so dass also beide nach der vulgären Vorstellung als auf die Fläche ausgeübter Zug anzusehen sind.

Wir übersehen ohne Rechnung, dass die Axen des Dilatationsellipsoids parallel den Kanten des Prismas, also parallel den Coordinatenaxen liegen; folglich ist für jeden Punkt im Innern

$$\begin{aligned} X_y &= 0, & Y_x &= 0, & Z_x &= 0, \\ X_z &= 0, & Y_z &= 0, & Z_y &= 0. \end{aligned} \quad (1.)$$

Dagegen sind die Hauptdruckcomponenten

$$X_x = -2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \lambda \Delta, \quad Y_y = -2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - \lambda \Delta, \quad Z_z = -2\mu \frac{\partial w}{\partial z} - \lambda \Delta. \quad (2.)$$

Hiernach verwandeln sich die aus dem Theorem A hergeleiteten Gleichungen (1.) § 64, denen die Grössen u, v, w zu genügen haben, in unserem Falle, in welchem auch die äusseren Kräfte

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0$$

sind und die Beschleunigungen fortfallen, in die einfachen Gleichungen

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Y_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial Z_z}{\partial z} = 0. \quad (3.)$$

Diese Gleichungen zeigen, dass u , v , w lineare Functionen der Coordinaten sind, und zwar kann u nur von x , v nur von y , w nur von z abhängen, da ausser den Gleichungen (1.) auch die Bedingungen

$$0 = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}, \quad 0 = \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}, \quad 0 = \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \quad (4.)$$

erfüllt sein müssen, weil kein Grund zu einer Drehung vorliegt. Wir setzen daher

$$u = \alpha x, \quad v = \beta y, \quad w = \gamma z, \quad (5.)$$

worin α , β , γ constante Grössen sein sollen; dabei unterlassen wir, constante Glieder hinzuzufügen, weil der Mittelpunkt des Prismas, für welchen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ ist, keine Verschiebung erleidet.

Dass diese Annahme allen bisher aufgestellten Gleichungen genügt, ist leicht einzusehen. Es bleiben also nur noch die Bedingungen für die Oberfläche zu erfüllen, welche nach dem Theorem D § 11 zu bilden sind. Wir erhalten, da $X' = 0$, $Y' = 0$, $Z' = C$ angenommen wurde,

$$\begin{array}{lll} \text{für } x = \pm a & \text{für } y = \pm b & \text{für } z = \pm c \\ 0 = X_x & 0 = X_y & 0 = X_z \\ 0 = Y_x & 0 = Y_y & 0 = Y_z \\ 0 = Z_x & 0 = Z_y & 0 = Z_z + C. \end{array} \quad (6.)$$

Es müssen also noch folgende Relationen

$$\begin{array}{l} 0 = 2\mu\alpha + \lambda(\alpha + \beta + \gamma) \\ 0 = 2\mu\beta + \lambda(\alpha + \beta + \gamma) \\ C = 2\mu\gamma + \lambda(\alpha + \beta + \gamma) \end{array} \quad (7.)$$

erfüllt werden, denen wir durch Bestimmung der drei Constanten α , β , γ genügen können. Da nicht mehr Bedingungen zu erfüllen sind, so ist damit die Richtigkeit der von uns angenommenen Lösung bewiesen.

Aus den Gleichungen (7.) erhalten wir

$$C = (2\mu + 3\lambda)(\alpha + \beta + \gamma) = (2\mu + 3\lambda)\Delta;$$

also ist die räumliche Dilatation

$$\Delta = \frac{C}{2\mu + 3\lambda}, \quad (8.)$$

und für die Längendilatationen erhalten wir

$$\gamma = \frac{\mu + \lambda}{\mu} \frac{C}{2\mu + 3\lambda}, \quad \alpha = \beta = -\frac{\lambda}{2\mu} \frac{C}{2\mu + 3\lambda}. \quad (9.)$$

Die Vorzeichen der Formeln lehren, dass, während das Prisma sich

in der Längsrichtung ausdehnt, in den Querdimensionen eine Zusammenziehung eintritt.

Man pflegt die Elasticität eines Stoffes durch seinen Elasticitätscoefficienten m oder durch das constante Verhältniss zu messen, in welchem die dehnende Kraft C zu der Längsdehnung γ steht. Der Werth dieses Coefficienten ist nach der vorstehenden Formel

$$m = \mu \frac{2\mu + 3\lambda}{\mu + \lambda}. \quad (10.)$$

Eine andere Bestimmung der Elasticität haben wir bereits in § 42 besprochen, wo wir das constante Verhältniss einer auf die Oberfläche gleichmässig wirkenden Pressung zu der bewirkten Verkleinerung der Dimensionen als Elasticitätsmodulus M bezeichneten. Führen wir die dort angestellte Rechnung mit Unterscheidung der Constanten μ und λ durch, so finden wir statt der Formel (12.) § 42 die allgemeinere

$$M = 2\mu + 3\lambda. \quad (11.)$$

Man erhält also nach dieser Methode eine grössere Elasticitätsconstante, als wenn man einen durch einseitigen Zug gedehnten Körper beobachtet.

§ 66. Längsdilatation und Quercontraction.

An die Gleichungen des vorigen § knüpfen sich einige Bemerkungen. Nehmen wir an, es sei die aus den Navier'schen Betrachtungen (§ 35) gefolgerte Relation zwischen den Constanten richtig, also

$$\mu = \lambda = k,$$

so erhalten wir

$$\Delta = \frac{C}{5k}, \quad \gamma = \frac{2}{5k} C, \quad \alpha = \beta = -\frac{C}{2 \cdot 5k}.$$

Diese Ausdrücke zeigen, dass, wenn die Theorie richtig ist, die seitliche Contraction gleich dem vierten Theile der Längendilatation ist; dass also, wenn ein Prisma von der Länge 1 auf die Länge $1 + \delta$ ausgedehnt wird, seine Seiten sich in dem Verhältniss von 1 zu $1 - \frac{1}{4} \delta$ zusammenziehen; die Vergrösserung des Volumens wird dadurch $1 + \frac{1}{2} \delta$.

Dieses überraschende Resultat, welches Poisson aus seiner Theorie zog, veranlasste Cagniard de la Tour¹⁾ eine Beobachtung zur Prüfung

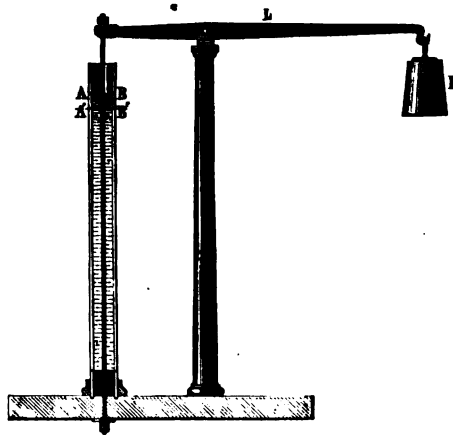
1) Ann. chim. phys. T. 36. p. 384. 1827; Pogg. Ann. Bd. 12. S. 516.

desselben anzustellen. Er experimentirte mit einem Drahte von 2030 mm Länge, der sich in Wasser in einem engen Rohre befand. Hob er den Draht um 6 mm, so fiel das Niveau des Wassers um 5 mm. Dehnte er darauf den Draht durch ein Gewicht um 6 mm aus, so fiel das Niveau um 2,5 mm. Die Längendilatation betrug also

$$\delta = \frac{6}{2030},$$

und die Contraction des Querschnitts

$$\frac{2,5 \cdot \frac{6}{5}}{2030} = \frac{3}{2030};$$



folglich war die lineare Contraction, welche eine Querdimension erlitten hatte,

$$\frac{1,5}{2030},$$

so dass sie in der That ein Viertel der Längendilatation ausmachte.

Es ist sehr zu bedauern, dass Cagniard de la Tour nur diese eine Beobachtung angestellt hat, welche mehr ein Beispiel der Methode, als ein Beweis für den allgemeinen Satz der Theorie ist. Die Richtigkeit derselben ist daher später bezweifelt worden, namentlich zuerst von Regnault. Durch ihn veranlasst, stellte Wertheim¹⁾ zahlreiche Versuche an, welche im Allgemeinen eine grosse Abweichung von dem theoretischen Resultate ergaben. Wertheim fand seitliche Contractionen, welche viel näher gleich $\frac{1}{3}$ der Längendilatation als $\frac{1}{4}$ sind, so dass er nicht den Poisson'schen Coefficienten $\frac{1}{4}$, sondern statt dessen $\frac{1}{3}$ für den richtigen Coefficienten hält. Ist dies der Fall, so wäre nach den Formeln (9.) § 65

$$2 \frac{\mu + \lambda}{\lambda} = 3,$$

woraus man das Verhältniss $\lambda = 2\mu$ ableiten kann.

Die Methode, deren sich Wertheim bediente, werden wir in den nächsten §§ eingehender besprechen. Ein hohler Cylinder (s. die Fig. auf folg. S.) ist an seinen beiden Enden geschlossen. Das obere

1) Ann. Chim. Phys. 3. sér. T. 23. p. 52. — Pogg. Ann. Bd. 78. S. 381. 1849.

Ende wird befestigt, das untere durch Anhängen schwerer Gewichte belastet. Die dadurch hervorgebrachte Längenausdehnung des Cylinders misst man an zwei Marken, die auf demselben angebracht sind; die Volumenvergrößerung durch ein Capillarrohr, das mit dem Cylinder communicirt und ebenso, wie der Cylinder, mit Flüssigkeit gefüllt ist.

Andere Beobachtungen wurden von F. Neumann nach einer Methode angestellt, welche der von Cagniard de la Tour angewandten ähnlich war. In einem Gefässe von starken Wandungen ist ein Draht so ausgespannt, dass er durch eine Schraube beliebig verlängert und gespannt werden kann. Die Verlängerung beobachtet man an einer Kreistheilung, auf der sich ein an der Schraube befindlicher Zeiger bewegt. Das Gefäss ist mit Flüssigkeit gefüllt und mit einem Capillarrohr versehen, in dem der Stand der Flüssigkeit beobachtet werden kann; durch diese Beobachtungen erhält man die Volumendilatation. Da der Apparat in dieser Construction ein empfindliches Thermometer ist, so befindet er sich, um jede Aenderung der Temperatur zu vermeiden, in schmelzendem Schnee. Nach dem Zurückdrehen der Schraube muss die Flüssigkeit ihren ursprünglichen Stand im Rohre wieder einnehmen, wenn der Draht nur innerhalb der Grenze der Elasticität ausgedehnt war. Es fehlte eine Vorrichtung, um sich zugleich zu überzeugen, ob der Draht auch seine ursprüngliche Länge wieder annahm. Aus diesen Beobachtungen ergaben sich für das Verhältniss, in welchem die Quersammenziehung zur Längenausdehnung steht, Werthe, welche für Eisendraht sehr genau mit dem von Cagniard de la Tour erhaltenen $\frac{1}{4}$ übereinstimmten; für andere Stoffe dagegen näherte sich das Verhältniss dem Werthe $\frac{1}{4}$.



§ 67. Dilatationen eines hohlen Cylinders.

Wir behandeln die Theorie der Wertheim'schen Beobachtungen etwas allgenteiner, indem wir die Dilatationen eines Hohlcyllinders suchen, auf dessen sämmtliche Flächen Druckkräfte wirken. Auf die innere Fläche wirke ein gleichmässiger Druck p , bezogen auf die Flächeneinheit; ebenso erfahre die äussere Oberfläche eine Wirkung P gegen die Einheit der Fläche; wir rechnen P wie p positiv in der Richtung des Radius des Cylinders von der Axe aus, so dass P

richtiger als Zugkraft, denn als Druck zu bezeichnen ist. Endlich werde der Hohlcyylinder in der Richtung seiner Axe durch eine auf die ringförmige Basis der Cylinderwand wirkende Zugkraft Π ausgedehnt; wir nehmen eine solche Kraft auf beiden Grundflächen in entgegengesetzter Richtung wirksam an.

Dann bleibt der mittlere Punkt der Axe an seiner Stelle. Wir wählen daher diesen zum Anfang eines Cylinderkoordinatensystems, x in der Richtung der Axe und

$$s = \sqrt{y^2 + z^2}$$

in der Richtung des Radius. Der Halbmesser des inneren Hohlraums sei r , der äussere Halbmesser des Cylinders R , die Höhe des Cylinders $2a$. Dann sind für die Oberfläche nach dem Theorem D § 11 folgende Gleichungen zu erfüllen:

1) für die innere Cylinderfläche, $s = r$,

$$\begin{aligned} 0 &= p \frac{y}{r} - Y_y \frac{y}{r} - Y_z \frac{z}{r} \\ 0 &= p \frac{z}{r} - Z_y \frac{y}{r} - Z_z \frac{z}{r}; \end{aligned} \quad (1.)$$

2) für die äussere Cylinderfläche, $s = R$,

$$\begin{aligned} 0 &= P \frac{y}{R} + Y_y \frac{y}{R} + Y_z \frac{z}{R} \\ 0 &= P \frac{z}{R} + Z_y \frac{y}{R} + Z_z \frac{z}{R}; \end{aligned} \quad (2.)$$

3) für die beiden ebenen Endflächen, $x = \pm a$,

$$0 = X_x + \Pi, \quad 0 = Y_x, \quad 0 = Z_x. \quad (3.)$$

Man sieht ohne Rechnung ein, dass durch die in den Richtungen von x und s wirkenden Kräfte Verrückungen nur in denselben Richtungen x und s entstehen können. Wir bezeichnen die durch die Verschiebungen veränderten Werthe von x und s durch $x + u$ und $s(1 + \varphi)$; dann sind die Componenten der Verrückungen nach den Richtungen der geradlinigen Coordinaten

$$u = u, \quad v = \varphi y, \quad w = \varphi z. \quad (4.)$$

Hierin ist, wie ebenfalls leicht ersichtlich sein wird, u nur von x , φ nur von s abhängig. Demnach wird die räumliche Dilatation der Cylinderwand,

$$\Delta = \frac{du}{dx} + 2\varphi + s \frac{d\varphi}{ds}; \quad (5.)$$

ferner ergibt sich

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= \frac{d^2 u}{dx^2} &&= \frac{\partial \Delta}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} &= \frac{y}{s} \left\{ s \frac{d^2 \varrho}{ds^2} + 3 \frac{d\varrho}{ds} \right\} &&= \frac{\partial \Delta}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} &= \frac{z}{s} \left\{ s \frac{d^2 \varrho}{ds^2} + 3 \frac{d\varrho}{ds} \right\} &&= \frac{\partial \Delta}{\partial z}.\end{aligned}$$

Folglich reduciren sich die drei partiellen Differentialgleichungen auf die einfachen Gleichungen

$$0 = \frac{d^2 u}{dx^2}, \quad 0 = \frac{d^2 \varrho}{ds^2} + \frac{3}{s} \frac{d\varrho}{ds}, \quad (6.)$$

deren Lösungen

$$u = \gamma \cdot x \quad \text{und} \quad \varrho = \alpha + \frac{\beta}{s^2} \quad (7.)$$

sind, wenn α , β , γ constante Grössen bedeuten. Da für $x=0$ auch $u=0$ wird, ist kein constantes Glied zu u hinzugefügt.

Die Grössen α , β , γ haben den Gleichungen (1.) bis (3.) zu genügen, in welche wir nach (4.) einzusetzen haben

$$\begin{aligned}-X_x &= 2\lambda\varrho + \lambda s \frac{d\varrho}{ds} + (2\mu + \lambda) \frac{du}{dx} \\ -Y_y &= 2(\mu + \lambda)\varrho + \frac{2\mu y^2 + \lambda s^2}{s} \frac{d\varrho}{ds} + \lambda \frac{du}{dx} \\ -Z_z &= 2(\mu + \lambda)\varrho + \frac{2\mu z^2 + \lambda s^2}{s} \frac{d\varrho}{ds} + \lambda \frac{du}{dx} \\ -Y_z &= -Z_y = 2\mu \frac{yz}{s} \frac{d\varrho}{ds},\end{aligned} \quad (8.)$$

während die übrigen Componenten verschwinden. Hiernach finden wir, dass die Gleichungen (1.) bis (3.) erfüllt werden, wenn

$$\begin{aligned}\Pi &= 2\lambda\alpha + (2\mu + \lambda)\gamma \\ -p &= 2(\mu + \lambda)\alpha - 2\mu\beta r^{-2} + \lambda\gamma \\ P &= 2(\mu + \lambda)\alpha - 2\mu\beta R^{-2} + \lambda\gamma\end{aligned}$$

gemacht wird, d. h. wenn α , β , γ folgende Werthe erhalten

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{1}{2\mu} \frac{2\mu + \lambda}{2\mu + 3\lambda} \left\{ \frac{PR^2 + pr^2}{R^2 - r^2} - \frac{\lambda}{2\mu + \lambda} \Pi \right\} \\ \beta &= \frac{1}{2\mu} (P + p) \frac{R^2 r^2}{R^2 - r^2} \\ \gamma &= \frac{1}{\mu} \frac{\mu + \lambda}{2\mu + 3\lambda} \left\{ \Pi - \frac{\lambda}{\mu + \lambda} \frac{PR^2 + pr^2}{R^2 - r^2} \right\}.\end{aligned} \quad (9.)$$

Damit sind die linearen Dilatationen u , v , w vollständig bestimmt. Für die räumliche Dilatation erhalten wir, wenn wir die Werthe

von ϱ und s aus den Gleichungen (7.) in (5.) einsetzen, zunächst die Formel

$$\Delta = 2\alpha + \gamma, \quad (10.)$$

welche einen constanten, von s unabhängigen Werth für diese die Ausdehnung der Cylinderwandung, im Allgemeinen aber nicht die Erweiterung des vom Cylinder umschlossenen Hohlraums darstellende Grösse ergibt; weiter finden wir durch Einführung der Werthe der Constanten

$$\Delta = \frac{1}{2\mu + 3\lambda} \left\{ \Pi + 2 \frac{PR^2 + pr^2}{R^2 - r^2} \right\}. \quad (11.)$$

§ 68. Theorie der Wertheim'schen Methode.

Wenn wir diese Resultate auf die Beurtheilung der Wertheim'schen Versuche anwenden wollen, so können wir

$$P = 0 \quad \text{und} \quad p = 0$$

setzen, wodurch wir für die linearen Dilatationen

$$\alpha = -\frac{\lambda}{2\mu} \frac{\Pi}{2\mu + 3\lambda}, \quad \beta = 0, \quad \gamma = \frac{\mu + \lambda}{\mu} \frac{\Pi}{2\mu + 3\lambda},$$

und für die räumliche Dilatation

$$\Delta = \frac{\Pi}{2\mu + 3\lambda}$$

erhalten.

Nach Wertheim's Methode wird nun die Verlängerung $l' - l$, welche der Abstand l zweier am Cylinder angebrachten Marken erleidet, gemessen, womit

$$\frac{l' - l}{l} = \gamma$$

bestimmt ist; zugleich wird die Erweiterung des Hohlraums V zu V' gemessen und damit

$$\frac{V' - V}{V} = 2\varrho + \gamma = \Delta$$

gefunden. Nach der Theorie stehen diese beobachteten Grössen in dem Verhältnisse

$$\frac{\gamma}{\Delta} = \frac{\mu + \lambda}{\mu},$$

welches, wenn

$$\mu = \lambda = k$$

angenommen wird, die einfache Beziehung

$$\gamma = 2\Delta$$

liefert. Wertheim fand Zahlen, welche näher an 3 als an 2 lagen; er setzte demnach

$$\mu + \lambda = 3\mu,$$

woraus, wie bereits in § 66 erwähnt wurde, $\lambda = 2\mu$ folgen würde.

Gegen diese Anwendung der Theorie ist ein Einwand aus dem Grunde zu erheben, weil bei Wertheim's Beobachtungen die geschlossenen Enden des Cylinders sich nicht so frei auszudehnen vermochten, wie es in unseren Rechnungen für den offenen Hohlcyylinder vorausgesetzt wurde. Dieser Uebelstand, welcher sich durch theoretische Betrachtungen nicht leicht würde überwinden lassen, ist einfach zu beseitigen, wenn man mit Röhren von verschiedener Länge, welche sonst gleich sind, arbeitet.

Ein anderes Bedenken gegen die Wertheim'schen Resultate liegt darin, dass die von ihm benutzten gezogenen Röhren möglicher Weise nicht gleiche Elasticität in der Längs- und Querrichtung besessen haben mögen.

Eine einwurfsfreie Entscheidung der durch Wertheim angeregten Frage nach dem Werthe jenes Verhältnisses würde von der grössten Wichtigkeit für die Grundlagen der Theorie sein. Denn, da gegen die Entwicklung der Molekulartheorien und besonders gegen die Beweisführung in § 35 kein Bedenken zu erheben ist, so kann der Grund für eine Abweichung zwischen Theorie und Erfahrung nur in den Voraussetzungen der Theorie gesucht werden, wenn sie nicht in den Mängeln der Apparate oder in einer Ueberschreitung der Elasticitätsgrenze begründet liegt.

§ 69. Hohlcyylinder unter innerem Druck.

Von den Formeln des § 67 machen wir eine zweite Anwendung, indem wir die Deformationen untersuchen, welche ein hohler Cylinder durch den in seinem inneren Hohlraum wirkenden Druck p erleidet. Wir denken uns zu dem Zwecke den Hohlcyylinder an seinen beiden Enden durch zwei ebene Platten, deren Elasticität nicht in Betracht kommen soll, geschlossen. Jede dieser Deckplatten empfängt dann auf der ganzen Basis πr^2 des Hohlraums den Druck $\pi r^2 p$; durch ihre Befestigung an der Cylinderwand auf der ringförmigen Fläche $\pi(R^2 - r^2)$ entsteht aus diesem Drucke ein Zug Π , welchen die Cylinderwand erleidet; beide stehen in der Beziehung

$$\pi(R^2 - r^2)\Pi = \pi r^2 p. \quad (1.)$$

Setzen wir nach dieser Formel den Werth von Π in die Gleichungen (9.) § 67 ein und machen zugleich $P = 0$, so finden wir

$$\begin{aligned}\alpha = \gamma &= \frac{1}{2\mu + 3\lambda} \frac{r^2}{R^2 - r^2} p \\ \beta &= \frac{1}{2\mu} \frac{R^2 r^2}{R^2 - r^2} p,\end{aligned}\quad (2.)$$

und erhalten hieraus die räumliche Dilatation des Cylinders $\pi s^2 \cdot 2\alpha$

$$\Delta' = 2\left(\alpha + \frac{\beta}{s^2}\right) + \gamma = \left\{\frac{3}{2\mu + 3\lambda} + \frac{1}{\mu} \frac{R^2}{s^2}\right\} \frac{r^2}{R^2 - r^2} p \quad (3.)$$

für irgend eine Stelle im Innern der Cylinderwand. Hieraus ergibt sich die Erweiterung des inneren Hohlraums, indem wir für die variable Grösse s den Werth r einsetzen.

Auf diese Formeln könnte man eine Beobachtungsmethode gründen, welche der Wertheim'schen ähnlich ist. Misst man gleichzeitig die durch Druck im Innern hervorgebrachte Verlängerung des Cylinders und die Erweiterung seines Hohlraums, also die Grössen γ und Δ' , so giebt das Verhältniss beider ebenfalls ein einfaches Mittel, die Beziehung zwischen μ und λ zu finden. Wenn wir beachten, dass bei dünnwandigen Cylindern statt s der äussere Radius R gesetzt werden darf, so erhalten wir

$$\frac{\Delta'}{\gamma} = \frac{5\mu + 3\lambda}{\mu}. \quad (4.)$$

Zur vollständigen Bestimmung des Zustandes, in welchem sich der Cylinder befindet, haben wir noch die Grösse der Druckkräfte im Innern des cylindrischen Mantels zu berechnen. Der Kenntniss derselben bedürfen wir, wenn wir beurtheilen wollen, welchen Druck im Innern der Cylinder, ohne zu platzen, auszuhalten vermag. Wir werden darnach auch angeben können, in welcher Richtung der Cylinder bersten wird, wenn die Grenze seiner Dehnbarkeit überschritten wird.

Die Lage der Hauptdilatationsaxen erkennt man sofort ohne Rechnung. Die erste hat die Richtung der Axe, also der Coordinate x , die zweite die des Radius s , die dritte steht senkrecht gegen die beiden anderen Richtungen. Die Werthe der Hauptdrücke findet man einfacher, als durch das Theorem (C), aus den Formeln (8.) § 67, indem man sie auf einen Punkt, für welchen $y = s$ und $z = 0$ ist, anwendet. So erhalten wir für den Druck Q in der Richtung der Axe, S in der Richtung des Radius und T in der Richtung der Krümmung des Cylindermantels

$$\begin{aligned}
 Q &= 2\lambda\varrho + \lambda s \frac{d\varrho}{ds} + (2\mu + \lambda) \frac{du}{dx} \\
 -S &= 2(\mu + \lambda)\varrho + (2\mu + \lambda)s \frac{d\varrho}{ds} + \lambda \frac{du}{dx} \\
 T &= 2(\mu + \lambda)\varrho + \lambda s \frac{d\varrho}{ds} + \lambda \frac{du}{dx},
 \end{aligned} \tag{5}$$

und, wenn die Werthe

$$\varrho = \alpha + \frac{\beta}{s^2}, \quad u = \gamma z$$

nach den Gleichungen (2.) eingesetzt werden,

$$\begin{aligned}
 Q &= \frac{r^2}{R^2 - r^2} p \\
 S &= \frac{R^2 - s^2}{R^2 - r^2} \frac{r^2}{s^2} p \\
 T &= \frac{R^2 + s^2}{R^2 - r^2} \frac{r^2}{s^2} p.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Nach diesen Formeln sind die Werthe der Druckkräfte von sehr verschiedener Grösse. Der Druck Q ist constant und bei nicht zu bedeutender Wandstärke $R - r$ erheblich grösser als S . Die Componente S besitzt ihren grössten Werth p an der inneren Seite der Wand für $s = r$ und sinkt bis zum Werthe Null herab, den sie an der äusseren Seite für $s = R$ erreicht. Noch grösser, als diese beiden Componenten, ist T , welches seinen kleinsten Werth

$$T = \frac{2r^2}{R^2 - r^2} p$$

an der Aussenfläche für $s = R$ annimmt. Daraus folgt, dass unter den drei Druckkräften die in der Richtung der Krümmung der Cylinderfläche wirkende Spannung T zuerst die Grenze der absoluten Festigkeit überschreiten wird, und dass, wenn der Cylinder platzt, der Sprung der Längsrichtung des Cylinders folgen wird.

Die Formel für den Maximalwerth der Spannung T

$$T_m = \frac{R^2 + r^2}{R^2 - r^2} p, \tag{7}$$

welcher für $s = r$ erreicht wird, kann zur Bestimmung des Druckes p , den ein Cylinder von gegebenen Dimensionen höchstens auszuhalten fähig ist, dienen, wenn die Festigkeitsgrenze bekannt ist. Das Verfahren erläutern wir an einem Beispiel, welches sich auf eine von F. Neumann untersuchte Spiegelglastafel bezieht. Als Mittel aus mehreren Messungen ergab sich der Elasticitätsmodul dieses Glases zu 1 320 000 Atmosphären, d. h. wenn auf dieses Glas ein allseitiger

gleichmässiger Druck von n Atmosphären ausgeübt wurde, so betrug die lineare Zusammendrückung desselben

$$-\delta = \frac{n}{1\,320\,000}.$$

Wenn wir die theoretische Relation $\mu = \lambda = k$ als richtig ansehen, so dürfen wir hiernach aus den Formeln (10.) § 45 und (9.) § 65 schliessen, dass bei einer einseitigen Zusammendrückung dieses Glases unter dem Drucke von n Atmosphären die lineare Compression

$$\frac{2n}{1\,320\,000}$$

eingetreten sein würde. Nun zerbrach diese Glasplatte, als die lineare Dilatation 1:1440 betrug. Setzen wir diesen Grenzwert dem obigen allgemeinen gleich

$$\frac{2n}{1\,320\,000} = \frac{1}{1440},$$

so finden wir, dass ein Druck oder Zug von wenigstens

$$n = 400 \text{ Atmosphären}$$

dazu nöthig sein würde, um eine Spiegelglastafel zu zerreißen. Führen wir diesen Werth in die obige Gleichung für T ein, so finden wir, dass der höchste Druck, den ein Glaszylinder in seinem Innern auszuhalten vermag,

$$p = \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2} \cdot 400$$

Atmosphären beträgt. Für gewöhnliches Glas wird der Zahlenfactor nicht unerheblich geringer anzunehmen sein.

Mit diesem Resultat vergleichen wir eine gelegentliche Beobachtung von Lothar Meyer¹⁾, welcher fand, dass eine zugeschmolzene Glasröhre von 12 mm lichter Weite und 1,4 mm Wandstärke einen Druck von 66 Atmosphären in ihrem Innern ertrug, ehe sie zerbrach. Nach der vorstehenden Formel hätte das Rohr einen Druck von 82 Atmosphären aushalten sollen. Die Abweichung erklärt sich leicht durch die Verschiedenheit des Materials und durch ungleichförmige Beschaffenheit an den zugeschmolzenen Enden.

1) Pogg. Ann. Bd. 104. S. 189. 1858. Aehnliche Uebereinstimmung zeigt eine Beobachtung von Quincke (Pogg. Ann. Bd. 160. S. 118. 1877), welcher fand, dass eine Glasröhre von 8 mm Durchmesser und 1,5 mm Wandstärke einen Druck bis zu 126 Atmosphären ertrug, ohne zu platzen. Nach obiger Formel würde sie eine Drucksteigerung bis zu 175 Atmosphären ausgehalten haben. Aehnliche Beobachtungen hat Mendelejew angestellt (Bull. Soc. Chim. 20 p. 300. Berl. Ber. üb. d. Fortsch. d. Physik 1874. Bd. 30, S. 260).

Anmerkung des Herausgebers.

§ 70. Hohlkugel unter innerem und äusserem Druck.

In ebenso einfacher Weise lässt sich die Aufgabe lösen, den Gleichgewichtszustand einer Hohlkugel zu bestimmen, auf deren äussere und innere Oberfläche Druckkräfte wirken. Diese Rechnung würde sich unter der allgemeinen Voraussetzung, dass der Druck eine ganz beliebige Function des Ortes ist, unter Anwendung einer Entwicklung nach Kugelfunctionen durchführen lassen. Der Werth dieser Untersuchung liegt in der Möglichkeit, sie auf das grossartige Beispiel anzuwenden, welches uns unsere Erde bietet. Auch für ein Rotationsellipsoid ist die Rechnung ausführbar. Wir beschränken uns hier auf den Fall einer Hohlkugel, auf deren äussere und innere Fläche constante Druckkräfte wirken.

Wir führen dieselbe Bezeichnung ein, wie in § 67 bei der analogen Untersuchung für den Cylinder. Wir nennen den im Inneren wirkenden Druck p , den gegen die äussere Fläche wirkenden ebenfalls gleichmässigen Druck P ; beide rechnen wir als positiv, wenn sie in der Richtung des wachsenden Radius wirken. Der innere Halbmesser der Kugel sei r , der äussere R ; die Entfernung irgend eines Punktes der Kugelschale vom Mittelpunkte, welchen wir zum Anfangspunkte der Coordinaten wählen, sei

$$s = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Unter dem Einfluss der Druckkräfte verwandelt sich s in $s(1 + \varrho)$, wenn ϱ die lineare Dilatation in der Richtung des Radius ist; es werden aber ebenso die rechtwinkligen Componenten der Verrückungen

$$u = \varrho x, \quad v = \varrho y, \quad w = \varrho z, \quad (1.)$$

so dass ϱ die nach allen Richtungen gleichmässig erfolgende Dilatation an der Stelle xyz bedeutet.

Aus diesen Annahmen für die Verrückungen erhalten wir als Werthe der Druckcomponenten

$$\begin{aligned} -X_x &= (2\mu + 3\lambda)\varrho + \frac{2\mu x^2 + \lambda s^2}{s} \frac{d\varrho}{ds} \\ -Y_y &= (2\mu + 3\lambda)\varrho + \frac{2\mu y^2 + \lambda s^2}{s} \frac{d\varrho}{ds} \\ -Z_z &= (2\mu + 3\lambda)\varrho + \frac{2\mu z^2 + \lambda s^2}{s} \frac{d\varrho}{ds} \\ -X_y &= -Y_x = 2\mu \frac{xy}{s} \frac{d\varrho}{ds} \\ -Y_z &= -Z_y = 2\mu \frac{yz}{s} \frac{d\varrho}{ds} \\ -Z_x &= -X_z = 2\mu \frac{zx}{s} \frac{d\varrho}{ds} \end{aligned} \quad (2.)$$

und als Grösse der räumlichen Dilatation

$$\Delta = 3\varrho + s \frac{d\varrho}{ds}. \quad (3.)$$

Die gefundenen Werthe der Druckcomponenten haben für die äussere Oberfläche, also für $s = R$, den Bedingungen (D § 11)

$$\begin{aligned} 0 &= P \frac{x}{R} + X_x \frac{x}{R} + X_y \frac{y}{R} + X_z \frac{z}{R} \\ 0 &= P \frac{y}{R} + Y_x \frac{x}{R} + Y_y \frac{y}{R} + Y_z \frac{z}{R} \\ 0 &= P \frac{z}{R} + Z_x \frac{x}{R} + Z_y \frac{y}{R} + Z_z \frac{z}{R} \end{aligned} \quad (4.)$$

zu genügen, welche alle drei übereinstimmend zu der für $s = R$ geltenden Gleichung

$$P = (2\mu + 3\lambda)\varrho + (2\mu + \lambda)s \frac{d\varrho}{ds} \quad (5.)$$

führen; ebenso erhalten wir aus den für die innere Fläche gegebenen drei Bedingungen die eine Gleichung für $s = r$

$$-p = (2\mu + 3\lambda)\varrho + (2\mu + \lambda)s \frac{d\varrho}{ds}. \quad (6.)$$

Die Werthe der Druckcomponenten (2.) unterliegen noch den Differentialgleichungen (A § 7) für jeden Punkt im Inneren der Masse der Kugelwandung. Wir berücksichtigen diese Gleichungen am einfachsten, indem wir (Gleichungen (1.) § 64)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \left\{ s \frac{d^2 \varrho}{ds^2} + 4 \frac{d\varrho}{ds} \right\} \frac{x}{s}$$

und

$$\frac{\partial \Delta}{\partial x} = \left\{ s \frac{d^2 \varrho}{ds^2} + 4 \frac{d\varrho}{ds} \right\} \frac{x}{s}$$

nebst den entsprechenden Grössen für die beiden andern Coordinatenrichtungen bilden. Wir erhalten aus allen übereinstimmend die Differentialgleichung

$$0 = \frac{d^2 \varrho}{ds^2} + \frac{4}{s} \frac{d\varrho}{ds}, \quad (7.)$$

deren Bedeutung ist, dass die räumliche Dilatation Δ durch die ganze Kugelmasse constant ist. Für die lineare Dilatation ϱ , welche dieser Gleichung für jeden Punkt im Innern der Masse genügen muss, erhalten wir durch Integration die Formel

$$\varrho = A + Bs^{-3}, \quad (8.)$$

in welcher die Constanten A und B aus den Gleichungen (5.) und (6.)

$$\begin{aligned} P &= (2\mu + 3\lambda)A - 4\mu BR^{-3} \\ -p &= (2\mu + 3\lambda)A - 4\mu Br^{-3} \end{aligned}$$

zu bestimmen sind. Wir erhalten

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2\mu + 3\lambda} \frac{PR^3 + pr^3}{R^3 - r^3} \\ B &= \frac{P + p}{4\mu} \frac{R^3 r^3}{R^3 - r^3}, \end{aligned} \quad (9.)$$

und hieraus für die räumliche Dilatation den constanten Werth

$$\Delta = \frac{3}{2\mu + 3\lambda} \frac{PR^3 + pr^3}{R^3 - r^3}. \quad (10.)$$

Dieses allgemeine Resultat wenden wir zunächst auf einen speciellen Fall an.

§ 71. Oersted's Piëzometer.

Es soll der Druck innen und aussen gleich, aber entgegengesetzt gerichtet sein, oder

$$P = -p.$$

Diese Gleichung ist bei dem Piëzometer Oersted's erfüllt, und es ist die besondere Betrachtung dieses Falles von Interesse, weil zur Zeit der Einführung dieses Instruments ein Streit über dasselbe entstand, zu dessen Beurtheilung unsere Formeln dienen können.

Das Instrument soll dazu dienen, die Zusammendrückbarkeit von Flüssigkeiten zu messen. In einem Gefäss mit starken Wandungen, das mit Wasser gefüllt ist, befindet sich eine mit einem offenen Capillarrohr verbundene hohle Glaskugel oder cylindrische Glasröhre, welche die zu untersuchende Flüssigkeit einschliesst. Durch eine Schraubenvorrichtung kann der Druck im Apparat, welcher sich in den inneren Hohlraum fortpflanzt, beliebig gesteigert werden.

Es handelte sich darum, den Einfluss der Compression der Glaskugel zu eliminiren. Oersted behauptete, diese Compression sei zu vernachlässigen; denn da der Druck auf die innere und auf die äussere Seite mit gleicher Stärke wirke, so könne die hohle Glaskugel nur so comprimirt werden, dass ihre Wandung dünner werde, wodurch sich ihr Hohlraum ein wenig vergrössere; da sie aber schon äusserst dünn sei, so könne die durch den Druck hervorbrachte Aenderung ihres inneren Volumens nur sehr gering sein; es komme also nur die Längenverkürzung der Capillaren, nicht die Volumenveränderung in Betracht. Nach dieser Ansicht berechnete er auch seine Beobachtungen.

Als aber Colladon und Sturm die von der Akademie zu Paris über diesen Gegenstand gestellte Preisfrage lösten, fanden sie damit wenig übereinstimmende Resultate, sondern gelangten zu der Ansicht, dass die hohle Kugel so comprimirt werde, als wäre sie eine volle,

welche nur von aussen durch Druck comprimirt wird. Dies ist ein grosser Unterschied. Denn wenn die Ansicht Colladon's richtig ist, so hängt die Compression der Hohlkugel im Piézometer allein von ihrem Radius, nicht aber von der Dicke ihrer Wand ab. Ebenso muss es sich bei einem cylindrisch geformten Piézometergefäss verhalten.

Die Frage ist sofort aus unseren Formeln zu entscheiden. Für den Fall einer Kugel erhalten wir, wenn $P = -p$ gesetzt wird, aus den Formeln des vorigen §

$$A = -\frac{p}{2\mu + 3\lambda}, \quad B = 0,$$

und daraus die lineare und die cubische Compression

$$-\varphi = \frac{p}{2\mu + 3\lambda}, \quad -\Delta = \frac{3p}{2\mu + 3\lambda}.$$

Ebenso liefern die Formeln des § 67 unter der entsprechenden Voraussetzung

$$P = -p = \Pi$$

für einen innen und aussen gleichmässig gepressten Hohlcyylinder

$$\alpha = \gamma = -\frac{p}{2\mu + 3\lambda}, \quad \beta = 0,$$

und daraus für die lineare und die räumliche Zusammendrückung die gleichen Werthe wie oben

$$-\varphi = \frac{p}{2\mu + 3\lambda}, \quad -\Delta = \frac{3p}{2\mu + 3\lambda}.$$

Zu genau denselben Formeln würden wir gekommen sein, wenn wir die Kugel oder den Cylinder als voll, also $r = 0$ angenommen hätten. Das Piézometergefäss wird also gerade so zusammengedrückt, wie wenn es voll wäre. Damit ist die Ansicht von Colladon und Sturm gerechtfertigt, nach welcher die Beobachtung mit diesem Instrument die Differenz der cubischen Zusammendrückbarkeit der Flüssigkeit und der des Glases ergibt; dagegen ist die entgegengesetzte Ansicht Oersted's widerlegt.

§ 72. Anwendung auf Thermometerkugeln.

Von den Formeln des § 70 machen wir eine zweite Anwendung von praktischer Wichtigkeit, indem wir den äusseren Druck

$$P = 0$$

setzen. Dann erhalten wir für die lineare Ausdehnung

$$\varphi = \left\{ \frac{1}{2\mu + 3\lambda} + \frac{1}{4\mu} \frac{R^3}{s^3} \right\} \frac{pr^3}{R^3 - r^3} \quad (1.)$$

ist nach den Glchg. (2.) § 33, dass beide Functionen ρ für beide Medien an dieser Grenze, also für $s = r$, einander gleich werden, folglich

$$a = A + Br^{-3}.$$

Die zweite nach § 33 für diese Grenze erforderliche Bedingung, die der Gleichheit der Molekulardrücke in beiden Medien, reducirt sich auf die eine Gleichung

$$(2\mu_{11} + 3\lambda_{11})a = (2\mu_{11} + 3\lambda_{11})A - 4\mu_{11}Br^{-3}.$$

Endlich haben wir für die freie Oberfläche die frühere Gleichung

$$P = (2\mu_{11} + 3\lambda_{11})A - 4\mu_{11}BR^{-3}.$$

Aus diesen Gleichungen erhalten wir die Werthe der noch unbekanntenen Constanten und damit die gesuchte Grösse ρ . Wenn wir als Abkürzungen

$$\frac{2\mu_{11} + 3\lambda_{11}}{2\mu_{11} + 3\lambda_{11}} = \alpha, \quad \frac{4\mu_{11}}{2\mu_{11} + 3\lambda_{11}} = \beta \quad (1)$$

$$\beta(R^3 - r^3) + \alpha(R^3 + \beta r^3) = \gamma$$

eingeführen, so finden wir für das Medium der Vollkugel, also für $s < r$,

$$\rho = \frac{1 + \beta}{\gamma} \frac{P}{2\mu_{11} + 3\lambda_{11}} R^3 \quad (2)$$

und für dasjenige der Kugelschale, also für $r < s < R$,

$$\rho = \frac{1}{\gamma} \left\{ \alpha + \beta + (1 - \alpha) \frac{r^3}{s^3} \right\} \frac{P}{2\mu_{11} + 3\lambda_{11}} R^3. \quad (3)$$

Um nun die Frage zu entscheiden, ob die Compression der Kugel durch die umhüllende Kugelschale vermindert oder vermehrt wird, haben wir zuvor die Grösse der Verdichtung zu bestimmen, welche die Kugel ohne Umhüllung erleiden würde. Wir erhalten diese aus den vorstehenden Formeln entweder dadurch, dass wir die Dicke der Kugelschale verschwinden lassen, also

$$R - r = 0$$

setzen, oder, indem wir beide Medien als gleichmässig voraussetzen, wodurch

$$\alpha = 1$$

wird. Beide Annahmen führen zu dem Werthe

$$\gamma = \alpha(1 + \beta)R^3$$

und liefern für die lineare Dilatation ρ den Grenzwert

$$P = \frac{P}{2\mu_{11} + 3\lambda_{11}}, \quad (4)$$

welchen wir mit dem oben in Gleichung (2.) gegebenen allgemeinen

Werthe der Compression der inneren Kugel zu vergleichen haben.
Der Werth des Verhältnisses

$$\frac{P}{\varrho} = \frac{1}{\alpha} \left\{ 1 + \frac{\alpha - 1}{1 + \beta} \left(1 + \beta \frac{r^3}{R^3} \right) \right\}$$

oder, wenn wir

$$\alpha = 1 + \kappa \quad \text{und} \quad (1 + \beta)\xi = 1 + \beta \frac{r^3}{R^3}$$

setzen,

$$\frac{P}{\varrho} = \frac{1 + \xi\kappa}{1 + \kappa}$$

wird = 1, wenn

$$\kappa = \frac{2\mu_1 + 3\lambda_1}{2\mu_{11} + 3\lambda_{11}} - 1$$

= 0 ist; dagegen wird, da ξ positiv und ein echter Bruch ist,

$$P < \varrho, \quad \text{wenn } \kappa > 0 \quad \text{oder} \quad 2\mu_1 + 3\lambda_1 > 2\mu_{11} + 3\lambda_{11}$$

$$\varrho < P, \quad \text{,, } \kappa < 0 \quad \text{,,} \quad 2\mu_1 + 3\lambda_1 < 2\mu_{11} + 3\lambda_{11}$$

ist. Die Zusammendrückung der Kugel wird also durch den Einfluss der umhüllenden Schale dann vermindert, wenn der Elasticitätsmodul $2\mu_{11} + 3\lambda_{11}$ der Schale grösser ist als derjenige der Kugel $2\mu_1 + 3\lambda_1$. Ist die Elasticität der Schale geringer, als die der Kugel, so wird diese in der Umhüllung stärker zusammengedrückt, als wenn sie ohne Hülle dem Drucke frei ausgesetzt wird.

§ 75. Torsion eines Cylinders¹⁾.

Von den bisher betrachteten Beispielen elastischer Formveränderungen durch Dehnung oder Zusammendrückung unterscheidet sich die durch Torsion hervorgebrachte elastische Verrückung nicht bloss dadurch, dass sie mit keiner Veränderung der äusseren Gestalt verbunden ist²⁾, sondern auch, wie die nachfolgende Rechnung zeigen wird, dadurch, dass die Torsion nicht von beiden, sondern nur von einer einzigen Elasticitätsconstante abhängt.

Ein kreisrunder Cylinder³⁾ von der Länge l sei mit dem einen seiner Enden befestigt, an dem anderen mit einem Hebelarme von der Länge κ versehen, .vermittelst dessen er durch eine Kraft K tordirt wird.

1) Vom Herausgeber hier eingeschaltet. Vgl. das Vorwort.

2) Vgl. § 1.

3) Die Auflösung des Problems der Torsion für andere Körper hat St. Venant gegeben: *Mém. prés. p. div. sav. à l'Acad.* T. 14. 1856 p. 233.

Der entstehende Zustand des gedrehten Cylinders wird dargestellt durch folgende Lösungen der Differentialgleichungen (1.) § 64

$$u = -\beta yz, \quad v = \beta xz, \quad w = 0, \quad (1.)$$

wenn die Coordinaten x, y, z von der Mitte des festen Endquerschnitts aus gerechnet werden und zwar z in der Richtung der Axe des Cylinders; die Grösse β ist constant.

Die angenommenen Formeln genügen den erforderlichen Grenzbedingungen. Erstens wird für den Endquerschnitt $z = 0$

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0. \quad (2.)$$

Zweitens müssen für die freie Oberfläche des Cylinders, deren Gleichung

$$x^2 + y^2 = R^2$$

ist, wenn R den Halbmesser bedeutet, nach dem Theorem D § 11 die Bedingungen

$$\begin{aligned} 0 &= X_x \frac{x}{R} + X_y \frac{y}{R} \\ 0 &= Y_x \frac{x}{R} + Y_y \frac{y}{R} \\ 0 &= Z_x \frac{x}{R} + Z_y \frac{y}{R} \end{aligned} \quad (3.)$$

erfüllt werden. Dieses aber geschieht durch die angenommenen Lösungen ganz allgemein für jeden äusseren oder inneren Punkt des Cylinders; denn es ist nach den Gleichungen (1.)

$$\begin{aligned} X_x &= 0, \quad Y_y = 0, \quad Z_z = 0, \\ X_y &= Y_x = 0 \\ Y_z &= Z_y = -\mu\beta x \\ Z_x &= X_z = \mu\beta y. \end{aligned} \quad (4.)$$

Endlich muss für den drehbaren Endquerschnitt $z = l$ die Bedingung

$$0 = K\pi + \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R dr r (Y_z x - X_z y) \quad (5.)$$

erfüllt werden, welche aussagt, dass das Drehungsmoment der tordirenden Kraft K der Summe der Drehungsmomente der im letzten Querschnitt thätigen elastischen Spannungen das Gleichgewicht hält. Um diese Summe leichter ausführen zu können, sind die geradlinigen Coordinaten x und y nach den Gleichungen

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

durch Kreis Coordinaten ersetzt. Die Formel (5.) liefert

$$K\kappa = \mu\beta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R dr r^3 = \frac{1}{2} \pi \mu \beta R^4,$$

wodurch die Constante

$$\beta = \frac{2K\kappa}{\pi\mu R^4} \quad (6.)$$

und damit die Verrückungen u und v vollständig bestimmt sind.

Der eingetretene Zustand der Verschiebungen lässt sich leicht übersehen. Da überall die Componente $w = 0$ ist, so ist die Länge des Cylinders unverändert geblieben; alle Bestandtheile eines kreisförmigen Querschnitts sind auch nach der Verrückung in demselben Querschnitt und in derselben Lage zu einander geblieben, sie haben aber sämmtlich eine gleichmässige Drehung um den Mittelpunkt erfahren¹⁾. Diese Drehung nimmt mit wachsender Entfernung z vom festen Endquerschnitt zu und zwar wächst sie z proportional, so dass die Drehung, welche zwei benachbarte Querschnitte gegen einander erlitten haben, durch die ganze Länge des Cylinders hindurch überall gleichmässig ist.

Um die Grösse des Drehungswinkels ψ zu bestimmen, bilden wir die aus den beiden Componenten bestehende Gesamtverschiebung eines in der Entfernung r von der Axe gelegenen Theilchens

$$\sqrt{u^2 + v^2} = 2r \sin \frac{1}{2} \psi$$

und erhalten

$$2 \sin \frac{1}{2} \psi = \beta z,$$

oder für unendlich kleine Drehungen, welche in dieser Theorie stets vorausgesetzt worden sind,

$$\psi = \beta z = \frac{2K\kappa}{\pi\mu R^4} z. \quad (7.)$$

Auf das drehbare Ende $z = l$ angewandt, giebt diese Gleichung die Beziehung

$$K\kappa = \frac{\pi\mu R^4}{2l} \psi \quad (8.)$$

zwischen dem Drehungsmoment der tordirenden Kraft K und dem Torsionswinkel ψ . Den Factor des letzteren

$$\tau = \frac{\pi\mu R^4}{2l} \quad (9.)$$

nennt man das Torsionsmoment des Cylinders. Dasselbe hängt ausser von den Dimensionen des Cylinders nur von der einen Elasticitätsconstante μ ab, welche man deshalb als Torsionscoefficienten zu bezeichnen pflegt.

1) Vergl. § 24.

Die experimentelle Bestimmung dieser Grösse, etwa für einen Metalldraht, kann entweder nach Anleitung der Formel (8.) durch Beobachtung des statischen Gleichgewichts des tordirten Drahtes oder durch Messung der Schnelligkeit seiner Schwingungen geschehen. Im ersteren Falle hat man das Drehungsmoment $K\kappa$ zu messen, welches dem beobachteten Drehungswinkel ψ entspricht; es ist aber dann darauf zu achten, dass die letztere Grösse nicht in Graden oder Minuten, sondern in absolutem Maasse ($180^\circ = \pi$) in die Formel einzusetzen ist.

Genauer kann man das Torsionsmoment nach Coulomb's Methode durch Beobachtung von Schwingungen bestimmen, welche ein an dem untersuchten Drahte hängender schwerer Körper um den Draht als Axe ausführt. Bezeichnen wir das Trägheitsmoment desselben durch M , so ist in jedem Augenblick das Drehungsmoment der Torsionskraft

$$M \frac{d^2\psi}{dt^2} = -\tau\psi.$$

Die Integration dieser Differentialgleichung führt zu einem Werthe T der Zeit einer einfachen Schwingung, welcher durch die Formel

$$\frac{T^2}{\pi^2} = \frac{M}{\tau}$$

bestimmt wird. Nach dieser Gleichung kann das Torsionsmoment τ und aus diesem der Torsionscoefficient μ berechnet werden, wenn die Schwingungszeit T und das Trägheitsmoment M durch Beobachtung bestimmt sind¹⁾.

Ist ausser dem Torsionscoefficienten μ der Elasticitätsmodul $M = 2\mu + 3\lambda$ für allseitige Zusammendrückung oder der Elasticitätscoefficient

$$m = \mu \frac{2\mu + 3\lambda}{\mu + \lambda}$$

für einseitige Dehnung (§ 65) bekannt, so haben wir dadurch ein zweites Mittel, das Verhältniss von μ zu λ zu bestimmen, von welchem nach § 66 das Verhältniss der Längsdehnung zur Quersammenziehung abhängt.

§ 76. Biegung eines Stabes²⁾.

Ein anderes Verfahren zur Messung dieses Verhältnisses hat Kirchhoff³⁾ und nach ihm Okatow⁴⁾ angewandt, indem sie ausser

1) Vergl. über die Theorie der Torsion noch § 153, sowie Neumann, Einleitung in die theoretische Physik, herausgegeben von Pape, 1883, §§ 21 u. 22.

2) Zusatz vom Herausgeber.

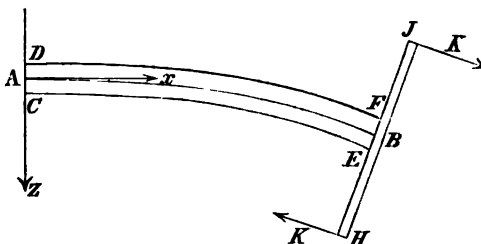
3) Pogg. Ann. Bd. 108. S. 369. 1859.

4) Pogg. Ann. Bd. 119. S. 11. 1863.

der Torsion eines Stabes die Biegung massen, welche er durch Belastung der Enden erlitt. Die nachfolgende theoretische Berechnung entspricht einer ähnlichen Versuchsanordnung.

Ein Stab $CDEF$ sei mit seiner ebenen Grundfläche CD in der Weise gegen eine Ebene aufgestützt und in dem mittleren Punkte A an derselben so befestigt,

dass der Punkt A sich nicht, jeder andere Punkt der Grundfläche aber nur längs der festen Ebene verschieben kann. Am anderen Ende des Stabes sei in B ein Hebel HJ befestigt,



welchem das Kräftepaar K wirkt. Durch die Wirkung dieser beiden Kräfte wird der Stab längs CE zusammengedrückt, längs DF ausgedehnt; in Folge der ungleichen Spannung im Stabe erfährt auch die Mittellinie AB eine Biegung, welche wir zu berechnen haben.

Wir wählen den Punkt A zum Anfangspunkte des Coordinatensystems, rechnen die Coordinate x horizontal in der Richtung der vor der Biegung geraden Längsaxe des Stabes, z vertical nach unten, y senkrecht gegen beide. Den Differentialgleichungen (1.) § 64 wird genügt, wenn wir setzen¹⁾

$$\begin{aligned} u &= -\alpha xz & v &= \frac{1}{2} \frac{\lambda}{\mu + \lambda} \alpha yz \\ w &= \frac{1}{2} \alpha \left\{ x^2 + \frac{1}{2} \frac{\lambda}{\mu + \lambda} (z^2 - y^2) \right\}, \end{aligned} \quad (1.)$$

worin α eine Constante ist. Dann ergeben sich nach den Formeln (4.) § 60 folgende Werthe der Druckcomponenten

$$\begin{aligned} X_x &= \mu \frac{2\mu + 3\lambda}{\mu + \lambda} \alpha z & Y_y &= 0 & Z_z &= 0 \\ X_y &= Y_x = 0 & Y_z &= Z_y = 0 & Z_x &= X_z = 0. \end{aligned} \quad (2.)$$

Diese Gleichungen zeigen, dass durch unsere Annahme allen Bedingungen für die Seitenflächen des gebogenen Stabes Genüge geleistet wird, und zwar für jede Form des Querschnitts; die Bedingung, dass diese Flächen von Druckkräften frei sein sollen, wird erfüllt, weil nicht bloss für jeden Punkt der Oberfläche, sondern durch den ganzen Stab hindurch überall jede mit dem Index y oder

1) St. Venant: Mém. prés. à l'Acad. T. 14. p. 304. 1856.

z behaftete Componente verschwindet. Ebenso erfüllen die Gleichungen (1.) die für die aufgestützte Endfläche $x = 0$ geltenden Bedingungen; allgemein ist

$$\begin{aligned} & \text{für } x = 0 \text{ auch } u = 0, \\ & \text{und besonders ist für den festen Punkt } A, \text{ also} \\ & \text{für } x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0 \\ & \text{auch } u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0. \end{aligned} \quad (3.)$$

Es bleibt nur noch die Bedingung zu erfüllen, dass die einzige im Innern des Stabes wirkende Spannkraft X_x dem Kräftepaar K das Gleichgewicht hält. Damit das Drehungsmoment um eine durch B gehende Axe verschwinde, muss, wenn l die Länge des Hebels HJ bedeutet,

$$0 = Kl - \iint dy dz z X_x \quad (4.)$$

sein, wo das Integral über den Endquerschnitt auszudehnen ist. Die weiteren Bedingungen des Gleichgewichts werden von selber erfüllt. Die angegebene liefert die Gleichung

$$Kl = \mu \frac{2\mu + 3\lambda}{\mu + \lambda} \alpha \iint dy dz z^2, \quad (5.)$$

welche zur Bestimmung der einzig noch verfügbaren Constante α dient.

Ist der Querschnitt des Stabes rechteckig, so erhalten wir, wenn wir Länge, Breite und Höhe des Stabes mit a , b , c bezeichnen, nach Ausführung der Integrationen zwischen den Grenzen $-\frac{1}{2}b$ und $+\frac{1}{2}b$, $-\frac{1}{2}c$ und $+\frac{1}{2}c$,

$$\alpha = \frac{12}{\mu} \frac{\mu + \lambda}{2\mu + 3\lambda} \frac{Kl}{bc^3}, \quad (6.)$$

was in die obigen Formeln einzusetzen wäre. Für die Senkung des mittleren Punktes B im Endquerschnitt, also des Punktes, dessen Coordinaten $x = a$, $y = 0$, $z = 0$ sind, ergiebt sich

$$W = \frac{6}{\mu} \frac{\mu + \lambda}{2\mu + 3\lambda} \frac{a^2}{bc^3} Kl. \quad (7.)$$

Ist der Stab cylindrisch vom Halbmesser R , so wird die Gleichung (5.)

$$Kl = \mu \frac{2\mu + 3\lambda}{\mu + \lambda} \alpha \int_0^{2\pi} d\varphi \cos^2 \varphi \int_0^R dr r^3,$$

also

$$\alpha = \frac{4}{\pi\mu} \frac{\mu + \lambda}{2\mu + 3\lambda} \frac{Kl}{R^4}, \quad (8.)$$

so dass die Senkung des Punktes B jetzt beträgt:

$$W = \frac{2}{\pi\mu} \frac{\mu + \lambda}{2\mu + 3\lambda} \frac{a^3}{R^3} Kl. \quad (9.)$$

Haben beide Stäbe, der parallelepipedische und der cylindrische, gleiche Länge a und gleichen Querschnitt

$$bc = \pi R^2,$$

so verhalten sich die Senkungen W wie

$$\frac{6}{c^3} : \frac{2}{R^3},$$

und, wenn $b = c$, der rechteckige Querschnitt also ein Quadrat ist, wie $3 : \pi$. Der eckige Stab wird folglich weniger stark gebogen als der runde von gleicher Masse.

§ 77. Beobachtungen zur Bestimmung des Verhältnisses der beiden Elasticitätsconstanten¹⁾.

Die für die Verrückungscomponenten aufgestellten Formeln des vorigen § enthalten die Begründung einer Methode, welche A. Cornu²⁾ benutzt hat, um das Verhältniss der beiden Elasticitätsconstanten λ und μ zu einander zu bestimmen. Auf einen Streifen Spiegelglas, welcher, an zwei Stellen unterstützt, durch ein Paar an seinen Enden hängender Gewichte leicht gebogen war, wurde eine zweite Spiegelplatte gelegt. Die dünne Luftschicht zwischen beiden Gläsern zeigte nach Art der Newton'schen Ringe durch Interferenz entstandene farbige Curven; dieselbe waren jedoch nicht Kreise, sondern Hyperbeln.

Dies ist auch aus unseren Formeln für die Verrückungen zu ersehen. Gleiche Farbe zeigen alle Stellen, an welchen der Abstand beider Platten, also die Componente w der eingetretenen Verrückung, gleich gross ist. Die Gleichung einer gleichfarbigen Linie erhalten wir daher, wenn wir w gleich einer Constanten w , gleichzeitig aber die Coordinate z gleich dem für die obere Fläche gültigen Werthe $-\frac{1}{2}c$ setzen:

$$C = x^2 - \frac{1}{2} \frac{\lambda}{\mu + \lambda} y^2, \quad (1.)$$

wo C eine constante Grösse

$$C = 2 \frac{w}{\alpha} - \frac{1}{8} \frac{\lambda}{\mu + \lambda} \frac{c^3}{\alpha}$$

bedeutet, in welche der Werth von α aus Gleichung (6.) § 76 einzuführen ist. Die gefundene Gleichung (1.) bezeichnet bei Variation von C eine Schaar von Hyperbeln, deren Asymptoten mit der Längs-

1) Zum grössten Theile gleichfalls Zusatz des Herausgebers.

2) Compt. r. T. 69. p. 333. 1869.

axe x des Stabes einen Winkel ψ bildet, dessen Tangente durch die Gleichung

$$\operatorname{tang}^2 \psi = 2 \frac{\mu + \lambda}{\lambda}$$

bestimmt ist. Die Richtung dieser Linie ist also unabhängig von den Dimensionen des zum Versuche benutzten Stabes und wird nur bestimmt durch das Verhältniss

$$\frac{1}{2} \frac{\lambda}{\mu + \lambda},$$

welches nach den Formeln (9.) § 65 das Verhältniss der Quercontraction zur Längsdilatation eines einseitig gedehnten Prismas darstellt.

Man kann demnach dieses Verhältniss auch dadurch bestimmen, dass man die Lage des Hyperbelsystems ausmisst. Diesen Umstand benutzte Cornu, indem er an photographischen Bildern der hyperbolischen Linien die Lage der Asymptoten gegen die Kanten des Glasprismas mass. Er fand auf diese Weise Werthe des Verhältnisses, welche zwischen 0,22 und 0,26 lagen, welche also mit dem von der Theorie geforderten Werthe 0,25 vorzüglich gut übereinstimmen.

Auch in anderer Weise ist die Biegung eines Stabes von verschiedenen Beobachtern benutzt worden, um das Verhältniss der beiden Elasticitätsconstanten zu bestimmen. So hat Mallock¹⁾ durch unmittelbare mikroskopische Messung der Entfernung von markirten Punkten auf der Oberfläche eines gebogenen Stabes seine Längsdehnung und seine Quersammenziehung gemessen. Er fand für weichen Stahl den mit der Theorie übereinstimmenden Werth des Verhältnisses 0,253, für andere Stoffe grössere Werthe.

Ferner haben Kirchhoff²⁾ und Okatow³⁾ Metallstäbe einer Biegung und einer Torsion unterworfen und durch Verbindung dieser beiden Beobachtungen Werthe des Verhältnisses der Quercontraction zur Längsdehnung erhalten, welche sämmtlich den von der Theorie geforderten Werth $\frac{1}{2}$ merklich übersteigen. Ebenso haben Versuche von Schneebeil⁴⁾, welcher die Schnelligkeit von Torsions- und Längsschwingungen eines und desselben Metallstabes mit einander verglichen hat, meist grössere Werthe ergeben. Durch die Vergleichung der Dehnung mit der Torsion fanden Kohlrausch und

1) Proc. Roy. Soc. Vol. 29, p. 157, 1879.

2) Pogg. Ann. Bd. 108, S. 369, 1859.

3) Pogg. Ann. Bd. 119, S. 11, 1863.

4) Pogg. Ann. Bd. 140, S. 589, 1870.

Loomis¹⁾, sowie Baumeister²⁾ Werthe, welche zwischen $\frac{1}{4}$ und der äussersten theoretisch möglichen Grenze $\frac{1}{2}$ liegen. Dieser Grenzwerth gilt nach den Versuchen von Röntgen³⁾ und von Amagat⁴⁾ für Kautschuk; ebenso wird er für organische Gewebe gefunden. Dagegen erhielt W. Voigt⁵⁾, welcher Glasstäbe untersuchte, aus Messungen von Biegung und Torsion Zahlen, welche kleiner als das theoretische Verhältniss $\frac{1}{4}$ waren; und derselbe Beobachter⁶⁾ fand für galvanisch niedergeschlagenes Kupfer genau den von der Theorie geforderten Werth. Littmann⁷⁾ bestimmte für Drähte den Werth etwas kleiner als $\frac{1}{4}$. Everett⁸⁾ fand für Flintglas Werthe zwischen den Grenzen 0,224 und 0,258, für Metalle grössere Zahlen.

Demnach schwanken die von verschiedenen Forschern auf verschiedenen Wegen erlangten Bestimmungen des bereits in § 66 besprochenen Verhältnisses um den aus der Theorie gefolgerten Werth. Es bleibt die Frage zu entscheiden, inwieweit die beobachteten Abweichungen von dem Mangel der untersuchten Materialien an Gleichmässigkeit ihres Gefüges herrühren, und welcher Antheil den der Theorie zu Grunde liegenden Hypothesen zur Last fällt.

1) Pogg. Ann. Bd. 141, S. 502, 1870.

2) Wied. Ann. Bd. 18, S. 578, 1883.

3) Pogg. Ann. Bd. 159, S. 601, 1876.

4) Compt. rend. 21 juillet 1884.

5) Wied. Ann. Bd. 15, S. 497, 1882.

6) Berl. Sitzungsab. 1883. S. 961; 1884. S. 1004.

7) Breslauer Inaug.-Diss. 1885.

8) Phil. Tr. 1867, p. 139; Proc. Roy. soc. V. 15, p. 356; V. 16, p. 248.

12. Elasticität krystallinischer Stoffe.

§ 78. Allgemeine Formeln.

Auf die vorstehenden Untersuchungen über die elastischen Formveränderungen unkrystallinischer Körper lassen wir ähnliche Betrachtungen über krystallinische Medien folgen. Dabei suchen wir uns ebenso wie damals von zweifelhaften Voraussetzungen frei zu halten. Wie wir bei unkrystallinischen Stoffen die von der molekularen Theorie verlangte Gleichheit der beiden Constanten λ und μ nicht einföhrten (§ 64), so benutzen wir auch jetzt nicht die in § 41 entwickelten Gleichungen für Krystalle, weil diese Gleichungen aus denselben theoretischen Voraussetzungen wie die Navier'schen hergeleitet sind.

Wir entwickeln desshalb neue allgemeine Formeln, wobei wir als alleinige Grundlagen nur die durch die Krystallform gegebenen Symmetrieverhältnisse der Structur¹⁾ und die für unkrystallinische Körper schon im fünften Abschnitt verwerthete Annahme benutzen, dass die Componenten des Molekulardrucks nur von den an jeder Stelle eingetretenen relativen Verrückungen abhängen. Nun aber hängen nach den Formeln (7.) § 24 die relativen Coordinaten zweier Massentheilchen nach Eintritt einer Verrückung nur von den sechs Grössen

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

ab, in denen, wie früher, u , v , w die Componenten der absoluten Verrückung des vorher an der Stelle x , y , z befindlichen Theilchens bedeuten. Demnach können auch die Componenten des elastischen Drucks an der Stelle x , y , z nur von diesen sechs Grössen abhängen. Wir setzen voraus, dass sie lineare Functionen dieser sechs Grössen seien, und bemerken dabei, dass in dieser Voraussetzung nichts Hypo-

1) Neuere Untersuchungen über diesen Gegenstand sind angestellt von G. Kirchhoff (Mechanik, 27. Vorles.), W. Voigt (Wied. Ann. 16. 273), H. Aron (Wied. Ann. 20. 272) und B. Minnigerode (Gött. Nachr. 1884 S. 195, 374 u. 488).

Anmerkung des Herausgebers.

thetisches liegt, so lange wir die Bedingung festhalten, dass die Verrückungen die Grenze der Elasticität nicht überschreiten. Wir setzen also

$$\begin{aligned}
 -X_x &= A \frac{\partial u}{\partial x} + B \frac{\partial v}{\partial y} + C \frac{\partial w}{\partial z} + D \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\
 &\quad + E \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + F \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\
 -Y_y &= A' \frac{\partial u}{\partial x} + B' \frac{\partial v}{\partial y} + C' \frac{\partial w}{\partial z} + D' \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\
 &\quad + E' \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + F' \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\
 -Z_z &= A'' \frac{\partial u}{\partial x} + B'' \frac{\partial v}{\partial y} + C'' \frac{\partial w}{\partial z} + D'' \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\
 &\quad + E'' \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + F'' \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\
 -X_y = -Y_x &= \alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial v}{\partial y} + \gamma \frac{\partial w}{\partial z} + \delta \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\
 &\quad + \eta \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \vartheta \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\
 -Y_z = -Z_y &= \alpha' \frac{\partial u}{\partial x} + \beta' \frac{\partial v}{\partial y} + \gamma' \frac{\partial w}{\partial z} + \delta' \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\
 &\quad + \eta' \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \vartheta' \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\
 -Z_x = -X_z &= \alpha'' \frac{\partial u}{\partial x} + \beta'' \frac{\partial v}{\partial y} + \gamma'' \frac{\partial w}{\partial z} + \delta'' \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\
 &\quad + \eta'' \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \vartheta'' \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right),
 \end{aligned} \tag{1.}$$

worin die Coefficienten $A, B, C \dots, \alpha, \beta, \gamma \dots$ constante Grössen darstellen.

Diese 36 Elasticitätsconstanten lassen sich im Allgemeinen nicht auf eine geringere Anzahl zurückführen. Jedoch verringert sich in den allermeisten Fällen ihre Zahl sehr erheblich, wenn der Krystall in Bezug auf eine oder mehrere Ebenen symmetrisch gebildet ist. Nur in den seltener vorkommenden Fällen des ein- und eingliedrigen Systems, wie z. B. beim Kupfervitriol, liegt kein theoretischer Grund für eine Verminderung ihrer Anzahl vor.

§ 79. Krystalle mit einer Symmetrie-Ebene.

Besitzt der Krystall nur eine Symmetrie-Ebene, so verringert die Zahl der Constanten sich bereits um 16. Um dieses nachzuweisen,

betrachten wir, wie oben im dritten bis fünften Abschnitt, das System der Dilatationen und das der Verrückungen.

Mit den Formeln (7.) § 24

$$\begin{aligned}\xi &= a \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{1}{2} b \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{1}{2} c \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) \\ \eta &= \frac{1}{2} a \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + b \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{1}{2} c \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \zeta &= \frac{1}{2} a \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) + \frac{1}{2} b \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) + c \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right),\end{aligned}$$

welche die nach Eintritt der Verrückung bestehenden Werthe der relativen Coordinaten ξ , η , ζ zweier Punkte bestimmen, deren Orte vorher x , y , z und $x + a$, $y + b$, $z + c$ waren, vergleichen wir die entsprechenden Werthe für zwei symmetrisch zu jenen gelegene Punkte. Wird die Ebene, in Bezug auf welche Symmetrie herrscht, zur Ebene der x und z gewählt, so sind die symmetrisch gelegenen Punkte diejenigen, deren Coordinaten vor der Verrückung x , $-y$, z und $x + a$, $-y - b$, $z + c$ waren; ihre relativen Coordinaten nach der Verrückung sind

$$\begin{aligned}\xi_{-y} &= a \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)_{-y} - \frac{1}{2} b \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)_{-y} + \frac{1}{2} c \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)_{-y} \\ \eta_{-y} &= \frac{1}{2} a \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)_{-y} - b \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right)_{-y} + \frac{1}{2} c \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)_{-y} \\ \zeta_{-y} &= \frac{1}{2} a \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)_{-y} - \frac{1}{2} b \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)_{-y} + c \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right)_{-y},\end{aligned}$$

worin der angehängte Index $-y$ andeuten soll, dass sich die Werthe der Differentialquotienten auf den Punkt x , $-y$, z beziehen. Sind nun die Verrückungen in symmetrischer Weise erfolgt, so muss sein

$$\xi_{-y} = \xi, \quad \eta_{-y} = -\eta, \quad \zeta_{-y} = \zeta,$$

und diese Gleichungen werden erfüllt, wenn

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{-y} &= \frac{\partial u}{\partial x} & \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)_{-y} &= -\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \\ \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{-y} &= \frac{\partial v}{\partial y} & \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)_{-y} &= -\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_{-y} &= \frac{\partial w}{\partial z} & \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)_{-y} &= \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\end{aligned} \quad (1.)$$

ist, so dass der Wechsel der Vorzeichen einer gleichzeitigen Aenderung des Vorzeichens von y und v entspricht.

Indem wir zweitens die Druckcomponenten einer ähnlichen Betrachtung unterwerfen, wenden wir den Grundsatz an, dass mit einer

Symmetrie der Verrückungen zugleich eine solche Symmetrie der Druckvertheilung verbunden ist, dass auf zwei symmetrisch gelegene Flächenelemente gleiche symmetrisch gerichtete Componenten des Druckes wirken. Wir denken uns erstens an der Stelle x, y, z ein Flächenelement, dessen Normale mit den positiven Coordinatenaxen Winkel einschliesst, deren Cosinus φ, χ, ψ seien; auf dieses Flächenelement wirken von der dem Anfangspunkte der Coordinaten zugewandten Seite her (§ 6) Druckkräfte, deren Componenten nach dem Theorem (C.) § 9

$$X_s = \varphi X_x + \chi X_y + \psi X_z,$$

$$Y_s = \varphi Y_x + \chi Y_y + \psi Y_z,$$

$$Z_s = \varphi Z_x + \chi Z_y + \psi Z_z,$$

sind. Wir stellen uns zweitens auf der anderen Seite der Symmetrieebene an der Stelle $x, -y, z$ ein anderes Flächenelement in symmetrischer Lage vor; seine Normale schliesse also mit den Axen der positiven x , der negativen y und der positiven z dieselben Winkel ein, wie die Normale des ersten Elements mit den positiven Axen, oder es seien die Cosinus der Winkel, welche die Normale des zweiten Elements mit den positiven Richtungen der Axen bildet, $\varphi, -\chi, \psi$. Dann sind die Componenten des Druckes, welchen dieses zweite Element, ebenfalls von der dem Coordinatenursprunge zugewandten Seite her, erfährt,

$$(X_s)_{-y} = \varphi (X_x)_{-y} - \chi (X_y)_{-y} + (\psi X_z)_{-y}$$

$$(Y_s)_{-y} = \varphi (Y_x)_{-y} - \chi (Y_y)_{-y} + (\psi Y_z)_{-y}$$

$$(Z_s)_{-y} = \varphi (Z_x)_{-y} - \chi (Z_y)_{-y} + (\psi Z_z)_{-y},$$

worin die Indices die frühere Bedeutung haben. Nun soll nach dem soeben erwähnten Grundsätze

$$(X_s)_{-y} = X_s, \quad (Y_s)_{-y} = -Y_s, \quad (Z_s)_{-y} = Z_s$$

sein; also müssen folgende Beziehungen bestehen, wenn ebenfalls die Druckkräfte symmetrisch vertheilt sind:

$$\begin{aligned} (X_x)_{-y} &= X_x, & (X_y)_{-y} &= -X_y, & (X_z)_{-y} &= X_z \\ (Y_x)_{-y} &= -Y_x, & (Y_y)_{-y} &= Y_y, & (Y_z)_{-y} &= -Y_z \\ (Z_x)_{-y} &= Z_x, & (Z_y)_{-y} &= -Z_y, & (Z_z)_{-y} &= Z_z. \end{aligned} \quad (2.)$$

In diese Gleichungen führen wir die Werthe der Componenten aus den Formeln (1.) § 78 ein, indem wir die in den Formeln (1.) § 79 gegebenen Beziehungen zwischen den Dilatationen symmetrisch

gelegener Stellen benutzen. Wir können dann den Inhalt der Gleichungen (2.) in Worten so aussprechen, dass die drei Normaldruckkräfte

$$X_x, \quad Y_y, \quad Z_z,$$

sowie die tangentielle Druckkraft

$$Z_x = X_z,$$

ihren Werth nicht ändern, wenn y in $-y$ und v in $-v$ verwandelt wird, dass dagegen durch diese Vertauschung die Componenten

$$X_y = Y_x, \quad Y_z = Z_y,$$

ihr Vorzeichen wechseln. Diese Bemerkung führt zu der Folgerung, dass aus den allgemeinen Gleichungen (1.) § 78 folgende Constanten verschwinden müssen:

$$\begin{aligned} D &= 0, & D' &= 0, & D'' &= 0, & \delta'' &= 0 \\ E &= 0, & E' &= 0, & E'' &= 0, & \eta'' &= 0 \\ \alpha &= 0, & \beta &= 0, & \gamma &= 0, & \vartheta &= 0 \\ \alpha' &= 0, & \beta' &= 0, & \gamma' &= 0, & \vartheta' &= 0. \end{aligned}$$

Demnach vereinfachen sich die Formeln, welche die Werthe der Druckcomponenten angeben, für den Fall eines elastischen Mediums, welches durch eine Ebene symmetrisch getheilt wird, also für die zwei- und eingliedrigen oder monoklinischen Krystalle, zu folgenden Gleichungen

$$\begin{aligned} -X_x &= A \frac{\partial u}{\partial x} + B \frac{\partial v}{\partial y} + C \frac{\partial w}{\partial z} + F \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ -Y_y &= A' \frac{\partial u}{\partial x} + B' \frac{\partial v}{\partial y} + C' \frac{\partial w}{\partial z} + F' \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ -Z_z &= A'' \frac{\partial u}{\partial x} + B'' \frac{\partial v}{\partial y} + C'' \frac{\partial w}{\partial z} + F'' \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ -Z_x &= -X_z = \alpha'' \frac{\partial u}{\partial x} + \beta'' \frac{\partial v}{\partial y} + \gamma'' \frac{\partial w}{\partial z} + \vartheta'' \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ -X_y &= -Y_x = \delta \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \eta \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ -Y_z &= -Z_y = \delta' \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \eta' \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \end{aligned} \quad (3.)$$

welche noch 20 Constanten enthalten. Die symmetrisch theilende Ebene ist die Ebene der x und z .

§ 80. Krystalle mit zwei und drei Symmetrie-Ebenen.

Eine weitere Vereinfachung erhalten wir für die grosse Zahl von Krystallen, welche noch eine zweite rechtwinklig zur ersten

gelegene Symmetrie-Ebene besitzen. Wir wählen dieselbe zur yz -Ebene. Eine Wiederholung der vorigen Untersuchung lehrt, dass durch eine gleichzeitige Umkehrung der Vorzeichen von x und u die Vorzeichen von

$$X_x, Y_y, Z_z, Y_z = Z_y$$

sich nicht ändern dürfen, dass aber diejenigen von

$$X_y = Y_x, Z_x = X_z$$

ebenfalls wechseln müssen. Hieraus folgt, dass noch folgende acht Constanten verschwinden:

$$\begin{aligned} F = 0, \quad F' = 0, \quad F'' = 0 \\ \alpha'' = 0, \quad \beta'' = 0, \quad \gamma'' = 0 \\ \eta = 0, \quad \delta' = 0. \end{aligned} \quad (1.)$$

Dadurch wird die Zahl derselben auf 12 vermindert.

Endlich findet sich eine Classe von Krystallen, welche noch eine dritte auf den beiden ersten senkrecht stehende Symmetrie-Ebene besitzen. Den allgemeinsten Fall dieser Classe bilden die zwei- und zweigliedrigen Krystalle. Die Berücksichtigung der dritten Symmetrie-Ebene führt jedoch zu keinen neuen Bedingungen für die Constanten, weil die unter Benutzung der Gleichungen (1.) vereinfachten Formeln (3.) § 79

$$\begin{aligned} - X_x &= A \frac{\partial u}{\partial x} + B \frac{\partial v}{\partial y} + C \frac{\partial w}{\partial z} \\ - Y_y &= A' \frac{\partial u}{\partial x} + B' \frac{\partial v}{\partial y} + C' \frac{\partial w}{\partial z} \\ - Z_z &= A'' \frac{\partial u}{\partial x} + B'' \frac{\partial v}{\partial y} + C'' \frac{\partial w}{\partial z} \\ - X_y &= - Y_x = \delta \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ - Y_z &= - Z_y = \eta' \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ - Z_x &= - X_z = \delta'' \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (2.)$$

bereits die Gesetze der Symmetrie in Bezug auf die dritte Ebene ebenso wie für die erste und zweite erfüllen. Die Gleichungen (2.) gelten also sowohl für Krystalle mit zwei rechtwinkligen Symmetrie-Ebenen, als auch für Krystalle mit drei solchen Ebenen.

Die neuen Gleichungen sind allgemeiner als die früher aus der Hypothese, dass die Elasticität aus molekularen Anziehungskräften entstehe, hergeleiteten Formeln des § 41, welche nur sechs Con-

stanten enthalten. Zwischen den 12 Constanten der neuen Gleichungen müssten die Beziehungen

$$B = A' = \delta$$

$$C' = B'' = \eta'$$

$$A'' = C = \vartheta''$$

angenommen werden, wenn sie mit den Formeln des § 41 zur vollständigen Uebereinstimmung gebracht werden sollten. Die Prüfung dieser Beziehungen durch die Erfahrung kann daher zur Entscheidung der Frage, ob die den specielleren Formeln des § 41 zu Grunde liegende Hypothese der molekularen Kräfte der Wirklichkeit entspricht, mit demselben Rechte benutzt werden, wie Beobachtungen über das Verhältniss der Constanten λ und μ zu einander bei unkrystallinischen Körpern.

§ 81. Krystalle mit zwei gleichen Axen.

Eine weitere Vereinfachung erhalten wir bei denjenigen Krystallsystemen, in denen zwei oder drei Axen unterschiedslos sind, durch ein anderes Verfahren, nämlich durch Drehung des Coordinatensystems um eine der drei Axen.

Ist der Krystall nach der x -Axe ebenso gebildet wie nach der y -Axe, während die z -Axe eine ungleiche Structur enthalten kann, so müssen die Formeln ungeändert bleiben, wenn eine Drehung von 90° um die z -Axe ausgeführt wird.

Um den Einfluss einer solchen Drehung berechnen zu können, entwickeln wir, zugleich zum Zwecke weiterer Anwendung, allgemeine Gleichungen für eine Transformation der Coordinaten x und y , sowie der Verrückungen u und v auf ein neues System x' , y' und u' , v' , dessen Axen um den Winkel ξ gegen das ursprüngliche gedreht sind. Setzen wir

$$x = x' \cos \xi - y' \sin \xi$$

$$y = x' \sin \xi + y' \cos \xi$$

$$z = z'$$

$$u = u' \cos \xi - v' \sin \xi$$

$$v = u' \sin \xi + v' \cos \xi$$

$$w = w',$$

so wird

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u'}{\partial x'} \cos^2 \xi + \frac{\partial v'}{\partial y'} \sin^2 \xi - \left(\frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} \right) \cos \xi \sin \xi \\
\frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial u'}{\partial x'} \sin^2 \xi + \frac{\partial v'}{\partial y'} \cos^2 \xi + \left(\frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} \right) \cos \xi \sin \xi \\
\frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{\partial w'}{\partial z'} \\
\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= 2 \left(\frac{\partial u'}{\partial x'} - \frac{\partial v'}{\partial y'} \right) \cos \xi \sin \xi + \left(\frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} \right) (\cos^2 \xi - \sin^2 \xi) \\
\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} &= \left(\frac{\partial v'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial y'} \right) \cos \xi + \left(\frac{\partial w'}{\partial x'} + \frac{\partial u'}{\partial z'} \right) \sin \xi \\
\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} &= \left(\frac{\partial w'}{\partial x'} + \frac{\partial u'}{\partial z'} \right) \cos \xi - \left(\frac{\partial v'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial y'} \right) \sin \xi.
\end{aligned} \tag{1}$$

Ebenso erhalten wir zur Verwandlung der Druckcomponenten die allgemeinen Formeln:

$$\begin{aligned}
X'_x &= X_x \cos^2 \xi + Y_y \sin^2 \xi + 2X_y \cos \xi \sin \xi \\
Y'_y &= X_x \sin^2 \xi + Y_y \cos^2 \xi - 2X_y \cos \xi \sin \xi \\
Z'_z &= Z_z \\
X'_y &= Y'_x = (Y_y - X_x) \cos \xi \sin \xi + X_y (\cos^2 \xi - \sin^2 \xi) \\
Y'_z &= Z'_y = -X_x \sin \xi + Y_y \cos \xi \\
Z'_x &= X'_z = X_x \cos \xi + Y_y \sin \xi.
\end{aligned} \tag{2}$$

Hierin sind die Werthe der Componenten X_x , Y_y etc. aus den Gleichungen (2.) § 80 und in diese die obigen Werthe von $\frac{\partial u}{\partial x}$ u. s. f. einzusetzen, wenn die Componenten im neuen System durch die Verrückungen in demselben System ausgedrückt werden sollen.

Wenden wir nun diese Formeln auf den besonderen Fall einer Drehung um $\xi = \frac{1}{2} \pi$ an, durch welche x' in y , y' in $-x$ und ebenso u' in v , v' in $-u$ übergeht, so finden wir folgende Gleichungen für die Verrückungen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v'}{\partial y'} & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= - \left(\frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} \right) \\
\frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial u'}{\partial x'} & \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} &= \left(\frac{\partial w'}{\partial x'} + \frac{\partial u'}{\partial z'} \right) \\
\frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{\partial w'}{\partial z'} & \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} &= - \left(\frac{\partial v'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial y'} \right),
\end{aligned} \tag{3}$$

sowie für die Druckcomponenten im neuen Coordinatensystem x' , y' , z' :

$$\begin{aligned}
 X'_x &= Y_y, & X'_y &= -Y_x, & X'_z &= Y_z, \\
 Y'_x &= -X_y, & Y'_y &= X_x, & Y'_z &= -X_z, \\
 Z'_x &= Z_y, & Z'_y &= -Z_x, & Z'_z &= Z_z,
 \end{aligned} \tag{4.}$$

und weiter durch Einführung der Formeln (3.) und (4.) in die Gleichungen (2.) § 80

$$\begin{aligned}
 -X'_x &= B' \frac{\partial u'}{\partial x'} + A' \frac{\partial v'}{\partial y'} + C' \frac{\partial w}{\partial z} \\
 -Y'_y &= B \frac{\partial u'}{\partial x'} + A \frac{\partial v'}{\partial y'} + C \frac{\partial w}{\partial z} \\
 -Z'_z &= B'' \frac{\partial u'}{\partial x'} + A'' \frac{\partial v'}{\partial y'} + C'' \frac{\partial w}{\partial z} \\
 -X'_y &= -Y'_x = \delta \left(\frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} \right) \\
 -Y'_z &= -Z'_y = \vartheta'' \left(\frac{\partial v'}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y'} \right) \\
 -Z'_x &= -X'_z = \eta' \left(\frac{\partial w}{\partial x'} + \frac{\partial u'}{\partial z} \right).
 \end{aligned}$$

Wenn nun die Formeln (2.) § 80 auch für ein um 90° gedrehtes Axensystem gültig bleiben sollen, so müssen die Gleichungen

$$\begin{aligned}
 -X'_x &= A \frac{\partial u'}{\partial x'} + B \frac{\partial v'}{\partial y'} + C \frac{\partial w}{\partial z} \\
 -Y'_y &= A' \frac{\partial u'}{\partial x'} + B' \frac{\partial v'}{\partial y'} + C' \frac{\partial w}{\partial z} \\
 -Z'_z &= A'' \frac{\partial u'}{\partial x'} + B'' \frac{\partial v'}{\partial y'} + C'' \frac{\partial w}{\partial z} \\
 -X'_y &= -Y'_x = \delta \left(\frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} \right) \\
 -Y'_z &= -Z'_y = \eta' \left(\frac{\partial v'}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y'} \right) \\
 -Z'_x &= -X'_z = \vartheta'' \left(\frac{\partial w}{\partial x'} + \frac{\partial u'}{\partial z} \right)
 \end{aligned}$$

mit den vorstehenden identisch sein. Es ist also

$$A = B', \quad B = A', \quad C = C', \quad A'' = B'', \quad \eta' = \vartheta'',$$

und wir erhalten für Krystalle, welche zwei oder drei Symmetrieebenen nebst zwei unterschiedslosen Axen besitzen, also für die Krystalle des viergliedrigen Systems, für die Druckcomponenten folgende Gleichungen, welche noch sieben Constanten enthalten:

$$\begin{aligned}
 - X_x &= A \frac{\partial u}{\partial x} + B \frac{\partial v}{\partial y} + C \frac{\partial w}{\partial z} \\
 - Y_y &= B \frac{\partial u}{\partial x} + A \frac{\partial v}{\partial y} + C \frac{\partial w}{\partial z} \\
 - Z_z &= A'' \frac{\partial u}{\partial x} + A'' \frac{\partial v}{\partial y} + C'' \frac{\partial w}{\partial z} \\
 - X_y &= - Y_x = \delta \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\
 - Y_z &= - Z_y = \eta' \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\
 - Z_x &= - X_z = \eta' \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right).
 \end{aligned} \tag{5}$$

§ 82. Reguläre Krystalle.

Um endlich zu den Formeln für das reguläre System, in welchem alle drei Axen gleichwerthig sind, zu gelangen, haben wir dasselbe Verfahren für eine zweite Drehungsaxe auszuführen. Drehen wir z. B. um die x -Axe, so erhalten wir die Beziehungen

$$B' = C'', \quad C' = B'', \quad A' = A'', \quad B = C, \quad \delta = \delta''$$

zwischen den zwölf Constanten der Formeln in § 80. Verbinden wir diese mit den im vorigen § aufgestellten Relationen, so finden wir für Krystalle mit drei gleichen Axen

$$\begin{aligned}
 A &= B' = C'' \\
 A' &= A'' = B = B'' = C = C' \\
 \delta &= \eta' = \delta''
 \end{aligned} \tag{1}$$

und erhalten für die Componenten des elastischen Drucks in regulären Krystallen folgende Formeln mit drei Constanten

$$\begin{aligned}
 - X_x &= A \frac{\partial u}{\partial x} + B \frac{\partial v}{\partial y} + B \frac{\partial w}{\partial z} = (A - B) \frac{\partial u}{\partial x} + B \Delta \\
 - Y_y &= B \frac{\partial u}{\partial x} + A \frac{\partial v}{\partial y} + B \frac{\partial w}{\partial z} = (A - B) \frac{\partial v}{\partial y} + B \Delta \\
 - Z_z &= B \frac{\partial u}{\partial x} + B \frac{\partial v}{\partial y} + A \frac{\partial w}{\partial z} = (A - B) \frac{\partial w}{\partial z} + B \Delta \\
 - X_y &= - Y_x = \delta \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\
 - Y_z &= - Z_y = \delta \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\
 - Z_x &= - X_z = \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right).
 \end{aligned} \tag{2}$$

Von diesen Formeln ist der Uebergang zu den für unkrystallinische Körper geltenden leicht zu machen. Während für Krystalle die Coordinatenaxen mit den Symmetrieaxen der Krystallform zusammenfallen müssen, ist in einem unkrystallinischen Körper die Wahl der Axen beliebig. Irgend eine Drehung des Coordinatensystems kann also auf die Gestalt der Gleichungen und die Werthe der Coefficienten keinen Einfluss haben. Hieraus ergibt sich nach den Formeln des § 81, dass für unkrystallinische Medien noch

$$2\delta = A - B$$

gesetzt werden muss, wodurch die Gleichungen (2.) mit den in einer früheren Untersuchung (§ 31) aufgestellten zur Uebereinstimmung gebracht sind.

§ 83. Hexagonale Krystalle.

Es bleiben noch die Krystalle des hexagonalen Systems zu untersuchen übrig, deren Grundform die auf einem regulären Sechseck stehende gleichseitige Doppelpyramide ist. Die drei Diagonalen dieses Sechsecks bilden die drei gleichwerthigen Axen der Krystallform, deren vierte Axe von jenen verschieden ist. Um die Gesetze dieser Art von Symmetrie auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem zu beziehen, benutzen wir die Formeln (2.) § 80, welche gültig sind, da die beschriebene Krystallform durch drei auf einander rechtwinklig stehende Ebenen symmetrisch theilbar ist. Dazu kommt als zweite Art der Symmetrie, dass eine Drehung um 60° zu einer von der ursprünglichen nicht unterschiedenen Stellung führt.

Wir bringen demnach die in § 81 entwickelten Transformationsformeln für

$$\xi = 60^\circ, \quad \cos \xi = \frac{1}{2}, \quad \sin \xi = \frac{1}{2} \sqrt{3}$$

zur Anwendung, wodurch wir zunächst

$$X'_x = \frac{1}{4} X_x + \frac{3}{4} Y_y + \frac{1}{2} \sqrt{3} X_y$$

$$Y'_y = \frac{3}{4} X_x + \frac{1}{4} Y_y - \frac{1}{2} \sqrt{3} X_y$$

$$Z'_z = Z_z$$

$$X'_y = Y'_x = \frac{1}{4} \sqrt{3} (Y_y - X_x) - \frac{1}{2} X_y$$

$$Y'_z = Z'_y = -\frac{1}{2} \sqrt{3} X_x + \frac{1}{2} Y_z$$

$$Z'_x = X'_z = \frac{1}{2} X_x + \frac{1}{2} \sqrt{3} Y_y$$

erhalten. Setzen wir hierin aus den Gleichungen (2.) § 80 die Werthe der Componenten im alten Coordinatensystem, ausgedrückt durch die Verrückungen in demselben System, ein und führen für die letzteren die auf die neuen Coordinaten bezogenen Werthe

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{4} \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{3}{4} \frac{\partial v'}{\partial y'} - \frac{1}{4} \sqrt{3} \left(\frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{3}{4} \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{1}{4} \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{1}{4} \sqrt{3} \left(\frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} \right) \\ \frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{\partial w'}{\partial z'} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{1}{2} \sqrt{3} \left(\frac{\partial u'}{\partial x'} - \frac{\partial v'}{\partial y'} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial y'} \right) + \frac{1}{2} \sqrt{3} \left(\frac{\partial w'}{\partial x'} + \frac{\partial u'}{\partial z'} \right) \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w'}{\partial x'} + \frac{\partial u'}{\partial z'} \right) - \frac{1}{2} \sqrt{3} \left(\frac{\partial v'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial y'} \right)\end{aligned}$$

ein, so gelangen wir zu Formeln für die auf das neue Coordinatensystem bezüglichen Werthe der Druckcomponenten als Functionen der Verrückungen in demselben System, welche den nach dem Symmetriegesetz der sechsgliedrigen Krystalle auch im neuen Axensystem gültigen Formeln (2.) § 80

$$\begin{aligned}- X'_z &= A \frac{\partial u'}{\partial x'} + B \frac{\partial v'}{\partial y'} + C \frac{\partial w'}{\partial z'} \\ - Y'_y &= A' \frac{\partial u'}{\partial x'} + B' \frac{\partial v'}{\partial y'} + C' \frac{\partial w'}{\partial z'} \\ - Z'_z &= A'' \frac{\partial u'}{\partial x'} + B'' \frac{\partial v'}{\partial y'} + C'' \frac{\partial w'}{\partial z'} \\ - X'_y &= - Y'_z = \delta \left(\frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} \right) \\ - Y'_z &= - Z'_y = \eta' \left(\frac{\partial v'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial y'} \right) \\ - Z'_x &= - X'_z = \vartheta'' \left(\frac{\partial w'}{\partial x'} + \frac{\partial u'}{\partial z'} \right)\end{aligned}$$

identisch gleich sein müssen. Diese Bemerkung führt zu einer Anzahl von Gleichungen, welche durch folgende Beziehungen zwischen den Constanten erfüllt werden:

$$\begin{aligned}A' &= B, & B' &= A, & C' &= C, & B'' &= A'', \\ 2\delta &= A - B, & \vartheta'' &= \eta'.\end{aligned}\quad (1.)$$

Dadurch vermindert sich die Zahl der Constanten von 12 auf 6, und es erscheinen die für das sechsgliedrige Krystallsystem gültigen Formeln in der Gestalt

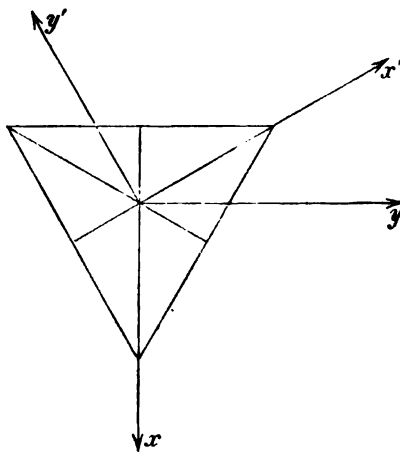
$$\begin{aligned}
 -X_x &= A \frac{\partial u}{\partial x} + B \frac{\partial v}{\partial y} + C \frac{\partial w}{\partial z} \\
 -Y_y &= B \frac{\partial u}{\partial x} + A \frac{\partial v}{\partial y} + C \frac{\partial w}{\partial z} \\
 -Z_z &= A'' \frac{\partial u}{\partial x} + A'' \frac{\partial v}{\partial y} + C'' \frac{\partial w}{\partial z} \\
 -X_y &= -Y_x = \frac{1}{2}(A - B) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\
 -Y_z &= -Z_y = \eta' \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\
 -Z_x &= -X_z = \eta' \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right),
 \end{aligned} \tag{2}$$

in welcher eine vollkommene Analogie mit den für die viergliedrigen Krystalle aufgestellten Gleichungen (5.) § 81 hervortritt.

§ 84. Rhomboëdrisches System.

Nach demselben Verfahren lassen sich die Formeln für das rhomboëdrische Krystallsystem entwickeln, dessen Grundform als eine doppelte dreiseitige Pyramide aufzufassen ist, jedoch mit einer solchen Bestimmung über das Gesetz der Symmetrie, dass einer Fläche der oberen Pyramide nicht eine gleiche der unteren entspricht, sondern dass eine Fläche der oberen mit einer Kante der unteren Pyramide auf derselben Seite des Krystalles liegt, und umgekehrt. Ein Rhomboëder ist also nicht durch mehrere auf einander rechtwinklige Ebenen symmetrisch theilbar.

Wenn wir die bevorzugte Hauptaxe des Rhomboëders zur Axe der z -Coordinate wählen und die x -Axe so legen, dass die xz -Ebene eine Fläche der einen Pyramide senkrecht schneidet, und dass eine Kante der anderen in dieser Ebene liegt, so ist von den drei Coordinatenebenen nur diese eine, die xz -Ebene, eine Symmetrieebene. Es kommen also die Formeln (3.)



§ 79 zur Anwendung. Die in diesen Gleichungen enthaltene Zahl von 20 Constanten vermindert sich durch die Bemerkung, dass eine um die z -Axe ausgeführte Drehung des Coordinatensystems um 120° , wie aus der S. 176 gezeichneten Projection zu ersehen ist, das Coordinatensystem xy in die gleichwerthige Lage $x'y'$ bringt.

Setzen wir nun in den Formeln (2.) § 81

$$\zeta = 120^\circ, \quad \cos \zeta = -\frac{1}{2}, \quad \sin \zeta = \frac{1}{2} \sqrt{3},$$

so erhalten wir

$$X'_x = \frac{1}{4} X_x + \frac{3}{4} Y_x - \frac{1}{2} \sqrt{3} X_y$$

$$Y'_y = \frac{3}{4} X_x + \frac{1}{4} Y_x + \frac{1}{2} \sqrt{3} X_y$$

$$Z'_z = Z_x$$

$$X'_y = Y'_x = \frac{1}{4} \sqrt{3} (X_x - Y_x) - \frac{1}{2} X_y$$

$$Y'_z = Z'_y = -\frac{1}{2} \sqrt{3} X_x - \frac{1}{2} Y_x$$

$$Z'_x = X'_z = -\frac{1}{2} X_x + \frac{1}{2} \sqrt{3} Y_x,$$

worin aus (3.) § 79 die Werthe der Componenten einzuführen sind.

In diesen Ausdrücken ist dann weiter nach (1.) § 81 zu setzen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{4} \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{3}{4} \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{1}{4} \sqrt{3} \left(\frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} \right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{3}{4} \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{1}{4} \frac{\partial v'}{\partial y'} - \frac{1}{4} \sqrt{3} \left(\frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} \right)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w'}{\partial z'}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{2} \sqrt{3} \left(\frac{\partial u'}{\partial x'} - \frac{\partial v'}{\partial y'} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} \right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial y'} \right) + \frac{1}{2} \sqrt{3} \left(\frac{\partial w'}{\partial x'} + \frac{\partial u'}{\partial z'} \right)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w'}{\partial x'} + \frac{\partial u'}{\partial z'} \right) - \frac{1}{2} \sqrt{3} \left(\frac{\partial v'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial y'} \right).$$

Dieses Verfahren muss dann zu Werthen für die Druckcomponenten im neuen System führen, welche den folgenden

$$-X'_x = A \frac{\partial u'}{\partial x'} + B \frac{\partial v'}{\partial y'} + C \frac{\partial w'}{\partial z'} + F \left(\frac{\partial w'}{\partial x'} + \frac{\partial u'}{\partial z'} \right)$$

$$-Y'_y = A' \frac{\partial u'}{\partial x'} + B' \frac{\partial v'}{\partial y'} + C' \frac{\partial w'}{\partial z'} + F' \left(\frac{\partial w'}{\partial x'} + \frac{\partial u'}{\partial z'} \right)$$

$$-Z'_z = A'' \frac{\partial u'}{\partial x'} + B'' \frac{\partial v'}{\partial y'} + C'' \frac{\partial w'}{\partial z'} + F'' \left(\frac{\partial w'}{\partial x'} + \frac{\partial u'}{\partial z'} \right)$$

$$\begin{aligned}
-Z'_x &= -X'_z = \alpha'' \frac{\partial u'}{\partial x'} + \beta'' \frac{\partial v'}{\partial y'} + \gamma'' \frac{\partial w'}{\partial z'} + \vartheta'' \left(\frac{\partial w'}{\partial x'} + \frac{\partial u'}{\partial z'} \right) \\
-X'_y &= -Y'_x = \delta \left(\frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} \right) + \eta \left(\frac{\partial v'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial y'} \right) \\
-Y'_z &= -Z'_y = \delta' \left(\frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} \right) + \eta' \left(\frac{\partial v'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial y'} \right)
\end{aligned}$$

identisch gleich sind. So ergibt sich wiederum eine Anzahl von Gleichungen zwischen den Constanten, welche erfüllt werden, wenn

$$\begin{aligned}
A &= B', & A' &= B, & A'' &= B'', & 2\delta &= A - B, \\
C &= C', & F'' &= 0, & \eta' &= \vartheta'', & \gamma'' &= 0, \\
F &= -F' = -\eta, & \alpha'' &= -\beta'' = -\delta'
\end{aligned}$$

gesetzt wird.

Hierdurch wird die Zahl der Constanten um 12 vermindert, so dass wir für rhomboëdrische Krystalle folgende Formeln mit acht Constanten erhalten:

$$\begin{aligned}
-X_x &= A \frac{\partial u}{\partial x} + B \frac{\partial v}{\partial y} + C \frac{\partial w}{\partial z} - \eta \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\
-Y_y &= B \frac{\partial u}{\partial x} + A \frac{\partial v}{\partial y} + C \frac{\partial w}{\partial z} + \eta \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\
-Z_z &= A'' \frac{\partial u}{\partial x} + A'' \frac{\partial v}{\partial y} + C'' \frac{\partial w}{\partial z} \\
-X_y &= -Y_x = \frac{1}{2} (A - B) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \eta \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\
-Y_z &= -Z_y = \delta' \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \eta' \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\
-Z_x &= -X_z = \delta' \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \eta' \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right),
\end{aligned} \tag{1.}$$

welche die Formeln (2.) § 83 für sechsgliedrige Krystalle als speciellen Fall enthalten und in diese übergehen, wenn η und $\delta' = 0$ gesetzt werden.

Wir schliessen diese allgemeinen Untersuchungen über die Elasticitätsgesetze der verschiedenen Krystallsysteme mit der Bemerkung, dass wir nach dem Ergebniss derselben nur behaupten dürfen, dass die Gleichungen nicht mehr als 20 Constanten für die zwei- und eingliedrigen, nicht mehr als 12 für die zwei- und zweigliedrigen, nicht mehr als 7 für die viergliedrigen, nicht mehr als 3 für die regulären, nicht mehr als 6 für die sechsgliedrigen und nicht mehr als 8 für die rhomboëdrischen Krystalle enthalten können. Es ist aber in jedem dieser Fälle sehr wohl möglich, dass in Wirklich-

keit die Zahl der Constanten geringer ist¹⁾, und dass aus Beobachtungen sich die Gleichheit einer Anzahl der hier unterschiedenen Constanten ergeben mag.

§ 85. Zusammendrückung eines Krystalls durch allseitigen Druck.

Indem wir zu Anwendungen der allgemeinen Formeln auf die Theorie einzelner Beobachtungsarten übergehen, betrachten wir als erstes Beispiel das Verhalten eines Krystalls, welcher durch einen gleichmässig auf seine sämtlichen Flächen ausgeübten Druck zusammengedrückt wird. Der Werth dieser Untersuchung liegt hauptsächlich darin, dass durch sie die Frage entschieden werden kann, ob der Krystall nach verschiedenen Richtungen ungleich zusammengedrückt wird.

Bezeichnet D den gleichmässig auf die Krystallflächen wirkenden Druck, so gelten nach § 11 für jeden Punkt der Oberfläche die Gleichungen

$$\begin{aligned} D \cos(n, x) &= X_x \cos(n, x) + X_y \cos(n, y) + X_z \cos(n, z) \\ D \cos(n, y) &= Y_x \cos(n, x) + Y_y \cos(n, y) + Y_z \cos(n, z) \\ D \cos(n, z) &= Z_x \cos(n, x) + Z_y \cos(n, y) + Z_z \cos(n, z). \end{aligned} \quad (1.)$$

Dieselben müssen also für jeden Werth der drei Cosinus erfüllt werden. Dieser Forderung genügt die Annahme, dass die Druckcomponenten für jede Stelle an der Oberfläche und im Innern des Krystalls dieselben constanten Werthe annehmen, und zwar

$$\begin{aligned} D &= X_x & 0 &= X_y = Y_x \\ D &= Y_y & 0 &= Y_z = Z_y \\ D &= Z_z & 0 &= Z_x = X_z. \end{aligned} \quad (2.)$$

Hieraus folgt, dass die Verrückungen u, v, w lineare Functionen von x, y, z sein müssen.

Wenn der Krystall zu der Classe derjenigen gehört, welche

1) Eine weitere Verringerung ihrer Zahl, und zwar im allgemeinen Falle von 36 auf 21, erhält man durch Einführung der Voraussetzung, dass die elastischen Kräfte, wie in § 63 erwähnt wurde, ein Potential besitzen, aus welchem die Werthe sämtlicher Druckkräfte auch für einen elastischen Körper durch Differentiation nach den Werthen der relativen Verrückungen hergeleitet werden können. Vergl. Green, *Cambr. phil. Tr.* 7, p. 121, 1842; W. Thomson, *Quart. journ. math.* 1, p. 57, 1857; Kirchhoff, *Crelle's Journ. f. Math.* Bd. 56, S. 290, 1859.

durch drei auf einander rechtwinklige Ebenen symmetrisch getheilt werden können, so wird den vorstehenden Gleichungen, in welche die Werthe der Componenten aus den Formeln (2.) § 80 einzusetzen sind, schon durch die einfacheren Functionen

$$u = Mx, \quad v = Ny, \quad w = Pz$$

genügt. Denn die Constanten M, N, P lassen sich so bestimmen, dass die verlangten Bedingungen

$$0 = D + A M + B N + C P$$

$$0 = D + A' M + B' N + C' P$$

$$0 = D + A'' M + B'' N + C'' P$$

erfüllt werden.

Durch Auflösung dieser Gleichungen sieht man, dass im Allgemeinen die Dilatation nach verschiedenen Richtungen verschieden ist. Ein Krystall wird sich also unter allseitigem, gleichförmigem Druck nicht, wie ein unkrystallinischer Körper, nach allen Richtungen gleich zusammenziehen. Eine im luftleeren Raume aus einem Krystall geschliffene Kugel wird im luftgefüllten ein dreiaxiges Ellipsoid.

Ist der Krystall ein regulärer, so geben die Gleichungen (2.) § 82

$$0 = D + (A - B) M + B \Delta$$

$$0 = D + (A - B) N + B \Delta$$

$$0 = D + (A - B) P + B \Delta,$$

und hieraus folgt für die räumliche Dilatation

$$\Delta = M + N + P$$

der durch die Gleichung

$$0 = 3D + (A + 2B)\Delta$$

bestimmte Werth. Weiter erhalten wir für die linearen Dilatationen nach den drei Hauptrichtungen den übereinstimmenden Werth

$$M = N = P = - \frac{D}{A + 2B}.$$

Daraus folgt, dass ein aus regulär krystallisirter Masse bestehender Körper durch gleichmässigen äusseren Druck seine Gestalt nur so verändert, dass sie sich ähnlich bleibt.

Die Grösse $A + 2B$ ist der Elasticitätsmodulus des Stoffes. Sein Werth ist constant, während derjenige des Elasticitätscoeffi-

cienten bei einem Krystalle mit der Richtung veränderlich ist. Messbar ist der Modulus mit Hülfe des Piézometers durch Bestimmung der räumlichen Zusammendrückung

$$-\Delta = \frac{3D}{A + 2B}.$$

Ebenso gestaltet in dem Falle, dass der Krystall ein hexagonaler oder ein rhomboëdrischer ist, die Rechnung sich sehr einfach, da die für diese Fälle gültigen Gleichungen (1.) § 84 durch die Einsetzung der Werthe

$$u = Mx, \quad v = My, \quad w = Pz$$

erfüllt werden, wenn die Constanten M und P den Bedingungen

$$0 = D + (A + B)M + CP$$

$$0 = D + 2A''M + C''P$$

unterliegen. Aus diesen folgt

$$M = -D(C'' - C)Q$$

$$P = -D(A + B - 2A'')Q,$$

wenn zur Abkürzung

$$Q\{(A + B)C'' - 2A''C\} = 1$$

gesetzt wird. Die Zusammendrückung eines hexagonalen oder rhomboëdrischen Krystalls ist also ungleich nach verschiedenen Richtungen. Eine Kugel wird durch Druck in ein Rotationsellipsoid verwandelt, dessen Rotationsaxe die Länge $1 + P$ besitzt, während die andere Axe die Länge $1 + M$ hat, wenn der Durchmesser der Kugel 1 war.

Es kann sich sehr wohl ereignen, dass die beiden Grössen M und P nicht bloss ungleichen Werth, sondern auch ein ungleiches Vorzeichen besitzen. Dann würde der allseitig gepresste Krystall sich in einer Richtung zusammenziehen, während er sich in einer andern ausdehnt, analog der schönen von Eilhard Mitscherlich¹⁾ gemachten Entdeckung, dass ein Krystall durch Erwärmung sich nicht allein ungleichmässig ausdehnt, sondern sogar in gewissen Richtungen sich zusammenziehen kann.

§ 86. Krystallprisma unter einseitigem Druck.

Wir untersuchen zweitens das Verhalten eines aus einem Krystall nach beliebiger Richtung ausgeschnittenen rechtwinkligen Prismas,

1) Abh. d. Berl. Akad. 1826. Pogg. Ann. Bd. 1 u. 10.

wenn es durch einseitigen Druck auf zwei einander gegenüberliegende Flächen zusammengepresst wird, während die vier Seitenflächen druckfrei bleiben.

Ausser dem auf die Axen des Krystalls bezogenen Coordinatensystem der x, y, z bietet sich ein zweites rechtwinkliges Axensystem ξ, η, ζ dar, dessen Richtungen den Kanten des Prismas parallel sind. Der Druck werde auf die der $\eta\xi$ -Ebene parallelen Flächen senkrecht, also in der Richtung der ξ -Axe ausgeübt, und zwar so, dass auf der Flächeneinheit der Druck des Gewichtes D lastet. Dann ist für die dem Drucke ausgesetzten Flächen

$$\begin{aligned} D \cos(\xi, x) &= X_x \cos(\xi, x) + X_y \cos(\xi, y) + X_z \cos(\xi, z) \\ D \cos(\xi, y) &= Y_x \cos(\xi, x) + Y_y \cos(\xi, y) + Y_z \cos(\xi, z) \\ D \cos(\xi, z) &= Z_x \cos(\xi, x) + Z_y \cos(\xi, y) + Z_z \cos(\xi, z), \end{aligned} \quad (1.)$$

dagegen für die freien Seitenflächen

$$\begin{aligned} 0 &= X_x \cos(\eta, x) + X_y \cos(\eta, y) + X_z \cos(\eta, z) \\ 0 &= Y_x \cos(\eta, x) + Y_y \cos(\eta, y) + Y_z \cos(\eta, z) \\ 0 &= Z_x \cos(\eta, x) + Z_y \cos(\eta, y) + Z_z \cos(\eta, z) \end{aligned} \quad (2.)$$

und

$$\begin{aligned} 0 &= X_x \cos(\zeta, x) + X_y \cos(\zeta, y) + X_z \cos(\zeta, z) \\ 0 &= Y_x \cos(\zeta, x) + Y_y \cos(\zeta, y) + Y_z \cos(\zeta, z) \\ 0 &= Z_x \cos(\zeta, x) + Z_y \cos(\zeta, y) + Z_z \cos(\zeta, z). \end{aligned} \quad (3.)$$

Da wir die Voraussetzung festhalten, dass die Deformationen innerhalb der Grenze der Elasticität bleiben, so versuchen wir, ob wir auch diesen Bedingungen durch die Annahme genügen können, dass die Verrückungen u, v, w lineare Functionen der Coordinaten x, y, z sind:

$$\begin{aligned} u &= Mx + p'y + nz \\ v &= px + Ny + m'z \\ w &= n'x + my + Ps. \end{aligned} \quad (4.)$$

Durch diese Annahme werden die Druckcomponenten, wie die Coefficienten M, m u. s. w. in den vorstehenden Gleichungen constante, d. h. von x, y, z unabhängige Grössen.

Demnach kann den Gleichungen (1.) bis (3.), welche zunächst nur für gewisse Werthe von x, y, z gelten, nur dadurch genügt werden, dass dieselben allgemein ohne Rücksicht auf die Werthe der Coordinaten Gültigkeit erhalten. Diese Bemerkung führt zu einer bedeutenden Vereinfachung der neun Gleichungen, da man aus je drei

einander entsprechenden Formeln der drei Systeme (1.) bis (3.) nach den Bedingungen der Orthogonalität folgende Formeln erhält:

$$\begin{aligned} X_x &= D \cos^2 (\xi, x) & Y_x &= Z_y = D \cos (\xi, s) \cos (\xi, y) \\ Y_y &= D \cos^2 (\xi, y) & Z_x &= X_z = D \cos (\xi, x) \cos (\xi, s) \\ Z_z &= D \cos^2 (\xi, s) & X_y &= Y_z = D \cos (\xi, y) \cos (\xi, x), \end{aligned} \quad (5.)$$

in welche je nach dem Krystallsystem, welchem der Körper angehört, die Werthe der Druckcomponenten aus einem der Formelsysteme der §§ 79—84 einzusetzen sind.

Unsere Aufgabe besteht dann nur noch darin, diese Gleichungen, welche lediglich constante Grössen enthalten, nach den Unbekannten M , m u. s. w. aufzulösen. Dabei darf der Umstand nicht befremden, dass nur sechs Gleichungen zur Verfügung stehen, während neun unbekannt Coefficienten zu bestimmen sind. Die Gleichungen (5.) liefern nämlich die Werthe der sechs Grössen

$$M, N, P, \quad m + m', \quad n + n', \quad p + p',$$

welche ausreichen, den Zustand der inneren Verschiebungen des Körpers vollständig zu bestimmen, während die Differenzen

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial s} &= m - m' \\ \frac{\partial u}{\partial s} - \frac{\partial w}{\partial x} &= n - n' \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial s} &= p - p' \end{aligned}$$

nach § 24 nur für eine gemeinsame Drehung des ganzen Körpers von Bedeutung sind.

§ 87. Prisma aus einem regulären Krystall.

In dem besonderen Falle, dass das Prisma aus einem regulären Krystall geschnitten ist, gelten die Gleichungen (2.) § 82, aus welchen zur Bestimmung von M , N , P folgt:

$$\begin{aligned} (A - B) M + B \Delta &= - D \cos^2 (\xi, x) \\ (A - B) N + B \Delta &= - D \cos^2 (\xi, y) \\ (A - B) P + B \Delta &= - D \cos^2 (\xi, s), \end{aligned} \quad (1.)$$

worin

$$\Delta = M + N + P$$

ist, ferner

$$\begin{aligned} \delta(m + m') &= - D \cos (\xi, y) \cos (\xi, s) \\ \delta(n + n') &= - D \cos (\xi, s) \cos (\xi, x) \\ \delta(p + p') &= - D \cos (\xi, x) \cos (\xi, y). \end{aligned} \quad (2.)$$

Während durch die letzteren Gleichungen die durch kleine Buchstaben bezeichneten Constanten unmittelbar bestimmt sind, folgt aus den ersteren zunächst die räumliche Dilatation

$$\Delta = -\frac{D}{A+2B} \quad (3.)$$

und daraus die linearen Dilatationen

$$\begin{aligned} M &= \frac{D}{A-B} \left\{ \frac{B}{A+2B} - \cos^2(\xi, x) \right\} \\ N &= \frac{D}{A-B} \left\{ \frac{B}{A+2B} - \cos^2(\xi, y) \right\} \\ P &= \frac{D}{A-B} \left\{ \frac{B}{A+2B} - \cos^2(\xi, z) \right\}. \end{aligned} \quad (4.)$$

Durch diese Formeln ist das System der Dilatationen, welche der Krystall erleidet, vollständig bestimmt. Die Verlängerung oder Verkürzung, welche er in einer beliebig gewählten Richtung erfährt, können wir auf folgende Weise bestimmen. Wir denken uns in der Nähe des Punktes x, y, z einen zweiten an der Stelle $x+a, y+b, z+c$, so dass die Entfernung ρ im natürlichen Zustande durch die Formel

$$\rho^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

angegeben wird. Durch die Zusammendrückung des Krystalls erfährt der Abstand ρ eine Veränderung $\Delta\rho$, welche nach den Formeln des vierten Capitels unter Vernachlässigung höherer Potenzen der Dilatationen durch die Formel

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\rho}{\rho} &= \frac{a^2}{\rho^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{b^2}{\rho^2} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{c^2}{\rho^2} \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{ab}{\rho^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ &\quad + \frac{bc}{\rho^2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{ca}{\rho^2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

ausgedrückt wird oder nach den Formeln (4.) § 86

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\rho}{\rho} &= \frac{a^2}{\rho^2} M + \frac{b^2}{\rho^2} N + \frac{c^2}{\rho^2} P + \frac{bc}{\rho^2} (m + m') + \frac{ca}{\rho^2} (n + n') \\ &\quad + \frac{ab}{\rho^2} (p + p'). \end{aligned} \quad (5.)$$

Damit ist die lineare Dilatation einer Richtung ρ , welche mit den krystallographischen Hauptaxen die Cosinus $\frac{a}{\rho}, \frac{b}{\rho}, \frac{c}{\rho}$ bildet, bestimmt¹⁾. Setzen wir in diese allgemeine Formel die in den Gleichungen (2.) und (4.) gegebenen Grössen ein, so finden wir den für einen regulären Krystall gültigen Werth der linearen Ausdehnung:

1) Franz Neumann, Elasticitätsmass krystallinischer Substanzen. Poggen-dorff's Annalen 1884, Bd. 31, S. 177.

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \rho}{\rho} = \frac{D}{A-B} \left\{ \frac{B}{A+2B} - \frac{a^2}{\rho^2} \cos^2(\xi, x) - \frac{b^2}{\rho^2} \cos^2(\xi, y) - \frac{c^2}{\rho^2} \cos^2(\xi, z) \right\} \\ - \frac{D}{\delta} \left\{ \frac{ab}{\rho^2} \cos(\xi, x) \cos(\xi, y) + \frac{bc}{\rho^2} \cos(\xi, y) \cos(\xi, z) \right. \\ \left. + \frac{ca}{\rho^2} \cos(\xi, z) \cos(\xi, x) \right\}. \end{aligned} \quad (6.)$$

§ 88. Zusammendrückung in der Druckrichtung.

Lassen wir die bisher unbestimmt gelassene Richtung ρ der Dilatation in die Richtung des Druckes D fallen, so dass

$$\frac{a}{\rho} = \cos(\xi, x) \quad \frac{b}{\rho} = \cos(\xi, y) \quad \frac{c}{\rho} = \cos(\xi, z)$$

wird, so erhalten wir einen besonderen Werth der linearen Dilatation, welcher zur Definition des Elasticitätscoefficienten für diese Richtung führt. Wir finden

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \rho}{\rho} = \frac{D}{A-B} \left\{ \frac{B}{A+2B} - \cos^4(\xi, x) - \cos^4(\xi, y) - \cos^4(\xi, z) \right\} \\ - \frac{D}{\delta} \left\{ \cos^2(\xi, x) \cos^2(\xi, y) + \cos^2(\xi, y) \cos^2(\xi, z) \right. \\ \left. + \cos^2(\xi, z) \cos^2(\xi, x) \right\} \end{aligned}$$

und durch Benutzung der Beziehung, dass

$$1 = \cos^2(\xi, x) + \cos^2(\xi, y) + \cos^2(\xi, z)$$

ist, einfacher

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \rho}{\rho} = D \left\{ \frac{B}{(A-B)(A+2B)} - \frac{1}{2\delta} - \left(\frac{1}{A-B} - \frac{1}{2\delta} \right) \left(\cos^4(\xi, x) \right. \right. \\ \left. \left. + \cos^4(\xi, y) + \cos^4(\xi, z) \right) \right\}. \end{aligned} \quad (1.)$$

Diese Formel¹⁾ lässt erkennen, dass das Verhältniss des Druckes zu der in der Richtung seiner Wirkung hervorgebrachten Compression, welches der Definition nach den Elasticitätscoefficienten darstellt, kein constantes ist, wie das in § 85 als Elasticitätsmodul bei allseitigem Drucke bezeichnete ähnliche Verhältniss des Druckes zur räumlichen Verdichtung. Wir sehen aber aus der Formel weiter, dass die Elasticität eines regulären Krystalls dem Gesetze der Symmetrie in den acht Octanten des Raumes gehorcht. Tragen wir die Grösse der linearen Zusammendrückung in der Richtung, in welcher sie erfolgt, als Radius auf, so erhalten wir eine Oberfläche vierter Ordnung.

1) Dieselbe ist aus diesen Vorlesungen bereits von Woldemar Voigt mitgetheilt worden (Pogg. Ann. Erg. Bd. 7. S. 6). Experimentell bestätigt wurde sie kürzlich durch Beckenkamp (Zeitschr. f. Kryst. Bd. 10, S. 41, 1885) auch für den Alaun.

In dem besonderen Falle, dass das Prisma den krystallographischen Axen parallel geschnitten ist, und dass der Druck in der Richtung einer dieser Axen wirke, also für

$$\cos(\xi, x) = 1, \quad \cos(\xi, y) = \cos(\xi, z) = 0,$$

wird die Formel für die Verkürzung einfach

$$\frac{\Delta \varrho}{\varrho} = - \frac{A+B}{A-B} \frac{D}{A+2B}, \quad (2.)$$

so dass sie in einer einfachen Beziehung zu der räumlichen Verdichtung (Gl. (3.) § 87) steht

$$\Delta = - \frac{D}{A+2B}.$$

Für die übrigen Richtungen führen wir, um die Frage nach den grössten und kleinsten Werthen der Elasticität zu beantworten, sphärische Coordinaten α und φ nach den Formeln

$$\begin{aligned} \cos(\xi, x) &= \cos \alpha \\ \cos(\xi, y) &= \sin \alpha \cos \varphi \\ \cos(\xi, z) &= \sin \alpha \sin \varphi \end{aligned}$$

ein, wodurch wir erhalten

$$\frac{\Delta \varrho}{\varrho} = D \left\{ \frac{B}{(A-B)(A+2B)} - \frac{1}{2\delta} - \left(\frac{1}{A-B} - \frac{1}{2\delta} \right) (\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha (\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi)) \right\}. \quad (3.)$$

Durch Differentiation nach φ finden wir, dass Maxima oder Minima der Zusammendrückung in Richtungen eintreten, für welche

$$0 = \cos \varphi \sin \varphi (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)$$

ist, also in drei verschiedenen Richtungen, für welche entweder

$$\cos \varphi = 0 \quad \text{oder} \quad \sin \varphi = 0 \quad \text{oder} \quad \tan^2 \varphi = 1$$

ist. Die ersteren beiden Gleichungen bestimmen eine der Hauptaxenebenen, also eine Würfelfläche; nach der dritten Gleichung findet sich ein weiteres Maximum oder Minimum in Richtungen, welche mit der Axe einen Winkel von 45° oder 135° bilden.

In den beiden ersteren Fällen $\sin \varphi = 0$ und $\cos \varphi = 0$ ist

$$\frac{\Delta \varrho}{\varrho} = D \left\{ \frac{B}{(A-B)(A+2B)} - \frac{1}{2\delta} - \left(\frac{1}{A-B} - \frac{1}{2\delta} \right) (\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha) \right\},$$

und dieser Ausdruck nimmt seinen grössten oder kleinsten Werth an, wenn

$$0 = \cos \alpha \sin \alpha (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)$$

wird, also entweder

$$\cos \alpha = 0 \quad \text{oder} \quad \sin \alpha = 0 \quad \text{oder} \quad \tan^2 \alpha = 1.$$

Im dritten Falle dagegen ist

$$\frac{\Delta \varrho}{\varrho} = D \left\{ \frac{B}{(A-B)(A+2B)} - \frac{1}{2\delta} - \left(\frac{1}{A-B} - \frac{1}{2\delta} \right) (\cos^4 \alpha + \frac{1}{2} \sin^4 \alpha) \right\},$$

und der grösste oder kleinste Werth findet statt für

$$0 = \cos \alpha \sin \alpha (\cos^2 \alpha - \frac{1}{2} \sin^2 \alpha),$$

also für

$$\cos \alpha = 0 \quad \text{oder} \quad \sin \alpha = 0 \quad \text{oder} \quad \tan^2 \alpha = 2.$$

Somit erhalten wir dreierlei Richtungen, in welchen der Elasticitätscoefficient ein Maximum oder ein Minimum wird, nämlich die Richtungen der Normalen folgender Krystallflächen:

1) des Würfels:

$$\sin \alpha = 0$$

$$\cos \alpha = 0 \quad \cos \varphi = 0$$

$$\cos \alpha = 0 \quad \sin \varphi = 0;$$

2) des Octaeders:

$$\tan^2 \alpha = 2 \quad \tan^2 \varphi = 1;$$

3) des Granatoeders:

$$\tan^2 \alpha = 1 \quad \cos \varphi = 0$$

$$\tan^2 \alpha = 1 \quad \sin \varphi = 0$$

$$\cos \alpha = 0 \quad \tan^2 \varphi = 1.$$

Die Werthe des Elasticitätscoefficienten E in diesen dreierlei Richtungen sind nach der Formel

$$-E \frac{\Delta \varrho}{\varrho} = D$$

aus der Gleichung (3.) zu berechnen. Man findet für die Richtung der Normalen

1) des Würfels:

$$\frac{1}{E} = \frac{A+B}{(A-B)(A+2B)} = \frac{1}{H},$$

2) des Octaeders:

$$\frac{1}{E} = \frac{1}{3(A+2B)} + \frac{1}{3\delta} = \frac{1}{O},$$

3) des Granatoeders:

$$\frac{1}{E} = \frac{A}{2(A-B)(A+2B)} + \frac{1}{4\delta} = \frac{1}{G}.$$

Welche dieser Werthe Maxima und welche Minima sind, erkennt man am leichtesten, indem man die Differenzen

$$\frac{1}{H} - \frac{1}{O} = \frac{1}{3} \left\{ \frac{2}{A-B} - \frac{1}{\delta} \right\}$$

$$\frac{1}{H} - \frac{1}{G} = \frac{1}{4} \left\{ \frac{2}{A-B} - \frac{1}{\delta} \right\}$$

$$\frac{1}{G} - \frac{1}{O} = \frac{1}{12} \left\{ \frac{2}{A-B} - \frac{1}{\delta} \right\}$$

bildet. Ist die rechterseits stehende Differenz positiv, so ist

$$H < G < O,$$

es ist also dann die Elasticität in der Richtung der Octaeder-Normale am grössten, in der der Hexaeder-Normale am kleinsten. Ist dagegen jene Differenz negativ, so ist

$$O < G < H,$$

so dass in diesem Falle die grösste Elasticität sich in der Richtung der Würfel-Normale, die kleinste in der der Octaeder-Normale findet.

Zwischen den drei Werthen O , G und H findet eine einfache Beziehung statt, indem

$$\frac{1}{H} + \frac{3}{O} = \frac{4}{G}$$

ist. Daraus folgt, dass man durch Messung dieser drei Grössen nicht zur Kenntniss der Werthe der drei Constanten A , B , δ gelangen kann. Man bedarf also noch einer dritten Beobachtung, z. B. bei allseitiger Zusammendrückung.

§ 89. Querdilatation.

Eine zweite Anwendung machen wir von den Formeln des § 87, indem wir die Ausdehnung bestimmen, welche ein Krystallprisma nach seiner Breite erfährt, wenn es in der Richtung seiner Länge zusammengedrückt wird. Dazu haben wir die Richtung ϱ , für welche wir die Dehnung bestimmen, senkrecht gegen die Richtung ξ , in welcher der Druck wirkt, anzunehmen, also die Formel

$$0 = \frac{a}{\varrho} \cos(\xi, x) + \frac{b}{\varrho} \cos(\xi, y) + \frac{c}{\varrho} \cos(\xi, z) \quad (1.)$$

anzusetzen. Nach Quadrirung dieses Ausdruckes erkennen wir sofort, dass die allgemeine Formel (6.) § 87 für unseren Fall die Gestalt

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \varrho}{\varrho} = & \frac{D}{A-B} \frac{B}{A+2B} - D \left(\frac{1}{A-B} - \frac{1}{2\delta} \right) \left(\frac{a^2}{\varrho^2} \cos^2(\xi, x) \right. \\ & \left. + \frac{b^2}{\varrho^2} \cos^2(\xi, y) + \frac{c^2}{\varrho^2} \cos^2(\xi, z) \right) \quad (2.) \end{aligned}$$

annimmt. Hiervon machen wir Gebrauch, um die im vorigen Paragraphen behandelten drei Fälle auch in Bezug auf die gleichzeitig stattfindende Querdilatation zu erörtern.

Erstens, wenn der Druck in der Richtung der Normale der Würfelfläche ausgeübt wird, so dass

$$\cos(\xi, x) = 1, \quad \cos(\xi, y) = 0, \quad \cos(\xi, z) = 0$$

ist, so muss für die auf derselben senkrecht stehende Richtung von ϱ der Cosinus

$$\frac{a}{\varrho} = 0$$

gesetzt werden. Demnach beträgt die Querdilatation in diesem Falle

$$\frac{\Delta \varrho}{\varrho} = \frac{D}{A-B} \frac{B}{A+2B} = q,$$

sie ist also constant, d. h. unabhängig von der Lage der Seitenflächen des Prismas. Vergleichen wir diese Querdilatation mit der im vorigen Paragraphen gefundenen Längscompression

$$\frac{\Delta \varrho}{\varrho} = -\frac{D}{H} = -\frac{D}{A-B} \frac{A+B}{A+2B} = -l,$$

so finden wir das Verhältniss beider, welches bei unkrystallinischen Körpern wie 1:4 ist, in diesem Falle bei einem regulären Krystall

$$\frac{q}{l} = \frac{B}{A+B}.$$

Ebenso ist im zweiten Falle, in welchem der Druck in der Richtung der Octaeder-Normale wirkt, die Querdilatation constant; denn für die Druckrichtung ist

$$\cos^2(\xi, x) = \cos^2(\xi, y) = \cos^2(\xi, z) = \frac{1}{3},$$

also die Querdilatation

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \varrho}{\varrho} &= \frac{D}{A-B} \frac{B}{A+2B} - D \left(\frac{1}{A-B} - \frac{1}{2\delta} \right) \\ &= -D \left(\frac{1}{A-B} \frac{A+B}{A+2B} - \frac{1}{2\delta} \right). \end{aligned}$$

Wenn drittens der Druck in der Richtung der Normale der Granatoederfläche ausgeübt wird, so gelangen wir zu den richtigen Formeln, indem wir

$$\cos^2(\xi, x) = \cos^2(\xi, y) = \frac{1}{3}, \quad \cos(\xi, z) = 0$$

setzen. Bezeichnen wir dann den Winkel, welchen die Richtung von ϱ , also der betrachteten Querdilatation mit der z -Axe bildet, durch (ϱ, z) , so dass

$$\cos(\varphi, z) = \frac{c}{\varrho}$$

ist, so ergibt sich die seitliche Dilatation

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\varrho}{\varrho} &= \frac{D}{A-B} \frac{B}{A+2B} - \frac{D}{2} \left(\frac{1}{A-B} - \frac{1}{2\delta} \right) (1 - \cos^2(\varphi, z)) \\ &= -\frac{1}{2} D \left\{ \frac{A}{(A-B)(A+2B)} - \frac{1}{2\delta} - \left(\frac{1}{A-B} - \frac{1}{2\delta} \right) \cos^2(\varphi, z) \right\} \end{aligned}$$

als abhängig von der Richtung φ ; sie ist also von der Lage der Seitenflächen abhängig und somit für jedes der beiden Paare von Seitenflächen verschieden. Ist eine Seitenfläche eine Würfelfläche, für welche

$$\cos^2(\varphi, z) = 1$$

wird, so ergibt sich derselbe Werth der Querdilatation

$$\frac{\Delta\varrho}{\varrho} = \frac{D}{A-B} \frac{B}{A+2B},$$

den wir für den ersten Fall, in welchem der Druck in der Richtung der Normale der Würfelfläche wirkte, erhielten.

Dieses ist die Folge eines allgemeineren Satzes: Ist eine der Seitenflächen eine Würfelfläche, so erfährt diese immer dieselbe Querdilatation, welches auch die Lage der gepressten Grundfläche des rechtwinkligen Prismas sein möge. Die Richtigkeit dieses Satzes erkennt man leicht, wenn man beachtet, dass in der allgemeinen Formel (2.) für eine Würfelfläche zwei der drei Grössen a , b oder $c = 0$ zu setzen sind, und dass unter diesen Verhältnissen wegen der Bedingung (1.) die trigonometrische Function aus der Gleichung (2.) verschwindet.

§ 90. Aenderung der Winkel eines regulären Krystalls durch Druck.

In Folge der besprochenen Ungleichheit der Querdilatation kann durch einen einseitig ausgeübten Druck eine Veränderung der Winkel auch bei einem regulären Krystall eintreten. Diese Aenderung ist leicht und genau zu messen, wenn man die in § 58 bereits näher beschriebene Methode anwendet, die Bilder einer Scale, die von den spiegelnden Flächen zweier symmetrisch gestellten Krystalle zurückgeworfen werden, zu beobachten. Es bedarf für den jetzigen Zweck nur noch einer Vorrichtung, den Druck steigern zu können, etwa einer gegen Bleiplatten drückenden Schraube, und eines Apparats zur Messung des Druckes, z. B. einer Federwage.

Zur Berechnung der Winkeländerungen denken wir uns eine Ebene, deren Lage im natürlichen Zustande des Krystalls durch die Gleichung

$$1 = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}$$

bestimmt ist, also eine Ebene, welche die Krystallaxen in drei Punkten, deren Coordinaten

$$a, 0, 0 \quad 0, b, 0 \quad 0, 0, c$$

sind, schneidet. Nachdem die Wirkung des Druckes eingetreten, haben diese drei Punkte Verrückungen u, v, w erlitten, welche durch die Formeln (4.) § 86 angegeben sind; die neuen, Coordinaten des ersten sind also

$$(1 + M)a, \quad pa, \quad n'a,$$

ebenso die des zweiten und des dritten

$$p'b, \quad (1 + N)b, \quad mb, \\ nc, \quad m'c, \quad (1 + P)c.$$

Wenn nun die durch die drei Punkte gehende Ebene die durch die Gleichung

$$1 = \frac{x}{a_1} + \frac{y}{b_1} + \frac{z}{c_1}$$

bestimmte neue Lage angenommen hat, so ist

$$\frac{1}{a} = \frac{1 + M}{a_1} + \frac{p}{b_1} + \frac{n'}{c_1} \\ \frac{1}{b} = \frac{p'}{a_1} + \frac{1 + N}{b_1} + \frac{m}{c_1} \\ \frac{1}{c} = \frac{n}{a_1} + \frac{m'}{b_1} + \frac{1 + P}{c_1},$$

wofür man mit Vernachlässigung von Gliedern zweiter Ordnung auch setzen kann:

$$\frac{1}{a_1} = \frac{1 - M}{a} - \frac{p}{b} - \frac{n'}{c} \\ \frac{1}{b_1} = -\frac{p'}{a} + \frac{1 - N}{b} - \frac{m}{c} \\ \frac{1}{c_1} = -\frac{n}{a} - \frac{m'}{b} + \frac{1 - P}{c}. \quad (1.)$$

Die drei Winkel $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, welche die Normale der Ebene vor dem Beginne des Druckes mit den Coordinatenaxen einschliesst, sind durch die Gleichungen

$$\cos \alpha_1 = \frac{Q}{a} \quad \cos \beta_1 = \frac{Q}{b} \quad \cos \gamma_1 = \frac{Q}{c}$$

bestimmt, wenn

$$Q^2 \left\{ \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right\} = 1$$

gesetzt wird; nachher bilden sie Winkel $\alpha_1 + \Delta\alpha_1, \beta_1 + \Delta\beta_1, \gamma_1 + \Delta\gamma_1$, welche den Gleichungen

$$\cos(\alpha_1 + \Delta\alpha_1) = \frac{Q_1}{a_1}, \quad \cos(\beta_1 + \Delta\beta_1) = \frac{Q_1}{b_1}, \quad \cos(\gamma_1 + \Delta\gamma_1) = \frac{Q_1}{c_1}$$

unterliegen, wenn

$$Q_1^2 \left\{ \frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{b_1^2} + \frac{1}{c_1^2} \right\} = 1$$

ist. Durch Einsetzen der Werthe aus den Gleichungen (1.) erhält man

$$\begin{aligned} \cos(\alpha_1 + \Delta\alpha_1) &= \{ \cos \alpha_1 - M \cos \alpha_1 - p \cos \beta_1 - n' \cos \gamma_1 \} q_1 \\ \cos(\beta_1 + \Delta\beta_1) &= \{ \cos \beta_1 - p' \cos \alpha_1 - N \cos \beta_1 - m \cos \gamma_1 \} q_1 \\ \cos(\gamma_1 + \Delta\gamma_1) &= \{ \cos \gamma_1 - n \cos \alpha_1 - m' \cos \beta_1 - P \cos \gamma_1 \} q_1, \end{aligned} \quad (2.)$$

wenn

$$1 = q_1^2 \{ (\cos \alpha_1 - M \cos \alpha_1 - p \cos \beta_1 - n' \cos \gamma_1)^2 + \text{etc.} \}$$

gesetzt wird, also mit Vernachlässigung von Gliedern zweiter Ordnung

$$1 = q_1 \{ 1 - 2(M \cos^2 \alpha_1 + N \cos^2 \beta_1 + P \cos^2 \gamma_1 + (p + p') \cos \alpha_1 \cos \beta_1 + (m + m') \cos \beta_1 \cos \gamma_1 + (n + n') \cos \gamma_1 \cos \alpha_1) \}.$$

Eine zweite Ebene, deren Normale vor der Pressung die Winkel $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ mit den Axen bildete, wird nach derselben so liegen, dass die Winkelwerthe $\alpha_2 + \Delta\alpha_2, \beta_2 + \Delta\beta_2, \gamma_2 + \Delta\gamma_2$, deren Cosinus durch gleiche Formeln (2.) bestimmt sind, erreicht werden. Vor dem Drucke schlossen beide Ebenen einen Winkel σ_0 mit einander ein, dessen Cosinus

$$\cos \sigma_0 = \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2$$

war, während derselbe nach dem Drucke den Werth σ erreicht hat, welcher der Formel

$$\begin{aligned} \cos \sigma &= \{ \cos \sigma_0 - 2(M \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + N \cos \beta_1 \cos \beta_2 + P \cos \gamma_1 \cos \gamma_2) \\ &\quad - (p + p') (\cos \alpha_1 \cos \beta_2 + \cos \alpha_2 \cos \beta_1) \\ &\quad - (m + m') (\cos \beta_1 \cos \gamma_2 + \cos \beta_2 \cos \gamma_1) \\ &\quad - (n + n') (\cos \gamma_1 \cos \alpha_2 + \cos \gamma_2 \cos \alpha_1) \} q_1 q_2 \end{aligned} \quad (3.)$$

genügt. Hierin hat q_1 seine frühere Bedeutung, q_2 ist die analoge Grösse, die sich nur durch den in (2.) veränderten Index der Winkel unterscheidet.

Ist der Winkel der beiden Ebenen gegen einander, wie in unserem Falle,

$$\sigma_0 = 90^\circ \quad \cos \sigma_0 = 0,$$

so dürfen die Grössen

$$q_1 = 1 \quad q_2 = 1$$

gesetzt werden, weil dann die Formel für $\cos \sigma$ nur kleine Grössen erster Ordnung enthält. Führen wir demgemäss die Bezeichnung

$$\sigma = \sigma_0 + \Delta\sigma = 90^\circ + \Delta\sigma$$

ein, so wird

$$\cos \sigma = -\sin \Delta\sigma = -\Delta\sigma.$$

Für diese Grösse erhalten wir demnach, wenn die für einen regulären Krystall geltenden Werthe der Dilatationen aus den Formeln (2.) und (4.) § 87 in (3.) eingesetzt werden, den allgemeinen Ausdruck

$$\begin{aligned} \Delta\sigma = & -\frac{2D}{A-B} \{ \cos^2(\xi, x) \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos^2(\xi, y) \cos \beta_1 \cos \beta_2 \\ & + \cos^2(\xi, z) \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 \} \\ & - \frac{D}{\delta} \{ \cos(\xi, x) \cos(\xi, y) (\cos \alpha_1 \cos \beta_2 + \cos \alpha_2 \cos \beta_1) \quad (4.) \\ & + \cos(\xi, y) \cos(\xi, z) (\cos \beta_1 \cos \gamma_2 + \cos \beta_2 \cos \gamma_1) \\ & + \cos(\xi, z) \cos(\xi, x) (\cos \gamma_1 \cos \alpha_2 + \cos \gamma_2 \cos \alpha_1) \}, \end{aligned}$$

welcher sich bei der Anwendung auf die der Beobachtung zugänglichen Fälle bedeutend vereinfacht.

Suchen wir zunächst die Aenderung des Winkels, welchen die beiden nicht gepressten Flächenpaare des rechtwinkligen Prismas mit einander einschliessen, so ist, da beide Flächen gegen die Druckrichtung senkrecht liegen,

$$0 = \cos(\xi, x) \cos \alpha_1 + \cos(\xi, y) \cos \beta_1 + \cos(\xi, z) \cos \gamma_1$$

$$0 = \cos(\xi, x) \cos \alpha_2 + \cos(\xi, y) \cos \beta_2 + \cos(\xi, z) \cos \gamma_2.$$

Multipliziert man diese beiden Formeln mit einander, so findet man

$$\Delta\sigma = D \left(\frac{1}{\delta} - \frac{2}{A-B} \right) \{ \cos^2(\xi, x) \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos^2(\xi, y) \cos \beta_1 \cos \beta_2 \\ + \cos^2(\xi, z) \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 \}.$$

Nach dieser Formel tritt nicht unter allen Umständen eine Winkeländerung ein. Wird z. B. der Druck in der Richtung der Krystallaxe x ausgeübt, so ist

$$\cos(\xi, x) = 1 \quad \cos(\xi, y) = 0 \quad \cos(\xi, z) = 0$$

und für die Seitenflächen

$$\cos \alpha_1 = 0 \quad \cos \alpha_2 = 0.$$

Es wird also auch $\Delta\sigma = 0$.

Wird in der Richtung der Octaeder-Normale gedrückt, so ist

$$\cos^2(\xi, x) = \cos^2(\xi, y) = \cos^2(\xi, z) = \frac{1}{3},$$

also wegen der Gleichung

$$0 = \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2$$

ebenfalls $\Delta \sigma = 0$.

Wenn drittens die Druckrichtung mit der Normale einer Granatoederfläche zusammenfällt, so dass

$$\cos(\xi, x) = 0 \quad \cos^2(\xi, y) = \cos^2(\xi, z) = \frac{1}{2}$$

wird, so erhalten wir die Winkeländerung

$$\Delta \sigma = D \left(\frac{1}{A-B} - \frac{1}{2\delta} \right) \cos \alpha_1 \cos \alpha_2,$$

oder, weil beide Richtungen auf einander senkrecht stehen,

$$\Delta \sigma = D \left(\frac{1}{A-B} - \frac{1}{2\delta} \right) \sin \alpha_1 \cos \alpha_1.$$

Es gibt also auch hier Fälle, in welchen keine Winkeländerung eintritt. Die grösste Aenderung tritt ein für $\alpha_1 = 45^\circ$.

Wenn wir dagegen die Aenderung des Winkels, welchen die gepresste Fläche mit einer freien bildet, kennen lernen wollen, so haben wir für die gepresste Fläche

$$\cos \alpha_1 = \cos(\xi, x), \quad \cos \beta_1 = \cos(\xi, y), \quad \cos \gamma_1 = \cos(\xi, z)$$

zu setzen und die Formeln

$$1 = \cos(\xi, x) \cos \alpha_1 + \cos(\xi, y) \cos \beta_1 + \cos(\xi, z) \cos \gamma_1$$

$$0 = \cos(\xi, x) \cos \alpha_2 + \cos(\xi, y) \cos \beta_2 + \cos(\xi, z) \cos \gamma_2$$

zu benutzen. Multipliciren wir sie wieder mit einander, so erkennen wir, dass

$$\Delta \sigma = D \left(\frac{1}{\delta} - \frac{2}{A-B} \right) \left\{ \cos^3(\xi, x) \cos \alpha_2 + \cos^3(\xi, y) \cos \beta_2 + \cos^3(\xi, z) \cos \gamma_2 \right\}$$

wird. Diese Aenderung des Winkels beobachten wir verdoppelt, wenn wir nach der im Eingang erwähnten Methode zwei Prismen symmetrisch über einander stellen und beide gleich stark pressen.

Wenn die Richtung der Pressung, sowie die Normale der freien Fläche in die xy -Ebene fällt, wenn also die Ebene beider einer Würfelfläche parallel liegt, so dass

$$\cos(\xi, z) = 0 \quad \cos \alpha_2 = \sin(\xi, x)$$

wird, so erhalten wir den vereinfachten Ausdruck

$$\Delta\sigma = \frac{1}{4}D \left(\frac{1}{\delta} - \frac{2}{A-B} \right) \sin 4(\xi, x),$$

welcher zeigt, dass keine Winkeländerung eintritt, wenn

$$(\xi, x) = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ \text{ u. s. w.}$$

ist, dagegen ein Maximum derselben, wenn

$$(\xi, x) = 22,5^\circ, 67,5^\circ \text{ u. s. w.}$$

Messungen dieser Winkeländerungen können stets nur die schon in § 88 bei der Untersuchung der Dehnung in Betracht gekommene Constante liefern. Sollen also alle drei Constanten A , B und δ bestimmt werden, so genügen Beobachtungen an zusammengedrückten Krystallen nicht zu diesem Zwecke.

§ 91. Rhomboëdrisches Krystallprisma unter einseitigem Druck.

Nach demselben Verfahren lässt sich die Aufgabe, die Gestaltsveränderung eines Krystalles durch Druck zu berechnen, ebenfalls für andere Krystallsysteme lösen. Wir behandeln sie noch für das rhomboëdrische System, da bereits Beobachtungen über die Elasticität rhomboëdrischer Krystalle vorliegen.

Wir haben auch hier den Gleichungen (5.) § 86 durch Annahme der linearen Functionen (4.) § 86 für die Verrückungen zu genügen, nur mit dem Unterschiede, dass für die Druckcomponenten jetzt die Werthe, welche für das rhomboëdrische System gelten, aus den Formeln (1.) § 84 einzusetzen sind. Die Auflösung der erhaltenen sechs Gleichungen ergibt folgende Ausdrücke für die Constanten, von denen die Verrückungen abhängen:

$$M = -\frac{1}{4}D \left\{ \left(\frac{C'}{R} + \frac{\eta'}{Q} \right) \cos^2(\xi, x) + \left(\frac{C''}{R} - \frac{\eta'}{Q} \right) \cos^2(\xi, y) \right. \\ \left. - 2 \frac{C}{R} \cos^2(\xi, z) + 2 \frac{\eta}{Q} \cos(\xi, z) \cos(\xi, x) \right\}$$

$$N = -\frac{1}{4}D \left\{ \left(\frac{C''}{R} - \frac{\eta'}{Q} \right) \cos^2(\xi, x) + \left(\frac{C'}{R} + \frac{\eta'}{Q} \right) \cos^2(\xi, y) \right. \\ \left. - 2 \frac{C}{R} \cos^2(\xi, z) - 2 \frac{\eta}{Q} \cos(\xi, z) \cos(\xi, x) \right\} \quad (1.)$$

$$P = -\frac{D}{R} \left\{ (A + B) \cos^2(\xi, z) - A'' (\cos^2(\xi, x) + \cos^2(\xi, y)) \right\}$$

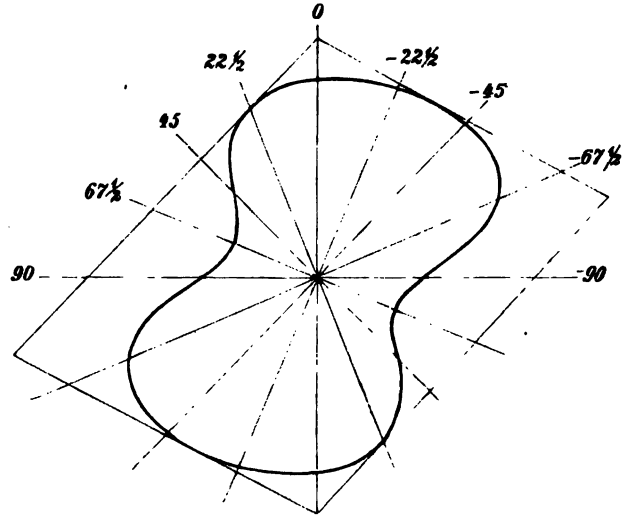
$$m + m' = -\frac{D}{Q} \left\{ (A - B) \cos(\xi, y) \cos(\xi, z) - 2\delta' \cos(\xi, x) \cos(\xi, y) \right\}$$

$$n + n' = -\frac{D}{Q} \left\{ (A - B) \cos(\xi, z) \cos(\xi, x) + \delta' (\cos^2(\xi, x) - \cos^2(\xi, y)) \right\}$$

$$p + p' = -\frac{D}{Q} \left\{ 2\eta' \cos(\xi, x) \cos(\xi, y) - 2\eta \cos(\xi, y) \cos(\xi, z) \right\}.$$

welchen der Elasticitätscoefficient ein Maximum oder ein Minimum erreicht.

Diese Resultate der Theorie sind durch eine höchst verdienstvolle Experimental-Untersuchung von Baumgarten¹⁾ bestätigt worden, welcher die Elasticität von Kalkspathstäbchen dadurch bestimmte, dass



er die Stärke ihrer Biegung mass, wenn er die an zwei Punkten unterstützten Stäbchen in der Mitte durch Gewichte belastete. Die verschiedenen Werthe, welche er bei verschiedener Neigung der Längsrichtung des Stabes gegen die krystallographische Hauptaxe erhielt, lieferten bei graphischer Darstellung die obenstehende Curve, deren Radien den beobachteten Biegungen proportional sind²⁾. Die beigeschriebenen Zahlen sind die zugehörigen Werthe des mit der Axe gebildeten Winkels γ . Die in folgender Tabelle enthaltenen relativen Werthe der Biegungen

$\gamma = -45^\circ$	0°	45°	90°
86	76	48	49

gestatten, die Coefficienten der Gleichung (5.) zu bestimmen

$$49 = H \qquad 4 \cdot 86 = H + I - K - L$$

$$76 = I \qquad 4 \cdot 48 = H + I - K + L$$

und darnach die Biegungen für jede andere Richtung zu berechnen,

1) Pogg. Ann. 1874. Bd. 152. S. 369.

2) Aehnliche Curven fand Coromilas (Inaug.-Diss. Tübingen 1877; Zeitschr. f. Kryst. u. Min. Bd. 1, S. 407) für Gyps und Glimmer.

so dass weiter angestellte Beobachtungen zur Vergleichung der Theorie mit der Erfahrung dienen können. So erhalten wir

$$\begin{array}{rcc} \gamma = 22,5^\circ & \text{berechnet} & 69 & \text{beobachtet} & 66 \\ & & 67,5 & & 32. \end{array}$$

Die Uebereinstimmung würde grösser ausgefallen sein, wenn alle sechs Beobachtungen zur Berechnung der vier Coefficienten verwandt worden wären.

Aus den vier Coefficienten, welche auf diesem Wege bestimmt werden können, gelangen wir noch nicht zu einer vollständigen Kenntniss der Elasticität des Krystalles und ihrer Gesetze, sondern wir bedürfen, um die Werthe aller acht Constanten zu ermitteln, noch weiterer Beobachtungen.

§ 92. Rhomboëdrischer Krystall unter allseitigem Drucke.

Die Formveränderungen, welche ein rhomboëdrischer Krystall oder ein aus einem solchen hergestelltes Prisma durch allseitigen Druck auf seine Flächen erleidet, lassen sich auf demselben Wege bestimmen, wie es in § 85 für einen regulären Krystall geschehen ist. Die dort aufgestellten Formeln (1.) und (2.) bleiben unverändert gültig; es sind aber in dieselben die Werthe der Druckcomponenten aus den Formeln (1.) § 84 einzusetzen, wobei in diesen letzteren die Verrückungen u , v , w nach den Gleichungen (4.) § 86 als lineare Functionen der Coordinaten anzusehen sind. So erhalten wir

$$\begin{aligned} -D &= A M + B N + C P - \eta (n + n') \\ -D &= B M + A N + C P + \eta (n + n') \\ -D &= A'' M + A'' N + C'' P \\ 0 &= \frac{1}{2} (A - B) (p + p') + \eta (m + m') \\ 0 &= \delta' (p + p') + \eta' (m + m') \\ 0 &= \delta' (N - M) + \eta' (n + n') \end{aligned}$$

und durch Auflösung die Werthe

$$M = N = -D \frac{C'' - C}{R}$$

$$P = -D \frac{A + B - 2A''}{R}$$

$$0 = m + m' = n + n' = p + p',$$

worin R dieselbe Bedeutung wie in § 91 hat. Hieraus folgt, dass eine aus einem rhomboëdrischen Krystall geschliffene Kugel vom Radius 1 sich in ein Rotationsellipsoid mit den Axen

$$1 - D \frac{C'' - C}{R} \quad \text{und} \quad 1 - D \frac{A + B - 2A''}{R}$$

verwandeln wird, wenn sie dem allseitigen Drucke D ausgesetzt wird.

Ist der Körper von Ebenen begrenzt, so ändern sich die Winkel in der Weise, dass eine Fläche, deren Gleichung vor der Ausübung des Druckes

$$1 = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}$$

war, nach dem Eintritt desselben durch die Formel

$$1 = \frac{x}{a(1+M)} + \frac{y}{b(1+N)} + \frac{z}{c(1+P)}$$

dargestellt wird. Daraus folgt, dass sich die natürliche Gestalt eines rhomboëdrischen Krystalls durch allseitigen äusseren Druck so verändert, dass er noch dem rhomboëdrischen Krystallsystem, jedoch mit verändertem Werthe des Axenverhältnisses anzugehören scheint.

Da die jetzt gefundenen Werthe der Dilatationen M und P nicht durch die Constanten H, I, K, L , welchen wir im vorigen § begegneten, ausgedrückt werden können, so haben wir in der Beobachtung der unter allseitigem Druck eintretenden Veränderungen ein Mittel, zwei weitere Constanten zu bestimmen. Beobachten lässt sich zunächst die räumliche Dilatation

$$\Delta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 2M + P.$$

Misst man weiter die entstehenden Winkeländerungen, so erhält man daraus die Differenz $M - P$.

Eine experimentelle Untersuchung dieser Verhältnisse würde auch für die Beantwortung der Frage von Bedeutung sein, ob die Ausdehnung eines Krystalls durch Wärme und seine Zusammenziehung durch Abkühlung denselben Gesetzen folgt, wie seine Formveränderung durch Verminderung oder Steigerung des Druckes. Findet man, dass beide Vorgänge in gleicher Weise vor sich gehen, und dass das Verhältniss von M zu P bei Erwärmung denselben constanten Werth annimmt, welchen es bei der Zusammendrückung besitzt, so würde daraus folgen, dass die in § 58 zur Definition des thermischen Druckes eingeführten Constanten p_x, p_y und p_z auch in einem Krystalle für die drei Axenrichtungen den gleichen Werth besitzen.

§ 93. Neuere Untersuchungen über die Elasticität
der Krystalle¹⁾.

Ausser diesen in seiner Vorlesung mitgetheilten Untersuchungen hat Herr Geheimrath Neumann noch zwei weitere wichtige Aufgaben, welche die elastischen Formveränderungen krystallinischer Prismen betreffen, auf Grundlage seiner vorstehend entwickelten allgemeinen Theorie der Elasticität der Krystalle gelöst. Er hat nämlich erstens die Biegung eines mit Gewichten belasteten krystallinischen Stäbchens und zweitens die Torsion eines solchen Stäbchens unter dem Einfluss eines drehenden Kräftepaars berechnet. Diese Untersuchungen können hier nicht mitgetheilt werden; wir müssen uns begnügen, darauf hinzuweisen, dass die schliesslichen Ergebnisse derselben von Woldemar Voigt²⁾ mitgetheilt worden sind, und dass dieser im Anschlusse an die Untersuchungen Neumann's selber mehrere Abhandlungen³⁾ über die Theorie der elastischen Formveränderungen von Krystallen veröffentlicht hat.

Voigt's⁴⁾ experimentelle Untersuchungen über die Elasticität des Steinsalzes haben zuletzt folgende Werthe für die drei Constanten, welche nach den Formeln des § 82 die Elasticität des genannten regulär krystallinischen Körpers bestimmen, geliefert; es ist

$$A = 4750, \quad B = 1300, \quad \delta = 1290,$$

wenn als Einheit der Druck eines Kilogramms gegen die Fläche eines Quadratmillimeters angenommen wird. Diese Zahlen beweisen für das Steinsalz die Beziehung

$$B = \delta,$$

durch welche die Formeln (2.) § 82 der Neumann'schen Theorie mit denjenigen zur Uebereinstimmung gebracht werden, welche sich aus den allgemeinen Gleichungen (1.) § 41 der Poisson'schen Theorie ergeben, wenn für einen regulären Krystall die drei krystallographischen Axen einander gleich angenommen werden.

Ob dieses früher von Voigt bestrittene Verhältniss zwischen den Constanten der Theorie auch bei allen anderen Krystallen des regulären Systems zutrifft, muss vorläufig unentschieden bleiben, bis weitere Beobachtungen vorliegen werden. Bis jetzt sind alle drei

1) Zusatz des Herausgebers.

2) Unters. d. Elasticitätsverh. d. Steinsalzes. Königsberger Inaug.-Diss. Pogg. Ann. Erg. Bd. 7. S. 1 u. 177. 1875.

3) Wied. Ann. 1882, Bd. 16, S. 273, 398 u. 416.

4) Sitzungsber. d. Berl. Akad. 1884, S. 999.

Constanten nur für den Flussspath gemessen, und zwar hat Voigt¹⁾

$$A = 1450, \quad B = 2300, \quad \delta = 3400$$

gefunden, während H. Klang²⁾

$$A = 1320, \quad B = 4250, \quad \delta = 3300$$

erhalten hat. Es ist also nach Voigt $B < \delta$, nach Klang $B > \delta$. Wenn nun auch die mit grösserer Vorsicht und feineren Hilfsmitteln angestellte Beobachtung des Ersteren grösseres Vertrauen verdienen mag, so berechtigt doch bei der durch die Sprödigkeit des Materials erhöhten Schwierigkeit der Versuche diese Erfahrung an einem einzigen Material keineswegs zu dem Schlusse, dass die Theorie Poisson's nicht zutreffe.

Es sind zwar noch mancherlei Krystalle, auch solche, welche nicht zum regulären Systeme gehören, auf ihre Elasticität untersucht worden; doch ist bis jetzt für keinen dieser Körper die gesammte Zahl seiner Elasticitätsconstanten vollständig bestimmt worden, so dass kein weiterer Schluss über die Gültigkeit oder die Unzulässigkeit der Poisson'schen Theorie möglich ist.

1) Sitzungsber. d. Berl. Akad. 1884, S. 1003.

2) Wied. Ann. 1881, Bd. 12, S. 331.

Gesetze für die Fortpflanzung ebener Wellen.

13. Theorie der Wellenbewegungen auf Grund der Molekularhypothese.

§ 94. Allgemeine Formeln.

Unsere nächste Aufgabe soll sein, die Gesetze der Ausbreitung ebener Wellen in einem elastischen Medium zu entwickeln. Wir wenden uns damit einer der wichtigsten Anwendungen der Theorie der Elasticität zu, da wir durch diese Untersuchung zugleich zu den Gesetzen der Polarisation und der Doppelbrechung des Lichtes gelangen¹⁾. Aus diesem Grunde werden wir die Rechnung allgemein für krystallinische Stoffe durchführen und erst nach Feststellung der allgemeinen Auflösung auf den besonderen Fall der Wellenbewegung in unkrystallinischen Körpern, also auf die Ausbreitung von Schall und Licht in diesen Medien, eingehen.

Wir beginnen die Untersuchung zunächst auf der Grundlage der im siebenten Abschnitt aus der Hypothese der molekularen Kräfte hergeleiteten Gleichungen, obwohl wir im vorigen Abschnitt allgemeinere Gleichungen aufgestellt haben, um das Verhalten elastischer Körper bei Zusammendrückung, Biegung und Drillung zu erklären. Wir thun das nicht nur in Rücksicht auf die geschichtliche Entwicklung der Theorien, welche uns jetzt beschäftigen werden, sondern auch deshalb, weil es nicht nothwendig ist anzunehmen, dass die Bewegungen des Lichtäthers in Krystallen genau denselben Kräften und Gesetzen unterliegen, wie die wägbare Substanz des Körpers selbst.

Wenn wir von äusseren, bewegenden Kräften absehen, so gelten nach den Glchg. (2.) § 41 die Differentialgleichungen

1) F. Neumann, Poggendorff's Annalen Bd. 25, S. 418. 1832. Auch Cauchy, Mém. de l'Acad. de Paris T. X, p. 293, 1830.

$$\begin{aligned}
\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2c \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 2b \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \\
\varepsilon \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= c \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + a \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + 2a \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} + 2c \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \\
\varepsilon \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + C \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} + 2a \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial y}.
\end{aligned} \tag{1.}$$

Wir nehmen an, das Medium sei unbegrenzt. Dann sind keine Bedingungen für die Oberfläche zu erfüllen. Jedoch genügen unsere drei für jeden Punkt im Innern geltenden Gleichungen nicht zur vollständigen Bestimmung der drei Functionen u , v , w . Unsere Aufgabe bleibt, wie man nach einer einfachen Ueberlegung einsieht, unbestimmt, so lange nicht für irgend eine bestimmte Zeit, also etwa für $t = 0$, die Werthe der Verrückungen u , v , w und der Geschwindigkeiten, d. h. ihrer Differentialquotienten nach der Zeit, als Functionen des Ortes gegeben sind. Ohne diese Kenntniss würden uns die Mittel fehlen, die durch die Integration der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung erhaltenen willkürlichen Grössen zu bestimmen.

Wir bezeichnen die Werthe der Verrückungen zur Zeit $t = 0$ durch

$$(u)_0 = U(x, y, z), \quad (v)_0 = V(x, y, z), \quad (w)_0 = W(x, y, z) \tag{2.}$$

und die der Geschwindigkeiten durch die Functionen

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_0 = U'(x, y, z), \quad \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_0 = V'(x, y, z), \quad \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_0 = W'(x, y, z), \tag{3.}$$

welche nicht die derivirten der vorigen, sondern von ihnen ganz unabhängig sind.

§ 95. Integration.

Für unsern Zweck, die Bewegung ebener Wellen zu untersuchen, brauchen wir die Gleichungen nicht allgemein zu integriren, sondern es genügt anzunehmen, dass für alle Theile, welche auf je einer einem System paralleler Ebenen angehörigen Ebene liegen, die Verrückungen u , v , w zu derselben Zeit stets dieselben Werthe haben; mit andern Worten, dass die Verrückungen nur verschieden sind, wenn man von einer bestimmten Ebene dieses Systems übergeht zu einer ihr parallelen, dass dieselben aber gleich bleiben, wenn man in jener Ebene selbst in irgend einer Richtung fortgeht.

Es sei s die senkrechte Entfernung einer diesem System ange-

hörigen Ebene vom Anfangspunkte der Coordinaten und die Gleichung dieser Ebene

$$s = px + qy + rz, \quad (1)$$

so dass p, q, r die Cosinus der Winkel bezeichnen, welche die Normale der Ebene mit den Coordinatenaxen bildet.

Unserer Annahme nach sind u, v, w nur Functionen von s und t . Dieser Fall erreicht seine Verwirklichung, wenn U, V, W und U', V', W' nur von s abhängen. Die Glchg. (2.) und (3.) § 94 werden also

$$(u)_0 = U(s) \quad (v)_0 = V(s) \quad (w)_0 = W(s) \quad (2.)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_0 = U'(s) \quad \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_0 = V'(s) \quad \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_0 = W'(s). \quad (3.)$$

Ferner erhalten wir jetzt

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} = p \frac{\partial u}{\partial s} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = p^2 \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = pq \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial y} = q \frac{\partial u}{\partial s} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = q^2 \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}$$

u. s. f.

u. s. f.

u. s. f.

Dadurch werden die Glchg. (1.) § 94

$$\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \{Ap^2 + cq^2 + br^2\} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + 2cpq \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + 2bpr \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}$$

$$\varepsilon \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \{cp^2 + Bq^2 + ar^2\} \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + 2aqr \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + 2cqp \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \quad (4.)$$

$$\varepsilon \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \{bp^2 + aq^2 + Cr^2\} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + 2brp \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + 2arq \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}.$$

Dieses System von partiellen Differentialgleichungen können wir vollständig und allgemein integriren durch die Annahme der Werthe

$$u = M\varphi(s + \omega t), \quad v = N\varphi(s + \omega t), \quad w = P\varphi(s + \omega t), \quad (5.)$$

wo M, N, P, ω constant und φ eine willkürliche Function von $s + \omega t$ ist. Durch Einsetzung in die Gleichungen (4.) findet man nach Hebung des gemeinschaftlichen Factors

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} = \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

folgende Gleichungen

$$\varepsilon M\omega^2 = \{Ap^2 + cq^2 + br^2\} M + 2cpq N + 2bpr P$$

$$\varepsilon N\omega^2 = \{cp^2 + Bq^2 + ar^2\} N + 2aqr P + 2cqp M \quad (6.)$$

$$\varepsilon P\omega^2 = \{bp^2 + aq^2 + Cr^2\} P + 2brp M + 2arq N,$$

denen wir durch Verfügung über die drei unbestimmten Grössen

$$\frac{N}{M}, \quad \frac{P}{M}, \quad \omega$$

genügen können. Durch Elimination der beiden ersten Constanten aus den drei Gleichungen erhalten wir zur Bestimmung von ω^2 die cubische Gleichung

$$\begin{aligned} & (Ap^2 + cb^2 + br^2 - \varepsilon\omega^2)(cp^2 + Bq^2 + ar^2 - \varepsilon\omega^2)(bp^2 + aq^2 + Cr^2 - \varepsilon\omega^2) \\ & - 4a^2q^2r^2(Ap^2 + cq^2 + br^2 - \varepsilon\omega^2) - 4b^2r^2p^2(cp^2 + Bq^2 + ar^2 - \varepsilon\omega^2) \quad (7.) \\ & - 4c^2p^2q^2(bp^2 + aq^2 + Cr^2 - \varepsilon\omega^2) + 16abc p^2q^2r^2 = 0. \end{aligned}$$

Die drei Constanten M, N, P lassen sich nicht vollständig aus den Glchg. (6.) bestimmen, sondern nur das Verhältniss ihrer Werthe. Da sie aber in den Gleichungen (5) nur mit einer willkürlichen Function φ multiplicirt vorkommen, so können wir, ohne der Allgemeinheit Eintrag zu thun, eine willkürliche Relation zwischen ihnen einführen. Setzen wir

$$M^2 + N^2 + P^2 = 1, \quad (8.)$$

so definiren wir dadurch M, N, P als drei Cosinus, welche eine Richtung und zwar die Richtung der durch die Formeln (5.) dargestellten Verrückung in Bezug auf die Axen bestimmen.

Für jede Wurzel ω^2 der cubischen Gleichung (7.) erhalten wir andere Werthe der Grössen M, N, P , und wir dürfen für jeden Werth $+\omega$ oder $-\omega$ einer solchen Wurzel der Function φ eine andere Bedeutung geben. Wir erhalten also sechs verschiedene Functionen u, v , sowie w , welche particulare Lösungen der Differentialgleichungen sind. Die vollständige Auflösung unseres Problems wird, da alle Gleichungen linear sind, durch die Summe aller sechs einzelnen gebildet. Demnach erhalten wir

$$\begin{aligned} u &= M_1S_1 + M_2S_2 + M_3S_3 \\ v &= N_1S_1 + N_2S_2 + N_3S_3 \\ w &= P_1S_1 + P_2S_2 + P_3S_3, \end{aligned} \quad (9.)$$

wenn M_1, N_1, P_1 und M_2, N_2, P_2 , sowie M_3, N_3, P_3 die drei Werthsysteme der Cosinus bezeichnen, welche mit je einer der drei Wurzeln $\omega_1^2, \omega_2^2, \omega_3^2$ der cubischen Gleichung (7.) die Formeln (6.) erfüllen; dabei bedeuten ferner die drei Grössen S Functionen von der Form

$$\begin{aligned} S_1 &= \varphi_1(s + \omega_1 t) + \psi_1(s - \omega_1 t) \\ S_2 &= \varphi_2(s + \omega_2 t) + \psi_2(s - \omega_2 t) \\ S_3 &= \varphi_3(s + \omega_3 t) + \psi_3(s - \omega_3 t), \end{aligned} \quad (10.)$$

wo die sechs Functionen φ und ψ in vollkommen willkürlicher Weise von ihren Argumenten abhängen.

§ 96. Bestimmung der willkürlichen Functionen.

Diese willkürlichen Functionen erhalten ihre Bestimmung aus den Gleichungen (2.) und (3.) § 95, nach welchen

$$\begin{aligned} U(s) &= M_1(S_1)_0 + M_2(S_2)_0 + M_3(S_3)_0 \\ V(s) &= N_1(S_1)_0 + N_2(S_2)_0 + N_3(S_3)_0 \\ W(s) &= P_1(S_1)_0 + P_2(S_2)_0 + P_3(S_3)_0 \\ U'(s) &= M_1\left(\frac{\partial S_1}{\partial t}\right)_0 + M_2\left(\frac{\partial S_2}{\partial t}\right)_0 + M_3\left(\frac{\partial S_3}{\partial t}\right)_0 \\ V'(s) &= N_1\left(\frac{\partial S_1}{\partial t}\right)_0 + N_2\left(\frac{\partial S_2}{\partial t}\right)_0 + N_3\left(\frac{\partial S_3}{\partial t}\right)_0 \\ W'(s) &= P_1\left(\frac{\partial S_1}{\partial t}\right)_0 + P_2\left(\frac{\partial S_2}{\partial t}\right)_0 + P_3\left(\frac{\partial S_3}{\partial t}\right)_0 \end{aligned} \quad (1.)$$

ist, wenn

$$\begin{aligned} (S_0) &= \varphi(s) + \psi(s) \\ \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)_0 &= \omega \left\{ \frac{d\varphi(s)}{ds} - \frac{d\psi(s)}{ds} \right\} \end{aligned} \quad (2.)$$

ist. Durch Auflösen der Gleichungen (1.) bekommen sie die Form

$$\begin{aligned} (S_1)_0 &= \mu_1 U + \nu_1 V + \bar{\omega}_1 W \\ (S_2)_0 &= \mu_2 U + \nu_2 V + \bar{\omega}_2 W \\ (S_3)_0 &= \mu_3 U + \nu_3 V + \bar{\omega}_3 W \\ \left(\frac{\partial S_1}{\partial t}\right)_0 &= \mu_1 U' + \nu_1 V' + \bar{\omega}_1 W' \\ \left(\frac{\partial S_2}{\partial t}\right)_0 &= \mu_2 U' + \nu_2 V' + \bar{\omega}_2 W' \\ \left(\frac{\partial S_3}{\partial t}\right)_0 &= \mu_3 U' + \nu_3 V' + \bar{\omega}_3 W'. \end{aligned} \quad (3.)$$

Setzen wir diese Werthe in die Gleichungen (2.) ein, die wir auch in der Form

$$\begin{aligned} (S)_0 &= \varphi(s) + \psi(s) \\ \frac{1}{\omega} \int \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)_0 ds &= \varphi(s) - \psi(s) \end{aligned} \quad (4.)$$

oder

$$\begin{aligned} \varphi(s) &= \frac{1}{2} \left\{ (S)_0 + \frac{1}{\omega} \int \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)_0 ds \right\} \\ \psi(s) &= \frac{1}{2} \left\{ (S)_0 - \frac{1}{\omega} \int \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)_0 ds \right\} \end{aligned} \quad (5.)$$

schreiben können, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
2 \varphi_n(s) &= \mu_n \left\{ U + \frac{1}{\omega_n} \int ds U' \right\} + \nu_n \left\{ V + \frac{1}{\omega_n} \int ds V' \right\} \\
&\quad + \varpi_n \left\{ W + \frac{1}{\omega_n} \int ds W' \right\} \\
2 \psi_n(s) &= \mu_n \left\{ U - \frac{1}{\omega_n} \int ds U' \right\} + \nu_n \left\{ V - \frac{1}{\omega_n} \int ds V' \right\} \\
&\quad + \varpi_n \left\{ W - \frac{1}{\omega_n} \int ds W' \right\},
\end{aligned} \tag{6.}$$

worin der Index n die Werthe 1, 2, 3 annehmen kann. Damit sind die sechs willkürlichen Functionen durch die gegebenen sechs Functionen U, V, W, U', V', W' bestimmt und mit ihnen durch Aenderung des Arguments s in $s + \omega t$ resp. $s - \omega t$ die Werthe der Functionen $\varphi(s + \omega t)$ und $\psi(s - \omega t)$, aus denen man dann nach den Gleichungen (10.) die gesuchten Grössen u, v, w als Functionen der Zeit und des Ortes vollständig bestimmt erhält. Somit ist unsere Aufgabe vollständig und allgemein gelöst. Die in den Formeln vorkommenden Coefficienten $\mu, \nu, \varpi, M, N, P$ hängen nur von der Richtung von s und den Elasticitätsconstanten ab.

§ 97. Entstehung von sechs Wellenebenen.

Um den Inhalt der gefundenen Formeln zu übersehen, betrachten wir einen besonderen einfachen Fall, welcher die Natur hat, dass alle verwickelteren aus derartig einfachen zusammengesetzt werden können.

Wir nehmen an, das ganze Medium befinde sich zur Zeit $t = 0$ in Ruhe und Gleichgewicht, mit alleiniger Ausnahme der Theilchen, welche zwischen zwei parallelen Ebenen im Abstände j von einander liegen. Legen wir den Anfangspunkt der Coordinaten in die erste dieser Ebenen, so herrscht nach dieser Annahme zur Zeit $t = 0$ Ruhe und Gleichgewicht auf allen denjenigen Ebenen, für welche s grösser als j oder kleiner als Null ist. Ueber die Geschwindigkeit und die Verückung der Theilchen in dem Intervall zwischen beiden Ebenen $s = 0$ und $s = j$ machen wir keine Voraussetzung ausser der bereits eingeführten, dass beide für eine und dieselbe Ebene dieselben Werthe haben sollen, also nur von s abhängen. Nehmen wir j unendlich klein an, so haben wir den Fall einer einzelnen Wellenebene.

Aus unserer Annahme, dass die Functionen

$$U, V, W, U', V', W'$$

nur dann, wenn ihr Argument s zwischen 0 und j liegt, von 0 verschiedene Werthe besitzen, folgt nach den Gleichg. (6.) § 96, dass auch die Functionen $\varphi(s)$ und $\psi(s)$ nur für Argumente zwischen 0 und j von Null verschieden sein können. Bei diesem Schlusse dürfen wir davon absehen, dass zu den Integralen noch Constante hinzutreten können; denn eine gleichmässige Verrückung und Bewegung des ganzen Mediums kommt für unseren Zweck nicht in Betracht.

Weiter schliessen wir, dass auch die Functionen $\varphi(s + \omega t)$ und $\psi(s - \omega t)$ so lange den Werth Null behalten, bis eins der Argumente jene Grenzen 0 und j erreicht hat. Dasselbe gilt nach den Gleichungen (9.) und (10.) § 95 von den Componenten der Verrückung und der Geschwindigkeit

$$u, v, w, \quad \text{sowie} \quad \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \frac{\partial v}{\partial t}, \quad \frac{\partial w}{\partial t}.$$

So erkennen wir, dass sechs verschiedene Wellen entstehen, von denen eine jede dadurch bedingt ist, dass eins der sechs Argumente

$$\begin{array}{ccc} s + \omega_1 t, & s + \omega_2 t, & s + \omega_3 t \\ s - \omega_1 t, & s - \omega_2 t, & s - \omega_3 t \end{array}$$

der Functionen in das zwischen den Grenzen 0 und j enthaltene Bereich eintritt. Sehen wir j als eine unendlich kleine Grösse an, so können wir diese Bedingung für das Erscheinen einer Welle dahin abändern, dass eine der sechs Gleichungen

$$\begin{array}{ccc} s + \omega_1 t = 0, & s + \omega_2 t = 0, & s + \omega_3 t = 0 \\ s - \omega_1 t = 0, & s - \omega_2 t = 0, & s - \omega_3 t = 0 \end{array}$$

erfüllt werde. Diese Gleichungen bestimmen durch die Werthe des Abstandes s vom Coordinatenanfang sechs Ebenen, von denen drei auf der positiven, drei auf der negativen Seite derjenigen Ebene liegen, in der allein zu Anfang Bewegung und Verrückung zu finden war. Der Abstand von dieser Ebene wächst bei allen der Zeit t proportional. Dieses Verhalten führt zu der Deutung unserer Formeln, dass aus der ursprünglichen einzigen Wellenebene sechs getrennte Wellenebenen oder drei Paar getrennter Wellenebenen entstanden sind, welche sich mit gleichmässiger, aber unter einander verschiedener Geschwindigkeit fortpflanzen und daher sich immer weiter von einander entfernen. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des ersten Paares ist ω_1 , die des zweiten ω_2 und die des dritten ω_3 . Die

Richtung der Fortbewegung ist aber in je zweien, die ein Paar bilden, entgegengesetzt. Es behalten daher die drei Paare immer eine symmetrische Lage in Beziehung auf die Ebene, von der die Bewegung ausging.

Die specielle Voraussetzung, dass anfänglich Verrückung und Bewegung nur in einer Ebene vorhanden war, ist hierbei unwesentlich. Denn wir können jeden Anfangszustand auflösen in den speciellen, den wir behandelt haben. Wenn nämlich Verrückungen in mehreren Ebenen stattfanden, so können wir auf jede dieser Ebenen dieselbe Erwägung anwenden. Es pflanzen sich also von jeder anfänglich bewegten oder verschobenen Ebene immer drei räumlich getrennte Wellenpaare mit verschiedener Geschwindigkeit nach beiden Seiten fort, gleichgültig, ob die anfänglichen Ebenen nahe an einander oder weit von einander entfernt lagen.

§ 98. Richtung der Bewegung in den sechs Wellen.

Diese drei Wellenpaare unterscheiden sich nicht bloss durch die Schnelligkeit ihrer Fortpflanzung, sondern auch durch die Richtung und Grösse der Geschwindigkeit und Verrückung in ihnen; denn es sind die Componenten der Verrückungen

auf der positiven Seite auf der negativen Seite
in der ersten Welle

$$\begin{array}{ll} u = M_1 \psi_1(s - \omega_1 t) & u = M_1 \varphi_1(s + \omega_1 t) \\ v = N_1 \psi_1(s - \omega_1 t) & v = N_1 \varphi_1(s + \omega_1 t) \\ w = P_1 \psi_1(s - \omega_1 t) & w = P_1 \varphi_1(s + \omega_1 t), \end{array}$$

in der zweiten Welle

$$\begin{array}{ll} u = M_2 \psi_2(s - \omega_2 t) & u = M_2 \varphi_2(s + \omega_2 t) \\ v = N_2 \psi_2(s - \omega_2 t) & v = N_2 \varphi_2(s + \omega_2 t) \\ w = P_2 \psi_2(s - \omega_2 t) & w = P_2 \varphi_2(s + \omega_2 t) \end{array}$$

und in der dritten Welle

$$\begin{array}{ll} u = M_3 \psi_3(s - \omega_3 t) & u = M_3 \varphi_3(s + \omega_3 t) \\ v = N_3 \psi_3(s - \omega_3 t) & v = N_3 \varphi_3(s + \omega_3 t) \\ w = P_3 \psi_3(s - \omega_3 t) & w = P_3 \varphi_3(s + \omega_3 t). \end{array}$$

Hieraus erhält man die Cosinus der Winkel, welche die Richtung der Geschwindigkeit mit den Coordinatenaxen bildet, in dem ersten Wellenpaare nach den Formeln

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial t}}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2}} = M_1,$$

$$\frac{\frac{\partial v}{\partial t}}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2}} = N_1,$$

$$\frac{\frac{\partial w}{\partial t}}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2}} = P_1.$$

Für die zweiten Wellen findet man ebenso die Cosinus

$$M_2, N_2, P_2$$

und endlich für das dritte Paar Wellenebenen

$$M_3, N_3, P_3.$$

Dieselben Cosinus bestimmen die Richtung der Verrückungen.

In den Systemen von Wellenebenen, die sich wegen der verschiedenen Werthe von ω von einander trennen, ist also für jede Welle die Richtung der Bewegung und der Verrückung eine andere. Doch bleibt in einer jeden Welle diese Richtung stets dieselbe für jedes s und jedes t , d. h. an jedem Ort und für alle Zeit.

Die Richtung der Bewegung und Verrückung ist ferner unabhängig von der Natur der Functionen φ und ψ ; sie ist ausser mit der Richtung s der Fortpflanzung nur mit dem Werthe von ω^2 veränderlich; sie ist nach den Formeln (6.) § 95 durch denselben vollkommen bestimmt, so dass eine gewisse Bewegungsrichtung unzertrennlich mit der zugehörigen Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle verbunden ist.

§ 99. Fortpflanzungsellipsoid.

Das Gesetz, welches die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle und die Richtung der Verrückungen in derselben bestimmt, kann sehr einfach durch Construction mit Hülfe eines dreiaxigen Ellipsoids dargestellt werden.

Die Gleichung dieses noch näher zu bestimmenden Ellipsoids sei

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz = 1.$$

Der Radiusvector sei R und die Cosinus der Winkel desselben gegen

die Coordinatenrichtungen α , β , γ . Dann erhalten wir nach § 16 zur Bestimmung der Axen dieses Ellipsoids die Gleichungen

$$\mathfrak{A}\alpha + \mathfrak{D}\beta + \mathfrak{E}\gamma = \frac{\alpha}{R^2}$$

$$\mathfrak{D}\alpha + \mathfrak{B}\beta + \mathfrak{F}\gamma = \frac{\beta}{R^2}$$

$$\mathfrak{E}\alpha + \mathfrak{F}\beta + \mathfrak{C}\gamma = \frac{\gamma}{R^2},$$

aus welchen man durch Elimination von α , β , γ eine cubische Gleichung zur Bestimmung von R für die Axen des Ellipsoids gewinnt.

Vergleichen wir diese Gleichungen mit den Glchg. (6.) § 95, welche zur Bestimmung von ω dienen, so erkennen wir, dass beide Systeme identisch gemacht werden können, wenn wir setzen

$$\alpha = M; \quad \beta = N; \quad \gamma = P;$$

$$\mathfrak{A} = Ap^2 + cq^2 + br^2; \quad \mathfrak{B} = cp^2 + Bq^2 + ar^2; \quad \mathfrak{C} = bp^2 + aq^2 + Cr^2;$$

$$\mathfrak{D} = 2cpq; \quad \mathfrak{E} = 2bpr; \quad \mathfrak{F} = 2aqr;$$

$$\frac{1}{R^2} = \varepsilon\omega^2.$$

Also wird die Gleichung des Ellipsoids

$$(Ap^2 + cq^2 + br^2)x^2 + (cp^2 + Bq^2 + ar^2)y^2 + (bp^2 + aq^2 + Cr^2)z^2 + 4cpqxy + 4brpxz + 4aqryz = 1. \quad (1.)$$

Die Hauptaxen dieses Ellipsoids hängen allein von den Elasticitätsconstanten des Mediums ab, sowie von der Lage der ursprünglichen Erschütterungsebene, also von den Cosinus p , q , r . Die Richtung der Hauptaxen ist dieselbe, wie die Richtung der Bewegung in den drei Wellenpaaren. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten ω der Wellen sind proportional den reciproken Halbaxen R des Ellipsoids.

Die Richtungen der Bewegung in den drei Wellenpaaren stehen also senkrecht auf einander, und es bestehen die Relationen

$$M_1M_2 + N_1N_2 + P_1P_2 = 0$$

$$M_1M_3 + N_1N_3 + P_1P_3 = 0 \quad (2.)$$

$$M_2M_3 + N_2N_3 + P_2P_3 = 0.$$

Wenden wir dies auf die Glchg. (1.) und (3.) § 96 an, so werden die letzteren

$$\begin{aligned}
(S_1)_0 &= M_1 U + N_1 V + P_1 W \\
(S_2)_0 &= M_2 U + N_2 V + P_2 W \\
(S_3)_0 &= M_3 U + N_3 V + P_3 W \\
\left(\frac{\partial S_1}{\partial t}\right)_0 &= M_1 U' + N_1 V' + P_1 W' \\
\left(\frac{\partial S_2}{\partial t}\right)_0 &= M_2 U' + N_2 V' + P_2 W' \\
\left(\frac{\partial S_3}{\partial t}\right)_0 &= M_3 U' + N_3 V' + P_3 W'.
\end{aligned} \tag{3.}$$

Die Grössen $(S_1)_0$, $(S_2)_0$, $(S_3)_0$ sind also nichts anderes als die Componenten der ursprünglichen Verrückungen nach den Richtungen der Hauptaxen des Ellipsoids; und ebenso sind die Grössen $\left(\frac{\partial S_1}{\partial t}\right)_0$, $\left(\frac{\partial S_2}{\partial t}\right)_0$, $\left(\frac{\partial S_3}{\partial t}\right)_0$ nichts anderes als die Componenten der ursprünglichen Geschwindigkeiten nach denselben Richtungen.

§ 100. Die Formeln bezogen auf die Hauptaxen des Ellipsoids.

Daraus folgt, dass alle unsere Formeln eine bedeutende Vereinfachung erfahren, wenn wir, statt wie bisher die Krystallaxen, fortan die Hauptaxen des Ellipsoids zu Coordinatenaxen wählen.

Bezeichnen wir die Componenten der ursprünglichen Verrückungen nach diesen neuen Axen durch

$$\bar{U}, \bar{V}, \bar{W},$$

und ebenso die Componenten der anfänglichen Geschwindigkeiten nach denselben Richtungen durch

$$\bar{U}', \bar{V}', \bar{W}',$$

wo diese sechs Grössen entweder direct gegeben oder aus den früheren U, V, W, U', V', W' nach den gewöhnlichen Formeln der Transformation der Coordinaten berechnet sein können, so erhalten wir statt der Gleichungen (3.) § 99

$$\begin{aligned}
(S_1)_0 &= \bar{U} & \left(\frac{\partial S_1}{\partial t}\right)_0 &= \bar{U}' \\
(S_2)_0 &= \bar{V} & \left(\frac{\partial S_2}{\partial t}\right)_0 &= \bar{V}' \\
(S_3)_0 &= \bar{W} & \left(\frac{\partial S_3}{\partial t}\right)_0 &= \bar{W}'.
\end{aligned} \tag{1.}$$

Auf dieselbe Weise werden die Formeln (9.) § 95, wenn $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ die

Componenten der Verrückungen nach den neuen Coordinaten bezeichnen,

$$\begin{aligned}\bar{u} &= S_1 \\ \bar{v} &= S_2 \\ \bar{w} &= S_3,\end{aligned}\quad (2.)$$

oder nach den Glchg. (10.) § 95 durch Einsetzen der Bedeutungen der S

$$\begin{aligned}\bar{u} &= \varphi_1(s + \omega_1 t) + \psi_1(s - \omega_1 t) \\ \bar{v} &= \varphi_2(s + \omega_2 t) + \psi_2(s - \omega_2 t). \\ \bar{w} &= \varphi_3(s + \omega_3 t) + \psi_3(s - \omega_3 t).\end{aligned}\quad (3.)$$

Nach den Glchg. (5.) § 96 wird ferner

$$\begin{aligned}\varphi_1(s + \omega_1 t) &= \frac{1}{2} \bar{U}(s + \omega_1 t) + \frac{1}{2\omega_1} \int_{s+\omega_1 t} U' ds \\ \psi_1(s + \omega_1 t) &= \frac{1}{2} \bar{U}(s - \omega_1 t) + \frac{1}{2\omega_1} \int_{s-\omega_1 t} U' ds\end{aligned}$$

und analog für jede der drei verschiedenen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten ω , wenn U mit V oder W vertauscht wird.

Demnach werden, bezogen auf die Axen des Fortpflanzungsellipsoids,

$$\begin{aligned}\bar{u} &= \frac{1}{2} \left\{ \bar{U}(s + \omega_1 t) + \bar{U}(s - \omega_1 t) \right\} + \frac{1}{2\omega_1} \left\{ \int_{s+\omega_1 t} \bar{U}' ds - \int_{s-\omega_1 t} \bar{U}' ds \right. \\ \bar{v} &= \frac{1}{2} \left\{ \bar{V}(s + \omega_2 t) + \bar{V}(s - \omega_2 t) \right\} + \frac{1}{2\omega_2} \left\{ \int_{s+\omega_2 t} \bar{V}' ds - \int_{s-\omega_2 t} \bar{V}' ds \right. \\ \bar{w} &= \frac{1}{2} \left\{ \bar{W}(s + \omega_3 t) + \bar{W}(s - \omega_3 t) \right\} + \frac{1}{2\omega_3} \left\{ \int_{s+\omega_3 t} \bar{W}' ds - \int_{s-\omega_3 t} \bar{W}' ds.\end{aligned}\quad (4.)$$

Es entstehen also durch eine ursprüngliche Welle drei im Allgemeinen räumlich getrennte Wellen, von denen jede entsteht aus den Componenten der anfänglichen Verrückungen und Geschwindigkeiten nach der Richtung einer Axe des Fortpflanzungsellipsoides. Wir dürfen daher den Ausdruck für die Verrückungen in jeder einzelnen Welle getrennt discutiren. Ferner setzen sich die Verrückungen in jeder entstehenden Welle durch einfache Addition zusammen aus einem Theile, der aus der ursprünglichen Componente der Verrückung entstanden ist, und einem andern, der sich aus der anfänglichen Geschwindigkeitscomponente herschreibt.

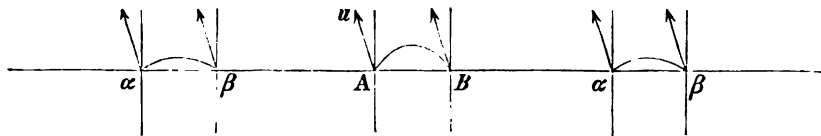
Beide Theile können wir wieder getrennt untersuchen. In jeder Welle haben die Verrückungen die Richtungen der ursprünglichen Componenten, denen sie ihre Entstehung verdanken.

§ 101. Untersuchung der aus einer Verrückung entstandenen Welle.

Wir führen die Discussion der Formeln (4.) für die Welle \bar{u} durch und zwar zunächst für den Fall, dass die Bewegungen dieser Welle nur aus einer anfänglichen Verrückung entstanden sind. Dann wird die Formel

$$\bar{u} = \frac{1}{2} \{ \bar{U}(s + \omega_1 t) + \bar{U}(s - \omega_1 t) \} \quad (1.)$$

Die gegebene Function $\bar{U}(s)$, die ganz beliebig ist, continuirlich oder discontinuirlich sein kann, stellen wir durch eine Curve dar, deren Abscisse s , deren Ordinate $\bar{U}(s)$ ist, im Allgemeinen also durch ein schiefwinkliges Coordinatensystem. Nach unserer Voraussetzung hat diese Function nur zwischen zwei Ebenen, deren Durchschnittspunkte mit der Linie s in der Entfernung j von einander A und B seien, von Null verschiedene Werthe. Wir erhalten also \bar{U} dargestellt durch eine von A nach B gezogene übrigens ganz beliebige Curve, die nur die Voraussetzung enthält, dass sie ausserhalb des Intervalls $0 < s < j$ mit der Abscissenaxe zusammenfällt. Es ist aber deshalb nicht nöthig, dass die Ordinaten für $s = 0$ und $s = j$ Null seien, wie es in der nachfolgenden Zeichnung angenommen ist.



Wenn wir nun unter der Annahme, dass $\omega_1 t$ gleich der Länge $A\alpha$ geworden sei, die Construction des Zustandes der Verrückungen zur Zeit t nach Anleitung der Gleichung (1.) unternehmen, so erhalten wir nur für diejenigen s , für welche entweder $s + A\alpha$ oder $s - A\alpha$ zwischen 0 und j liegt, Werthe von \bar{u} , welche eine Abweichung von der Ruhelage bilden. Es entstehen also zwei getrennte Curven $\alpha\beta$, je eine auf jeder Seite der ursprünglichen Curve AB . Die Ordinaten jeder dieser beiden Curven sind die halben Ordinaten der ursprünglichen Curve. Es befindet sich also zur Zeit t das ganze Medium, selbst die ursprünglich bewegten Theile

zwischen den Ebenen A und B , in Ruhe, mit Ausnahme zweier Schichten des Mediums, auf beiden Seiten der ursprünglich bewegten, welche die halbe Verrückung erlitten haben.

Da die beiden Verrückungssysteme sich nach entgegengesetzten Seiten mit gleichförmiger Geschwindigkeit fortbewegen, so folgt, dass sich die Verrückung eines bestimmten Theilchens mit der Zeit so ändert, dass sie nach und nach den Werthen sämmtlicher auf einander folgenden Ordinaten der Curve $\alpha\beta$ gleich wird. Jedes Theilchen hebt sich, senkt sich und steht darauf still.

Dieses bleibt richtig, auch wenn die Curven AB und folglich $\alpha\beta$ nicht stetig sind. In diesem Falle haben wir das Gesetz so auszusprechen, dass sich jede Ordinate der Verrückungcurve mit derselben constanten Geschwindigkeit fortpflanzt, mag die Curve sein, welche sie wolle.

Dieselbe Betrachtung ist unmittelbar auf die Geschwindigkeitscomponenten zu übertragen, denn es ist auch

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \frac{\omega_1}{2} \left\{ \frac{\partial \bar{U}(s + \omega_1 t)}{\partial s} - \frac{\partial U(s - \omega_1 t)}{\partial s} \right\}$$

eine Function, welche überall = 0 wird, ausser den Stellen, wo eins ihrer Argumente zwischen 0 und j liegt. Wir dürfen also dieselbe Construction ausführen, nur mit dem einzigen Unterschiede, dass die Curven AB und $\alpha\beta$ anders gestaltet sind.

§ 102. Eine aus einem Stoss entstandene Welle.

Es kann zweitens die Welle durch eine anfängliche Geschwindigkeit hervorgebracht sein, also durch einen zur Zeit $t = 0$ allen zwischen den beiden Ebenen $s = 0$ und $s = j$ liegenden Theilchen ertheilten Stoss. In diesem Falle haben wir die Gleichung

$$\bar{u} = \frac{1}{2\omega_1} \left\{ \int_{s+\omega_1 t} \bar{U}' ds - \int_{s-\omega_1 t} \bar{U}' ds \right\} \quad (1.)$$

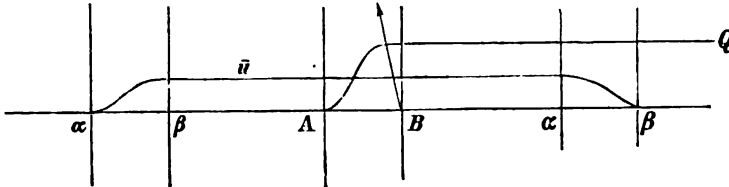
oder, wenn wir bezeichnen

$$Q(s) = \frac{1}{\omega_1} \int \bar{U}' ds, \quad (2.)$$

$$\bar{u} = \frac{1}{2} \{ Q(s + \omega_1 t) - Q(s - \omega_1 t) \}. \quad (3.)$$

Wir verfahren auf ähnliche Weise, construiren die gegebene Function U' als Function von s , bilden aus derselben ihr Integral Q , dessen Werth wir als Ordinate in der Richtung von U' auftragen,

und finden schliesslich aus den Ordinaten dieser Curve durch einfache Subtraction die Werthe von u , die wir als Ordinaten einer dritten Curve auftragen.



Für $Q(s)$ findet man auf diese Weise eine Curve, deren Ordinate wächst, während s von 0 bis j zunimmt, von da an aber constant ist; für negative Argumente hat sie den Werth Null. Daraus folgt, dass \bar{u} constant ist, so lange s zwischen $\omega_1 t$ und $-\omega_1 t + j$ liegt; wird s grösser als $j + \omega_1 t$; oder kleiner als $\omega_1 t$, so wird $\bar{u} = 0$; in den beiden Intervallen von $\omega_1 t$ bis $\omega_1 t + j$ und von $-\omega_1 t + j$ bis $-\omega_1 t$ nimmt \bar{u} allmählich von dem constanten Werthe, der gleich dem halben constanten Werthe von Q ist, bis 0 ab.

Das Gesetz, nach welchem die Ordinate dieser Verrückungcurve mit zunehmender Zeit sich verändert, ergibt sich leicht so, dass der Theil mit constanter Ordinate sich nach beiden Seiten mit gleichmässiger Geschwindigkeit immer weiter ausdehnt. Nach unendlicher Zeit seit dem Anfang der Bewegung muss also das ganze Medium um die constante Ordinate der Verrückungcurve verschoben sein; es muss seinen Schwerpunkt um diese Länge verrückt haben.

Für die Bestimmung der Fortpflanzung der Geschwindigkeit für diesen Fall haben wir

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \frac{1}{2} \{ \bar{U}'(s + \omega_1 t) + \bar{U}'(s - \omega_1 t) \}, \quad (4.)$$

also für die eine Welle

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \frac{1}{2} \bar{U}'(s + \omega_1 t),$$

für die andere

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \frac{1}{2} \bar{U}'(s - \omega_1 t);$$

d. h. es pflanzt sich nach jeder Seite die Hälfte der anfänglichen Geschwindigkeit mit constanter Geschwindigkeit fort.

§ 103. Warum sich Wellen nicht auch rückwärts fortpflanzen.

Es knüpft sich an diese Untersuchung eine Frage. Sind aus einer anfänglichen Verrückung oder aus einem Stosse zwei Wellen

entstanden, wie wir es abgeleitet haben, so scheint es nach dieser selben Ableitung, indem man einen der entstandenen Wellenberge $\alpha\beta$ als Anfangszustand ansieht, als müsste sich derselbe zur Hälfte nach jeder Seite hin fortpflanzen. Dies steht aber sowohl mit den erhaltenen Resultaten, als auch mit der Beobachtung in Widerspruch. Denn eine fortschreitende Lichtwelle pflanzt sich nicht auch rückwärts fort, obwohl nach dem Huygens'schen Princip die Bewegung nach allen Seiten sich ausbreitet. Diese Frage ist also von allgemeinem Interesse.

Aus einer anfänglichen Verrückung $\bar{U}(s)$ entsteht nach § 101 eine in positiver Richtung fortschreitende Welle, deren Verrückung

$$(\bar{u}) = \frac{1}{2} \bar{U}(s - \omega_1 t)$$

und Geschwindigkeit

$$(\bar{u}') = -\frac{\omega_1}{2} \frac{\partial \bar{U}(s - \omega_1 t)}{\partial s}$$

ist. Sehen wir diese Welle als zur Zeit $t = 0$ gegeben an, so haben wir

$$(U') = \frac{1}{2} U(s)$$

$$(\bar{U}') = -\frac{\omega_1}{2} \frac{\partial \bar{U}(s)}{\partial s}$$

als Anfangszustand. Diese Bewegung pflanzt sich, wie wir sahen, nach beiden Seiten fort, und zwar ist die Verrückung in den resultierenden Wellen nach den allgemeinen Gleichungen (4.) § 100

$$u = \frac{1}{4} \{ \bar{U}(s + \omega_1 t) + \bar{U}(s - \omega_1 t) \} + \frac{1}{4} \{ Q(s + \omega_1 t) - Q(s - \omega_1 t) \},$$

worin

$$Q(s) = \frac{1}{\omega_1} \int (U') ds = -\frac{1}{2} \bar{U}(s);$$

also ist

$$\bar{u} = \frac{1}{4} \{ \bar{U}(s + \omega_1 t) + \bar{U}(s - \omega_1 t) \} - \frac{1}{4} \{ \bar{U}(s + \omega_1 t) - \bar{U}(s - \omega_1 t) \}$$

$$\bar{u} = \frac{1}{2} \bar{U}(s - \omega_1 t).$$

Es entsteht also aus der zur Zeit $t = 0$ gegebenen Welle nur eine Welle, und diese pflanzt sich in der positiven Richtung fort, wie die gegebene that, sie ist also diese selbst.

§ 104. Fortpflanzung von Schwingungen einer Ebene.

Hieran schliesst sich naturgemäss eine andere Aufgabe aus der Wellenlehre, welche eine ähnliche scheinbare Schwierigkeit enthält.

Eine Ebene $s = 0$ eines unbegrenzten elastischen Mediums befinde sich in der durch die Gleichungen

$$u_0 = A(t), \quad v_0 = B(t), \quad w_0 = C(t), \quad s = 0 \quad (1.)$$

definirten Bewegung. In welcher Bewegung wird sich dann das übrige Medium befinden?

Auf die Optik angewandt heisst dies Problem, die Brechung und Reflexion von senkrecht einfallendem Lichte zu bestimmen und somit die Gesetze der doppelten Brechung bei senkrecht einfallendem Lichte herzuleiten. Die Grenzebene des elastischen Mediums ist dann die Ebene $s = 0$.

Wir gehen aus von den allgemeinen Lösungen der Differentialgleichungen (Gleichg. (9.) § 95)

$$\begin{aligned} u &= M_1 S_1 + M_2 S_2 + M_3 S_3 \\ v &= N_1 S_1 + N_2 S_2 + N_3 S_3 \\ w &= P_1 S_1 + P_2 S_2 + P_3 S_3, \end{aligned} \quad (2.)$$

worin die Grössen S die willkürlich bleibenden Functionen φ und ψ in der Verbindung

$$\begin{aligned} S_1 &= \varphi_1(s + \omega_1 t) + \psi_1(s - \omega_1 t) \\ S_2 &= \varphi_2(s + \omega_2 t) + \psi_2(s - \omega_2 t) \\ S_3 &= \varphi_3(s + \omega_3 t) + \psi_3(s - \omega_3 t) \end{aligned} \quad (3.)$$

enthalten, während die ω der cubischen Gleichg. (7.) § 95 genügen müssen, und die M, N, P durch die Gleichungen (8.) § 95 und (2.) § 99 ihre frühere Definition als Cosinus beibehalten.

Man übersieht sofort, dass die sechs willkürlichen Functionen φ und ψ sich nicht durch die drei Grenzbedingungen (1.) bestimmen lassen. Es ist also das Problem noch nicht vollständig bestimmt. Es fehlt noch die Bestimmung des Anfangszustandes der Bewegung zur Zeit $t = 0$. Für diese Zeit sei

$$\begin{aligned} u &= U, & v &= V, & w &= W \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= U', & \frac{\partial v}{\partial t} &= V', & \frac{\partial w}{\partial t} &= W'. \end{aligned} \quad (4.)$$

Fügen wir diese sechs Gleichungen den Gleichg. (1.) als Bedingungen hinzu, so tritt die Schwierigkeit ein, dass es scheint, als hätten wir zu viele Bedingungsgleichungen. Die Möglichkeit, den Bedingungen (1.)

für $s = 0$ zu genügen, scheint verloren zu sein, da die sechs willkürlichen Functionen schon aus den sechs Glchg. (4.) bestimmt werden können.

Die Schwierigkeit findet dadurch ihre Erklärung, dass von der einen Seite der Ebene $s = 0$ durch diese hindurch keine Bewegung nach der andern gelangt. Die Bewegungen auf der Seite der positiven und der der negativen s sind ganz unabhängig von einander und demnach auch unabhängig von einander zu berechnen. Wir suchen nur die Bewegung auf der Seite der positiven s und dürfen demnach den Glchg. (4.) nur zwischen den Grenzen $s = 0$ und $s = \infty$ Gültigkeit beilegen.

Wir bestimmen, um die weitere Durchführung der Rechnung nicht complicirter zu machen, dass $U = 0, V = 0, W = 0, U' = 0$ etc. sei, setzen also für $t = 0$ und $0 < s < \infty$

$$\begin{aligned} u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = 0. \end{aligned} \quad (5.)$$

Daraus folgt nach den Glchg. (2.) für $t = 0$ und für $0 < s < \infty$

$$\begin{aligned} 0 = (S_1)_0 = \varphi_1(s) + \psi_1(s) & \quad 0 = \left(\frac{\partial S_1}{\partial t}\right)_0 = \omega_1(\varphi_1'(s) - \psi_1'(s)) \\ 0 = (S_2)_0 = \varphi_2(s) + \psi_2(s) & \quad 0 = \left(\frac{\partial S_2}{\partial t}\right)_0 = \omega_2(\varphi_2'(s) - \psi_2'(s)) \quad (6.) \\ 0 = (S_3)_0 = \varphi_3(s) + \psi_3(s) & \quad 0 = \left(\frac{\partial S_3}{\partial t}\right)_0 = \omega_3(\varphi_3'(s) - \psi_3'(s)), \end{aligned}$$

wo die φ' und ψ' die Differentialquotienten von φ und ψ bezeichnen. Durch Integration wird

$$\begin{aligned} 2C_1 &= \varphi_1(s) - \psi_1(s) \\ 2C_2 &= \varphi_2(s) - \psi_2(s) \\ 2C_3 &= \varphi_3(s) - \psi_3(s), \end{aligned} \quad (7.)$$

wo die C Constanten in Bezug auf das Argument der Functionen φ und ψ sind. Demnach ist für alle positiven Werthe von s

$$\begin{aligned} \varphi_1(s) = C_1 & \quad \psi_1(s) = -C_1 \\ \varphi_2(s) = C_2 & \quad \psi_2(s) = -C_2 \\ \varphi_3(s) = C_3 & \quad \psi_3(s) = -C_3. \end{aligned} \quad (8.)$$

Da aber diese Constanten aus den Schlussgleichungen doch verschwinden würden, so setzen wir von vornherein

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = 0,$$

und erhalten die Bestimmung, dass für $0 < s < \infty$ und

$$\text{für alle } t \begin{cases} \varphi_1(s + \omega_1 t) = 0; & \text{für } t < \frac{s}{\omega_1} & \psi_1(s - \omega_1 t) = 0 \\ \varphi_2(s + \omega_2 t) = 0; & \text{„ } t < \frac{s}{\omega_2} & \psi_2(s - \omega_2 t) = 0 \\ \varphi_3(s + \omega_3 t) = 0; & \text{„ } t < \frac{s}{\omega_3} & \psi_3(s - \omega_3 t) = 0. \end{cases} \quad (9.)$$

Dadurch werden die Gleichungen (2.)

$$\begin{aligned} u &= M_1 \psi_1(s - \omega_1 t) + M_2 \psi_2(s - \omega_2 t) + M_3 \psi_3(s - \omega_3 t) \\ v &= N_1 \psi_1(s - \omega_1 t) + N_2 \psi_2(s - \omega_2 t) + N_3 \psi_3(s - \omega_3 t) \\ w &= P_1 \psi_1(s - \omega_1 t) + P_2 \psi_2(s - \omega_2 t) + P_3 \psi_3(s - \omega_3 t), \end{aligned} \quad (10.)$$

wobei zu bemerken ist, dass die Functionen ψ für positive Werthe ihrer Argumente Null sind.

Für negative Werthe und den Werth Null der Argumente sind sie aus den Glchg. (1.) zu bestimmen. Indem wir $s = 0$ setzen, erhalten wir

$$0 \leq t < \infty \begin{cases} A(t) = M_1 \psi_1(-\omega_1 t) + M_2 \psi_2(-\omega_2 t) + M_3 \psi_3(-\omega_3 t) \\ B(t) = N_1 \psi_1(-\omega_1 t) + N_2 \psi_2(-\omega_2 t) + N_3 \psi_3(-\omega_3 t) \\ C(t) = P_1 \psi_1(-\omega_1 t) + P_2 \psi_2(-\omega_2 t) + P_3 \psi_3(-\omega_3 t) \end{cases} \quad (11.)$$

und hieraus nach den Formeln (2.) § 99 und (8) § 95

$$0 \leq t < \infty \begin{cases} \psi_1(-\omega_1 t) = M_1 A(t) + N_1 B(t) + P_1 C(t) \\ \psi_2(-\omega_2 t) = M_2 A(t) + N_2 B(t) + P_2 C(t) \\ \psi_3(-\omega_3 t) = M_3 A(t) + N_3 B(t) + P_3 C(t). \end{cases} \quad (12.)$$

Die rechter Hand stehenden Ausdrücke sind nach § 99 die Componenten der in der Ebene $s = 0$ stattfindenden Verrückungen, zerlegt nach den Richtungen der Hauptaxen des Fortpflanzungs-ellipsoids. Wir bezeichnen dieselben durch $U(t)$, $V(t)$, $W(t)$

$$\begin{aligned} U(t) &= M_1 A(t) + N_1 B(t) + P_1 C(t) \\ V(t) &= M_2 A(t) + N_2 B(t) + P_2 C(t) \\ W(t) &= M_3 A(t) + N_3 B(t) + P_3 C(t) \end{aligned} \quad (13.)$$

und bemerken, dass diese Grössen vollständig durch die gegebenen Functionen $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, sowie durch die Lage der Elasticitäts-axen des Mediums gegen die Coordinatenaxen bestimmt sind. Es sind demnach auch die Functionen ψ vollständig gefunden:

$$0 \leq t < \infty \begin{cases} \psi_1(-\omega_1 t) = U(t) & \psi_1(s) = 0 \\ \psi_2(-\omega_2 t) = V(t) & 0 < s < \infty \quad \psi_2(s) = 0 \\ \psi_3(-\omega_3 t) = W(t) & \psi_3(s) = 0; \end{cases} \quad (14.)$$

oder man hat für $0 \leq s < \infty$

$$\begin{aligned} \frac{s}{\omega_1} < t < \infty \quad \psi_1(s - \omega_1 t) = U\left(t - \frac{s}{\omega_1}\right); \quad 0 < t < \frac{s}{\omega_1} \quad \psi_1(s - \omega_1 t) = 0 \\ \frac{s}{\omega_2} \leq t < \infty \quad \psi_2(s - \omega_2 t) = V\left(t - \frac{s}{\omega_2}\right); \quad 0 < t < \frac{s}{\omega_2} \quad \psi_2(s - \omega_2 t) = 0 \\ \frac{s}{\omega_3} \leq t < \infty \quad \psi_3(s - \omega_3 t) = W\left(t - \frac{s}{\omega_3}\right); \quad 0 < t < \frac{s}{\omega_3} \quad \psi_3(s - \omega_3 t) = 0. \end{aligned} \quad (15.)$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichg. (10.), so sind auch die gesuchten Grössen u , v , w vollständig bekannt.

Der bequemeren Uebersicht wegen führen wir statt des bisher beliebigen ein bestimmtes Coordinatensystem ein, indem wir die Hauptaxen des Verrückungsellipsoides zu Coordinatenaxen wählen. Die Componenten der Verrückungen \bar{u} , \bar{v} , \bar{w} nach diesen Richtungen sind

$$\begin{aligned} \bar{u} &= M_1 u + N_1 v + P_1 w \\ \bar{v} &= M_2 u + N_2 v + P_2 w \\ \bar{w} &= M_3 u + N_3 v + P_3 w. \end{aligned} \quad (16.)$$

Für dieselben finden wir

$$\begin{aligned} \bar{u} = U\left(t - \frac{s}{\omega_1}\right), \quad \bar{v} = V\left(t - \frac{s}{\omega_2}\right), \quad \bar{w} = W\left(t - \frac{s}{\omega_3}\right) \\ \text{für } t > \frac{s}{\omega_1}, \quad t > \frac{s}{\omega_2}, \quad t < \frac{s}{\omega_1}. \end{aligned} \quad (17.)$$

Dagegen für kleinere Werthe von t

$$\bar{u} = 0, \quad \bar{v} = 0, \quad \bar{w} = 0.$$

Durch diese Formeln lässt sich der Zustand des Mediums leicht übersehen. Es entstehen in demselben durch die Schwingungen der erregenden Ebene $s = 0$ drei Wellensysteme, die sich in derselben Richtung fortflanzen, aber bei verschiedener Schwingungsrichtung und mit verschiedener Fortpflanzungsgeschwindigkeit. In der Entfernung s langt eine Welle an, sobald das ihr zugehörige Argument $\omega t - s$ durch Null gegangen ist, weil von da an die Functionen \bar{u} , \bar{v} , \bar{w} erst anfangen, Werthe zu bekommen, welche nicht $= 0$ sind. Eine Verrückung, welche zur Zeit t in der Ebene $s = s$ stattfindet, befand sich in der Ebene $s = 0$ zur Zeit $t - \frac{s}{\omega}$.

Wir machen speciell die Annahme, die bei der Lichtbewegung der Wirklichkeit entspricht; wir setzen

$$U(t) = A \cos \frac{t}{T} 2\pi; \quad V(t) = B \cos \frac{t}{T} 2\pi; \quad W(t) = C \cos \frac{t}{T} 2\pi,$$

wo A, B, C, T Constanten sind. Dann werden nach Formel (17.) die analytischen Ausdrücke der Wellen

$$\begin{aligned}\bar{u} &= A \cos \left(\frac{t}{T} - \frac{s}{\omega_1 T} \right) 2\pi; & \bar{v} &= B \cos \left(\frac{t}{T} - \frac{s}{\omega_2 T} \right) 2\pi; \\ \bar{w} &= C \cos \left(\frac{t}{T} - \frac{s}{\omega_3 T} \right) 2\pi,\end{aligned}$$

welche indess erst dann gelten, wenn t so gross geworden ist, dass das Argument des Cosinus durch Null gegangen ist. Dieses sind dieselben Ausdrücke, die wir in der Theorie des Lichtes¹⁾ gefunden haben; T_1 ist die Undulationsdauer, ωT die Wellenlänge.

§ 105. Statische Bedeutung des Fortpflanzungsellipsoidea.

Wir haben uns noch näher mit dem in § 99 eingeführten Fortpflanzungsellipsoide zu beschäftigen, da dieses eine sehr einfache statische Bedeutung besitzt. Zugleich wird uns diese Betrachtung einen andern Gesichtspunkt für die Deutung der dreierlei Fortpflanzungsgeschwindigkeiten liefern.

Wir nehmen an, dass alle Theilchen des Mediums eine Verrückung nach derselben Richtung erlitten haben, ferner, dass alle auf einer Ebene

$$px + qy + rz = s \quad (1.)$$

gelegenen Theilchen um gleichviel verschoben seien. Die Verrückung soll also ihrer Grösse nach nur Function der Entfernung s vom Anfangspunkte der Coordinaten x, y, z sein. Ihre Richtung, welche in jeder Ebene dieselbe ist, bildet mit den Coordinatenaxen die Cosinus M, N, P , so dass

$$\begin{aligned}u &= M\varphi(s) \\ v &= N\varphi(s) \\ w &= P\varphi(s)\end{aligned} \quad (2.)$$

die Componenten derselben nach den Richtungen der Coordinaten sind, wenn $\varphi(s)$ die resultirende Gesamtverrückung ist.

Aus diesen Verrückungen entstehen Molekularkräfte, durch welche die Theile der Ebene in ihre frühere Ruhelage zurückgezogen werden. Die Richtung der resultirenden Molekularkraft, die auf das Element einer Ebene wirkt, wird im Allgemeinen nicht mit der Richtung der Verrückung zusammenfallen. Daraus geht hervor, dass im Allgemeinen die Ebene nicht auf demselben Wege in ihre Gleichgewichtslage zurückkehren wird, auf dem sie aus derselben entfernt worden

1) F. Neumann, theoretische Optik. Leipzig 1885. Vorlesung II.

ist. Jeder Punkt derselben wird auf diesem Wege eine gewisse Curve beschreiben.

Wir stellen uns jetzt die Frage, ob es nicht Richtungen giebt, in denen der Druck die Richtung der Verrückung besitzt. Wir werden finden, dass es drei solcher Richtungen giebt, und diese sind die drei möglichen Richtungen, in denen sich die Erschütterungen ungestört fortpflanzen.

Bilden wir nach den in § 41 für Krystalle aufgestellten Gleichungen die Componenten der Molekulardrücke, so finden wir

$$\begin{aligned}
 -X_x &= \left\{ AMp + cNq + bPr \right\} \frac{d\varphi}{ds} \quad \cdot \cdot \\
 -Y_y &= \left\{ cMp + BNq + aPr \right\} \frac{d\varphi}{ds} \\
 -Z_z &= \left\{ bMp + aNq + CPr \right\} \frac{d\varphi}{ds} \quad \cdot \quad (3.) \\
 -X_y &= -Y_x = c \left\{ Mq + Np \right\} \frac{d\varphi}{ds} \\
 -Y_z &= -Z_y = a \left\{ Nr + Pq \right\} \frac{d\varphi}{ds} \\
 -Z_x &= -X_z = b \left\{ Pp + Mr \right\} \frac{d\varphi}{ds} .
 \end{aligned}$$

Den Molekulardruck gegen eine Ebene s nennen wir D und die Cosinus seiner Richtung gegen die Coordinatenaxen μ , ν , ϖ . Dann haben wir für seine Componenten folgende Ausdrücke nach dem Theorem C

$$\begin{aligned}
 D\mu &= \left\{ (AMp + cNq + bPr)p + c(Mq + Np)q + b(Mr + Pp)r \right\} \frac{d\varphi}{ds} \\
 D\nu &= \left\{ c(Mq + Np)p + (cMp + BNq + aPr)q + a(Nr + Pq)r \right\} \frac{d\varphi}{ds} \quad (4.) \\
 D\varpi &= \left\{ b(Mr + Pp)p + a(Nr + Pq)q + (bMp + aNq + CPr)r \right\} \frac{d\varphi}{ds},
 \end{aligned}$$

oder es ist

$$\begin{aligned}
 D\mu &= \left\{ M(Ap^2 + cq^2 + br^2) + 2Ncpq + 2Pbrp \right\} \frac{d\varphi}{ds} \\
 D\nu &= \left\{ 2Mcpq + N(cp^2 + Bq^2 + ar^2) + 2aPrq \right\} \frac{d\varphi}{ds} \quad (5.) \\
 D\varpi &= \left\{ 2Mbrp + 2Narq + P(bp^2 + aq^2 + Cr^2) \right\} \frac{d\varphi}{ds} .
 \end{aligned}$$

Um nun die Drücke zu finden, deren Richtung mit der Richtung der Verrückung zusammenfällt, haben wir zu setzen

$$\mu = M, \quad \nu = N, \quad \varpi = P. \quad (6.)$$

Durch Elimination von M , N , P erhalten wir aus den Gleichungen (5.) eine cubische Gleichung zur Bestimmung dieser Drücke. Es giebt also deren drei. Wir haben aber nicht nöthig, diese Gleichung zu bilden; denn die Gleichungen (5.) sind identisch mit den Gleichungen (6) § 95, wenn für die drei Richtungen der Drücke, die durch die Gleichg. (6.) bestimmt sind,

$$D = \varepsilon \omega^2 \frac{d\varphi}{ds}. \quad (7.)$$

ist. Nun werden durch die Gleichungen (6.) § 95 die Richtungen der Axen des Fortpflanzungsellipsoides bestimmt, es fallen also die gesuchten drei Richtungen mit diesen Axen zusammen, und wir erkennen, dass den Richtungen der drei Axen des Fortpflanzungsellipsoides die statische Bedeutung zukommt, dass in ihnen Druck und Verrückung gleich gerichtet sind, so dass durch den Druck ein jedes Theilchen in derselben Richtung, in welcher es aus seiner Gleichgewichtslage entfernt worden ist, in diese Lage zurückgeführt wird.

§ 106. Beziehung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit zum Elasticitätscoefficienten.

Aus der Gleichung (7.) ergibt sich der neue Ausdruck für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{\varepsilon \frac{d\varphi}{ds}}}.$$

Es ist aber nach § 88 das Verhältniss

$$D : \frac{d\varphi}{ds} = E$$

der Elasticitätscoefficient des krystallinischen Mediums für die betrachtete Richtung der Verrückung. Demnach erhalten wir für die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der drei entstehenden Wellenpaare die Werthe

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{E_1}{\varepsilon}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{E_2}{\varepsilon}}, \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{E_3}{\varepsilon}}, \quad (8.)$$

wo E_1 , E_2 , E_3 die Elasticitätscoefficienten sind, welche den drei auf einander rechtwinkligen Richtungen der Axen des Fortpflanzungsellipsoides angehören.

Durch diesen Satz ist der Fall der Wellenbewegung in krystallinischen Medien zurückgeführt auf den in unkrystallinischen, für welchen der analoge Satz gilt.

§ 107. Relationen zwischen den Constanten beider verschiedenen Classen von Medien.

Von den vorstehend entwickelten Formeln werden wir jetzt Anwendungen auf die Theorie des Lichts machen und nachweisen, wie die Fresnel'schen Gesetze der Doppelbrechung und der Polarisation des Lichts in Krystallen als specielle Fälle in den bis jetzt erhaltenen Resultaten enthalten sind. Vorher führen wir die in der Natur vorkommenden Fälle auf, auf welche unsere Formeln Anwendung finden, um ähnlich wie im zwölften Abschnitt festzustellen, welche Beziehungen zwischen den Constanten der jetzt zu Grunde gelegten Theorie Poisson's für die verschiedenen Classen der in der Natur vorkommenden Medien anzunehmen sind.

In dem ersten Falle eines unkrystallinischen Mediums finden folgende Relationen zwischen den Elasticitätsconstanten statt

$$A = B = C = 3a = 3b = 3c, \quad (1.)$$

wie bereits in § 40 angegeben wurde.

Von diesem Falle unterscheidet sich der Fall eines krystallinischen Mediums dadurch, dass dies letztere durch nur ein System von drei auf einander rechtwinkligen Ebenen symmetrisch theilbar ist, während die unkrystallinischen Medien durch jedes beliebige System von senkrechten Ebenen symmetrisch getheilt werden.

Ist diese Symmetrie in Beziehung auf drei rechtwinklige Ebenen nach allen drei Richtungen dieselbe, so haben wir den zweiten Fall, den der regulären Krystalle. Bei diesen ist demnach

$$\begin{aligned} A &= B = C \\ a &= b = c. \end{aligned} \quad (2.)$$

Wir können aber nicht mehr, wie bei unkrystallinischen Körpern Relationen zwischen A und a angeben.

Der dritte Fall umfasst 1) alle die krystallinischen Substanzen, deren Grundform das viergliedrige Octaeder bildet. Die Krystallformen dieser Classe haben eine Symmetrie, welche in Beziehung auf zwei auf einander rechtwinklige Ebenen unterschiedslos ist, nicht aber in Bezug auf die dritte Ebene, die quadratische Basis des Octaeders. Für diese Krystalle ist also

$$A = B, \quad a = b. \quad (3.)$$

Lassen wir diese Relationen eintreten, so erhalten wir — um auch den optischen Kunstaussdruck sogleich einzuführen — die einaxigen Krystalle.

Dieselben optischen Relationen erhalten wir 2) bei den sechsgliedrigen und bei den rhomboëdrischen Krystallen. Dass auch diese Krystalle zu den optisch einaxigen Krystallen gehören müssen, erhellt aus einer Betrachtung, welche wir an die ursprüngliche Form der Gleichungen für die Druckcomponenten anknüpfen. Nehmen wir nämlich mit den in den Gleichungen (3.) § 39 enthaltenen Molekularsummen

$$\sum ma^4\psi(\rho), \quad \sum ma^2b^2\psi(\rho) \text{ u. s. f.},$$

ähnlich, wie es in § 83 und 84 geschehen ist, eine Drehung des Coordinatensystems der dort mit a, b, c bezeichneten Grössen um 60° oder 120° vor, so dürfen die Summen ihren Werth nicht ändern. Daraus folgt für die jetzt besprochenen Constanten ebenfalls die Gültigkeit der obigen Relationen

$$A = B, \quad a = b$$

für sechsgliedrige und rhomboëdrische Krystalle.

Der vierte Fall endlich ist der allgemeine der optisch zwei-axigen Krystalle. Bei ihm können aus allgemeinen theoretischen Gründen keine Relationen zwischen den Constanten entwickelt werden.

§ 108. Wellenbewegungen in unkrystallinischen Medien.

Nehmen wir zunächst den Fall eines unkrystallinischen Mediums an, führen also die Relationen (1.) § 107 ein, so erhalten wir nach Gleichg. (1.) § 99 die Formel des Fortpflanzungsellipsoides für diesen Fall

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2(px + qy + rz)^2 = \frac{1}{a}. \quad (1.)$$

Durch Einführung eines neuen rechtwinkligen Coordinatensystems, dessen eine Axe ξ die Richtung von ρ hat, also mit x, y, z die Cosinus p, q, r bildet, dessen andere Axen η und ζ wir aber unbestimmt lassen, erhalten wir statt dieser Gleichung

$$3a\xi^2 + a(\eta^2 + \zeta^2) = 1. \quad (2.)$$

In dieser Form der Gleichung übersieht man, dass das Ellipsoid ein Rotationsellipsoid ist, dessen Rotationsaxe die Richtung der Normale der anfänglichen Erschütterungsebene hat. Die halbe Axe ist

$$\frac{1}{\sqrt{3a}},$$

während die halbe Axe senkrecht gegen die Rotationsaxe

$$\frac{1}{\sqrt{a}}$$

ist. Demnach ist der Werth der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der einen Welle, deren Bewegung die Richtung von ρ , d. h. der Rotationsaxe des Ellipsoides hat,

$$\omega = \sqrt{\frac{3a}{\varepsilon}}. \quad (3.)$$

In dieser Welle fällt die Richtung der Bewegung zusammen mit der Richtung der Fortpflanzung der Welle; sie ist demnach eine longitudinale Welle.

In den beiden anderen Wellen geschieht die Bewegung parallel der Erschütterungsebene, sie sind also transversale Wellen, doch bleibt die Richtung der Bewegung in jeder einzelnen unbestimmt. Dies beruht darauf, dass sich diese beiden Wellen nicht trennen, da sie die gleiche Fortpflanzungsgeschwindigkeit

$$\omega = \sqrt{\frac{a}{\varepsilon}} \quad (4.)$$

besitzen. Sie setzen sich daher zu einer einzigen transversalen Welle zusammen.

Aus einer ursprünglichen Erschütterung einer Ebene in einem unkrystallinischen Medium entstehen also jedesmal zwei Wellen, eine longitudinale und eine transversale, die sich mit verschiedener Geschwindigkeit in der Richtung der Normale der ursprünglichen Erschütterungsebene fortpflanzen; und zwar ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen Welle $\sqrt{3}$ mal grösser, als die der transversalen.

Vor Fresnel kannte man nur longitudinale Wellen; seine Behauptung, dass auch transversale Wellen bestehen können, erregte Widerspruch und veranlasste einen weiten Kreis von Untersuchungen. Poisson, welcher Anfangs Fresnel am heftigsten angriff, war der Erste, der zu dem Resultate gelangte, dass nothwendig auch transversale Wellen entstehen müssen.

§ 109. Fresnel'sche Gesetze. Welle in der Richtung einer Hauptaxe.

Um nun auch zu untersuchen, inwiefern unsere Formeln die Erklärung die Gesetze der doppelten Strahlenbrechung in Krystallen enthalten, betrachten wir zunächst den einfachsten Fall, in welchem

die Wellenebene senkrecht zu einer der drei Hauptaxen durch das Medium hindurchgeht, so dass ihre Normale mit einer Axe zusammenfällt. Es handelt sich also um folgende drei Möglichkeiten:

die Wellennormale liegt	es ist also zu setzen	
in der z -Axe,	$p = 0, q = 0, r = 1$	
„ „ y -Axe,	$p = 0, q = 1, r = 0$	(1.)
„ „ x -Axe,	$p = 1, q = 0, r = 0.$	

Die Gleichung des Ellipsoides, dessen reciproke Halbaxen die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten bestimmen, wird dadurch nach Gleichung (1.) § 99 in diesen drei Fällen

$$\begin{aligned}
 bx^2 + ay^2 + Cz^2 &= 1 \\
 cx^2 + By^2 + az^2 &= 1 \\
 Ax^2 + cy^2 + bz^2 &= 1.
 \end{aligned}
 \tag{2.}$$

Die Axen des Ellipsoids, folglich auch die Richtungen der Bewegung wie der Fortpflanzung, fallen mit den Krystallaxen zusammen. Wenn wir die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer Welle durch den grossen Buchstaben, welcher der Richtung der Bewegung in der Welle entspricht, bezeichnen und ihm als Index den kleinen Buchstaben anhängen, welcher die Richtung der Fortpflanzung bezeichnet, so sind nach den Gleichungen (6.) § 95 die Werthe von ω

$$\begin{aligned}
 A_c &= \sqrt{\frac{b}{\varepsilon}}; & B_c &= \sqrt{\frac{a}{\varepsilon}}; & C_c &= \sqrt{\frac{C}{\varepsilon}} \\
 A_b &= \sqrt{\frac{c}{\varepsilon}}; & B_b &= \sqrt{\frac{B}{\varepsilon}}; & C_b &= \sqrt{\frac{a}{\varepsilon}} \\
 A_a &= \sqrt{\frac{A}{\varepsilon}}; & B_a &= \sqrt{\frac{c}{\varepsilon}}; & C_a &= \sqrt{\frac{b}{\varepsilon}}.
 \end{aligned}
 \tag{3.}$$

Diejenigen Wellen, die sich mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit A_a, B_b oder C_c fortbewegen, sind, der Definition dieser Grössen nach, longitudinale Wellen. Zwischen den transversalen, die wir allein als Lichtwellen ansehen können, bestehen folgende Relationen

$$\begin{aligned}
 A_b &= B_a = \sqrt{\frac{c}{\varepsilon}} \\
 B_c &= C_b = \sqrt{\frac{a}{\varepsilon}} \\
 C_a &= A_c = \sqrt{\frac{b}{\varepsilon}},
 \end{aligned}
 \tag{4.}$$

in welchen ein Gesetz liegt, das sich sehr einfach aussprechen lässt: Zwei Wellen gleicher Fortpflanzungsgeschwindigkeit haben

die Ebene gemeinschaftlich, welche durch die Richtung der Wellennormale und die Richtung der Bewegung in der Welle gelegt ist. Oder mit anderen Worten: die Wellenebenen behalten so lange gleiche Fortpflanzungsgeschwindigkeit, als die durch die Richtung der Bewegung und die der Fortpflanzung gelegte Ebene dieselbe bleibt. Dieses Gesetz ist einstweilen erst für jene besonderen Fälle bewiesen, bleibt aber, wie wir in der Folge sehen werden, richtig, so lange die Wellennormale in einem Hauptschnitt liegt.

Dieses Gesetz reicht hin, eine wichtige Folgerung zu ziehen. Wenn die durch unsere Formeln bestimmten Wellenbewegungen die Lichtbewegungen darstellen, so müssen sie auch das Hauptgesetz der doppelten Strahlenbrechung beobachten. Dieses Fundamentalgesetz ist: Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer Welle, deren Normale in einem Hauptschnitt der Fresnel'schen Elasticitätsoberfläche liegt, bleibt ungeändert, so lange ihre Polarisationssebene dieselbe bleibt. Wir brauchen daher, um die vollständige Identität der betrachteten, transversalen Wellen mit den Lichtwellen herzustellen, nur zu sagen: Die Polarisationssebene ist die durch die Richtung der Fortpflanzung der Welle und die der Bewegung in derselben gelegte Ebene¹⁾.

§ 110. Fortsetzung. Wellennormale in einem Hauptschnitt.

Wir untersuchen, ob die Uebereinstimmung, die wir auf Grund dieser Definition erhielten, auch noch aufrecht erhalten wird für eine Wellenebene, die sich in einer beliebigen, jedoch gegen eine der Axen des krystallinischen Mediums senkrechten Richtung fortpflanzt. Es wird also angenommen, dass die Normale der Wellenebene in einem der Hauptschnitte liege, oder dass

$$\text{entweder } p = 0 \quad \text{oder } q = 0 \quad \text{oder } r = 0$$

sei. Wenn auch in diesem Falle Uebereinstimmung zwischen den transversalen Wellen der Theorie und den beobachteten Lichtwellen stattfinden soll, so müssen sich folgende Thatsachen²⁾ aus unseren Gleichungen ableiten lassen. Erstens: es giebt immer zwei Fortpflanzungsgeschwindigkeiten, mit denen sich die Wellen fortpflanzen

1) Diese Neumann'sche Definition der Polarisationssebene widerspricht der weit verbreiteten Ansicht Fresnel's. Vergl. § 117 und 123.

2) Vergl. Neumann's Vorlesungen über theoretische Optik, herausgegeben von E. Dorn. Leipzig 1885. Vorlesung XI.

können. Die eine derselben ist constant, welche Lage auch die Wellenebene gegen die Axen des gegen sie senkrecht gelegenen Hauptschnitts habe, d. h. welche Werthe auch q und r haben mögen, wenn beispielsweise $p = 0$ ist. Die andere Fortpflanzungsgeschwindigkeit variirt aber mit der Lage der Wellenebene, und zwar lässt sie sich darstellen durch die reciproken Radien einer Ellipse, deren Axen wir leicht aus den im vorigen § behandelten besonderen Fällen angeben können. Bezeichnen wir die Winkel der Wellennormale gegen die Axe der

$$\begin{array}{ccc} x, & y, & z \\ \text{mit} & \alpha, & \beta, & \gamma, \end{array}$$

so ist in den drei oben bezeichneten Fällen die Gleichung dieser Ellipse, wenn ρ ihr Radiusvector ist,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho^2} &= \frac{c}{\varepsilon} \cos^2 \beta + \frac{b}{\varepsilon} \cos^2 \gamma \\ \frac{1}{\rho^2} &= \frac{c}{\varepsilon} \cos^2 \alpha + \frac{a}{\varepsilon} \cos^2 \gamma \\ \frac{1}{\rho^2} &= \frac{b}{\varepsilon} \cos^2 \alpha + \frac{a}{\varepsilon} \cos^2 \beta. \end{aligned} \quad (1.)$$

Zweitens muss sich ergeben, dass die Polarisationssebene der sich mit constanter Geschwindigkeit fortpflanzenden Welle mit demjenigen Hauptschnitt zusammenfällt, welcher die Wellennormale enthält; dass dagegen die mit variabler Geschwindigkeit fortschreitende Welle immer senkrecht gegen die Polarisationssebene jener polarisirt ist. Oder, was für uns dasselbe sagt, es muss die Welle constanter Fortpflanzungsgeschwindigkeit ihre Schwingungen in der Ebene desjenigen Hauptschnitts ausführen, in welchem die Wellennormale liegt, die andere Welle immer senkrecht gegen diese Ebene. Wenn wir diese Resultate aus unseren Formeln erhalten, so haben wir eine vollständige Identität der theoretischen und der empirischen Gesetze.

Zur Prüfung wenden wir die cubische Gleichung (7.) § 95 auf den Fall $p = 0$ an, für welchen wir

$$(cq^2 + br^2 - \varepsilon\omega^2) \{ (Bq^2 + ar^2 - \varepsilon\omega^2)(aq^2 + Cr^2 - \varepsilon\omega^2) - 4a^2q^2r^2 \} = 0$$

erhalten, also eine Gleichung, welche sich in zwei andere, eine lineare und eine quadratische

$$\begin{aligned} 0 &= -\varepsilon\omega^2 + cq^2 + br^2 \\ 0 &= (Bq^2 + ar^2 - \varepsilon\omega^2)(aq^2 + Cr^2 - \varepsilon\omega^2) - 4a^2q^2r^2 \end{aligned} \quad (2.)$$

auföst. Die erste dieser Gleichungen ist identisch mit der ersten Glchg. (1.), wenn wir setzen

$$\omega = \frac{1}{\rho},$$

denn es ist $\cos \beta = q$, $\cos \gamma = r$. Die erste Glchg. (2.) stellt also in der That die eine der beiden entstehenden transversalen Wellen dar, und zwar die mit variabler Fortpflanzungsgeschwindigkeit sich bewegende. Dass die Welle wirklich transversal ist, übersieht man leicht, wenn man den Werth von $\varepsilon \omega^2$ in die Gleichungen (6.) § 95 einsetzt; man findet dann $N = 0$, $P = 0$, und $M = 1$; die Bewegung geschieht also in der Richtung der x -Axe oder senkrecht zur ys -Ebene, in welcher die Normale liegt, wie es angegeben ist.

Die zweite Gleichung (2.) enthält möglicherweise die Erklärung der zweiten transversalen und die longitudinale Welle. Wir können dieselbe aber nicht mehr allgemein in zwei Factoren so sondern, dass wir dadurch die beiden Wellen getrennt erhielten. Wir erinnern uns aber, dass wir über das Verhältniss der sechs Constanten A, B, C, a, b, c nichts vorausgesetzt haben (§ 107.) Wir können uns daher die Frage stellen, ob es nicht durch Einführung von gewissen Relationen möglich sei, diese Gleichung in zwei Factoren zu zerlegen und die Wellen zu sondern. Wir setzen daher:

$$(\mu q^2 + \nu r^2 - \varepsilon \omega^2) (\mu_1 q^2 + \nu_1 r^2 - \varepsilon \omega^2) = 0 \quad (3.)$$

und bestimmen hierin die Constanten μ, μ_1, ν, ν_1 so, dass sich diese Gleichung in die zweite Glchg. (2.) verwandelt. Dieses geschieht, wenn

$$\begin{aligned} \mu \mu_1 &= Ba, & \nu \nu_1 &= Ca \\ \mu \nu_1 + \mu_1 \nu &= BC - 3a^2 \\ \mu + \mu_1 &= B + a, & \nu + \nu_1 &= C + a \end{aligned} \quad (4.)$$

ist. Aus der ersten und vierten, zweiten und fünften dieser Gleichungen findet man die Auflösung

$$\mu = B; \mu_1 = a, \quad \nu = C; \nu_1 = a. \quad (5.)$$

Setzt man diese Werthe endlich in die dritte Glchg. (4.), so erhält man als nothwendige Relation unter den Constanten des Mediums die Formel

$$(B - a)(C - a) = 4a^2, \quad (6.)$$

gegen deren Zulässigkeit nichts einzuwenden ist. Denn sie wird für ein unkrystallinisches Medium, für welches

$$B = C = 3a$$

ist, von selbst erfüllt. Sie gilt also für ein Medium, in welchem

keine oder unendlich kleine Unterschiede der Richtungen bestehen und wird für ein Medium, in welchem die Axenunterschiede klein sind, mindestens als angenähert richtige Formel gültig bleiben.

Durch Einführung der gefundenen Werthe (5.) in die Gl. (3.) erhält man statt der zweiten Gl. (2.) die neue

$$0 = (a - \varepsilon\omega^2)(Bq^2 + Cr^2 - \varepsilon\omega^2), \quad (7.)$$

welche die Gültigkeit der Relation (6.) voraussetzt. Diese Gleichung giebt uns zwei Wellen, deren Fortpflanzungsgeschwindigkeiten durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} \varepsilon\omega^2 &= a \\ \varepsilon\omega^2 &= Bq^2 + Cr^2 \end{aligned} \quad (8.)$$

bestimmt sind. Hierin liegt die wichtige Folgerung, dass die beiden Wellen sich auch räumlich trennen.

Die Schwingungsrichtung in diesen Wellen ist nach den Gleichungen (6.) § 95 zu beurtheilen, indem man in dieselben einen der beiden Werthe von ω einführt, während $p = 0$ gemacht wird. Für beide Wellen erhält man auf diese Weise

$$M = 0,$$

die Bewegung geschieht folglich in der yz -Ebene. In dieser Ebene schwingen beide rechtwinklig gegen einander in Richtungen, welche, wenn

$$\varepsilon\omega^2 = a \qquad \varepsilon\omega^2 = Bq^2 + Cr^2$$

ist, durch

$$0 = q(B - a)N + 2arP \qquad 0 = r(C - a)N - 2aqP$$

oder durch die hiermit nach Gleichung (6.) identische Formel

$$0 = 2aqN + r(C - a)P \qquad 0 = 2arN - q(B - a)P$$

und durch

$$1 = N^2 + P^2$$

bestimmt werden. Die Auflösung dieser Formeln unterlassen wir hier, da wir im folgenden Paragraphen dieselbe allgemeiner geben werden. Wir beschränken uns für jetzt auf die Bemerkung, dass, wenn eine der Wellen longitudinal ist, die andere transversal sein muss, da beide Schwingungsrichtungen rechtwinklig gegen einander gerichtet sind. Dass aber dieses Verhältniss wirklich eintritt, übersieht man für den Grenzfall eines unkrystallinischen Mediums, in welchem $B = C = 3a$ wird, leicht, da wir

$$0 = qN + rP \quad \text{und} \quad N = q, \quad P = r$$

für die erste und zweite Welle erhalten. Es ist also die Welle, welche sich mit constanter Geschwindigkeit fortpflanzt, transversal, die andere longitudinal.

Somit ist nachgewiesen, dass die beiden entstandenen transversalen Wellen dieselben Gesetze befolgen, wie sie an den Lichtwellen durch die Erfahrung gefunden sind. In jeder Richtung pflanzen sich zweierlei Lichtwellen, eine mit constanter, die andere mit variabler Geschwindigkeit fort. Die erstere ist polarisirt nach der Ebene des Hauptschnitts, die andere senkrecht gegen denselben.

Wendet man dieselbe Betrachtung auf die beiden anderen Hauptebenen an, also auf die Fälle $q = 0$ und $r = 0$, so kommt man jedesmal zu den entsprechenden Resultaten, wenn noch zu der Relation (6.) zwei andere Bedingungsgleichungen hinzugefügt werden, so dass wir erhalten

$$\begin{aligned}(C - a) (B - a) &= 4a^2 \\ (A - b) (C - b) &= 4b^2 \\ (B - c) (A - c) &= 4c^2.\end{aligned}\tag{9.}$$

Durch diese drei Gleichungen lässt sich die Zahl der Constanten von sechs auf drei reduciren. Man erhält unter Vernachlässigung der Quadrate der Differenzen von A, B, C zunächst

$$6a = B + C \quad 6b = C + A \quad 6c = A + B$$

und daraus in gleichem Grade der Annäherung, d. h. mit Vernachlässigung der Quadrate der Differenzen von a, b, c ,

$$\begin{aligned}A &= 3(b + c - a) \\ B &= 3(a + c - b) \\ C &= 3(a + b - c).\end{aligned}\tag{10.}$$

Die Differenzen der Grössen a, b, c , deren Quadrate hier fortgelassen wurden, sind in der That kleine Grössen, da sie von den Differenzen der Brechungsverhältnisse der beiden Strahlen abhängen. Ihre Quadrate dürfen wir daher hier, wie in anderen optischen Untersuchungen vernachlässigen¹⁾.

§ 111. Allgemeiner Fall. Gesetze der Fortpflanzung.

Bei der Untersuchung des allgemeinen Falles, der wir uns nun zuwenden, gehen wir wieder aus von der cubischen Gl. (7.) § 95.

1) Vergl. Neumann, Vorlesungen über theoretische Optik.

Durch Einführung der Relationen (9.) § 110 sondert sich dieselbe in folgende zwei Factoren

$$\varepsilon \omega^2 - (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) = 0 \quad (1.)$$

$$(\varepsilon \omega^2)^2 - \{(b+c)p^2 + (a+c)q^2 + (a+b)r^2\} \varepsilon \omega^2 + (bc p^2 + ca q^2 + ab r^2) = 0. \quad (2.)$$

Die erste dieser Gleichungen bestimmt, wie wir noch beweisen werden, eine longitudinale Welle; die Fortpflanzungsgeschwindigkeit derselben hängt nur ab von den mit grossen Buchstaben bezeichneten Constanten. Die quadratische Gleichung, welche wir auch in der Form

$$0 = \frac{p^2}{a - \varepsilon \omega^2} + \frac{q^2}{b - \varepsilon \omega^2} + \frac{r^2}{c - \varepsilon \omega^2} \quad (3.)$$

schreiben können, enthält demnach die Erklärung von zwei transversalen Wellen.

In dieser abgeänderten Gestalt fällt unsere Gleichung mit einer anderen vollständig zusammen, deren wesentlicher Inhalt die folgende geometrische Construction bildet, durch welche Fresnel¹⁾ das von ihm gefundene Gesetz der doppelten Strahlenbrechung darstellte. Wir construiren eine Oberfläche, deren Radiusvector ρ durch die Gleichung

$$\varepsilon \rho^2 = a \cos^2 \alpha + b \cos^2 \beta + c \cos^2 \gamma \quad (4.)$$

bestimmt wird; in derselben haben ε , a , b , c dieselbe Bedeutung wie oben, sie sind die Dichtigkeit und die Elasticitätsconstanten des Mediums; α , β , γ sind die Winkel, welche die Richtung von ρ mit den krystallographischen Axen bildet. Durch den Mittelpunkt dieses Fresnel'schen Ovaloids legen wir eine der Wellenebene parallele Ebene

$$0 = px + qy + rz,$$

welche die Oberfläche in einem Oval schneidet; dasselbe bildet eine Curve vierter Ordnung, welche, wie eine Ellipse, von zwei auf einander senkrechten Axen, einem grössten und einem kleinsten Durchmesser, symmetrisch getheilt wird. Die Halbaxen dieses Ovals sind nach Fresnel's Entdeckung gleich den Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der beiden Wellen, welche sich in der auf dem ebenen Schnitt senkrechten Richtung durch das Medium fortpflanzen können.

Um die Werthe dieser Halbaxen zu finden, ziehen wir in dem ebenen Schnitt einen Radius; derselbe sei durch die Gleichungen

1) Fresnel, sur la double réfraction. Mém. de l'Acad. de Paris T. 7; Oeuvres T. 2; Pogg. Ann. Bd. 23. Vergl. auch Neumann's Vorlesungen über theoretische Optik, herausgegeben von E. Dorn. 1885. S. 182.

$$x = pz \quad y = qz$$

bestimmt, in welchen die constanten Coefficienten der Bedingung

$$0 = pp + qq + r \quad (5.)$$

genügen müssen. Da für die Richtung dieses Radius die Gleichungen

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{x}{\rho} = \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}} \\ \cos \beta &= \frac{y}{\rho} = \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}} \\ \cos \gamma &= \frac{z}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}} \end{aligned} \quad (6.)$$

gelten, so ist nach der Formel (4.)

$$0 = (a - \varepsilon \rho^2) p^2 + (b - \varepsilon \rho^2) q^2 + (c - \varepsilon \rho^2), \quad (7.)$$

wodurch ρ zunächst als Function von p und q , und weiter unter Rücksicht auf (5.) als Function von p allein bestimmt ist.

Wenn nun der Radius ρ in eine Hauptaxe fallen oder, was dasselbe ist, ein Maximum oder Minimum werden soll, so tritt zu den beiden Gleichungen (5.) und (7.) noch die Bedingung

$$0 = \frac{d\rho}{dp} = \frac{\partial \rho}{\partial p} + \frac{\partial \rho}{\partial q} \frac{dq}{dp}$$

oder nach (5.)

$$0 = q \frac{\partial \rho}{\partial p} - p \frac{\partial \rho}{\partial q}$$

hinzu, welche nach (7.) die Gestalt hat

$$0 = (a - \varepsilon \rho^2) qp - (b - \varepsilon \rho^2) pq. \quad (8.)$$

Um ρ zu finden, sind aus den drei Gleichungen (5.), (7.), (8.) p und q zu eliminiren. Wir erhalten aus (7.) und (8.)

$$\begin{aligned} 0 &= (a - \varepsilon \rho^2) (pp + qq) p + (c - \varepsilon \rho^2) p \\ 0 &= (b - \varepsilon \rho^2) (qq + pp) q + (c - \varepsilon \rho^2) q \end{aligned}$$

oder nach (5.)

$$\begin{aligned} (a - \varepsilon \rho^2) rp &= (c - \varepsilon \rho^2) p \\ (b - \varepsilon \rho^2) rq &= (c - \varepsilon \rho^2) q \end{aligned} \quad (9.)$$

und, wenn wir die hierdurch bestimmten Werthe von p und q in (5.) einsetzen, zur Bestimmung von ρ die Formel

$$0 = \frac{p^2}{a - \varepsilon \rho^2} + \frac{q^2}{b - \varepsilon \rho^2} + \frac{r^2}{c - \varepsilon \rho^2}, \quad (10.)$$

welche durch ihre Uebereinstimmung mit der Gleichung (3.) lehrt, dass der von unserer Theorie gelieferte Werth ω der Fortpflanzungsgeschwindigkeit gleich dem von Fresnel gefundenen Werthe ρ der Ovalaxe ist.

Wenn wir somit gezeigt haben, dass das Gesetz der Fortpflanzung, wie es Fresnel aufgestellt hat, in unsern Formeln enthalten ist, so ist damit erreicht, dass dieses Gesetz begriffen, rational verstanden werden kann. Gefunden konnte es nur auf dem Wege der Erfahrung werden, nicht auf dem der Theorie, da man den Zusammenhang der Constanten der Elasticität nicht ahnen konnte. Was die Theorie leisten konnte und geleistet hat, ist, dass wir nachgewiesen haben, dass die Erfahrung in keinem Widerspruch mit den Grundprincipien der Mechanik steht.

§ 112. Fortsetzung. Gesetze der Polarisation.

Damit ist unsere Aufgabe noch nicht beendet. Das Fresnel'sche Gesetz sagt ferner: Die grössten und kleinsten Radien des Ovalschnitts bestimmen zugleich die Lage der Polarisationsebene. Dieselbe steht immer senkrecht gegen die Ovalaxe, welche die Fortpflanzungsgeschwindigkeit bestimmt, schneidet also das Oval in der andern Axe. Es fragt sich, ob auch dieser zweite wesentliche Theil in unseren Formeln enthalten ist, ob also gemäss unserer in § 109 gegebenen Definition der Polarisationsebene die Richtung der Bewegung in der Welle senkrecht gefunden wird gegen die Richtung derjenigen Axe des Ovalschnitts, durch deren Länge die Fortpflanzungsgeschwindigkeit bestimmt wird.

Aus den Gleichungen (6.) und (9.) § 111 erhalten wir für die Cosinus, welche eine Ovalaxe ρ mit den Coordinatenaxen bildet, die Werthe

$$\cos \alpha = \frac{gp}{a - \varepsilon \rho^2} \quad \cos \beta = \frac{gq}{b - \varepsilon \rho^2} \quad \cos \gamma = \frac{gr}{c - \varepsilon \rho^2}, \quad (1.)$$

wenn

$$1 = g^2 \left\{ \left(\frac{p}{a - \varepsilon \rho^2} \right)^2 + \left(\frac{q}{b - \varepsilon \rho^2} \right)^2 + \left(\frac{r}{c - \varepsilon \rho^2} \right)^2 \right\}$$

gesetzt wird. Mittelst dieser Werthe ist leicht nachzuweisen, dass beide Ovalaxen ρ und ρ' auf einander senkrecht stehen; denn, da beide Werthe der Gleichung (10.) § 111 genügen, so ist

$$0 = \frac{p^2}{a - \varepsilon \rho^2} - \frac{p'^2}{a - \varepsilon \rho'^2} + \frac{q^2}{b - \varepsilon \rho^2} - \frac{q'^2}{b - \varepsilon \rho'^2} + \frac{r^2}{c - \varepsilon \rho^2} - \frac{r'^2}{c - \varepsilon \rho'^2}$$

oder auch

$$0 = \frac{p^2}{(a - \varepsilon \varrho^2)(a - \varepsilon \varrho'^2)} + \frac{q^2}{(b - \varepsilon \varrho^2)(b - \varepsilon \varrho'^2)} + \frac{r^2}{(c - \varepsilon \varrho^2)(c - \varepsilon \varrho'^2)}. \quad (2.)$$

Demnach können wir die Richtungswinkel α' , β' , γ' der zweiten Ovalaxe ϱ' durch die Gleichung

$$0 = \frac{p \cos \alpha'}{a - \varepsilon \varrho'^2} + \frac{q \cos \beta'}{b - \varepsilon \varrho'^2} + \frac{r \cos \gamma'}{c - \varepsilon \varrho'^2} \quad (3.)$$

in Verbindung mit

$$\begin{aligned} 0 &= p \cos \alpha' + q \cos \beta' + r \cos \gamma' \\ 1 &= \cos^2 \alpha' + \cos^2 \beta' + \cos^2 \gamma' \end{aligned} \quad (4.)$$

bestimmen; aus diesen finden wir durch Elimination

$$\begin{aligned} 0 &= p \frac{a-c}{a-\varepsilon\varrho^2} \cos \alpha' + q \frac{b-c}{b-\varepsilon\varrho^2} \cos \beta' \\ 0 &= p \frac{a-b}{a-\varepsilon\varrho^2} \cos \alpha' + r \frac{c-b}{c-\varepsilon\varrho^2} \cos \gamma'. \end{aligned} \quad (5.)$$

Nun aber lässt sich andererseits durch eine nicht schwierige Rechnung beweisen, dass, wenn wir aus den zur Bestimmung der Schwingungsrichtung dienenden Gleichungen (6.) § 95 einen der drei Richtungs-cosinus M , N , P eliminiren, Relationen zwischen den beiden übrig bleibenden gefunden werden, welche bei Vernachlässigung der Differenzen $a - b$, $b - c$, $c - a$ gegen a , b , c selber dieselbe Form

$$\begin{aligned} 0 &= p \frac{a-c}{a-\varepsilon\varrho^2} M + q \frac{b-c}{b-\varepsilon\varrho^2} N \\ 0 &= p \frac{a-b}{a-\varepsilon\varrho^2} M + r \frac{b-c}{b-\varepsilon\varrho^2} P \end{aligned}$$

annehmen¹⁾. Somit erhalten wir

1) Neumann, Theorie der doppelten Strahlenbrechung. Poggendorff's Annalen der Physik 1832, Band 25, S. 447.

Ein ähnliches Verfahren ist folgendes: Aus der Gleichung (3.) § 112 und der Gleichung (10.) § 111 bilden wir

$$\begin{aligned} -p \frac{(b - \varepsilon \varrho^2)(c - \varepsilon \varrho^2)}{a - \varepsilon \varrho^2} \cos \alpha' &= q(c - \varepsilon \varrho^2) \cos \beta' + r(b - \varepsilon \varrho^2) \cos \gamma' \\ -p^2 \frac{(b - \varepsilon \varrho^2)(c - \varepsilon \varrho^2)}{a - \varepsilon \varrho^2} &= q^2(c - \varepsilon \varrho^2) + r^2(b - \varepsilon \varrho^2) \end{aligned}$$

und finden hieraus

$$(q^2(c - \varepsilon \varrho^2) + r^2(b - \varepsilon \varrho^2)) \cos \alpha' = pq(c - \varepsilon \varrho^2) \cos \beta' + pr(b - \varepsilon \varrho^2) \cos \gamma'.$$

Wenn wir hierzu die erste Gleichung (4.) in der Form

$$-p^2 \varepsilon \varrho^2 \cos \alpha' = pq \varepsilon \varrho^2 \cos \beta' + pr \varepsilon \varrho^2 \cos \gamma$$

$$M = \cos \alpha', \quad N = \cos \beta', \quad P = \cos \gamma'$$

und schliessen daraus, dass, bis auf Grössen von der Ordnung der Differenzen der Elasticitätsconstanten genau, die Richtung der Bewegung in einer der beiden Wellen zusammenfällt mit der Richtung der Ovalaxe, welche gegen die andere, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit bestimmende Axe senkrecht steht. Da hiermit zugleich nachgewiesen ist, dass die beiden Wellen transversal sind, so ist das Fresnel'sche Gesetz bis auf Grössen von der Ordnung der Differenzen der Elasticitätsaxen vollständig bewiesen. Ob die Abweichung in den Differenzen in der Natur begründet ist, oder ob wir mit Fresnel das Gesetz als vollkommen richtig anzunehmen haben, kann aus den vorliegenden Erfahrungen nicht entschieden werden. So weit die Gesetze durch die Beobachtung bestätigt sind, so weit sind sie auch theoretisch bewiesen.

Dass die durch die Gl. 1 § 111 dargestellte Welle eine longitudinale ist, wie behauptet wurde, braucht nicht bewiesen zu werden, da die drei Richtungen der Bewegung auf einander senkrecht stehen und die beiden anderen Wellen transversal schwingen.

Die vorstehend entwickelten Resultate reichen, obwohl sie sich zunächst nur auf die Bewegungsgesetze ebener Wellen beziehen, zur

hinzufügen, so wird

$$0 = (\varepsilon q^2 - cq^2 - br^2) \cos \alpha' + cpq \cos \beta' + bpr \cos \gamma'$$

und ebenso

$$0 = cpq \cos \alpha' + (\varepsilon q^2 - ar^2 - cp^2) \cos \beta' + aqr \cos \gamma'$$

$$0 = bpr \cos \alpha' + aqr \cos \beta' + (\varepsilon q^2 - bp^2 - aq^2) \cos \gamma'.$$

Diese die Winkel α' , β' , γ' bestimmenden Gleichungen zeigen grosse Aehnlichkeit mit den die Richtungs-cosinus M , N , P bestimmenden Gleichungen (6.) § 95

$$0 = (Ap^2 + cq^2 + br^2 - \varepsilon \omega^2)M + 2cpqN + 2bprP$$

$$0 = 2cpqM + (cp^2 + Bq^2 + ar^2 - \varepsilon \omega^2)N + 2aqrP$$

$$0 = 2bprM + 2aqrN + (bp^2 + aq^2 + Cr^2 - \varepsilon \omega^2)P$$

und fallen mit ihnen vollständig zusammen, wenn unter Vernachlässigung der Differenzen

$$A = B = C = 3a = 3b = 3c = 3\varepsilon q^2 = 3\varepsilon \omega^2$$

gesetzt wird. Es ist also bis auf Grössen von der Ordnung jener Differenzen genau

$$M = \cos \alpha', \quad N = \cos \beta', \quad P = \cos \gamma',$$

d. h. die Schwingungsrichtung fällt nahezu mit der andern Ovalaxe zusammen.

Anmerkung des Herausgebers.

vollständigen Begründung der ganzen Theorie der doppelten Strahlenbrechung aus. Die weitere Entwicklung, welche in einer anderen Vorlesung gegeben ist¹⁾, führt durch Anwendung von Principien, welche keinem Zweifel unterliegen, zur Construction der Wellenoberfläche als Umhüllungsfläche der sämtlichen Richtungen angehörenden Wellenebenen. Man gelangt durch dieses Verfahren zu einer anderen Auflösung der Differentialgleichungen, welche die Gesetze enthält, nach denen sich das von einem leuchtenden Punkte ausgestrahlte Licht in einem doppeltbrechenden Medium ausbreitet.

1) Neumann's Vorles. über theoret. Optik, herausgegeben von E. Dorn. Leipzig 1885. Vorlesung XI.

14. Theorie der Lichtwellen im incompressiblen Aether.

§ 113. Herleitung der Differentialgleichungen.

Die im vorigen Abschnitt entwickelte theoretische Herleitung der Fresnel'schen Gesetze der Doppelbrechung und Polarisation in Krystallen giebt ausser den beobachteten transversalen Wellen noch eine longitudinale, welche nicht beobachtet wird. Carl Neumann¹⁾ hatte daher den Gedanken, in die Rechnung die Bedingung einzuführen, dass der Lichtäther incompressibel sei. Fresnel kam in seinen allerdings nicht sehr strengen theoretischen Entwicklungen nicht auf eine longitudinale Welle. Er nahm an, dass die Kraft, welche nöthig ist, die Aethertheilchen einander zu nähern, viel grösser ist, als diejenige, welche sie ohne Aenderung der Entfernung gegen einander zu verschieben vermag. Unter dieser Voraussetzung ergibt sich sofort, dass die Amplitude der longitudinalen Welle sehr klein ist im Verhältniss zu denen der transversalen Wellen, während die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen sehr gross gegen die der transversalen ist. Diesen Gedanken kann man zum Extrem ausdehnen und den Aether als vollständig incompressibel voraussetzen.

Indem wir diese Annahme über die Natur des Lichtäthers einführen, hören wir auf, ihn uns, wie bisher üblich, als Gas vorzustellen. Er verhält sich nach dieser Ansicht wie das Wasser, in welchem Wellen sich bewegen, ohne das Volumen desselben zu ändern. Wir denken uns den Aether als tropfbare Flüssigkeit, obwohl seine Masse unendlich viel geringer ist, als die jeder andern tropfbaren Flüssigkeit. Mit dieser Annahme sagen wir jedoch nicht, dass er nicht durch grossen Druck zu comprimiren wäre; vielmehr wird er um die ponderablen Atome herum sich wirklich in einer starken Verdichtung oder Verdünnung befinden.

Die strenge Durchführung der auf der Hypothese der Incompressibilität des Lichtäthers beruhenden Rechnung wird uns nur auf transversale Wellen führen und Resultate liefern, die sich mit den

1) Math. Annalen Bd. 1, S. 325, 1869; Bd. 2, S. 182, 1870. Die magnet. Drehung der Polarisationsenebene des Lichtes. Halle 1863. S. 34. § 8.

$$0 = \iiint dx dy dz \lambda \left\{ \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \frac{\partial \delta v}{\partial y} + \frac{\partial \delta w}{\partial z} \right\}, \quad (8.)$$

welche Gleichung wir zur Gl. (2.) zu addiren haben. Vorher transformiren wir dieselbe durch partielle Integration, wodurch wir erhalten

$$0 = \int d\omega \{ \bar{\delta u} \cos(n, x) + \bar{\delta v} \cos(n, y) + \bar{\delta w} \cos(n, z) \} \lambda \\ - \iiint dx dy dz \left\{ \frac{\partial \lambda}{\partial x} \delta u + \frac{\partial \lambda}{\partial y} \delta v + \frac{\partial \lambda}{\partial z} \delta w \right\}. \quad (9.)$$

Addiren wir diese Gleichung zur Gl. (2.), so ergibt sich

$$0 = \iiint dx dy dz \left\{ \left\{ X - \frac{\partial X_x}{\partial x} - \frac{\partial X_y}{\partial y} - \frac{\partial X_z}{\partial z} - \frac{\partial \lambda}{\partial x} \right\} \delta u \right. \\ \left. + \left\{ Y - \frac{\partial Y_x}{\partial x} - \frac{\partial Y_y}{\partial y} - \frac{\partial Y_z}{\partial z} - \frac{\partial \lambda}{\partial y} \right\} \delta v \right. \\ \left. + \left\{ Z - \frac{\partial Z_x}{\partial x} - \frac{\partial Z_y}{\partial y} - \frac{\partial Z_z}{\partial z} - \frac{\partial \lambda}{\partial z} \right\} \delta w \right\} \quad (10.) \\ + \int d\omega \left\{ \left\{ X' + (\bar{X}_x + \lambda) \cos(n, x) + \bar{X}_y \cos(n, y) + \bar{X}_z \cos(n, z) \right\} \bar{\delta u} \right. \\ \left. + \left\{ Y' + \bar{Y}_x \cos(n, x) + (\bar{Y}_y + \lambda) \cos(n, y) + \bar{Y}_z \cos(n, z) \right\} \bar{\delta v} \right. \\ \left. + \left\{ Z' + \bar{Z}_x \cos(n, x) + \bar{Z}_y \cos(n, y) + (\bar{Z}_z + \lambda) \cos(n, z) \right\} \bar{\delta w} \right\}.$$

Wegen der Willkürlichkeit der δu , δv , δw können wir, indem wir nach dem obigen auch λ als gesuchte Function ansehen, diese Gleichung in folgende sechs zerfällen, von welchen die drei Hauptgleichungen

$$0 = X - \frac{\partial X_x}{\partial x} - \frac{\partial X_y}{\partial y} - \frac{\partial X_z}{\partial z} - \frac{\partial \lambda}{\partial x} \\ 0 = Y - \frac{\partial Y_x}{\partial x} - \frac{\partial Y_y}{\partial y} - \frac{\partial Y_z}{\partial z} - \frac{\partial \lambda}{\partial y} \\ 0 = Z - \frac{\partial Z_x}{\partial x} - \frac{\partial Z_y}{\partial y} - \frac{\partial Z_z}{\partial z} - \frac{\partial \lambda}{\partial z} \quad (11.)$$

im ganzen Raume des elastischen Mediums gelten, während die Bedingungen

$$0 = X' + (\bar{X}_x + \lambda) \cos(n, x) + \bar{X}_y \cos(n, y) + \bar{X}_z \cos(n, z) \\ 0 = Y' + \bar{Y}_x \cos(n, x) + (\bar{Y}_y + \lambda) \cos(n, y) + \bar{Y}_z \cos(n, z) \quad (12.) \\ 0 = Z' + \bar{Z}_x \cos(n, x) + \bar{Z}_y \cos(n, y) + (\bar{Z}_z + \lambda) \cos(n, z)$$

nur an der Oberfläche desselben Gültigkeit haben.

Da wir von diesen Formeln nur auf den unbegrenzten Lichtäther Anwendung zu machen beabsichtigen, so können wir die Glchg. (12.) unbeachtet lassen und uns darauf beschränken, die Glchg. (11.) zu untersuchen. Durch Einsetzen der Werthe der Druckcomponenten aus (3.) werden dieselben, wenn wir nach dem d'Alembert'schen Principe, wie in § 51, die Beschleunigungen hinzufügen:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= X + A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2c \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \\
 &\quad + 2b \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} - \frac{\partial \lambda}{\partial x} \\
 \varepsilon \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= Y + c \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + a \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + 2a \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \\
 &\quad + 2c \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} - \frac{\partial \lambda}{\partial y} \\
 \varepsilon \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= Z + b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + C \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} \\
 &\quad + 2a \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial y} - \frac{\partial \lambda}{\partial z}.
 \end{aligned} \tag{13.}$$

Hierzu tritt als vierte Differentialgleichung die Gleichung (6.)

$$0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}. \tag{6.}$$

Aus diesen vier Gleichungen sind u, v, w, λ als Functionen von x, y, z, t zu bestimmen.

Die neu eingeführte Grösse λ hat eine bestimmte physikalische Bedeutung. Sie ist der durch die Bewegung entstehende hydrostatische Druck. Denn die verbesserten Differentialgleichungen sind im Grunde nur die hydrodynamischen, in welche ausser den äusseren Kräften noch die inneren Molekularkräfte eingeführt sind, während die in jenen Gleichungen vorkommenden Quadrate der Geschwindigkeiten dem Grundprincipe der Elasticitätstheorie entsprechend fortfallen.

§ 114. Transformation der Differentialgleichungen.

In die Glchg. (13.) § 113 führen wir als durch die Erfahrung gegeben¹⁾ die Relationen zwischen den Constanten A, B, C, a, b, c des Mediums ein, welche in § 110 abgeleitet worden sind. Wir

1) Vergl. den Zusatz des Herausgebers in § 119.

wählen aber nicht die Form der Gleichg. (9.) § 110, sondern wir nehmen die dort als angenähert erscheinenden Werthe aus den Gleichungen (10.) § 110

$$A = 3(b + c - a) \quad B = 3(c + a - b) \quad C = 3(a + b - c) \quad (1.)$$

hier als streng richtig an. Führen wir diese Werthe in die erste Gl. (13.) § 113 ein, so wird dieselbe

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + b \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) \\ &+ 3 \left\{ (b + c - a) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + b \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right\} - \frac{\partial \lambda}{\partial x} + X \end{aligned}$$

und durch Benutzung der Gl. (6) § 113

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + b \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ &- 3 \frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial v}{\partial y} + c \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \frac{\partial \lambda}{\partial x} + X. \end{aligned}$$

Verfahren wir ebenso mit der zweiten und dritten Gl. (13.) § 113 und setzen zur Abkürzung

$$- \lambda' = \lambda - 3 \left(a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial v}{\partial y} + c \frac{\partial w}{\partial z} \right), \quad (2.)$$

so erhalten wir statt jener Gleichungen folgende neuen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) - b \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial \lambda'}{\partial x} + X \\ \varepsilon \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= a \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) - c \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial \lambda'}{\partial y} + Y \quad (3.) \\ \varepsilon \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= b \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) - a \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial \lambda'}{\partial z} + Z \\ 0 &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned}$$

Aus diesen vier Gleichungen, welche u, v, w, λ' bestimmen, lässt sich die letztere Grösse sofort eliminiren, und zwar durch Substitution der doppelten Drehungswinkel (§ 24)

$$U = \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}; \quad V = \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}; \quad W = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \quad (4.)$$

statt der Verrückungen u, v, w . Durch Differentiation und Subtraction der drei ersten Gleichg. (3) erhält man

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} &= a \left\{ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right\} - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ a \frac{\partial U}{\partial x} + b \frac{\partial V}{\partial y} + c \frac{\partial W}{\partial z} \right\} \\ &\quad + \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} \\ \varepsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} &= b \left\{ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right\} - \frac{\partial}{\partial y} \left\{ a \frac{\partial U}{\partial x} + b \frac{\partial V}{\partial y} + c \frac{\partial W}{\partial z} \right\} \\ &\quad + \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} \quad (5.) \\ \varepsilon \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} &= c \left\{ \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right\} - \frac{\partial}{\partial z} \left\{ a \frac{\partial U}{\partial x} + b \frac{\partial V}{\partial y} + c \frac{\partial W}{\partial z} \right\} \\ &\quad + \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}. \end{aligned}$$

Diese drei Gleichungen bestimmen U, V, W , aus denen nach den Gleichungen (4.) in Verbindung mit der vierten Gl. (3.) u, v, w gefunden werden können. Es ist aber zu bemerken, dass U, V, W nicht von einander unabhängig sind, sondern es existirt zwischen ihnen die Bedingung

$$0 = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}, \quad (6.)$$

welche sich direct aus ihren Bedeutungen ergibt, sowie auch aus den Gleichungen (5.) selber, wenn man sie nach x, y, z differenzirt und addirt. Daraus geht hervor, dass, wenn man die Glchg. (5.) durch willkürliche Functionen integirt, man deren nicht sechs, sondern nur vier erhalten kann.

§ 115. Integration für ebene Wellen. — Bestimmung der Drehungen.

Indem wir zur Integration der Glchg. übergehen, führen wir ein, dass keine äusseren Kräfte thätig sind, wir setzen also

$$X = 0; \quad Y = 0; \quad Z = 0. \quad (1.)$$

Wir nehmen ferner, wie bisher, Wellenbewegung auf einer Schaar paralleler Ebenen an, so dass u, v, w , also auch U, V, W nur abhängig von

$$s = px + qy + rz \quad (2.)$$

sind, wo p, q, r wiederum die Cosinus der Winkel bedeuten, welche die gegen das Ebenensystem senkrechte Richtung s mit den Coordinatenaxen x, y, z einschliesst. Unter diesen Voraussetzungen versuchen wir den Glchg. (5.) § 114 durch willkürliche Functionen von der Form

$$U = \mu \Phi(s + \omega t); \quad V = \nu \Phi(s + \omega t); \quad W = \varpi \Phi(s + \omega t) \quad (3.)$$

zu genügen, worin $\mu, \nu, \bar{\omega}, \omega$ Constante, Φ ein Functionszeichen ist. Zwischen den Constanten $\mu, \nu, \bar{\omega}$ nehmen wir die Relation

$$1 = \mu^2 + \nu^2 + \bar{\omega}^2 \quad (4.)$$

an, wodurch die Allgemeinheit nicht beeinträchtigt wird, da wir uns die Function Φ einen beliebigen Factor enthaltend denken können.

Durch Einsetzen der Werthe (3.) in die Differentialgleichg. (5.) § 114 verwandeln sich diese nach Division durch

$$\Phi''(s + \omega t) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2} = \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}$$

in die Bedingungsgleichungen

$$\begin{aligned} \varepsilon \omega^2 \mu &= a\mu - p \{ a p \mu + b q \nu + c r \bar{\omega} \} \\ \varepsilon \omega^2 \nu &= b\nu - q \{ a p \mu + b q \nu + c r \bar{\omega} \} \\ \varepsilon \omega^2 \bar{\omega} &= c\bar{\omega} - r \{ a p \mu + b q \nu + c r \bar{\omega} \}. \end{aligned} \quad (5.)$$

Multipliciren wir diese Gleichungen mit den Cosinus p, q, r und addiren sie, so erhalten wir ebenso, wie aus Gl. (6.) § 114 durch Einsetzen der Werthe von U, V, W aus den Glchg. (3.)

$$0 = p\mu + q\nu + r\bar{\omega}. \quad (6.)$$

Fügen wir diese Relation zu den Glchg. (5.) hinzu, so wird eine derselben identisch erfüllt; wir brauchen also nur zwei derselben zu berücksichtigen, also z. B. die durch Elimination von $\bar{\omega}$ sich ergebenden

$$\begin{aligned} \varepsilon \omega^2 \mu &= a\mu - p \{ (a - c) p \mu + (b - c) q \nu \} \\ \varepsilon \omega^2 \nu &= b\nu - q \{ (a - c) p \mu + (b - c) q \nu \}, \end{aligned} \quad (7.)$$

aus welchen durch Elimination des Verhältnisses von μ zu ν folgt:

$$0 = (\varepsilon \omega^2 - a + p^2(a - c)) (\varepsilon \omega^2 - b + q^2(b - c)) - p^2 q^2 (a - c)(b - c). \quad (8.)$$

Diese Gleichung ist in Bezug auf ω^2 vom zweiten Grade; wir finden also nur zwei Werthe dieser Constanten, ω_1 und ω_2 , und die Functionen U, V, W enthalten in der That nur vier willkürliche Functionen in der Verbindung

$$\begin{aligned} U &= \mu_1 \{ \Phi_1(s + \omega_1 t) + \Psi_1(s - \omega_1 t) \} + \mu_2 \{ \Phi_2(s + \omega_2 t) + \Psi_2(s - \omega_2 t) \} \\ V &= \nu_1 \{ \Phi_1(s + \omega_1 t) + \Psi_1(s - \omega_1 t) \} + \nu_2 \{ \Phi_2(s + \omega_2 t) + \Psi_2(s - \omega_2 t) \} \\ W &= \bar{\omega}_1 \{ \Phi_1(s + \omega_1 t) + \Psi_1(s - \omega_1 t) \} + \bar{\omega}_2 \{ \Phi_2(s + \omega_2 t) + \Psi_2(s - \omega_2 t) \}. \end{aligned} \quad (9.)$$

Die hierin vorkommenden Constanten erlangen aus den Gleichungen (7.) und (4.) die Bestimmung, dass

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{p}{a - \varepsilon \omega_1^2} g_1 & \nu_1 &= \frac{q}{b - \varepsilon \omega_1^2} g_1 & \bar{w}_1 &= \frac{r}{c - \varepsilon \omega_1^2} g_1 \\ \mu_2 &= \frac{p}{a - \varepsilon \omega_2^2} g_2 & \nu_2 &= \frac{q}{b - \varepsilon \omega_2^2} g_2 & \bar{w}_2 &= \frac{r}{c - \varepsilon \omega_2^2} g_2 \end{aligned} \quad (10.)$$

wird, wenn zur Abkürzung

$$\begin{aligned} 1 &= g_1^2 \left\{ \left(\frac{p}{a - \varepsilon \omega_1^2} \right)^2 + \left(\frac{q}{b - \varepsilon \omega_1^2} \right)^2 + \left(\frac{r}{c - \varepsilon \omega_1^2} \right)^2 \right\} \\ 1 &= g_2^2 \left\{ \left(\frac{p}{a - \varepsilon \omega_2^2} \right)^2 + \left(\frac{q}{b - \varepsilon \omega_2^2} \right)^2 + \left(\frac{r}{c - \varepsilon \omega_2^2} \right)^2 \right\} \end{aligned} \quad (11.)$$

gesetzt wird. Damit sind die Drehungswinkel U, V, W bestimmt.

§ 116. Bestimmung der Verrückungen.

Es bleibt noch übrig, aus diesen Winkeln die Verrückungen u, v, w zu bestimmen, was durch die Formeln (4.) § 114 auszuführen ist. Nach denselben haben wir statt der Gleichungen (9.) § 115

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} &= \sum \mu \{ \Phi(s + \omega t) + \Psi(s - \omega t) \} \\ \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} &= \sum \nu \{ \Phi(s + \omega t) + \Psi(s - \omega t) \} \\ \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} &= \sum \bar{w} \{ \Phi(s + \omega t) + \Psi(s - \omega t) \} \end{aligned}$$

und hieraus durch Elimination mit Hilfe der vierten Gleichung (3.) § 114

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= \sum (\bar{w}q - \nu r) \Omega \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} &= \sum (\mu r - \bar{w}p) \Omega \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} &= \sum (\nu p - \mu q) \Omega, \end{aligned}$$

worin zur Abkürzung gesetzt ist:

$$\Omega = \frac{d}{ds} \left(\Phi(s + \omega t) + \Psi(s - \omega t) \right).$$

Diesen Gleichungen genügen wir in unserem Falle, in welchem es sich nur um Wellenbewegung handelt, durch die Auflösungen

$$\begin{aligned} u &= \sum M \{ \varphi(s + \omega t) + \psi(s - \omega t) \} \\ v &= \sum N \{ \varphi(s + \omega t) + \psi(s - \omega t) \} \\ w &= \sum P \{ \varphi(s + \omega t) + \psi(s - \omega t) \}, \end{aligned} \quad (1.)$$

in denen M, N, P drei Richtungscosinus von der Bedeutung

$$M = \varpi q - \nu r, \quad N = \mu r - \varpi p, \quad P = \nu p - \mu q \quad (2.)$$

vorstellen, während φ und ψ willkürliche Functionen sind, welche zu den früher eingeführten Φ und Ψ in der Beziehung stehen, dass

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi(s + \omega t)}{ds} &= \Phi(s + \omega t) \\ \frac{d\psi(s - \omega t)}{ds} &= \Psi(s - \omega t) \end{aligned} \quad (3.)$$

ist. Die Summe in den Formeln (1.) bezieht sich, wie bisher, auf die beiden Wurzeln ω_1 und ω_2 der quadratischen Gleichung (8.) § 115.

Die zu beiden Werthen gehörigen Cosinus M , N , P erlangen nach den Formeln (10.) § 115 die Werthe

$$\begin{aligned} M_1 &= qr \frac{b-c}{(b-\varepsilon\omega_1^2)(c-\varepsilon\omega_1^2)} g_1 & M_2 &= qr \frac{b-c}{(b-\varepsilon\omega_2^2)(c-\varepsilon\omega_2^2)} g_2 \\ N_1 &= rp \frac{c-a}{(c-\varepsilon\omega_1^2)(a-\varepsilon\omega_1^2)} g_1 & N_2 &= rp \frac{c-a}{(c-\varepsilon\omega_2^2)(a-\varepsilon\omega_2^2)} g_2 \\ P_1 &= pq \frac{a-b}{(a-\varepsilon\omega_1^2)(b-\varepsilon\omega_1^2)} g_1 & P_2 &= pq \frac{a-b}{(a-\varepsilon\omega_2^2)(b-\varepsilon\omega_2^2)} g_2. \end{aligned} \quad (4.)$$

Die vier willkürlich gebliebenen Functionen φ und ψ sind aus den zur Zeit $t=0$ geltenden Anfangswerthen der Functionen u , v , w und ihren nach der Zeit genommenen Differentialquotienten zu bestimmen; sie vermögen, obschon nur vier an Zahl, den sechs Bedingungen zu genügen, weil auch zur Zeit $t=0$ zwischen den Grössen u , v , w und ihren Derivirten eine Relation, die Gleichung (6.) § 113 besteht.

Wir unterlassen diese Rechnung, weil sie wenig Interesse bietet.

§ 117. Herleitung der Fresnel'schen Gesetze.

Viel wichtiger ist die Frage nach der Fortpflanzungsgeschwindigkeit und die nach der Schwingungsrichtung der beiden Wellenpaare, welche sich mit ungleichen Geschwindigkeiten in positiver und in negativer Richtung fortpflanzen.

Was die erstere Frage betrifft, so sind die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der beiden Wellenpaare bestimmt durch die quadratische Gleichg. (8.) § 115. Bringen wir dieselbe auf die gewöhnliche Form, so wird sie

$$0 = \varepsilon^2 \omega^4 - \varepsilon \omega^2 \{ p^2(b+c) + q^2(c+a) + r^2(a+b) \} + p^2 bc + q^2 ca + r^2 ab \quad (1.)$$

oder

$$0 = \frac{p^2}{a - \varepsilon \omega^2} + \frac{q^2}{b - \varepsilon \omega^2} + \frac{r^2}{c - \varepsilon \omega^2}. \quad (2.)$$

Diese Gleichung aber ist dieselbe, welche die beiden Hauptaxen

eines ebenen Schnitts des Fresnel'schen Ovaloids bestimmt, d. h. die Axen des Durchschnitts der Ebene

$$0 = px + qy + rz$$

mit der Oberfläche¹⁾

$$\varepsilon \rho^2 = a \cos^2 \alpha + b \cos^2 \beta + c \cos^2 \gamma \quad (3.)$$

oder in rechtwinkligen Coordinaten

$$\varepsilon (x^2 + y^2 + z^2) = ax^2 + by^2 + cz^2.$$

Wir erhalten also die von Fresnel durch Beobachtung erwiesenen Formeln für die Fortpflanzung ebener Wellen.

Es bleibt noch die Schwingungsrichtung in den Wellen zu untersuchen. Die in den Formeln (10.) § 115 für die Cosinus μ , ν , ϖ gefundenen Werthe stimmen mit denjenigen überein, welche in § 112 als Werthe der Cosinus der Winkel α , β , γ angegeben wurden, also derjenigen Winkel, welche die Richtung der Ovalaxe $\rho = \omega$ mit den Coordinatenaxen einschliesst. Daraus folgt, dass die durch die Cosinus μ_1 , ν_1 , ϖ_1 definirte Richtung mit derjenigen Axe ρ_1 des Ovalschnitts zusammenfällt, welche die zu den Werthen μ_1 , ν_1 , ϖ_1 gehörige Fortpflanzungsgeschwindigkeit ω_1 bestimmt; und ebenso fällt die Richtung, deren Cosinus μ_2 , ν_2 , ϖ_2 sind, mit der Richtung der zweiten Ovalaxe $\rho_2 = \omega_2$ zusammen.

Die Schwingungsrichtungen in den Wellen werden aber nicht durch die Cosinus μ , ν , ϖ bestimmt, sondern durch M , N , P , deren Werthe in den Glchg. (4.) § 116 angegeben sind. Dieselben genügen folgenden Relationen

$$\begin{aligned} 0 &= M_1 p + N_1 q + P_1 r & 0 &= M_2 p + N_2 q + P_2 r \\ 0 &= M_1 \mu_1 + N_1 \nu_1 + P_1 \varpi_1 & 0 &= M_2 \mu_2 + N_2 \nu_2 + P_2 \varpi_2, \end{aligned} \quad (4.)$$

von welchen die beiden ersten aussagen, dass beide Wellen transversal sind. Aus den zweiten folgt dagegen, dass auch die Richtung (M_1, N_1, P_1) auf (μ_1, ν_1, ϖ_1) und (M_2, N_2, P_2) auf (μ_2, ν_2, ϖ_2) senkrecht steht. Die Schwingungsrichtung steht also senkrecht gegen die Richtung derjenigen Ovalaxe, welche die zugehörige Fortpflanzungsrichtung bestimmt.

1) Vergl. § 111. Man kann die Uebereinstimmung von ω mit den Radien ρ der Elasticitätsoberfläche auch direct aus den Glchg. (5.) § 115 nachweisen. Multiplicirt man diese mit μ , ν , ϖ und addirt, so erhält man wegen Gl. (6.) § 115

$$\varepsilon \omega^2 = a \mu^2 + b \nu^2 + c \varpi^2,$$

d. h. nichts Anderes als obenstehende Gl. (3.) § 117, da nach der demnächst folgenden Betrachtung μ , ν , ϖ mit den Richtungscosinus der Ovalaxe identisch sind.

Anmerkung des Herausgebers.

Da nach dem Erfahrungsgesetze die Polarisationssebene dieselbe Eigenschaft besitzt, so fallen Schwingungsebene und Polarisationssebene zusammen. Hierauf ist besonderes Gewicht zu legen, weil die entgegengesetzte Ansicht noch sehr verbreitet ist. Alle strengen Durchführungen der Theorie aber führen zu dem von der gewöhnlichen Meinung abweichenden Resultate.

Somit ergeben sich alle die Gesetze, welche Fresnel empirisch fand, in aller Vollständigkeit als nothwendig, wenn man die Incompressibilität des Aethers in die Rechnung einführt. Zudem stösst man nicht auf die Schwierigkeit der longitudinalen Welle, da der Aether, im Gegensatz zur Luft, nur Lichtwellen, keine Schallwellen, fortpflanzen kann.

§ 118. Bestimmung des Druckes im Aether.

Es wäre unbefriedigend, die Untersuchung hier abzubrechen; denn uns fehlt noch die Kenntniss der Grösse λ , des Aetherdrucks. Wir erhalten ihren Werth mittelst einer durch die Gleichung (2.) § 114 eingeführten Hilfsgrösse, welche den Gleichungen (3.) § 114 genügt. Wenn wir diese Gleichungen in die Form

$$\begin{aligned}\frac{\partial \lambda'}{\partial x} &= \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c \frac{\partial W}{\partial y} + b \frac{\partial V}{\partial z} \\ \frac{\partial \lambda'}{\partial y} &= \varepsilon \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a \frac{\partial U}{\partial z} + c \frac{\partial W}{\partial x} \\ \frac{\partial \lambda'}{\partial z} &= \varepsilon \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - b \frac{\partial V}{\partial x} + a \frac{\partial U}{\partial y}\end{aligned}$$

bringen, in dieselben aus (3.) § 115 und (1.) § 116 die Werthe der Functionen einführen, so erhalten wir unter Rücksicht auf die Formeln (2.) und (3.) § 116 die Werthe

$$\begin{aligned}\frac{\partial \lambda'}{\partial x} &= \sum ((\varepsilon \omega^2 - c) \varpi q - (\varepsilon \omega^2 - b) \nu r) \Omega \\ \frac{\partial \lambda'}{\partial y} &= \sum ((\varepsilon \omega^2 - a) \mu r - (\varepsilon \omega^2 - c) \varpi p) \Omega \\ \frac{\partial \lambda'}{\partial z} &= \sum ((\varepsilon \omega^2 - b) \nu p - (\varepsilon \omega^2 - a) \mu q) \Omega,\end{aligned}$$

welche sich nach Einsetzung der Werthe von μ , ν , ϖ aus den Formeln (10.) § 115 zu den Ausdrücken

$$\frac{\partial \lambda'}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \lambda'}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \lambda'}{\partial z} = 0$$

vereinfachen. Es ist also

$$\lambda' = -C$$

constant, demnach wegen (2.) § 114 der Druck

$$\lambda = C + 3 \left(a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial v}{\partial y} + c \frac{\partial w}{\partial z} \right).$$

In einem unkrystallinischen Medium, für welches $a = b = c$ wird, erhalten wir, da dasselbe incompressibel ist,

$$\lambda = C$$

und dieser constante Werth muss

$$\lambda = 0$$

gleich dem Werthe im Weltenraume sein, da wir uns den letzteren nicht als zusammengedrückt vorstellen können.

Für ein krystallinisches Medium erhalten wir den von den Unterschieden der Elasticitätsaxen abhängenden Ausdruck

$$\lambda = 3pqr \sum \frac{ab(a-b) + ca(c-a) + bc(b-c)}{(a-\varepsilon\omega^2)(b-\varepsilon\omega^2)(c-\varepsilon\omega^2)} g \{ \varphi'(s + \omega t) + \psi'(s - \omega t) \},$$

welcher vielleicht durch spätere Untersuchungen eine nicht bloss theoretische Bedeutung erlangen wird.

§ 119. Ueber die Beziehungen zwischen den sechs Constanten des Mediums¹⁾.

In § 114 wurden zwischen den sechs Elasticitätsconstanten des Mediums drei Relationen angenommen, deren Einführung nicht durch zwingende Gründe geboten war, wohl aber durch den Erfolg gerechtfertigt wurde. Wenn man diese Relationen (i.) § 114 nicht von vornherein einführen will, so hat man für ein incompressibles Medium die allgemeineren Differentialgleichungen (13.) § 113 mit der Bedingung

$$0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

zu integrieren.

Durch die Substitution

$$u = M\varphi(s + \omega t)$$

$$v = N\varphi(s + \omega t)$$

$$w = P\varphi(s + \omega t)$$

$$\lambda = Q\varphi'(s + \omega t),$$

wo

$$1 = M^2 + N^2 + P^2 \quad s = px + qy + rz$$

$$\varphi'(s) = \frac{d\varphi(s)}{ds}$$

ist, erhält man

1) Zusatz zu § 114 vom Herausgeber.

$$\begin{aligned}
\varepsilon\omega^2 M &= \mathfrak{A}M + \gamma N + \beta B - pQ \\
\varepsilon\omega^2 N &= \gamma M + \mathfrak{B}N + \alpha P - qQ \\
\varepsilon\omega^2 P &= \beta M + \alpha N + \mathfrak{C}P - rQ \\
0 &= pM + qN + rP,
\end{aligned} \tag{1.}$$

wenn zur Abkürzung

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} &= Ap^2 + cq^2 + br^2 & \alpha &= 2aqr \\
\mathfrak{B} &= cp^2 + Bq^2 + ar^2 & \beta &= 2brp \\
\mathfrak{C} &= bp^2 + aq^2 + Cr^2 & \gamma &= 2cpq
\end{aligned} \tag{2.}$$

gesetzt wird. Aus den Gleichungen (1.) sind M , N , P , Q und ω zu bestimmen.

Führt man zu den durch M , N , P und p , q , r bestimmten Richtungen eine dritte zu beiden senkrechte μ , ν , ϖ ein, so dass

$$\begin{aligned}
0 &= pM + qN + rP \\
0 &= p\mu + q\nu + r\varpi \\
0 &= \mu M + \nu N + \varpi P \\
1 &= \mu^2 + \nu^2 + \varpi^2 \\
1 &= M^2 + N^2 + P^2 \\
1 &= p^2 + q^2 + r^2,
\end{aligned}$$

so hat man zur Bestimmung von M , N , P

$$0 = (\mathfrak{A}M + \gamma N + \beta P)\mu + (\gamma M + \mathfrak{B}N + \alpha P)\nu + (\beta M + \alpha N + \mathfrak{C}P)\varpi, \tag{3.}$$

worin

$$\mu = rN - qP, \quad \nu = pP - rM, \quad \varpi = qM - pN, \tag{4.}$$

sowie als zweite und dritte Gleichung

$$\begin{aligned}
0 &= pM + qN + rP \\
1 &= M^2 + N^2 + P^2.
\end{aligned}$$

Eliminirt man dagegen aus den Gleichungen (1.) die Grössen M , N , P , Q , so findet man für ω^2 eine quadratische Gleichung, welche sich schreiben lässt

$$\begin{aligned}
0 &= p^2 \{ (\varepsilon\omega^2 - \mathfrak{B} + 2cq^2)(\varepsilon\omega^2 - \mathfrak{C} + 2br^2) - 2(b-c)^2 q^2 r^2 \} \\
&+ q^2 \{ (\varepsilon\omega^2 - \mathfrak{C} + 2ar^2)(\varepsilon\omega^2 - \mathfrak{A} + 2cp^2) - 2(c-a)^2 r^2 p^2 \} \\
&+ r^2 \{ (\varepsilon\omega^2 - \mathfrak{A} + 2bp^2)(\varepsilon\omega^2 - \mathfrak{B} + 2aq^2) - 2(a-q)^2 p^2 q^2 \}.
\end{aligned} \tag{5.}$$

Man erhält also auch in diesem allgemeinen Falle nur zwei Wellenpaare mit verschiedener Geschwindigkeit, von denen je eine Welle in der positiven, die andere in der negativen Richtung von s fortschreitet. Jede dieser Wellen hat auch nur eine bestimmte Schwingungsrichtung. Denn setzt man aus Gleichg. (5.) den Werth

von $\varepsilon\omega^2$, welcher dieser Welle zukommt, in die Glchg. (1.), so werden die Verhältnisse von M, N, P durch diese Gleichungen eindeutig bestimmt.

Es lässt sich auch zeigen, dass die beiden möglichen Schwingungsrichtungen auf einander senkrecht stehen. Denn Glchg. (3.) lässt sich schreiben

$$0 = (\mathfrak{A}\mu + \gamma\nu + \beta\varpi)M + (\gamma\mu + \mathfrak{B}\nu + \alpha\varpi)N + (\beta\mu + \alpha\nu + \mathfrak{C}\varpi)P,$$

worin nach den Glchg. (4.)

$$M = q\varpi - r\nu, \quad N = r\mu - p\varpi, \quad P = p\nu - q\mu$$

ist. Also genügen μ, ν, ϖ denselben Glchg. (3.) und (4.), welche M, N, P bestimmen; d. h. wenn M, N, P den Glchg. (1.) genügt, so genügt auch die darauf senkrechte Richtung μ, ν, ϖ ; also müssen, da nur zwei Wellen, folglich auch nur zwei Schwingungsrichtungen möglich sind, die beiden möglichen Schwingungsrichtungen gegen einander senkrecht stehen, oder mit anderen Worten: beide Wellen sind rechtwinklig gegen einander polarisirt.

Der Sachverhalt ist also im Allgemeinen ebenso, wie in dem ausführlich behandelten Specialfalle. Es entsteht daher die Frage, ob die Gleichungen (1.) § 114 die einzigen Relationen zwischen den Constanten A, B, C, a, b, c sind, durch welche die obige Gleichung (5.) in die Fresnel'sche Gleichung

$$0 = \frac{p^2}{\omega^2 - h^2} + \frac{q^2}{\omega^2 - k^2} + \frac{r^2}{\omega^2 - l^2} \quad (6.)$$

übergeht, in welcher h, k, l Constante sind, über deren Zusammenhang mit den Elasticitätsconstanten wir keine Voraussetzung machen wollen. Bringt man, um diese Frage zu entscheiden, beide Gleichungen (5.) und (6.) auf gleiche Form und setzt z. B. die Factoren von ω^2 einander gleich, so findet man, dass diese Gleichheit für jedes Werthsystem von p, q, r , welches der Bedingung

$$1 = p^2 + q^2 + r^2$$

genügt, nur dann stattfinden kann, wenn

$$\begin{aligned} \varepsilon(h^2 + k^2) &= a + b & 0 &= A + B - 6c \\ \varepsilon(k^2 + l^2) &= b + c & 0 &= B + C - 6a \\ \varepsilon(l^2 + h^2) &= c + a & 0 &= C + A - 6b \end{aligned}$$

ist. Daraus folgt, dass die Gleichungen

$$\begin{aligned} \varepsilon h^2 &= a & A &= 3(b + c - a) \\ \varepsilon k^2 &= b & B &= 3(c + a - b) \\ \varepsilon l^2 &= c & C &= 3(a + b - c) \end{aligned}$$

bei allen bekannten Krystallen zwei mögliche Lagen der Polarisations-ebene für jede Richtung der Wellenbewegung.

Wir müssen desshalb den Schluss ziehen, dass die Gleichungen (2.) und (4.) beide dieselbe Ebene bezeichnen, dass also

$$\frac{A}{p} = \frac{B}{q} = \frac{\Gamma}{r} \quad (7.)$$

ist, und zwar für jede Lage der Wellenebene oder für jedes Werthsystem p, q, r . Hieraus folgt zunächst, dass A mit p , ebenso B mit q und endlich Γ mit r verschwinden muss; so erhalten wir aus den Gleichungen (6.) und (4.)

$$0 = (qD + rF')q^2 + (qD'' + rF'')r^2 + 2(q\delta' + r\delta'')qr$$

$$0 = (pD + rE)p^2 + (pD'' + rE'')r^2 + 2(p\delta'' + r\eta'')rp$$

$$0 = (pF + qE)p^2 + (pF' + qE')q^2 + 2(p\vartheta + q\eta)pq$$

und hieraus

$$D = 0 \quad D' = 0 \quad - D'' = 2\delta' = 2\eta''$$

$$E' = 0 \quad E'' = 0 \quad - E = 2\delta'' = 2\vartheta$$

$$F'' = 0 \quad F = 0 \quad - F' = 2\eta = 2\delta'.$$

Ferner aber müssen in den jetzt in der Gleichung (7.) verbleibenden ganzen Functionen von p, q, r auch die Factoren gleicher Potenzen einander gleich sein; dadurch erhalten wir noch folgende Beziehungen zwischen den Constanten:

$$A = B + 2\delta = C + 2\delta''$$

$$A' + 2\delta = B' = C' + 2\eta'$$

$$A'' + 2\delta'' = B'' + 2\eta'' = C''$$

$$\alpha = \beta = \gamma + \delta' + \eta''$$

$$\alpha' + \delta'' + \vartheta = \beta' = \gamma'$$

$$\alpha'' = \beta'' + \delta' + \eta = \gamma''.$$

Nach diesen Gleichungen können wir 24 der ursprünglichen 36 Constanten durch die übrigen 12, etwa durch

$$\begin{array}{cccccc} A, & B', & C'', & \delta, & \eta', & \vartheta'' \\ \alpha, & \beta', & \gamma'', & \delta', & \eta'', & \vartheta \end{array}$$

ausdrücken. Wenn wir nun noch, um die Symmetrie der Formeln deutlicher hervortreten zu lassen, diese 12 Grössen fortan durch folgende Buchstaben

$$\begin{array}{cccccc} A, & B, & C, & c, & a, & b \\ C_1, & A_1, & B_1, & \beta, & \gamma, & \alpha \end{array}$$

bezeichnen, so nehmen die Werthe der Druckcomponenten (Gleichungen (1.) § 78) die einfache Form an:

$$\begin{aligned}
 -X_x &= A\Delta - 2c \frac{\partial v}{\partial y} - 2b \frac{\partial w}{\partial z} - 2\alpha \left\{ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right\} \\
 -Y_y &= B\Delta - 2a \frac{\partial w}{\partial z} - 2c \frac{\partial u}{\partial x} - 2\beta \left\{ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right\} \\
 -Z_z &= C\Delta - 2b \frac{\partial u}{\partial x} - 2a \frac{\partial v}{\partial y} - 2\gamma \left\{ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right\} \\
 -Y_x &= -Z_y = A_1\Delta - 2\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \Xi \\
 -Z_x &= -X_z = B_1\Delta - 2\beta \frac{\partial v}{\partial y} + \text{H} \\
 -X_y &= -Y_x = C_1\Delta - 2\gamma \frac{\partial w}{\partial z} + \text{Z}.
 \end{aligned} \tag{8.}$$

Hierin ist

$$\begin{aligned}
 \Xi &= a \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \gamma \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \beta \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\
 \text{H} &= \gamma \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + b \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \alpha \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\
 \text{Z} &= \beta \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \alpha \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) + c \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)
 \end{aligned}$$

und, wie früher, die räumliche Dilatation durch

$$\Delta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

bezeichnet. Für den Fall transversaler Wellen, den wir hier in erster Linie berücksichtigen, verschwindet diese Grösse; demnach hängt die Bewegung transversaler Wellen von nur 6 Constanten ab.

Indem wir nun die Werthe der Druckcomponenten aus den Gleichungen (8.) in die das Theorem A' bildenden Formeln des § 10 eintragen, führen wir zur Abkürzung drei neue Functionen ein

$$\begin{aligned}
 U &= -\alpha \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \gamma \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \beta \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\
 V &= \gamma \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) - b \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \alpha \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\
 W &= \beta \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \alpha \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) - c \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right).
 \end{aligned} \tag{9.}$$

So erhalten wir die übersichtliche Form

$$\begin{aligned}
 \epsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= A \frac{\partial \Delta}{\partial x} + C_1 \frac{\partial \Delta}{\partial y} + B_1 \frac{\partial \Delta}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial W}{\partial y} \\
 \epsilon \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= C_1 \frac{\partial \Delta}{\partial x} + B \frac{\partial \Delta}{\partial y} + A_1 \frac{\partial \Delta}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial z} \\
 \epsilon \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= B_1 \frac{\partial \Delta}{\partial x} + A_1 \frac{\partial \Delta}{\partial y} + C \frac{\partial \Delta}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x}
 \end{aligned} \tag{10.}$$

für die Differentialgleichungen, welche keinerlei Voraussetzung enthalten ausser der Annahme der Existenz transversaler Wellen im Medium.

§ 121. Umgestaltung durch ein neues Coordinatensystem.

Die entwickelten Gleichungen sind unabhängig von der Lage des Coordinatensystems, so dass, wenn wir ein anderes einführen, die Form der Gleichungen sich nicht ändern kann, sondern nur die Werthe der Constanten. Wir können daher durch Beziehung auf ein gewisses Coordinatensystem drei der 12 Constanten verschwinden lassen, etwa drei der sechs Constanten, von welchen die transversalen Wellen abhängen.

Beziehen wir die Formeln auf ein beliebiges anderes Coordinatensystem x', y', z' , so müssen sie folgende Form erhalten:

$$\begin{aligned} U' &= -\alpha' \left(\frac{\partial v'}{\partial z'} - \frac{\partial w'}{\partial y'} \right) + \gamma' \left(\frac{\partial w'}{\partial x'} - \frac{\partial u'}{\partial z'} \right) + \beta' \left(\frac{\partial u'}{\partial y'} - \frac{\partial v'}{\partial x'} \right) \\ V' &= \gamma' \left(\frac{\partial v'}{\partial z'} - \frac{\partial w'}{\partial y'} \right) - b' \left(\frac{\partial w'}{\partial x'} - \frac{\partial u'}{\partial z'} \right) + \alpha' \left(\frac{\partial u'}{\partial y'} - \frac{\partial v'}{\partial x'} \right) \\ W' &= \beta' \left(\frac{\partial v'}{\partial z'} - \frac{\partial w'}{\partial y'} \right) + \alpha' \left(\frac{\partial w'}{\partial x'} - \frac{\partial u'}{\partial z'} \right) - c' \left(\frac{\partial u'}{\partial y'} - \frac{\partial v'}{\partial x'} \right) \end{aligned} \quad (1.)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial^2 u'}{\partial t^2} &= A' \frac{\partial \Delta}{\partial x'} + C_1' \frac{\partial \Delta}{\partial y'} + B_1' \frac{\partial \Delta}{\partial z'} + \frac{\partial V'}{\partial z'} - \frac{\partial W'}{\partial y'} \\ \varepsilon \frac{\partial^2 v'}{\partial t^2} &= C_1' \frac{\partial \Delta}{\partial x'} + B' \frac{\partial \Delta}{\partial y'} + A_1' \frac{\partial \Delta}{\partial z'} + \frac{\partial W'}{\partial x'} - \frac{\partial U'}{\partial z'} \\ \varepsilon \frac{\partial^2 w'}{\partial t^2} &= B_1' \frac{\partial \Delta}{\partial x'} + A_1' \frac{\partial \Delta}{\partial y'} + C' \frac{\partial \Delta}{\partial z'} + \frac{\partial U'}{\partial y'} - \frac{\partial V'}{\partial x'}. \end{aligned} \quad (2.)$$

Die Transformation der Coordinaten geschehe nach den Formeln

$$\begin{aligned} x &= l_1 x' + l_2 y' + l_3 z' & x' &= l_1 x + m_1 y + n_1 z \\ y &= m_1 x' + m_2 y' + m_3 z' & y' &= l_2 x + m_2 y + n_2 z \\ z &= n_1 x' + n_2 y' + n_3 z' & z' &= l_3 x + m_3 y + n_3 z \end{aligned}$$

und den entsprechenden

$$\begin{aligned} u &= l_1 u' + l_2 v' + l_3 w' & u' &= l_1 u + m_1 v + n_1 w \\ v &= m_1 u' + m_2 v' + m_3 w' & v' &= l_2 u + m_2 v + n_2 w \\ w &= n_1 u' + n_2 v' + n_3 w' & w' &= l_3 u + m_3 v + n_3 w. \end{aligned}$$

Dann ergeben die Formeln (9.) und (10.) § 120

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial^2 u'}{\partial t^2} &= \mathfrak{A}_1 \frac{\partial \Delta}{\partial x} + \mathfrak{B}_1 \frac{\partial \Delta}{\partial y} + \mathfrak{C}_1 \frac{\partial \Delta}{\partial z} + n_1 \frac{\partial U}{\partial y} - m_1 \frac{\partial U}{\partial z} + l_1 \frac{\partial V}{\partial z} - n_1 \frac{\partial V}{\partial x} \\ &\quad + m_1 \frac{\partial W}{\partial x} - l_1 \frac{\partial W}{\partial y} \end{aligned}$$

und zwei ähnliche Gleichungen, in denen für $s_i = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}_i &= l_i A + m_i C_1 + n_i B_1 \\ \mathfrak{B}_i &= l_i C_1 + m_i B + n_i A_i \\ \mathfrak{C}_i &= l_i B_1 + m_i A_1 + n_i C\end{aligned}$$

gesetzt ist. Nun bestehen zwischen den neun Cosinus die Beziehungen

$$\begin{aligned}l_1 &= m_2 n_3 - m_3 n_2 & l_2 &= m_3 n_1 - m_1 n_3 & l_3 &= m_1 n_2 - m_2 n_1 \\ m_1 &= n_2 l_3 - n_3 l_2 & m_2 &= n_3 l_1 - n_1 l_3 & m_3 &= n_1 l_2 - n_2 l_1 \\ n_1 &= l_2 m_3 - l_3 m_2 & n_2 &= l_3 m_1 - l_1 m_3 & n_3 &= l_1 m_2 - l_2 m_1,\end{aligned}\quad (3.)$$

durch welche die Grösse

$$\begin{aligned}n_1 \frac{\partial U}{\partial y} - m_1 \frac{\partial U}{\partial z} &= (n_1 m_1 - m_1 n_1) \frac{\partial U}{\partial x'} + (n_1 m_2 - m_1 n_2) \frac{\partial U}{\partial y'} \\ &\quad + (n_1 m_3 - m_1 n_3) \frac{\partial U}{\partial z'}\end{aligned}$$

auf die einfachere Form gebracht wird:

$$\begin{aligned}n_1 \frac{\partial U}{\partial y} - m_1 \frac{\partial U}{\partial z} &= l_2 \frac{\partial U}{\partial x'} - l_3 \frac{\partial U}{\partial y'}, \\ \text{ebenso} \quad l_1 \frac{\partial V}{\partial z} - n_1 \frac{\partial V}{\partial x} &= m_2 \frac{\partial V}{\partial z'} - m_3 \frac{\partial V}{\partial y'}, \\ m_1 \frac{\partial W}{\partial x} - l_1 \frac{\partial W}{\partial y} &= n_2 \frac{\partial W}{\partial z'} - n_3 \frac{\partial W}{\partial y'}.\end{aligned}$$

Somit wird

$$\begin{aligned}\varepsilon \frac{\partial^2 u'}{\partial t^2} &= \mathfrak{A}_1 \frac{\partial \Delta}{\partial x} + \mathfrak{B}_1 \frac{\partial \Delta}{\partial y} + \mathfrak{C}_1 \frac{\partial \Delta}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x'} (l_2 U + m_2 V + n_2 W) \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial y'} (l_3 U + m_3 V + n_3 W)\end{aligned}$$

und, da hierin

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Delta}{\partial x} &= l_1 \frac{\partial \Delta}{\partial x'} + l_2 \frac{\partial \Delta}{\partial y'} + l_3 \frac{\partial \Delta}{\partial z'} \\ \frac{\partial \Delta}{\partial y} &= m_1 \frac{\partial \Delta}{\partial x'} + m_2 \frac{\partial \Delta}{\partial y'} + m_3 \frac{\partial \Delta}{\partial z'} \\ \frac{\partial \Delta}{\partial z} &= n_1 \frac{\partial \Delta}{\partial x'} + n_2 \frac{\partial \Delta}{\partial y'} + n_3 \frac{\partial \Delta}{\partial z'}\end{aligned}$$

ist, so erkennen wir, dass bei dieser Transformation die Form der Gleichungen (2.) wirklich gefunden wird, wenn

$$\begin{aligned}
 A' &= l_1 \mathfrak{A}_1 + m_1 \mathfrak{B}_1 + n_1 \mathfrak{C}_1 \\
 B' &= l_2 \mathfrak{A}_2 + m_2 \mathfrak{B}_2 + n_2 \mathfrak{C}_2 \\
 C' &= l_3 \mathfrak{A}_3 + m_3 \mathfrak{B}_3 + n_3 \mathfrak{C}_3 \\
 A_1' &= l_2 \mathfrak{A}_3 + m_2 \mathfrak{B}_3 + n_2 \mathfrak{C}_3 = l_3 \mathfrak{A}_2 + m_3 \mathfrak{B}_2 + n_3 \mathfrak{C}_2 \\
 B_1' &= l_3 \mathfrak{A}_1 + m_3 \mathfrak{B}_1 + n_3 \mathfrak{C}_1 = l_1 \mathfrak{A}_3 + m_1 \mathfrak{B}_3 + n_1 \mathfrak{C}_3 \\
 C_1' &= l_1 \mathfrak{A}_2 + m_1 \mathfrak{B}_2 + n_1 \mathfrak{C}_2 = l_2 \mathfrak{A}_1 + m_2 \mathfrak{B}_1 + n_2 \mathfrak{C}_1
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 U' &= l_1 U + m_1 V + n_1 W \\
 V' &= l_2 U + m_2 V + n_2 W \\
 W' &= l_3 U + m_3 V + n_3 W
 \end{aligned} \tag{4}$$

gesetzt wird. Die ersten dieser Gleichungen liefern folgende Werthe für die sechs durch grosse Buchstaben bezeichneten Constanten im neuen Coordinatensystem

$$\begin{aligned}
 A' &= l_1^2 A + m_1^2 B + n_1^2 C + 2m_1 n_1 A_1 + 2n_1 l_1 B_1 + 2l_1 m_1 C_1 \\
 B' &= l_2^2 A + m_2^2 B + n_2^2 C + 2m_2 n_2 A_1 + 2n_2 l_2 B_1 + 2l_2 m_2 C_1 \\
 C' &= l_3^2 A + m_3^2 B + n_3^2 C + 2m_3 n_3 A_1 + 2n_3 l_3 B_1 + 2l_3 m_3 C_1 \quad (5.) \\
 A_1' &= l_3 l_3 A + m_3 m_3 B + n_3 n_3 C + (m_3 n_3 + m_3 n_3) A_1 + (n_3 l_3 + n_3 l_3) B_1 \\
 &\quad + (l_3 m_3 + l_3 m_3) C_1 \\
 B_1' &= l_3 l_1 A + m_3 m_1 B + n_3 n_1 C + (m_3 n_1 + m_1 n_3) A_1 + (n_3 l_1 + n_1 l_3) B_1 \\
 &\quad + (l_3 m_1 + l_1 m_3) C_1 \\
 C_1' &= l_1 l_2 A + m_1 m_2 B + n_1 n_2 C + (m_1 n_2 + m_2 n_1) A_1 + (n_1 l_2 + n_2 l_1) B_1 \\
 &\quad + (l_1 m_2 + l_2 m_1) C_1.
 \end{aligned}$$

Aehnliche Gleichungen für die mit kleinen Buchstaben bezeichneten Constanten können wir aus den für U' , V' , W' erhaltenen Formeln herleiten, nachdem wir in den letzteren die Transformation vollständig durchgeführt haben werden. Es ist

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial v}{\partial z} &= m_1 \frac{\partial u'}{\partial z} + m_2 \frac{\partial v'}{\partial z} + m_3 \frac{\partial w'}{\partial z} \\
 \frac{\partial w}{\partial y} &= m_1 \frac{\partial w}{\partial x'} + m_2 \frac{\partial w}{\partial y'} + m_3 \frac{\partial w}{\partial z'}
 \end{aligned}$$

also

$$\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} = m_1 \left(\frac{\partial u'}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x'} \right) + m_2 \left(\frac{\partial v'}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y'} \right) + m_3 \left(\frac{\partial w'}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial z'} \right)$$

und hierin

$$\begin{aligned}\frac{\partial u'}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x'} &= n_2 \left(\frac{\partial u'}{\partial y'} - \frac{\partial v'}{\partial x'} \right) + n_3 \left(\frac{\partial u'}{\partial z'} - \frac{\partial w'}{\partial x'} \right) \\ \frac{\partial v'}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y'} &= n_1 \left(\frac{\partial v'}{\partial x'} - \frac{\partial u'}{\partial y'} \right) + n_3 \left(\frac{\partial v'}{\partial z'} - \frac{\partial w'}{\partial y'} \right) \\ \frac{\partial w'}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial z'} &= n_1 \left(\frac{\partial w'}{\partial x'} - \frac{\partial u'}{\partial z'} \right) + n_2 \left(\frac{\partial w'}{\partial y'} - \frac{\partial v'}{\partial z'} \right),\end{aligned}$$

also mit Rücksicht auf die zwischen den Cosinus stattfindenden Relationen (3.)

$$\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} = l_1 \left(\frac{\partial v'}{\partial z'} - \frac{\partial w'}{\partial y'} \right) + l_2 \left(\frac{\partial w'}{\partial x'} - \frac{\partial u'}{\partial z'} \right) + l_3 \left(\frac{\partial u'}{\partial y'} - \frac{\partial v'}{\partial x'} \right)$$

und ebenso

$$\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} = m_1 \left(\frac{\partial v'}{\partial z'} - \frac{\partial w'}{\partial y'} \right) + m_2 \left(\frac{\partial w'}{\partial x'} - \frac{\partial u'}{\partial z'} \right) + m_3 \left(\frac{\partial u'}{\partial y'} - \frac{\partial v'}{\partial x'} \right) \quad (6.)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = n_1 \left(\frac{\partial v'}{\partial z'} - \frac{\partial w'}{\partial y'} \right) + n_2 \left(\frac{\partial w'}{\partial x'} - \frac{\partial u'}{\partial z'} \right) + n_3 \left(\frac{\partial u'}{\partial y'} - \frac{\partial v'}{\partial x'} \right).$$

Setzen wir diese Werthe in die Gleichungen (9.) § 120 und die so gewonnenen Ausdrücke für U , V , W in die Gleichungen (4.) § 121 ein, so erhalten wir nach Vergleichung mit den Formeln (1.) § 121 für die noch übrigen sechs Constanten im neuen System folgende Werthe:

$$\begin{aligned}a' &= l_1^2 a + m_1^2 b + n_1^2 c - 2m_1 n_1 \alpha - 2n_1 l_1 \beta - 2l_1 m_1 \gamma \\ b' &= l_2^2 a + m_2^2 b + n_2^2 c - 2m_2 n_2 \alpha - 2n_2 l_2 \beta - 2l_2 m_2 \gamma \quad (7.) \\ c' &= l_3^2 a + m_3^2 b + n_3^2 c - 2m_3 n_3 \alpha - 2n_3 l_3 \beta - 2l_3 m_3 \gamma \\ -\alpha' &= l_2 l_3 a + m_2 m_3 b + n_2 n_3 c - (m_2 n_3 + m_3 n_2) \alpha - (n_2 l_3 + n_3 l_2) \beta \\ &\quad - (l_2 m_3 + l_3 m_2) \gamma \\ -\beta' &= l_3 l_1 a + m_3 m_1 b + n_3 n_1 c - (m_3 n_1 + m_1 n_3) \alpha - (n_3 l_1 + n_1 l_3) \beta \quad (8.) \\ &\quad - (l_3 m_1 + l_1 m_3) \gamma \\ -\gamma' &= l_1 l_2 a + m_1 m_2 b + n_1 n_2 c - (m_1 n_2 + m_2 n_1) \alpha - (n_1 l_2 + n_2 l_1) \beta \\ &\quad - (l_1 m_2 + l_2 m_1) \gamma.\end{aligned}$$

Nach diesem Endergebniss unserer Umrechnung auf das neue Coordinatensystem erreichen wir die beabsichtigte Vereinfachung der Formeln, indem wir über die Lage der Coordinatenachsen so verfügen, dass drei von den 12 Constanten verschwinden, und zwar, dass

$$\alpha' = 0, \quad \beta' = 0, \quad \gamma' = 0$$

werde. So erhalten wir nach einer geringen Umgestaltung der beiden

letzten Gleichungen (8.) folgende Bedingungen für die Lage der gewählten Coordinaten

$$0 = l_3(l_1 a - m_1 \gamma - n_1 \beta) + m_3(-l_1 \gamma + m_1 b - n_1 \alpha) + n_3(-l_1 \beta - m_1 \alpha + n_1 c)$$

$$0 = l_2(l_1 a - m_1 \gamma - n_1 \beta) + m_2(-l_1 \gamma + m_1 b - n_1 \alpha) + n_2(-l_1 \beta - m_1 \alpha + n_1 c)$$

und hieraus durch einfache Elimination unter Beachtung der Relationen (3.)

$$\frac{l_i a - m_i \gamma - n_i \beta}{l_i} = \frac{-l_i \gamma + m_i b - n_i \alpha}{m_i} = \frac{-l_i \beta - m_i \alpha + n_i c}{n_i}, \quad (9.)$$

wo der Index 1 mit dem allgemeineren Zeichen i vertauscht worden ist, weil die Formeln auch für $i = 2$ und $i = 3$ gelten; dieselben bestimmen also alle drei Coordinatenrichtungen des gesuchten Systems.

Die Gleichungen (9.) stimmen vollständig mit denjenigen überein, durch welche die Lage der Axen einer Oberfläche zweiter Ordnung angegeben wird, deren Gleichung

$$\frac{1}{\sigma^2} = l^2 a + m^2 b + n^2 c - 2mna - 2nl\beta - 2lm\gamma$$

ist, wenn unter $l\sigma$, $m\sigma$, $n\sigma$ die rechtwinkligen Coordinaten und unter σ der Radiusvector verstanden wird. Das gesuchte Coordinatensystem liegt also den Axen diese Oberfläche parallel. Daraus folgt, dass es wirklich ein solches Coordinatensystem giebt, zugleich aber, dass es nur ein einziges giebt.

Ebenso existirt ein ähnliches, durch die Gleichungen

$$\frac{l_i A + m_i C + n_i B}{l_i} = \frac{l_i C + m_i B + n_i A}{m_i} = \frac{l_i B + m_i A + n_i C}{n_i} \quad (10.)$$

bestimmtes zweites Coordinatensystem, für welches die in den Gleichungen (5.) angegebenen Grössen

$$A'_1 = 0, \quad B'_1 = 0, \quad C'_1 = 0$$

verschwinden. Dieses braucht mit dem ersten nicht zusammenzufallen. Unsere Betrachtung führt uns also auf eine Doppelnatur des Mediums, insofern nämlich, als Eigenschaften verschiedener Art sich auf verschiedene Axensysteme beziehen können, ein Punkt, auf den wir zurückkommen (§ 125).

Wählt man das durch die Gleichungen (9.) charakterisirte Coordinatensystem, so werden die Grössen U , V , W (Gleichg. (9.) § 120)

$$U = a \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad V = b \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad W = c \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (11.)$$

und demnach die Differentialgleichungen (10.) § 120

$$\begin{aligned}
 \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= A \frac{\partial \Delta}{\partial x} + C_1 \frac{\partial \Delta}{\partial y} + B_1 \frac{\partial \Delta}{\partial z} + c \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\
 &\quad - b \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\
 \varepsilon \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= C_1 \frac{\partial \Delta}{\partial x} + B \frac{\partial \Delta}{\partial y} + A_1 \frac{\partial \Delta}{\partial z} + a \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\
 &\quad - c \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\
 \varepsilon \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= B_1 \frac{\partial \Delta}{\partial x} + A_1 \frac{\partial \Delta}{\partial y} + C \frac{\partial \Delta}{\partial z} + b \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\
 &\quad - a \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right).
 \end{aligned} \tag{12.}$$

Die transversale Welle, bei welcher $\Delta = 0$ ist, hängt also von nur drei Constanten a, b, c ab, welche, wie sich nach Ausführung der Integration zeigen wird, die Quadrate der drei Axen der Fresnel'schen Elasticitätsoberfläche bestimmen.

§ 122. Integration. Longitudinale Welle.

Diese Differentialgleichungen integriren wir durch die schon in § 120 benutzte Annahme, dass an allen Stellen einer Ebene

$$s = px + qy + rz$$

gleiche Richtung und Grösse der Verrückung und Geschwindigkeit stattfindet, so dass

$$u = M\varphi(s \pm \omega t)$$

$$v = N\varphi(s \pm \omega t)$$

$$w = P\varphi(s \pm \omega t)$$

gesetzt werden kann, worin, wie früher, φ eine willkürliche Function, ω die Fortpflanzungsgeschwindigkeit und M, N, P die durch die Relation

$$M^2 + N^2 + P^2 = 1$$

verbundenen Cosinus sind, welche die Richtung der Verrückung und der Bewegung mit den Coordinatenaxen bildet. Setzen wir zur Abkürzung

$$\begin{aligned}
 \Delta = \{Mp + Nq + Pr\} \frac{\partial \varphi}{\partial s} &= D \frac{\partial \varphi}{\partial s} \\
 Ap + C_1q + B_1r &= A \\
 C_1p + Bq + A_1r &= B \\
 B_1p + A_1q + Cr &= \Gamma,
 \end{aligned} \tag{1.}$$

so erhalten wir durch Einsetzen der Werthe von u, v, w in die Differentialgleichungen (12.) § 121

$$\begin{aligned}
\varepsilon M\omega^2 &= AD + (cq^2 + br^2)M - cpqN - brpP \\
\varepsilon N\omega^2 &= BD - cpqM + (ar^2 + cp^2)N - aqrP \\
\varepsilon P\omega^2 &= \Gamma D - brpM - aqrN + (bp^2 + aq^2)P.
\end{aligned} \tag{2.}$$

Aus diesen Gleichungen können wir ebenso wie in § 95 die Verhältnisse von M , N , P bestimmen und eine cubische Gleichung zur Bestimmung von ω^2 erhalten. Wir finden also ebenfalls drei Wellenpaare, die sich mit verschiedenen Geschwindigkeiten fortpflanzen; für jede dieser Wellen sind M , N , P und damit die Richtung der Bewegung vollkommen bestimmt.

Die drei Wurzeln der cubischen Gleichung leiten wir durch eine indirecte Betrachtung ab, indem wir die erste Gleichung (2.) mit p , die zweite mit q , die dritte mit r multipliciren und darauf alle drei addiren; hierdurch wird

$$\begin{aligned}
\varepsilon \{Mp + Nq + Pr\} \omega^2 &= (pA + qB + r\Gamma)D \\
\text{oder } D\{\varepsilon\omega^2 - (pA + qB + r\Gamma)\} &= 0.
\end{aligned} \tag{3.}$$

Diese Gleichung ergiebt sofort, dass eine Wurzel der cubischen Gleichung

$$\varepsilon\omega^2 = pA + qB + r\Gamma$$

ist oder vermöge der Bedeutung von A , B , Γ

$$\varepsilon\omega^2 = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + 2A_1qr + 2B_1rp + 2C_1pq. \tag{4.}$$

Setzt man diesen Werth in die Glchg. (2.), um durch Bestimmung von M , N , P die Richtung der Bewegung in der Welle zu finden, so ergiebt sich kein ganz einfaches Gesetz. Es zeigt sich, dass im Allgemeinen die Richtung der Bewegung nicht senkrecht gegen die Wellenebene steht. Streng genommen ist die Welle also keine longitudinale; sie ist aber eine solche, dass Δ nicht verschwindet, dass sie also mit Verdünnung oder Verdichtung verknüpft ist; in diesem Sinne kann man sie eine longitudinale nennen¹⁾.

1) Damit die Welle im strengen Sinn longitudinal sei, ist erforderlich, dass

$$A = B = C, \quad A_1 = B_1 = C_1 = 0$$

sei; denn wenn

$$M = p, \quad N = q, \quad P = r, \quad \text{also } D = 1$$

sein soll, muss nach den Gleichungen (2.)

$$\frac{A}{p} = \frac{B}{q} = \frac{\Gamma}{r}$$

sein, woraus nach (1.) obige Bedingungen folgen.

§ 123. Transversale Wellen. Fresnel's Gesetze.

Hat ω nicht den durch die Gleichung (4.) bestimmten Werth, so kann die Glchg. (3.) nur bestehen, wenn

$$D = 0$$

ist. Dieses benutzen wir zur Auffindung der beiden andern Wurzeln der cubischen Gleichung. Führen wir diese Bedingung in die Glchg. (2.) ein, so werden dieselben

$$\begin{aligned} 0 &= (cq^2 + br^2 - \varepsilon\omega^2)M - cpqN - brpP \\ 0 &= -cpqM + (cp^2 + ar^2 - \varepsilon\omega^2)N - aprP \\ 0 &= -brpM - aqrN + (bp^2 + aq^2 - \varepsilon\omega^2)P. \end{aligned} \quad (1)$$

Hieraus folgt die cubische Gleichung

$$\begin{aligned} 0 &= (cq^2 + br^2 - \varepsilon\omega^2)(cp^2 + ar^2 - \varepsilon\omega^2)(bp^2 + aq^2 - \varepsilon\omega^2) \\ &\quad - (aqr)^2(cq^2 + br^2 - \varepsilon\omega^2) - (bpr)^2(ar^2 + cp^2 - \varepsilon\omega^2) \\ &\quad - (cpq)^2(bp^2 + aq^2 - \varepsilon\omega^2) - 2abc p^2 q^2 r^2 \end{aligned}$$

oder durch Auflösen der drei Factoren des ersten Gliedes

$$\begin{aligned} \varepsilon\omega^2 \{ \varepsilon^2\omega^4 - [p^2(b+c) + q^2(a+c) + r^2(a+b)]\varepsilon\omega^2 \\ + bcp^2 + acq^2 + abr^2 \} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Die Wurzel $\omega = 0$ dieser Gleichung hat keine physikalische Bedeutung, da sie eine Welle gäbe, die sich nicht fortpflanzt, d. h. keine Welle. Es bleibt also eine quadratische Gleichung, welche in geläufigerer Form lautet:

$$0 = \frac{p^2}{\varepsilon\omega^2 - a} + \frac{q^2}{\varepsilon\omega^2 - b} + \frac{r^2}{\varepsilon\omega^2 - c}. \quad (3)$$

Diese Formel ist uns bereits bekannt (§§ 111 und 117). Sie ist keine andere, als diejenige, welche sich aus der Fresnel'schen Construction mittelst der Elasticitätsoberfläche ergibt. Demnach ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer der beiden transversalen Wellen ausgedrückt durch den grössten oder kleinsten Radius des der Wellenebene angehörigen Ovalschnitts der Elasticitätsoberfläche.

Aus unserer Voraussetzung der Existenz transversaler Wellen mit geradlinigen Schwingungen folgt also nicht die Möglichkeit des Fresnel'schen Gesetzes, sondern es folgt dieses Gesetz als das einzig mögliche in aller Strenge, und deshalb auch als das allgemeine für jeden Fall, wo transversale Wellen mit geradlinigen Schwingungen auftreten; seine Gültigkeit ist also nicht an die Bedingung gebunden, dass das Medium durch drei rechtwinklige Ebenen symmetrisch theilbar sei. Dieses Resultat hat etwas Auf-

fallendes und Ueberraschendes. Der lange gehegte Zweifel, ob das Fresnel'sche Gesetz auch für unsymmetrische Krystalle seine volle Gültigkeit behalte, muss auf Grund dieser Untersuchung aufgegeben werden, da wir jetzt wissen, dass es allgemein gelten muss, wenn nur geradlinige Polarisirung vorhanden ist.

Es bleibt noch zu untersuchen, ob unsere Resultate auch hinsichtlich der Lage der Polarisirungsebene in Uebereinstimmung mit den Fresnel'schen Gesetzen sind, nach welchen bekanntlich die Richtung der Bewegung zusammenfallen soll mit der Richtung derjenigen Ovalaxe, deren Länge die Fortpflanzungsgeschwindigkeit angiebt.

Wir suchen M , N , P für den Fall, dass ω gleich einer der beiden Wurzeln ω_1 und ω_2 der quadratischen Gleichung (2.) oder (3.) ist. Diese Werthe erfüllen die Gleichungen

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \omega_1^2 \omega_2^2 &= bcp^2 + acq^2 + abr^2 \\ \varepsilon(\omega_1^2 + \omega_2^2) &= (b+c)p^2 + (a+c)q^2 + (a+b)r^2. \end{aligned} \quad (4.)$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung (1.)

$$(cq^2 + br^2 - \varepsilon\omega^2)M = p(cqN + brP)$$

mit a und addiren dazu die identische Gleichung

$$bcp^2M = bcp^2M,$$

so erhalten wir

$$(bcp^2 + acq^2 + abr^2 - a\varepsilon\omega^2)M = pQ,$$

worin zur Abkürzung

$$Q = bcpM + acqN + abrP$$

gesetzt wurde. Durch Benutzung der ersten Gleichung (4.) wird diese Formel

$$(\varepsilon^2 \omega_1^2 \omega_2^2 - a\varepsilon\omega^2)M = pQ,$$

ebenso ist

$$(\varepsilon^2 \omega_1^2 \omega_2^2 - b\varepsilon\omega^2)N = qQ$$

$$(\varepsilon^2 \omega_1^2 \omega_2^2 - c\varepsilon\omega^2)P = rQ.$$

Setzen wir hierin $\omega = \omega_1$, so finden wir, dass die Richtung der Bewegung in derjenigen Welle, welche sich mit der Geschwindigkeit ω_1 fortpflanzt, durch die Cosinus

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{pQ_1}{(\varepsilon\omega_2^2 - a)\varepsilon\omega_1^2}, \\ N_1 &= \frac{qQ_1}{(\varepsilon\omega_2^2 - b)\varepsilon\omega_1^2}, \\ P_1 &= \frac{rQ_1}{(\varepsilon\omega_2^2 - c)\varepsilon\omega_1^2} \end{aligned}$$

bestimmt wird. Bilden wir mit diesen Werthen die Gleichung

$$M_1^2 + N_1^2 + P_1^2 = 1,$$

so erhalten wir zur Bestimmung von Q_1

$$Q_1 = \varepsilon \omega_1^2 g_2,$$

wenn, wie in § 112, zur Abkürzung

$$g_2^2 \left\{ \left(\frac{p}{a - \varepsilon \omega_2^2} \right)^2 + \left(\frac{q}{b - \varepsilon \omega_2^2} \right)^2 + \left(\frac{r}{c - \varepsilon \omega_2^2} \right)^2 \right\} = 1$$

gesetzt wird. Für die gesuchten Cosinus der Winkel, welche die Schwingungsrichtung in der mit der Geschwindigkeit ω_1 fortschreitenden Welle mit den Coordinatenaxen bildet, ergeben sich also die Werthe

$$M_1 = \frac{p g_2}{\varepsilon \omega_2^2 - a}, \quad N_1 = \frac{q g_2}{\varepsilon \omega_2^2 - b}, \quad P_1 = \frac{r g_2}{\varepsilon \omega_2^2 - c},$$

welche vollständig mit denjenigen übereinstimmen, welche Fresnel's Constructionsverfahren für die Richtungscosinus der zweiten Axe ω_2 des Ovalschnittes liefert.

Nach dieser Theorie gelangen wir abermals zu dem Ergebniss, dass die Grösse der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle durch die Länge der einen Ovalaxe, die Schwingungsrichtung in derselben Welle durch die Lage der anderen Ovalaxe der Fresnel'schen Oberfläche gegeben wird. Das ist nicht das angeführte Gesetz Fresnel's. Wir sind aber in vollkommener Uebereinstimmung mit der Erfahrung, wenn wir seine Definition der Polarisations-ebene umkehren und darunter diejenige Ebene verstehen, in welcher die Bewegung stattfindet, nicht die darauf senkrechte.

Wir bemerken dabei, dass diese von Fresnel abweichende Definition der Polarisations-ebene, welche im Jahre 1832 vom Verfasser aufgestellt wurde und seitdem als die Neumann'sche Definition jener Ebene bezeichnet wird, ebenso allgemein aus den der Theorie zu Grunde gelegten Principien der Existenz transversaler geradlinig polarisirter Wellen folgt, wie der erste Theil des Fresnel'schen Gesetzes, welcher die Grösse der Fortpflanzungsgeschwindigkeit betrifft.

Aus Lamé's Theorie ergeben sich somit wiederum die Gesetze Fresnel's vollständig und in aller Strenge, wenn wir Neumann's Festsetzung der Lage der Polarisations-ebene annehmen.

§ 124. Bedingung der Incompressibilität.

Unsere Betrachtung hat wieder zu drei Wellen geführt, zu zwei transversalen und einer longitudinalen. Fügen wir zu den drei in § 120 eingeführten Hypothesen noch die vierte hinzu, das Medium sei incompressibel, so können wir dies unmittelbar in die Gleichungen einführen, indem wir zu jeder Gleichung (12.) § 121 rechter Hand als Componente des hydrostatischen Drucks den negativen Differentialquotienten des Drucks λ nach der entsprechenden Coordinate hinzufügen, dabei aber die weitere Bedingung berücksichtigen, dass die Dilatation

$$\Delta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

ist. Dann werden jene Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) - b \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \frac{\partial \lambda}{\partial x} \\ \varepsilon \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= a \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) - c \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{\partial \lambda}{\partial y} \\ \varepsilon \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= b \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) - a \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \frac{\partial \lambda}{\partial z}. \end{aligned} \quad (2.)$$

Diese Gleichungen stimmen vollständig mit denen ((3.) § 114) überein, auf welche Carl Neumann's Theorie führte. Nur hat die Grösse λ eine etwas andere Bedeutung. Wir erreichen durch diese Aenderung der Lamé'schen Theorie, dass nicht die dritte, longitudinale Welle, welche durch die Beobachtung nicht nachgewiesen ist, auftritt, sondern es bleiben nur zwei reine Lichtwellen, welche in jeder Hinsicht den durch die Erfahrung gelieferten Gesetzen entsprechen.

§ 125. Verschiedene Axensysteme eines krystallinischen Mediums.

Wir kommen zurück auf die Wichtigkeit des in § 121 gefundenen Resultats, dass in einem Krystalle zwei, im Allgemeinen verschiedene Axensysteme liegen, von denen das eine die Gesetze der longitudinalen, das andere die der transversalen Wellen bestimmt. Die physikalischen Eigenschaften eines Krystalls können also nach verschiedenen Systemen rechtwinkliger Ebenen symmetrisch vertheilt sein. Diese verschiedenen Axensysteme brauchen nur dann zusammenzufallen, wenn die Substanz durch drei rechtwinklige Ebenen symmetrisch theilbar ist. Dieses scheint durch die Erfahrung allgemein bestätigt zu werden, da kein derartiges Medium bekannt ist, in welchem z. B. die optischen Elasticitätsaxen eine andere Lage hätten, als die sonstigen Symmetrieaxen.

Ist jene symmetrische Theilung der Krystallstructur nicht vorhanden, so wäre es nach der Theorie nicht unmöglich, dass auch in diesem Falle die verschiedenen Axensysteme zusammenfallen. Doch scheint dieses in Widerspruch zu stehen mit der Erfahrung, welche sich hauptsächlich auf das optische Axensystem und das Axensystem der grössten und der kleinsten Ausdehnung durch die Wärme bezieht, welches letzteres wir als System der thermischen Axen bezeichnen. Freilich hat der Verfasser durch Beobachtungen an Gypskrystallen gefunden¹⁾, dass bei diesem Stoffe die optischen und die thermischen Axen so nahe zusammenfallen, dass eine Abweichung nicht messbar war, doch kann dieses Zusammentreffen nur annäherungsweise stattfinden, wie aus einer späteren Beobachtung des Verfassers²⁾ hervorgeht. Bei einer genaueren Untersuchung der von Mitscherlich entdeckten Thatsache, dass die optischen Axen eines zweiaxigen Krystalls ihre Lage gegen einander bei Erwärmung oder Abkühlung verändern, bemerkte der Verfasser, dass die beiden Axen sich mit ungleicher Geschwindigkeit bewegen, und machte damit die Entdeckung, dass nicht bloss die beiden Richtungen einfacher Lichtbrechung, sondern auch das rechtwinklige Axensystem, von welchem die optischen Eigenschaften abhängen, eine mit der Temperatur veränderliche Lage im Krystall hat. Hieraus folgt, dass die optischen Elasticitätsaxen nicht bei jeder Temperatur mit den thermischen zusammenfallen können. Es giebt also in der That in derartigen Krystallen zwei Axensysteme verschiedener Richtung.

Wenn wir andere physikalische Erscheinungen mit in den Kreis unserer Betrachtung ziehen, so fragt es sich, ob auch diese sich auf eins jener beiden Axensysteme beziehen. Plücker³⁾ hat die schöne und wichtige Entdeckung gemacht, dass die diamagnetischen Erscheinungen an Krystallen von demselben Axensystem abhängen, wie die optischen, so dass man aus der magnetischen Wirkung auf einen Krystall auf die Lage seiner optischen Axen schliessen kann, z. B. bestimmen, ob der Krystall ein ein- oder ein zweiaxiger ist. Doch fallen andere Axensysteme mit den genannten nicht zusammen, wie z. B. nach Ångström's⁴⁾ Beobachtung die

1) F. Neumann, Poggendorff's Annalen, Band 27, S. 240. 1833.

2) F. Neumann, Poggendorff's Annalen Bd. 35, S. 81 u. 203. 1835.

3) Plücker, Pogg. Ann. Bd. 72 u. folgende Bde. Plücker und Beer, Bd. 81 u. 82.

4) Ångström, Pogg. Ann. Bd. 86, S. 206, 1852. Sénarmont, Pogg. Ann. Bd. 73, 74, 75.

Hauptaxen der Wärmeleitungsfähigkeit oder die Richtungen des Maximums und Minimums der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wärme, die ebenfalls auf einander rechtwinklig stehen. Aehnlich verhält es sich mit der verschiedenen Leitungsfähigkeit für Elektrizität¹⁾, mit der Vertheilung der Härte²⁾, der Stärke der Verwitterung³⁾, welche sich alle auf verschiedenen gelegene Axensysteme beziehen; und endlich können auch die krystallographischen Axen selber eine von allen diesen abweichende Lage im Krystall haben. Bei dieser Verwickelung der Verhältnisse erscheint es als das Wahrscheinlichste, dass die veränderliche Lage aller dieser Axensysteme von einem anderen festen Axensystem abhängt, falls nicht schon eins der genannten jenes vermuthete feste ist.

§ 126. Ueber die Aenderung der optischen Axen mit der Temperatur.

Dass die im Vorstehenden erwähnte Aenderung der Richtung der optischen Hauptaxen mit der Temperatur auch vom Standpunkte unserer Theorie zu erwarten stand, lehrt folgende Betrachtung, welcher wir die Annahme zu Grunde legen, dass die Lamé'schen Formeln (§ 120) nicht nur für die Bewegungen des Lichtäthers in Krystallen gelten, sondern dass auch für die elastischen Formveränderungen der Krystallsubstanz selber Gleichungen von derselben Gestalt massgebend sind.

Unter dieser Voraussetzung behandeln wir noch einmal die schon in § 85 nach anderen Formeln gelöste Aufgabe, die Zusammendrückung eines Krystalls durch einen gleichmässig auf seine Oberfläche wirkenden Druck zu berechnen. Wenn wir in die Gleichungen (2.) § 85 die Lamé'schen Werthe der Druckcomponenten aus den Formeln (8.) § 120 einführen, so erhalten wir folgende Bedingungen

$$\begin{aligned} -D &= A\Delta - 2c \frac{\partial v}{\partial y} - 2b \frac{\partial w}{\partial z} & 0 &= A_1\Delta + a \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ -D &= B\Delta - 2a \frac{\partial w}{\partial z} - 2c \frac{\partial u}{\partial x} & 0 &= B_1\Delta + b \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ -D &= C\Delta - 2b \frac{\partial u}{\partial x} - 2a \frac{\partial v}{\partial y} & 0 &= C_1\Delta + c \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \end{aligned}$$

1) G. Wiedemann, Pogg. Ann. Bd. 76 und 77. Sénarmont, Ann. Chim. t. 28. 1850.

2) Seebeck, Frankenheim, Franz u. A.

3) Pape, Pogg. Ann. Bd. 124, 125, 133, 135.

in welchen die Coordinaten und Verrückungen auf diejenigen Richtungen, für welche die Constanten α, β, γ verschwinden, also auf die optischen Hauptaxen bezogen sind. Diesen Bedingungen genügen wir durch die linearen Functionen

$$\begin{aligned} u &= H_1 x + h_2 y + h_3 z \\ v &= h_2 x + H_2 y + h_1 z \\ w &= h_3 x + h_1 y + H_3 z, \end{aligned}$$

in welchen die Coefficienten durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} \Delta = H_1 + H_2 + H_3 &= \frac{a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc - 2ca}{aA(b+c-a) + bB(c+a-b) + cC(a+b-c) - 4abc} D, \\ H_1 &= \frac{b+c-a}{4bc} D + \frac{Bb + Cc - Aa}{4bc} \Delta, \\ H_2 &= \frac{c+a-b}{4ca} D + \frac{Cc + Aa - Bb}{4ca} \Delta, \\ H_3 &= \frac{a+b-c}{4ab} D + \frac{Aa + Bb - Cc}{4ab} \Delta, \\ h_1 &= -\frac{1}{2} \frac{A_1}{a} \Delta, \quad h_2 = -\frac{1}{2} \frac{B_1}{b} \Delta, \quad h_3 = -\frac{1}{2} \frac{C_1}{c} \Delta \end{aligned}$$

bestimmt sind.

Aus der Bemerkung, dass h_1, h_2, h_3 im Allgemeinen nicht verschwinden, folgt, dass die Axen des durch u, v, w bestimmten Dilatationsellipsoides nicht mit den Coordinatenaxen, d. h. nicht mit dem optischen Axensystem zusammenzufallen brauchen. Nun sind aber die Axen des Dilatationsellipsoides die einzigen Linien, welche bei der Dilatation ihre Lage nicht ändern. Daraus geht hervor, dass durch einen allseitigen Druck auf die Oberfläche eines Krystalls die optischen Hauptaxen desselben und also auch die optischen Farbenaxen ihre Lage ändern werden.

Da eine Temperaturänderung denselben Effect hat, wie ein constanter auf die Oberfläche ausgeübter Druck, so folgt, dass dasselbe für eine Temperaturänderung gilt. Die optischen Haupt- und Farbenaxen ändern also ihre Lage im Krystalle mit der Temperatur desselben.

16. Cauchy's Erklärung der Farbenzerstreuung.

§ 127. Begründung der Theorie.

Es ist seit Newton, seit Euler sehr schwierig gewesen, die ungleiche Brechbarkeit der Lichtstrahlen verschiedener Farbe zu erklären, also den Grund der Thatsache aufzufinden, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von der Undulationsdauer nicht unabhängig ist. Auch unsere bisher aufgestellten Formeln geben keinerlei Rechenschaft von der Möglichkeit dieses Verhältnisses. Hieraus folgt mit Nothwendigkeit, dass wir in der ersten Herleitung der Gesetze der Wellenbewegung aus theoretischen Principien nicht alle Kräfte berücksichtigt haben, welche auf diese Bewegung von Einfluss sein können.

Reflectirt man über den analytischen Grund, weshalb unsere Herleitung keinen Aufschluss über die Dispersion des Lichts ergab, auch nur einen Augenblick, so sieht man gleich, dass derselbe nur darin liegen kann, dass unsere allgemeinen Differentialgleichungen nur solche Glieder enthalten, welche aus zweiten Differentialquotienten bestehen. Integriren wir, indem wir statt der willkürlichen Functionen

$$\varphi(s \pm \omega t)$$

eine bestimmte, die für das Licht gebräuchliche (§ 104)

$$\sin\left(\frac{t}{T} - \frac{s}{\lambda}\right) 2\pi$$

einsetzen, so erhalten wir auf der linken Seite als Factor das reciproke Quadrat der Schwingungszeit T , auf der rechten dagegen das reciproke Quadrat der Wellenlänge λ . Berücksichtigen wir dazu die Relation

$$\lambda = \omega T,$$

in welcher ω die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist, so verschwindet die Schwingungsdauer T aus der Formel. Wir können also keine Werthe von ω erhalten, welche von T oder von der Undulations-

länge abhängen, sondern nur, wie es in der That der Fall war, constante Werthe. So würde es sich aber nicht mehr verhalten, wenn in den Gleichungen auch höhere Differentialquotienten als die zweiten vorkämen.

Der Grundgedanke der von Cauchy¹⁾ versuchten Erklärung der Farbenzerstreuung beruht nun auf der Bemerkung, dass in der allgemeinen Theorie Reihenentwicklungen ausgeführt wurden, von welchen wir nur die ersten Glieder beibehielten. Dieses gilt besonders von den in den Gleichungen (1.) § 23 enthaltenen Entwicklungen der relativen Verrückungen zweier benachbarten Theilchen; wir beschränkten diese Reihen auf die ersten Glieder, indem wir die höheren Potenzen der relativen Coordinaten vernachlässigten. Dieses Verfahren kann, wenn es sich um Anwendung auf Lichtwellen handelt, Bedenken erregen; denn bei der Kleinheit der Wellenlänge erscheint es trotzdem, dass die Verrückungen u, v, w selber sehr klein sein mögen, dennoch leicht möglich, dass die in jenen Entwicklungen vorkommenden Differentialquotienten der Verrückungen nach den Coordinaten nicht unerhebliche Werthe annehmen, da die Functionen u, v, w ihre Grösse so rasch ändern, dass sie auf der kleinen Strecke einer Wellenlänge ihr Vorzeichen wechseln. Andererseits ist es nicht unwahrscheinlich, dass die Berücksichtigung der vernachlässigten kleinen Grössen völlig ausreicht, um die ebenfalls geringen Unterschiede in den Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der verschiedenen Farben zu erklären.

Wir nehmen also statt der abgekürzten Reihen (1.) § 23 die vollständige Entwicklung, wie sie bereits in den Formeln (3.) § 34 angegeben wurde, und setzen in denselben

$$\begin{aligned} u &= M \sin \left(\frac{t}{T} - \frac{s}{\lambda} \right) 2\pi \\ v &= N \sin \left(\frac{t}{T} - \frac{s}{\lambda} \right) 2\pi \\ w &= P \sin \left(\frac{t}{T} - \frac{s}{\lambda} \right) 2\pi, \end{aligned} \quad (1.)$$

wo T und λ Undulationszeit und Wellenlänge, M, N, P unbestimmte Constanten bedeuten, während

$$s = px + qy + rz$$

die Normale der Wellenebene darstellt. Dann erhalten wir für die

1) Nouveaux exercices de mathématiques. Prague 1835. 36. Auch unter dem Titel: Mémoire sur la dispersion de la lumière.

relativen Verrückungen zweier durch die relativen Coordinaten a, b, c auf einander bezogener Stellen folgende Ausdrücke

$$\Delta u = -M \left\{ \omega_1 \cos \left(\frac{t}{T} - \frac{s}{\lambda} \right) 2\pi - \frac{1}{1.2} \omega_2 \sin \left(\frac{t}{T} - \frac{s}{\lambda} \right) 2\pi + \dots \right\}$$

$$\Delta v = -N \left\{ \omega_1 \cos \left(\frac{t}{T} - \frac{s}{\lambda} \right) 2\pi - \frac{1}{1.2} \omega_2 \sin \left(\frac{t}{T} - \frac{s}{\lambda} \right) 2\pi + \dots \right\}$$

$$\Delta w = -P \left\{ \omega_1 \cos \left(\frac{t}{T} - \frac{s}{\lambda} \right) 2\pi - \frac{1}{1.2} \omega_2 \sin \left(\frac{t}{T} - \frac{s}{\lambda} \right) 2\pi + \dots \right\},$$

in welchen zur Abkürzung

$$\omega_1 = 2\pi \frac{pa + qb + rc}{\lambda}$$

$$\omega_2 = 4\pi^2 \frac{p^2 a^2 + q^2 b^2 + r^2 c^2 + 2pqab + 2qrb c + 2rpca}{\lambda^2}$$

gesetzt ist. Wenn wir hierin die zweiten und höheren Potenzen der Verhältnisse, in welchen die Molekularabstände a, b, c zu der Wellenlänge λ stehen, nicht mehr vernachlässigen, thun wir nichts Anderes, als dass wir uns die für das Licht wohl mögliche Vorstellung bilden, dass die Wirkungsweite der Molekeln auf einander im Verhältniss zur Wellenlänge nicht verschwindend klein sei.

Dabei nehmen wir aber immer noch an, dass $\Delta u, \Delta v, \Delta w$ so klein sind, dass die Quadrate dieser Grössen gegen ihre ersten Potenzen zu vernachlässigen sind. Das aber ist unzweifelhaft gestattet, wenn die Amplituden M, N, P der Schwingungen so klein sind, dass wir ihre Quadrate vernachlässigen können. Daraus folgt, dass wir für die durch Formel (2.) § 23 bestimmte Änderung der Entfernung ϱ zweier Nachbartheilchen noch wie früher

$$\Delta \varrho = \frac{a\Delta u + b\Delta v + c\Delta w}{\varrho}$$

setzen dürfen, sowie dass wir auch von $\Delta \varrho$ nur die erste Potenz zu berücksichtigen brauchen. Hieraus entsteht der grosse Vortheil, dass unsere Gleichungen linear bleiben.

§ 128. Bildung der Differentialgleichungen.

Zwei Theilchen m und m' , deren Entfernung von einander ϱ und deren relative Coordinaten a, b, c sind, mögen eine Kraft auf einander ausüben, deren Componenten wir durch

$$mm' \frac{a}{\varrho} f(\varrho), \quad mm' \frac{b}{\varrho} f(\varrho), \quad mm' \frac{c}{\varrho} f(\varrho)$$

bezeichnen, indem wir unter $f(\varrho)$ eine nur von ϱ abhängende Function verstehen. Der Zustand der Ruhe und des Gleichgewichts ist dadurch bestimmt, dass die Summe aller auf ein Theilchen m' ausgeübten Wirkungen verschwindet, dass also

$$0 = m' \sum m \frac{a}{\varrho} f(\varrho)$$

$$0 = m' \sum m \frac{b}{\varrho} f(\varrho)$$

$$0 = m' \sum m \frac{c}{\varrho} f(\varrho)$$

ist, wenn die Summierung über alle einwirkenden Theilchen m ausgedehnt wird, so dass die Grössen a, b, c in den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ variiren.

Erleidet nun m eine Verschiebung um die Grössen $\Delta u, \Delta v, \Delta w$ gegen m' , so wird die Summe der Componenten nach der Richtung der ersten Coordinate

$$X = m' \sum m \frac{a + \Delta u}{\varrho + \Delta \varrho} f(\varrho + \Delta \varrho),$$

wofür wir unter Rücksicht auf vorstehende Gleichungen und bei Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung auch

$$X = m' \sum m \left\{ \frac{\Delta u}{\varrho} f(\varrho) + \frac{a}{\varrho} \Delta \varrho \psi(\varrho) \right\}$$

schreiben können, wenn

$$\psi(\varrho) = \varrho \frac{d}{d\varrho} \left(\frac{f(\varrho)}{\varrho} \right)$$

gesetzt wird, und ähnlich die beiden andern Componenten. Ersetzen wir $\Delta \varrho$ nach einer im vorigen § angegebenen Formel durch die Componenten der relativen Verschiebung, so wird

$$X = m' \sum m \left\{ \left(\frac{1}{\varrho} f(\varrho) + \frac{a^2}{\varrho^2} \psi(\varrho) \right) \Delta u + \frac{ab}{\varrho^2} \psi(\varrho) \Delta v + \frac{ac}{\varrho^2} \psi(\varrho) \Delta w \right\}.$$

Daraus folgt, dass die Differentialgleichungen, welche die Bewegung eines beliebigen Theilchens m' bestimmen, die Form

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum m \left\{ \left(\frac{1}{\varrho} f(\varrho) + \frac{a^2}{\varrho^2} \psi(\varrho) \right) \Delta u + \frac{ab}{\varrho^2} \psi(\varrho) \Delta v + \frac{ac}{\varrho^2} \psi(\varrho) \Delta w \right\}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \sum m \left\{ \frac{ab}{\varrho^2} \psi(\varrho) \Delta u + \left(\frac{1}{\varrho} f(\varrho) + \frac{b^2}{\varrho^2} \psi(\varrho) \right) \Delta v + \frac{bc}{\varrho^2} \psi(\varrho) \Delta w \right\} \quad (1.)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \sum m \left\{ \frac{ac}{\varrho^2} \psi(\varrho) \Delta u + \frac{bc}{\varrho^2} \psi(\varrho) \Delta v + \left(\frac{1}{\varrho} f(\varrho) + \frac{c^2}{\varrho^2} \psi(\varrho) \right) \Delta w \right\}$$

annehmen. Unsere Aufgabe, die Gesetze der Bewegung zu ermitteln, wird also darauf hinauskommen, dass wir diese Gleichungen integrieren, entweder unmittelbar in der vorliegenden Form gemischter Differenzen- und Differentialgleichungen, oder nachdem wir sie durch Reihenentwicklung auf die gewöhnliche Gestalt partieller Differentialgleichungen gebracht haben werden.

§ 129. Angenäherte Form der Differentialgleichungen.

Wir schlagen zunächst den letzteren Weg ein, um auf einfache Weise zu einer hinlänglich angenäherten Auflösung für den Fall unkrystallinischer Körper zu gelangen. Wir setzen also die Werthe von Δu , Δv , Δw ein und zwar in der Gestalt einer bis zur vierten Potenz von ρ fortgeführten Reihenentwicklung, welche wir dadurch erhalten, dass wir a , b , c nach den Formeln

$$a = \rho \cos \alpha, \quad b = \rho \cos \beta, \quad c = \rho \cos \gamma$$

durch die Winkel α , β , γ ausdrücken, welche ρ mit den Coordinatenachsen bildet. So erhalten wir Reihen von der Form

$$\begin{aligned} \Delta u = & \rho \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma \right\} \\ & + \frac{1}{1 \cdot 2} \rho^2 \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cos^2 \alpha + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \cos^2 \beta + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \cos^2 \gamma \right. \\ & \quad \left. + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \cos \alpha \cos \beta + \dots \right\} \\ & + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \rho^3 \left\{ \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \cos^3 \alpha + \dots + 3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} \cos^2 \alpha \cos \beta + \dots \right. \\ & \quad \left. + 6 \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \right\} \\ & + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \rho^4 \left\{ \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \cos^4 \alpha + \dots + 4 \frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y} \cos^3 \alpha \cos \beta + \dots \right. \\ & \quad \left. + 6 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} \cos^2 \alpha \cos^2 \beta + \dots + 12 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y \partial z} \cos^2 \alpha \cos \beta \cos \gamma + \dots \right\} \end{aligned}$$

und, wenn wir diese in die Differentialgleichungen einführen, so erscheinen Summen, welche ρ , $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ als veränderliche Grössen enthalten. Da diese Summen über alle Entfernungen und über alle Richtungen auszuführen sind, so verschwinden alle diejenigen unter ihnen, welche ungerade Potenzen der Cosinus enthalten.

Für die übrig bleibenden führen wir folgende Bezeichnung ein:

$$1.2 A_1 = \sum m \rho f(\rho) \cos^2 \alpha$$

$$1.2.3.4 A_2 = \sum m \rho^3 f(\rho) \cos^4 \alpha$$

$$1.2 B_1 = \sum m \rho^2 \psi(\rho) \cos^4 \alpha$$

$$1.2.3.4 B_2 = \sum m \rho^4 \psi(\rho) \cos^6 \alpha$$

und, da wir das Medium als unkrystallinisch voraussetzen, so setzen wir für die entsprechenden Summen über die Potenzen von $\cos \beta$ und $\cos \gamma$ dieselben Zeichen. Auf diese vier Summen lassen sich alle übrigen durch dasselbe Verfahren, wie es in § 35 angewandt wurde, zurückführen.

Beziehen wir z. B. die durch A_2 dargestellte Summe auf ein durch Drehung um die dritte Coordinatenaxe gedrehtes Coordinatensystem, indem wir

$$\cos \alpha' = a \cos \alpha + b \cos \beta$$

$$a^2 + b^2 = 1$$

setzen, so finden wir für ein unkrystallinisches Medium

$$\begin{aligned} \sum m \rho^3 f(\rho) \cos^4 \alpha' &= (a^4 + b^4) \sum m \rho^3 f(\rho) \cos^4 \alpha \\ &\quad + 6 a^2 b^2 \sum m \rho^3 f(\rho) \cos^2 \alpha \cos^2 \beta \end{aligned}$$

und, weil

$$a^4 + b^4 = 1 - 2a^2 b^2$$

ist,

$$3 \sum m \rho^3 f(\rho) \cos^2 \alpha \cos^2 \beta = \sum m \rho^3 f(\rho) \cos^4 \alpha = 1.2.3.4 A_2.$$

Ebenso ergibt sich

$$3 \sum m \rho^2 \psi(\rho) \cos^2 \alpha \cos^2 \beta = 1.2 B_1.$$

Wenn wir ferner in derselben Weise umgestalten

$$\begin{aligned} \sum m \rho^4 \psi(\rho) \cos^6 \alpha' &= (a^6 + b^6) \sum m \rho^4 \psi(\rho) \cos^6 \alpha \\ &\quad + 15 (a^4 b^2 + a^2 b^4) \sum m \rho^4 \psi(\rho) \cos^4 \alpha \cos^2 \beta, \end{aligned}$$

so finden wir

$$5 \sum m \rho^4 \psi(\rho) \cos^4 \alpha \cos^2 \beta = 1.2.3.4 B_2.$$

Setzen wir endlich

$$\cos \alpha' = a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1,$$

so erhalten wir unter Verwerthung der zuletzt gefundenen Formel

$$15 \sum m \rho^4 \psi(\rho) \cos^2 \alpha \cos^2 \beta \cos^2 \gamma = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 B_3.$$

Aehnliche Beziehungen liessen sich für die fortgelassenen Glieder höherer Ordnung leicht aufstellen.

Hiernach nehmen, wenn wir zur Abkürzung

$$\Delta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$Du = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$D^2 u = D(Du)$$

setzen, die Differentialgleichungen (1.) § 128 folgende übersichtliche Form an

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= h_1 \frac{\partial \Delta}{\partial x} + h_2 \frac{\partial D\Delta}{\partial x} + k_1 Du + k_2 D^2 u \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= h_1 \frac{\partial \Delta}{\partial y} + h_2 \frac{\partial D\Delta}{\partial y} + k_1 Dv + k_2 D^2 v \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= h_1 \frac{\partial \Delta}{\partial z} + h_2 \frac{\partial D\Delta}{\partial z} + k_1 Dw + k_2 D^2 w, \end{aligned} \quad (1.)$$

welche noch weiter dadurch vereinfacht worden ist, dass

$$\begin{aligned} A_1 + \frac{1}{2} B_1 &= k_1 & \frac{3}{2} B_1 &= h_1 \\ A_2 + \frac{1}{2} B_2 &= k_2 & \frac{1}{2} B_2 &= h_2 \end{aligned}$$

gesetzt wurde.

§ 130. Integration der angenäherten Gleichungen.

Um nun diese Differentialgleichungen zu integrieren, setzen wir die in den Gleichungen (1.) § 127 angenommenen Werthe der Grössen u , v , w , welche einer geradlinig polarisirten ebenen Lichtwelle entsprechen, ein und finden, dass folgende Bedingungen

$$\begin{aligned} \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 M &= \left\{ h_1 - h_2 \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \right\} \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 p Q + \left\{ k_1 - k_2 \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \right\} \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 M \\ \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 N &= \left\{ h_1 - h_2 \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \right\} \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 q Q + \left\{ k_1 - k_2 \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \right\} \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 N \\ \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 P &= \left\{ h_1 - h_2 \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \right\} \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 r Q + \left\{ k_1 - k_2 \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \right\} \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 P \end{aligned} \quad (1.)$$

erfüllt werden müssen, in welchen zur Abkürzung

$$Q = pM + qN + rP$$

gesetzt worden ist.

Die Form dieser Gleichungen, welche, wie die früher behandelten, in Bezug auf die Amplituden M , N , P , sowie auf das Quadrat der Fortpflanzungsgeschwindigkeit

$$\omega^2 = \frac{\lambda^2}{T^2}$$

linear sind, lässt sofort erkennen, dass wir nach Elimination der Verhältnisse von M , N , P eine für ω^2 cubische Gleichung erhalten. Doch lässt sich dieselbe in zwei Factoren zerlegen, von denen der eine ein Quadrat ist.

Multiplizieren wir nämlich die drei Gleichungen mit p , q , r und addiren sie, so finden wir

$$0 = \left\{ \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 - \left((h_1 + k_1) - (h_2 + k_2) \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \right) \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \right\} Q.$$

Eine Wurzel jener cubischen Gleichung ist also

$$\omega^2 = h_1 + k_1 - (h_2 + k_2) \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2, \quad (2.)$$

während die beiden anderen der Gleichung

$$0 = Q = pM + qN + rP \quad (3.)$$

genügen müssen.

Für die erstere Welle liefern die Gleichungen (1.)

$$\frac{M}{p} = \frac{N}{q} = \frac{P}{r};$$

die Bewegung geschieht also in der Richtung von s , die Welle ist longitudinal. Die beiden anderen sind wegen der Gleichung (3.) transversal; setzen wir in den Gleichungen (1.) $Q = 0$, so ergeben alle drei übereinstimmend

$$\left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 = \left\{ k_1 - k_2 \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \right\} \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2, \quad (4.)$$

während M , N , P unbestimmt bleiben. Die Bewegungsrichtung wird also nicht weiter bestimmt, als dass sie in der Wellenebene liegt.

§ 131. Gesetz der Farbenzerstreuung.

Die Formel (4.) bestimmt, wenn wir ihr die Gestalt

$$\omega^2 = k_1 - k_2 \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2$$

geben, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ω als Function der Wellenlänge λ . Jedoch ist diese Form wenig geeignet, das Gesetz zu erläutern, nach welchem das Brechungsverhältniss von der Farbe abhängt; denn λ bedeutet nicht denjenigen Werth der Wellenlänge, welcher

dem betrachteten farbigen Licht im leeren Raume oder in der Luft angehört, sondern die Wellenlänge in dem Medium, dessen Brechungsgesetz wir suchen; λ ist also ebenso unbekannt wie ω .

Dagegen ist die Undulationszeit T , weil sie für eine und dieselbe Farbe in allen Medien denselben Werth besitzt, eine die Farbe bestimmende bekannte Grösse. Wir haben also die Gleichung (4.) § 130 nach der Unbekannten λ aufzulösen, wodurch wir

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{2k_2} \left\{ k_1 \pm \sqrt{k_1^2 - 4k_2 \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2} \right\}$$

erhalten, so dass nun

$$\omega = \frac{\lambda}{T}$$

als Function von T gegeben ist.

Die gefundene Formel scheint zwei verschiedene Werthe¹⁾ von ω für einerlei Farbe zu geben, im Widerspruch mit der Thatsache, dass doppelte Brechung in unkrystallinischen Medien nicht vorkommt. Demnach kann nur eins der beiden Vorzeichen vor der Quadratwurzel richtig sein, und zwar das untere; denn, wenn wir das neu hinzugefügte Glied fortlassen, also $k_2 = 0$ setzen, so können λ und ω nicht $= 0$ werden, sondern ω^2 muss den früheren Werth k_1 annehmen. Wir setzen also

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{2k_2} \left\{ k_1 - \sqrt{k_1^2 - 4k_2 \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2} \right\}.$$

Das Auftreten der zweiten verworfenen Wurzel kann nur dadurch veranlasst worden sein, dass wir mit Gleichungen rechnen, für welche wir nur angenäherte Richtigkeit beanspruchen können. Bei strenger Rechnung hätten wir eine unendliche Reihe erhalten; demnach wäre λ nicht aus einer algebraischen, sondern aus einer transcendenten Gleichung, welche möglicher Weise nur eine einzige Wurzel von endlichem Werthe liefert, zu bestimmen gewesen.

Auffallend ist an der Formel noch, dass sie für λ complex-imaginäre Werthe liefern kann, entweder für jeden Werth von T oder wenigstens für die kleineren, also für das blaue Ende des Spectrums. Die Deutung dieses Verhaltens der Formeln würde zu dem Schlusse führen, dass die Strahlen, wenigstens die blauen, nur bis zu einer geringen Tiefe eindringen können und bei grösserer

1) Vergl. Christoffel, Monatsber. d. Berl. Akad. 1861. S. 906. Pogg. Ann. Bd. 117. S. 27.

Tiefe verschwinden müssen. Die Cauchy'schen Formeln enthalten also möglicher Weise nicht nur die Erklärung der Farbenzerstreuung, sondern auch die der völligen oder theilweisen Undurchsichtigkeit.

§ 132. Integration der vollständigen Gleichungen.

Um das Gesetz der Farbenzerstreuung in völliger Strenge zu erhalten, müssen wir die Differentialgleichungen in ihrer ursprünglichen Form (1.) § 128, in welcher sie noch keine Vernachlässigung enthalten, integrieren. In diesen Gleichungen bezeichnen die Grössen Δu , Δv , Δw die Unterschiede der Verrückungen an zwei benachbarten Stellen; es ist also, wenn wir für u , v , w die bisherigen Formeln (1.) § 127 beibehalten, z. B.

$$\Delta u = M \left\{ \sin \left(\frac{t}{T} - \frac{s + \Delta s}{\lambda} \right) 2\pi - \sin \left(\frac{t}{T} - \frac{s}{\lambda} \right) 2\pi \right\},$$

worin

$$\Delta s = pa + qb + rc$$

ist oder nach der in § 129 eingeführten Bezeichnung

$$\Delta s = \rho \{ p \cos \alpha + q \cos \beta + r \cos \gamma \} = \rho \cos \delta.$$

Hierin bezeichnet δ den Winkel, welchen die Verbindungslinie ρ der beiden betrachteten Nachbartheilchen mit der Richtung der Wellennormale s bildet. Dadurch wird

$$\begin{aligned} \Delta u = M \left\{ \left(\cos \left(\frac{\rho}{\lambda} 2\pi \cos \delta \right) - 1 \right) \sin \left(\frac{t}{T} - \frac{s}{\lambda} \right) 2\pi \right. \\ \left. - \sin \left(\frac{\rho}{\lambda} 2\pi \cos \delta \right) \cos \left(\frac{t}{T} - \frac{s}{\lambda} \right) 2\pi \right\} \end{aligned}$$

und ebenso Δv und Δw , wenn statt M nur N oder P geschrieben wird. Diese Werthe sind in die Differentialgleichungen (1.) § 128 einzusetzen und die Constanten so zu bestimmen, dass die Gleichungen erfüllt werden; so ist die Integration damit ausgeführt.

Um diese Rechnung zu vereinfachen, machen wir über die Natur des Mediums die Annahme, dass zwei von einem beliebigen Punkte in demselben nach entgegengesetzten Richtungen gezogene Radien immer in gleichen Entfernungen je zwei entsprechende Theilchen treffen. Diese Anordnung findet sich in unkrystallinischen Medien und ist auch in dem früher häufig betrachteten Falle verwirklicht, in welchem das Medium durch drei auf einander rechtwinklig stehende Ebenen symmetrisch theilbar ist. Unsere neue Voraussetzung ist aber allgemeiner als jene; sie ist auch dann erfüllt, wenn die Theilchen in den Ecken schiefwinkliger Parallelepipeden angeordnet

sind, und in ähnlichen Fällen. Es wird also noch keine Symmetrie in Bezug auf drei rechtwinklige Axen vorausgesetzt.

In Folge dieser Annahme fallen aus den Summen (1.) § 128, wenn in dieselben die Werthe der Δu , Δv , Δw eingesetzt werden, alle Glieder fort, welche den Factor

$$\sin\left(\frac{\rho}{\lambda} 2\pi \cos \delta\right)$$

enthalten, da einem Theilchen, welchem die Werthe

$$a, b, c, \rho \cos \delta$$

zukommen, ein anderes entspricht, für welches die Werthe

$$-a, -b, -c, -\rho \cos \delta$$

gelten. Für Medien dieser Art erhalten wir folglich Gleichungen von der Form

$$M\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = M\mathfrak{A} + Nc + P\mathfrak{b}$$

$$N\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = M c + N\mathfrak{B} + Pa$$

$$P\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = M b + Na + P\mathfrak{C},$$

wenn zur Abkürzung gesetzt wird

$$\mathfrak{A} = \sum m \left(\frac{1}{\rho} f(\rho) + \psi(\rho) \cos^2 \alpha \right) \left(1 - \cos \left(2\pi \frac{\rho}{\lambda} \cos \delta \right) \right)$$

$$\mathfrak{B} = \sum m \left(\frac{1}{\rho} f(\rho) + \psi(\rho) \cos^2 \beta \right) \left(1 - \cos \left(2\pi \frac{\rho}{\lambda} \cos \delta \right) \right)$$

$$\mathfrak{C} = \sum m \left(\frac{1}{\rho} f(\rho) + \psi(\rho) \cos^2 \gamma \right) \left(1 - \cos \left(2\pi \frac{\rho}{\lambda} \cos \delta \right) \right)$$

$$a = \sum m \psi(\rho) \cos \beta \cos \gamma \left(1 - \cos \left(2\pi \frac{\rho}{\lambda} \cos \delta \right) \right)$$

$$b = \sum m \psi(\rho) \cos \gamma \cos \alpha \left(1 - \cos \left(2\pi \frac{\rho}{\lambda} \cos \delta \right) \right)$$

$$c = \sum m \psi(\rho) \cos \alpha \cos \beta \left(1 - \cos \left(2\pi \frac{\rho}{\lambda} \cos \delta \right) \right).$$

Durch diese Gleichungen ist das Verhältniss von M , N , P zu einander, also die Schwingungsrichtung bestimmt und zugleich die Beziehung zwischen λ und T durch eine in Bezug auf die letztere Grösse cubische Gleichung gegeben.

§ 133. Dispersion in einem unkrystallinischen Medium.

Um diese Beziehung und das in ihr liegende Dispersionsgesetz bequemer entwickeln zu können, beschränken wir die weitere Untersuchung auf den Fall eines unkrystallinischen Mediums, in welchem die Summen

$$a = b = c = 0$$

werden. Legen wir ferner das bisher willkürlich gelassene Coordinatensystem so, dass die Wellennormale s mit der Coordinate x zusammenfällt, so dass

$$p = 1, \quad q = 0, \quad r = 0$$

und

$$\delta = \alpha$$

wird, so wird auch $\mathfrak{B} = \mathfrak{C}$, und wir erhalten

$$M \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 = M\mathfrak{A}, \quad N \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 = N\mathfrak{B}, \quad P \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 = P\mathfrak{B},$$

wo gesetzt ist

$$\mathfrak{A} = \sum m \left(\frac{1}{\rho} f(\varrho) + \psi(\varrho) \cos^2 \alpha \right) \left(1 - \cos \left(2\pi \frac{\varrho}{\lambda} \cos \alpha \right) \right)$$

$$\mathfrak{B} = \sum m \left(\frac{1}{\rho} f(\varrho) + \psi(\varrho) \cos^2 \beta \right) \left(1 - \cos \left(2\pi \frac{\varrho}{\lambda} \cos \alpha \right) \right).$$

Diesen Gleichungen kann auf zweifache Weise genügt werden, erstens indem wir

$$N = 0, \quad P = 0$$

und

$$\left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 = \mathfrak{A}$$

setzen. Diese Formeln bestimmen eine longitudinale Welle, deren Fortpflanzungsgeschwindigkeit durch die letzte Gleichung gegeben ist.

Zweitens werden die Gleichungen für eine transversale Welle, für welche

$$M = 0$$

ist, während N und P beliebig bleiben, ebenfalls vollständig befriedigt, wenn Wellenlänge und Schwingungszeit der Beziehung genügen:

$$\left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 = \mathfrak{B}.$$

In beiden Fällen erhalten wir eine in Bezug auf λ transcendente Gleichung, welche durch die Reihenentwicklung

$$1 - \cos \left(2\pi \frac{\varrho}{\lambda} \cos \alpha \right) = \frac{1}{1.2} \left(2\pi \frac{\varrho}{\lambda} \cos \alpha \right)^2 - \frac{1}{1.2.3.4} \left(2\pi \frac{\varrho}{\lambda} \cos \alpha \right)^4 + \dots$$

zur näherungsweise Auflösung gebracht werden kann. Führen wir die in § 129 gebrauchte Bezeichnung A_1, B_1, A_2 u. s. w. für die vorkommenden Summen, die wir für die höheren Glieder entsprechend fortsetzen, hier wieder ein, so erhalten wir für die longitudinale Welle die Reihe

$$\left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 = (A_1 + B_1) \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 - (A_2 + B_2) \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^4 + (A_3 + B_3) \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^6 - \dots$$

und für die transversale

$$\left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 = \left(A_1 + \frac{1}{3} B_1 \right) \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 - \left(A_2 + \frac{1}{5} B_2 \right) \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^4 + \dots$$

Die letztere Formel, welche nach Cauchy's Ansicht die Erklärung der Dispersion enthält, muss dazu verwandt werden, zunächst die nach der Schlussbemerkung des § 131 einzige endliche und reelle Wurzel λ zu finden und aus dieser die Fortpflanzungsgeschwindigkeit im Medium

$$\omega = \frac{\lambda}{T},$$

welche weiter das Brechungsverhältniss des Stoffes

$$n = \frac{\Omega}{\omega} = \frac{\Lambda}{\lambda}$$

durch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit Ω und die Wellenlänge Λ im luftleeren Raume bestimmt. Wir erhalten diese gesuchten Grössen durch Umkehrung der Reihe in der Form

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 = a \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 + b \left(\frac{2\pi}{T} \right)^4 + c \left(\frac{2\pi}{T} \right)^6 + \dots$$

$$\frac{1}{\omega^2} = a + b \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 + c \left(\frac{2\pi}{T} \right)^4 + \dots,$$

wo $a, b, c \dots$ Constante sind; und, weil

$$\Omega T = \Lambda$$

ist, ebenso, wenn $\alpha, \beta, \gamma \dots$ andere constante Factoren bedeuten,

$$n^2 = a + \frac{\beta}{\Lambda^2} + \frac{\gamma}{\Lambda^4} + \dots$$

Wenn die hier vorkommenden Coefficienten, wie es bei allen durchsichtigen Körpern der Fall ist, positiv sind, so zeigt diese Schlussformel der Theorie Cauchy's, dass, je grösser die Undulationslänge Λ ist, um so kleiner das Brechungsverhältniss ist. Die Formel

bestätigt also die allen farblosen durchsichtigen Körpern gemeinsame Thatsache, dass das rothe Licht am schwächsten, das violette am stärksten gebrochen wird.

Cauchy hat auch seine Formel mit den Zahlenwerthen verglichen, welche wir Fraunhofer verdanken. Er fand, dass die drei ersten Glieder seiner unendlichen Reihe völlig genügen, um die Messungen genau wiederzugeben. Die Reihen convergiren rasch genug, um sich als praktisch brauchbar zu erweisen. Trotzdem aber darf man aus diesem günstigen Erfolge nicht schliessen, dass auch die Grundlage der Theorie ebenso sicher der Wirklichkeit entspreche; denn dasselbe, was durch jene unendliche Reihe erreicht wurde, hätte wohl auch mittelst mancher anderen zweckmässig gewählten Interpolationsformel geleistet werden können.

Wir müssen sogar ein gewichtiges Bedenken gegen die Zulässigkeit des Cauchy'schen Erklärungsgrundes geltend machen. Die Farbenzerstreuung wird nur dann wahrgenommen, wenn das Licht sich in festen oder flüssigen Körpern bewegt, nicht aber, wenn es durch Gase oder durch den Weltraum hindurchtritt. Wenn aber nach Cauchy die Dispersion in dem Einflusse der entfernteren Aethertheilchen ihre Ursache finden soll, so würde auch im leeren Raume diese Erscheinung eintreten. Dass sie hier fortfällt, ist nach dieser Theorie sicherlich schwer zu begreifen, wenn auch freilich nicht unmöglich zu deuten.

17. F. Neumann's Erklärung der Farbenzerstreuung.

§ 134. Differentialgleichungen.

Die vorstehend erwähnten Bedenken gegen die Theorie Cauchy's führten den Verfasser zu einem anderen Erklärungsgrunde für die Dispersion der Farben. Im Jahre 1841 stellte er die Ansicht auf¹⁾, dass diese Erscheinung ganz oder theilweise von den Wirkungen herrühre, welche die schwingenden Theilchen des Lichtäthers von den ponderablen Atomen des durchsichtigen Stoffes erfahren.

Verlässt ein Aethertheilchen den Ort seiner Gleichgewichtslage, so entstehen Kräfte, welche es an denselben zurücktreiben, nicht nur aus den Wirkungen der übrigen Aethertheilchen, sondern auch aus der Einwirkung der in der Nähe befindlichen wägbaren Theilchen. Wie die Inseln in einem Meere das Fortschreiten der Fluthwellen beeinflussen, so werden auch die ponderablen Theilchen nicht ohne Einfluss auf die Wellenbewegungen des sie umfluthenden Lichtäthers bleiben.

Wir berechnen, ähnlich wie früher die Wirkungen der Aethertheilchen auf einander, jetzt die Kräfte, welche von den ponderablen Theilchen herrühren, in der Absicht, die erhaltenen Werthe zu den früher aufgestellten Gleichungen, welche nur die ersten Wirkungen enthalten, hinzuzufügen. Ein Aethertheilchen m , welches an der

1) F. Neumann, die Gesetze der Doppelbrechung des Lichts u. s. w. Abhandl. der Akad. d. Wiss. zu Berlin aus d. J. 1841; 2. Theil Berlin 1843. Note zu Seite 28—32.

Fast gleichzeitig entwickelte O'Brien in einer am 25. April 1842 vor der Cambridge philosophical society gelesenen Abhandlung (Transactions Vol. VII, part. 3, p. 397) dieselbe Theorie. In neuerer Zeit ist die Neumann'sche Hypothese mehrfach in den Arbeiten, welche sich mit der Erklärung der anomalen Dispersion beschäftigen, verwerthet worden. Vgl. auch Briot, *essais sur la théorie math. de la lumière*. Paris 1864, pag. 72.

Anmerkung des Herausgebers.

Stelle x, y, z die Verrückungen u, v, w erlitten hat, steht unter dem Einflusse anderer Aethertheilchen, von welchen eines m' sich um u', v', w' aus seiner Gleichgewichtslage $x + a, y + b, z + c$ entfernt hat, und der wägbaren Theilchen, von denen eines \mathfrak{M} die Verrückungen U', V', W' aus seiner natürlichen Stellung $x + A, y + B, z + C$ erlitten hat. Die Grösse dieser letzteren Verrückungen bestimmen wir ebenso, wie wir früher u', v', w' durch u, v, w ausgedrückt haben, durch die Componenten U, V, W der Verrückung, welche ein ponderables Theilchen an der Stelle x, y, z erlitten haben würde. Indem wir aus denselben Gründen, wie früher u, v, w (§ 23), so jetzt auch U, V, W als stetige Functionen von x, y, z einführen, erhalten wir

$$\begin{aligned} U' - U &= \Delta U = A \frac{\partial U}{\partial x} + B \frac{\partial U}{\partial y} + C \frac{\partial U}{\partial z} \\ V' - V &= \Delta V = A \frac{\partial V}{\partial x} + B \frac{\partial V}{\partial y} + C \frac{\partial V}{\partial z} \\ W' - W &= \Delta W = A \frac{\partial W}{\partial x} + B \frac{\partial W}{\partial y} + C \frac{\partial W}{\partial z} \end{aligned}$$

unter Vernachlässigung der höheren Potenzen.

Der früheren Annahme entsprechend, dass die Wirkung zweier Aethertheilchen auf einander eine Function

$$mm'f(\varrho)$$

ihrer Entfernung ϱ im natürlichen und $\varrho + \Delta\varrho$ im Verrückungszustande sei, führen wir ferner die Voraussetzung ein, dass ein ponderables und ein Aethertheilchen mit einer Kraft

$$m\mathfrak{M}F(P)$$

auf einander wirken, welche nur von der durch die Gleichung

$$P^2 = A^2 + B^2 + C^2$$

bestimmten Entfernung abhängt; im Zustande der Verrückung wird diese Kraft

$$m\mathfrak{M}F(P + \Delta P),$$

wo die Aenderung ΔP der Entfernung bei Vernachlässigung der höheren Potenzen von A, B, C durch die Formel

$$P \cdot \Delta P = A(U - u) + B(V - v) + C(W - w)$$

gegeben wird. Ausserdem bezeichnen wir ebenso wie in § 128

$$\psi(\varrho) = \varrho \frac{d}{d\varrho} \left(\frac{f(\varrho)}{\varrho} \right) \quad \Psi(P) = P \frac{d}{dP} \left(\frac{F(P)}{P} \right).$$

Nach dieser Bezeichnung erhalten wir die Summe der auf das betrachtete Aethertheilchen wirkenden beschleunigenden Kräfte in der

folgenden, die Gleichungen (1.) § 128 der Theorie Cauchy's vervollständigenden Form

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \sum \{g_1 \Delta u + h_3 \Delta v + h_2 \Delta w\} \\
 &+ \sum \mathfrak{M} \{G_1(U - u) + H_3(V - v) + H_2(W - w)\} \\
 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \sum \{h_3 \Delta u + g_2 \Delta v + h_1 \Delta w\} \\
 &+ \sum \mathfrak{M} \{H_3(U - u) + G_2(V - v) + H_1(W - w)\} \\
 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \sum \{h_2 \Delta u + h_1 \Delta v + g_3 \Delta w\} \\
 &+ \sum \mathfrak{M} \{H_2(U - u) + H_1(V - v) + G_3(W - w)\},
 \end{aligned} \tag{1}$$

wo zur Abkürzung

$$\begin{aligned}
 g_1 &= m \left(\frac{1}{\rho} f(\rho) + \frac{a^2}{\rho^2} \psi(\rho) \right) & h_1 &= m \frac{bc}{\rho^2} \psi(\rho) \\
 g_2 &= m \left(\frac{1}{\rho} f(\rho) + \frac{b^2}{\rho^2} \psi(\rho) \right) & h_2 &= m \frac{ca}{\rho^2} \psi(\rho) \\
 g_3 &= m \left(\frac{1}{\rho} f(\rho) + \frac{c^2}{\rho^2} \psi(\rho) \right) & h_3 &= m \frac{ab}{\rho^2} \psi(\rho)
 \end{aligned}$$

und ebenso

$$\begin{aligned}
 G_1 &= \frac{1}{\rho} F(\rho) + \frac{A^2}{\rho^2} \Psi(\rho) & H_1 &= \frac{BC}{\rho^2} \Psi(\rho) \\
 G_2 &= \frac{1}{\rho} F(\rho) + \frac{B^2}{\rho^2} \Psi(\rho) & H_2 &= \frac{CA}{\rho^2} \Psi(\rho) \\
 G_3 &= \frac{1}{\rho} F(\rho) + \frac{C^2}{\rho^2} \Psi(\rho) & H_3 &= \frac{AB}{\rho^2} \Psi(\rho)
 \end{aligned}$$

gesetzt worden ist.

Aus den Gleichungen (1.) können die Verrückungen u, v, w des Aethertheilchens bestimmt werden, sobald die Verrückungen U, V, W des ponderablen Theilchens bekannt oder durch andere Gleichungen bestimmt sind. Hierzu dienen die Bewegungsgleichungen des Theilchens \mathfrak{M}

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} &= \sum \{g_1 \Delta U + h_3 \Delta V + h_2 \Delta W\} \\
 &+ \sum m \{G_1(u - U) + H_3(v - V) + H_2(w - W)\} \\
 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} &= \sum \{h_3 \Delta U + g_2 \Delta V + h_1 \Delta W\} \\
 &+ \sum m \{H_3(u - U) + G_2(v - V) + H_1(w - W)\} \\
 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} &= \sum \{h_2 \Delta U + h_1 \Delta V + g_3 \Delta W\} \\
 &+ \sum m \{H_2(u - U) + H_1(v - V) + G_3(w - W)\},
 \end{aligned} \tag{2}$$

in welchen

$$\begin{aligned} g_1 &= \mathfrak{M} \left\{ \frac{1}{r} f(r) + \frac{a^2}{r^3} \mathfrak{F}(r) \right\} & h_1 &= \mathfrak{M} \frac{bc}{r^2} \mathfrak{F}(r) \\ g_2 &= \mathfrak{M} \left\{ \frac{1}{r} f(r) + \frac{b^2}{r^3} \mathfrak{F}(r) \right\} & h_2 &= \mathfrak{M} \frac{ca}{r^2} \mathfrak{F}(r) \\ g_3 &= \mathfrak{M} \left\{ \frac{1}{r} f(r) + \frac{c^2}{r^3} \mathfrak{F}(r) \right\} & h_3 &= \mathfrak{M} \frac{ab}{r^2} \mathfrak{F}(r) \end{aligned}$$

unter der Voraussetzung gesetzt ist, dass zwei ponderable Massen theilchen \mathfrak{M} in der Entfernung

$$r = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

eine Kraft

$$\mathfrak{M} \mathfrak{M} f(r)$$

auf einander ausüben, wo $f(r)$ eine Function der Entfernung ist, welche mit $\mathfrak{F}(r)$ in der Beziehung steht, dass

$$\mathfrak{F}(r) = r \frac{d}{dr} \left(\frac{f(r)}{r} \right).$$

§ 135. Angenäherte Integration für ein unkrystallinisches Medium.

Die Integration der Gleichungen (1.) und (2.) führen wir nicht vollständig und streng durch, sondern wir begnügen uns mit einer Annäherung, indem wir von der Bewegung der ponderablen Theilchen absehen. Wenn die Masse m eines Aethertheilchens gegen die Masse \mathfrak{M} eines ponderablen verschwindend klein, die Kraft $\mathfrak{M}f(r)$ aber, mit welcher zwei ponderable Theilchen einander anziehen, sehr gross gegen die beschleunigende Kraft $mF(P)$ ist, welche ein Aethertheilchen ausübt, so dürfen in den Gleichungen (2.) die letzten Glieder gegen die ersten vernachlässigt werden, und unter dieser Voraussetzung liefern die Gleichungen, dass die Verrückungen der ponderablen Theilchen

$$U = 0, \quad V = 0, \quad W = 0$$

gesetzt werden dürfen.

Diese Werthe führen wir in die Gleichungen (1.) § 134 ein, und dabei machen wir die Annahme, dass das betrachtete Medium durch drei auf einander rechtwinklige Ebenen, welche wir zu Coordinatenebenen wählen, symmetrisch theilbar sei. Dann verschwinden die Summen

$$\sum H_1 = 0, \quad \sum H_2 = 0, \quad \sum H_3 = 0,$$

und wir erhalten die Gleichungen

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= -u \sum \mathfrak{M} G_1 + \sum \{g_1 \Delta u + h_3 \Delta v + h_2 \Delta w\} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= -v \sum \mathfrak{M} G_2 + \sum \{h_3 \Delta u + g_2 \Delta v + h_1 \Delta w\} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= -w \sum \mathfrak{M} G_3 + \sum \{h_2 \Delta u + h_1 \Delta v + g_3 \Delta w\},\end{aligned}\quad (1.)$$

welche gegen die früheren wesentlich verändert sind, indem zu den bekannten von den relativen Verrückungen Δu , Δv , Δw abhängigen Gliedern noch neue hinzugesetzt sind, welche den absoluten Werthen u , v , w der Verrückungen der Aethertheilchen proportional sind.

Nehmen wir noch weiter an, dass das Medium unkrystallinisch sei, so liefert die weitere Entwicklung, wenn wir uns auf die ersten Glieder beschränken, die Form der Gleichungen

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= -Cu + kDu + h \frac{\partial \Delta}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= -Cv + kDv + h \frac{\partial \Delta}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= -Cw + kDw + h \frac{\partial \Delta}{\partial z}.\end{aligned}\quad (2.)$$

Hier bezeichnet C eine neue Constante

$$C = \sum \mathfrak{M} G_1 = \sum \mathfrak{M} G_2 = \sum \mathfrak{M} G_3,$$

während k und h , sowie das Operationszeichen D die im vorigen Capitel (§ 129) eingeführte Bedeutung haben.

Wenn wir diese Gleichungen durch dieselben particularen Lösungen

$$\frac{u}{M} = \frac{v}{N} = \frac{w}{P} = \sin \left(\frac{t}{T} - \frac{s}{\lambda} \right) 2\pi,$$

wie bisher, integriren, wo

$$s = px + qy + rz$$

ist, so finden wir zur Bestimmung der Constanten

$$\begin{aligned}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 M &= \left(C + k \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2\right) M + h \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 pQ \\ \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 N &= \left(C + k \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2\right) N + h \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 qQ \\ \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 P &= \left(C + k \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2\right) P + h \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 rQ,\end{aligned}\quad (3.)$$

wenn wiederum

$$Q = pM + qN + rP$$

gesetzt wird. Hieraus folgt

$$0 = Q \left\{ C \left(\frac{\lambda}{2\pi} \right)^2 + k + h - \omega^2 \right\}, \quad (4.)$$

wenn die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, wie bisher, durch

$$\omega = \frac{\lambda}{T} \quad \bullet$$

bezeichnet wird.

Es ist also eine Welle möglich, deren Fortpflanzungsgeschwindigkeit nach der Gleichung

$$\omega^2 = k + h + C \left(\frac{\lambda}{2\pi} \right)^2$$

von der Wellenlänge abhängt. Die Schwingungsrichtung in dieser Welle ist, da die Gleichungen (3.) durch Einsetzen des Werthes von ω durch die Relationen

$$\frac{M}{p} = \frac{N}{q} = \frac{P}{r}$$

befriedigt werden, longitudinal.

Für die transversalen Wellen ist der andere Factor der Gleichung (4.)

$$Q = pM + qN + rP = 0.$$

Dadurch ergeben die Gleichungen (3.) für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit den Werth

$$\omega^2 = k + C \left(\frac{\lambda}{2\pi} \right)^2, \quad (5.)$$

während die Schwingungsrichtung nicht weiter bestimmt wird.

Die Formel (5.) lehrt, dass der Brechungsquotient, dessen Werth

$$n = \frac{\Omega}{\omega} = \frac{\Lambda}{\lambda}$$

ist, wenn Ω die Fortpflanzungsgeschwindigkeit und Λ die Wellenlänge des Lichts im luftleeren Raume bedeuten, auch nach dieser Theorie mit wachsendem Werthe der Wellenlänge abnimmt; man erhält

$$n^2 = \frac{1}{k} \left(\Omega^2 - \frac{C}{4\pi^2} \Lambda^2 \right). \quad (6.)$$

Eine Vergleichung mit den Fraunhofer'schen Beobachtungen würde freilich lehren, dass diese Formel, welche nur eine erste Annäherung enthält, der Erfahrung nicht vollkommen genau entspricht. Eine bessere Uebereinstimmung würden wir vermuthlich erhalten, wenn wir die strengen Formeln des § 134 integrierten, und jedenfalls auch dann, wenn wir in der Weise Cauchy's in der Entwicklung der Formeln (1.) § 135 einen Schritt weiter gehen. Dann erhalten wir statt der Gleichungen (2.), entsprechend den Formeln (1.) § 129,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -Cu + k_1 Du + k_2 D^2 u + h_1 \frac{\partial \Delta}{\partial x} + h_2 \frac{\partial D \Delta}{\partial x}$$

u. s. w. und hieraus durch Integration

$$\bullet \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = C + k_1 \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 - k_2 \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^4$$

für die transversale Welle, oder, da $\omega T = \lambda$ ist,

$$\omega^2 \left(1 - \frac{C}{4\pi^2} T^2\right) = k_1 - k_2 \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2.$$

Hier dürfen wir, da wir die höheren Glieder der Cauchy'schen Entwicklung vernachlässigt haben, ohne Fehler für λ den angenäherten Werth

$$\lambda = T\sqrt{k_1}$$

setzen, wodurch wir für den Brechungsindex die Formel

$$n^2 = \Omega^2 \frac{1 - \frac{C}{4\pi^2} T^2}{k_1 - \frac{k_2}{k_1} \frac{4\pi^2}{T^2}} \quad (7.)$$

erhalten, welche in ihrer für die Darstellung von Beobachtungen sehr zweckmässigen Bruchform die Fraunhofer'schen Zahlenwerthe ohne Zweifel ebenso gut wiedergeben würde, wie die unendliche Reihe Cauchy's.

§ 136. Schlussbemerkungen.

Bei diesem Stande der Frage bleibt es unentschieden, ob die Theorie Cauchy's in der Natur so begründet ist, dass es nothwendig wird, jene weiteren Glieder, weil sie in der That von Einfluss sind, zu den Gleichungen hinzuzufügen. Es kann aber auch der Fall sein, dass jene Glieder fortgelassen werden dürfen, wenn die strenge Durchführung der Neumann'schen Theorie unter Rücksicht auf die mit-schwingende Bewegung der wägbaren Massentheilchen zu Formeln führen sollte, welche den Beobachtungen Genüge leisten. Die Ausführung dieser Rechnung würde keine Schwierigkeit bieten.

Es besteht aber ein anderes Bedenken. Man muss bezweifeln, ob die Sache sich überhaupt so einfach verhält. Denn die ponderabeln Theilchen dürfen nicht als Massenpunkte angesehen werden. Eine naturgemäss durchgeführte Untersuchung müsste die Aenderung der Dichtigkeit um die ponderabeln Theilchen herum berücksichtigen, oder die Aetheratmosphären, welche gewissermassen zum Theilchen gehören. Sollte auch das Theilchen selbst nicht durch die Aetherschwingungen in Bewegung versetzt werden, so kann man für die

Behauptung, dass auch die Atmosphären dieser „Inseln im Aether“ dadurch nicht afficirt würden, nicht dieselben Gründe geltend machen, wie für die wägbaren Theilchen, weil die Aethertheilchen in den Atmosphären nicht schwerer sind, als diejenigen des freien Aethers.

Der wirkliche Hergang würde also nur getroffen sein, wenn die innere Bewegung der Aetheratmosphären mit berücksichtigt würde. Das aber ist eine Aufgabe, welche sich schwer den Hilfsmitteln der Analysis unterwerfen lassen würde.

Möglicherweise hängen von diesen Bewegungen innerhalb der Atmosphären noch andere optische Erscheinungen ab. Es kann im Körper Licht erzeugt werden. Wie ein an der Saite einer Aeolsharfe vorbeistreifender Luftzug dieselbe in tönende Schwingungen versetzt, die noch lange nach dem Aufhören der Luftströmung fort dauern, so kann auch ein Körper dadurch, dass Licht durch ihn hindurchgegangen ist, die Eigenschaft erhalten, noch lange nach dem Aufhören des Lichts zu leuchten. Diese als Phosphorescenz bezeichnete Erscheinung mag ihren Grund in den stehenden Schwingungen haben, welche im Aether der ponderablen Körper ebenso wie in der Saite entstehen. Ferner giebt es Körper, welche beim Eindringen von weissem Licht Farben zeigen oder bei farbiger Beleuchtung in einer veränderten Färbung erscheinen. Auch diese Erscheinung, die Fluorescenz, kann ihre Ursache in Schwingungen der Aetherhüllen haben.

§ 137. Neuere Literatur des Gegenstandes¹⁾.

Die vorstehenden Aeusserungen Neumann's über den augenblicklichen Zustand und die künftigen Ziele der Dispersionstheorie habe ich so, wie sie im Wintersemester 1857/58 vorgetragen wurden, unverändert stehen lassen können, obwohl in den inzwischen verflossenen 27 Jahren sehr viel an der Lösung der besprochenen Frage gearbeitet worden ist; denn im Wesentlichen treffen sie auch noch heutigen Tages vollkommen zu. Ich habe nur hinzuzufügen, dass sich die herrschenden Ansichten seit jener Zeit in dem Sinne geändert haben, dass die von Cauchy versuchte Erklärung der Farbenzerstreuung mehr und mehr an Anhängern verloren hat, während die von Neumann vertretene in demselben Maasse mehr zur Geltung gekommen ist. Heutzutage ist seine Ansicht, dass die Ursache der Dispersion in der Einwirkung der wägbaren Theilchen auf die Licht-

1) Zusatz des Herausgebers.

Schwingungen zu suchen sei, wohl zu allgemeiner Anerkennung gelangt. Nur über die Art und Weise, in welcher sich dieser Einfluss der ponderablen Atome hauptsächlich bemerkbar macht, weichen die Ansichten von einander ab.

Briot¹⁾ hat eine schon von Cauchy ausgesprochene Hypothese weiter verfolgt, nach welcher die regelmässige Vertheilung der wägbaren Theilchen eine periodische Aenderung der Dichtigkeit oder der Elasticität des Lichtäthers mit sich bringt; auch aus dieser Voraussetzung scheint eine Dispersion der Farben zu folgen. Viel grössere Wahrscheinlichkeit besitzt eine andere eigenartige, jedoch mit der erwähnten in gewisser Beziehung stehende Erklärung, welche L. Lorenz²⁾ gegeben hat. Wenn an der Grenze zweier Medien eine allmähliche Veränderung der Dichtigkeit oder der Elasticität von dem im ersten Stoffe geltenden Werthe zu dem im zweiten gültigen stattfindet, so wird ebenso in der Grenzschicht, für welche der Coefficient der Differentialgleichung mit dem Orte veränderlich ist, eine Farbenzerstreuung eintreten, ohne dass es nöthig erscheint, im Inneren eines der beiden Stoffe eine Verschiedenheit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit für die verschiedenen Farben anzunehmen.

Mit der von Neumann gegebenen Erklärung stimmen die Theorien der Dispersion, welche Ketteler³⁾, Sellmeier⁴⁾, Lommel⁵⁾ und W. Voigt⁶⁾ veröffentlicht haben, in der Hauptsache, nämlich insofern überein, als in allen diesen Arbeiten der Grund der Farbenzerstreuung in dem Mitschwingen der wägbaren Substanz gesucht wird. Von demselben Gedanken geht v. Helmholtz⁷⁾ aus, jedoch mit einer wesentlichen Abänderung der Vorstellung, welche durch die Erfahrungen an Absorptionsspectren gerechtfertigt wird; durch die Lichtwellen soll die ponderable Materie nicht in der Weise in Bewegung versetzt werden, dass die gröberen molekularen Complexe, welche aus den Atomen durch chemische Vereinigung gebildet sind, ihren Schwerpunkt verlassen, sondern es sollen je nach den Umständen diese oder jene Bestandtheile der Molekulargebilde an den Schwingungen des Lichtäthers Theil nehmen.

1) Briot, *Essais sur la théorie math. de la lumière*. Paris 1864.

2) L. Lorenz, *Wied. Ann.* Band 20, S. 1. 1883.

3) Ketteler, *Pogg. Ann.* 1870, Bd. 140, S. 1; 1874 Jubelband S. 166; *Carl's Repert.* 1876, Bd. 12, S. 322; *Wied. Ann.* 1879, Bd. 7.

4) Sellmeier, *Pogg. Ann.* 1872, Bd. 145 u. 147.

5) Lommel, *Wied. Ann.* 1878, Bd. 3, S. 339; 1881, Bd. 13, S. 353.

6) W. Voigt, *Wied. Ann.* 1883, Bd. 19, S. 873.

7) v. Helmholtz, *Pogg. Ann.* 1874, Bd. 154, S. 582.

Die grössere Verwickelung, welche durch derartige Umgestaltungen der Hypothese nothwendiger Weise in die Theorie hineingebracht wird, erfährt eine noch weitere Steigerung, wenn zugleich eine seit jener Zeit entdeckte andere Art der Farbenzerstreuung, die sogenannte anomale Dispersion, ihre Erklärung finden soll. Diese Erscheinung, bei welcher die Reihenfolge der Farben entweder im ganzen Spectrum oder in einem Theile desselben umgekehrt erscheint, findet sich nur bei stark gefärbten oder wenig durchsichtigen Körpern; es ist daher im höchsten Grade wahrscheinlich, dass sie, wie die gleichzeitig eintretende Absorption des Lichtes, ihre Ursache in Reibungs- oder Widerstandskräften findet, welche im Aether oder in der wägbaren Substanz ihren Sitz haben. Diese zuerst von dem Herausgeber¹⁾ angeregte Erklärung ist in einer nicht geringen Anzahl von Abhandlungen weiter durchgeführt und dabei mannigfachen Umgestaltungen und Verbesserungen unterworfen worden. Es kann aber auf diese Untersuchungen über die anomale Dispersion hier um so weniger eingegangen werden, als der Grund der normalen Dispersion noch keineswegs sicher gestellt ist.

1) O. E. Meyer, Pogg. Ann. 1872, Bd. 145, S. 80.

Gesetze der Bewegungen dünner Körper.

18. Schwingungen gespannter Saiten.

§ 138. Entwicklung der Gleichungen für eine Saite.

Von den Anwendungen unserer Theorie auf die Akustik soll die erste ein Problem betreffen, welches schon sehr lange Zeit vor der Begründung der Elasticitätstheorie aus allgemeinen Gesichtspunkten der Mechanik gelöst wurde, nämlich das Problem der schwingenden Saite¹⁾. Die nachfolgende Behandlung dieser Aufgabe auf Grund der Theorie der Elasticität wird für die vorausgegangenen Untersuchungen über die Wellenlehre zugleich die Bedeutung haben, dass wir bei dieser Gelegenheit zeigen, wie das Problem der Reflexion von Wellen zu lösen sein würde.

Unter einer Saite verstehen wir einen elastischen Körper von prismatischer Gestalt, der so dünn ist, dass man an allen Stellen eines und desselben Querschnitts denselben Werth für die Molekularkräfte annehmen darf. Mit dieser Voraussetzung stimmt die Vorstellung überein, dass die Saite einer Biegung keinen Widerstand entgegengesetzt, also ein biegsamer Faden ist. Wir nehmen ferner an, dass die Oberfläche von Kräften frei ist, dass aber die Enden fest sein sollen.

Um zu der einfachsten Form der Bewegungsgleichungen zu gelangen, zerlegen wir die auf einen beliebigen Querschnitt q an der Stelle x, y, z wirkende Druckkraft nach den Richtungen der Coordinatenachsen in die Componenten A, B, C nach dem Theorem (C.) § 9. Da die Normale des Querschnitts q der Saite das Element ds ihrer Axe bildet, dessen Projectionen auf die Coordinatenachsen wir durch

1) Ueber die Geschichte und Literatur des Problems vergleiche man Riemann, über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe. Abh. d. Ges. d. Wiss. Göttingen, Bd. 13; Riemann's gesammelte Werke. S. 213. (Anmerk. d. Herausgebers.)

dx, dy, dz bezeichnen, so sind nach dem genannten Theorem die gesuchten Componenten

$$\begin{aligned} qA &= q \left\{ X_x \frac{dx}{ds} + X_y \frac{dy}{ds} + X_z \frac{dz}{ds} \right\} \\ qB &= q \left\{ Y_x \frac{dx}{ds} + Y_y \frac{dy}{ds} + Y_z \frac{dz}{ds} \right\} \\ qC &= q \left\{ Z_x \frac{dx}{ds} + Z_y \frac{dy}{ds} + Z_z \frac{dz}{ds} \right\}. \end{aligned} \quad (1)$$

Die Bedingung, dass die Oberfläche der Saite von Kräften frei sein soll, liefert, wenn α, β, γ die Cosinus der von der Normale einer beliebigen Stelle der Oberfläche mit den Coordinatenachsen gebildeten Winkel sind, nach dem Theorem (D) § 11 für jeden Punkt der Oberfläche die Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= X_x \alpha + X_y \beta + X_z \gamma \\ 0 &= Y_x \alpha + Y_y \beta + Y_z \gamma \\ 0 &= Z_x \alpha + Z_y \beta + Z_z \gamma, \end{aligned} \quad (2)$$

in welchen α, β, γ beliebig sind, bis auf die Bedingung

$$0 = \alpha \frac{dx}{ds} + \beta \frac{dy}{ds} + \gamma \frac{dz}{ds}. \quad (3)$$

Wenn wir also diese Gleichung benutzen, um γ aus den Gleichg. (2) zu eliminiren, so sind in den entstehenden Formeln

$$\begin{aligned} 0 &= \left(X_x \frac{dz}{ds} - X_z \frac{dx}{ds} \right) \alpha + \left(X_y \frac{dz}{ds} - X_z \frac{dy}{ds} \right) \beta \\ 0 &= \left(Y_x \frac{dz}{ds} - Y_z \frac{dx}{ds} \right) \alpha + \left(Y_y \frac{dz}{ds} - Y_z \frac{dy}{ds} \right) \beta \\ 0 &= \left(Z_x \frac{dz}{ds} - Z_z \frac{dx}{ds} \right) \alpha + \left(Z_y \frac{dz}{ds} - Z_z \frac{dy}{ds} \right) \beta \end{aligned}$$

α und β willkürliche Grössen, und deshalb können die Formeln nur bestehen, wenn

$$\begin{aligned} 0 &= X_x \frac{dz}{ds} - X_z \frac{dx}{ds} & 0 &= X_y \frac{dz}{ds} - X_z \frac{dy}{ds} \\ 0 &= Y_x \frac{dz}{ds} - Y_z \frac{dx}{ds} & 0 &= Y_y \frac{dz}{ds} - Y_z \frac{dy}{ds} \\ 0 &= Z_x \frac{dz}{ds} - Z_z \frac{dx}{ds} & 0 &= Z_y \frac{dz}{ds} - Z_z \frac{dy}{ds}. \end{aligned} \quad (4)$$

Diese Gleichungen gelten zwar zunächst nur für jeden Punkt der Oberfläche; da aber an jeder Stelle desselben Querschnitts die Druckkräfte denselben Werth haben sollen, so gelten die Gleichungen

chungen (4.) allgemein und machen es uns dadurch möglich, alle Componenten durch eine, z. B. X_x auszudrücken:

$$\begin{aligned} X_x &= X_x & X_y &= Y_x = X_x \frac{dy}{dx} \\ Y_y &= X_x \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 & Y_z &= Z_y = X_x \frac{dy}{dx} \frac{dz}{dx} \\ Z_x &= X_x \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 & Z_z &= X_x = X_x \frac{dz}{dx} \end{aligned} \quad (5.)$$

Dadurch werden die in den Gleichungen (1.) gegebenen Werthe der auf den Querschnitt q wirkenden Druckkräfte einfacher

$$\begin{aligned} qA &= q X_x \frac{ds}{dx} \\ qB &= q X_x \frac{ds}{dx} \frac{dy}{dx} \\ qC &= q X_x \frac{ds}{dx} \frac{dz}{dx} \end{aligned} \quad (6.)$$

wegen der Gleichung

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Um nun die Gleichungen für das Gleichgewicht und die Bewegung zu bilden, betrachten wir ein durch zwei unendlich nahe Querschnitte begrenztes Stück der Saite, dessen Basis q und dessen Höhe ds ist; auf die eine Fläche dieses Stücks wirkt der Druck qA in der Richtung von x , auf die andere in entgegengesetzter Richtung der Druck

$$qA + ds \frac{d(qA)}{ds},$$

so dass die Differenz beider

$$- \frac{d(qA)}{ds} ds$$

die Componente der äusseren auf die Masse $\varepsilon q ds$ des Prismas wirkenden Kraft $\varepsilon q X ds$ im Gleichgewicht halten muss. So erhalten wir für die drei Componenten die Bedingungen für den Gleichgewichtszustand

$$\begin{aligned} \varepsilon q X &= \frac{d(qA)}{ds} \\ \varepsilon q Y &= \frac{d(qB)}{ds} \\ \varepsilon q Z &= \frac{d(qC)}{ds} \end{aligned}$$

und für den Fall der Bewegung

$$\begin{aligned}
 \varepsilon q \left(X - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) &= - \frac{\partial(qA)}{\partial s} \\
 \varepsilon q \left(Y - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) &= - \frac{\partial(qB)}{\partial s} \\
 \varepsilon q \left(Z - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) &= - \frac{\partial(qC)}{\partial s}
 \end{aligned} \tag{7}$$

und endlich in dem speciellen Falle, dass keine äusseren Kräfte auf die Saite wirken,

$$\begin{aligned}
 \varepsilon q \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= - \frac{\partial(qA)}{\partial s} \\
 \varepsilon q \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= - \frac{\partial(qB)}{\partial s} \\
 \varepsilon q \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= - \frac{\partial(qC)}{\partial s}.
 \end{aligned} \tag{8}$$

§ 139. Vereinfachung für unendlich kleine Oscillationen.

In die bis soweit allgemein geführte Untersuchung führen wir die specielle Voraussetzung ein, dass die Saite im natürlichen Zustande gerade ist, und dass die Theilchen sich bei der Bewegung nur äusserst wenig aus der ursprünglichen geraden Richtung entfernen, welche wir mit der Axe der x zusammenfallen lassen. Nach dieser Annahme müssen auch die Winkel, welche ein Element ds der Saite mit der x -Axe bildet, äusserst klein sein; dasselbe gilt von den Verhältnissen

$$\frac{dy}{dx}, \quad \frac{dz}{dx},$$

deren Quadrat wir deshalb unter Gleichsetzung von ds und dx vernachlässigen. Setzen wir dazu noch den Querschnitt q der Saite als gleichmässig voraus, so verwandeln sich die Gleichungen (8.) nach Einführung der in den Formeln (6.) gegebenen Werthe in die folgenden

$$\begin{aligned}
 \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= - \frac{\partial X_x}{\partial x} \\
 \varepsilon \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= - \frac{\partial \left(X_x \frac{\partial y}{\partial x} \right)}{\partial x} \\
 \varepsilon \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= - \frac{\partial \left(X_x \frac{\partial z}{\partial x} \right)}{\partial x}.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Hierin setzen wir den Werth der Componente X_x in der Form der Gleichungen (4.) § 60

$$- X_x = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \Delta$$

ein, für welchen wir unter Rücksicht auf die Bemerkung, dass in Folge der eingeführten Vernachlässigen nach den Formeln (5.) § 138

$$0 = - Y_y = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \Delta$$

$$0 = - Z_z = 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \Delta$$

zu setzen ist, auch

$$- X_x = (2\mu + 3\lambda) \Delta$$

geschrieben werden kann oder

$$- X_x = \mu \frac{2\mu + 3\lambda}{\mu + \lambda} \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Indem wir diesen Werth in die Gleichungen (1.) einführen, bemerken wir, dass in denselben die Grössen y und z , welche im ursprünglichen geraden Zustand der Saite $= 0$ sind, nichts anderes bedeuten, als die Verrückungen v und w . Demnach erhalten wir die Gleichungen

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \mu \frac{2\mu + 3\lambda}{\mu + \lambda} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \varepsilon \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \mu \frac{2\mu + 3\lambda}{\mu + \lambda} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \varepsilon \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \mu \frac{2\mu + 3\lambda}{\mu + \lambda} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \right), \end{aligned} \quad (2.)$$

aus welchen u , v , w als Functionen von x und t zu bestimmen sind.

Obwohl wir die Quadrate von $\frac{\partial v}{\partial x}$ und $\frac{\partial w}{\partial x}$ vernachlässigt haben, so berücksichtigen wir in den Gleichungen (2.) dennoch die Producte dieser Grössen in die Grösse $\frac{\partial u}{\partial x}$, und zwar aus folgendem Grunde. Im natürlichen Zustande vermag die Saite noch keinen Ton zu erregen, sondern erst dann, wenn sie gespannt worden ist. Ihre gerade Richtung ist also nicht ihre natürliche Lage, sondern ein Zustand, in welchem sie schon eine Dehnung erfahren hat, und eine Spannung besitzt, welche die Kraft liefert, um die transversalen Bewegungen v und w der Saite hervorzubringen. Somit besteht u aus zwei nach dem Ursprung und an Grösse wesentlich verschiedenen Theilen, aus der durch die Spannung hervorgebrachten ursprünglichen Verlängerung u_0 der Saite und einem von der Bewegung herführenden Theile u_1 ; während der letztere von derselben Grössenordnung wie v und w ist, darf der erstere nicht als verschwindend klein angesehen werden. Demnach können wir in der zweiten und dritten Gleichung (2.) $\frac{\partial u}{\partial x}$ durch $\frac{\partial u_0}{\partial x}$ ersetzen.

§ 140. Einführung der anfänglichen Spannung.

Da somit unsere nächste Aufgabe darin besteht, u_0 zu bestimmen, so untersuchen wir zunächst den Ruhezustand der durch ein angehängtes Gewicht gespannten Saite. Für denselben gelten die Gleichungen

$$\begin{aligned}\frac{d^2 u}{dx^2} &= 0 \\ \frac{d}{dx} \left(\frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} \right) &= 0 \\ \frac{d}{dx} \left(\frac{du}{dx} \frac{dw}{dx} \right) &= 0\end{aligned}$$

oder

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = 0; \quad \frac{d^2 v}{dx^2} = 0; \quad \frac{d^2 w}{dx^2} = 0,$$

denen folgende Lösungen genügen

$$u = a + bx; \quad v = a_1 + b_1 x; \quad w = a_2 + b_2 x.$$

Die sechs Constanten a und b sind durch die an den Enden der Saite geltenden Bedingungen zu bestimmen, also erstens durch die Annahme, dass das eine Ende, für welches $x = 0$ ist, fest eingeklemmt sei, während an dem andern Ende das Gewicht P zieht und der Druckkraft X_x das Gleichgewicht hält. Es ist also

$$P + qX_x = 0; \quad qY_x = 0; \quad qZ_x = 0$$

und für $x = 0$

$$u = 0; \quad v = 0; \quad w = 0.$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned}a &= 0; & a_1 &= 0; & a_2 &= 0; \\ q\mu \frac{2\mu + 3\lambda}{\mu + \lambda} b &= P; & b_1 &= 0; & b_2 &= 0.\end{aligned}$$

Also ist, wenn zur Abkürzung, wie in § 65, der Elasticitätscoefficient

$$m = \mu \frac{2\mu + 3\lambda}{\mu + \lambda}$$

eingeführt wird, die durch die Spannung P bewirkte Dehnung durch folgende Formeln bestimmt:

$$u = \frac{P}{qm} x; \quad v = 0; \quad w = 0.$$

Hiernach erhalten die Gleichungen (2.) § 139 die Form

$$\begin{aligned}\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \varepsilon \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \frac{P}{q} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ \varepsilon \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{P}{q} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\end{aligned} \tag{1.}$$

welche lehrt, dass alle drei Componenten in gleicher Weise zu bestimmen sind; doch lässt sie gleichzeitig einen wesentlichen Unterschied zwischen den in der Richtung der x stattfindenden longitudinalen Schwingungen u und den beiden transversalen v und w hervortreten. Die longitudinalen Schwingungen und die Longitudinaltöne hängen nämlich von dem Elasticitätscoefficienten m ab, doch sind sie unabhängig von der Spannung der Saite; dagegen sind die transversalen Schwingungen und die Transversaltöne nicht von dem Elasticitätscoefficienten der Substanz der Saite abhängig, wohl aber von der Spannung P derselben.

§ 141. Integration und Verlängerung der Function.

Die Integration der Differentialgleichungen führen wir nur für eine derselben

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \omega^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (1.)$$

durch, da wir die Integrale u und w der beiden anderen erhalten, wenn wir für die Constante ω aus der betreffenden Gleichung (1.) § 140 den gehörigen Werth einsetzen.

Die vollständige Auflösung

$$v = f(x + \omega t) + \varphi(x - \omega t) \quad (2.)$$

der Differentialgleichung enthält zwei willkürliche Functionen f und φ der hinzugefügten Argumente.

Zur Bestimmung dieser Functionen dienen die Bedingungen, unter denen die Bewegung der Saite entstand. Wir nehmen die Figur und die Geschwindigkeit der Saite zur Zeit $t = 0$ als gegeben an, und zwar durch die von x abhängigen Functionen

$$\begin{aligned} V(x) &= f(x) + \varphi(x) \\ \mathfrak{B}(x) &= \omega \{f'(x) - \varphi'(x)\}. \end{aligned} \quad (3.)$$

Hieraus erhalten wir

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} V(x) + \frac{1}{2\omega} \int dx \mathfrak{B}(x) \\ \varphi(x) &= \frac{1}{2} V(x) - \frac{1}{2\omega} \int dx \mathfrak{B}(x), \end{aligned} \quad (4.)$$

wozu keine von x unabhängige Constante hinzugefügt zu werden braucht, weil dieselbe aus der Summe beider Functionen in v (Gl. (2.)) fortfällt.

Damit sind jedoch die Functionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ nicht allgemein bestimmt, sondern nur für Argumente, die zwischen

$$x = 0 \quad \text{und} \quad x = l$$

liegen, wenn l die Länge der Saite ist; denn die Formeln (3.) gelten nur für dieses Intervall. Die vollständige Kenntniss für jeden möglichen Werth von $x + \omega t$ und $x - \omega t$ erlangen wir durch eine Operation, welche man sehr zweckmässig die Verlängerung der Function nennt; sie beruht auf der Benutzung der für die Endpunkte $x = 0$ und $x = l$ geltenden Bedingungen. Da diese Endpunkte fest sein sollen, so ist stets $v = 0$, wenn $x = 0$ oder $x = l$ ist; es bestehen also für jeden Werth von t die Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= f(\omega t) + \varphi(-\omega t) \\ 0 &= f(l + \omega t) + \varphi(l - \omega t) \end{aligned} \quad (5.)$$

Durch die erste dieser Gleichungen wird der Werth der Function φ für negative Argumente zwischen 0 und $-l$ gegeben durch die bereits bekannten Werthe der Function f für Argumente zwischen 0 und $+l$, während die zweite die für Argumente zwischen l und $2l$ geltenden Werthe der Function f durch die bekannten Werthe der Function φ zwischen den Grenzen 0 und l bestimmt. Weiter folgen aus diesen für Argumente zwischen den Grenzen l und $2l$ geltenden Werthen der Function f nach der ersten unserer Gleichungen diejenigen von φ zwischen $-l$ und $-2l$, und dann aus diesen nach der zweiten Gleichung die Werthe von f zwischen $2l$ und $3l$. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens erhalten wir der Reihe nach alle Werthe der Function φ für negative und der Function f für positive Werthe ihres Arguments.

Das so gefundene Gesetz für die Verlängerung der Functionen lässt sich als eine Art von Spiegelungsgesetz auffassen, wenn die Functionen durch Curven dargestellt sind. In zwei Spiegeln, welche an den Enden der Saite aufgestellt sind, erscheinen die Verlängerungswerthe der Functionen als negative Spiegelbilder der ursprünglich zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = l$ gegebenen Functionen, so dass der ganze Verlauf etwa so wie in der folgenden Figur geschieht, in welcher die Function f durch eine ausgezogene, die Function φ durch eine punktirte Curve dargestellt wird.



Die erlangte Kenntniss des Verlaufs der Functionen f und φ genügt, um nach der Gleichung (2.) die gesuchte Function v für

jeden Werth von t und für jeden zwischen 0 und l liegenden Werth von x zu bilden. Man braucht nur die Summe der beiden Ordinaten zu bilden, welche zu den Abscissen $x + \omega t$ und $x - \omega t$ gehören.

Damit sind zugleich die den Anfangszustand bestimmenden Functionen $V(x)$ und $V'(x)$, welche mit f und φ nach den Gleichungen (3.) verbunden sind, ebenso über die Grenzen $x = 0$ und $x = l$ hinaus verlängert; durch diese ist die zur Zeit t stattfindende Verrückung v bestimmt durch die Gleichung

$$v = \frac{1}{2} V(x + \omega t) + \frac{1}{2} V(x - \omega t) + \frac{1}{2\omega} \int_{x-\omega t}^{x+\omega t} dx \mathfrak{B}(x), \quad (6.)$$

welche lehrt, dass die Verrückung aus zwei Theilen besteht, von welchen der erste nur von der zur Zeit $t = 0$ bestandenen Verrückung $V(x)$ herrührt, der zweite aber von der zu derselben Zeit vorhanden gewesenen Geschwindigkeit $\mathfrak{B}(x)$.

§ 142. Schwingungen nach einer anfänglichen Verrückung.

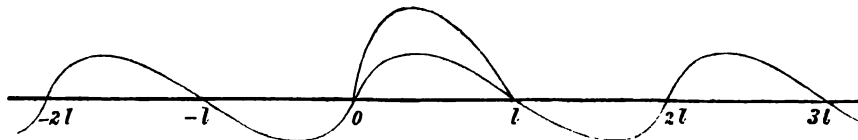
Um den Inhalt der Formel leichter übersehen zu können, betrachten wir jeden der beiden Theile der Verrückung v für sich und zuerst den aus einer anfänglichen Verrückung $V(x)$ entstehenden. Wir setzen also voraus, dass $\mathfrak{B}(x) = 0$ ist, und erhalten

$$v = \frac{1}{2} V(x + \omega t) + \frac{1}{2} V(x - \omega t),$$

worin nach den Gleichungen (3.) die Function

$$V(\xi) = 2f(\xi) = 2\varphi(\xi)$$

ist, so dass die Verlängerung der Functionen f und φ in diesem Falle sich durch eine Curve von folgender Gestalt darstellen lässt,



wenn $V(x)$ durch die in der Mitte dargestellte Curve mit doppelter Ordinate gegeben war. Die für irgend eine Stelle zwischen $x = 0$ und $x = l$ für einen beliebigen Werth von t gesuchte Function v ist dann gleich der Summe zweier Ordinaten, welche rechts und links gleich weit von der Stelle $x = x$ abstehen und zwar um die Strecke ωt von ihr entfernt sind.

Hiervon machen wir Gebrauch, um an einem einfachen Beispiele den Vorgang der an den beiden Enden der Saite stattfindenden

Reflexion anschaulich zu machen. Es sei zur Zeit $t = 0$ nur in der Mitte der Saite in der Nähe der Stelle $x = \frac{1}{2}l$ eine Verrückung vorhanden gewesen; dann lässt sich die Function $\frac{1}{2}V(\xi)$ durch eine Curve darstellen, deren Ordinaten überall $= 0$ sind, mit Ausnahme der Stellen

$$\dots - \frac{3}{2}l, \quad \frac{1}{2}l, \quad \frac{5}{2}l, \quad \frac{9}{2}l \dots,$$

an welchen die Ordinate den halben Werth der Anfangsverrückung besitzt, während sie an den zwischenliegenden Stellen

$$\dots - \frac{5}{2}l, \quad -\frac{1}{2}l, \quad \frac{3}{2}l, \quad \frac{7}{2}l, \dots$$

den negativen halben Werth annimmt. Construirt man hiernach den Zustand für spätere Zeitmomente, so erkennt man leicht, dass sich von der ursprünglichen Erregungsstelle $x = \frac{1}{2}l$ aus zwei Verrückungen von halber Grösse mit der constanten Geschwindigkeit ω nach beiden Seiten fortpflanzen bis zu dem durch die Gleichung

$$\omega t = \frac{1}{2}l$$

bestimmten Momente, in welchem jede eins der festen Enden der Saite erreicht und dadurch vernichtet wird. Von diesem Augenblick an aber bewegen sich von den Enden der Saite mit derselben Geschwindigkeit ω nach der Mitte hin zwei gleich grosse, aber entgegengesetzt gerichtete Verrückungen, welche wir Wellenthäler nennen können, wenn wir die erst erwähnten als Wellenberge bezeichnen. Diese beiden Wellenthäler begegnen sich, wenn

$$\omega t = l$$

geworden ist, in der Mitte im Punkte $x = \frac{1}{2}l$ und bilden hier ein Thal von doppelter Tiefe, welches sich von da an wieder in zwei flachere spaltet, die in der bisherigen Richtung fortschreiten. In dem Augenblicke, in welchem

$$\omega t = \frac{3}{2}l$$

wird, stossen beide Wellenthäler wieder an die festen Endpunkte an, wodurch die Verrückung aufgehoben wird. Gleichzeitig entsteht an jedem Ende eine entgegengesetzte Verrückung, es bilden sich also zwei Wellenberge, welche von den Enden nach der Mitte hin fortschreiten. Wenn sie zu der Zeit, wo

$$\omega t = 2l$$

geworden ist, in der Mitte im Punkte $x = \frac{1}{2}l$ zusammengetroffen sind

und jetzt wieder einen Wellenberg von der ursprünglichen doppelten Höhe bilden, so beginnt der ganze Verlauf sich in genau derselben Weise zu wiederholen.

Ganz ähnlich verhält es sich, wenn die Stelle der ursprünglichen Erregung nicht in der Mitte der Saite lag. Es findet nur der Unterschied statt, dass die Reflexion an beiden Endpunkten nicht in demselben Augenblick stattfindet, und dass die reflectirten Wellenthäler und Wellenberge sich nicht in der Mitte, sondern in zwei gleich weit von den Enden abstehenden Punkten begegnen.

Wurde die Bewegung dicht an einem Ende der Saite erregt, so bewegt sich über die ganze Länge der Saite ein Wellenberg, dem sofort ein Wellenthal folgt; am jenseitigen Ende reflectirt, schreitet das Wellenthal voran, und ihm folgt unmittelbar der Wellenberg.

§ 143. Bewegungen, welche aus einer anfänglichen Geschwindigkeit entstehen.

Um auch den anderen Fall, dass die Bewegung aus einer anfänglichen Geschwindigkeit $\mathfrak{B}(x)$ entsteht, während die anfängliche Verückung $V(x) = 0$ ist, nach den Formeln des § 141 zu untersuchen, haben wir

$$v = Q(x + \omega t) - Q(x - \omega t)$$

zu setzen, wenn wir unter Q das Integral

$$Q(\xi) = \frac{1}{2\omega} \int d\xi \mathfrak{B}(\xi)$$

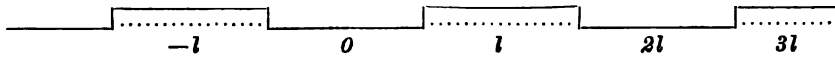
verstehen; denn es ist nach den Formeln (4.) § 141 in diesem Falle

$$f(\xi) = Q(\xi), \quad \varphi(\xi) = -Q(\xi).$$

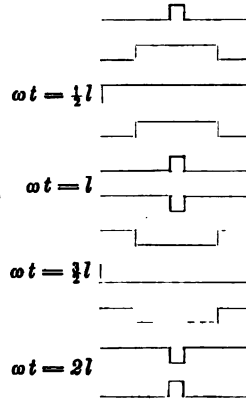
Somit besteht der wesentliche Unterschied dieses gegen den vorigen Fall in einer Aenderung der Vorzeichen, und es wird demnach bei der Construction der verlängerten Curven nicht das negative, sondern das positive Spiegelbild des vorausgegangenen Theiles zu zeichnen sein.

In dem einfachen Falle, dass zur Zeit $t = 0$ nur der Punkt in der Mitte $x = \frac{1}{2}l$ eine von Null verschiedene Geschwindigkeit besitzt, verschwindet die Function Q für alle Argumente ξ zwischen 0 und $\frac{1}{2}l$; von $\xi = \frac{1}{2}l$ an erhält sie einen Werth, welcher constant bleibt bis $\xi = l$. Das soeben erörterte Gesetz der Verlängerung ergiebt, dass dieser constante Werth gültig bleibt bis zu der Stelle $\xi = \frac{3}{2}l$,

an welcher wieder der Werth $Q = 0$ eintritt. Der ganze Verlauf der Function $Q(\xi)$ entspricht also dem der folgenden Zickzacklinie:



und diese führt zu dem Schlusse, dass die zeitlich auf einander folgenden Verrückungszustände der Saite sich durch die nebenstehenden schematischen Zeichnungen darstellen lassen. Die Verrückung breitet sich zuerst von der Mitte nach den Enden hin aus, zieht sich darauf wieder nach der Mitte hin zusammen, geht nun in die entgegengesetzte Richtung über, breitet sich in dieser wieder aus und zieht sich abermals zusammen, womit der Kreis durch-



§ 144. Schwingungen von zwei mit einander verbundenen Saiten.

Nach demselben Verfahren lässt sich die allgemeinere Aufgabe lösen, die Schwingungen von zwei Saiten verschiedener Natur, welche mit einander verbunden und dann zusammen gespannt worden sind, zu berechnen. Der hauptsächlichste Unterschied beider Aufgaben liegt darin, dass am Ende einer gespannten Saite die Widerstände, welche sich der Weiterbewegung darbieten, unendlich gross sind, während an der Grenzstelle zweier verbundener Saiten zwar auch dem Uebergange der Bewegung aus einer Saite in die andere sich Widerstände entgegensetzen, aber Widerstände endlicher Grösse, so dass nur ein Theil der Bewegung reflectirt wird, ein anderer in die zweite Saite übergeht. Unser neues Problem betrifft also zugleich die Frage, welcher Theil der Bewegung reflectirt und welcher Theil gebrochen wird, wenn es erlaubt ist, diesen aus der Optik entlehnten Ausdruck hier zu gebrauchen. Die akustische Aufgabe entspricht, wenigstens für transversale Schwingungen, dann vollständig der optischen, wenn diese auf senkrecht einfallendes Licht beschränkt wird.

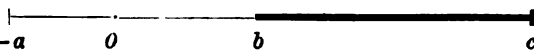
Bei der Aufstellung der Gleichungen, welche die Bedingungen der Aufgabe enthalten, benutzen wir für die erste Saite dieselbe Bezeichnung wie bisher; für die zweite unterscheiden wir die Werthe

der entsprechenden Grössen durch angefügte Striche. Dann haben wir folgende zwei Systeme von Differentialgleichungen (Gleichg. (2.) § 139) zu integrieren:

$$\begin{array}{ll}
 \text{für die erste Saite:} & \text{für die zweite Saite:} \\
 \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \varepsilon' \frac{\partial^2 u'}{\partial t^2} = m' \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} \\
 \varepsilon \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = m \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \varepsilon' \frac{\partial^2 v'}{\partial t^2} = m' \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u'}{\partial x} \frac{\partial v'}{\partial x} \right) \\
 \varepsilon \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = m \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \varepsilon' \frac{\partial^2 w'}{\partial t^2} = m' \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u'}{\partial x} \frac{\partial w'}{\partial x} \right).
 \end{array} \quad (1)$$

Hierin bedeuten m und m' die Elasticitätsconstanten

$$m = \mu \frac{2\mu + 3\lambda}{\mu + \lambda} \qquad m' = \mu' \frac{2\mu' + 3\lambda'}{\mu' + \lambda'}$$

Die Coordinate x rechnen wir in beiden Saiten von einem beliebigen Punkte der ersten Saite aus und bezeichnen durch $-a$, b und c die Werthe von x , welche  den beiden festen Enden $-a$, 0 , b , c und dem Punkte in der Mitte zukommen, an welchem beide Saiten mit einander verbunden sind, so dass $a + b$ und $c - b$ die Längen der beiden Saiten sind. Die Grenzbedingungen für die ersteren beiden Punkte sind die früheren:

$$\begin{array}{llll}
 \text{für } x = -a & u = 0 & v = 0 & w = 0 \\
 \text{„ } x = c & u' = 0 & v' = 0 & w' = 0.
 \end{array} \quad (2)$$

Für den Verknüpfungspunkt in der Mitte aber, also für $x = b$, haben wir nicht bloss die Bedingungen

$$u = u' \qquad v = v' \qquad w = w' \quad (3)$$

zu erfüllen, sondern auch die, dass die Componenten der elastischen Spannungen in beiden Saiten für den gemeinschaftlichen Endquerschnitt einander gleich sein müssen, dass also nach der in § 138 gebrauchten Bezeichnung für $x = b$

$$qA = q'A' \qquad qB = q'B' \qquad qC = q'C'$$

sein muss, wo die gestrichenen Grössen wiederum für die zweite Saite dieselbe Bedeutung haben sollen, wie die ungestrichenen für die erste. Diese Bedingungen verwandeln sich nach den Formeln (6.) § 138, wenn wir dabei die in § 139 für unendlich kleine Schwingungen begründeten Vereinfachungen einführen, in die Gleichungen

$$\begin{aligned} q X_x &= q' X'_x \\ q X_x \frac{\partial v}{\partial x} &= q' X'_x \frac{\partial v'}{\partial x} \\ q X_x \frac{\partial w}{\partial x} &= q' X'_x \frac{\partial w'}{\partial x}, \end{aligned}$$

denen nur dadurch genügt werden kann, dass

$$\begin{aligned} q X_x &= q' X'_x \\ \text{und} \quad \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial v'}{\partial x} \quad \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w'}{\partial x} \end{aligned} \quad (4.)$$

für $x = b$ gemacht wird; hier ist

$$- X_x = m \frac{\partial u}{\partial x} \quad - X'_x = m' \frac{\partial u'}{\partial x}.$$

Führen wir nun noch die Spannung P , welche in beiden Saiten gleich ist, ein, so erhalten wir nach dem in § 140 für eine einfache Saite durchgeführten Verfahren endlich statt der Gleichungen (1.) für die erste und für die zweite Saite die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \varepsilon' \frac{\partial^2 u'}{\partial t^2} &= m' \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} \\ \varepsilon \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \frac{P}{q} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} & \varepsilon' \frac{\partial^2 v'}{\partial t^2} &= \frac{P}{q'} \frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} \\ \varepsilon \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{P}{q} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} & \varepsilon' \frac{\partial^2 w'}{\partial t^2} &= \frac{P}{q'} \frac{\partial^2 w'}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (5.)$$

§ 145. Integration.

Bei der Integration dieser Gleichungen beschränken wir uns auf die Untersuchung transversaler Schwingungen und zwar der Componente v .

Die Differentialgleichungen bringen wir durch Einführung der Grössen

$$\omega^2 = \frac{P}{2q} \quad \omega'^2 = \frac{P}{2q'}$$

auf die Form

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \omega^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 v'}{\partial t^2} = \omega'^2 \frac{\partial^2 v'}{\partial x^2}. \quad (1.)$$

Die Functionen v und v' haben den Bedingungen zu genügen, dass

$$\text{für } x = -a \quad v = 0 \quad (2.)$$

$$\text{,, } x = b \quad v = v' \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v'}{\partial x} \quad (3.)$$

$$\text{,, } x = c \quad v' = 0 \quad (4.)$$

$$\text{,, } t = 0 \quad v = V(x) \quad v' = V'(x)$$

$$\text{und} \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \mathfrak{B}(x) \quad \frac{\partial v'}{\partial t} = \mathfrak{B}'(x) \quad (5.)$$

wird, wo die letzteren vier Functionen als beliebig gegeben anzusehen sind.

Die allgemeine Auflösung der Differentialgleichungen (1.)

$$\begin{aligned} v &= f(x + \omega t) + \varphi(x - \omega t) \\ v' &= g(x + \omega' t) + \chi(x - \omega' t) \end{aligned} \quad (6.)$$

enthält vier willkürliche Functionen, welche innerhalb der Intervalle

$$- a < x < b \quad \bullet \quad b < x < c$$

durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} V(x) &= f(x) + \varphi(x) & V'(x) &= g(x) + \chi(x) \\ \mathfrak{B}(x) &= \omega \{f'(x) - \varphi'(x)\} & \mathfrak{B}'(x) &= \omega' \{g'(x) - \chi'(x)\} \end{aligned} \quad (7.)$$

wie früher bestimmt werden können. Die Verlängerung über die genannten Grenzen der Argumente hinaus erreichen wir durch Benutzung der Bedingungen (2.), (3.) und (4.) für jeden Werth von t .

Um dasjenige, was in diesen Rechnungen neu ist und sie von dem früheren Einfachen unterscheidet, hervortreten zu lassen, begnügen wir uns, einen besonderen Fall zu betrachten, indem wir beide Saiten als unendlich lang annehmen, also

$$a = \infty \quad \text{und} \quad c = \infty$$

setzen. Dann gelten die aus den Gleichungen (7.) hergeleiteten Werthe

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} V(x) + \frac{1}{2\omega} \int dx \mathfrak{B}(x) \\ \varphi(x) &= \frac{1}{2} V(x) - \frac{1}{2\omega} \int dx \mathfrak{B}(x) \end{aligned} \quad (8a.)$$

für jeden Werth von x zwischen den Grenzen $-\infty$ und b , und ebenso ist

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{2} V'(x) + \frac{1}{2\omega'} \int dx \mathfrak{B}'(x) \\ \chi(x) &= \frac{1}{2} V'(x) - \frac{1}{2\omega'} \int dx \mathfrak{B}'(x) \end{aligned} \quad (8b.)$$

für jeden Werth von x zwischen b und ∞ bestimmt. Die Kenntniss derselben Functionen für andere Werthe ihres Arguments erlangen wir durch alleinige Benutzung der für $x=b$ geltenden Bedingungen (3.); denn die für $x = \pm \infty$ aufgestellten Gleichungen (2.) und (4.) erfordern keine besondere Berücksichtigung, wenn nur die Functionen V , V' , \mathfrak{B} , \mathfrak{B}' derartig gegeben sind, dass sie diesen Bedingungen entsprechen. Die Gleichungen (3.) aber ergeben die für jeden Werth von t geltenden Beziehungen

$$\begin{aligned} f(b + \omega t) + \varphi(b - \omega t) &= g(b + \omega' t) + \chi(b - \omega' t) \\ f'(b + \omega t) + \varphi'(b - \omega t) &= g'(b + \omega' t) + \chi'(b - \omega' t). \end{aligned}$$

Werden die in den letzten Gleichungen enthaltenen derivirten Functionen nach t integrirt, so wird

$$\frac{1}{\omega} \{f(b + \omega t) - \varphi(b - \omega t)\} = \frac{1}{\omega'} \{g(b + \omega' t) - \chi(b - \omega' t)\},$$

wozu keine Constante hinzugefügt zu werden braucht, weil dieselbe schliesslich doch aus den Formeln fortfällt. Hieraus ergeben sich die für jedes positive t gültigen Gleichungen

$$\begin{aligned} f(b + \omega t) &= \frac{\omega' - \omega}{\omega' + \omega} \varphi(b - \omega t) + \frac{2\omega}{\omega' + \omega} g(b + \omega' t) \\ \chi(b - \omega' t) &= \frac{2\omega'}{\omega' + \omega} \varphi(b - \omega t) + \frac{\omega - \omega'}{\omega' + \omega} g(b + \omega' t), \end{aligned} \tag{9.}$$

nach welchen die gesuchten Werthe der Functionen soweit, wie sie erforderlich sind, aus den nach den Formeln (8.) bereits bekannten bestimmt sind.

§ 146. Reflexion und Brechung.

Um den Inhalt dieser Formeln zu beurtheilen, untersuchen wir das einfache Beispiel, dass zur Zeit $t = 0$ beide Saiten in Ruhe und zugleich, mit alleiniger Ausnahme des Punktes $x = 0$, in Ruhe waren. Wir setzen also die Geschwindigkeiten

$$\mathfrak{B}(x) = 0 \quad \mathfrak{B}'(x) = 0,$$

ebenso die Verrückungen

$$\mathfrak{V}(x) = 0 \quad \mathfrak{V}'(x) = 0,$$

jedoch soll

$$\mathfrak{V}(0) = V$$

einen von Null verschiedenen Werth besitzen. Dann ist nach den Gleichungen (8.) § 145, in welchen wir nur die Bezeichnung des Arguments abändern,

$$\begin{aligned} g(\xi) = 0 & \quad \chi(\xi) = 0 & \quad \text{für } b < \xi < \infty \\ f(\xi) = 0 & \quad \varphi(\xi) = 0 & \quad \text{,, } -\infty < \xi < b \end{aligned}$$

mit Ausnahme von

$$f(0) = \frac{1}{2} V \quad \varphi(0) = \frac{1}{2} V;$$

ferner nach den Gleichungen (9.)

$$\begin{aligned} f(b + \omega t) &= \frac{\omega' - \omega}{\omega' + \omega} \varphi(b - \omega t) \\ \chi(b - \omega' t) &= \frac{2\omega'}{\omega' + \omega} \varphi(b - \omega t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 4\mu \frac{\mu + \lambda}{2\mu + \lambda} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mu \frac{2\mu + 3\lambda}{2\mu + \lambda} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \\ \varepsilon \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 4\mu \frac{\mu + \lambda}{2\mu + \lambda} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \mu \frac{2\mu + 3\lambda}{2\mu + \lambda} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (5.)$$

Die Integration derselben würde die in der Ebene der Membran vor sich gehenden Schwingungen, welche wir als longitudinale bezeichnet haben, kennen lehren. Wir werden aber diese Untersuchung nicht weiter verfolgen.

Um die Gleichung (2.), welche die transversalen Bewegungen bestimmt, weiter zu entwickeln, müssen wir ein anderes Verfahren anwenden, nämlich zuvor die Spannung, welcher die Membran unterworfen wurde, einführen.

Bei der Berechnung der Wirkung, welche die spannenden Kräfte ausgeübt haben, setzen wir voraus, die Membran sei rechteckig von Gestalt, und sie sei durch Zugkräfte, welche in den Richtungen ihrer Kanten wirkten, gleichmässig gespannt worden. Die Längen der beiden Kanten, welche den Coordinaten x und y parallel verlaufen mögen, seien α und β ; an der Kante β greife mit überall gleichmässigem Zuge in der Richtung der Kante α die Kraft P an, und an der Kante α ziehe ebenso parallel β die Kraft Q . Dann sind die Bedingungen

$$0 = P + \beta \delta X_x, \quad 0 = Q + \alpha \delta Y_y, \quad 0 = X_y \quad (6.)$$

zu erfüllen, wenn δ , wie bisher, die Dicke der Membran bedeutet. Diesen Bedingungen, sowie den Differentialgleichungen (5.) genügt die Annahme der linearen Functionen

$$u = ax, \quad v = by,$$

in welchen die Constanten durch die aus den Formeln (4.) folgenden Gleichungen

$$2(\mu + \lambda) a + \lambda b = \frac{2\mu + \lambda}{2\mu} \frac{P}{\beta \delta}$$

$$\lambda a + 2(\mu + \lambda) b = \frac{2\mu + \lambda}{2\mu} \frac{Q}{\alpha \delta}$$

zu bestimmen sind. Somit bilden die aufgestellten Gleichungen nach § 60 die einzige richtige Lösung der Aufgabe.

Unter der Voraussetzung unendlich kleiner Bewegungen dürfen wir, wie in § 140 bei der Saite, die in den Gleichungen (6.) gegebenen Werthe der Druckcomponenten in die Gleichung (2.) einführen; dadurch erhalten wir die Differentialgleichung, welche die transversalen Bewegungen einer gespannten rechteckigen Membran bestimmt, in der Gestalt

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \omega^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \psi^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad (7.)$$

wo zur Abkürzung

$$\omega^2 = \frac{P}{\varepsilon \beta \delta} \quad \psi^2 = \frac{Q}{\varepsilon \alpha \delta}$$

gesetzt ist. Ausser dieser Differentialgleichung ist die Bedingung zu berücksichtigen, dass die eingeklemmten Ränder der gespannten Membran an der Bewegung nicht Theil nehmen können, dass also zu jeder Zeit die gesuchte Function

$$w = 0$$

werden muss, wenn eine der folgenden vier Gleichungen

$$x = 0, \quad x = \alpha, \quad y = 0, \quad y = \beta$$

erfüllt ist. Endlich muss noch der Anfangszustand der Verrückung und der Bewegung für $t = 0$ gegeben sein.

§ 149. Transversaltöne einer einseitig gespannten Membran.

Ehe wir diese Untersuchung durchführen, lösen wir eine einfachere Aufgabe, um die nothwendigen Grundbegriffe zu erläutern.

Es sei die Membran nur in einer Richtung und zwar in derjenigen der Coordinate x durch die Kraft P gespannt; dagegen sei die parallel x verlaufende Kante frei; dann fallen auch die Bedingungen für $y = 0$ und $y = \beta$ fort, und wir haben bei der Integration der Gleichung

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \omega^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

nur die Bedingungen zu berücksichtigen, dass

$$\text{für } x = 0 \quad \text{und} \quad x = \alpha \quad w = 0$$

werde, und dass für $t = 0$

$$w = W(x) \quad \text{und} \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \mathfrak{B}(x)$$

als Functionen von x gegeben seien.

Diese Gleichungen gelten nicht bloss für das genannte Problem einer einseitig gespannten Membran, sondern sie gelten auch für eine schon behandelte Aufgabe, nämlich für die Theorie der Schwingungen einer gespannten Saite. Wenn wir hier diese Untersuchung noch einmal aufnehmen, so geschieht es, um eine andere Methode der Auflösung anzuwenden.

Wir lösen die Aufgabe, indem wir trigonometrische Functionen¹⁾ von x und t als particuläre Auflösungen einführen. Wir wählen als solche die Function

$$w = A_m \sin \frac{m\pi x}{\alpha} \cdot \cos \frac{m\pi \omega t}{\alpha},$$

welche, wenn m eine ganze Zahl bedeutet, bereits den Bedingungen für $x = 0$ und $x = \alpha$ genügt; für $t = 0$ wird, da A_m eine Constante sein soll,

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \mathfrak{B}(x) = 0;$$

wir beschränken uns auf diesen besonderen Fall, indem wir bemerken, dass eine ähnliche Lösung, welche den Sinus der Zeit enthält und $w = W(x) = 0$ für $t = 0$ macht, hinzugefügt werden müsste, wenn ein anderer Anfangswerth der Geschwindigkeit gegeben wäre.

Die vollständige Lösung der Differentialgleichung bildet die Summe

$$w = \sum A_m \sin \frac{m\pi x}{\alpha} \cdot \cos \frac{m\pi \omega t}{\alpha},$$

welche so auszuführen ist, dass m der Reihe nach die Werthe aller positiven ganzen Zahlen annimmt. Die von m abhängende Constante A_m wird aus den gegebenen Werthen der Function $W(x)$ bestimmt nach der Formel

$$A_m = \frac{2}{\alpha} \int_0^{\alpha} d\xi W(\xi) \sin \frac{m\pi \xi}{\alpha},$$

welche lehrt, dass jede beliebige, continuirliche oder discontinuirliche Function $W(x)$ durch eine Sinusreihe dargestellt werden kann.

Wenn z. B. die anfängliche Gestalt der Saite eine Parabel war, also wenn

$$W(x) = 4h \frac{x(\alpha - x)}{\alpha^2}$$

ist, wo die Constante h die Entfernung des Scheitelpunktes aus der Ruhelage ist, so wird die trigonometrische Reihe, welche w bestimmt,

$$w = 32 \frac{h}{\pi^3} \left\{ \sin \frac{\pi}{\alpha} x \cdot \cos \frac{\pi}{\alpha} \omega t + \frac{1}{27} \sin 3 \frac{\pi}{\alpha} x \cdot \cos 3 \frac{\pi}{\alpha} \omega t \right. \\ \left. + \frac{1}{125} \sin 5 \frac{\pi}{\alpha} x \cdot \cos 5 \frac{\pi}{\alpha} \omega t + \dots \right\}.$$

1) Vergl. Riemann, über die Darstellbarkeit einer Function durch trigonometrische Functionen. Abh. d. Gött. Ges. d. Wiss. Bd. 13. Gesammelte Werke S. 213. Anm. d. Herausg.

Ist dagegen die Verrückung, welche alle Punkte der Saite zur Zeit $t=0$ erlitten hatten, durch ein über α errichtetes gleichschenkliges Dreieck von der Höhe h darstellbar, so wird dieselbe zur Zeit t

$$w = 8 \frac{h}{\pi^2} \left\{ \sin \frac{\pi}{\alpha} x \cdot \cos \frac{\pi}{\alpha} \omega t - \frac{1}{9} \sin 3 \frac{\pi}{\alpha} x \cdot \cos 3 \frac{\pi}{\alpha} \omega t + \frac{1}{25} \sin 5 \frac{\pi}{\alpha} x \cdot \cos 5 \frac{\pi}{\alpha} \omega t - \dots \right\}.$$

Die allgemeine Form, in welcher die gesuchte Function w nach diesem Integrationsverfahren gefunden wird, zeigt, dass die Bewegung sich immer in eine Reihe einfach periodischer Schwingungen auflösen lässt, von welchen eine jede durch ein Glied der trigonometrischen Reihe bestimmt wird. Jede dieser Schwingungen bildet einen, wenigstens bei einer gewissen Schnelligkeit der Schwingungen, hörbaren Ton von bestimmter Höhe.

Um den gesetzmässigen Zusammenhang, welcher zwischen den verschiedenen Höhen dieser Töne besteht, zu erläutern, betrachten wir zunächst das erste Glied der Reihe

$$w_1 = A_1 \sin \frac{\pi x}{\alpha} \cdot \cos \frac{\pi \omega t}{\alpha},$$

welches meistens, wie in den soeben angeführten Beispielen, unter allen Gliedern den grössten Werth besitzt. Dieses Glied stellt eine Schwingung der ganzen Membran oder Saite dar, bei welcher jedes Theilchen nach Verlauf derselben Zeit in seine ursprüngliche Stellung zurückkehrt. Die Zeit einer einfachen Schwingung beträgt

$$\frac{1}{2} T_1 = \frac{\alpha}{\omega},$$

und diejenige eines Hin- und Herganges

$$T_1 = \frac{2\alpha}{\omega}.$$

Diese Zeit ist also der Länge α der Saite oder Membran direct proportional, dagegen der Grösse (§ 148)

$$\omega = \sqrt{\frac{P}{\varepsilon \beta \delta}},$$

folglich der Quadratwurzel aus der auf die Einheit des Querschnitts wirkenden Spannung umgekehrt proportional. Durch Einführung des Gewichts der Membran

$$\Pi = \varepsilon \alpha \beta \delta g,$$

wo g die beschleunigende Kraft der Schwere ist, erhalten wir die veränderte Form¹⁾

$$T_1 = 2 \sqrt{\frac{\pi \alpha}{Pg}}$$

für den Werth der Schwingungszeit dieses Tones, welchen man den Grundton nennt.

Die übrigen Glieder der Reihe enthalten die Gesetze der sonstigen Schwingungen, welche die Membran oder Saite ausführen kann. Diese Tonschwingungen bilden die Reihe der harmonischen Obertöne des Grundtons, deren Schwingungszeiten nach den Formeln

$$T_2 = \frac{1}{2} T_1, \quad T_3 = \frac{1}{3} T_1, \quad T_4 = \frac{1}{4} T_1, \quad T_5 = \frac{1}{5} T_1 \text{ u. s. w.}$$

durch diejenige des Grundtons T_1 ausgedrückt werden. Die Schwingungszahlen, welche die in der Zeiteinheit erfolgende Anzahl der Schwingungen für diese Töne bestimmen, sind also die ganzzahligen Vielfachen der Schwingungszahl des Grundtons. Daraus folgt, dass die Reihe der Obertöne besteht aus der Octave, der Quint der Octave, der zweiten Octave, der grossen Terz und der Quint der zweiten Octave u. s. f.

Jedem dieser Obertöne entspricht eine besondere Lage von Schwingungsknoten in der Saite, und ebenso in der Membran von geraden Linien, welche mit den Schwingungsknoten die Eigenschaft theilen, dass sie bei den Schwingungen in Ruhe bleiben. Der Grundton besitzt keinen Knotenpunkt, der erste Oberton, die Octave, einen in der Mitte der Saite, der zweite Oberton, die Quint der Octave 2, an den Stellen $x = \frac{1}{3} \alpha$ und $x = \frac{2}{3} \alpha$, für welche bei jedem Werthe von t die Verrückung

$$w_3 = A_3 \sin 3 \frac{\pi}{\alpha} x \cdot \cos 3 \frac{\pi}{\alpha} \omega t$$

verschwindet, u. s. w. In der einseitig gespannten Membran entstehen an denselben Stellen ruhende Linien, deren Richtung senkrecht gegen die Richtung der spannenden Zugkraft verläuft.

1) Die Formel, welche zur Bestimmung der Schwingungszeit des Grundtons durch die Spannung dient, kann auch dazu verwandt werden, um umgekehrt aus der beobachteten Höhe des Grundtons die Spannung zu bestimmen. Hierauf beruht weiter ein Verfahren, den thermischen Ausdehnungscoefficienten zu messen, indem man die mit der Temperatur erfolgende Aenderung des Tons beobachtet. Die Theorie dieser Methode giebt Gelegenheit, die im neunten Abschnitt aufgestellten Formeln anzuwenden, indem wir zu der Spannung den von der Temperatur abhängigen thermischen Druck hinzufügen (§ 53).

Diese ruhenden Linien in der schwingenden Membran sind es, welche der weiteren Untersuchung dieses Gegenstandes Werth verleihen; denn sie bilden in einer nach beiden Richtungen gespannten Membran Curven von derselben Art wie die Chladni'schen Klangfiguren.

§ 150. Gleichmässig gespannte quadratische Membran.

Die Theorie dieser Figuren entwickeln wir an dem wichtigsten Beispiel, indem wir voraussetzen, dass die Membran quadratisch begrenzt und in den Richtungen beider Saiten gleich stark gespannt sei. Wir setzen also in den Formeln des § 148

$$\alpha = \beta \quad \text{und} \quad P = Q;$$

so erhalten wir die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \omega^2 \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right\},$$

welche nebst den Bedingungen, dass $w = 0$ werde für $x = 0$, $x = \alpha$, $y = 0$, $y = \alpha$, die transversale Verrückung w der Membran bestimmt. Setzen wir noch voraus, dass zur Zeit $t = 0$ die Geschwindigkeit

$$\frac{\partial w}{\partial t} = 0$$

sei, so ist die vollständige Auflösung in folgender Summe von particularen Integralen

$$w = \sum A_m^n \cos pt \cdot \sin \frac{m\pi x}{\alpha} \cdot \sin \frac{n\pi y}{\alpha}$$

enthalten, in welcher die Summirung über alle ganzzahligen Werthe von m und n auszudehnen ist; die Constante p ist durch die Gleichung

$$p^2 \alpha^2 = \pi^2 (m^2 + n^2) \omega^2$$

mit m und n verbunden; die Grössen A sind von m und n abhängige Constanten, welche aus dem für $t = 0$ gegebenen Anfangswerthe

$$w = W(x, y)$$

nach dem im vorigen Paragraphen angeführten Lehrsatz in folgender Weise bestimmt werden:

$$A_m^n = \frac{4}{\alpha^2} \int_0^\alpha d\xi \int_0^\alpha d\eta W(\xi, \eta) \cdot \sin \frac{m\pi\xi}{\alpha} \cdot \sin \frac{n\pi\eta}{\alpha}.$$

Aus der für w gefundenen Form der Reihenentwicklung ersehen wir, dass auch in diesem Falle die Bewegung sich auflöst in eine Anzahl von einfachen Tonschwingungen, deren Schwingungszeit und mit dieser die Tonhöhe durch den Werth der zugehörigen Constante p angegeben wird. Es zeigt sich aber ein wesentlicher Unterschied zwischen dem Verhalten der Membran und dem der Saite. Während bei der letzteren alle Töne sich als harmonische Obertöne eines einzigen Grundtones erwiesen, sind bei der Membran die verschiedenen Töne im Allgemeinen nicht unter einander harmonisch, da ihre Schwingungszahlen nicht in einfach ganzzahligen Verhältnissen zu einander stehen.

Für den tiefsten Ton der Membran ist

$$m = n = 1, \text{ also } p\alpha = \pi\omega\sqrt{2}.$$

Der nächst höhere Ton ist entweder durch

$$m = 1, n = 2 \text{ oder } m = 2, n = 1$$

bestimmt; in beiden Fällen ist

$$p\alpha = \pi\omega\sqrt{5}.$$

Dieser Ton ist kein Oberton des ersten, er bildet also einen zweiten Grundton. Ebenso führen die Werthe

$$m = 3, n = 4 \text{ oder } m = 4, n = 3,$$

durch welche

$$p\alpha = 5\pi\omega$$

wird, auf einen neuen Grundton. Es ist also leicht einzusehen, dass die Anzahl der Grundtöne unbegrenzt ist.

Dagegen erhalten wir z. B. für

$$m = n, \text{ also } p\alpha = n\pi\omega\sqrt{2}$$

stets einen Oberton des tiefsten Grundtons, ebenso für

$$m = 2n \text{ oder } n = 2m,$$

also für

$$p\alpha = m\pi\omega\sqrt{5} \text{ oder } p\alpha = n\pi\omega\sqrt{5}$$

stets einen Oberton des zweiten Grundtons u. s. w.

Es kann auch der Fall eintreten, dass ein Ton harmonischer Oberton zu einem anderen ist, ohne dass das Verhältniss zwischen den Zahlen m und n bei beiden dasselbe zu sein braucht. Der Ton z. B., welcher durch den Werth von p

$$p\alpha = 5\pi\omega\sqrt{2}$$

bestimmt ist und den Zahlen

$$m = 1, n = 7 \quad \text{oder} \quad m = 7, n = 1$$

entspricht, ist ein Oberton des tiefsten Grundtons, für welchen

$$p\alpha = \pi\omega\sqrt{2}$$

ist, weil die Summe

$$m^2 + n^2 = 50$$

durch die Quadratzahl 25 theilbar ist.

Hiernach ergibt sich das Gesetz, dass eine quadratische Membran so viele verschiedene Grundtöne besitzt, als es Zahlen giebt, welche der Summe von zwei Quadratzahlen gleich, aber untheilbar durch eine Quadratzahl sind. Diese Zahlen bilden die Reihe

$$m^2 + n^2 = 2, 5, 10, 13, 17, 25, 26, 29, 34, 37 \text{ u. s. w.}$$

Die Gestalt der Klangfigur, welche auf der Membran bei einem bestimmten Tone entsteht, hängt nicht bloss von der Höhe dieses Tones, also von dem Werthe von p ab, sondern auch von der Art, in welcher dieser Ton erregt wurde, folglich von den Werthen der Zahlen m und n . Dieses gilt nicht bloss von einem Obertone, sondern kann auch für einen Grundton zutreffen, wie z. B. bei dem Tone, für welchen

$$m^2 + n^2 = 65$$

ist; denn es ist sowohl

$$1^2 + 8^2 = 65,$$

als auch

$$4^2 + 7^2 = 65.$$

In beiden Fällen ist die Tonhöhe gleich, aber die Schwingungsform der Membran sehr verschieden. Zur Erläuterung dieser Verhältnisse betrachten wir einige einfache Beispiele.

Der tiefste Grundton, bei welchem die Werthe

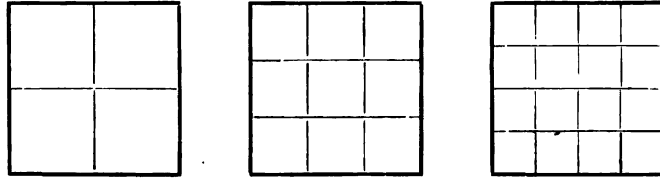
$$m = n = 1 \quad p\alpha = \pi\omega\sqrt{2}$$

gelten, giebt keine Klangfigur, weil die Function nur für die Ränder der Membran, nämlich für $x = 0, x = \alpha, y = 0, y = \alpha$ verschwindet. Dagegen entstehen durch die Obertöne dieses Grundtons, für welche wir

$$m = n = 2 \quad p\alpha = 2\pi\omega\sqrt{2}$$

$$m = n = 3 \quad p\alpha = 3\pi\omega\sqrt{2}$$

u. s. w. zu setzen haben, Klangfiguren, welche aus rechtwinklig sich durchkreuzenden, den Kanten parallel laufenden geraden Linien be-



stehen, so dass die Membran in 4, 9, 16 u. s. f. quadratische Felder getheilt wird; denn die Function

$$A_n^n \cos pt \cdot \sin \frac{n\pi x}{\alpha} \cdot \sin \frac{n\pi y}{\alpha}$$

verschwindet für die Werthe

$$x = \frac{\alpha}{n} \quad x = 2 \frac{\alpha}{n} \quad x = 3 \frac{\alpha}{n} \text{ u. s. w.},$$

sowie für die gleichen Werthe von y .

Der zweite Grundton der Membran, für welchen

$$p\alpha = \pi\omega\sqrt{5}$$

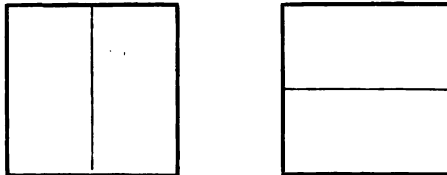
gefunden wurde, ist von einer Klangfigur begleitet, deren Gleichung

$$0 = A_1^2 \sin \frac{\pi x}{\alpha} \cdot \sin \frac{2\pi y}{\alpha} + A_2^1 \sin \frac{2\pi x}{\alpha} \cdot \sin \frac{\pi y}{\alpha},$$

oder kürzer

$$0 = A_1^2 \cos \frac{\pi y}{\alpha} + A_2^1 \cos \frac{\pi x}{\alpha}$$

erkennen lässt, dass die Figur von der Art der Tonerregung abhängt. Ist eine der beiden Constanten $A = 0$, so entsteht eine die Membran



in der Mitte theilende gerade Linie, welche einer der Kanten des Quadrats parallel verläuft. Ist

$$A_1^2 = -A_2^1,$$

so entsteht die diagonal verlaufende gerade Linie, deren Gleichung

$$x = y$$

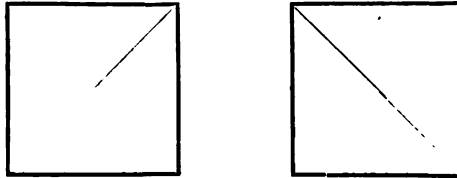
ist; wenn dagegen

$$A_1^2 = A_2^1$$

ist, so erscheint die andere Diagonale, welche die Gleichung

$$x + y = \alpha$$

erfüllt. Im allgemeinen Falle treten gekrümmte Linien auf, welche stets durch den Mittelpunkt ($x = y = \frac{1}{2}\alpha$) des Quadrats gehen¹⁾.



1) Weitere Beispiele bei Fechner in dessen Repert. d. Experimentalphysik Bd. 1, S. 298. 1832.

20. Theorie des geraden Stosses cylindrischer Stäbe.

§ 151. Mechanische Theorie des elastischen Stosses.

Die Theorie des Zusammenstosses elastischer Körper erscheint nach der in den Lehrbüchern der Mechanik üblichen Darstellung als sehr einfach und wohl begründet. Wenn man aber die Aufgabe auf Grund der allgemeinen Formeln der Elasticitätstheorie zu lösen sucht, so gelangt man zu Folgerungen, welche sich mit den Schlüssen aus der gewöhnlichen Theorie häufig in Widerspruch befinden.

Wir werden diese Verhältnisse an dem Beispiele von zwei gleich dicken Cylindern erläutern, welche mit ihren Endflächen dadurch zusammenstossen, dass sie sich in der gemeinschaftlichen Richtung ihrer beiden Axen mit ungleichen Geschwindigkeiten fortbewegten.

Zum Zwecke^o der Vergleichung schicken wir eine kurze Darstellung der gewöhnlichen Theorie des elastischen Stosses voraus. Wir bezeichnen die Massen der beiden Cylinder durch m und m' , ihre anfänglichen Geschwindigkeiten durch h und h' , und zwar denken wir uns, dass der Masse m' , welche sich mit der Geschwindigkeit h' bewegt, in derselben Richtung die Masse m mit der grösseren Geschwindigkeit h folgt. In dem Augenblicke, in welchem die letztere Masse die erstere eingeholt hat, beginnt der Act des Stosses, welchen man in zwei Perioden einzutheilen pflegt.

Die erste Periode erstreckt sich bis zu dem Moment, wo das ganze System eine gleiche Geschwindigkeit z erhalten hat. Diese Geschwindigkeit ist bestimmt durch die Gleichung

$$mh + m'h' = (m + m')z. \quad (1.)$$

In der ersten Periode hat also der Körper von der Masse m den Verlust an Geschwindigkeit

$$h - z$$

erlitten, während der andere

$$h' - z$$

eingebüsst hat.

In der zweiten Periode, in welcher die Körper sich nach der erlittenen Compression in Folge der eingetretenen Spannung wieder ausdehnen, verdoppelt sich dieser Verlust, so dass, wenn wir v und v' die definitiven Schlussgeschwindigkeiten der Massen m und m' nennen,

$$\begin{aligned} v &= h - 2(h - \varepsilon) \\ v' &= h' - 2(h' - \varepsilon) \end{aligned} \quad (2.)$$

oder wegen der Glchg. (1.)

$$\begin{aligned} v &= \frac{(m - m')h + 2m'h'}{m + m'} \\ v' &= \frac{2mh - (m - m')h'}{m + m'}. \end{aligned} \quad (3.)$$

Als Beispiel setzen wir $m = m'$, dann wird

$$v = h', \quad v' = h. \quad (4.)$$

Die Geschwindigkeiten tauschen sich aus. Setzen wir ferner als Beispiel $m' = 2m$, so wird

$$v = \frac{1}{3}(4h' - h) \quad v' = \frac{1}{3}(2h + h'). \quad (5.)$$

Was die Begründung dieser Theorie betrifft, so macht sie Anwendung von zwei allgemeinen Grundprincipien der Mechanik; sie setzt zunächst voraus, dass durch den Stoss die Bewegung des Schwerpunkts des Systems sich nicht ändert, dass also Glchg. (1.) besteht oder in anderer Form

$$mh + m'h' = mv + m'v'.$$

Das zweite Princip ist das der Erhaltung der lebendigen Kräfte

$$mh^2 + m'h'^2 = mv^2 + m'v'^2. \quad (6.)$$

Aus beiden Gleichungen folgen die obigen Formeln für v und v' .

Wenn nun die Frage aufgeworfen wird, ob es statthaft ist, diese beiden Principien hier anzuwenden, so muss hinsichtlich des Principis von der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunkts die Antwort lauten, dass seine Gültigkeit keinem Zweifel unterliegt. Nicht so in Bezug auf das andere Princip. Die Anwendung des Principis von der Erhaltung der lebendigen Kräfte setzt vielmehr voraus, dass die Kräftefunction, welche bei Beginn des Stosses = 0 war, es auch nach Vollendung des Stosses sei; sie setzt also voraus, dass im Augenblicke der Beendigung des Stosses jedes Theilchen in seine alte Gleichgewichtslage zurückgekehrt sei. Ist dieses nicht der Fall, so ist zur rechten Seite der Glchg. (6.) noch der Werth der Kräfte-

function im Momente der Trennung hinzuzufügen; in ihrer obigen Form aber bleibt sie nicht mehr gültig.

Unsere Untersuchung, welche wir nunmehr auf Grund der Theorie der Elasticität aufnehmen, wird uns in der That zu dem Resultate führen, dass die Kräftefunction in dem Augenblick, in welchem sich beide Massen von einander trennen, im Allgemeinen nicht $= 0$ ist. Eine Ausnahme bildet nur der Fall, in welchem beide Massen m und m' , einander gleich sind.

§ 152. Componenten des elastischen Drucks in Cylinder- Coordinaten.

Um unsere Aufgabe zu lösen, haben wir zuvor die für die Componenten des elastischen Druckes gefundenen Ausdrücke auf ein zweckmässigeres Coordinatensystem x, r, ϑ zu transformiren, dessen Axe x mit der Richtung der Cylinderaxen zusammenfällt, während r die senkrechte Entfernung eines Punktes von der Axe und ϑ den Winkel bedeutet, welchen r mit der y -Axe einschliesst. Diesen Bedeutungen entsprechen die Beziehungen

$$x = x, \quad y = r \cos \vartheta, \quad z = r \sin \vartheta$$

zwischen den bisherigen geradlinigen Coordinaten x, y, z und den neuen x, r, ϑ . Auf dasselbe Coordinatensystem beziehen wir die Verrückungen, indem wir in Uebereinstimmung mit der in einer früheren Untersuchung über Cylinder (§ 67—69) gebrauchten Bezeichnung unter u und $r\varrho$ die Verschiebungen in den Richtungen von x und r verstehen, während $r\psi$ die senkrecht gegen beide gerichtete Verrückung bedeutet; es ist also ψ die etwa eintretende Verdrehung, durch welche der Winkel ϑ sich in $\vartheta + \psi$ verwandelt. Die Umformung der Gleichungen muss nach den Formeln

$$u = u$$

$$v = r\varrho \cos \vartheta - r\psi \sin \vartheta = y\varrho - z\psi$$

$$w = r\varrho \sin \vartheta + r\psi \cos \vartheta = z\varrho + y\psi$$

geschehen. Aus diesen erhalten wir zunächst die Werthe der nach x, y, z genommenen Differentialquotienten von u, v, w und weiter nach den Formeln (4.) § 60 die transformirten Ausdrücke für die Druckcomponenten. Wir beschränken uns hierbei auf die Voraussetzung, dass die Verrückungen u, ϱ und ψ von dem Winkel ϑ unabhängig sind, und erhalten

$$\begin{aligned}
-X_x &= 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \Delta \\
-Y_y &= 2\mu \left\{ \varrho + r \frac{\partial \varrho}{\partial r} \cos^2 \vartheta - r \frac{\partial \psi}{\partial r} \sin \vartheta \cos \vartheta \right\} + \lambda \Delta \\
-Z_z &= 2\mu \left\{ \varrho + r \frac{\partial \varrho}{\partial r} \sin^2 \vartheta + r \frac{\partial \psi}{\partial r} \sin \vartheta \cos \vartheta \right\} + \lambda \Delta \\
-Y_z &= -Z_y = \mu \left\{ 2 \frac{\partial \varrho}{\partial r} \sin \vartheta \cos \vartheta + r \frac{\partial \psi}{\partial r} (\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta) \right\} \\
-Z_x &= -X_z = \mu \left\{ \frac{\partial u}{\partial r} \sin \vartheta + r \frac{\partial \varrho}{\partial x} \sin \vartheta + r \frac{\partial \psi}{\partial x} \cos \vartheta \right\} \\
-X_y &= -Y_x = \mu \left\{ \frac{\partial u}{\partial r} \cos \vartheta + r \frac{\partial \varrho}{\partial x} \sin \vartheta - r \frac{\partial \psi}{\partial x} \sin \vartheta \right\},
\end{aligned}$$

worin

$$\Delta = \frac{\partial u}{\partial x} + r \frac{\partial \varrho}{\partial r} + 2\varrho$$

die räumliche Dilatation ist. Diese Formel stimmt mit (5.) § 67 vollständig überein, und ebenso fallen die vorstehenden Gleichungen für die Druckcomponenten mit den Ausdrücken (8.) § 67 zusammen, wenn die Grösse $\psi = 0$ gesetzt und die sonstigen Vereinfachungen eingeführt werden.

Um aus diesen Componenten, welche sich auf die Richtungen der geradlinigen Coordinaten beziehen, diejenigen zu erhalten, welche den Richtungen von x , r , ϑ entsprechen, können wir zunächst das Theorem (C.) § 9 anwenden; nach demselben wirken auf Flächen, welche gegen den Radius r und gegen das Bogenelement $r d\vartheta$ senkrecht stehen, die Druckcomponenten

$$\begin{aligned}
X_r &= X_y \cos \vartheta + X_z \sin \vartheta & X_\vartheta &= -X_y \sin \vartheta + X_z \cos \vartheta \\
Y_r &= Y_y \cos \vartheta + Y_z \sin \vartheta & Y_\vartheta &= -Y_y \sin \vartheta + Y_z \cos \vartheta \\
Z_r &= Z_y \cos \vartheta + Z_z \sin \vartheta & Z_\vartheta &= -Z_y \sin \vartheta + Z_z \cos \vartheta.
\end{aligned}$$

Zerlegen wir diese Kräfte und die drei unverändert gelassenen Componenten

$$X_x, \quad Y_x, \quad Z_x$$

nach den Richtungen der Cylindercoordinaten, so gelangen wir zu folgenden Formeln

$$\begin{aligned}
X_x &= X_x \\
R_r &= Y_y \cos^2 \vartheta + 2 Y_z \sin \vartheta \cos \vartheta + Z_z \sin^2 \vartheta \\
\Theta_\vartheta &= Y_y \sin^2 \vartheta - 2 Y_z \sin \vartheta \cos \vartheta + Z_z \cos^2 \vartheta \\
R_\vartheta &= \Theta_r = (Z_z - Y_y) \sin \vartheta \cos \vartheta + Y_z (\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta) \\
\Theta_x &= X_\vartheta = -X_y \sin \vartheta + X_z \cos \vartheta \\
X_r &= R_x = X_y \cos \vartheta + X_z \sin \vartheta,
\end{aligned}$$

aus welchen sich durch Einsetzen der für die Druckcomponenten im geradlinigen System gefundenen Ausdrücke schliesslich die Werthe

$$\begin{aligned}
 -X_x &= 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \Delta \\
 -R_r &= 2\mu \frac{\partial(r\varrho)}{\partial r} + \lambda \Delta \\
 -\Theta_\vartheta &= 2\mu\varrho + \lambda \Delta \\
 -R_\vartheta &= -\Theta_r = \mu r \frac{\partial \psi}{\partial r} \\
 -\Theta_x &= -X_\vartheta = \mu r \frac{\partial \psi}{\partial x} \\
 -X_r &= -R_x = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial r} + r \frac{\partial \varrho}{\partial x} \right)
 \end{aligned} \tag{1.}$$

der auf die Cylinderkoordinaten bezüglichen Componenten der elastischen Druckkräfte ergeben.

§ 153. Differentialgleichungen und Grenzbedingungen.

Die mühsame Transformation der Navier'schen Differentialgleichungen auf dasselbe Coordinatensystem können wir unterlassen, wenn wir durch eine Betrachtung, welche der in § 7 zur Herleitung des Theorems (A.) angewandten durchaus ähnlich ist, die Bedingungen aufstellen, unter welchen ein an der Stelle x, r, ϑ gelegenes Volumenelement, dessen Kanten $dx, dr, r d\vartheta$ sind, sich im Gleichgewicht befindet. Diese Rechnung gestaltet sich einfach für die X-Componenten; bei der Untersuchung der nach der Richtung des Radius r bewegenden Kräfte ist besonders zu berücksichtigen, dass aus den beiden auf die Seitenflächen $dx dr$ des Prismas wirkenden Componenten Θ_ϑ , da sie nicht gleichgerichtet, sondern unter dem Winkel $d\vartheta$ gegen einander geneigt sind, ebenfalls eine in jene Richtung fallende Druckkraft entsteht; endlich haben wir, um die Bedingungen des Gleichgewichts zwischen den drehenden Θ -Componenten zu finden, die Summe der Drehungsmomente zu bilden.

Bezeichnen wir die nach den Richtungen von x, r, ϑ wirkenden Componenten der auf die Einheit der Masse bezogenen äusseren Kräfte durch X, R, Θ ohne Index und, wie bisher, durch ε die Dichtigkeit, so sind die Gleichungen, zu welchen jene Betrachtung führt,

$$\begin{aligned}
\varepsilon \left(X - r \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) &= \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_r}{\partial r} + \frac{1}{r} X_r \\
\varepsilon \left(R - r \frac{\partial^2 \varrho}{\partial t^2} \right) &= \frac{\partial R_x}{\partial x} + \frac{\partial R_r}{\partial r} + \frac{1}{r} (R_r - \Theta_\vartheta) \\
\varepsilon \left(\Theta - r \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right) &= \frac{\partial \Theta_x}{\partial x} + \frac{\partial \Theta_r}{\partial r} + \frac{2}{r} \Theta_r,
\end{aligned} \tag{1}$$

wo für den Fall der Bewegung die Beschleunigungen nach dem Satze d'Alembert's mit negativen Vorzeichen hinzugefügt sind.

Führen wir nun in diese Gleichungen die im vorigen § entwickelten Werthe der Druckcomponenten ein, so entstehen die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}
\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= (2\mu + \lambda) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) + (\mu + \lambda) \left(r \frac{\partial^2 \varrho}{\partial x \partial r} + 2 \frac{\partial \varrho}{\partial x} \right) \\
\varepsilon \frac{\partial^2 \varrho}{\partial t^2} &= \mu \frac{\partial^2 \varrho}{\partial x^2} + (2\mu + \lambda) \left(\frac{\partial^2 \varrho}{\partial r^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial \varrho}{\partial r} \right) + (\mu + \lambda) \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial r} \\
\varepsilon \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= \mu \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right),
\end{aligned} \tag{2}$$

wenn die von aussen her ausgeübten Kräfte

$$X = 0, \quad R = 0, \quad \Theta = 0$$

gesetzt werden. Die Formeln (2.), welche wir auch durch Transformation der Navier'schen Gleichungen erhalten haben würden, dienen zur Bestimmung der Functionen u , ϱ , ψ .

Unsere Aufgabe über den Zusammenstoss von zwei Cylindern giebt für jeden derselben ein derartiges System von drei Differentialgleichungen, welche sich in dem Falle, dass die beiden Cylinder aus verschiedenartigem Stoffe bestehen, durch die Werthe der Constanten ε , μ , λ unterscheiden. Ausser diesen sechs Gleichungen sind die für den Moment $t = 0$ geltenden Bedingungen, welche den Anfangszustand der Verrückung und der Bewegung betreffen, für jeden Stab zu erfüllen; und endlich muss den Bedingungen für die Oberflächen genügt werden. Die letzteren Bedingungen verlangen erstens für die cylindrischen Oberflächen, also für $r = s$, wenn s den Halbmesser eines Cylinders bezeichnet, dass die Druckcomponenten

$$\begin{aligned}
X_r &= -\mu \left(\frac{\partial u}{\partial r} + r \frac{\partial \varrho}{\partial x} \right) \\
R_r &= -(2\mu + \lambda) r \frac{\partial \varrho}{\partial r} - 2(\mu + \lambda) \varrho - \lambda \frac{\partial u}{\partial x} \\
\Theta_r &= -\mu r \frac{\partial \psi}{\partial r}
\end{aligned} \tag{3.}$$

den gegebenen äusseren auf diese Oberflächen wirkenden Druckkräften

das Gleichgewicht halten, also dass sie verschwinden sollen, wenn jene Oberflächen frei von der Einwirkung äusserer Kräfte sind. Ebenso müssen für die beiden ebenen Endflächen, also für $x=0$ und $x=l$, wo l die Länge des betreffenden Cylinders bedeutet, die Werthe der Componenten

$$\begin{aligned} X_x &= -(2\mu + \lambda) \frac{\partial u}{\partial x} - \lambda \left(r \frac{\partial \varrho}{\partial r} + 2\varrho \right) \\ R_x &= -\mu \left(\frac{\partial u}{\partial r} + r \frac{\partial \varrho}{\partial x} \right) \\ \Theta_x &= -\mu r \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned} \quad (4.)$$

äusseren Kräften, deren Werthe gegeben sind, im besonderen Falle auch Null sein können, das Gleichgewicht halten.

Die Form dieser Differentialgleichungen und Grenzbedingungen gestattet, sofort die für die Anwendung derselben wichtige Bemerkung zu machen, dass der Winkel ψ sich von den beiden anderen gesuchten Grössen u und ϱ völlig getrennt hat, also von jenen ganz unabhängig ist. Die Torsion eines Cylinders wird also nicht bedingt durch die Dehnungen oder Zusammenziehungen, welche er in der Richtung seiner Axe oder senkrecht gegen dieselbe erlitten hat.

Diese Schlussfolgerung ist nur an die einzige Bedingung gebunden, dass die Verrückungen von dem Winkel ϑ unabhängig, also für alle Punkte eines Kreises, welcher um den Mittelpunkt eines Querschnitts mit dem Radius r beschrieben ist, gleich sein sollen.

Für unsere Aufgabe, die Theorie des Zusammenstosses elastischer Cylinder aus den Grundsätzen unserer allgemeinen Theorie zu entwickeln, haben wir es nur mit den je zwei ersten Gleichungen der Systeme (2.), (3.) und (4.) zu thun¹⁾.

§ 154. Annäherungs-Verfahren.

Die Integration dieser Gleichungen bewirken wir dadurch, dass wir die Functionen u und ϱ in der Form von Reihen darstellen, welche nach aufsteigenden Potenzen der Entfernung r von der Axe fortschreiten. Wir setzen also

$$\begin{aligned} u &= u_0 + u_1 r + u_2 r^2 + \dots + u_n r^n + \dots \\ \varrho &= \varrho_0 + \varrho_1 r + \varrho_2 r^2 + \dots + \varrho_n r^n + \dots, \end{aligned}$$

1) Integriert man die dritte Gleichung ebenfalls nach dem im Folgenden angewandten Verfahren, so findet man die schon in § 75 angegebene Auflösung.

worin die Functionen $u_0, u_1, u_2 \dots$, sowie $\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2 \dots$ nur von der Coordinate x und der Zeit t abhängen sollen, und erfüllen die beiden ersten Differentialgleichungen (2.) § 153 dadurch, dass wir die mit gleichen Potenzen von r behafteten Glieder für sich $= 0$ setzen. Dieses Verfahren führt sofort zu der Erkenntniss, dass zunächst

$$u_1 = 0 \quad \text{und} \quad \varrho_1 = 0$$

sein, und dass dann weiter sämtliche mit ungeraden Ordnungszahlen behaftete Functionen $u_3, \varrho_3, u_5, \varrho_5$ u. s. f. verschwinden müssen.

Die Coefficienten der somit verbleibenden geraden Functionen

$$\begin{aligned} u &= u_0 + u_2 r^2 + u_4 r^4 + \dots \\ \varrho &= \varrho_0 + \varrho_2 r^2 + \varrho_4 r^4 + \dots \end{aligned}$$

beabsichtigen wir nicht vollständig zu entwickeln, sondern wir beschränken uns auf eine erste Annäherung, indem wir voraussetzen, dass die stossenden Cylinder dünn genug seien, um die Beschränkung der Reihen auf ihre ersten Glieder

$$\begin{aligned} u &= u_0 + u_2 r^2 \\ \varrho &= \varrho_0 + \varrho_2 r^2 \end{aligned} \tag{1.}$$

gerechtfertigt erscheinen zu lassen. Aus dem gleichen Grunde vernachlässigen wir in den Differentialgleichungen und in den für die Oberfläche gültigen Bedingungen alle Glieder, welche in Bezug auf das Quadrat des Radius der Stäbe s^2 , folglich auch in Bezug auf r^2 höherer Ordnung sind, als von der niedrigsten, welche vorkommt.

Hierdurch gelangen wir zu der vereinfachten Form der beiden ersten Differentialgleichungen (2.) § 153

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} &= (2\mu + \lambda) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + 4\mu u_2 + 2(\mu + \lambda) \frac{\partial \varrho_0}{\partial x} \\ \varepsilon \frac{\partial^2 \varrho_0}{\partial t^2} &= \mu \frac{\partial^2 \varrho_0}{\partial x^2} + 8(2\mu + \lambda) \varrho_2 + 2(\mu + \lambda) \frac{\partial u_2}{\partial x} \end{aligned} \tag{2.}$$

Ebenso finden wir für die cylindrische Fläche, welche wir frei von äusseren Druckkräften annehmen, statt der beiden ersten Formeln (3.) § 153 die einfacheren

$$\begin{aligned} 0 &= 2u_2 + \frac{\partial \varrho_0}{\partial x} \\ 0 &= 2(\mu + \lambda) \varrho_0 + \lambda \frac{\partial u_0}{\partial x}, \end{aligned} \tag{3.}$$

welche r nicht mehr enthalten, aber ebenso wie die Gleichungen (2.) für jeden Werth von x gelten. Die vier Gleichungen (2.) und (3.)

genügen demnach zur Bestimmung der vier Functionen $u_0, u_2, \varrho_0, \varrho_2$. Durch einfache Elimination erhalten wir die Gleichung

$$\varepsilon \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = \mu \frac{2\mu + 3\lambda}{\mu + \lambda} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}, \quad (4.)$$

durch welche zunächst die Grösse u_0 gefunden wird; damit sind nach den Formeln (2.) und (3.) zugleich alle anderen Grössen bestimmt, und zwar in einer solchen Weise, dass auch den Bedingungen für die Cylinderfläche insoweit genügt wird, als es bei dem erstrebten Grade der Annäherung erforderlich ist.

Es bleiben also nur noch die Bedingungen für die beiden geraden Endflächen zu erfüllen; auf diese Flächen wirken die durch die beiden ersten Gleichungen (4.) § 153 bestimmten Componenten innerer Spannung, welche den äusseren Druckkräften das Gleichgewicht halten. Unsere angenäherten Formeln liefern

$$\begin{aligned} -X_x &= (2\mu + \lambda) \frac{\partial u_0}{\partial x} + 2\lambda \varrho_0 = \mu \frac{2\mu + 3\lambda}{\mu + \lambda} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ -R_x &= \mu \left(2u_2 + \frac{\partial \varrho_0}{\partial x} \right) r = 0. \end{aligned}$$

Das Verschwinden der letzteren Componente beweist, dass das angewandte Annäherungsverfahren nur dann zulässig ist, wenn auf die geraden Endflächen keine äusseren Kräfte in der Richtung des Radius wirken. Die in der Richtung der Cylinderaxe wirkende Componente X des äusseren Druckes aber muss der Componente X_x des inneren Druckes das Gleichgewicht halten; es muss also für $x = 0$ und für $x = l$, wo l die Länge des betreffenden Cylinders ist, die Function u_0 der Gleichung genügen:

$$X = \mu \frac{2\mu + 3\lambda}{\mu + \lambda} \frac{\partial u_0}{\partial x}. \quad (5.)$$

§ 155. Integration.

Hiermit ist unsere Aufgabe auf folgende einfachere zurückgeführt.

Es sind zwei dünne Stäbe von gleichem Stoffe und von gleicher Dicke, aber von verschiedener Länge l und l' gegeben. In dem Augenblick, in welchem der Stoss eintritt, erstreckt sich die Axe des ersten von dem Punkte $x = 0$ bis zu dem Punkte $x = l$, die des zweiten von $x = l$ bis zu $x = l + l' = L$. In jedem der beiden Stäbe wird die Verrückung durch dieselbe Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = \omega^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}$$

bestimmt, in welcher zur Abkürzung, wie in § 65 und 140,

$$\omega^2 = \frac{m}{\varepsilon} = \frac{\mu}{\varepsilon} \frac{2\mu + 3\lambda}{\mu + \lambda}$$

gesetzt worden ist. Die Function u_0 genügt an den beiden von Kräften freien Enden der Stäbe, also in den Punkten $x = 0$ und $x = L$ der aus Gleichung (5.) folgenden Bedingung

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} = 0;$$

in dem Punkte $x = l$ aber, in welchem sich beide Stäbe berühren, muss so lange, als die Berührung dauert, nicht bloss die Verückung u_0 , sondern auch wegen derselben Gleichung (5.) § 154 der Differentialquotient $\frac{\partial u_0}{\partial x}$ in dem einen Stabe denselben Werth besitzen wie in dem andern. Endlich sind die Bedingungen für den Augenblick $t = 0$, in welchem der Stoss beginnt, zu erfüllen, und zwar erstens die Bedingung, dass zu dieser Zeit noch beide Stäbe frei von inneren Spannungen sind, dass also

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} = 0 \text{ für } t = 0 \text{ und } 0 < x < L$$

werde, und zweitens, dass die Geschwindigkeit für jeden der beiden Stäbe einen gegebenen constanten Werth annehme, für den ersten den grösseren h , für den zweiten den kleineren h' , also

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_0}{\partial t} &= h \text{ für } t = 0 \text{ und } 0 < x < l, \\ \frac{\partial u_0}{\partial t} &= h' \text{ „ } t = 0 \text{ „ } l < x < L. \end{aligned}$$

Die Differentialgleichung integriren wir nach der d'Alembert'schen Methode, indem wir für beide Stäbe

$$u_0 = f(x + \omega t) + \varphi(x - \omega t)$$

setzen. Hier brauchen wir keinen Unterschied zwischen beiden Stäben zu machen; denn die für $x = l$ geltenden Bedingungen verlangen, dass für jeden Werth von t sowohl

$$u_0 = f(l + \omega t) + \varphi(l - \omega t),$$

als auch

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} = f'(l + \omega t) + \varphi'(l - \omega t)$$

für jeden der beiden Stäbe denselben Werth annehme; daraus folgt durch Integration nach t , dass auch die Differenz

$$f(l + \omega t) - \varphi(l - \omega t),$$

mithin ebenfalls die beiden Functionen $f(l + \omega t)$ und $\varphi(l - \omega t)$ für jeden Werth von t in beiden Stäben eine und dieselbe Bedeutung haben müssen.

Ihre nähere Bestimmung erhalten diese Functionen durch die für $t = 0$ geltenden Bedingungen

$$\begin{aligned} 0 &= f'(x) + \varphi'(x) \text{ für } 0 < x < L \\ \frac{h}{\omega} &= f'(x) - \varphi'(x) \text{ „ } 0 < x < l \\ \frac{h'}{\omega} &= f'(x) - \varphi'(x) \text{ „ } l < x < L, \end{aligned}$$

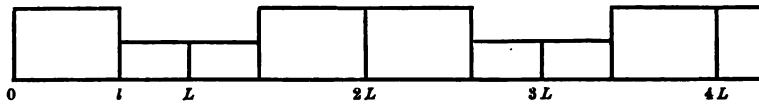
aus welchen wir folgende Werthe der derivirten Functionen

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2} \frac{h}{\omega} & \varphi'(x) &= -\frac{1}{2} \frac{h}{\omega} & \text{für } 0 < x < l \\ f'(x) &= \frac{1}{2} \frac{h'}{\omega} & \varphi'(x) &= -\frac{1}{2} \frac{h'}{\omega} & \text{„ } l < x < L \end{aligned}$$

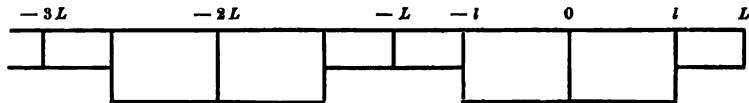
erhalten. Eine weitere Kenntniss derselben über diese Grenzen des Arguments hinaus erlangen wir durch die für die freien Enden geltenden Bedingungen, welche für jeden positiven Werth von t die Beziehungen

$$\begin{aligned} 0 &= f'(\omega t) + \varphi'(-\omega t) \\ 0 &= f'(L + \omega t) + \varphi'(L - \omega t) \end{aligned}$$

und damit die Möglichkeit liefern, den Werth von φ' für jedes negative und den von f' für jedes positive Argument anzugeben. Wir erkennen, dass der Verlauf der Function f' durch eine geknickte Linie von folgender Gestalt dargestellt werden kann, während die



andere φ' ähnlich auf der negativen Seite sowohl der Abscissen-,



als auch der Ordinaten-Axe verläuft. Diese Kenntniss der Functionen genügt, um für jeden möglichen Werth von x und t zunächst die Differentialquotienten von u_0 nach x und t und nach diesen auch die Function u_0 selber zu bilden.

§ 156. Erstes Beispiel. Zwei Stäbe gleicher Masse.

Als erstes Beispiel betrachten wir den Fall, dass die beiden Cylinder gleiche Länge, also auch gleiche Masse besitzen.

Bilden wir nach den Formeln

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} = \omega \{f'(x + \omega t) - \varphi'(x - \omega t)\}$$

$$- X_x = \mu \frac{2\mu + 3\lambda}{\mu + \lambda} \frac{\partial u_0}{\partial x} = \varepsilon \omega^2 \{f'(x + \omega t) + \varphi'(x - \omega t)\}$$

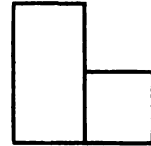
die Werthe der Geschwindigkeit und des Molekulardrucks auf Grund der vorstehenden Darstellungen der Functionen für den besonderen Fall

$$l = l' = \frac{1}{2}L,$$

so erhalten wir für den Moment $t = 0$ das auch durch die nebenstehende Zeichnung dargestellte Verhältniss

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} = h \quad \text{für } x < l \quad X_x = 0;$$

$$= h' \quad \text{„ } x > l;$$

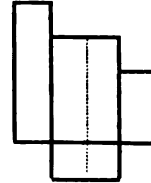


ebenso finden wir für $\omega t = \frac{1}{2}l$

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} = h \quad - X_x = 0 \quad \text{für } 0 < x < \frac{1}{2}l$$

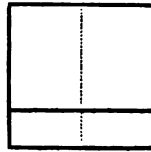
$$= \frac{1}{2}(h + h') \quad = \frac{1}{2}\varepsilon\omega^2(h - h') \quad \text{„ } \frac{1}{2}l < x < \frac{3}{2}l$$

$$= h' \quad = 0 \quad \text{„ } \frac{3}{2}l < x < 2l,$$



was wiederum die zweite Figur erläutern soll; der beim Zusammenstoss an der Stelle $x = l$ entstandene Druck, welcher in der Zeichnung durch die untere Linie dargestellt wird, hat sich also in jeden der beiden Cylinder hinein bis zur Mitte desselben fortgepflanzt und auf derselben Strecke eine Aenderung der ursprünglichen Geschwindigkeit bewirkt. In dem späteren Augenblick, in welchem $\omega t = l$ geworden, ist durch die ganze Länge beider Cylinder hindurch die Geschwindigkeit und der Druck überall gleichmässig geworden:

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} = \frac{1}{2}(h + h') \quad - X_x = \frac{1}{2}\varepsilon\omega^2(h - h').$$

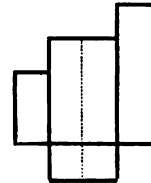


Weiter ist für $\omega t = \frac{3}{2}l$

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} = h' \quad - X_x = 0 \quad \text{für } 0 < x < \frac{1}{2}l$$

$$= \frac{1}{2}(h + h') \quad = \frac{1}{2}\varepsilon\omega^2(h - h') \quad \text{„ } \frac{1}{2}l < x < \frac{3}{2}l$$

$$= h \quad = 0 \quad \text{„ } \frac{3}{2}l < x < 2l,$$



und schliesslich für $\omega t = 2l$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_0}{\partial t} &= h & X_x &= 0 & \text{für } 0 < x < l \\ &= h & &= 0 & \text{„ } l < x < 2l. \end{aligned}$$

In dem Augenblicke, in welchem

$$t = T = 2 \frac{l}{\omega} = 2l \sqrt{\frac{\varepsilon}{m}}$$

geworden ist, haben also die beiden Stäbe ihre Geschwindigkeiten ausgetauscht, und es besteht an ihrer Berührungsstelle kein Druck mehr. Demnach werden sich in diesem Augenblicke die Stäbe von einander trennen, so dass wir schliessen müssen, die Zeitdauer des Stosses sei gleich der Grösse T oder der Zeit, in welcher die durch den Zusammenstoss erzeugte Druckwelle die Länge eines jeden der Stäbe hin und zurück durchläuft. Diese Zeit ist aber nach § 149 dieselbe wie diejenige, in welcher der Grundton der longitudinalen Schwingungen eines Stabes eine Oscillation ausführt.

Dieses Ergebniss unserer Rechnung liesse sich durch das Experiment prüfen, da die Stosszeit durch Benutzung eines elektrischen Stromes gemessen werden kann. Man würde den gefundenen Werth entweder mit der Schwingungszeit des Grundtons oder, wenn gleichzeitig die Verlängerung des Stabes durch eine Zugkraft oder seine Verkürzung durch Druck gemessen und dadurch sein Elasticitätscoefficient m bestimmt wird, mit dem nach obiger Formel berechneten Werthe vergleichen.

Die Werthe der Geschwindigkeiten, mit welchen die Stäbe sich nach unserer Theorie von einander trennen sollen, stimmen in diesem besonderen, einfachsten Falle vollständig mit denen überein, welche die in § 151 vorausgeschickte gewöhnliche Theorie des elastischen Stosses lieferte. Nicht so in dem folgenden Falle.

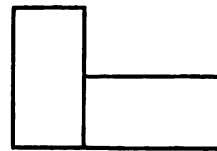
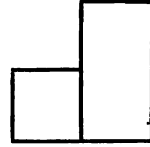
§ 157. Zweites Beispiel. Ungleiche Massen.

Wir untersuchen zweitens den Fall, dass der gestossene Stab doppelt so lang ist wie der stossende; wir setzen also

$$l' = 2l \quad L = 3l.$$

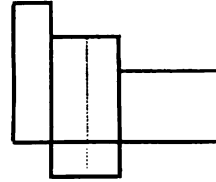
Auf dieselbe Weise, wie beim vorigen Beispiel, finden wir für den Zeitpunkt des Anfangs $t = 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_0}{\partial t} &= h & X_x &= 0 & \text{für } 0 < x < l \\ &= h' & &= 0 & \text{„ } l < x < 3l, \end{aligned}$$



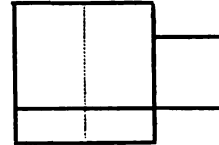
ferner für den Moment, in welchem $\omega t = \frac{1}{2}l$ wird,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_0}{\partial t} &= h & -X_x &= 0 & \text{für } 0 < x < \frac{1}{2}l \\ &= \frac{1}{2}(h+h') & &= \frac{1}{2}\varepsilon\omega^2(h-h') & \text{,, } \frac{1}{2}l < x < \frac{3}{2}l \\ &= h' & &= 0 & \text{,, } \frac{3}{2}l < x < 3l, \end{aligned}$$



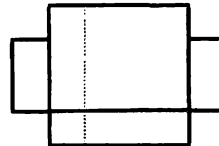
darauf für den durch $\omega t = l$ bestimmten Augenblick

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_0}{\partial t} &= \frac{1}{2}(h+h'), & -X_x &= \frac{1}{2}\varepsilon\omega^2(h-h') & \text{für } 0 < x < 2l \\ &= h' & &= 0 & \text{,, } 2l < x < 3l, \end{aligned}$$



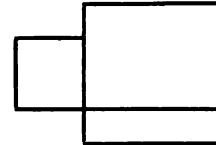
weiter für den Moment $\omega t = \frac{3}{2}l$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_0}{\partial t} &= h' & -X_x &= 0 & \text{für } 0 < x < \frac{1}{2}l \\ &= \frac{1}{2}(h+h') & &= \frac{1}{2}\varepsilon\omega^2(h-h') & \text{,, } \frac{1}{2}l < x < \frac{3}{2}l \\ &= h' & &= 0 & \text{,, } \frac{3}{2}l < x < 3l, \end{aligned}$$



und endlich für den Zeitpunkt, in welchem $\omega t = 2l$ geworden ist,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_0}{\partial t} &= h' & -X_x &= 0 & \text{für } 0 < x < l \\ &= \frac{1}{2}(h+h') & &= \frac{1}{2}\varepsilon\omega^2(h-h') & \text{,, } l < x < 3l. \end{aligned}$$



In diesem Falle dehnt sich also das Bereich des entstandenen Druckes von den zusammenstossenden Stellen aus gleichmässig in beide Stäbe hinein aus, bis es bei $\omega t = l$ die Längenausdehnung $2l$ erreicht hat. Von da an bewegt sich das Gebiet des Druckes, ohne an Ausdehnung zuzunehmen, in der Richtung der wachsenden x fort, bis es zur Zeit, wo $\omega t = 2l$ wurde, ganz in den gestossenen längeren Stab übergetreten ist.

Ganz ähnlich verhält sich die Aenderung der Geschwindigkeit mit der Zeit. Von dem Beginne des Stosses an bildet sich um die Berührungsstelle ein mit der Zeit wachsendes Gebiet, in welchem die ursprünglich ungleichen Geschwindigkeiten sich in den arithmetischen Mittelwerth beider verwandelt haben. Dieses Gebiet, welches für $\omega t = l$ seine grösste Längenausdehnung erreicht hat, bewegt sich von da an in positiver Richtung der x fort und erfüllt in dem Momente, in welchem $\omega t = 2l$ wurde, die Länge des zweiten, gestossenen Stabes.

Aus diesen Betrachtungen, welche sich leicht auf den allgemeinen Fall beliebiger Längen l und l' ausdehnen liessen, folgt, dass auch in diesem Falle die Zeitdauer des Stosses

$$T = 2 \frac{l}{\omega}$$

beträgt, also gleich der Schwingungszeit des longitudinalen Grundtons des kürzeren, stossenden Stabes ist. Denn in dem Augenblicke $t = T$ ist die Geschwindigkeit des Anfangsquerschnitts des gestossenen Stabes grösser als die des Endes des stossenden geworden; ferner ist der stossende ganz frei von Druckkräften, durch welche er auf den andern wirken könnte, in dem gestossenen Stabe aber hat der elastische Druck, welcher auf die Anfangsfläche $x = l$ ausgeübt wird, nach der in § 6 getroffenen Festsetzung über die Vorzeichen der Druckcomponenten eine Richtung, durch welche die Grenzschicht nur in positiver Richtung gezogen, nicht aber gegen den ersten Stab hin gedrückt werden kann. Demnach ist eine nochmalige Annäherung der Stäbe ausgeschlossen, und sie müssen sich im Augenblicke $t = T$ endgültig trennen.

Die Geschwindigkeiten, welche in diesem Augenblicke bestehen, sind in jedem der beiden Stäbe überall gleichmässig vorhanden; und zwar ist die des anfänglich rascher mit der Geschwindigkeit h sich bewegendem gleich der des langsameren

$$v = h'$$

geworden, während diejenige des letzteren auf

$$v' = \frac{1}{2}(h + h')$$

angewachsen ist.

Diese Folgerung stimmt keineswegs mit dem Ergebniss der auf dem Princip der Erhaltung der Energie beruhenden Theorie überein; denn nach Formel (5.) § 151 sollten die Geschwindigkeiten im Augenblick der Trennung folgende Werthe haben:

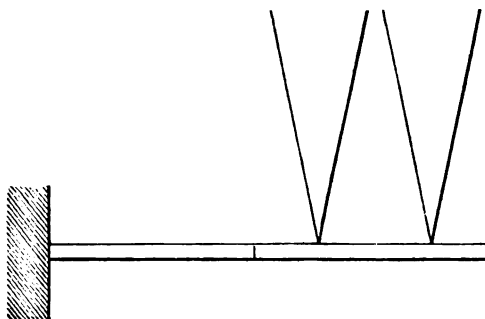
$$v = \frac{1}{3}(4h' - h) \quad v' = \frac{1}{3}(2h + h').$$

Der Widerspruch erklärt sich einfach daraus, dass in diesem Falle das Princip der lebendigen Kräfte nicht hätte angewandt werden dürfen, ohne dass Rücksicht auf die im gestossenen Stabe noch vorhandene Spannung genommen wäre. Aus dieser Spannung entstehen Bewegungen, welche sich als Ton hörbar machen werden. Die Beschaffenheit und Stärke dieser Schwingungen würde durch eine Integration unserer Differentialgleichung, bei welcher der zur Zeit $t = T$ bestehende Zustand als gegebener Anfangszustand anzusehen sein würde, leicht berechnet werden können.

Wir verzichten auf die Durchführung dieser Aufgabe, sowie auf die Untersuchung des Stosses für den Fall, dass die beiden zusammenschlagenden Stäbe aus ungleichem Stoffe bestehen.

§ 158. Reflexion eines Stosses.

Dagegen behandeln wir ein anderes Beispiel, um die Vorgänge bei der Reflexion eines elastischen Stosses zu erläutern. Auf einen Stab, welcher gegen eine feste Widerlage gestemmt ist, stosse ein zweiter, welcher an zwei Paar Fäden so aufgehängt ist, dass er sich nur in der Richtung seiner Längsaxe bewegen kann.



Auch für diese Aufgabe bleiben die in § 155 zusammengestellten Gleichungen im Wesentlichen gültig, besonders die Differentialgleichung. Es ist also auch jetzt die Verrückung u_0 , welche sich zur Zeit t an der Stelle x findet, durch die Formel

$$u_0 = f(x + \omega t) + \varphi(x - \omega t)$$

darzustellen, und zwar in jedem der beiden Stäbe durch eine und dieselbe Formel. Die Bedingungen zur Zeit $t = 0$ vereinfachen sich insofern, als der eine Cylinder sich in Ruhe befindet. Rechnen wir die Coordinate x vom befestigten Ende desselben und nennen l seine Länge, l' die des anderen, und, wie bisher, $L = l + l'$ die gesammte Länge beider, so ist zur Zeit $t = 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= 0 & \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 & \text{für } 0 < x < l \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= -h & \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 & \text{„ } l < x < L \end{aligned}$$

zu setzen, wenn h die Geschwindigkeit des stossenden Stabes bedeutet, deren Werth leicht aus der Beobachtung der anfänglichen Ablenkung des aufgehängten Stabes herzuleiten ist. Hieraus ergibt sich, dass

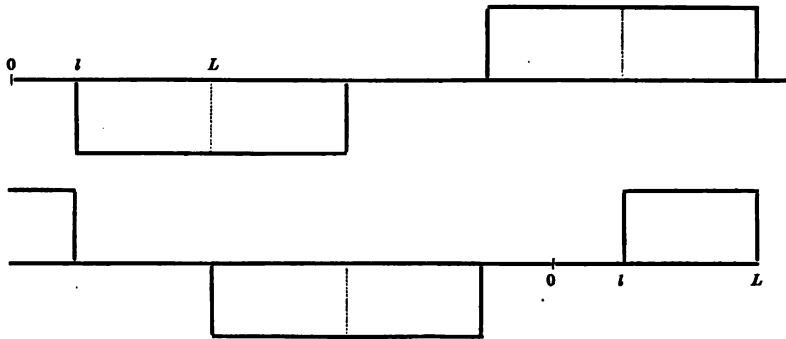
$$\begin{aligned} \text{für } 0 < x < l & \quad f'(x) = 0 & \quad \varphi'(x) = 0 \\ \text{„ } l < x < L & \quad f'(x) = -\frac{h}{2\omega} & \quad \varphi'(x) = \frac{h}{2\omega} \end{aligned}$$

sein muss. Die Verlängerung beider Functionen erreichen wir durch Benutzung der Bedingungen, dass stets

$$\text{für } x = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad \varphi'(-\omega t) = f'(\omega t)$$

$$\text{„ } x = L \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad f'(L + \omega t) = -\varphi'(L - \omega t)$$

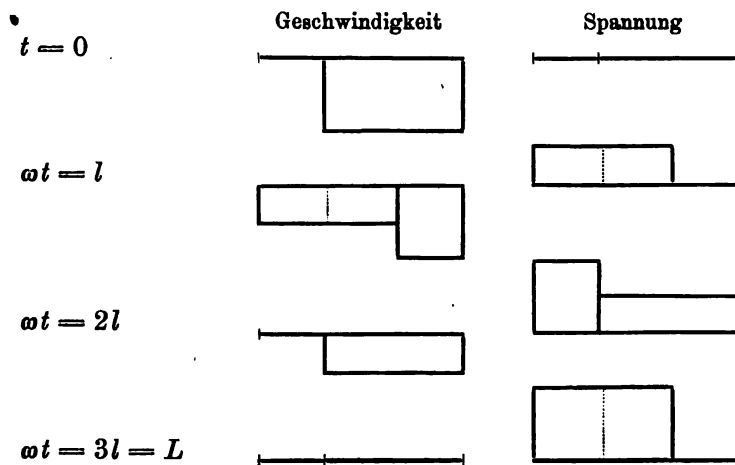
sein muss. So finden wir, dass beide Functionen f' und φ' sich in folgender Weise graphisch darstellen lassen:

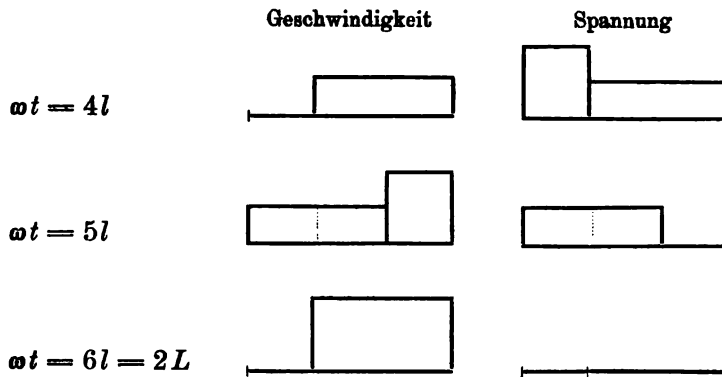


Aus diesen Zeichnungen, in welchen das Verhältniss der Längen so angenommen worden ist, dass

$$l' = 2l \quad L = 3l$$

ist, erhalten wir nach dem früher angewandten Verfahren nachstehende Darstellungen des Zustandes, in welchem sich die Stäbe in Hinsicht auf die Geschwindigkeit ihrer Theile und auf die Spannung in ihrem Innern zu den angegebenen Zeitmomenten befinden werden:





Da in dem Augenblicke

$$t = T = \frac{2L}{\omega}$$

der kürzere Stab zur Ruhe gelangt und von Spannungen frei ist, während der längere eine gleichmässig vertheilte Geschwindigkeit in positiver Richtung besitzt, so erkennen wir, dass in diesem Augenblicke sich die Stäbe wieder von einander trennen müssen. Die Geschwindigkeit, mit welcher der stossende Stab zurückfliegt, ist in diesem Falle dieselbe, wie diejenige, mit welcher er aufstiess. Dass wir zu diesem mit der gewöhnlichen Theorie übereinstimmenden Ergebniss gelangten, findet seinen Grund darin, dass in diesem Falle am Ende des Zusammenstosses beide Stäbe frei von Spannungen sind.

Zusatz vom Herausgeber.

Mit der vorstehend in § 155 bis § 158 enthaltenen Entwicklung der Theorie des longitudinalen Stosses stimmt im Wesentlichen die Untersuchung überein, durch welche dieselbe Aufgabe später von Barré de St. Venant¹⁾ gelöst worden ist. Zur Prüfung der Theorie sind mehrere experimentelle Untersuchungen²⁾ angestellt worden, welche theils das Ziel verfolgten, die Geschwindigkeiten nach dem Stosse zu messen, theils die Zeitdauer des Zusammenstosses zu bestimmen. Es ergab sich keine ganz genügende Uebereinstimmung

1) St. Venant, Liouville's Journ. 2. Sér. Bd. 12. S. 237. 1867.

2) Schneebeli, Pogg. Ann. Bd. 143, S. 239, 1871; Bd. 145, S. 328, 1872. Boltzmann, Wien. Sitzungsab. 1882, Bd. 84, II, S. 1225. Voigt, Berl. Sitzungsab. 1882, S. 683; Wied. Ann. Bd. 19, S. 44, 1883. Hausmaninger, Wiener Sitzungsab. Bd. 88, II, S. 768, 1883; Berl. Sitzungsab. Januar 1885. Hamburger, Breslauer Inaug.-Diss. 1885.

zwischen der Theorie und der Beobachtung. Zur Erklärung der Abweichung sind verschiedene Hypothesen zu Hilfe genommen worden. Vielleicht liegt der hauptsächlichste Mangel der Theorie darin, dass die beim Stosse entstandene Erwärmung der Stäbe nicht berücksichtigt wurde. Es würde leicht sein, die Theorie unter Benutzung der im neunten Abschnitt aufgestellten Formeln nach dieser Richtung hin zu ergänzen.

Die Theorie des Zusammenstosses von elastischen Kugeln ist in neuerer Zeit von H. Hertz¹⁾ entwickelt worden, und zwar ohne derartige Vernachlässigungen, wie sie im Falle von Cylindern nothwendig waren.

1) H. Hertz, Crelle's Journ. f. Math. Bd. 92, S. 156, 1882.

21. Theorie der Elasticität dünner Stäbe.

§ 159. Allgemeine Formeln und Bemerkungen.

Das im vorigen Abschnitt für das Problem des elastischen Stosses benutzte Verfahren, die Integration durch Reihenentwicklung zu erreichen, kann ebenso zur Berechnung der Gestaltsveränderungen angewandt werden, welche dünne elastische Stäbe von kreisförmigem oder rechteckigem Querschnitt unter der Einwirkung äusserer Kräfte erleiden. Von den drei verschiedenen Verrückungszuständen der Dehnung, der Torsion und der Biegung, welche bereits im elften Abschnitt besprochen wurden, verdient namentlich die Biegung eine eingehendere Betrachtung.

Wir stellen zunächst einige allgemeine Formeln für das Gleichgewicht eines Stabes auf, indem wir nur die einzige Voraussetzung einführen, dass der Querschnitt des Stabes überall gleich sei.

Während für das Innere des Stabes bei dem vorausgesetzten Zustande des Gleichgewichts die Differentialgleichungen (A) § 7 gelten, unterliegen die von Kräften freien Seitenflächen des Stabes den Bedingungen (C) § 9, welche durch die Annahme, dass die Axe der x mit der Längsrichtung des Stabes zusammenfällt, die einfachere Form

$$\begin{aligned} 0 &= X_y \cos(n, y) + X_z \cos(n, z) \\ 0 &= Y_y \cos(n, y) + Y_z \cos(n, z) \\ 0 &= Z_y \cos(n, y) + Z_z \cos(n, z) \end{aligned} \quad (1.)$$

annehmen, weil der Winkel, welchen die Normale n der Oberfläche mit der x -Axe bildet, ein rechter ist.

Mit Hilfe dieser für die Oberfläche geltenden Gleichungen leiten wir aus dem Theorem (A) durch Integration über den Querschnitt des Stabes einen einfachen Satz ab. Es ist das über diese Fläche ausgedehnte Doppelintegral

Dieses geschieht, wenn für $y=0$ und $z=0$ nachstehende Beziehungen zwischen den X -Komponenten bestehen:

$$\begin{aligned} 0 &= X_y + \frac{1}{2} R^2 \frac{\partial^2 X_y}{\partial y^2} & 0 &= X_z + \frac{1}{2} R^2 \frac{\partial^2 X_z}{\partial z^2} \\ 0 &= \frac{\partial X_y}{\partial y} & 0 &= \frac{\partial X_y}{\partial z} + \frac{\partial X_z}{\partial y} & 0 &= \frac{\partial X_z}{\partial z} \\ 0 &= \frac{\partial^2 X_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 X_y}{\partial z^2} - 2 \frac{\partial^2 X_z}{\partial y \partial z} & 0 &= \frac{\partial^2 X_z}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 X_z}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 X_y}{\partial y \partial z}. \end{aligned} \quad (1a.)$$

Ebenso gelten für die zweite und dritte Richtung der Coordinaten die Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= Y_y + \frac{1}{2} R^2 \frac{\partial^2 Y_y}{\partial y^2} & 0 &= Y_z + \frac{1}{2} R^2 \frac{\partial^2 Y_z}{\partial z^2} \\ 0 &= \frac{\partial Y_y}{\partial y} & 0 &= \frac{\partial Y_y}{\partial z} + \frac{\partial Y_z}{\partial y} & 0 &= \frac{\partial Y_z}{\partial z} \\ 0 &= \frac{\partial^2 Y_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 Y_y}{\partial z^2} - 2 \frac{\partial^2 Y_z}{\partial y \partial z} & 0 &= \frac{\partial^2 Y_z}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 Y_z}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 Y_y}{\partial y \partial z} \\ 0 &= Z_y + \frac{1}{2} R^2 \frac{\partial^2 Z_y}{\partial y^2} & 0 &= Z_z + \frac{1}{2} R^2 \frac{\partial^2 Z_z}{\partial z^2} \\ 0 &= \frac{\partial Z_y}{\partial y} & 0 &= \frac{\partial Z_y}{\partial z} + \frac{\partial Z_z}{\partial y} & 0 &= \frac{\partial Z_z}{\partial z} \\ 0 &= \frac{\partial^2 Z_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 Z_y}{\partial z^2} - 2 \frac{\partial^2 Z_z}{\partial y \partial z} & 0 &= \frac{\partial^2 Z_z}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 Z_z}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 Z_y}{\partial y \partial z}, \end{aligned} \quad (1b.)$$

wenn in denselben $y=0$ und $z=0$ gesetzt wird. Es bestehen also für jeden Punkt der Axe des Stabes 21 Bedingungsgleichungen.

Führen wir dann auch in die Gleichungen (2.) § 159 eine Entwicklung der Componenten nach Potenzen von y und z ein, so erhalten wir nach Ausführung der Integration unter Vernachlässigung der Glieder vierter Ordnung

$$\begin{aligned} X + \frac{1}{6} R^2 \left\{ \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial z^2} \right\} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(X_x + \frac{1}{6} R^2 \left\{ \frac{\partial^2 X_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 X_x}{\partial z^2} \right\} \right) \\ Y + \frac{1}{6} R^2 \left\{ \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial z^2} \right\} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(Y_x + \frac{1}{6} R^2 \left\{ \frac{\partial^2 Y_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Y_x}{\partial z^2} \right\} \right) \\ Z + \frac{1}{6} R^2 \left\{ \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} \right\} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(Z_x + \frac{1}{6} R^2 \left\{ \frac{\partial^2 Z_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Z_x}{\partial z^2} \right\} \right), \end{aligned} \quad (2.)$$

worin wiederum $y=0$ und $z=0$ zu setzen sind. Von diesen Gleichungen lassen sich die zweite und dritte mit Hilfe der Bedingungen (1.) erheblich vereinfachen und so umgestalten, dass sie von den Druckcomponenten ebenfalls nur X_x enthalten.

Durch die ersten beiden Gleichungen (1a.) wird zunächst

$$Y + \frac{1}{3} R^2 \left\{ \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial z^2} \right\} = \frac{1}{3} R^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 Y_x}{\partial z^2} - 3 \frac{\partial^2 Y_x}{\partial y^2} \right)$$

$$Z + \frac{1}{3} R^2 \left\{ \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} \right\} = \frac{1}{3} R^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 Z_x}{\partial y^2} - 3 \frac{\partial^2 Z_x}{\partial z^2} \right).$$

Ferner ist durch Differentiation des Theorems (A) unter Benutzung der letzten Gleichungen (1a.)

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial^2 X_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 X_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 X_z}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 X_x}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 X_y}{\partial z^2} - 3 \frac{\partial^2 X_y}{\partial y^2} \right\}$$

$$\frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial^2 X_x}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 X_y}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 X_z}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 X_x}{\partial x \partial z} - \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 X_z}{\partial y^2} - 3 \frac{\partial^2 X_z}{\partial z^2} \right\}$$

und, wenn wir diese Gleichungen zu den vorigen hinzufügen, so erhalten wir die Formeln

$$Y + \frac{1}{3} R^2 \left\{ \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 X}{\partial x \partial y} \right\} = \frac{1}{3} R^2 \frac{\partial^2 X_x}{\partial x^2 \partial y}$$

$$Z + \frac{1}{3} R^2 \left\{ \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 X}{\partial x \partial z} \right\} = \frac{1}{3} R^2 \frac{\partial^2 X_x}{\partial x^2 \partial z}, \quad (3.)$$

welche, wie alle vorstehenden, nur für die Werthe $y = 0$ und $z = 0$ gültig sind. Sie enthalten aber keinerlei Beschränkung in Hinsicht auf die Beschaffenheit des Stabes, sondern sie gelten sowohl für unkrystallinische, als auch für krystallinische Stoffe¹⁾.

§ 161. Formeln für die Verrückungen.

Indem wir jetzt die Voraussetzung eintreten lassen, dass der Stab aus einer unkrystallinischen Substanz bestehe, führen wir in die Gleichungen (3.) die Werthe der Druckcomponenten ein, wie sie in den Formeln (4.) § 60 als Functionen der Verrückungen angegeben sind. Dabei benutzen wir die 21 in den Formeln (1.) § 160 aufgestellten Beziehungen zwischen den Componenten, um ihre Werthe lediglich durch Differentialquotienten nach dx auszudrücken.

1) Wenn auch die weitere Entwicklung der Theorie in dieser Vorlesung nur für unkrystallinische Körper gegeben wird, so ist sie doch vom Verfasser auch für den allgemeineren Fall eines krystallinischen Stäbchens durchgeführt worden. Die Ergebnisse seiner Rechnung sind von Baumgarten und Voigt bei ihren in § 91 und § 93 erwähnten Arbeiten verwerthet und zum Theil veröffentlicht worden.

Bei dieser Werthbestimmung der Componenten dürfen wir in den Formeln (1.) alle mit dem Factor R^2 behafteten Glieder fortlassen; denn da die in den Gleichungen (3.) vorkommenden Functionen der Druckcomponenten bereits den Factor R^2 enthalten, so vernachlässigen wir dadurch im Schlussresultat nur Glieder von der Grössenordnung der bereits fortgelassenen. Demnach können wir setzen für $y = 0$ und $z = 0$:

$$0 = X_y = Y_x \qquad 0 = Y_z = Z_y \qquad 0 = Z_x = X_z$$

$$0 = Y_y \qquad 0 = Z_z$$

oder

$$0 = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \qquad 0 = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \qquad 0 = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$0 = \lambda \frac{\partial u}{\partial x} + (2\mu + \lambda) \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \frac{\partial w}{\partial z} \qquad 0 = \lambda \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v}{\partial y} + (2\mu + \lambda) \frac{\partial w}{\partial z}$$

Ebenso gelten für denselben Werth von y und z die früher unter (1.) § 160 angegebenen Beziehungen zwischen den ersten Differentialquotienten des Druckcomponenten. Aus diesen Formeln, welche nach x differenzirt werden dürfen, erhalten wir für $y = 0$ und $z = 0$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial v}{\partial x} \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{1}{2} \frac{\lambda}{\mu + \lambda} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = - \frac{\partial w}{\partial x} \qquad \frac{\partial w}{\partial z} = - \frac{1}{2} \frac{\lambda}{\mu + \lambda} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{2} \frac{\lambda}{\mu + \lambda} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 0 \qquad (1.)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = - \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} = \frac{1}{2} \frac{\lambda}{\mu + \lambda} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

$$- \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} = \frac{1}{2} \frac{\lambda}{\mu + \lambda} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

Durch Einsetzen dieser Werthe lassen sich die in den Gleichungen (3.) § 160 enthaltenen Differentialquotienten des Druckes in folgender Weise

$$\frac{\partial X_x}{\partial y} = m \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \qquad \frac{\partial X_x}{\partial z} = m \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \qquad (2.)$$

umgestalten, wenn der Elasticitätscoefficient

$$\mu \frac{2\mu + 3\lambda}{\mu + \lambda} = m$$

gesetzt wird, und wir erhalten jene Gleichungen in der Form

$$\begin{aligned} Y + \frac{1}{8} R^2 \left\{ \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 X}{\partial x \partial y} \right\} &= \frac{1}{4} R^2 m \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} \\ Z + \frac{1}{8} R^2 \left\{ \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 X}{\partial x \partial z} \right\} &= \frac{1}{4} R^2 m \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}, \end{aligned} \quad (3.)$$

worin überall $y = 0$ und $z = 0$ zu setzen ist.

Von diesen Gleichungen gelangen wir zu den Differentialgleichungen, welche v und w , also welche die transversalen Bewegungen des Stabes bestimmen, wenn wir statt der Componenten X, Y, Z der äusseren Kräfte die Grössen

$$X - \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad Y - \varepsilon \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad Z - \varepsilon \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

einsetzen, in welchen ε die Dichtigkeit des Körpers bedeutet. Ist die gestellte Aufgabe der Art, dass wir von äusseren Kräften abzusehen berechtigt sind, so haben wir in den obigen Formeln die Werthe ihrer Componenten durch die mit $-\varepsilon$ multiplicirten Beschleunigungen, mithin

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial z^2} &\quad \text{durch} \quad -\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\ \text{und} & \\ \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} &\quad \text{durch} \quad -\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right), \end{aligned}$$

also durch Grössen zu ersetzen, welche nach den Gleichungen (1.) verschwinden. Weiter ist in den Formeln (3.)

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial y} &\quad \text{durch} \quad -\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial u}{\partial y} = \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \text{und} & \\ \frac{\partial X}{\partial z} &\quad \text{durch} \quad -\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial u}{\partial z} = \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned}$$

zu ersetzen, so dass diese Formeln die Gestalt

$$\begin{aligned} -\varepsilon \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{1}{4} \varepsilon R^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \frac{1}{4} R^2 m \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} \\ -\varepsilon \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{1}{4} \varepsilon R^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{1}{4} R^2 m \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \end{aligned}$$

für den Fall der Bewegung erhalten.

Hierin aber können wir die zweiten Glieder linker Hand fortlassen, weil, wie die Gleichungen selber lehren, die beschleunigenden Kräfte von derselben Grössenordnung wie R^2 sind. Wir vernachlässigen also nur Grössen vierter Ordnung, wenn wir als Differentialgleichungen für die transversalen Bewegungen des Stabes die Formeln

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{1}{4} R^2 \frac{m}{\varepsilon} \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} \\
 0 &= \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{1}{4} R^2 \frac{m}{\varepsilon} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}
 \end{aligned}
 \tag{4.}$$

annehmen, welche für die Bewegung der Mittellinie $y = 0, z = 0$ gelten.

Für die longitudinalen Bewegungen bleibt dagegen die mit der ersten Gleichung (2.) § 160 in Uebereinstimmung befindliche Differentialformel

$$\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = - \frac{\partial X_x}{\partial x} = m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},
 \tag{5.}$$

welche schon in vorausgegangenen Untersuchungen hergeleitet wurde, unverändert in Gültigkeit.

§ 162. Biegung eines mit einem Ende befestigten Stabes.

Die Differentialgleichungen (4.) bilden die Grundlage für die theoretische Berechnung der Biegung, sowie der Tonschwingungen eines runden elastischen Stabes, wenn wir von dem Einflusse der Schwerkraft auf die Masse desselben absehen.

Für das erstere Problem, das der Biegung, haben wir, da es sich um die Bestimmung eines von der Zeit t unabhängigen Gleichgewichtszustandes handelt, die einfacheren Gleichungen

$$0 = \frac{d^4 v}{dx^4}, \quad 0 = \frac{d^4 w}{dx^4}
 \tag{1.}$$

zu integrieren. In die Auflösungen derselben werden je vier Constanten eintreten, welche ihre Bestimmung aus Bedingungen erhalten müssen, die wir vorher zu formuliren haben.

Der Stab möge mit dem einen seiner Enden $x = 0$ fest eingeklemmt sein; dann muss

$$v = 0 \quad \text{und} \quad w = 0 \quad \text{für} \quad x = 0
 \tag{2.}$$

sein. Für denselben Anfangsquerschnitt muss aber auch die Componente $u = 0$ sein und zwar nicht bloss für das Centrum, sondern für jeden Punkt des Querschnitts; es ist also für $x = 0$, aber für jeden Werth von y und z ,

$$0 = u = u_0 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0 z + \dots,$$

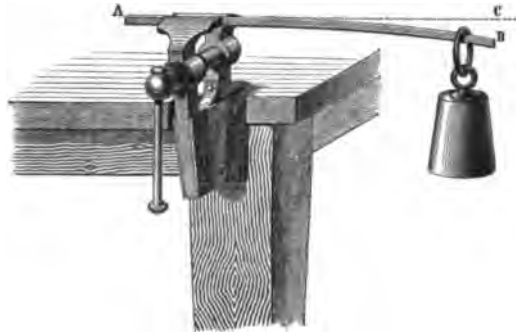
wo der angehängte Index Null bedeuten soll, dass $y = 0$ und $z = 0$ zu setzen ist. Es ist also für $x = 0$ auch

$$0 = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0, \quad 0 = \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0 \quad \text{u. s. w.}$$

und unter Rücksicht auf die Gleichungen (1.) § 161 für den Punkt $x = 0, y = 0, z = 0$

$$0 = \frac{dv}{dx}, \quad 0 = \frac{dw}{dx}. \quad (3.)$$

Das andere Ende des horizontal gerichteten Stabes $x = a$ sei durch ein angehängtes Gewicht belastet. Für das Gleichgewicht des letzten Querschnitts ist die Erfüllung von sechs Bedingungen erforderlich, von welchen drei aussagen, dass für jede Coordinaten-



richtung die Summe der Componenten verschwindet, während die drei anderen fordern, dass die Momente der Drehung um die drei Coordinatenaxen fortfallen. Von diesen Bedingungen kommen jedoch für unsere Aufgabe zwei nicht in Betracht, nämlich die beiden, welche sich auf die mit der Längsaxe des Stabes zusammenfallende Axe der x beziehen. Da wir von Torsion absehen, so handelt es sich nicht um das von den Kräften ausgeübte Moment einer Drehung um die x -Axe. Ebenso erfüllt sich die Bedingung, dass die Summe der X -Componenten verschwinden muss, von selbst dadurch, dass die in verticaler Richtung ziehende Kraft des angehängten Gewichtes die horizontale Ausdehnung der Längsaxe nicht zu verändern vermag; es ist also $u = 0$ für $y = 0$ und $z = 0$, und es verschwindet aus demselben Grunde die über den Querschnitt ausgedehnte Summe der Componente X_x . Somit bleiben für $x = a$ nur vier Bedingungen zu erfüllen; erstens müssen die über den Querschnitt des Stabes ausgeführten Summen der Componenten

$$0 = \sum(Y_x + Y'), \quad 0 = \sum(Z_x + Z') \quad (4.)$$

für $x = a$ verschwinden, worin Y' und Z' die Componenten der vom

welcher dem Cubus der Länge des Stabes direct und der vierten Potenz des Radius umgekehrt proportional ist¹⁾).

§ 163. Vierkantiger Stab.

Die Formeln gestalten sich nicht wesentlich anders, wenn wir, statt wie bisher den Stab als cylindrisch vorauszusetzen, jetzt annehmen, dass sein Querschnitt rechteckig sei.

Legen wir die Axen des Coordinatensystems, dessen Anfangspunkt, wie bisher, der Mittelpunkt des einen Endquerschnitts sein möge, parallel den Kanten des Stabes, deren Länge a , b , c sei, so erhalten wir für die Seitenflächen die Bedingungen, dass

$$\begin{aligned} \text{für } y = \pm \frac{1}{2} b \quad X_y = 0 \quad Y_y = 0 \quad Z_y = 0 \\ \text{,, } z = \pm \frac{1}{2} c \quad X_z = 0 \quad Y_z = 0 \quad Z_z = 0 \end{aligned} \quad (1.)$$

werde. Führen wir auch in diesem Falle eine Reihenentwicklung nach aufsteigenden Potenzen von y und z durch, so nehmen diese Bedingungen die Form

$$0 = X_y \pm \frac{b}{2} \frac{\partial X_y}{\partial y} + z \frac{\partial X_y}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{b^2}{4} \frac{\partial^2 X_y}{\partial y^2} \pm \frac{b}{2} z \frac{\partial^2 X_y}{\partial y \partial z} + \frac{1}{2} z^2 \frac{\partial^2 X_y}{\partial z^2} + \dots$$

an, wenn den Grössen, welche Druckcomponenten oder deren Differentialquotienten bezeichnen, diejenigen besonderen Werthe ertheilt werden, welche jene Functionen für $y = 0$ und $z = 0$ annehmen. Da diese Gleichung für jeden zwischen den Grenzen $-\frac{1}{2}c$ und $+\frac{1}{2}c$ liegenden Werth von z erfüllt werden muss, so zerfällt sie in eine grosse Anzahl einfacherer Gleichungen, deren erste die folgenden sind:

$$\begin{aligned} 0 &= X_y + \frac{1}{2} \frac{b^2}{4} \frac{\partial^2 X_y}{\partial y^2} + \dots \\ 0 &= \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{1}{2 \cdot 3} \frac{b^2}{8} \frac{\partial^3 X_y}{\partial y^3} + \dots \\ 0 &= \frac{\partial X_y}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{b^2}{4} \frac{\partial^3 X_y}{\partial y^2 \partial z} + \dots \\ 0 &= \frac{\partial^2 X_y}{\partial y \partial z} + \frac{1}{2 \cdot 3} \frac{b^2}{4} \frac{\partial^4 X_y}{\partial y^3 \partial z} + \dots \\ 0 &= \frac{\partial^2 X_y}{\partial z^2} + \frac{1}{2} \frac{b^2}{4} \frac{\partial^4 X_y}{\partial y^2 \partial z^2} + \dots \end{aligned} \quad (2.)$$

1) In dem vom Herausgeber eingeschalteten § 76 ist die Biegung eines Stabes unter etwas anderen Voraussetzungen nach St. Venant behandelt. Die dort gegebene Auflösung folgt auch aus den hier entwickelten Formeln, wenn

Diese Gleichungen gelten für $y = 0$ und $z = 0$. Durch ganz dieselben Beziehungen sind die Differentialquotienten von Y_y und Z_y unter einander verbunden; und für die Componenten X_x , Y_x , Z_x erhalten wir entsprechende Formeln.

Diese Beziehungen führen wir ein in die zweite und dritte Gleichung des Theorems (2.) § 159, durch welches die Gleichgewichtsbedingungen der auf einen Querschnitt wirkenden Kräfte festgestellt werden. Entwickeln wir auch hier nach Potenzen von y und z , so erhalten wir, wenn wir uns auf die Glieder bis zur zweiten Ordnung beschränken und diejenigen vierter und höherer Ordnung vernachlässigen,

$$Y + \frac{1}{2.3} \left\{ \frac{b^2 \partial^2 Y}{4 \partial y^2} + \frac{c^2 \partial^2 Y}{4 \partial z^2} \right\} = \frac{\partial}{\partial x} \left(Y_x + \frac{1}{2.3} \left\{ \frac{b^2 \partial^2 Y_x}{4 \partial y^2} + \frac{c^2 \partial^2 Y_x}{4 \partial z^2} \right\} \right)$$

$$Z + \frac{1}{2.3} \left\{ \frac{b^2 \partial^2 Z}{4 \partial y^2} + \frac{c^2 \partial^2 Z}{4 \partial z^2} \right\} = \frac{\partial}{\partial x} \left(Z_x + \frac{1}{2.3} \left\{ \frac{b^2 \partial^2 Z_x}{4 \partial y^2} + \frac{c^2 \partial^2 Z_x}{4 \partial z^2} \right\} \right),$$

worin wiederum $y = 0$ und $z = 0$ zu setzen ist, und nach den obigen Relationen mit demselben Grade der Annäherung

$$Y + \frac{1}{2.3} \left\{ \frac{b^2 \partial^2 Y}{4 \partial y^2} + \frac{c^2 \partial^2 Y}{4 \partial z^2} \right\} = \frac{1}{2.3} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{c^2 \partial^2 Y_x}{4 \partial z^2} - \frac{b^2 \partial^2 Y_x}{2 \partial y^2} \right)$$

$$Z + \frac{1}{2.3} \left\{ \frac{b^2 \partial^2 Z}{4 \partial y^2} + \frac{c^2 \partial^2 Z}{4 \partial z^2} \right\} = \frac{1}{2.3} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{b^2 \partial^2 Z_x}{4 \partial y^2} - \frac{c^2 \partial^2 Z_x}{2 \partial z^2} \right).$$

Eine weitere Vereinfachung erreichen wir durch das bereits in § 160 benutzte Verfahren, welches auf dem Theorem (A.) beruht, und zwar wird

$$Y + \frac{1}{2.3} \left\{ \frac{b^2 \partial^2 Y}{4 \partial y^2} + \frac{c^2 \partial^2 Y}{4 \partial z^2} + \frac{b^2 \partial^2 X}{2 \partial x \partial y} \right\} = \frac{1}{3} \frac{b^2 \partial^3 X_x}{4 \partial x^2 \partial y}$$

$$Z + \frac{1}{2.3} \left\{ \frac{b^2 \partial^2 Z}{4 \partial y^2} + \frac{c^2 \partial^2 Z}{4 \partial z^2} + \frac{c^2 \partial^2 X}{2 \partial x \partial z} \right\} = \frac{1}{3} \frac{c^2 \partial^3 X_x}{4 \partial x^2 \partial z}.$$
(3.)

In diese für $y = 0$ und $z = 0$ geltenden Formeln haben wir nun statt der Druckcomponenten die Verrückungen einzuführen, wobei wir, da X_x bereits mit den Factoren b^2 und c^2 versehen ist, Gleichungen zur Anwendung bringen können, in welchen nur die Glieder beibehalten worden sind, welche in Bezug auf die kleinen Grössen b und c von der nullten Ordnung sind. Daraus folgt, dass die

$P = 0$ und statt der Bedingungen (7.) in Uebereinstimmung mit den in (5*) angeführten Werthen

$$Kl = \frac{\pi}{4} R^4 \mu \frac{2\mu + 3\lambda}{\mu + \lambda} \frac{d^2 w}{dx^2}$$

für $y = 0$ und $z = 0$ gesetzt wird.

früher in § 161 für den dünnen Cylinder aufgestellten angenäherten Gleichungen auch für den jetzigen Fall angewandt werden dürfen. Es bleiben also die in den Gleichungen (1.) § 161 enthaltenen Beziehungen zwischen den Dilatationen auch hier gültig, und es ist, wie früher, nach den Gleichungen (2.) § 161 zu setzen:

$$\frac{\partial X_x}{\partial y} = m \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial X_s}{\partial s} = m \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$$

Durch eine weitere ganz der früheren Beweisführung folgende Ueberlegung erkennen wir, dass auch jetzt in den Gleichungen (3.) die links vom Gleichheitszeichen in den Klammern stehenden Grössen fortgelassen werden dürfen, und daraus ferner, dass die Bewegungsgleichungen für den vierkantigen Stab die Gestalt

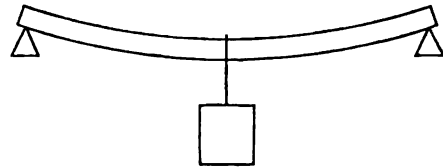
$$0 = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{1}{3} \frac{b^3}{4} \frac{m}{s} \frac{\partial^4 v}{\partial x^4}$$

$$0 = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{1}{3} \frac{c^3}{4} \frac{m}{s} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \quad (4.)$$

annehmen, so dass sie sich nur durch den Werth der Constanten von den für den Cylinder aufgestellten Gleichungen unterscheiden.

§ 164. Biegung eines in zwei Punkten unterstützten Stabes.

Ebenso sind die Grenzbedingungen für die Enden des vierkantigen Stabes nur wenig von den für den runden Stab gültigen verschieden. Von grösserem Einfluss ist die Abänderung, welche wir jetzt in den Bedingungen eintreten lassen wollen. Wir denken uns den Stab auf den zwei unterstützten Enden ruhend und zwischen beiden durch ein angehängtes Gewicht belastet. Dann haben wir nicht bloss für die beiden freien Enden, sondern auch für die belastete



Stelle in der Mitte Bedingungen zu erfüllen; und aus dem letzteren Umstande geht hervor, dass die Differentialgleichungen für jede der beiden Hälften des Stabes, rechts und links von dem Belastungspunkte, gesondert durch Functionen, welche im Allgemeinen von einander verschieden sein können, zu erfüllen sind.

Nehmen wir wieder die Richtung der s als vertical nach unten gerichtet an, so können wir von der Verrückungscomponente v , welche für $y = 0$ und $s = 0$ verschwindet, absehen und haben allein w aus der Gleichung

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = 0 \quad (1.)$$

zu bestimmen, welche sowohl für die eine Hälfte, deren Länge a_1 sei, vom freien Ende $x = -a_1$ bis zum belasteten Punkte $x = 0$, als auch für die andere Hälfte, deren Länge wir $a_2 = a - a_1$ nennen, vom Punkte $x = 0$ bis zum zweiten freien Ende $x = a_2$ gilt.

Da die beiden Enden unterstützt sind, so bestehen zunächst die Grenzbedingungen für $x = -a_1$ und $x = a_2$, dass

$$w = 0 \quad (2.)$$

sein muss. Um die weiteren Bedingungen für eins der freien Enden zu finden, ersetzen wir die Wirkung der festen Unterstützungen durch nach oben gerichtete Kräfte, welche dem auf die Unterlagen ausgeübten Drucke das Gleichgewicht halten, Z_1 im Punkte $x = -a_1$, Z_2 im Punkte $x = a_2$. Dann gelten für den Gleichgewichtszustand die Formeln

$$0 = Z_1 - \int_{-\frac{1}{2}b}^{\frac{1}{2}b} dy \int_{-\frac{1}{2}c}^{\frac{1}{2}c} dz \{Z_x + \text{etc.}\} \text{ für } x = -a_1,$$

$$0 = Z_2 + \int_{-\frac{1}{2}b}^{\frac{1}{2}b} dy \int_{-\frac{1}{2}c}^{\frac{1}{2}c} dz \{Z_x + \text{etc.}\} \text{ „ } x = a_2,$$

während die für die Y -Componenten gültige Formel

$$0 = \int_{-\frac{1}{2}b}^{\frac{1}{2}b} dy \int_{-\frac{1}{2}c}^{\frac{1}{2}c} dz \{Y_x + \text{etc.}\}$$

an beiden Enden für $x = -a_1$ und für $x = a_2$ zu erfüllen ist. Ferner müssen die Werthe der Drehungsmomente um die y - und die z -Axe, welche unter Rücksicht auf die vorstehenden Bedingungen

$$M_y = - \int_{-\frac{1}{2}b}^{\frac{1}{2}b} dy \int_{-\frac{1}{2}c}^{\frac{1}{2}c} dz z \left\{ X_x + \frac{\partial X_x}{\partial y} y + \dots \right\} = 0$$

$$M_z = \int_{-\frac{1}{2}b}^{\frac{1}{2}b} dy \int_{-\frac{1}{2}c}^{\frac{1}{2}c} dz y \left\{ X_x + \frac{\partial X_x}{\partial y} y + \dots \right\} = 0$$

sind, verschwinden. Die Ausführung der Rechnung nach demselben Verfahren wie in § 162 ergibt, da wir z nach unten positiv rechnen,

$$\begin{aligned} \text{für } x = -a_1 \quad 0 &= -Z_1 - \frac{1}{3 \cdot 4} bc^3 m \frac{d^3 w}{dx^3} \\ \text{„ } x = a_2 \quad 0 &= -Z_2 + \frac{1}{3 \cdot 4} bc^3 m \frac{d^3 w}{dx^3} \end{aligned} \quad (3.)$$

und für beide Enden

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{3} b^3 cm \frac{d^3 v}{dx^3} \\ -M_y &= \frac{1}{3} bc^3 m \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \\ M_z &= \frac{1}{3} b^3 cm' \frac{d^2 v}{dx^2} = 0. \end{aligned}$$

Von den letzteren drei Gleichungen wird die erste und letzte schon dadurch erfüllt, dass für die Mittellinie $v = 0$ ist; es bleibt also für beide Enden $x = -a_1$ und $x = a_2$ nur die Bedingung

$$0 = \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (4.)$$

und die Gleichungen (2.) und (3.).

Indem wir nun schliesslich die Bedingungsgleichungen für den durch das angehängte Gewicht P belasteten Querschnitt $x = 0$ aufstellen, haben wir die Unterscheidung zwischen den beiden Functionen w_1 und w_2 einzuführen, von welchen die erstere den Werth von w für negative, die andere für positive Werthe von x darstellt. An der Stelle $x = 0$ müssen aber, so lange der Stab nicht bricht, beide Functionen gleiche Werthe annehmen:

$$w_1 = w_2 \text{ für } x = 0. \quad (5.)$$

Dazu muss für denselben Punkt

$$\frac{dw_1}{dx} = \frac{dw_2}{dx} \text{ für } x = 0 \quad (6.)$$

sein, weil an dieser Stelle auch die Componente u nicht unstetig wird und deshalb ebensowenig die in der Entwicklung (§ 162)

$$u = u_0 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0 z + \dots$$

vorkommende Grösse (Gleichg (1.) § 161)

$$\frac{\partial u}{\partial z} = - \frac{\partial w}{\partial x}.$$

Ferner müssen sich an dieser Stelle die Drehungsmomente, welche in beiden Stabhälften auf die äussersten Querschnitte ausgeübt werden, das Gleichgewicht halten; nach der soeben für M_y aufgestellten Formel muss also

$$\frac{d^2 w_1}{dx^2} = \frac{d^2 w_2}{dx^2} \quad \text{für } x = 0 \quad (7.)$$

sein. Endlich heben die beiderseitig wirkenden Kräfte die Wirkung P der Schwere auf die angehängte Last auf; es ist also nach Anleitung der Formeln (3.) noch

$$0 = P + \frac{1}{8 \cdot 4} bc^3 m \left(\frac{d^3 w_1}{dx^3} - \frac{d^3 w_2}{dx^3} \right) \quad \text{für } x = 0 \quad (8.)$$

zu machen, womit alle Grenzbedingungen entwickelt sind.

In Folge dieser Bedingungen finden wir, dass die Auflösung der Differentialgleichung (1.) folgende Form für die erste Hälfte des Stabes von $x = -a_1$ bis $x = 0$

$$w_1 = \frac{2Pa_1 a_2}{mabc^3} \left\{ 2a_1 a_2 - 2(a_1 - a_2)x - 3x^2 - \frac{x^3}{a_1} \right\} \quad (9.)$$

annimmt, dagegen für die zweite Hälfte von $x = 0$ bis $x = a_2 = a - a_1$

$$w_2 = \frac{2Pa_1 a_2}{mabc^3} \left\{ 2a_1 a_2 - 2(a_1 - a_2)x - 3x^2 + \frac{x^3}{a_2} \right\}. \quad (10.)$$

Zugleich ergibt sich zwischen den drei Druckkräften P , Z_1 und Z_2 die mit dem Hebelgesetz übereinstimmende Beziehung

$$Z_1 a = Pa_2 \quad Z_2 a = Pa_1.$$

Die Senkung in dem belasteten Punkte $x = 0$ beträgt

$$W = 4 \frac{Pa_1^2 a_2^3}{mabc^3}$$

und in dem besonderen Falle, dass das Gewicht P genau in der Mitte des Stabes hängt, also für $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}a$,

$$W = \frac{Pa^3}{4mbc^3}.$$

Die Richtung der Tangente, welche in dem belasteten Punkte die Mittellinie des gebogenen Stabes berührt, ist durch die Formel

$$\left(\frac{dw}{dx} \right)_0 = 4 \frac{Pa_1 a_2 (a_2 - a_1)}{mabc^3}$$

gegeben.

Aus den für W erhaltenen Formeln lässt sich leicht auch diejenige Senkung berechnen, welche ein an einem Ende festgeklemmter Stab durch ein am anderen hängendes Gewicht erleiden würde. Dazu bedarf es nur der Ueberlegung, dass die Biegung denselben Werth behalten würde, wenn der Punkt $x = 0$ festgehalten würde, während die Enden durch die Kräfte Z_1 und Z_2 gehoben werden. Wir ersetzen deshalb a_1 und a_2 durch a , also $a = a_1 + a_2$ durch $2a$, ferner

[Extremely faint and illegible text, possibly bleed-through from the reverse side of the page]

[Extremely faint and illegible text, possibly bleed-through from the reverse side of the page]



Bei dieser Art zu beobachten sind beide Enden frei; es ist also, wenn wiederum a die Länge des Stabes, in dessen Mitte wir den Anfangspunkt der Coordinaten verlegen, bedeutet, sowohl für $x = -\frac{1}{2}a$, als auch für $x = \frac{1}{2}a$ nach den im vorigen § gegebenen Erläuterungen

$$0 = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}. \quad (2.)$$

Damit sind die erforderlichen vier Bedingungen aufgestellt, und es ist v vollständig bestimmt, wenn noch für $t = 0$ der Werth der Verrückung und der Geschwindigkeit für jeden Punkt des Stabes gegeben ist.

Ein particulares Integral der Gleichung (1.) ist die Function

$$v = \Omega \cos \omega^2 h t + \Omega' \sin \omega^2 h t, \quad (3.)$$

in welcher ω eine beliebige Constante, Ω und Ω' aber Functionen von x

$$\Omega = A \cos \omega x + B \sin \omega x + C (e^{\omega x} + e^{-\omega x}) + D (e^{\omega x} - e^{-\omega x})$$

$$\Omega' = A' \cos \omega x + B' \sin \omega x + C' (e^{\omega x} + e^{-\omega x}) + D' (e^{\omega x} - e^{-\omega x})$$

mit je vier willkürlichen Constanten A, B, C, D und A', B', C', D' bedeuten. Die Grenzbedingungen (2.), welche für jeden Werth von t gelten, lassen sich auf zweierlei Weise erfüllen, entweder dadurch, dass wir

$$\text{tang } \omega \frac{a}{2} = - \frac{e^{\omega \frac{a}{2}} - e^{-\omega \frac{a}{2}}}{e^{\omega \frac{a}{2}} + e^{-\omega \frac{a}{2}}} \quad (4a.)$$

$$\begin{aligned} \Omega &= E \left\{ \left(e^{\omega \frac{a}{2}} + e^{-\omega \frac{a}{2}} \right) \cos \omega x + \cos \omega \frac{a}{2} \left(e^{\omega x} + e^{-\omega x} \right) \right\} \\ \Omega' &= E' \left\{ \left(e^{\omega \frac{a}{2}} + e^{-\omega \frac{a}{2}} \right) \cos \omega x + \cos \omega \frac{a}{2} \left(e^{\omega x} + e^{-\omega x} \right) \right\} \end{aligned} \quad (5a.)$$

setzen, wo E und E' neue Constante sind, oder dadurch, dass wir

$$\text{tang } \omega \frac{a}{2} = \frac{e^{\omega \frac{a}{2}} - e^{-\omega \frac{a}{2}}}{e^{\omega \frac{a}{2}} + e^{-\omega \frac{a}{2}}} \quad (4b.)$$

$$\begin{aligned} \Omega &= F \left\{ \left(e^{\omega \frac{a}{2}} - e^{-\omega \frac{a}{2}} \right) \sin \omega x + \sin \omega \frac{a}{2} \left(e^{\omega x} - e^{-\omega x} \right) \right\} \\ \Omega' &= F' \left\{ \left(e^{\omega \frac{a}{2}} - e^{-\omega \frac{a}{2}} \right) \sin \omega x + \sin \omega \frac{a}{2} \left(e^{\omega x} - e^{-\omega x} \right) \right\} \end{aligned} \quad (5b.)$$

machen, wo ebenfalls F und F' constante Grössen bedeuten.

Als vollständige Auflösung der Differentialgleichung erhalten wir demnach eine Reihe von Gliedern, von welchen jedes die Form des Ausdrucks (3.) besitzt. In dieser Reihe sind alle Werthe von ω , welche entweder der Gleichung (4a.) oder (4b.) genügen, zu berücksichtigen, und es ist für Ω und Ω' der zugehörige unter (5a.) oder (5b.) angegebene Ausdruck einzusetzen. Die in diesen Functionen enthaltenen Constanten E und E' oder F und F' können nach dem bei Fourier'schen Reihen gebräuchlichen Verfahren aus den für $t = 0$ als Function von x gegebenen Anfangswerthen der Verrückung und der Geschwindigkeit bestimmt werden.

Wenn wir eine solche Beschaffenheit des Anfangszustandes voraussetzen, dass alle Glieder der Reihe bis auf eines verschwinden, so haben wir es mit einer einfachen periodischen Bewegung zu thun, welche unter geeigneten Umständen als reiner Ton hörbar sein wird. Die Schwingungszeit T desselben wird durch die Formel

$$\omega^2 h T = 2\pi$$

bestimmt; die Schwingungszahl ist also, wenn wir $\omega a = \psi$ setzen,

$$\frac{1}{T} = \frac{\psi^2 h}{2\pi a^2} = \kappa \frac{\psi^2}{2\pi a^2} \sqrt{\frac{m}{e}}, \quad (6.)$$

wo der Coefficient κ entweder nach der Formel

$$\kappa^2 = \frac{1}{4} R^2 \quad \text{oder} \quad \kappa^2 = \frac{1}{3} \frac{b^2}{4}$$

von der Dickendimension des Stabes abhängt. Die Grösse ψ aber ist durch eine Wurzel der Gleichung (4a.) oder (4b.) bestimmt.

Die beiden durch das Vorzeichen unterschiedenen Formeln (4.) lassen sich durch eine einfache Transformation auf die gleiche Gestalt

$$1 = \frac{e^{\omega a} + e^{-\omega a}}{2} \cos \omega a \quad (7a.)$$

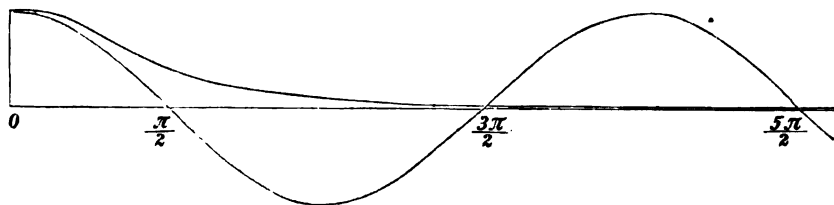
zurückführen, sodass ψ als Wurzel der transcendenten Gleichung

$$1 = \frac{e^{\psi} + e^{-\psi}}{2} \cos \psi \quad (7b.)$$

bezeichnet werden kann. Die Werthe der Wurzeln dieser Gleichung, von welchen wir nur die positiven zu kennen brauchen, lassen sich mit sehr grosser Annäherung durch ein einfaches Constructionsverfahren auffinden. Wir zeichnen zwei Curven, deren Ordinaten φ und χ nach den Formeln

$$\varphi = \cos \psi \quad \chi = \frac{2}{e^{\psi} + e^{-\psi}}$$

von der Abscisse ψ abhängen. Die zweite Curve, deren Ordinate von dem für $\psi = 0$ geltenden Werthe $\chi = 1$ mit wachsendem ψ



allmählich bis zum Werthe $\chi = 0$ herabsinkt, schneidet die erstere welche regelmässig periodisch auf- und absteigt, in Punkten, deren Abscissen

$$\psi = \frac{1}{2}\pi + \delta_1, \quad \frac{1}{2}\pi - \delta_2, \quad \frac{1}{2}\pi + \delta_3, \dots$$

die Wurzeln der Gleichung (7.) sind. Durch genauere numerische Berechnung findet man die kleinen Correctionen

$$\delta_1 = 1^\circ 0' 40'',9 \quad \delta_2 = 2' 40'',3 \quad \delta_3 = 6'',9 \dots,$$

welche eine sehr rasch abnehmende Reihe bilden. Hieraus folgt nach der Formel (6.) das lange vor der Entwicklung dieser Theorie bekannt gewordene Gesetz, dass die Reihenfolge der Töne eines Stabes sehr nahe durch die ungeraden Quadratzahlen bestimmt wird, so dass die Schwingungszahlen

$$\frac{1}{T} = 9 C, \quad 25 C, \quad 49 C \dots,$$

sind, wenn C die durch die Formel

$$C = \frac{\pi}{2\pi a^2} \sqrt{\frac{m}{s}}$$

bestimmte Constante bedeutet.

§ 166. Schwingungsknoten.

Um die Lage der bei einem bestimmten Ton in Ruhe bleibenden Schwingungsknoten zu finden, welche durch die Gleichung

$$\Omega = 0 \quad \text{oder} \quad \Omega' = 0$$

bestimmt sind, nehmen wir mit diesen Functionen noch eine Umgestaltung vor, indem wir die aus den Formeln (4.) unter Benutzung von (7 a.) folgenden Beziehungen

$$\sin \omega \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\cos \omega a} \frac{e^{\frac{\omega a}{2}} - e^{-\frac{\omega a}{2}}}{2}$$

$$\cos \omega \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\cos \omega a} \frac{e^{\frac{\omega a}{2}} + e^{-\frac{\omega a}{2}}}{2}$$

anwenden.

Hier ist das Vorzeichen der Quadratwurzel nach einer einfachen durch den Werth von ψ oder ω bedingten Regel zu wählen. Es ist ψ von der Form

$$\psi = \omega a = \frac{2n+1}{2} \pi - (-1)^n \delta_n$$

wo n eine ganze Zahl, die Ordnungszahl der Wurzel ω , δ_n aber eine Correction von kleinem positiven Werthe ist. Demnach ist

$$\cos \psi = \sin \delta_n \quad \sin \psi = (-1)^n \cos \delta_n,$$

ferner für ein ungerades n

$$\cos \frac{1}{2} \psi = (-1)^{\frac{n+1}{2}} \sin \left(\frac{\pi}{4} - (-1)^n \frac{\delta_n}{2} \right)$$

$$\sin \frac{1}{2} \psi = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cos \left(\frac{\pi}{4} - (-1)^n \frac{\delta_n}{2} \right)$$

und für einen geraden Werth von n

$$\cos \frac{1}{2} \psi = (-1)^{\frac{n}{2}} \cos \left(\frac{\pi}{4} - (-1)^n \frac{\delta_n}{2} \right)$$

$$\sin \frac{1}{2} \psi = (-1)^{\frac{n}{2}} \sin \left(\frac{\pi}{4} - (-1)^n \frac{\delta_n}{2} \right).$$

Hiernach ergibt sich die Bestimmung der Vorzeichen so, dass für ein ungerades n beide Vorzeichen ungleich, nämlich

$$\sin \omega \frac{a}{2} = - (-1)^{\frac{n+1}{2}} \sqrt{\cos \omega a} \frac{e^{\frac{\omega a}{2}} - e^{-\frac{\omega a}{2}}}{2}$$

$$\cos \omega \frac{a}{2} = (-1)^{\frac{n+1}{2}} \sqrt{\cos \omega a} \frac{e^{\frac{\omega a}{2}} + e^{-\frac{\omega a}{2}}}{2}$$

zu setzen ist, so dass die Gleichung (4a.) § 165 gilt; dagegen sind für ein gerades n beide Vorzeichen gleich, und es gelten die Formeln

$$\sin \omega \frac{a}{2} = (-1)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\cos \omega a} \frac{e^{\frac{\omega a}{2}} - e^{-\frac{\omega a}{2}}}{2}$$

$$\cos \omega \frac{a}{2} = (-1)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\cos \omega a} \frac{e^{\frac{\omega a}{2}} + e^{-\frac{\omega a}{2}}}{2}$$

sowie die Gleichung (4b.) § 165.

Wenden wir diese Beziehungen auf die in den Formeln (5.) § 165 angegebenen Werthe von Ω und Ω' an, so finden wir, dass Schwingungsknoten eines Tones sich an den Stellen bilden werden, deren Ordinaten durch die Gleichung

$$0 = 2 \cos \omega x + (-1)^{\frac{n+1}{2}} \sqrt{\cos \omega a} (e^{\omega x} + e^{-\omega x})$$

bestimmt werden, wenn die Ordnungszahl n des Tones ungerade ist; dagegen entstehen, wenn die Ordnungszahl n gerade ist, Schwingungsknoten an den durch die Formel

$$0 = 2 \sin \omega x + (-1)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\cos \omega a} (e^{\omega x} - e^{-\omega x})$$

gegebenen Stellen des Klangstabes.

Nach diesen Formeln hat Strehlke¹⁾ für die 12 tiefsten Töne eines Stabes den Abstand der Knotenpunkte von einem der Enden des Stabes, also die Grösse $\pm \left(\frac{a}{2} - x\right)$ und ihr Verhältniss zur Länge desselben a berechnet; nachfolgende Tafel enthält einen Theil der Zahlen.

	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$
$\left(\frac{1}{2} a - x_1\right) : a$	0,224	0,132	0,094	0,073	0,060
$\left(\frac{1}{2} a - x_2\right) : a$	0,776	0,5	0,358	0,279	0,228
$\left(\frac{1}{2} a - x_3\right) : a$		0,868	0,642	0,5	0,409
$\left(\frac{1}{2} a - x_4\right) : a$			0,906	0,721	0,591
$\left(\frac{1}{2} a - x_5\right) : a$				0,927	0,772
$\left(\frac{1}{2} a - x_6\right) : a$					0,940.

Diese Werthe beweisen, dass die Abstände der Knotenpunkte von einander keineswegs so, wie bei einer schwingenden Saite, alle gleich gross sind. Die Beobachtungen Strehlke's, welcher die Lage der Knotenpunkte durch aufgestreuten Sand bestimmte, bestätigen die theoretischen Resultate.

Anmerkung des Herausgebers.

Die Differentialgleichung vierter Ordnung, welche die Grundlage der vorstehenden Untersuchungen über die Elasticität dünner Stäbe bildet, ist zuerst von Daniel Bernoulli²⁾ aufgestellt und integrirt worden. Das Verfahren, welches hier benutzt wurde, um die

1) Pogg. Ann. 1833, Bd. 28, S. 513. Dove's Repertorium Bd. 3, S. 110.

2) Bernoulli, Comm. Acad. Petrop. T. 13, 1751, de vibrationibus et sono laminarum elasticarum pag. 105; de sonis multifariis etc. p. 167.

Schwingungen eines Stabes zu berechnen, findet sich auch bei Euler¹⁾, Riccati²⁾, Poisson³⁾ und Cauchy⁴⁾. In den Arbeiten der Letzteren ist ferner Rücksicht genommen auf die Verbesserung, welche an den Formeln angebracht werden muss, wenn das Gewicht des Stabes nicht zu vernachlässigen ist. Die Integration der Gleichungen für diesen Fall hat Zöppritz⁵⁾ ausgeführt.

Die Bernoulli'schen Gleichungen sind, wie die Herleitung lehrt, nur annäherungsweise gültig und führen daher, wie de St. Venant⁶⁾ gezeigt hat, nicht in allen Fällen zu Schlussformeln, welche den Beobachtungen mit möglichst grosser Genauigkeit entsprechen. Seine strengere Theorie⁷⁾ unterscheidet sich von der älteren dadurch, dass der Einfluss, welchen die gleichzeitig mit den Biegungen eintretenden Drehungen auf die ersteren ausüben, genauer berücksichtigt wird. Später hat Kirchhoff⁸⁾ die Theorie eines elastischen Stabes behandelt; das Gleichgewicht eines solchen hat Pochhammer⁹⁾ untersucht. Eine Arbeit von Voigt¹⁰⁾ betrifft die Biegung und Drillung von Krystallstäbchen.

1) L. Euler, *investigatio motuum, quibus laminae et virgae elasticae contremiscunt*, *Comm. Acad. Petrop.* pro anno 1779.

2) Riccati, *mem. di. mat. e fisica della Soc. Ital.* T. 1, p. 501, 1782.

3) Poisson, *mém. de l'Acad. des sciences*, T. 8, p. 442. Paris 1829. *Mécanique* T. I, p. 598, 1833.

4) Cauchy, *exerc. de math.* T. 3, p. 245 u. 356.

5) Zöppritz, *Theorie der Querschwingungen schwerer Stäbe*, *Pogg. Ann.* Bd. 128, S. 139; *Berechnung von Kupffer's Beobachtungen*, *Pogg. Ann.* Bd. 129, S. 219, 1866. *Theorie d. Querschw. eines elast. am Ende belasteten Stabes*. Tübingen 1865. Siehe auch Okatow, *Pogg. Ann.* Bd. 135, S. 260, 1868.

6) de St. Venant, *comptes rendus* T. 17, p. 942 u. 1020, 1843.

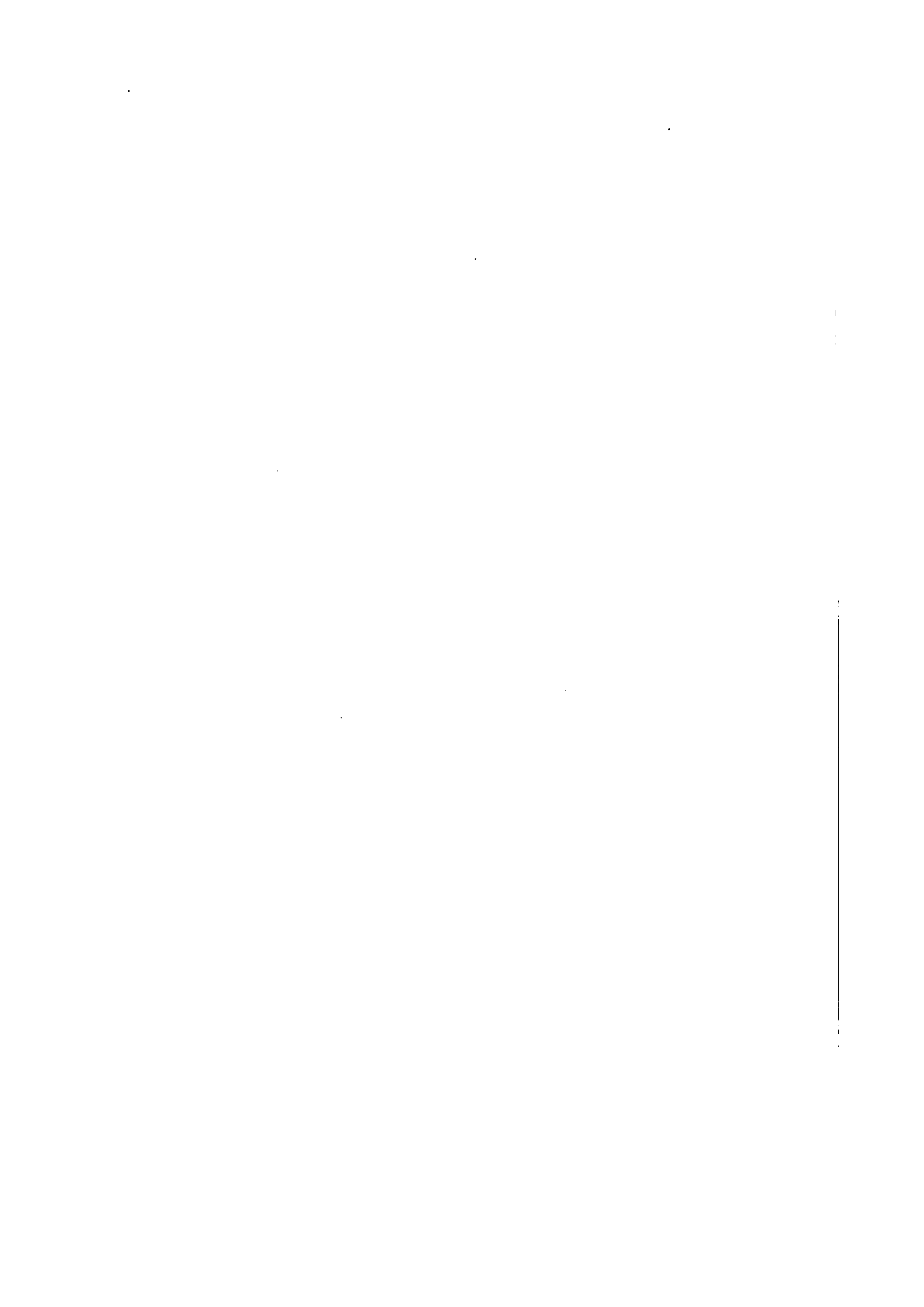
7) *Mém. prés. p. div. savants à l'Acad. des sc.* T. 14, p. 233. Paris 1856. Liouville, *journ. de math.* 2. sér. T. 1, p. 80. 1856.

8) Kirchhoff, *Crelle's Journ. f. Math.* Bd. 56, S. 285, 1859; *Pogg. Ann.* Bd. 108, S. 369, 1859; *Berl. Monatsberichte* 1879, S. 815. F. Vogel, *Transversalschwing. eines keilförm. Stabes*. Inaug.-Diss. Berlin 1881.

9) Pochhammer, *Unters. üb. d. Gleichgew. des elast. Stabes*. Kiel 1879.

10) W. Voigt, *Wied. Ann.* Bd. 16, S. 273, 1882.





ENGINEERING LIBRARY

QA 931 .N48 C.1
Vorlesungen über die Theorie d
Stanford University Libraries



3 6105 030 412 378

DATE DUE			

**TIMOSHENKO COLLECTION
IN HOUSE USE ONLY**

**STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
STANFORD, CALIFORNIA 94305-6004**



