Dupuis
2 vols. in 1
$3.25

G Kirchhoff.

VORLESUNGEN

ÜBER

MATHEMATISCHE PHYSIK

VON

GUSTAV KIRCHHOFF.

ZWEITER BAND.

MATHEMATISCHE OPTIK.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1891.

VORLESUNGEN

ÜBER

MATHEMATISCHE OPTIK

VON

GUSTAV KIRCHHOFF.

HERAUSGEGEBEN

VON

DR. KURT HENSEL,
PRIVATDOCENT DER MATHEMATIK AN DER UNIVERSITÄT ZU BERLIN.

MIT DEM BILDNISSE KIRCHHOFF'S.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1891.

le Gustav Kirchhoffs wurde
ı Vorlesungen über mathe-
hten, damit sie gleich der
ein dauerndes Eigenthum

über mathematische Optik,
on dem Wunsche geleitet,
ihnen Kirchhoff auf Grund
g mit diesem Gegenstande
r Universität gegeben hatte.
des hier vorliegenden Stoffes
ntlichten Vorlesungen über
Mechanik ein natürliches Vorbild gegeben.

Alle auf die Herausgabe selbst bezüglichen Bemerkungen habe ich in einem Anhange am Ende des Werkes zusammengestellt, und dort auch ein vollständiges Verzeichniss derjenigen Veränderungen gegeben, welche ich an dem Vorlesungsmanuscripte angebracht habe; es sind diese nur nach sorgfältigster Ueberlegung und grossentheils mit Benutzung einer beträchtlichen Anzahl von Ausarbeitungen und Nachschriften Kirchhoff'scher Vorlesungen bewirkt worden, welche mir von früheren Schülern des Verewigten für diese schöne Aufgabe vertrauensvoll zur Verfügung gestellt worden sind. Möchte es mir gelungen sein, dieses reiche Material in richtiger und würdiger Weise zu verwerthen.

Berlin, im März 1891.

Kurt Hensel.

Vorrede.

Sehr bald nach dem tief beklagten Tode Gustav Kirchhoffs wurde der Wunsch rege, dass seine sämmtlichen Vorlesungen über mathematische Physik veröffentlicht werden möchten, damit sie gleich der von ihm selbst herausgegebenen Mechanik ein dauerndes Eigenthum unserer Litteratur würden.

Bei der Herausgabe der Vorlesungen über mathematische Optik, welche zunächst erscheinen, wurde ich von dem Wunsche geleitet, sie in der Form wieder herzustellen, welche ihnen Kirchhoff auf Grund immer erneuter eingehender Beschäftigung mit diesem Gegenstande in seinen letzten Vorträgen an der Berliner Universität gegeben hatte.

Für die Anordnung und Eintheilung des hier vorliegenden Stoffes war in den durch Kirchhoff selbst veröffentlichten Vorlesungen über Mechanik ein natürliches Vorbild gegeben.

Alle auf die Herausgabe selbst bezüglichen Bemerkungen habe ich in einem Anhange am Ende des Werkes zusammengestellt, und dort auch ein vollständiges Verzeichniss derjenigen Veränderungen gegeben, welche ich an dem Vorlesungsmanuscripte angebracht habe; es sind diese nur nach sorgfältigster Ueberlegung und grossentheils mit Benutzung einer beträchtlichen Anzahl von Ausarbeitungen und Nachschriften Kirchhoff'scher Vorlesungen bewirkt worden, welche mir von früheren Schülern des Verewigten für diese schöne Aufgabe vertrauensvoll zur Verfügung gestellt worden sind. Möchte es mir gelungen sein, dieses reiche Material in richtiger und würdiger Weise zu verwerthen.

Berlin, im März 1891.

Kurt Hensel.

Inhaltsverzeichniss.

Erste Vorlesung.

Gegenstand der Optik. — Emissions- und Undulationstheorie. — Aberration. — Differentialgleichungen der Lichtbewegung in einem homogenen isotropen Medium. — Ihre Integration. — Longitudinale und transversale Schwingungen. — Ebene geradlinig polarisirte Lichtwellen. — Intensität. — Princip der Coexistenz kleiner Bewegungen. — Interferenz ebener Wellen. — Elliptisch und kreisförmig polarisirtes Licht. — Kugelförmige Wellen. — Interferenz kugelförmiger Wellen. — Der Fresnelsche Spiegelversuch.

§ 1.

Den Gegenstand der *Optik* bilden die Erscheinungen, die das *Licht* hervorbringt und die das *Auge* wahrnimmt. Es zeichnen sich diese vor anderen physikalischen Erscheinungen durch ihre Mannigfaltigkeit und durch die Schärfe aus, mit der sie aufgefasst werden können. Die Richtigkeit dieser Behauptung wird schon von demjenigen zugegeben werden, der sein Auge nie anders als zu den Verrichtungen des gewöhnlichen Lebens gebraucht hat; aber evidenter noch tritt sie hervor, wenn man bedenkt, was Alles durch Fernröhre und Mikroskope dem Auge sichtbar wird, wenn man die Erscheinungen der Interferenz und der Polarisation kennen lernt, von denen im gewöhnlichen Leben nur selten eine Spur sich zeigt, die geeignete Apparate aber glänzend hervortreten lassen.

Bei der Durchforschung des weiten Gebietes der Optik haben als Wegweiser vorzugsweise zwei Theorieen gedient, die *Emissions-* oder *Emanationstheorie* und die *Undulationstheorie.* Als der Schöpfer jener pflegt *Newton* (1643—1727), als der Begründer dieser *Huyghens* (1629—1695) genannt zu werden, obwohl *Descartes* schon vor Newton den Gedanken, welcher der Emanationstheorie zu Grunde liegt, ausgesprochen hat, und von *Hooke* vor Huyghens behauptet ist, dass das Licht in Schwingungen bestehe.

Nach der Emissionstheorie sendet ein leuchtender Körper fortwährend kleine Theilchen, Lichtkörperchen, aus, die in geraden Linien mit gleichbleibender Geschwindigkeit fortgehen, bis sie einen anderen Körper treffen, von dem sie zurückgeworfen werden, oder in den sie eindringen, um in veränderter Richtung ihren Weg fortzusetzen, und die, wenn sie in unser Auge gelangen, durch den Stoss, den sie auf die Retina ausüben, die Empfindung des Lichtes erregen. Die Undulationstheorie geht, wie ihr Name schon sagt, von der Hypothese aus, dass das Licht in Schwingungen besteht, in den Schwingungen eines Mittels, das man Lichtäther genannt hat, das die Räume erfüllt, die wir leer nennen, und das sich in allen Körpern zwischen den wägbaren Molekülen befindet, aus denen man sich diese zusammengesetzt denkt.

§ 2.

Nahe anderthalb Jahrhunderte war die Emanationstheorie die allgemein angenommene; jetzt ist sie durch die Undulationstheorie verdrängt, der hauptsächlich die Arbeiten von *Thomas Young* und *Fresnel*, die in die ersten Decennien unseres Jahrhunderts fallen, den Sieg verschafft haben. Trotzdem aber verdient sie auch jetzt noch erwähnt zu werden, da sie von gewissen Erscheinungen in sehr einfacher Weise Rechenschaft giebt. Vor Allem gehört hierher die auffallendste aller optischen Thatsachen, die Thatsache, dass das Licht *in geraden Linien* sich fortpflanzt, dass es aus *Strahlen* besteht. Nach dieser Theorie ist nämlich eine Metallplatte für die Lichtkörperchen undurchdringlich, befindet sich also vor ihr ein leuchtender Punkt, so herrscht hinter ihr Dunkelheit; wird in ihr eine Oeffnung angebracht, so wird gewissen Lichtkörperchen der Weg frei gemacht, und diese bewegen sich dann gerade so, als ob der ganze Schirm nicht vorhanden wäre; wir haben hinter diesem einen Lichtstrahl, wenn die Oeffnung als unendlich klein bezeichnet werden darf, ein Strahlenbündel bei endlicher Oeffnung.

Im Jahre 1676 entdeckte *Olaf Römer*, ein Däne, dass das Licht Zeit zu seiner Fortpflanzung braucht; aus seinen Beobachtungen über die Verfinsterungen der Jupitersmonde konnte er schliessen, dass das Licht 15 Minuten gebraucht, um den Durchmesser der Erdbahn zu durchlaufen; daraus berechnet sich die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes zu etwa 40000 geographischen Meilen in der Sekunde. Es war auch die Entdeckung Römers eine Bestätigung der Hypothese der Emissionstheorie.

Aus der Thatsache, dass das Licht zu seiner Fortpflanzung Zeit gebraucht, erklärte sich auch im Sinne der Emanationstheorie die 1727 von dem englischen Astronomen *Bradley* entdeckte Erscheinung, die mit dem Namen der *Aberration* belegt worden ist. Bradley fand, dass die Richtung, in der ein Fixstern uns erscheint, in gewissem Grade von der Bewegung der Erde beeinflusst ist, so dass im Laufe eines Jahres jeder Stern eine kleine geschlossene Bahn an der Himmelskugel zu beschreiben scheint. Vom Standpunkte der Emissionstheorie wird diese Erscheinung leicht verständlich durch ein oft angeführtes Gleichniss: Man denke sich ein Schiff, welches in der Richtung seiner Länge fortschreitet, und eine Kanonenkugel, welche etwa senkrecht zu dieser Richtung und horizontal gegen dasselbe abgefeuert ist. Die Kugel durchbohrt das Schiff und macht zwei Löcher in seinen beiden Seitenwänden. Die Richtung der Verbindungslinie derselben werden die auf dem Schiffe befindlichen Menschen für die Richtung halten, in der das Geschütz aufgestellt ist; diese beiden Richtungen würden aber nur dann genau übereinstimmen, wenn das Schiff stillgestanden hätte; da es sich vorwärts bewegte, während die Kugel seinen Rumpf durchflog, müssen sie einen Winkel mit einander bilden, der durch das Verhältniss der Geschwindigkeiten von Schiff und Kugel bedingt ist. Dem Schiff entspricht die Erde oder genauer das optische Instrument, mit dem der Stern beobachtet wird und das die Bewegung der Erde theilt, der Kugel ein jedes von den Lichtkörperchen, welche das Gestirn uns zusendet; wegen der Bewegung der Erde scheinen diese aus einer andern Richtung zu kommen, als die ist, aus der sie wirklich kommen; der Winkel zwischen beiden Richtungen hängt von dem Verhältniss zwischen der Geschwindigkeit der Erde und der des Lichtes ab. Man muss gestehen, dass die Undulationstheorie auch heute noch nicht im Stande ist, die Aberration, wie der genannte Winkel heisst, in gleich befriedigender Weise zu erklären.

Die Gesetze, welche die Richtungen der Strahlen beherrschen, die durch Reflexion und durch einfache Brechung an der Oberfläche eines Körpers, eines Glaskörpers z. B. entstehen, leitete Newton aus der Annahme von Kräften ab, welche die Moleküle des Körpers auf die Lichtkörperchen ausüben, wenn diese in unmessbar kleiner Entfernung von der Oberfläche sich befinden. Aber schon die Erklärung der Thatsache, dass *zugleich* ein reflektirter und ein gebrochener Strahl sich bildet, machte ihm grosse Schwierigkeiten; er musste annehmen, dass ein jedes Lichtkörperchen periodisch seinen Zustand wechselt, so dass es bald leichter reflektirt, bald leichter durchgelassen wird, dass es, wie man sich ausgedrückt hat, abwechselnd *Anwandlungen* des leichteren Durchgangs und der leichteren Reflexion hat. Je genauer man die optischen Thatsachen kennen lernte und je mehr man sich bemühte, die Emissionstheorie mit ihnen in Einklang zu bringen, um so zahlreicher, verwickelter und unklarer wurden die Hypothesen, die zu Hülfe gezogen werden mussten. So hätte man die Emissionshypothese aufgeben müssen, selbst wenn es *Foucault* (i. J. 1854) nicht gelungen wäre, eine nothwendige Annahme derselben durch directe Beobachtung zu widerlegen, die Annahme nämlich, dass sich das Licht im Wasser schneller fortpflanzt als in der Luft. Um so mehr können wir aber darauf verzichten, diese Theorie näher zu betrachten. Es ist vielmehr die *Undulationstheorie*, mit der wir uns in diesen Vorlesungen beschäftigen wollen; aus Annahmen von bewunderungswürdiger Einfachheit erlaubt diese, die grosse Mehrzahl der optischen Erscheinungen, die die Erfahrung kennen gelehrt hat, zu entwickeln.

§ 3.

Wir gehen also von der Annahme aus, dass das Licht in Schwingungen, in Schwingungen des Aethers besteht. Der Schall besteht in Schwingungen der Luft. Der Schall geht in der Sekunde etwa durch 1000 Fuss, das Licht durch 40000 Meilen; da nun die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer Bewegung in einem Mittel um so grösser ist, je kleiner seine Dichtigkeit und je grösser seine Elasticität ist, so werden wir uns den Aether im Vergleich mit der Luft als von geringer Dichtigkeit und grosser Elasticität vorzustellen haben. Einem *Tone* von bestimmter Höhe kommt eine gewisse *Schwingungsdauer* zu, einem solchen Tone entspricht Licht von gewisser *Farbe*, das auch eine bestimmte Schwingungsdauer hat. Bei einem Tone von mittlerer Höhe werden in der Sekunde einige hundert Schwingungen ausgeführt, bei Licht von mittlerer Farbe aber mehrere hundert Billionen. Zu diesen Unterschieden zwischen den Schall- und den Lichtschwingungen kommt noch ein anderer: Die Schallschwingungen sind sogenannte *longitudinale*; nur solche kennen wir bei den Flüssigkeiten, bei den tropfbaren, wie bei den gasförmigen. Die Lichtschwingungen aber sind, wie aus den Polarisationserscheinungen hat geschlossen werden müssen, *transversale*. Wir kennen solche nur bei den festen Körpern, wir müssen also schliessen, dass der Aether in Bezug auf die Lichtbewegung sich wie ein *fester* Körper verhält. Dass dies trotz der geringen Dichtigkeit der Fall ist, die wir dem Aether zuschreiben, können wir als eine Folge der Schnelligkeit der Lichtschwingungen ansehen. Bei so schnellen Schwingungen würde auch bei der Luft und beim Wasser die charakteristische Eigenschaft der Flüssigkeiten, in Folge deren nur longitudinale Schwingungen möglich sind, nämlich die Gleichheit des Druckes in verschiedenen Richtungen, aufhören; es würden auch diese wie feste Körper sich verhalten.

Wir untersuchen zuerst die *Lichtbewegung* im leeren Raume oder *in einem homogenen*, *isotropen Körper*, wie Luft, Wasser, Glas; wir nehmen an, dass der Aether hier selbst als homogener, isotroper, fester Körper angesehen werden kann, auf dessen Theile keine Kräfte wirken, ausser denjenigen, die seine Elasticität bedingen, und gehen aus von den Gleichungen, die für die unendlich kleine Bewegung eines solchen gelten*). x, y, z nennen wir die

*) Für die Herleitung dieser Gleichungen vergl. z. B. Kirchhoff, Vorlesungen über Mechanik, XI. Vorlesung, bes. § 7.

Coordinaten der Gleichgewichtslage eines seiner materiellen Punkte, u, v, w die Componenten der unendlich kleinen Verrückung desselben zur Zeit t. Wir setzen:

$$\sigma = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\begin{aligned}
X_x &= -2K\frac{\partial u}{\partial x} - L\sigma & Y_z &= Z_y = -K\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\
Y_y &= -2K\frac{\partial v}{\partial y} - L\sigma & Z_x &= X_z = -K\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) \\
Z_z &= -2K\frac{\partial w}{\partial z} - L\sigma & X_y &= Y_x = -K\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right).
\end{aligned} \tag{1}$$

Es bezeichnen dann: σ die räumliche Dilatation, K und L die Constanten der Elasticität des Aethers; X_x, X_y, ... Z_z die durch die Verschiebung erzeugten Druckcomponenten. Nennt man noch μ die Dichtigkeit des Aethers, so hat man bekanntlich:

$$\begin{aligned}
\mu\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= -\frac{\partial X_x}{\partial x} - \frac{\partial X_y}{\partial y} - \frac{\partial X_z}{\partial z} \\
\mu\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= -\frac{\partial Y_x}{\partial x} - \frac{\partial Y_y}{\partial y} - \frac{\partial Y_z}{\partial z} \\
\mu\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= -\frac{\partial Z_x}{\partial x} - \frac{\partial Z_y}{\partial y} - \frac{\partial Z_z}{\partial z}.
\end{aligned} \tag{1a}$$

Substituirt man für die Druckcomponenten ihre Werthe aus (1), so werden diese Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{K}{\mu}\Delta u + \frac{K+L}{\mu}\frac{\partial\sigma}{\partial x} \\
\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \frac{K}{\mu}\Delta v + \frac{K+L}{\mu}\frac{\partial\sigma}{\partial y} \\
\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{K}{\mu}\Delta w + \frac{K+L}{\mu}\frac{\partial\sigma}{\partial z},
\end{aligned}$$

wobei allgemein Δf für $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)$ geschrieben ist; oder wenn wir

$$\frac{K}{\mu} = a^2 \qquad \frac{K+L}{\mu} = b^2 - a^2$$

setzen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a^2\Delta u + (b^2 - a^2)\frac{\partial\sigma}{\partial x} \\
\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= a^2\Delta v + (b^2 - a^2)\frac{\partial\sigma}{\partial y} \\
\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= a^2\Delta w + (b^2 - a^2)\frac{\partial\sigma}{\partial z}.
\end{aligned} \tag{2}$$

Für σ folgt hieraus:

$$\frac{\partial^2\sigma}{\partial t^2} = b^2\Delta\sigma. \tag{2a}$$

Setzen wir

$$2\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$2\eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$2\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y},$$

bezeichnen wir also durch ξ, η, ζ die Componenten der Drehung im Punkte $(x y z)$ zur Zeit t, so ergeben sich für diese ähnliche Differentialgleichungen, nämlich

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = a^2 \Delta \xi$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = a^2 \Delta \eta \qquad (2b)$$

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = a^2 \Delta \zeta.$$

Es ist leicht, partikuläre Lösungen der Gleichungen (2a) und (2b) für σ, ξ, η, ζ zu finden; sind diese bekannt, so bedarf es aber noch neuer Integrationen, um u, v, w zu ermitteln. Leichter findet man auf einem andern zuerst von *Clebsch**) bemerkten Wege partikuläre Lösungen der Gleichungen für u, v, w. Man hat nur

$$u = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}$$

$$v = \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} \qquad (3)$$

$$w = \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}$$

zu setzen, P gemäss der Gleichung

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = b^2 \Delta P \qquad (4)$$

zu wählen und für U, V, W Lösungen der Gleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \Delta \varphi \qquad (5)$$

zu nehmen. Dass die so bestimmten Functionen u, v, w den Differentialgleichungen (2) genügen, zeigt sich leicht; es ist dann nämlich:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = b^2 \frac{\partial \Delta P}{\partial x} + a^2 \frac{\partial \Delta W}{\partial y} - a^2 \frac{\partial \Delta V}{\partial z},$$

und

$$\Delta u = \frac{\partial \Delta P}{\partial x} + \frac{\partial \Delta W}{\partial y} - \frac{\partial \Delta V}{\partial z},$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{\partial \Delta P}{\partial x},$$

*) Clebsch, Ueber die Reflexion an einer Kugelfläche. Borchardt's Journal für die reine u. angew. Math. Bd. 61.

woraus sich die Gleichung (2) für u ergiebt; ähnlich folgen diejenigen für v und w. Dieselben Functionen ergeben aber, wie Clebsch a. a. O. nachgewiesen hat, auch die *allgemeine* Lösung jener Differentialgleichungen, d. h. man kann die Functionen P, U, V, W den Gleichungen (4) und (5) gemäss stets so bestimmen, dass die Gleichungen (3) eine jede Lösung von (2) darstellen.

Eine Bewegung, die durch die Clebsch'schen Ausdrücke für u, v, w darstellbar ist, kann angesehen werden als zusammengesetzt aus zweien, von denen die eine durch P, die andere durch U, V, W bestimmt ist. Für die erste ist

$$u = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial P}{\partial z}; \qquad . \quad (6)$$

die Differentialgleichungen lauten in diesem Falle:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= b^2 \Delta u, & \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= b^2 \Delta v, & \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} &= 0 \qquad \sigma = \Delta P. \qquad (6\text{a}) \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= b^2 \Delta w, & \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

Da in diesem Falle die Componenten der Drehung verschwinden, während die räumliche Dilatation σ von Null verschieden ist, so erkennt man, dass bei dieser Bewegung keine Drehungen, wohl aber Dichtigkeitsänderungen stattfinden.

Für die zweite Bewegung ist

$$u = \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}, \quad v = \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}, \quad w = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \sigma = 0; \quad (7)$$

hier treten keine Dichtigkeitsänderungen, wohl aber Drehungen auf. Man nennt jene eine *longitudinale*, diese eine *transversale* Bewegung; es werden sich diese Namen bei der Betrachtung specieller Fälle rechtfertigen. Die Lichtbewegungen, so nehmen wir an, sind ausschliesslich von der zweiten Art; die Differentialgleichungen für sie können wir also nach (2) und (7) schreiben:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a^2 \Delta u \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= a^2 \Delta v \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= a^2 \Delta w \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &+ \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \end{aligned} \qquad (7\text{a})$$

§ 4.

Untersuchen wir zunächst näher eine einfache **Bewegung** der ersten Art, für welche nämlich P von x und y unabhängig **ist**; die Gleichung (4) für P wird dann:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = b^2 \frac{\partial^2 P}{\partial z^2};$$

ihr allgemeines Integral ist bekanntlich (vgl. z. B. Mech. XXIII. Vorles. § 2)

$$P = f(z - bt) + F(z + bt),$$

wo f und F willkürliche Functionen bedeuten; wegen (6) folgt daraus

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = f'(z - bt) + F'(z + bt)$$

oder

$$u = u_1 + u_2, \quad v = v_1 + v_2, \quad w = w_1 + w_2,$$

wenn

$$\begin{aligned} u_1 &= 0, & v_1 &= 0, & w_1 &= f'(z - bt) \\ u_2 &= 0, & v_2 &= 0, & w_2 &= F'(z + bt) \end{aligned} \qquad (8\text{a})$$

gesetzt wird. Die Bewegung kann also in diesem Falle angesehen werden als zusammengesetzt aus den beiden einfacheren in (8a). Bei beiden hängen die Verrückungen von z und t allein ab, sind also in jedem Augenblick dieselben für alle Punkte einer zur xy-Ebene parallelen Ebene. Durch die Gleichungen (8) werden daher zwei ebene zur xy-Ebene parallele Wellensysteme dargestellt. Setzt man ferner in (8a) $t + 1$ an Stelle von t und zugleich $z + b$ beziehungsweise $z - b$ für z, so bleiben die Verrückungscomponenten der ersten beziehungsweise der zweiten Bewegung ungeändert. Jene Wellensysteme schreiten also beide mit der gleichförmigen Geschwindigkeit b fort, und zwar die erste in der Richtung der positiven, die zweite in der Richtung der negativen z-Achse; da die Richtung der Verrückungen die der Fortpflanzung der Wellen oder die dieser entgegengesetzte ist, so nennt man eine solche Bewegung eine *longitudinale.*

Man findet leicht eine Bewegung der zweiten Art von gleicher Einfachheit. Man setze

$$U = 0, \quad W = 0$$

und nehme V von x und y unabhängig an; für V hat man dann:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial z^2},$$

also

$$V = -f(z - at) - F(z + at),$$

und es ergiebt sich aus (7):

$$u = f'(z - at) + F'(z + at), \quad v = 0, \quad w = 0.$$

Durch diese Gleichungen sind zwei ebene Wellensysteme dargestellt, die mit der Geschwindigkeit a in der Richtung der positiven und der negativen z-Achse fortschreiten; die Richtung der Verrückung ist die der x-Achse, ist also parallel der Wellenebene, senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung; daher heisst die Bewegung eine *transversale*.

Indem wir diesen Fall noch weiter specialisiren, können wir setzen:

$$u = A \sin\left(\frac{z - at}{aT} + \delta\right) 2\pi, \quad v = 0, \quad w = 0,$$

oder wenn

$$\lambda = aT$$

gesetzt wird:

$$u = A \sin\left(\frac{z}{\lambda} - \frac{t}{T} + \delta\right) 2\pi, \quad v = 0, \quad w = 0. \tag{9}$$

Die durch diese Gleichungen dargestellte Bewegung pflanzt sich also mit der Geschwindigkeit a in der Richtung der positiven z-Achse fort; sie ist in Bezug auf z und auf t periodisch mit den Perioden λ und T, es giebt also λ die Länge einer Welle, T die Dauer einer vollständigen Schwingung.

Durch die Gleichungen (9) wird eine gewisse Lichtbewegung dargestellt; das Licht kommt dann von einem leuchtenden Punkt, für den $z = -\infty$ ist; man nennt λ die *Wellenlänge* des Lichtes, T seine *Schwingungsdauer* und a seine *Fortpflanzungsgeschwindigkeit.* Durch den Werth der Constanten T, d. h. durch die Schwingungsdauer des Lichtes ist seine Farbe gegeben (vgl. § 3), die hier betrachtete Bewegung entspricht also Licht von bestimmter Farbe oder homogenem Licht; endlich bewegen sich die Theilchen stets in derselben Richtung, nämlich in der der x-Achse, man nennt daher jenes Licht *polarisirt* und zwar *geradlinig polarisirt.* Es herrscht eine Verschiedenheit der Meinung darüber, ob die experimentell bestimmbare Polarisationsebene die xz- oder die yz-Ebene ist, ob die Schwingungen also *in* der Polarisationsebene oder *senkrecht* zu ihr erfolgen. Wir kommen später*) auf diese Frage zurück; wir wollen der ersten Ansicht folgen. Der Winkel

$$\left(\frac{z}{\lambda} - \frac{t}{T} + \delta\right) 2\pi$$

heisst die *Phase*, die den Werthen von z und t entspricht, die Grösse A die *Amplitude* der Schwingung. Von dieser hängt die *Intensität* J des Lichtes ab. Als Maass derselben führen wir den Mittelwerth des Quadrates der Verrückung eines Aethertheilchens ein; d. h. es ist hier

$$J = \frac{1}{T}\int_0^T u^2\,dt = \frac{A^2}{T}\int_0^T \sin^2\vartheta\,dt = -\frac{A^2}{2\pi}\int_{\vartheta_0}^{\vartheta_0 - 2\pi} \sin^2\vartheta\,d\vartheta = \frac{A^2}{2},$$

wenn zur Abkürzung

$$\vartheta = \left(\frac{z}{\lambda} - \frac{t}{T} + \delta\right) 2\pi, \quad \vartheta_0 = \left(\frac{z}{\lambda} + \delta\right) 2\pi$$

gesetzt wird.

---

*) Vgl. VIII. Vorlesung § 1.

Man pflegt die Intensität auch als den Mittelwerth der lebendigen Kraft eines Aethertheilchens, in diesem Falle also als den halben Mittelwerth des Quadrates der Geschwindigkeit desselben zu definiren; der so bestimmte Werth der Intensität unterscheidet sich von dem oben erklärten nur durch einen Factor, der bei derselben Farbe constant ist. In der That erhalten wir hiernach

$$J = \frac{1}{2T}\int_0^T\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dt = \frac{A^2\pi}{T^2}\int_0^{2\pi}\cos^2\vartheta\, d\vartheta = \frac{A^2\pi^2}{T^2}.$$

Hier schon ist darauf aufmerksam zu machen, dass die Folgerungen aus den Annahmen, welche wir gemacht haben, nicht vollständig mit der Erfahrung in Uebereinstimmung sind. Aus unseren Betrachtungen hat sich nämlich ergeben:

1) dass die Intensität ebener Lichtwellen überall dieselbe ist,
2) dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit verschiedenfarbiger Lichtwellen in demselben Mittel dieselbe ist.

Beides ist der Erfahrung gemäss richtig im leeren Raume, aber nicht genau in den durchsichtigen Körpern; hier findet *Absorption* und *Dispersion* statt. Beide Erscheinungen sind zuverlässig auf dieselbe Grundursache zurückzuführen, auf den Einfluss nämlich, den die wägbaren Theile der Körper auf die Bewegung des Aethers ausüben. Wir sehen für jetzt von diesem Einfluss und damit von Absorption und Dispersion ab, werden aber in der zehnten Vorlesung ausführlich auf die Theorie dieser Erscheinungen eingehen.

§ 5.

Wir haben Ausdrücke für die Verrückungen u, v, w bei dem einfachsten Falle ebener Lichtwellen aufgestellt; es ist leicht, diese zu verallgemeinern. Die Differentialgleichungen für die Verrückungen bei einer Lichtbewegung sind *linear* und *homogen* (eine Folge davon, dass die Verrückungen als unendlich klein angenommen sind); daraus folgt, dass, wenn wir zwei Werthsysteme

$$u_1,\ v_1,\ w_1 \quad \text{und} \quad u_2,\ v_2,\ w_2$$

haben, die ihnen genügen, ihnen auch durch

$$u = u_1 + u_2,\quad v = v_1 + v_2,\quad w = w_1 + w_2$$

genügt wird, dass diesen Gleichungen gemäss aus *zwei* Lichtbewegungen also *eine neue* zusammengesetzt werden kann. Es pflegt dieser Satz das *Princip der Coexistenz kleiner Bewegungen* genannt zu werden. Wir wollen ihn auf einige einfache Beispiele anwenden.

Es sei zunächst:

$$u_1 = A_1 \sin\left(\frac{z}{\lambda} - \frac{t}{T} + \delta_1\right) 2\pi \quad v_1 = 0 \quad w_1 = 0,$$
$$u_2 = A_2 \sin\left(\frac{z}{\lambda} - \frac{t}{T} + \delta_2\right) 2\pi \quad v_2 = 0 \quad w_2 = 0. \tag{10}$$

Diese Gleichungen stellen zwei Wellensysteme von derselben Richtung, derselben Farbe und derselben Polarisationsebene dar; man sagt von ihnen, sie haben

den *Phasenunterschied* $(\delta_2 - \delta_1) 2\pi$,
den *Gangunterschied* $(\delta_2 - \delta_1) \lambda$,
die *relative Verzögerung* $-(\delta_2 - \delta_1) T$.

Wie man leicht erkennt, giebt die erste dieser Zahlen die Differenz der beiden Phasen an, welche ein bestimmter Punkt zu einer bestimmten Zeit bei beiden Bewegungen besitzt, die zweite den Ortsunterschied zweier Punkte, die zu derselben Zeit gleiche Phase haben, die dritte endlich giebt die Zeit an, nach welcher ein Punkt bei der ersten Bewegung dieselbe Phase besitzt, wie sie derselbe bei der zweiten hatte. Alle drei Zahlen sind von z und t unabhängig; da ferner beide Bewegungen periodisch sind, so behalten jene Zahlen die soeben angegebene Bedeutung, wenn man die erste, zweite und dritte beziehlich um beliebige ganzzahlige Vielfache von 2π, λ und T vermehrt oder vermindert.

Für die resultirende Lichtbewegung ist dann

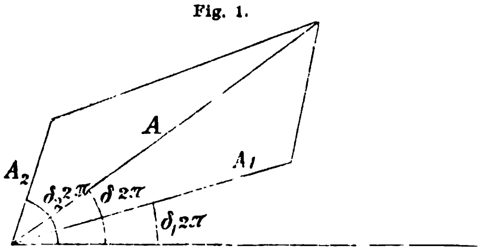
$$u = u_1 + u_2 = A \sin\left(\frac{z}{\lambda} - \frac{t}{T} + \delta\right) 2\pi, \quad v = 0, \quad w = 0,$$

wenn A und δ aus den Gleichungen

$$A \cos \delta 2\pi = A_1 \cos \delta_1 2\pi + A_2 \cos \delta_2 2\pi$$
$$A \sin \delta 2\pi = A_1 \sin \delta_1 2\pi + A_2 \sin \delta_2 2\pi \tag{11}$$

bestimmt werden. Die beiden Wellensysteme setzen sich also zu einem von derselben Richtung, Farbe und Polarisationsebene zusammen. Die vorstehenden Gleichungen zeigen, wie man die Amplitude und die Phase desselben durch eine einfache Construction finden kann. Zeichnet man nämlich von einem beliebigen Anfangspunkte aus eine gerade Linie, zieht man ferner von demselben Punkte aus zwei Strecken gleich A_1 und A_2, welche mit jener die Winkel $\delta_1 2\pi$ und $\delta_2 2\pi$ bilden, vervollständigt man endlich das durch den Anfangspunkt und die Endpunkte von A_1 und A_2 gebildete Dreieck zu einem

Fig. 1.



Parallelogramm, so ist A die durch den Anfangspunkt gehende Diagonale desselben, $\delta 2\pi$ der Winkel, den sie mit jener geraden Linie einschliesst. Diese elegante Construction rührt von **Fresnel** her.

Aus (11) ergiebt sich

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\delta_2 - \delta_1)2\pi.$$

Bezeichnet also h eine beliebige ganze Zahl, so ist hiernach

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2, \quad \text{wenn} \quad \delta_2 - \delta_1 = \frac{2h+1}{4}$$

$$A^2 = (A_1 + A_2)^2, \quad \text{wenn} \quad \delta_2 - \delta_1 = h$$

$$A^2 = (A_1 - A_2)^2, \quad \text{wenn} \quad \delta_2 - \delta_1 = \frac{2h+1}{2}.$$

Danach geben die beiden Wellensysteme, je nach ihrem Phasenunterschiede, eine verschiedene Intensität; man sagt, sie *interferiren* mit einander.

Wir nehmen zweitens an:

$$u_1 = A_1 \sin\left(\frac{z}{\lambda} - \frac{t}{T} + \delta_1\right)2\pi, \quad v_1 = 0, \quad w_1 = 0$$

$$u_2 = 0, \quad v_2 = B_2 \sin\left(\frac{z}{\lambda} - \frac{t}{T} + \delta_2\right)2\pi, \quad w_2 = 0.$$

Durch diese Gleichungen sind zwei Wellensysteme dargestellt, deren Polarisationsebenen senkrecht auf einander stehen. Für die resultirende Lichtbewegung ist

$$u = u_1 = A_1 \sin\left(\frac{z}{\lambda} - \frac{t}{T} + \delta_1\right)2\pi$$

$$v = v_2 = B_2 \sin\left(\frac{z}{\lambda} - \frac{t}{T} + \delta_2\right)2\pi$$

$$w = 0.$$

Man nennt das resultirende Licht *elliptisch polarisirt*. Aus

$$\frac{u}{A_1}\sin\delta_2 2\pi - \frac{v}{B_2}\sin\delta_1 2\pi = \sin(\delta_2 - \delta_1)2\pi \sin\left(\frac{z}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)2\pi$$

$$\frac{u}{A_1}\cos\delta_2 2\pi - \frac{v}{B_2}\cos\delta_1 2\pi = \sin(\delta_1 - \delta_2)2\pi \cos\left(\frac{z}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)2\pi$$

folgt nämlich durch Elimination von t als Gleichung der Bahn eines Aethertheilchens

$$\left(\frac{u}{A_1}\right)^2 + \left(\frac{v}{B_2}\right)^2 - 2\frac{u\,v}{A_1 B_2}\cos(\delta_2 - \delta_1)2\pi = \sin^2(\delta_2 - \delta_1)2\pi,$$

diese Bahn ist also eine Ellipse. Bilden wir die Intensität des resultirenden Lichtes:

$$\frac{1}{T}\int_0^T (u^2 + v^2)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T u_1^2\,dt + \frac{1}{T}\int_0^T v_2^2\,dt = J_1 + J_2,$$

so sehen wir, dass diese sich immer gleich der Summe der Intensitäten J_1 und J_2 der beiden einzelnen Wellensysteme ergiebt. Senkrecht aufeinander polarisirte Wellensysteme interferiren also nicht, welches auch ihr Phasenunterschied sein möge.

Das resultirende Licht ist *kreisförmig* oder *circular* polarisirt, d. h. die Bahn eines jeden Aethertheilchens ist ein Kreis, wenn

$$A_1 = B_2 \quad \text{und zugleich} \quad \delta_2 - \delta_1 = \frac{2h+1}{4},$$

und zwar ist

$$\left.\begin{aligned} u &= A_1 \sin\left(\frac{z}{\lambda} - \frac{t}{T} + \delta_1\right)2\pi \\ v &= A_1 \cos\left(\frac{z}{\lambda} - \frac{t}{T} + \delta_1\right)2\pi \end{aligned}\right\} \text{wenn } \delta_2 - \delta_1 = \frac{4h+1}{4}$$

und (13)

$$\left.\begin{aligned} u &= A_1 \sin\left(\frac{z}{\lambda} - \frac{t}{T} + \delta_1\right)2\pi \\ v &= -A_1 \cos\left(\frac{z}{\lambda} - \frac{t}{T} + \delta_1\right)2\pi \end{aligned}\right\} \text{wenn } \delta_2 - \delta_1 = \frac{4h-1}{4}.$$

In beiden Fällen ist die Geschwindigkeit eines Aethertheilchens $\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2}$ constant und dieselbe; die Richtung der Bewegung aber ist eine entgegengesetzte. Man unterscheidet hiernach *rechts* und *links* circular polarisirtes Licht.

Das resultirende Licht ist geradlinig polarisirt, wenn

$$\delta_2 - \delta_1 = \frac{h}{2},$$

und zwar ist

$$\left.\begin{aligned} u &= A_1 \sin\left(\frac{z}{\lambda} - \frac{t}{T} + \delta_1\right)2\pi \\ v &= B_2 \sin\left(\frac{z}{\lambda} - \frac{t}{T} + \delta_1\right)2\pi \end{aligned}\right\} \text{wenn } \delta_2 - \delta_1 = h$$

und (14)

$$\left.\begin{aligned} u &= A_1 \sin\left(\frac{z}{\lambda} - \frac{t}{T} + \delta_1\right)2\pi \\ v &= -B_2 \sin\left(\frac{z}{\lambda} - \frac{t}{T} + \delta_1\right)2\pi \end{aligned}\right\} \text{wenn } \delta_2 - \delta_1 = \frac{2h+1}{2}.$$

Der zweite Fall kann auf den ersten reducirt werden, entweder dadurch, dass man die Richtung, in der v positiv gerechnet wird, in die entgegengesetzte verkehrt, oder dadurch, dass man positive und negative Amplituden zulässt.

In dem ersten Fall (zu dem auch der Fall $h = 0$ gehört) ist

$$\frac{v}{u} = \frac{B_2}{A_1} = \operatorname{tg} \alpha,$$

wenn α das *Polarisationsazimuth* der resultirenden Wellen, von der xz-Ebene an gerechnet, bedeutet. Bedeutet A die Amplitude der resultirenden Wellen, d. h. das Maximum von $\sqrt{u^2 + v^2}$, so ist

$$A = \sqrt{A_1^2 + B_2^2}.$$

Construirt man daher ein Rechteck mit den Seiten A_1 und B_2, so ist A gleich der Diagonale desselben, und α ist der Winkel, den diese mit A_1 bildet.

Die Wellen, deren Amplitude A und deren Polarisationsazimuth α ist, kann man auch *zerlegen* in die beiden Wellensysteme von gleicher Phase, die nach der x-Achse und der y-Achse polarisirt sind und die Amplituden

$$A \cos \alpha \quad \text{und} \quad A \sin \alpha$$

haben. Solche Zerlegungen werden sich als von der höchsten Wichtigkeit in den verschiedensten Theilen der Optik zeigen.

Nach einer andern Richtung hin können wir die für den einfachsten Fall einer Lichtbewegung aufgestellten Gleichungen (5) verallgemeinern, indem wir die Grössen A und δ, die wir in der Function f als Constanten eingeführt haben, als Functionen von $z - at$, also für ein gegebenes z als Functionen der Zeit annehmen. Das müssen wir in der That, wenn die Gleichungen ebene, homogene, geradlinig polarisirte Lichtwellen, wie sie wirklich erzeugt werden können, darstellen sollen; bei diesen verändern sich nämlich A und δ in weiten Grenzen innerhalb eines Zeitraumes, der für unsere Sinne unwahrnehmbar klein ist, in der complicirtesten Weise, man möchte sagen gesetzlos, aber doch so, dass sie noch für Zeiträume von vielen tausend Schwingungen als constant angesehen werden können. Das sogenannte *natürliche* Licht, das die selbstleuchtenden Körper aussenden, ist aber auch nicht einmal polarisirt; die leuchtenden Punkte wechseln fortwährend die Richtung ihrer Bewegung. Wir können das natürliche Licht ansehen als polarisirtes, dessen Polarisationsebene fortwährend wechselt, so dass in einem Zeitraum, der für unsere Sinne unwahrnehmbar klein ist, keine Richtung über die andere überwiegt, dass trotzdem aber in einem Zeitraum von vielen tausend Schwingungen die Polarisationsebene als constant angesehen werden kann.

§ 6.

Wir wenden uns jetzt zur Untersuchung *kugelförmiger Wellen*, d. h. solcher Wellen, welche sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit von oder nach einem *im Endlichen* liegenden Punkte, z. B. dem Anfangspunkte des Coordinatensystems bewegen. Wir erhalten solche, bei denen Verdichtungen und keine Drehungen stattfinden, wenn wir in

$$u = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial P}{\partial z}$$

annehmen, dass P nur von t und $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ abhängig ist. Man hat dann

$$u = \frac{\partial P}{\partial r}\frac{x}{r}, \quad v = \frac{\partial P}{\partial r}\frac{y}{r}, \quad w = \frac{\partial P}{\partial r}\frac{z}{r},$$

also

$$u : v : w = x : y : z,$$

d. h. die Verrückung hat die Richtung des Radius; die Wellen heissen daher *longitudinale.*

Wir erhalten Wellen ohne Verdichtungen, mit Drehungen, wenn wir in

$$u = \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}, \quad v = \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}, \quad w = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}$$

U, V, W als nur von t und r abhängend annehmen; es ist dann

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial W}{\partial r}\frac{y}{r} - \frac{\partial V}{\partial r}\frac{z}{r} \\ v &= \frac{\partial U}{\partial r}\frac{z}{r} - \frac{\partial W}{\partial r}\frac{x}{r} \\ w &= \frac{\partial V}{\partial r}\frac{x}{r} - \frac{\partial U}{\partial r}\frac{y}{r}, \end{aligned} \tag{15}$$

also

$$ux + vy + wz = 0,$$

d. h. die Verrückung ist senkrecht zum Radius; die Wellen verdienen daher den Namen der *transversalen.*

Die specielle Voraussetzung, welche wir eben über die Beschaffenheit der Functionen U, V, W gemacht haben, zieht eine bemerkenswerthe Eigenschaft der durch die vorstehenden Gleichungen dargestellten Veränderung des Aethers nach sich. Wir stellen uns einen starren Körper vor, welcher eine unendlich kleine Drehung um eine durch den Coordinatenanfangspunkt gehende Achse erleidet. ξ, η, ζ seien die Componenten dieser Drehung, u, v, w die unendlich kleinen Aenderungen, welche die Coordinaten x, y, z eines Punktes des betrachteten Körpers durch sie erfahren; es ist dann bekanntlich

$$u = \zeta y - \eta z, \quad v = \xi z - \zeta x, \quad w = \eta x - \xi y.$$

Diese Ausdrücke sind von derselben Form wie die in (15) erhaltenen; sie werden mit ihnen identisch, wenn man setzt:

$$\xi = \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}, \quad \eta = \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}, \quad \zeta = \frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial r}.$$

Diese Gleichungen zeigen, dass die Verrückungen der Theile, für welche $r =$ const. ist, in einer Drehung um den Anfangspunkt bestehen, deren Componenten

$$\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}, \quad \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}, \quad \frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial r} \tag{15a}$$

sind.

Jede der Grössen U, V, W soll der Gleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \Delta \varphi$$

genügen. Nehmen wir jetzt an, dass φ nur von t und r abhängt, so haben wir

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial r}\frac{x}{r}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}\frac{x^2}{r^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial r}\left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}\right) \quad .$$

also

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 (r\varphi)}{\partial r^2},$$

mithin verwandelt sich die obige Gleichung in:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{a^2}{r}\frac{\partial^2 (r\varphi)}{\partial r^2},$$

oder in

$$\frac{\partial^2 (r\varphi)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 (r\varphi)}{\partial r^2},$$

eine Gleichung von derselben Form, wie wir sie schon im § 4 zu behandeln hatten. Eine Lösung derselben ist also:

$$\varphi = \frac{1}{r} f(r - at),$$

wo f eine willkürliche Function bedeutet. Eine Lichtbewegung der einfachsten Art, die von dem Anfangspunkte der Coordinaten ausgeht, erhalten wir daher, wenn wir

$$U = \frac{A}{r}\cos\left(\frac{r}{\lambda} - \frac{t}{T} + \alpha\right)2\pi, \quad V = 0, \quad W = 0$$

annehmen, wo wieder

$$\lambda = aT$$

ist, mithin

$$u = 0, \quad v = \frac{\partial U}{\partial z}, \quad w = -\frac{\partial U}{\partial y}$$

setzen; die Drehung der Kugelflächen $r =$ const. findet dann nach (15a) immer um die x-Achse statt; das Licht ist geradlinig polarisirt; die Schwingungsrichtung ist überall senkrecht zur x-Achse und zu r.

Es ist λ für Licht von mittlerer (grüner) Farbe in der Luft ungefähr die Hälfte eines Tausendtheiles eines Millimeters; wir können daher schon bei sehr mässigen Werthen von r λ als unendlich klein betrachten. Bilden wir also die Ausdrücke für v und w und behalten nach der Differentiation nur die Glieder höchster Ordnung bei, so wird:

$$\begin{aligned} v &= -\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\partial r}{\partial z}\frac{A}{r}\sin\vartheta \\ w &= \frac{2\pi}{\lambda}\frac{\partial r}{\partial y}\frac{A}{r}\sin\vartheta, \end{aligned} \tag{16}$$

wo zur Abkürzung:

$$\left(\frac{r}{\lambda} - \frac{t}{T} + \alpha\right)2\pi = \vartheta$$

gesetzt ist.

Die Intensität J wird hiernach:

$$J = \frac{1}{T}\int_0^T (u^2 + v^2 + w^2)\,dt = \frac{4\pi^2}{T\lambda^2}\left(\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)^2\right)\frac{A^2}{r^2}\int_0^T \sin^2\vartheta\,dt;$$

ist also (rx) der Winkel, den der Radius r mit der positiven x-Achse bildet, so ergiebt sich aus

$$\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)^2 = \sin^2(rx)$$

für die Intensität der Werth

$$J = \frac{\sin^2(rx)}{r^2} \cdot \text{const.}; \tag{17}$$

dieselbe ist also umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung des Punktes vom Anfangspunkt und proportional dem Quadrate des Sinus desjenigen Winkels, den r mit der Drehungsachse bildet; sie erreicht daher ihren grössten Werth, wenn jener Winkel ein rechter ist.

§ 7.

Einen Ausdruck für U, der sich auf einen leuchtenden Punkt allgemeinerer Art bezieht, erhalten wir, wenn wir den vorher für U angenommenen Ausdruck nach x, y oder z einmal, oder wiederholt differenziren, jedesmal die Constanten A und α ändern und die Summe der so gebildeten Ausdrücke dem U gleichsetzen; denn diese Summe genügt, wie jeder ihrer Terme, der Gleichung $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \Delta \varphi$. Sie lässt sich sehr einfach schreiben, wenn man λ als unendlich klein betrachtet und nur die Glieder höchster Ordnung beibehält; nämlich

$$\frac{D}{r} \cos\left(\frac{r}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) 2\pi + \frac{D'}{r} \sin\left(\frac{r}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) 2\pi, \tag{18}$$

wo D und D' aber variabel sind, nämlich von $\frac{\partial r}{\partial x}$, $\frac{\partial r}{\partial y}$, $\frac{\partial r}{\partial z}$, d. h. von der *Richtung* der Linie r abhängen. Man kann sich den allgemeineren Ausdruck von U aus dem vorher aufgestellten einfacheren auch dadurch abgeleitet vorstellen, dass man in diesem x, y, z durch $x - x_1$, $y - y_1$, $z - z_1$ ersetzt, ihn einmal oder wiederholt nach $x_1 y_1 z_1$ differenzirt, jedesmal die Constanten A und α ändert, und die Summe der so erhaltenen Ausdrücke bildet. Das Resultat ist dann dasselbe wie vorher, da die Differentialquotienten nach x, y, z abgesehen vom Vorzeichen den nach $x_1\, y_1\, z_1$ genommenen gleich sind. Bei dieser Ableitung erkennt man aber, dass der neue Ausdruck von U angesehen werden kann als eine Summe von Ausdrücken der alten Form, die sich auf verschiedene aber unendlich nahe Anfangspunkte von r beziehen. Aehnliche Ausdrücke mit anderen Werthen der Coefficienten D, D' können wir auch für V und W annehmen und dann nach

$$u = \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}, \quad v = \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}, \quad w = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}$$

u, v, w berechnen. Berücksichtigt man hierbei wiederum nur die Glieder höchster Ordnung, so erhält man auch für u, v, w Ausdrücke *derselben* Form, also

$$
\begin{aligned}
u &= \frac{A}{r}\cos\left(\frac{r}{\lambda}-\frac{t}{T}\right)2\pi+\frac{A'}{r}\sin\left(\frac{r}{\lambda}-\frac{t}{T}\right)2\pi\\
v &= \frac{B}{r}\cos\left(\frac{r}{\lambda}-\frac{t}{T}\right)2\pi+\frac{B'}{r}\sin\left(\frac{r}{\lambda}-\frac{t}{T}\right)2\pi \qquad (19)\\
w &= \frac{C}{r}\cos\left(\frac{r}{\lambda}-\frac{t}{T}\right)2\pi+\frac{C'}{r}\sin\left(\frac{r}{\lambda}-\frac{t}{T}\right)2\pi,
\end{aligned}
$$

wo A, A', B, B', C, C' von der *Richtung* der Linie r abhängen, in einer Weise, die ganz unbestimmt bleibt und bedingt ist durch die Bewegung des leuchtenden Punktes. Streng genommen werden sich diese Grössen A, A', B, B', C, C' mit der Zeit ändern, aber verhältnissmässig langsam, so dass sie für viele tausend Schwingungen als constant anzusehen sind. Für die Intensität J ergiebt sich, da

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2\vartheta\, d\vartheta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2\vartheta\, d\vartheta=\frac{1}{2},\qquad \int_0^{2\pi}\cos\vartheta\sin\vartheta\, d\vartheta=0$$

ist,

$$J=\frac{1}{2r^2}(A^2+A'^2+B^2+B'^2+C^2+C'^2). \qquad (20)$$

Es ist also J in jeder Richtung proportional mit $\frac{1}{r^2}$, d. h. umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung des beleuchteten vom leuchtenden Punkte. Diese Proportionalität hat die Erfahrung ergeben, und dadurch ist die Annahme, die wir über die Intensität gemacht haben, gerechtfertigt. Ferner wird durch diese Gleichung ausgesprochen, dass die Lichtintensität mit der Richtung der Linie r in einer Weise variirt, die durch die Bewegung im leuchtenden Punkte bedingt ist.

Denken wir uns nun *zwei* leuchtende Punkte von derselben Farbe an verschiedenen Orten; beziehen wir auf sie die beiden Indices 1 und 2, so dass wir haben:

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \frac{A_1}{r_1}\cos\left(\frac{r_1}{\lambda}-\frac{t}{T}\right)2\pi+\frac{A_1'}{r_1}\sin\left(\frac{r_1}{\lambda}-\frac{t}{T}\right)2\pi\\
u_2 &= \frac{A_2}{r_2}\cos\left(\frac{r_2}{\lambda}-\frac{t}{T}\right)2\pi+\frac{A_2'}{r_2}\sin\left(\frac{r_2}{\lambda}-\frac{t}{T}\right)2\pi,
\end{aligned}
$$

und die entsprechenden Gleichungen für $v_1 v_2$, $w_1 w_2$ bestehen. Dann sind nach § 5

$$u=u_1+u_2,\quad v=v_1+v_2,\quad w=w_1+w_2$$

die Componenten der aus jenen beiden resultirenden Lichtbewegung; ihre Intensität J ist also:

$$
\begin{aligned}
J &= \frac{1}{T}\int_0^T\left((u_1+u_2)^2+(v_1+v_2)^2+(w_1+w_2)^2\right)dt\\
&= J_1+J_2+\frac{2}{T}\int_0^T(u_1u_2+v_1v_2+w_1w_2)\,dt,
\end{aligned}
$$

wo J_1 und J_2 die Intensitäten bezeichnen, welche die leuchtenden Punkte einzeln an dem betrachteten Orte hervorbringen würden. Um das übrig gebliebene Integral zu berechnen, muss man die Formel

$$\cos\left(\frac{r_1}{\lambda}-\frac{t}{T}\right)2\pi\cos\left(\frac{r_2}{\lambda}-\frac{t}{T}\right)2\pi=\frac{1}{2}\cos\left(\frac{r_1+r_2}{\lambda}-\frac{2t}{T}\right)2\pi+\frac{1}{2}\cos\frac{r_1-r_2}{\lambda}2\pi$$

und die drei entsprechenden bekannten Formeln der Trigonometrie benutzen, welche man aus ihr erhält, wenn man auf der linken Seite für einen oder für beide Cosinus den entsprechenden Sinus setzt. Diese Formeln sind dann mit $\frac{dt}{T}$ zu multipliciren und von 0 bis T zu integriren; die ersten Glieder auf der rechten Seite verschwinden dann jedes Mal, die letzten aber nicht, und man erhält

$$J=J_1+J_2+G\cos\frac{r_1-r_2}{\lambda}2\pi+G'\sin\frac{r_1-r_2}{\lambda}2\pi,$$

wo G und G' von den Längen r_1, r_2 und den Richtungen dieser Linien, also überhaupt von x, y, z abhängen. Da aber λ in den Ausdrücken von G und G' nicht vorkommt, so ändern sich diese unendlich wenig, wenn der betrachtete Punkt auf irgend einer Linie unendlich wenig verschoben wird; schreibt man für den erhaltenen Ausdruck von J

$$J=J_1+J_2+E\cos\left(\frac{r_1-r_2}{\lambda}+\varepsilon\right)2\pi,$$

so gilt dasselbe von E, ε und auch von J_1 und J_2. Aber der Cosinus ändert sich bei einer Verschiebung von der Ordnung des unendlich kleinen λ um eine endliche Grösse, und die Intensität hat daher auf jeder Linie unendlich nahe Maxima und Minima, die wir nicht wahrnehmen können. Sind aber r_1 und r_2 unendlich gross, während der Abstand der beiden leuchtenden Punkte als endlich vorausgesetzt wird, so können die Aenderungen, die r_1-r_2 bei einer *endlichen* Verschiebung von (x, y, z) erfährt, von der Ordnung von λ werden; bei einer solchen Verschiebung ändert sich dann erst der Cosinus um eine endliche Grösse, während die entsprechenden Aenderungen von J_1, J_2, E und ε unendlich klein sind; die Maxima und Minima der Intensität rücken dann also in endliche Entfernungen. Dieselben sind bestimmt durch die Gleichung

$$\cos\left(\frac{r_1-r_2}{\lambda}+\varepsilon\right)2\pi=\pm 1;$$

man kommt daher von einem Maximum zu dem nächsten Minimum oder umgekehrt, wenn man

$$r_1-r_2 \text{ um } \frac{\lambda}{2}$$

zu- oder abnehmen lässt.

Es seien die Coordinaten der leuchtenden Punkte

$$\begin{matrix}-e, & 0, & 0\\ +e, & 0, & 0;\end{matrix}$$

dann ist

$$r_1 = \sqrt{(x+e)^2 + y^2 + z^2}$$
$$r_2 = \sqrt{(x-e)^2 + y^2 + z^2},$$

oder, wenn wir z als unendlich gross, x, y, e als endlich annehmen

$$r_1 = z\left(1 + \frac{1}{2}\frac{(x+e)^2 + y^2}{z^2} + \cdots\right)$$
$$r_2 = z\left(1 + \frac{1}{2}\frac{(x-e)^2 + y^2}{z^2} + \cdots\right),$$

es wird also

$$\frac{r_1 - r_2}{\lambda} = \frac{2ex}{z\lambda},$$

vorausgesetzt, dass z gross genug ist, um die fortgelassenen Glieder vernachlässigen zu können. Ist die durch den Werth von z bestimmte Ebene eine weisse Tafel, so erscheinen auf dieser der y-Achse parallele helle und dunkle *Fransen*. Der Abstand eines Maximums und des darauf folgenden Minimums der Helligkeit ist

$$\frac{z\lambda}{4e}.$$

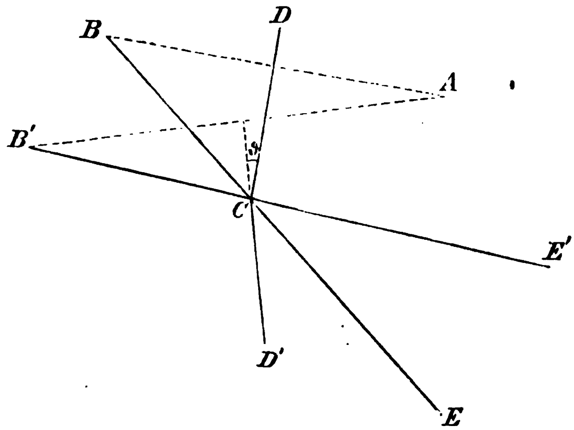
Diese Erscheinung lässt sich verwirklichen. Einen leuchtenden *Punkt* kann man freilich nicht erzeugen; statt desselben kann aber eine Lichtquelle von kleinen Dimensionen dienen, das Bildchen, welches eine Sammellinse von kleiner Brennweite von der Sonne oder einer andern fernen Lichtquelle entwirft, oder auch eine feine Oeffnung in einem Schirm, durch welche die Sonne oder eine andere Lichtquelle scheint. Mit zwei von einander *unabhängigen* leuchtenden Punkten kann der Versuch nicht gelingen; da sich nämlich die Schwingungen derselben in verschiedener Weise ändern, so variirt die Grösse ε und mit ihr der Ort der Maxima und Minima fortwährend. Es müssen daher die leuchtenden Punkte aus *einem* erzeugt werden; die Möglichkeit hierzu bietet die Reflexion und Brechung.

Denken wir uns zwei ebene Spiegel, CD und CD' (Fig. 2), die einen kleinen Winkel ϑ mit einander bilden, und vor ihnen einen leuchtenden Punkt A, so entstehen von diesem Spiegelbilder in zwei ganz bestimmten Punkten B und B', wie später weiter ausgeführt werden wird. In einem Raume, der ungefähr durch die beiden Ebenen BE und $B'E'$ begrenzt ist, die durch die Schnittlinie der beiden Spiegel und B bezw. B' gehen, ist dann Licht vorhanden, welches von beiden Spiegeln reflectirt ist, und dieses verhält sich gerade so, als wäre es von zwei leuchtenden Punkten in B und B' ausgegangen, während die Spiegel fehlten. Eine Tafel, die in dem genannten Raume an passender Stelle aufgestellt ist, zeigt jene Fransen. Es ist dieses der sogenannte *Fresnel'sche Spiegelversuch.**) Statt der Spiegel kann auch ein so-

*) Vgl. hierzu VI Vorlesung, § 9 Ende.

genanntes *Interferenzprisma* oder ein Paar *Billet'scher Halblinsen* benutzt werden, um die beiden leuchtenden Punkte B und B' aus einem einzigen zu erzeugen.

Fig. 2.



Sendet der leuchtende Punkt weisses Licht aus, so sind die Fransen farbig und in geringer Zahl vorhanden, nur da nämlich, wo $r_1 - r_2$ wenige Wellenlängen nicht übersteigt. Farben treten auf, weil für die verschiedenfarbigen Bestandtheile des weissen Lichtes λ verschiedene Werthe hat, für roth die grössesten, für violett die kleinsten, weil also die Lichtmaxima in diesem Falle verschiedene Lagen haben. Nur eine geringe Anzahl von Fransen sieht man, weil, wenn die Differenz $r_1 - r_2$ wenige Wellenlängen überschreitet, die Maxima und Minima benachbarter Farben einander decken. Man kann Licht herstellen, welches sehr nahe homogen ist; die Verschiedenheit der Farbe ist dann nicht vorhanden, und daher die Zahl der Fransen eine grössere; sie ist aber auch hier nicht unbegrenzt, da das Licht nicht ganz homogen ist.

Zweite Vorlesung.

Einwirkung fremder Körper auf die Lichtbewegung. — Der Greensche Satz. — Das Huyghens'sche Princip. — Specielle Fälle desselben. — Lichtbewegung an der Grenze fester Körper. — Der Körper wird als undurchsichtig vorausgesetzt. — Specieller Fall eines vollkommen schwarzen Körpers. — Beweis eines Hülfssatzes. — Schatten schwarzer Körper.

§ 1.

Die Rechnungen, die wir bis jetzt durchgeführt haben, bezogen sich auf den Fall, dass der unendliche Raum von einem homogenen Mittel erfüllt ist, in dem nur einzelne leuchtende Punkte sich befinden. Dieser Fall ist nur eine Abstraction; bei jeder optischen Erscheinung ist die Mitwirkung verschiedenartiger Körper unerlässlich. Schon bei den Vorgängen, die im Auge stattfinden, wenn wir einen leuchtenden Punkt sehen, ist es wesentlich, dass dabei das Licht verschiedenartige Körper durchläuft; entsteht doch erst durch die *Brechung*, die das Licht im Auge erfährt, das Netzhautbild des leuchtenden Punktes. Ferner werden die an sich dunklen Körper, wenn sie vom Licht getroffen werden, erst sichtbar in Folge einer Einwirkung, die sie auf dasselbe ausüben. Bei jedem optischen Versuche braucht man weisse und schwarze Schirme, Linsen, Spiegel und andere Vorrichtungen. Wir wenden uns daher nun zur Untersuchung der *Wirkung, welche verschiedenartige Körper auf das Licht ausüben.* Wir werden dabei die Bildung der Lichtstrahlen zu erklären und die Gesetze ihrer Reflexion und Brechung abzuleiten haben.

Wir denken uns einen Theil T eines homogenen durchsichtigen Mittels, der durch eine geschlossene Fläche s begrenzt ist; ausserhalb desselben mögen leuchtende Punkte und verschiedenartige Körper in beliebiger Anordnung vorhanden sein; wir betrachten die Lichtbewegung in seinem Innern und untersuchen, wie dieselbe durch jene fremdartigen Körper modificirt wird. Ein wesentliches Hülfsmittel bei dieser Untersuchung wird ein Satz darbieten, den die Anwendung des Greenschen Satzes auf solche Functionen φ ergiebt, welche der für die Lichtbewegung geltenden Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \Delta \varphi \tag{1}$$

genügen. Derselbe lässt sich kurz dahin aussprechen, dass die Bewegung des Aethers in jedem Punkte des von der Fläche s umschlossenen Raumes T angesehen werden kann als hervorgebracht durch eine Schicht von leuchtenden Punkten in der Fläche s. Zu diesem Satze führen die folgenden Ueberlegungen.

Ist W eine Function der rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes x, y, z, die einwerthig und stetig ist in einem vollständig begrenzten Raume T, ist $d\tau$ ein Element dieses Raumes, ds ein Element der Grenzfläche s, N die nach dem Innern von T gerichtete Normale von ds, so ist bekanntlich

$$\begin{aligned} \int d\tau \frac{\partial W}{\partial x} &= -\int ds W \cos(Nx) \\ \int d\tau \frac{\partial W}{\partial y} &= -\int ds W \cos(Ny) \\ \int d\tau \frac{\partial W}{\partial z} &= -\int ds W \cos(Nz), \end{aligned} \tag{2}$$

wo die Integration links über den ganzen Raum T, rechts über seine Grenzfläche s auszudehnen ist.

Sind nun U und V zwei Functionen von x, y, z, so bestehen die identischen Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + U\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(U\frac{\partial V}{\partial x}\right) \\ \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + U\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(U\frac{\partial V}{\partial y}\right) \\ \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z} + U\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(U\frac{\partial V}{\partial z}\right). \end{aligned} \tag{3}$$

Wir addiren diese Gleichungen, multipliciren mit $d\tau$ und integriren über den oben betrachteten Raumtheil T; sind dann $U, \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}$ innerhalb desselben einwerthig und stetig, so ergiebt sich bei Benutzung der Formeln (2)

$$\int d\tau \left\{\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}\right\} = -\int d\tau\, U \Delta V - \int ds\, U \frac{\partial V}{\partial N}, \tag{4}$$

eine Gleichung, die unter dem Namen des *Greenschen Satzes* bekannt ist. Sind auch $V, \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}$ innerhalb T einwerthig und stetig, so kann man in den Schlüssen, durch welche (4) abgeleitet worden ist, V mit U vertauschen und erhält dadurch

$$\int d\tau \left\{\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}\right\} = -\int d\tau\, V \Delta U - \int ds\, V \frac{\partial U}{\partial N},$$

und hieraus ergiebt sich in Verbindung mit (4)

$$\int ds \left(U\frac{\partial V}{\partial N} - V\frac{\partial U}{\partial N}\right) = \int d\tau (V \Delta U - U \Delta V). \tag{5}$$

Von dieser Form des Greenschen Satzes wollen wir jetzt Gebrauch machen, um gewisse Eigenschaften derjenigen Functionen φ herzuleiten, welche der Differentialgleichung (1) genügen.

Bei der Lichtbewegung treten eine ganze Reihe solcher Functionen auf, so z. B. die Verrückungscomponenten u, v, w eines Aethertheilchens, ihre Ableitungen nach der Zeit, die Componenten der Drehung ξ, η, ζ, sowie die Functionen, die wir oben U, V, W genannt und durch deren Differentialquotienten wir u, v, w ausgedrückt haben. Wir wollen nun in (5) $U = \varphi$ setzen und unter φ *irgend eine* jener Grössen verstehen; auch von der Function V wollen wir voraussetzen, dass sie der Differentialgleichung (1) genüge. Dann folgt aus (5)

$$\begin{aligned}\int ds\left(\varphi\frac{\partial V}{\partial N} - V\frac{\partial \varphi}{\partial N}\right) &= \frac{1}{a^2}\int d\tau\left(V\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \varphi\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}\right)\\ &= \frac{1}{a^2}\frac{\partial}{\partial t}\int d\tau\left(V\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varphi\frac{\partial V}{\partial t}\right),\end{aligned} \tag{6}$$

oder, wenn man durch t'' irgend einen positiven, durch $-t'$ irgend einen negativen Werth von t bezeichnet und die vorige Gleichung in Bezug auf t zwischen diesen Grenzen integrirt

$$\int_{-t'}^{t''} dt\int ds\left(\varphi\frac{\partial V}{\partial N} - V\frac{\partial \varphi}{\partial N}\right) = \frac{1}{a^2}\left[\int d\tau\left(V\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varphi\frac{\partial V}{\partial t}\right)\right]_{-t'}^{t''}. \tag{7}$$

Wir wollen nun über die Hülfsfunction V so verfügen, dass der im Anfange dieser Vorlesung erwähnte allgemeine Satz aus der Entwickelung von (7) sich ergiebt; zu dem Zwecke setzen wir

$$V = \frac{F(r_0 + at)}{r_0}, \tag{8}$$

wo

$$r_0 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

die Entfernung des betrachteten Punktes vom Coordinatenanfangspunkte bedeutet; dieser Anfangspunkt soll ein beliebiger Punkt in dem begrenzten Raume T sein. Nach § 6 der ersten Vorlesung genügt dann V der Differentialgleichung (1). Ueber die Function F setzen wir voraus, dass sie für alle endlichen positiven und negativen Werthe ihres Arguments verschwinde, für unendlich kleine Werthe desselben positiv sei und zwar so, dass

$$\int F(\zeta)\,d\zeta = 1 \tag{8a}$$

ist, wenn das Integral von einer endlichen negativen bis zu einer endlichen positiven Grenze genommen wird. Dass eine Function, die diesen Anforderungen genügt, wirklich existirt, erkennt man leicht; setzt man z. B:

$$F(\zeta) = \frac{\mu}{\sqrt{\pi}}\,e^{-\mu^2\zeta^2},$$

wo μ eine sehr grosse positive Constante bedeutet, so ist die Function $F(\zeta)$ für jeden endlichen Werth von ζ verschwindend klein, für $\zeta = 0$ wird sie unendlich wie μ selbst, und es ist bekanntlich

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(\zeta)\, d\zeta = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}\, dz = 1,$$

wenn $\mu\zeta = z$ gesetzt wird (vgl. VI. Vorlesung § 9). Endlich ist, was hier besonders hervorgehoben werden muss, $F(\zeta)$ nebst seinen Ableitungen für alle Werthe von ζ, die Null mit eingeschlossen, endlich und eine stetige Function ihres Argumentes.

Nach diesen Festsetzungen wenden wir die Gleichung (7) auf den Raum an, der von dem ursprünglich gedachten übrig bleibt nach Ausschluss einer unendlich kleinen, um den Anfangspunkt als Mittelpunkt beschriebenen Kugel; hier erfüllen φ und V die nöthigen Stetigkeitsbedingungen. Den Werth von t' wählen wir so gross, dass auch für den grössten Werth, den r_0 innerhalb T erhält,

$$r_0 - at'$$

einen endlichen negativen Werth annimmt. Auf der rechten Seite der Gleichung kommen dann nur Werthe von V und $\frac{\partial V}{\partial t}$ vor, für welche $r_0 + at$ endlich, positiv oder negativ ist, welche also verschwinden. Wir haben mithin

$$\int_{-t'}^{t''} dt \int ds \left(\varphi \frac{\partial V}{\partial N} - V \frac{\partial \varphi}{\partial N}\right) + \int_{-t'}^{t''} dt \int dS \left(\varphi \frac{\partial V}{\partial N} - V \frac{\partial \varphi}{\partial N}\right) = 0, \qquad (9)$$

wenn wir durch ds wie vorher ein Element der ursprünglich gedachten Oberfläche, durch dS ein Element der unendlich kleinen Kugelfläche bezeichnen. Das zweite von diesen beiden Integralen lässt sich leicht berechnen. Nennen wir nämlich R den Radius der unendlich kleinen Kugel, so lässt sich setzen

$$dS = R^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, dw,$$

wo die Grenzen von ϑ 0 und π, die von w 0 und 2π sind; wählt man ferner R so klein, dass der numerische Werth von $RF(\zeta)$ und von $RF'(\zeta)$ vernachlässigt werden kann (in dem angeführten Beispiele also etwa von der Ordnung von $\frac{1}{\mu^4}$), und vernachlässigt man endlich, was mit R^2 multiplicirt unendlich Kleines ergiebt, so erhält man

$$\frac{\partial V}{\partial N} = -\frac{1}{R^2} F(at), \quad V = 0,$$

also

$$\int dS \left(\varphi \frac{\partial V}{\partial N} - V \frac{\partial \varphi}{\partial N}\right) = -4\pi \varphi_0 F(at),$$

wo φ_0 sich auf den Punkt $r = 0$ bezieht. Da nun $F(at)$ nur für unendlich kleine Werthe von t nicht verschwindet, und da nach (8a)

$$\int_{-t'}^{t''} F(at)\,dt = \frac{1}{a}$$

ist, so wird das zweite Glied

$$-\frac{4\pi}{a}\varphi_0(0),$$

wo $\varphi_0(0)$ sich auf den Punkt $r = 0$ und die Zeit $t = 0$ bezieht. Wir haben also

$$\varphi_0(0) = \frac{a}{4\pi}\int_{-t'}^{t''} dt \int ds \left(\varphi \frac{\partial V}{\partial N} - V\frac{\partial \varphi}{\partial N}\right). \tag{10}$$

Auf der rechten Seite vertauschen wir nun die Reihenfolge der Integrationen; dies ist gestattet, weil die Functionen unter dem Integralzeichen endlich und stetig sind; die Integration nach t lässt sich dann ausführen, da V und $\frac{\partial V}{\partial N}$ von Null verschiedene Werthe nur haben, wenn $r_0 + at$ unendlich klein ist. Zunächst hat man

$$\int_{-t'}^{t''} dt\, V \frac{\partial \varphi}{\partial N} = \int_{-t'}^{t''} dt \frac{F(r_0 + at)}{r_0}\frac{\partial \varphi}{\partial N} = \frac{1}{r_0}\frac{\partial \varphi}{\partial N}\frac{1}{a},$$

wo in $\frac{\partial \varphi}{\partial N}$ nach Ausführung der Differentiation $t = -\frac{r_0}{a}$ zu setzen ist. Ferner ist

$$\frac{\partial V}{\partial N} = \frac{\partial}{\partial N}\left(\frac{F(r_0 + at)}{r_0}\right) = \frac{\partial \frac{1}{r_0}}{\partial N} F(r_0 + at) + \frac{1}{r_0}\frac{\partial r_0}{\partial N}\frac{1}{a}\frac{\partial F(r_0 + at)}{\partial t},$$

und daher

$$\int_{-t'}^{t''} dt\,\varphi \frac{\partial V}{\partial N} = \frac{1}{a}\frac{\partial \frac{1}{r_0}}{\partial N}\varphi\left(-\frac{r_0}{a}\right) + \frac{1}{a}\frac{1}{r_0}\frac{\partial r_0}{\partial N}\int_{-t'}^{t''} \varphi \frac{\partial F(r_0 + at)}{\partial t}\,dt.$$

Formt man das letzte Integral durch partielle Integration um und erwägt, dass F für jeden endlichen Werth des Arguments verschwindet, so findet man denselben Ausdruck

$$= \frac{1}{a}\frac{\partial \frac{1}{r_0}}{\partial N}\varphi\left(-\frac{r_0}{a}\right) - \frac{1}{a^2}\frac{1}{r_0}\frac{\partial r_0}{\partial N}\frac{\partial \varphi}{\partial t},$$

wo auch in $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ $t = -\frac{r_0}{a}$ zu setzen ist. Also folgt aus (10)

$$\varphi_0(0) = \frac{1}{4\pi}\int ds \left\{\frac{\partial \frac{1}{r_0}}{\partial N}\varphi\left(-\frac{r_0}{a}\right) - \frac{1}{a}\frac{1}{r_0}\frac{\partial r_0}{\partial N}\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{r_0}\frac{\partial \varphi}{\partial N}\right\}. \tag{11}$$

Hiernach kann man für $r_0 = 0$ und $t = 0$ φ berechnen, wenn für alle Werthe von t und alle Elemente ds der Oberfläche φ und $\frac{\partial \varphi}{\partial N}$ bekannt sind. Da aber der Anfangspunkt von r_0 und der von t beliebig ist, so kann unter der genannten Voraussetzung φ allgemein gefunden werden. Um dies deutlicher hervortreten zu lassen, wollen wir in der hierzu dienenden Formel (11) die Bezeichnung etwas ändern: In Bezug auf einen variabeln Punkt (x, y, z) und die Zeit t wollen wir die bisher mit $\varphi^{\bullet}$ bezeichnete Grösse $\varphi(t)$ nennen, in Bezug auf den Anfangspunkt, den wir als den Punkt 0 bezeichnen wollen, $\varphi_0(t)$. Der Abstand jenes variabeln Punktes von diesem festen werde wieder r_0 genannt. Endlich setze man für jedes Element ds

$$\frac{\partial \varphi(t)}{\partial N} = f(t).$$

Dann schreibt sich die gefundene Gleichung, wenn man den Anfangspunkt der Zeit verlegt, folgendermassen

$$\varphi_0(t) = \frac{1}{4\pi} \int_s ds \left\{ \frac{\partial \frac{1}{r_0}}{\partial N} \varphi\left(t - \frac{r_0}{a}\right) - \frac{1}{a} \frac{1}{r_0} \frac{\partial r_0}{\partial N} \frac{\partial \varphi\left(t - \frac{r_0}{a}\right)}{\partial t} - \frac{1}{r_0} f\left(t - \frac{r_0}{a}\right) \right\}.$$

Die beiden ersten Glieder des Factors von ds lassen sich in das eine

$$\frac{\partial}{\partial N} \frac{\varphi\left(t - \frac{r_0}{a}\right)}{r_0}$$

zusammenziehen, wo die Differentiation so auszuführen ist, dass nur r_0, wo es explicite auftritt, als variabel angesehen wird, dagegen den Grössen, von denen $\varphi(t)$ sonst noch abhängt, die Werthe gelassen werden, die ihnen in dem Elemente ds zukommen. Man hat hiernach

$$\varphi_0(t) = \frac{1}{4\pi} \int ds \left\{ \frac{\partial}{\partial N} \frac{\varphi\left(t - \frac{r_0}{a}\right)}{r_0} - \frac{f\left(t - \frac{r_0}{a}\right)}{r_0} \right\},$$

oder, wie wir kürzer schreiben wollen

$$\varphi_0(t) = \frac{1}{4\pi} \int ds\, \Omega,$$

worin (12)

$$\Omega = \frac{\partial}{\partial N} \frac{\varphi\left(t - \frac{r_0}{a}\right)}{r_0} - \frac{f\left(t - \frac{r_0}{a}\right)}{r_0}$$

gesetzt ist.

Hieraus ist zu schliessen, dass die Bewegung des Aethers in dem von der Fläche s umschlossenen Raume angesehen werden kann als hervorgebracht von einer Schicht von leuchtenden Punkten in der Fläche s, da ein jedes von den beiden Gliedern, aus denen Ω zusammengesetzt ist, sich bezeichnen lässt als einem leuchtenden Punkte entsprechend, der am Orte von ds sich befindet.

§ 2.

Die abgeleitete Gleichung (12) setzt zunächst voraus, dass der Punkt 0 *innerhalb*, die Erschütterungsmittelpunkte und heterogenen Körper *ausserhalb* der geschlossenen Fläche s liegen. Wir wollen jetzt zeigen, dass sie auch in dem umgekehrten Falle gilt, dass die Bewegung *innerhalb* der Fläche erzeugt wird und der Punkt 0 *ausserhalb* liegt, falls man noch eine gewisse Annahme macht, die ihr Analogon in dem andern Falle nicht hat.

Wir wenden die bewiesene Gleichung auf einen Raum an, der innen durch die Fläche s, aussen durch eine Kugelfläche S begrenzt ist, deren sämmtliche Punkte im Unendlichen liegen; wir erhalten dann eine Gleichung, die wir der Kürze wegen schreiben wollen

$$4\pi\varphi_0 = \int ds\,\Omega + \int dS\,\Omega,$$

und bei der die Normale N von s nach aussen gerichtet sein muss. Wir nehmen nun an, dass in und an der Kugelfläche S Ruhe herrscht bis zu einem endlichen Werthe der Zeit, dass also hier $\varphi(t)$ und $f(t)$ für jeden unendlich grossen negativen Werth des Argumentes verschwinden. Es würde das z. B. stattfinden, wenn bis zu einem endlichen Werthe der Zeit überall Ruhe herrschte und dann erst in dem von s umschlossenen Raume Bewegung erzeugt würde. Nehmen wir dann den Punkt 0 im Endlichen an und betrachten nur endliche Werthe der Zeit, so verschwindet Ω für jedes Element dS, weil hier $t - \frac{r_0}{a}$ unendlich gross ist, und wir haben wieder die Gleichung

$$4\pi\varphi_0 = \int ds\,\Omega. \tag{12a}$$

Denkt man sich also in einem homogenen Mittel beliebig viele leuchtende Punkte und verschiedenartige Körper gegeben, welche durch eine beliebig gestaltete Fläche s umschlossen sind, so kann man die Bewegung irgend eines Punktes ausserhalb s ansehen als hervorgebracht durch kugelförmige Wellen, welche von allen Punkten von s ausgehen. Die Beschränkung, dass der Punkt 0 im Endlichen liegen, und t endlich sein soll, ist nur eine scheinbare: es können t und die Entfernung des Punktes 0 von s beliebig gross sein; immer kann der Radius von S so gross angenommen werden, dass die durchgeführte Betrachtung gilt.

Auf diesen Fall bezogen bildet unsere Gleichung eine Präcisirung und Verallgemeinerung eines Satzes, der mit dem Namen des Huyghens'schen Principes belegt ist; wir wollen sie selbst das *Huyghens'sche Princip* nennen.

Für die Betrachtungen, die wir anzustellen haben werden, ist es von Wichtigkeit, den Werth zu kennen, welchen das Integral $\int ds\,\Omega$ erhält, wenn die geschlossene Fläche s, über die es erstreckt wird, den Punkt 0 *und* die leuchtenden Punkte entweder umschliesst oder *beide* ausschliesst. Wir werden beweisen, dass in dem einen wie in dem andern Falle das in Rede stehende Integral verschwindet.

Betrachten wir zunächst den ersten Fall. Man denke sich eine geschlossene Linie auf der Fläche s beschrieben und durch diese eine Fläche C so gelegt, dass von den beiden Theilen, in welche der von s umschlossene Raumtheil durch sie zerlegt wird, der eine nur den Punkt 0, der andere nur die leuchtenden Punkte enthält. Es seien A und B die beiden Flächenstücke, in welche s hierbei zerfällt. Mit A, B, C mögen die Werthe von $\int ds\,\Omega$ bezeichnet werden, die sich ergeben, wenn dieses Integral beziehlich über A, B, C ausgedehnt wird. Die Normale von C möge dabei nach der Seite gerichtet angenommen werden, auf welcher sich der Punkt 0 befindet. Nach (12) und (12a) erhält man alsdann

$$A + C = \frac{1}{4\pi}\varphi_0(t)$$

$$-B + C = \frac{1}{4\pi}\varphi_0(t),$$

also

$$A + B = 0,$$

d. h. $\int ds\,\Omega$ verschwindet, wenn es über die geschlossene Fläche s erstreckt wird.

In ähnlicher Weise erledigt sich der zweite Fall. Man denke sich hier durch eine auf s gezogene geschlossene Linie eine Fläche C so gelegt, dass nur der Punkt 0 in dem von C und s begrenzten Raumtheil liegt; unter Anwendung derselben Bezeichnungen wie im ersten Fall ist dann

$$C - A = \frac{1}{4\pi}\varphi_0(t)$$

$$C + B = \frac{1}{4\pi}\varphi_0(t),$$

also

$$A + B = 0.$$

Die Anwendung, die von der Gleichung (12 a) bei dem in § 1 dieser Vorlesung bezeichneten Problem zu machen ist, liegt auf der Hand. Man denke sich in dem homogenen Aether, der den unendlichen Raum erfüllt, einen leuchtenden Punkt 1; auf die Bewegung, die er hervorbringt, beziehe sich die Function φ^*. Wird ein fremdartiger Körper in den Raum gebracht, so wird die Bewegung geändert: es werde dadurch φ aus φ^*; es handelt sich dann darum, φ zu ermitteln für irgend einen Punkt 0, der ausserhalb des Körpers liegt. Es wird φ unendlich gross im Punkte 1; um also die Gleichung (12a) anwenden zu können, müssen wir einen den Punkt 1 enthaltenden Raumtheil ausschliessen. Es sei daher dS ein Element einer unendlich kleinen Kugelfläche, die um den leuchtenden Punkt beschrieben ist, ds ein Element der Oberfläche des Körpers; der Gleichung (12a) zufolge ist dann

$$4\pi\varphi_0 = \int dS\,\Omega + \int ds\,\Omega.$$

Das erste dieser beiden Integrale hat einen leicht angebbaren Werth.

Die Aenderung der Bewegung an dem Elemente dS, die durch die Einführung des Körpers hervorgerufen wird, ist bei Ausschluss ganz specieller Fälle, z. B. desjenigen, dass der fremdartige Körper ein Hohlspiegel ist, in dessen Mittelpunkt der leuchtende Punkt 1 sich befindet, nicht unendlich gross, und da die Kugelfläche, der dS angehört, unendlich klein ist, so ist ihr Einfluss auf den Werth des Integrals unendlich klein. Es kann in diesem also φ^* für φ gesetzt werden, wodurch dasselbe nach der Gleichung (12a) gleich $4\pi\varphi_0^*$ wird, wenn φ_0^* den Werth von φ^* im Punkte 0 bezeichnet. Man hat daher

$$4\pi\varphi_0 = 4\pi\varphi_0^* + \int ds\,\Omega. \tag{13}$$

Nach dieser Gleichung kann φ_0 für jeden Punkt des Raumes berechnet werden, wenn man φ^* und ausserdem φ und $\frac{\partial\varphi}{\partial N}$ für die Oberfläche des Körpers kennt.

§ 3.

Ueber die Werthe, welche φ und $\frac{\partial\varphi}{\partial N}$ an der Oberfläche eines fremdartigen Körpers annehmen, müssen wir uns also nun ein Urtheil zu verschaffen suchen; ist das geschehen, so ist durch die Formel (13) die im § 1 dieser Vorlesung gestellte Aufgabe gelöst. Wir gehen dabei von dem einfachsten Falle aus, dass ein durchsichtiges Mittel in einer *Ebene* an ein anderes grenzt und dass auf diese *ebene* Lichtwellen fallen. Erfahrungsmässig bilden sich dann reflectirte und gebrochene ebene Wellen, deren Richtungen durch die bekannten Gesetze der Reflexion und Brechung bestimmt sind. Wir werden uns in der achten Vorlesung ausführlich mit diesem Falle zu beschäftigen haben und werden sehen, dass sich die Existenz der reflectirten und gebrochenen Wellen erklärt, wenn man als Grenzbedingungen irgend welche lineare, homogene Relationen zwischen den Verrückungen der Aethertheilchen und ihren Differentialquotienten an der Grenze annimmt. Wir denken uns das Coordinatensystem so gewählt, dass $z = 0$ die Gleichung der Grenze, dass für das erste Mittel $z < 0$, für das zweite $z > 0$ ist. Es sei dann φ irgend eine der Functionen die wir bisher so bezeichnet haben, und es beziehe sich φ_e auf die einfallenden, φ_r auf die reflectirten Wellen. Es seien nun l, m, n die Cosinus einer Richtung, und

$$\varphi_e = A\cos\left(\frac{lx + my + nz}{\lambda} - \frac{t + \alpha}{T}\right)2\pi; \tag{14}$$

es bedeuten dann l, m, n die Cosinus der Winkel, welche die Wellennormale des einfallenden Lichtes mit den Coordinatenaxen macht. Dann ist

$$\varphi_r = cA\cos\left(\frac{lx + my - nz}{\lambda} - \frac{t + \alpha + \gamma}{T}\right)2\pi. \tag{15}$$

Dadurch ist in Uebereinstimmung mit den oben erwähnten Erfahrungssätzen ausgesprochen, dass die Reflexionsebene mit der Einfallsebene zusammenfällt, der Reflexionswinkel dem Einfallswinkel gleich ist, die Amplitude von φ in dem Verhältniss von $c:1$, die Phase um $\frac{\gamma}{T}\, 2\pi$ durch die Reflexion geändert ist. Danach ist, wenn man $\varphi(t)$ für φ schreibt, für die Grenze $z=0$

$$\varphi_r(t) = c\varphi_e(t+\gamma), \quad \frac{\partial \varphi_r(t)}{\partial z} = -c\,\frac{\partial \varphi_e(t+\gamma)}{\partial z}$$

oder

$$\varphi_r(t) = c\varphi_e(t+\gamma), \quad \frac{\partial \varphi_r(t)}{\partial N} = -c\,\frac{\partial \varphi_e(t+\gamma)}{\partial N},$$

wo N wie früher die nach dem Inneren des ersten Mittels gerichtete Normale bedeuten kann.

Sind im einfallenden Licht gleichzeitig Wellen von verschiedenen Richtungen vorhanden, so ist sowohl φ_e als φ_r eine Summe solcher Ausdrücke, wie sie eben diesen Zeichen gleichgesetzt sind, und für die einzelnen Glieder dieser Summen bestehen entsprechende Gleichungen.

In unserem Falle haben wir als zweites Mittel einen Körper, der durch eine *krumme* Oberfläche begrenzt ist; aber auch auf diesen werden wir die eben angeführten Sätze unmittelbar anwenden dürfen, wenn wir die Wellenlänge λ als unendlich klein voraussetzen. Innerhalb eines Raumes, dessen Dimensionen von der Ordnung von λ sind, wird dann nämlich die Oberfläche des Körpers als eben betrachtet werden dürfen, und die vorhandene Bewegung als aus ebenen Wellen bestehend. Entsprechend der Annahme, die wir für den Fall der ebenen Grenze gemacht haben, müssen wir dann aber auch hier voraussetzen, dass in dem zweiten Mittel, an dem betrachteten Orte, einfallende Wellen nicht vorhanden sind. Unsere Gleichung stellt φ_0 (d. h. den Werth von φ für einen beliebigen Punkt 0) als eine Summe von Gliedern dar, die herrühren von dem leuchtenden Punkte 1 und von leuchtenden Punkten in der Oberfläche des Körpers. Man nehme den Punkt 0 unendlich nahe an dieser Oberfläche an, so nahe, dass sein Abstand von ihr auch gegen λ unendlich klein ist. Die Lichtwellen, die ihn treffen, können dann theils als einfallende theils als reflectirte bezeichnet werden (gebrochene sind nach der gemachten Voraussetzung nicht vorhanden); sie sind einfallende, wenn sie nach der Grenze hinlaufen, reflectirte, wenn sie von der Grenze fortgehen. Man denke sich durch den Punkt 0 eine Ebene gelegt, die parallel dem unendlich nahen Element der Grenzfläche ist; diejenigen von jenen leuchtenden Punkten, die auf der *einen* Seite dieser Ebene liegen, bilden die einfallenden Wellen, die, welche auf der andern Seite liegen, die reflectirten. Es beziehe sich φ_e auf jene, φ_r auf diese und φ auf die ganze Bewegung; dann ist

$$\varphi = \varphi_e + \varphi_r, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial N} = \frac{\partial \varphi_e}{\partial N} + \frac{\partial \varphi_r}{\partial N}.$$

Zugleich gelten zwischen φ_e und φ_r die für eine ebene Grenze aufgestellten Gleichungen, wenn das einfallende Licht aus nicht mehr als *einem* Wellensysteme besteht, und es gelten die entsprechenden oben bezeichneten Gleichungen im anderen Falle. Das erste findet überall statt, wenn die Lichtquelle *ein* leuchtender Punkt am Orte 1 und wenn die Oberfläche des Körpers *überall convex* ist. Die ganze Oberfläche liegt dann auf *derselben* Seite einer solchen Ebene, die leuchtenden Punkte in ihr können dann immer nur etwas zu φ_r, aber nie etwas zu φ_e beitragen; φ_e ist ausschliesslich durch den leuchtenden Punkt 1 bestimmt, und zwar ist entweder $\varphi_e = \varphi^*$ oder $\varphi_e = 0$. Denkt man sich nämlich die Kegelfläche, die ihre Spitze in 1 hat und die Oberfläche des Körpers berührt, so theilt die Berührungslinie diese in zwei Theile, von denen der eine dem Punkte 1 zugewandt, der andere von diesem abgewandt ist; für ein Element ds des ersten Theils ist dann $\varphi_e = \varphi^*$, für ein Element des zweiten $\varphi_e = 0$. Für den ersten Theil ist daher

$$\varphi = \varphi_e + \varphi_r = \varphi^*(t) + c\varphi^*(t+\gamma)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial N} = \frac{\partial \varphi_e}{\partial N} + \frac{\partial \varphi_r}{\partial N} = \frac{\partial \varphi^*(t)}{\partial N} - c\,\frac{\partial \varphi^*(t+\gamma)}{\partial N},$$

für den zweiten Theil ist

$$\varphi = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial N} = 0.$$

Dabei ist der Körper als undurchsichtig vorausgesetzt, nur dann können wir das Nichtvorhandensein einfallender Lichtwellen in seinem Innern annehmen. Nach der Gleichung

$$4\pi\varphi_0 = 4\pi\varphi_0^* + \int ds\,\Omega$$

kann man nun φ für jeden Punkt des durchsichtigen Raumes berechnen. Wir wollen das thun, nachdem wir den betrachteten Fall noch weiter specialisirt haben. Es giebt undurchsichtige Körper, welche von auffallendem Lichte nichts Merkliches reflectiren, das sind die *schwarzen Körper;* ein solcher schwarzer Körper möge der dem leuchtenden Punkte 1 gegenübergestellte sein; dann ist $c = 0$, also ist für den dem Punkte 1 zugewendeten Theil der Oberfläche

$$\varphi = \varphi^*, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial N} = \frac{\partial \varphi^*}{\partial N},$$

während für den abgewendeten wie im allgemeinen Falle φ und $\frac{\partial \varphi}{\partial N}$ verschwinden.

Um nun φ_0 berechnen zu können, müssen wir uns erinnern, dass nach (12)

$$\Omega = \frac{\partial}{\partial N}\frac{1}{r_0}\,\varphi\left(t - \frac{r_0}{a}\right) - \frac{1}{r_0} f\left(t - \frac{r_0}{a}\right), \qquad f(t) = \frac{\partial \varphi}{\partial N}$$

ist, wo in dem ersten Gliede die Differentiation nach N so ausgeführt werden muss, dass allein r_0, wo es explicite auftritt, als variabel anzusehen ist.

Wir wollen zuerst annehmen

$$\varphi^* = \frac{1}{r_1} \cos\left(\frac{r_1}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) 2\pi; \tag{16}$$

für jedes Element ds des dem Punkte 1 zugewandten Theiles der Oberfläche ist dann

$$\frac{1}{r_0}\varphi\left(t - \frac{r_0}{a}\right) = \frac{1}{r_0 r_1} \cos\left(\frac{r_1 + r_0}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) 2\pi$$

$$\frac{\partial}{\partial N}\left(\frac{1}{r_0}\varphi\left(t - \frac{r_0}{a}\right)\right) = -\frac{1}{r_0^2 r_1}\frac{\partial r_0}{\partial N}\cos\left(\frac{r_1 + r_0}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)2\pi$$
$$-\frac{2\pi}{r_0 r_1 \lambda}\frac{\partial r_0}{\partial N}\sin\left(\frac{r_1 + r_0}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)2\pi$$

$$\frac{1}{r_0} f\left(t - \frac{r_0}{a}\right) = -\frac{1}{r_0 r_1^2}\frac{\partial r_1}{\partial N}\cos\left(\frac{r_1 + r_0}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)2\pi$$
$$-\frac{2\pi}{r_1 r_0 \lambda}\frac{\partial r_1}{\partial N}\sin\left(\frac{r_1 + r_0}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)2\pi,$$

also

$$\begin{aligned} \Omega = \frac{1}{r_1 r_0}\left(\frac{1}{r_1}\frac{\partial r_1}{\partial N} - \frac{1}{r_0}\frac{\partial r_0}{\partial N}\right)\cos\left(\frac{r_1 + r_0}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)2\pi \\ + \frac{2\pi}{r_1 r_0 \lambda}\left(\frac{\partial r_1}{\partial N} - \frac{\partial r_0}{\partial N}\right)\sin\left(\frac{r_1 + r_0}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)2\pi. \end{aligned} \tag{17}$$

Für alle Punkte des zweiten Theiles der Oberfläche ist $\Omega = 0$, und daher

$$4\pi\varphi_0 = 4\pi\varphi_0^* + \int \Omega\, ds, \tag{18}$$

wo die Integration nur über den ersten, d. h. den dem leuchtenden Punkte zugewendeten, Theil der Oberfläche auszudehnen und für Ω der eben abgeleitete Werth zu setzen ist.

§ 4.

Das Integral (18), welches wir jetzt auszuführen haben, erhält in Folge davon, dass λ unendlich klein ist, im Allgemeinen einen Werth, der sehr leicht anzugeben ist, wie wir nun zeigen wollen. Zu diesem Zwecke beweisen wir zunächst den folgenden Hülfssatz:

Bezeichnet $F(\zeta)$ eine Function von ζ, die stetig ist innerhalb desjenigen Intervalles, in welchem ζ von ζ_0 bis ζ' wächst, und δ eine Constante, so verschwindet das Integral

$$R = \int_{\zeta_0}^{\zeta'} \frac{dF}{d\zeta}\sin(k\zeta + \delta)\, d\zeta,$$

wenn k unendlich gross wird.

Zum Beweise gebrauchen wir ähnliche Betrachtungen, wie sie Dirichlet bei seinen Untersuchungen über die Fourier'sche Reihe benutzt hat. Wir bezeichnen die Werthe von ζ zwischen ζ_0 und ζ', für welche

$$\sin(k\zeta + \delta) = 0$$

ist, der Reihe nach durch

$$\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_m,$$

so dass allgemein

$$\zeta_1 - \zeta_0 \leq \frac{\pi}{k}, \qquad \zeta_{i+1} - \zeta_i = \frac{\pi}{k} \qquad (i = 1.2\ldots m-1)$$

ist; dann lässt sich unser Integral als die Summe von $(m+1)$ ähnlichen darstellen, deren Grenzen je zwei aufeinander folgende Glieder der Reihe

$$\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_m, \zeta'$$

sind, und deren absolute Werthe mit

$$a_0, a_1, \ldots, a_m$$

bezeichnet werden mögen. Wir wollen nun zunächst voraussetzen, dass $\frac{dF}{d\zeta}$ zwischen ζ_0 und ζ' nie negativ ist; dann ist

$$\pm R = a_0 - a_1 + a_2 - \cdots + a_m, \quad \text{wenn } m \text{ gerade,}$$
$$= a_0 - a_1 + a_2 - \cdots - a_m, \quad \text{wenn } m \text{ ungerade ist,}$$

wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem $\sin(k\zeta_0 + \delta)$ positiv oder negativ ist. Setzen wir ferner voraus, dass $\frac{dF}{d\zeta}$ bei wachsendem ζ stets abnimmt oder constant bleibt, so ist

$$a_1 \geq a_2 \geqq \cdots \geq a_m.$$

Schreibt man also das zu untersuchende Integral in der Form

$$\pm R = a_0 - (a_1 - a_2) - \cdots - (a_{m-1} - a_m), \quad \text{wenn } m \text{ gerade,}$$
$$= a_0 - (a_1 - a_2) - \cdots - a_m, \quad \text{wenn } m \text{ ungerade ist,}$$

so ergiebt sich

$$\pm R \leqq a_0;$$

schreibt man es dagegen

$$\pm R = a_0 - a_1 + (a_2 - a_3) + \cdots + a_m, \quad \text{wenn } m \text{ gerade,}$$
$$= a_0 - a_1 + (a_2 - a_3) + \cdots + (a_{m-1} - a_m), \quad \text{wenn } m \text{ ungerade,}$$

so erhält man

$$\pm R \geq -a_1.$$

Es sind aber a_0 und a_1 die absoluten Werthe des Integrals R, genommen zwischen den Grenzen

$$\zeta_0 \text{ und } \zeta_1 \qquad \text{und} \qquad \zeta_1 \text{ und } \zeta_2,$$

und diese sind wiederum kleiner als die Werthe von

$$\int \frac{dF}{d\zeta}\, d\zeta,$$

zwischen denselben Grenzen genommen, d. h. von

$$F(\zeta_1) - F(\zeta_0) \quad \text{und} \quad F(\zeta_2) - F(\zeta_1).$$

Beide Differenzen nähern sich mit wachsendem k der Null, weil dann $\zeta_1 - \zeta_0$ sowie $\zeta_2 - \zeta_1$ unendlich klein werden, und $F(\zeta)$ stetig ist; also verschwindet R, wenn k unendlich gross wird.

Machen wir jetzt statt der Annahme, dass $\frac{dF}{d\zeta}$ zwischen ζ_0 und ζ' nie negativ ist, die, dass es nie positiv ist, oder statt der Annahme, dass $\frac{dF}{d\zeta}$ mit wachsendem ζ immer abnimmt, die, dass es immer zunimmt, so lehren ganz ähnliche Betrachtungen, dass R für $k = \infty$ verschwindet. Geht endlich $\frac{dF}{d\zeta}$ eine endliche Zahl von Malen vom Abnehmen ins Zunehmen über und umgekehrt, und wechselt es eine endliche Zahl von Malen sein Vorzeichen, so kann man R als Summe einer endlichen Zahl von Integralen darstellen, deren jedes hiernach für $k = \infty$ verschwindet. Es verschwindet also auch dann R, wenn k ins Unendliche wächst.

Aus dem eben bewiesenen Satze folgt leicht auch der folgende:

Ist $\frac{dF}{d\zeta}$ in dem Intervall von $\zeta = \zeta_0$ bis $\zeta = \zeta'$ stetig, so ist für $k = \infty$

$$R_1 = k\int_{\zeta_0}^{\zeta'} \frac{dF}{d\zeta} \sin(k\zeta + \delta)\, d\zeta = -\left[\frac{dF}{d\zeta} \cos(k\zeta + \delta)\right]_{\zeta_0}^{\zeta'}. \quad (19)$$

In der That wird die linke Seite dieser Gleichung durch partielle Integration

$$= -\left[\frac{dF}{d\zeta} \cos(k\zeta + \delta)\right]_{\zeta_0}^{\zeta'} + \int_{\zeta_0}^{\zeta'} \frac{d^2F}{d\zeta^2} \cos(k\zeta + \delta)\, d\zeta,$$

und das neue, hier auftretende Integral verschwindet für $k = \infty$ nach dem vorigen Satze.

Auf die beiden Formen R und R_1 lassen sich nun die Integrale bringen, in die $\int \Omega\, ds$ in (18) sich zerlegt, wenn

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \zeta = r_1 + r_0$$

gesetzt wird, wie jetzt nachgewiesen werden soll.

Es sei ds ein Element einer stetig gekrümmten, vollständig begrenzten Fläche s, r_1 und r_0 die Entfernungen des Elementes von zwei festen Punkten 1 und 0, $\zeta = r_1 + r_0$ und G eine sich stetig ändernde Function des Ortes von ds; es soll der Werth untersucht werden, den das Integral

$$\int G \sin(k\zeta + \delta)\, ds$$

annimmt, wenn k unendlich gross ist.

Zu diesem Zwecke stelle man sich die Flächen ζ = const. vor, d. h. die Rotationsellipsoide, deren Brennpunkte 1 und 0 sind, und ihre Schnittlinien mit der Fläche s. Man zeichne eine beliebige von diesen, in der $\zeta = Z$ sein möge, vor den übrigen aus, und definire $F(\zeta)$ durch die Gleichung

$$F(\zeta) = \pm \int G\,ds, \tag{20}$$

wo die Integration über den Theil der Fläche s zwischen den Linien $\zeta = Z$ und $\zeta = \zeta$ zu erstrecken und das positive oder negative Vorzeichen zu wählen ist, je nachdem $\zeta > Z$ oder $\zeta < Z$ ist, so dass, wenn z. B. G positiv ist, F mit ζ wächst, mag ζ grösser oder kleiner als Z sein. Bei dieser Festsetzung ist, wenn $d\zeta$ positiv gewählt wird,

$$\frac{dF}{d\zeta}\,d\zeta = \int G\,ds, \tag{20a}$$

wo die Integration über den Theil der Fläche s zwischen den beiden Schnittlinien auszudehnen ist, die den Werthen von ζ und $\zeta + d\zeta$ entsprechen. Ist ζ_0 der kleinste, ζ' der grösste Werth von ζ in der Fläche s, so ist also

$$\int G \sin(k\zeta + \delta)\,ds = \int_{\zeta_0}^{\zeta'} \frac{dF}{d\zeta} \sin(k\zeta + \delta)\,d\zeta,$$

d. h. gleich dem Integrale R; es verschwindet daher nach dem vorausgeschickten Satze, falls $F(\zeta)$ in der Fläche s stetig ist, sich also unendlich wenig ändert, wenn ζ unendlich wenig wächst. Da G als stetig, also auch als endlich vorausgesetzt ist, so ist diese Bedingung nach der Definition von F gleichbedeutend mit der, dass für keinen endlichen Theil der Fläche s ζ constant ist. Diesem Integrale gleich wird der erste Theil von $\int ds\,\Omega$ in (18), wenn man

$$G = \frac{1}{r_1 r_0}\left(\frac{1}{r_1}\frac{\partial r_1}{\partial N} - \frac{1}{r_0}\frac{\partial r_0}{\partial N}\right), \quad \delta = -\frac{t}{T}\,2\pi + \frac{\pi}{2}$$

setzt; es ist also bewiesen, dass dieser verschwindet, falls für keinen endlichen Theil von s $r_1 + r_0$ constant ist.

Der zweite Theil von $\int ds\,\Omega$ nimmt die Form an

$$k\int G \sin(k\zeta + \delta)\,ds,$$

wenn man

$$G = \frac{1}{r_1 r_0}\left(\frac{\partial r_1}{\partial N} - \frac{\partial r_0}{\partial N}\right), \quad \delta = -\frac{t}{T}\,2\pi \tag{21}$$

setzt; durch Einführung von $F(\zeta)$ und mit Berücksichtigung des zweiten Hülfssatzes dieses Paragraphen verwandelt sich dasselbe in

$$k\int_{\zeta_0}^{\zeta'} \frac{dF}{d\zeta} \sin(k\zeta + \delta)\,d\zeta = -\left[\frac{dF}{d\zeta}\cos(k\zeta + \delta)\right]_{\zeta_0}^{\zeta'}, \tag{21a}$$

falls $\frac{dF}{d\zeta}$ in der Fläche s sich stetig mit ζ ändert. Unstetig kann $\frac{dF}{d\zeta}$ nach (20a) nur werden:

1) wenn für einen endlichen Theil der Grenze von s $\zeta = \text{const.}$ ist,
2) wenn für einen Punkt von s $d\zeta = 0$ ist, d. h. wenn ζ keine Aenderung erleidet, falls der bezügliche Punkt irgend wie unendlich wenig auf der Fläche s verschoben wird.

Es mag gleich hier erwähnt werden, dass der zweite Fall eintritt, wenn die Fläche s von einem der Rotationsellipsoide $\zeta = \text{const.}$ berührt oder wenn sie von der geraden Verbindungslinie von 1 und 0 geschnitten wird (vgl. III. Vorlesung § 2). Schliessen wir alle diese Fälle vorläufig aus, so hat die Gleichung (21a) Gültigkeit, und aus dieser folgt weiter, dass der Ausdruck (21) verschwindet. Unter den gemachten Voraussetzungen liegen nämlich die Punkte, für die $\zeta = \zeta_0$ und $\zeta = \zeta'$ ist, nothwendig in der Grenze von s, und für jeden von ihnen ist $\int ds$ und daher auch $\int G\,ds$ von höherer Ordnung unendlich klein als $d\zeta$, woraus folgt, dass für beide Punkte $\frac{dF}{d\zeta} = 0$ ist, und mithin auch der zweite Theil von $\int ds\,\Omega$ verschwindet.

Somit haben wir gezeigt, dass $\int ds\,\Omega$, ausgedehnt über die Fläche s, für $k = \infty$ verschwindet, falls

1) für keinen endlichen Theil der Fläche oder ihrer Grenze $r_1 + r_0$ constant ist,
2) die Fläche von keinem der Ellipsoide $r_1 + r_0 = \text{const.}$ berührt, und endlich
3) diese nicht von der geraden Verbindungslinie der Punkte 1 und 0 geschnitten wird.

Einige der hier genannten Einschränkungen des Satzes, dass $\int ds\,\Omega$ verschwindet, lassen sich aber noch als unnöthig erweisen. Wir haben gesehen, dass dieses Integral für irgend eine *geschlossene* Fläche, die keinen der Punkte 1 und 0 umschliesst, verschwindet, wenn die Normale N überall nach Innen oder überall nach Aussen gekehrt ist. Denken wir uns nun zwei Flächen, die durch dieselbe geschlossene Linie begrenzt sind, und zwischen denen weder 1 noch 0 liegt, und nehmen wir N für die eine nach dem Inneren, für die andere nach dem Aeusseren des von beiden begrenzten Raumes gerichtet an, so folgt hieraus, dass $\int ds\,\Omega$ für die eine Fläche so gross, wie für die andere ist. Hat also unsere Fläche s die Eigenschaft, dass für einen endlichen Theil derselben $r_1 + r_0 = \text{const.}$ ist, so lässt sie sich ohne

Aenderung des Werthes von $\int ds\,\Omega$ ersetzen durch eine andere gleichbegrenzte, die diese Eigenschaft nicht hat. Wird die Fläche s durch eines der Ellipsoide $r_1 + r_0 = \text{const.}$ berührt, so lässt sie sich ebenso durch eine, bei der eine solche Berührung nicht vorkommt, ersetzen.

Daraus folgt dann, dass unser über s ausgedehntes Integral verschwindet, falls

1) für keinen endlichen Theil der Grenze $r_1 + r_0$ constant ist, und

2) die Fläche s nicht von der geraden Verbindungslinie von 1 und 0 geschnitten wird.

Den ersten dieser Ausnahmefälle wollen wir einstweilen ausschliessen; welchen Werth unser Integral in dem zweiten hat, lässt sich dann leicht angeben.

Für eine geschlossene Fläche, die den Punkt 1 umschliesst, den Punkt 0 aber ausschliesst, ist, wie wir im § 2 gesehen haben,

$$\int ds\,\Omega = 4\pi\varphi^*,$$

wenn an ihrer Oberfläche $\varphi = \varphi^*$, $\frac{\partial\varphi}{\partial N} = \frac{\partial\varphi^*}{\partial N}$ und wenn die Normale N nach Aussen gekehrt ist. Es werde nun die Fläche s einmal von der von 1 nach 0 gezogenen Geraden geschnitten, und mit dieser Linie bilde die Normale N im Schnittpunkt einen spitzen Winkel. Man ergänze s zu einer geschlossenen Fläche der eben bezeichneten Art so, dass die Ergänzung von der Geraden 1, 0 nicht geschnitten wird; das über die Ergänzung genommene Integral ist dann Null wie soeben bewiesen wurde; also ist das über s genommene Integral nach dem eben erwähnten Satze $= 4\pi\varphi^*$. Hat die Normale N die entgegengesetzte Richtung, bildet sie also einen stumpfen Winkel mit 1, 0, wie in dem sogleich zu betrachtenden Falle, so ist der Werth des Integrals der entgegengesetzte. In dem Grenzfalle, dass jene Gerade durch die Grenze von s hindurch oder unendlich nahe an ihr vorbeigeht, bleibt der Werth des Integrals einstweilen unbestimmt. Auch diesen Fall wollen wir für jetzt ausschliessen.

Dass $\int ds\,\Omega = \pm 4\pi\varphi^*$ oder $= 0$ in den drei unterschiedenen Fällen ist, haben wir unter der Annahme bewiesen, dass

$$\varphi^* = \frac{1}{r_1}\cos\left(\frac{r_1}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)2\pi$$

ist. Bei der Art, wie Ω aus φ^* zu berechnen ist, gilt dasselbe aber auch, wenn dieser Ausdruck mit einer Constanten multiplicirt, zu t in ihm eine Constante hinzugefügt, wenn er ferner beliebig oft nach x_1, y_1, z_1 differenzirt und die Summe so gebildeter Ausdrücke dem

φ^* gleichgesetzt wird, d. h. jene Gleichungen gelten auch, wenn φ^* den allgemeinen Ausdruck hat, den wir schrieben

$$\frac{D}{r_1}\cos\left(\frac{r_1}{\lambda}-\frac{t}{T}\right)2\pi+\frac{D'}{r_1}\sin\left(\frac{r_1}{\lambda}-\frac{t}{T}\right)2\pi,$$

d. h. den allgemeinsten Ausdruck einer Verrückungsfunction, die sich auf einen leuchtenden Punkt am Orte 1 bezieht.

§ 5.

Kehren wir nun zu der Vorstellung zurück, dass ein schwarzer, durch eine convexe Oberfläche begrenzter Körper dem Lichte des leuchtenden Punktes 1 in den Weg gestellt ist. Wir haben gefunden, dass dann

$$\varphi_0=\varphi_0^*+\frac{1}{4\pi}\int ds\,\Omega$$

ist, wo $\int ds\,\Omega$ das eben berechnete Integral, ausgedehnt über den dem Punkte 1 zugewandten Theil der Oberfläche des Körpers ist. Wird dieser Theil nicht geschnitten von der von 1 nach 0 gezogenen Linie, so fanden wir

$$\int ds\,\Omega=0,$$

also ist

$$\varphi_0=\varphi_0^*,$$

wird er geschnitten, so war

$$\int ds\,\Omega=-4\pi\varphi_0^*,$$

da hier die nach Aussen gerichtete Normale N in jenem Schnittpunkte mit der Geraden 1, 0 einen stumpfen Winkel bildet, also ist

$$\varphi_0=\varphi_0^*-\varphi_0^*=0.$$

Da man unter φ irgend eine der Verrückungen u, v, w verstehen kann, so ist hierdurch ausgesprochen, dass in dem ersten der beiden unterschiedenen Fälle die Lichtbewegung im Punkte 0 dieselbe ist, wie wenn der schwarze Körper fehlte, im zweiten am Orte von 0 Dunkelheit stattfindet. So hat uns die Rechnung auf die bekannte Thatsache geführt, dass der schwarze Körper einen *Schatten* wirft, in dem das Licht überall vernichtet ist, und dass ausserhalb des Schattens das Licht der Quelle nicht verändert ist. Bildet der schwarze Körper einen kleinen Schirm, welcher den leuchtenden Punkt rings umgiebt und nur eine unendlich kleine Oeffnung frei lässt, deren Dimensionen aber unendlich gross gegen die Wellenlänge sind, so wird ausserhalb des Schirmes in allen Punkten der von dem leuchtenden Punkte ausgehenden und durch die kleine Oeffnung hindurch gelegten Geraden, und nur in diesen Licht vorhanden sein, und dieses wird in allen Punkten verschwinden, sobald ein schwarzer Schirm dicht vor die Oeffnung geschoben wird.

Eine geometrische Gerade, deren Punkte in dieser Beziehung zu einander stehen, wollen wir einen *Strahl* nennen; wir können dann das in dieser Vorlesung abgeleitete Resultat auch so ausdrücken, dass das Licht in geradlinigen Strahlen besteht, die unabhängig von einander sind. Handelt es sich, wie hier, um Licht, welches direct von einem leuchtenden Punkte ausgegangen ist, so sind die Strahlen die von demselben ausgehenden und durch ihn begrenzten Linien.

Es werde daran erinnert, dass wir bei unserer Rechnung vorausgesetzt haben, dass *nicht* für einen endlichen Theil des Randes von s $r_1 + r_0$ constant ist, und dass die Gerade 1, 0 *nicht* unendlich nahe bei diesem Rande vorbeigeht. Ist eine dieser Voraussetzungen nicht erfüllt, so treten in der That auch Erscheinungen auf, welche jenem Satze nicht gemäss sind, die sogenannten *Beugungserscheinungen*, mit denen wir uns später zu beschäftigen haben werden, und deren Theorie schon in den Formeln, die wir aufgestellt haben, enthalten ist.

Ist die Oberfläche des schwarzen Körpers nicht überall convex, sondern irgendwie gestaltet, so genügt man den für seine Oberfläche zu erfüllenden Bedingungen

$$\varphi_r = 0, \quad \frac{\partial \varphi_r}{\partial N} = 0, \tag{22}$$

indem man für alle Punkte, in denen die Oberfläche zum *ersten Male* von den von 1 aus gezogenen Geraden geschnitten wird

$$\varphi = \varphi^* \quad \frac{\partial \varphi}{\partial N} = \frac{\partial \varphi^*}{\partial N},$$

für alle anderen Punkte der Oberfläche aber

$$\varphi = 0 \quad \frac{\partial \varphi}{\partial N} = 0$$

setzt. Unter dieser Annahme folgt nämlich aus dem am Ende des vorigen Paragraphen bewiesenen Satze, dass das Integral $\int ds\,\Omega$, ausgedehnt über die ganze Oberfläche, verschwindet, wenn der Punkt 0 unendlich nahe an dem ersten Theile, und dass es $-4\pi\varphi_0{}^*$ ist, wenn der Punkt 0 unendlich nahe an dem zweiten Theile der Oberfläche gewählt wird, woraus sich dann mit Hülfe von (13) die Gleichungen (21) für die ganze Oberfläche ergeben.

Aus der eben erwähnten Gleichung folgt aber weiter, dass, wo auch der Punkt 0 in dem durchsichtigen Mittel sich befinde, $\varphi_0 = \varphi_0{}^*$ ist, falls die gerade Verbindungslinie von 1 und 0 die Oberfläche des Körpers nicht trifft, und $\varphi_0 = 0$, falls diese Linie die Oberfläche zweimal oder öfter schneidet, und damit sind die vorher gefundenen Sätze über die Einwirkung eines schwarzen Körpers auf das Licht eines leuchtenden Punktes auch in diesem allgemeinen Falle bewiesen.

Dritte Vorlesung.

Einwirkung eines nicht schwarzen Körpers auf das Licht eines leuchtenden Punktes. — Bildung der reflectirten Lichtstrahlen. — Brennpunkte derselben. — Untersuchung eines unendlich dünnen reflectirten Strahlenbündels. — Beziehung desselben zu seiner Wellenfläche. — Reelles und virtuelles Bild eines leuchtenden Punktes.

§ 1.

Wir untersuchen nun die Wirkung eines *nicht schwarzen* Körpers auf das Licht eines leuchtenden Punktes. Wir haben diesen Fall unter der Voraussetzung, dass der Körper *undurchsichtig* ist, in § 3 der zweiten Vorlesung in Betracht gezogen und als die Bedingungen, die an der Oberfläche s desselben zu erfüllen sind, die Gleichungen

$$\varphi = \varphi^*(t) + c\varphi^*(t+\gamma)$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial N} = \frac{\partial \varphi^*(t)}{\partial N} - c\,\frac{\partial \varphi^*(t+\gamma)}{\partial N} \tag{1}$$

für den Theil von s aufgestellt, der dem leuchtenden Punkte zugewandt ist, während die Gleichungen

$$\varphi = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial N} = 0 \tag{1a}$$

für den abgewandten Theil der Oberfläche gelten. Als undurchsichtig hatten wir den Körper vorausgesetzt, um die Annahme zu rechtfertigen, dass in dem Körper keine einfallenden Wellen vorhanden sind. Die Voraussetzung, dass der Körper undurchsichtig ist, wollen wir jetzt fallen lassen und die letzte Annahme nunmehr dadurch rechtfertigen, dass wir uns den Körper in eine schwarze Hülle eingeschlossen denken, die nur einen kleinen Theil der dem leuchtenden Punkte zugewandten Oberfläche desselben frei lässt, einen Theil, den wir jetzt die Fläche s nennen wollen. An der inneren Seite der Hülle bilden sich dann nirgends reflectirte Wellen, in Folge dessen kann die Fläche s von der Seite des Körpers her von keinen einfallenden Wellen getroffen werden, und es gelten für s auch dann die Gleichungen

$$\varphi = \varphi^*(t) + c\varphi^*(t+\gamma), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial N} = \frac{\partial \varphi^*(t)}{\partial N} - c\frac{\partial \varphi^*(t+\gamma)}{\partial N}. \quad (2)$$

Für die äussere Seite der schwarzen Hülle ist, soweit sie dem leuchtenden Punkte zugekehrt ist,

$$\varphi = \varphi^*, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial N} = \frac{\partial \varphi^*}{\partial N}, \quad (2\text{a})$$

und für den abgewandten Theil

$$\varphi = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial N} = 0. \quad (2\text{b})$$

Wäre auch die Fläche s geschwärzt, so hätte φ_0 einen Werth, den wir nach dem Früheren leicht angeben können, und den wir durch $\varphi_0{}^0$ bezeichnen wollen. Wir wollen darauf ausgehen, die Differenz $\varphi_0 - \varphi_0{}^0$ zu berechnen, die gerade die durch die Reflexion an der Fläche s bewirkte Veränderung von φ_0 darstellen muss. Da allgemein die Gleichung besteht

$$4\pi\varphi_0 = 4\pi\varphi_0{}^* + \int ds\,\Omega,$$

so wird

$$4\pi(\varphi_0 - \varphi_0{}^0) = \int^{(s)} ds(\Omega - \Omega^0), \quad (3)$$

wo die Integration jetzt nur über die Fläche s auszudehnen ist, und wo sich Ω^0 auf den Fall bezieht, dass auch diese geschwärzt ist.

Wir müssen uns nun daran erinnern, dass in (12) der vorigen Vorlesung

$$\Omega = \frac{\partial}{\partial N}\frac{1}{r_0}\varphi\left(t - \frac{r_0}{a}\right) - \frac{1}{r_0}f\left(t - \frac{r_0}{a}\right), \quad f(t) = \frac{\partial \varphi}{\partial N}$$

gesetzt war; nach (2) und (2a) erhalten wir also $\Omega - \Omega^0$, wenn wir diesen Ausdruck von Ω für

$$\varphi(t) = c\varphi^*(t+\gamma)$$
$$f(t) = -c\frac{\partial \varphi^*(t+\gamma)}{\partial N}$$

bilden. Ist wieder

$$\varphi^* = \frac{1}{r_1}\cos\left(\frac{r_1}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)2\pi, \quad (4)$$

so wird hiernach

$$4\pi(\varphi_0 - \varphi_0{}^0) = -\int^{(s)} ds\frac{c}{r_1 r_0}\left(\frac{1}{r_1}\frac{\partial r_1}{\partial N} + \frac{1}{r_0}\frac{\partial r_0}{\partial N}\right)\cos\left(\frac{r_1 + r_0}{\lambda} - \frac{t+\gamma}{T}\right)2\pi$$
$$-\int^{(s)} ds\frac{2\pi c}{\lambda r_1 r_0}\left(\frac{\partial r_1}{\partial N} + \frac{\partial r_0}{\partial N}\right)\sin\left(\frac{r_1 + r_0}{\lambda} - \frac{t+\gamma}{T}\right)2\pi. \quad (5)$$

Diese beiden Integrale sind von derselben Form wie diejenigen in (17) der zweiten Vorlesung, auf die wir bei der Betrachtung eines schwarzen Körpers kamen; ein wesentlicher Unterschied ist der, dass, während dort die mit $\frac{\partial r_1}{\partial N}$ und $\frac{\partial r_0}{\partial N}$ behafteten Glieder in jedem der Integrale mit entgegengesetzten Vorzeichen auftraten, sie hier durch Addition verbunden sind. Die a. a. O. durchgeführten Betrachtungen zeigen, dass hier wie dort das erste Integral verschwindet, also fortgelassen werden kann, wenn für keinen endlichen Theil der Fläche s $r_1 + r_0$ constant ist; ist diese Voraussetzung nicht erfüllt, so ist dasselbe allerdings von Null verschieden, auch dann kann es aber, wenn der Punkt 0 in endlichem Abstande von der Oberfläche sich befindet, gegenüber dem zweiten Integral vernachlässigt werden, da dieses von der Form des ersten multiplicirt mit dem unendlich grossen Factor $\frac{2\pi}{\lambda}$ ist; wir erkannten ferner, dass auch das zweite Integral verschwindet, wenn für keinen endlichen Theil des Randes $r_1 + r_0$ constant ist, und die Fläche weder von der Geraden 1, 0 geschnitten, noch von einem Ellipsoid $r_1 + r_0 =$ const. berührt wird. Endlich überzeugten wir uns durch indirecte Betrachtungen, dass es einen von Null verschiedenen Werth hat, wenn die Fläche s von der Linie 1, 0 geschnitten wird, dass es aber auch verschwindet, wenn eine Berührung der genannten Art stattfindet. Hier muss sich genau das Umgekehrte ergeben, wie aus dem durch die Erfahrung bekannten Gesetze für die Reflexion der Lichtstrahlen hervorgeht. Wir wollen uns davon durch directe Rechnung überzeugen.

Es sei wieder

$$r_1 + r_0 = \zeta, \quad \frac{2\pi}{\lambda} = k; \tag{6}$$

wird dann ähnlich wie in (21) der vorigen Vorlesung

$$G = -c \frac{1}{r_1 r_0}\left(\frac{\partial r_1}{\partial N} + \frac{\partial r_0}{\partial N}\right), \quad \delta = -\frac{t+\gamma}{T} 2\pi$$

und

$$F(\zeta) = \pm \int G\, ds$$

gesetzt, so verwandelt sich das allein zu untersuchende zweite Integral in (5) in

$$k\int^{\bullet} G \sin(k\zeta + \delta)\, ds = k\int_{\zeta_0}^{\zeta'} \frac{dF}{d\zeta} \sin(k\zeta + \delta)\, d\zeta.$$

Wird der Fall ausgeschlossen, dass für einen endlichen Theil der Grenze von s ζ constant ist, so verschwindet jenes Integral, falls für keinen Punkt der Fläche $d\zeta$ verschwindet; es soll jetzt untersucht werden, welchen Werth es in diesem Falle hat.

§ 2.

Es sei in dem Punkte (x, y, z) der Fläche s $d\zeta = 0$ für eine beliebige Verschiebung desselben auf der Fläche; dann bestehen die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \zeta}{\partial x} &= \frac{\partial r_1}{\partial x} + \frac{\partial r_0}{\partial x} = L\frac{\partial g}{\partial x} \\
\frac{\partial \zeta}{\partial y} &= \frac{\partial r_1}{\partial y} + \frac{\partial r_0}{\partial y} = L\frac{\partial g}{\partial y} \\
\frac{\partial \zeta}{\partial z} &= \frac{\partial r_1}{\partial z} + \frac{\partial r_0}{\partial z} = L\frac{\partial g}{\partial z},
\end{aligned} \tag{7}$$

wenn $g(xyz) = 0$ die Gleichung der Fläche s ist, und L einen vorläufig nicht weiter bestimmten Factor bedeutet. Wir wollen diese Gleichungen noch in einer anderen Form schreiben, in der ihre geometrische Bedeutung deutlicher hervortritt; es seien $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ und $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ die Richtungscosinus der von den Punkten 1 und 0 nach (x, y, z) gezogenen Linien und α, β, γ diejenigen der Normale N im Punkte (x, y, z); setzt man dann noch

$$L = M \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)^2}},$$

so gehen die Gleichungen (7) über in

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_0 &= M\alpha \\ \beta_1 + \beta_0 &= M\beta \\ \gamma_1 + \gamma_0 &= M\gamma . \end{aligned} \tag{7a}$$

Diese drei Bedingungsgleichungen für das Verschwinden von $d\zeta$ können in zwei wesentlich verschiedenen Weisen erfüllt werden; entweder durch

$$M = 0 \quad \text{und} \quad \alpha_0 = -\alpha_1, \; \beta_0 = -\beta_1, \; \gamma_0 = -\gamma_1,$$

oder dadurch, dass

$$M \lessgtr 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \zeta}{\partial x} : \frac{\partial \zeta}{\partial y} : \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \frac{\partial g}{\partial x} : \frac{\partial g}{\partial y} : \frac{\partial g}{\partial z}$$

ist. Im ersten Falle schneidet die Gerade 1, 0 die Fläche s im Punkte (x, y, z), im zweiten berührt sie ein Ellipsoid $\zeta = \text{const.}$ in diesem Punkte. Es werde jetzt das Coordinatensystem so geändert, dass der Punkt (x, y, z), für den $d\zeta = 0$ ist, der Anfangspunkt und N die z-Achse wird. Es sollen ferner die Dimensionen der Fläche s unendlich klein, aber unendlich gross gegen $\frac{1}{k}$ angenommen werden; es ist ausreichend, unser Integral unter dieser Annahme zu berechnen, da sein Werth, wie wir schon wissen, durch Hinzufügung neuer Theile zu s nicht geändert wird. Die Gleichung der Fläche s ist dann bekanntlich

$$z = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2, \tag{8}$$

wo a_{11}, a_{12}, a_{22} Constanten sind, und zugleich ist

$$ds = dx\,dy .$$

Um die Schnittlinien der Fläche s mit den Flächen $\zeta = \text{const.}$ zu finden, muss nun der Ausdruck von ζ gebildet und nach Potenzen von x und y entwickelt werden. Es seien x_0, y_0, z_0 die Coordinaten des Punktes 0, also

$$\varrho_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} \tag{8a}$$

seine Entfernung vom Anfangspunkte, dann ist

$$\begin{aligned} r_0 &= \sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + (z_0 - z)^2} \\ &= \sqrt{\varrho_0^2 - 2xx_0 - 2yy_0 - 2zz_0 + x^2 + y^2 + z^2} . \end{aligned}$$

Bezeichnet man x und y oder die Dimensionen der Fläche s als unendlich klein von der ersten Ordnung und entwickelt r_0 bei Benutzung des Ausdrucks von z in (8) bis auf Grössen zweiter Ordnung, so ergiebt sich

$$r_0 = \varrho_0 - \frac{xx_0 + yy_0}{\varrho_0} - \frac{a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2}{\varrho_0} z_0 + \frac{x^2+y^2}{2\varrho_0} - \frac{(xx_0 + yy_0)^2}{2\varrho_0^3}$$

oder, wegen

$$\frac{x_0}{\varrho_0} = -\alpha_0, \quad \frac{y_0}{\varrho_0} = -\beta_0, \quad \frac{z_0}{\varrho_0} = -\gamma_0.$$

$$r_0 = \varrho_0 + \alpha_0 x + \beta_0 y + (a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2)\gamma_0$$
$$+ \frac{1}{2\varrho_0}\left(x^2(1-\alpha_0^2) - 2xy\alpha_0\beta_0 + y^2(1-\beta_0^2)\right)$$

Setzt man entsprechend (8a)

$$\varrho_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2},$$

so findet man ebenso

$$r_1 = \varrho_1 + \alpha_1 x + \beta_1 y + (a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2)\gamma_1$$
$$+ \frac{1}{2\varrho_1}\left(x^2(1-\alpha_1^2) - 2xy\alpha_1\beta_1 + y^2(1-\beta_1^2)\right).$$

Bei dem gewählten Coordinatensystem ist aber

$$\alpha = 0, \ \beta = 0,$$

also nach (7a)

$$\alpha_1 + \alpha_0 = 0, \quad \beta_1 + \beta_0 = 0,$$

es ergiebt sich daher für ζ der Ausdruck

$$\zeta = r_1 + r_0 = A_0 + A_{11}x^2 + 2A_{12}xy + A_{22}y^2, \tag{9}$$

wo

$$\left.\begin{aligned} A_0 &= \varrho_1 + \varrho_0 \\ A_{11} &= a_{11}(\gamma_1 + \gamma_0) + \frac{1-\alpha_1^2}{2}\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_0}\right) \\ A_{12} &= a_{12}(\gamma_1 + \gamma_0) - \frac{\alpha_1\beta_1}{2}\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_0}\right) \\ A_{22} &= a_{22}(\gamma_1 + \gamma_0) + \frac{1-\beta_1^2}{2}\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_0}\right) \end{aligned}\right\} \tag{9a}$$

gesetzt ist. Die Schnittlinien der Flächen $\zeta =$ const. mit der Fläche s, oder genauer, ihre Projectionen auf unsere xy-Ebene, sind hiernach ähnliche und ähnlich liegende Kegelschnitte, deren Mittelpunkt der Anfangspunkt unserer Coordinaten ist. Ihre Gleichung, bezogen auf die Hauptaxen, sei

$$\zeta - A_0 = \mu_1 x^2 + \mu_2 y^2, \tag{10}$$

d. h. es seien μ_1 und μ_2 die Wurzeln der Gleichung

$$(A_{11} - \mu)(A_{22} - \mu) - A_{12}^2 = 0, \tag{10a}$$

die stets reell sind, da die linke Seite dieser Gleichung für $\mu = \pm\infty$ positiv, für $\mu = A_{11}$ oder $\mu = A_{22}$ negativ ist.

Nehmen wir zunächst an, dass μ_1 und μ_2 von gleichem Vorzeichen, dass die Kegelschnitte also Ellipsen sind. Sind μ_1 und μ_2 positiv, so ist A_0 das Minimum von ζ, sind sie negativ, so ist es das Maximum; im ersten Fall ist also der Flächeninhalt der Ellipse, die einem bestimmten Werthe von ζ entspricht,

$$\frac{\pi(\zeta - A_0)}{\sqrt{\mu_1 \mu_2}}$$

im zweiten

$$\frac{\pi(A_0 - \zeta)}{\sqrt{\mu_1 \mu_2}},$$

wo die Wurzel, wie immer die Quadratwurzel aus einer positiven Grösse, positiv verstanden werden soll.

Nun war in (20) der vorigen Vorlesung

$$F(\zeta) = \pm \int^{s} G\,ds$$

gesetzt, wo die Integration über den Theil der Fläche s zwischen $\zeta = Z$ und $\zeta = \zeta$ auszudehnen und das positive oder negative Vorzeichen zu wählen ist, je nachdem $\zeta > Z$ oder $\zeta < Z$ ist. Wählen wir also hier die willkürliche Grösse Z gleich A_0, so wird für Werthe von ζ, bei denen die entsprechenden Ellipsen ganz innerhalb der Fläche s liegen, da G als constant betrachtet werden kann, in beiden Fällen

$$F(\zeta) = G\,\frac{\pi(\zeta - A_0)}{\sqrt{\mu_1 \mu_2}},$$

sein, wo G den Werth dieser Function im Coordinatenanfangspunkte bezeichnet.

Fällt kein Theil der Grenze von s mit einer der Ellipsen zusammen, so ist in der ganzen Fläche s $\frac{dF}{d\zeta}$ stetig und daher nach (19) der vorigen Vorlesung

$$k\int_{\zeta_0}^{\zeta'} \frac{dF}{d\zeta} \sin(k\zeta + \delta)\,d\zeta = -\left[\frac{dF}{d\zeta}\cos(k\zeta + \delta)\right]_{\zeta_0}^{\zeta'}.$$

Unter derselben Voraussetzung findet der zweite Grenzwerth von ζ in der Grenze der Fläche s statt, und es ist für ihn $\frac{dF}{d\zeta} = 0$. Der erste, schon in Betracht gezogene Grenzwerth von ζ ist A_0, für ihn ist

$$\frac{dF}{d\zeta} = G\,\frac{\pi}{\sqrt{\mu_1 \mu_2}},$$

und es ergiebt sich in diesem Fall das zu untersuchende Integral

$$k\int_{\zeta_0}^{\zeta'} \frac{dF}{d\zeta} \sin(k\zeta + \delta)\,d\zeta = \pm\, G\,\frac{\pi}{\sqrt{\mu_1 \mu_2}} \cos(kA_0 + \delta), \qquad (11)$$

wo das positive oder negative Vorzeichen zu nehmen ist, je nachdem μ_1 und μ_2 beide positiv oder beide negativ sind.

§ 3.

Verwickelter ist die Rechnung, wenn μ_1 und μ_2 ungleiches Vorzeichen haben, die Kegelschnitte also Hyperbeln sind, in welchem Falle $\frac{dF}{d\zeta}$ bei $\zeta = A_0$ unstetig wird. Dieser Werth von ζ findet nach (10) in den Linien statt, deren Gleichungen

$$x\sqrt{\mu_1} = \pm y\sqrt{-\mu_2}$$

sind, wenn die Coordinatenachsen die Hauptachsen sind und μ_1 positiv, μ_2 negativ ist; diese Linien sind die gemeinschaftlichen Asymptoten des Systems von Hyperbeln in (10). Die reelle Hauptachse der einem Werthe von ζ entsprechenden Hyperbel fällt in die x-Achse, wenn $\zeta - A_0$ positiv, in die y-Achse, wenn $\zeta - A_0$ negativ ist. Wir wollen hier der Fläche s eine bestimmte Gestalt beilegen, was wir ja nach der vorhin gemachten Bemerkung dürfen, nämlich die Gestalt eines Rechtecks, dessen Seiten die Gleichungen

$$x = \pm a, \quad y = \pm b$$

haben, und dessen Ecken auf den Asymptoten liegen, was erfordert, dass

$$a\sqrt{\mu_1} = b\sqrt{-\mu_2} = \sqrt{c}$$

ist, wo c eine positive Constante bedeutet, die gegen $\frac{1}{k}$ unendlich gross sein muss. Setzt man wieder jene Constante Z, die bei der Definition von $F(\zeta)$ vorkommt, gleich A_0 und betrachtet ebenfalls G als constant, so hat man für $\zeta > A_0$

$$F(\zeta) = 4G\left(\frac{ab}{2} - \frac{1}{\sqrt{-\mu_2}}\int\limits_{\sqrt{\frac{\zeta - A_0}{\mu_1}}}^{a} \sqrt{\mu_1 x^2 - \zeta + A_0}\, dx\right). \tag{12}$$

Daraus folgt, da der Differentialquotient des bestimmten Integrals nach seiner unteren Grenze verschwindet

$$\frac{dF}{d\zeta} = \frac{2G}{\sqrt{-\mu_2}}\int\limits_{\sqrt{\frac{\zeta - A_0}{\mu_1}}}^{a} \frac{dx}{\sqrt{\mu_1 x^2 - \zeta + A_0}},$$

oder da

$$\int\limits_1^z \frac{dz}{\sqrt{z^2 - 1}} = \log\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)$$

ist, so ergiebt sich für $x = z\sqrt{\frac{\mu_1}{\zeta - A_0}}$

$$\frac{dF}{d\zeta} = G\,\frac{2}{\sqrt{-\mu_1\mu_2}}\log\frac{\sqrt{c} + \sqrt{c - \zeta + A_0}}{\sqrt{\zeta - A_0}}. \tag{13}$$

Ebenso findet man für $\zeta < A_0$

$$\frac{dF}{d\zeta} = G\frac{2}{\sqrt{-\mu_1\mu_2}}\log\frac{\sqrt{c}+\sqrt{c+\zeta-A_0}}{\sqrt{A_0-\zeta}}. \tag{13a}$$

Nun findet der kleinste Werth von ζ in den Punkten ($x=0$, $y=\pm b$) statt und ist $=A_0-c$, der grösste in den Punkten ($x=\pm a$, $y=0$) und ist $=A_0+c$; daher hat man

$$k\int_{\zeta_0}^{\zeta'}\frac{dF}{d\zeta}\sin(k\zeta+\delta)\,d\zeta = G\frac{2}{\sqrt{-\mu_1\mu_2}}\,k\left\{\int_{A_0-c}^{A_0}\log\frac{\sqrt{c}+\sqrt{c+\zeta-A_0}}{\sqrt{A_0-\zeta}}\sin(k\zeta+\delta)\,d\zeta\right.$$

$$\left.+\int_{A_0}^{A_0+c}\log\frac{\sqrt{c}+\sqrt{c-\zeta+A_0}}{\sqrt{\zeta-A_0}}\sin(k\zeta+\delta)\,d\zeta\right\}.$$

Setzt man in dem ersten dieser beiden Integrale

$$A_0-\zeta=\xi,$$

in dem zweiten

$$\zeta-A_0=\xi,$$

so wird dieser Ausdruck

$$=G\frac{2}{\sqrt{-\mu_1\mu_2}}\,k\int_0^c\log\frac{\sqrt{c}+\sqrt{c-\xi}}{\sqrt{\xi}}\big(\sin(k\xi+kA_0+\delta)-\sin(k\xi-kA_0-\delta)\big)\,d\xi$$

$$=G\frac{4}{\sqrt{-\mu_1\mu_2}}\,k\sin(kA_0+\delta)\int_0^c\log\frac{\sqrt{c}+\sqrt{c-\xi}}{\sqrt{\xi}}\cos k\xi\,d\xi.$$

Durch partielle Integration findet man aber

$$k\int_0^c\log\frac{\sqrt{c}+\sqrt{c-\xi}}{\sqrt{\xi}}\cos k\xi\,d\xi = \left[\sin k\xi\log\frac{\sqrt{c}+\sqrt{c-\xi}}{\sqrt{\xi}}\right]_{\xi=0}^{\xi=c}$$

$$-\int_0^c\sin k\xi\,\frac{d}{d\xi}\log\left(\sqrt{c}+\sqrt{c-\xi}\right)d\xi+\frac{1}{2}\int_0^c\frac{\sin k\xi}{\xi}\,d\xi. \tag{14}$$

Das erste von diesen drei Gliedern ist für jeden Werth von k gleich Null, da der in den Klammern stehende Ausdruck sowohl für $\xi=c$ als für $\xi=0$ verschwindet; das zweite ist von der Form des Integrals R, das wir in § 4 der zweiten Vorlesung untersucht haben, und verschwindet daher für $k=\infty$, da $\log(\sqrt{c}+\sqrt{c-\xi})$ stetig ist auch bei $\xi=c$, obwohl sein Differentialquotient hier unendlich wird. Setzen wir also

$$k\xi=u$$

und erwägen, dass kc unendlich gross sein sollte, so geht der Ausdruck (14) über in

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin u}{u}\, du.$$

Um den Werth dieses Integrals zu finden, gehen wir aus von den Gleichungen

$$e^{-au}\cos u = -\int e^{-au}\sin u\,du - a\int e^{-au}\cos u\,du$$

$$e^{-au}\sin u = -a\int e^{-au}\sin u\,du + \int e^{-au}\cos u\,du,$$

aus denen sich ergiebt

$$\int e^{-au}\sin u\,du = -\,e^{-au}\,\frac{a\sin u + \cos u}{1+a^2}$$

$$\int e^{-au}\cos u\,du = e^{-au}\,\frac{\sin u - a\cos u}{1+a^2};$$

für ein positives a erhält man daher die beiden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-au}\sin u\,du &= \frac{1}{1+a^2}\\ \int_0^\infty e^{-au}\cos u\,du &= \frac{a}{1+a^2}.\end{aligned}\right\}\qquad(14\text{a})$$

Die erste von diesen Gleichungen multipliciren wir jetzt mit da und integriren sie von 0 bis a; dann folgt

$$\int_0^\infty \frac{1-e^{-au}}{u}\sin u\,du = \operatorname{arctg} a,$$

wo der Bogen zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ anzunehmen ist. Lassen wir endlich a ins Unendliche wachsen, so erhalten wir

$$\int_0^\infty \frac{\sin u}{u}\,du = \frac{\pi}{2}.$$

Hiernach ergiebt sich in diesem Falle für das zu untersuchende Integral die Gleichung

$$k\int_{\zeta_0}^{\zeta}\frac{dF}{d\zeta}\sin(k\zeta+\delta)\,d\zeta = G\,\frac{\pi}{\sqrt{-\mu_1\mu_2}}\sin(kA_0+\delta).\qquad(15)$$

§ 4.

Wir wollen noch einen anderen Weg angeben, auf dem man die in (11) und (15) abgeleiteten Ausdrücke für

$$J = k\int G\sin(k\zeta+\delta)\,ds$$

erhalten kann. Wir hatten gefunden

$$\zeta = r_1 + r_0 = A_0 + (A_{11}x^2 + 2A_{12}xy + A_{22}y^2), \tag{16}$$

und wir wollen jetzt die Fläche s so klein annehmen, dass für sie die Glieder dritter Dimension in x und y, obwohl sie mit k multiplicirt sind, als unendlich klein angesehen, also unter dem Sinuszeichen fortgelassen werden können. Führen wir statt x, y neue Coordinaten ξ, η ein, deren Axen den Hauptaxen der Kegelschnitte $\zeta =$ const. in (16) parallel sind, so ergiebt sich

$$A_{11}x^2 + 2A_{12}xy + A_{22}y^2 = \mu_1\xi^2 + \mu_2\eta^2,$$
$$ds = dx\,dy = d\xi\,d\eta,$$

und das zu untersuchende Integral J geht über in

$$k\iint G \sin\left(kA_0 + \delta + k(\mu_1\xi^2 + \mu_2\eta^2)\right) d\xi\,d\eta,$$

oder, da die Fläche s als unendlich klein angenommen wurde, in

$$\begin{aligned} J = G\sin(kA_0 + \delta)\iint k\cos k(\mu_1\xi^2 + \mu_2\eta^2)\,d\xi\,d\eta \\ + G\cos(kA_0 + \delta)\iint k\sin k(\mu_1\xi^2 + \mu_2\eta^2)\,d\xi\,d\eta, \end{aligned} \tag{17}$$

wo der Function G derjenige Werth beizulegen ist, der ihr im Coordinatenanfangspunkte zukommt.

Endlich setzen wir noch

$$\sqrt{k}\,\xi = u, \quad \sqrt{k}\,\eta = v,$$

und wählen die Fläche s, deren Gestalt in gewissen Grenzen beliebig angenommen werden kann, als ein Rechteck, dessen Seiten den Axen der ξ und η parallel sind und für dessen Seiten u und v gleich $\pm\infty$ sind; es ist dies eine Festsetzung über die *Grössenordnung* der Seiten, welche mit der oben über s gemachten Voraussetzung nicht im Widerspruch steht. Dadurch gehen die beiden Doppelintegrale in (17) über in

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} du\,dv \cos(\mu_1u^2 + \mu_2v^2)$$

und (18)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} du\,dv \sin(\mu_1u^2 + \mu_2v^2).$$

Setzt man zur Abkürzung

$$C = \int_{-\infty}^{+\infty} du \cos\mu u^2,$$

$$S = \int_{-\infty}^{+\infty} du \sin\mu u^2,$$

und bezeichnet durch einen Index, dass die Constante μ den Werth μ_1

oder μ_2 besitzt, so erhält man durch die Entwicklung der beiden Doppelintegrale in (18) für sie die Werthe

$$C_1 C_2 - S_1 S_2, \qquad C_1 S_2 + S_1 C_2.$$

Im § 1 der siebenten Vorlesung werden wir uns eingehend mit dem Werthe derjenigen Integrale zu beschäftigen haben, welche sich aus C und S für $\mu = 1$ ergeben, und wir werden hier die Gleichungen

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos v^2 dv &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \sin v^2 dv &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \end{aligned} \tag{19}$$

ableiten. Wir wollen von diesem Resultate hier schon Gebrauch machen, um unsere Integrale C und S für einen beliebigen reellen Werth von μ zu berechnen. Ist nämlich $\varepsilon = \pm 1$, je nachdem $\mu \gtrless 0$ ist, so ergiebt sich aus diesen Gleichungen für

$$v = \sqrt{\varepsilon\mu} \cdot u$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos \mu u^2 \,.\, du = \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \sin \mu u^2 \,.\, du = \sqrt{\frac{\pi}{2\varepsilon\mu}},$$

oder

$$C = \varepsilon S = \sqrt{\frac{\pi}{2\varepsilon\mu}},$$

wenn man berücksichtigt, dass

$$\cos \varepsilon\mu u^2 = \cos \mu u^2, \qquad \sin \varepsilon\mu u^2 = \varepsilon \sin \mu u^2$$

ist.

Sind also ε_1 und ε_2 die Werthe, welche ε für μ_1 und μ_2 annimmt, so gehen die Integrale (18) beziehungsweise über in

$$C_1 C_2 (1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2) = \frac{\pi}{2\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \mu_1 \mu_2}} (1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2)$$

und

$$C_1 C_2 (\varepsilon_2 + \varepsilon_1) = \frac{\pi}{2\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \mu_1 \mu_2}} (\varepsilon_2 + \varepsilon_1).$$

Setzt man diese Werthe in (17) ein, so erhält man

$$J = G \frac{\pi}{2\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \mu_1 \mu_2}} \Big[\sin (kA_0 + \delta)(1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2) + \cos (kA_0 + \delta)(\varepsilon_2 + \varepsilon_1) \Big].$$

Haben also μ_1 und μ_2 gleiches Zeichen, ist also

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 = +1, \qquad \varepsilon_2 + \varepsilon_1 = \pm 2,$$

so wird

$$J = \pm G \frac{\pi}{\sqrt{\mu_1 \mu_2}} \cos (kA_0 + \delta), \tag{20}$$

wo das positive oder negative Vorzeichen zu nehmen ist, je nachdem ε_1 und ε_2 beide positiv oder beide negativ sind. Haben μ_1 und μ_2

aber entgegengesetzte Zeichen, so wird

$$\varepsilon_2 + \varepsilon_1 = 0, \qquad \varepsilon_1 \varepsilon_2 = -1,$$

und man erhält

$$J = + G \frac{\pi}{\sqrt{-\mu_1 \mu_2}} \sin(k A_0 + \delta). \tag{20a}$$

Es sind dies dieselben Ausdrücke, die wir in (11) und (15) gefunden haben ohne die Voraussetzung, dass k multiplicirt mit der dritten Potenz der Dimensionen von s verschwindet. Wir schliessen daraus, und wir werden später davon Gebrauch machen, dass auch bei einer grösseren Fläche s diese Entwicklung von $k(r_1 + r_0)$ unter dem Sinuszeichen erlaubt ist, die unmittelbar nur bei einer gerade so kleinen gerechtfertigt erscheint, dass nämlich *die* Theile einer grösseren Fläche, für welche die Entwicklung nicht richtig ist, nichts Merkliches zu J beitragen.

§ 5.

Die in den vorigen Paragraphen durchgeführten Rechnungen bezogen sich auf *das* Licht im Punkte 0, welches von dem leuchtenden Punkte 1 ausgegangen ist und an der kleinen Fläche s eine Reflexion erlitten hat unter der Annahme

$$\varphi^* = \frac{1}{r_1} \cos\left(\frac{r_1}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) 2\pi.$$

Wir hatten schon gesehen, dass die durch dieses Licht bedingte Aenderung im Allgemeinen verschwindet; zweifelhaft war das nur, wenn es einen Punkt in der Fläche giebt, für den $d\zeta = d(r_1 + r_0)$ in der Fläche s verschwindet, d. h. in dem diese entweder von der Geraden 1, 0 geschnitten, oder in dem sie von einem Ellipsoid $\zeta =$ const. berührt wird. Mit diesen Fällen beschäftigte sich die Rechnung. Beziehen wir nämlich das Zeichen φ_0 jetzt auf das *reflectirte* Licht im Punkte 0, so ist nach (5) (11) und (15)

$$4\pi\varphi_0 = \pm G \frac{\pi}{\sqrt{\mu_1 \mu_2}} \cos(k A_0 + \delta),$$

wenn die Grössen μ dasselbe Vorzeichen haben, (21)

$$4\pi\varphi_0 = \quad G \frac{\pi}{\sqrt{-\mu_1 \mu_2}} \sin(k A_0 + \delta),$$

wenn die Grössen μ entgegengesetztes Vorzeichen haben,

$$G = - \frac{c}{r_1 r_0} \left(\frac{\partial r_1}{\partial N} + \frac{\partial r_0}{\partial N}\right).$$

Dabei war das Coordinatensystem so gewählt, dass der betrachtete Punkt der Fläche mit dem Coordinatenanfangspunkte, seine Normale mit der z-Achse zusammenfällt. Dann wird aber

$$G = - \frac{c}{\varrho_1 \varrho_0} (\gamma_1 + \gamma_0),$$

wenn ϱ_1 und ϱ_0, wie früher, die Entfernungen von 1 und 0 vom Anfangspunkte bezeichen, und aus den Gleichungen (7a) ergiebt sich hier

$$\alpha_1 + \alpha_0 = 0, \quad \beta_1 + \beta_0 = 0, \quad \text{also} \quad \gamma_1 = \mp \gamma_0;$$

im ersten dieser beiden Fälle verschwindet aber $\gamma_1 + \gamma_0$, also auch G, hier ist also stets $\varphi_0 = 0$; reflectirtes Licht ist demnach nur im zweiten, d. h. für

$$\alpha_1 = -\alpha_0, \quad \beta_1 = -\beta_0, \quad \gamma_1 = \gamma_0 \tag{21a}$$

vorhanden. So haben wir das bekannte Gesetz abgeleitet, dass der reflectirte Strahl in der Einfallsebene liegt, und dass der Reflexionswinkel dem Einfallswinkel gleich ist.

Wir transformiren nun die für φ_0 gefundenen Ausdrücke (21), um zu erkennen, in welcher Weise φ_0 von ϱ_0 abhängt, wie sich also die Lichtbewegung in einem und demselben reflectirten Strahle ändert. Zu diesem Zwecke setzen wir für A_0 seinen Werth $\varrho_1 + \varrho_0$. Von ϱ_0 sind aber auch μ_1 und μ_2 abhängig. Es waren dies nämlich die Wurzeln der quadratischen Gleichung (10a)

$$(A_{11} - \mu)(A_{22} - \mu) - A_{12}^2 = 0,$$

und daraus folgt

$$\mu_1 \mu_2 = A_{11} A_{22} - A_{12}^2.$$

Bringt man also die Grössen A_{11}, A_{12}, A_{22} in (9a) auf die Form

$$A_{11} = b_{11} + \frac{c_{11}}{\varrho_0}, \quad A_{12} = b_{12} + \frac{c_{12}}{\varrho_0}, \quad A_{22} = b_{22} + \frac{c_{22}}{\varrho_0},$$

wo die Grössen b und c von ϱ_0 unabhängig sind und

$$c_{11} = \frac{1 - \alpha_1^2}{2}, \quad c_{12} = -\frac{\alpha_1 \beta_1}{2}, \quad c_{22} = \frac{1 - \beta_1^2}{2},$$

ist, so ergiebt sich

$$\begin{aligned} \varrho_0^2 \mu_1 \mu_2 &= (b_{11}\varrho_0 + c_{11})(b_{22}\varrho_0 + c_{22}) - (b_{12}\varrho_0 + c_{12})^2 \\ &= (b_{11} b_{22} - b_{12}^2)(\varrho_0 - f_1)(\varrho_0 - f_2); \end{aligned} \tag{22}$$

es sind dann f_1 und f_2 die Werthe von ϱ_0, die der quadratischen Gleichung

$$(b_{11}\varrho_0 + c_{11})(b_{22}\varrho_0 + c_{22}) - (b_{12}\varrho_0 + c_{12})^2 = 0$$

genügen. Die linke Seite dieser Gleichung ist negativ für $\varrho_0 = -\frac{c_{11}}{b_{11}}$ und für $\varrho_0 = -\frac{c_{22}}{b_{22}}$, für $\varrho_0 = 0$ erhält sie dagegen den Werth

$$c_{11} c_{22} - c_{12}^2 = \frac{1 - \alpha_1^2 - \beta_1^2}{4} = \frac{\gamma_1^2}{4},$$

wird also positiv; ihre Wurzeln f_1 und f_2 sind daher stets reell, sie können aber positiv oder negativ sein.

Bedeutet also K eine gewisse von ϱ_0 unabhängige Grösse, so ergiebt sich aus (21) für φ_0 der Ausdruck

$$\varphi_0 = \frac{\pm K}{\sqrt{\pm(\varrho_0 - f_1)(\varrho_0 - f_2)}} \cos(k(\varrho_1 + \varrho_0) + \delta)$$

oder (23)

$$\varphi_0 = \frac{K}{\sqrt{\pm(\varrho_0 - f_1)(\varrho_0 - f_2)}} \sin(k(\varrho_1 + \varrho_0) + \delta),$$

und man erkennt, dass diese Gleichungen, falls K und δ unbestimmt bleiben, auch für den allgemeineren Ausdruck von φ^* gelten, wenn man berücksichtigt, auf welche Art φ_0 aus φ^* gebildet wird. Das Vorzeichen unter der Quadratwurzel in (23) ist so zu bestimmen, dass die Wurzelgrösse reell ist, während die Wahl des Cosinus oder Sinus und des Vorzeichens beim Cosinus bedingt ist durch die Vorzeichen von μ_1 und μ_2. Geht, während ϱ_0 wächst, eine dieser Grössen durch Null hindurch — und das findet nach der Gleichung (22) statt, wenn ϱ_0 durch einen der Werthe f_1, f_2 hindurchgeht — so ist einer der Ausdrücke von φ_0 mit einem andern zu vertauschen, der Sinus mit dem Cosinus oder umgekehrt, der Art, dass sich die Phase sprungweise um $\frac{\pi}{2}$ ändert. Die Punkte $\varrho_0 = f_1$ und $\varrho_0 = f_2$ des reflectirten Strahles heissen die *Brennpunkte* desselben; aus (23) ergiebt sich, dass in ihrer Nähe die Amplitude von φ_0 unendlich gross wird, und zwar wie $\frac{1}{\sqrt{\varrho_0 - f_1}}$ bezw. $\frac{1}{\sqrt{\varrho_0 - f_2}}$.
Wir sehen hier, dass sich auf einem Strahle eines reflectirten Bündels die Bewegung im Allgemeinen nach einem anderen Gesetze ändert als bei einem Strahlenbündel, welches direct von einem leuchtenden Punkte herkommt und durch eine kleine Oeffnung eines undurchsichtigen Schirms gegangen ist. Bei einem solchen würden wir haben

$$\varphi_0 = \frac{K}{\varrho_1 + \varrho_0} \cos(k(\varrho_1 + \varrho_0) + \delta). \tag{23a}$$

Der Punkt, für den $\varrho_0 = -\varrho_1$ ist, d. h. der Ausgangspunkt des Lichtes entspräche also hier den *beiden* Brennpunkten.

Um eine klarere Einsicht in die Natur des reflectirten Strahlenbündels zu erlangen, müssen wir neben dem *einen* Strahle desselben, den wir bisher ins Auge gefasst haben, auch seine Nebenstrahlen betrachten. *Der* Strahl, auf den unsere Untersuchungen sich bezogen, und der vom Anfangspunkte unseres Coordinatensystems nach dem Punkte 0 geht, nimmt diesen Weg, da für $x = 0$ und $y = 0$ $d\zeta$ in der Fläche s verschwindet. Ist auch noch für andere Punkte dieser Fläche $d\zeta = 0$, so müssen auch von diesen reflectirte Strahlen nach dem Punkte 0 gehen. Die Bedingung hierfür ist also

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}(A_{11}x^2 + 2A_{12}xy + A_{22}y^2) &= 0, \quad \text{d. h.} \quad A_{11}x + A_{12}y = 0\\ \frac{\partial}{\partial y}(A_{11}x^2 + 2A_{12}xy + A_{22}y^2) &= 0, \qquad\qquad A_{12}x + A_{22}y = 0.\end{aligned} \tag{24}$$

Diese Gleichungen können erfüllt werden, ohne dass x und y verschwinden, falls

$$A_{11}A_{22} - A_{12}^2 = 0$$

ist, denn unter dieser Bedingung wird ihnen durch

$$\frac{y}{x} = -\frac{A_{11}}{A_{12}} = -\frac{A_{12}}{A_{22}}$$

genügt. Jene Gleichung aber ist diejenige, welche die Brennpunkte des zuerst betrachteten Strahles bestimmt, des *Hauptstrahles*, wie wir diesen nennen wollen. Fällt also der Punkt 0 in einen dieser Brennpunkte, so gehen durch ihn unendlich viele reflectirte Strahlen, und zwar solche, die in einer den Hauptstrahl enthaltenden Ebene liegen. Jedem Brennpunkte entspricht eine solche Ebene.

Diese beiden Ebenen stehen senkrecht auf einander. Um das zu zeigen, setzen wir für einen Strahl der ersten Ebene

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \xi_1, \qquad \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \eta_1,$$

für einen der zweiten Ebene

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \xi_2, \qquad \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \eta_2,$$

d. h. wir nennen ξ_1, η_1 und ξ_2, η_2 die Cosinus der Winkel, welche die Schnitte dieser beiden Ebenen mit der xy-Ebene und die Achsen der x und y mit einander bilden. Dann bestehen nach (24) die Gleichungen

$$\left(b_{11} + \frac{c_{11}}{f_1}\right)\xi_1 + \left(b_{12} + \frac{c_{12}}{f_1}\right)\eta_1 = 0$$

$$\left(b_{12} + \frac{c_{12}}{f_1}\right)\xi_1 + \left(b_{22} + \frac{c_{22}}{f_1}\right)\eta_1 = 0$$

und

$$\left(b_{11} + \frac{c_{11}}{f_2}\right)\xi_2 + \left(b_{12} + \frac{c_{12}}{f_2}\right)\eta_2 = 0$$

$$\left(b_{12} + \frac{c_{12}}{f_2}\right)\xi_2 + \left(b_{22} + \frac{c_{22}}{f_2}\right)\eta_2 = 0,$$

aus denen durch Elimination der Grössen b die Gleichung

$$c_{11}\xi_1\xi_2 + c_{12}(\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1) + c_{22}\eta_1\eta_2 = 0$$

abgeleitet werden kann, falls die beiden Brennpunkte nicht zusammenfallen. Ersetzt man in dieser Gleichung die Coefficienten c durch ihre Werthe, so ergiebt sich mit Berücksichtigung von (21a)

$$(1-\alpha_0^2)\xi_1\xi_2 - \alpha_0\beta_0(\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1) + (1-\beta_0^2)\eta_1\eta_2 = 0$$

oder

$$\xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2 = (\alpha_0\xi_1 + \beta_0\eta_1)(\alpha_0\xi_2 + \beta_0\eta_2),$$

wo α_0, β_0, γ_0 wie früher die Richtungscosinus des Hauptstrahles bedeuten. Nennen wir für den Augenblick die Richtungen

$$(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0), \quad (\xi_1, \eta_1, 0), \quad (\xi_2, \eta_2, 0)$$

die Richtungen

$$0 \qquad , \qquad 1 \qquad , \qquad 2$$

so lässt sich diese Gleichung schreiben

$$\cos(1, 2) = \cos(0, 1) \cos(0, 2);$$

stellen wir uns also das sphärische Dreieck vor, dessen Ecken den Richtungen 0, 1, 2 entsprechen, so spricht sie aus, dass dieses bei 0 rechtwinklig ist, und das ist es, was bewiesen werden sollte.

§ 6.

Das soeben betrachtete System der reflectirten Strahlen ist ein unendlich dünnes Strahlenbündel, bei dem im Allgemeinen durch jeden unendlich nahe an dem Hauptstrahle liegenden Punkt, *ein* Strahl geht, dessen Richtung unendlich wenig von der des Hauptstrahles abweicht. Aber ihm kommen gewisse Eigenthümlichkeiten zu, die nicht jedes Bündel dieser Art besitzt. Um diese zu erkennen, untersuchen wir das allgemeinste unendlich dünne Strahlenbündel. Einen beliebigen Strahl desselben nehmen wir als Hauptstrahl und zugleich als z-Achse eines rechtwinkligen Coordinatensystems an; die Coordinaten zweier Punkte eines andern Strahles seien

$$\begin{gathered} x_0,\ y_0,\ 0 \\ x_1,\ y_1,\ 1, \end{gathered}$$

wo $x_0, y_0, \ x_1, y_1$ unendlich klein von derselben Ordnung sein sollen. Die Gleichungen dieses Strahles sind dann

$$\begin{aligned} x &= x_0 + z(x_1 - x_0) \\ y &= y_0 + z(y_1 - y_0). \end{aligned}$$

Wir erhalten nun das allgemeinste unendlich dünne Strahlenbündel, wenn wir x_1, y_1 als Functionen von x_0, y_0 annehmen, die mit diesen von gleicher Ordnung unendlich klein sind und gleichzeitig mit ihnen verschwinden, d. h. wenn wir setzen

$$\begin{aligned} x_1 - x_0 &= \alpha x_0 + \beta y_0 \\ y_1 - y_0 &= \gamma x_0 + \delta y_0, \end{aligned}$$

wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ irgend welche Constanten sind. Die Gleichungen des Strahles werden hierdurch

$$\begin{aligned} x &= (1 + \alpha z)x_0 + \beta z y_0 \\ y &= \gamma z x_0 + (1 + \delta z) y_0. \end{aligned} \tag{25}$$

Fragen wir, ob es ausser dem Hauptstrahl noch Strahlen giebt, die durch einen Punkt $(0, 0, z)$ desselben hindurchgehen, so finden wir hierfür die Bedingung

$$(1 + \alpha z)(1 + \delta z) - \beta\gamma z^2 = 0. \tag{25a}$$

Wenn z dieser quadratischen Gleichung genügt, so haben die gedachte Eigenschaft alle Strahlen, für die

$$\frac{y_0}{x_0} = -\frac{1+\alpha z}{\beta z} = -\frac{\gamma z}{1 + \delta z} \tag{25b}$$

ist; es sind das also Strahlen, welche in einer gewissen durch die

z-Achse gehenden Ebene liegen. Es giebt *zwei* solche Punkte auf dem Hauptstrahl, die den beiden Wurzeln der Gleichung (25a) für z entsprechen, und die wieder die *Brennpunkte* des Strahles heissen. Dieses Resultat stimmt also mit dem bei unserem reflectirten Strahlenbündel gefundenen überein; aber während dort die Brennpunkte stets reell sind, können sie hier auch imaginär sein, da α, β, γ, δ ganz beliebige Werthe haben können; und während dort der Winkel zwischen den Ebenen der durch die beiden Brennpunkte gehenden Strahlen ein rechter ist, kann er hier jeden beliebigen Werth haben. Sind nämlich z_1 und z_2 die Werthe von z für die beiden Brennpunkte, so sind die Tangenten der Winkel, welche die genannten Ebenen mit der xz-Ebene bilden, beziehungsweise

$$-\frac{\alpha + \frac{1}{z_1}}{\beta} \quad \text{und} \quad -\frac{\alpha + \frac{1}{z_2}}{\beta},$$

und es sind $\frac{1}{z_1}$ und $\frac{1}{z_2}$ die Wurzeln der Gleichung (25a) für $\frac{1}{z}$

$$\left(\frac{1}{z} + \alpha\right)\left(\frac{1}{z} + \delta\right) - \beta\gamma = 0.$$

Es ist daher

$$\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = -(\alpha + \delta)$$

$$\frac{1}{z_1 z_2} = \alpha\delta - \beta\gamma.$$

Daraus findet man für die Tangente des Winkels zwischen beiden Ebenen den Ausdruck

$$\frac{\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2}}{\beta - \gamma} = \frac{\sqrt{(\alpha - \delta)^2 + 4\beta\gamma}}{\beta - \gamma},$$

da

$$\left(\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2}\right)^2 = \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}\right)^2 - \frac{4}{z_1 z_2} = (\alpha - \delta)^2 + 4\beta\gamma$$

sich ergiebt.

Der genannte Winkel ist hiernach dann und nur dann ein rechter, wenn $\beta = \gamma$ ist, welche Bedingung auch immer zur Folge hat, dass z_1 und z_2 reell sind. Die Eigenthümlichkeit des reflectirten Strahlenbündels besteht also darin, dass bei unserer Bezeichnung $\beta = \gamma$ ist. Sie beruht auf einer wichtigen Eigenschaft, die immer *die* Strahlen besitzen, die von einem Punkte ausgegangen und an einer beliebig gestalteten, *endlichen* Fläche reflectirt sind: nämlich auf der Eigenschaft, senkrecht zu stehen auf einem gewissen Systeme von Oberflächen, die man *Wellenflächen* genannt hat. Wir wollen die Gleichungen dieser Flächen für unser reflectirtes Strahlenbündel aufstellen und dann beweisen, dass ein jeder Strahl desselben auf ihnen senkrecht steht.

Es seien u und v zwei Variable, die einen Punkt der reflectirenden Fläche

$$g(x, y, z) = 0$$

bestimmen, durch die also die Coordinaten x, y, z eines solchen Punktes sich ausdrücken lassen; (x_1, y_1, z_1) bestimme wieder den leuchtenden Punkt und (x_0, y_0, z_0) einen Punkt auf dem Strahle, der von 1 ausgegangen und in (x, y, z) oder (u, v) reflectirt ist. Die Gleichungen dieses Strahles sind dann zwei in Bezug auf x_0, y_0, z_0 lineare Gleichungen, in denen u und v als Parameter vorkommen, und die wir

$$A = 0, \quad B = 0 \tag{26}$$

schreiben wollen. Denkt man sich in diesen Gleichungen den Variabeln u und v alle Werthe gegeben, welche ihnen in der reflectirenden Fläche zukommen, so stellen sie die Gesammtheit der reflectirten Strahlen dar.

Es seien wieder

$$\varrho_1 = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2}$$
$$\varrho_0 = \sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + (z_0 - z)^2}$$

die Entfernungen der Punkte 1 und 0 von dem Punkte (x, y, z) oder (u, v) der Fläche. Dann ist ϱ_1 eine Function von u und v allein, ϱ_0 eine solche von u, v und x_0, y_0, z_0, wenn wir x_1, y_1, z_1, oder die Coordinaten des leuchtenden Punktes, als Constanten betrachten. Man denke sich nun u und v mit Hülfe von (26) durch x_0, y_0, z_0 ausgedrückt und ihre Werthe in ϱ_1 und ϱ_0 eingesetzt; diese werden dadurch Functionen von x_0, y_0, z_0 allein, die durch (ϱ_1) und (ϱ_0) bezeichnet werden mögen. Die Gleichung der Wellenflächen ist dann

$$(\varrho_1) + (\varrho_0) = \text{const.},$$

wenn x_0, y_0, z_0 die Coordinaten des variabeln Punktes sind.

Um nun den angekündigten Beweis zu führen, bemerken wir, dass aus der Definition von (ϱ_1) und (ϱ_0) folgt

$$\frac{\partial}{\partial x_0}((\varrho_1) + (\varrho_0)) = \frac{\partial \varrho_0}{\partial x_0} + \frac{\partial(\varrho_1 + \varrho_0)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_0} + \frac{\partial(\varrho_1 + \varrho_0)}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x_0}. \tag{27}$$

Für einen jeden an der Oberfläche $g = 0$ reflectirten Strahl, für den also die Gleichungen (26) bestehen, ist aber nach (7)

$$\frac{\partial(\varrho_1 + \varrho_0)}{\partial x} = L\frac{\partial g}{\partial x}, \quad \frac{\partial(\varrho_1 + \varrho_0)}{\partial y} = L\frac{\partial g}{\partial y}, \quad \frac{\partial(\varrho_1 + \varrho_0)}{\partial z} = L\frac{\partial g}{\partial z}.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen beziehungsweise mit $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}$ oder mit $\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}$, addirt sie jedesmal und erwägt, dass $g = 0$ eine identische Gleichung werden muss, wenn man in ihr x, y, z durch u, v ausdrückt, dass also $\frac{\partial g}{\partial u} = 0$ und $\frac{\partial g}{\partial v} = 0$ ist, so erhält man

$$\frac{\partial(\varrho_1 + \varrho_0)}{\partial u} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial(\varrho_1 + \varrho_0)}{\partial v} = 0.$$

Also verwandelt sich die Gleichung (27) in

$$\frac{\partial((\varrho_1) + (\varrho_0))}{\partial x_0} = \frac{\partial \varrho_0}{\partial x_0};$$

ebenso ist

$$\frac{\partial((\varrho_1) + (\varrho_0))}{\partial y_0} = \frac{\partial \varrho_0}{\partial y_0}$$

$$\frac{\partial((\varrho_1) + (\varrho_0))}{\partial z_0} = \frac{\partial \varrho_0}{\partial z_0}.$$

Es verhalten sich aber die linken Seiten dieser Gleichungen wie die Richtungscosinus der Normale der Wellenfläche, die rechten, wie die Richtungscosinus des reflectirten Strahles; beide Richtungen fallen also zusammen, und damit ist der angekündigte Beweis erbracht.

Was den Namen „*Wellenflächen*" anbelangt, so ist er gewählt, weil diese Flächen mit denjenigen zusammenfallen, in welchen die Phase in demselben Augenblick dieselbe ist. Wir hatten nämlich gefunden

$$\varphi_0 = \frac{K}{\sqrt{\pm(\varrho_0 - f_1)(\varrho_0 - f_2)}} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} \left(k(\varrho_1 + \varrho_0) - \frac{t+\gamma}{T} 2\pi\right);$$

die Gleichung einer Fläche gleicher Phase ist daher

$$k(\varrho_1 + \varrho_0) - \frac{\gamma}{T} 2\pi = \text{const.}$$

Nun variirt γ allerdings auf der reflectirenden Fläche, aber langsam, k ist unendlich gross, und daher lässt diese Gleichung sich schreiben

$$\varrho_1 + \varrho_0 = \text{const.}$$

und dieses ist eben die Gleichung der sogenannten Wellenflächen.

Da die reflectirten Strahlen die Normalen einer Wellenfläche sind, so besteht ein unendlich dünnes reflectirtes Strahlenbündel, wie wir es betrachtet haben, aus den Normalen eines unendlich kleinen Stückes einer Wellenfläche. Im Allgemeinen schneiden sich die Normalen eines unendlich kleinen Stückes irgend einer krummen Fläche bekanntlich nicht; es wird *eine* Normale nur von *den* anderen geschnitten, deren Ausgangspunkte in einer der beiden *Krümmungslinien* liegen, die durch den Ausgangspunkt jener hindurchgehen; ihre Schnittpunkte sind die beiden *Hauptkrümmungsmittelpunkte*, es sind dieses also die *Brennpunkte* des Strahles, der durch sie hindurchgeht. Die beiden Krümmungslinien schneiden sich senkrecht, und daher bilden die Ebenen der Strahlen, welche durch die Brennpunkte eines Strahles gehen, einen rechten Winkel mit einander. So erklärt sich also die Eigenthümlichkeit eines reflectirten Strahlenbündels aus dem Umstande, dass seine Strahlen die Normalen der Wellenflächen sind.

Von besonderem Interesse ist der schon vorher erwähnte specielle Fall eines unendlich dünnen reflectirten Strahlenbündels, in welchem die beiden Brennpunkte eines seiner Strahlen *zusammenfallen.* Bei einer Bezeichnungsweise, wie wir sie soeben angewandt haben, muss dann

$$z_1 = z_2$$

sein. Wir hatten aber gefunden

$$\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2} = \sqrt{(\alpha - \delta)^2 + 4\beta\gamma};$$

dabei musste, wenn das Bündel ein reflectirtes sein sollte,

$$\beta = \gamma$$

sein; die Gleichung $z_1 = z_2$ wird daher nur erfüllt, wenn

$$\alpha = \delta \quad \text{und} \quad \beta = \gamma = 0$$

ist.

In diesem speciellen Falle gehen also die allgemeinen Gleichungen (25) eines unendlich dünnen Strahlenbündels über in

$$\begin{aligned} x &= (1 + \alpha z)x_0 \\ y &= (1 + \alpha z)y_0, \end{aligned} \tag{28}$$

sie stellen also die sämmtlichen Geraden dar, die durch den Punkt

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = -\frac{1}{\alpha}$$

gehen. Das Strahlenbündel verhält sich hinter diesem Punkte gerade so, wie wenn es von einem leuchtenden Punkte an diesem Orte direct ausgegangen wäre; vor ihm verhält es sich in geometrischer Beziehung auch so, es divergiren hier aber die Strahlen nicht, sondern sie convergiren. Man nennt den Punkt $\left(0,\ 0,\ -\frac{1}{\alpha}\right)$ das *Bild* des Punktes, von dem das Licht vor der Reflexion ausgegangen ist, und zwar ein *reelles*, wenn es einem positiven Werthe von ϱ_0 entspricht, die reflectirten Strahlen selbst also durch dasselbe hindurchgehen, ein *virtuelles*, wenn ϱ_0 für dasselbe negativ ist, die rückwärts gezogenen Verlängerungen der reflectirten Strahlen also dasselbe treffen.

Vierte Vorlesung.

Brechung des Lichtes. — Brechungsgesetz. — Wellenflächen. — Princip der schnellsten Ankunft. — Untersuchung eines unendlich dünnen Strahlenbündels nach beliebig vielen Brechungen und Reflexionen. — Eigenschaften seiner Wellenflächen. — Optische Wirkung einer sphärischen brechenden Fläche. — Brennpunkte, Zerstreuung, Vergrösserung. — Optische Wirkung eines centrirten Systems sphärischer Linsen. — Hauptpunkte und Knotenpunkte. — Berechnung der Elemente eines Linsensystems und einer einfachen unendlich dünnen Linse.

§ 1.

Ganz ähnliche Betrachtungen, wie wir sie in der dritten Vorlesung in Bezug auf die *Reflexion* des Lichtes durchgeführt haben, lassen sich auch anstellen in Bezug auf die *Brechung* desselben.

Denken wir uns wieder dem leuchtenden Punkte 1 einen durchsichtigen Körper gegenübergestellt und untersuchen die Lichtbewegung in einem Punkte 0 dieses Körpers. Es ist dann bei der früher gebrauchten Bezeichnungsweise

$$4\pi\varphi_0 = \int\limits_s ds\,\Omega, \tag{1}$$

wo ds ein Element der *ganzen* Oberfläche s des Körpers bedeutet. Um den Fall zu vereinfachen, denken wir uns wieder diese Oberfläche mit Ausnahme eines kleinen dem Punkte 1 zugewandten Theiles mit einer schwarzen Hülle bedeckt. Ueber die geschwärzte Fläche genommen, verschwindet dann jenes Integral, da für sie keiner der in § 4 der zweiten Vorlesung hervorgehobenen Ausnahmefälle eintritt, es braucht das Integral (1) daher nur über die freie Fläche ausgedehnt zu werden, die nun wieder die Fläche s heissen möge. Zunächst kommt es darauf an, für diese φ und $\frac{\partial\varphi}{\partial N}$ zu finden, d. h. die Werthe dieser Grössen auszudrücken durch diejenigen, die φ^* an der äusseren Seite der Fläche s besitzt. Zu diesem Zwecke müssen wir wieder von dem Falle ausgehen, dass *ebene* Lichtwellen auf die *ebene* Grenzfläche zweier durchsichtigen Mittel fallen. Das Coordinatensystem sei wieder so gewählt, dass die xy-Ebene die Grenze, also $z = 0$ ihre Gleichung ist, und dass für das erste Mittel $z < 0$, für das zweite $z > 0$ ist. Auf die einfallenden Wellen beziehen wir das

Zeichen φ_e, auf das Mittel, in dem sie sich bewegen, den Index 1 und setzen

$$\varphi_e = A \cos\left(\frac{l_1 x + m_1 y + n_1 z}{\lambda_1} - \frac{t + \alpha}{T}\right) 2\pi. \tag{2}$$

Wie wir in der achten Vorlesung ausführlich zu erörtern haben werden, sind, der Theorie und der Erfahrung gemäss, auch im zweiten Mittel ebene Wellen, die sogenannten *gebrochenen*, vorhanden; beziehen wir auf diese das Zeichen φ_b und auf das zweite Mittel den Index 0, so können wir also setzen

$$\varphi_b = cA \cos\left(\frac{l_0 x + m_0 y + n_0 z}{\lambda_0} - \frac{t + \alpha + \gamma}{T}\right) 2\pi. \tag{2a}$$

Die Wellenlängen sind in den beiden Mitteln verschieden; sie verhalten sich, da die Schwingungsdauer dieselbe ist, wie die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten des Lichtes in ihnen. Zwischen l_1, m_1, n_1 und l_0, m_0, n_0 müssen dabei solche Relationen bestehen, dass die Phasendifferenzen von φ_e und φ_b in demselben Augenblicke in jedem Punkte der Grenze, d. h. für $z = 0$, dieselben sind; nur dann kann den Grenzbedingungen, die zu erfüllen sind, überall genügt werden. Es muss also für alle Werthe von x und y

$$\frac{l_1 x + m_1 y}{\lambda_1} = \frac{l_0 x + m_0 y}{\lambda_0}$$

d. h. es muss

$$\frac{l_1}{\lambda_1} = \frac{l_0}{\lambda_0}, \quad \frac{m_1}{\lambda_1} = \frac{m_0}{\lambda_0}$$

sein. Sind l_1, m_1, n_1 gegeben, so sind hierdurch l_0, m_0, und nach

$$l_0^2 + m_0^2 + n_0^2 = 1$$

auch n_0 bestimmt; die Unbestimmtheit des Vorzeichens von n_0 wird dadurch gehoben, dass die gebrochenen Wellen in das Innere des zweiten Mittels fortschreiten müssen.

Aus den für φ_e und φ_b aufgestellten Gleichungen folgt nun für $z = 0$

$$\varphi_b(t) = c\varphi_e(t + \gamma)$$

$$\frac{\partial \varphi_b(t)}{\partial N} = c\,\frac{n_0}{n_1}\,\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\,\frac{\partial \varphi_e(t + \gamma)}{\partial N}, \tag{3}$$

wo N die in das Innere des zweiten Mittels gerichtete Normale bedeuten kann.

Diese Gleichungen sind auch bei einer gekrümmten Grenze anwendbar, wenn die Wellenlängen als unendlich klein angenommen werden, vorausgesetzt, dass nur *ein* einfallendes Wellensystem vorhanden ist. Das findet in unserem Falle an der Fläche s statt, und hier ist

$$\varphi_e = \varphi^*;$$

ferner ist

$$n_1 = \frac{\partial r_1}{\partial N},$$

da jetzt jene Normale mit der früheren positiven z-Achse zusammenfällt, und hierdurch hat man sich n_0 auf die vorher bezeichnete Weise ausgedrückt zu denken. Nun kann man, ganz ähnlich wie bei der Reflexion, Ω berechnen und damit einen Ausdruck für φ_0 finden. Das Resultat lässt sich schreiben

$$4\pi\varphi_0 = k_0 \int \frac{ds}{r_1 r_0} G \sin\left(k_1 r_1 + k_0 r_0 - \frac{t+\gamma}{T} 2\pi\right), \tag{4}$$

wenn

$$\varphi^* = \frac{1}{r_1} \cos\left(\frac{r_1}{\lambda_1} - \frac{t}{T}\right) 2\pi, \tag{5}$$

ferner ähnlich wie früher

$$\frac{2\pi}{\lambda_1} = k_1, \qquad \frac{2\pi}{\lambda_0} = k_0$$

gesetzt ist, und wenn endlich G eine gewisse Function des Ortes bedeutet, die ebenso wie γ in der Fläche s langsam variirt. In dem Ausdruck von $4\pi\varphi_0$ ist hier ein zweites Integral fortgelassen, welches von derselben Form ist wie das erste, aber den Factor k_0 nicht enthält und statt des Sinus den Cosinus hat; aus den im § 4 der zweiten Vorlesung gefundenen Sätzen folgt, dass dieses immer verschwindet, wenn nicht für einen endlichen Theil von s

$$k_1 r_1 + k_0 r_0$$

constant ist; ist dieses der Fall, so verschwindet es nicht, aber da alsdann das oben angegebene Integral selbst unendlich gross wird, weil es mit dem unendlich grossen k_0 multiplicirt ist, so kann jenes auch dann gegen dieses vernachlässigt werden.

§ 2.

Eine Betrachtung, welche der bei der Reflexion durchgeführten völlig analog ist, lehrt nun, dass der in (4) für φ_0 gegebene Ausdruck im Allgemeinen verschwindet, doch ist, hier wie dort, ein Fall auszuschliessen, wo jener Ausdruck von Null verschieden ist. Um diesen Fall leichter characterisiren zu können, verstehe man unter ν_1 und ν_0 zwei endliche Zahlen, welche den Zahlen k_1 und k_0 proportional und so gewählt sind, dass ν den Werth Eins hat, wenn das betreffende Mittel der leere Raum ist; man nennt dann die den Fortpflanzungsgeschwindigkeiten in 1 und 0 umgekehrt proportionalen Zahlen ν_1 und ν_0 die *Brechungsverhältnisse* für die Medien 1 und 0. Schliesst man dann den Fall aus, dass für einen endlichen Theil des Randes von s $\nu_1 r_1 + \nu_0 r_0$ constant ist, so ist der Ausdruck von φ_0 dann und nur dann von Null verschieden, wenn es einen Punkt in s giebt, für den

$$d(\nu_1 r_1 + \nu_0 r_0)$$

in der Fläche verschwindet. Giebt es einen solchen Punkt und sind x, y, z seine Coordinaten, so muss also

$$
\begin{aligned}
\nu_1 \frac{\partial r_1}{\partial x} + \nu_0 \frac{\partial r_0}{\partial x} &= L \frac{\partial g}{\partial x} \\
\nu_1 \frac{\partial r_1}{\partial y} + \nu_0 \frac{\partial r_0}{\partial y} &= L \frac{\partial g}{\partial y} \\
\nu_1 \frac{\partial r_1}{\partial z} + \nu_0 \frac{\partial r_0}{\partial z} &= L \frac{\partial g}{\partial z},
\end{aligned} \tag{6}
$$

oder bei der in der vorigen Vorlesung angewandten Bezeichnungsweise

$$
\begin{aligned}
\nu_1 \alpha_1 + \nu_0 \alpha_0 &= M\alpha \\
\nu_1 \beta_1 + \nu_0 \beta_0 &= M\beta \\
\nu_1 \gamma_1 + \nu_0 \gamma_0 &= M\gamma
\end{aligned} \tag{6a}
$$

sein. Diese Gleichungen bestimmen α_0, β_0, γ_0, also auch die Richtung $(-\alpha_0, -\beta_0, -\gamma_0)$ d. i. die Richtung des *gebrochenen Strahles*, der von dem Punkte (x, y, z) ausgeht.

Um die Beziehung zwischen den Richtungen des einfallenden und des gebrochenen Strahles einfacher aussprechen zu können, nehmen wir die Normale N zur z-Achse, und die *Einfallsebene* zur xz-Ebene, d. h. wir machen

$$\alpha = 0, \ \beta = 0 \quad \text{und} \quad \beta_1 = 0,$$

dann folgt aus (6a)

$$\beta_0 = 0,$$

d. h. der gebrochene Strahl liegt auch in der Einfallsebene, und

$$\nu_1 \alpha_1 + \nu_0 \alpha_0 = 0;$$

setzt man also

$$\alpha_1 = \sin e, \quad \alpha_0 = -\sin b,$$

d. h. bezeichnet man den Einfallswinkel mit e, den Brechungswinkel mit b, so ergieht sich

$$\frac{\sin e}{\sin b} = \frac{\nu_0}{\nu_1} \quad \text{oder} \quad = \frac{k_0}{k_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_0} = \frac{a_1}{a_0}, \tag{7}$$

wenn a_1 und a_0 die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten des Lichtes in den Medien 1 und 0 bezeichnen. So haben wir das bekannte *Snell'sche Gesetz* für die Richtung der gebrochenen Strahlen abgeleitet.

Wie die Bewegung auf einem gebrochenen Strahle von Punkt zu Punkt sich ändert, findet man durch eine Rechnung, die sich von der bei der Reflexion durchgeführten nur dadurch unterscheidet, dass überall $\nu_1 r_1 + \nu_0 r_0$ an Stelle von $r_1 + r_0$ auftritt. Dadurch ergeben sich für φ_0 die den dort gefundenen ähnlichen Ausdrücke

$$\varphi_0 = \frac{K}{\sqrt{\pm(\varrho_0 - f_1)(\varrho_0 - f_2)}} \frac{\cos}{\sin} (k_1 \varrho_1 + k_0 \varrho_0 + \delta), \tag{8}$$

wo das Zeichen unter der Quadratwurzel wieder so zu bestimmen ist, dass die Wurzelgrösse reell wird, und wo die Wahl des Sinus oder des Cosinus wie früher durch die Lage des Punktes 0 bedingt ist.

Ein von einem Punkte ausgegangenes und an einer Fläche *gebrochenes* Strahlenbündel stimmt in seinen allgemeinen geometrischen Eigenschaften vollkommen mit einem *reflectirten* überein; auch die gebrochenen Strahlen stehen senkrecht auf einem System von Flächen, den sogenannten *Wellenflächen.* Nur die Gleichung derselben ist hier eine andere; für x_0, y_0, z_0 als laufende Coordinaten eines Punktes ist sie nämlich

$$\nu_1(\varrho_1) + \nu_0(\varrho_0) = \text{const.}, \tag{9}$$

wenn in ϱ_1 und ϱ_0 die Coordinaten des Einfallspunktes (u, v) durch x_0, y_0, z_0 ausgedrückt werden mit Hülfe der Gleichungen des durch (x, y, z) oder (u, v) gehenden gebrochenen Strahles.

Die Gesetze, die die Richtung eines durch Reflexion oder Brechung entstandenen Strahles bestimmen, lassen sich leicht in *einen* Satz zusammenfassen: ν_1 und ν_0 sind den Fortpflanzungsgeschwindigkeiten des Lichtes in den beiden Mitteln umgekehrt proportional, $\nu_1 r_1 + \nu_0 r_0$ ist daher, in einer gewissen Einheit ausgedrückt, die Zeit, die das Licht gebrauchen würde, um von 1 über den Punkt (x, y, z) der Grenze nach 0 zu gelangen; dieser Punkt (x, y, z) ist dann dadurch zu bestimmen, dass für ihn $d(\nu_1 r_1 + \nu_0 r_0)$ auf der Grenzfläche verschwindet, also dadurch, dass der Zuwachs verschwindet, den die genannte Zeit erfährt, wenn der Punkt (x, y, z) unendlich wenig in der brechenden Fläche verschoben wird. Man pflegt diesen Satz dahin auszusprechen, dass man sagt, das Licht nimmt von 1 nach 0 *den* Weg, auf dem es die *kürzeste Zeit* gebraucht, und man nennt diesen Satz das *Princip der schnellsten Ankunft.* Diese Ausdrücke sind nicht ganz präcise; soll nämlich jene Zeit ein Minimum sein, so muss allerdings ihre Variation verschwinden, aber nicht immer, wenn die Variation verschwindet, ist die Zeit ein Minimum. Doch wollen wir dem Sprachgebrauche folgend diese Bezeichnung beibehalten. Dasselbe Princip bestimmt offenbar auch den Weg, den ein Lichtstrahl bei einer Reflexion nimmt, denn $r_1 + r_0$, dessen Differential längs einer jeden Richtung in der reflectirenden Fläche verschwinden muss, ist hier, in einer gewissen Einheit ausgedrückt, die Zeit, die das Licht gebraucht, um von 1 über (x, y, z) nach 0 zu kommen.

Das Princip der schnellsten Ankunft bestimmt nun auch den Weg, den ein Lichtstrahl bei *beliebig vielen* Brechungen und Reflexionen von einem Punkte 1 nach einem Punkte 0 nimmt. Es seien

$$r_1, r_2 \ldots r_h, r_0$$

die Strecken, die er in den einzelnen Mitteln zurücklegt,

$$\nu_1, \nu_2 \ldots \nu_h, \nu_0$$

die reciproken Fortpflanzungsgeschwindigkeiten in ihnen; der Weg des Lichtstrahles ist dann dadurch bestimmt, dass

$$\nu_1 r_1 + \nu_2 r_2 + \cdots + \nu_h r_h + \nu_0 r_0 = \tau \tag{10}$$

ein Minimum ist, oder präciser ausgedrückt dadurch, dass $d\tau$ für irgend welche Verschiebungen der Einfallspunkte verschwindet. Sind

$$u_2 v_2, \quad u_3 v_3 \quad \ldots \quad u_{k+1} v_{k+1}$$

Paare von Variabeln, die je einen Punkt auf den einzelnen Grenzflächen bestimmen, so sind die Einfallspunkte zu ermitteln aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau}{\partial u_2} &= 0, \ldots \frac{\partial \tau}{\partial u_{k+1}} = 0 \\ \frac{\partial \tau}{\partial v_2} &= 0, \ldots \frac{\partial \tau}{\partial v_{k+1}} = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Hieraus ist weiter mit Leichtigkeit zu erweisen, dass die Strahlen, die von dem leuchtenden Punkte 1 ausgegangen und an beliebig vielen Flächen reflectirt oder gebrochen sind, denselben Charakter haben, wie wenn sie nur eine Reflexion oder Brechung erfahren hätten, dass sie nämlich auch auf einem System von Flächen, den *Wellenflächen*, senkrecht stehen. Die Gleichung der Wellenflächen ist, wenn x_0, y_0, z_0 die laufenden Coordinaten eines Punktes sind,

$$\tau = \text{const.},$$

wo in dem Ausdruck von τ die Einfallspunkte mit Hülfe des Principes der schnellsten Ankunft durch x_0, y_0, z_0 auszudrücken sind. Dass nämlich diejenige von jenen Flächen, die den Punkt 0 enthält, von dem durch diesen Punkt gehenden Strahl senkrecht geschnitten wird lehrt diese Ueberlegung: Es ist

$$\frac{\partial \tau}{\partial x_0} = \nu_0 \frac{\partial r_0}{\partial x_0} + \frac{\partial \tau}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_0} + \frac{\partial \tau}{\partial v_2}\frac{\partial v_2}{\partial x_0} + \cdots + \frac{\partial \tau}{\partial v_{k+1}}\frac{\partial v_{k+1}}{\partial x_0},$$

und entsprechende Gleichungen gelten für die Ableitungen von τ nach y_0 und z_0. Aus (11) folgt aber, dass auf der rechten Seite alle Glieder mit Ausnahme des ersten fortfallen, und die so sich ergebenden Gleichungen

$$\frac{\partial \tau}{\partial x_0} = \nu_0 \frac{\partial r_0}{\partial x_0}, \quad \frac{\partial \tau}{\partial y_0} = \nu_0 \frac{\partial r_0}{\partial y_0}, \quad \frac{\partial \tau}{\partial z_0} = \nu_0 \frac{\partial r_0}{\partial z_0},$$

zeigen, dass die Normale der Wellenfläche im Punkte 0 mit dem Lichtstrahl zusammenfällt.

Unmittelbar folgt endlich aus der Gleichung der Wellenflächen, dass alle betrachteten Strahlen *dieselbe Zeit* gebrauchen, um von einer Wellenfläche zu einer andern zu gelangen.

§ 3.

Wir wollen jetzt eine Anwendung des vorher abgeleiteten Brechungsgesetzes machen auf die optische Wirkung einer *Linse* oder eines *Systemes von Linsen.* Dazu muss jedoch noch die folgende allgemeinere Betrachtung vorausgeschickt werden.

Wenn durch eine einmalige Brechung im Punkte (x, y, z) einer Fläche $g(xyz) = 0$ ein Strahl von 1 nach 0 gelangt, so ist bei der vorhin gebrauchten Bezeichnung

$$d(\nu_1 r_1 + \nu_0 r_0) = 0.$$

Diese Gleichung ist eine Zusammenfassung der drei folgenden

$$\nu_1 \frac{\partial r_1}{\partial x} + \nu_0 \frac{\partial r_0}{\partial x} = L \frac{\partial g}{\partial x}$$
$$\nu_1 \frac{\partial r_1}{\partial y} + \nu_0 \frac{\partial r_0}{\partial y} = L \frac{\partial g}{\partial y}$$
$$\nu_1 \frac{\partial r_1}{\partial z} + \nu_0 \frac{\partial r_0}{\partial z} = L \frac{\partial g}{\partial z},$$

die wieder gleichbedeutend sind mit

$$\nu_1 \alpha_1 + \nu_0 \alpha_0 = M\alpha$$
$$\nu_1 \beta_1 + \nu_0 \beta_0 = M\beta$$
$$\nu_1 \gamma_1 + \nu_0 \gamma_0 = M\gamma;$$

alle diese Gleichungen sind nur verschiedene Ausdrücke des Brechungsgesetzes. Lassen wir nun den Punkt 0 auf dem gebrochenen Strahle und seiner Verlängerung über (x, y, z) hinaus aus dem zweiten Mittel in das erste hineinrücken, verstehen aber immer, wie früher, unter $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ die Richtungscosinus der von 0 nach (x, y, z) gezogenen Linie, so nehmen beim Ueberschreiten der Grenze $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ die entgegengesetzten Werthe an; es gelten daher dann die Gleichungen

$$\nu_1 \alpha_1 - \nu_0 \alpha_0 = M\alpha,$$
$$\nu_1 \beta_1 - \nu_0 \beta_0 = M\beta,$$
$$\nu_1 \gamma_1 - \nu_0 \gamma_0 = M\gamma,$$

oder

$$\nu_1 \frac{\partial r_1}{\partial x} - \nu_0 \frac{\partial r_0}{\partial x} = L \frac{\partial g}{\partial x}$$
$$\nu_1 \frac{\partial r_1}{\partial y} - \nu_0 \frac{\partial r_0}{\partial y} = L \frac{\partial g}{\partial y}$$
$$\nu_1 \frac{\partial r_1}{\partial z} - \nu_0 \frac{\partial r_0}{\partial z} = L \frac{\partial g}{\partial z},$$

oder endlich

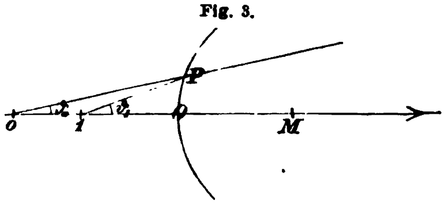
$$d(\nu_1 r_1 - \nu_0 r_0) = 0.$$

Verstehen wir also unter einem Strahl die nach beiden Seiten ins Unendliche sich erstreckende Gerade, von der er eigentlich nur einen Theil ausmacht, so können wir hiernach sagen, dass der von 1 herkommende und an der Grenze der beiden Mittel gebrochene Strahl, der durch den Punkt 0 geht, durch die Gleichungen $d(\nu_1 r_1 + \nu_0 r_0) = 0$ oder $d(\nu_1 r_1 - \nu_0 r_0) = 0$ bestimmt ist, je nachdem der Punkt 0 im zweiten oder im ersten Mittel liegt. Dabei ist, wie dies bisher immer geschah, r_0 als positiv zu rechnen. Statt dessen können wir auch sagen: Es gilt immer die Gleichung $d(\nu_1 r_1 + \nu_0 r_0) = 0$, dabei ist aber r_0 positiv oder negativ zu rechnen, je nachdem 0 im zweiten oder im ersten Mittel sich befindet.

Eine ähnliche Verallgemeinerung, wie wir sie soeben in Betreff der Lage des Punktes 0 haben eintreten lassen, können wir auch in Betreff der Lage des Punktes 1 einführen: diesen können wir auch in dem zweiten Mittel annehmen, wenn wir zu dem einfallenden Strahl seine Verlängerung hinzurechnen. In diesem Sinne gilt der Satz: Einem einfallenden Strahle, der durch einen Punkt 1 geht, entspricht ein gebrochener Strahl, der durch einen andern Punkt 0 geht, wenn für sie $d(\nu_1 r_1 + \nu_0 r_0) = 0$ ist, wo r_1 positiv ist, wenn 1 auf der *ersten* Seite der brechenden Fläche, r_0 positiv ist, wenn 0 auf der *zweiten* Seite der brechenden Fläche liegt, diese Grössen aber negativ sind in den entgegengesetzten Fällen.

Nun sei die brechende Fläche kugelförmig; M sei ihr Mittelpunkt, eine durch M gelegte Linie die z-Achse unseres Coordinatensystems; im Sinne der wachsenden z falle Licht auf die Fläche. Ihr Schnitt O mit der z-Achse sei der Anfangspunkt der Coordinaten; die z-Ordinate von M sei R, so dass der absolute Werth von R der Radius der Kugel, R aber positiv oder negativ ist, je nachdem das Licht auf die convexe oder concave Seite der Kugel fällt. Auf der z-Achse denken wir uns zwei Punkte 1 und 0, deren Coordinaten z_1 und z_0 sind, nehmen an, dass die einfallenden Strahlen durch 1 gehen, und suchen *den* gebrochenen Strahl, der (reell oder virtuell) durch 0 geht. (x, y, z) sei der Punkt P, in dem dieser gebrochen ist, r_1 und r_0 zwei Zahlen, deren absolute Werthe die Abstände desselben von 1 und 0 und deren Vorzeichen so gewählt sind, dass r_1 und z_1 entgegengesetztes, r_0 und z_0 gleiches Zeichen haben. Mit Berücksichtigung des soeben hergeleiteten allgemeinen Satzes ergeben sich dann für x, y, z die Bedingungsgleichungen

Fig. 3.



$$\frac{\partial}{\partial x}(\nu_1 r_1 + \nu_0 r_0) = 0 \qquad \frac{\partial}{\partial y}(\nu_1 r_1 + \nu_0 r_0) = 0 \tag{12}$$

und dabei

$$x^2 + y^2 + (z - R)^2 = R^2.$$

Nun nehmen wir an, dass alle Strahlen nur unendlich kleine Winkel mit der z-Achse bilden, dann wird die letzte Gleichung bei Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen höherer Ordnung

$$z = \frac{x^2 + y^2}{2R}.$$

Weiter ist

$$r_1 = \pm\sqrt{x^2 + y^2 + (z_1 - z)^2} = \pm\sqrt{z_1^2 + (x^2 + y^2)\left(1 - \frac{z_1}{R}\right)}$$

$$r_0 = \pm\sqrt{x^2 + y^2 + (z_0 - z)^2} = \pm\sqrt{z_0^2 + (x^2 + y^2)\left(1 - \frac{z_0}{R}\right)},$$

oder, wenn man die Wurzeln bis auf Glieder der zweiten Ordnung entwickelt und der vorausgeschickten Regel gemäss ihre Vorzeichen wählt,

$$r_1 = -z_1 - \frac{x^2+y^2}{2}\left(\frac{1}{z_1} - \frac{1}{R}\right) \qquad r_0 = z_0 + \frac{x^2+y^2}{2}\left(\frac{1}{z_0} - \frac{1}{R}\right).$$

Die Gleichungen (12) geben daher

$$x\left(\nu_1\left(\frac{1}{z_1} - \frac{1}{R}\right) - \nu_0\left(\frac{1}{z_0} - \frac{1}{R}\right)\right) = 0$$

$$y\left(\nu_1\left(\frac{1}{z_1} - \frac{1}{R}\right) - \nu_0\left(\frac{1}{z_0} - \frac{1}{R}\right)\right) = 0.$$

Diesen Gleichungen wird genügt, wenn $x = 0$, $y = 0$, aber auch, bei beliebigen Werthen von x und y, wenn

$$\nu_1\left(\frac{1}{z_1} - \frac{1}{R}\right) = \nu_0\left(\frac{1}{z_0} - \frac{1}{R}\right) \tag{13}$$

ist. Im letzten Falle gehen *alle* von 1 ausgehenden Strahlen durch 0, es ist also 0 das Bild von 1. Jedem reellen Werthe von z_1 entspricht ein reeller Werth von z_0 und beide wachsen gleichzeitig. Jeder Punkt 1 hat also sein Bild 0, und die Gleichung (13) lehrt, dass sich Bild und Object gleichzeitig in demselben Sinne auf der z-Achse bewegen.

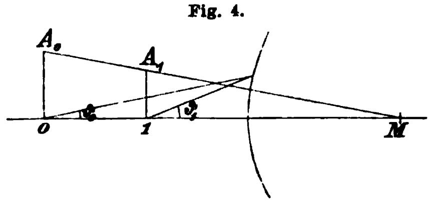
Die Divergenz der Strahlen ist durch die Brechung geändert. Es sei ϑ_1 der Winkel, den einer der einfallenden Strahlen mit der z-Achse bildet, ϑ_0 der Winkel zwischen dem entsprechenden gebrochenen Strahle und der Achse; bei Rücksicht darauf, dass ϑ_1 und ϑ_0 unendlich klein sind, hat man dann

$$\frac{\vartheta_0}{\vartheta_1} = \frac{z_1}{z_0},$$

jenes Verhältniss ist also für alle Strahlen dasselbe; wir wollen es bezeichnen als die *Zerstreuung* der Strahlen.

Alle Geraden, die durch den Mittelpunkt der Kugel gezogen sind, verhalten sich ganz ebenso, wie die hier gewählte Achse; daraus ist zu schliessen, dass ein Stück $1A_1$ einer um M beschriebenen Kugelfläche durch die Brechung an unserer Fläche in dem Stücke $0A_0$ einer concentrischen Kugelfläche ähnlich abgebildet wird. Ist das Object, mithin auch das Bild, unendlich klein, so fallen diese Kugelstücke mit ebenen Flächen zusammen, die auf unserer z-Achse senkrecht stehen. Die Grösse des Bildes ist eine andere, als die des Objectes. Sind x_1 und x_0 die Abstände der Punkte A_1, A_0 von der Achse, so ist der Werth des Bruches $\frac{x_0}{x_1}$ für alle Punkte derselbe und giebt uns ein Mass für das Grössenverhältniss von Bild und Object, jener Bruch heisst daher die *Ver-*

Fig. 4.



grösserung des Bildes. Er ist bestimmt durch die Gleichung

$$\frac{x_0}{x_1} = \frac{R - z_0}{R - z_1} = \frac{z_0}{z_1} \frac{\frac{1}{z_0} - \frac{1}{R}}{\frac{1}{z_1} - \frac{1}{R}} = \frac{\nu_1}{\nu_0} \frac{z_0}{z_1} = \frac{\nu_1}{\nu_0} \frac{\vartheta_1}{\vartheta_0}, \tag{14}$$

wo $\frac{\vartheta_1}{\vartheta_0}$ sich auf die Punkte 1 und 0 bezieht; eine merkwürdige Gleichung, von der wir sehr bald eine Verallgemeinerung kennen lernen werden.

§ 4.

Denken wir uns eine Reihe von verschiedenen durchsichtigen Mitteln, getrennt von einander durch kugelförmige Flächen, deren Mittelpunkte alle auf *einer* Geraden, unserer z-Achse liegen; eine solche Reihe wird ein *centrirtes Linsensystem* genannt. In dem ersten Mittel befinde sich ein kleines Object in einer auf der z-Achse senkrechten Ebene; von diesem entwirft die erste brechende Fläche ein ähnliches Bild, welches als Object für die zweite Fläche angesehen werden kann, und von welchem die folgende wieder ein ähnliches Bild erzeugt. Setzt man diese Schlussweise fort, so sieht man, dass das ganze System von dem Object ein ähnliches Bild in einer zur z-Achse senkrechten Ebene hervorbringt. Von diesem Bilde lassen sich noch weitere Eigenschaften ableiten ohne specielle Voraussetzungen über die Beschaffenheit des Systemes.

Zunächst lässt sich die *Form* der Gleichung finden, die zwischen den z-Coordinaten z_1 und z_0 von Object und Bild besteht. Für *eine* brechende Fläche hatten wir die Gleichung

$$\nu_1 \left(\frac{1}{z_1} - \frac{1}{R}\right) = \nu_0 \left(\frac{1}{z_0} - \frac{1}{R}\right)$$

gefunden, wenn der Coordinatenanfangspunkt in der brechenden Fläche lag. Verlegen wir diesen Anfangspunkt auf der z-Achse, indem wir zu z_1 und z_0 dieselbe beliebige Constante hinzufügen, drücken wir dann z_0 durch z_1 aus, und schreiben endlich noch z_2 an Stelle von z_0, so ergiebt sich

$$z_2 = \frac{\alpha_1 + \beta_1 z_1}{\gamma_1 + \delta_1 z_1},$$

wo sich also z_2 auf das durch die erste brechende Fläche erzeugte Bild bezieht. Hat z_3 dieselbe Bedeutung für das folgende Bild, so ist ebenso

$$z_3 = \frac{\alpha_2 + \beta_2 z_2}{\gamma_2 + \delta_2 z_2},$$

oder bei Berücksichtigung des soeben gefundenen Werthes von z_2

$$z_3 = \frac{\alpha'' + \beta'' z_1}{\gamma'' + \delta'' z_1}.$$

Führt man so eine Brechung nach der anderen in die Rechnung ein, und bezieht z_0 auf das letzte Bild, so findet man offenbar zwischen z_0 und z_1 eine Gleichung von der Form

$$z_0 = \frac{\alpha + \beta z_1}{\gamma + \delta z_1},$$

welche man folgendermassen schreiben kann

$$z_0 - f_0 = - \frac{B}{z_1 - f_1}. \tag{15}$$

Wir haben nun gesehen, dass bei *einer* brechenden Fläche z_0 und z_1 gleichzeitig wachsen, und daraus folgt, dass dasselbe auch bei dem ganzen Systeme der Fall sein muss. Aus (15) ergiebt sich aber

$$\frac{d z_0}{d z_1} = \frac{B}{(z_1 - f_1)^2},$$

und da hierin $\frac{d z_0}{d z_1}$ sowie $(z_1 - f_1)^2$ positiv sind, so folgt, dass B eine *positive* Constante sein muss. Die Gleichung (15) zeigt ferner, dass für jeden reellen Werth von z_1 ein reeller Werth von z_0 vorhanden ist, was wir auch direct aus der Richtigkeit dieses Satzes für eine brechende Fläche hätten erschliessen können. Die Punkte $z = f_1$ und $z = f_0$ nennt man den ersten und den zweiten *Brennpunkt* oder zusammen die *Hauptbrennpunkte* des Systems; aus (15) folgt, dass sich ein Object im ersten Brennpunkt in der Unendlichkeit, ein Object in der Unendlichkeit im zweiten Brennpunkt abbildet.

Um nun die *Vergrösserung* des Bildes zu finden, fassen wir einen Punkt des Objects ins Auge, der in der xz-Ebene liegt und die Coordinaten $(x_1, 0, z_1)$ hat. Wir wissen schon, dass sich *alle* von diesem Punkte ausgegangenen Strahlen, nachdem sie das System durchlaufen haben, in *einem* Punkte, dem *Bilde* jenes Punktes schneiden. Um den Ort dieses Bildes zu finden, würde es schon ausreichen *zwei* Strahlen bei ihren Brechungen zu verfolgen; wir wollen die von dem Punkte ausgehenden Strahlen betrachten, die in der xz-Ebene liegen; bei allen Brechungen bleiben sie wegen der stattfindenden Symmetrie in dieser Ebene, woraus folgt, dass auch das letzte Bild des Punktes in der xz-Ebene liegt. Sind $(x_0, 0, z_0)$ seine Coordinaten, so ist $\frac{x_0}{x_1}$ die gesuchte Vergrösserung; dieselbe ist eine Function von z_1 oder von z_0 allein, da dies für eine brechende Fläche der Fall ist. Es würde weitläufige Rechnungen erfordern, wenn wir dieses Verhältniss ermitteln wollten durch Untersuchung der Brechung an den einzelnen Flächen des Systemes; die folgende Erwägung lehrt es unmittelbar kennen.

Wir haben bisher nur von einem Objecte gesprochen, das in einer zur z-Achse *senkrechten Ebene* liegt; von einem solchen erzeugt das Linsensystem ein *ähnliches* Bild. Da von jedem *Punkte* ein Bild entsteht, so wird auch ein *räumlich* ausgedehntes Object durch das System *abgebildet* werden, aber nicht mehr ähnlich; die Dimensionen in der Richtung der z-Achse werden in anderem Verhältniss vergrössert, als die Dimensionen in der Richtung der x- und der y-Achse, und mit den z-Coordinaten ändert sich die eine wie die andere Vergrösserung. *Eine* Eigenschaft der Abbildung eines räumlich ausgedehnten Objectes kennen wir aber von vornherein: Eine gerade Linie des Objectes, die ein einfallender Lichtstrahl sein kann, wird als gerade Linie abgebildet, nämlich als der gebrochene Lichtstrahl, der von jenem herrührt, da ja *alle* Strahlen, die vor der Brechung durch einen Punkt gehen, nach der Brechung das Bild des Punktes passiren. Daraus ist zu schliessen, *dass, wenn zwischen* x_1 *und* z_1 *eine lineare Gleichung besteht, auch zwischen* x_0 *und* z_0 *eine solche bestehen muss.*

Es sei nun

$$Ax_1 + Cz_1 + D = 0$$

jene lineare Gleichung zwischen x_1 und z_1; mit Rücksicht auf die Voraussetzung, welche der ganzen im Vorstehenden entwickelten Deduction zu Grunde liegt, dass nämlich alle *Strahlen* der Achse sehr nahe und ihre Winkel mit derselben sehr klein sind, müssen in ihr C und D gegen A klein sein. Führen wir nun in sie x_0 und z_0 statt x_1 und z_1 ein, so muss die so sich ergebende Gleichung linear in Bezug auf x_0 und z_0 gemacht werden können. Nun ergiebt sich aus (15)

$$z_1 = f_1 - \frac{B}{z_0 - f_0},$$

ferner wollen wir setzen

$$\frac{x_0}{x_1} = F(z_0),$$

wo F eine zu bestimmende Function des beigesetzten Argumentes bedeutet. Dann verwandelt sich jene Gleichung in

$$\frac{A}{F(z_0)} x_0 + C\left(f_1 - \frac{B}{z_0 - f_0}\right) + D = 0;$$

multiplicirt man diese Gleichung mit $z_0 - f_0$, so sieht man, dass sie nur dann linear wird, wenn

$$F(z_0) = \frac{z_0 - f_0}{E}$$

ist, wo E eine Constante bedeutet; die Gleichung ist dann

$$AEx_0 + (Cf_1 + D)(z_0 - f_0) - BC = 0, \tag{16}$$

und die gesuchte *Vergrösserung des Bildes*

$$\frac{x_0}{x_1} = \frac{z_0 - f_0}{E} = -\frac{B}{E}\,\frac{1}{z_1 - f_1}. \tag{16a}$$

Es ist also die Vergrösserung $\frac{x_0}{x_1}$ eine lineare ganze Function von z_0. Aus (16a) ergiebt sich

$$x_0 = -\frac{B}{E}\,\frac{x_1}{z_1 - f_1},$$

in derselben Weise erhält man

$$y_0 = -\frac{B}{E}\frac{y_1}{z_1 - f_1},$$

während aus (15)

$$z_0 = f_0 - \frac{B}{z_1 - f_1}$$

folgt. Es sind also die Coordinaten x_0, y_0, z_0 des Bildes eines Punktes (x_1, y_1, z_1) lineare gebrochene Functionen von jenen mit demselben nur von z_1 abhängigen Nenner.

Bei der Untersuchung einer einzelnen brechenden Fläche haben wir die *Zerstreuung* der Strahlen ins Auge gefasst. Derselbe Begriff kann offenbar auch hier bei einem brechenden *Systeme* Anwendung finden. Denken wir uns einen einfallenden Strahl, der bei $z = z_1$ die z-Achse unter dem (kleinen) Winkel ϑ_1 schneidet; der durch das System gebrochene Strahl schneide die Achse bei $z = z_0$ unter dem Winkel ϑ_0; $\frac{\vartheta_0}{\vartheta_1}$ ist dann das, was wir die Zerstreuung der von $z = z_1$ ausgehenden Strahlen genannt haben. Die Gleichung des einfallenden Strahles sei wie oben

$$Ax + Cz + D = 0;$$

dann ist $z = z_1$ für $x = 0$, d. h.

$$z_1 = -\frac{D}{C},$$

und

$$\vartheta_1 = \frac{dx}{dz} = -\frac{C}{A}.$$

Die Gleichung des gebrochenen Strahles ist dann nach (16)

$$AEx + (Cf_1 + D)(z - f_0) - BC = 0.$$

Setzt man hierin $x = 0$, so ergiebt sich für z_0 die schon vorher gefundene Gleichung

$$z_0 - f_0 = \frac{BC}{Cf_1 + D} = \frac{B}{f_1 - z_1},$$

und ferner

$$\vartheta_0 = \frac{dx}{dz} = -\frac{Cf_1 + D}{AE};$$

also wird die Zerstreuung

$$\frac{\vartheta_0}{\vartheta_1} = \frac{f_1 + \frac{D}{C}}{E} = \frac{f_1 - z_1}{E} = \frac{B}{E}\frac{1}{z_0 - f_0}.$$

Im Folgenden wollen wir eine Aenderung der Bezeichnung vornehmen: Für E wollen wir $-b_0$ schreiben und

$$B = b_1 b_0$$

setzen; es sind dann b_1 und b_0 von gleichem Vorzeichen, da B positiv ist; diese Grössen heissen die *Brennweiten* des Systemes, b_1 die erste, b_0 die zweite. f_1, f_0, b_1, b_0 können als die Elemente des Linsensystems bezeichnet werden; von ihnen allein hängt die Wirkung desselben, soweit wir sie hier betrachten, ab, wie die nachstehende Zusammenstellung erkennen lässt.

$$\frac{z_0 - f_0}{b_0} = \frac{b_1}{f_1 - z_1} \quad \text{(Ort des Bildes)}$$

$$\frac{x_0}{x_1} = -\frac{z_0 - f_0}{b_0} = -\frac{b_1}{f_1 - z_1} \cdot \quad \text{(Vergrösserung des Bildes)} \qquad (17)$$

$$\frac{\vartheta_0}{\vartheta_1} = -\frac{b_1}{z_0 - f_0} = -\frac{f_1 - z_1}{b_0} \quad \text{(Zerstreuung der Strahlen);}$$

auch in diesen Formeln beziehen sich die Indices 1 und 0 auf das Object und auf das von jenem entworfene Bild.

Aus den beiden letzten dieser Gleichungen folgt

$$\frac{x_0}{x_1} \cdot \frac{\vartheta_0}{\vartheta_1} = \frac{b_1}{b_0}, \qquad (17\,\text{a})$$

dieses Product ist also unabhängig von der Lage des Objectes und seines Bildes. Aber noch einfacher lässt sich der Werth dieses Productes angeben: Wir haben für *eine* brechende Fläche die Gleichung

$$\frac{x_0}{x_1}\frac{\vartheta_0}{\vartheta_1} = \frac{\nu_1}{\nu_0}$$

bewiesen; denken wir uns die entsprechenden Gleichungen für alle brechenden Flächen unseres Systemes gebildet, also

$$\frac{x_2}{x_1}\frac{\vartheta_2}{\vartheta_1} = \frac{\nu_1}{\nu_2}, \quad \frac{x_3}{x_2}\frac{\vartheta_3}{\vartheta_2} = \frac{\nu_2}{\nu_3}, \ldots$$

und alle diese multiplicirt, so heben sich die auf die Zwischenbilder bezüglichen Grössen fort, und es bleibt

$$\frac{x_0}{x_1}\frac{\vartheta_0}{\vartheta_1} = \frac{\nu_1}{\nu_0},$$

wo sich auf das erste Mittel der Index 1, auf das letzte der Index 0 bezieht. Wir erhalten also dieselbe Gleichung, die für *eine* brechende Fläche gilt. Dabei ergiebt sich zugleich wegen (17a)

$$\frac{b_1}{b_0} = \frac{\nu_1}{\nu_0}. \qquad (17\,\text{b})$$

Ist das letzte und das erste Mittel dasselbe, ein Fall der bei Fernröhren, Mikroskopen und anderen optischen Instrumenten eintritt, so ist

$$b_1 = b_0 \quad \text{und} \quad \frac{x_0}{x_1} \cdot \frac{\vartheta_0}{\vartheta_1} = 1.$$

§ 5.

Bei Untersuchungen, die sich auf ein gegebenes Linsensystem beziehen, hat man entweder für ein Object, das in einem gegebenen Punkte sich befindet, das Bild, oder für einen gegebenen einfallenden Strahl den gebrochenen zu ermitteln. Die Gleichungen (17) des vorigen Paragraphen lösen die erste Aufgabe allgemein, wenn man die x-Achse passend wählt, die zweite nur in dem Falle, dass der einfallende Strahl die z-Achse schneidet. Es giebt aber geometrische Constructionen, und zwar recht mannigfaltiger Art, durch welche beide Aufgaben allgemein und einfach gelöst werden können. Im Folgenden sollen die einfachsten angegeben werden.

Der Ausdruck (17) für die Vergrösserung zeigt, dass diese, wenn z_0 oder wenn z_1 alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft, jeden Werth von $-\infty$ bis $+\infty$ einmal und nur einmal annimmt; es giebt also *ein* Werthepaar von z_1 und z_0, für welches $x_0 = x_1$ ist, d. h. für welches Bild und Object gleiche Grösse und gleiche Lage haben. Es seien diese Werthe h_1 und h_0; dann ist

$$h_1 = f_1 + b_1, \quad h_0 = f_0 - b_0. \tag{18}$$

Die hierdurch bestimmten Punkte der Achse hat *Gauss**) zuerst in Betracht gezogen und sie den *ersten* und *zweiten Hauptpunkt* des Systems genannt; die durch sie senkrecht zur Achse gelegten Ebenen heissen die *Hauptebenen* des Systemes.

Ebenso giebt es einen Werth von z_1 und einen von z_0, für welche $x_0 = -x_1$ ist, für welche also das Bild dieselbe Grösse, aber die entgegengesetzte Lage, wie das Object hat; sind H_1 und H_0 diese Werthe, so ist

$$H_1 = f_1 - b_1, \quad H_0 = f_0 + b_0. \tag{18a}$$

*Töpler***) hat vorgeschlagen, diese Punkte der Achse die *Hauptpunkte der zweiten Art* und die entsprechenden Ebenen die *Hauptebenen der zweiten Art* zu nennen. Diese vier Hauptebenen erlauben in sehr einfacher Weise den gebrochenen Strahl zu construiren, der von einem einfallenden herrührt, da man auf das leichteste die Bilder seiner Schnittpunkte mit den Ebenen h_1 und H_1 finden kann.

Dieser Construction des gebrochenen Strahles entspricht vollkommen eine Construction des Bildes eines Punktes.

Der Ausdruck (17) für die Zerstreuung lehrt, dass es ein Werthepaar von z_1 und z_0 giebt, für welches $\frac{\vartheta_0}{\vartheta_1}$ irgend einen gegebenen reellen Werth besitzt; es sei

$$\vartheta_0 = \vartheta_1 \quad \text{für} \quad z_1 = k_1, \quad z_0 = k_0;$$

ein Strahl, der vor der Brechung durch den Punkt $z = k_1$ der Achse geht, geht dann nach der Brechung in ungeänderter Richtung durch den Achsenpunkt $z = k_0$. Dabei ist nach (17)

$$k_1 = f_1 + b_0, \quad k_0 = f_0 - b_1. \tag{19}$$

Auf diese Punkte hat *Listing* zuerst aufmerksam gemacht und sie den *ersten* und *zweiten Knotenpunkt* des Systems genannt; ist $v_0 = v_1$, also $b_0 = b_1$, so fallen sie mit den *Gauss*'schen Hauptpunkten zusammen. *Töpler* hat nun wieder *die* beiden Punkte der Achse *Knotenpunkte der zweiten Art* genannt, für welche $\vartheta_1 = -\vartheta_0$

*) Dioptrische Untersuchungen. Göttingen 1840. Werke Bd. V.

**) *Poggend.* Ann. Bd. 142.

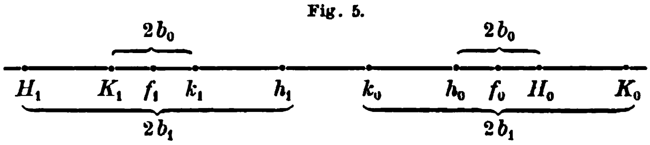
ist. Ein Strahl, der vor der Brechung durch den ersten dieser Punkte geht, geht nach der Brechung durch den zweiten und bildet mit der Achse einen eben so grossen Winkel wie jener, aber in entgegengesetztem Sinne. Ist für diese Punkte $z_1 = K_1$, $z_0 = K_0$, so ist

$$K_1 = f_1 - b_0, \quad K_0 = f_0 + b_1; \tag{19a}$$

sie fallen mit den Hauptpunkten zweiter Art zusammen, wenn $\nu_0 = \nu_1$ ist. Mit Hülfe der vier Knotenpunkte kann man das Bild 0 irgend eines Punktes 1 construiren, da man leicht die gebrochenen Strahlen zeichnen kann, die von *den* einfallenden herrühren, welche von 1 nach k_1 und K_1 gehen.

Die nachstehende Figur veranschaulicht die symmetrische Lage dieser vier Punktepaare zu den Hauptbrennpunkten, sowie die Beziehungen, welche zwischen ihren Abständen und den beiden Brennweiten des Systemes bestehen.

Fig. 5.



Wir wollen nun darauf ausgehen, die Elemente eines centrirten Linsensystems zu berechnen aus der Gestalt und Lage seiner brechenden Flächen und den Brechungsverhältnissen seiner Mittel. Zu diesem Zwecke stellen wir uns die folgende Aufgabe: Das ganze System denken wir uns in zwei Theile getheilt, der Art, dass das letzte Mittel des ersten Theils und das erste Mittel des zweiten Theils identisch sind. Die Elemente des ersten Theils seien f_1, f_0, b_1, b_0, die des zweiten f_1', f_0', b_1', b_0', die des ganzen Systemes F_1, F_0, B_1, B_0; es sollen diese letzten vier Grössen aus jenen acht ersten berechnet werden. Die Coordinaten des Objectes seien wieder x_1, z_1, die des Bildes, welches das ganze System erzeugt, x_0, z_0, endlich seien x, z die Coordinaten des Bildes, welches der erste Theil desselben hervorbringt und welches zugleich das Object für den zweiten Theil ist. Wir haben dann nach (17) die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\frac{x}{x_1} &= \frac{f_0 - z}{b_0} = \frac{b_1}{z_1 - f_1} \\
\frac{x_0}{x} &= \frac{f_0' - z_0}{b_0'} = \frac{b_1'}{z - f_1'} \\
\frac{x_0}{x_1} &= \frac{F_0 - z_0}{B_0} = \frac{B_1}{z_1 - F_1}.
\end{aligned} \tag{20a}$$

Da nun identisch $\frac{x_0}{x_1} = \frac{x}{x_1} \cdot \frac{x_0}{x}$ ist, so folgt hieraus

$$\begin{aligned}
\frac{B_1}{b_1 b_1'} &= \frac{z_1 - F_1}{(z_1 - f_1)(z - f_1')} \\
\frac{B_0}{b_0 b_0'} &= \frac{F_0 - z_0}{(f_0 - z)(f_0' - z_0)}.
\end{aligned} \tag{20b}$$

Um diese Gleichungen abzuleiten, haben wir die Grössen x_1, x, x_0 in Betracht gezogen; weiter brauchen wir dieselben nicht zu berücksichtigen, wir können vielmehr die weiteren Schlüsse an die fünf Gleichungen (20a) und (20b) zwischen z_1, z, z_0 anknüpfen. Eine von diesen drei Grössen können wir willkürlich wählen; setzen wir zuerst

$$z_1 = \infty,$$

dann gehen die vier ersten Gleichungen in

$$z = f_0, \quad z_0 = F_0$$

$$f_0' - F_0 = \frac{b_0' b_1'}{f_0 - f_1'}, \qquad B_1 = \frac{b_1 b_1'}{f_0 - f_1'} \tag{21}$$

über, während die fünfte die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ annimmt.

Setzen wir

$$z_0 = \infty,$$

so erscheint die vierte Gleichung in unbestimmter Form, während die vier anderen ergeben

$$z = f_1', \quad z_1 = F_1$$

$$F_1 - f_1 = \frac{b_1 b_0}{f_0 - f_1'}, \qquad B_0 = \frac{b_0 b_0'}{f_0 - f_1'}; \tag{21a}$$

die vier Grössen F_1, F_0, B_1, B_0 sind also durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= f_1 + \frac{b_1 b_0}{f_0 - f_1'}, & B_1 &= \frac{b_1 b_1'}{f_0 - f_1'}, \\ F_0 &= f_0' - \frac{b_1' b_0'}{f_0 - f_1'}, & B_0 &= \frac{b_0 b_0'}{f_0 - f_1'} \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

in der verlangten Weise ausgedrückt. Durch wiederholte Anwendung dieser Formeln kann man die Elemente eines jeden Systems finden, wenn man sie nur für eine einzelne brechende Fläche anzugeben vermag, die allgemeine Aufgabe ist also auf dieselbe für den Fall einer einzigen brechenden Fläche zurückgeführt.

Um diese letzte Aufgabe zu lösen, nehmen wir zunächst an, dass sich das Object in der Tangentialebene der brechenden Fläche und zwar in dem Punkte befinde, in welchem diese die z-Achse schneidet. Soweit dann die brechende Fläche in Betracht kommt, fällt sie mit der Tangentialebene zusammen. Das Bild eines solchen Objectes fällt dann mit dem Objecte selbst zusammen. Da in diesem Falle also Bild und Object dieselbe Grösse und Lage haben, so liegt das Object in der ersten, das Bild in der zweiten Hauptebene, jene beiden Ebenen fallen daher hier zusammen. Wird also jetzt jener Schnittpunkt der brechenden Fläche mit der z-Achse als Anfangspunkt des Coordinatensystems gewählt, so sind die z-Coordinaten h_1 und h_0 jener Hauptebenen beide gleich Null; aus den Gleichungen (18) ergiebt sich daher

$$f_1 = -b_1, \quad f_0 = b_0.$$

Denkt man sich jetzt ein Object im Mittelpunkt M der Linse, so wird ein von M ausgehender Strahl seinen Weg ungehindert fortsetzen, der einem solchen entsprechende gebrochene Strahl wird also ebenfalls durch M gehen und dieselbe Richtung wie der einfallende Strahl besitzen. Die beiden Knotenpunkte des Systems fallen also im Mittelpunkte M der Linse zusammen, und aus den Gleichungen (19) ergiebt sich daher

$$f_1 + b_0 = R, \quad f_0 - b_1 = R,$$

und hieraus folgt mit Hülfe der obigen Gleichungen

$$b_0 - b_1 = R;$$

aus dieser und aus der früher abgeleiteten Gleichung (17b)

$$\frac{b_0}{\nu_0} - \frac{b_1}{\nu_1} = 0$$

erhalten wir somit für b_0, b_1, f_0, f_1 die folgenden Ausdrücke

$$b_0 = f_0 = R\frac{\nu_0}{\nu_0 - \nu_1}, \quad b_1 = -f_1 = R\frac{\nu_1}{\nu_0 - \nu_1}. \tag{23}$$

Wir wollen eine Anwendung der Formeln (22) auf eine Glaslinse machen, die auf beiden Seiten von Luft umgeben ist. ν_1 sei das Brechungsverhältniss der Luft, ν das des Glases; R der Krümmungsradius der ersten, R' der der zweiten Fläche, positiv oder negativ genommen, je nachdem diese ihre convexe oder concave Seite dem einfallenden Lichte zukehren. Wir wollen aber annehmen, dass die Linse als *unendlich dünn* zu betrachten sei; dann kann für *beide* Linsenflächen $z = 0$ gesetzt werden, und die eben für f_1 und f_0 aufgestellten Ausdrücke lassen sich unmittelbar anwenden. Bei der oben gebrauchten Bezeichnung ist dann

$$\begin{aligned} b_1 &= -f_1 = R\frac{\nu_1}{\nu - \nu_1}, \quad & b_1' &= -f_1' = R'\frac{\nu}{\nu_1 - \nu} \\ b_0 &= f_0 = R\frac{\nu}{\nu - \nu_1}, \quad & b_0' &= f_0' = R'\frac{\nu_1}{\nu_1 - \nu}. \end{aligned}$$

Ersetzt man also jetzt in (22) die Grössen f durch die Grössen b, so ergiebt sich leicht

$$-F_1 = F_0 = B_1 = B_0 = \frac{\nu_1}{\nu - \nu_1}\frac{RR'}{R' - R}. \tag{24}$$

Nennt man B den gemeinsamen Werth der beiden Brennweiten, so ist auch

$$\frac{1}{B} = \left(\frac{\nu}{\nu_1} - 1\right)\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right). \tag{24a}$$

Die Brennweite B kann positiv oder negativ sein; sie ist positiv bei den Sammellinsen, negativ bei den Zerstreuungslinsen. Die beiden Hauptpunkte, oder was hier dasselbe ist, die beiden Knotenpunkte fallen zusammen, und zwar in die Linse, d. h. in den Punkt $z = 0$, wie aus den Gleichungen (18) und (19) unmittelbar hervorgeht.

Fünfte Vorlesung.

Theorie der Beugungserscheinungen. — Ableitung der Fundamentalformeln aus dem Huyghens'schen Princip. — Verallgemeinerung derselben für den Fall beliebig vieler Reflexionen und Brechungen. — Die Fraunhofer'schen und die Fresnel'schen Beugungserscheinungen. — Theorie der Fraunhofer'schen Beugungserscheinungen für *eine* beugende Oeffnung. — Die Oeffnung ist ein Rechteck. — Die Oeffnung ist ein Spalt, und die Lichtquelle eine Linie. — Die Oeffnung ist ein Kreis. Irradiation. — Beziehung zwischen den durch eine enge Oeffnung und den durch einen kleinen Schirm erzeugten Beugungsbildern.

§ 1.

Von den meisten optischen Erscheinungen kann man sich Rechenschaft geben, wenn man von der Annahme ausgeht, dass das Licht in geraden von einander unabhängigen *Strahlen* besteht. Aber gewisse Erscheinungen giebt es, die eine Abweichung von der geradlinigen Fortpflanzung des Lichtes zeigen, man hat diese *Beugungs-* oder *Diffractionserscheinungen* genannt. Bei den theoretischen Betrachtungen, durch welche wir die Existenz der Strahlen zu erklären gesucht haben, waren wir genöthigt, gewisse Fälle auszuschliessen; es sind gerade diese Fälle diejenigen, in denen die Beugungserscheinungen auftreten.

Wir müssen zurückkehren zu den Vorstellungen, die wir bei der genannten Gelegenheit verfolgten, und den Bezeichnungen, die wir dort gebrauchten. Einem leuchtenden Punkte 1 denken wir uns einen ebenen oder gekrümmten Schirm aus einem schwarzen Stoffe entgegengestellt; wir verstehen unter φ eine der Verrückungscomponenten, oder eine andere mit diesen zusammenhängende Function, die der Gleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \Delta \varphi$$

genügt, unter φ_0 den Werth von φ in einem beliebig gewählten Punkte 0, unter φ^* den Werth, den φ in einem Punkte haben würde, wenn der Schirm fehlte; wir denken uns ferner einen Kegel, der seine Spitze in 1 hat und den Schirm berührt; die Berührungslinie nennen wir den *Rand* des Schirms, den Theil seiner Oberfläche, der durch diesen Rand begrenzt und dem Punkte 1 zugekehrt ist, die Fläche s', der andere sei s'', eine beliebige Fläche, die mit s' eine geschlossene den Punkt 1 einschliessende, den Punkt 0 aber ausschliessende Fläche bildet, die Fläche s; diese Fläche s werde die *Oeffnung* des Schirms genannt.

Mit Berücksichtigung der für einen schwarzen Körper gefundenen Resultate ergiebt sich, dass wir an den Flächen s und s'

$$\varphi = \varphi^*, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial N} = \frac{\partial \varphi^*}{\partial N},$$

an der Fläche s''

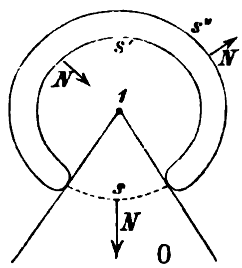
$$\varphi = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial N} = 0$$

zu setzen haben.

Wählen wir nun die Richtung der Normalen N in jenen drei Flächen so, dass sie für die *beiden* geschlossenen Flächen $(s + s'')$ und $(s' + s'')$ nach aussen, d. h. dem Punkte 0 zugekehrt ist, so kann man mit Berücksichtigung des Huyghens'schen Principes φ_0 in den folgenden beiden Formen darstellen

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \varphi_0^* + \frac{1}{4\pi}\int^{(s'+s'')} ds\,\Omega = \varphi_0^* + \frac{1}{4\pi}\int^{(s')} ds\,\Omega \\ \varphi_0 &= \qquad \frac{1}{4\pi}\int^{(s+s'')} ds\,\Omega = \qquad \frac{1}{4\pi}\int^{s} ds\,\Omega, \end{aligned} \tag{1}$$

Fig. 6.



da das über die Fläche s'' erstreckte Integral verschwindet. Ist

$$\varphi^* = \frac{1}{r_1}\cos\left(\frac{r_1}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)2\pi, \tag{2}$$

so ist nach (17) der zweiten Vorlesung

$$\begin{aligned} \Omega = &\frac{1}{r_1 r_0}\left(\frac{1}{r_1}\frac{\partial r_1}{\partial N} - \frac{1}{r_0}\frac{\partial r_0}{\partial N}\right)\cos\left(\frac{r_1 + r_0}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)2\pi \\ &+ \frac{2\pi}{r_1 r_0 \lambda}\left(\frac{\partial r_1}{\partial N} - \frac{\partial r_0}{\partial N}\right)\sin\left(\frac{r_1 + r_0}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)2\pi. \end{aligned} \tag{3}$$

Gerade hieraus leiteten wir ab, dass im geometrischen Schatten des Schirmes Dunkelheit herrscht, ausserhalb des Schattens dieselbe Lichtbewegung, als ob der Schirm fehlte; wir konnten das aber nur unter der Voraussetzung, dass nicht für einen endlichen Theil des Schirmrandes $r_1 + r_0 = \text{const.}$ ist, und dass der Punkt 0 nicht unendlich nahe der Schattengrenze liegt. Die aufgestellten Gleichungen gelten aber auch ohne diese Voraussetzungen, und ohne diese haben wir sie jetzt zu entwickeln. Wir wollen uns dabei die Rechnung durch die Annahme erleichtern, dass die Oeffnung s des Schirms sehr klein ist, so klein, dass r_1 und r_0, wo sie in Ω ausserhalb der trigonometrischen Functionen vorkommen, sowie auch $\frac{\partial r_1}{\partial N}$ und $\frac{\partial r_0}{\partial N}$ als constant betrachtet werden können; überdies brauchen wir nur solche Punkte 0 zu betrachten, bei denen sehr nahe

$$\frac{\partial r_0}{\partial N} = -\frac{\partial r_1}{\partial N} \tag{4}$$

ist Die letzte Annahme macht, dass wir den Fall nicht zu untersuchen brauchen, wo der Factor $\frac{\partial r_1}{\partial N} - \frac{\partial r_0}{\partial N}$ in dem zweiten Gliede von Ω verschwindet; es ist daher dieses zweite Glied wegen des Factors $\frac{2\pi}{\lambda}$ immer unendlich gross gegen das erste, und wir dürfen setzen

$$\varphi_0 = \frac{1}{\lambda r_1 r_0} \frac{\partial r_1}{\partial N} \int_s ds \sin\left(\frac{r_1 + r_0}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) 2\pi.$$

Jetzt verallgemeinere man den Ausdruck (2) von φ^*, wie das auch früher schon geschah, indem man den bisherigen wiederholt nach x_1, y_1, z_1 differenzirt, mit einer Constanten multiplicirt, zu t eine Constante hinzufügt und die Summe dieser Ausdrücke für φ^* nimmt; berücksichtigt man dann nach der Differentiation wieder nur die Glieder höchster Ordnung, so ergiebt sich

$$\varphi^* = \frac{D}{r_1} \cos\left(\frac{r_1}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) 2\pi + \frac{D'}{r_1} \sin\left(\frac{r_1}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) 2\pi,$$

wo D und D' von der Richtung des von 1 durch den Punkt (xyz) gehenden Strahles abhängen. Erwägt man jetzt, dass Ω aus φ^* und seinen Ableitungen homogen und linear zusammengesetzt ist, so erkennt man, dass sich der allgemeine Ausdruck von φ_0 aus dem in (3) angegebenen ebenfalls durch die vorhin angedeuteten Operationen wird herleiten lassen; dabei erhält man für φ_0 den folgenden Ausdruck

$$\begin{aligned}\varphi_0 = \frac{1}{\lambda r_1 r_0} \frac{\partial r_1}{\partial N} \cdot \Bigg(D \int ds \sin\left(\frac{r_1 + r_0}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) 2\pi \\ - D' \int ds \cos\left(\frac{r_1 + r_0}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) 2\pi\Bigg).\end{aligned} \tag{5}$$

Nun verstehe man unter φ irgend eine der drei Verrückungscomponenten und setze

$$\begin{array}{lll} D = A & D' = A' & \text{für} \quad \varphi = u \\ D = B & D' = B' & \text{für} \quad \varphi = v \\ D = C & D' = C' & \text{für} \quad \varphi = w; \end{array} \tag{6}$$

nach (20) der ersten Vorlesung ergiebt sich dann zunächst für die Intensität J^* des auf die „beugende Oeffnung" fallenden Lichtes

$$J^* = \frac{1}{T}\int_0^T dt\,(u^{*2} + v^{*2} + w^{*2})$$

$$= \frac{1}{2r_1^2}(A^2 + A'^2 + B^2 + B'^2 + C^2 + C'^2); \tag{7}$$

die Intensität J_0 im Punkte 0 aber ist

$$J_0 = \frac{1}{T}\int_0^T dt\,(u_0^2 + v_0^2 + w_0^2).$$

Zerlegt man jetzt in den Ausdrücken von u_0, v_0, w_0, wie sie sich aus (5) ergeben, die vorkommenden Sinus und Cosinus, so treten bei der Bildung von J_0 nur die Integrale

$$\frac{1}{T}\int_0^T \cos^2 \frac{t}{T}\,2\pi\,dt, \quad \frac{1}{T}\int_0^T \sin^2 \frac{t}{T}\,2\pi\,dt,$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T \sin\frac{t}{T}\,2\pi \cdot \cos\frac{t}{T}\,2\pi\,dt$$

auf, von denen die beiden ersten den Werth $\frac{1}{2}$ haben, während das letzte gleich Null ist; setzt man dann noch

$$c = \int_s ds \cos\left(\frac{r_1 + r_0}{\lambda}\right) 2\pi$$

$$s = \int_s ds \sin\left(\frac{r_1 + r_0}{\lambda}\right) 2\pi,$$

so findet man mit Berücksichtigung von (7) für J_0 den folgenden einfachen Ausdruck

$$J_0 = J^* \frac{1}{\lambda^2 r_0^2}\left(\frac{\partial r_1}{\partial N}\right)^2 (c^2 + s^2). \tag{8}$$

Zugleich sieht man, dass hier die Definition von c und s auch so gegeben werden kann

$$\left.\begin{array}{l} c = \displaystyle\int_s ds \cos\left(\frac{r_1 + r_0}{\lambda}\,2\pi + \delta\right) \\ s = \displaystyle\int_s ds \sin\left(\frac{r_1 + r_0}{\lambda}\,2\pi + \delta\right), \end{array}\right\} \tag{8a}$$

wo δ eine beliebige Constante bedeutet, denn hierbei bleibt der Ausdruck $c^2 + s^2$ ungeändert, wie die Zerlegung des Cosinus und Sinus zeigt. Die Einführung einer solchen Constanten bringt bei den Anwendungen eine gewisse Bequemlichkeit hervor.

§ 2.

Bei den bis jetzt abgeleiteten Formeln ist vorausgesetzt, dass das Licht auf seinem Wege von 1 nach 0 keine Reflexionen und Brechungen erleidet; sie lassen sich indessen leicht so verallgemeinern, dass solche nicht ausgeschlossen sind. Es sei τ_1 die Zeit, die das Licht gebraucht, um von 1 nach dem Punkte (xyz) der Oeffnung zu gelangen, τ_0 die Zeit, die es gebraucht, um seinen Weg von diesem Punkte nach 0 zurückzulegen; ist dann a wie gewöhnlich die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes, so folgt aus den Gleichungen

$$r_1 = \tau_1 a, \qquad r_0 = \tau_0 a, \qquad \lambda = Ta,$$

dass s, c und J_0 auch in der folgenden Form geschrieben werden können

$$\begin{aligned} c &= \int ds \cos \frac{\tau_1 + \tau_0}{T} 2\pi, \\ s &= \int ds \sin \frac{\tau_1 + \tau_0}{T} 2\pi, \qquad\qquad (8\text{b}) \\ J_0 &= K(c^2 + s^2), \end{aligned}$$

wo J_0 wieder die Intensität im Punkte 0 und K einen Factor bedeutet, der als constant zu betrachten ist, wenn 0 innerhalb eines mässigen Raumes sich bewegt. In dieser Form gelten unsere Gleichungen aber auch in dem allgemeineren Falle, dass das Licht auf seinem Wege von 1 nach 0 beliebig viele Brechungen und Reflexionen erleidet, wenn nämlich jetzt τ_1 und τ_0 die Zeiten bedeuten, welche das Licht nach dem Princip der schnellsten Ankunft gebraucht, um von 1 nach dem Elemente ds und von dort nach dem Punkte 0 zu gelangen; nur dürfen sich keine anderen Beugungen als am Rande der Oeffnung s bemerklich machen.

Von diesem Resultate machen wir eine nahe liegende Anwendung: Es befinde sich zwischen 1 und s ein erstes, zwischen s und 0 ein zweites Linsensystem; das erste Linsensystem möge von 1 das Bild 1′ erzeugen, und es sei 0′ der Punkt, den das zweite Linsensystem in 0 abbildet; wir wollen ferner voraussetzen, dass 1′ mit 1 und 0′ mit 0 auf derselben Seite des beugenden Schirms sich befindet; dann ist die Intensität im Punkte 0 bis auf einen Factor, der als constant betrachtet werden kann, ebenso gross, als sie ohne die Anwesenheit der Linsen im Punkte 0′ sein würde, wenn der leuchtende Punkt in 1′ läge.

Der Beweis dieses Satzes lässt sich folgendermassen führen: Zwischen dem ersten Linsensystem und der Oeffnung s sind die

Wellenflächen dieselben, als wenn die Linsen fehlten und der leuchtende Punkt in 1′ sich befände, denn die Strahlen, auf welchen die Wellenflächen immer senkrecht stehen, sind in beiden Fällen dieselben. Die Gleichung *einer* Wellenfläche durch einen Punkt P_1 zwischen dem ersten Linsensystem und der Fläche ist dann

$$\tau_1 = c_1 ,$$

wo c_1 eine Constante ist. Die Zeit, die das Licht gebraucht, um von 1′, wenn die Linsen fehlen, nach demselben Punkte P_1 zu gelangen, sei τ_1', und c_1' der Werth von τ_1' für die erstgewählte Wellenfläche. Wir gehen nun von dieser zu einer anderen über, indem wir auf irgend einem Strahle um die Länge l fortgehen; ist dann a die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes in dem Mittel zwischen dem Linsensystem und dem Schirm, so können wir die Gleichung dieser zweiten Wellenfläche in jeder der beiden Formen schreiben

$$\tau_1 = c_1 + \frac{l}{a} \quad \text{und} \quad \tau_1' = c_1' + \frac{l}{a} \,.$$

Aus diesen Gleichungen folgt aber

$$\tau_1 - \tau_1' = c_1 - c_1',$$

es ist also $\tau_1 - \tau_1'$ constant, d. h. unabhängig von den Coordinaten von P_1.

Bezeichnen wir nun entsprechend mit τ_0 die Zeit, die das Licht gebraucht, um von einem Punkte P_0 zwischen dem zweiten Linsensystem und der Fläche s nach 0 zu gelangen, mit τ_0' die Zeit, welche es zu dem Wege von P_0 nach 0′ gebraucht, wenn das zweite Linsensystem fehlt, so lässt sich beweisen, dass auch $\tau_0 - \tau_0'$ von den Coordinaten von P_0 unabhängig ist. Man muss hier nur einen sehr allgemeinen Satz zu Hülfe nehmen, der häufig von Nutzen ist, den Satz, dass der Weg eines Lichtstrahles bei beliebigen Reflexionen und Brechungen auch im entgegengesetzten Sinne vom Lichte durchlaufen werden kann; es folgt dieser Satz unmittelbar daraus, dass die Linien, die der einfallende und der reflektirte Strahl bei einer Reflexion, der einfallende und der gebrochene Strahl bei einer Brechung durchlaufen, mit einander vertauscht werden können. Mit Hülfe dieses Satzes erkennt man, dass bei einem Linsensystem auch Bild und Object mit einander vertauscht werden können, wenn man den Sinn der Bewegung des Lichtes in den entgegengesetzten verkehrt, und da auch die Zeit dieselbe ist, welche das Licht gebraucht, um einen gewissen Weg in dem einen oder dem entgegengesetzten Sinne zurückzulegen, so kann man in unserem Falle τ_0 und τ_0' auch als die Zeiten definiren, die das Licht gebraucht, um von einem leuchtenden Punkte 0 durch das zweite Linsensystem, oder von dem Punkte 0′ ohne dasselbe nach P_0 zu gelangen. Nach der Definition des Punktes 0′ und der vorausgeschickten Bemerkung ist aber dieser das Bild, welches das zweite Linsensystem von 0 entwirft, wenn das Licht durch dasselbe nach dem Schirm hingeht. Aus denselben Gründen wie $\tau_1 - \tau_1'$ ist also auch $\tau_0 - \tau_0'$ constant. Lässt man jetzt die beiden Punkte P_1 und P_0 in dem Punkte (xyz) der Oeffnung s zusammenfallen, so ist auch die Differenz

$$\frac{\tau_1 + \tau_0}{T}\, 2\pi - \frac{\tau_1' + \tau_0'}{T}\, 2\pi$$

constant, oder unabhängig von der Lage dieses Punktes in der Oeffnung; nach der am Ende des vorigen Paragraphen gemachten Bemerkung und nach (8b) hat also $c^2 + s^2$ denselben Werth in dem Falle, dass die Linsen vorhanden sind, und in dem Falle, dass diese fehlen, die Punkte 1, 0 aber ersetzt sind durch die Punkte 1′, 0′, und somit ergiebt sich die Richtigkeit des oben ausgesprochenen Satzes.

§ 3.

Wir wollen nun annehmen, dass das Licht auf seinem Wege von 1 zur Oeffnung und von da zum Punkte 0 keine Reflexionen und Brechungen erleidet; nach (8a) und (8b) haben wir dann

$$\begin{aligned} J_0 &= K(c^2 + s^2) \\ c &= \int ds \cos\left(k(r_1 + r_0) + \delta\right), \\ s &= \int ds \sin\left(k(r_1 + r_0) + \delta\right), \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}. \end{aligned} \tag{8c}$$

Die kleine Fläche s oder die Oeffnung des Schirms sei jetzt eben; wählen wir sie als die xy-Ebene unseres Coordinatensystems, einen in der Oeffnung oder ihr unendlich nahe gelegenen Punkt als Anfangspunkt, so haben wir

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + z_1^2}, \\ r_0 &= \sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + z_0^2}. \end{aligned}$$

Diese Ausdrücke wollen wir, wie wir es schon im Anfang der dritten Vorlesung gethan haben, nach Potenzen von x und y entwickeln. Dabei setzen wir wieder

$$\varrho_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}, \qquad \varrho_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2},$$

und legen der willkürlichen Constanten δ den Werth $-k(\varrho_1 + \varrho_0)$ bei. Dadurch verschwindet in $(k(r_1 + r_0) + \delta)$ das von x und y unabhängige Glied, und man erhält, wenn man in der Entwickelung wieder nur die Glieder erster und zweiter Ordnung berücksichtigt

$$\begin{aligned} k(r_1 + r_0) + \delta = k\Big(&- x\left(\frac{x_1}{\varrho_1} + \frac{x_0}{\varrho_0}\right) - y\left(\frac{y_1}{\varrho_1} + \frac{y_0}{\varrho_0}\right) \\ &+ \frac{x^2 + y^2}{2}\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_0}\right) - \frac{1}{2}\,\frac{(xx_1 + yy_1)^2}{\varrho_1^3} - \frac{1}{2}\,\frac{(xx_0 + yy_0)^2}{\varrho_0^3}\Big). \end{aligned} \tag{9}$$

Diesen Ausdruck denken wir uns (in 8c) unter die trigonometrischen Zeichen substituirt; es ist das erlaubt, wenn die Dimensionen der Oeffnung so klein und ϱ_1 und ϱ_0 so gross sind, dass bei den Werthen, die $x_1 y_1$, und $x_0 y_0$ haben, die Glieder, welche in Bezug auf x, y von der dritten Ordnung sind, trotz des Factors k unendlich klein werden. Wir wollen das zunächst annehmen, aber gleich hervorheben, dass diese Substitution erlaubt ist, wie gross auch die Oeffnung sein möge, dass nämlich die Theile derselben, für welche die Glieder der dritten Ordnung nicht mehr verschwinden, zu den Integralen c und s nur Theile beitragen, die vernachlässigt werden können. Es folgt dies unmittelbar aus § 4 der vierten Vorlesung, wenn man berücksichtigt, dass die beiden Integrale c und s auf die Form

$$\int G \sin (k\xi + \delta_1) ds$$

gebracht werden können, wenn $G = 1$, und $\delta_1 = \delta$ oder $\delta_1 = \delta + \frac{\pi}{2}$ gesetzt wird.

Zuvörderst wollen wir den Fall betrachten, dass ϱ_1 und ϱ_0 alle Grenzen überschreiten, während die Verhältnisse

$$\frac{x_1}{\varrho_1} = -\alpha_1, \quad \frac{y_1}{\varrho_1} = -\beta_1$$

$$\frac{x_0}{\varrho_0} = \alpha_0, \quad \frac{y_0}{\varrho_0} = \beta_0,$$

gegebene Werthe behalten: dann verschwinden in (9) schon die Glieder zweiter Ordnung, und man hat

$$\left.\begin{aligned} c &= \iint dx\,dy \cos k \left\{x(\alpha_1 - \alpha_0) + y(\beta_1 - \beta_0)\right\}, \\ s &= \iint dx\,dy \sin k \left\{x(\alpha_1 - \alpha_0) + y(\beta_1 - \beta_0)\right\}; \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

dabei sind $\alpha_1 \beta_1$ die Cosinus der Winkel, welche ein einfallender Strahl, $\alpha_0 \beta_0$ die Cosinus der Winkel, welche ein *gebeugter* Strahl mit den Achsen der x und der y bildet. Die Beugungserscheinungen, für welche diese Formeln gelten, sind die sogenannten *Fraunhofer'schen*, während diejenigen, bei denen auch die Glieder zweiter Ordnung berücksichtigt werden müssen, die *Fresnel'schen* Beugungserscheinungen genannt werden.

Wir werden uns zunächst mit den ersten, den Fraunhofer'schen Beugungserscheinungen beschäftigen. Es können diese hervorgebracht werden, indem man in sehr grossen Entfernungen von der beugenden Oeffnung, auf der einen Seite eine kleine Lichtquelle, auf der andern eine weisse Tafel aufstellt; viel zweckmässiger aber ist es, dabei Linsen zu benutzen: Auf der einen Seite der Oeffnung sei eine Linse oder ein Linsensystem aufgestellt, in dessen erstem Brennpunkt der leuchtende Punkt sich befindet, auf der andern ein zweites, in dessen zweite Brennpunktsebene eine weisse Tafel gebracht ist; auf dieser zeigt sich dann die Erscheinung, um die es sich handelt. Die Richtung $\alpha_1 \beta_1$ ist dabei die Richtung der Achse des ersten Linsensystems; denkt man sich durch den zweiten Hauptpunkt des zweiten Linsensystems in der Richtung $(\alpha_0 \beta_0)$ eine Gerade gezogen, so wird ihr Schnittpunkt mit der Tafel der Richtung $(\alpha_0 \beta_0)$ entsprechen. Noch deutlicher und lichtstärker wird die Erscheinung, wenn man die weisse Tafel fortlässt und statt ihrer das Auge, entweder direkt, oder durch ein auf die Unendlichkeit eingestelltes Fernrohr bewaffnet, hinter die Oeffnung bringt. Die durchsichtigen Mittel des Auges ersetzen dann, ganz oder zum Theil, die Linsen bei der vorigen Anordnung, und die Retina übernimmt die Rolle der weissen Tafel.

§ 4.

Wir wollen nun die für die Fraunhofer'schen Beugungserscheinungen aufgestellten Formeln (10) unter speciellen Voraussetzungen über die Gestalt der Oeffnung entwickeln. Diese lassen sich folgendermassen schreiben

$$\begin{aligned} J &= K(c^2 + s^2), \\ c &= \iint dx\,dy \cos(px + qy), \\ s &= -\iint dx\,dy \sin(px + qy), \end{aligned} \tag{10a}$$

wenn zur Abkürzung

$$\begin{aligned} p &= k(\alpha_0 - \alpha_1) = \frac{2\pi}{\lambda}(\alpha_0 - \alpha_1), \\ q &= k(\beta_0 - \beta_1) = \frac{2\pi}{\lambda}(\beta_0 - \beta_1) \end{aligned} \tag{10b}$$

gesetzt wird. Es sind also p und q für die Integration Constanten, sie ändern sich nur, wenn man zu einem anderen Punkte $(\alpha_0 \beta_0)$ des Gesichtsfeldes übergeht.

Es sei nun die Oeffnung zunächst ein *Rechteck* mit den Seiten 2a und 2b; wählt man den Mittelpunkt desselben zum Anfangspunkt eines Coordinatensystems, dessen erste und zweite Achse den Seiten 2a und 2b parallel sind, so ist $s = 0$, da $\sin(px + qy)$ als eine ungerade Function von x und y jedesmal den entgegengesetzten Werth annimmt, wenn man beiden Variabeln ihre entgegengesetzten Werthe beilegt. Durch Ausführung der Integration ergiebt sich ferner

$$\begin{aligned} c &= \int_{-b}^{b} dy\,\frac{1}{p}\Big(\sin(pa + qy) + \sin(pa - qy)\Big) \\ &= \int_{-b}^{b} dy\,\frac{2}{p}\sin pa \cos qy = 2\,\frac{\sin pa}{p}\;2\,\frac{\sin qb}{q}\,. \end{aligned}$$

Also erhält man für die Intensität im Punkte 0 den Werth

$$J = K_1 \left(\frac{\sin pa}{pa}\right)^2 \left(\frac{\sin qb}{qb}\right)^2, \tag{11}$$

wo K_1 eine neue Constante bezeichnet; sie ist, da $\frac{\sin \xi}{\xi}$ für $\xi = 0$ gleich 1 ist, die Intensität in *dem* Punkte, für den $\alpha_0 = \alpha_1$, $\beta_0 = \beta_1$ ist.

Wir wollen diesen Ausdruck von J discutiren und dabei, um die Vorstellung zu fixiren, annehmen, dass die Erscheinung mit Hülfe einer Linse auf einem weissen Schirm dargestellt ist. Die Achse der Linse möge mit der z-Achse unseres Coordinatensystems, der Schirm mit der Brennpunktsebene der Linse zusammenfallen. Die Lage des Punktes 0 auf dem Schirm beziehen wir zunächst auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen Achsen parallel den Achsen der x und y sind, und dessen Anfangspunkt der Brennpunkt der Linse ist. Wir wollen annehmen, dass α_1 und β_1 nur klein sind, dann sind es auch α_0 und β_0 für alle Punkte, in denen noch Licht vorhanden ist, da sonst der Punkt 0 nicht in der Nähe der Schattengrenze der Oeffnung liegen würde; ist dann f die Brennweite der Linse, so sind $f\alpha_0$ und $f\beta_0$ die Coordinaten des Punktes 0, auf den J sich bezieht, $f\alpha_1$ und $f\beta_1$ die Coordinaten des Bildes des leuchtenden Punktes; nehmen wir jetzt den Ort dieses Bildes zum Anfangspunkte, so werden $f(\alpha_0 - \alpha_1)$ und $f(\beta_0 - \beta_1)$ die Coordinaten des Punktes 0 sein. Nennen wir diese ξ und η, so gehen die Gleichungen (10b) in

$$p = \frac{2\pi}{\lambda f}\,\xi, \qquad q = \frac{2\pi}{\lambda f}\,\eta, \tag{12}$$

über, es sind p und q also diesen Coordinaten proportional.

Der Ausdruck (11) von J verschwindet nun für gewisse Werthe von p und für gewisse Werthe von q; es findet das statt, wenn

$$pa \text{ oder } qb = \pm\pi, \quad \pm 2\pi, \quad \pm 3\pi, \ldots$$

ist. Daraus folgt, dass im Gesichtsfelde dunkle Linien vorhanden sind, die theils der y-Achse, theils der x-Achse parallel sind; der Abstand je zwei aufeinanderfolgender ist bei jenen

$$\frac{\lambda f}{2a},$$

bei diesen

$$\frac{f\lambda}{2b},$$

nur die beiden Linien, welche das Bild des leuchtenden Punktes zwischen sich enthalten, haben einen doppelt so grossen Abstand. Durch diese Linien ist das ganze Gesichtsfeld in Rechtecke getheilt, von denen die meisten die Seiten $\frac{\lambda f}{2a}$ und $\frac{\lambda f}{2b}$ haben, nur bei denjenigen, durch welche die x-Achse oder die y-Achse hindurchgeht, ist *eine* Seite, bei demjenigen, in dem der Anfangspunkt der Coordinaten liegt, sind *beide* Seiten zweimal so gross, als bei den übrigen. In jedem dieser Rechtecke liegt ein Maximum der Lichtstärke, und zwar da, wo jeder der Factoren

$$\left(\frac{\sin pa}{pa}\right)^2 \quad \text{und} \quad \left(\frac{\sin qb}{qb}\right)^2$$

sein Maximum hat. Beide sind von der Form des Ausdrucks

$$\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2,$$

dessen Maxima und Minima durch die Gleichung

$$\frac{\sin u}{u} \; \frac{u \cos u - \sin u}{u^2} = 0,$$

bestimmt sind, und diese zerfällt wiederum in die beiden

$$\frac{\sin u}{u} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{u \cos u - \sin u}{u^2} = 0.$$

Die erste Gleichung giebt die schon vorher betrachteten Minima für $u = \pm \pi, \; \pm 2\pi, \ldots$, die gleich Null sind, die zweite, die sich schreiben lässt

$$u = \operatorname{tg} u,$$

die Maxima. Die Lage ihrer Wurzeln macht eine Zeichnung anschaulich. Zeichnet man nämlich die Curven

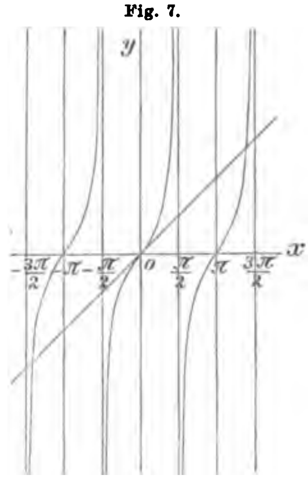
$$y = x \quad \text{und} \quad y = \operatorname{tg} x,$$

so sind die Werthe von x für ihre Durchschnittspunkte die Wurzeln dieser Gleichung. Die nebenstehende Figur lässt erkennen, dass eine dieser Wurzeln den Werth Null hat, während die übrigen einander paarweise gleich sind, aber entgegengesetztes Vorzeichen haben. Die erste positive Wurzel ist etwas kleiner als $3 \cdot \frac{\pi}{2}$, $\left(\text{genauer } 2{,}86 \frac{\pi}{2}\right)$, die folgende sehr nahe $5 \frac{\pi}{2}$, und man erkennt leicht, dass für die ν^{te} positive Wurzel der Näherungswerth $(2\nu + 1) \frac{\pi}{2}$ um so genauer ist, je grösser ν ist. Die Werthe dieser Maxima sind näherungsweise

$$1, \; \left(\frac{2}{3\pi}\right)^2, \; \left(\frac{2}{5\pi}\right)^2, \; \ldots$$

da bei ihnen, ausser bei dem ersten, $\sin u$ nahe $= \pm 1$ ist. Im Verhältniss dieser Zahlen nehmen die Lichtmaxima auf der x-Achse und auf der y-Achse der Beugungsbilder ab, da hier der eine der beiden Factoren $\left(\frac{\sin pa}{pa}\right)^2$ und $\left(\frac{\sin qb}{qb}\right)^2$ constant $= 1$, bleibt. In der Richtung einer Diagonale der Rechtecke sind die auf einander folgenden Maxima aber proportional mit

Fig. 7.



$$1, \quad \left(\frac{2}{3\pi}\right)^4, \quad \left(\frac{2}{5\pi}\right)^4, \quad \ldots$$

weil hier jeder der beiden Factoren in gleicher Weise abnimmt. Es entziehen sich daher diese Maxima früher dem Auge, als diejenigen auf den Coordinatenachsen, und man erhält den Eindruck eines Kreuzes, dessen Arme diesen Achsen parallel und durch schwarze Linien durchschnitten sind.

Vergrössert man die eine Seite der beugenden Oeffnung, z. B. die Seite $2b$, so ziehen sich die Dimensionen des Beugungsbildes in der Richtung der y-Achse mehr und mehr zusammen, während seine Dimensionen in der Richtung der x-Achse ungeändert bleiben. Ueberschreitet b eine gewisse Grenze, verwandelt sich also die rechteckige Oeffnung in einen zur y-Achse parallelen *Spalt*, so ist Licht nur in einer auf diesem senkrechten Linie, unserer x-Achse vorhanden.

Wir wollen jetzt annehmen, dass statt des leuchtenden Punktes eine *leuchtende Linie* vor der beugenden Oeffnung vorhanden sei, deren Punkte als von einander unabhängige leuchtende Punkte angesehen werden können. Unter dieser Bedingung, aber auch *nur* unter dieser, überdecken sich einfach die Lichterscheinungen, welche ihre Punkte einzeln hervorbringen würden. Für alle Punkte der Lichtlinie sei α_1 constant, β_1 aber variire zwischen zwei Grenzen, d. h. die Lichtlinie sei der y-Achse parallel; die Oeffnung sei wie im vorigen Falle ein Rechteck oder ein der y-Achse paralleler Spalt. Leuchtet die Lichtlinie dann gleichmässig in allen ihren Theilen, so ist die Lichtstärke in dem durch $\alpha_0 \beta_0$ bestimmten Punkte

$$\int J \, d\beta_1,$$

wo J den im früheren Falle gefundenen Werth hat, und die Integration über die Lichtlinie auszudehnen ist. Führen wir jetzt an Stelle von β_1 die Grösse u durch die Gleichung

$$u = \frac{2\pi b}{\lambda} (\beta_0 - \beta_1) = q b$$

als Integrationsvariable ein, so ergiebt sich für die Intensität der Ausdruck

$$\text{const.} \left(\frac{\sin pa}{pa}\right)^2 \int \frac{\sin^2 u}{u^2} \, du.$$

Nun seien die Verhältnisse der Art, dass die Integrationsgrenzen für u als unendlich gross betrachtet werden können, oder da die unendlich kleine Grösse λ im Nenner von u auftritt, es seien b und die Grenzen von β_1 gross genug, und β_0 nicht zu nahe an einer dieser Grenzen. Liegt dann β_0 zwischen den Grenzen von β_1, so ist die eine Grenze von u positiv, die andere negativ unendlich; liegt es aber ausserhalb derselben, so sind beide Grenzen von u positiv oder beide negativ unendlich. Im zweiten Falle hat das nach u zu nehmende Integral den Werth Null, im ersten ist es, wie gleich gezeigt werden wird, eine gewisse Constante; im zweiten Falle ist die Intensität also gleich Null, im ersten

$$\text{const.} \left(\frac{\sin pa}{pa}\right)^2.$$

Die Erscheinung bildet sich also auf der Tafel innerhalb eines zur x-Achse parallelen Streifens ab, dessen Breite und Lage durch das Bild der leuchtenden Linie bestimmt ist. In ihr treten genau dieselben zum Spalt parallelen dunklen Linien, sowie die zwischen diesen befindlichen Helligkeitsmaxima auf, welche wir für den Fall eines leuchtenden Punktes als Lichtquelle gefunden hatten, dagegen fehlen hier die dunklen und hellen Linien senkrecht zum Spalte.

Was das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 u\, du}{u^2}$$

betrifft, so können wir leicht beweisen, dass es einen endlichen bestimmten Werth hat, und diesen Werth finden. In der That ist

$$\int \frac{\sin^2 u}{u^2}\, du = -\frac{\sin^2 u}{u} + \int \frac{2 \sin u \cos u}{u}\, du,$$

also ergiebt sich, wenn man die Grenzen einsetzt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2}\, du = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2u}{u}\, du = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin v\, dv}{v}.$$

Damit ist das zu untersuchende Integral auf das in § 3 der dritten Vorlesung berechnete zurückgeführt, und man erhält

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2}\, du = \pi.$$

§ 5.

Wenn ein leuchtender Punkt sein Licht durch eine Oeffnung sendet, die irgendwie durch *gerade Linien* begrenzt ist, so erkennt man leicht, dass die Ausführung der Integrale c und s immer nur auf trigonometrische Functionen führt. Anders ist es aber bei krummliniger Begrenzung der Oeffnung. Wir wollen nur den Fall einer *kreisförmigen Oeffnung* eingehend behandeln.

Wir haben wieder auszugehen von den Gleichungen (10a) und (10b), welche sich in einer gewissen Einheit folgendermassen schreiben lassen

$$
\begin{aligned}
J &= c^2 + s^2, \\
c &= \iint dx\,dy \cos(px + qy), \\
s &= -\iint dx\,dy \sin(px + qy),
\end{aligned}
$$

$$p = \frac{2\pi}{\lambda}(\alpha_0 - \alpha_1), \quad q = \frac{2\pi}{\lambda}(\beta_0 - \beta_1),$$

und wir haben hier die Integrationen über die Fläche der kreisförmigen Oeffnung auszudehnen. Der Mittelpunkt derselben sei jetzt der Anfangspunkt der Coordinaten, ihr Radius sei R. Es wird dann wie vorher

$$s = 0, \quad \text{also} \quad J = c^2.$$

Setzt man jetzt

$$
\begin{aligned}
x &= \varrho \cos \omega, & y &= \varrho \sin \omega, \\
p &= r \cos \omega', & q &= r \sin \omega',
\end{aligned}
$$

so erhält man

$$
\begin{aligned}
c &= \int_0^R \int_{\omega'}^{2\pi+\omega'} \varrho\,d\varrho\,d\omega \cos(\varrho r \cos(\omega - \omega')) \\
&= \int_0^R \int_0^{2\pi} \varrho\,d\varrho\,d\omega \cos(\varrho r \cos \omega),
\end{aligned}
$$

oder, wenn

$$\varrho r = z$$

gesetzt wird,

$$c = \frac{1}{r^2} \int_0^{Rr} z\,dz \int_0^{2\pi} d\omega \cos(z \cos \omega). \tag{13}$$

Das nach ω zu nehmende bestimmte Integral, als Function von z betrachtet, gehört einer sehr wichtigen Klasse von Functionen an, es ist die sogenannte *Besselsche Function nullter Ordnung.* Einer gebräuchlichen Bezeichnungsweise folgend, setzen wir

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\omega \cos(z \cos \omega) = J_0(z)$$

und haben also

$$c = \frac{2\pi}{r^2} \int_0^{Rr} z\,dz\,J_0(z). \tag{13a}$$

Setzen wir ferner

$$\int_0^z z\,dz\,J_0(z) = z J_1(z),$$

so wird $J_1(z)$ als die *Besselsche Function erster Ordnung* bezeichnet, und es ergiebt sich für c der Werth

$$c = 2\pi R^2 \frac{1}{z} J_1(z) \quad \text{für} \quad z = rR. \tag{13b}$$

Man kann aber die Definition von $J_1(z)$ noch einfacher geben, als dies oben geschah. Addirt man nämlich die drei Gleichungen

$$J_0(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\omega \cos(z\cos\omega),$$

$$\frac{dJ_0}{dz} = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\omega \cos\omega \sin(z\cos\omega),$$

$$\frac{d^2J_0}{dz^2} = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\omega \cos^2\omega \cos(z\cos\omega),$$

nachdem man sie beziehlich mit z, 1, z multiplicirt hat, so erhält man

$$zJ_0 + \frac{dJ_0}{dz} + z\frac{d^2J_0}{dz^2}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\omega \left(z\sin^2\omega\cos(z\cos\omega) - \cos\omega\sin(z\cos\omega)\right).$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite dieser Gleichung verschwindet aber, denn er lässt sich in der Form schreiben

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\left(\sin\omega\sin(z\cos\omega)\right),$$

also verwandelt sich diese Gleichung in

$$zJ_0 + \frac{d}{dz}\left(z\frac{dJ_0}{dz}\right) = 0,$$

und aus ihr ergiebt sich

$$\int_0^z J_0 \,.\, z\,dz = -z\frac{dJ_0}{dz},$$

da $\frac{dJ_0}{dz}$ für $z = 0$ nicht unendlich ist. Die vorher gegebene Definition von $J_1(z)$ lässt sich also durch die folgende ersetzen

$$J_1(z) = -\frac{d}{dz} J_0(z). \tag{14}$$

Es ist leicht $J_0(z)$, mithin auch $J_1(z)$ durch convergente Reihen auszudrücken. Zu diesem Zwecke setzen wir in dem Ausdruck für $J_0(z)$

$$\cos(z\cos\omega) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}\cos^{2n}\omega}{1\,.\,2\,.\,3\ldots 2n},$$

multipliciren diese Gleichung mit $d\omega$ und integriren die Reihe gliedweise zwischen den Grenzen 0 und 2π. Aus der Identität

$$\cos^m\omega\, d\omega = \cos^{m-1}\omega\, d\sin\omega,$$

findet man durch partielle Integration

$$\int \cos^m \omega \, d\omega = \cos^{m-1}\omega \sin\omega + (m-1)\int \sin^2\omega \cos^{m-2}\omega \, d\omega,$$

oder, wenn man $1 - \cos^2\omega$ für $\sin^2\omega$ setzt

$$\int \cos^m \omega \, d\omega = \frac{\cos^{m-1}\omega \sin\omega}{m} + \frac{m-1}{m}\int \cos^{m-2}\omega \, d\omega;$$

aus dieser Gleichung ergiebt sich durch Einsetzen der Grenzen die Reductionsformel

$$\int_0^{2\pi} \cos^m \omega \, d\omega = \frac{m-1}{m}\int_0^{2\pi} \cos^{m-2}\omega \, d\omega,$$

durch deren wiederholte Anwendung die Gleichung

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n}\omega \, d\omega = \frac{1 \cdot 3 \ldots 2n-1}{2 \cdot 4 \ldots 2n} 2\pi$$

erhalten wird; es ergiebt sich somit für $J_0(z)$ die folgende Reihenentwicklung

$$J_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2 \cdot 4 \ldots 2n)^2}$$

$$= 1 - \frac{z^2}{2^2} + \frac{z^4}{(2 \cdot 4)^2} - \frac{z^6}{(2 \cdot 4 \cdot 6)^2} + \cdots \tag{15}$$

und wegen (14)

$$J_1(z) = \frac{z}{2}\left(1 - \frac{z^2}{2.4} + \frac{z^4}{2.4.4.6} - \frac{z^6}{2.4.6.4.6.8} + \cdots\right). \tag{15a}$$

Für $J_0(z)$ und $J_1(z)$ sind Tafeln berechnet, die sich in „*Lommel* Studien über die Besselschen Functionen“ Leipzig 1868 finden. Man kann daher auch in diesem Falle die Lichtintensität c^2 für einen jeden Punkt des Gesichtsfeldes finden. Aus (13b) ergiebt sich nämlich

$$c = 2\pi\left(\frac{R}{r}\right) J_1(Rr),$$

wo

$$r = \sqrt{p^2 + q^2} = \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{(\alpha_0 - \alpha_1)^2 + (\beta_0 - \beta_1)^2},$$

ist; nehmen wir jetzt, um den Fall zu vereinfachen, $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ oder senkrecht auffallendes Licht an, so ergiebt sich

$$Rr = 2\pi \frac{R}{\lambda} \sin\vartheta,$$

wenn ϑ den sehr kleinen Winkel zwischen dem einfallenden und dem gebeugten Strahl bezeichnet, wofür auch

$$z = Rr = 2\pi \frac{R}{\lambda} \vartheta$$

gesetzt werden kann. Für gewisse Werthe von ϑ verschwindet c, die Lichtstärke ist also Null, d. h. es sind in dem Gesichtsfelde dunkle concentrische Kreise vorhanden. Sie entsprechen den Wurzeln der Gleichung

$$J_1(z) = 0$$

mit Ausnahme der Wurzel $z = 0$. Diese Wurzeln sind

$$z = 1{,}220\,\pi, \quad 2{,}233\,\pi, \quad 3{,}238\,\pi, \quad 4{,}241\,\pi, \quad 5{,}243\,\pi \ldots$$

Man ersieht schon aus dieser Reihe, dass ein Näherungswerth der n^{ten} Wurzel

$$\left(n + \frac{1}{4}\right)\pi$$

sein wird, und dieser ist in der That um so genauer, je grösser n ist. Zwischen je zwei auf einander folgenden dunkeln Ringen befindet sich ein Maximum der Lichtstärke. Die Werthe dieser Maxima nehmen mit ihrer Ordnungszahl ab, und zwar so rasch, dass man bei nicht sehr grosser Helligkeit der Lichtquelle, wenn der leuchtende Punkt keine grosse Intensität besitzt, nur die durch den ersten dunkeln Kreis begrenzte Scheibe wahrnimmt. Aus der Gleichung

$$Rr = z$$

folgt noch der Satz: Der Durchmesser der durch die Beugung erzeugten Ringe ist umgekehrt proportional dem Radius R der beugenden Oeffnung.

Von den soeben gefundenen Resultaten lässt sich eine interessante Anwendung machen: Die Pupille des menschlichen Auges bildet einen Kreis von etwa 4^{mm} Durchmesser. Das Bild eines leuchtenden Punktes im Auge ist also kein Punkt, sondern in Folge der Beugung am Rande der Pupille eine kleine Scheibe, deren Durchmesser etwa 4—8^{mm} sein wird; jedenfalls wirkt also die Beugung bei der sogenannten *Irradiation* mit, wenn sie auch nicht ihre einzige Ursache ist.

§ 6.

Hat man die Fraunhofer'sche Beugungserscheinung, die ein leuchtender Punkt bei einer Oeffnung von *einer* Gestalt giebt, berechnet, so kann man (worauf *Lommel* zuerst aufmerksam gemacht hat) sehr leicht die entsprechenden Erscheinungen bei Oeffnungen von gewissen *verwandten* Gestalten ableiten. Wir haben nämlich für eine jede Oeffnung

$$\begin{aligned} J &= K(c^2 + s^2), \\ c &= \iint dx\,dy \cos(px + qy), \\ s &= -\iint dx\,dy \sin(px + qy), \end{aligned}$$

wo die Integrationen über die beugende Oeffnung ausgedehnt sind.

Nun setze man nx für x, $\frac{p}{n}$ für p, während man alles Uebrige ungeändert lässt, und lasse n irgend eine gebrochene Zahl bedeuten. Dann wird nc aus c, ns aus s, also $n^2 J$ aus J. Daraus folgt, dass, wenn man alle Abscissen des Randes der Oeffnung auf das $n$fache vergrössert, die Ordinaten aber ungeändert lässt, man ein Beugungsbild erhält, das aus dem ursprünglichen dadurch entsteht, dass man die Abscissen seiner Punkte auf das $\frac{1}{n}$fache verkleinert, die Ordinaten ungeändert lässt und die Intensität überall im Verhältniss $n^2 : 1$ vergrössert.

Aus dem Beugungsbilde einer rechteckigen Oeffnung kann man auf diese Weise das einer Oeffnung ableiten, die ein beliebiges Parallelogramm ist, wenn man die Achsen der x und y schief gegen die Seiten des Rechtecks annimmt, in dem Bilde treten dann dunkle Streifen auf, welche den Seiten der Oeffnung parallel sind; ebenso lässt sich aus dem Beugungsbilde einer kreisförmigen Oeffnung das einer elliptischen ableiten und das Bild enthält hier dunkle concentrische Ellipsen.

Mit der Beugungserscheinung, die eine enge Oeffnung in dem Lichte eines leuchtenden Punktes hervorruft, steht im nächsten Zusammenhange die Erscheinung, die sich zeigt, wenn man dieses Licht theilweise durch einen kleinen Schirm von der Gestalt und Lage der Oeffnung auffängt. Beide Erscheinungen stimmen nämlich vollständig in allen Punkten des Gesichtsfeldes überein, ausser in demjenigen, der das Bild des leuchtenden Punktes ist. Um diese Uebereinstimmung nachzuweisen, denken wir uns, dass das Licht des leuchtenden Punktes auf eine kleine Oeffnung in einem Schirm fällt, die aber so beschaffen ist, dass keine Beugungserscheinungen merklich sind; in diese Oeffnung sei der kleine Schirm gebracht; die Helligkeit im Punkte 0 ist dann

$$J_0' = K(c'^2 + s'^2),$$

wo

$$c' = \iint ds \cos \frac{r_1 + r_0}{\lambda} 2\pi,$$

$$s' = \iint ds \sin \frac{r_1 + r_0}{\lambda} 2\pi$$

ist, und wo die Integration über die Oeffnung mit Ausschluss des kleinen Schirmes ausgedehnt ist; ist im Gegentheil statt des kleinen Schirmes eine Oeffnung von derselben Gestalt in einem grösseren Schirm vorhanden, so ist die Helligkeit im Punkte 0

$$J_0 = K(c^2 + s^2),$$

wo c und s dieselben Integrale über diese kleine Oeffnung ausgedehnt bedeuten; $c + c'$ und $s + s'$ sind daher dieselben Integrale über jene grössere Oeffnung genommen, und

$$K\left\{(c + c')^2 + (s + s')^2\right\}$$

ist die Helligkeit im Punkte 0 in dem Fall, dass die grosse Oeffnung ganz frei ist. Diese Helligkeit ist aber gleich Null, wenn der Punkt 0 nicht in der Richtung des leuchtenden Punktes sich befindet; bei Ausschluss dieses Falles ist daher

$$c' = -c, \qquad s' = -s, \qquad J_0 = J_0'.$$

Da man nun jene grössere Oeffnung beliebig nahe an den beugenden Schirm herangezogen denken kann, wenn nur Beugungen am Rande derselben vermieden werden, also sehr nahe im Verhältniss zu den Dimensionen des Beugungsbildes, so müssen die obigen Gleichungen für alle Punkte gelten, welche nur nicht zu nahe an dem geometrischen Schatten des kleinen Schirms liegen; die aufgestellte Behauptung ist somit bewiesen.

Sechste Vorlesung.

Allgemeine Theorie der Fraunhoferschen Beugungserscheinungen für mehrere beugende Oeffnungen von gleicher Gestalt und entsprechender Lage. — Die Oeffnungen sind sehr zahlreich und regellos vertheilt. — Die Anzahl der Oeffnungen ist endlich und sie sind regelmässig angeordnet. — Die Oeffnungen liegen in einer Reihe in gleichen Abständen. — Die Oeffnungen sind schmale und lange Rechtecke, die Lichtquelle ist eine Linie. — Gittersysteme. — Theorie der Beugungsspectren. — Untersuchung des Falles, dass die Spalten des Gitters nicht unendlich gross gegen die Wellenlänge sind. — Die Rowlandschen Beugungsgitter. — Die Oeffnungen sind durch dünne Glasplättchen bedeckt. — Theorie der Talbotschen Linien.

§ 1.

Die Entwicklungen der vorigen Vorlesung bezogen sich zunächst auf die durch *eine* Oeffnung erzeugten Fraunhofer'schen Beugungserscheinungen; die dort abgeleiteten allgemeinen Formeln (10a) und (10b) gelten aber eben so gut, wenn deren *mehrere* vorhanden sind, nur müssen dann die Integrationen in c und s über alle Oeffnungen ausgedehnt werden. Wir wollen nun den Fall verfolgen, dass mehrere ebene und in derselben Ebene liegende Oeffnungen von gleicher Gestalt und von solcher Lage vorhanden sind, dass die entsprechenden Linien in ihnen parallel sind.

Wählen wir die Ebene der Oeffnungen wieder zur xy-Ebene, so ist die Lichtintensität im Punkte O in einer gewissen Einheit ausgedrückt,

$$J = c^2 + s^2,$$

wo

$$\begin{aligned} c &= \iint dx\,dy \cos(px + qy), \\ s &= -\iint dx\,dy \sin(px + qy), \end{aligned} \tag{1}$$

$$p = \frac{2\pi}{\lambda}(\alpha_0 - \alpha_1), \quad q = \frac{2\pi}{\lambda}(\beta_0 - \beta_1),$$

zu setzen ist, und wo die Integrationen über alle Oeffnungen ausgedehnt werden müssen.

Es möge nun in der ersten Oeffnung ein Punkt beliebig angenommen werden, und es seien

$$(a_1 b_1), \quad (a_2 b_2), \quad (a_3 b_3) \ldots$$

seine Coordinaten, sowie die Coordinaten derjenigen Punkte, welche jenem in den übrigen Oeffnungen entsprechen. Sind dann $(a_1 + x', b_1 + y')$ die Coordinaten eines beliebigen anderen Punktes in der ersten Oeffnung, so ergeben sich für die Coordinaten der ihm in den übrigen Oeffnungen entsprechenden Punkte die Werthe

$$\begin{array}{ll} a_1 + x', & a_2 + x', \cdots \\ b_1 + y', & b_2 + y', \cdots. \end{array}$$

In Folge dessen lassen sich jetzt die Ausdrücke für c und s folgendermassen schreiben

$$c = \sum_i \iint dx'dy' \cos\left(p(a_i + x') + q(b_i + y')\right),$$

$$s = -\sum_i \iint dx'dy' \sin\left(p(a_i + x') + q(b_i + y')\right),$$

wo die Integrationen über eine Oeffnung auszudehnen, und dann die Summen für die Oeffnungen zu nehmen sind. Zerlegt man in diesen Ausdrücken von c und s die vorkommenden Sinus und Cosinus, so treten nur die beiden Integrale

$$\begin{aligned} c' &= \iint dx'dy' \cos(px' + qy'), \\ s' &= -\iint dx'dy' \sin(px' + qy') \end{aligned} \tag{2}$$

auf, bei denen die Integrationen ebenfalls über *eine* Oeffnung auszudehnen sind; setzt man endlich noch zur Abkürzung

$$\begin{aligned} C &= \sum_i \cos(pa_i + qb_i), \\ S &= -\sum_i \sin(pa_i + qb_i), \end{aligned} \tag{2a}$$

so gehen jene Gleichungen in

$$\begin{aligned} c &= c'C - s'S, \\ s &= s'C + c'S, \end{aligned}$$

über, und aus ihnen ergiebt sich

$$J = c^2 + s^2 = (c'^2 + s'^2)(C^2 + S^2).$$

Es ist aber $c'^2 + s'^2$ die Intensität J' im Punkte 0 für den Fall, dass nur eine Oeffnung vorhanden ist, gleichgültig welche; die letzte Gleichung lässt sich also folgendermassen schreiben

$$J = (C^2 + S^2)\,J'. \tag{3}$$

Man sieht daraus, dass, wo in dem Beugungsbilde *einer* Oeffnung Dunkelheit vorhanden ist, diese bleibt bei beliebig vielen Oeffnungen. Es entsteht das Beugungsbild des Systems aus dem einer einzelnen

Oeffnung, indem hier die Intensität im Verhältniss $C^2 + S^2 : 1$ vermehrt wird; da C und S von $\alpha_0 \beta_0$ abhängig sind, so wird dieses Verhältniss in den verschiedenen Punkten des Gesichtsfeldes im Allgemeinen einen verschiedenen Werth haben und auch kleiner als 1 sein können.

Ist die Zahl der Oeffnungen sehr gross und sind dieselben regellos vertheilt, so wird in dem aus (2a) sich ergebenden Ausdrucke für $C^2 + S^2$ der Theil

$$\sum_{(i \gtrless k)} \{\cos(pa_i + qb_i)\cos(pa_k + qb_k) + \sin(pa_i + qb_i)\sin(pa_k + qb_k)\}$$
$$= \sum_{(i \gtrless k)} \cos\left(p(a_i - a_k) + q(b_i - b_k)\right)$$

als verschwindend angesehen werden dürfen, da in dieser Summe die Cosinus regellos zwischen 1 und -1 vertheilt liegen, es resultirt also für $C^2 + S^2$ der Werth n, wenn n die Anzahl der Oeffnungen bedeutet. In diesem Fall ist also das Beugungsbild ganz dasselbe, wie das von *einer* Oeffnung hervorgerufene, jedoch ist es viel lichtstärker als jenes.

Dieses Resultat kann durch den Versuch bestätigt werden, z. B. wenn man Lycopodiumsamen auf einer Glasplatte verstreut. Die Theilchen, aus denen derselbe besteht, sind nämlich nahezu gleich gross und kreisförmig. Da nun eine kleine schwarze Scheibe dieselben Beugungserscheinungen hervorruft, wie eine ebenso grosse Oeffnung, so entsteht auf einem dahinter gehaltenen Schirme die von der Theorie geforderte Erscheinung, wenn man den Samen von einem unendlich fernen Punkte aus beleuchtet. Kennt man also die Wellenlänge des angewandten Lichtes und die übrigen Data, so kann man den Durchmesser jener Theilchen aus dem der entstehenden Ringe leicht berechnen.

Ein ganz anderes Resultat ergiebt sich aber, wenn die Oeffnungen nicht regellos vertheilt, sondern gesetzmässig angeordnet sind.

Wir wollen annehmen, dass *eine* Reihe von Oeffnungen vorhanden ist, und dass die entsprechenden Punkte derselben auf einer geraden Linie in gleichen Abständen e liegen. Wählen wir eine dieser geraden Linien als x-Achse, so können wir setzen

$$b_1 = b_2 = b_3 = \cdots = 0,$$
$$a_1 = 0, \quad a_2 = e, \quad a_3 = 2e, \cdots$$

dadurch wird

$$C = 1 + \cos pe + \cos 2pe + \cdots + \cos(n-1)pe,$$
$$-S = \sin pe + \sin 2pe + \cdots + \sin(n-1)pe,$$

wo n die Zahl der Oeffnungen bedeutet. Diese Reihen lassen sich summiren; multiplicirt man nämlich die Gleichungen für C und S mit $2\cos pe$ und benutzt, dass

$$2 \cos a \cos b = \cos (a + b) + \cos (a - b),$$
$$2 \cos a \sin b = \sin (a + b) - \sin (a - b),$$

ist, so erhält man einfache Gleichungen für C und S, deren Auflösungen durch Benutzung von

$$\cos b - \cos a = 2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2},$$
$$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2},$$
$$\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

werden

$$C = \frac{\sin \frac{npe}{2} \cos \frac{(n-1)pe}{2}}{\sin \frac{pe}{2}},$$

$$-S = \frac{\sin \frac{npe}{2} \sin \frac{(n-1)pe}{2}}{\sin \frac{pe}{2}}.$$

Quadrirt und addirt man diese beiden Gleichungen, so erhält man

$$C^2 + S^2 = \left(\frac{\sin \frac{npe}{2}}{\sin \frac{pe}{2}} \right)^2,$$

also ergiebt sich aus (3)

$$J = n^2 J' \left(\frac{\sin \frac{npe}{2}}{n \sin \frac{pe}{2}} \right)^2 = n^2 J' \left(\frac{\sin n\xi}{n \sin \xi} \right)^2, \tag{4}$$

wenn zur Abkürzung

$$\frac{pe}{2} = \xi$$

gesetzt wird. An den Stellen, an denen

$$\xi = \pm h\pi$$

ist, wo h eine positive ganze Zahl oder Null bedeutet, wird

$$\frac{\sin n\xi}{n \sin \xi} = \frac{n \cos n\xi}{n \cos \xi} = \pm 1,$$

und also

$$J = n^2 J', \tag{4a}$$

und eine genauere Discussion des aus (4) sich ergebenden Werthes des Verhältnisses $J : J'$, welche der im § 4 der vorigen Vorlesung durchgeführten völlig analog ist, lehrt, dass dasselbe an diesen Stellen seinen grössten Werth erhält.

§ 2.

Es sei nun die Anzahl der Oeffnungen sehr gross, also $n = \infty$, dann wird an allen Stellen des Bildes, für welche $\xi = \pm h\pi$, oder für welche

$$\alpha_0 = \alpha_1 \pm h \frac{\lambda}{e} \tag{5}$$

ist, die Lichtstärke unendlich gross sein gegen diejenige, welche an den anderen Stellen stattfindet, da an jenen immer $n \sin \xi = \infty$, $\sin n\xi$ aber höchstens gleich 1 ist. Ferner seien die einzelnen Oeffnungen, über deren Gestalt bis jetzt keinerlei Voraussetzungen gemacht zu werden brauchten, zur x-Achse senkrechte Spalte; ein solches System nennt man ein *Beugungsgitter.*

Wir wollen der Einfachheit wegen annehmen, dass das Licht des leuchtenden Punktes senkrecht auf das Gitter auffalle, dann ist $\alpha_1 = \beta_1 = 0$, und für alle Punkte des Bildes, in denen Licht vorhanden ist, $\beta_0 = 0$; setzt man also

$$\alpha_0 = \sin \vartheta,$$

so ist ϑ der Winkel des gebeugten mit dem einfallenden Strahl, oder der „Beugungswinkel"; dann werden an allen Stellen, an denen

$$\alpha_0 = \sin \vartheta = \pm h \frac{\lambda}{e} \tag{5a}$$

ist, helle Lichtpunkte auftreten. Wählt man statt des leuchtenden Punktes eine zu den Spalten des Gitters parallele leuchtende Linie als Lichtquelle, so werden an den durch die obigen Werthe von ϑ bestimmten Stellen helle Linien auftreten, welche den Spalten parallel sind, und deren Entfernungen von einander um so grösser werden, je kleiner der Abstand e der Spalten ist; man wird Spectren erhalten, wenn das einfallende Licht gemischtes ist, wenn also λ variirt. Man nennt diese Spectren *Beugungsspectren;* Messungen, die an ihnen angestellt sind, haben zur genauen Kenntniss der Wellenlängen der verschiedenfarbigen Lichtstrahlen geführt.

Die soeben abgeleiteten Gleichungen setzen aber wesentlich voraus, dass die Dimensionen der beugenden Oeffnung sehr gross gegen die Wellenlängen sind, und ihre Anwendung auf die Beugungsspectren, bei deren Herstellung oft Gitter benutzt sind, deren Spalten nur eine Breite von wenigen Wellenlängen besitzen, ist zunächst nicht zu rechtfertigen. Doch haben die Messungen, denen wir die Kenntniss der Wellenlängen verdanken, gezeigt, dass diese Anwendung die Orte der Lichtmaxima mit grosser Genauigkeit richtig ergiebt. Diese Thatsache findet ihre Erklärung durch die folgenden Betrachtungen:

Man denke sich das Gitter, über dessen Beschaffenheit eine specielle Voraussetzung nicht gemacht zu werden braucht, das z. B. ein

Drahtgitter, ein Russgitter, oder ein Diamantgitter sein kann, in die passende Oeffnung eines ebenen schwarzen Schirmes eingefügt, der sich nach allen Seiten in die Unendlichkeit erstreckt. Auf dieses Gitter mögen nun ebene Lichtwellen senkrecht auffallen, und es möge der Schirm, der die Beugungserscheinungen auffängt, in der Unendlichkeit liegen.

Es sei dann φ irgend eine der Functionen u, v, w, dann ist φ_0, d. h. der Werth derselben in einem Punkte 0 des Schirmes nach (12) der zweiten Vorlesung gegeben durch die Gleichung

$$\varphi_0 = -\frac{1}{4\pi}\int ds\left(\frac{1}{r_0}\frac{\partial\varphi}{\partial N} + \frac{1}{a r_0}\frac{\partial r_0}{\partial N}\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{\partial\frac{1}{r_0}}{\partial N}\varphi\right), \tag{6}$$

wo sich die Function φ unter dem Integralzeichen auf das Element ds bezieht, jedoch statt t das Argument $t - \frac{r_0}{a}$ besitzt. Die Ebene, deren Element ds genannt wird, sei nun wie vorher die xy-Ebene des Coordinatensystemes, die x-Achse stehe senkrecht auf den Spalten, der Anfangspunkt sei der Mittelpunkt des rechteckig angenommenen Gitters. Ferner sei ϱ_0 die Länge der vom Coordinatenanfangspunkte nach dem Punkte 0 gezogenen Linie, und $\alpha_0\beta_0\gamma_0$ die Cosinus der Winkel, welche diese mit den Axen bildet. Man hat dann bis auf Grössen der zweiten Ordnung

$$r_0 = \varrho_0 - (\alpha_0 x + \beta_0 y), \qquad \frac{\partial r_0}{\partial N} = \gamma_0, \qquad ds = dx\,dy,$$

und da ϱ_0 als unendlich gross angenommen wurde, so ergiebt sich aus (6)

$$\varphi_0 = -\frac{1}{4\pi}\iint\frac{dx\,dy}{\varrho_0}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial N} + \frac{\gamma_0}{a}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right). \tag{6a}$$

Man hat nun für das Argument t

$$\varphi(t) = A\cos\frac{t}{T}2\pi + B\sin\frac{t}{T}2\pi,$$

$$\frac{\partial\varphi(t)}{\partial N} = A'\cos\frac{t}{T}2\pi + B'\sin\frac{t}{T}2\pi,$$

wo dann A, B, A', B' Functionen von x und y sind; da dann

$$\frac{1}{a}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{2\pi}{\lambda}B\cos\frac{t}{T}2\pi - \frac{2\pi}{\lambda}A\sin\frac{t}{T}2\pi$$

sich ergiebt, so ist in (6a) unter dem Integralzeichen zu setzen

$$\frac{\partial\varphi\left(t-\frac{r_0}{a}\right)}{\partial N} = A'\cos\left(\frac{t}{T} + \frac{\alpha_0 x + \beta_0 y}{\lambda}\right)2\pi$$
$$+ B'\sin\left(\frac{t}{T} + \frac{\alpha_0 x + \beta_0 y}{\lambda}\right)2\pi,$$

$$\frac{1}{a}\frac{\partial\varphi\left(t-\frac{r_0}{a}\right)}{\partial t} = \frac{2\pi}{\lambda}B\cos\left(\frac{t}{T}+\frac{\alpha_0 x+\beta_0 y}{\lambda}\right)2\pi$$
$$-\frac{2\pi}{\lambda}A\sin\left(\frac{t}{T}+\frac{\alpha_0 x+\beta_0 y}{\lambda}\right)2\pi,$$

wobei der Anfangspunkt der Zeit um $\frac{\rho_0}{a}$ rückwärts verlegt ist. Hiernach erhält man für φ_0 den Ausdruck

$$\varphi_0 = \int\int dx\,dy\left(D\cos\left(\frac{t}{T}+\frac{\alpha_0 x+\beta_0 y}{\lambda}\right)2\pi + E\sin\left(\frac{t}{T}+\frac{\alpha_0 x+\beta_0 y}{\lambda}\right)2\pi\right),$$

wo D und E umgekehrt proportional mit ρ_0, lineare Functionen von γ_0 und endlich, was hier hervorzuheben ist, lineare homogene Functionen von A, A', B, B' sind, deren Coefficienten x und y nicht enthalten.

Nun sei die Lichtquelle ein leuchtender Punkt, der auf der negativen z-Achse in der Unendlichkeit liegt, $2b$ die Länge der Spalten, $2n$ ihre Anzahl, e der Abstand entsprechender Punkte zweier aufeinander folgenden Spalten, $2ne$ also die Breite des Gitters. Man darf dann annehmen, dass $\varphi(t)$ und $\frac{\partial\varphi}{\partial N}$, von y so abhängen, dass sie constant bleiben, wenn y von $-b$ bis $+b$ variirt, und verschwinden, wenn y ausserhalb dieses Intervalles liegt, während sie als Functionen von x betrachtet, um e periodisch sind, wenn x einen Werth zwischen $\pm ne$ hat und für andere Werthe von x verschwinden. Man ist zu dieser Annahme berechtigt, weil es ebene Wellen sind, welche auf das in einem schwarzen Schirm befindliche Gitter senkrecht auffallen; ganz dasselbe wird dann von den Functionen A, B, A', B' und somit auch von D und E gelten. In Folge hiervon wird zunächst

$$\varphi_0 = \frac{\sin\frac{\beta_0 b}{\lambda}2\pi}{\frac{\beta_0}{\lambda}\pi}\int_{-ne}^{+ne}dx\left\{D\cos\left(\frac{t}{T}+\frac{\alpha_0 x}{\lambda}\right)2\pi + E\sin\left(\frac{t}{T}+\frac{\alpha_0 x}{\lambda}\right)2\pi\right\}.$$

Da λ als unendlich klein gegen b angesehen werden kann, so ist der vor dem Integralzeichen stehende Factor für jeden endlichen Werth von β_0 unendlich klein, während er endlich ist, wenn β_0 von der Ordnung $\frac{\lambda}{b}$, also unendlich klein ist: es ist also allein in den Punkten der x-Achse Licht vorhanden. Bezieht sich jetzt also φ_0 auf einen solchen Punkt, so ergiebt sich in einer passend gewählten Einheit

$$\varphi_0 = \int_{-ne}^{+ne}dx\left(D\cos\left(\frac{t}{T}+\frac{\alpha_0 x}{\lambda}\right)2\pi + E\sin\left(\frac{t}{T}+\frac{\alpha_0 x}{\lambda}\right)2\pi\right)$$
$$= \cos\frac{t}{T}2\pi\int_{-ne}^{+ne}dx\left(D\cos\frac{\alpha_0 x}{\lambda}2\pi + E\sin\frac{\alpha_0 x}{\lambda}2\pi\right)$$
$$+\sin\frac{t}{T}2\pi\int_{-ne}^{+ne}dx\left(-D\sin\frac{\alpha_0 x}{\lambda}2\pi + E\cos\frac{\alpha_0 x}{\lambda}2\pi\right).$$

Der Mittelwerth von φ_0^2, durch den die Intensität im Punkte 0 bestimmt ist, ist die halbe Summe der Quadrate der beiden hier vorkommenden Integrale, welche jetzt näher untersucht werden sollen. Zu diesem Zwecke denken wir uns D und E nach den Cosinus und Sinus der Vielfachen von $\frac{x}{e}\,2\pi$ entwickelt, was nach der oben gemachten Voraussetzung möglich ist, und betrachten eine endliche Anzahl der so erhaltenen Glieder an Stelle von D und E. Es treten dann, wenn h eine ganze Zahl oder Null bedeutet, die Integrale auf

$$\int\limits_{-ne}^{+ne} dx \cos h\,\frac{x}{e}\,2\pi \sin \alpha_0\,\frac{x}{\lambda}\,2\pi \quad \text{und} \quad \int\limits_{-ne}^{+ne} dx \sin h\,\frac{x}{e}\,2\pi \cos \alpha_0\,\frac{x}{\lambda}\,2\pi,$$

die verschwinden, da ihre Grenzen gleich und entgegengesetzt, und die zu integrirenden Functionen ungerade sind, und ferner die Integrale

$$\int\limits_{-ne}^{+ne} dx \cos h\,\frac{x}{e}\,2\pi \cos \alpha_0\,\frac{x}{\lambda}\,2\pi \quad \text{und} \quad \int\limits_{-ne}^{+ne} dx \sin h\,\frac{x}{e}\,2\pi \sin \alpha_0\,\frac{x}{\lambda}\,2\pi,$$

die beziehungsweise

$$= \frac{\sin ne\,2\pi\left(\frac{h}{e} - \frac{\alpha_0}{\lambda}\right)}{2\pi\left(\frac{h}{e} - \frac{\alpha_0}{\lambda}\right)} \pm \frac{\sin ne\,2\pi\left(\frac{h}{e} + \frac{\alpha_0}{\lambda}\right)}{2\pi\left(\frac{h}{e} + \frac{\alpha_0}{\lambda}\right)}$$

sind. Wenn α_0 nicht specielle Werthe hat, so sind alle diese Ausdrücke von der Ordnung von λ, falls e nicht von noch niedrigerer Ordnung ist, nur für

$$\alpha_0 = \pm \frac{h}{e}\,\lambda,$$

ist der Werth eines jeden dieser beiden Integrale endlich, nämlich $\pm\, ne$. Mit Berücksichtigung der vorher über die Intensität der Lichtbewegung gemachten Bemerkung folgt also in Uebereinstimmung mit (5a), dass sie unendlich gross ist gegen die in allen anderen Punkten des Gesichtsfeldes stattfindende, wenn

$$\alpha_0 = \sin\vartheta = \pm\, h\,\frac{\lambda}{e}, \qquad \beta_0 = 0,$$

wo ϑ der „Beugungswinkel" ist, und das ist es, was auch die Beobachtungen gezeigt haben.

§ 3.

Erwähnen wollen wir den Fortschritt, der in der Herstellung von Beugungsgittern in neuester Zeit von Professor *Rowland* in Cambridge in Amerika gemacht ist. Es ist diesem gelungen, Gitter zu verfertigen, welche die bisherigen an Grösse der Dimensionen, an

Kleinheit und Regelmässigkeit des Abstandes aufeinanderfolgender Linien weit übertreffen. Seine Theilmaschine gestattet nach seiner Angabe eine Fläche von etwa 100 mm Höhe und 150 mm Länge mit Linien zu versehen, von denen fast 2000 auf 1 mm gehen, deren Abstände also gleich einer Wellenlänge des gelb-grünen Lichtes sind. Die Linien werden mit einem Diamant in eine Metallfläche geritzt; es können diese Gitter also nur im reflectirten Lichte benutzt werden. Einen wesentlichen Vortheil erlangt Rowland dadurch, dass er seine Gitter nicht auf ebenen, sondern auf hohlen sphärischen Flächen herstellt; in Folge davon wirkt das Gitter als Hohlspiegel und erzeugt reelle Bilder der Spectren der Lichtquelle, ohne dass Linsen zu Hülfe gezogen zu werden brauchen. Es ist dies für manche Untersuchungen sehr wichtig, da die Strahlen dann durch kein anderes Mittel als durch Luft gehen, und so die Absorption vermieden ist, die alle andern Körper bald mehr, bald weniger ausüben.

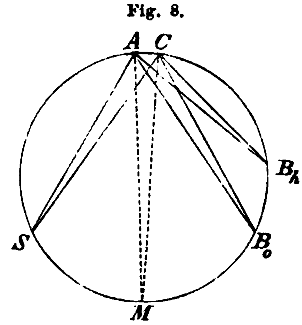
Die Anordnung, die Rowland bei der Beobachtung der Spectren benutzt, ist die folgende:

Das Gitter sei so aufgestellt, dass seine Linien vertical sind; die Ebene der untenstehenden Zeichnung sei horizontal; A sei der Mittelpunkt der Fläche des Gitters, M der Mittelpunkt seiner Krümmung; der gezeichnete Kreis sei über AM als Durchmesser beschrieben; er berührt somit das Gitter in A; auf diesem Kreise, in S, befinde sich der Mittelpunkt des verticalen Spaltes, der die Lichtquelle bildet. Beschränken wir uns auf die Betrachtung der Strahlen, welche in der Ebene der Zeichnung verlaufen, und suchen zunächst den Ort des Bildes von S, welches durch regelmässige Reflexion an der Fläche des Gitters erzeugt wird. Der Strahl SA wird in der Linie AB_0 reflektirt, wo

$$MS = MB_0$$

ist. Verfolgen wir einen zweiten einfallenden Strahl SC mit dem Einfallspunkt C bei seiner Reflexion; wir nehmen die Breite des Gitters

Fig. 8.



als unendlich klein von der ersten Ordnung gegen seinen Radius an; dann ist AC von der ersten Ordnung, der Abstand des Punktes C von dem gezeichneten Kreise aber von der zweiten Ordnung unendlich klein, und wir können daher den Einfallspunkt C als *auf* dem Kreise liegend darstellen. Das Einfallsloth ist MC, der Einfallswinkel daher gleich dem Einfallswinkel für SA, also auch der Reflexionswinkel gleich dem des vorher betrachteten Strahles; der reflektirte Strahl muss demnach durch B_0 gehen, es muss also B_0 das gesuchte Bild von S sein.

Nun sei das Licht homogen von der Wellenlänge λ; es entsteht dann durch Beugung auf jeder Seite von B_0 eine Reihe von Bildern von S. Ueberlegen wir zuerst die Wirkung des Gitterelementes bei A. Es sei ϑ der Einfallswinkel, ϑ_h der dem h^{ten} Beugungsbilde entsprechende Reflexionswinkel; dann ist nach (5)

$$\frac{pe}{2} = \pm h\pi, \qquad \text{oder da} \qquad \beta_1 = \beta_0 = 0$$

war,

$$\alpha_1 = \sin\vartheta, \qquad \alpha_0 = \sin\vartheta_h$$

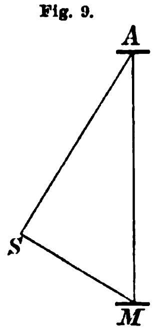
mithin

$$\sin\vartheta_h - \sin\vartheta = \pm h\frac{\lambda}{e}.$$

Wir denken uns ϑ_h aus dieser Gleichung berechnet und an MA angetragen; so entstehe die Linie AB_h; eine ähnliche Construction denken wir uns für das Element des Gitters bei C ausgeführt. Der Einfallswinkel ϑ ist hier derselbe wie bei A; die aufgestellte Gleichung giebt daher auch denselben Werth für den Reflexionswinkel ϑ_h; es wird mithin der hier durch Reflexion und Beugung erzeugte Strahl CB_h und es ergiebt sich B_h als Ort des h^{ten} Beugungsbildes von S. Auf dem gezeichneten Kreise liegen daher die sämmtlichen durch das Gitter erzeugten Bilder von S.

Man wird diese beobachten können, wenn man an passender Stelle einen kleinen weissen Schirm so aufstellt, dass er von jenem Kreise berührt wird. Dabei wird der Schirm im Allgemeinen schief von den wirksamen Strahlen getroffen werden; es hat das gewisse Uebelstände zur Folge, die Rowland auf die folgende sinnreiche Weise zu vermeiden gelehrt hat.

Fig. 9.



Der Spalt S ist fest aufgestellt in dem Schnittpunkt zweier auf einander senkrechten Schienen; auf diesen verschiebbar ist eine dritte Schiene AM derart angebracht, dass ihr einer Endpunkt A auf der einen, der andere M auf der andern Schiene beweglich ist. Die Länge AM ist der Krümmungsradius des Gitters; in A ist das Gitter, in M der Schirm senkrecht zu AM aufgestellt und an der letztgenannten Schiene befestigt. Wie diese nun auch aufgestellt sein möge, immer haben die Punkte S, A, M die bei der früheren Figur vorausgesetzte Lage, da ein über MA als Durchmesser beschriebener Kreis durch S hindurchgeht; durch passende Stellung der beweglichen Schiene kann man nun jedes der durch Beugung und Reflexion entstandenen Bilder auf den Schirm in M bringen, der dann durch die wirksamen Strahlen stets senkrecht getroffen wird.

§ 4.

Wir wollen nun den betrachteten Fall, dass ein leuchtender Punkt sein Licht durch mehrere (oder viele) gleiche und gleichliegende Oeffnungen sendet, noch verallgemeinern. Wir wollen nämlich annehmen, dass vor jeder Oeffnung eine von zwei parallelen Ebenen begrenzte Schicht eines durchsichtigen Mittels, etwa ein Glasplättchen, sich befindet; die Dicken der vor den einzelnen Oeffnungen befindlichen Plättchen sollen verschieden sein. Dann wird die Zeit, welche ein einfallender Strahl gebraucht, um durch die Oeffnungen hindurch von einer Wellenebene zu einer andern zu gelangen, durch die Hinzufügung der Plättchen geändert werden; es sei τ_i die Zahl, welche diese Aenderung für die i^{te} Oeffnung ergiebt, und es werde

$$r_i = \frac{\tau_i}{T}\, 2\pi$$

gesetzt; es lässt sich dann r_i bezeichnen als die Aenderung der Phase, die durch die i^{te} Platte hervorgebracht ist. Brauchen wir im Uebrigen dieselben Zeichen, wie oben, und machen Gebrauch von den Formeln des § 2 der fünften Vorlesung

$$c = \iint ds \cos\left(\frac{\tau_1 + \tau_0}{T}\, 2\pi - \delta\right)$$

$$s = \iint ds \sin\left(\frac{\tau_1 + \tau_0}{T}\, 2\pi - \delta\right),$$

so ergeben sich für c und s die Ausdrücke

$$c = \sum_{(i)} \iint dx'\,dy' \cos\big(p(a_i + x') + q(b_i + y') - r_i\big)$$

$$-s = \sum_{(i)} \iint dx'\,dy' \sin\big(p(a_i + x') + q(b_i + y') - r_i\big),$$

wo

$$p = \frac{2\pi}{\lambda}(\alpha_0 - \alpha_1), \qquad q = \frac{2\pi}{\lambda}(\beta_0 - \beta_1)$$

zu setzen ist, und für die Intensität J im Punkte 0 erhält man in einer gewissen Einheit ausgedrückt

$$J = c^2 + s^2.$$

Setzt man nun

$$C = \sum_{(i)} \cos(pa_i + qb_i - r_i)$$

$$-S = \sum_{(i)} \sin(pa_i + qb_i - r_i)$$

und nennt J' wieder die Intensität im Punkte 0 bei einer Oeffnung, so erhält man durch die im Anfang dieser Vorlesung benutzten Schlüsse

$$J = J'(C^2 + S^2).$$

Wir nehmen nun an, dass nur zwei Oeffnungen vorhanden sind, deren eine unbedeckt sei, dann können wir setzen

$$\begin{array}{lll} a_1 = 0 & b_1 = 0 & r_1 = 0 \\ a_2 = e & b_2 = 0 & r_2 = r, \end{array}$$

und es ergiebt sich

$$\begin{aligned} C &= 1 + \cos(pe - r) \\ -S &= \quad\;\; \sin(pe - r), \end{aligned}$$

also

$$J = 4J' \cos^2 \frac{pe - r}{2}. \tag{7}$$

Hieraus folgt, dass in dem Beugungsbilde *einer* Oeffnung durch Hinzufügen der zweiten schwarze Streifen entstehen, deren Orte durch die Werthe von p bestimmt sind, für welche

$$\cos \frac{pe - r}{2} = 0$$

ist. Fehlte die Glasplatte vor der zweiten Oeffnung, so wäre die Lage der durch diese erzeugten schwarzen Streifen durch die Gleichung

$$\cos \frac{pe}{2} = 0$$

bestimmt; die Glasplatte bewirkt also eine Verschiebung dieser Streifen, die durch den Werth von r bedingt ist. Zur Bestimmung dieses Werthes gelangt man auf dem folgenden Wege.

Es seien GG in Figur (10) die Grenzflächen der Platte, SA ein einfallender Strahl, AB seine Verlängerung. Wir wollen zunächst die Zeit berechnen, die das Licht gebraucht, um von der durch A gelegten Wellenebene bis zu der durch B gelegten zu gelangen. Der einfallende Strahl werde so gebrochen, dass er nach B' gelangt, von wo er seiner ursprünglichen Richtung parallel in der Linie $B'C$ fortgeht. Ist dann ϑ der Einfallswinkel, ϑ' der Brechungswinkel, D die Dicke der Platte, so ist

$$AB' = \frac{D}{\cos\vartheta'}$$

$$B'C = (BE - B'E)\sin\vartheta = D\sin\vartheta\,(\operatorname{tg}\vartheta - \operatorname{tg}\vartheta').$$

Nennt man also V und V' die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten des Lichtes in der Luft und im Glase, so ist die gesuchte Zeit

$$\frac{AB'}{V'} + \frac{B'C}{V} = D\left(\frac{1}{V'\cos\vartheta'} + \frac{\sin\vartheta}{V}(\operatorname{tg}\vartheta - \operatorname{tg}\vartheta')\right),$$

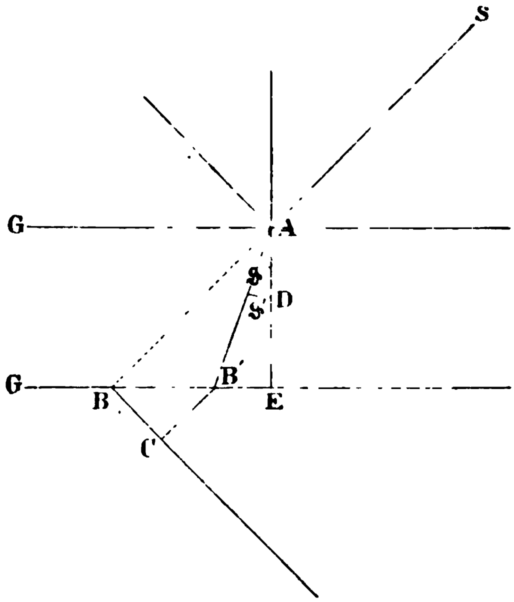
und mit Benutzung der Gleichung

$$\frac{V'}{\sin\vartheta'} = \frac{V}{\sin\vartheta}$$

geht dieser Ausdruck über in

$$\frac{D\sin\vartheta}{V}\left(\frac{1}{\sin\vartheta'\cos\vartheta'} + \operatorname{tg}\vartheta - \operatorname{tg}\vartheta'\right).$$

Fig. 10.



Wäre der von der Glasplatte eingenommene Raum mit Luft erfüllt, so hätte das Licht zwischen den durch A und B gelegten Wellenebenen die Zeit

$$\frac{AB}{V} = \frac{D}{V\cos\vartheta}$$

gebraucht; die durch die Glasplatte bewirkte Verzögerung τ ist daher bestimmt durch

$$\tau = \frac{D\sin\vartheta}{V}\left(\frac{1}{\sin\vartheta'\cos\vartheta'} - \frac{1}{\sin\vartheta\cos\vartheta} + \operatorname{tg}\vartheta - \operatorname{tg}\vartheta'\right)$$

$$= \frac{D\sin\vartheta}{V}\left(\frac{\cos\vartheta'}{\sin\vartheta'} - \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\right),$$

oder, wenn wir das Brechungsverhältniss

$$\frac{V}{V'} = \frac{\sin\vartheta}{\sin\vartheta'} = n$$

einführen, durch

$$\tau = \frac{D}{V}(n\cos\vartheta' - \cos\vartheta);$$

somit ergiebt sich für die Phasenänderung r der Ausdruck

$$r = \frac{\tau}{T}2\pi = 2\pi\frac{D}{\lambda}(n\cos\vartheta' - \cos\vartheta),$$

wo λ die Wellenlänge in der *Luft* bedeutet. Nehmen wir ϑ, also auch ϑ' als unendlich klein, und zwar von der ersten Ordnung, nehmen wir also wieder nahezu senkrecht auffallendes Licht an, so ist genau bis auf Grössen der zweiten Ordnung

$$r = 2\pi \frac{D(n-1)}{\lambda}. \tag{8}$$

Nun sei jede Oeffnung ein Rechteck, dessen Seiten die Längen $2a$, $2b$ und die Richtungen der Coordinatenachsen haben; nach § 4 der fünften Vorlesung erhält man dann in einer geeignet gewählten Einheit

$$J' = \left(\frac{\sin pa}{pa}\right)^2 \left(\frac{\sin qb}{qb}\right)^2,$$

also

$$J = 4\left(\frac{\sin pa}{pa}\right)^2 \left(\frac{\sin qb}{qb}\right)^2 \cos^2 \frac{pe-r}{2}.$$

Nehmen wir statt des leuchtenden *Punktes* eine der y-Achse parallele leuchtende Linie als Lichtquelle an, so ist die Lichtstärke J_1 im Punkte 0, wie in dem a. a. O. untersuchten Falle

$$J_1 = \int J\, d\beta_1,$$

oder in einer neuen Einheit

$$J_1 = \left(\frac{\sin pa}{pa}\right)^2 \cos^2 \frac{pe-r}{2}, \qquad p = \frac{2\pi}{\lambda}(\alpha_0 - \alpha_1). \tag{9}$$

Wir wollen an diesen Ausdruck weitere Schlüsse knüpfen, die uns zur Theorie einer merkwürdigen Erscheinung führen werden, welche unter dem Namen der *Talbot'schen Linien* bekannt ist.

§ 5.

Statt der Lichtlinie, die wir uns vorgestellt haben, wollen wir jetzt als Lichtquelle ein *Spectrum* annehmen, wie es durch ein Prisma, dessen brechende Kante der y-Achse parallel ist, aus einer *weissen* Lichtlinie von gleicher Richtung erzeugt werden kann. Diese Lichtquelle besteht dann aus unendlich vielen Lichtlinien, bei denen α_1 zwischen zwei endlichen Grenzen variirt, und bei denen λ von α_1 abhängig ist. Für die Intensität im Punkte 0 werden wir dann nach (9)

$$J_0 = \int f(\alpha_1)\, d\alpha_1 \left(\frac{\sin pa}{pa}\right)^2 \cos^2 \frac{pe-r}{2}$$

setzen können, wo $f(\alpha_1)$ eine langsam sich ändernde Function von α_1 ist, welche die Lichtintensität an der durch α_1 bestimmten Stelle des Spectrums misst; p und r sind von λ abhängig, also auch als Functionen von α_1 anzusehen.

An Stelle von α_1 soll nun eine neue Integrationsvariable ω durch die Gleichung

$$\omega = p\,a = \frac{2\pi a}{\lambda}(\alpha_0 - \alpha_1).$$

eingeführt werden; dann können die Grenzen von ω wegen des Nenners λ als $-\infty$ und $+\infty$ angenommen werden, wenn wir die Breite $2a$ der Oeffnungen als verhältnissmässig gross voraussetzen. Ferner werden die Werthe von α_1, die zur Helligkeit im Punkte 0 etwas Merkliches beitragen, sehr wenig von α_0 verschieden sein, weil anderenfalls gar kein dauerndes Zusammenwirken der Strahlen eintritt; man darf daher $f(\alpha_1)$ als constant betrachten und

$$d\alpha_1 = \text{const.}\, d\omega$$

setzen, so dass man hat

$$J_0 = \text{const.} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \left(\frac{\sin\omega}{\omega}\right)^2 \cos^2\left(\omega\frac{e}{2a} - \frac{r}{2}\right);$$

dagegen wird man r nicht als constant ansehen dürfen, weil es mit $\frac{D}{\lambda}$ proportional, also sehr gross ist und daher seine Aenderungen wenn auch klein gegen r selbst, erhebliche Werthe haben und den betreffenden Cosinus merklich ändern können. Ist aber a nur gross genug, so wird man r nach der Taylor'schen Reihe entwickeln und sich mit der Berücksichtigung der beiden ersten Glieder begnügen dürfen. Man kann daher setzen

$$r = (r)_0 + (\alpha_1 - \alpha_0)\left(\frac{dr}{d\alpha_1}\right)_0,$$

wo auf der rechten Seite in (r_0) und $\left(\frac{dr}{d\alpha_1}\right)_0$ $\alpha_1 = \alpha_0$ zu setzen ist. Diese Gleichung lässt sich schreiben

$$r = (r)_0 - \omega\frac{(\lambda)_0}{2\pi a}\left(\frac{dr}{d\alpha_1}\right)_0,$$

wo auch $(\lambda)_0$ auf den Werth α_0 von α_1 zu beziehen ist. Dabei kann man ferner, wenn die der Beobachtung unterworfenen Strahlen nahe senkrecht durch die Platte gegangen sind, nach (8)

$$r = 2\pi\frac{D(n-1)}{\lambda}$$

setzen. Man erhält dadurch für die Intensität J_0 im Punkte 0, in einer gewissen Einheit ausgedrückt den Werth

$$J_0 = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, \frac{\sin^2\omega\cos^2(\alpha\omega - \beta)}{\omega^2},$$

wo α und β von ω unabhängig sind und die Werthe haben

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{1}{2a}\left(e + D\lambda \frac{d\frac{n-1}{\lambda}}{d\alpha_1}\right)\\ \beta &= \pi \frac{D(n-1)}{\lambda} = \frac{1}{2} r,\end{aligned} \tag{9}$$

und wo λ, n, r und $\dfrac{d\frac{n-1}{\lambda}}{d\alpha_1}$ sich auf den Werth α_0 von α_1 beziehen. Es ist hier auch das Brechungsverhältniss n als abhängig von der Wellenlänge aufgeführt, obwohl dies nach der bis jetzt durchgeführten Theorie nicht der Fall sein sollte; indessen zeigt die Erscheinung der Dispersion, deren Theorie in der zehnten Vorlesung gegeben werden wird, dass diese Abhängigkeit in der That vorhanden ist.

Das für J_0 gefundene Integral lässt sich ohne Schwierigkeit ausführen: Transformirt man dasselbe nämlich mit Hülfe der identischen Gleichung

$$\begin{aligned}\sin^2\omega\cos^2(\alpha\omega-\beta) &= \sin^2\omega\frac{1+\cos 2(\alpha\omega-\beta)}{2}\\ &= \frac{\sin^2\omega}{2} + \cos 2\beta\frac{\sin^2\omega\cos 2\alpha\omega}{2} + \sin 2\beta\frac{\sin^2\omega\sin 2\alpha\omega}{2},\end{aligned}$$

so verwandelt es sich in die Summe von drei anderen Integralen, von denen das letzte verschwindet, da es eine ungerade Function von ω ist; das zweite formen wir um, indem wir setzen

$$\begin{aligned}\frac{\sin^2\omega\cos 2\alpha\omega}{2} &= \frac{(1-\cos 2\omega)\cos 2\alpha\omega}{4}\\ &= \frac{\cos 2\alpha\omega}{4} - \frac{\cos 2(\alpha+1)\omega}{8} - \frac{\cos 2(\alpha-1)\omega}{8}\\ &= \frac{1}{4}\sin^2(\alpha+1)\omega + \frac{1}{4}\sin^2(\alpha-1)\omega - \frac{1}{2}\sin^2\alpha\omega.\end{aligned}$$

Der Ausdruck von J_0 setzt sich also aus vier Integralen von der Form

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2\gamma\omega}{\omega^2}\,d\omega$$

zusammen, in denen γ die Werthe 1, $\alpha+1$, $\alpha-1$, α hat. Den Werth dieser Integrale kann man leicht finden; aus der in § 4 der fünften Vorlesung abgeleiteten Gleichung

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2\omega}{\omega^2}\,d\omega = \pi$$

folgt nämlich unmittelbar

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2\gamma\omega}{\omega^2}\,d\omega = \sqrt{\gamma^2}\,\pi,$$

wo jedes Mal der positive Werth der Quadratwurzel zu wählen ist.

Hiernach ergiebt sich für die Lichtintensität im Punkte 0 folgender Ausdruck

$$J_0 = 1 + \cos 2\beta \frac{\sqrt{(\alpha+1)^2} + \sqrt{(\alpha-1)^2} - 2\sqrt{\alpha^2}}{2}. \tag{10}$$

Der Factor von $\cos 2\beta$ ist hier

$$= 0, \qquad \text{wenn } \alpha^2 > 1,$$
$$= 1 - \sqrt{\alpha^2}, \quad \text{wenn } \alpha^2 < 1;$$

im ersten Fall ist also das ganze Gesichtsfeld gleichmässig hell, im zweiten zeigen sich Maxima und Minima, deren Lage allein von β abhängt, deren Deutlichkeit aber durch α bedingt und für $\alpha = 0$ am grössesten ist.

Die dunkeln Streifen, welche im zweiten Falle am Orte der Minima auftreten, heissen die *Talbot'schen Linien;* ihr Ort ist durch die Gleichung

$$\cos 2\beta = \cos r = -1$$

bestimmt, d. h., sie befinden sich an denjenigen Stellen des Gesichtsfeldes, für welche die durch das Plättchen bewirkte Phasenänderung r ein ungerades Vielfaches von π ist, und ihre Intensität ist

$$J_0 = \sqrt{\alpha^2}. \tag{10a}$$

Ob die Talbot'schen Linien auftreten, hängt von der Grösse des Ausdruckes α in (9) ab. Es besteht dieser aus zwei Theilen, von denen der erste

$$\frac{e}{2a}$$

ist; nehmen wir jetzt an, dass die positive x-Achse von der freien Oeffnung nach der mit der Glasplatte bedeckten geht, so ist dieser erste Theil positiv und zwar notwendig grösser als Eins; es kann somit α nur dann kleiner als Eins sein, wenn der zweite Theil negativ ist. Die erste Bedingung für das Auftreten der Linien ist also die, dass der zweite Theil von α, oder dass der Differentialquotient

$$\frac{d\frac{n-1}{\lambda}}{d\alpha_1}$$

einen negativen Werth hat. Geht man nun in einem Spectrum in der Richtung vom rothen zum violetten Ende fort, so nimmt n zu, λ ab, es nimmt also $\frac{n-1}{\lambda}$ zu. Geht man in dem Spectrum, das die Lichtquelle für unsere Erscheinung bildet, in der Richtung der positiven x-Achse fort, so nimmt α_1 ab, da $\alpha_1 = -\frac{x_1}{\varrho_1}$ ist. Daraus folgt, dass jener Differentialquotient negativ ist, falls die Richtung der positiven x-Achse von Roth zu Violett im Spectrum geht, d. h., wenn das Glasplättchen die dem violetten Ende des Spectrums nähere Oeffnung bedeckt; nur in diesem Falle also können die Talbot'schen Linien überhaupt auftreten. Ihre Deutlichkeit hängt aber noch von dem *Werthe* von α, d. h. von der Dicke des Plättchens ab; nach (10a) ist sie am grössten, wenn $\alpha = 0$, oder also wenn

$$-D\lambda \frac{d\frac{n-1}{\lambda}}{d\alpha_1} = e$$

ist; vergrössert man D noch mehr, so bleiben sie sichtbar, bis $\alpha = -1$, oder bis

$$-D\lambda \frac{d\frac{n-1}{\lambda}}{d\alpha_1} = 2a + e$$

geworden ist und verschwinden dann völlig.

Man pflegt die Talbot'schen Linien nicht in der hier angegebenen Weise mit Hülfe zweier rechteckigen Oeffnungen, sondern dadurch herzustellen, dass man die dünne Glasplatte unmittelbar vor dem Auge vor die halbe Pupille und zwar von der violetten Seite des betrachteten Spectrums her vorschiebt. Die Theorie dieses Falles ist ungleich complicirter*), die Erfahrung lehrt aber, dass die auf beide Weisen hervorgerufenen Erscheinungen im Wesentlichen übereinstimmen.

Die Talbot'schen Linien sind von *Esselbach***) benutzt worden bei der Bestimmung der Wellenlängen gewisser Fraunhofer'schen Linien im Ultraviolett; zu diesem Zwecke brauchte er nur zu zählen, wie viele Talbot'sche Linien zwischen je zweien dieser Fraunhofer'schen Linien sich befanden.

Die erste Theorie, die man von den Talbot'schen Linien zu geben gesucht hat, nahm keine Rücksicht auf die Beugung und bestand einfach in der folgenden Ueberlegung: In einem Punkte des Gesichtsfeldes werden Strahlen vereinigt, die von einem Punkte des Spectrums ausgegangen und zur einen Hälfte durch die freie Oeffnung, zur anderen durch die Glasplatte getreten sind; in Folge dessen hat die zweite Hälfte eine Verzögerung gegen die erste erlitten, und die Strahlen werden sich daher durch Interferenz aufheben, sobald diese Verzögerung ein ungerades Vielfaches einer halben Schwingungsdauer beträgt. Diese Betrachtung ergiebt zwar die richtigen Orte für die Talbot'schen Linien, aber sie erklärt nicht, dass diese nur erscheinen, wenn das Plättchen von der violetten Seite des Spectrums aus vorgeschoben wird und wenn seine Dicke innerhalb gewisser Grenzen variirt. Dass sie falsch ist, lehrt auch die folgende Erwägung: Wendet man dieselben Betrachtungen auf den einfacheren Fall an, dass ein leuchtender Punkt homogenes Licht auf die beiden Oeffnungen sendet, von denen die eine durch die Platte bedeckt ist, so

*) Vgl. *Hermann Struve*, Abhandlungen der Petersburger Akademie v. Februar 1883.

**) Poggendorfs Annalen Bd. 98, pg. 513.

hätte man auch hier zu schliessen, dass sich die Strahlen durch Interferenz aufheben, sobald die durch die Platte bewirkte Verzögerung ein ungerades Vielfaches der halben Schwingungsdauer ist. Dass aber an einer Stelle durch Interferenz Licht zerstört wird, ohne dass es dafür an einer andern auftritt, ist mit der Grundannahme der Undulationstheorie im Widerspruch. Es erfordert die Theorie der Talbot'schen Linien somit nothwendig die Berücksichtigung der Beugung.

Es mag hierbei bemerkt werden, dass es verschiedene Interferenz-Erscheinungen giebt, bei deren Theorie die Beugung nicht berücksichtigt zu werden pflegt, obwohl dies geschehen muss, wenn man mit Strenge zu Werke gehen will. Hierher gehört auch der Fresnel'sche Spiegelversuch, dessen in der ersten Vorlesung Erwähnung geschah. Neuerdings hat nämlich *H. F. Weber* in Zürich gezeigt*), dass die bisherige auch von uns wiedergegebene Theorie, nach der für die beiden Spiegelbilder eines leuchtendes Punktes zwei leuchtende Punkte substituirt werden, welche *nach allen Richtungen* Licht aussenden, Abweichungen von den Beobachtungen ergiebt, und dass diese verschwinden, wenn man die Beugung der Lichtwellen an der Grenze der beiden Spiegel berücksichtigt. Die Erscheinungen, die der Fresnel'sche Spiegelversuch darbietet, gehören hiernach auch zu den Beugungserscheinungen, aber nicht zu den Fraunhofer'schen, sondern zu den Fresnel'schen.

---

*) Wiedemann's Annalen Bd. 8 p. 407.

Siebente Vorlesung.

Theorie der Fresnel'schen Beugungserscheinungen. — Die beugende Oeffnung ist durch zwei parallele Geraden begrenzt. — Untersuchung der Hülfsfunctionen $M(u)$ und $N(u)$. — Reihenentwicklungen für diese Functionen. — Die eine Grenzlinie der beugenden Oeffnung liegt im Unendlichen. Fransen an der Schattengrenze schwarzer Körper. — Der beugende Schirm bildet einen Streifen.

§ 1.

Wir wollen uns nun mit einigen einfachen Fällen von *Fresnel'schen Beugungserscheinungen* beschäftigen. Es werde wieder angenommen, dass ein leuchtender Punkt 1 mit den Coordinaten $(x_1 y_1 z_1)$ homogenes Licht aussendet, welches auf einen schwarzen Schirm mit der ebenen Oeffnung s auffällt. Die Lichtintensität J in einem hinter demselben liegenden Punkte 0 mit den Coordinaten $(x_0 y_0 z_0)$ ist dann nach (8c) und (9) der fünften Vorlesung gegeben durch die Gleichungen

$$J = K(c^2 + s^2)$$

$$c = \iint dx\,dy \cos\frac{2\pi}{\lambda}\left\{\frac{x^2+y^2}{2}\left(\frac{1}{\varrho_0}+\frac{1}{\varrho_1}\right) - \frac{1}{2}\frac{(xx_1+yy_1)^2}{\varrho_1^3} - \frac{1}{2}\frac{(xx_0+yy_0)^2}{\varrho_0^3} - x\left(\frac{x_1}{\varrho_1}+\frac{x_0}{\varrho_0}\right) - y\left(\frac{y_1}{\varrho_1}+\frac{y_0}{\varrho_0}\right) + \delta\right\}$$

$$s = \iint dx\,dy \sin\frac{2\pi}{\lambda}\left\{\frac{x^2+y^2}{2}\left(\frac{1}{\varrho_0}+\frac{1}{\varrho_1}\right) - \frac{1}{2}\frac{(xx_1+yy_1)^2}{\varrho_1^3} - \frac{1}{2}\frac{(xx_0+yy_0)^2}{\varrho_0^3} - x\left(\frac{x_1}{\varrho_1}+\frac{x_0}{\varrho_0}\right) - y\left(\frac{y_1}{\varrho_1}+\frac{y_0}{\varrho_0}\right) + \delta\right\},$$

wo δ eine beliebige Constante ist, ϱ_1 und ϱ_0 die Entfernungen der Punkte 1 und 0 von dem in der Oeffnung des Schirmes liegenden Coordinatenanfangspunkt bedeuten, und die Integrationen über diese Oeffnung auszudehnen sind.

Bei den weiteren Untersuchungen wollen wir zu den vorher gemachten Voraussetzungen noch die hinzufügen, dass die Verhältnisse $\left(\frac{x_1}{\varrho_1}, \frac{y_1}{\varrho_1}\right)$ und $\left(\frac{x_0}{\varrho_0}, \frac{y_0}{\varrho_0}\right)$ sehr klein sind, so klein, dass ihre Quadrate, obwohl sie durch die Wellenlänge dividirt sind, unter den trigonometrischen Zeichen vernachlässigt werden können, wir wollen also beinahe senkrecht auffallende Lichtstrahlen annehmen und nur solche Punkte O betrachten, welche nahe an der Verlängerung von jenen liegen. Dann ergeben sich für c und s die Gleichungen

$$\begin{aligned}
c &= \iint dx\,dy \cos \frac{2\pi}{\lambda}\left\{\frac{x^2+y^2}{2}\left(\frac{1}{\varrho_0}+\frac{1}{\varrho_1}\right) - x\left(\frac{x_1}{\varrho_1}+\frac{x_0}{\varrho_0}\right)\right.\\
&\qquad\left. - y\left(\frac{y_1}{\varrho_1}+\frac{y_0}{\varrho_0}\right)+\delta\right\}\\
s &= \iint dx\,dy \sin \frac{2\pi}{\lambda}\left\{\frac{x^2+y^2}{2}\left(\frac{1}{\varrho_0}+\frac{1}{\varrho_1}\right) - x\left(\frac{x_1}{\varrho_1}+\frac{x_0}{\varrho_0}\right)\right.\\
&\qquad\left. - y\left(\frac{y_1}{\varrho_1}+\frac{y_0}{\varrho_0}\right)+\delta\right\},
\end{aligned} \tag{1}$$

Diese Formeln lassen sich nun durch Einführung neuer Integrationsvariablen $\xi\eta$ an Stelle von xy, sowie durch passende Wahl der willkürlichen Constanten δ beträchtlich vereinfachen. Setzt man nämlich

$$\begin{aligned}
\xi &= \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_0}\right)}\left(x - \frac{\frac{x_1}{\varrho_1}+\frac{x_0}{\varrho_0}}{\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_0}}\right)\\
\eta &= \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_0}\right)}\left(y - \frac{\frac{y_1}{\varrho_1}+\frac{y_0}{\varrho_0}}{\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_0}}\right)\\
\delta &= \frac{\left(\frac{x_1}{\varrho_1}+\frac{x_0}{\varrho_0}\right)^2+\left(\frac{y_1}{\varrho_1}+\frac{y_0}{\varrho_0}\right)^2}{2\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_0}\right)},
\end{aligned} \tag{2}$$

so gehen die Ausdrücke für c und s über in

$$\begin{aligned}
c &= \frac{\lambda}{\pi}\,\frac{\varrho_1\varrho_0}{\varrho_1+\varrho_0}\iint d\xi\,d\eta \cos(\xi^2+\eta^2)\\
s &= \frac{\lambda}{\pi}\,\frac{\varrho_1\varrho_0}{\varrho_1+\varrho_0}\iint d\xi\,d\eta \sin(\xi^2+\eta^2),
\end{aligned} \tag{3}$$

wo die Integrationen über die Werthe von ξ und η auszudehnen sind, welche diese Variablen innerhalb der Oeffnung erhalten.

Die weiteren Untersuchungen wollen wir durch die Annahme vereinfachen, dass die beugende Oeffnung durch zwei der y-Achse parallele Linien begrenzt, im Uebrigen aber als unendlich gross anzusehen ist. Die Grenzen für y, mithin auch diejenigen für η sind dann $-\infty$ und $+\infty$. Bezeichnet man die beiden bestimmten Integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\cos\eta^2\,d\eta \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{+\infty}\sin\eta^2\,d\eta, \tag{4}$$

welche von Null verschiedene constante Werthe besitzen, wie sofort nachgewiesen werden wird, beziehungsweise durch C und S, so ergiebt sich aus (3)

$$c = \frac{\lambda}{\pi} \frac{\varrho_1 \varrho_0}{\varrho_1 + \varrho_0} \left(C \int d\xi \cos \xi^2 - S \int d\xi \sin \xi^2 \right)$$

$$s = \frac{\lambda}{\pi} \frac{\varrho_1 \varrho_0}{\varrho_1 + \varrho_0} \left(S \int d\xi \cos \xi^2 + C \int d\xi \sin \xi^2 \right);$$

mithin erhält man, in einer neuen Einheit ausgedrückt

$$J = c^2 + s^2 = \left(\int d\xi \cos \xi^2 \right)^2 + \left(\int d\xi \sin \xi^2 \right)^2, \tag{5}$$

wo die Integration über diejenigen Werthe auszudehnen ist, welche ξ in der beugenden Oeffnung annimmt.

Dass die Integrale C und S in (4), welche im Folgenden vielfach benutzt werden, in der That von Null verschiedene constante Werthe haben, kann man folgendermassen zeigen. Wir wollen ausgehen von dem Integral

$$R_k = \int_0^k e^{-x^2} dx;$$

schreiben wir dasselbe in der Form

$$R_k = \int_0^k e^{-y^2} dy,$$

so ergiebt sich für R_k^2 der Ausdruck

$$R_k^2 = \int_0^k \int_0^k e^{-(x^2+y^2)} dx\, dy;$$

fassen wir hier x und y als rechtwinklige Coordinaten eines Punktes auf, so ist die Integration über die Fläche eines Quadrats von der Seite k auszudehnen. Durch Einführung von Polarcoordinaten geht der obige Ausdruck über in

$$R_k^2 = \int \int e^{-\varrho^2} \varrho\, d\varrho\, d\vartheta.$$

Da alle Elemente dieses Integrals positiv sind, so liegt der Werth von R_k^2 zwischen den Werthen desselben Integrales, welches über die Kreisquadranten mit den Radien k und $k\sqrt{2}$ erstreckt ist, d. h. zwischen

$$\frac{\pi}{2} \int_0^k e^{-\varrho^2} \varrho\, d\varrho \quad \text{und} \quad \frac{\pi}{2} \int_0^{k\sqrt{2}} e^{-\varrho^2} \varrho\, d\varrho.$$

Da aber $\int e^{-\varrho^2} \varrho\, d\varrho = -\frac{1}{2} e^{-\varrho^2}$ ist, so nähert sich mit unbegrenzt wachsendem k jedes der beiden Integrale, also auch R_k^2 der Grenze $\frac{\pi}{4}$, es ergiebt sich also

$$R = R_\infty = \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Führt man hier an Stelle von x die neue Integrationsvariable a durch die Gleichung $x = a\sqrt{u}$ ein, wo u eine positive Grösse bedeutet, so erhält man endlich

$$\int_0^\infty e^{-a^2 u} da = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\frac{1}{\sqrt{u}}.$$

Mit Hülfe dieser Gleichung können nun die bestimmten Integrale C und S auf einfache algebraische Integrale reducirt werden; schreibt man nämlich in den in (14a) der dritten Vorlesung abgeleiteten Gleichungen

$$\int_0^\infty e^{-au} \sin u\, du = \frac{1}{1+a^2}, \qquad \int_0^\infty e^{-au} \cos u\, du = \frac{a^2}{1+a^2}$$

a^2 an Stelle von a, multiplicirt sie mit da und integrirt sie zwischen den Grenzen 0 und ∞, so ergiebt sich mit Benutzung der soeben gefundenen Gleichung

$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin u}{\sqrt{u}} du = \int_0^\infty \frac{da}{1+a^4}, \qquad \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos u}{\sqrt{u}} du = \int_0^\infty \frac{a^2 da}{1+a^4} \tag{6}$$

Die algebraischen Integrale auf der rechten Seite dieser Gleichungen können nach bekannter Methode gefunden werden. Die Rechnung wird etwas erleichtert auf folgendem Wege: Setzt man $a = \frac{1}{x}$, so findet man

$$\int_0^1 \frac{da}{1+a^4} = \int_1^\infty \frac{x^2 dx}{1+x^4} = \int_1^\infty \frac{a^2 da}{1+a^4}$$

$$\int_1^\infty \frac{da}{1+a^4} = \int_0^1 \frac{x^2 dx}{1+x^4} = \int_0^1 \frac{a^2 da}{1+a^4}.$$

Hieraus folgt, dass

$$\int_0^\infty \frac{da}{1+a^4} = \int_0^\infty \frac{a^2 da}{1+a^4} = \int_0^1 \frac{1+x^2}{1+x^4} dx$$

ist. Nun ist

$$\frac{x^2+1}{x^4+1} = \frac{1}{(x\sqrt{2}+1)^2+1} + \frac{1}{(x\sqrt{2}-1)^2+1},$$

und daher

$$\int \frac{x^2+1}{x^4+1} dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\operatorname{arctg}(x\sqrt{2}+1) + \operatorname{arctg}(x\sqrt{2}-1)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{1-x^2},$$

oder wenn man die Grenzen 0 und 1 einführt,

$$\int_0^1 \frac{x^2+1}{x^4+1} dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Es gehen also die Gleichungen (6) in die folgenden über

$$\int_0^\infty \frac{\sin u}{\sqrt{u}} du = \int_0^\infty \frac{\cos u}{\sqrt{u}} du = \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

oder, wenn man $u = v^2$ setzt in

$$\int_0^\infty \sin v^2 dv = \int_0^\infty \cos v^2 dv = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}. \tag{7}$$

Man erhält also für die Integrale C und S die Werthe

$$C = S = \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \tag{7a}$$

§ 2.

Die Entwicklungen des vorigen Paragraphen ergaben die Werthe der bestimmten Integrale $\int \cos \xi^2 d\xi$ und $\int \sin \xi^2 d\xi$ für den Fall, dass ihre Grenzen 0 und ∞, oder dass sie $-\infty$ und $+\infty$ sind. Um aber in dem vorher betrachteten Falle die Intensität im Punkte 0 zu finden, müssen wir den Werth dieser Integrale für beliebige Grenzen berechnen, da diese in (5) von der Lage der Punkte 0 und 1 abhängen. Dabei können wir aber offenbar eine, etwa die untere Grenze, als fest, z. B. gleich Null annehmen; wir haben also die Integrale

$$\int_0^u d\xi \cos \xi^2 \quad \text{und} \quad \int_0^u d\xi \sin \xi^2$$

als Functionen ihrer oberen Grenze u zu untersuchen.

Es ist leicht, diese Integrale nach aufsteigenden Potenzen von u in Reihen zu entwickeln, die für jeden Werth des Arguments convergiren; wir brauchen nur für $\cos \xi^2$ und $\sin \xi^2$ ihre Entwicklungen nach Potenzen von ξ^2 zu setzen und die Integration bei jedem Gliede auszuführen. Diese Reihen sind zwar zur numerischen Berechnung der Integrale, namentlich für kleine Werthe des Arguments ganz geeignet, nicht aber, um aus ihnen allgemeine Schlüsse zu ziehen. Wir führen daher an Stelle der obigen Integrale die folgenden beiden Functionen ein

$$M(u) = \int_u^{+\infty} d\xi \cos(\xi^2 - u^2) \qquad N(u) = \int_u^{+\infty} d\xi \sin(\xi^2 - u^2), \tag{8}$$

welche mit jenen eng zusammenhängen; in der That folgt aus (8)

$$\begin{aligned} M(u) &= \quad \cos u^2 \int_u^\infty d\xi \cos \xi^2 + \sin u^2 \int_u^\infty d\xi \sin \xi^2 \\ N(u) &= -\sin u^2 \int_u^\infty d\xi \cos \xi^2 + \cos u^2 \int_u^\infty d\xi \sin \xi^2; \end{aligned} \tag{8a}$$

durch Auflösung dieser Gleichungen erhält man

$$\begin{aligned} \int_u^\infty d\xi \cos \xi^2 &= \cos u^2\, M(u) - \sin u^2\, N(u) \\ \int_u^\infty d\xi \sin \xi^2 &= \sin u^2\, M(u) + \cos u^2\, N(u). \end{aligned} \tag{8b}$$

Durch diese, sowie durch die aus (7) sich ergebenden Gleichungen

$$\begin{aligned} \int_0^u \cos \xi^2 d\xi &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} - \int_u^\infty \cos \xi^2 d\xi \\ \int_0^u \sin \xi^2 d\xi &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} - \int_u^\infty \sin \xi^2 d\xi. \end{aligned} \tag{8c}$$

lassen sich also die zu untersuchenden Integrale einfach durch $M(u)$ und $N(u)$ ausdrücken.

Die Einführung der Functionen $M(u)$ und $N(u)$ in die Rechnung ist besonders aus dem Grunde wichtig, weil dieselben die Eigenschaft haben, für alle positiven Werthe des Argumentes positiv zu sein und abzunehmen, wenn das Argument wächst. Um diese Behauptung zu beweisen, setzen wir

$$\xi^2 - u^2 = z, \quad d\xi = \frac{1}{2}\frac{dz}{\sqrt{z+u^2}},$$

dann ergiebt sich für einen positiven Werth von u

$$M(u) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\cos z\, dz}{\sqrt{z+u^2}}, \quad N(u) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin z\, dz}{\sqrt{z+u^2}},$$

wo die Wurzel positiv zu nehmen ist. Das dem $N(u)$ gleiche Integral können wir nun als die Summe von ähnlichen darstellen, deren Grenzen je zwei auf einander folgende Glieder der Reihe $0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$ sind; diese Integrale sind abwechselnd von entgegengesetztem Vorzeichen; das erste ist positiv; ferner ist jedes folgende Integral dem absoluten Werthe nach kleiner als das vorhergehende, und mit wachsender Ordnungszahl nähern sie sich der Null. Daraus folgt, dass die so sich ergebende Reihe für $N(u)$ convergirt und positiv ist. Dieselben Betrachtungen sind anwendbar auf

$$\frac{dN}{du} = -\frac{1}{2}u\int_0^\infty \frac{\sin z\,dz}{(z+u^2)^{\frac{3}{2}}}$$

und zeigen, dass $N(u)$ mit wachsendem u abnimmt.

Um die entsprechenden Schlüsse in Bezug auf $M(u)$ ziehen zu können, transformiren wir seinen Ausdruck zunächst durch partielle Integration. Es ist

$$\int \frac{\cos z\,dz}{\sqrt{z+u^2}} = \frac{\sin z}{\sqrt{z+u^2}} + \frac{1}{2}\int \frac{\sin z\,dz}{(z+u^2)^{\frac{3}{2}}},$$

und daher

$$M(u) = \frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{\sin z\,dz}{(z+u^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{2u}\frac{dN}{du}.$$

Hieraus folgt, dass $M(u)$ stets positiv ist, und aus

$$\frac{dM}{du} = -\frac{3}{4}u\int_0^\infty \frac{\sin z\,dz}{(z+u^2)^{\frac{5}{2}}}$$

ergiebt sich, dass $M(u)$ abnimmt, wenn u wächst.

Für die Functionen $M(u)$ und $N(u)$ hat *Gilbert* (Mémoires couronnés de l'Académie de Bruxelles XXXI. 1863) Tafeln berechnet. Was die Art betrifft, wie ihre Werthe sich finden lassen, so kann man dabei auf die oben erwähnten, nach aufsteigenden Potenzen von u fortschreitenden Reihen für $\int_0^u d\xi \cos\xi^2$ und $\int_0^u d\xi \sin\xi^2$ zurückgehen und alsdann die Formeln (8a) und (8c) benutzen.

Man kann aber auch $M(u)$ und $N(u)$ selbst in convergente, nach aufsteigenden Potenzen von u fortschreitende Reihen entwickeln. Zu diesem Zwecke bemerken wir zunächst, dass nach (7)

$$\begin{aligned} M(u) &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}(\cos u^2 + \sin u^2) - \int_0^u d\xi \cos(u^2-\xi^2) \\ N(u) &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}(\cos u^2 - \sin u^2) + \int_0^u d\xi \sin(u^2-\xi^2) \end{aligned} \tag{9}$$

ist. Um nun für die Integrale auf der rechten Seite Entwicklungen der genannten Art zu finden, gehen wir davon aus, dass

$$\int \xi^n d\xi \cos(u^2-\xi^2) = \frac{\xi^{n+1}}{n+1}\cos(u^2-\xi^2) - \frac{2}{n+1}\int \xi^{n+2}d\xi \sin(u^2-\xi^2)$$
$$\int \xi^n d\xi \sin(u^2-\xi^2) = \frac{\xi^{n+1}}{n+1}\sin(u^2-\xi^2) + \frac{2}{n+1}\int \xi^{n+2}d\xi \cos(u^2-\xi^2),$$

wenn $n+1$ positiv ist, also

$$\int_0^u \xi^n d\xi \cos(u^2 - \xi^2) = \frac{u^{n+1}}{n+1} - \frac{2}{n+1}\int_0^u \xi^{n+2} d\xi \sin(u^2 - \xi^2)$$

$$\int_0^u \xi^n d\xi \sin(u^2 - \xi^2) = \frac{2}{n+1}\int_0^u \xi^{n+2} d\xi \cos(u^2 - \xi^2).$$

Setzt man hier $n+2$ an Stelle von n und verbindet die so sich ergebenden Gleichungen mit den vorigen, so erhält man die beiden folgenden Recursionsformeln

$$\int_0^u \xi^n d\xi \cos(u^2-\xi^2) = \frac{u^{n+1}}{n+1} - \frac{4}{n+1 \,.\, n+3}\int_0^u \xi^{n+4} d\xi \cos(u^2-\xi^2)$$

$$\int_0^u \xi^n d\xi \sin(u^2-\xi^2) = \frac{2u^{n+3}}{n+1 \,.\, n+3} - \frac{4}{n+1 \,.\, n+3}\int_0^u \xi^{n+4} d\xi \sin(u^2-\xi^2),$$

durch deren wiederholte Anwendung sich für die Integrale in (9) die folgenden Reihenentwicklungen ergeben

$$\begin{aligned}\int_0^u d\xi \cos(u^2 - \xi^2) &= \frac{u}{1} - \frac{4u^5}{1.3.5} + \frac{4^2u^9}{1.3.5.7.9} - \cdots \\ &\quad + (-1)^n \frac{4^n u^{4n+1}}{1.3\ldots.4n+1}\left(1 - \frac{4u^4}{4n+3 \,.\, 4n+5}\Theta\right)\\ \int_0^u d\xi \sin(u^2 - \xi^2) &= \frac{2u^3}{1.3} - \frac{2.4u^7}{1.3.5.7} + \frac{2.4^2u^{11}}{1.3\ldots.11} - \cdots \\ &\quad + (-1)^n \frac{2.4^n u^{4n+3}}{1.3\ldots.4n+3}\left(1 - \frac{2u^2}{4n+5}\Theta'\right),\end{aligned} \tag{10}$$

wo Θ und Θ' durch die Gleichungen

$$\int_0^u \xi^{4n+4} d\xi \cos(u^2 - \xi^2) = \Theta \int_0^u \xi^{4n+4} d\xi$$

$$\int_0^u \xi^{4n+4} d\xi \sin(u^2 - \xi^2) = \Theta' \int_0^u \xi^{4n+4} d\xi$$

definirt sind und daher zwischen -1 und $+1$ liegen. Aus diesem Umstand folgt, dass die Reihen, wenn sie in die Unendlichkeit fortgesetzt werden, convergiren und die betreffenden Integrale darstellen.

Diese Reihen sind für kleine Werthe von u zur Berechnung von $M(u)$ und $N(u)$ sehr geeignet, convergiren aber nur langsam, wenn u eine erhebliche Grösse hat; in diesem Fall sind gewisse Entwickelungen nützlich, welche sich durch eine partielle Integration anderer Art ergeben.

Aus den beiden identischen Gleichungen

$$\int \frac{d\xi}{\xi^n} \cos(\xi^2 - u^2) = \frac{\sin(\xi^2 - u^2)}{2\xi^{n+1}} + \frac{n+1}{2} \int \frac{d\xi}{\xi^{n+2}} \sin(\xi^2 - u^2)$$

$$\int \frac{d\xi}{\xi^n} \sin(\xi^2 - u^2) = -\frac{\cos(\xi^2 - u^2)}{2\xi^{n+1}} - \frac{n+1}{2} \int \frac{d\xi}{\xi^{n+2}} \cos(\xi^2 - u^2),$$

welche für einen positiven Werth von $n+1$ gelten, erhält man nämlich

$$\int_u^\infty \frac{d\xi}{\xi^n} \cos(\xi^2 - u^2) = \frac{n+1}{2} \int_u^\infty \frac{d\xi}{\xi^{n+2}} \sin(\xi^2 - u^2)$$

$$\int_u^\infty \frac{d\xi}{\xi^n} \sin(\xi^2 - u^2) = \frac{1}{2u^{n+1}} - \frac{n+1}{2} \int_u^\infty \frac{d\xi}{\xi^{n+2}} \cos(\xi^2 - u^2);$$

eliminirt man aus diesen beiden Gleichungen in der vorhin angegebenen Weise den Sinus beziehungsweise den Cosinus, so ergeben sich die Recursionsformeln

$$\int_u^\infty \frac{d\xi}{\xi^n} \cos(\xi^2 - u^2) = \frac{n+1}{4u^{n+3}} - \frac{n+1\,.\,n+3}{4} \int_u^\infty \frac{d\xi}{\xi^{n+4}} \cos(\xi^2 - u^2)$$

$$\int_u^\infty \frac{d\xi}{\xi^n} \sin(\xi^2 - u^2) = \frac{1}{2u^{n+1}} - \frac{n+1\,.\,n+3}{4} \int_u^\infty \frac{d\xi}{\xi^{n+4}} \sin(\xi^2 - u^2),$$

und durch wiederholte Anwendung derselben erhält man für $M(u)$ und $N(u)$ die folgenden Reihenentwickelungen

$$\begin{aligned} M(u) = \int_u^\infty d\xi \cos(\xi^2 - u^2) &= \frac{1}{4u^3} - \frac{1.3.5}{4^2 u^7} + \ldots + (-1)^n \frac{1.3.5\ldots 4n+1}{4^{n+1} u^{4n+3}} \\ &- (-1)^n \frac{1.3.5\ldots 4n+3}{4^{n+1}} \int_u^\infty \frac{d\xi}{\xi^{4n+4}} \cos(\xi^2 - u^2) \end{aligned} \tag{10a}$$

$$\begin{aligned} N(u) = \int_u^\infty d\xi \sin(\xi^2 - u^2) &= \frac{1}{2u} - \frac{1.3}{2.4u^5} + \ldots + (-1)^n \frac{1.3.5\ldots 4n-1}{2.4^n u^{4n+1}} \\ &- (-1)^n \frac{1.3\ldots 4n+3}{4^{n+1}} \int_u^\infty \frac{d\xi}{\xi^{4n+4}} \sin(\xi^2 - u^2). \end{aligned}$$

Jede dieser Reihen convergirt, ins Unendliche fortgesetzt, für keinen Werth von u, denn das n^{te} Glied wird wegen des Productes der ungeraden Zahlen im Zähler für unendlich grosse Werthe von n stets unendlich gross. Dennoch sind sie für grosse, positive Werthe des Arguments zur Rechnung sehr brauchbar. Ihre Glieder werden nämlich anfangs kleiner und kleiner und wachsen erst von einer bestimmten Stelle an; der Rest der Reihen ist dabei, wie sofort gezeigt werden wird, abwechselnd positiv und negativ, so dass die gesuchten Functionen immer zwischen der Summe der n ersten und der Summe der $n+1$ ersten Glieder liegen. Infolgedessen geben die Reihen, welche *semiconvergente Reihen* genannt werden, Näherungswerthe für die Functionen $M(u)$ und $N(u)$, die um so genauer sind, je grösser ihr Argument ist.

Dass der Rest der in (10a) angegebenen Reihen abwechselnd positiv und negativ ist, folgt daraus, dass bei positivem u die beiden Integrale

$$\int_u^\infty \frac{d\xi}{\xi^{4n+4}} \cos(\xi^2 - u^2) \quad \text{und} \quad \int_u^\infty \frac{d\xi}{\xi^{4n+4}} \sin(\xi^2 - u^2)$$

positiv sind; sie sind nämlich beziehlich gleich den bestimmten Integralen

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dz \cos z}{(z + u^2)^{\frac{4n+5}{2}}} \quad \text{und} \quad \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dz \sin z}{(z + u^2)^{\frac{4n+5}{2}}}$$

und dass diese stets positiv sind, zeigt dieselbe Schlussweise, durch die wir bewiesen haben, dass $M(u)$ und $N(u)$ für ein positives u stets positiv sind.

Die Werthe von $M(u)$ und $N(u)$ für ein negatives u lassen sich endlich ausdrücken durch $M(-u)$ und $N(-u)$; für ein negatives u ergiebt sich nämlich aus der Identität

$$M(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \cos(\xi^2 - u^2) - \int_{-\infty}^{u} d\xi \cos(\xi^2 - u^2)$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}}(\cos u^2 + \sin u^2) - \int_{-u}^{+\infty} d\xi \cos(\xi^2 - u^2)$$

$$M(u) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}(\cos u^2 + \sin u^2) - M(-u),$$

und ebenso (10b)

$$N(u) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}(\cos u^2 - \sin u^2) - N(-u).$$

Man sieht hieraus, dass $M(u)$ und $N(u)$ für negative Werthe von u nicht positiv bleiben, sondern, durch Null hindurch gehend, Maxima und Minima haben, denn für $u = -\infty$ werden sie beziehlich gleich

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}(\cos u^2 + \sin u^2) \quad \text{und} \quad \sqrt{\frac{\pi}{2}}(\cos u^2 - \sin u^2),$$

d. h. gleich

$$\sqrt{\pi} \sin\left(u^2 + \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{und} \quad \sqrt{\pi} \cos\left(u^2 + \frac{\pi}{4}\right).$$

§ 3.

Durch die Functionen M und N lässt sich nun die Lichtintensität J in einem Punkte des Beugungsbildes in dem im Anfang dieser Vorlesung betrachteten Falle ausdrücken. Wir specialisiren diesen zunächst noch weiter, indem wir annehmen, dass der beugende Schirm nur durch *eine* Linie begrenzt ist, die wir zur y-Achse nehmen, dass also mit anderen Worten auch die *Breite* der beugenden Oeffnung unendlich gross ist. Da es nur auf diese Grenze ankommt, so können wir, ohne die Allgemeinheit weiter zu beschränken, den leuchtenden Punkt 1 in der z-Achse annehmen, also $x_1 = 0$, $y_1 = 0$ setzen; es wird dann $\varrho_1 = -z_1$, wobei im Auge zu behalten ist, dass z_1 negativ ist. Die Tafel, auf der das Beugungsbild aufgefangen wird, sei senkrecht auf der z-Achse, für sie sei also z_0 constant. x_0 und y_0 sollen klein sein, so dass $\varrho_0 = z_0$ gesetzt werden kann. Der für ξ aufgestellte Ausdruck (2) wird dann

$$\xi = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}\,\frac{z_1 - z_0}{z_1 z_0}}\left(x - x_0\,\frac{z_1}{z_1 - z_0}\right). \tag{11}$$

Der Theil der xy-Ebene sei frei, für den x positiv ist, während der Schirm denjenigen bildet, für den x negativ ist; in der Gleichung (5)

$$J = \left(\int \cos \xi^2 d\xi\right)^2 + \left(\int \sin \xi^2 d\xi\right)^2$$

ist dann über die Werthe zu integriren, die ξ annimmt, wenn x von 0 bis $+\infty$ wächst, d. h. von $\xi = u$ bis $\xi = +\infty$, wenn

$$u = -x_0 \sqrt{\frac{\pi z_1}{\lambda z_0 (z_1 - z_0)}} \tag{11 a}$$

gesetzt wird. Im Schatten des Schirms ist hiernach u positiv, ausserhalb desselben negativ.

Es ist somit J eine Function von u, also von y_0 unabhängig, die Erscheinung besteht also aus hellen und dunklen Linien, welche der Schattengrenze des beugenden Schirmes parallel laufen. Um die Lage derselben zu bestimmen, führen wir in den Ausdruck von J die Functionen $M(u)$ und $N(u)$ ein, indem wir die beiden Gleichungen (8b) des vorigen Paragraphen quadriren und addiren. Dadurch ergiebt sich

$$J = \left(\int_u^\infty d\xi \sin \xi^2\right)^2 + \left(\int_u^\infty d\xi \cos \xi^2\right)^2 = M^2(u) + N^2(u). \tag{12}$$

Daraus, dass M und N abnehmen, wenn u von 0 bis ∞ wächst, folgt, dass die Intensität im geometrischen Schatten des Schirmes immer abnimmt, wenn man von seiner Grenze sich entfernt, also *keine* Maxima und Minima darbietet. Es giebt aber solche ausserhalb des Schattens. Die Werthe von u und x_0, für welche dieselben stattfinden, sind bestimmt durch die Gleichung

$$\frac{dJ}{du} = 0;$$

dieselbe verwandelt sich wegen (12) in

$$0 = \cos u^2 \int_u^\infty d\xi \cos \xi^2 + \sin u^2 \int_u^\infty d\xi \sin \xi^2,$$

d. h. in

$$M(u) = 0.$$

Diese Gleichung besitzt keine positiven Wurzeln; um die negativen zu finden, schreiben wir sie nach (10b) in der Form

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,(\cos u^2 + \sin u^2) = M(-u)$$

oder

$$\sin\left(u^2 + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, M(-u).$$

Da $M(u)$ für sehr grosse negative Werthe von u verschwindet, so sind die grösseren Wurzeln dieser Gleichung sehr nahe

$$u = -\sqrt{\left(n - \frac{1}{4}\right)\pi},$$

wo n eine ganze Zahl bedeutet, und sie nähern sich diesen Werthen mit wachsender Ordnungszahl; aber auch die kleinsten entfernen sich nur wenig von dieser Form; die ersten Wurzeln sind nämlich nach der Rechnung von *Fresnel*

$$\begin{aligned} u &= -\sqrt{0.741\pi}, && \text{erstes Maximum} \\ &= -\sqrt{1.754\pi}, && \text{erstes Minimum} \\ &= -\sqrt{2.749\pi}, && \text{zweites Maximum} \\ &= -\sqrt{3.751\pi}, && \text{zweites Minimum.} \end{aligned}$$

Diese Werthe von u bestimmen also diejenigen Werthe von x_0, welche den vorher betrachteten hellen und dunkeln Linien auf der weissen Tafel entsprechen. Entfernt man die Tafel von dem beugenden Schirm, d. h. vergrössert man z_0, so rücken die Linien auseinander. Um das Gesetz zu finden, nach dem dies geschieht, haben wir zu untersuchen, in welcher Beziehung x_0 und z_0 bei einem constanten Werth von u zu einander stehen; y_0 können wir dabei gleich Null setzen. Diese Beziehung ist nach (11a)

$$u^2 \lambda (z_1 - z_0) z_0 = x_0^2 \pi z_1.$$

Das ist die Gleichung eines Kegelschnitts, und zwar, da z_1 negativ ist, die einer Hyperbel, weil ihr unendlich grosse reelle Werthe von x_0 und z_0 genügen. Diese Hyperbel ist symmetrisch zur z-Achse und geht durch die beiden Punkte $x_0 = 0$, $z_0 = 0$ und $x_0 = 0$, $z_0 = z_1$, d. h. durch den leuchtenden Punkt und durch den Punkt $y_0 = 0$ der Kante des beugenden Schirmes; diese beiden Punkte sind also die Scheitel der Hyperbel. Eine physikalische Bedeutung hat nur *der* Theil derselben, für den x_0 und z_0 positiv sind.

§ 4.

Es werde nun allgemeiner angenommen, dass die *beiden* zur y-Achse parallelen Geraden, welche die beugende Oeffnung begrenzen, im Endlichen liegen, dass also entweder der beugende Schirm einen Streifen bildet, oder dass die beugende Oeffnung ein Spalt ist. Wir wollen nur den ersten Fall genauer untersuchen, da sich die Rechnung für den zweiten ganz ähnlich gestaltet.

Es bilde also der beugende Schirm einen Streifen, dessen Grenzen die Gleichungen

$$x = -e \quad \text{und} \quad x = +e$$

haben mögen, dessen Breite also $2e$ ist. Für den leuchtenden Punkt nehmen wir wieder

$$x_1 = 0, \qquad y_1 = 0$$

an, denken uns die weisse Tafel als senkrecht auf der z-Achse, und x_0 und y_0 als so klein, dass wir ϱ_0 durch z_0 ersetzen können. Die beiden Integrale, die, quadrirt und addirt, nach (5) die Intensität geben, sind dann

$$\int d\xi \cos \xi^2 = \int_{-\infty}^{u_1} d\xi \cos \xi^2 + \int_{u_2}^{+\infty} d\xi \cos \xi^2$$

$$\int d\xi \sin \xi^2 = \int_{-\infty}^{u_1} d\xi \sin \xi^2 + \int_{u_2}^{+\infty} d\xi \sin \xi^2,$$

wo die beiden Grenzen u_1 und u_2 wegen (2) durch die Gleichungen

$$u_1 = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda} \frac{z_1 - z_0}{z_1 z_0}} \left(-e - x_0 \frac{z_1}{z_1 - z_0}\right),$$

$$u_2 = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda} \frac{z_1 - z_0}{z_1 z_0}} \left(+e - x_0 \frac{z_1}{z_1 - z_0}\right)$$

bestimmt sind. In der einen Grenze des geometrischen Schattens ist u_1, in der anderen u_2 gleich Null; da ferner u_1 und u_2 lineare Functionen von x_0 sind, welche mit wachsendem x_0 abnehmen, so erkennt man, dass innerhalb des Schattens u_1 negativ, u_2 positiv ist; ausserhalb des Schattens sind beide Grössen positiv auf der Seite der negativen x und beide negativ auf der Seite der positiven x.

Wir wollen nun die Werthe von x_0 aufsuchen, für welche die Intensität J ein Maximum oder ein Minimum ist; sie sind bestimmt durch die Gleichung

$$\frac{dJ}{dx_0} = 0$$

Schreibt man den Ausdruck von J in der Form

$$J = \left(\int_{-u_1}^{+\infty} d\xi \cos \xi^2 + \int_{u_2}^{+\infty} d\xi \cos \xi^2\right)^2 + \left(\int_{-u_1}^{+\infty} d\xi \sin \xi^2 + \int_{u_2}^{+\infty} d\xi \sin \xi^2\right)^2 \quad (13)$$

und berücksichtigt, dass $\frac{du_1}{dx_0} = \frac{du_2}{dx_0}$ ist, so erhält man zur Bestimmung der Maxima und Minima die Gleichung

$$\frac{\partial J}{\partial u_1} + \frac{\partial J}{\partial u_2} = (\cos u_1^2 - \cos u_2^2)\left(\int_{-u_1}^{+\infty} d\xi \cos \xi^2 + \int_{u_2}^{+\infty} d\xi \cos \xi^2\right)$$
$$+ (\sin u_1^2 - \sin u_2^2)\left(\int_{-u_1}^{+\infty} d\xi \sin \xi^2 + \int_{u_2}^{+\infty} d\xi \sin \xi^2\right) = 0. \tag{14}$$

Diese Gleichung verwandelt sich durch Einführung der Functionen $M(u)$ und $N(u)$ in die folgende

$$\big(M(-u_1) - M(u_2)\big)\big(1 - \cos(u_1^2 - u_2^2)\big)$$
$$+ \big(N(-u_1) + N(u_2)\big)\sin(u_1^2 - u_2^2) = 0,$$

welche wiederum in die beiden einfacheren zerfällt

$$\sin\frac{u_1^2 - u_2^2}{2} = 0$$
$$\operatorname{tg}\frac{u_1^2 - u_2^2}{2} = \frac{N(u_2) + N(-u_1)}{M(u_2) - M(-u_1)},$$

wie man unmittelbar erkennt, wenn man in der vorigen Gleichung an Stelle des Winkels $(u_1^2 - u_2^2)$ den halben Winkel einführt; beachtet man endlich, dass

$$\frac{u_1^2 - u_2^2}{2} = \frac{e x_0}{\lambda z_0} 2\pi$$

ist, so ergeben sich für x_0 die folgenden Gleichungen

$$\sin\frac{e x_0}{\lambda z_0} 2\pi = 0$$
$$\operatorname{tg}\frac{e x_0}{\lambda z_0} 2\pi = \frac{N(u_2) + N(-u_1)}{M(u_2) - M(-u_1)}. \tag{15}$$

Die Wurzeln der ersten Gleichung sind

$$x_0 = n\frac{\lambda z_0}{2e},$$

wo n eine ganze Zahl ist; die ihnen entsprechenden Maxima oder Minima sind mithin gleich weit von einander entfernt, sind unabhängig von z_1, d. h. von der Entfernung des leuchtenden Punktes, und bewegen sich auf geraden Linien, wenn z_0 verändert, wenn also die weisse Tafel parallel mit sich selbst verschoben wird. Verwickelter ist das Gesetz für die durch die zweite Gleichung bestimmten Maxima und Minima.

Wir wollen die Gleichungen (15) für die Maxima und Minima nur in dem Falle genauer discutiren, dass die Breite des Schirms, $2e$, verhältnissmässig gross ist. Es treten dann drei, durch dunkle Zwischenräume getrennte Fransensysteme auf, in der Nähe der beiden

Grenzen und in der Nähe der Mitte des geometrischen Schattens, zwei *äussere*, wie man sagt, und ein *inneres*.

In der Nähe der Schattengrenze auf der Seite der positiven x ist u_2 klein und $-u_1$ hat einen grossen positiven Werth; daraus folgt, dass

$$\int_{-u_1}^{+\infty} d\xi \cos \xi^2 \qquad \text{und} \qquad \int_{-u_1}^{+\infty} d\xi \sin \xi^2$$

sehr klein sind, während

$$\int_{u_2}^{+\infty} d\xi \cos \xi^2 \qquad \text{und} \qquad \int_{u_2}^{+\infty} d\xi \sin \xi^2$$

endliche Werthe besitzen. Demzufolge kann man

$$J = \left(\int_{u_2}^{+\infty} d\xi \cos \xi^2\right)^2 + \left(\int_{u_2}^{+\infty} d\xi \sin \xi^2\right)^2$$

setzen; dadurch ist aber ausgesprochen, dass an dem betrachteten Orte die Erscheinungen dieselben sind, wie wenn der Schirm in der Richtung der negativen x unbegrenzt wäre, also diejenigen, welche wir im vorigen Paragraphen ausführlich untersucht haben. Aus der Symmetrie, die stattfindet, ist zu schliessen, dass das Entsprechende für das zweite äussere Fransensystem stattfindet.

In der Nähe der Mitte des Schattens, also für kleine Werthe von x_0, haben $-u_1$ und u_2 grosse positive Werthe, die vier in Betracht kommenden Integrale sind daher klein, und ein Gleiches gilt von der ganzen Lichtstärke; trotzdem können aber Maxima und Minima wahrnehmbar sein, und diese sind durch die Gleichungen (15) bestimmt.

Die erste von diesen Gleichungen ist, welches auch die Grösse von e sein mag

$$\sin \frac{e x_0}{\lambda z_0} 2\pi = 0, \qquad \text{und ergiebt} \qquad x_0 = n \frac{\lambda z_0}{2e}; \tag{16}$$

die zweite Gleichung vereinfacht sich sehr durch die Annahme, dass e gross ist. Aus den für $M(u)$ und $N(u)$ aufgestellten semiconvergenten Reihen (10a) ergiebt sich nämlich, dass für grosse positive Werthe von u

$$M(u) = \frac{1}{4u^3} \qquad N(u) = \frac{1}{2u} \tag{17}$$

gesetzt werden kann, und hieraus folgt, dass die in Rede stehende transcendente Gleichung für unseren Fall in die einfachere übergeht

$$\operatorname{tg} \frac{e x_0}{\lambda z_0} 2\pi = \infty,$$

d. h. in

$$\cos \frac{e x_0}{\lambda z_0} 2\pi = 0, \qquad \text{aus welcher} \qquad x_0 = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda z_0}{2e} \tag{18}$$

sich ergiebt. Diese Werthe von x_0 schieben sich also zwischen die durch die erste Gleichung bestimmten ein. Um nun zu erkennen, welche von den in (16) und (18) gefundenen Werthen von x_0 den Maximis, welche den Minimis der Helligkeit entsprechen, und um ein Urtheil über ihre Grösse zu erhalten, müssen wir den Ausdruck (13) von J in der Nähe der Mitte des Schattens discutiren. Derselbe lässt sich mit Berücksichtigung von (8b) folgendermassen schreiben

$$J = \left(\cos u_1^2 M(-u_1) - \sin u_1^2 N(-u_1) + \cos u_2^2 M(u_2) - \sin u_2^2 N(u_2)\right)^2$$
$$+ \left(\sin u_1^2 M(-u_1) + \cos u_1^2 N(-u_1) + \sin u_2^2 M(u_2) + \cos u_2^2 N(u_2)\right)^2,$$

oder, wenn man benutzt, dass unter der soeben gemachten Annahme die hier auftretenden Werthe von $M(u)$ nach (17) gegenüber denen von $N(u)$ vernachlässigt werden können,

$$J = \left(\sin u_1^2 N(-u_1) + \sin u_2^2 N(u_2)\right)^2 + \left(\cos u_1^2 N(-u_1) + \cos u_2^2 N(u_2)\right)^2,$$

d. h.

$$J = N^2(-u_1) + N^2(u_2) + 2N(-u_1)N(u_2)\cos(u_1^2 - u_2^2)$$
$$= \left(N(-u_1) - N(u_2)\right)^2 + 4N(-u_1)N(u_2)\cos^2\frac{u_1^2 - u_2^2}{2};$$

mit Benutzung von (17) erhält man also für die Intensität in der Nähe der Schattenmitte den einfacheren Ausdruck

$$4J = \left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2}\right)^2 - \frac{1}{u_1 u_2}\cos^2\frac{e x_0}{\lambda z_0} 2\pi;$$

da nun $-u_1$ und u_2 positiv sind, so ergiebt sich, dass durch die Gleichung (16) die Maxima, durch (18) die Minima der Intensität bestimmt werden.

Der soeben gefundene einfachere Ausdruck für J ergiebt endlich auch ein Mass für die *Grösse* der Helligkeit in den Maximis und Minimis, in der Nähe der Schattenmitte; ist nämlich x_0 hinreichend klein im Verhältniss zu e, so können wir setzen

$$u_2 = -u_1 = e\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}\frac{z_1 - z_0}{z_1 z_0}},$$

und erhalten somit für die Intensität den Werth

$$J = \frac{\lambda z_1 z_0}{\pi e^2 (z_1 - z_0)}\cos^2\frac{e x_0}{\lambda z_0} 2\pi. \qquad (19)$$

Hieraus folgt, dass in der Nähe der Mitte des Schattens die Minima den Werth 0, die Maxima den Werth

$$\frac{\lambda z_1 z_0}{\pi e^2 (z_1 - z_0)}$$

haben. Um die Bedeutung dieser letzten Angabe zu verstehen, muss man hinzunehmen, dass bei der für J gewählten Einheit ausserhalb des Schattens und in hinreichender Entfernung von ihm

$$J = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \cos \xi^2 \right)^2 + \left(\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \sin \xi^2 \right)^2 = \pi$$

ist.

Es verdient bemerkt zu werden, dass die Lage der Maxima und Minima bei den inneren Fransen dieselbe ist, wie wenn sie hervorgebracht wären durch Interferenz von Strahlen, die von Punkten in den Rändern des Schirms ausgegangen sind. Hierauf beruht der erste, freilich unvollkommene Versuch, die Erscheinung, mit der wir uns beschäftigt haben, zu erklären, der von *Thomas Young* gemacht worden ist. Von *Fresnel* rührt die Theorie her, welche soeben auseinandergesetzt wurde.

Achte Vorlesung.

Intensität und Polarisationszustand des reflectirten und gebrochenen Lichtes. — Angabe einiger Erfahrungssätze. Die Fresnel'schen Formeln. — Theoretische Ableitung dieser Erfahrungssätze. — Die Schwingungen des einfallenden Lichtes finden *senkrecht* zur Einfallsebene statt. Die Hypothesen von Fresnel und F. Neumann. — Das einfallende Licht schwingt *in* der Einfallsebene. — Theorie der totalen Reflexion für parallel und senkrecht zur Einfallsebene polarisirtes Licht. — Das einfallende Licht ist in beliebigem Azimuth geradlinig polarisirt. — Drehung der Polarisationsebene bei partieller Reflexion. — Intensität und Polarisationszustand des reflectirten Lichtes bei totaler Reflexion. Die Fresnel'schen Parallelepipede.

§ 1.

Wir haben uns mit der Reflexion und Brechung des Lichtes an der Grenze zweier verschiedenartigen Mittel bereits beschäftigt und einen Theil der hierfür geltenden Gesetze abgeleitet; wir haben nämlich die *Richtungen* der so entstehenden Strahlen und Wellen gefunden. In den darauf bezüglichen Rechnungen kamen aber gewisse Constanten vor, die wir ganz unbestimmt gelassen haben; darauf beruht es, dass wir bisher über die Intensität und den Polarisationszustand des reflectirten und gebrochenen Lichtes Nichts haben ermitteln können. Wir wollen uns jetzt zu Betrachtungen wenden, die uns hierüber Aufschluss geben sollen; und zwar können wir diese auf den Fall beschränken, dass die Grenze der beiden Mittel und die einfallenden Lichtwellen *ebene* sind; sind nämlich unter dieser Voraussetzung die Grenzbedingungen für die Lichtbewegung gefunden, so lassen sie sich leicht so verallgemeinern, dass sie auch für eine krumme Grenzfläche und kugelförmige einfallende Wellen gelten.

Fallen ebene Lichtwellen, also solche, die von einer unendlich weit entfernten Lichtquelle herkommen, auf die ebene Grenze zweier durchsichtigen Mittel, so bilden sich, wie wir wissen, ebene reflectirte und ebene gebrochene Wellen, deren Richtungen durch die Sätze bestimmt sind, dass der reflectirte und der gebrochene Strahl, die zu einem einfallenden gehören, in der Einfallsebene liegen, dass der Reflexionswinkel dem Einfallswinkel gleich ist, und dass die Sinus des Einfallswinkels und des Brechungswinkels in dem Verhältniss der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten des Lichtes in den beiden Mitteln stehen. Es handelt sich nun darum, aus der Amplitude, dem Polarisationszustand und der Phase der einfallenden Wellen die Amplitude, den Polarisationszustand und die Phase der reflectirten und der gebrochenen Wellen zu finden. Wir wollen zuerst einige hierauf bezügliche Sätze aussprechen, die als erfahrungsgemäss feststehend anzusehen sind, und dann die theoretischen Betrachtungen angeben, die diese Sätze abzuleiten und die genannte Aufgabe vollständig zu lösen erlauben.

Bei der Besprechung der Lichtwellen in *einem* homogenen Mittel wurde bereits das *Princip der Zusammensetzung zweier Lichtbewegungen* hervorgehoben, der Satz nämlich, dass, wenn man die Ausdrücke für die Componenten der Verrückung bei zwei möglichen Lichtbewegungen addirt, die erhaltenen Summen auch die Componenten der Verrückung bei einer möglichen Lichtbewegung sind. Es folgte dieser Satz unmittelbar daraus, dass die Differentialgleichungen für die Componenten der Verrückung bei einer Lichtbewegung sämmtlich linear und homogen sind. Aus diesem Satze ergab sich, wie noch einmal erwähnt werden mag, der weitere, dass ebene Lichtwellen, die in irgend einer Richtung geradlinig oder elliptisch polarisirt sind, sich zerlegen lassen in zwei Wellensysteme, die nach irgend zwei auf einander und auf der Wellenebene senkrechten Ebenen polarisirt sind. Hier, wo wir es mit Lichtbewegungen in zwei zusammenstossenden verschiedenartigen Mitteln zu thun haben, ist nun zuerst zu erwähnen, dass auch für diese das Princip der Zusammensetzung zweier Lichtbewegungen gilt. Es ist danach zu vermuthen, dass, wie die Differentialgleichungen, so auch die an der Grenze der beiden Mittel zu erfüllenden Bedingungen linear und homogen in Bezug auf die Componenten der Verrückung sein werden.

Durch dieses Princip vereinfacht sich die vorliegende Aufgabe wesentlich: Nach demselben kann man nämlich, welches auch der Polarisationszustand des einfallenden Lichtes sei, dieses zerlegen in eine „Componente", bei der die Schwingungen *in* der Einfallsebene geschehen, und eine, bei der die Schwingungen *senkrecht* zu dieser sind; ermittelt man für jede dieser Componenten das reflectirte und das gebrochene Licht, so findet man durch Zusammensetzung die vollständigen reflectirten und gebrochenen Wellen. Man hat daher die Aufgabe allgemein gelöst, wenn dies für die zwei Fälle geschehen ist, dass die Schwingungen des einfallenden Lichtes *in* der Einfallsebene, und dass sie *senkrecht* zu dieser geschehen. In jedem dieser Fälle lässt sich aber der *Polarisationszustand* des reflectirten und des gebrochenen Lichtes unmittelbar angeben: Wegen der Symmetrie, die in Bezug auf die Einfallsebene stattfindet, müssen nämlich bei allen drei Lichtmengen in dem einen Falle die Schwingungen *in* der Einfallsebene, in dem anderen *senkrecht* zu dieser stattfinden.

Was die *Phasen* anbelangt, so kann man als mit der Erfahrung im Einklange annehmen, dass bei der Reflexion und Brechung bei durchsichtigen Mitteln *keine* Phasenänderung stattfindet, d. h. dass der einfallende, der reflectirte und der gebrochene Strahl in dem ihnen gemeinsamen Punkte der Grenzfläche *dieselbe* Phase besitzen. Der Fall der sogenannten *totalen Reflexion*, für welchen die soeben gemachte Annahme nicht zutrifft, soll erst im § 5 dieser Vorlesung ausführlich behandelt und vorläufig von der Untersuchung ausgeschlossen werden.

Es bleibt also nur noch die Frage nach den *Amplituden* der reflectirten und gebrochenen Wellen in den beiden unterschiedenen Fällen zu beantworten, und da diese nach dem Princip der Zusammensetzung zweier Lichtbewegungen der Amplitude des einfallenden Lichtes proportional sein müssen, so kann man die letztere ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit gleich Eins setzen. Wenn das geschieht, so ist nach *Fresnel* die Amplitude der reflectirten Wellen,

wenn das einfallende Licht *in* der Einfallsebene polarisirt ist,

$$\pm \frac{\sin(\varphi - \varphi')}{\sin(\varphi + \varphi')}$$

wenn es *senkrecht* zur Einfallsebene polarisirt ist

$$\pm \frac{\mathrm{tg}(\varphi - \varphi')}{\mathrm{tg}(\varphi + \varphi')},$$

wo φ den Einfallswinkel, φ' den Brechungswinkel bedeutet.

Von der *Polarisationsebene* ist hier die Rede, die, wie schon am Anfange dieser Vorlesungen bemerkt wurde, nothwendig mit der *Schwingungsebene* zusammenfällt oder auf ihr senkrecht steht. Die Polarisationsebene lässt sich in jedem Falle unzweideutig erkennen; man hat eben einer experimentell bestimmbaren Ebene diesen Namen beigelegt, während auf die Schwingungsebene nur durch theoretische Betrachtungen geschlossen werden kann. Wie bald näher zu erörtern sein wird, kann man polarisirtes Licht erhalten, wenn man sogenanntes *natürliches* Licht von einem Glasspiegel unter einem gewissen Winkel reflectiren lässt. Bei so entstandenem polarisirten Licht ist die Polarisationsebene conventioneller Festsetzung gemäss die Reflexionsebene; ob die Schwingungsebene mit dieser zusammenfällt oder senkrecht auf ihr steht, wollen wir einstweilen unentschieden lassen.

Endlich muss angeführt werden, dass die Fresnel'schen Ausdrücke für die Amplituden der reflectirten Wellen, sowie die Behauptung, dass keine Phasenänderung bei der Reflexion und Brechung stattfindet, sorgfältigen Messungen zufolge ganz genau richtig *nicht* sind. Doch sind die Abweichungen nur unbedeutend, und man kann wohl annehmen, dass sie ganz fehlen würden bei vollkommen durchsichtigen Körpern, wie sie unsere theoretischen Betrachtungen voraussetzen.

§ 2.

Wir wollen nun suchen, die ausgesprochenen Sätze theoretisch abzuleiten.

Die xy-Ebene sei die Grenze der beiden Medien; für das erste, in dem das einfallende Licht sich bewegt, sei z negativ, für das zweite positiv; auf das zweite Mittel beziehen wir gestrichene, auf das erste ungestrichene Buchstaben. Nach der Hypothese, dass in Beziehung auf die Lichtbewegung der Aether sich wie ein elastischer fester Körper verhält, auf dessen Theile keine anderen Kräfte wirken als die durch die relativen Verschiebungen hervorgerufenen, und der Annahme, dass die Lichtbewegungen transversale sind, haben wir dann für die Componenten der Verrückungen irgend einer Lichtbewegung

für $z < 0$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{K}{\mu}\Delta u \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \frac{K}{\mu}\Delta v \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{K}{\mu}\Delta w \\ \sigma = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &+ \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

für $z > 0$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 u'}{\partial t^2} &= \frac{K'}{\mu'}\Delta u' \\ \frac{\partial^2 v'}{\partial t^2} &= \frac{K'}{\mu'}\Delta v' \\ \frac{\partial^2 w'}{\partial t^2} &= \frac{K'}{\mu'}\Delta w' \\ \sigma' = \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} &+ \frac{\partial w'}{\partial z} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{1a}$$

Es bedeuten hier (vgl. I. Vorlesung § 3 Nr. (1) und (2)) K und K' die Constanten der Elasticität, μ und μ' die Dichtigkeit des Aethers in den beiden Mitteln.

Es fragt sich, welches die Gleichungen sind, die überdies für $z = 0$ erfüllt werden müssen. Die nächstliegende Hypothese, die in Bezug hierauf gemacht werden kann, scheint die zu sein, dass die Aethermassen in den beiden Mitteln auch da, wo sie zusammenstossen, sich verhalten wie zwei feste elastische Körper, auf deren Theile keine anderen Kräfte wirken als die durch die relativen Verschiebungen erzeugten. Ist das der Fall, so muss

für $z = 0$

$$u = u' \qquad v = v' \qquad w = w' \tag{2}$$

$$X_z = X_z' \quad Y_z = Y_z' \quad Z_z = Z_z' \tag{2a}$$

sein, wenn wir die Druckcomponenten ebenso wie früher bezeichnen.

Wir wollen diese Hypothese zunächst in einem speciellen Falle verfolgen. Die Theile von u, v, w, die den einfallenden Wellen entsprechen, wollen wir durch u_e, v_e, w_e bezeichnen, die den reflectirten entsprechenden durch u_r, v_r, w_r, so dass

$$u = u_e + u_r \quad v = v_e + v_r \quad w = w_e + w_r \tag{2b}$$

ist; u', v', w' sind unmittelbar die Componenten der Verrückung in den gebrochenen Wellen, welche allein in dem zweiten Mittel vorhanden sind.

Nun nennen wir l, m, n die Cosinus einer Richtung, α_e, β_e, γ_e die einer anderen und setzen

$$\begin{aligned}
u_e &= \alpha_e \sin\left(\frac{lx + my + nz}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) 2\pi \\
v_e &= \beta_e \sin\left(\frac{lx + my + nz}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) 2\pi \\
w_e &= \gamma_e \sin\left(\frac{lx + my + nz}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) 2\pi,
\end{aligned} \tag{3}$$

dann genügen u_e, v_e, w_e den für u, v, w aufgestellten Differentialgleichungen (1), wenn

$$\frac{\lambda}{T} = \sqrt{\frac{K}{\mu}}$$

und

$$\alpha_e l + \beta_e m + \gamma_e n = 0 \tag{4}$$

ist; das einfallende Licht besteht dann aus ebenen Wellen, deren Normalen die Richtung (l, m, n), deren Verrückungen die Richtung (α_e, β_e, γ_e) haben; die Amplitude derselben ist gleich Eins.

Wir setzen ferner, indem wir α_r, β_r, γ_r die Cosinus einer neuen Richtung nennen,

$$\begin{aligned}
u_r &= R\alpha_r \sin\left(\frac{lx + my - nz}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) 2\pi \\
v_r &= R\beta_r \sin\left(\frac{lx + my - nz}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) 2\pi \\
w_r &= R\gamma_r \sin\left(\frac{lx + my - nz}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) 2\pi;
\end{aligned} \tag{3a}$$

den Differentialgleichungen für u, v, w wird dann auch durch u_r, v_r, w_r, mithin auch durch $u_e + u_r$, $v_e + v_r$, $w_e + w_r$ genügt, wenn

$$\alpha_r l + \beta_r m - \gamma_r n = 0$$

ist. R ist dann die Amplitude der reflectirten Wellen.

Endlich machen wir

$$\begin{aligned}
u' &= D\alpha' \sin\left(\frac{l'x + m'y + n'z}{\lambda'} - \frac{t}{T}\right) 2\pi \\
v' &= D\beta' \sin\left(\frac{l'x + m'y + n'z}{\lambda'} - \frac{t}{T}\right) 2\pi \\
w' &= D\gamma' \sin\left(\frac{l'x + m'y + n'z}{\lambda'} - \frac{t}{T}\right) 2\pi,
\end{aligned} \tag{3b}$$

wo α', β', γ' und l' m' n' die Cosinus zweier neuen Richtungen sind, für die

$$\alpha' l' + \beta' m' + \gamma' n' = 0$$

ist. Damit den Differentialgleichungen (1a) genügt werde, muss dann noch

$$\frac{\lambda'}{T} = \sqrt{\frac{K'}{\mu'}} \tag{4a}$$

sein. Ausserdem setzen wir

$$\frac{l'}{\lambda'} = \frac{l}{\lambda} \quad \text{und} \quad \frac{m'}{\lambda'} = \frac{m}{\lambda}\,; \tag{4b}$$

dann wird, unserer vorher ausgesprochenen Hypothese gemäss, die Phase ϑ aller drei Wellensysteme in einem beliebigen Punkte der Grenzfläche $z = 0$ dieselbe, nämlich

$$\vartheta = \left(\frac{lx + my}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) 2\pi = \left(\frac{l'x + m'y}{\lambda'} - \frac{t}{T}\right) 2\pi, \tag{4c}$$

und es reduciren sich die für die Grenzfläche zu erfüllenden Gleichungen (2) und (2a) auf solche zwischen den eingeführten Constanten. Ueberhaupt tritt in irgend einer für $z = 0$ zu erfüllenden Gleichung, die in Bezug auf die Verrückungen selbst homogen ist, eine Potenz des Sinus dieser Phase, in einer Gleichung, die in Bezug auf die ersten Differentialquotienten der Verrückungen homogen ist, eine Potenz des Cosinus der Phase als Faktor auf und kann fortgelassen werden.

Man überzeugt sich leicht, dass durch die aufgestellten Gleichungen (3), (3a), (3b) in Verbindung mit (4b) die im Anfang dieser Vorlesung erwähnten Gesetze für die Richtung der reflectirten und gebrochenen Wellen ausgesprochen sind.

§ 3.

Der specielle Fall, den wir zuerst untersuchen wollen, ist nun der, dafs das einfallende Licht, also auch das reflectirte und das gebrochene, *senkrecht* zur Einfallsebene schwingen. Wir wollen dabei die xz-Ebene zur Einfallsebene wählen; dann sind die sämmtlichen Componenten u und w gleich Null, da die Verrückungen parallel der y-Achse geschehen, und dasselbe gilt von den Richtungscosinus m und m', da die Wellennormale auf der y-Achse senkrecht steht; bestimmt man also die positive Richtung der x-Achse so, dass der Winkel zwischen ihr und den einfallenden Strahlen spitz ist, so kann man setzen

$$l = \sin\varphi, \qquad n = \cos\varphi$$

und

$$l' = \sin\varphi', \qquad n' = \cos\varphi',$$

wo wieder φ der Einfallswinkel, φ' der Brechungswinkel ist. Die Ausdrücke (3), (3a) und (3b) für die Grössen v werden daher in diesem Falle

$$\begin{aligned} v_e &= \quad \sin\left(\frac{x\sin\varphi + z\cos\varphi}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)2\pi \\ v_r &= R\sin\left(\frac{x\sin\varphi - z\cos\varphi}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)2\pi \\ v' &= D\sin\left(\frac{x\sin\varphi' + z\cos\varphi'}{\lambda'} - \frac{t}{T}\right)2\pi, \end{aligned} \tag{5}$$

und aus (4b) ergiebt sich

$$\frac{\sin\varphi}{\lambda} = \frac{\sin\varphi'}{\lambda'}. \tag{5a}$$

Die ersten drei der für $z = 0$ geltenden Bedingungen (2) geben die eine Gleichung

$$1 + R = D; \tag{6}$$

um die drei anderen Grenzbedingungen in (2a) zu bilden, müssen wir uns daran erinnern, dass, wie sich aus (1) der ersten Vorlesung ergiebt,

$$\begin{aligned} X_z &= -K\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) & X_z' &= -K'\left(\frac{\partial w'}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial z}\right) \\ Y_z &= -K\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) & Y_z' &= -K'\left(\frac{\partial w'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial z}\right) \\ Z_z &= -2K\frac{\partial w}{\partial z} & Z_z' &= -2K'\frac{\partial w'}{\partial z} \end{aligned}$$

gesetzt werden kann, da

$$\sigma = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

und

$$\sigma' = \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0$$

ist. In unserem Falle reduciren sich daher die drei Bedingungen (2a) auf die eine

$$K\frac{\partial v}{\partial z} = K'\frac{\partial v'}{\partial z},$$

d. h. auf die Gleichung

$$K\frac{\cos\varphi}{\lambda}(1 - R) = K'\frac{\cos\varphi'}{\lambda'}D,$$

welche sich wegen (5a) auch folgendermassen schreiben lässt

$$K\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}(1 - R) = K'\frac{\cos\varphi'}{\sin\varphi'}D. \tag{6a}$$

Ersetzt man endlich in dieser Gleichung K und K' mit Hülfe von (4) und (4a) durch μ und μ', so geht sie über in

$$\mu\sin\varphi\cos\varphi\,(1 - R) = \mu'\sin\varphi'\cos\varphi'\,D. \tag{6b}$$

Aus den beiden Gleichungen (6a) und (6b) zwischen R und D ergiebt sich aber in Verbindung mit (6)

$$\frac{1-R}{1+R} = \frac{K'}{K}\,\frac{\cos\varphi'\sin\varphi}{\cos\varphi\sin\varphi'} = \frac{\mu'}{\mu}\,\frac{\cos\varphi'\sin\varphi'}{\cos\varphi\sin\varphi}$$

und daraus

$$R = \frac{K \cos\varphi \sin\varphi' - K' \cos\varphi' \sin\varphi}{K \cos\varphi \sin\varphi' + K' \cos\varphi' \sin\varphi}$$
$$= \frac{\mu \cos\varphi \sin\varphi - \mu' \cos\varphi' \sin\varphi'}{\mu \cos\varphi \sin\varphi + \mu' \cos\varphi' \sin\varphi'}.$$

Vergleicht man den so erhaltenen Werth von R mit den beiden Fresnel'schen Ausdrücken

$$\pm \frac{\sin(\varphi - \varphi')}{\sin(\varphi + \varphi')} \quad \text{und} \quad \pm \frac{\operatorname{tg}(\varphi - \varphi')}{\operatorname{tg}(\varphi + \varphi')}$$

für die Amplitude des reflectirten Lichtes in den Fällen, dass die einfallenden Wellen in der Einfallsebene oder senkrecht zu ihr polarisirt sind, so kommt man zu dem merkwürdigen Resultate, dass er mit dem einen oder mit dem andern übereinstimmt, je nachdem man

$$K = K' \quad \text{oder} \quad \mu = \mu'$$

nimmt. In der That wird für $K = K'$

$$R = -\frac{\sin(\varphi - \varphi')}{\sin(\varphi + \varphi')},$$

für $\mu = \mu'$

$$R = \frac{\sin 2\varphi - \sin 2\varphi'}{\sin 2\varphi + \sin 2\varphi'},$$

oder, da

$$\sin 2\varphi - \sin 2\varphi' = 2\cos(\varphi + \varphi')\sin(\varphi - \varphi')$$
$$\sin 2\varphi + \sin 2\varphi' = 2\cos(\varphi - \varphi')\sin(\varphi + \varphi')$$

ist

$$R = \frac{\operatorname{tg}(\varphi - \varphi')}{\operatorname{tg}(\varphi + \varphi')}.$$

Man muss hiernach entweder annehmen,

> dass die Lichtschwingungen senkrecht zur Polarisationsebene geschehen, und dass die Elasticität des Aethers in allen durchsichtigen Mitteln gleich ist,

oder

> dass die Schwingungen in der Polarisationsebene stattfinden, und dass die Dichtigkeit μ des Aethers überall dieselbe ist.

Die erste Annahme hat *Fresnel*, die zweite hat *F. Neumann* zuerst gemacht.

Die Fresnel'sche Annahme ist aber nicht verträglich mit der Hypothese, welche wir an die Spitze unserer optischen Betrachtungen stellten und die sich durch ihre nicht zu übertreffende Einfachheit empfiehlt, mit der Hypothese nämlich, dass der Aether in den durchsichtigen Mitteln in Bezug auf die Lichtbewegung sich verhält wie ein elastischer fester Körper, auf dessen Theile keine anderen Kräfte wirken, als die durch die relativen Verschiebungen erzeugten. Lässt man nämlich diese Hypothese auch gelten für die doppelt brechenden Krystalle, so kann man die optischen Erscheinungen, die diese darbieten und mit denen wir uns später zu beschäftigen haben werden, nicht anders erklären, als durch die Annahme, dass der Aether in ihnen in verschiedenen Richtungen eine verschiedene Elasticität besitzt. (Die Annahme, dass die Dichtigkeit in verschiedenen Richtungen verschieden sei, wäre sinnlos, da in dem Begriff der Dichtigkeit, d. i. der in der Volumeneinheit befindliche Masse, der Begriff der Richtung gar nicht vorkommt.) Wenn man nun annimmt, dass schon in einem Krystall der Aether in verschiedenen Richtungen verschiedene Elasticität besitzt, so kann man nicht gut voraussetzen, dass diese in sämmtlichen isotropen Körpern dieselbe ist. Es bleibt hiernach nur die *Neumann*'sche Annahme übrig, nach der die Schwingungen *in* der Polarisationsebene geschehen und die Dichtigkeit des Aethers überall dieselbe ist. Ihr zufolge können wir, um die Zahl der Zeichen zu verkleinern,

$$\mu = \mu' = 1$$

setzen.

§ 4.

Wir haben die aufgestellten Hypothesen in dem Falle verfolgt, dass das einfallende Licht senkrecht zur Einfallsebene schwingt. Wollen wir sie anwenden auf irgend einen anderen Fall, z. B. den, dass die Schwingungen in der Einfallsebene stattfinden, so stossen wir auf einen Widerspruch: Wir erhalten mehr für $z = 0$ zu erfüllende Gleichungen, als wir Constanten zu unserer Verfügung haben. Diesen Widerspruch können wir heben, wenn wir die Voraussetzung fallen lassen, dass wir es ausschliesslich mit transversalen Schwingungen zu thun haben, und neben den reflectirten und gebrochenen transversalen Wellen auch reflectirte und gebrochene *longitudinale* in die Rechnung einführen. Die beiden Amplituden derselben vervollständigen nämlich dann die Zahl der Constanten, die nöthig sind, um die aufgestellten Grenzbedingungen zu erfüllen. Aber, wenn solche longitudinalen Wellen vorhanden wären, so müssten sie sich in irgend einer Weise bemerkbar machen, und dies ist nicht der Fall. Freilich könnte ihre Intensität unmessbar klein sein gegen die Intensität der transversalen Wellen, wenn die Zusammendrückbarkeit des Aethers unendlich gering wäre. Aber unter dieser Annahme, wie unter der Voraussetzung einer endlichen Zusammendrückbarkeitdes Aethers kommt man zu Ausdrücken für die Amplituden der reflectirten Lichtwellen, die mit den Fresnel'schen auch nicht in roher Annäherung übereinstimmen. Es ist daher der Fehler unserer Hypothese an einer andern Stelle, und zwar in den Grenzbedingungen, zu suchen. Wir werden daher diese verändern, aber so, dass sie in dem Falle, in dem wir auf keinen Widerspruch gekommen sind, in dem Falle also, dass die Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene geschehen, keine Aenderung erleiden, dass mithin die Schlüsse, die wir an die Discussion dieses Falles geknüpft haben, ihre Gültigkeit behalten.

Danach haben wir anzunehmen, dass die Elasticität des Aethers in den verschiedenen durchsichtigen Mitteln eine verschiedene ist, im Glase z. B. eine andere als im leeren Raume. Wir sind nicht im Stande, uns eine klare Vorstellung darüber zu bilden, *wie* die Aenderung der Elasticität des Aethers im Glase bewirkt ist, doch werden wir sagen können, dass sie eine Folge von *Kräften* ist, welche die Theile der wägbaren Materie auf die Aethertheile ausüben. Wenn nun solche Kräfte vorhanden sind, so werden sie einen *directen* Einfluss ausüben müssen auf Bewegungen der Aethertheile an der Grenze des Glases, die dieser nicht parallel sind, wenn sie auch im Innern des Glases nur einen indirecten Einfluss insofern haben, als hier die Elasticität des Aethers durch sie geändert ist. Mit der directen Wirkung dieser Kräfte an der Oberfläche und im Inneren wird es sich ähnlich verhalten, wie mit derjenigen der Capillarkräfte, die auch nur an der Oberfläche der Flüssigkeiten von Einfluss sind, im Innern sich aufheben. Diese Ueberlegung führt zu dem Schlusse, dass die Differenzen

$$X_z' - X_z, \qquad Y_z' - Y_z, \qquad Z_z' - Z_z$$

nicht gleich Null sind, sondern Werthe haben, die bedingt sind durch die Kräfte, welche die wägbaren Theile auf die Aethertheile ausüben. Wir wollen von diesen Kräften annehmen, dass sie die longitudinalen Wellen, die ohne sie entstehen müssten, verhindern, und dass die Arbeit, die sie leisten, gleich Null ist. Dieses Princip wird gewöhnlich *) dahin formulirt, dass die lebendige Kraft des einfallenden Lichtes gleich ist der Summe der lebendigen Kräfte des reflectirten und des gebrochenen Lichtes. Wenn man diese Ausdrücke passend interpretirt, so lässt sich aus der Beziehung, die allgemein zwischen Arbeit und lebendiger Kraft besteht, leicht nachweisen, dass dieses Princip gleichbedeutend mit dem hier aufgestellten ist.

Wir wollen dasselbe nun analytisch ausdrücken, indem wir die Bedingungen, dass für $z = 0$

$$u = u' \quad v = v' \quad w = w'$$

ist, beibehalten. Die Arbeit, die verschwinden soll, ist die von den Druckkräften

$$X_z' - X_z, \quad Y_z' - Y_z, \quad Z_z' - Z_z$$

geleistete; bezogen auf das Zeitelement dt und das Flächenelement $dx\,dy$, ist dieselbe

$$dt\,dx\,dy\left(\frac{\partial u}{\partial t}(X_z' - X_z) + \frac{\partial v}{\partial t}(Y_z' - Y_z) + \frac{\partial w}{\partial t}(Z_z' - Z_z)\right).$$

Dieser Ausdruck für die Arbeit ist eine homogene Function der zweiten Dimension der Differentialquotienten der Verrückungscomponenten mit constanten Coefficienten. Berücksichtigt man also die Form

*) Vgl. F. Neumann, Abhandlungen der Berliner Akademie der Wissenschaften v. J. 1835.

dieser Componenten, sowie die am Ende des § 2 gemachte Bemerkung, so erkennt man, dass sich die Gleichung, welche ausdrückt, dass diese Arbeit verschwindet, in der Form schreiben lässt

$$dt\, dx\, dy \cos^2\vartheta \cdot C = 0,$$

wo ϑ die in (4c) gegebene Bedeutung hat, und C eine constante, von x, y, t unabhängige Grösse ist, d. h. die zu erfüllende Bedingung wird

$$C = 0.$$

Wir können dieselbe auch schreiben

$$u(X_z' - X_z) + v(Y_z' - Y_z) + w(Z_z' - Z_z) = 0, \qquad (7)$$

da nach der Bemerkung, die wir eben über die Form von u, v, w gemacht haben,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u\frac{2\pi}{T}\frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta},\quad \frac{\partial v}{\partial t} = -v\frac{2\pi}{T}\frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta},\quad \frac{\partial w}{\partial t} = -w\frac{2\pi}{T}\frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}$$

ist. Dabei haben wir wegen $\sigma = 0$ und $\sigma' = 0$

$$\begin{aligned}
X_z &= -K\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) & X_z' &= -K'\left(\frac{\partial w'}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial z}\right)\\
Y_z &= -K\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) & Y_z' &= -K'\left(\frac{\partial w'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial z}\right)\\
Z_z &= 2K\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) & Z_z' &= 2K'\left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y}\right)
\end{aligned}$$

zu setzen; die Gleichung (7) geht somit in die folgende über

$$K\left(u\frac{\partial w}{\partial x} - w\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} - w\frac{\partial v}{\partial y} + u\frac{\partial u}{\partial z} - w\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial z} - w\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$
$$= K'\left(u'\frac{\partial w'}{\partial x} - w'\frac{\partial u'}{\partial x} + v'\frac{\partial w'}{\partial y} - w'\frac{\partial v'}{\partial y} + u'\frac{\partial u'}{\partial z} - w'\frac{\partial u'}{\partial x} + v'\frac{\partial v'}{\partial z} - w'\frac{\partial v'}{\partial y}\right).$$

Diese Gleichung ist in Bezug auf die Verrückungen und deren Differentialquotienten vom zweiten Grade, sie scheint also dem Princípe von der Zusammensetzung zweier Lichtbewegungen zu widersprechen. Der Widerspruch ist aber nur ein scheinbarer, da, wie wir zeigen wollen, die Gleichung sich durch eine lineare ersetzen lässt. Es ist nämlich

$$u'\frac{\partial w'}{\partial x} - w'\frac{\partial u'}{\partial x} = 0 \quad\text{und}\quad v'\frac{\partial w'}{\partial y} - w'\frac{\partial v'}{\partial y} = 0, \qquad (8)$$

da die Verhältnisse $u' : v' : w'$ von x und y unabhängig sind; es verschwinden also auch die Grössen

$$u\frac{\partial w}{\partial x} - w\frac{\partial u}{\partial x} \qquad\text{und}\qquad v\frac{\partial w}{\partial y} - w\frac{\partial v}{\partial y}, \qquad (8a)$$

da an der ganzen Grenzfläche $u = u'$, $v = v'$, $w = w'$ ist. In Folge dessen lässt sich die obige Gleichung schreiben

$$K\left\{u\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) + v\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right)\right\} = K'\left\{u'\left(\frac{\partial u'}{\partial z} - \frac{\partial w'}{\partial x}\right) + v'\left(\frac{\partial v'}{\partial z} - \frac{\partial w'}{\partial y}\right)\right\};$$

ersetzt man endlich in dieser Relation u, v durch u', v', so geht sie über in eine andere, welche folgendermassen geschrieben werden kann

$$u'A + v'B = 0, \tag{9}$$

wenn zur Abkürzung

$$\begin{aligned} A &= K\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) - K'\left(\frac{\partial u'}{\partial z} - \frac{\partial w'}{\partial x}\right) \\ B &= K\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) - K'\left(\frac{\partial v'}{\partial z} - \frac{\partial w'}{\partial y}\right) \end{aligned} \tag{9a}$$

gesetzt wird.

Die Gleichung (9) zwischen A und B wollen wir nun mit einer zweiten zwischen diesen Ausdrücken bestehenden Relation verbinden, welche sich leicht aus den Differentialgleichungen für die Verrückungen, sowie aus den für diese bestehenden Grenzbedingungen (2) ergiebt. Die Gleichung

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = K \Delta w$$

kann wegen $\sigma = 0$ in die Form

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = K\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\right\}$$

gesetzt werden; ebenso hat man

$$\frac{\partial^2 w'}{\partial t^2} = K'\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial w'}{\partial y} - \frac{\partial v'}{\partial z}\right)\right\}.$$

Da nun innerhalb der Grenzfläche $w = w'$ ist, so müssen die rechten Seiten dieser Gleichungen für $z = 0$ einander gleich sein, und hieraus ergiebt sich

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} = 0$$

Denken wir uns hier für A und B ihre Werthe, und für die Verrückungen ihre mit $\sin\vartheta$ proportionalen Ausdrücke gesetzt, so sehen wir, dass diese Relation in einer der beiden Formen

$$lA + mB = 0,$$

oder

$$l'A + m'B = 0 \tag{9b}$$

geschrieben werden kann.

Die beiden Gleichungen (9) und (9b) können aber nur dann zusammen bestehen, wenn

$$A = 0 \quad \text{und} \quad B = 0$$

ist, es sei denn, dass

$$u'm' - v'l' = 0,$$

oder, bei Berücksichtigung von (3b), dass

$$\alpha' m' - \beta' l' = 0$$

ist. Dieser Fall kann eintreten: Denken wir uns eine Gerade, die senkrecht steht zu den beiden auf einander normalen Richtungen (l', m', n') und (α', β', γ'), so ist der Cosinus des Winkels, den diese mit der z-Achse bildet, gleich $\pm(\alpha' m' - \beta' l')$; der Ausnahmefall tritt also ein, wenn diese Gerade senkrecht zur z-Achse steht, d. h. wenn die durch den gebrochenen Strahl und seine Schwingungsrichtung gelegte Ebene die z-Achse enthält. Es geschehen dann also beim gebrochenen, mithin auch beim einfallenden Lichte, die Schwingungen *in* der Einfallsebene. Für diesen Fall ist der Schluss, dass A und B gleich Null sind, nicht unmittelbar gerechtfertigt. Aber wir können ihn als einen Grenzfall ansehen: Da nämlich bei einer noch so kleinen Abweichung von ihm A und B verschwinden, und diese Grössen nicht sprungweise ihre Werthe ändern können, so müssen sie auch in dem Grenzfalle gleich Null sein.

So haben wir ganz allgemein statt der einen quadratischen Grenzbedingung (7) die beiden linearen

$$\begin{aligned} K'\left(\frac{\partial w'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial z}\right) &= K\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right) \\ K'\left(\frac{\partial w'}{\partial y} - \frac{\partial v'}{\partial z}\right) &= K\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) \end{aligned} \tag{10}$$

gefunden, von denen jedoch die eine eine Folge der anderen bei Rücksicht auf die übrigen Bedingungen ist. Sie sprechen aus, dass die Componenten der Drehung nach den Achsen der x und der y in den beiden Mitteln sich umgekehrt wie die Constanten der Elasticität K und K' verhalten. Die Drehungscomponenten nach der z-Achse

$$\frac{\partial u'}{\partial y} - \frac{\partial v'}{\partial x} \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}$$

sind einander gleich, wie aus den für die Grenzfläche geltenden Gleichungen $u' = u$, $v' = v$ folgt.

Die Ausdrücke für die Differenzen der Druckcomponenten gehen bei Berücksichtigung der Gleichungen (10) über in

$$\begin{aligned} X_z' - X_z &= 2(K - K')\frac{\partial w}{\partial x} \\ Y_z' - Y_z &= 2(K - K')\frac{\partial w}{\partial y} \\ Z_z' - Z_z &= 2K\frac{\partial w}{\partial z} - 2K'\frac{\partial w'}{\partial z}; \end{aligned} \tag{11}$$

man sieht daher, dass, falls die Verrückungen w gleich Null sind, d. h. falls das Licht senkrecht zur Einfallsebene schwingt,

$$X_z' = X_z, \quad Y_z' = Y_z, \quad Z_z' = Z_z$$

wird; in diesem Falle stimmen also, wie es sein sollte, die neuen Grenzbedingungen mit den zuerst angenommenen überein.

Behandeln wir jetzt den zweiten Hauptfall, den, dass das Licht *in* der Einfallsebene schwingt. Nehmen wir diese letztere auch hier zur xz-Ebene, so werden die sämmtlichen Verrückungen v gleich Null, und dasselbe gilt von m und m'; sind also wieder φ und φ' der Einfallswinkel und der Brechungswinkel, und setzen wir die Amplitude des einfallenden Lichtes gleich Eins, so gehen die Gleichungen (3) für diesen Fall über in

$$u_e = \cos\varphi \sin\left(\frac{x\sin\varphi + z\cos\varphi}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)2\pi$$

$$w_e = -\sin\varphi \sin\left(\frac{x\sin\varphi + z\cos\varphi}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)2\pi.$$

Die Ausdrücke (3a) und (3b) werden hier

$$u_r = R\cos\varphi \sin\left(\frac{x\sin\varphi - z\cos\varphi}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)2\pi$$

$$w_r = R\sin\varphi \sin\left(\frac{x\sin\varphi - z\cos\varphi}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)2\pi$$

und

$$u' = D\cos\varphi' \sin\left(\frac{x\sin\varphi' + z\cos\varphi'}{\lambda'} - \frac{t}{T}\right)2\pi$$

$$w' = -D\sin\varphi' \sin\left(\frac{x\sin\varphi' + z\cos\varphi'}{\lambda'} - \frac{t}{T}\right)2\pi,$$

wo φ und φ' wie vorher durch die Gleichung (5a) mit einander verbunden sind.

Die drei ersten Grenzbedingungen (2) liefern hier die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned}(1 + R)\cos\varphi &= D\cos\varphi' \\ (1 - R)\sin\varphi &= D\sin\varphi'.\end{aligned} \tag{12}$$

Von den beiden letzten Bedingungen (10) wird die zweite identisch erfüllt, die erste giebt

$$\frac{K}{\lambda}(1 - R) = \frac{K'}{\lambda'}D,$$

wird also, da

$$\frac{K}{K'} = \frac{\lambda^2}{\lambda'^2} = \frac{\sin^2\varphi}{\sin^2\varphi'},$$

ist, identisch mit der aus $w = w'$ sich ergebenden. Aus den Gleichungen (12), die somit allein für R und D gelten, erhält man endlich

$$R = \frac{\sin(\varphi - \varphi')}{\sin(\varphi + \varphi')}, \quad D = \frac{\sin 2\varphi}{\sin(\varphi + \varphi')}, \tag{12a}$$

in Uebereinstimmung mit dem Fresnel'schen Ausdruck für die Reflexion des in der Einfallsebene polarisirten Lichtes.

§ 5.

Wir haben die Fresnel'schen Formeln für die Amplituden der reflectirten Wellen, die erfahrungsmässig sehr nahe richtig sind, als

Prüfstein unserer Theorie benutzt. Diese Formeln beziehen sich ausschliesslich auf den Fall der sogenannten *partiellen* Reflexion, auf den Fall nämlich, dass φ' reell ist, dass also gebrochene Strahlen zu Stande kommen. Es kann aber φ', nach dem Snell'schen Brechungsgesetze berechnet, auch complex werden; das findet statt, wenn die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes im zweiten Mittel grösser ist als im ersten, wenn, wie man sagt, das zweite Mittel im optischen Sinne weniger dicht als das erste ist, und wenn φ eine gewisse Grenze überschreitet; dann wird nach (5a) $\sin\varphi'$ grösser als Eins, es bilden sich also keine gebrochenen Strahlen, es tritt *totale* Reflexion ein. Auch diesen Fall können wir nun nach unserer Theorie behandeln; die Differentialgleichungen und Grenzbedingungen für die Verrückungen erlauben, alle Fragen, die in Bezug auf die totale Reflexion gestellt werden können, zu beantworten.

Auch hier genügt es, die Fälle zu untersuchen, dass das einfallende, also auch das reflectirte und gebrochene Licht *in* der Einfallsebene oder *senkrecht* zu ihr polarisirt ist. Wir betrachten zunächst den zweiten Fall. Ist die Einfallsebene wieder die xz-Ebene, so sind alle Componenten u und w gleich Null, und wir können setzen

$$v_e = \sin\left(\frac{x\sin\varphi + z\cos\varphi}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)2\pi$$

$$v_r = R\sin\left\{\left(\frac{x\sin\varphi - z\cos\varphi}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)2\pi + \delta\right\}.$$

Die Einführung der Constanten δ in dem Ausdrucke von v_r kann man zunächst folgendermassen durch die Erfahrung motiviren: Während bei der partiellen Reflexion durch geradlinig polarisirtes einfallendes Licht stets geradlinig polarisirte reflectirte Wellen erzeugt werden, erhält man bei totaler Reflexion aus geradlinig polarisirtem Lichte im Allgemeinen elliptisch polarisirtes; dies kann aber nur dann geschehen, wenn in den beiden Hauptfällen eine Phasenänderung eintritt. Andererseits werden wir zeigen, dass nur bei Einführung dieser Verzögerung den vorher aufgestellten Differentialgleichungen und Grenzbedingungen auch in diesem Falle genügt werden kann.

Was endlich die Verrückungscomponente v' im zweiten Mittel betrifft, so muss auch sie von y unabhängig sein und der Differentialgleichung (1a), d. h. in diesem Falle der Gleichung

$$\frac{\partial^2 v'}{\partial t^2} = \frac{\lambda'^2}{T^2}\left(\frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial z^2}\right)$$

genügen; dies geschieht durch den Ausdruck

$$v' = De^{-\frac{z}{\lambda'}2\pi\frac{\cos\varphi'}{\sqrt{-1}}}\sin\left\{\left(\frac{x\sin\varphi'}{\lambda'} - \frac{t}{T}\right)2\pi + \delta'\right\},$$

wo $\cos\varphi'$ aus dem Werthe von $\sin\varphi'$ zu berechnen, wo also

$$\frac{\cos\varphi'}{\sqrt{-1}} = \sqrt{\sin^2\varphi' - 1}$$

reell ist. Es soll hier für $\frac{\cos\varphi'}{\sqrt{-1}}$ das positive Vorzeichen gewählt werden; dann verschwindet v' für Werthe von z, die gross gegen die Wellenlänge λ' sind.

Die für $z = 0$ und für alle Werthe der Zeit zu erfüllende erste Bedingung

$$v = v_e + v_r = v'$$

liefert nun zunächst die beiden Gleichungen

$$1 + R\cos\delta = D\cos\delta' \tag{14a}$$

$$R\sin\delta = D\sin\delta'. \tag{14b}$$

Die beiden letzten Grenzbedingungen (10) reduciren sich hier auf die eine

$$K\frac{\partial v}{\partial z} = K'\frac{\partial v'}{\partial z},$$

d. h. auf die Gleichung

$$\sin^2\varphi\frac{\partial v}{\partial z} = \sin^2\varphi'\frac{\partial v'}{\partial z},$$

und hieraus ergeben sich die beiden weiteren Relationen

$$\sin\varphi\cos\varphi\,(1 - R\cos\delta) = -\sin\varphi'\frac{\cos\varphi'}{\sqrt{-1}}D\sin\delta' \tag{15a}$$

$$-\sin\varphi\cos\varphi\,R\sin\delta = \sin\varphi'\frac{\cos\varphi'}{\sqrt{-1}}D\cos\delta'. \tag{15b}$$

Dividirt man nun das Product von (14a) und (15a) durch dasjenige aus (14b) und (15b), so kommt

$$\frac{1 - R^2\cos^2\delta}{R^2\sin^2\delta} = 1,$$

d. h. $R^2 = 1$, oder

$$R = 1,$$

wenn man δ Werthe zwischen $-\pi$ und $+\pi$ annehmen lässt; die Amplitude der reflectirten Wellen ist sonach gleich derjenigen des einfallenden Lichtes. Die Division von (15a) durch (14b) oder von (15b) durch (14a) ergibt dann weiter

$$\operatorname{tg}\frac{\delta}{2} = -\frac{\sin\varphi'\frac{\cos\varphi'}{\sqrt{-1}}}{\sin\varphi\cos\varphi}. \tag{16}$$

Es ist unwichtig, die Grössen D und δ' zu berechnen, da diese sich nicht experimentell bestimmen lassen.

Nun schwinge das einfallende Licht, also auch das reflectirte und das gebrochene, *in* der Einfallsebene, und es sei wieder

$$u_e = \quad \cos\varphi \sin\left(\frac{x\sin\varphi + z\cos\varphi}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)2\pi$$

$$w_e = -\sin\varphi \sin\left(\frac{x\sin\varphi + z\cos\varphi}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)2\pi.$$

Dann erhält man für u_r und w_r die Ausdrücke

$$u_r = R\cos\varphi \sin\left\{\left(\frac{x\sin\varphi - z\cos\varphi}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)2\pi + \delta\right\}$$

$$w_r = R\sin\varphi \sin\left\{\left(\frac{x\sin\varphi - z\cos\varphi}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)2\pi + \delta\right\};$$

u' und w' endlich müssen den Gleichungen

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial t^2} = \frac{\lambda'^2}{T^2}\Delta u', \qquad \frac{\partial^2 w'}{\partial t^2} = \frac{\lambda'^2}{T^2}\Delta w',$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0$$

genügen und von y unabhängig sein; dies geschieht, wenn wir setzen

$$u' = D\frac{\cos\varphi'}{\sqrt{-1}}e^{-\frac{z}{\lambda'}2\pi\frac{\cos\varphi'}{\sqrt{-1}}}\sin\left\{\left(\frac{x\sin\varphi'}{\lambda'} - \frac{t}{T}\right)2\pi + \delta'\right\}$$

$$w' = D\sin\varphi' e^{-\frac{z}{\lambda'}2\pi\frac{\cos\varphi'}{\sqrt{-1}}}\cos\left\{\left(\frac{x\sin\varphi'}{\lambda'} - \frac{t}{T}\right)2\pi + \delta'\right\}.$$

Die Gleichungen $u = u'$, $w = w'$ für $z = 0$ geben hier

$$\cos\varphi\,(1 + R\cos\delta) = \frac{\cos\varphi'}{\sqrt{-1}}D\cos\delta'$$

$$\cos\varphi\, R\sin\delta = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{-1}}D\sin\delta'$$

$$\sin\varphi\,(1 - R\cos\delta) = \sin\varphi' D\sin\delta'$$

$$\sin\varphi\, R\sin\delta = \sin\varphi' D\cos\delta'.$$

Die beiden letzten Grenzbedingungen (10) werden dann von selbst erfüllt; in der That ist die zweite eine Identität, während sich die erste auf

$$\sin\varphi\,(\cos\vartheta - R\cos(\vartheta + \delta)) = D\sin\varphi'\sin(\vartheta + \delta'),$$

reducirt, wenn wieder zur Abkürzung

$$\vartheta = \left(\frac{x\sin\varphi}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)2\pi$$

gesetzt wird, und diese Gleichung ist in den beiden letzten der vier oben aufgestellten Relationen enthalten. Aus letzteren ergibt sich wieder $R^2 = 1$, d. h.

$$R = 1$$

und

$$\operatorname{tg}\frac{\delta}{2} = \frac{\sin\varphi'\cos\varphi}{\sin\varphi\frac{\cos\varphi'}{\sqrt{-1}}}. \tag{16a}$$

§ 6.

Wir wollen jetzt aus den Fresnel'schen Formeln einige nahe liegende Schlüsse ziehen. Die Amplitude der einfallenden Wellen wollen wir wie vorhin gleich Eins setzen, die der reflectirten gleich r_s oder r_p, je nachdem das Licht senkrecht oder parallel zur Einfallsebene polarisirt ist, und durch d_s und d_p die Amplituden der durchgegangenen Strahlen in diesen beiden Fällen bezeichnen. Dann ist

$$r_s = \frac{\operatorname{tg}(\varphi - \varphi')}{\operatorname{tg}(\varphi + \varphi')} \qquad r_p = \frac{\sin(\varphi - \varphi')}{\sin(\varphi + \varphi')}\ .$$

und

$$d_s = \frac{2 \sin 2\varphi}{\sin 2\varphi + \sin 2\varphi'} \qquad d_p = \frac{\sin 2\varphi}{\sin(\varphi + \varphi')}, \tag{17}$$

oder auch nach (6) und (12)

$$d_s = 1 + r_s, \qquad d_p = (1 + r_p)\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi'}.$$

Die Amplituden r_s und r_p können positiv oder negativ sein; um die Bedeutung des Vorzeichens zu erkennen, muss man zu den früher aufgestellten Bewegungsgleichungen für das reflectirte Licht zurückgehen. Eine Veränderung der Phase findet weder bei der Reflexion noch bei der Brechung statt.

Das gilt für den Fall der partiellen Reflexion. Bei der totalen Reflexion ist die Amplitude des reflectirten Lichtes immer der des einfallenden gleich, aber es findet eine Veränderung der Phase statt; heisst diese δ_s oder δ_p, je nachdem das Licht senkrecht oder parallel zur Einfallsebene polarisirt ist, so ist nach (16) und (16a)

$$\operatorname{tg}\frac{\delta_s}{2} = -\frac{\sin\varphi' \,\frac{\cos\varphi'}{\sqrt{-1}}}{\sin\varphi\cos\varphi}, \qquad \operatorname{tg}\frac{\delta_p}{2} = \frac{\sin\varphi'\cos\varphi}{\sin\varphi\,\frac{\cos\varphi'}{\sqrt{-1}}}. \tag{17a}$$

Wenn nun das einfallende Licht die Amplitude Eins hat und *im Azimuth* α polarisirt ist, d. h. wenn seine Polarisationsebene den Winkel α mit der Einfallsebene bildet, so kann man es zerlegen in zwei Componenten, deren Amplituden $\cos\alpha$ und $\sin\alpha$ sind, und von denen die erste in der Einfallsebene, die zweite senkrecht zu ihr polarisirt ist. Jede von diesen liefert eine Componente des reflectirten und bei der partiellen Reflexion auch eine des gebrochenen Strahles, die wie sie parallel oder senkrecht zur Einfallsebene polarisirt ist.

Im Falle der *partiellen Reflexion* haben weder die beiden Componenten des reflectirten, noch die des gebrochenen Lichtes eine relative Verzögerung, beide Strahlen sind daher geradlinig polarisirt. Die Amplituden der Componenten des reflectirten Strahles sind

$$r_p \cos\alpha \quad \text{und} \quad r_s \sin\alpha\,;$$

aus ihnen kann mit Hülfe der Ergebnisse des § 5 der ersten Vorlesung unmittelbar die Amplitude r und das Polarisationsazimuth β

des reflectirten Lichtes gefunden werden, und zwar erhält man für sie die Gleichungen

$$r = \sqrt{r_p^2 \cos^2 \alpha + r_s^2 \sin^2 \alpha}$$
$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha \frac{r_s}{r_p}. \tag{18}$$

Ebenso ergeben sich aus den Amplituden der Componenten des gebrochenen Strahles

$$d_p \cos \alpha \quad \text{und} \quad d_s \sin \alpha,$$

für die Amplitude d und das Polarisationsazimuth γ des gebrochenen Lichtes die Ausdrücke

$$d = \sqrt{d_p^2 \cos^2 \alpha + d_s^2 \sin^2 \alpha}$$
$$\operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \frac{d_s}{d_p}. \tag{18a}$$

Im Allgemeinen stimmen hiernach β und γ nicht mit α überein; bei der Reflexion und Brechung findet also eine Drehung der Polarisationsebene statt.

Aus diesen Resultaten wollen wir jetzt einige Folgerungen für die partielle Reflexion ableiten. Der reflectirte Strahl kann verschwinden. Das findet für ein beliebiges Polarisationsazimuth statt, wenn $\varphi = \varphi'$, d. h. wenn das zweite Mittel im optischen Sinne ebenso dicht ist, wie das erste; es tritt dieser Fall aber auch ein, wenn das einfallende Licht senkrecht zur Einfallsebene polarisirt und

$$\varphi + \varphi' = \frac{\pi}{2} \tag{19}$$

ist; bei diesem Einfallswinkel wird nämlich

$$r = r_s = 0.$$

Aus (19) und aus der Gleichung

$$\sin \varphi = \frac{\lambda}{\lambda'} \sin \varphi' = n \sin \varphi'$$

wo also n das *Brechungsverhältniss* für die beiden Mittel ist, ergiebt sich für diesen Winkel, welcher aus einem sogleich anzugebenden Grunde *Polarisationswinkel* genannt wird, die Gleichung

$$\operatorname{tg} \varphi = n. \tag{19a}$$

Das *natürliche* Licht konnte als polarisirtes angesehen werden, dessen Polarisationsebene sich sehr schnell dreht, dessen Azimuth α also in unmessbar kleinen Zeiträumen alle Werthe zwischen 0 und 2π durchläuft, so jedoch, dass kein Werth über einen anderen überwiegt. Ist also das einfallende Licht natürliches von der Intensität Eins, so ändert sich nach (18) auch die Amplitude r des reflectirten Lichtes sehr schnell, und die vom Auge wahrgenommene Intensität ist daher

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} r^2 d\alpha = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\alpha\,(r_p^2 \cos^2\alpha + r_s^2 \sin^2\alpha) = \frac{1}{2}(r_p^2 + r_s^2).$$

Das reflectirte Licht ist im Allgemeinen auch nicht polarisirt, wenn das einfallende natürliches war, da die durch den Werth von β bestimmte Schwingungsebene im Allgemeinen mit α variirt; nur in *dem* Falle ist β stets constant und zwar gleich Null, wenn r_s gleich Null, d. h. wenn der Einfallswinkel dem Polarisationswinkel gleich ist. Fällt also natürliches Licht unter dem Polarisationswinkel auf, so sind die reflectirten Wellen stets *in* der Einfallsebene polarisirt. Diese Eigenschaft des Polarisationswinkels rechtfertigt den ihm beigelegten Namen, und sie führte *Brewster* zuerst auf experimentellem Wege zur Auffindung desselben. Das sogenannte *Brewster'sche Gesetz* ist gleichbedeutend mit dem aus (19) sich ergebenden Satz, dass der Polarisationswinkel derjenige Einfallswinkel ist, für welchen der reflectirte Strahl auf dem gebrochenen senkrecht steht.

Ist der Einfallswinkel, also auch der Brechungswinkel, unendlich klein, so ist

$$r_p = r_s = \frac{\varphi - \varphi'}{\varphi + \varphi'} = \frac{1-n}{1+n},$$

bei nahe senkrechtem Auffalle ist also die Intensität des reflectirten Lichtes, welches auch der Polarisationszustand des einfallenden sein möge,

$$= \left(\frac{1-n}{1+n}\right)^2.$$

Da dieser Ausdruck ungeändert bleibt, wenn man n mit seinem reciproken Werthe vertauscht, so ergiebt sich, dass es hinsichtlich der Intensität des reflectirten Lichtes bei kleinem Einfallswinkel gleichgiltig ist, von welcher Seite der Grenzfläche das Licht einfällt. Für den Uebergang von Luft in Glas ist das Brechungsverhältniss n nahe $^3/_2$, die Intensität des reflectirten Lichtes also nur etwa $^1/_{25}$ von derjenigen des einfallenden.

Bei der *totalen Reflexion* sind, wenn das einfallende Licht im Azimuth α polarisirt ist und die Amplitude Eins besitzt, die Amplituden der Componenten des reflectirten Strahles

$$\cos\alpha \quad \text{und} \quad \sin\alpha;$$

dieselben besitzen aber einen Phasenunterschied, infolgedessen hat der reflectirte Strahl immer die Intensität Eins, ist aber im Allgemeinen *elliptisch* polarisirt.

Der Phasenunterschied der Componenten des reflectirten Strahles ist

$$\delta_p - \delta_s,$$

und mit Hülfe der Gleichungen (17a) ergiebt sich leicht

$$\operatorname{tg}\frac{\delta_p - \delta_s}{2} = -\frac{\sin\varphi \sin\varphi'}{\cos\varphi . \frac{\cos\varphi'}{\sqrt{-1}}}. \tag{20}$$

Von besonderer Wichtigkeit ist nun der Fall, dass das reflectirte Licht *kreisförmig polarisirt* ist; nach § 5 der ersten Vorlesung ist hierzu einmal nothwendig, dass die Amplituden $\cos\alpha$ und $\sin\alpha$ der Componenten der reflectirten Strahlen einander gleich, dass also das einfallende Licht im Azimuth von $\pm 45^0$ polarisirt ist; dann muss aber noch der Phasenunterschied $(\delta_p - \delta_s)$ ein ungerades Vielfaches von $\frac{\pi}{2}$ betragen, wegen (20) muss also

$$\frac{\sin\varphi \sin\varphi'}{\cos\varphi \frac{\cos\varphi'}{\sqrt{-1}}} = \pm 1$$

sein.

Die so sich ergebende transcendente Gleichung für den Einfallswinkel φ hat nicht immer, z. B. nicht für den Uebergang von Glas in Luft eine reelle Wurzel, es ist mithin unmöglich, durch einmalige totale Reflexion in Glas an der Grenze von Luft aus geradlinig polarisirtem Lichte kreisförmig polarisirtes zu erzeugen. Dagegen kann dieses durch zwei totale Reflexionen unter gleichem Einfallswinkel erhalten werden. Ein einfaches Mittel hierzu liefern die s. g. *Fresnel'schen Parallelepipede.* Lässt man auf ein Glasparallelepipedon, dessen Grundfläche ein Rechteck, und dessen spitzer Winkel gleich φ ist, senkrecht zur ersten Fläche Licht auffallen, so erleidet dasselbe bei richtig gewählten Dimensionen des Körpers zwei innere Reflexionen unter dem Winkel φ, und zwar werden es totale Reflexionen sein, wenn dieser Winkel gross genug gewählt ist. Ist das einfallende Licht im Azimuth $\pm 45^0$ geradlinig polarisirt, so sind nach der ersten, also auch nach der zweiten totalen Reflexion die Amplituden der Componenten des reflectirten Strahles gleich gross; der Phasenunterschied derselben hat sich aber durch die zweimalige Reflexion verdoppelt. Man wird also kreisförmig polarisirtes Licht erhalten, wenn der Winkel φ des Parallelepipeds so bestimmt ist, dass die Phasendifferenz nach der ersten Reflexion ein ungerades Vielfaches von $\frac{\pi}{4}$ beträgt. Aus der so sich ergebenden Gleichung folgt dann ein reeller Werth des Winkels φ. Es mag aber darauf hingewiesen werden, dass streng genommen durch ein bestimmtes Fresnel'sches Parallelepiped nur kreisförmig polarisirtes Licht einer bestimmten Farbe erzeugt werden kann.

Neunte Vorlesung.

Intensität und Polarisationszustand des durch eine planparallele Platte reflectirten und gebrochenen Lichtes. — Das einfallende Licht ist parallel oder senkrecht zur Einfallsebene polarisirt. — Specielle Fälle: Das Licht fällt nahezu senkrecht auf. Die Newton'schen Farbenringe. — Das Licht fällt nahezu unter dem Grenzwinkel der totalen Reflexion auf. — Das einfallende Licht ist nicht völlig homogen, und die Dicke der Platte gross gegen die Wellenlänge. — Intensität und Polarisationszustand des durch *mehrere* Platten reflectirten und gebrochenen Lichtes. Theorie des Glassatzes. — Modification dieser Theorie unter Berücksichtigung der Absorption. — Drehung der Polarisationsebene des durch einen Glassatz reflectirten oder gebrochenen geradlinig polarisirten Lichtes. — Specielle Fälle. Das einfallende Licht ist natürliches. — Der Einfallswinkel ist dem Polarisationswinkel gleich. — Die Anzahl der Platten ist sehr gross.

§ 1.

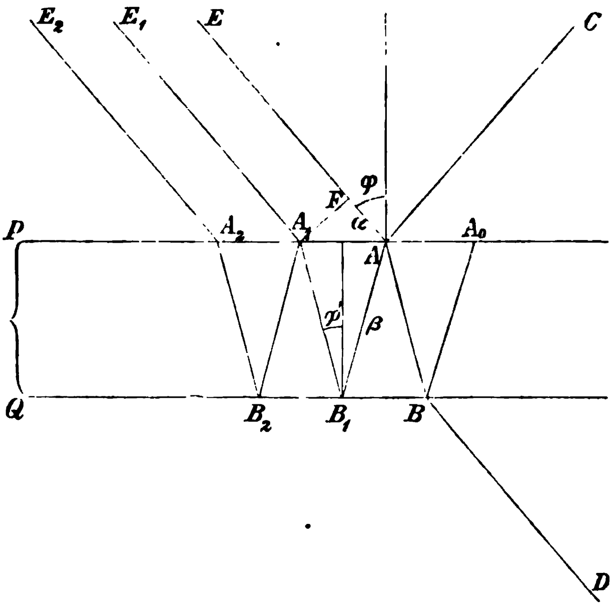
Die Resultate der letzten Vorlesung wollen wir benutzen, um die Reflexion und Brechung an den Oberflächen durchsichtiger Platten zu untersuchen. Wir denken uns eine von zwei parallelen Ebenen begrenzte Platte PQ in Fig. 11, z. B. eine Glasplatte; auf diese mögen ebene Lichtwellen unter dem Winkel φ fallen, die entweder in der Einfallsebene oder senkrecht zu ihr polarisirt sind; alles Licht, welches von den beiden Ebenen reflectirt beziehungsweise gebrochen wird, ist dann auch in der Einfallsebene oder senkrecht zu ihr polarisirt. Ein jeder auffallende Strahl, z. B. EA zerlegt sich nun in einen reflectirten AC und einen gebrochenen AB; es sei φ' der Winkel, den der letztere mit dem Einfallslothe bildet, und es seien d und r die Amplituden jener beiden Strahlen, wenn diejenige des einfallenden Lichtes gleich Eins genommen wird. Ein jeder gebrochene Strahl AB wird sich wieder in einen reflectirten BA_0 und einen gebrochenen BD zerlegen, es ist dann φ der Winkel des letzteren mit dem Einfallslothe, und es seien d' und r' die Amplituden dieser Strahlen, wenn diejenige von AB gleich Eins genommen wird; es ist dann klar, dass r und d sich mit r' und d' vertauschen, wenn φ mit φ' vertauscht wird.

Wir untersuchen zuerst die Lichtbewegung in einem Punkte des *reflectirten* Strahles AC, etwa in seinem Anfangspunkte A. Aus der nachstehenden Figur geht hervor, dass sich in AC ausser dem von EA herrührenden reflectirten Strahle unendlich viele andere vereinigen, welche von E_1, E_2, E_3 ... herkommen und im Innern der Platte 1, 3, 5, ... Reflexionen erlitten haben. Ist also die Amplitude des einfallenden Lichtes gleich Eins, so sind die Amplituden der Bewegung von A in diesen einzelnen Strahlen beziehlich

$$r, \quad dd'r', \quad dd'r'^3, \cdots.$$

Um den Phasenunterschied in A z. B. zwischen den beiden von E und E_1 herrührenden reflectirten Strahlen zu finden, denke man sich durch A_1 eine Wellenebene A_1F der eintretenden Welle gelegt; dann

Fig. 11.



haben die Punkte A_1 und F gleiche Phase. Um nun von A_1 nach A zu gelangen, muss das Licht die Strecke $A_1B_1 + B_1A = 2B_1A = 2\beta$ im zweiten Mittel, um von F nach A zu kommen, muss es die Strecke $FA = \alpha$ im ersten Mittel durchlaufen. Sind also λ und λ' die Wellenlängen des Lichtes im ersten und zweiten Medium, und berücksichtigt man ferner, dass bei allen Reflexionen und Brechungen keine Phasenänderung eintritt, so erkennt man, dass die Phasendifferenz im Punkte A für den ersten und zweiten Strahl

$$\eta = \left(\frac{2\beta}{\lambda'} - \frac{\alpha}{\lambda}\right) 2\pi \qquad (1)$$

ist, und eine ganz ähnliche Ueberlegung zeigt, dass dieselbe für die folgenden Strahlen beziehlich 2η, 3η, $\cdots$ sein wird.

Die Bewegungsgleichung des Aetherpunktes A im einfallenden Strahle EA schreiben wir nun

$$u_0 = \sin \frac{t}{T} 2\pi = \sin \vartheta,$$

wenn

$$\vartheta = \frac{t}{T} 2\pi$$

gesetzt wird. Da die Richtung der Verrückungen unter der gemachten Voraussetzung in allen Strahlen die gleiche ist, so sind die Ausdrücke für die Bewegung desselben Punktes in den einzelnen reflectirten Strahlen beziehlich

$$r \sin \vartheta, \qquad dd'r' \sin(\vartheta - \eta), \qquad dd'r'^3 \sin(\vartheta - 2\eta), \cdots$$

und ihre Summe giebt die Verrückung u des Punktes A in dem Strahle AC, d. h. es ist

$$u = r \sin \vartheta + r'dd'S, \tag{2}$$

wenn zur Abkürzung

$$S = \sin(\vartheta - \eta) + r'^2 \sin(\vartheta - 2\eta) + \cdots$$

gesetzt wird.

Die Reihe S convergirt, da r' kleiner als Eins ist, und lässt sich nach einer Methode summiren, die wir schon im § 2 der sechsten Vorlesung angewendet haben: Bei Benutzung der Identität

$$2 \sin \alpha \cos \eta = \sin(\alpha + \eta) + \sin(\alpha - \eta)$$

findet man nämlich zur Bestimmung von S die Gleichung

$$2S \cos \eta = \sin \vartheta + r'^2 S + \frac{S - \sin(\vartheta - \eta)}{r'^2},$$

woraus sich für diese Reihe der folgende Ausdruck ergiebt

$$S = \frac{\sin(\vartheta - \eta) - r'^2 \sin \vartheta}{1 - 2r'^2 \cos \eta + r'^4}.$$

Die Bewegung in dem Strahle AC ist also durch die Gleichung bestimmt

$$u = r \sin \vartheta + r'dd' \frac{\sin(\vartheta - \eta) - r'^2 \sin \vartheta}{1 - 2r'^2 \cos \eta + r'^4},$$

welche sich auf die Form bringen lässt

$$u = A \sin \vartheta + B \cos \vartheta, \tag{3}$$

wo

$$\begin{aligned} A &= r + dd'r' \frac{\cos \eta - r'^2}{1 - 2r'^2 \cos \eta + r'^4}, \\ B &= \quad - dd'r' \frac{\sin \eta}{1 - 2r'^2 \cos \eta + r'^4}. \end{aligned} \tag{3a}$$

ist. Schreibt man jetzt den Ausdruck (3) für u in der Form

$$u = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(\vartheta - \gamma),$$

wo γ von t unabhängig ist, so wird die gesuchte Intensität J_r des ganzen reflectirten Strahles

$$J_r = A^2 + B^2. \tag{3b}$$

Die Ausdrücke (3a) für A und B vereinfachen sich durch gewisse Relationen, die zwischen r, r', d, d' bestehen. Ist nämlich das einfallende Licht senkrecht zur Einfallsebene polarisirt, so ist nach (17) der vorigen Vorlesung

$$r = \frac{\operatorname{tg}(\varphi - \varphi')}{\operatorname{tg}(\varphi + \varphi')} \qquad r' = \frac{\operatorname{tg}(\varphi' - \varphi)}{\operatorname{tg}(\varphi' + \varphi)}$$

$$d = 1 + r \qquad d' = 1 + r',$$

ist es parallel zur Einfallsebene polarisirt, so ist

$$r = \frac{\sin(\varphi - \varphi')}{\sin(\varphi + \varphi')} \qquad r' = \frac{\sin(\varphi' - \varphi)}{\sin(\varphi' + \varphi)}$$

$$d = (1 + r)\,\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi'} \qquad d' = (1 + r')\,\frac{\cos\varphi'}{\cos\varphi};$$

in den beiden hier betrachteten Fällen bestehen also zwischen r, r', d, d' die Gleichungen

$$r' = -r, \qquad dd' = 1 - r^2. \tag{3c}$$

In Folge hiervon verwandeln sich die Ausdrücke (3a) von A und B in

$$A = r\,\frac{(1 + r^2)(1 - \cos\eta)}{1 - 2r^2\cos\eta + r^4}$$

$$B = r\,\frac{(1 - r^2)\sin\eta}{1 - 2r^2\cos\eta + r^4};$$

führt man also $\frac{\eta}{2}$ an Stelle von η ein, so ergiebt sich endlich für die Intensität des an der Platte reflectirten Lichtes

$$J_r = \frac{4r^2\sin^2\frac{\eta}{2}}{(1 - r^2)^2 + 4r^2\sin^2\frac{\eta}{2}}. \tag{4}$$

Bilden wir jetzt den entsprechenden Ausdruck für die Intensität des durch die Platte *hindurchgegangenen* Lichtes. Ein durchgelassener Strahl BD setzt sich ausser dem von EA herrührenden Strahle aus unendlich vielen anderen zusammen, die von E_1, E_2, $\cdots$ gekommen sind und im Innern der Platte 2, 4, $\cdots$ Reflexionen erlitten haben; eine der vorhin für das reflectirte Licht durchgeführten völlig gleiche Ueberlegung lehrt also, dass die Ausdrücke für die Verrückungen eines Punktes B von BD für diese einzelnen Strahlen beziehlich

$$dd'\sin(\vartheta - \eta), \quad dd'r'^2\sin(\vartheta - 2\eta), \quad dd'r'^4\sin(\vartheta - 3\eta)\cdots$$

sind, wo der Anfangspunkt der Zeit passend verlegt ist. Die Gleichung der Bewegung desselben Punktes im resultirenden Strahl ist daher

$$u' = dd'S,$$

wenn S dieselbe Bedeutung wie oben hat.

Bringt man u' wieder auf die Form

$$u' = A' \sin \vartheta + B' \cos \vartheta,$$

wo A' und B' von t unabhängig sind, so wird die Intensität der Lichtbewegung im Strahle BD

$$J_d = A'^2 + B'^2;$$

für die Coefficienten A' und B' findet man aber hier die Werthe

$$A' = \quad (1 - r^2) \frac{\cos \eta - r^2}{1 - 2 r^2 \cos \eta + r^4}$$

$$B' = -(1 - r^2) \frac{\sin \eta}{1 - 2 r^2 \cos \eta + r^4},$$

man erhält also den folgenden Ausdruck für die Intensität des durch die Platte hindurch gelassenen Lichtes

$$J_d = \frac{(1 - r^2)^2}{(1 - r^2)^2 + 4 r^2 \sin^2 \frac{\eta}{2}}. \tag{4a}$$

Aus den beiden Gleichungen (4) und (4a) ergiebt sich endlich

$$J_d + J_r = 1, \tag{5}$$

die Summe der Intensitäten des reflectirten und des durchgelassenen Lichtes ist somit stets gleich derjenigen der einfallenden Wellen.

In den soeben erhaltenen Formeln hängt η in sogleich zu bestimmender Weise von dem Einfallswinkel φ und der Dicke der Platte ab. Aendert sich η, so werden J_r und J_d abwechselnd Maxima und Minima erhalten, und zwar entspricht wegen (5) einem Maximum von J_d ein Minimum von J_r und umgekehrt. Da nun in dem Ausdrucke (4a) für J_d η nur im Nenner auftritt, so erkennt man unmittelbar, dass

die Maxima von J_d, also die Minima von J_r, für

$$\sin \frac{\eta}{2} = 0 \qquad \frac{\eta}{2} = h\pi,$$

die Minima von J_d, also die Maxima von J_r, für

$$\sin \frac{\eta}{2} = \pm 1 \qquad \frac{\eta}{2} = \frac{2h + 1}{2} \pi$$

auftreten, und zwar sind

für J_r die Maxima $\frac{4 r^2}{(1 + r^2)^2}$, die Minima 0,

für J_d die Maxima 1, die Minima $\left(\frac{1 - r^2}{1 + r^2}\right)^2$.

Ist der Einfallswinkel sehr klein, so gilt nach § 6 der achten Vorlesung dasselbe von r, in diesem Falle sind also die Werthe der Maxima und der Minima von J_d, sowie auch derjenigen von J_r einander ziemlich nahe; beim reflectirten Lichte sind sie aber deutlicher zu trennen, da die Minima hier den Werth Null haben.

Zur experimentellen Prüfung der hier gefundenen Resultate ist jetzt η durch die Dicke der Platte D und den Einfallswinkel φ auszudrücken. Nach (1) war

$$\eta = \left(\frac{2\beta}{\lambda'} - \frac{\alpha}{\lambda}\right) 2\pi;$$

da nun, wie sich aus der Figur leicht ergiebt,

$$\beta = \frac{D}{\cos\varphi}, \quad \alpha = 2D \operatorname{tg}\varphi' \sin\varphi,$$

ist, so erhält man

$$\frac{\eta}{2} = D\left(\frac{1}{\lambda'\cos\varphi'} - \frac{\operatorname{tg}\varphi' \sin\varphi}{\lambda}\right) 2\pi;$$

berücksichtigt man endlich, dass

$$\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{\sin\varphi}{\sin\varphi'}$$

ist, so findet man für $\frac{\eta}{2}$ den folgenden Ausdruck

$$\frac{\eta}{2} = \frac{D\cos\varphi'}{\lambda'} 2\pi. \tag{6}$$

Es ist also η proportional der Dicke der Platte. Ist der Einfallswinkel φ sehr klein, also $\cos\varphi'$ nahe $= 1$, so ergiebt sich

$$\frac{\eta}{2} = \frac{D}{\lambda'} 2\pi. \tag{6a}$$

§ 2.

In unserer Untersuchung wurde das einfallende Licht als homogen vorausgesetzt. Ist dasselbe *verschiedenfarbig*, z. B. weiss, so ist für seine einzelnen Bestandtheile die Intensität des reflectirten beziehungsweise des gebrochenen Lichtes eine verschiedene. Aendert sich nun D innerhalb der Platte, so variirt J_r für die einzelnen Punkte derselben ebenfalls. Hierauf beruhen die Farben dünner Blättchen im reflectirten Licht, hierauf auch die sogenannten *Newton'schen Farbenringe*, die man erhält, wenn man eine sehr schwach gekrümmte convexe Glaslinse auf eine Glasplatte legt; hier bilden nämlich die Gläser das erste, das zwischen ihnen befindliche Luftblättchen das zweite Mittel. An der Berührungsstelle der Platte und der Linse ist daher D gleich Null, und wächst mit der Entfernung von dieser. Fällt also einfarbiges Licht auf die Glaslinse, so sieht man im reflectirten ebenso wie im durchgehenden Lichte ein System heller und dunkler Ringe. War das einfallende Licht weiss, so sind diese Ringe verschieden gefärbt; die Erscheinungen, die das reflectirte und das durchgehende Licht darbietet, sind complementär, jedoch sind die im reflectirten Licht auftretenden Ringe bei kleinem Einfallswinkel viel deutlicher als die beim durchgehenden wahrgenommenen.

Ist der Einfallswinkel sehr klein, so erscheinen die Ringe kreisförmig; um den Radius ϱ desjenigen unter ihnen zu finden, welcher einer bestimmten Luftdicke D entspricht, sei R der Krümmungshalbmesser der Glaslinse; aus der unmittelbar sich ergebenden Gleichung

$$(R+D)^2 = R^2 + \varrho^2$$

erhält man dann bei Vernachlässigung der zweiten Potenz von D

$$D = \frac{\varrho^2}{2R}.$$

Für die dunklen Ringe im reflectirten Lichte musste nun η ein gerades Vielfaches von π sein, für sie hat also D die Werthe

$$0, \quad 2\frac{\lambda'}{4}, \quad 4\frac{\lambda'}{4}, \quad 6\frac{\lambda'}{4}, \quad \cdots;$$

analog findet man, dass für die hellen Ringe D beziehlich gleich

$$\frac{\lambda'}{4}, \quad \frac{3\lambda'}{4}, \quad \frac{5\lambda'}{4}, \quad \cdots$$

ist. Es stehen also die entsprechenden Werthe von ϱ zu einander in den Verhältnissen

$$0 : \sqrt{2} : \sqrt{4} : \cdots\cdots,$$
$$1 : \sqrt{3} : \sqrt{5} : \cdots.$$

Hieraus folgt, dass der Unterschied zweier auf einander folgenden Radien, oder die Breite der einzelnen Ringe kleiner und kleiner wird, je grösser ihre Ordnungszahl ist.

Fällt weisses Licht auf die Linse, so entstehen farbige Ringe, jedoch nur in geringer Anzahl, da die Maxima und Minima der verschiedenfarbigen Bestandteile auf einander fallen und sich vermischen.

Es muss indessen erwähnt werden, dass die hier ausgeführte Theorie der Newton'schen Ringe nicht völlig strenge ist, da die Krümmung der Linse Einfluss auf die Richtung der im Inneren reflectirten Strahlen hat. Es mag in Bezug hierauf auf die ausführlichen Untersuchungen von *Wangerin**) und *Feussner***) verwiesen werden.

Ein weiterer specieller Fall, welcher sich experimentell verwirklichen lässt, ist der, dass das erste Mittel optisch dichter ist als das zweite, während der Einfallswinkel φ nur wenig kleiner als der Grenzwinkel der totalen Reflexion ist; da sich dann nämlich r^2 nach (4) und (4a) wenig von Eins unterscheidet, so wird die Erscheinung im reflectirten Lichte sehr hell, und diejenige, welche das durchgehende Licht darbietet, besonders deutlich sein. Eine Vorrichtung, die

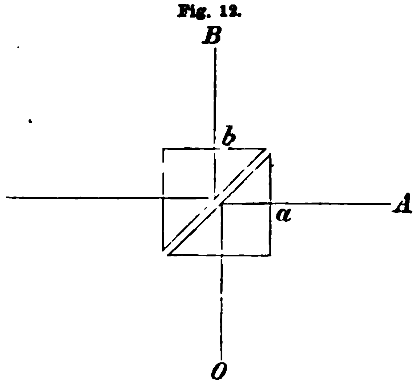
---

*) Poggendorff's Annalen 131, 1866.

**) Wiedemann's Annalen N. F. Bd. XIV. Nr. 12 (1881).

geeignet ist, diese Erscheinungen zu zeigen, besteht aus zwei rechtwinkligen Glasprismen, deren Hypotenusenflächen parallel sind und nur einen kleinen Abstand von einander haben. Ein Auge, das bei O in der untenstehenden Figur sich befindet, erhält dann reflectirte Strahlen, die aus der Gegend von A, oder durchgegangene, die von B herkommen. Lässt man nun durch eine der Kathetenflächen a oder b von einem in endlicher Entfernung befindlichen Punkte

Fig. 12.



Licht in den Apparat eintreten, so wird bei passender Anordnung des Versuches ein Theil partiell reflectirt und gebrochen, ein anderer total reflectirt. In jedem Falle zerfällt also das Gesichtsfeld in zwei Theile, von denen der eine partieller, der andere totaler Reflexion entspricht. Der letztere ist beim reflectirten Lichte sehr hell, beim durchgelassenen ganz dunkel. Die Begrenzungslinie beider Theile wird durch diejenigen Lichtstrahlen gebildet, welche genau unter dem Grenzwinkel der totalen Reflexion auf die Hypotenusenfläche auffallen, im Gesichtsfelde erscheint diese daher als ein Kreisbogen. In jedem Falle ist diese Linie bei homogenem Lichte mit hellen und dunklen Kreisen gesäumt, welche denjenigen Werthen des Einfallswinkels entsprechen, für welche die Intensität des reflectirten, beziehungsweise des gebrochenen Lichtes ein Maximum oder ein Minimum ist.

Die Lage der Maxima ist beim durchgelassenen Lichte bestimmt durch die Werthe von φ', für welche $\frac{\eta}{2}$ in (6) ein ganzzahliges Vielfaches von π, für welche also

$$D \cos \varphi' = 0,\ \frac{\lambda'}{2},\ 2\frac{\lambda'}{2},\ 3\frac{\lambda'}{2},\ \ldots$$

ist. Es sei nun wieder

$$\sin \varphi = n \sin \varphi',$$

wo n also das Brechungsverhältniss für den Uebergang von Glas in Luft ist, dann ist

$$\cos \varphi' = \sqrt{1 - \frac{1}{n^2} \sin^2 \varphi}; \tag{7}$$

ist nun φ_0 der Grenzwerth von φ, für welchen die totale Reflexion beginnt, ist also

$$\sin\varphi_0 = n,$$

und setzt man

$$\varphi = \varphi_0 - \vartheta,$$

wo ϑ als unendlich klein angenommen wird, so ergiebt sich aus (7) bei Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen höherer Ordnung

$$\cos\varphi' = \sqrt{2\,\frac{\cos\varphi_0}{\sin\varphi_0}\,\vartheta}. \tag{7a}$$

Die Werthe von ϑ, welche den genannten Maximis entsprechen, verhalten sich also wie

$$0:1:4:9:\cdots\cdots,$$

die hellen Kreise liegen mithin hier um so weiter auseinander, je höher ihre Ordnungszahl ist, während sie bei den Newton'schen Ringen im Gegentheil mehr und mehr zusammenrückten.

Ist das einfallende Licht weiss, so zeigen sich an der Grenze der totalen Reflexion lebhaft gefärbte Streifen, deren Farben von denjenigen der gewöhnlichen Newton'schen Ringe verschieden sind; diese Abweichung ist dadurch wesentlich bedingt, dass für die einzelnen Farben die Grenze der totalen Reflexion wegen der Dispersion eine verschiedene ist.

Ist die Dicke der Luftschicht zwischen den beiden Prismen äusserst gering, von der Ordnung einer Wellenlänge, so tritt totale Reflexion bei einem Einfallswinkel, bei dem sie sonst stattfinden würde, nicht ein. Es erklärt sich diese Thatsache daraus, dass nach unserer Theorie auch bei der totalen Reflexion eine Aetherbewegung in dem zweiten Medium in der Nähe der reflectirenden Fläche stattfindet. Ist nun jenes Mittel eine Schicht von so geringer Dicke, dass an seiner zweiten Grenzfläche diese Bewegung noch nicht unendlich klein ist, so muss ein Theil derselben in das folgende Medium übergehen, und kann hier die Bildung von Lichtwellen veranlassen.

§ 3.

Die bisher geführten Untersuchungen ergaben für den Fall, dass homogenes Licht mit der Amplitude Eins auf eine durchsichtige Platte fällt, für die Intensitäten i_r und i_d des reflectirten und des hindurchgelassenen Lichtes

$$i_r = \frac{4r^2\sin^2\zeta}{(1-r^2)^2+4r^2\sin^2\zeta}, \qquad i_d = \frac{(1-r^2)^2}{(1-r^2)^2+4r^2\sin^2\zeta},$$

wenn

$$\zeta = \frac{\eta}{2} = \frac{D\cos\varphi'}{\lambda'}\,2\pi$$

gesetzt ist, und D die Dicke der Platte bedeutet. Fällt nun gemischtes Licht auf, so kann man seine Intensität *symbolisch* durch

$$J_e = \sum a^2 \tag{8}$$

darstellen, wenn man mit a^2 die Intensität je einer Lichtart bezeichnet und die Summation über die homogenen Bestandtheile des gemischten Lichtes erstreckt. In derselben Weise werden dann die Intensitäten J_r und J_d der reflectirten und gebrochenen Strahlen *symbolisch* durch

$$J_r = \sum a^2 \frac{4r^2 \sin^2\zeta}{(1-r^2)^2 + 4r^2 \sin^2\zeta}, \quad J_d = \sum a^2 \frac{(1-r^2)^2}{(1-r^2)^2 + 4r^2 \sin^2\zeta} \tag{8a}$$

dargestellt sein. Diese Lichtmengen sind farbig, wenn das einfallende Licht weiss ist, weil in ihnen die verschiedenartigen Bestandtheile in anderen Verhältnissen gemischt sind als in jenem.

Betrachten wir nun den Fall, dass das einfallende Licht zwar gemischtes ist, aber nur solche Strahlen enthält, deren Farbenunterschiede das Auge nicht merkt, deren Wellenlängen also nur wenig von einander verschieden sind. Dann stimmen die Farben aller Bestandtheile von J_r und J_d mit denjenigen von J_e überein, die obigen Ausdrücke werden in diesem Falle also *wirklich* die Intensität der reflectirten und gebrochenen Strahlen darstellen. Nehmen wir jetzt weiter D sehr gross gegen die Wellenlänge an, so wird bei ganz geringen Aenderungen von λ die Grösse ζ ausserordentlich stark variiren, $\sin\zeta$ also alle Werthe von -1 bis $+1$ durchlaufen. Die der Intensität a^2 eines Bestandtheiles von J_e entsprechende vom Auge wahrgenommene Intensität im durchgelassenen Lichte wird also das Mittel aus allen entsprechenden Bestandtheilen von J_d, oder also

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi a^2 \frac{(1-r^2)^2}{(1-r^2)^2 + 4r^2\sin^2\zeta}\, d\zeta = \frac{a^2}{\pi}\int_0^\pi \frac{(1-r^2)^2\, d\zeta}{(1-r^2)^2 + 4r^2\sin^2\zeta}$$

sein, wenn wir annehmen, dass die Grösse a^2 sich nur unendlich wenig ändert, wenn λ um einen verschwindend kleinen Bruchtheil seiner selbst zu- oder abnimmt. Setzt man nun jenen gleich zu bestimmenden Mittelwerth

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{(1-r^2)^2}{(1-r^2)^2 + 4r^2\sin^2\zeta}\, d\zeta = M, \tag{9}$$

so erkennt man zunächst, dass derselbe von ζ völlig unabhängig ist, also nur noch r enthält; sieht man ferner innerhalb der hier betrachteten Grenzen der Wellenlänge von der *Dispersion* ab, nimmt man also an, dass r von λ unabhängig ist, so gilt dasselbe auch von M, und es ergiebt sich für die Gesammtintensität des hindurchgelassenen Lichtes der Werth

$$J_d = \sum M a^2 = M J_e. \tag{10}$$

Setzt man analog

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \frac{4r^2 \sin^2\zeta\, d\zeta}{(1-r^2)^2+4r^2\sin^2\zeta} = M', \tag{9a}$$

so erhält man durch ganz ähnliche Ueberlegungen

$$J_r = \sum M' a^2 = M' J_e. \tag{10a}$$

Zur vollständigen Bestimmung von J_r und J_d hat man somit noch die Werthe von M und M', oder vielmehr, da offenbar

$$M + M' = 1 \tag{11}$$

ist, nur den Werth von

$$M = (1-r^2)^2 \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \frac{d\zeta}{(1-r^2)^2+4r^2\sin^2\zeta}$$

zu ermitteln. Das hier zu berechnende Integral kann auf die Form

$$\int\limits^{\bullet} \frac{d\zeta}{a^2\sin^2\zeta + b^2\cos^2\zeta},$$

gebracht werden, und dieses lässt sich leicht unbestimmt ausführen: Durch die Substitution

$$\operatorname{tg}\xi = \frac{a}{b}\operatorname{tg}\zeta, \quad \frac{d\xi}{\cos^2\xi} = \frac{a}{b}\frac{d\zeta}{\cos^2\zeta}$$

geht dasselbe nämlich über in

$$\frac{1}{ab}\int\limits^{\bullet} \frac{d\xi}{\cos^2\xi}\,\frac{1}{\operatorname{tg}^2\xi+1} = \frac{\xi}{ab}.$$

Für das in M auftretende bestimmte Integral ergiebt sich hiernach der Werth

$$\int\limits_0^\pi \frac{d\zeta}{(1-r^2)^2+4r^2\sin^2\zeta} = \frac{\pi}{1-r^4};$$

man erhält somit für die Intensität des durchgelassenen und des reflectirten Lichtes die Ausdrücke

$$\begin{aligned} J_d &= J_e\frac{1-r^2}{1+r^2} \\ J_r &= J_e\frac{2r^2}{1+r^2}. \end{aligned} \tag{12}$$

Genau dieselben Werthe für J_d und J_r finden wir aber, wenn wir die Intensitäten der einzelnen durchgelassenen oder reflectirten Strahlen addiren, wenn wir also gar keine Interferenz derselben annehmen. In der That, sei a wieder die Amplitude einer einfallenden homogenen Lichtmenge, so sind

$$a\,d\,d', \quad a\,d\,d'r'^2, \quad a\,d\,d'r'^4, \quad \cdots\cdots$$

die Amplituden, ihre Quadrate also die Intensitäten der durchgelassenen Wellen. Dann ist ihre Summe

$$(a\,d\,d')^2 \frac{1}{1-r'^4} = a^2 \frac{(1-r^2)^2}{1-r^4} = a^2 \frac{1-r^2}{1+r^2},$$

da nach (3 c)

$$d\,d' = 1 - r^2, \quad r' = -r$$

ist. Es ergiebt sich also für die Gesammtintensität J_d auf diesem Wege

$$J_d = \sum a^2 \frac{1-r^2}{1+r^2} = J_e \frac{1-r^2}{1+r^2} \quad \text{und} \quad J_r = J_e - J_d = J_e \frac{2r^2}{1+r^2},$$

d. h. man erhält genau dieselben Werthe, wie vorher bei Berücksichtigung der Interferenz. Wir können daraus schliessen, dass bei nicht ganz homogenem Lichte zusammenfallende Strahlen von grossen Wegedifferenzen eine Intensität ergeben, die der Summe ihrer Intensitäten gleich ist, dass solche Strahlen also nicht interferiren.

§ 4.

Den im vorigen Paragraphen abgeleiteten Satz wollen wir nun benutzen, um die Intensität des Lichtes zu finden, welches von einem System von n Platten durchgelassen oder reflectirt wird, deren Dicken und Abstände gross gegen die Wellenlänge sind. Wir wollen diese Intensitäten unter der Voraussetzung, dass diejenige des einfallenden Lichtes gleich Eins ist, D_n und R_n nennen, und suchen dann R_{n+1} und D_{n+1} aus R_n, D_n, R_1 und D_1 zu berechnen, von welchen vier Grössen die beiden letzten in No. (12) des vorigen Paragraphen bereits gefunden sind.

Ein jeder der von den $n+1$ Platten reflectirten Strahlen setzt sich dann, ausser dem von den n ersten Platten zurückgeworfenen, aus allen denjenigen Strahlen zusammen, welche durch diese hindurchgegangen sind und dann an der letzten und vorletzten Platte 1, 2, . . . Reflexionen erlitten haben. Berücksichtigen wir also, dass diese Strahlen unter den oben gemachten Voraussetzungen nicht interferiren, dass also die gesuchte Intensität R_{n+1} gleich der Summe der Intensitäten der einzelnen Strahlen ist, so ergiebt sich

$$\begin{aligned} R_{n+1} &= R_n + D_n^2 R_1 \left(1 + R_1 R_n + (R_1 R_n)^2 + \cdots\right) \\ &= R_n + \frac{D_n^2 R_1}{1 - R_n R_1}, \end{aligned} \tag{13}$$

und durch eine ganz ähnliche Ueberlegung erhält man

$$\begin{aligned} D_{n+1} &= D_n D_1 \left(1 + R_1 R_n + (R_1 R_n)^2 + \cdots\right) \\ &= \frac{D_n D_1}{1 - R_n R_1}. \end{aligned} \tag{13a}$$

Mit Hülfe dieser beiden Gleichungen kann man jetzt R_n und D_n auch durch die vorher berechneten Grössen R_1, D_1 allein ausdrücken. Offenbar müssen nämlich die Ausdrücke für R_{n+1} und D_{n+1} ungeändert bleiben, wenn man die Indices 1 und n vertauscht, denn statt die einzelne Platte hinter das System von n Platten zu setzen, kann man sie auch vor dasselbe bringen; es ist daher

$$R_{n+1} = R_n + \frac{D_n^2 R_1}{1 - R_1 R_n} = R_1 + \frac{D_1^2 R_n}{1 - R_1 R_n}, \tag{14}$$

multiplicirt man diese Relation mit $\dfrac{1 - R_1 R_n}{R_1 R_n}$, so geht sie über in

$$R_n + \frac{1 - D_n^2}{R_n} = R_1 + \frac{1 - D_1^2}{R_1}; \tag{14a}$$

die rechte Seite der letzten Gleichung ist aber $= 2$, weil nach (12)

$$R_1 + D_1 = 1$$

ist, also verwandelt sich die Gleichung (14a) in

$$(R_n + D_n - 1)(R_n - D_n - 1) = 0,$$

und da R_n und D_n positive echte Brüche sind, so ergiebt sich die für jeden Werth von n gültige Gleichung

$$R_n + D_n = 1, \tag{14b}$$

aus welcher sich R_n unmittelbar ergiebt, sobald D_n gefunden ist.

Wir haben somit nur nöthig D_{n+1} zu berechnen, und die dafür gefundene Gleichung (13a) können wir jetzt schreiben

$$D_{n+1} = \frac{D_1 D_n}{D_1 + R_1 D_n},$$

oder

$$\frac{1}{D_{n+1}} = \frac{1}{D_n} + \frac{R_1}{D_1}.$$

Aus dieser Recursionsformel erhält man unmittelbar

$$\frac{1}{D_n} = C + n \frac{R_1}{D_1},$$

wo C eine Constante ist, und ihr Werth ergiebt sich gleich Eins, wenn man in dieser für jedes ganzzahlige n gültigen Gleichung $n = 1$ setzt; es ist also

$$\frac{1}{D_n} = 1 + n \frac{R_1}{D_1},$$

$$D_n = \frac{D_1}{D_1 + n R_1},$$

oder da nach (12)

$$D_1 = \frac{1 - r^2}{1 + r^2} \qquad R_1 = \frac{2 r^2}{1 + r^2}$$

ist, so erhält man für die Intensität des durch n Platten hindurchgegangenen Lichtes den folgenden Ausdruck

$$D_n = \frac{1 - r^2}{1 + (2n - 1) r^2}; \tag{15}$$

und wegen (14b) wird die Intensität des reflectirten Lichtes

$$R_n = \frac{2 n r^2}{1 + (2n - 1) r^2}. \tag{15a}$$

Diese Formeln sind zuerst von *Neumann* abgeleitet worden. *Stokes**) hat sie verallgemeinert, indem er auf die *Absorption* des Lichtes in den Platten Rücksicht nahm. Auf dem folgenden Wege gelangt man wohl am einfachsten zu den Stokes'schen Formeln. Die Gleichungen (14) und (14a) bleiben offenbar bestehen, auch wenn $R_1 + D_1$ nicht gleich Eins ist, wenn also die Absorption berücksichtigt wird, und aus der letzten findet man unmittelbar D_n, wenn R_n bekannt ist. R_n selbst aber ergiebt sich mit Hülfe der aus (14) hervorgehenden Differenzengleichung

$$R_{n+1} = R_1 + \frac{D_1^2 R_n}{1 - R_1 R_n} = \frac{R_1 + (D_1^2 - R_1^2) R_n}{1 - R_1 R_n},$$

die man auf die Form

$$R_{n+1} = \frac{\alpha + \beta R_n}{\gamma + \delta R_n}$$

bringen kann, wo die Coefficienten von n unabhängig sind. Setzt man hier $R_n = x_n$, so sind also allgemein x_n und x_{n+1} durch eine Gleichung

$$x_{n+1} = \frac{\alpha + \beta x_n}{\gamma + \delta x_n} \tag{16}$$

verbunden, in der α, β, γ, δ gegebene Constanten bedeuten.

Um nun die Grössen x_n unmittelbar durch x_1 auszudrücken, führen wir an ihrer Stelle neue Unbekannte z_n ein durch die Gleichungen

$$z_n = \frac{1 + A x_n}{1 + B x_n}, \tag{16a}$$

wo A und B Constante bedeuten, welche so bestimmt werden sollen, dass für alle Werthe von n

$$z_{n+1} = M z_n \tag{16b}$$

ist. Dieser Forderung kann im Allgemeinen stets genügt werden. Drückt man nämlich in der letzten Gleichung z_n und z_{n+1} durch x_n und x_{n+1} aus, so erhält man

$$\frac{1 + A x_{n+1}}{1 + B x_{n+1}} = M \frac{1 + A x_n}{1 + B x_n},$$

und wenn man nun für x_{n+1} seinen Werth aus (16) setzt, so ergiebt sich die folgende Relation

$$\frac{\gamma + \delta x_n + A(\alpha + \beta x_n)}{\gamma + \delta x_n + B(\alpha + \beta x_n)} = M \frac{1 + A x_n}{1 + B x_n}, \tag{17}$$

welche für jeden Werth von x_n bestehen muss; aus ihr kann man nun leicht drei andere Gleichungen herleiten, welche die Constanten A, B, M bestimmen. Legt man nämlich x_n zunächst die Werthe

$$-\frac{1}{A}, \quad -\frac{1}{B},$$

bei, so erhält man die folgenden beiden Gleichungen

*) Philosophical Magazine 1862 (4.) Bd. 24. p. 480.

$$\gamma - \frac{\delta}{A} + A\alpha - \beta = 0,$$

$$\gamma - \frac{\delta}{B} + B\alpha - \beta = 0,$$

A und B sind also die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$\alpha\lambda^2 - (\beta - \gamma)\lambda - \delta = 0. \tag{17a}$$

Sind hiernach A und B bestimmt, so ergiebt sich für M, wenn man in (17) $x_n = 0$ setzt, der Ausdruck

$$M = \frac{\gamma + A\alpha}{\gamma + B\alpha}, \tag{17b}$$

und man erkennt leicht, dass durch die so bestimmten Werthe der Constanten A, B, M die Gleichung (17) in der That zu einer identischen gemacht wird. Dann ergiebt sich aber für z_n

$$z_n = M^{n-1} z_1; \tag{18}$$

berücksichtigt man nun, dass durch x_1 und die Substitutionscoefficienten α, β, γ, δ, die Hülfsgrösse z_1, und dass durch z_n wiederum x_n oder R_n bestimmt ist, so ist die gestellte Aufgabe gelöst.

Die angegebene Methode würde dann und nur dann nicht zum Ziele führen, wenn $A = B$ wäre, wenn also die quadratische Gleichung (17a) gleiche Wurzeln besässe. Die Bedingung dafür

$$4\alpha\delta + (\beta - \gamma)^2 = 0 \tag{18a}$$

lässt sich aber, wenn man für die Substitutionscoefficienten ihre Werthe setzt, leicht auf die Form bringen

$$(1 - R_1 - D_1)(1 - R_1 + D_1)(1 + R_1 - D_1)(1 + R_1 + D_1) = 0,$$

und da R_1 und D_1 positive echte Brüche sind, erkennt man, dass diese Gleichung nur bestehen kann, falls

$$R_1 + D_1 = 1$$

ist, wenn also keine Absorption stattfindet; dieser Fall ist aber durch die im Anfang dieses Paragraphen durchgeführte Untersuchung bereits erledigt. In allen anderen Fällen hat ein jeder der vier Factoren der Discriminante (18a), also auch diese selbst, einen *positiven* Werth, man erhält mithin für A, B und M stets *reelle* Zahlen, welche die gestellte Aufgabe wirklich lösen.

§ 5.

Kehren wir nun zu den *Neumann*'schen *Formeln* (15) und (15a) zurück, welche sich auf vollkommen durchsichtige Platten beziehen, und unterscheiden wir jetzt die beiden Fälle, dass das Licht parallel oder senkrecht zur Einfallsebene polarisirt ist. Es seien

$$R_{np},\ D_{np} \qquad \text{und} \qquad R_{ns},\ D_{ns}$$

die Werthe, welche R_n und D_n in diesen beiden Hauptfällen besitzen, dann ist

$$\begin{aligned} R_{np} &= \frac{2nr_p^2}{1+(2n-1)r_p^2}, & R_{ns} &= \frac{2nr_s^2}{1+(2n-1)r_s^2}, \\ D_{np} &= \frac{1-r_p^2}{1+(2n-1)r_p^2}, & D_{ns} &= \frac{1-r_s^2}{1+(2n-1)r_s^2}, \end{aligned} \tag{19}$$

wo nach (17) der vorigen Vorlesung

$$r_p = \frac{\sin(\varphi-\varphi')}{\sin(\varphi+\varphi')} \qquad r_s = \frac{\operatorname{tg}(\varphi-\varphi')}{\operatorname{tg}(\varphi+\varphi')}$$

ist.

Ist das einfallende Licht im Azimuth α polarisirt, so sind $\sin^2\alpha$ und $\cos^2\alpha$ die Intensitäten der Componenten des senkrecht und parallel zur Einfallsebene schwingenden einfallenden Lichtes, und daher

$$\begin{aligned} J_{rp} &= R_{np}\cos^2\alpha, & J_{rs} &= R_{ns}\sin^2\alpha, \\ J_{dp} &= D_{np}\cos^2\alpha, & J_{ds} &= D_{ns}\sin^2\alpha \end{aligned} \tag{20}$$

die Intensitäten der entsprechenden Componenten der reflectirten und durchgegangenen Wellen. Da keine Interferenz stattfindet, so ist die Intensität des gesammten reflectirten und gebrochenen Lichtes gleich den Summen der entsprechenden Componenten, also beziehlich gleich

$$R_{ns}\sin^2\alpha + R_{np}\cos^2\alpha \quad \text{und} \quad D_{ns}\sin^2\alpha + D_{np}\cos^2\alpha. \tag{21}$$

Da ferner an den Oberflächen eine Verzögerung nicht eintritt, so ist das resultirende reflectirte und gebrochene Licht ebenfalls geradlinig polarisirt; sind β und γ ihre Polarisationsazimuthe, so ist

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\beta &= \sqrt{\frac{J_{rs}}{J_{rp}}} = \operatorname{tg}\alpha\sqrt{\frac{R_{ns}}{R_{np}}} \\ \operatorname{tg}\gamma &= \sqrt{\frac{J_{ds}}{J_{dp}}} = \operatorname{tg}\alpha\sqrt{\frac{D_{ns}}{D_{np}}}. \end{aligned} \tag{22}$$

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich, dass bei der Reflexion und Brechung an einem System von Platten im Allgemeinen eine Drehung der Polarisationsebene stattfindet, welche bei mehreren Platten grösser ist als bei einer.

Ist das einfallende Licht *natürliches*, α also variabel, so ergeben sich für die Intensitäten des reflectirten und gebrochenen Lichtes, wenn man die Mittelwerthe nimmt, die Ausdrücke

$$\begin{aligned} J_r &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(R_{ns}\sin^2\alpha + R_{np}\cos^2\alpha)\,d\alpha = \frac{R_{ns}+R_{np}}{2} \\ J_d &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(D_{ns}\sin^2\alpha + D_{np}\cos^2\alpha)\,d\alpha = \frac{D_{ns}+D_{np}}{2}, \end{aligned} \tag{23}$$

d. h. man erhält dieselben Intensitäten, als wenn man im Azimuth $\frac{\pi}{4}$ geradlinig polarisirtes Licht hätte auffallen lassen.

Ein besonderes Interesse hat nun zunächst der Fall, dass der Einfallswinkel φ gleich dem Polarisationswinkel, dass also $\varphi + \varphi' = \frac{\pi}{2}$ ist. Dann ist $r_s = 0$, also

$$R_{ns} = 0, \quad D_{ns} = 1.$$

Hieraus folgt mit Hülfe von (22), dass alsdann für beliebig polarisirtes Licht $\beta = 0$, dass also das reflectirte Licht ganz in der Einfallsebene polarisirt ist. Man wendet daher Glassätze an, um polarisirtes Licht zu erzeugen, denn unsere Formeln zeigen, dass hier die Intensität der reflectirten Wellen grösser ist als bei nur einer Platte. Das durchgelassene Licht ist nur zum Theil polarisirt, da zwar D_{ns} gleich Eins ist, D_{np} aber variirt.

Ist die Anzahl n der Platten so gross, dass sie als unendlich anzusehen ist, so ist im Allgemeinen

$$D_{np} = D_{ns} = 0, \qquad R_{np} = R_{ns} = 1.$$

Es wird dann also alles Licht reflectirt und nichts hindurchgelassen, welches auch der Polarisationszustand des einfallenden Lichtes sein möge, im Allgemeinen ist also ein Glassatz mit sehr vielen Platten undurchsichtig.

Eine Ausnahme findet nur statt, wenn der Einfallswinkel dem Polarisationswinkel gleich ist, oder doch von ihm nur um eine Grösse abweicht, die mit $\sqrt{n}$ multiplicirt unendlich klein ist. Dann ist nämlich

$$n r_s^2 = 0,$$

also

$$R_{ns} = 0, \qquad D_{ns} = 1$$
$$R_{np} = 1, \qquad D_{np} = 0.$$

Es ist daher $\beta = 0$, $\gamma = \frac{\pi}{2}$; das reflectirte Licht ist mithin nur *in* der Einfallsebene, das durchgelassene *senkrecht* zu ihr polarisirt. Die Intensitäten sind $\cos^2 \alpha$ und $\sin^2 \alpha$, sie sind also einander gleich, entweder falls $\alpha = \frac{\pi}{4}$, oder falls das einfallende Licht natürliches ist.

Zehnte Vorlesung.

Theorie der Absorption und Dispersion. — Die Helmholtz'schen Grundhypothesen. — Differentialgleichungen der Lichtbewegung in einem isotropen absorbirenden Medium. — Aufstellung von Particularlösungen, welche dem Falle ebener Lichtwellen entsprechen. — Grenzbedingungen für eine ebene Grenzfläche und ebene einfallende Lichtwellen. — Abhängigkeit des Absorptionscoefficienten von der Farbe des einfallenden Lichtes. Absorptionsstreifen. — Anomale Dispersion. Normale Dispersion. — Abhängigkeit des Brechungsverhältnisses vom Einfallswinkel. — Ausdehnung der Theorie auf den Fall mehrerer Absorptionsstreifen. —

Reflexion an Metallen. Cauchy's Hypothese. — Bestimmung der Amplitude und der Phasenänderung des reflectirten Lichtes, wenn das einfallende parallel oder senkrecht zur Einfallsebene polarisirt ist. — Bestimmung des Haupteinfallswinkels und des Hauptazimuth.

§ 1.

Nach unseren bisherigen Betrachtungen sollten sich in jedem Körper die verschiedenfarbigen Lichtstrahlen mit *derselben* Geschwindigkeit fortpflanzen, und ebene Lichtwellen ohne Schwächung der Intensität fortschreiten. Beides ist im Allgemeinen nicht der Fall; darauf, dass die Geschwindigkeit der Lichtstrahlen in demselben Mittel eine verschiedene ist, beruht die sogenannte *Dispersion*, d. h. die Thatsache, dass die verschiedenfarbigen Strahlen verschieden gebrochen werden; die Erscheinungen, die mit der Abnahme der Intensität ebener Lichtwellen zusammenhängen, heissen die der *Absorption*. Dispersion und Absorption haben ohne Zweifel ihren Grund in der Einwirkung, welche die wägbaren Molecüle des Körpers auf die Bewegung der Aethertheilchen bei den Lichtschwingungen ausüben, eine Einwirkung welche wir bisher noch nicht in Betracht gezogen haben.

Im leeren Raum ist die Geschwindigkeit aller Lichtarten dieselbe, in den Körpern der Regel nach, z. B. im Glase, für Roth grösser als für Violett, und zwar nimmt sie stetig mit der Schwingungsdauer ab. Da in diesen Körpern alle Lichtstrahlen langsamer als im leeren Raume fortgehen, so folgt hieraus, dass der Regel nach mit abnehmender Schwingungsdauer die Brechung zunimmt. Aber es giebt Ausnahmen von dieser Regel: Es existiren Körper, welche, wie man sagt, eine *anomale* Dispersion zeigen. Es wurde diese von *Christiansen* im Jahre 1870 bei einer Lösung von *Fuchsin*, einem rothen Anilinfarbstoffe, entdeckt, und gleich darauf fand sie *Kundt* bei einer grossen Zahl von ähnlichen Körpern. Das Fuchsin, um dieses als Beispiel zu wählen, ist auch in dünner Schicht für grünes Licht fast vollständig undurchsichtig, während es von allen anderen Farben noch einen erheblichen Theil hindurchlässt. Entwirft man daher mit Hülfe eines Fuchsinprismas, das aber einen sehr spitzen Winkel haben muss, damit eine hinreichende Lichtmenge hindurchgeht, ein Spectrum, so wird das Grün in diesem fehlen. Verhielte sich nun das Fuchsin in Bezug auf die Dispersion normal, so müsste das Spectrum an seinem wenigst abgelenkten Ende Roth zeigen, hierauf müsste Gelb kommen, dann ein dunkler Raum, weiterhin Blau, endlich Violett. Dem ist aber nicht so: Die beiden übrig gebliebenen Theile des Spectrums sind vielmehr gegen einander vertauscht; das am wenigsten abgelenkte Ende ist blau, dann kommt Violett, ein dunkler Raum, Roth, endlich Gelb, welches die grösste Ablenkung erfahren hat.

Die Erscheinungen der anomalen Dispersion haben vorzugsweise zu denjenigen Vorstellungen geführt, die sich die Physiker jetzt über die Einwirkung der ponderablen Molecüle auf die Aethertheilchen bei der Lichtbewegung gebildet haben. Bei der Entwicklung dieser Vorstellungen wollen wir uns auf eine Mittheilung stützen, die *Herr von Helmholtz* im October 1874 der Berliner Akademie gemacht hat.

§ 2.

Wieder bezeichnen wir durch u, v, w die Verrückungscomponenten *des* Aethertheilchens zur Zeit t, dessen Gleichgewichtslage die Coordinaten x, y, z hat. Fände eine Einwirkung der wägbaren Molecüle auf den Aether nicht statt, so hätten wir wieder die Gleichungen (1) der achten Vorlesung, die die Grundlage unserer bisherigen Betrachtungen gewesen sind

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = K \Delta u,$$
$$\mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = K \Delta v,$$
$$\mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = K \Delta w,$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Auf den rechten Seiten der drei ersten Gleichungen müssen wir nun die Kräfte hinzufügen, welche die wägbaren Molecüle auf das Aethertheilchen ausüben. Um diese bequem ausdrücken zu können, wollen wir in die Rechnung statt der discreten Molecüle stetig verbreitete Materie einführen, welche den gleichfalls stetig gedachten Aether durchdringt und relativ zu diesem sich verschieben kann. Eine solche Annahme wird erlaubt sein, wenn die Entfernungen der ponderablen Theile verschwindend klein gegen die Wellenlängen sind. u_1, v_1, w_1 seien die Verrückungscomponenten zur Zeit t *des* Punktes der wägbaren Masse, dessen Gleichgewichtslage die Coordinaten x, y, z besitzt. Dieser Punkt und das Aethertheilchen, welches dieselbe Gleichgewichtslage hat, befinden sich dann zur Zeit t in einem Abstande von einander, dessen Componenten $u_1 - u$, $v_1 - v$, $w_1 - w$ sind. Wir nehmen an, dass das Aethertheilchen und der Massenpunkt eine *Anziehung* auf einander ausüben, die mit diesem Abstande proportional ist. Danach werden die Differentialgleichungen für die Bewegung des Aethers

$$
\begin{aligned}
\mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= K\Delta u + P_1(u_1 - u) \\
\mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= K\Delta v + P_1(v_1 - v) \\
\mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= K\Delta w + P_1(w_1 - w) \\
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &+ \frac{\partial w}{\partial z} = 0.
\end{aligned} \tag{1}
$$

Um aus ihnen Schlüsse ziehen zu können, müssen aber auch für die Verrückungscomponenten u_1, v_1, w_1 Gleichungen aufgestellt werden. Es hängen diese von den Kräften ab, welche auf den betreffenden wägbaren Punkt wirken. Zu ihnen gehört nach der soeben gemachten Annahme nothwendig zunächst eine Kraft, deren Componenten

$$P_1(u - u_1), \quad P_1(v - v_1), \quad P_1(w - w_1)$$

sind; ferner führt Herr von Helmholtz eine Reibungskraft ein, deren Componenten

$$- R_1 \frac{\partial u_1}{\partial t}, \quad - R_1 \frac{\partial v_1}{\partial t}, \quad - R_1 \frac{\partial w_1}{\partial t}$$

sind; endlich nimmt er eine Kraft an, die den Punkt nach seiner Gleichgewichtslage zurücktreibt und der Verrückung aus dieser proportional ist, also die Componenten

$$- H_1 u_1, \quad - H_1 v_1, \quad - H_1 w_1$$

hat. Danach hat man, wenn μ_1 die Dichtigkeit der wägbaren Materie bedeutet

$$
\begin{aligned}
\mu_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} &= - H_1 u_1 - R_1 \frac{\partial u_1}{\partial t} + P_1(u - u_1) \\
\mu_1 \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} &= - H_1 v_1 - R_1 \frac{\partial v_1}{\partial t} + P_1(v - v_1) \\
\mu_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} &= - H_1 w_1 - R_1 \frac{\partial w_1}{\partial t} + P_1(w - w_1).
\end{aligned} \tag{1a}
$$

Wir suchen eine particuläre Lösung dieser Gleichungen, die homogenem Lichte entspricht; die Dauer einer Periode sei

$$T = \frac{2\pi}{n},$$

dann bedeutet n die *Schwingungszahl* dieses Lichtes; durch seinen Werth ist die Farbe desselben bestimmt.

Den Differentialgleichungen (1) und (1a) kann man nun genügen, wenn man die Componenten u, v, w und u_1, v_1, w_1 gleich Constanten multiplicirt mit der Exponentialfunction

$$\sigma = e^{l(x \sin\varphi + z \cos\varphi) - int}, \tag{2}$$

setzt, wo, wie gewöhnlich

$$i = \sqrt{-1}$$

ist. Diese Constanten sind indessen nicht von einander unabhängig: Setzt man nämlich

$$\begin{aligned} u &= A\sigma, \quad v = B\sigma, \quad w = C\sigma \\ u_1 &= A_1\sigma, \quad v_1 = B_1\sigma, \quad w_1 = C_1\sigma, \end{aligned} \tag{2a}$$

so ergeben sich für sie aus (1) und (1a) die Bedingungsgleichungen

$$\begin{aligned} &A(\mu n^2 + Kl^2 - P_1) + A_1 P_1 = 0 \\ &AP_1 + A_1(\mu_1 n^2 - H_1 - P_1 + iR_1 n) = 0, \end{aligned} \tag{3}$$

sowie diejenigen, welche aus ihnen entstehen, wenn man für A, A_1 setzt B, B_1 oder C, C_1, endlich

$$A \sin\varphi + C \cos\varphi = 0. \tag{3a}$$

Die Gleichungen (3) können dann und nur dann durch nicht verschwindende Werthe von AA_1, BB_1, CC_1 befriedigt werden, wenn l der quadratischen Gleichung

$$(Kl^2 + \mu n^2 - P_1)(\mu_1 n^2 - H_1 - P_1 + inR_1) - P_1^2 = 0 \tag{4}$$

genügt, und unter dieser Voraussetzung lassen jene Relationen sich einfacher folgendermassen schreiben

$$\frac{A_1}{A} = \frac{B_1}{B} = \frac{C_1}{C} = -\frac{Kl^2 + \mu n^2 - P_1}{P_1}. \tag{4a}$$

Es bleiben somit A, B und φ, ebenso wie n, willkürlich, während die übrigen eingeführten Constanten durch die Gleichungen (3a), (4) und (4a) bestimmt werden. Die so sich ergebenden Werthe von u, v, w, u_1, v_1, w_1 sind im Allgemeinen complex; aber man erhält aus ihnen eine reelle Lösung der Differentialgleichungen, wenn man die *reellen Theile* dieser Ausdrücke jenen Verrückungscomponenten gleichsetzt; in der That müssen jene den Gleichungen genügen, da diese linear sind und nur reelle Coefficienten enthalten.

Auf solche Weise lässt sich eine Lösung unserer Gleichungen bilden, die dem Falle entspricht, dass das betrachtete Mittel auf der Seite der positiven z liegt, in der Ebene $z = 0$ an den leeren Raum grenzt, und in diesem ebene Lichtwellen auf dasselbe fallen. Wenden wir für diese auffallenden Wellen überall gestrichene Buchstaben an, so können wir setzen

$$u' = A'\sigma', \quad v' = B'\sigma', \quad w' = C'\sigma',$$

wo jetzt

$$\sigma' = e^{(x \sin\varphi' + z \cos\varphi' - t) i n}, \tag{5}$$

und

$$A' \sin\varphi' + C' \cos\varphi' = 0$$

ist, indem wir auch hier nur die *reellen Theile* von u', v', w' die Verrückungen bedeuten lassen. Vergleicht man nämlich die so sich ergebenden Ausdrücke für die Verrückungscomponenten mit den in (3) der achten Vorlesung angegebenen, so erkennt man, dass durch sie ebene Wellen homogenen Lichtes dargestellt werden, welche sich mit der Geschwindigkeit Eins im leeren Raume fortpflanzen, deren Farbe durch den Werth von $n = \frac{2\pi}{T}$ bestimmt ist und welche unter dem Einfallswinkel φ' die Begrenzungsfläche treffen.

Für $z = 0$ sind gewisse Grenzbedingungen zu erfüllen. Welches diese auch sein mögen, jedenfalls sind es lineare Gleichungen zwischen den Verrückungen und ihren Differentialquotienten, die für alle Werthe von t und von x erfüllt sein müssen. Vergleicht man aber die Ausdrücke für die Verrückungscomponenten in (2) und (5) mit einander, so erkennt man, dass die letzte Forderung nicht erfüllt werden kann, wenn nicht

$$in \sin\varphi' = l \sin\varphi \tag{6}$$

ist. Ist l bekannt, so ist hieraus $\sin\varphi$ eindeutig bestimmt, und damit auch $\cos\varphi$ bis auf das Vorzeichen; dieses ergiebt sich durch die Ueberlegung, dass für den erfüllten Raum $z = +\infty$ sein kann, dass aber auch in diesem Fall u, v, w nicht unendlich gross werden dürfen. Dazu ist nämlich nothwendig und hinreichend, dass *der* Werth von φ gewählt wird, für welchen

der reelle Theil von $l \cos\varphi$ negativ ist. (6a)

Was l anbetrifft, so ist dasselbe durch die quadratische Gleichung (4) ebenfalls nur bis auf das Vorzeichen bestimmt; wir wollen nun

$$l = -k + i\frac{n}{c}, \tag{7}$$

setzen und von den beiden möglichen Werthen von l denjenigen wählen, für welchen k positiv ist. Dann haben k und c eine einfache Bedeutung. Um dieselbe zu erkennen, wenden wir unsere Gleichung auf den Fall an, dass der Einfallswinkel φ' gleich Null ist. Es wird dann $\sin\varphi = 0$ und wegen (6a) und (7) $\cos\varphi = +1$, der Ausdruck von σ wird daher

$$\sigma = e^{-kz + in\left(\frac{z}{c} - t\right)}$$

$$= e^{-kz}\left(\cos n\left(\frac{z}{c} - t\right) + i \sin n\left(\frac{z}{c} - t\right)\right).$$

Nach (2a) erhalten also die Componenten u, v, w die Form

$$\varrho e^{-kz} \sin\left(\frac{z}{c} - t + \delta\right).$$

Wir haben hiernach in unserem Mittel ebene Wellen, welche mit der Geschwindigkeit c in der Richtung der positiven z-Achse fortschreiten, die sich aber von den Wellen in einem durchsichtigen Medium dadurch unterscheiden, dass ihre Amplitude proportional mit e^{-kz} abnimmt; man nennt daher k den *Absorptionscoefficienten* der Substanz.

Wäre unser Mittel ein durchsichtiges, d. h. $k = 0$, so wäre $\frac{1}{c}$ das Brechungsverhältniss desselben, das nach (6) in bekannter Weise für einen beliebigen Einfallswinkel φ' die Ablenkung der Strahlen beim Eintritt in das Mittel bestimmen würde. Ist aber k von Null verschieden, so gilt das *Snellius'sche Gesetz*, wie im § 4 gezeigt werden wird, nicht mehr streng, da das Brechungsverhältniss dann nicht constant ist, sondern vom Einfallswinkel φ' abhängt. Besitzt jedoch k nur einen kleinen Werth, wie dies bei der anomalen Dispersion thatsächlich der Fall ist, so ist der Einfluss des Einfallswinkels gering, und wir können von ihm absehen. Wir brauchen daher nur zu untersuchen, in welcher Weise $\frac{1}{c}$ sich mit n verändert, um ein Urtheil darüber zu gewinnen, wie das Spectrum beschaffen ist, welches ein aus der Substanz gebildetes Prisma von einer weissen Lichtlinie erzeugt. Dabei wird sich dann zugleich die Abhängigkeit des Absorptionscoefficienten k von n ergeben, und diese wird zeigen, wie ein gewöhnliches, etwa durch ein Glasprisma erzeugtes Spectrum durch eine den Strahlen in den Weg gestellte Platte der Substanz verändert wird.

§ 3.

Aus den Gleichungen (4) und (7) ergiebt sich für k und c die Bestimmungsgleichung

$$l^2 = \left(-k + i\frac{n}{c}\right)^2 = \frac{1}{K}\left(-\mu n^2 + P_1 + \frac{P_1^2}{\mu_1 n^2 - H_1 - P_1 + inR_1}\right),$$

und diese zerfällt, wenn man das Reelle vom Imaginären trennt, in die beiden anderen

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{c^2} - \frac{k^2}{n^2} &= \frac{1}{K}\left\{\mu - \frac{P_1}{n^2} - \frac{P_1^2}{n^2}\,\frac{\mu_1 n^2 - H_1 - P_1}{(\mu_1 n^2 - H_1 - P_1)^2 + n^2 R_1^2}\right\} = F \\ 2\,\frac{1}{c}\,\frac{k}{n} &= \frac{1}{K}\,\frac{P_1^2 R_1}{n}\,\frac{1}{(\mu_1 n^2 - H_1 - P_1)^2 + n^2 R_1^2} = G, \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

von denen die letzte zeigt, dass c positiv sein muss.

Aus diesen beiden Gleichungen folgt zunächst

$$\frac{1}{c^2} + \frac{k^2}{n^2} = \sqrt{F^2 + G^2},$$

wo die Quadratwurzel positiv zu nehmen ist, es ergeben sich somit für c und k die Ausdrücke

$$\begin{aligned}\frac{1}{c^2} &= \frac{1}{2}\sqrt{F^2 + G^2} + \frac{1}{2}F\\ \frac{k^2}{n^2} &= \frac{1}{2}\sqrt{F^2 + G^2} - \frac{1}{2}F.\end{aligned} \tag{8a}$$

Die Discussion dieser Gleichungen in ihrer Allgemeinheit ist sehr beschwerlich; wir wollen daher über die Grössenordnung der in ihnen auftretenden Coefficienten eine Annahme machen, die diese erleichtert und doch die Erscheinungen in ihren Grundzügen darzustellen gestattet. Wir denken uns die Maasseinheiten so gewählt, dass für die sichtbaren Strahlen n ebenso wie μ und K Zahlen von mässiger Grösse sind, und nehmen an, dass μ_1, H_1, P_1 sehr klein gegen μ sind, während R_1 sehr klein gegen jene, aber noch gross gegen ihr Quadrat ist, dass also etwa

n, μ, K endliche Grössen,
μ_1, H_1, P_1 unendlich klein erster Ordnung sind, während
R_1 etwa unendlich klein von der Ordnung $^3/_2$ ist.

Die befremdende Annahme, dass die Masse μ_1 der Materie als unendlich klein gegen diejenige des Aethers angenommen werden soll, können wir dadurch vermeiden, dass wir μ_1 auffassen als die Dichtigkeit einer *Aethermasse*, die an den ponderablen Molecülen haftet und durch die Lichtwelle zum Mitschwingen veranlasst wird.

Bei diesen Voraussetzungen sind die Variationen von F bei verändertem n, sowie auch der Werth von G klein gegen F, und es kann deshalb nach (8) und (8a) näherungsweise

$$\frac{1}{c^2} = F \qquad \frac{k^2}{n^4} = \frac{G^2}{4F} \tag{9}$$

gesetzt werden. Danach ergiebt sich für k, wenn man in F nur die endlichen Grössen berücksichtigt,

$$k = \frac{1}{2\sqrt{K\mu}} \frac{P_1^2 R_1}{(\mu_1 n^2 - H_1 - P_1)^2 + n^2 R_1^2}.$$

Es ist somit k im Allgemeinen von der Ordnung von R_1, aber für gewisse Werthe von n, nämlich wenn

$$n^2 = \frac{H_1 + P_1}{\mu_1} = \nu^2 \tag{9a}$$

ist, oder diesem Werthe sehr nahe liegt, wird der Absorptionscoefficient von einer höheren Grössenordnung: Für jenen Werth von n ist nämlich

$$k = \frac{1}{2\sqrt{K\mu}} \frac{1}{\nu^2} \frac{P_1^2}{R_1}. \tag{10}$$

In der Gegend des Spectrums, wo $n = \nu$ ist, wird also die Absorption viel stärker, als an allen anderen Stellen; in dem Spectrum einer leuchtenden Linie, deren Licht durch eine Platte aus unserer Substanz gegangen ist, erscheint daher an der durch jenen Werth von n bestimmten Stelle ein schmaler Absorptionsstreifen.

Was die Aenderungen betrifft, welche $\frac{1}{c^2}$, d. h. F erleidet, wenn n variirt, so ist in hinreichender Entfernung vom Absorptionsstreifen, d. h. von dem Werthe $n = \nu$

$$K \,.\, F = \frac{K}{c^2} = \mu - \frac{P_1}{n^2} \cdot \frac{\mu_1 n^2 - H_1}{\mu_1 n^2 - H_1 - P_1} = \mu - \frac{1}{\varrho},$$

wo (11)

$$\varrho = \frac{n^2}{P_1} - \frac{n^2}{\mu_1 n^2 - H_1}$$

ist, da man unter der gemachten Voraussetzung R_1^2 im Nenner von F in (8) fortlassen kann; mit Hülfe der aus (11) sich ergebenden Gleichung

$$K \cdot \frac{dF}{dn} = \frac{2n}{\varrho^2} \cdot \left(\frac{1}{P_1} + \frac{H_1}{(\mu_1 n^2 - H_1)^2}\right)$$

folgt dann leicht, dass die Aenderungen von $\frac{1}{c^2}$ in hinreichender Entfernung vom Absorptionsstreifen überall von der Ordnung von P_1 sind, und ferner dass $\frac{1}{c^2}$ mit n zugleich wächst.

In der Nähe des Absorptionsstreifens, d. h. für

$$n = \nu + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{also} \quad n^2 = \nu^2 + \nu \varepsilon,$$

wo ε eine hinreichend kleine Grösse bedeutet, kann in dem Ausdrucke von F das zweite Glied gegen das dritte vernachlässigt werden, und man erhält, wenn man überall nur die unendlich kleinen Grössen höchster Ordnung berücksichtigt,

$$KF = \frac{K}{c^2} = \mu - \frac{P_1^2}{\nu^2} \frac{\mu_1 n^2 - H_1 - P_1}{(\mu_1 n^2 - H_1 - P_1)^2 + \nu^2 R_1^2} = \mu - \frac{P_1^2}{\nu^3} \cdot \frac{\mu_1 \varepsilon}{\mu_1^2 \varepsilon^2 + R_1^2}$$
$$= \mu - \frac{P_1^2}{\nu^3} \cdot \frac{1}{\varrho_1},$$

wo

$$\varrho_1 = \mu_1 \varepsilon + \frac{R_1^2}{\mu_1 \varepsilon}$$

ist. Maximum und Minimum von F ergeben sich also aus der Gleichung

$$\frac{d\varrho_1}{d\varepsilon} = 0,$$

d. h. für

$$\varepsilon = \mp \frac{R_1}{\mu_1},$$

oder für

$$n^2 = \nu^2 \mp \frac{R_1}{\mu_1} \cdot \nu$$

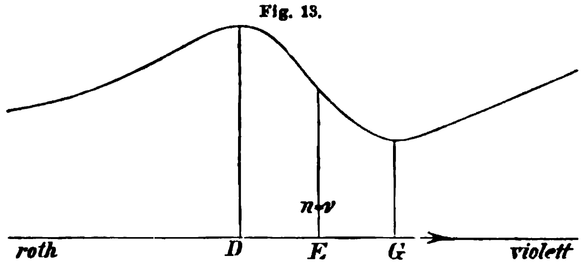
und liefern für $\frac{1}{c}$ die Werthe

$$\frac{1}{c^2} = \frac{1}{K}\left(\mu \pm \frac{1}{2\nu^3} \cdot \frac{P_1^2}{R_1}\right);$$

es entspricht somit das Maximum dem kleineren, das Minimum dem grösseren Werthe von n^2.

Es wird daher $\frac{1}{c^2}$, also auch $\frac{1}{c}$, als Function von n durch eine Curve von nachstehender Gestalt dargestellt werden

Fig. 13.



Bei Fuchsin liegt nach *Christiansen* das Maximum der Absorption etwa bei E, das Maximum des Brechungsverhältnisses (1,561) bei D, das Minimum (1,285) bei G.

Man kommt auf den Fall der *normalen* Dispersion, wenn man den Absorptionsstreifen ins Ultraviolette gehen lässt, also ν sehr gross, d. h. μ_1 sehr klein annimmt. Es gilt dann für das ganze sichtbare Spectrum die Gleichung (11). Nimmt man in ihr μ_1 sehr klein an und setzt überdies

$$H_1 = 0,$$

so kommt man zu einer gebräuchlichen und vielfach bewährten Interpolationsformel für die normale Dispersion, welche von *Cauchy* aufgestellt worden ist; man hat nämlich zunächst

$$\frac{K}{c^2} = \mu + \frac{P_1 \mu_1}{P_1 - \mu_1 n^2},$$

oder, wenn man nach aufsteigenden Potenzen von $\mu_1 n^2$ entwickelt und nur die erste berücksichtigt,

$$\frac{K}{c^2} = A + Bn^2,$$

und hieraus folgt

$$\frac{1}{c} = a + bn^2, \tag{12}$$

wo a und b von n unabhängig sind.

Unter den Körpern mit anomaler Dispersion zeigen viele *mehrere* Absorptionsmaxima. Man kann diese Erscheinung erklären, indem man statt des *einen* Systems ponderabler Molecüle, das wir bis jetzt angenommen und auf welches wir den Index 1 bezogen haben, deren *mehrere* voraussetzt; wir wollen das thun und sie durch die Indices 1, 2 ... bezeichnen. Von den Bewegungsgleichungen sind dann diejenigen, welche sich auf die x-Componenten der Verrückungen beziehen

$$\begin{aligned}
\mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= K \Delta u + P_1 (u_1 - u) + P_2 (u_2 - u) + \cdots \\
\mu_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} &= - H_1 u_1 - R_1 \frac{\partial u_1}{\partial t} + P_1 (u - u_1) \qquad (13) \\
\mu_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} &= - H_2 u_2 - R_2 \frac{\partial u_2}{\partial t} + P_2 (u - u_2) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Zu diesen Gleichungen kommen die entsprechenden für die Grössen v und w, sowie die Bedingung

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \tag{13a}$$

hinzu. Allen diesen kann man genügen, indem man jede der Verrückungscomponenten gleich einer mit σ multiplicirten Constanten setzt, wo wieder

$$\sigma = e^{l(x\sin\varphi+z\cos\varphi)-int}$$

ist; dabei ist dann l aus der Gleichung

$$Kl^2+\mu n^2-P_1-P_2-\cdots=\frac{P_1^2}{\mu_1 n^2-H_1-P_1+inR_1}+\frac{P_2^2}{\mu_2 n^2-H_2-P_2+inR_2}+\cdots \tag{14}$$

zu bestimmen.

An diese Gleichungen lassen sich ganz ähnliche Schlüsse knüpfen, wie an die vorher betrachteten einfacheren: Man findet jedem Index entsprechend ein Absorptionsmaximum; geht man im Spectrum in der Richtung von Roth zu Violett fort, so ist *vor* einem jeden dieser Streifen das Brechungsverhältniss vergrössert, *hinter* ihm verkleinert.

§ 4.

Es ist in § 2 darauf hingewiesen worden, dass die Absorption von Einfluss auf die Brechung ist; wir wollen jetzt näher darauf eingehen und zeigen, dass für den Uebergang in ein absorbirendes Mittel das Snell'sche Gesetz nicht gilt, oder dass hier das Brechungsverhältniss, d. h. das Verhältniss zwischen dem Sinus des Einfallswinkels und dem Sinus des Brechungswinkels, vom Einfallswinkel abhängig ist.

Für ebene Wellen, die in einem absorbirenden Mittel fortschreiten, können wir, wie wir es gethan haben, eine jede Verrückungscomponente gleich dem reellen Theile von $A\sigma$ setzen, wo A eine complexe Constante bedeutet,

$$\sigma = e^{l(x\sin\varphi+z\cos\varphi)-int} \tag{15}$$

ist, und wo l und φ ebenfalls complexe Grössen sind. Auf einen solchen Ausdruck wird ohne Zweifel eine jede Theorie für nicht durchsichtige Körper führen müssen. Stösst das Mittel in der Ebene $z=0$ an den leeren Raum, ist ferner in diesem die Geschwindigkeit des Lichtes gleich Eins, und fallen Wellen mit dem Einfallswinkel φ' auf unser Medium, so gelten für dieses die Gleichungen (5), und es muss

$$in\sin\varphi' = l\sin\varphi \tag{16}$$

sein; ist endlich für das absorbirende Mittel z positiv, so ist aus dem a. a. O. dargelegten Grunde das Vorzeichen von $\cos\varphi$ so zu wählen, dass

$$\textit{der reelle Theil von } l \cos\varphi \textit{ negativ ist.} \tag{16a}$$

Um nun den reellen Theil von σ zu bilden und damit ein Urtheil über die in dem absorbirenden Mittel fortschreitenden Wellen zu erhalten, setze man

$$\frac{l}{in} = b e^{i\beta}, \tag{16b}$$

wobei dann nach unserer früheren Bezeichnung

$$b \sin\beta = +\frac{k}{n}, \quad b\cos\beta = \frac{1}{c} \tag{16c}$$

ist, wo also, da k, n und c positiv sind, β im ersten Quadranten liegt. Ferner möge

$$\cos\varphi = \varrho e^{i\vartheta} = \varrho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$$

gesetzt werden; es sind dann ϱ und ϑ durch (16) und (16a) eindeutig bestimmt. Dann ist

$$\begin{aligned} l\sin\varphi &= in\sin\varphi' \\ l\cos\varphi &= in\, b\varrho\, e^{i(\beta+\vartheta)} \\ &= in\, b\varrho\left(\cos(\beta+\vartheta) + i\sin(\beta+\vartheta)\right), \end{aligned}$$

und hier muss wegen (16a) derjenige Werth von ϑ gewählt werden, für welchen $\sin(\beta+\vartheta)$ positiv ist.

Der reelle Theil von σ wird hiernach

$$e^{-znb\varrho\sin(\beta+\vartheta)}\cos n\left(x\sin\varphi' + zb\varrho\cos(\beta+\vartheta) - t\right);$$

schreiben wir denselben in der Form

$$e^{-znb\varrho\sin(\beta+\vartheta)}\cos n\left(\frac{x\sin\psi + z\cos\psi}{\gamma} - t\right),$$

wo also

$$\begin{aligned} \frac{\sin\psi}{\gamma} &= \sin\varphi' \\ \frac{\cos\psi}{\gamma} &= b\varrho\cos(\beta+\vartheta) \end{aligned} \tag{17}$$

ist, so stimmt er, abgesehen von der multiplicativen Exponentialgrösse, überein mit dem Ausdruck der Verrückungen bei Lichtwellen, die in einem durchsichtigen Mittel fortschreiten. ψ wäre dann der Brechungswinkel, γ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, und

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{\sin\varphi'}{\sin\psi}$$

das Brechungsverhältniss. Diese Namen gebraucht man auch hier. Es fallen diese Grössen mit φ, c und $\frac{1}{c}$ zusammen, wenn l rein imaginär, also $k = 0$ ist, wenn somit keine Absorption stattfindet, da alsdann

$$\sigma = e^{ni\left(\frac{x\sin\varphi + z\cos\varphi}{c} - t\right)}$$

ist und φ reell wird; sonst hängt das Brechungsverhältniss von φ' ab, wie jetzt gezeigt werden soll.

Für das Brechungsverhältniss ergiebt sich aus (17) die Gleichung

$$\frac{1}{\gamma^2} = b^2 \varrho^2 \cos^2(\beta + \vartheta) + \sin^2 \varphi'.$$

Um nun seine Abhängigkeit von dem Einfallswinkel φ' explicite darzustellen, setze man für den Augenblick

$$C = b\varrho \cos(\beta + \vartheta), \quad S = b\varrho \sin(\beta + \vartheta),$$

so dass

$$\frac{1}{\gamma^2} = C^2 + \sin^2 \varphi'$$

ist. Zur Bestimmung von C und S hat man dann die Gleichung

$$(C + iS)^2 = b^2 \varrho^2 e^{2(\beta+\vartheta)i} = b^2 e^{2\beta i}(1 - \sin^2 \varphi)$$
$$= b^2 e^{2\beta i} - \sin^2 \varphi',$$

welche, wenn man auf beiden Seiten das Reelle vom Imaginären trennt, für C und S die Bestimmungsgleichungen liefert

$$\left.\begin{aligned} C^2 - S^2 &= b^2 \cos 2\beta - \sin^2 \varphi' \\ 2CS &= b^2 \sin 2\beta; \end{aligned}\right\} \tag{17a}$$

aus ihnen ergiebt sich durch Elimination von S

$$4C^2(C^2 - b^2 \cos 2\beta + \sin^2 \varphi') = b^4 \sin^2 2\beta,$$

eine Gleichung, deren einzige positive Wurzel

$$2C^2 = b^2 \cos 2\beta - \sin^2 \varphi' + \sqrt{(b^2 \cos 2\beta - \sin^2 \varphi')^2 + b^4 \sin^2 2\beta}$$

ist. Berechnet man hieraus $\frac{2}{\gamma^2}$ und setzt zugleich nach (16b)

$$b^2 \cos 2\beta = -\frac{k^2}{n^2} + \frac{1}{c^2}, \quad b^2 \sin 2\beta = 2\frac{k}{n}\frac{1}{c^2},$$

so ergiebt sich für das gesuchte Brechungsverhältniss die folgende Gleichung

$$\frac{2}{\gamma^2} = \frac{1}{c^2} - \frac{k^2}{n^2} + \sin^2 \varphi' + \sqrt{\left(\frac{1}{c^2} - \frac{k^2}{n^2} - \sin^2 \varphi'\right)^2 + 4\frac{k^2}{n^2}\frac{1}{c^2}}. \tag{18}$$

Für $\varphi' = 0$ ist hiernach $\gamma = c$, und dasselbe gilt, wie bereits erwähnt wurde, allgemein für $k = 0$. Für die anomal dispergirenden Medien ist k noch so klein, dass selbst für beträchtliche Werthe von φ' sich γ nicht merklich verschieden von c ergiebt, wie Herr *Wernicke* aus dieser Formel für festes Fuchsin nachgewiesen hat.*)

§ 5.

Schon bei den anomal dispergirenden Körpern hat es seine Schwierigkeit, das Licht, welches dieselben durchdrungen hat, zu beobachten, weil es durch Absorption zu sehr geschwächt ist. Noch

*) Monatsberichte der Berliner Akademie, November 1875.

schwerer ist dies bei den Metallen, die noch in höherem Grade undurchsichtig sind. Aber mit Leichtigkeit lässt sich hier das reflectirte Licht beobachten, und auch bei diesem macht sich der Einfluss der Undurchsichtigkeit in eigenthümlicher Weise geltend. Während nämlich bei partieller Reflexion an durchsichtigen Körpern, von kleinen Abweichungen abgesehen, geradlinig polarisirtes einfallendes Licht immer wieder als geradlinig polarisirtes Licht zurückgeworfen wird, ist dasselbe bei der Reflexion an Metallen im Allgemeinen elliptisch polarisirt. Nur wenn die Schwingungen im einfallenden Lichte parallel oder senkrecht zur Einfallsebene stattfinden, gilt dasselbe von den reflectirten Wellen; es ist das eine nothwendige Folge der dann stattfindenden Symmetrie in Bezug auf die Einfallsebene.

Ist nun das einfallende Licht in irgend einem Azimuth polarisirt, so kann es in zwei Componenten von gleicher Phase zerlegt gedacht werden, deren Polarisationsebenen parallel und senkrecht zur Einfallsebene sind; jede von diesen giebt eine Componente des reflectirten Lichtes von entsprechender Polarisationsebene. Da diese sich zu elliptisch polarisirtem Lichte zusammensetzen, so müssen sie einen Phasenunterschied besitzen; jede der beiden Componenten muss also bei der Reflexion eine Phasenänderung erleiden, die für beide verschieden ist. Beim Studium der Metallreflexion hat man demnach nur für einfallendes Licht, das parallel oder senkrecht zur Einfallsebene polarisirt ist und die Amplitude Eins besitzt, die Amplitude und die durch die Reflexion bewirkte Phasenänderung des reflectirten Lichtes zu bestimmen.

Die Schwierigkeit, die es hat, dieses durch die Theorie zu leisten, liegt in den Grenzbedingungen, die man in befriedigender Weise bisher nicht hat aufstellen können. Formeln für die soeben erwähnten Grössen, die mit vielen Beobachtungen in genügender Uebereinstimmung sind, hat aber schon *Cauchy* angegeben, und man gelangt zu diesen durch die Hypothese, dass hier *dieselben linearen Grenzbedingungen* gelten, wie für die Reflexion und Brechung bei durchsichtigen Mitteln.

Wir kehren zur Betrachtung dieses Falles, den wir in der achten Vorlesung ausführlich untersucht haben, noch auf einen Augenblick zurück und stellen die Gleichungen der Bewegung für ihn in etwas anderer Weise dar, als dies dort geschah. In der Ebene $z = 0$ grenze ein durchsichtiges Mittel an den leeren Raum; für diesen sei $z < 0$, für jenes $z > 0$. In dem leeren Raume sind einfallende Wellen vorhanden, die parallel oder senkrecht zur Einfallsebene polarisirt sind; φ sei der Einfallswinkel, φ' der reelle Brechungswinkel; die Geschwindigkeit des Lichtes im leeren Raume sei gleich Eins, die in dem Mittel gleich c, und es werde $l = i\frac{n}{c}$ gesetzt, so dass

$$in \sin\varphi = l \sin\varphi' \quad \text{und} \quad \cos\varphi' > 0 \tag{19}$$

ist. Endlich seien σ_e, σ_r und σ' die Verrückungen in den einfallenden, den reflectirten und den gebrochenen Wellen. Den Differentialgleichungen und den Grenzbedingungen genügt man dann durch

$$\begin{aligned} \sigma_e &= e^{(x \sin\varphi + z \cos\varphi - t)\, in} \\ \sigma_r &= R e^{(x \sin\varphi - z \cos\varphi - t)\, in} \\ \sigma' &= D e^{l(x \sin\varphi' + z \cos\varphi') - tin}, \end{aligned} \tag{20}$$

wo

$$R = \frac{\sin(\varphi - \varphi')}{\sin(\varphi + \varphi')},$$

oder (20a)

$$R = \frac{\operatorname{tg}(\varphi - \varphi')}{\operatorname{tg}(\varphi + \varphi')}$$

ist, je nachdem das Licht parallel oder senkrecht zur Einfallsebene polarisirt ist, und wo D zwei gewisse Werthe hat, die wir hier nicht angeben wollen. Diese Lösung der betreffenden Gleichungen ist complex; da dieselben aber sämmtlich linear sind und nur reelle Coefficienten enthalten, so erhält man eine reelle Lösung, wenn man σ_e, σ_r, σ' den *reellen Theilen* der in (20) aufgestellten Ausdrücke gleichsetzt; dabei wird dann die Amplitude des einfallenden Lichtes gleich Eins, die des reflectirten gleich R.

Nun sei das Mittel ein absorbirendes. Die Differentialgleichungen für den leeren Raum sind dann dieselben wie früher und werden durch die für σ_e und σ_r aufgestellten Ausdrücke nach wie vor erfüllt, dagegen gelten andere Gleichungen für das absorbirende Mittel; wir nehmen jedoch an, dass sie durch den für σ' aufgestellten Ausdruck erfüllt werden, wenn nur die dort auftretende Constante l passend bestimmt ist. Diese ist dann complex und das aus (19) zu bestimmende φ' ebenfalls; da es auch $\cos\varphi'$ ist, so verliert die vorher aufgestellte Bedingung, dass diese Grösse positiv sein soll, ihren Sinn; wir ersetzen sie durch die, dass der reelle Theil von $l \cos\varphi'$ negativ sei, so dass für $z = +\infty$ der Ausdruck σ' verschwindet und nicht unendlich gross wird. Da wir annehmen wollen, dass die Grenzbedingungen für den opaken Körper dieselben sind, wie für den durchsichtigen, so stellen dann die Ausdrücke für σ_e, σ_r, σ' eine complexe Lösung der jetzt geltenden Gleichungen dar, ihre reellen Theile also eine reelle. Setzen wir jetzt in (20a)

$$R = r e^{i\delta}, \tag{21}$$

und bezeichnen wir die reellen Theile von σ_e und σ_r nunmehr mit $\overline{\sigma_e}$ und $\overline{\sigma_r}$, so ergiebt sich

$$\begin{aligned} \overline{\sigma_e} &= \cos(x \sin\varphi + z \cos\varphi - t)\, n \\ \overline{\sigma_r} &= r \cos\big((x \sin\varphi - z \cos\varphi - t)\, n + \delta\big); \end{aligned} \tag{21a}$$

es ist also r die Amplitude, δ die durch die Reflexion bewirkte Phasenänderung der reflectirten Wellen. Man hat hiernach, um diese

Grössen für jede der beiden Polarisationsarten zu finden, nur die beiden Ausdrücke von R in (19a) auf die Normalform complexer Grössen zu bringen. Wir wollen die hierzu nöthige Rechnung durchführen.

Gebrauchen wir die analogen Bezeichnungen, wie im vorigen Paragraphen, so ist wegen (19)

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi'} = b\,e^{i\gamma}, \qquad \cos\varphi' = \varrho\,e^{i\vartheta}, \tag{22}$$

wenn wieder

$$\frac{l}{in} = b\,e^{i\beta}$$

gesetzt wird. b und β nehmen wir hier als gegeben an, es sind das Constanten des Metalles; weiter ist der Einfallswinkel φ beliebig gegeben; ϱ und ϑ kann man dann aus den beiden Gleichungen (17a) berechnen, welche, wenn man in ihnen für C und S ihre Werthe setzt, übergehen in

$$\left.\begin{aligned} b^2\varrho^2\cos 2(\beta+\vartheta) &= b^2\cos 2\beta - \sin^2\varphi \\ b^2\varrho^2\sin 2(\beta+\vartheta) &= b^2\sin 2\beta; \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

hieraus folgt leicht

$$\left.\begin{aligned} b^2\varrho^2\cos(2\vartheta+\beta) &= (b^2-\sin^2\varphi)\cos\beta \\ b^2\varrho^2\sin(2\vartheta+\beta) &= (b^2+\sin^2\varphi)\sin\beta. \end{aligned}\right\} \tag{23a}$$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen ϱ^2, so erhält man

$$\operatorname{ctg}(2\vartheta+\beta) = \operatorname{ctg}\beta\,\frac{1-\frac{\sin^2\varphi}{b^2}}{1+\frac{\sin^2\varphi}{b^2}} = \operatorname{ctg}\beta\cos 2\operatorname{arctg}\frac{\sin\varphi}{b}, \tag{24}$$

da allgemein

$$\cos 2x = \frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}, \quad \text{also} \quad \frac{1-y^2}{1+y^2} = \cos 2\operatorname{arctg} y$$

ist. Hieraus ist ϑ bequem zu berechnen, und dann ergiebt sich für ϱ

$$\varrho^2 = \frac{\sin 2\beta}{\sin 2(\beta+\vartheta)}. \tag{24a}$$

Da somit $\sin\varphi'$ und $\cos\varphi'$ bekannt sind, so lässt sich R in den beiden zu betrachtenden Fällen (20a) auf die Normalform complexer Grössen bringen, r und δ sind somit gefunden.

Die wirkliche Berechnung dieser beiden Grössen wird beträchtlich vereinfacht durch die folgende Ueberlegung: In den beiden zu betrachtenden Fällen lässt sich R, wie gleich gezeigt werden soll, folgendermassen schreiben

$$R = r\,e^{i\delta} = \frac{a\,e^{i\gamma}-1}{a\,e^{i\gamma}+1};$$

bringt man nun die linke und die rechte Seite dieser Gleichung auf die Normalform einer complexen Grösse, und trennt in der so sich ergebenden Gleichung

$$r\,(\cos\delta + i\sin\delta) = \frac{(a^2-1) + 2ai\sin\gamma}{a^2 + 2a\cos\gamma + 1}$$

das Reelle vom Imaginären, so ergeben sich zur Bestimmung von r und δ die beiden Gleichungen

$$r\cos\delta = \frac{a^2-1}{a^2+2a\cos\gamma+1}$$

$$r\sin\delta = \frac{2a\sin\gamma}{a^2+2a\cos\gamma+1}.$$

Es ist also

$$r^2 = \frac{(a^2+1) - 2a\cos\gamma}{(a^2+1)+2a\cos\gamma} = \frac{1 - \frac{2a}{a^2+1}\cos\gamma}{1 + \frac{2a}{a^2+1}\cos\gamma} \tag{25}$$

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{2a}{a^2-1}\sin\gamma.$$

Der Ausdruck für r^2 lässt sich nun zunächst auf zwei Arten in einer für die logarithmische Berechnung sehr bequemen Form darstellen: Aus der bekannten Gleichung

$$\sin 2x = \frac{2\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$$

folgt nämlich für

$$\operatorname{tg}x = a, \quad \text{also für } x = \operatorname{arctg}a$$

$$\frac{2a}{a^2+1} = \sin 2\operatorname{arctg}a.$$

Den für r^2 gefundenen Ausdruck kann man somit folgendermassen schreiben

$$r^2 = \frac{1-\operatorname{tg}v}{1+\operatorname{tg}v} = \operatorname{ctg}\left(v + \frac{\pi}{4}\right),$$

wenn (26)

$$\operatorname{tg}v = \frac{2a}{a^2+1}\cos\gamma = \sin 2\operatorname{arctg}a\cos\gamma$$

gesetzt wird. Berücksichtigt man andererseits die Identität

$$\operatorname{tg}^2 w = \frac{1-\cos 2w}{1+\cos 2w},$$

so erhält man für r die zweite Darstellung

$$r = \operatorname{tg}w \quad \text{für} \quad \cos 2w = \cos\gamma\sin 2\operatorname{arctg}a. \tag{27}$$

Was den Ausdruck von $\operatorname{tg}\delta$ betrifft, so verwandelt sich dieser bei Benutzung der identischen Gleichung

$$\operatorname{tg}2x = \frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2 x} \quad \text{oder von} \quad \frac{2a}{1-a^2} = \operatorname{tg}2\operatorname{arctg}a$$

in

$$\operatorname{tg}\delta = -\sin\gamma\operatorname{tg}2\operatorname{arctg}a. \tag{28}$$

Ist das einfallende Licht nun zunächst *parallel* der Einfallsebene polarisirt, so ist

$$R_p = r_p e^{i\delta_p} = \frac{\sin(\varphi - \varphi')}{\sin(\varphi + \varphi')} = \frac{\dfrac{\sin\varphi\cos\varphi'}{\sin\varphi'\cos\varphi} - 1}{\dfrac{\sin\varphi\cos\varphi'}{\sin\varphi'\cos\varphi} + 1},$$

oder mit Berücksichtigung von (22)

$$r_p e^{i\delta_p} = \frac{\dfrac{b\varrho e^{i(\beta+\vartheta)}}{\cos\varphi} - 1}{\dfrac{b\varrho e^{i(\beta+\vartheta)}}{\cos\varphi} + 1};$$

hier ist also

$$a = \frac{b\varrho}{\cos\varphi}, \qquad \gamma = \beta + \vartheta$$

zu setzen, und für r_p und δ_p ergeben sich die Gleichungen

$$r_p^2 = \operatorname{ctg}\left(v + \frac{\pi}{4}\right),$$

wenn

$$\operatorname{tg} v = \cos(\beta + \vartheta)\sin 2\operatorname{arctg}\frac{b\varrho}{\cos\varphi} \tag{29}$$

gesetzt wird, und

$$\operatorname{tg}\delta_p = -\sin(\beta + \vartheta)\operatorname{tg} 2\operatorname{arctg}\frac{b\varrho}{\cos\varphi}.$$

Ist das Licht *senkrecht* zur Einfallsebene polarisirt, so ergiebt sich leicht

$$R_s = r_s e^{i\delta_s} = \frac{\operatorname{tg}(\varphi - \varphi')}{\operatorname{tg}(\varphi + \varphi')} = \frac{\sin 2\varphi - \sin 2\varphi'}{\sin 2\varphi + \sin 2\varphi'} = \frac{\dfrac{\sin\varphi}{\sin\varphi'}\dfrac{\cos\varphi}{\cos\varphi'} - 1}{\dfrac{\sin\varphi}{\sin\varphi'}\dfrac{\cos\varphi}{\cos\varphi'} + 1},$$

d. h. es ist

$$r_s e^{i\delta_s} = \frac{\dfrac{b\cos\varphi}{\varrho} e^{i(\beta-\vartheta)} - 1}{\dfrac{b\cos\varphi}{\varrho} e^{i(\beta-\vartheta)} + 1};$$

hier muss also

$$a = \frac{b\cos\varphi}{\varrho}, \qquad \gamma = \beta - \vartheta$$

gewählt werden, man erhält somit für r_s und δ_s die Gleichungen

$$r_s^2 = \operatorname{ctg}\left(v + \frac{\pi}{4}\right),$$

wenn

$$\operatorname{tg} v = \cos(\beta - \vartheta)\sin 2\operatorname{arctg}\frac{b\cos\varphi}{\varrho} \tag{29a}$$

ist, und

$$\operatorname{tg}\delta_s = -\sin(\beta - \vartheta)\operatorname{tg} 2\operatorname{arctg}\frac{b\cos\varphi}{\varrho}.$$

Von besonderem Interesse ist das Verhältniss $\frac{r_s}{r_p}$ und die Differenz $\delta_s - \delta_p$, da diese sich verhältnissmässig leicht experimentell bestimmen lassen. Zunächst kann man nämlich den *Phasenunterschied* der beiden Componenten mit Hülfe eines Apparates ermitteln, der nun beschrieben werden soll. Es giebt Substanzen, auf welche wir schon in der nächsten Vorlesung näher eingehen werden, die *doppeltbrechende* oder *krystallinische* heissen. Geht durch eine Platte einer solchen Substanz Licht, so kann dasselbe von zwei verschiedenen Arten sein, nämlich das sogenannte *gewöhnliche* und das *ungewöhnliche* Licht. Es sind diese in zwei auf einander senkrechten Richtungen geradlinig polarisirt, und sie pflanzen sich mit verschiedener Geschwindigkeit fort. Lassen wir nun das von dem Metalle reflectirte Licht senkrecht durch eine solche Platte hindurchgehen, und zwar so, dass die Polarisationsrichtungen derjenigen Wellen, welche sich in ihr fortpflanzen können, in der Einfallsebene und senkrecht zu ihr liegen, so gehen die beiden Componenten mit verschiedener Geschwindigkeit durch die Platte hindurch, und je nach der Dicke derselben wird ihr Phasenunterschied geändert werden. Wäre es nun möglich, die Dicke und damit auch den Phasenunterschied stetig zu ändern, so würde man den ursprünglichen Unterschied auch gerade aufzuheben im Stande sein. Es giebt nun eine Anordnung des Versuches, welche diesen Zweck zu erreichen gestattet, diejenige nämlich, dass die Platte aus zwei spitzen gegen einander verschiebbaren Prismen besteht, die Theile einer und derselben Krystallplatte sind, und zusammengesetzt diese wieder ergeben würden. Es wirken dann die beiden Theile zusammen gerade so wie *eine* Platte, und hier kann man durch geeignete Verschiebung bewirken, dass die resultirende Platte gerade diejenige Dicke erhält, für welche der Phasenunterschied der beiden Componenten gegeneinander aufgehoben wird. Ist das der Fall, so ist der reflectirte Strahl nach dem Durchgang nicht mehr elliptisch, sondern geradlinig polarisirt. — Ob aber ein Strahl elliptisch oder geradlinig polarisirt sei, lässt sich leicht entscheiden mit Hülfe einer sogenannten *Polarisationsvorrichtung*, eines *Nicol'schen Prismas*, oder einer *Turmalinplatte*, wie wir in der vierzehnten Vorlesung näher darzulegen haben werden. Das Kennzeichen ist das, dass wenn ein geradlinig polarisirter Strahl durch eine solche Vorrichtung geleitet wird, er bei passender Drehung derselben vollständig ausgelöscht wird, während von elliptisch polarisirtem Lichte bei jeder Lage des Apparates immer noch ein Theil hindurchgelassen wird. Da nun aus der Dicke der Krystallplatte, welche nöthig ist, um die Phasendifferenz der beiden Componenten aufzuheben, unmittelbar auf diese selbst geschlossen werden kann, so hat man ein einfaches Mittel, um $\delta_s - \delta_p$ zu bestimmen.

Um dieselbe Aufgabe für das Verhältniss der Amplituden $\frac{r_s}{r_p}$ zu lösen, lasse man Licht, welches im Azimuth von 45^0 geradlinig polarisirt ist, unter dem Winkel φ auf die Platte auffallen. Dann sind die Amplituden der Componenten, welche parallel und senkrecht zur Einfallsebene schwingen, einander gleich, das Amplitudenverhältniss der Componenten des reflectirten Lichtes ist mithin $\frac{r_s}{r_p}$. Hebt man also die Phasendifferenz $\delta_s - \delta_p$ durch Einschaltung der Krystallplatte auf, so erhält man geradlinig polarisirtes Licht, für welches die trigonometrische Tangente des Polarisationsazimuthes geradezu gleich $\frac{r_s}{r_p}$ ist; es ist also auch dieses Verhältniss leicht experimentell zu bestimmen.

Um nun diese Grössen zu berechnen, gehen wir aus von der Gleichung

$$\frac{R_s}{R_p} = \frac{r_s}{r_p} e^{i(\delta_s - \delta_p)} = \frac{\cos(\varphi + \varphi')}{\cos(\varphi - \varphi')} = \frac{\frac{\cos\varphi\cos\varphi'}{\sin\varphi\sin\varphi'} - 1}{\frac{\cos\varphi\cos\varphi'}{\sin\varphi\sin\varphi'} + 1}$$

$$= \frac{b\varrho\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi} e^{i(\beta+\vartheta)} - 1}{b\varrho\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi} e^{i(\beta+\vartheta)} + 1}.$$

Hier ist also

$$a = b\varrho\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}, \quad \gamma = \beta + \vartheta$$

zu setzen, bei Berücksichtigung von (27) und (28) ergeben sich mithin für die gesuchten beiden Grössen die Gleichungen

$$\frac{r_s}{r_p} = \operatorname{tg} h,$$

wenn

$$\cos 2h = \cos(\beta + \vartheta)\sin 2\operatorname{arctg} b\varrho\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$$

wird, und (29 b)

$$\operatorname{tg}(\delta_s - \delta_p) = -\sin(\beta + \vartheta)\operatorname{tg} 2\operatorname{arctg} b\varrho\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}.$$

Alle diese auf die Metallreflexion bezüglichen Formeln sind zuerst von *Cauchy*, aber ohne Beweis, gegeben worden. Gestützt auf Andeutungen Cauchy's hat sie *Eisenlohr* *) abgeleitet.

Statt der Constanten b und β pflegt man zwei andere einzuführen, die der Beobachtung leichter zugänglich sind. Die eine ist ein gewisser Einfallswinkel, der dem *Polarisationswinkel* bei durchsichtigen Substanzen entspricht, von *Brewster* auch mit demselben Namen belegt ist, jetzt aber gewöhnlich *Haupteinfallswinkel* genannt wird; es ist das der Werth Φ von φ, für welchen

$$\delta_p - \delta_s = \frac{\pi}{2}$$

ist; die zweite der beiden neuen Constanten ist der diesem Einfallswinkel entsprechende Werth des Bogens h, der H heissen möge. Er wird das *Hauptazimuth* genannt und ist das Azimuth der Polarisationsebene des reflectirten Strahles, falls die Phasendifferenz seiner Componenten aufgehoben wird und der unter dem Haupteinfallswinkel Φ eintretende Strahl im Azimuth von 45° polarisirt ist.

*) Poggendorff's Annalen Bd. 104.

Es ist leicht, die in (22) eingeführten Constanten b und β durch die Grössen Φ und H auszudrücken. Die für den Haupteinfallswinkel Φ geltende Bedingungsgleichung

$$\operatorname{tg}(\delta_p - \delta_s) = \infty$$

liefert nämlich zunächst mit Hülfe der zweiten Gleichung (29b) die Relation

$$b\varrho = \frac{\sin^2\Phi}{\cos\Phi}, \tag{30}$$

und aus ihr folgt bei Berücksichtigung der ersten Gleichung (29b)

$$\cos 2H = \cos(\beta + \vartheta),$$

d. h.

$$2H = \beta + \vartheta. \tag{30a}$$

Die Grössen ϱ und ϑ sind hier aus den Gleichungen (23) zu bestimmen, welche sich mit Rücksicht auf (30) und (30a) folgendermassen schreiben lassen

$$\left.\begin{aligned} b^2 \cos 2\beta &= \operatorname{tg}^2\Phi\,(\sin^2\Phi \cos 4H + \cos^2\Phi) \\ b^2 \sin 2\beta &= \operatorname{tg}^2\Phi \sin^2\Phi \sin 4H. \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Eliminirt man aus ihnen zunächst β, indem man sie quadrirt und addirt, so ergiebt sich für b die Gleichung

$$\begin{aligned} b^4 &= \operatorname{tg}^4\Phi\,\{\sin^4\Phi + 2\sin^2\Phi\cos^2\Phi\cos 4H + \cos^4\Phi\} \\ &= \operatorname{tg}^4\Phi\,(1 - \sin^2 2\Phi \sin^2 2H). \end{aligned}$$

Führt man jetzt den Hülfswinkel χ durch die Gleichung

$$\sin\chi = \sin 2\Phi \sin 2H$$

ein, so geht die Gleichung für b über in

$$b = \operatorname{tg}\Phi \sqrt{\cos\chi}, \tag{32}$$

und mit Hülfe von (31) erhält man für β die Bestimmungsgleichung

$$\sin 2\beta = \operatorname{tg}\Phi \operatorname{tg}\chi \cos 2H. \tag{32a}$$

Die Zweideutigkeit, ob 2β im ersten oder zweiten Quadranten zu nehmen ist, entscheidet sich nach dem Vorzeichen von $\cos 2\beta$, welches sich aus (31) leicht bestimmt; führt man hier nämlich χ an Stelle von b an, so ergiebt sich

$$\cos\chi \cos 2\beta = 1 - 2\sin^2\Phi \sin^2 2H;$$

da nun $\cos\chi$ positiv sein muss, widrigenfalls sich ein imaginärer Werth für b ergäbe, so ist $\cos 2\beta$ positiv oder negativ, je nachdem

$$\sin\Phi \sin 2H \text{ kleiner oder grösser als } \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ist.

Eilfte Vorlesung.

Doppelbrechung des Lichtes. Grundhypothese. — Differentialgleichungen der Lichtbewegung in einem krystallinischen Medium. — Untersuchung particulärer Integrale derselben, welche ebenen Wellen entsprechen. — Bedingungen dafür dass die Wellen transversal sind. — Elasticitätsellipsoid. — Bestimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit und der Polarisationsrichtung ebener Lichtwellen in Krystallen mit Hülfe des Elasticitätsellipsoides. — Optische Achsen des Krystalles. Einachsige und zweiachsige Krystalle. — Gewöhnliche und ungewöhnliche Welle. — Construction ihrer Polarisationsebenen mit Hülfe der optischen Achsen.

§ 1.

Wir wenden uns jetzt zu einer grossen Klasse von Erscheinungen, auf welche in den früheren Vorlesungen schon einige Male hingewiesen wurde, zu den Erscheinungen der *Doppelbrechung*, die sich in den *Krystallen* zeigen, in Körpern, welche sich in verschiedenen Richtungen verschieden verhalten. Auch hier wollen wir uns auf denjenigen Standpunkt stellen, welchen wir bei der Untersuchung der Lichtbewegung in *isotropen* durchsichtigen Körpern einnahmen, wollen also voraussetzen, dass der Aether in irgend einem Körper bei den Lichtschwingungen gerade so sich verhält, wie ein elastischer fester Körper, auf dessen Theile keine anderen Kräfte wirken, als diejenigen, welche eine Folge der relativen Verschiebungen sind. Wir werden also wieder auszugehen haben von den Differentialgleichungen für die Bewegung eines festen elastischen Körpers, werden diesen jetzt aber als *krystallinisch* voraussetzen, d. h. annehmen, dass er sich nach verschiedenen Richtungen verschieden verhält.

Wir gebrauchen dieselben Bezeichnungen, wie in der ersten Vorlesung, nennen also u, v, w die unendlich kleinen Verrückungen desjenigen Punktes zur Zeit t, welcher in der Ruhelage die Coordinaten x, y, z hat; dann können wir aus der Theorie der Elasticität als bekannt voraussetzen*), dass die relativen Verschiebungen in unendlicher Nähe dieses Punktes allein bedingt sind durch die sechs Differentialausdrücke

*) Vgl. z. B. Mechanik XXVII. Vorlesung § 1.

$$
\begin{aligned}
x_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & y_z &= z_y = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\
y_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & z_x &= x_z = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \\
z_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, & x_y &= y_x = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x};
\end{aligned} \tag{1}
$$

von diesen sechs Grössen hängen also auch die Kräfte ab, welche die Theilchen in Folge ihrer relativen Verschiebungen auf einander ausüben. Da wir nur *unendlich kleine* Verrückungen betrachten, so dürfen wir annehmen dass die Componenten der Druckkräfte

$$
\begin{gathered}
X_x, \qquad Y_y, \qquad Z_z \\
Y_z = Z_y, \quad Z_x = X_z, \quad X_y = Y_x
\end{gathered}
$$

lineare Functionen der sechs Grössen $x_x, \ldots z_y$ sind; sie müssen aber auch homogen sein, weil die Druckcomponenten zugleich mit den Verrückungen verschwinden. Die sechs Gleichungen, welche diesen Zusammenhang ausdrücken, würden somit im allgemeinsten Falle 36 Constanten enthalten; zwischen diesen müssen jedoch gewisse Relationen stattfinden, die eine Folge davon sind, dass die elastischen Kräfte ein *Potential* haben. Bezeichnen wir das Potential jener durch die relativen Verschiebungen hervorgerufenen Druckkräfte, bezogen auf die Volumeneinheit, durch $-F$, so ist F eine Function der sechs Argumente $x_x, y_y, \ldots$, und man hat

$$
\begin{aligned}
X_x &= -\frac{\partial F}{\partial x_x}, & Y_z &= Z_y = -\frac{\partial F}{\partial y_z} \\
Y_y &= -\frac{\partial F}{\partial y_y}, & Z_x &= X_z = -\frac{\partial F}{\partial z_x} \\
Z_z &= -\frac{\partial F}{\partial z_z}, & X_y &= Y_x = -\frac{\partial F}{\partial x_y}.
\end{aligned} \tag{1a}
$$

Da die Druckcomponenten homogene lineare Functionen der Grössen $x_x, y_y, \ldots, z_y$ sind, so folgt, dass F eine homogene Function zweiten Grades jener sechs Argumente sein muss; die additive Constante, welche ihr noch hinzugefügt werden könnte, wollen wir gleich Null annehmen. Die 21 Coefficienten von F heissen *die Constanten der Elasticität* des betreffenden elastischen Körpers, hier also des Aethers in dem doppeltbrechenden Krystall.

Mit Hülfe des Hamilton'schen Principes kann man nun leicht die Differentialgleichungen der Bewegung des Körpers aufstellen: Wirken keine fremden Kräfte auf denselben, so können sie, wie bei einem unkrystallinischen Körper, folgendermassen geschrieben werden

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= -\frac{\partial X_x}{\partial x} - \frac{\partial X_y}{\partial y} - \frac{\partial X_z}{\partial z}\\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= -\frac{\partial Y_x}{\partial x} - \frac{\partial Y_y}{\partial y} - \frac{\partial Y_z}{\partial z}\\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= -\frac{\partial Z_x}{\partial x} - \frac{\partial Z_y}{\partial y} - \frac{\partial Z_z}{\partial z},\end{aligned} \tag{1b}$$

wo die Dichtigkeit μ, welche wir nach den Ergebnissen der achten Vorlesung in allen Körpern als gleich annehmen müssen, gleich Eins gesetzt ist. Substituirt man in diese Gleichungen die aus (1 a) sich ergebenden Werthe der Druckcomponenten, so erhält man für die Componenten u, v, w Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Es ist leicht, gewisse Lösungen dieser Gleichungen zu finden, nämlich solche, welche die Fortpflanzung *ebener Wellen* darstellen. Zu diesem Zwecke nennen wir l, m, n die Cosinus der Winkel, welche eine Richtung mit den Coordinatenachsen bildet, setzen

$$lx + my + nz = s, \tag{2}$$

und nehmen an, dass u, v, w ausser von t nur von s abhängen. Bei einer solchen Bewegung sind ebene Wellen vorhanden, und die durch l, m, n bestimmte Richtung ist die der *Wellennormale*. Die Verrückung in der durch s bestimmten Wellenebene zur Zeit t sei σ, und es sei

$$\begin{gathered} u = \alpha\sigma, \quad v = \beta\sigma, \quad w = \gamma\sigma, \\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1; \end{gathered} \tag{2a}$$

es sind dann α, β, γ die Cosinus derjenigen Winkel, welche eine zweite Richtung, die der Verrückung, mit den Achsen bildet. Es wird sich zeigen, dass den Differentialgleichungen genügt wird, wenn α, β, γ gewisse constante, d. h. von s und t unabhängige Werthe erhalten.

Die linken Seiten der Differentialgleichungen (1b) werden dann

$$\alpha\frac{\partial^2\sigma}{\partial t^2}, \quad \beta\frac{\partial^2\sigma}{\partial t^2}, \quad \gamma\frac{\partial^2\sigma}{\partial t^2};$$

um die rechten Seiten zu bilden hat man zu beachten, dass jeder der Differentialquotienten von F nach x_x, y_y ... eine lineare homogene Function dieser Argumente ist, und dass diese Grössen in unserem Falle die folgenden Werthe haben

$$\begin{aligned} x_x &= \alpha l\frac{\partial\sigma}{\partial s}, & y_z &= (\beta n + \gamma m)\frac{\partial\sigma}{\partial s}\\ y_y &= \beta m\frac{\partial\sigma}{\partial s}, & z_x &= (\gamma l + \alpha n)\frac{\partial\sigma}{\partial s}\\ z_z &= \gamma n\frac{\partial\sigma}{\partial s}, & x_y &= (\alpha m + \beta l)\frac{\partial\sigma}{\partial s}. \end{aligned} \tag{3}$$

Jeder dieser Differentialquotienten wird daher gleich $\frac{\partial\sigma}{\partial s}$, multiplicirt mit einem constanten Factor, und dieser Factor ist der Werth des betreffenden Differentialquotienten, wenn man in ihm die Ausdrücke x_x, y_y, ... durch die constanten Grössen

$$\begin{aligned} \bar{x}_x &= \alpha l, & \bar{y}_z &= \beta n + \gamma m \\ \bar{y}_y &= \beta m, & \bar{z}_x &= \gamma l + \alpha n \\ \bar{z}_z &= \gamma n, & \bar{x}_y &= \alpha m + \beta l \end{aligned} \tag{3a}$$

ersetzt; bezeichnen wir also den Ausdruck, der aus F durch dieselben Substitutionen entsteht, durch $\bar{F}$, so lässt sich die erste der Gleichungen (1a) folgendermassen schreiben

$$- X_x = \frac{\partial F}{\partial x_x} = \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{x}_x} \frac{\partial \sigma}{\partial s}, \tag{4}$$

und entsprechende Ausdrücke ergeben sich für die fünf anderen dort auftretenden Druckcomponenten. Da, wie schon bemerkt, die hier auftretenden Factoren von $\frac{\partial \sigma}{\partial s}$ Constanten sind, so wird die erste der Differentialgleichungen (1b)

$$\alpha \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = \left(l \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{x}_x} + m \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{x}_y} + n \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{x}_z} \right) \frac{\partial^2 \sigma}{\partial s^2} = \frac{\partial \bar{F}}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial^2 \sigma}{\partial s^2};$$

die Richtigkeit des letzten Theiles dieser Gleichung erkennt man unmittelbar, wenn man erwägt, dass

$$\frac{\partial \bar{x}_x}{\partial \alpha} = l, \quad \frac{\partial \bar{x}_y}{\partial \alpha} = m, \quad \frac{\partial \bar{x}_z}{\partial \alpha} = n$$

$$\frac{\partial \bar{y}_y}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial \bar{y}_z}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial \bar{z}_z}{\partial \alpha} = 0,$$

dass also

$$l \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{x}_x} + m \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{x}_y} + n \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{x}_z} = \frac{\partial \bar{F}}{\partial \alpha} \tag{4a}$$

ist. Behandelt man die zweite und dritte Differentialgleichung in entsprechender Weise, so erhält man an Stelle des Systemes (1b) in unserem Falle das folgende

$$\begin{aligned} \alpha \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} &= \frac{\partial \bar{F}}{\partial \alpha} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial s^2} \\ \beta \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} &= \frac{\partial F}{\partial \beta} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial s^2} \\ \gamma \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} &= \frac{\partial \bar{F}}{\partial \gamma} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial s^2}. \end{aligned} \tag{5}$$

Diese Gleichungen sind nur mit einander verträglich, falls

$$\begin{aligned}\frac{\partial \overline{F}}{\partial \alpha} &= V^2\alpha \\ \frac{\partial \overline{F}}{\partial \beta} &= V^2\beta \\ \frac{\partial \overline{F}}{\partial \gamma} &= V^2\gamma\end{aligned} \tag{6}$$

ist, wo V^2 eine zu bestimmende Constante bedeutet, und unter dieser Bedingung reduciren sich dieselben auf die eine Gleichung

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = V^2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial s^2}. \tag{7}$$

Das allgemeine Integral dieser Differentialgleichung ist, wie wir im § 4 der ersten Vorlesung sahen,

$$\sigma = f_1(s - Vt) + f_2(s + Vt),$$

wo f_1 und f_2 willkürliche Functionen bedeuten. Die Gleichungen (5) stellen also zwei ebene Wellen dar, deren Normalen die Richtung (l, m, n) haben, die mit der Geschwindigkeit V, die eine in dieser Richtung die andere in der entgegengesetzten sich fortpflanzen, und in denen die Verrückungen in der Richtung (α, β, γ) stattfinden.

Die Gleichungen (6), welche in Verbindung mit der Relation

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \tag{7a}$$

zur Bestimmung von α, β, γ und V dienen müssen, haben eine einfache geometrische Bedeutung: Es seien (x, y, z) die rechtwinkligen Coordinaten irgend eines Punktes einer Fläche, r möge seine Entfernung vom Coordinatenanfangspunkte, und α, β, γ die Richtungscosinus der Strecke r sein, so dass also

$$x = r\alpha, \quad y = r\beta, \quad z = r\gamma$$

ist. Es sei nun

$$2\overline{F}(x, y, z) = 1 \quad \text{oder} \quad 2\overline{F}(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{r^2}$$

die Gleichung dieser Fläche, wo $\overline{F}$ die vorher so bezeichnete Function von α, β, γ sein soll. Dieselbe stellt dann eine Mittelpunktsfläche des zweiten Grades dar, deren Centrum der Coordinatenanfangspunkt ist, und zwar ein Ellipsoid, da F nie negativ werden kann, widrigenfalls das Gleichgewicht, das stattfindet, wenn u, v, w verschwinden, ein labiles sein würde. Suchen wir nun die Hauptachsen dieses Ellipsoides, also die Maxima und Minima von $\frac{1}{r^2}$, so fällt diese Frage mit derjenigen nach den grössten und kleinsten Werthen von $\overline{F}(\alpha, \beta, \gamma)$ unter der Bedingung (7a) zusammen. Zu diesem Zwecke haben wir bekanntlich die partiellen Differentialquotienten nach α, β, γ der Function

$$2\overline{F}(\alpha, \beta, \gamma) - V^2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 1)$$

einzeln gleich Null zu setzen, und diese Gleichungen in Verbindung mit (7a) genügen gerade, um die Grössen α, β, γ und V^2 zu bestimmen. Es sind dies aber gerade die Gleichungen (6); mithin giebt es für jedes System ebener Wellen drei auf einander senkrechte Richtungen, in denen die Verschiebung stattfinden kann, und diese sind die Richtungen der Hauptachsen des genannten, von l, m, n abhängigen Ellipsoides. Jeder Verschiebungsrichtung entspricht eine andere Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen. Da endlich für jede Hauptachse

$$V^2 = \frac{1}{r^2}, \quad \text{also} \quad \frac{1}{r} = V \tag{8}$$

ist, so ist für jede Verschiebungsrichtung die Fortpflanzungsgeschwindigkeit gleich dem Reciproken der entsprechenden Halbachse des Ellipsoides.

§. 2.

Ist das betrachtete Mittel ein isotropes, so führt die am Schlusse des vorigen Paragraphen durchgeführte Rechnung stets auf ein Rotationsellipsoid, dessen Rotationsachse die Wellennormale ist; eine von den drei Wellen, die in irgend einer Richtung sich fortpflanzen können, ist somit stets eine longitudinale, die beiden anderen, die gleiche Fortpflanzungsgeschwindigkeit besitzen, sind transversale; die letzteren allein sind Lichtwellen. Im Allgemeinen sind aber die drei ebenen geradlinig polarisirten Wellen, welche sich nach den Resultaten des vorigen Paragraphen nach einer beliebigen Richtung fortpflanzen können, weder longitudinale noch transversale, sondern die Verschiebungsrichtung bildet mit der Wellennormale einen Winkel, welcher von der Richtung der letzteren abhängt. Wenn aber gewisse Relationen zwischen den einundzwanzig Constanten der Elasticität bestehen, so ist, wie *Green**) gefunden hat, bei *jeder Richtung* der Wellennormale die Verrückung in der einen Welle senkrecht, in den beiden anderen also parallel der Wellenebene, d. h. es ist dann die eine Welle eine longitudinale und die beiden anderen sind transversale. Man kommt in Uebereinstimmung mit der Erfahrung, wenn man annimmt, dass diese Relationen zwischen den Constanten der Elasticität des Aethers bestehen, und dass die beiden transversalen Wellen Lichtwellen sind.

Wir gelangen zu diesem Ausdruck von F, wenn wir die Bedingungen dafür aufsuchen, dass von den drei Wellen, welche in einer Richtung fortschreiten können, die eine ihre Verrückungen genau parallel der Wellennormale hat. Es ergiebt sich dann ohne Schwierig-

---

*) Transactions of the Cambridge Philosophical Society Vol. VII p. 121, 1839.

keit, dass diese Bedingungen dann und nur dann erfüllt sind, wenn $2F$ die folgende Form hat

$$\begin{aligned}2F &= a_0(x_x + y_y + z_z)^2 \\ &+ a_{11}(y_z^2 - 4y_y z_z) + a_{22}(z_x^2 - 4z_z x_x) + a_{33}(x_y^2 - 4x_x y_y) \\ &+ 2a_{23}(2y_z x_x - y_x z_x) + 2a_{31}(2z_x y_y - z_y x_y) + 2a_{12}(2x_y z_z - x_z y_z),\end{aligned} \tag{9}$$

wo die sieben Grössen a beliebige Constanten sind.

Es ist leicht, dieses Resultat zu verificiren und nachzuweisen, dass, falls die Gleichung (9) besteht, in jeder Richtung genau longitudinale ebene Wellen sich fortpflanzen können. Substituirt man nämlich in (7) die Werthe (3a) von $x_x, y_y, \ldots$, so ergiebt sich für $\overline{F}$ die folgende Gleichung

$$\begin{aligned}2\overline{F} &= a_0(\alpha l + \beta m + \gamma n)^2 \\ &+ a_{11}(\gamma m - \beta n)^2 + a_{22}(\alpha n - \gamma l)^2 + a_{33}(\beta l - \alpha m)^2 \\ &+ 2a_{23}(\alpha n - \gamma l)(\beta l - \alpha m) + 2a_{31}(\beta l - \alpha m)(\gamma m - \beta n) \\ &\qquad + 2a_{12}(\gamma m - \beta n)(\alpha n - \gamma l),\end{aligned} \tag{9a}$$

da

$$(\beta n + \gamma m)^2 - 4\beta m \cdot \gamma n = (\gamma m - \beta n)^2,$$

und

$$2(\beta n + \gamma m)\alpha l - (\alpha m + \beta l)(\gamma l + \alpha n) = (\alpha n - \gamma l)(\beta l - \alpha m)$$

ist. Dieser Ausdruck von $\overline{F}$ genügt aber den Gleichungen

$$\frac{\partial \overline{F}}{\partial \alpha} = a_0 \alpha, \quad \frac{\partial \overline{F}}{\partial \beta} = a_0 \beta, \quad \frac{\partial \overline{F}}{\partial \gamma} = a_0 \gamma$$

für $\alpha = l$, $\beta = m$, $\gamma = n$, da

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

ist, und da jede der sechs Grössen $a_{11}, a_{22} \ldots$ in $2\overline{F}$ mit *zwei* in Bezug auf α, β, γ linearen Factoren multiplicirt ist, die für $\alpha = l$, $\beta = m$, $\gamma = n$ verschwinden; die eine der drei Wellen ist daher stets eine longitudinale, und $\sqrt{a_0}$ ist ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit. Die beiden andern sind also transversale, d. h. solche Wellen, für welche

$$\alpha l + \beta m + \gamma n = 0 \tag{10}$$

ist.

Aus dieser Gleichung in Verbindung mit den in (6) aufgestellten, sind jetzt die Schwingungsrichtungen und Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der beiden transversalen Wellen zu bestimmen. Zu diesem Zwecke führen wir neben den beiden auf einander senkrechten Richtungen der Normale und der Verrückungsrichtung einer Welle noch diejenige ein, welche auf jenen beiden senkrecht steht; sind $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c})$ die Cosinus derjenigen Winkel, welche diese mit den Coordinatenachsen bildet, so ist bekanntlich

$$\begin{aligned}\mathfrak{a} &= \gamma m - \beta n\\ \mathfrak{b} &= \alpha n - \gamma l\\ \mathfrak{c} &= \beta l - \alpha m.\end{aligned}\tag{11}$$

Führt man diese Grössen in den Ausdruck (9a) von $2\overline{F}$ ein, und setzt zur Abkürzung

$$2\mathfrak{F} = a_{11}\mathfrak{a}^2 + a_{22}\mathfrak{b}^2 + a_{33}\mathfrak{c}^2 + 2a_{23}\mathfrak{b}\mathfrak{c} + 2a_{31}\mathfrak{c}\mathfrak{a} + 2a_{12}\mathfrak{a}\mathfrak{b},\tag{12}$$

so ergiebt sich mit Hülfe von (10)

$$\overline{F} = \mathfrak{F},\tag{12a}$$

und diese Gleichung kann wegen (10) *einmal* nach α, β oder γ differentiirt werden.

Die erste der Gleichungen (6) wird also

$$\frac{\partial \overline{F}}{\partial \alpha} = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{b}} n - \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{c}} m = V^2\alpha,$$

und entsprechende Ausdrücke ergeben sich für die beiden anderen Gleichungen; da nun

$$\begin{aligned}\alpha &= \mathfrak{b} n - \mathfrak{c} m\\ \beta &= \mathfrak{c} l - \mathfrak{a} n\\ \gamma &= \mathfrak{a} m - \mathfrak{b} l\end{aligned}$$

ist, so lassen sich jene drei Gleichungen folgendermassen schreiben

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{b}} - V^2\mathfrak{b}\right) n &= \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{c}} - V^2\mathfrak{c}\right) m\\ \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{c}} - V^2\mathfrak{c}\right) l &= \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{a}} - V^2\mathfrak{a}\right) n\\ \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{a}} - V^2\mathfrak{a}\right) m &= \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{b}} - V^2\mathfrak{b}\right) l,\end{aligned}$$

und aus ihnen erhält man

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{a}} &= V^2\mathfrak{a} + \mu l\\ \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{b}} &= V^2\mathfrak{b} + \mu m\\ \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{c}} &= V^2\mathfrak{c} + \mu n,\end{aligned}\tag{13}$$

wo μ eine zu bestimmende Grösse bedeutet. Diese Gleichungen in Verbindung mit

$$\begin{aligned}\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2 + \mathfrak{c}^2 &= 1\\ l\mathfrak{a} + m\mathfrak{b} + n\mathfrak{c} &= 0\end{aligned}\tag{13a}$$

bestimmen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, V^2 und μ. Aus $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, l, m, n findet man dann α, β, γ.

Auch diese Gleichungen haben eine einfache geometrische Bedeutung: Legen wir nämlich durch den Mittelpunkt des Ellipsoides

$$\frac{1}{r^2} = \mathfrak{F}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}), \tag{13b}$$

des sogenannten *Elasticitätsellipsoides,* eine Ebene parallel zur Wellenebene, deren Normale somit die Richtungscosinus l, m, n hat, so bestehen für die Richtungscosinus ($\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$) aller in dieser Ebene liegenden Radiivectoren des Ellipsoides die beiden Gleichungen (13a). Stellt man sich also die Aufgabe, die Hauptachsen der Ellipse zu finden, in welcher das Elasticitätsellipsoid von der genannten Ebene geschnitten wird, so erhält man zur Bestimmung ihrer Richtungscosinus ebenso wie in §. 1 die Gleichungen (13). Die beiden aus ihnen sich ergebenden Werthe der Fortpflanzungsgeschwindigkeit V sind somit die reciproken Halbachsen jener Ellipse, ihre beiden Polarisationsrichtungen (α, β, γ) die Richtungen derselben; aber die Welle, deren Geschwindigkeit das Reciproke der *einen* Halbachse ist, ist polarisirt nach der Richtung der *anderen* und umgekehrt. Das sind die *Fresnel'schen Gesetze* für die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten und Polarisationsrichtungen der Lichtwellen in Krystallen, wenn wir die Schwingungsebene und die Polarisationsebene als zusammenfallend annehmen.

§. 3.

Um die Werthe der Fortpflanzungsgeschwindigkeit V der beiden Lichtwellen aus den Bestimmungsgleichungen (13) und (13a) zu berechnen, ist es zweckmässig, die Coordinatenachsen in die Hauptachsen des Elasticitätsellipsoides, in die sogenannten *Elasticitätsachsen* zu legen. Dann ist

$$a_{23} = a_{31} = a_{12} = 0,$$

und es sei

$$a_{11} = a^2, \quad a_{22} = b^2, \quad a_{33} = c^2,$$

also

$$2\mathfrak{F} = a^2\mathfrak{a}^2 + b^2\mathfrak{b}^2 + c^2\mathfrak{c}^2. \tag{14}$$

Dann lassen sich die erwähnten Gleichungen einfacher folgendermassen schreiben

$$\begin{aligned}
(a^2 - V^2)\mathfrak{a} &= \mu l \\
(b^2 - V^2)\mathfrak{b} &= \mu m \\
(c^2 - V^2)\mathfrak{c} &= \mu n \\
\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2 + \mathfrak{c}^2 &= 1 \\
l\mathfrak{a} + m\mathfrak{b} + n\mathfrak{c} &= 0.
\end{aligned} \tag{15}$$

Aus ihnen ergiebt sich für V^2 die quadratische Gleichung

$$\frac{l^2}{a^2 - V^2} + \frac{m^2}{b^2 - V^2} + \frac{n^2}{c^2 - V^2} = 0, \tag{16}$$

welche, wenn man sie mit V^2 multiplicirt und

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

hinzu addirt, auch folgendermassen geschrieben werden kann

$$\frac{a^2 l^2}{a^2 - V^2} + \frac{b^2 m^2}{b^2 - V^2} + \frac{c^2 n^2}{c^2 - V^2} = 1; \tag{16a}$$

hier ist jedoch die Wurzel $V^2 = 0$ auszuschliessen.

Die aus (16) für V^2 sich ergebende quadratische Gleichung lässt sich folgendermassen schreiben

$$\begin{aligned} &V^4 - V^2\left(l^2(b^2 + c^2) + m^2(c^2 + a^2) + n^2(a^2 + b^2)\right) \\ &\quad + l^2 b^2 c^2 + m^2 c^2 a^2 + n^2 a^2 b^2 = 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Löst man dieselbe auf, giebt dabei dem von V unabhängigen Gliede noch den Factor $(l^2 + m^2 + n^2)$ und setzt

$$A = l^2(b^2 - c^2), \quad B = m^2(c^2 - a^2), \quad C = n^2(a^2 - b^2), \tag{18}$$

so findet man für die gesuchten Werthe der beiden Fortpflanzungsgeschwindigkeiten die Ausdrücke

$$\begin{aligned} V^2 = &\frac{1}{2}\left(l^2(b^2 + c^2) + m^2(c^2 + a^2) + n^2(a^2 + b^2)\right) \\ &\pm \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2 - 2BC - 2CA - 2AB}. \end{aligned} \tag{19}$$

Die Grösse unter dem Wurzelzeichen kann, wie wir sehen werden, nicht negativ werden, aber sie kann verschwinden; wir wollen die Bedingung dafür aufsuchen. Es seien die drei reciproken Halbachsen des Elasticitätsellipsoides

$$a, \; b, \; c$$

ihrer Grösse nach geordnet, wobei es unbestimmt bleibe, ob a oder c den grössesten Werth hat. Von den Grössen A, B, C haben dann A und C gleiches, B aber das entgegengesetzte Vorzeichen. Die Grösse unter dem Wurzelzeichen lässt sich nun schreiben

$$(A + B - C)^2 - 4AB,$$

und diese Form zeigt, dass sie nicht negativ sein kann und nur verschwindet, wenn

$$B = 0 \quad \text{und} \quad A = C$$

ist. Diese Bedingungen ergeben für die Richtungscosinus der zugehörigen Wellennormale

$$l = \pm\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}, \quad m = 0, \quad n = \pm\sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}.$$

Die hierdurch bestimmten Richtungen sind bekanntlich die Normalen der *Kreisschnitte* des Elasticitätsellipsoides. In der Optik nennt man sie die *optischen Achsen*. Fällt also die Wellennormale mit einer der optischen Achsen zusammen, so sind die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der beiden zugehörigen Wellen einander gleich und zwar gleich b.

Es giebt vier optische Achsen, von denen aber je zwei einander entgegengesetzt sind. Daher spricht man gewöhnlich nur von zwei Achsen und wählt deren Richtungen so aus, dass sie einen *spitzen* Winkel mit einander bilden. Wir wollen annehmen, dass für die beiden optischen Achsen

$$
\begin{aligned}
l_1 &= +\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}, \quad m_1 = 0, \qquad n_1 = +\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}},\\
l_2 &= -\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}, \quad m_2 = 0, \qquad n_2 = +\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}
\end{aligned}
\tag{20}
$$

ist, d. h. dass die z-Achse *zwischen* den beiden optischen Achsen liegt.

Betrachten wir zunächst den speciellen Fall, dass die optischen Achsen zusammenfallen: Nach der soeben getroffenen Festsetzung über das Coordinatensystem liegen sie dann in der z-Achse, und dies tritt dann und nur dann ein, wenn

$$a = b$$

ist. Der Krystall heisst alsdann *optisch einachsig;* alle anderen werden *optisch zweiachsige* Krystalle genannt. Die einfachsten einachsigen Krystalle sind diejenigen des regulären Systemes, für sie ist nämlich

$$a = b = c,$$

sie verhalten sich daher wie isotrope Mittel. Alle anderen Krystalle sind doppeltbrechend, und zwar sind diejenigen mit einer krystallographischen Hauptachse einachsig; die optische und die krystallographische Hauptachse fallen hier zusammen. Bei den Krystallen, die drei senkrechte krystallographische Achsen haben, fallen diese mit den optischen *Elasticitätsachsen*, unseren Coordinatenachsen, zusammen. Bei den anderen Krystallen sind die optischen Elasticitätsachsen für die verschiedenfarbigen Lichtstrahlen verschieden.

Die beiden Werthe von V^2 in (19) lassen sich einfacher schreiben, wenn man an Stelle der Richtungscosinus (l, m, n) der Wellennormale die Winkel u_1 und u_2 einführt, welche diese mit den beiden optischen Achsen bildet, dann ist nämlich

$$
\begin{aligned}
l l_1 + n n_1 &= \cos u_1\\
-l l_1 + n n_1 &= \cos u_2,
\end{aligned}
\tag{21}
$$

woraus folgt

$$l = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2-c^2}{a^2-b^2}}\,(\cos u_1 - \cos u_2)$$

$$n = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2-c^2}{b^2-c^2}}\,(\cos u_1 + \cos u_2)$$

und

$$m^2 = 1 - l^2 - n^2.$$

Schreibt man nun in (19) die Grösse unter dem Wurzelzeichen in der Form

$$(A - B + C)^2 - 4AC,$$

so findet man mit Leichtigkeit ihren Werth gleich dem Quadrate von

$$(a^2 - c^2) \sin u_1 \sin u_2,$$

und auf ähnlichem Wege ergiebt sich

$$l^2(b^2+c^2)+m^2(c^2+a^2)+n^2(a^2+b^2)=a^2+c^2+(a^2-c^2)\cos u_1 \cos u_2.$$

Bezeichnet man also die beiden Werthe von V durch V_o und V_e, so ergiebt sich

$$V_o^2 = \frac{a^2+c^2}{2} + \frac{a^2-c^2}{2}\cos(u_1 - u_2)$$

$$V_e^2 = \frac{a^2+c^2}{2} + \frac{a^2-c^2}{2}\cos(u_1 + u_2),$$

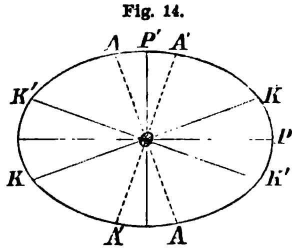
oder, wenn man die halben Winkel einführt,

$$\begin{aligned} V_o^2 &= a^2 - (a^2 - c^2)\sin^2\frac{u_1 - u_2}{2} \\ V_e^2 &= a^2 - (a^2 - c^2)\sin^2\frac{u_1 + u_2}{2}. \end{aligned} \tag{22}$$

Ist der Krystall optisch einachsig, so ist für jede Richtung der Wellennormale $u_1 = u_2$, also die Fortpflanzungsgeschwindigkeit V_o der einen Welle $= a$, d. h. constant. Diese Welle nennt man die *gewöhnliche* oder *ordinäre*, die andere die *ungewöhnliche* oder *extraordinäre*. Diese Namen hat man auch übertragen auf zweiachsige Krystalle, es bezieht sich also in (22) V_o auf die ordinäre, V_e auf die extraordinäre Welle.

Auch die Polarisationsebenen der beiden Wellen lassen sich mit Hülfe der optischen Achsen in einfacher Weise angeben, wie am leichtesten die folgende geometrische Betrachtung lehrt: Die Ebene der Zeichnung sei die Wellenebene; die Ellipse der Schnitt derselben mit dem Elasticitätsellipsoid, ihre Hauptachsen, OP, OP' geben also die Polarisationsrichtung der gewöhnlichen und der ungewöhnlichen Welle;

Fig. 14.



durch sie und die Wellennormale sind daher die Polarisationsebenen jener beiden Wellen bestimmt. Es seien ferner die Durchmesser K und K' die Schnitte der Wellenebene mit den beiden Kreisschnitten; diese sind beide $= \frac{2}{b}$, also einander gleich, und daher sind die Hauptachsen der Ellipse die Linien, welche ihre Winkel halbiren. Ziehen wir nun die Durchmesser A und A' in der Ebene der Zeichnung senkrecht auf den Linien K, so können die gesuchten Richtungen P auch als diejenigen definirt werden, welche die Winkel zwischen den Linien A halbiren. Die Ebenen, welche durch die Linien A senkrecht zur Ebene der Zeichnung gelegt sind, lassen sich aber leicht in Worten definiren: Es sind dies die durch die Wellennormale und je eine optische Achse gelegten Ebenen, denn in jeder liegt ausser der Wellennormale auch eine optische Achse, weil sie auf einem Durchmesser K senkrecht steht und dieselbe Eigenschaft auch einer optischen Achse zukommt. Die Polarisationsebenen der beiden Wellen halbiren hiernach die Winkel zwischen *den* Ebenen, welche durch die Wellennormale und je eine optische Achse gelegt sind.

Es bleibt noch übrig zu entscheiden, welche von diesen Polarisationsebenen der gewöhnlichen, welche der ungewöhnlichen Welle zukommt. Die beiden Ebenen lassen sich dadurch characterisiren, dass die eine zwischen den beiden optischen Achsen hindurchgeht, die andere nicht. Wir wollen nachweisen, dass die Polarisationsebene der gewöhnlichen Welle die erste Eigenschaft hat. Offenbar braucht dieser Nachweis nur für *eine* Lage der Wellenormale geführt zu werden; denn wenn diese sich continuirlich ändert, so kann weder die eine jener Ebenen in die andere, noch auch die gewöhnliche Welle in die ungewöhnliche übergehen, wenn man nur *die* Lagen der Wellenebene vermeidet, bei denen ihre Normale in eine optische Achse fällt. Für den Fall aber, dass $u_1 = u_2 = 90^0$ gewählt wird, ist $V_o = a$, $V_e = c$; nun erfolgen aber die Verschiebungen derjenigen Welle, deren Fortpflanzungsgeschwindigkeit a ist, parallel der z-Achse, und da diese zwischen den optischen Achsen liegt, so geht in diesem, mithin auch in jedem Falle die Polarisationsebene der gewöhnlichen Welle zwischen den optischen Achsen hindurch.

Zwölfte Vorlesung.

Theorie der Lichtstrahlen in einem krystallinischen Medium. — Ihre Definition. — Bestimmung der Richtung und der Fortpflanzungsgeschwindigkeit eines Strahles bei gegebener Wellennormale. — Bestimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit eines Strahles von gegebener Richtung. — Strahlenachsen. — Wellenfläche. — Eigenschaften der Wellenfläche. — Gestalt der Wellenfläche bei ein- und zweiachsigen Krystallen. — Hauptschnitte. — Construction der Strahlen zu einer gegebenen Welle. Innere konische Refraction. — Construction der Wellenebenen zu einem gegebenen Strahle. Aeussere konische Refraction.

§ 1.

Wir wollen jetzt die *Strahlen* in's Auge fassen, die den in der vorigen Vorlesung betrachteten Wellen entsprechen. Denkt man sich ebenen Lichtwellen einen undurchsichtigen Schirm in den Weg gestellt, in dem eine gegen die Wellenlänge sehr grosse Oeffnung sich befindet, so ist die Lichtbewegung nicht geändert innerhalb eines gewissen durch den Rand der Oeffnung gelegten Cylinders, während sie ausserhalb desselben zerstört ist. Das gilt erfahrungsmässig, mag das Mittel isotrop oder krystallinisch sein. Die Richtung, der der Cylinder parallel ist, heisst die Richtung des den Wellen entsprechenden *Strahles*. In einem isotropen Mittel fällt der Strahl mit der Wellennormale zusammen; nicht so bei einem krystallinischen; hier bildet vielmehr der Strahl mit der Wellennormale einen Winkel, welcher von der Richtung der letzteren abhängt.

Um nun die Richtung der zu einer ebenen Welle gehörigen Strahlen zu finden, werden wir zunächst nachweisen, dass es bei ebenen, durch keinen Schirm gehinderten Wellen eine Richtung S giebt, welche die merkwürdige Eigenschaft hat, dass für jedes Element einer ihr parallelen Ebene die Arbeit des Druckes verschwindet, den der Aether auf der einen Seite ausübt, dass diese Arbeit aber in jedem anderen Falle einen von Null verschiedenen Werth hat; durch eine solche Ebene hindurch wird demnach keine Arbeit übertragen. Der Erfahrung zufolge kann nun die Lichtbewegung auf der einen Seite einer Ebene bestehen, während auf der anderen Ruhe herrscht, falls die Ebene dem Strahle parallel ist, welcher der Wellenebene entspricht. Da dies aber andererseits nur möglich ist, falls durch die Ebene hindurch keine Arbeit übertragen wird, so folgt, dass die Richtung des Strahles keine andere sein kann, als die Richtung S.

Um nun die Richtung des zu einer Welle gehörigen Strahles zu finden, denken wir uns eine Ebene, deren Normale die Richtungscosinus p, q, r hat; die Componenten des auf ihre Flächeneinheit ausgeübten Druckes sind dann

$$\begin{aligned} &p X_x + q X_y + r X_z \\ &p Y_x + q Y_y + r Y_z \\ &p Z_x + q Z_y + r Z_z, \end{aligned}$$

und die von diesem Drucke in der Zeiteinheit geleistete Arbeit

$$(pX_x+qX_y+rX_z)\frac{\partial u}{\partial t}+(pY_x+qY_y+rY_z)\frac{\partial v}{\partial t}+(pZ_x+qZ_y+rZ_z)\frac{\partial w}{\partial t}\,.$$

Berücksichtigt man nun, dass nach (2a) der vorigen Vorlesung die Differentialquotienten $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$, $\frac{\partial w}{\partial t}$ beziehlich mit α, β, γ, und dass nach (4) die Druckcomponenten $X_x, Y_y, \ldots$, mit den Ableitungen von $\bar{F}$ nach $\bar{x}_x, \bar{y}_y$, proportional sind, so ergiebt sich, dass die gesuchte Arbeit, abgesehen von einem nicht verschwindenden Factor, nämlich von $\left(-\frac{\partial \sigma}{\partial s}\cdot\frac{\partial \sigma}{\partial t}\right)$, folgendermassen geschrieben werden kann

$$pP + qQ + rR,$$

wo

$$P = \alpha\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{x}_x} + \beta\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{x}_y} + \gamma\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{x}_z}$$

ist, und ähnliche Gleichungen für Q und R gelten. Vertauscht man aber in der in (4a) der vorigen Vorlesung abgeleiteten Gleichung

$$l\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{x}_x} + m\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{x}_y} + n\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{x}_z} = \frac{\partial \bar{F}}{\partial \alpha}$$

die Grössen (α, β, γ) und (l, m, n), welche in den Ausdrücken von $\bar{x}_x, \ldots$ symmetrisch auftreten, so erhält man

$$P = \alpha\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{x}_x} + \beta\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{x}_y} + \gamma\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{x}_z} = \frac{\partial \bar{F}}{\partial l};$$

hierdurch, und durch entsprechende Betrachtungen für Q und R ergiebt sich endlich

$$P = \frac{\partial \bar{F}}{\partial l}, \qquad Q = \frac{\partial \bar{F}}{\partial m}, \qquad R = \frac{\partial \bar{F}}{\partial n}.$$

Die Arbeit des auf jene Ebene ausgeübten Druckes verschwindet hiernach dann und nur dann, wenn

$$p\frac{\partial \overline{F}}{\partial l} + q\frac{\partial \overline{F}}{\partial m} + r\frac{\partial F}{\partial n} = 0$$

ist.

Es seien nun ξ, η, ζ die Cosinus einer neuen Richtung, die dadurch bestimmt sein soll, dass

$$\xi : \eta : \zeta = \frac{\partial \overline{F}}{\partial l} : \frac{\partial \overline{F}}{\partial m} : \frac{\partial \overline{F}}{\partial n} \tag{1}$$

ist; die nothwendige und hinreichende Bedingung für das Verschwinden der gedachten Arbeit ist dann die, dass

$$p\xi + q\eta + r\zeta = 0,$$

d. h. dass die Ebene der Richtung (ξ, η, ζ) parallel ist. Die durch (1) bestimmte Richtung S ist somit die der zu den ebenen Wellen gehörigen Strahlen.

Um nun ξ, η, ζ zu berechnen, führen wir wieder die Function $\mathfrak{F}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c})$ ein, und bemerken, dass wegen (11) der vorigen Vorlesung

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \overline{F}}{\partial l} &= \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{c}}\beta - \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{b}}\gamma \\
\frac{\partial \overline{F}}{\partial m} &= \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{a}}\gamma - \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{c}}\alpha \\
\frac{\partial \overline{F}}{\partial n} &= \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{b}}\alpha - \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{a}}\beta,
\end{aligned}$$

und dass ferner

$$\begin{aligned}
l &= \beta\mathfrak{c} - \gamma\mathfrak{b} \\
m &= \gamma\mathfrak{a} - \alpha\mathfrak{c} \\
n &= \alpha\mathfrak{b} - \beta\mathfrak{a},
\end{aligned}$$

ist; ersetzt man also die partiellen Ableitungen von $\mathfrak{F}$ durch ihre Ausdrücke in (13) der vorigen Vorlesung, und berücksichtigt man ausserdem wieder die dort in (11) gefundenen Gleichungen, so ergiebt sich

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \overline{F}}{\partial l} &= V^2 l - \mu\mathfrak{a} \\
\frac{\partial \overline{F}}{\partial m} &= V^2 m - \mu\mathfrak{b} \\
\frac{\partial \overline{F}}{\partial n} &= V^2 n - \mu\mathfrak{c}.
\end{aligned} \tag{2}$$

Damit sind die Verhältnisse der Richtungscosinus ξ, η, ζ bestimmt, und wir können hiernach setzen

$$\begin{aligned}
SV\xi &= V^2 l - \mu\mathfrak{a} \\
SV\eta &= V^2 m - \mu\mathfrak{b} \\
SV\zeta &= V^2 n - \mu\mathfrak{c},
\end{aligned} \tag{3}$$

wo S so zu bestimmen ist, dass

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1 \tag{3a}$$

wird. Es folgt daraus

$$\xi\alpha + \eta\beta + \zeta\gamma = 0, \tag{4}$$

d. h. *der Strahl ist, wie die Wellennormale, senkrecht zur Schwingungsrichtung.* Ferner erhält man

$$S(\xi l + \eta m + \zeta n) = V. \tag{5}$$

Diese Gleichung lehrt die Bedeutung von S kennen: Da nämlich der Coefficient von S offenbar der Cosinus des Winkels ε zwischen der Richtung des Strahles und derjenigen der Wellennormale ist, so sagt sie aus, dass V die Projection auf die Wellennormale einer Strecke S des Strahles ist; es ist daher S die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Bewegung in der Richtung des Strahles, oder, wie man sagt, die *Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Strahles.*

Quadrirt und addirt man endlich die Gleichungen (3), so ergiebt sich zur Bestimmung von μ

$$S^2 V^2 = V^4 + \mu^2, \quad \text{oder} \quad \mu^2 = V^2(S^2 - V^2), \tag{6}$$

die Grösse μ ist demnach stets reell; sie steht in einer sehr nahen Beziehung zur Richtung des Strahles S; aus (6) und (5) ergiebt sich nämlich

$$\cos\varepsilon = \frac{V}{S} = \frac{V^2}{\sqrt{V^4 + \mu^2}},$$

oder, wenn das Vorzeichen von ε passend gewählt wird,

$$\mu = V^2 \operatorname{tg} \varepsilon. \tag{6a}$$

§ 2.

Wir wollen jetzt die zu den beiden Wellen gehörigen Werthe von S aus den Bestimmungsgleichungen (3) berechnen, und zu diesem Zwecke die bis jetzt ganz willkürlich angenommenen Coordinatenachsen wieder mit den Elasticitätsachsen zusammenfallen lassen; dann bestimmen sich die Grössen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ und μ^2 aus den Gleichungen (15) der eilften Vorlesung; setzen wir also die hieraus sich ergebenden Werthe der erwähnten Grössen in die Bestimmungsgleichungen (3) ein, so gehen diese bei Benutzung von (6) über in

$$\begin{aligned}
S\xi &= Vl\left(1 - \frac{S^2 - V^2}{a^2 - V^2}\right) = Vl\,\frac{a^2 - S^2}{a^2 - V^2} \\
S\eta &= Vm\left(1 - \frac{S^2 - V^2}{b^2 - V^2}\right) = Vm\,\frac{b^2 - S^2}{b^2 - V^2} \\
S\zeta &= Vn\left(1 - \frac{S^2 - V^2}{c^2 - V^2}\right) = Vn\,\frac{c^2 - S^2}{c^2 - V^2},
\end{aligned} \tag{7}$$

oder

$$\begin{aligned} \frac{S\xi}{a^2 - S^2} &= \frac{Vl}{a^2 - V^2} \\ \frac{S\eta}{b^2 - S^2} &= \frac{Vm}{b^2 - V^2} \\ \frac{S\zeta}{c^2 - S^2} &= \frac{Vn}{c^2 - V^2}, \end{aligned} \tag{7a}$$

oder auch

$$\begin{aligned} Vl &= S\xi\left(1 + \frac{S^2 - V^2}{a^2 - S^2}\right) \\ Vm &= S\eta\left(1 + \frac{S^2 - V^2}{b^2 - S^2}\right) \\ Vn &= S\zeta\left(1 + \frac{S^2 - V^2}{c^2 - S^2}\right). \end{aligned} \tag{7b}$$

Die letzte Form ist sehr geeignet, um S durch ξ, η, ζ allein zu bestimmen, d. h. um die Geschwindigkeit eines Strahles von gegebener Richtung zu finden. Multiplicirt man nämlich die Gleichungen (7b) beziehlich mit $S\xi$, $S\eta$, $S\zeta$ und addirt sie, so erhält man bei Rücksicht auf die Relation (5)

$$\frac{\xi^2}{a^2 - S^2} + \frac{\eta^2}{b^2 - S^2} + \frac{\zeta^2}{c^2 - S^2} + \frac{1}{S^2} = 0, \tag{8}$$

oder durch Addition der identischen Gleichung

$$\frac{1}{S^2}(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) - \frac{1}{S^2} = 0$$

$$\frac{a^2\xi^2}{a^2 - S^2} + \frac{b^2\eta^2}{b^2 - S^2} + \frac{c^2\zeta^2}{c^2 - S^2} = 0. \tag{8a}$$

Hieraus folgt, dass die Gleichung (8) nicht vom dritten, sondern nur vom zweiten Grade in S^2 ist; sie ergiebt demnach auch nur zwei Werthe von S, von denen der eine sich auf den gewöhnlichen, der andere auf den ungewöhnlichen Strahl bezieht. Offenbar entsteht sie aus der in (16) der vorigen Vorlesung für V gefundenen Gleichung, wenn man

$$l,\ m,\ n,\ V,\ a,\ b,\ c$$

ersetzt durch

$$\xi,\ \eta,\ \zeta,\ \frac{1}{S},\ \frac{1}{a},\ \frac{1}{b},\ \frac{1}{c}, \tag{9}$$

und daraus ist zu schliessen, dass alle vorher für die Wellennormalen abgeleiteten Resultate unmittelbar auf die Strahlen übertragen werden können.

Bei der Betrachtung der Gleichung für V hatte sich ergeben, dass sie gleiche Wurzeln hat, sobald die Wellennormale mit einer der optischen Achsen zusammenfällt. Auch die Gleichung für S besitzt somit gleiche Wurzeln, und zwar ergiebt sich aus (9), sowie aus (20) der vorigen Vorlesung, dass dies der Fall sein wird für

$$\xi = \pm \sqrt{\frac{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2}}}, \quad \eta = 0, \quad \zeta = \sqrt{\frac{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2}}}, \tag{10}$$

und zwar ist dann

$$S = b.$$

Für diese Richtungen also sind die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der beiden zugehörigen Strahlen gleich und zwar gleich b; man hat deshalb die jenen beiden Werthsystemen von ξ, η, ζ entsprechenden Richtungen die *Strahlenachsen* genannt. Ebenso wie die optischen Achsen stehen sie senkrecht auf der mittleren Elasticitätsachse und sie weichen überhaupt nur wenig von jenen ab, da für alle Krystalle die Grössen a, b, c nicht viel von einander verschieden sind.

Es bleibt uns jetzt noch übrig, V durch die Grössen S, ξ, η, ζ, und umgekehrt S durch V, l, m, n auszudrücken. Diese Darstellungen ergeben sich leicht, wenn man die drei Gleichungen (7) oder (7b) quadrirt und addirt, und alsdann entweder die Gleichung (16) der vorigen, oder die Gleichung (8) dieser Vorlesung berücksichtigt, denen V^2 und S^2 genügen; dann erhält man nämlich

$$\frac{1}{S^2 - V^2} = V^2\left(\frac{l^2}{(a^2 - V^2)^2} + \frac{m^2}{(b^2 - V^2)^2} + \frac{n^2}{(c^2 - V^2)^2}\right); \tag{11}$$

und

$$\frac{1}{S^2 - V^2} = S^2\left(\frac{\xi^2}{(a^2 - S^2)^2} + \frac{\eta^2}{(b^2 - S^2)^2} + \frac{\zeta^2}{(c^2 - S^2)^2}\right). \tag{11a}$$

§ 3.

Die Beziehungen, welche zwischen den Wellennormalen und den zu ihnen gehörigen Strahlen bestehen, lassen sich am einfachsten mit Hülfe der sogenannten *Wellenfläche* angeben, einer Fläche, zu welcher man durch die folgende Ueberlegung gelangt: Wir denken uns im Coordinatenanfangspunkte O eine Lichtquelle und fragen nach dem geometrischen Orte aller Punkte P, bis zu welchen sich in der Zeiteinheit Licht in dem Krystalle fortgepflanzt hat. Sind dann x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten eines dieser Punkte, ξ, η, ζ die Richtungscosinus des Strahles OP, und S die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in der Richtung desselben, so ist offenbar

$$x = S\xi, \quad y = S\eta, \quad z = S\zeta,$$

wo ξ, η, ζ und S durch (8) oder (8a) mit einander verbunden sind. Die Gleichung der Wellenfläche ist somit

$$\frac{x^2}{a^2 - S^2} + \frac{y^2}{b^2 - S^2} + \frac{z^2}{c^2 - S^2} + 1 = 0, \tag{12}$$

oder auch

$$\frac{a^2 x^2}{a^2 - S^2} + \frac{b^2 y^2}{b^2 - S^2} + \frac{c^2 z^2}{c^2 - S^2} = 0, \tag{12a}$$

wo S^2 in der Bedeutung

$$S^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

beibehalten ist.

Um eine wichtige Eigenschaft der Wellenfläche zu finden, suchen wir die Richtung ihrer Normale im Punkte (x, y, z). Die Richtungscosinus derselben verhalten sich bekanntlich zu einander wie die partiellen Ableitungen der linken Seite von (12) nach x, y und z, sie stehen also in den Verhältnissen

$$\begin{gathered}
x\left(\frac{1}{a^2 - S^2} + \frac{x^2}{(a^2 - S^2)^2} + \frac{y^2}{(b^2 - S^2)^2} + \frac{z^2}{(c^2 - S^2)^2}\right) : \\
y\left(\frac{1}{b^2 - S^2} + \frac{x^2}{(a^2 - S^2)^2} + \frac{y^2}{(b^2 - S^2)^2} + \frac{z^2}{(c^2 - S^2)^2}\right) : \\
z\left(\frac{1}{c^2 - S^2} + \frac{x^2}{(a^2 - S^2)^2} + \frac{y^2}{(b^2 - S^2)^2} + \frac{z^2}{(c^2 - S^2)^2}\right).
\end{gathered}$$

Die Gleichungen (7b) geben aber, wenn man sie durch $S^2 - V^2$ dividirt und rechts für $\frac{1}{S^2 - V^2}$ den in (11a) dafür gefundenen Werth setzt,

$$\begin{aligned}
\frac{V}{S^2 - V^2}\, l &= x\left(\frac{1}{a^2 - S^2} + \frac{x^2}{(a^2 - S^2)^2} + \frac{y^2}{(b^2 - S^2)^2} + \frac{z^2}{(c^2 - S^2)^2}\right) \\
\frac{V}{S^2 - V^2}\, m &= y\left(\frac{1}{b^2 - S^2} + \frac{x^2}{(a^2 - S^2)^2} + \frac{y^2}{(b^2 - S^2)^2} + \frac{z^2}{(c^2 - S^2)^2}\right) \\
\frac{V}{S^2 - V^2}\, n &= z\left(\frac{1}{c^2 - S^2} + \frac{x^2}{(a^2 - S^2)^2} + \frac{y^2}{(b^2 - S^2)^2} + \frac{z^2}{(c^2 - S^2)^2}\right),
\end{aligned}$$

und hieraus folgt, dass die Richtungscosinus der Normale der Wellenfläche im Punkte (x, y, z) beziehlich gleich l, m, n sind; die in einem Punkte P an die Wellenfläche gelegte Tangentialebene ist also der zur Strahlenrichtung OP gehörigen Wellenebene parallel.

Da endlich nach (5a) die Gleichung

$$lx + my + nz = V \tag{13}$$

besteht, so ist V der Abstand der im Punkte P an die Wellenfläche gelegten Tangentialebene vom Anfangspunkte; die Gleichung dieser Ebene ist demnach

$$lX + mY + nZ = V,$$

wo X, Y, Z die laufenden Coordinaten sind, und V durch die Gleichung

$$\frac{l^2}{a^2 - V^2} + \frac{m^2}{b^2 - V^2} + \frac{n^2}{c^2 - V^2} = 0$$

mit den Richtungscosinus (l, m, n) zusammenhängt.

Denkt man sich demnach irgend eine Wellenebene, welche zur Zeit $t = 0$ durch den Coordinatenanfangspunkt hindurch gegangen ist, so fällt sie zur Zeit $t = 1$ mit einer Tangentialebene der Wellenfläche zusammen; die Wellenfläche ist die von allen diesen Ebenen eingehüllte Oberfläche. Der zu einer Wellenebene gehörige Strahl geht durch ihren Berührungspunkt und den Anfangspunkt. Mit Hülfe der Wellenfläche kann man somit leicht zu einer gegebenen Strahlenrichtung die Wellennormalen und zu einer gegebenen Wellennormale die zugehörigen Strahlenrichtungen finden: Zieht man nämlich im ersten Falle vom Anfangspunkte aus einen Radiusvector parallel der Strahlenrichtung und legt dann durch seine Schnittpunkte mit der Wellenfläche Tangentialebenen an dieselbe, so sind diese den zu dem Strahle gehörigen Wellenebenen parallel, und die vom Anfangspunkte auf sie gefällten Lothe ergeben die ihnen entsprechenden Fortpflanzungsgeschwindigkeiten. Umgekehrt findet man die zu einer gegebenen Wellenebene gehörigen Strahlenrichtungen, wenn man die zu ihr parallelen Tangentialebenen an die Wellenfläche zieht, und ihre Berührungspunkte mit dem Anfangspunkte verbindet.

§ 4.

Wir wollen uns nun eine ungefähre Vorstellung von der Gestalt der Wellenfläche zu bilden suchen. Zuerst bemerken wir, dass sie symmetrisch in Bezug auf unsere Coordinatenebenen ist, da in ihren Gleichungen in (12) und (12a) nur die Quadrate der Coordinaten vorkommen. Schafft man bei ihrer einen oder anderen Form die Nenner fort, so wird sie scheinbar vom sechsten Grade, indessen heben sich in (12) die Glieder sechster Ordnung, nämlich S^6 fort, während aus (12a) der Factor $(x^2 + y^2 + z^2)$ heraustritt, welcher fortgelassen werden kann, da er für uns keine Bedeutung hat. Die Wellenfläche ist somit vom vierten Grade.

Wird der Krystall zunächst als einachsig angenommen, ist also

$$a = b,$$

so tritt in der von ihren Nennern befreiten Gleichung der Wellenfläche $a^2 - S^2$ als Factor auf; ein Theil dieser Fläche ist also die Kugel

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2; \tag{14}$$

für den anderen Theil ist

$$a^2(x^2 + y^2)(c^2 - S^2) + c^2 z^2(a^2 - S^2) = 0,$$

oder bei Fortlassung des Factors S^2

$$a^2c^2 - a^2(x^2 + y^2) - c^2z^2 = 0,$$

d. h.

$$\frac{x^2 + y^2}{c^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1. \tag{14a}$$

Die Wellenfläche der einachsigen Krystalle zerfällt also in zwei Oberflächen zweiten Grades, sie besteht nämlich aus einer Kugel und einem Rotationsellipsoid, dessen Rotationsachse in die optische Achse fällt und dieselbe Länge wie der Durchmesser der Kugel hat, welches also die Kugel in der optischen Achse berührt. Die Kugel ist die Wellenfläche des gewöhnlichen, das Ellipsoid die des ungewöhnlichen Lichtes.

Ist das Ellipsoid ein verlängertes, ist also $a > c$, so heisst der Krystall ein *positiver*, in diese Klasse gehört z. B. der Bergkrystall; ist dasselbe dagegen ein abgeplattetes, d. h. $a < c$, so heisst der Krystall ein *negativer*, zu diesen gehört der Kalkspath, bei welchem die Erscheinungen sich ganz besonders deutlich zeigen und auch zuerst entdeckt wurden.

Bei einem zweiachsigen Krystall findet ein solches Zerfallen der Wellenfläche in zwei Theile nicht statt; aber es findet statt bei ihren *Hauptschnitten*, den Schnitten mit unseren Coordinatenebenen. Für $z = 0$ wird nämlich die von ihren Nennern befreite Gleichung (12a) einmal erfüllt durch

$$S^2 = c^2,$$

dann aber auch durch

$$\frac{a^2x^2}{a^2 - S^2} + \frac{b^2y^2}{b^2 - S^2} = 0,$$

wo jetzt

$$S^2 = x^2 + y^2$$

zu setzen ist, d. h. bei Fortlassung des Factors $(x^2 + y^2)$ durch

$$a^2b^2 - a^2x^2 - b^2y^2 = 0.$$

Der Schnitt der Wellenfläche und der Ebene $z = 0$ ist somit ein Kreis und eine Ellipse, deren Gleichungen beziehlich sind

$$x^2 + y^2 = c^2 \quad \text{und} \quad \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1. \tag{15}$$

Ganz ebenso ergiebt sich, dass auch die beiden anderen Hauptschnitte der Wellenfläche je ein Kreis und eine Ellipse sind, und ihre Gleichungen sind für $x = 0$

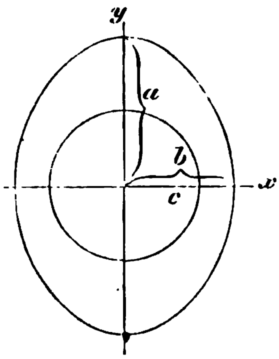
$$y^2 + z^2 = a^2 \quad \text{und} \quad \frac{y^2}{c^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1, \tag{15a}$$

und für $y = 0$

$$z^2 + x^2 = b^2 \quad \text{und} \quad \frac{z^2}{a^2} + \frac{x^2}{c^2} = 1. \tag{15b}$$

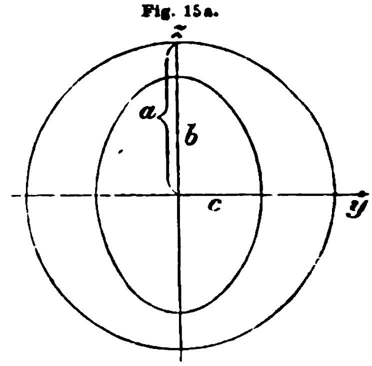
Nehmen wir $a > b > c$ an, so haben also die Schnitte etwa folgende Gestalt

Fig. 15.



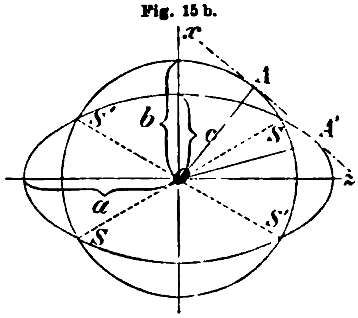
$z = 0$

Fig. 15 a.



$x = 0$

Fig. 15 b.



$y = 0$

Die Schnittfigur (15 b), welche für $y = 0$ erhalten wird, besitzt zwei gemeinsame Durchmesser S, S', es sind das die Strahlenachsen, da für sie der gewöhnliche und der ungewöhnliche Strahl dieselbe Geschwindigkeit besitzt.

§ 5.

Mit Hülfe der Wellenfläche findet man, wie wir gesehen haben, die zu einer Wellenebene von gegebener Richtung gehörigen Strahlen, indem man die zu dieser parallelen Tangentialebenen sucht und ihre Berührungspunkte mit dem Anfangspunkt verbindet. Die Radiivectoren nach den Berührungspunkten sind dann die gesuchten Strahlen, die vom Anfangspunkte auf die Tangentialebenen gefällten Lothe die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der ihnen entsprechenden Wellen. Ist die Wellenebene einer der Achsen parallel, so liegen diese Berührungspunkte der Symmetrie wegen im Allgemeinen in dem zu jener Achse senkrechten Hauptschnitt.

Ein hierher gehöriger Fall von besonderem Interesse ist der, dass die gegebene Wellenebene parallel der y-Achse und der gemeinsamen Tangente von Kreis und Ellipse ist; dann ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der gewöhnlichen und der ungewöhnlichen Welle dieselbe, d. h. die Wellennormale eine optische Achse. In der xz-Ebene liegen dann zwei Strahlen OA und OA' in Fig. 15b, von denen der erste mit der optischen Achse zusammenfällt. Aber es sind dieses nicht die einzigen, es gehören vielmehr, wie jetzt gezeigt werden soll, zu der optischen Achse unendlich viele Strahlen, die alle auf einem Kegel liegen.

Multiplicirt man nämlich die Gleichungen (7a) beziehungsweise mit l, m, n, so ergiebt sich, da die rechte Seite wegen (16) der vorigen Vorlesung verschwindet,

$$\frac{\xi l}{a^2 - S^2} + \frac{\eta m}{b^2 - S^2} + \frac{\zeta n}{c^2 - S^2} = 0,$$

und zugleich ist

$$S(\xi l + \eta m + \zeta n) = V.$$

Nimmt man nun an, dass die Wellennormale mit der ersten optischen Achse zusammenfällt, dass also

$$l = l_1 = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}, \qquad m = m_1 = 0, \qquad n = n_1 = \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}$$

und

$$V = b$$

ist, so gehen diese beiden Gleichungen über in

$$\frac{\xi l_1}{a^2 - S^2} + \frac{\zeta n_1}{c^2 - S^2} = 0$$

$$S(\xi l_1 + \zeta n_1) = b,$$

und durch Elimination von S ergiebt sich

$$b^2 = (\xi l_1 c^2 + \zeta n_1 a^2)(\xi l_1 + \zeta n_1),$$

während

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

ist. Führt man endlich an Stelle der Richtungscosinus (ξ, η, ζ) rechtwinklige Coordinaten

$$S\xi = x, \qquad S\eta = y, \qquad S\zeta = z$$

ein, so lässt sich die gefundene Gleichung folgendermassen schreiben

$$b^2(x^2 + y^2 + z^2) = (x l_1 c^2 + z n_1 a^2)(x l_1 + z n_1). \tag{16}$$

Diese Gleichung lehrt, dass die in Rede stehenden Strahlen einen Kegel zweiten Grades bilden, dessen Spitze im Coordinatenanfangspunkte liegt. Der Schnitt desselben mit einer Wellenebene

$$x l_1 + z n_1 = \text{Const.}$$

ist ein Kreis, denn für ihn ist

$$b^2(x^2 + y^2 + z^2) = (x l_1 c^2 + z n_1 a^2) \text{ const.},$$

durch ihn lässt sich also auch eine Kugel legen, und eine Kugel und eine Ebene schneiden sich in einem Kreise. In einem *Kreise* also berührt die auf der optischen Achse senkrechte Tangentialebene die Wellenfläche.

Dass die optische Achse OA in Fig. 15b in dem fraglichen Strahlenkegel liegt, wissen wir schon; in ihr schneidet die xz-Ebene den Kegel, sie muss ihn aber noch in einer zweiten Geraden OA' schneiden; suchen wir die Lage dieser auf, um ein Urtheil über die Oeffnung des Kegels zu gewinnen. Für $y=0$ wird die Gleichung des Kegels

$$b^2(x^2+z^2)-(xl_1c^2+zn_1a^2)(xl_1+zn_1)=0; \tag{16a}$$

sind also

$$xn_1-zl_1=0, \qquad x\nu_1-z\lambda_1=0$$

die Gleichungen der optischen Achse und jener zweiten Schnittlinie, wo λ_1 und ν_1 zwei zu bestimmende Constanten bedeuten, so muss die linke Seite von (16a) identisch gleich

$$(xn_1-zl_1)(x\nu_1-z\lambda_1)$$

sein, und aus den durch Vergleichung der Coefficienten sich ergebenden Gleichungen

$$\begin{gathered} b^2-l_1{}^2c^2=n_1\nu_1 \\ b^2-n_1{}^2a^2=l_1\lambda_1 \\ l_1n_1(c^2+a^2)=n_1\lambda_1+l_1\nu_1 \end{gathered}$$

erhält man leicht

$$\begin{gathered} \lambda_1=l_1c^2, \qquad \nu_1=n_1a^2 \\ b^2=n_1{}^2a^2+l_1{}^2c^2. \end{gathered}$$

Sind nun φ und ψ die Winkel jener beiden Schnittlinien mit der x-Achse, ist also

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{n_1}{l_1}, \qquad \operatorname{tg}\psi=\frac{n_1a^2}{l_1c^2},$$

so ist $d=\psi-\varphi$ die Oeffnung des Strahlenkegels, und man erhält leicht

$$\operatorname{tg}d=\operatorname{tg}(\psi-\varphi)=\frac{l_1n_1(a^2-c^2)}{b^2}=\frac{\sqrt{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}}{b^2}. \tag{17}$$

Beim Arragonit z. B. ist für die Fraunhofer'sche Linie D

$$a=\frac{1}{1.53013}, \quad b=\frac{1}{1.68157}, \quad c=\frac{1}{1.68589},$$

woraus sich dieser Winkel

$$d=1^0 52'$$

ergiebt.

Auf dem Umstande, dass zu einer ebenen Welle, deren Normale mit einer optischen Achse zusammenfällt, der soeben untersuchte Strahlenkegel gehört, beruht die sogenannte *innere konische Refraction zweiachsiger Krystalle.* Wir kommen auf diese in der nächsten Vorlesung zurück, ebenso wie auf die sogenannte *äussere conische Refraction;* diese ist eine Folge davon, dass zu einem Strahle, welcher mit einer Strahlenachse zusammenfällt, unendlich viele Wellenebenen gehören, deren Normalen einen Kegel zweiten Grades bilden. Um diese Behauptung zu beweisen, gehen wir wieder aus von den Gleichungen (7a), multipliciren sie jetzt beziehlich mit $a^2\xi$, $b^2\eta$, $c^2\zeta$ und addiren sie; da alsdann die rechte Seite wegen (8a) verschwindet, so ergiebt sich die für jede Richtung des Strahles geltende Gleichung

$$\frac{a^2\xi l}{a^2-V^2}+\frac{b^2\eta m}{b^2-V^2}+\frac{c^2\zeta n}{c^2-V^2}=0,$$

während, wie vorher,

$$S(\xi l+\eta m+\zeta n)=V$$

ist.

Fällt der Strahl jetzt z. B. mit der ersten Strahlenachse zusammen, ist also

$$\xi=\xi_1=\sqrt{\frac{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}}},\quad \eta=\eta_1=0,\quad \zeta=\zeta_1=\sqrt{\frac{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}}{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}}},$$

$$S=b,$$

so gehen jene beiden Gleichungen über in

$$\frac{a^2\xi_1 l}{a^2-V^2}+\frac{c^2\zeta_1 n}{c^2-V^2}=0$$

$$V=b(\xi_1 l+\zeta_1 n).$$

Eliminirt man endlich aus ihnen die Grösse V und führt alsdann an Stelle der Richtungscosinus l, m, n rechtwinklige Coordinaten

$$Vl=x,\quad Vm=y,\quad Vn=z$$

ein, so ergiebt sich für den geometrischen Ort aller zu einer Strahlenachse gehörigen Wellennormalen die Gleichung

$$a^2c^2(x^2+y^2+z^2)=b^2(a^2\xi_1 x+c^2\zeta_1 z)(\xi_1 x+\zeta_1 z); \tag{18}$$

dieselbe stellt also einen Kegel zweiten Grades dar, und man beweist genau wie vorher, dass er durch jede Ebene, welche senkrecht zur Strahlenachse, deren Gleichung also

$$\xi_1 x+\zeta_1 z=\text{const.}$$

ist, in einem Kreise geschnitten wird

Die Oeffnung δ dieses Kegels findet man genau, wie dies bei der inneren conischen Refraction angegeben wurde, indem man den Winkel aufsucht, welchen die beiden Schnittlinien desselben mit der Ebene $y=0$ bilden, oder kürzer noch, wenn man beachtet, dass die hier zu lösende Aufgabe aus der vorher betrachteten durch die in (9) angegebenen Vertauschungen hervorgeht. Es ergiebt sich hier der Winkel δ aus der Gleichung

$$\operatorname{tg}\delta=\frac{\xi_1\zeta_1\sqrt{\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}\right)}}{\frac{1}{b^2}}=\frac{\sqrt{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}}{ac}, \tag{19}$$

die Winkel d und δ hängen also durch die Gleichung

$$b^2\operatorname{tg} d=ac\operatorname{tg}\delta. \tag{19a}$$

mit einander zusammen.

Dreizehnte Vorlesung.

Reflexion und Brechung an der Grenze krystallinischer Mittel. — Bestimmung der Richtung und der Geschwindigkeit der reflectirten und gebrochenen Wellen. — Construction derselben mit Hülfe der Wellenfläche. Aeussere und innere konische Refraction. — Berechnung der Richtung und Geschwindigkeit der reflectirten und gebrochenen Wellen. — Die Mittel seien einachsig. — Berechnung der Amplituden und der Polarisationsrichtung der reflectirten und gebrochenen Wellen. — Grenzbedingung. — Princip der Coexistenz kleiner Bewegungen. — Aufstellung der vier Bedingungsgleichungen zwischen den Amplituden der einfallenden, reflectirten und gebrochenen Wellen. — Das erste Mittel sei isotrop, und es sei nur eine gebrochene gewöhnliche oder ungewöhnliche Welle vorhanden. — Das einfallende Licht sei in beliebigem Azimuth polarisirt. — Das zweite Mittel sei optisch einachsig. — Die Einfallsebene sei parallel oder senkrecht zum Hauptschnitte des einachsigen Krystalles. — Es seien beide Mittel doppelt brechend und das Licht falle senkrecht auf.

§ 1.

Nachdem wir die Lichtbewegung in einem unbegrenzten krystallinischen Medium untersucht haben, wenden wir uns zur Betrachtung der Reflexion und Brechung ebener Lichtwellen an der ebenen Grenzfläche krystallinischer Mittel. Wir gehen aus von dem allgemeinsten Falle, dass *beide* Mittel krystallinisch sind; dieser ist verwirklicht bei den Zwillingskrystallen und als specielle Fälle enthält er *die*, dass das erste oder das zweite Mittel ein isotropes ist.

Die Grenze der beiden Medien sei wieder die xy-Ebene, ihre Gleichung also $z = 0$; auf das Mittel, in dem z negativ ist, beziehen wir ungestrichene, auf dasjenige in welchem z positiv ist, gestrichene Buchstaben. Entsprechend den Annahmen, die wir für isotrope Mittel gemacht haben, werden wir auch hier als Grenzbedingungen zunächst festsetzen, dass für $z = 0$

$$u = u', \quad v = v', \quad w = w' \tag{1}$$

ist. Diese drei Gleichungen sind nicht hinreichend, um, wenn das einfallende Licht gegeben ist, das reflectirte und gebrochene vollständig zu bestimmen, vielmehr werden wir ihnen, wie bei isotropen Mitteln, eine vierte Bedingung noch hinzuzufügen haben; aber sie reichen aus, um die *Richtung* der reflectirten und gebrochenen Wellen zu finden, und mit dieser Aufgabe werden wir uns zunächst beschäftigen.

Wir wollen im ersten und zweiten Mittel Systeme ebener Wellen annehmen. Für ein solches setzen wir

$$
\begin{aligned}
u &= \alpha A \sin\left(\frac{lx+my+nz}{V} - \frac{t}{T}\right) 2\pi \\
v &= \beta A \sin\left(\frac{lx+my+nz}{V} - \frac{t}{T}\right) 2\pi \\
w &= \gamma A \sin\left(\frac{lx+my+nz}{V} - \frac{t}{T}\right) 2\pi .
\end{aligned} \tag{2}
$$

Die Grösse V, die positiv gerechnet werden soll, ist dann die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, A die Amplitude dieser Wellen, (α, β, γ) sind die Richtungscosinus der Verrückung. Nehmen wir nun in jedem Mittel mehrere Wellensysteme der Form (2) an, welche wir durch die Indices 1, 2, ... unterscheiden wollen, so wird den Differentialgleichungen der Lichtbewegung genügt durch

$$
\begin{aligned}
u &= \sum u_1, \quad & v &= \sum v_1, \quad & w &= \sum w_1 \\
u' &= \sum u_1', \quad & v' &= \sum v_1', \quad & w' &= \sum w_1',
\end{aligned} \tag{3}
$$

wo sich die Summationen auf alle im ersten beziehungsweise im zweiten Mittel vorhandenen Wellen beziehen. Damit den Grenzbedingungen (1) genügt werde, sind für $z = 0$ die Gleichungen

$$
\sum u_1 = \sum u_1', \quad \sum v_1 = \sum v_1', \quad \sum w_1 = \sum w_1' \tag{4}
$$

zu erfüllen für alle Werthe von x, y und t; dies ist nur möglich, wenn die sämmtlichen Coefficienten von x beziehungsweise y unter den trigonometrischen Zeichen einander gleich sind, d. h. wenn

$$
\begin{aligned}
\frac{l_1}{V_1} &= \frac{l_2}{V_2} = \cdots = \frac{l_1'}{V_1'} = \frac{l_2'}{V_2'} = \cdots \\
\frac{m_1}{V_1} &= \frac{m_2}{V_2} = \cdots = \frac{m_1'}{V_1'} = \frac{m_2'}{V_2'} = \cdots
\end{aligned} \tag{4a}
$$

ist, und alsdann reduciren sich die für $z = 0$ zu erfüllenden Gleichungen auf solche zwischen den eingeführten Constanten.

Es handelt sich jetzt darum, zu ermitteln, welche Richtungen die einzelnen Wellen haben müssen, damit die Bedingungen (4a) erfüllt werden. Bisher war in dem angenommenen Coordinatensystem nur die z-Achse bestimmt; es soll dasselbe nunmehr so gewählt werden, dass *eine* Wellennormale auf der y-Achse senkrecht steht, dass also einer der Richtungscosinus $m = 0$ ist; nach (4a) sind dann *alle Grössen* $m = 0$, es sind also alle Wellensysteme der y-Achse parallel.

Es sei nun für eine Welle des Systemes φ der Winkel der z-Achse und derjenigen Wellennormale, in deren Richtung die

Wellen fortschreiten, und zwar werde *der* Drehungssinn als der positive aufgefasst, für welchen nach einer Drehung um 90° die positive z-Achse mit der positiven x-Achse zusammenfällt. Dann kann für jede einzelne Welle

$$l = \sin\varphi, \quad m = 0, \quad n = \cos\varphi$$

gesetzt werden, der in (2) angegebene Ausdruck für u geht also in

$$u = \alpha A \sin\left(\frac{x\sin\varphi + z\cos\varphi}{V} - \frac{t}{T}\right)2\pi$$

über, während entsprechende Gleichungen für v und w gelten. Die Grenzbedingungen (4a) endlich werden

$$\frac{\sin\varphi_1}{V_1} = \frac{\sin\varphi_2}{V_2} = \ldots = \frac{\sin\varphi_1'}{V_1'} = \frac{\sin\varphi_2'}{V_2'} = \ldots \tag{4b}$$

Aus diesen Gleichungen in Verbindung damit, dass alle Wellen der y-Achse parallel sind, sind dann die Richtungen der reflectirten und gebrochenen Wellen zu bestimmen.

§ 2.

Die Wellenfläche giebt ein einfaches Mittel, um die durch die Gleichungen (4b) bestimmten ebenen Wellen geometrisch zu construiren: Die folgende Construction ist für einachsige Mittel schon von *Huyghens*, ihre Verallgemeinerung für beliebige krystallinische Medien von *Fresnel* angegeben worden: Denken wir uns an die Wellenfläche eine der gegebenen Wellenebene parallele Tangentialebene gelegt, so wird diese, nach der vorher über die Lage des Coordinatensystems gemachten Voraussetzung, die xy-Ebene in einer zur y-Achse parallelen Geraden schneiden. Durch diese Gerade denken wir uns eine zweite Tangentialebene an die Wellenfläche gelegt, welche dann ebenfalls der y-Achse parallel ist. Dann ergiebt sich leicht, dass diese Tangentialebene die Wellenebene eines zweiten Systemes ebener Wellen sein kann. Sind nämlich φ und φ_1 die Winkel jener beiden Wellennormalen mit der z-Achse, so besteht für sie in der That die Gleichung

$$\frac{\sin\varphi}{V} = \frac{\sin\varphi_1}{V_1},$$

da die Fortpflanzungsgeschwindigkeit für eine Wellenebene nichts Anderes ist als das vom Mittelpunkte der Wellenfläche auf die ihr parallele Tangentialebene gefällte Loth. Die vom Mittelpunkte nach den Berührungspunkten der beiden Tangentialebenen gezogenen Linien ergeben alsdann die zu ihnen gehörigen Strahlen, so dass auch diese unmittelbar durch unsere Construction gefunden werden. Ist die Wellenfläche eine Kugel, wie bei den isotropen Medien, so erhält man nur zwei solcher Tangentialebenen, von denen die eine einer einfallenden Welle angehören kann; die andere giebt dann die reflectirte Welle. Ist die Wellenfläche aber eine Fläche vierten Grades, so erhält man vier Tangentialebenen, und man kann zwei einfallende und zwei reflectirte Wellen haben, von denen dann jedesmal die eine eine gewöhnliche, die andere eine ungewöhnliche Welle sein wird.

Wir haben bis jetzt nur Wellensysteme betrachtet, die in *einem* Mittel verlaufen; um nun dieselbe Aufgabe für den Uebergang von einem Mittel in ein anderes zu lösen, construiren wir für denselben Punkt als Mittelpunkt die Wellenebene für das zweite Mittel, und machen alsdann die vorher angegebene Construction auch für diese Fläche. Jede der so sich ergebenden Tangentialebenen kann alsdann die Wellenebene eines Systemes ebener Wellen im zweiten Mittel sein; ist nämlich für eine dieser Wellen V' die Fortpflanzungsgeschwindigkeit und φ' der Winkel ihrer Normale mit der z-Achse, so ist für sie offenbar die Gleichung

$$\frac{\sin \varphi'}{V'} = \frac{\sin \varphi_1}{V_1}$$

erfüllt. An diese beiden Wellenflächen lassen sich dann durch jene Gerade im Allgemeinen je vier Tangentialebenen legen, man erhält also zusammen acht Wellenebenen, die sämmtlich der y-Achse parallel sind. Von ihnen können gewisse, in dem ersten, wie auch in dem zweiten Mittel, einfallenden, andere wieder reflectirten oder gebrochenen Wellen entsprechen. Welche von den Wellen einfallende, und welche gebrochene oder reflectirte sind, kann dadurch unterschieden werden, ob sie nach der Grenze hin, oder von ihr fortgehen, aber unsere Construction lässt es bei denjenigen Wellen, welche von der Grenze fortgehen, unentschieden, ob es reflectirte oder gebrochene Wellen sind.

Mit den hier gegebenen Hülfsmitteln lassen sich nun die Erscheinungen der *conischen Refraction*, auf welche bereits in der vorigen Vorlesung hingedeutet wurde, vollständig angeben. Wir denken uns zu diesem Zwecke eine planparallele Platte eines optisch zweiachsigen krystallinischen Mittels, welche auf beiden Seiten von Luft umgeben ist. Auf ihre erste Ebene mögen dann Lichtwellen fallen, die eine solche Richtung haben, dass die Normale der im Inneren der Platte fortschreitenden Wellen die Richtung der einen optischen Achse hat. Die obere Fläche werde jetzt mit einem undurchsichtigen Schirm bedeckt, welcher nur eine kleine Oeffnung frei lässt. Man kann dann näherungsweise sagen, dass durch diese *ein Strahl* in das Innere des Krystalles geht. Wäre die Richtung der Wellennormale eine andere, so würden sich im Inneren des Krystalles zwei Strahlen bilden, ein gewöhnlicher und ein ungewöhnlicher, jetzt aber erhält man deren unendlich viele, welche die Oberfläche eines Kegels erfüllen; eine Kante desselben ist die optische Achse selbst, eine zweite liegt in der Ebene des einfallenden Strahles. Diese Strahlen treffen jetzt die zweite Grenzebene und erleiden hier eine Brechung. Da die Wellennormalen aller dieser

Strahlen im Krystalle der optischen Achse desselben parallel waren. so tritt aus der Platte ein Strahlencylinder aus, dessen Kanten dem einfallenden Strahle parallel sind. Diese Erscheinung heisst die *innere conische Refraction.*

Es sollen jetzt die beiden Oberflächen mit einem undurchsichtigen Schirm bedeckt werden, in deren jedem eine kleine Oeffnung so angebracht ist, dass die Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte gerade in eine Strahlenachse fällt, und es mögen von allen möglichen Richtungen aus ebene Wellen auf die Oberfläche auffallen. Es wird dann auch ein Wellensystem geben, welches so gerichtet ist, dass die Strahlen im Inneren des Krystalles gerade von einer Oeffnung zur anderen gehen. Von diesen wird ein Theil durch die zweite Oeffnung austreten, und gerade diesen wollen wir ins Auge fassen. Um die in die Luft tretenden Strahlen zu finden, müssen wir die Wellennormalen suchen, welche zu den Strahlen im Inneren gehören. Im Allgemeinen giebt es deren nur zwei; da der hier betrachtete Strahl aber mit einer Strahlenachse zusammenfällt, so gehören zu ihm unendlich viele Normalen, welche einen ganzen Kegel erfüllen und zu denen die Strahlenachse selbst gehört; eine jede derselben liefert die Normale einer gebrochenen Welle, mithin auch einen gebrochenen Strahl, und zwar fallen diese in der Luft zusammen, so dass Wellennormale und Strahl hier dasselbe ist. Es werden also aus unserer Platte unendlich viele Strahlen austreten, die einen Kegel bilden, und dieses Phänomen nennt man *äussere conische Refraction.* Die Gleichungen, welche die Oeffnung und die Lage dieser Kegel bei der inneren und bei der äusseren Refraction geben, sind in § 5 der vorigen Vorlesung bereits gefunden worden.

§ 3.

Wir wollen jetzt die im vorigen Paragraphen mit Hülfe der Wellenfläche construirten reflectirten und gebrochenen Wellen durch die Rechnung zu bestimmen suchen. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit V einer jeden Welle hängt mit den Richtungscosinus ihrer Normale durch eine Gleichung zusammen, die wir in (19) der eilften Vorlesung für den Fall aufgestellt haben, dass die Coordinatenachsen die Krystallachsen sind. Hier haben wir zwar eine andere Lage des Coordinatensystemes, aber dafür die Vereinfachung, dass die Wellennormalen alle senkrecht zur y-Achse sind. Hier finden wir diese Gleichung auf folgendem Wege.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der zu einer Wellenebene gehörigen gewöhnlichen und ungewöhnlichen Welle standen in einer sehr einfachen Beziehung zu den Hauptachsen derjenigen Ellipse, in welcher eine durch den Mittelpunkt des Elasticitätsellipsoides parallel zur Wellenebene gelegte Ebene dasselbe schneidet: Nach (12) und (12a) der eilften Vorlesung sind nämlich die reciproken Halbachsen dieses Schnittes die beiden Werthe von V, welche zu der betreffenden Wellenebene gehören.

Es war nun die Gleichung des Elasticitätsellipsoides

$$1 = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy, \quad (5)$$

und die Gleichung der durch den Anfangspunkt gelegten Wellenebene

$$x \sin\varphi + z \cos\varphi = 0; \quad (6)$$

die gesuchte Schnittellipse ist demnach durch die beiden Bedingungen (5) und (6) gegeben. Es seien nun (x, y, z) die rechtwinkligen Coordinaten irgend eines Punktes dieser Ellipse, r der zu ihm gehörige Radius vector und ϑ der Winkel, den dieser mit der y-Achse macht, so dass also

$$y = r\cos\vartheta$$

ist; dann kann man setzen

$$x = r\sin\vartheta\cos\varphi, \quad y = r\cos\vartheta, \quad z = -r\sin\vartheta\sin\varphi, \quad (7)$$

da hierdurch die Gleichungen

$$x\sin\varphi + z\cos\varphi = 0, \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

erfüllt werden. Setzt man diese Werthe der Coordinaten in (5) ein, so ergiebt sich die folgende Gleichung der Schnittellipse

$$\frac{1}{r^2} = (a_{11}\cos^2\varphi + a_{33}\sin^2\varphi - 2a_{13}\cos\varphi\sin\varphi)\sin^2\vartheta$$
$$+ a_{22}\cos^2\vartheta + 2(a_{12}\cos\varphi - a_{23}\sin\varphi)\cos\vartheta\sin\vartheta,$$

und wir haben jetzt diejenigen Werthe von ϑ aufzusuchen, welche einem Maximum oder einem Minimum von $\frac{1}{r^2}$ entsprechen. Betrachtet man $\sin\vartheta$ und $\cos\vartheta$ als zwei Variable, die der Bedingung

$$\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta = 1$$

genügen, und versteht man unter V^2 zunächst einen unbestimmten Factor, so findet man hieraus zur Bestimmung der beiden Werthe von V^2 die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= (a_{11}\cos^2\varphi + a_{33}\sin^2\varphi - 2a_{13}\cos\varphi\sin\varphi - V^2)\sin\vartheta \\ &\qquad + (a_{12}\cos\varphi - a_{23}\sin\varphi)\cos\vartheta, \quad (8) \\ 0 &= (a_{12}\cos\varphi - a_{23}\sin\varphi)\sin\vartheta + (a_{22} - V^2)\cos\vartheta, \end{aligned}$$

und da diese nur dann zusammen bestehen können, wenn ihre Determinante verschwindet, so erhält man für V die biquadratische Gleichung

$$\begin{aligned} (a_{11}\cos^2\varphi + a_{33}\sin^2\varphi - 2a_{13}\cos\varphi\sin\varphi - V^2)(a_{22} - V^2) \quad (9) \\ - (a_{12}\cos\varphi - a_{23}\sin\varphi)^2 = 0, \end{aligned}$$

während sich aus den beiden Gleichungen (8) leicht ergiebt

$$V^2 = \frac{1}{r^2};$$

es ist also V die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der betreffenden Welle. Endlich erhält man aus (7) und aus der zweiten Gleichung in (8 für die Richtungscosinus ($\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$) der Hauptachsen die Ausdrücke

$$\mathfrak{a} = \sin\vartheta \cos\varphi, \quad \mathfrak{b} = \cos\vartheta, \quad \mathfrak{c} = -\sin\vartheta \sin\varphi, \tag{10}$$

wenn ϑ der Gleichung genügt

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{V^2 - a_{22}}{a_{12}\cos\varphi - a_{23}\sin\varphi}. \tag{10a}$$

Sind also wieder (α, β, γ) die Richtungscosinus der zu einem Werthe von V gehörigen Schwingungsrichtung, so ist

$$\alpha = -\cos\varphi\cos\vartheta, \quad \beta = \sin\vartheta, \quad \gamma = \sin\varphi\cos\vartheta, \tag{10b}$$

denn hierdurch ist die Richtung bestimmt, welche senkrecht auf der Wellennormale und der gewählten Halbachse steht.

Es mögen nun wieder φ_1, V_1 sich beziehen auf ein gegebenes Wellensystem φ, V auf ein zweites, unbekanntes, welche sich beide im ersten Mittel bewegen. Zwischen V und φ besteht dann ausser der vorher gefundenen Gleichung (9) noch die andere

$$\frac{V}{\sin\varphi} = \frac{V_1}{\sin\varphi_1}; \tag{11}$$

setzen wir den aus ihr sich ergebenden Werth von V^2 in (9) ein, dividiren sie dann durch $\cos^2\varphi$ und benützen die Identität

$$\frac{1}{\cos^2\varphi} = 1 + \operatorname{tg}^2\varphi,$$

so ergiebt sich zur Bestimmung des der zweiten Welle entsprechenden Winkels φ die biquadratische Gleichung

$$\begin{gathered}\left(a_{11} - 2a_{13}\operatorname{tg}\varphi + \left(a_{33} - \frac{V_1^2}{\sin^2\varphi_1}\right)\operatorname{tg}^2\varphi\right)\left(a_{22} + \left(a_{22} - \frac{V_1^2}{\sin^2\varphi_1}\right)\operatorname{tg}^2\varphi\right) \\ - (a_{12} - a_{23}\operatorname{tg}\varphi)^2(1 + \operatorname{tg}^2\varphi) = 0.\end{gathered} \tag{12}$$

Beziehen sich jetzt φ' und V' auf ein unbekanntes Wellensystem im zweiten Mittel, und werden die Constanten hier durch gestrichene Buchstaben bezeichnet, so gelten die entsprechenden Gleichungen

$$\frac{V'}{\sin\varphi'} = \frac{V_1}{\sin\varphi_1} \tag{11a}$$

$$\begin{gathered}\left(a_{11}' - 2a_{13}\operatorname{tg}\varphi' + \left(a_{33}' - \frac{V_1^2}{\sin^2\varphi_1}\right)\operatorname{tg}^2\varphi'\right)\left(a_{22}' + \left(a_{22}' - \frac{V_1^2}{\sin^2\varphi_1}\right)\operatorname{tg}^2\varphi'\right) \\ - (a_{12}' - a_{23}'\operatorname{tg}\varphi')^2(1 + \operatorname{tg}^2\varphi') = 0.\end{gathered} \tag{12a}$$

Sehen wir nun zu, *wie viele* verschiedene Wellen in jedem der beiden Mittel vorhanden sein können: Aus den Gleichungen (10b) und (11) und den entsprechenden, welche für das zweite Mittel gelten, ergiebt sich, dass durch jeden Werth von $\operatorname{tg}\varphi$ und $\operatorname{tg}\varphi'$

die zugehörigen Verrückungen im ersten oder im zweiten Mittel bis auf einen gemeinschaftlichen constanten Factor *eindeutig* bestimmt werden; einem jeden der aus (11) und (12) sich ergebenden Werthe von tg φ und tg φ' entspricht also nur *eine* Welle, und da beide Gleichungen biquadratische sind, so können hiernach vier verschiedene Wellen im ersten, und vier im zweiten Mittel vorhanden sein.

Es sei nun tg φ eine *reelle* Wurzel der biquadratischen Gleichung (12), dann kann die ihr entsprechende Welle im ersten Mittel bezeichnet werden entweder als eine einfallende, oder als eine reflectirte oder gebrochene; als eine einfallende, wenn sie angesehen werden kann als herkommend von einem unendlich entfernten Erschütterungsmittelpunkte, welcher in demselben Mittel liegt, also eine unendlich grosse negative z-Ordinate hat, als eine reflectirte oder gebrochene Welle, wenn das nicht der Fall ist. Ist das Mittel ein isotropes, so ist diese Alternative leicht zu entscheiden, da dann der Erschütterungsmittelpunkt auf der rückwärts verlängerten Wellennormale liegt. In diesem Falle ist also die Welle eine einfallende oder nicht, je nachdem cos φ positiv oder negativ ist. Anders verhält es sich im Allgemeinen bei den doppeltbrechenden Medien: Hier wird die Natur der Welle in der genannten Hinsicht durch den zugehörigen *Strahl* bestimmt, der mit der Wellennormale einen, wenn auch kleinen Winkel bildet: Die Welle ist eine einfallende oder nicht, je nachdem dieser Strahl einen spitzen oder stumpfen Winkel mit der z-Achse bildet. Indessen gilt auch hier dasselbe Kriterium wie bei isotropen Mitteln, wenn nur $\sin^2 \varphi$ unterhalb einer gewissen Grenze liegt, einer Grenze, die nur wenig kleiner als Eins bei allen Krystallen ist, welche eine kleine Doppelbrechung besitzen.

Durch Betrachtungen, die an die Wellenfläche zu knüpfen sind, lässt sich beweisen, dass, wenn die Gleichung (12) vier reelle Wurzeln hat, zwei von ihnen einfallenden, die beiden anderen reflectirten oder gebrochenen Wellen entsprechen, und dass eine einfallende und eine reflectirte oder gebrochene Welle vorhanden ist, falls die genannte Gleichung nur zwei reelle Wurzeln besitzt. Dasselbe gilt von der Gleichung (12a) für das zweite Mittel. Jede reelle Wurzel dieser Gleichungen bestimmt bis auf Vielfache von 2π eindeutig einen Werth von φ, wenn man hinzunimmt, dass nach (11) sin φ und sin φ_1 von gleichem Vorzeichen sind. Eine der Wellen im ersten Mittel ist die gegebene, da $V = V_1$, $\varphi = \varphi_1$ eine Lösung der zwei Gleichungen ist, aus denen die biquadratische folgt. Da die imaginären Wurzeln paarweise auftreten, so folgt zugleich, dass *eine* reflectirte Welle stets reell ist; die zweite einfallende und die zweite reflectirte können aber imaginär sein.

§ 4.

Will man die entwickelten Gleichungen auf specielle Fälle anwenden, so muss man die Elasticitätsconstanten des Aethers ausdrücken durch die Längen der Hauptachsen des Elasticitätsellipsoides und die Winkel, die diese mit den Coordinatenachsen bilden. Es seien für das erste Mittel a, b, c die reciproken Halbachsen des Elasticitätsellipsoides, es sei also

$$a^2\xi^2 + b^2\eta^2 + c^2\zeta^2 = 1$$

seine Gleichung, bezogen auf ein neues System (ξ, η, ζ), dessen Achsen mit den Hauptachsen zusammenfallen, und die folgende Tafel gebe die Cosinus der Winkel an, die diese mit den Coordinatenachsen bilden

	ξ	η	ζ
x	p_1	p_2	p
y	q_1	q_2	q
z	r_1	r_2	r.

Da in Bezug auf das ursprüngliche Coordinatensystem die Gleichung des Elasticitätsellipsoides

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy = 1\,,$$

und da ferner

$$\begin{aligned}\xi &= p_1x + q_1y + r_1z\\ \eta &= p_2x + q_2y + r_2z\\ \zeta &= px + qy + rz\end{aligned}$$

ist, so ergeben sich hiernach die folgenden Ausdrücke für die sechs Constanten a_{ik}

$$\begin{aligned}a_{11} &= a^2p_1^2 + b^2p_2^2 + c^2p^2\,, & a_{23} &= a^2q_1r_1 + b^2q_2r_2 + c^2qr\\ a_{22} &= a^2q_1^2 + b^2q_2^2 + c^2q^2\,, & a_{31} &= a^2r_1p_1 + b^2r_2p_2 + c^2rp\\ a_{33} &= a^2r_1^2 + b^2r_2^2 + c^2r^2\,, & a_{12} &= a^2p_1q_1 + b^2p_2q_2 + c^2pq.\end{aligned} \qquad (13)$$

Die vollständige Bestimmung der reflectirten Wellen wollen wir nur in dem Falle durchführen, dass das Mittel *einachsig* ist; wählen wir die ζ-Achse als optische Achse, nehmen wir also

$$b = a$$

an, so gehen die obigen Gleichungen über in

$$\begin{aligned}a_{11} &= a^2 + (c^2 - a^2)p^2\,, & a_{23} &= (c^2 - a^2)qr\\ a_{22} &= a^2 + (c^2 - a^2)q^2\,, & a_{31} &= (c^2 - a^2)rp\\ a_{33} &= a^2 + (c^2 - a^2)r^2\,, & a_{12} &= (c^2 - a^2)pq\,,\end{aligned} \qquad (13\text{a})$$

wo jetzt also p, q, r die Richtungscosinus der optischen Achse sind. In diesem Falle wissen wir schon, dass die Gleichung zwischen V und φ in zwei lineare für V^2 zerfällt, die eine, auf eine gewöhnliche Welle bezügliche, ist

$$V^2 = a^2,$$

die andere, für eine ungewöhnliche geltende, ist

$$V^2 = a^2 + (c^2 - a^2) \sin^2 u,$$

wo u wieder den Winkel bedeutet, welchen die Wellennormale mit der optischen Achse bildet. Da nun die Richtungscosinus jener beider Richtungen beziehlich

$$\sin\varphi,\ 0,\ \cos\varphi \qquad \text{und} \qquad p,\ q,\ r$$

sind, so ist

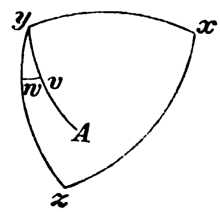
$$\cos u = p \sin\varphi + r \cos\varphi,$$

es ergiebt sich also für die ungewöhnliche Welle die Gleichung

$$V^2 = c^2 + (a^2 - c^2)(p \sin\varphi + r\cos\varphi)^2. \tag{14}$$

Die Richtungscosinus (p, q, r) der optischen Achse wollen wir nunmehr durch zwei unabhängige Grössen ausdrücken: Zu diesem Zwecke denken wir uns aus dem Mittelpunkte einer Kugel mit dem Radius Eins vier Strahlen gezogen, welche den drei Coordinatenrichtungen, sowie derjenigen der optischen Achse parallel sind, und die Kugelfläche beziehlich in x, y, z und A schneiden mögen. Verbinden wir dann die drei Punkte x, y, z mit einander und A mit y durch grösste Kreise, bezeichnen den Bogen Ay mit v und den Winkel Ayz mit w, so ergeben sich für die Cosinus der Winkel Ax, Ay, Az, welche mit p, q, r identisch sind, bekanntlich die folgenden Gleichungen

Fig. 16.



$$p = \sin v \sin w, \quad q = \cos v, \quad r = \sin v \cos w. \tag{14a}$$

Setzt man diese Werthe für p und r in die Gleichung (14) für V^2 ein, so geht sie über in

$$V^2 = c^2 + (a^2 - c^2) \sin^2 v \cos^2(\varphi - w). \tag{14b}$$

Die biquadratische Gleichung für $\operatorname{tg}\varphi$ ist daher für einachsige Krystalle durch die beiden Gleichungen

$$\frac{a^2}{\sin^2\varphi} = \frac{V_1^2}{\sin^2\varphi_1}$$

und

$$\frac{c^2 + (a^2 - c^2)\sin^2 v \cos^2(\varphi - w)}{\sin^2\varphi} = \frac{V_1^2}{\sin^2\varphi_1} \tag{15}$$

zu ersetzen, welche in Bezug auf $\operatorname{tg}\varphi$ vom zweiten Grade sind. Es können hier noch die beiden Fälle unterschieden werden, dass die gegebene einfallende Welle eine gewöhnliche oder eine ungewöhnliche ist.

Ist endlich das Mittel isotrop, so hat man

$$\begin{aligned} a_{11} &= a_{22} = a_{33} = K, \\ a_{23} &= a_{31} = a_{12} = 0 \end{aligned} \tag{15a}$$

zu setzen, und als Richtungen der Hauptachsen des Elasticitätsellipsoides können irgend drei auf einander senkrechte Richtungen angenommen werden.

§ 5.

Wir wollen uns jetzt zur Untersuchung der *Amplituden* der an der Grenzebene $z = 0$ der beiden krystallinischen Mittel reflectirten und gebrochenen Wellen wenden. Wir haben dabei weiteren Gebrauch von den Grenzbedingungen

$$u = u', \quad v = v', \quad w = w' \tag{16}$$

zu machen; zu diesen ist aber noch eine vierte zu fügen, und diese finden wir durch die bereits bei den isotropen Mitteln benutzte Hypothese, dass *nur* transversale Schwingungen auftreten, und dass die Arbeit der Kräfte, welche an der Grenze die wägbaren Theile auf die Aethertheile ausüben, gleich Null ist. Diese Annahme führt durch dieselben Betrachtungen hier wie dort zu der Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t}(X_z' - X_z) + \frac{\partial v}{\partial t}(Y_z' - Y_z) + \frac{\partial w}{\partial t}(Z_z' - Z_z) = 0.$$

Formen wir diese Bedingung wieder um, indem wir die Differentialquotienten $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$, $\frac{\partial w}{\partial t}$ durch die ihnen proportionalen Verrückungscomponenten u, v, w ersetzen, so lässt sich diese vierte Grenzbedingung folgendermassen schreiben

$$u(X_z' - X_z) + v(Y_z' - Y_z) + w(Z_z' - Z_z) = 0. \tag{17}$$

Wir zeigen zunächst, dass diese quadratische Gleichung auch hier durch zwei lineare und homogene ersetzt werden kann, von denen die eine bei Rücksicht auf die übrigen Bedingungen eine Folge der anderen ist, falls keine von ihnen identisch erfüllt wird. Ist das gezeigt, so ist bewiesen, dass auch hier *das Princip der Coexistenz zweier Lichtbewegungen* gilt.

Um diese Gleichungen zu bilden, stellen wir die Ausdrücke für die Druckcomponenten auf. Wir fanden in (1) der eilften Vorlesung

$$-X_z = \frac{\partial F}{\partial x_z}, \qquad -Y_z = \frac{\partial F}{\partial y_z}, \qquad -Z_z = \frac{\partial F}{\partial z_z},$$

wo jetzt

$$\begin{aligned} 2F = {} & a_{11}(y_z^2 - 4y_y z_z) + a_{22}(z_x^2 - 4z_z x_x) + a_{33}(x_y^2 - 4x_x y_y) \\ & + 2a_{23}(2x_x y_z - y_x z_x) + 2a_{31}(2y_y z_x - z_y x_y) + 2a_{12}(2z_z x_y - x_z y_z) \end{aligned}$$

gesetzt werden kann, da das erste Glied des Ausdruckes von $2F$ in Folge der Gleichung

$$x_x + y_y + z_z = 0$$

fortfällt, durch welche die Wellen als transversale charakterisirt werden. Hieraus folgt

$$\begin{aligned} -X_z &= a_{22} x_z + 2 a_{13} y_y - a_{12} y_z - a_{23} x_y \\ -Y_z &= a_{11} y_z + 2 a_{23} x_x - a_{12} x_z - a_{13} x_y \\ -Z_z &= -2 a_{11} y_y - 2 a_{22} x_x + 2 a_{12} x_y . \end{aligned} \tag{18}$$

Substituirt man diese Ausdrücke für die Druckcomponenten in die Differentialgleichung (1b) der eilften Vorlesung

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\frac{\partial X_z}{\partial x} - \frac{\partial Y_z}{\partial y} - \frac{\partial Z_z}{\partial z},$$

und setzt dann für die Grössen x_x, y_y, ... ihre in (1) der eilften Vorlesung gegebenen Werthe, so erkennt man leicht, dass diese Gleichung in der folgenden Form geschrieben werden kann

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial A}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial y}, \tag{19}$$

wenn zur Abkürzung

$$\begin{aligned} A &= a_{21}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) + a_{22}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right) + a_{23}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) \\ B &= a_{11}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) + a_{12}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right) + a_{13}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) \end{aligned} \tag{19a}$$

gesetzt wird.

Auf das zweite Mittel beziehen wir, wie früher, die gestrichenen Buchstaben. Die beiden linearen Grenzbedingungen, von welchen wir beweisen wollen, dass sie die quadratische Gleichung (17) vertreten können, sind diejenigen, welche besagen, dass die beiden Ausdrücke A und B in (19a) ungeändert bleiben, wenn man den Grössen u, v, w und a Striche beifügt, dass also

$$A = A', \qquad B = B' \tag{20}$$

ist.

Dass diese beiden Grenzbedingungen bei Rücksicht auf die übrigen nicht unabhängig von einander sind, schliessen wir daraus, dass aus ihnen die Gleichung

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w'}{\partial t^2}$$

folgt, welche eine identische Folge von (16) ist. Dass aus ihnen und den für die ganze Grenzfläche bestehenden Gleichungen (16) die vierte Grenzbedingung (17) sich ergiebt, lehrt die folgende Rechnung.

Mit Hülfe der Gleichungen (18) und der entsprechenden, welche für das zweite Mittel gelten, bilden wir den Ausdruck für $X_z' - X_z$, indem wir für die Grössen x_x, y_y, ..., x_z', x_y', ... ihre in (1) der eilften Vorlesung angegebenen Werthe setzen. Hier sind die Ableitungen der Verrückungscomponenten nach x und y wegen der

Grenzbedingungen (16) für beide Mittel einander gleich; während wir mit Hülfe der ersten der neuen Bedingungen (20) aus dem gefundenen Ausdruck $\frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial u'}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial v'}{\partial z}$ eliminiren können. Dann erhalten wir

$$\frac{X_z'-X_z}{2}=(a_{22}-a_{22}')\frac{\partial w}{\partial x}+(a_{13}-a_{13}')\frac{\partial v}{\partial y}-(a_{12}-a_{12}')\frac{\partial w}{\partial y}-(a_{23}-a_{23}')\frac{\partial v}{\partial x};$$

auf entsprechende Weise findet man

$$\frac{Y_z'-Y_z}{2}=(a_{11}-a_{11}')\frac{\partial w}{\partial y}+(a_{23}-a_{23}')\frac{\partial u}{\partial x}-(a_{12}-a_{12}')\frac{\partial w}{\partial x}-(a_{13}-a_{13}')\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Hierzu fügen wir ohne Aenderung

$$\frac{Z_z'-Z_z}{2}=-(a_{11}-a_{11}')\frac{\partial v}{\partial y}-(a_{22}-a_{22}')\frac{\partial u}{\partial x}+(a_{12}-a_{12}')\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right).$$

Multiplicirt man diese drei Gleichungen beziehlich mit u, v, w und addirt sie, so erhält man eine Relation, deren linke Seite bis auf den Factor $\frac{1}{2}$ mit der linken Seite der Bedingung in (17) zusammenfällt, und deren rechte Seite ist

$$\begin{aligned}&(a_{11}-a_{11}')\left(v\frac{\partial w}{\partial y}-w\frac{\partial v}{\partial y}\right)+(a_{22}-a_{22}')\left(u\frac{\partial w}{\partial x}-w\frac{\partial u}{\partial x}\right)\\ &+(a_{23}-a_{23}')\left(v\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial v}{\partial x}\right)+(a_{31}-a_{31}')\left(u\frac{\partial v}{\partial y}-v\frac{\partial u}{\partial y}\right)\\ &+(a_{12}-a_{12}')\left(\left(w\frac{\partial v}{\partial x}-v\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\left(w\frac{\partial u}{\partial y}-u\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right).\end{aligned} \tag{21}$$

Man kann nun ohne Schwierigkeit nachweisen, dass dieser Ausdruck bei Rücksicht auf die Grenzbedingungen (16) verschwindet: Es ist nämlich z. B.

$$v\frac{\partial w}{\partial y}-w\frac{\partial v}{\partial y}=v^2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{w}{v}\right),$$

und entsprechend können alle übrigen Coefficienten so geschrieben werden, dass sie mit der Ableitung nach x oder nach y des Verhältnisses von je zweien der drei Verrückungscomponenten u, v, w multiplicirt sind. In dem hier betrachteten Falle setzten sich nun alle Verrückungscomponenten aus mehreren Theilen zusammen, deren Phasen aber für $z=0$ dieselben waren, für welche also die Phase als gemeinsamer Theiler heraustrat. Es sind somit die Verhältnisse $u:v:w$ von x und y unabhängig, und daher verschwinden alle in (21) auftretenden Ausdrücke, oder die ganze rechte Seite; die vierte Grenzbedingung ist also eine Folge der beiden linearen Gleichungen (20).

Bei dem durchgeführten Beweise hatten wir benutzt, dass die z-Achse die Normale der Grenzebene ist, hatten aber die Richtungen der x- und y-Achse einstweilen beliebig angenommen. Wir wollen jetzt wieder die y-Achse einer Wellenebene parallel annehmen, dann gilt dasselbe für alle Wellenebenen, und die sämmtlichen Verrückungscomponenten sind von y unabhängig; die Gleichung (19) geht dann über in

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial A}{\partial x},$$

und daraus folgt, dass die vierte von den fünf Grenzbedingungen bereits eine Folge der Gleichung $w = w'$ ist, also fortgelassen werden kann. Die *vier* Grenzbedingungen sagen dann also aus, dass

$$u,\ v,\ w$$

und

$$a_{11}\frac{\partial v}{\partial z} + a_{12}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right) - a_{13}\frac{\partial v}{\partial x} \tag{22}$$

ungeändert bleiben müssen, wenn man den Zeichen a, u, v, w Striche beifügt.

Im Allgemeinen konnten sich nun in jedem der beiden Mittel mehrere ebene Wellen bewegen; die vier Bedingungen (22) ergeben somit Gleichungen zwischen den Amplituden derselben. Unterscheiden wir diese Systeme wieder durch Indices, setzen wir also

$$u_1 = A_1\alpha_1 \sin\left(\frac{x\sin\varphi_1 + z\cos\varphi_1}{V_1} - \frac{t}{T}\right)2\pi$$

$$v_1 = A_1\beta_1 \sin\left(\frac{x\sin\varphi_1 + z\cos\varphi_1}{V_1} - \frac{t}{T}\right)2\pi$$

$$w_1 = A_1\gamma_1 \sin\left(\frac{x\sin\varphi_1 + z\cos\varphi_1}{V_1} - \frac{t}{T}\right)2\pi,$$

während entsprechende Ausdrücke für die übrigen Wellen im ersten und zweiten Mittel gelten, so gehen diese Bedingungen über in

$$\sum A_1\alpha_1 = \sum A_1'\alpha_1', \quad \sum A_1\beta_1 = \sum A_1'\beta_1', \quad \sum A_1\gamma_1 = \sum A_1'\gamma_1'$$

und

$$\begin{aligned}\sum \frac{A_1}{V_1}\Big(\beta_1(a_{11}\cos\varphi_1 - a_{13}\sin\varphi_1) - a_{12}(\alpha_1\cos\varphi_1 - \gamma_1\sin\varphi_1)\Big)\\ = \sum \frac{A_1'}{V_1'}\Big(\beta_1'(a_{11}'\cos\varphi_1' - a_{13}'\sin\varphi_1') - a_{12}'(\alpha_1'\cos\varphi_1' - \gamma_1'\sin\varphi_1')\Big).\end{aligned} \tag{23}$$

Wir hatten aber in (10a) und (10b) für die Richtungscosinus (α, β, γ) der Verrückung in jeder einzelnen Welle die folgenden Werthe gefunden

$$\alpha = -\cos\varphi\cos\vartheta, \quad \beta = \sin\vartheta, \quad \gamma = \sin\varphi\cos\vartheta,$$

wo

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{V^2 - a_{22}}{a_{12}\cos\varphi - a_{23}\sin\varphi}$$

ist, und wo ϑ den Winkel zwischen der y-Achse und der Normalen zur Polarisationsebene, oder was hier offenbar dasselbe ist, den Winkel zwischen Einfallsebene und Polarisationsebene bedeutet; substituirt man diese Werthe in unsere Grenzbedingungen und berücksichtigt überdies, dass

$$\frac{V_1}{\sin\varphi_1} = \frac{V_2}{\sin\varphi_2} = \dots = \frac{V_1'}{\sin\varphi_1'}, = \dots$$

ist, so gehen dieselben über in

$$\begin{aligned}
&\sum A_1 \cos\varphi_1 \cos\vartheta_1 = \sum A_1' \cos\varphi_1' \cos\vartheta_1' \\
&\sum A_1 \sin\vartheta_1 \qquad\quad = \sum A_1' \sin\vartheta_1' \\
&\sum A_1 \sin\varphi_1 \cos\vartheta_1 = \sum A_1' \sin\varphi_1' \cos\vartheta_1' \\
&\sum \frac{A_1}{\sin\varphi_1}\left(\sin\vartheta_1(a_{11}\cos\varphi_1 - a_{13}\sin\varphi_1) + a_{12}\cos\vartheta_1\right) \\
&= \sum \frac{A_1'}{\sin\varphi_1'}\left(\sin\vartheta_1'(a_{11}'\cos\varphi_1' - a_{13}'\sin\varphi_1') + a_{12}'\cos\vartheta_1'\right).
\end{aligned} \tag{24}$$

Im vorigen Paragraphen war gezeigt worden, dass das ganze System im Allgemeinen aus acht Wellen besteht, von denen vier dem einen, vier dem anderen Mittel angehören. Zwischen den acht Amplituden derselben bestehen also die vier linearen homogenen Gleichungen (24), vier von diesen können demnach beliebig gewählt werden, z. B. so, dass von den vier einfallenden Wellen, welche im Allgemeinen vorhanden sind, die Realität aller acht Wellen vorausgesetzt, drei verschwinden und die vierte eine gegebene Amplitude hat; die Gleichungen (24) lehren dann die Amplituden der beiden reflectirten und der beiden gebrochenen Wellen kennen.

§ 6.

Die allgemeine, jetzt entwickelte Theorie soll nun zunächst durch die Annahme specialisirt werden, dass das erste Medium ein isotropes, etwa Luft, ist. Dann ist wegen (15a)

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = K$$
$$a_{23} = a_{31} = a_{12} = 0$$

zu setzen, und zugleich wollen wir der Kürze halber $K = 1$, also weil $\mu = 1$ ist, auch $V = 1$ annehmen. Von den vier Wellensystemen, welche in der Luft vorhanden sind, sind dann zwei einfallende und zwei reflectirte, und die ersten sowohl als die letzten haben gleiche Richtung; für die vier Werthe des Winkels φ muss dann nach (4b) $\sin\varphi$ denselben Werth haben; für die beiden einfallenden Wellen muss demnach φ *einen* Werth haben, für die zwei reflectirten einen anderen, der jenen zu π ergänzt. Nennen wir also den Einfallswinkel φ, und beziehen wir die Indices 1 und 2 auf die einfallenden, die Indices 3 und 4 auf die reflectirten Wellen, so können wir setzen

$$\varphi_1 = \varphi, \quad \varphi_3 = \pi - \varphi$$
$$\varphi_2 = \varphi, \quad \varphi_4 = \pi - \varphi.$$

Die beiden einfallenden Wellen unterscheiden sich von einander nicht durch ihre Richtung und Fortpflanzungsgeschwindigkeit, wohl aber durch ihren Polarisationszustand, und dasselbe gilt von den reflectirten Wellen. Die Winkel ϑ_1, ϑ_2 und ϑ_3, ϑ_4 erscheinen nach der für $\operatorname{tg}\vartheta$ aufgestellten Gleichung (10a) in unbestimmter Form; bis zu einem gewissen Grade können sie auch beliebig gewählt werden, aber nicht ganz willkürlich. Da wir nämlich das isotrope Medium als speciellen Fall eines krystallinischen angesehen haben, so können wir auch bei ihm von gewöhnlichen und ungewöhnlichen Wellen sprechen. Von den beiden einfallenden, wie von den beiden reflectirten Wellen ist die eine eine gewöhnliche, die andere eine ungewöhnliche; es müssen daher diese wie jene senkrecht auf einander polarisirt sein. Wir können uns das isotrope Mittel als ein einachsiges denken, dessen optische Achse in der Einfallsebene liegt; dann sind die beiden gewöhnlichen Wellen in der Einfallsebene, die beiden ungewöhnlichen senkrecht zu ihr polarisirt, und wir können, indem wir die Indices 1 und 3 auf die gewöhnlichen, 2 und 4 auf die ungewöhnlichen Wellen beziehen

$$\vartheta_1 = 0, \quad \vartheta_2 = \frac{\pi}{2}, \quad \vartheta_3 = 0, \quad \vartheta_4 = \frac{\pi}{2}$$

setzen. Wir können den vorliegenden Fall aber noch etwas anders auffassen: Wegen der Coexistenz der Lichtbewegungen setzen sich hier nämlich die beiden einfallenden Wellen mit den Amplituden A_1 und A_2 zu *einer* einfallenden Welle zusammen, die im Azimuth

$$\operatorname{arctg} \frac{A_2}{A_1}$$

polarisirt ist, und ebenso setzen sich die reflectirten Wellen, deren Amplituden A_3 und A_4 sind, zu *einer* im Azimuth

$$\operatorname{arctg} \frac{A_4}{A_3}$$

polarisirten Welle zusammen.

Unsere vier Gleichungen (24) lassen sich hiernach in diesem Falle folgendermassen schreiben

$$\begin{aligned}
(A_1 - A_3) \cos\varphi &= \sum A_1' \cos\varphi_1' \cos\vartheta_1' \\
(A_1 + A_3) \sin\varphi &= \sum A_1' \sin\varphi_1' \cos\vartheta_1' \qquad (25)\\
A_2 + A_4 &= \sum A_1' \sin\vartheta_1' \\
(A_2 - A_4)\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} &= \sum \frac{A_1'}{\sin\varphi_1'}\left((a_{11}'\cos\varphi_1' - a_{13}'\sin\varphi_1')\sin\vartheta_1' + a_{12}'\cos\vartheta_1'\right).
\end{aligned}$$

Hier bedeutet φ den Einfallswinkel, und $A_1 A_2$ beziehungsweise $A_3 A_4$ sind die Amplituden der Componenten des einfallenden beziehungsweise des reflectirten Lichtes, welches parallel und senkrecht zur Einfallsebene polarisirt ist.

Für die weitere Rechnung ist es am bequemsten, zuerst die speciellen Fälle zu betrachten, dass in dem krystallinischen Mittel nur *eine* Welle von der Amplitude Eins vorhanden ist; unsere Gleichungen bestimmen dann die vier Amplituden A_1, A_2, A_3, A_4. Sie werden alsdann

$$\begin{aligned}(A_1 - A_3)\cos\varphi &= \cos\varphi'\cos\vartheta'\\ (A_1 + A_3)\sin\varphi &= \sin\varphi'\cos\vartheta' \qquad (26)\\ A_2 + A_4 &= \sin\vartheta'\end{aligned}$$

$$(A_2 - A_4)\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} = \frac{1}{\sin\varphi'}\left((a_{11}'\cos\varphi' - a_{13}'\sin\varphi')\sin\vartheta' + a_{12}'\cos\vartheta'\right),$$

wenn wir mit φ' den Winkel der Wellennormale mit der Flächennormale, mit ϑ' das Polarisationsazimuth jener einen Welle im zweiten Mittel bezeichnen. Es müssten hier die vier Fälle unterschieden werden, dass die Welle im krystallinischen Mittel eine einfallende gewöhnliche oder ungewöhnliche, oder eine gebrochene gewöhnliche oder ungewöhnliche ist; jedoch lassen sich nur die beiden letzten experimentell verwirklichen, die beiden ersten nicht. Nehmen wir an, dass in der Luft Wellen auf den Krystall fallen, so haben wir von jenen vier Fällen nur diejenigen zu untersuchen, dass die im Krystall fortschreitende gebrochene Welle eine gewöhnliche oder ungewöhnliche ist.

Für den ersten Fall wollen wir die Zeichen

$$A,\quad \varphi',\quad \vartheta'$$

beibehalten, für den zweiten die bisher so bezeichneten Grössen

$$B,\quad \psi',\quad \eta'$$

nennen. Für jenen Fall gelten dann die Gleichungen (26), für diesen gehen sie über in

$$\begin{aligned}(B_1 - B_3)\cos\varphi &= \cos\psi'\cos\eta'\\ (B_1 + B_3)\sin\varphi &= \sin\psi'\cos\eta' \qquad (26a)\\ B_2 + B_4 &= \sin\eta'\end{aligned}$$

$$(B_2 - B_4)\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} = \frac{1}{\sin\psi'}\left((a_{11}'\cos\psi' - a_{13}'\sin\psi')\sin\eta' + a_{12}'\cos\eta'\right).$$

Aus den Gleichungen (26) und (26a) können die Grössen A und B gefunden werden, wie in den nächsten Paragraphen dieser Vorlesung näher dargelegt werden wird. Wir wollen daher diese Grössen jetzt als gegeben annehmen und dann zeigen, wie aus ihnen andere gefunden werden können, welche auch experimentell leicht bestimmbar sind. Es giebt Vorrichtungen, durch welche dem einfallenden Lichte eine beliebige Polarisationsrichtung gegeben werden kann: Dasselbe kann z. B. aus natürlichem gebildet sein durch Reflexion an Glas unter dem Polarisationswinkel, oder auch durch Doppelbrechung mit Hülfe eines Kalkspathrhomboeders, eines Nikol'schen Prismas, oder einer Turmalinplatte, wie in der nächsten Vorlesung näher dargelegt werden wird. Alle diese Vorrichtungen erlauben, das Polarisationsazimuth des einfallenden Lichtes beliebig zu wählen und dann dasjenige der reflectirten Wellen zu messen. Man lasse nun z. B. mit Hülfe eines Nikol'schen Prismas in irgend einer Ebene geradlinig polarisirtes Licht auf den Krystall fallen; dann bildet sich eine geradlinig polarisirte reflectirte, eine gebrochene gewöhnliche und eine gebrochene ungewöhnliche Welle. Wird alsdann das Prisma gedreht, wodurch sich das Polarisationsazimuth des einfallenden Lichtes ändert, so variirt auch das Verhältniss der Intensitäten der beiden gebrochenen Wellen, und es giebt Stellungen des Prismas, für welche entweder nur der gewöhnliche oder nur der ungewöhnliche Strahl vorhanden ist.

Sind nun α und α_r die Polarisationsazimuthe des einfallenden und des reflectirten Lichtes, so tritt nach der vorher gegebenen Definition der Grössen A und B der erste der soeben angegebenen Fälle für

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{A_2}{A_1}, \qquad \operatorname{tg} \alpha_r = \frac{A_4}{A_3},$$

der zweite für

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{B_2}{B_1}, \qquad \operatorname{tg} \alpha_r = \frac{B_4}{B_3}$$

ein; und diese vier Grössen können somit mit Leichtigkeit experimentell bestimmt werden.

§ 7.

Hat man in den beiden im vorigen Paragraphen angegebenen Hauptfällen die Grössen A und B berechnet, so findet man aus ihnen die Amplituden und das Polarisationsazimuth der reflectirten und gebrochenen Wellen auch für den Fall, dass das einfallende Licht in irgend einem Azimuth geradlinig polarisirt ist, wenn man benutzt, dass sich eine mögliche Lichtbewegung dadurch ergiebt, dass man alle Amplituden einer anderen mit derselben Constanten multiplicirt, und wenn man ferner berücksichtigt, dass auch für krystallinische Mittel das Princip der Coexistenz zweier Lichtbewegungen gilt. Wir wollen die hierzu dienenden Formeln herleiten.

Es seien P, S die Amplituden der Componenten der einfallenden, R_p, R_s die der reflectirten Welle, und es mögen D_o und D_e die Amplituden des gewöhnlichen und des ungewöhnlichen gebrochenen Strahles bezeichnen. Ist dann zunächst $D_o = 1$, $D_e = 0$, so ist, wie vorher gefunden wurde,

$$P = A_1, \quad R_p = A_3$$
$$S = A_2, \quad R_s = A_4.$$

Ist die Amplitude des gewöhnlichen Strahles jetzt $= D_o$, während $D_e = 0$ ist, so folgt aus diesen Gleichungen

$$P = A_1 D_o, \quad R_p = A_3 D_o$$

$$S = A_2 D_o, \quad R_s = A_4 D_o,$$

und ganz ebenso ergeben sich für den Fall, dass $D_o = 0$ und D_e von Null verschieden ist, die Gleichungen

$$P = B_1 D_e, \quad R_p = B_3 D_e$$

$$S = B_2 D_e, \quad R_s = B_4 D_e.$$

Haben endlich D_o und D_e beide einen beliebigen Werth, so folgt aus den obigen Gleichungen

$$\begin{aligned} P &= A_1 D_o + B_1 D_e, \quad R_p = A_3 D_o + B_3 D_e \\ S &= A_2 D_o + B_2 D_e, \quad R_s = A_4 D_o + B_4 D_e; \end{aligned} \tag{27}$$

sind somit jetzt P und S gegeben, so lassen sich aus diesen vier Gleichungen R_p, R_s, D_o und D_e mit Leichtigkeit bestimmen. Ist wieder α das Polarisationsazimuth der einfallenden Welle, α_r das der reflectirten, so ist endlich

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{S}{P} = \frac{A_2 D_o + B_2 D_e}{A_1 D_o + B_1 D_e}, \qquad \operatorname{tg} \alpha_r = \frac{R_s}{R_p} = \frac{A_4 D_o + B_4 D_e}{A_3 D_o + B_3 D_e}. \tag{27a}$$

Wir wollen die beiden speciellen Fälle noch etwas genauer betrachten, dass das einfallende Licht *in* der Einfallsebene oder *senkrecht* zu ihr polarisirt ist. Bei der ersten Annahme ist $\alpha = 0$, d. h. es ist

$$A_2 D_o + B_2 D_e = 0,$$

und hieraus ergiebt sich für das Polarisationsazimuth des reflectirten Lichtes

$$\operatorname{tg} \alpha_r = \frac{A_4 B_2 - A_2 B_4}{A_3 B_2 - A_2 B_3};$$

im zweiten Falle ist $\alpha = \frac{\pi}{2}$, man hat also hier

$$A_1 D_o + B_1 D_e = 0$$

und hieraus folgt für α_r die Gleichung

$$\operatorname{tg} \alpha_r = \frac{A_4 B_1 - A_1 B_4}{A_3 B_1 - A_1 B_3}.$$

Die Gleichungen (27) und (27a) wollen wir jetzt dadurch vereinfachen, dass wir die Intensität des einfallenden Lichtes gleich Eins annehmen, d. h.

$$S = \sin \alpha, \quad P = \cos \alpha$$

setzen; durch die Auflösung der Gleichungen (27) ergiebt sich dann

$$
\left.\begin{aligned}
(A_1 B_2 - A_2 B_1)\, D_o &= B_2 \cos\alpha - B_1 \sin\alpha \\
(A_1 B_2 - A_2 B_1)\, D_e &= -A_2 \cos\alpha + A_1 \sin\alpha \\
(A_1 B_2 - A_2 B_1)\, R_p &= (A_3 B_2 - A_2 B_3)\cos\alpha - (A_3 B_1 - A_1 B_3)\sin\alpha \\
(A_1 B_2 - A_2 B_1)\, R_s &= (A_4 B_2 - A_2 B_4)\cos\alpha - (A_4 B_1 - A_1 B_4)\sin\alpha
\end{aligned}\right\} \quad (28)
$$

$$\operatorname{tg}\alpha_r = \frac{(A_4 B_2 - A_2 B_4)\cos\alpha - (A_4 B_1 - A_1 B_4)\sin\alpha}{(A_3 B_2 - A_2 B_3)\cos\alpha - (A_3 B_1 - A_1 B_3)\sin\alpha}.$$

Ist das einfallende Licht natürliches, ist also der Winkel α variabel, so ergeben sich die Intensitäten der gebrochenen und der reflectirten Welle, indem man das arithmetische Mittel aus den Quadraten der Amplituden nimmt, welche allen Werthen von α zwischen 0 und 2π entsprechen; dadurch erhält man für die Intensität der gewöhnlichen gebrochenen Welle den Werth

$$\frac{1}{2}\,\frac{B_1^2 + B_2^2}{(A_1 B_2 - A_2 B_1)^2},$$

während die Intensität der ungewöhnlichen Welle

$$\frac{1}{2}\,\frac{A_1^2 + A_2^2}{(A_1 B_2 - A_2 B_1)^2},$$

und die der reflectirten

$$\frac{1}{2}\,\frac{(A_3 B_1 - A_1 B_3)^2 + (A_4 B_1 - A_1 B_4)^2 + (A_3 B_2 - A_2 B_3)^2 + (A_4 B_2 - A_2 B_4)^2}{(A_1 B_2 - A_2 B_1)^2}$$

ist.

Wir kehren nun zu den Gleichungen (28) zurück und suchen den Werth des Polarisationsazimuths α_r. Dasselbe variirt im Allgemeinen mit α, da dieser Winkel in dem Ausdruck von $\operatorname{tg}\alpha_r$ vorkommt. Es giebt aber einen Werth des Einfallswinkels φ, für welchen α_r von α unabhängig ist, und zwar ist das derjenige Werth, für welchen die Coefficienten von $\cos\alpha$ und $\sin\alpha$ im Zähler von $\operatorname{tg}\alpha_r$ den entsprechenden im Nenner proportional sind. Dieser Winkel φ wird ebenso wie bei isotropen Mitteln der *Polarisationswinkel* genannt; für ihn muss

$$(A_3 B_2 - A_2 B_3)(A_4 B_1 - A_1 B_4) - (A_3 B_1 - A_1 B_3)(A_4 B_2 - A_2 B_4) = 0,$$

d. h.

$$(A_1 B_2 - A_2 B_1)(A_3 B_4 - A_4 B_3) = 0$$

sein; da aber der erste Factor dieses Productes nicht verschwinden kann, weil sonst wegen (28) D_o, D_e, R_p, R_s unendlich gross werden würden, so muss

$$A_3 B_4 - A_4 B_3 = 0 \qquad (29)$$

sein. Durch diese Gleichung ist der Polarisationswinkel bestimmt, da die Grössen A und B vom Einfallswinkel φ abhängen. Für das Polarisationsazimuth des reflectirten Lichtes ist dann

$$\operatorname{tg}\alpha_r = \frac{A_4 B_2 - A_2 B_4}{A_3 B_2 - A_2 B_3} = \frac{A_4}{A_3} = \frac{B_4}{B_3}. \qquad (29\text{a})$$

Fällt demnach in beliebigem Azimuth polarisirtes, oder auch natürliches Licht unter dem Polarisationswinkel auf den Krystall, so ist das reflectirte

Licht stets in der durch (29a) bestimmten Richtung geradlinig polarisirt. Während also bei isotropen Medien das unter dem Polarisationswinkel reflectirte Licht stets in der Einfallsebene polarisirt war, ist das hier nicht der Fall, da $\operatorname{tg} \alpha_r$ wie aus (29a) hervorgeht, im Allgemeinen von Null verschieden ist.

§ 8.

Aus den in den beiden letzten Paragraphen durchgeführten Untersuchungen geht hervor, dass alle bei der Reflexion und Brechung an der Grenze eines krystallinischen Mediums auftretenden Fragen beantwortet werden können, sobald die acht Grössen A und B bekannt sind. Die Berechnung dieser Grössen wollen wir nur weiter führen für den Fall, dass der Krystall optisch *einachsig* ist. Ist im Krystall nur die gewöhnliche Welle vorhanden, so hatten wir in (26a) die folgenden Gleichungen zur Bestimmung der Grössen A gefunden

$$\begin{aligned} (A_1 - A_3) \cos\varphi &= \cos\varphi' \cos\vartheta' \\ (A_1 + A_3) \sin\varphi &= \sin\varphi' \cos\vartheta' \qquad (30) \\ A_2 + A_4 \qquad &= \sin\vartheta' \end{aligned}$$

$$(A_2 - A_4) \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} = \frac{1}{\sin\varphi'} \left((a_{11} \cos\varphi' - a_{13} \sin\varphi') \sin\vartheta' + a_{12} \cos\vartheta'\right),$$

wo jetzt bei den Elasticitätsconstanten des krystallinischen Mittels die Striche fortgelassen sind. Nimmt man die Fortpflanzungsgeschwindigkeit V des Lichtes im leeren Raume wieder gleich Eins an, so bestimmt sich der Brechungswinkel φ' und das Polarisationsazimuth ϑ' der gewöhnlichen Welle aus den beiden Gleichungen

$$\operatorname{tg} \vartheta' = -\frac{V'^2 - a_{22}}{a_{12} \cos\varphi' - a_{23} \sin\varphi'}, \quad \sin\varphi' = V' \sin\varphi. \qquad (30a)$$

Ist nun der Krystall ein einachsiger, also $a = b$, und sind wieder p, q, r die Richtungscosinus der optischen Achse, so ist nach (13a)

$$\begin{aligned} a_{11} &= a^2 + (c^2 - a^2) p^2 \\ a_{12} &= (c^2 - a^2) pq, \quad a_{22} = a^2 + (c^2 - a^2) q^2 \\ a_{13} &= (c^2 - a^2) pr, \quad a_{23} = (c^2 - a^2) qr. \end{aligned}$$

Endlich ergeben sich aus (14a) für die Richtungscosinus (p, q, r) der optischen Achse noch die folgenden Ausdrücke

$$\begin{aligned} p &= \sin v \sin w \\ q &= \cos v \qquad (30b) \\ r &= \sin v \cos w. \end{aligned}$$

Da in dem hier betrachteten Falle die im Krystalle fortschreitende

Welle eine *gewöhnliche* ist, so ist Fortpflanzungsgeschwindigkeit derselben von ihrer Richtung unabhängig, und zwar ist

$$V' = a;$$

die Gleichungen (30a) lassen sich also in der folgenden einfacheren Form schreiben

$$\sin\varphi' = a\sin\varphi$$

$$\operatorname{tg}\vartheta' = \frac{q}{r\sin\varphi' - p\cos\varphi'} = \frac{1}{\operatorname{tg}v\sin(\varphi' - w)}, \tag{30c}$$

und aus ihnen können φ' und ϑ' gefunden werden.

Ferner geht die vierte der Gleichungen (30) über in

$$(A_2 - A_4)\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} = \frac{\sin\vartheta'}{\sin\varphi'}\left(a^2\cos\varphi' + (c^2 - a^2)\,p\left(p\cos\varphi' - r\sin\varphi' + \frac{q}{\operatorname{tg}\vartheta'}\right)\right);$$

berücksichtigt man hier, dass der Factor von $c^2 - a^2$ in Folge der für $\operatorname{tg}\vartheta'$ geltenden Gleichung verschwindet, und setzt man ausserdem noch $\frac{\sin^2\varphi'}{\sin^2\varphi}$ für a^2, so erhält man

$$(A_2 - A_4)\cos\varphi\sin\varphi = \cos\varphi'\sin\varphi'\sin\vartheta', \tag{30d}$$

und diese Gleichung in Verbindung mit den drei ersten in (30) dient hier zur Bestimmung der vier Grössen A.

Beziehen sich die Grössen B, ψ', η' wieder auf den Fall, dass die gewöhnliche Welle verschwindet, so haben wir

$$\begin{aligned}(B_1 - B_3)\cos\varphi &= \cos\psi'\cos\eta' \\ (B_1 + B_3)\sin\varphi &= \sin\psi'\cos\eta' \\ B_2 + B_4 &= \sin\eta'\end{aligned} \tag{31}$$

$$(B_2 - B_4)\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} = \frac{1}{\sin\psi'}\left((a_{11}\cos\psi' - a_{13}\sin\psi')\sin\eta' + a_{12}\cos\eta'\right)$$

$$\operatorname{tg}\eta' = \frac{V'^2 - a_{22}}{a_{12}\cos\psi' - a_{23}\sin\psi'}, \quad \sin\psi' = V'\sin\varphi,$$

und hier ist nach (14) und (14b)

$$\begin{aligned}V'^2 &= c^2 + (a^2 - c^2)(p\sin\psi' + r\cos\psi')^2 \\ &= c^2 + (a^2 - c^2)\sin^2 v\cos^2(\psi' - w).\end{aligned}$$

Für den Brechungswinkel ψ' ergiebt sich somit durch Elimination von V' die Gleichung

$$\frac{\sin^2\psi'}{\sin^2\varphi} = c^2 + (a^2 - c^2)\sin^2 v\cos^2(\psi' - w), \tag{31a}$$

und für das Polarisationsazimuth η' findet sich leicht

$$\operatorname{tg}\eta' = \frac{p\cos\psi' - r\sin\psi'}{q} = -\operatorname{tg}v\sin(\psi' - w). \tag{31b}$$

Hiernach geht die letzte der vier Gleichungen (31) über in

$$(B_2 - B_4)\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$$

$$= \frac{1}{\sin\psi'}\left\{a^2\cos\psi'\sin\eta' + (c^2 - a^2)p\left((p\cos\psi' - r\sin\psi')\sin\eta' + q\cos\eta'\right)\right\} \quad (31c$$

$$= \frac{1}{\sin\psi'}\left(a^2\cos\psi'\sin\eta' + (c^2 - a^2)\sin v\sin w(\cos v\cos\eta' + \sin v\sin\eta'\sin(w - \psi'\right.$$

Dies sind die allgemeinen Formeln zu Bestimmung der Grössen A und B in dem Falle, dass der zu untersuchende Krystall optisch einachsig ist. Sie lassen sich nur vereinfachen, wenn man bestimmte Annahmen über die Winkel v und w, d. h. über die Lage der optischen Achse zur brechenden Fläche und zur Einfallsebene macht.

§ 9.

Ein verhältnissmässig sehr einfacher Fall ist der, dass *die Einfallsebene parallel dem Hauptschnitt* des Krystalles, d. h. parallel der durch die optische Achse und das Einfallsloth gelegten Ebene ist. Da alsdann die optische Achse in der xz-Ebene unseres Coordinatensystemes liegt, so ist

$$v = \frac{\pi}{2}, \quad \text{also} \quad q = 0, \quad w = r,$$

d. h. w ist gleich dem Winkel zwischen der optischen Achse und dem Einfallsloth. Nach (30c) und (31b) wird also in diesem Falle

$$\vartheta' = 0, \quad \eta' = \frac{\pi}{2}, \tag{32}$$

und hierdurch vereinfachen sich die allgemeinen Formeln des vorigen Paragraphen beträchtlich.

Die Gleichungen (30) und (30d) werden zunächst

$$\begin{aligned} (A_1 - A_3)\cos\varphi &= \cos\varphi', \quad & A_2 &= 0 \\ (A_1 + A_3)\sin\varphi &= \sin\varphi', & A_4 &= 0 \\ \sin\varphi' &= a\sin\varphi. \end{aligned} \tag{32a}$$

Diese Formeln gehen in die Gleichungen (12) der achten Vorlesung über, welche für zwei isotrope Mittel gelten, wenn man

$$A_1 = \frac{1}{D}, \qquad A_3 = -\frac{R}{D}$$

setzt; verschwindet also die ungewöhnliche gebrochene Welle, so ist das einfallende, das reflectirte und das gebrochene Licht *in der Einfallsebene* polarisirt, und die Verhältnisse der Intensitäten sind dieselben, wie wenn das zweite Mittel isotrop wäre.

Die Gleichungen (31) und (31c) werden in diesem Falle

$$B_1 = B_3 = 0, \qquad B_2 + B_4 = 1$$

$$(B_2 - B_4)\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} = \frac{1}{\sin\psi'}\left(a^2\cos\psi' + (c^2 - a^2)\sin w\sin(w - \psi')\right) \tag{32b}$$

$$\frac{\sin^2\psi'}{\sin^2\varphi} = c^2 + (a^2 - c^2)\cos^2(\psi' - w).$$

Verschwindet also die gewöhnliche gebrochene Welle, so ist alles Licht senkrecht zur Einfallsebene polarisirt, wie wenn das zweite Mittel isotrop wäre, aber die Intensitätsverhältnisse sind andere, als in jenem Falle, da $(B_2 - B_4)$ von $(a^2 - c^2)$ abhängt.

Auch der Polarisationswinkel lässt sich hier auf einfache Weise bestimmen. Da nämlich A_4 und B_3 gleich Null sind, so ist die Gleichung für ihn $A_3 B_4 = 0$; oder, da A_3 wegen (32a) nur dann verschwinden kann, wenn $\varphi = \varphi'$, also $a = 1$ ist, welchen Fall wir hier ausschliessen wollen, so muss

$$B_4 = 0$$

sein, zugleich ist wegen (32b) $B_2 = 1$. Versteht man also jetzt unter φ den Polarisationswinkel, so lässt sich die vierte Gleichung in (32b) folgendermassen schreiben

$$\frac{a^2 \cos^2 w + c^2 \sin^2 w}{\operatorname{tg} \psi'} = \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} + (c^2 - a^2) \sin w \cos w.$$

Der in diesem Ausdruck auftretende Winkel ψ' bestimmt sich für irgend einen Werth des Einfallswinkels φ aus der für $\frac{1}{\operatorname{tg} \psi'}$ geltenden quadratischen Gleichung

$$0 = \frac{a^2 \cos^2 w + c^2 \sin^2 w}{\operatorname{tg}^2 \psi'} - 2 \frac{(c^2 - a^2) \sin w \cos w}{\operatorname{tg} \psi'}$$
$$+ a^2 \sin^2 w + c^2 \cos^2 w - \frac{1}{\sin^2 \varphi},$$

welche sich leicht aus der letzten Bedingung in (32b) ergiebt. Eliminirt man aus diesen beiden Gleichungen $\operatorname{tg} \psi'$, indem man die zweite mit

$$a^2 \cos^2 w + c^2 \sin^2 w$$

multiplicirt, und alsdann die erste berücksichtigt, so erhält man

$$\left(\frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} + (c^2 - a^2) \sin w \cos w\right)^2$$
$$- 2(c^2 - a^2) \sin w \cos w \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} + (c^2 - a^2) \sin w \cos w\right)$$
$$+ (a^2 \cos^2 w + c^2 \sin^2 w)\left(a^2 \sin^2 w + c^2 \cos^2 w - \frac{1}{\sin^2 \varphi}\right) = 0;$$

diese Gleichung lässt sich aber folgendermassen schreiben

$$0 = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \varphi} - (c^2 - a^2)^2 \sin^2 w \cos^2 w$$
$$+ (a^2 \cos^2 w + c^2 \sin^2 w)\left(a^2 \sin^2 w + c^2 \cos^2 w - \frac{1}{\sin^2 \varphi}\right),$$

oder, wenn man berücksichtigt, dass $(\cos^2 w + \sin^2 w)^2 = 1$ ist,

$$\frac{1}{\operatorname{tg}^2 \varphi} - \frac{a^2 \cos^2 w + c^2 \sin^2 w}{\sin^2 \varphi} + a^2 c^2 = 0.$$

Hieraus ergiebt sich für den Polarisationswinkel die folgende einfache Gleichung

$$\sin^2 \varphi = \frac{(1 - a^2) \cos^2 w + (1 - c^2) \sin^2 w}{1 - a^2 c^2}. \tag{33}$$

Es ist diese Formel auch deshalb bemerkenswerth, weil sie *Seebeck**) experimentell für Kalkspath gefunden hat, bevor sie von *Neumann***) theoretisch abgeleitet wurde.

Da endlich in diesem Falle die Grössen A_4, B_4 und B_3 verschwinden, A_3 aber von Null verschieden ist, so ist das unter dem Polarisationswinkel reflectirte Licht vollständig in der Einfallsebene polarisirt.

Wir wollen auch den Fall betrachten, dass *die Einfallsebene senkrecht zum Hauptschnitt steht.* Da alsdann die optische Achse in der yz-Ebene unseres Coordinatensystemes liegt, so ist

$$w = 0, \quad \text{also} \quad p = 0, \quad \cos v = q,$$

d. h. v ist gleich dem Winkel zwischen der optischen Achse und der Fläche des Krystalls. Hier ist, wie im allgemeinen Falle,

$$\left.\begin{aligned}(A_1 - A_3)\cos\varphi &= \cos\varphi'\cos\vartheta'\\ (A_1 + A_3)\sin\varphi &= \sin\varphi'\cos\vartheta'\\ A_2 + A_4 &= \sin\vartheta'\\ (A_2 - A_4)\cos\varphi\sin\varphi &= \cos\varphi'\sin\varphi'\sin\vartheta'\\ \sin\varphi' &= a\sin\varphi\end{aligned}\right\} \quad (34)$$

und

$$\operatorname{tg}\vartheta' = \frac{1}{\operatorname{tg} v \sin\varphi'},$$

und die Gleichungen zur Bestimmung der Grössen B, ψ', η' gehen über in

$$\left.\begin{aligned}(B_1 - B_3)\cos\varphi &= \cos\psi'\cos\eta'\\ (B_1 + B_3)\sin\varphi &= \sin\psi'\cos\eta'\\ B_2 + B_4 &= \sin\eta'\\ (B_2 - B_4)\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} &= a^2\frac{\cos\psi'}{\sin\psi'}\sin\eta'\\ \operatorname{tg}\eta' &= -\operatorname{tg} v\sin\psi'\\ \sin^2\psi' &= \sin^2\varphi\,\frac{c^2 + (a^2 - c^2)\sin^2 v}{1 + (a^2 - c^2)\sin^2 v\sin^2\varphi}.\end{aligned}\right\} \quad (34\text{a})$$

Neumann hat einige Messungen angestellt, die mit diesen Formeln verglichen werden können. Der von ihm untersuchte Krystall war Kalkspath; für diesen haben die Grössen a und c die Werthe

$$a = \frac{1}{1.654}, \quad c = \frac{1}{1.483};$$

die benutzte Fläche war eine Rhomboederfläche; für sie ist

$$v = 45^0 23';$$

endlich war der Einfallswinkel

$$\varphi = 45^0.$$

---

*) Poggendorff's Annalen Band 22.

**) Abhandlungen der Berliner Akademie v. J. 1835.

Unsere Formeln ergeben hiernach

$$\begin{array}{llll} \varphi' = & 25^0 19' & \psi' = & 27^0 14' \\ \vartheta' = & 66^0 34' & \eta' = & -24^0 53' \\ A_1 = & 0.3743 & B_1 = & 0.8639 \\ A_2 = & 0.8135 & B_2 = & -0.3598 \\ A_3 = & -0.1339 & B_3 = & -0.2768 \\ A_4 = & 0.1041 & B_4 = & -0.0610. \end{array}$$

Daraus folgt Neumann fand

$$\begin{array}{lllll} & \operatorname{arctg} \frac{A_2}{A_1} = & 65^0 18' & & 65^0 25' \\ & \operatorname{arctg} \frac{B_2}{B_1} = & -22^0 37' & & -22^0 28' \\ \text{für } \alpha = 0 & \alpha_r = & 2^0 33' & & 2^0 24' \\ \alpha = 90^0 & \alpha_r = & -83^0 55' & & -84^0 3'. \end{array}$$

Ist das einfallende Licht natürliches von der Intensität Eins, so ergeben sich die Intensitäten des gewöhnlichen gebrochenen, des ungewöhnlichen gebrochenen und des reflectirten Lichtes beziehungsweise gleich

$$0.625 \qquad 0.572 \qquad 0.063.$$

§ 10.

Wir betrachten jetzt noch den besonders einfachen Fall, dass zwar beide Mittel doppelt brechend, dass aber die sämmtlichen Winkel φ gleich 0 oder gleich π sind; es muss dies nach (4b) stattfinden, sobald einer jener Winkel gleich Null ist.

Beziehen wir wieder die ungestrichenen Buchstaben auf das erste, die gestrichenen auf das zweite Mittel, so bestanden die an der Grenze beider Medien zu erfüllenden Bedingungen darin, dass die vier Ausdrücke

$$\sum A_1 \cos \varphi_1 \cos \vartheta_1, \quad \sum A_1 \sin \vartheta_1, \quad \sum A_1 \sin \varphi_1 \cos \vartheta_1$$

und

$$\sum \frac{A_1}{V_1} (a_{11} \cos \varphi_1 \sin \vartheta_1 + a_{12} \cos \vartheta_1 - a_{13} \sin \varphi_1 \sin \vartheta_1)$$

ungeändert bleiben, wenn man allen Buchstaben Striche beifügt. Wir haben auch noch die fünfte Grenzbedingung aufgestellt, nach der der Ausdruck

$$\sum \frac{A_1}{V_1} (a_{21} \cos \varphi_1 \sin \vartheta_1 + a_{22} \cos \vartheta_1 - a_{23} \sin \varphi_1 \sin \vartheta_1)$$

bei jenem Uebergange ebenfalls seinen Werth nicht ändern darf; im Allgemeinen folgt diese Bedingung aus der vierten und dritten, hier müssen wir sie aber hinzunehmen, weil die dritte identisch erfüllt ist. Danach müssen die folgenden vier Ausdrücke bei der oben erwähnten Veränderung ihren Werth behalten

$$\sum A_1 \cos\varphi_1 \cos\vartheta_1\,, \qquad \sum A_1 \sin\vartheta_1\,,$$
$$\sum \frac{A_1}{V_1}(a_{11}\cos\varphi_1 \sin\vartheta_1 + a_{12}\cos\vartheta_1), \quad \sum \frac{A_1}{V_1}(a_{21}\cos\varphi_1 \sin\vartheta_1 + a_{22}\cos\vartheta_1), \tag{35}$$

wo alle Grössen $\cos\varphi$ gleich ± 1 sind, je nachdem $\varphi = 0$ oder $= \pi$ ist.

Es mögen nun wieder φ_1 und φ_2 einfallenden Wellen entsprechen, während sich φ_3 und φ_4 auf reflectirte, φ_1' φ_2' auf durchgehende Wellen beziehen; A_3' und A_4' mögen verschwinden, d. h. es sollen im zweiten Mittel keine einfallenden Wellen vorhanden sein. Dann ist

$$\cos\varphi_1 = \cos\varphi_2 = +1 \qquad \cos\varphi_3 = \cos\varphi_4 = -1$$
$$\cos\varphi_1' = \cos\varphi_2' = +1.$$

Da die Polarisationsrichtungen der gewöhnlichen und der ungewöhnlichen Welle stets senkrecht auf einander stehen, so können wir $\vartheta_2 = \vartheta_1 + \frac{\pi}{2}$ setzen; wir müssten dann $\vartheta_3 = \pm\vartheta_1$, $\vartheta_4 = \pm\vartheta_2$ annehmen und alsdann dem gewählten Vorzeichen entsprechend die Amplituden bestimmen. Wir wollen hiernach setzen

$$\vartheta_2 = \vartheta_1 + \frac{\pi}{2}, \qquad \vartheta_3 = \vartheta_1 + \pi, \qquad \vartheta_4 = \vartheta_2$$
$$\vartheta_2' = \vartheta_1' + \frac{\pi}{2}\,.$$

Da endlich die reflectirten Wellen hier in entgegengesetzter Richtung zu den einfallenden fortschreiten, so sind ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeiten gleich den entsprechenden der einfallenden Wellen, d. h. es ist

$$V_1 = V_3, \qquad V_2 = V_4.$$

Die allgemeinen Gleichungen (9) und (10a) zur Bestimmung der Grössen V und ϑ gehen in diesem Falle in die einfacheren über

$$\begin{gathered}(a_{11} - V^2)(a_{22} - V^2) - a_{12}^2 = 0 \\ \operatorname{tg}\vartheta = \frac{V^2 - a_{22}}{a_{12}\cos\varphi} = \frac{a_{12}\cos\varphi}{V^2 - a_{11}};\end{gathered} \tag{36}$$

mit Berücksichtigung der zweiten von diesen und des Umstandes, dass $\cos^2\varphi$ stets gleich Eins ist, ergeben sich für die in den Ausdrücken (35) auftretenden Coefficienten die Gleichungen

$$a_{11}\cos\varphi \sin\vartheta + a_{12}\cos\vartheta = \cos\varphi \sin\vartheta \; V^2$$
$$a_{21}\cos\varphi \sin\vartheta + a_{22}\cos\vartheta = \cos\vartheta \; V^2,$$

und die im Anfange dieses Paragraphen angegebenen vier Bedingungen lassen sich somit jetzt folgendermassen schreiben

$$\left.\begin{aligned}
(A_1 + A_3)\cos\vartheta_1 \quad -(A_2 - A_4)\sin\vartheta_1 \quad &= A_1'\cos\vartheta_1' \quad - A_2'\sin\vartheta_1' \\
(A_1 - A_3)\sin\vartheta_1 \quad +(A_2 + A_4)\cos\vartheta_1 \quad &= A_1'\sin\vartheta_1' \quad + A_2'\cos\vartheta_1' \\
(A_1 + A_3)V_1\sin\vartheta_1 + (A_2 - A_4)V_2\cos\vartheta_1 &= A_1'V_1'\sin\vartheta_1' + A_2'V_2'\cos\vartheta_1' \\
(A_1 - A_3)V_1\cos\vartheta_1 - (A_2 + A_4)V_2\sin\vartheta_1 &= A_1'V_1'\cos\vartheta_1' - A_2'V_2'\sin\vartheta_1'.
\end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Da über die Lage der x-Achse bis jetzt noch keine Bestimmung getroffen ist, so können wir dieselbe hier so gewählt annehmen, dass ϑ_1, oder dass ϑ_1' gleich Null ist. Wir wollen den Fall nun noch durch die weitere Annahme vereinfachen, dass die Polarisationsebenen der gewöhnlichen, also auch die der ungewöhnlichen Wellen in beiden Mitteln zusammenfallen; dann ist $\vartheta_1 = \vartheta_1'$ und beide können gleich Null angenommen werden; die Gleichungen (37) werden dann

$$\begin{aligned}
A_1 + A_3 &= A_1', & A_2 + A_4 &= A_2' \\
(A_1 - A_3)V_1 &= A_1'V_1', & (A_2 - A_4)V_2 &= A_2'V_2'.
\end{aligned} \tag{37 a}$$

Die Wellensysteme, welche in der *einen* Polarisationsebene schwingen, sind dann unabhängig von den in der andern schwingenden und können für sich bestehen. Bezeichnen wir für die eine oder für die andere Gruppe dieser Wellensysteme die Amplitude des einfallenden, reflectirten und durchgehenden Lichtes beziehlich durch 1, r, d, so ist

$$\begin{aligned}
1 + r &= d \\
1 - r &= d\frac{V'}{V},
\end{aligned} \tag{37 b}$$

wo $\frac{V'}{V}$ aber das eine Mal $= \frac{V_1'}{V_1}$, das andere Mal $= \frac{V_2'}{V_2}$ ist. Abgesehen hiervon haben die Gleichungen (37 b) dieselbe Form, wie die entsprechenden bei isotropen Mitteln.

Zu dem zuletzt betrachteten Fall gehört auch der, dass das erste oder das zweite Mittel ein isotropes ist, da wir dieses ansehen können als ein doppeltbrechendes mit beliebig gerichteten Achsen.

Vierzehnte Vorlesung.

Farbenerscheinungen krystallinischer Platten zwischen zwei polarisirenden Vorrichtungen. — Allgemeine Theorie für senkrecht auffallendes Licht. — Theorie der Farbenerscheinungen krystallinischer Platten für schief auffallendes Licht und unendlich kleine Doppelbrechung. — Der Einfallswinkel ist unendlich klein, aber veränderlich. Die Plattennormale fällt nicht mit einer optischen Achse zusammen. Die Curven gleicher Helligkeit besitzen auch gleiche Farbe. — Die Normale fällt mit einer Elasticitätsachse zusammen. Die Curven gleicher Farbe sind gleichseitige Hyperbeln. — Die Normale fällt mit keiner Elasticitätsachse zusammen. Die Curven gleicher Farbe sind parallele Gerade. — Die Plattennormale ist einer optischen Achse nahezu parallel. — Die optischen Achsen bilden einen endlichen Winkel mit einander. Die Linien gleicher Farbe sind concentrische Kreise, die farblosen Curven gerade Linien. — Die Achsen bilden einen unendlich kleinen Winkel mit einander. Die Linien gleicher Farbe sind Lemniscaten, die farblosen Linien gleichseitige Hyperbeln.

§ 1.

Die auffallendsten Erscheinungen, welche die Doppelbrechung, auch wenn sie sehr schwach ist, hervorbringt, bestehen in den *Farben*, welche Krystallplatten zwischen zwei polarisirenden Vorrichtungen zeigen, und welche auf der Interferenz zwischen den Strahlen beruhen, die als gewöhnliche und ungewöhnliche durch die Krystallplatte gegangen sind.

Denken wir uns zunächst eine isotrope planparallele Platte, eine Glasplatte etwa, welche von Luft umgeben ist. Auf diese mögen von der einen Seite geradlinig polarisirte Lichtwellen fallen, die parallel ihren Oberflächen sind; es treten dann eben solche Wellen aus, welche in derselben Ebene polarisirt sind. Wir haben diese Wellen und die allgemeineren, die entstehen, wenn das einfallende Licht schief die Platte trifft, in der neunten Vorlesung ausführlich untersucht, und nachgewiesen, dass dieselben aus verschiedenen Theilen sich zusammensetzen, von denen der erste direct die Platte durchdrungen hat, während die folgenden 2, 4, 6 . . . Reflexionen im Inneren der Platte an ihren Oberflächen erlitten haben. Da die Intensität des ersten Theiles die der übrigen bei weitem übertrifft, so wollen wir hier ihn allein berücksichtigen. Ist die Amplitude der einfallenden

Wellen gleich Eins, so ist die der durchgegangenen d, wo d einen wenig von Eins verschiedenen Bruch bedeutet; die Phase wird in der Platte um

$$\frac{D}{\lambda'} 2\pi \quad \text{oder} \quad \frac{D}{V'T} 2\pi$$

geändert, wenn D die Dicke der Platte, λ' die Wellenlänge, V' die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes in ihr bedeutet.

Nun denke man sich die Glasplatte durch eine Krystallplatte ersetzt. In ihr können sich, wie im § 10 der vorigen Vorlesung ausgeführt wurde, ihren Oberflächen parallel zwei Wellen bewegen, eine gewöhnliche und eine ungewöhnliche, deren Geschwindigkeiten V_o und V_e von einander verschieden sind, und deren Polarisationsrichtungen, welche mit o und e bezeichnet werden mögen, auf einander senkrecht stehen. Sind die einfallenden Wellen nach o polarisirt, so verhält es sich so, wie wenn die Platte isotrop wäre: Die Wellen in der Platte, sowie die durch sie hindurchgegangenen Wellen, sind auch nach o polarisirt; die letzteren haben die Amplitude d_o; die durch die Platte hervorgebrachte Aenderung ihrer Phase ist

$$\frac{D}{V_o T} 2\pi.$$

Das Entsprechende gilt, wenn die einfallenden Wellen nach e polarisirt sind; nur treten dann d_e und V_e an die Stelle von d_o und V_o. Uebrigens sind für vollkommen durchsichtige Krystalle d_o und d_e sehr wenig von einander und von Eins verschieden; wir wollen daher, um die Formeln nicht unnötig zu compliciren, beide gleich Eins setzen.

Sind die einfallenden Wellen in dem von o ab gerechneten Azimuth α polarisirt, so zerlege man sie in zwei Componenten mit den Amplituden $\cos\alpha$ und $\sin\alpha$; die durchgegangenen Wellen erscheinen dann zusammengesetzt aus zwei Componenten von denselben Amplituden und dem Phasenunterschiede

$$\delta = \frac{D}{T}\left(\frac{1}{V_o} - \frac{1}{V_e}\right) 2\pi, \tag{1}$$

sie sind also im Allgemeinen *elliptisch* polarisirt. Das austretende Licht ist nur dann *geradlinig* polarisirt, wenn δ ein Vielfaches von π ist, und zwar ist sein Polarisationsazimuth $+\alpha$ oder $-\alpha$, je nachdem jener Phasenunterschied ein gerades oder ein ungerades Vielfaches von π ist. Ist D so gross, dass δ ein ungerades Vielfaches von $\frac{\pi}{2}$ ist, und macht man $\alpha = 45^0$, so erhält man *circularpolarisirtes* Licht. Ein Glimmerblättchen von $0{,}032^{\text{mm}}$ Dicke, wie man es durch Spaltung erhalten kann, hat die Eigenschaft, geradlinig polarisirtes Licht nahezu in kreisförmig polarisirtes zu verwandeln; vollständig ist dies nicht der Fall, weil wegen der Farbenverschiedenheit auch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der einzelnen Bestandtheile des Lichtes eine verschiedene ist.

Bei dieser Untersuchung wurde vorausgesetzt, dass die betrachtete Platte vollkommen durchsichtig ist. In Wirklichkeit ist dies niemals der Fall, und zwar kann die Durchsichtigkeit sowohl für die verschiedenfarbigen Lichtstrahlen als auch für die gewöhnlichen und die ungewöhnlichen Wellen eine verschiedene sein. So absorbirt z. B. eine Turmalinplatte, welche parallel der optischen Achse geschliffen ist, die gewöhnlichen Wellen fast vollständig, während dies bei den ungewöhnlichen Wellen in viel geringerem Maasse der Fall ist. Bei einer solchen Platte von mässiger Dicke treten also nicht zwei, sondern es tritt nur eine Welle heraus, welche in der Richtung e der ungewöhnlichen Welle geradlinig polarisirt ist War das auffallende Licht natürliches, so werden die durch die Turmalinplatte gegangenen Strahlen ebenfalls in der Richtung e geradlinig polarisirt sein, so dass eine solche Platte benutzt werden kann wie ein Spiegel, der unter dem Polarisationswinkel Licht reflectirt. Indessen erscheint hier das austretende Licht gefärbt, wenn das einfallende weiss ist, weil die Absorption der nach e polarisirten Wellen für die verschiedenfarbigen Strahlen eine verschiedene ist; von einer solchen Platte wird besonders grünes Licht hindurch gelassen. — Diesen letzten Uebelstand kann man vermeiden, wenn man statt einer Turmalinplatte ein sogenanntes *Nicol'sches Prisma* anwendet, bei dem keine Färbung eintritt. Dasselbe besteht aus einem Kalkspathrhomboeder, dessen Flächen mit den Spaltungsflächen parallel sind. Dasselbe ist senkrecht zum Hauptschnitt in zwei Hälften durchschnitten, die mit Kanadabalsam wieder auf einander gelegt sind. Der einfallende Lichtstrahl theilt sich alsdann in die gewöhnliche und in die ungewöhnliche Welle; von diesen wird die erstere an der Schnittfläche total reflectirt, und nur die zweite, deren Polarisationsebene senkrecht zum Hauptschnitt ist, geht hindurch. Beide Vorrichtungen ermöglichen es also, aus Licht, welches in beliebigem Azimuth polarisirt oder auch natürliches ist, Wellen zu erzeugen, welche in einem bestimmten Azimuth geradlinig polarisirt sind, und auf diesem Umstande beruht die vielfache Anwendung solcher polarisirenden Vorrichtungen bei den verschiedensten optischen Versuchen.

Wir wollen nun annehmen, dass sowohl *vor*, als auch *hinter* der Krystallplatte eine der soeben beschriebenen polarisirenden Vorrichtungen, etwa ein Nicol'sches Prisma, angebracht sei, und die Intensität des aus dem letzten Prisma austretenden Lichtes berechnen. Die Amplitude der auf die Platte fallenden Wellen sei wieder gleich Eins, und es werde ihre Polarisationsrichtung durch 1 bezeichnet; die Amplituden der aus der Platte austretenden Componenten sind dann

$$\cos(o, 1) \quad \text{und} \quad \cos(e, 1);$$

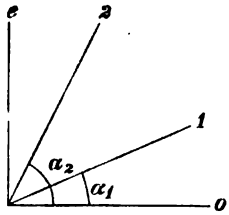
sind die Amplituden a_1 und a_2 der beiden Wellen, welche durch weite polarisirende Vorrichtung hindurch gegangen sind, be- 'ı gleich

$$\cos(o, 1)\cos(o, 2) \quad \text{und} \quad \cos(e, 1)\cos(e, 2),$$

Polarisationsrichtung durch 2 bezeichnet wird; nennt man ʋeiden Winkel (o 1) und (o 2) beziehungsweise α_1 und α_2,

$$a_1 = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \quad \text{und} \quad a_2 = \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 .$$

Fig. 17.



Dabei haben diese Wellen den in (1) bestimmten Phasenunterschied δ. Nach den Ergebnissen der ersten Vorlesung ist also ihre Intensität J gegeben durch die Gleichung

$$J = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos\delta$$
$$= (a_1 + a_2)^2 - 4a_1a_2\sin^2\frac{\delta}{2},$$

oder es ist

$$J = \cos^2(\alpha_1 - \alpha_2) - \sin 2\alpha_1 \sin 2\alpha_2 \sin^2\frac{\delta}{2}. \tag{2}$$

Ist das einfallende Licht weisses und a die Amplitude eines einzelnen Bestandtheils, so kann man seine Intensität symbolisch

$$= \sum a^2,$$

und die Intensität des ins Auge gelangenden Lichtes

$$= \cos^2(\alpha_1 - \alpha_2)\sum a^2 - \sin 2\alpha_1 \sin 2\alpha_2 \sum a^2 \sin^2\frac{\delta}{2} \tag{2a}$$

setzen. Das erste Glied stellt dann weisses Licht, das zweite farbiges dar, da die Bestandtheile des einfallenden Lichtes hier in anderem Verhältnisse gemischt sind, wie vorher; die Farbe ist bedingt durch

$$\sum a^2 \sin^2\frac{\delta}{2}$$

und durch das Vorzeichen von $\sin 2\alpha_1 \sin 2\alpha_2$; sobald das letzte wechselt, geht die Farbe in die complementäre über. Die Krystallplatte erscheint farblos, sobald

$$\sin 2\alpha_1 \sin 2\alpha_2 = 0 \tag{3}$$

ist, d. h. sobald α_1 oder α_2 einen der Werthe 0, 90°, 180°, 270° hat. Ist das der Fall, so erscheint die Platte wegen (2a) *weiss*, wenn $\alpha_1 - \alpha_2 = 0$ oder 180° ist, d. h. wenn die Polarisationsebenen der Nicols parallel sind, sie erscheint *schwarz*, wenn $\alpha_1 - \alpha_2 = 90°$ oder 270° ist, d. h. wenn diese Polarisationsebenen senkrecht auf einander stehen.

Die Färbung ist am intensivsten, wenn

$$\sin 2\alpha_1 \sin 2\alpha_2 = \pm 1 \tag{3a}$$

ist, d. h. wenn sowohl α_1 als α_2 einen der Werthe $\pm 45^\circ$, $\pm 135^\circ$ hat. Dabei sind die Polarisationsebenen der beiden Nicols parallel oder senkrecht auf einander; in diesen beiden Fällen sind die Farben complementär.

Die Farbe der Krystallplatte selbst lässt sich in gewisser Weise leicht angeben, falls man von der Dispersion in ihrem Inneren absehen, also V_o und V_e als unabhängig von T betrachten darf. Zu diesem Zwecke vergleichen wir

$$\sum a^2 \sin^2 \frac{\delta}{2} = \sum a^2 \sin^2 D \left(\frac{1}{V_e} - \frac{1}{V_o}\right) \frac{\pi}{T}$$

mit dem Ausdruck, den wir in (4) und (8a) der neunten Vorlesung gefunden haben für die Lichtintensität, welche in den reflectirten Newton'schen Farbenringen bei senkrechtem Einfall der Luftdicke L entspricht, d. h. mit dem Ausdruck

$$\sum a^2 \frac{4 r^2 \sin^2 \xi}{(1 - r^2)^2 + 4 r^2 \sin^2 \xi},$$

wo

$$\xi = \frac{L}{\lambda} 2\pi = \frac{2L}{V} \frac{\pi}{T},$$

und V die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes in der Luft ist. Da nach § 6 der achten Vorlesung r^2 ein kleiner Bruch ist (etwa $^1/_{25}$), so kann hierfür ohne merklichen Fehler gesetzt werden

$$4 r^2 \sum a^2 \sin^2 \left(\frac{2L}{V} \frac{\pi}{T}\right).$$

Es werden hiernach die beiden zu vergleichenden Ausdrücke bis auf den constanten Factor $4r^2$ identisch, falls

$$\frac{2L}{V} = D \left(\frac{1}{V_e} - \frac{1}{V_o}\right) \tag{4}$$

ist; d. h. die Krystallplatte zeigt diejenige Farbe, welche in den Newton'schen Ringen der durch diese Gleichung bestimmten Luftdicke L entspricht, wenn $\sin 2\alpha_1 \sin 2\alpha_2$ positiv ist, sie zeigt die complementäre Farbe im entgegengesetzten Falle.

Berechnen wir den Werth von L für einen einfachen Fall: Die Krystallplatte sei ein Gypsblättchen, wie es durch Spaltung erhalten werden kann; seine beiden optischen Achsen liegen dann in der Begrenzungsebene; die *Mittellinie*, d. h. die Halbirungslinie des durch die optischen Achsen gebildeten Winkels, ist die Polarisationsrichtung der gewöhnlichen Welle. Da nun allgemein

$$V_o^2 = a^2 - (a^2 - c^2) \sin^2 \frac{u_1 - u_2}{2}$$

$$V_e^2 = a^2 - (a^2 - c^2) \sin^2 \frac{u_1 + u_2}{2},$$

und da nach den eben gemachten Angaben

$$u_1 = u_2 = 90^0$$

ist, so haben wir

$$V_o = a, \quad V_e = c.$$

Nach Messungen von Angström*) ist nun für die Fraunhofer'sche Linie D

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{V} \cdot 1.5205$$

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{V} \cdot 1.5297,$$

woraus

$$L = D\,\frac{1}{2} \cdot 0.0092 = \frac{D}{218}$$

sich ergiebt. Die Farbe des Gypsblättchens entspricht also der Farbe der Newton'schen Ringe an einer Stelle, wo die Luftschicht $\frac{1}{218}$ der Dicke des Blättchens besitzt.

§ 2.

Wir wollen jetzt den Durchgang ebener Lichtwellen durch eine Krystallplatte unter der Voraussetzung untersuchen, dass der Einfallswinkel nicht gleich Null ist. Hier wollen wir von vornherein die Annahme einführen, dass die Doppelbrechung d. h. $(a^2 - c^2)$, unendlich klein ist; diese Voraussetzung ist bei schief auffallenden Lichtwellen sehr wesentlich zur Vereinfachung der Rechnung: Ihr zufolge darf man bei der Ermittelung der Amplituden und Polarisationsrichtungen der gewöhnlichen und ungewöhnlichen Wellen von der Doppelbrechung absehen, also die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes in der Platte als constant betrachten, und bei der Berechnung der Verzögerung nur die erste Potenz von $a^2 - c^2$ berücksichtigen.

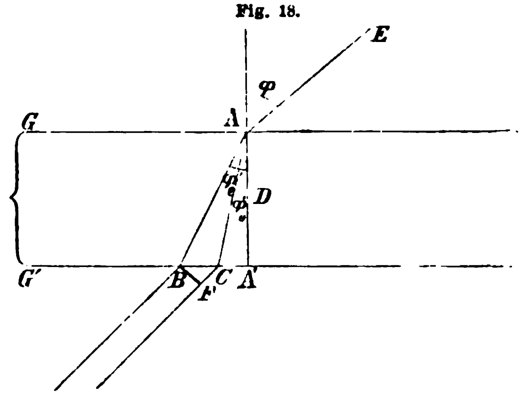
Wir denken uns die Platte wiederum zwischen zwei Nicol'schen Prismen und berücksichtigen nur die Strahlen, welche ohne Reflexionen zu erleiden durch dieses System hindurchgehen. Es hat keine Schwierigkeit, unter den ausgesprochenen Annahmen die Intensität J des austretenden Lichtes zu finden, wenn der Einfallswinkel ein endlicher ist: wir wollen indessen unsere Aufgabe noch weiter dadurch vereinfachen, dass wir den Einfallswinkel als unendlich klein annehmen. Die Polarisationsebenen der aus der Platte austretenden Wellen stimmen dann überall mit den Polarisationsebenen der Wellen *in* der Platte überein, von denen sie herrühren, was sonst nicht der Fall ist, und die Intensität ist hier, wie beim senkrechten Einfall, für homogenes Licht durch die Gleichung (2), für einfallendes weisses Licht durch die Gleichung (2a) des vorigen Paragraphen bestimmt.

---

*) Poggendorff's Annalen Bd. 86 p. 211.

Die Verzögerung δ der beiden Componenten finden wir ganz ähnlich, wie in § 4 der sechsten Vorlesung durch die folgende Ueberlegung: In der nachstehenden Figur sei GG' die Krystallplatte, EA ein einfallender Strahl, AC und AB die Normalen der von ihm herrührenden gebrochenen gewöhnlichen und ungewöhnlichen Wellen, welche dann beide wieder parallel EA aus dem Krystall austreten.

Fig. 18.



Ist nun BF die durch B gehende Wellenebene dieser beiden austretenden Strahlen, so kann man δ definiren als den Phasenunterschied der gewöhnlichen und der ungewöhnlichen Wellenebene BF, d. h. es ist

$$\delta = \left(\frac{AC}{V_o'} + \frac{CF}{V} - \frac{AB}{V_e'}\right)\frac{2\pi}{T}. \tag{5}$$

Ist $AA' = D$ die Dicke der Platte, und bezeichnet man wieder mit φ, φ_o', φ_e' den Einfallswinkel und die Brechungswinkel der in der Platte fortschreitenden gewöhnlichen und ungewöhnlichen Welle, so ist

$$AB = \frac{D}{\cos\varphi_e'}, \qquad AC = \frac{D}{\cos\varphi_o'}$$

$$CF = D(\operatorname{tg}\varphi_e' - \operatorname{tg}\varphi_o')\sin\varphi.$$

Berücksichtigt man endlich noch, dass

$$\frac{\sin\varphi}{V} = \frac{\sin\varphi_o'}{V_o'} = \frac{\sin\varphi_e'}{V_e'} \tag{5a}$$

ist, so ergiebt sich hieraus

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{2\pi}{T}\frac{D\sin\varphi}{V}\left(\operatorname{tg}\varphi_e' - \operatorname{tg}\varphi_o' + \frac{1}{\sin\varphi_o'\cos\varphi_o'} - \frac{1}{\sin\varphi_e'\cos\varphi_e'}\right)\\ &= \frac{2\pi}{T}\frac{D\sin\varphi}{V}(\operatorname{ctg}\varphi_o' - \operatorname{ctg}\varphi_e').\end{aligned} \tag{5b}$$

Um aus dieser Gleichung den Werth von δ in unserem Falle zu finden, berücksichtige man, dass sich die Winkel φ_o' und φ_e' der gebrochenen gewöhnlichen und ungewöhnlichen Welle nur um sehr kleine Grössen von dem Winkel φ' unterscheiden, welcher sich ohne Berücksichtigung der Doppelbrechung aus der Gleichung

$$\frac{\sin \varphi}{V} = \frac{\sin \varphi'}{a}$$

berechnet. Setzt man also

$$\varphi_o' = \varphi' + \varepsilon_o, \qquad \varphi_o' = \varphi' + \varepsilon_e, \tag{6}$$

so können die höheren Potenzen von ε_o und ε_e vernachlässigt werden, und man erhält

$$\cot \varphi_o' = \cot \varphi' - \frac{\varepsilon_o}{\sin^2 \varphi'}$$

$$\cot \varphi_e' = \cot \varphi' - \frac{\varepsilon_e}{\sin^2 \varphi'},$$

die Gleichung (5b) für δ geht also in unserem Falle über in

$$\delta = \frac{2\pi}{T} \frac{D}{a \sin \varphi'} \cdot (\varepsilon_e - \varepsilon_o).$$

Die kleinen Grössen ε_o und ε_e endlich bestimmen sich leicht, wenn man in die aus (5a) und aus (22) der eilften Vorlesung sich ergebenden Gleichungen

$$\sin^2 \varphi^{o'} = \frac{\sin^2 \varphi}{V^2} \left(a^2 - (a^2 - c^2) \sin^2 \frac{u_1 - u_2}{2}\right)$$

$$= \sin^2 \varphi' \left(1 + \frac{c^2 - a^2}{a^2} \sin^2 \frac{u_1 - u_2}{2}\right)$$

$$\sin^2 \varphi_e' = \frac{\sin^2 \varphi}{V^2} \left(a^2 - (c^2 - a^2) \sin^2 \frac{u_1 + u_2}{2}\right)$$

$$= \sin^2 \varphi' \left(1 + \frac{c^2 - a^2}{a^2} \sin^2 \frac{u_1 + u_2}{2}\right)$$

an Stelle von φ_o' und φ_e' ihre Ausdrücke aus (6) substituirt; entwickelt man dann die linke Seite nach steigenden Potenzen von ε_o und ε_e und berücksichtigt wieder nur ihre ersten Potenzen, so erhält man für diese Grössen zwei lineare Gleichungen, durch deren Auflösung sich ergiebt

$$\begin{aligned} \varepsilon_o &= \frac{1}{2} \operatorname{tg} \varphi' \frac{c^2 - a^2}{a^2} \sin^2 \frac{u_1 - u_2}{2} \\ \varepsilon_e &= \frac{1}{2} \operatorname{tg} \varphi' \frac{c^2 - a^2}{a^2} \sin^2 \frac{u_1 + u_2}{2}. \end{aligned} \tag{6a}$$

Hier sind u_1 und u_2 die Winkel, welche die Normale der betreffenden gebrochenen Welle mit den optischen Achsen bildet; streng genommen haben diese Winkel also verschiedene Werthe in der oberen und in der unteren Gleichung. Da aber $a^2 - c^2$ unendlich klein angenommen ist, so können für u_1 und u_2 diejenigen Werthe gesetzt werden, welche sich *ohne* Rücksicht auf die Doppelbrechung ergeben. Es ist also

$$\varepsilon_e - \varepsilon_o = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \varphi' \frac{c^2 - a^2}{a^2} \left(\sin^2 \frac{u_1 + u_2}{2} - \sin^2 \frac{u_1 - u_2}{2} \right)$$
$$= \frac{1}{2} \operatorname{tg} \varphi' \frac{c^2 - a^2}{a^2} \sin u_1 \sin u_2 ,$$

und der gesammte Werth der Verzögerung δ wird demnach

$$\delta = \frac{\pi}{T} \frac{D(c^2 - a^2)}{a^3} \frac{\sin u_1 \sin u_2}{\cos \varphi'} . \tag{7}$$

Hierbei ist noch nicht benutzt, dass φ, also auch φ' unendlich klein ist. In Folge dessen ist der Factor $\frac{1}{\cos \varphi'}$ im Allgemeinen gleich Eins zu setzen; in gewissen speciellen Fällen findet das aber, wie wir sehen werden, nicht statt.

§ 3.

Wir wollen nun annehmen, dass auf die Platte gleichzeitig in verschiedenen Richtungen Lichtstrahlen fallen, die aber alle mit der Normale derselben unendlich kleine Winkel bilden; die verschiedenen Punkte des Gesichtsfeldes sind dann ungleich hell, und bei auffallendem weissen Lichte auch ungleich gefärbt.

Mit der Richtung des betrachteten Strahles ändern sich die Winkel α_1 und α_2 im Allgemeinen unendlich wenig; endliche Aenderungen kommen nur vor, wenn die Normale der Platte sehr nahe einer optischen Achse liegt, welchen Fall wir vorläufig ausschliessen, um ihn im nächsten Paragraphen eingehend zu untersuchen. In den Ausdrücken (2) und (2a) für J sind somit α_1 und α_2 als constant zu betrachten. u_1 und u_2 ändern sich immer unendlich wenig und φ' bleibt unendlich klein; nichts destoweniger verändert sich die Grösse δ endlich und $\sin^2 \frac{\delta}{2}$ nimmt alle Werthe zwischen 0 und 1 an, falls die Dicke der Platte D einen solchen Werth hat, dass der Ausdruck

$$\frac{D(c^2 - a^2)}{Ta^3}$$

unendlich gross ist. Die Gleichung der Curven gleicher Helligkeit und gleicher Farbe ist alsdann

$$\delta = \text{const.}, \quad \text{d. h.} \quad \frac{\sin u_1 \sin u_2}{\cos \varphi'} = \text{const.}$$

Die Werthe der Maxima und Minima von J sind bei homogenem Lichte

$$\cos^2(\alpha_1 + \alpha_2) \quad \text{und} \quad \cos^2(\alpha_1 - \alpha_2)$$

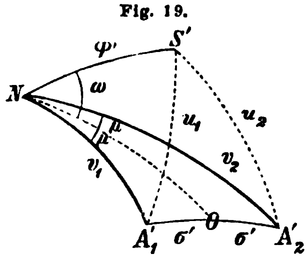
also 1 und 0, wenn α_1 und $\alpha_2 = \pm 45^0$ ist; eine Verschiedenheit findet nicht statt, falls $\sin 2\alpha_1$ oder $\sin 2\alpha_2$ gleich Null ist.

Untersuchen wir jetzt die Gestalt der Linien gleicher Lichtstärke und Farbe. Wir wollen die Werthe von φ, also auch die von φ', als unendlich kleine Grössen der ersten Ordnung bezeichnen; die Aenderungen, welche der zu untersuchende Ausdruck

$$\frac{\sin u_1 \sin u_2}{\cos \varphi'}$$

innerhalb des Gesichtsfeldes erfährt, sind dann im Allgemeinen auch von der ersten Ordnung, und nur die Glieder dieser Ordnung sind somit zu berücksichtigen; da aber in gewissen Fällen die Glieder erster Ordnung verschwinden, und die der zweiten dann die Erscheinung bestimmen, so wollen wir auch diese Glieder sogleich mit betrachten. Wir denken uns aus dem Mittelpunkte einer Kugel, mit dem Radius Eins drei Linien parallel den beiden optischen Achsen und der Plattennormale gezogen; A_1', A_2', N seien ihre Schnittpunkte mit der Kugelfläche, ferner sei S' der Schnittpunkt derselben mit der Linie, welche aus dem Mittelpunkte parallel dem betrachteten gebrochenen Strahle gezogen ist. Nun halbiren wir den Winkel $A_1'NA_2'$ durch einen grössten Kreis und nennen ω und μ die Winkel, die dieser mit NS' und mit NA_2' bildet; endlich seien v_1 und v_2 die Winkel, welche die Plattennormale mit den beiden optischen Achsen, und $2\sigma'$ der Winkel, den die beiden Achsen mit einander bilden, d. h. es sei

Fig. 19.



$$A_1'N = v_1, \quad A_2'N = v_2, \quad A_1'A_2' = 2\sigma'.$$

Dann ergeben sich aus den sphärischen Dreiecken $NS'A_1'$ und $NS'A_2'$ für

$$S'A_1' = u_1 \quad \text{und} \quad S'A_2' = u_2$$

die folgenden Gleichungen

$$\cos u_1 = \cos v_1 \cos \varphi' + \sin v_1 \sin \varphi' \cos(\omega + \mu)$$
$$\cos u_2 = \cos v_2 \cos \varphi' + \sin v_2 \sin \varphi' \cos(\omega - \mu).$$

Aus der ersten Gleichung folgt bei Vernachlässigung von $\sin^3 \varphi'$

$$\cos^2 u_1 = \cos^2 v_1 + 2 \sin v_1 \cos v_1 \cos(\omega + \mu) \sin \varphi'$$
$$- \left(\cos^2 v_1 - \sin^2 v_1 \cos^2(\omega + \mu)\right) \sin^2 \varphi',$$

also

$$\sin^2 u_1 = \sin^2 v_1 \Big\{1 - 2 \operatorname{ctg} v_1 \cos(\omega + \mu) \sin \varphi'$$
$$+ \left(\operatorname{ctg}^2 v_1 - \cos^2(\omega + \mu)\right) \sin^2 \varphi'\Big\},$$

und ähnlich

$$\sin^2 u_2 = \sin^2 v_2 \Big\{1 - 2 \operatorname{ctg} v_2 \cos(\omega - \mu) \sin \varphi'$$
$$+ \left(\operatorname{ctg}^2 v_2 - \cos^2(\omega - \mu)\right) \sin^2 \varphi'\Big\}.$$

Entwickeln wir also jetzt in der Gleichung der betrachteten Curve

$$\frac{\sin^2 u_1 \sin^2 u_2}{\cos^2 \varphi'} = \text{const.}$$

die linke Seite nach steigenden Potenzen von $\sin\varphi'$ und berücksichtigen dabei, dass bei der über φ' gemachten Voraussetzung bis auf Grössen vierter Ordnung

$$\frac{1}{\cos^2\varphi'} = 1 + \sin^2\varphi'$$

gesetzt werden kann, so ergiebt sich bis auf unendlich kleine Grössen dritter Ordnung

$$\frac{\sin^2 u_1 \sin^2 u_2}{\cos^2 \varphi'} = \sin^2 v_1 \sin^2 v_2 \,(U_0 + 2\,U_1 \sin\varphi' - U_2 \sin^2\varphi'), \tag{8}$$

wo die Coefficienten

$$\begin{aligned} U_0 &= 1 \\ U_1 &= \cot v_1 \cos(\omega + \mu) + \cot v_2 \cos(\omega - \mu) \qquad\qquad (8\text{a}) \\ U_2 &= 1 + \cot^2 v_1 + \cot^2 v_2 - \cos^2(\omega + \mu) - \cos^2(\omega - \mu) \\ &\quad + 4 \cot v_1 \cot v_2 \cos(\omega - \mu) \cos(\omega + \mu) \end{aligned}$$

von der Lage von S' unabhängig sind. Im Allgemeinen sind hiernach die Linien gleicher Helligkeit und gleicher Farbe bestimmt durch die Gleichung

$$U_1 \sin\varphi' = \text{const.} \tag{9}$$

Eine Ausnahme findet nur statt, wenn *für jeden Werth von* ω der Coefficient U_1 von $\sin\varphi'$ unendlich klein oder 0 ist; im letzteren Fall ist die Gleichung der genannten Linien

$$U_2 \sin^2\varphi' = \text{const.} \tag{9a}$$

Die hierfür geltenden Bedingungen sind

$$(\operatorname{ctg} v_1 + \operatorname{ctg} v_2) \cos\mu = 0$$

und

$$(\operatorname{ctg} v_1 - \operatorname{ctg} v_2) \sin\mu = 0,$$

und diese lassen sich, da nach der über die Lage der Flächennormale gemachten Voraussetzung $\sin v_1 \cdot \sin v_2 \gtrless 0$ ist, auch folgendermassen schreiben

$$\left.\begin{aligned} \sin(v_1 + v_2) \cos\mu &= 0 \\ \sin(v_1 - v_2) \sin\mu &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Diesen beiden Bedingungen kann offenbar nur in den folgenden drei Fällen genügt werden

$$1) \quad \sin(v_1 + v_2) = \sin(v_1 - v_2) = 0,$$

d. h.

$$v_1 = v_2 = \frac{\pi}{2},$$

dann steht also N auf der Ebene der optischen Achsen senkrecht, und es ist

$$2\mu = 2\sigma'.$$

$$2)\quad \sin(v_1 - v_2) = 0, \qquad \cos\mu = 0,$$

d. h.

$$v_1 = v_2, \qquad \mu = \frac{\pi}{2};$$

dann halbirt N den Winkel zwischen den optischen Achsen, man hat also

$$v_1 = v_2 = \sigma'.$$

$$3)\quad \sin(v_1 + v_2) = 0, \qquad \sin\mu = 0,$$

d. h.

$$v_1 + v_2 = \pi, \qquad \mu = 0;$$

dann halbirt die Richtung N den Nebenwinkel des Winkels zwischen den optischen Achsen, und es wird

$$v_1 = \frac{\pi}{2} - \sigma', \qquad v_2 = \frac{\pi}{2} + \sigma'.$$

Die Fälle, in denen die Erscheinung durch die Glieder der zweiten Ordnung des Ausdruckes (8) bestimmt ist, sind hiernach die, dass die Flächennormale der Krystallplatte mit einer ihrer drei Elasticitätsachsen zusammenfällt. Unter dieser Voraussetzung ist somit

$$U_2 \sin^2\varphi' = \text{const}$$

die Gleichung der Linien gleicher Helligkeit und Farbe. Führt man in U_2 an Stelle von v_1, v_2 und μ ihre vorher angegebenen Werthe ein, so wird dieser Ausdruck in den drei unterschiedenen Fällen

$$1 - \cos^2(\omega + \sigma') - \cos^2(\omega - \sigma')$$
$$1 + 2\cot^2\sigma' - 2\sin^2\omega - 4\cot^2\sigma' \sin^2\omega$$
$$1 + 2\,\mathrm{tg}^2\sigma' - 2\cos^2\omega - 4\,\mathrm{tg}^2\sigma' \cos^2\omega,$$

und man überzeugt sich leicht, dass derselbe gleich

$$\cos 2\omega,$$

multiplicirt mit einem der drei constanten Factoren

$$\cos 2\sigma', \qquad 1 + 2\cot^2\sigma', \qquad 1 + 2\,\mathrm{tg}^2\sigma'$$

ist. Nur der erste dieser Factoren kann verschwinden, und auch dieser nur dann, wenn der Winkel $2\sigma'$ zwischen den beiden optischen Achsen ein Rechter ist. Unter dieser Voraussetzung würden also auch die Glieder zweiter Ordnung in der Gleichung der Linien gleicher Helligkeit und Farbe verschwinden, und man müsste die Glieder dritter Ordnung berücksichtigen. Schliessen wir diesen ganz speciellen Fall aus, so ist also, falls N mit einer der Elasticitätsachsen zusammenfällt, die Gleichung dieser Linien

$$\cos 2\omega \sin^2\varphi' = \text{const.} \tag{11}$$

In jedem anderen Falle ist die Gleichung der Curven gleicher Farbe und Helligkeit

$$\sin\varphi' \left(\sin(v_1 + v_2)\cos\mu\cos\omega - \sin(v_1 - v_2)\sin\mu\sin\omega\right) = \text{const.} \tag{11a}$$

Wir wollen diese beiden Gleichungen noch in eine andere Form bringen, in der die Natur der dargestellten Curven deutlicher hervortritt: Statt φ' führen wir den Einfallswinkel φ ein durch

$$V \sin \varphi' = a \sin \varphi ,$$

φ und ω sind dann die Polarcoordinaten des betrachteten einfallenden oder austretenden Strahles; setzen wir weiter

$$\begin{aligned} \sin \varphi \cos \omega &= x \\ \sin \varphi \sin \omega &= y , \end{aligned} \tag{12}$$

so können wir x und y als die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes des Gesichtsfeldes ansehen in Bezug auf ein Coordinatensystem, dessen Anfangspunkt der Punkt N und dessen x-Achse die Polarisationsrichtung der gewöhnlichen Welle ist.

Die Gleichung der Curven gleicher Helligkeit und Farbe ist dann nach (11a) im Allgemeinen

$$\sin(v_1 + v_2) \cos \mu \cdot x - \sin(v_1 - v_2) \sin \mu \cdot y = \text{const.} \tag{13}$$

d. h. sie sind parallele Gerade. Fällt dagegen N mit einer der Elasticitätsachsen zusammen, so ist (11) die Gleichung dieser Curven, und sie geht bei Einführung der neuen Coordinaten über in

$$x^2 - y^2 = \text{const.}; \tag{13a}$$

diese Linien sind somit gleichseitige Hyperbeln, deren Hauptachsen die hier gewählten Coordinatenachsen sind.

§ 4.

Wir wollen endlich noch den vorher ausgeschlossenen Fall betrachten, dass die Normale N einer oder beiden optischen Achsen unendlich nahe liegt; der zweite Fall setzt offenbar voraus, dass die beiden optischen Achsen selbst einen sehr kleinen Winkel mit einander bilden, wie dies z. B. beim Salpeter der Fall ist. Da hier α_1 und α_2 innerhalb des Gesichtsfeldes nicht als constant zu betrachten sind, so wird bei auffallendem weissen Lichte in einer Linie gleicher Farbe die Helligkeit nicht überall dieselbe sein. Die Linien gleicher Farbe, die s. g. *isochromatischen Curven*, haben auch hier die Gleichung

$$\delta = \text{const.}$$

oder

$$\sin u_1 \sin u_2 = \text{const.}, \tag{14}$$

da hier nicht der Fall eintreten kann, dass der Factor $\frac{1}{\cos \varphi}$, berücksichtigt werden muss; indessen ist hierbei zu bemerken, dass in einer solchen Linie die Farbe in die complementäre übergehen kann. Ausser diesen Curven bieten sich der Beobachtung dar die *farblosen* Linien, deren Gleichung ist

$$\sin 2\alpha_1 \sin 2\alpha_2 = 0; \tag{14a}$$

die Helligkeit in ihnen ist für homogenes Licht

$$\cos^2(\alpha_1 - \alpha_2)$$

also gleich Eins, wenn die Polarisationsebenen der beiden Nicols parallel sind, gleich Null, wenn diese senkrecht auf einander stehen.

Wir wollen zunächst näher den Fall discutiren, dass die Normale N mit der ersten optischen Achse zusammenfällt, mit der zweiten aber einen endlichen Winkel bildet. φ' und ω seien wieder die Polarcoordinaten des gebrochenen Strahles, und ω werde von der Ebene der optischen Achsen an gezählt. Dann ist

$$u_1 = \varphi', \quad u_2 = 2\sigma' = \text{const.},$$

es ist also die Gleichung der isochromatischen Curven

$$\varphi' = \text{const.} \tag{15}$$

oder auch, wenn wir wieder wie am Ende des vorigen Paragraphen die Polarcoordinaten für das Gesichtsfeld einführen,

$$\varphi = \text{const.};$$

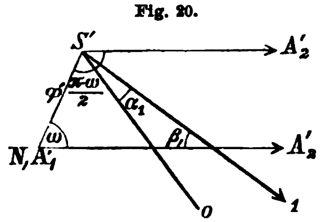
d. h. die Linien gleicher Farbe sind concentrische Kreise, deren Mittelpunkt der ersten optischen Achse entspricht.

Um die Gleichung der farblosen Linien aufstellen zu können, nennen wir β_1 und β_2 die Winkel, welche die Polarisationsebenen des ersten und zweiten Nicols mit der Ebene der optischen Achsen bilden; berücksichtigt man dann, dass die Polarisationsebene der zum Strahle S' gehörigen gewöhnlichen Welle den Winkel $\pi - \omega$ bei S' halbirt, so ergiebt sich

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2} - \left(\beta_1 + \frac{\omega}{2}\right),$$

$$\alpha_2 = \frac{\pi}{2} - \left(\beta_2 + \frac{\omega}{2}\right).$$

Fig. 20.



Die farblosen Linien sind daher wegen (14a) die beiden Geraden

$$\omega = -2\beta_1 \quad \text{und} \quad \omega = -2\beta_2 \tag{15a}$$

und ihre Verlängerungen; ihre Schnittpunkte mit den isochromatischen Kreisen sind zugleich die Stellen, wo auf jenen die Farbe in die complementäre übergeht. Diese beiden Linien verwandeln sich in *eine einzige*, wenn $2\beta_1$ und $2\beta_2$, oder, was dasselbe ist, wenn $2\alpha_1$ und $2\alpha_2$ sich um ein Vielfaches von π unterscheiden, und zwar ist diese Linie *weiss* oder *schwarz*, je nachdem $\beta_1 = \beta_2$ oder $\beta_1 = \beta_2 + \frac{\pi}{2}$ ist.

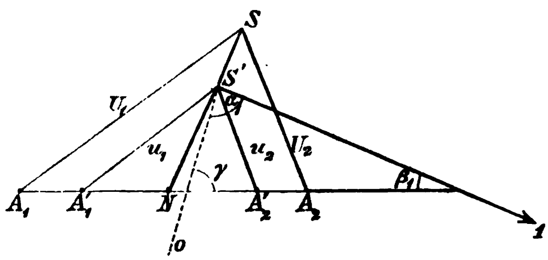
Untersuchen wir jetzt den zweiten Fall, dass die beiden optischen Achsen einen unendlich kleinen Winkel bilden, und nehmen wir der Einfachheit wegen an, dass die Normale N diesen halbirt.

Die Gleichung der isochromatischen Curven wird alsdann

$$u_1 u_2 = \text{const.}, \tag{16}$$

diese sind also ein System von Lemniscaten, deren Mittelpunkte die optischen Achsen sind. Diese Curven würden sich der Betrachtung darbieten, wenn die Strahlen in derselben Richtung unser Auge träfen, in welcher sie die Krystallplatte durchsetzt haben. Durch die Brechung beim Austritt wird die Erscheinung aber wesentlich modificirt. In der nachstehenden Figur, welche wir uns, wegen der grossen Kleinheit ihrer Linien als eben vorstellen können, bezeichnen wieder $S' A_1' A_2'$ die Punkte, in denen die zum Strahle und zu den beiden optischen

Fig. 21.



Achsen parallelen Kugelradien die Kugelfläche schneiden, während N das Bild der Plattennormale ist. Ziehen wir jetzt durch den Kugelmittelpunkt drei Strahlen, welche den soeben betrachteten nach ihrem Austritt aus dem Krystall parallel sind, und nennen wir $S A_1 A_2$ ihre Schnittpunkte mit der Kugel, so sind dies die Punkte, welche im Gesichtsfelde dem betrachteten Strahle, sowie den beiden optischen Achsen entsprechen. Wäre nun die Platte einfach brechend, so lägen die Punkte $N A_1' A_1$, $N A_2' A_2$ und $N S' S$ je auf einer Geraden, und nach dem Snell'schen Gesetze wäre

$$\frac{A_1 N}{A_1' N} = \frac{A_2 N}{A_2' N} = \frac{S N}{S' N} = \frac{V}{a},$$

jene Punkte könnten also sehr leicht construirt werden. Auch hier können wir aber von der Doppelbrechung absehen, d. h. wir dürfen annehmen, dass die Lage der Punkte dieselbe ist, wie bei einer einfach brechenden Platte. Die durch A_1 und A_2 bestimmten Richtungen haben den Namen der *scheinbaren optischen Achsen* erhalten, es sind das die Richtungen, welche die Strahlen im äusseren Medium haben müssen, damit sie im Inneren des Krystalles parallel den optischen Achsen fortschreiten.

Sind nun

$$S A_1 = U_1, \qquad S A_2 = U_2$$

die Entfernungen des Bildes S des austretenden Strahles von den scheinbaren optischen Achsen, so ergiebt sich aus der Figur unmittelbar für die isochromatischen Linien die Gleichung

$$U_1 U_2 = \text{const.} \tag{16 a}$$

sie sind also ein System von Lemniscaten, deren Mittelpunkte den scheinbaren optischen Achsen entsprechen.

Die farblosen Linien endlich ergeben sich durch die folgende Betrachtung: Es sei γ der Winkel zwischen der Ebene der optischen Achsen und der Polarisationsebene der gewöhnlichen zu S' gehörigen Welle; dann ist, weil $S'o$ den Winkel bei S' halbirt,

$$\gamma = A_1' + \frac{S'}{2}, \quad 180^0 - \gamma = A_2' + \frac{S'}{2},$$

also

$$\gamma = 90^0 + \frac{A_1' - A_2'}{2}$$

oder, was dasselbe ist, es ist

$$\gamma = 90^0 + \frac{A_1 - A_2}{2},$$

man erhält daher

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{\pi}{2} - \left(\beta_1 + \frac{A_1 - A_2}{2}\right) \\ \alpha_2 &= \frac{\pi}{2} - \left(\beta_2 + \frac{A_1 - A_2}{2}\right). \end{aligned} \tag{17}$$

Farblos sind mithin die Linien, für welche

$$\left.\begin{aligned} &\sin(2\beta_1 + A_1 - A_2) = 0 \\ \text{und} \quad & \\ &\sin(2\beta_2 + A_1 - A_2) = 0 \end{aligned}\right. \tag{17 a}$$

ist.

Es seien nun x, y die Coordinaten des Punktes S in Bezug auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen Anfangspunkt N und dessen x-Achse die Linie $A_1 A_2$ ist; nennt man dann 2σ den Winkel $A_1 A_2$ der scheinbaren optischen Achsen, so lassen sich die Gleichungen (17 a) der beiden farblosen Linien folgendermassen schreiben

$$\operatorname{tg} 2\beta = \operatorname{tg}(A_2 - A_1) = \frac{\operatorname{tg} A_2 - \operatorname{tg} A_1}{1 + \operatorname{tg} A_2 \operatorname{tg} A_1} = \frac{\frac{y}{\sigma - x} - \frac{y}{\sigma + x}}{1 + \frac{y^2}{\sigma^2 - x^2}},$$

oder auch

$$x^2 - y^2 + 2xy \cot 2\beta = \sigma^2,$$

wo für die erste Curve $\beta = \beta_1$, für die letzte $\beta = \beta_2$ zu setzen ist. Die farblosen Linien sind somit gleichseitige Hyperbeln, deren Mittelpunkt N ist, und welche stets durch die beiden Punkte $(\pm\sigma, 0)$, d. h. durch die scheinbaren optischen Achsen hindurch gehen. Bezieht man die Gleichung einer farblosen Linie auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem (ξ, η) mit demselben Anfangspunkte, dessen ξ-Achse der Polarisationsebene des betreffenden Nicol'schen Prismas parallel ist, setzt man also

Die Grundlage für die Veröffentlichung der Vorlesungen über die mathematische Optik bildete ein von Gustav Kirchhoff mit grosser Sorgfalt für den Vortrag niedergeschriebenes 452 Seiten starkes Manuscript, sowie ein kleineres Heft einzelner Blätter, Theile früherer Bearbeitungen enthaltend, welches an einigen wenigen Stellen benutzt werden konnte, endlich das Manuscript einer im Sommersemester 1875 gehaltenen öffentlichen Vorlesung über „Katoptrik und Dioptrik". Hierzu kamen noch die beiden jedenfalls aus den Resultaten der Vorlesung entstandenen Abhandlungen „Ueber die Reflexion und Brechung des Lichtes an der Grenze krystallinischer Körper" (Abhandlungen der Berliner Akademie vom Jahre 1876) und „Zur Theorie der Lichtstrahlen" (Sitzungsberichte der Berliner Akademie vom Jahre 1882).

Ausserdem waren mir von früheren Schülern Kirchhoffs mehrere Ausarbeitungen dieser Vorlesungen aus verschiedenen Jahren gütigst zur Verfügung gestellt worden, und zwar von Herrn Prof. Dr. Nöther in Erlangen eine der frühesten Heidelberger Vorlesungen von 1866/7, von Herrn Dr. Weinstein in Berlin eine solche vom Jahre 1875/6, zwei Bearbeitungen der Vorlesung 1879/80 von Herrn Professor König und Herrn Nath, die letztere durch Vermittelung des Herrn Dr. Kötter, endlich eine sehr ausführliche stenographische Ausarbeitung der letzten Vorlesung 1883/4 von Herrn Dr. Stäckel. Alle diese Bearbeitungen, sowie zwei von mir herrührende sorgfältige Nachschriften der beiden letzten Vorlesungen von 1881 und 1883 sind in ausgedehntem Maasse für die Herausgabe benutzt worden, und ich erlaube mir, den oben genannten Herren meinen besten Dank für ihre werthvolle Unterstützung zu sagen.

Ganz besonders aber ist es mir ein Bedürfniss, meinen ehrfurchtsvollen Dank Herrn Geheimrath v. Helmholtz auszusprechen, welcher die grosse Güte hatte, das für die Herausgabe vorbereitete Manuscript vor der Drucklegung durchzusehen; die von ihm angegebenen Zusätze und Bemerkungen habe ich unten hervorgehoben; möchte es mir gelungen sein, dieselben in der richtigen Weise zu benutzen.

Das der Veröffentlichung zu Grunde liegende Kirchhoff'sche Manuscript ist hervorgegangen aus einer älteren, wahrscheinlich für die erste Berliner Vorlesung bestimmten, jedenfalls aber vor dem Jahre 1875 abgefassten sehr ausführlichen Niederschrift. Für die späteren Vorlesungen sind dann beträchtliche Theile, fast zwei Drittel des Manuscriptes, durch vollständige Neubearbeitungen ersetzt worden. So lassen sich in dem vorliegenden Kirchhoff'schen Hefte ausser der ursprünglichen drei Umarbeitungen einzelner Theile unterscheiden, und mit Hülfe der oben erwähnten Ausarbeitungen konnte auch die Zeit ihrer Abfassung annähernd festgestellt werden: Es fällt die erste grössere Umarbeitung in die Zeit zwischen 1876 und 1879, die zweite ist für die Vorlesung von 1881/2, die letzte für diejenige vom Jahre 1883/4 gemacht worden.

Die beiden letzten Redactionen, sowie die Einleitung (die erste Vorlesung der vorliegenden Ausgabe), welche zusammen mehr als den dritten Theil des ganzen Manuscriptes ausmachen, sind stylistisch und sachlich mit so grosser Sorgfalt durchgeführt, dass die Vermuthung begründet erscheinen kann, sie seien bereits im Hinblick auf eine spätere Veröffentlichung niedergeschrieben worden; diese Theile sind auch nur mit unwesentlichen Zusätzen von Kirchhoff in seinen beiden letzten Vorlesungen vorgetragen, und daher fast wörtlich in diese Ausgabe übernommen worden.

Dagegen ergiebt eine genaue Vergleichung der beiden ersten Bearbeitungen mit dem Text der im Winter 1883/4 gehaltenen Vorlesung, dass der Inhalt jener Blätter von Kirchhoff in wesentlich erweiterter und veränderter Form vorgetragen worden ist. In den Nachschriften finden sich grössere Ausführungen, welche im Manuscript theils ganz fehlen, theils nur durch kurze Bleistiftnotizen angedeutet sind; einige Entwicklungen sind im Vortrag in völlig anderer Weise als im Concept durchgeführt; an manchen Stellen ist es die Anordnung des Stoffes, welche in der Vorlesung modificirt worden ist; auch besitzen diese Theile des Manuscriptes noch nicht die wunderbare Schärfe und hohe Eleganz des Ausdruckes, welche Kirchhoff seinen Veröffentlichungen stets zu geben pflegte.

Aus diesen Gründen erschien die Annahme berechtigt, dass ein wörtlicher Abdruck auch dieses Theiles der Handschrift nicht den Wünschen des Verewigten entsprochen haben würde. Statt dessen wurde versucht, möglichst den vollen Inhalt der letzten und vollendetsten Vorlesung wiederzugeben, derjenigen, welche Kirchhoff im Wintersemester 1883/4 gehalten hat, unter Hinzunahme nur der Theile früherer Vorträge, welche für das Verständniss späterer Kapitel wichtig sind, und damals wohl nur aus Zeitmangel gar nicht, oder nur kurz berührt wurden. Eigene Zusätze und Veränderungen wurden nur an wenigen Stellen gewagt, wo sie für das Verständniss nöthig schienen, oder wo die veränderte Bestimmung der Vorträge eine andere Art der Darstellung wünschenswerth machte. Ueber diese, sowie die mit Benutzung der Ausarbeitungen und Nachschriften gemachten Zusätze giebt das nachfolgende Verzeichniss erschöpfende Auskunft.

So konnte es wohl gelingen, fast vollständig den Inhalt, nicht aber die harmonische Form jener Vorlesungen wiederzugeben, oder gar den Zauber der mündlichen Vorträge Kirchhoffs so festzuhalten, wie er allen denen lebendig bleiben wird, welche einmal das Glück hatten, seinen Worten zu lauschen; ebenso wenig aber war es möglich diesem Werke die stylistische Vollendung aller Kirchhoff'schen Schriften zu verleihen. Die zahlreichen Aenderungen, welche bei den beiden ersten Vorlesungsmanuscripten anzubringen waren, und die Redaction der nur durch die Nachschriften erhaltenen mündlichen Zusätze Kirchhoffs bildeten für die Herausgabe eine schwierige und verantwortungsvolle Aufgabe, und ich bin mir selbst wohl bewusst, dass ich diese nicht in befriedigender Weise gelöst habe, obwohl ich mit meiner ganzen Kraft dieses Ziel zu erreichen suchte.

Einleitung. Lichtbewegung in einem unbegrenzten homogenen isotropen Medium. I. Vorlesung.

Das Manuscript dieser Vorlesung gehört vollständig der ersten Bearbeitung an; eine Ausnahme macht nur der § 7 bis pag. 19 Z. 18 v. o., welcher, wohl mit Rücksicht auf die zweite und dritte Vorlesung, im Jahre 1883 vollständig umgearbeitet wurde. Stylistische Aenderungen wurden fast gar nicht vorgenommen.

§ 2 pag. 3 Z. 7—3 v. u. Zus. d. H. nach der Bleistiftnotiz „Foucault 1854".
§ 3 pag. 7 Z. 1—6 v. o. Zus. d. H. nach der Bleistiftnotiz „Allgemeine Lösung".
§ 4 pag. 8 Z. 10—27 v. o. Zus. d. H.
pag. 9 Z. 9—13 v. o. Zus. d. H.
Z. 14—23 v. o. Ausführung nach Angaben des MS.
§ 5 pag. 11 Z. 10—20 v. o. Zus. d. H. mit Benutzung einer ausführlichen Darstellung v. J. 1866/7.
Z. 13 v. u.—pag. 12 Z. 3 v. o. Zus. nach der Darstellung von 1866/7. Im MS.: „A und δ können mit Hülfe eines Parallelogramms construirt werden".
§ 6 pag. 15 Z. 14—26 v. o. Zus. d. H. nach der Ausarbeitung v. J. 1879 und der Nachschrift v. J. 1881.

Erster Theil. Einwirkung fremder Körper auf die Lichtbewegung. Theorie der Reflexion und Brechung. II., III., IV. Vorlesung.

Dieser Theil des Werkes ist mit Ausnahme des § 4 der zweiten Vorlesung im Jahre 1881 und alsdann noch einmal im Jahre 1883 vollständig neu bearbeitet worden. (Vgl. die Abhandlung „Zur Theorie der Lichtstrahlen".) Die §§ 3—5 der vierten Vorlesung bildeten einen Theil der Vorlesung über Katoptrik und Dioptrik, welcher erst im Jahre 1883 umgearbeitet und in die Vorlesung über Optik aufgenommen wurde. In der zweiten und dritten Vorlesung ist die Darstellung mit Rücksicht auf eine Bemerkung von Herrn v. Helmholtz an einigen Stellen etwas ausführlicher als im MS. — § 4 der dritten Vorlesung, dessen Resultate in § 3 der fünften Vorlesung gebraucht werden, ist mit Benutzung eines ältern MS. und der Ausarbeitungen von 1879 und 1881 hinzugefügt, und die Rechnung in ihrem letzten Theile durch Einführung der Grössen ε geändert worden. Abgesehen von diesen und den unten angegebenen Zusätzen ist das MS. beinahe wortgetreu abgedruckt worden.

Zweite Vorlesung.

§ 1 pag. 22 Z. 4 v. u.—pag. 23 Z. 6 v. o. Zus. d. H.
pag. 24 Z. 4 v. u.—pag. 25 Z. 8 v. o. Zus. d. H.
pag. 25 Z. 10—7 v. u. Zus. d. H.
pag. 26 Z. 7—10 v. o. Zus. d. H.
§ 2 pag. 28 Z. 21—16 v. u. Zus. d. H.
pag. 28 Z. 7 v. u.—pag. 30 Z. 8 v. o. Zus. d. H. unter Benutzung der Nachschriften aus den Jahren 1881 und 1883 und einiger Bleistiftnotizen.

§ 5 pag. 39 Z. 11 v. u. — pag. 40 Z. 7 v. o. Zus. d. H. nach einer Bemerkung auf einem Blatte des älteren MS.
pag. 40 Z. 14 — 1 v. u. Zus. d. H. nach der Abhandlung v. J. 1882.

Dritte Vorlesung.

§ 4. Zus. d. H. (vgl. die Vorbemerkung).
§ 5 pag. 52 Z. 4 v. u. — pag. 53 Z. 8 v. o. Zus. d. H.

Vierte Vorlesung.

§ 2 pag. 63 Z. 14—2 v. u. Zus. d. H. nach einer Bleistiftnotiz am Rande des MS.
§ 4 pag. 72 Z. 3 v. u. — pag. 73 Z. 6 v. o. Zus. d. H. nach einer Bleistiftnotiz im MS.
§ 5 pag. 76 Z. 11 — 15 v. o. Zus. d. H.
pag. 77 Z. 14 v. u. — pag. 78 Z. 14 v. o. Zus. d. H. mit Benutzung der Nachschrift vom Jahre 1883.

Zweiter Theil. Theorie der Beugungserscheinungen. V., VI., VII. Vorlesung.

Das Manuscript für diesen Theil gehört mit Ausnahme der §§ 1—3 der fünften und der §§ 2—3 der sechsten Vorlesung den beiden älteren Bearbeitungen vor 1880 an. — § 2 der sechsten Vorlesung ist für den Vortrag vom Jahre 1881 niedergeschrieben worden. In der Vorlesung von 1879/80 wurde an dieser Stelle nur hervorgehoben, dass die Voraussetzung, nach welcher die Spaltweite sehr gross gegen die Wellenlänge sein muss, nicht zu bestehen braucht, dass aber die theoretische Begründung dieser Thatsache noch nicht gefunden ist. Die Darstellung des MS. wurde unter Benutzung der Nachschrift von 1883 und der Abhandlung vom Jahre 1882 vollständig umgearbeitet und dem Zusammenhange entsprechend verändert. § 3 der sechsten Vorlesung wurde erst im Jahre 1883 hinzugefügt und aus dem MS. ungeändert übernommen. Endlich wurden § 5 der fünften, §§ 1 und 5 der sechsten sowie §§ 1, 2, 4 der siebenten Vorlesung zum Theil beträchtlich umgearbeitet.

Fünfte Vorlesung.

§ 1 pag. 80 Z. 6 — 19 v. o. Zus. d. H.
pag. 81 Z. 12 v. o. ist hinter „ist“ einzuschalten „der Punkt o also nahe an der Verlängerung der Linie r_1 liegt“.
pag. 81 Z. 10—5 v. u. Zus. d. H. nach der Nachschrift vom Jahre 1883.
pag. 82 Z. 11 — 16 v. o. Zus. d. H. nach einer Bleistiftnotiz im MS.
§ 2 pag. 83 Z. 20 — 12 v. u. Zus. d. H. nach der Nachschrift vom Jahre 1883.
§ 3 pag. 86 Z. 7 — 12 v. o. Zus. d. H.
Bemerkung: Z. 8 v. o. statt „vierten“ lies „dritten“.
§ 4 pag. 91 Z. 7—13. Zus. d. H.
§ 6 pag. 97 Z. 6—12. Zus. d. H.

Sechste Vorlesung.

§ 1 pag. 98 Z. 3 v. u. — pag. 99 Z. 5 v. o. Zus. d. H.
pag. 100 Z. 6 — 16 v. o. Zus. d. H. nach einer Bemerkung des Herrn Dr. Th. Lohnstein; im MS. steht: Ist die Zahl der Oeff-

nungen sehr gross und sind sie regellos vertheilt, so wird der Mittelwerth dieses Verhältnisses für einen kleinen Theil des Gesichtsfeldes an allen Stellen desselben merklich denselben Werth haben und zwar gleich n sein; (die letzten Worte Bleistiftnotiz am Rande).

§ 1 pag. 100 Z. 17—27 Zus. d. H. nach den Vorlesungen von 1879 und 1883.

§ 2 vgl. die Vorbemerkung.

pag. 105 Z. 1—7 v. o. „Factisch giebt es eine Menge schwächerer Maxima, wo der Wegunterschied für Grenzstrahlen des ganzen Gitters $\frac{2\mu+1}{2}\lambda$ beträgt, aber deren Lichtstärke ist klein dem Hauptmaximum gegenüber, wo sich die Strahlen aller Oeffnungen verstärken.“ Bemerkung von Herrn v. Helmholtz.

Siebente Vorlesung.

§ 1 pag. 117 Z. 5 v. u.—pag. 118 Z. 3 v. o. Zus. d. H. nach einer Randbemerkung im MS.

pag. 119 Z. 7 v. o. – pag. 121 Z. 7 v. o. Zus. d. H. nach einem älteren MS.; dasselbe befand sich ursprünglich an einer anderen Stelle.

§ 4 pag. 129 Z. 1—6 v. o. Zus. d. H.

pag. 132 Z. 2—22 v. o. wurde die Darstellung etwas geändert.

Dritter Theil. Intensität und Polarisationszustand des reflectirten und des gebrochenen Lichtes. VIII. und IX. Vorlesung.

Der Herausgabe liegt hier ausschliesslich ein älteres Manuscript zu Grunde und zwar für die achte Vorlesung die Redaction von 1879, für die neunte die ursprüngliche Bearbeitung. Von der Handschrift der achten Vorlesung wurden die §§ 1—4 fast wörtlich, § 5 und 6 mit grösseren Zusätzen und stylistischen Aenderungen übernommen. Die neunte Vorlesung wurde für die Herausgabe der Form und dem Inhalt nach theils selbstständig, theils unter Benutzung der Nachschriften von 1881 und 1883 vollständig umgearbeitet. Der § 3 der neunten Vorlesung ist erst in der letzten Vorlesung in dieser Form gegeben worden. 1881 wurde der hier bewiesene Satz nur erwähnt, 1879 in complicirterer Weise hergeleitet. Die Darstellung des Beweises wurde gegen die Vorlesung etwas verändert.

Achte Vorlesung.

§ 1 pag. 136 Z. 6—9 Zus. d. H.

§ 2 pag. 139 Z. 7—18 Zus. d. H.

§ 4 pag. 143 Z. 3 v. u.—pag. 144 Z. 7 v. o. veränderte Darstellung gegen das MS.

§ 5 pag. 148 Z. 18 v. u.—pag. 149 Z. 4 v. o. Zus. d. H. nach Andeutungen des MS. und der Nachschrift von 1883.

§ 6 pag. 152 Z. 14 v. u.—pag. 153 Z. 14 v. o. veränderte Darstellnng gegen das MS.

pag. 153 Z. 22—28 v. o. Zus. d. H. nach der Vorlesung vom Jahre 1879.

pag. 154 Z. 20—1 v. u. Zus. d. H. mit Benutzung einer Darstellung vom Jahre 1867.

Neunte Vorlesung.

Vergleiche die Vorbemerkung.

§ 4 pag. 167 Z. 1 v. o. — Z. 13 v. o. wurde die Rechnung in anderer Weise als im MS. geführt.

pag. 168 Z. 18 v. u. — pag. 169 Z. 14 v. o. Zus. d. H. nach einer Randnotiz im MS. und einem eingeordneten Blatte mit Bemerkungen.

pag. 169 Z. 15—30 v. o. Zus. d. H.

Vierter Theil. Dispersion und Absorption isotroper Körper.
X. Vorlesung.

Die Vorlesung ist in dieser Form nur im Jahre 1883 gehalten worden. 1881 und 1879 wurde nur auf die Helmholtz'sche Abhandlung verwiesen, im Jahre 1875 wurde die Theorie der Dispersion und Absorption am Ende der Vorträge ausführlich, aber in völlig anderer Form behandelt. Die Darstellung des Manuscripts wurde für den Druck nur wenig geändert.

Zehnte Vorlesung.

§ 3 pag. 176 Z. 20—30 Zus. d. H.

pag. 177 Z. 9—16 Zus. d. H.

pag. 179. Die Rechnung wurde hier gegen das MS. geändert.

§ 5 Anfang: „In neuerer Zeit ist es Herrn Kundt gelungen, sehr dünne metallische prismatische Schichten herzustellen, welche Brechung erkennen lassen, zu genauen Messungen aber noch nicht fähig sind (Sitzungsberichte der Berliner Akademie v. J. 1888 p. 255)". Zus. d. H. nach einer Bemerkung von Herrn v. Helmholtz.

pag. 187 — pag. 188. Die Darstellung wurde hier gegen das MS. etwas geändert.

pag. 188 Ende — pag. 190 Z. 3 v. o. Zus. d. H. mit Benutzung von (83).

Fünfter Theil. Lichtbewegung in einem krystallinischen Mittel.
XI., XII., XIII., XIV. Vorlesung.

Das Manuscript dieses Theiles gehört vollständig der ursprünglichen Redaction und der ersten Umarbeitung vor 1879 an. Ein grosser Theil der eilften Vorlesung wurde sogar bereits in den in Heidelberg gehaltenen Vorträgen über die Elasticitätstheorie in dieser Form vorgetragen und später in der Abhandlung vom Jahre 1876 veröffentlicht. Eine Ausnahme bildet nur der § 1 der vierzehnten Vorlesung — pag. 249 Ende, der 1883 neu bearbeitet und gegen die frühere Darstellung wesentlich vereinfacht wurde. Die erste Umarbeitung ist hier zum Theil sehr kurz, so findet sich für § 2 der zwölften Vorlesung nur ein Blatt mit einzelnen Worten, ähnlich, aber ausführlicher § 2—3 der eilften Vorlesung. Der ganze Abschnitt wurde für die Veröffentlichung sehr beträchtlich umgearbeitet und erweitert, theilweise unter Benutzung zahlreicher Bleistiftnotizen am Rande des Manuscripts der Abhandlung von 1876, der beiden Nachschriften und der stenographischen Ausarbeitung vom Jahre 1883.

Eilfte Vorlesung.

§ 1 pag. 192 Z. 1—15 v. o. Zus. d. H. nach der Vorlesung vom Jahre 1883.
pag. 193. Die Bezeichnungen des Potentiales und der Druckcomponenten wurden hier gegen das MS. und die Abhandlung von 1876 so geändert, dass sie mit denjenigen der ersten Vorlesung und der Mechanik im Einklang sind.
pag. 196 Z. 15 v. o. — pag. 197 Z. 3 v. o. Zus. d. H. mit Benutzung von der Nachschrift vom Jahre 1883.
§ 2 pag. 197 Z. 13—19 v. o. Zus. d. H.
Z. 4 v. u. In der in Heidelberg gehaltenen Vorlesung, sowie auch im Jahre 1875 wurde eine Herleitung des Ausdruckes von F für den Lichtäther gegeben, welche, ähnlich wie die Green'sche Untersuchung, zuletzt auf ein System von 15 linearen Gleichungen für die Coefficienten von F führte. Seit 1880 wurde diese etwas ausgedehnte Untersuchung nicht mehr, sondern nur ihr Resultat und die Verification desselben angegeben. Eine einfache Herleitung findet sich im Journal für die reine und angewandte Mathematik Bd. 108 pag. 140—143.
pag. 199 Z. 2 v. u. — pag. 200 Z. 8 v. o. Zus. d. H.

Zwölfte Vorlesung.

§ 1 pag. 205 Z. 6 v. u. — pag. 206 Z. 6 v. o. Zus. d. H. nach der Abhandlung v. J. 1876.
pag. 206 Z. 14—31 v. o. Die Darstellung wurde gegen die des MS. verändert.
pag. 208 Z. 17—22 Zus. d. H. nach der Abhandlung v. J. 1876.
§ 2 pag. 209 Z. 5 v. u. — pag. 210 Z. 12 v. o. Zus. d. H. nach einer Bleistiftnotiz am Rande des MS. und der Nachschrift vom Jahre 1883.
§ 3 pag. 212 Z. 6—18 v. o. Zus. d. H. nach der Vorlesung vom Jahre 1883.
§ 4 pag. 213 Z. 7—12. Zus. d. H. nach Bleistiftnotizen im MS.
§ 5 pag. 216 Z. 7—25 v. o. Die Rechnung ist hier gegen das MS. verändert.
pag. 217 Z. 10—1 v. u. Zus. d. H.

Dreizehnte Vorlesung.

§ 1 pag. 219 Z. 5 v. o. — Ende § 1. Zus. d. H. mit Benutzung der Abhandlung v. J. 1876; im MS. und beim Vortrage wurden *alle* Wellennormalen von vornherein als senkrecht zur Y-Achse vorausgesetzt und alsdann aus den Grenzbedingungen die Gleichungen (4^b) abgeleitet.
§ 2. Zus. d. H. mit Benutzung der Abhandlung und der Vorlesung vom Jahre 1883.
§ 3 pag. 224 Z. 11 v. u. — Ende § 3. Zus. d. H. mit Benutzung einiger Bleistiftnotizen, sowie der Abhandlung und der Ausarbeitung vom Jahre 1883.
§ 4 pag. 227 Z. 16—28. Zus. d. H. mit Benutzung der Vorlesung vom Jahre 1883.
§ 5 pag. 228 Z. 17—25. Zus. d. H. mit Benutzung einer Bleistiftnotiz am Rande des MS.
pag. 230 Z. 18 -1 v. u. Zus. d. H. nach der Vorlesung v. J. 1881.

§ 6 pag. 234 Z. 15—5 v. u. Zus. d. H.
§ 7 pag. 235 Z. 4 v. u. — pag. 236 Z. 10 v. o. Zus. d. H.
Z. 16—2 v. u. Ausführung nach einer Notiz im MS.
§ 10 pag. 244 Z. 23—1 v. u. Ausführung nach Notizen im MS.

Vierzehnte Vorlesung.

§ 1 pag. 247 Z. 12—1 v. u. Zus. d. H. nach der Vorlesung vom Jahre 1883 und einer Notiz im MS.
pag. 248 Z. 1—33. Zus. d. H. unter Benutzung der Vorlesung vom Jahre 1866.
§ 2 pag. 252 Z. 1—7 v. o. Zus. d. H.
pag. 252 Z. 3 v. u. — 254 Z. 4 v. o. wurde die Darstellung gegen das MS. verändert.
§ 3 pag. 256 - 257 Z. 10 v. u. wurde die Darstellung gegen das MS. verändert.
§ 4 pag. 260 Z. 1 v. o. — pag. 261 Z. 2 v. o. Zus. d. H. unter Benutzung der Vorlesung v. J. 1883.
pag. 262. Zus. d. H. zum Theil unter Benutzung einiger Bemerkungen der Vorlesung vom Jahre 1866.

VORLESUNGEN

ÜBER

MATHEMATISCHE PHYSIK

VON

GUSTAV KIRCHHOFF.

VIERTER BAND.

THEORIE DER WÄRME.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1894.

VORLESUNGEN

ÜBER DIE

THEORIE DER WÄRME

VON

GUSTAV KIRCHHOFF.

HERAUSGEGEBEN

VON

Dr. MAX PLANCK,

PROFESSOR DER THEORETISCHEN PHYSIK AN DER UNIVERSITÄT BERLIN.

MIT 17 FIGUREN IM TEXT.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1894.

Vorwort des Herausgebers.

Mit dem vorliegenden vierten Bande findet das Gesammtwerk von Gustav Kirchhoff über mathematische Physik seinen Abschluss. Derselbe giebt den Inhalt der Vorlesungen wieder, welche der Verewigte über die Lehre von der Wärme, zuletzt in den Sommersemestern 1876, 1878, 1880, 1882 und 1884 an der Berliner Universität gehalten hat, auf Grund des von ihm selber verfassten und redigirten Collegienheftes. Zum unmittelbaren Abdruck war dieses allerdings ebensowenig geeignet wie die bisher herausgegebenen Hefte, da seine einzelnen Theile verschiedenartigen Umarbeitungen älterer Darstellungen entstammen und daher nicht immer in unmittelbarem Zusammenhang miteinander stehen. Manches ist auch in doppelter Redaktion vorhanden, so dass nur die neueste Fassung berücksichtigt werden konnte. Dennoch liess sich die Herausgabe ganz nach denselben Grundsätzen bewirken, die beim dritten Bande für mich massgebend waren, indem die vorgenommenen Aenderungen sich ausschliesslich auf die formelle Seite zu erstrecken brauchten, so auf die redaktionelle Vervollständigung einzelner Sätze, die Durchführung einer einheitlichen Bezeichnung, die Verbesserung einiger weniger Schreibfehler. An Stellen, wo sich im Zusammenhang eine, übrigens stets nur unbedeutende Lücke zeigte, konnte dieselbe leicht aus den Zuhörerheften ergänzt werden, die mir auch für diesen Band von einigen wissenschaftlichen Bekannten in dankenswerther Weise zur Verfügung gestellt waren.

Alle Bemerkungen, die ich im Interesse des leichteren Verständnisses für nothwendig oder wünschenswerth hielt, und die mir die bekannte gedrängte Darstellungsweise des Verfassers verhältnissmässig häufig nahelegte, habe ich wieder in besondere Anmerkungen verwiesen, da ich hoffte, dem Bedürfniss des Lesers, wenn auch gewiss nicht allenthalben, so doch wenigstens in einigen Punkten damit entgegenkommen zu können. Während ich mich so in Bezug auf die Form und den Zusammenhang des Vorgetragenen in allen Stücken als verantwortlich betrachte und jederzeit gern bereit sein werde, über jede Einzelheit der mitunter schwierigen Entwicklungen nach besten Kräften Rechenschaft zu geben, habe ich dagegen nach der materiellen Seite hin jeden Versuch einer Erweiterung grundsätzlich vermieden, weil dadurch das Werk in seiner Bedeutung geändert worden wäre. So wie dasselbe sich hier darstellt, kann es als ein getreues Abbild der von dem Verfasser wirklich gehaltenen Vorträge gelten, und dadurch die durch seinen vorzeitigen Tod in dem grossen Werke seines wissenschaftlichen Lebens geschaffene Lücke, welche unausfüllbar ist, hoffentlich einigermassen überdecken helfen.

Bei der Herstellung des druckfertigen Manuscripts und des Inhaltsverzeichnisses, insbesondere auch bei der Controllirung und Ergänzung der Citate, sowie später bei der Correktur hat mich Herr Dr. Eugen Röber in dankenswerther Weise unterstützt.

Berlin, im December 1893.

Max Planck.

Inhaltsverzeichniss.

Erste Vorlesung.

Einleitung. — Wärme als Bewegung. — Annahme, dass die Materie stetig den Raum erfüllt. — Reine Wärmelehre. — Temperatur. — Wärmemenge. Specifische Wärme. — Leitung der Wärme. — Richtung und Intensität des Wärmestroms. — Leitungsfähigkeit, innere und äussere. — Grundgleichung für die Wärmeleitung.

§ 1.

Es ist die Aufgabe der Physik, gewisse Klassen von Erscheinungen, die sogenannten physikalischen Erscheinungen, zu erforschen, übersichtlich zu ordnen und so einfach wie möglich darzustellen. Von allen physikalischen Erscheinungen sind die einfachsten, d. h. diejenigen, die dem Verständniss am nächsten liegen, die *Bewegungs-Erscheinungen*, welche den Gegenstand der *Mechanik* ausmachen. Die wenigsten Grundanschauungen kommen hier vor, nämlich nur die des Raumes, der Zeit und der Materie. Manche andere Begriffe treten freilich neben diesen noch auf, wie die der Geschwindigkeit, Beschleunigung, Kraft, Arbeit und andere. Das sind aber nicht Grundbegriffe, sondern sie sind aus jenen mit mathematischer Schärfe ableitbar. Sie sind eingeführt, weil mit ihrer Hilfe die Gesetze der Bewegungen sich leichter aussprechen lassen. In allen anderen Gebieten der Physik kommen neue, wesentlich verschiedene Begriffe hinzu, so z. B. in der Optik die der Lichtstärke, der Farbe, des Polarisationszustandes. Ist freilich die Hypothese, die der Undulationstheorie des Lichtes zu Grunde liegt, richtig, so sind diese Begriffe auf die der Mechanik zurückzuführen; es besteht dann das Licht in Schwingungen, deren lebendige Kraft die Lichtstärke, deren Dauer die Farbe und deren Richtung den Polarisationszustand bedingt. Diese Hypothese ist so einfach und die Folgerungen, die mit Strenge aus ihr gezogen werden können, sind in so guter, wenn auch nicht vollständiger Uebereinstimmung mit der Erfahrung, dass dieselbe sehr geeignet ist, als Ausgangspunkt bei der Darstellung der optischen Erscheinungen zu dienen.

Man hat die Hypothese aufgestellt, dass alle physikalischen Erscheinungen, also auch die durch die *Wärme* bedingten, die in diesen

Vorlesungen uns beschäftigen sollen, auf Bewegungen beruhen, dass die ganze Physik also auf Mechanik zurückzuführen sei. Wäre das gelungen, so wäre in Bezug auf die Einfachheit der Darstellung das denkbar Höchste geleistet; die genannte Zurückführung ist daher ein Ziel, das im vollsten Masse werth ist, erstrebt zu werden. Die Frage, ob es kein eingebildetes ist, ob wirklich alle physikalischen Erscheinungen auf Bewegungen beruhen, ist gleichbedeutend mit der Frage, ob die kleinsten Theilchen der Materie keine andere Veränderungen erleiden, als Ortsveränderungen. Nach dem unmittelbaren Zeugniss unserer Sinne müssen wir freilich diese Frage entschieden verneinen; die Aenderungen des Aggregatzustandes, der chemischen Beschaffenheit, der Temperatur, des elektrischen Zustandes und anderer Eigenschaften *scheinen* uns nicht Bewegungen zu sein. Aber das unmittelbare Zeugniss unserer Sinne ist nicht entscheidend. Es nehmen diese, auch wenn sie bewaffnet sind mit allen Hilfsmitteln, die die Kunst geschaffen hat, nicht Räume wahr, deren Dimensionen unterhalb gewisser Grenzen liegen, und erkennen nicht, was in einem solchen Raume vorgeht; sie fassen nur gewisse Mittel von den Ereignissen auf, die in sehr vielen so kleinen Räumen stattfinden, und erhalten denselben Eindruck, wie wenn die Materie *stetig* den Raum erfüllt und die Bewegung stetig im Raum sich ändert; nur an Flächen, nämlich an den Grenzflächen sich berührender Körper, können sie plötzliche Aenderungen der Beschaffenheit und der Bewegung der Materie erkennen. Wenn in Räumen, die durch ihre Kleinheit sich der Wahrnehmung entziehen, Verschiedenheiten in Bezug auf diese bestehen, wenn etwa die kleinsten Theile der Materie durch Zwischenräume getrennt sind, so können wir das nicht sehen, und Aenderungen, die in diesen Entfernungen eintreten, als solche nicht erkennen. Es ist möglich, dass die Aenderungen der Temperatur, des Aggregatzustandes u. s. f. in solchen relativen Bewegungen bestehen. Das ist in der That die Ansicht, die man zu Grunde legt, wenn man behauptet, dass die sämmtlichen physikalischen Erscheinungen auf Bewegung beruhen.

§ 2.

Sie könnten erwarten, dass ich damit beginne, die genannte Hypothese in Bezug auf die Wärmeerscheinungen zu präcisiren, dann Folgerungen aus ihr ziehe und diese Folgerungen mit den beobachteten Thatsachen zusammenstelle. Es kann gegenwärtig ein solcher Weg aber noch nicht eingeschlagen werden, da die Vorstellung, die man sich bis jetzt von der Wärmebewegung hat bilden können, noch zu unklar ist und noch nicht in genügender Weise der Rechnung unterworfen werden kann. Noch am meisten ausgebildet ist diese Vorstellung für die Gase. Man nimmt an, dass hier die Moleküle (die in dem kleinsten Raume, dessen Dimensionen uns noch wahrnehmbar sind, in ungeheurer Zahl vorhanden sind) bunt durch einander schwirren, etwa wie die Mücken in einem Mückenschwarm. In gerader Linie soll ein jedes dieser Moleküle fortgehen, bis es mit einem zweiten zusammenstösst und von diesem in eine neue Bahn geschleudert wird. Das Wesen dieser Zusammenstösse ist noch sehr dunkel; je nach der Beschaffenheit, die man den Molekülen beilegt, hat man diese sich anders zu denken. Noch weniger weiss man von der Bewegung der Moleküle bei festen und tropfbar flüssigen Körpern; nur soviel steht fest, dass auch hier die äusserste Unregelmässigkeit herrscht, so dass bei Molekülen, die ganz nahe bei einander sich befinden, in demselben Augenblicke alle möglichen Geschwindigkeiten und Bewegungsrichtungen vertreten sind. Erwägt man, dass gegenwärtig die Hilfsmittel der Mathematik nicht einmal ausreichen, um genau die Bewegung dreier Himmelskörper anzugeben, die nach dem Newton'schen Gesetze sich anziehen und als materielle Punkte zu betrachten sind, so giebt man leicht zu, dass die Vorstellung von der Beschaffenheit der Körper, auf die ich eben hingewiesen habe, nicht geeignet ist, als Ausgangspunkt für strenge Schlüsse zu dienen und scharfe Definitionen der Begriffe, auf die die Erscheinungen geführt haben, zu ermöglichen. Um zu dem Verständniss dieser Begriffe zu gelangen, muss man von Vorstellungen ausgehen, die unmittelbarer sich an die Erscheinungen anschliessen und zugleich durch Rechnung leichter verfolgt werden können. Wir wollen deshalb zunächst die Annahme festhalten, die auch bei der Entwicklung der Mechanik zu Grunde gelegt wird, dass die Körper nicht aus discreten Molekülen bestehen, sondern die Materie *stetig* den Raum, den die Körper einnehmen, erfüllt und dass, wenn relative Bewegungen ihrer Theile stattfinden, diese Bewegung *stetig* von Punkt zu Punkt variirt. So lange wir das thun, müssen wir dann freilich darauf verzichten, die Begriffe der Wärmelehre auf die der Mechanik zurückzuführen; wir müssen annehmen, dass die Theile der Materie ausser den Ortsveränderungen noch andere (qualitative) Aenderungen erleiden können und haben die Temperaturänderungen zu diesen zu rechnen.

Strenge genommen giebt es keine physikalische Erscheinung, bei der neben Bewegungen nicht noch andere Aenderungen der Materie stattzufinden scheinen — also, wie wir von dem Standpunkte, auf welchen wir uns eben gestellt haben, sagen müssen: stattfinden —. Temperaturänderungen fehlen nie, bei jeder Bewegung nämlich tritt Reibung ein und Reibung erregt Wärme. Aber bei vielen Bewegungserscheinungen sind die Aenderungen der Temperatur und anderer Eigenschaften der Materie unmerklich; diese Erscheinungen sind es eben, die den Gegenstand der Mechanik oder, wie ich lieber sagen möchte, der *reinen* Mechanik bilden. Andererseits gehen Temperaturänderungen nie ohne Bewegung vor sich; ändert doch jeder Körper sein Volumen, wenn seine Temperatur eine andere wird; und bei der Aenderung seines Volumens findet eine relative Bewegung, also eine Bewegung seiner Theile statt. Bei manchen Erscheinungen sind aber die Bewegungen, welche neben Temperaturänderungen vorhanden sind, der Art, dass man sie ausser Acht lassen darf. Solche Erscheinungen, die Erscheinungen nämlich, bei denen ausschliesslich *Temperaturänderungen* in Betracht gezogen zu werden brauchen, bilden den Gegenstand des Gebietes der Physik, mit dem wir uns hier zuerst beschäftigen wollen und das nicht unpassend *reine Wärmelehre* genannt werden kann. Später werden wir uns dann zur *mechanischen Wärmelehre*, d. h. zu den Erscheinungen wenden, bei denen sowohl Temperaturänderungen als Bewegungen zu berücksichtigen sind.

§ 3.

Der Hauptbegriff, mit dem wir es hier zu thun haben, ist der der *Temperatur*. Jedermann hat aus dem gewöhnlichen Leben eine, wenn auch nicht ganz klare Vorstellung von dem, was man mit diesem Namen bezeichnet. Man spricht von *gleichen*, von *grösseren* (oder höheren) und *kleineren* (oder niedrigeren) Temperaturen. Die Temperatur ist also eine *Grösse* und zwar eine, die im Allgemeinen von einem Punkte eines Körpers zum anderen, und in demselben Punkte mit der Zeit sich ändert. Spricht man schlechtweg von der Temperatur eines Körpers in einem gewissen Augenblick, so setzt man voraus, dass sie in allen seinen Punkten dieselbe ist. Wir wollen fürs Erste annehmen, dass die Angabe eines gewöhnlichen Thermometers die Temperatur seines Quecksilbers ist; wir werden sehr bald sehen, wie man dann mit Hilfe dieses Thermometers die Temperaturen anderer Körper messen kann.

Die ganze Aufgabe, die man in der reinen Wärmelehre zu lösen hat, ist, anzugeben, wie unter gegebenen Verhältnissen die Temperatur in einem Körper oder in einem System von Körpern von Punkt zu Punkt und von einem Augenblick zum andern variirt. Es ist das aber direct in einfacher Weise nicht zu machen. Um viele Fälle zusammenzufassen und einfache allgemeine Sätze aufstellen zu können, ist die Einführung zweier Hilfsbegriffe nöthig gewesen: der Begriffe der *Wärmemenge* und der *specifischen Wärme*. Es spielen diese hier eine ähnliche Rolle, wie gewisse Hilfsbegriffe in der Mechanik. Die Aufgabe der Mechanik ist es, die Orte anzugeben, an denen die Körper oder Körpertheile, die man betrachtet, in irgend einem Augenblicke sich befinden. Um das in übersichtlicher Weise zu thun, hat man gewisse Hilfsbegriffe eingeführt, von denen die wichtigsten sind:

die der Geschwindigkeit, der Beschleunigung, der Kraft (präciser der bewegenden Kraft) und der Masse. Alle diese Begriffe sind nur Hilfsmittel, die es möglich machen, die Ortsänderungen der Körper in einfacher Weise anzugeben. Von ähnlichem Nutzen ist in der Wärmelehre die Einführung der Begriffe der Wärmemenge und der specifischen Wärme.

Der Ausspruch „einem Körper ist eine Wärmemenge zugeführt" ist in der reinen Wärmelehre, mit der wir uns jetzt beschäftigen, gleichbedeutend mit dem Ausspruch „die Temperatur desselben ist gestiegen" und „einem Körper ist eine Wärmemenge entzogen" heisst ebensoviel wie „seine Temperatur ist gesunken." Statt zu sagen: „einem Körper ist eine Wärmemenge entzogen", werden wir auch *den* Ausdruck gebrauchen: „ihm ist eine *negative* Wärmemenge zugeführt." Es bezeichne ϑ die Temperatur eines Körpers, $d\vartheta$ einen unendlich kleinen Zuwachs derselben, dQ die entsprechende zugeführte Wärmemenge, m die Masse, c eine von der Natur des Körpers abhängige positive Grösse, die man seine specifische Wärme nennt; dann besteht die Gleichung

$$dQ = mc\,d\vartheta.$$

Aus dieser Gleichung kann (m als bekannt vorausgesetzt) $d\vartheta$ berechnet werden, wenn dQ und c angegeben sind. Auf die Bestimmung von $d\vartheta$ kommt es, wie gesagt, immer an; man macht einen Umweg, indem man, statt diese eine Grösse direct anzugeben, die zwei Grössen dQ und c angiebt, aus denen jene erst zu berechnen ist. Dieser Umweg ist ganz ähnlich einem, den man in der Mechanik macht, und ist durch dieselben Rücksichten geboten. Bei der Bewegung eines materiellen Punktes kommt es darauf an, seine Ortsänderungen zu bestimmen; diese können ermittelt werden, wenn für einen Augenblick der Ort und die Geschwindigkeit und für alle Werthe der Zeit die Beschleunigung bekannt ist. Statt nun diese Beschleunigung selbst anzugeben, giebt man zwei Grössen an, deren Verhältniss sie ist: die Kraft, die auf den Punkt wirkt, und seine Masse. Die Masse ist ein Hilfsbegriff, der nützlich ist, weil, wie die Erfahrung gelehrt hat, für die Kräfte sich einfachere Sätze aufstellen lassen, als für die Beschleunigungen. Ebenso ist die specifische Wärme ein Hilfsbegriff, der nützlich ist, weil für die zugeführten Wärmemengen einfachere Gesetze gelten, als für die Temperaturänderungen. In der Mechanik hat man den wichtigen Satz aussprechen können, dass die Kräfte, die auf einen materiellen Punkt wirken, stets von anderen materiellen Punkten herrühren, und dass die Kräfte, die zwei materielle Punkte auf einander ausüben, immer gleich und entgegengesetzt sind. Für die Wärmelehre gilt der entsprechende Satz, dass die Wärmemenge, die *einem* Körper zugeführt wird, stets von anderen Körpern herkommt, und dass, wenn zwischen zwei Körpern ein Uebergang von Wärme stattfindet, dem einen soviel zugeführt als dem anderen entzogen wird. Hier tritt aber noch der wichtige Umstand hinzu, der in der Mechanik nicht sein Analogon hat und der gerade den Angelpunkt der ganzen Wärmelehre bildet, dass eine *positive* Wärmemenge immer von einem wärmeren zu einem kälteren Körper übergeht, nie von einem kälteren zu einem wärmeren und auch nicht von einem Körper zu einem anderen von gleicher Temperatur.

§ 4.

Denken wir uns zwei Körper, die nur mit einander, aber nicht mit anderen Wärme austauschen können. Haben sie verschiedene Temperaturen, so geht Wärme von dem wärmeren zum kälteren über. Dieser wird wärmer, jener wird kälter; die Temperatur eines *jeden* von ihnen ändert sich also mit der Zeit. Nehmen wir bei *einem* von ihnen wahr, dass seine Temperatur mit der Zeit sich *nicht* ändert, so können wir daraus schliessen, dass die Temperaturen beider *gleich* sind. Hierauf beruht jede Messung der Temperatur eines Körpers mit Hilfe des Thermometers. Das Quecksilber dieses ist der Körper, bei dem wir das Gleichbleiben der Temperatur daran erkennen, dass der Stand derselbe bleibt. Die Unsicherheit der Temperaturmessungen hat zum grössten Theile darin ihren Grund, dass *die* Voraussetzung nicht strenge zu erfüllen ist, dass der fragliche Körper und das Thermometer *allein* mit einander Wärme austauschen können.

Haben die beiden Körper nicht gleiche Temperatur, sondern der eine die Temperatur ϑ_1, der andere die Temperatur ϑ_2, so müssen diese mit der Zeit sich ändern, die eine wachsen, die andere abnehmen. Nach einiger Zeit möge aus ϑ_1 $\vartheta_1 + d\vartheta_1$, aus ϑ_2 $\vartheta_2 + d\vartheta_2$ geworden sein, wo von den Grössen $d\vartheta_1$, $d\vartheta_2$ die eine positiv, die andere negativ sein muss und beide unendlich klein sein mögen. Dieselbe Wärmemenge ist dem einen Körper zugeführt, dem anderen entzogen. Sind m_1, m_2 ihre Massen, c_1, c_2 ihre specifischen Wärmen, so ist daher

$$m_1 c_1 d\vartheta_1 + m_2 c_2 d\vartheta_2 = 0.$$

Sind $d\vartheta_1$ und $d\vartheta_2$ gemessen und m_1 und m_2 bekannt, so ist aus dieser Gleichung $c_1 : c_2$ zu berechnen.

Hierauf beruhen die Methoden zur Bestimmung der specifischen Wärmen. Die Hauptschwierigkeit bei diesen liegt auch darin, Anordnungen zu treffen, in Folge deren nicht dritte Körper merkliche Wärmemengen abgeben oder aufnehmen.

Die Kräfte, mit denen die Körper auf einander wirken, zerfallen in zwei Klassen: in solche, die in die Entfernung wirken, wie z. B. die von der Gravitation herrührenden, und in die Drucke, die sich berührende Körper auf einander ausüben. Dem entspricht es, dass auch der Uebergang der Wärme von einem heisseren zu einem kälteren Körper auf doppelte Weise geschehen kann: durch *Strahlung*, wenn die Körper von einander entfernt sind, durch *Leitung*, wenn sie sich berühren. Strahlung findet aber nur in gewissen Körpern statt, in solchen, die man *diatherman* nennt. Wir wollen hier die Wärmebewegung in Körpern betrachten, die nicht diatherman sind, in denen also nur Leitung der Wärme stattfindet. Man nennt sie *athermane* Körper.

§ 5.

Es seien xyz die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes in einem athermanen Körper, ϑ die Temperatur in diesem Punkte zur Zeit t; wir wollen untersuchen, wie ϑ mit x, y, z und t in Folge der Wärmeleitung sich ändert.

Wir denken uns im Innern des Körpers eine geschlossene Fläche, die einen Theil desselben vollständig begrenzt. *Diesem* Theile giebt der andere in dem Zeitmoment dt eine gewisse, positive oder negative Wärmemenge ab, die, wie wir sagen können, durch die gedachte Fläche von aussen nach innen *hindurchfliesst*. Jedes Element der Fläche, ds, trägt einen Theil zu dieser bei; es fliesst durch ds in dt von Aussen nach Innen eine gewisse Wärmemenge. Wir bezeichnen durch n die nach Innen gerichtete Normale von ds und setzen die zuletzt genannte Wärmemenge gleich

$$dt \quad ds \quad q_n.$$

Die ganze Wärmemenge, die der abgegrenzte Theil in dt gewinnt, ist dann

$$dt \int q_n \, ds.$$

Die Grösse q_n hängt dann ab von dem Orte von ds, also seinen Coordinaten und von der Richtung von n, nämlich von der Richtung von ds und der Seite, nach der n gekehrt ist.

Wir wollen untersuchen, wie q_n an demselben Orte mit der Richtung von n sich ändert, und beweisen zunächst, dass q_n den entgegengesetzten Werth annimmt, wenn n die entgegengesetzte Richtung erhält. Wir denken uns ein unendlich kleines rechtwinkliges Parallelepipedon, dessen Kanten die Längen $a\ b\ c$ und beliebige Richtungen haben. Das Integral $\int q_n ds$, bezogen auf die Oberfläche desselben, schreiben wir

$$bc(q_a + q_a') + ca(q_b + q_b') + ab(q_c + q_c').$$

Es muss dieses, falls die Temperatur des Parallelepipedons sich nicht unendlich schnell ändert, von der Ordnung von abc, also

$$\frac{q_a + q_a'}{a} + \frac{q_b + q_b'}{b} + \frac{q_c + q_c'}{c}$$

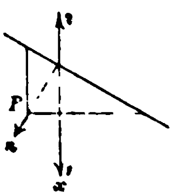
nicht unendlich gross sein. Nehmen wir a als unendlich klein gegen b und c an, so würde, wenn $q_a + q_a'$ nicht gleich Null wäre, das erste Glied dieser Summe ihre Grössenordnung bestimmen und es würde die Summe unendlich gross sein. Daraus folgt

$$q_a + q_a' = 0.$$

Die beiden Flächenelemente, auf die q_a und q_a' sich beziehen, sind unendlich nahe, d. h. an demselben Ort, ihre Normalen sind aber entgegengesetzt gerichtet; die Gleichung $q_a + q_a' = 0$ spricht also den behaupteten Satz aus.

Um nun vollständig zu finden, wie q_n mit der Richtung von n sich ändert, denken wir uns unendlich nahe an einem Flächenelement, auf *der* Seite, nach der n gerichtet ist, einen Punkt P und legen durch diesen drei Ebenen parallel den Coordinatenebenen. So erhalten wir ein Tetraeder. Für die Oberfläche dieses bilden wir $\int q_n\, ds$. Es sei f *die* Seitenfläche des Tetraeders, die einen Theil der ursprünglich gedachten Ebene ausmacht; der auf sie bezügliche Theil des Integrals ist

Fig. 1.



$$f q_n.$$

Wir bilden nun *den* Theil des Integrals, der sich auf die zur x Achse senkrechte Seitenfläche bezieht. Dabei unterscheiden wir die zwei Fälle: dass die *äussere* Normale dieser Fläche parallel der positiven x Achse oder ihr entgegengesetzt ist, d. h. dass

$$\cos(nx)$$

positiv oder negativ ist. Im ersten Falle ist die Grösse der Fläche

$$f\cos(nx), \quad \text{im zweiten} \quad -f\cos(nx)$$

und das betreffende q ist im ersten

$$-q_x, \quad \text{im zweiten} \quad +q_x,$$

wenn $q_n = q_x$ für den Fall gesetzt wird, dass n parallel der x Achse ist. In beiden Fällen ist also der genannte Theil des Integrals

$$-f q_x \cos(nx).$$

Bei ähnlicher Bedeutung der neu eingeführten Grössen ist daher

$$\int ds\, q_n = f\left(q_n - q_x\cos(nx) - q_y\cos(ny) - q_z\cos(nz)\right).$$

Sind die linearen Dimensionen des Tetraeders von der ersten Ordnung unendlich klein, so ist f von der zweiten, das Integral aber von der dritten unendlich klein; es muss also der Faktor von f unendlich klein sein, d. h.

$$q_n = q_x\cos(nx) + q_y\cos(ny) + q_z\cos(nz).$$

Wir bezeichnen durch i eine positive Grösse und zugleich eine Richtung, die so gewählt sind, dass

$$q_x = i \cos(ix), \quad q_y = i \cos(iy), \quad q_z = i \cos(iz);$$

dann wird diese Gleichung

$$q_n = i \cos(in).$$

Aendert sich die Richtung n, so ist also q_n mit $\cos(in)$ proportional. Man nennt die Grösse i die *Intensität*, die Richtung i die *Richtung* des *Wärmestroms* im Punkte (xyz); q_x, q_y, q_z heissen die *Componenten* des Wärmestroms.

§ 6.

Nun ist noch anzugeben, wie q_x, q_y, q_z oder Grösse und Richtung i von x, y, z abhängen. Erfahrungsmässig kann man setzen

$$\begin{aligned}
-q_x &= a_{11}\frac{\partial\vartheta}{\partial x} + a_{12}\frac{\partial\vartheta}{\partial y} + a_{13}\frac{\partial\vartheta}{\partial z}\\
-q_y &= a_{21}\frac{\partial\vartheta}{\partial x} + a_{22}\frac{\partial\vartheta}{\partial y} + a_{23}\frac{\partial\vartheta}{\partial z}\\
-q_z &= a_{31}\frac{\partial\vartheta}{\partial x} + a_{32}\frac{\partial\vartheta}{\partial y} + a_{33}\frac{\partial\vartheta}{\partial z},
\end{aligned}$$

wo die neun Grössen a nur von der Beschaffenheit (einschliesslich Temperatur) des Körpers im Punkte (xyz) abhängen; sie heissen die *Coefficienten* der *Wärmeleitung.*

In einem wichtigen Falle: dem Falle, dass der Körper *isotrop* ist (sich nicht verschieden in verschiedenen Richtungen verhält, wie die Krystalle es thun), sind an Stelle dieser Gleichungen die einfacheren zu setzen

$$\begin{aligned}
-q_x &= k\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\\
-q_y &= k\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\\
-q_z &= k\frac{\partial\vartheta}{\partial z}.
\end{aligned}$$

Sie sprechen aus, dass die Richtung des Wärmestroms immer senkrecht zu den Flächen $\vartheta = \text{const.}$, d. h. zu den *isothermen* Flächen ist. Die Grösse k nennt man die *Wärmeleitungsfähigkeit* des Körpers.*)

Die gemachten Angaben machen es möglich, eine partielle Differentialgleichung aufzustellen, der ϑ genügen muss. Wir haben

$$\int q_n\, ds = \int q_x \cos(nx)\, ds + \int q_y \cos(ny)\, ds + \int q_z \cos(nz)\, ds.$$

Es sei $d\tau$ ein Element des von der Fläche s begrenzten Volumens; dann ist, falls V irgend eine stetige Function von x, y, z ist,

*) Nach dem S. 6 ausgesprochenen Satze ist k positiv. D. H.

$$\int \frac{\partial V}{\partial x}\, d\tau = -\int V \cos(nx)\, ds$$
$$\int \frac{\partial V}{\partial y}\, d\tau = -\int V \cos(ny)\, ds$$
$$\int \frac{\partial V}{\partial z}\, d\tau = -\int V \cos(nz)\, ds.$$

Wir nehmen an, dass die Beschaffenheit des Körpers, wenn er nicht homogen ist, sich stetig ändert; dann sind auch q_x, q_y, q_z als stetig anzunehmen und unsere Gleichung wird

$$\int q_n\, ds = -\int \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right) d\tau.$$

Da der Raum, dessen Element $d\tau$ ist, beliebig gewählt werden kann, so ist hiernach die einem Element $d\tau$ in der Zeit dt zugeführte Wärmemenge gleich

$$-\, d\tau\, dt \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right).$$

Ist μ die Dichtigkeit, c die specifische Wärme im Element $d\tau$, so ist diese Wärmemenge aber auch gleich

$$d\tau\, dt\, c\mu \frac{\partial \vartheta}{\partial t}.$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} = -\, c\mu \frac{\partial \vartheta}{\partial t}.$$

Für einen isotropen Körper wird diese Gleichung:

$$\frac{\partial \left(k \frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(k \frac{\partial \vartheta}{\partial y}\right)}{\partial y} + \frac{\partial \left(k \frac{\partial \vartheta}{\partial z}\right)}{\partial z} = c\mu \frac{\partial \vartheta}{\partial t}.$$

§ 7.

In einem Körper, in dem die Beschaffenheit der Materie sich nicht sprungweise ändert, sind, wie schon bemerkt, q_x, q_y, q_z stetig und auch ϑ ist stetig. Sehen wir nun zu, wie es sich mit der Stetigkeit dieser Grössen an der Grenzfläche zweier verschiedener Körper verhält. ϑ erleidet auch hier keinen Sprung, aber q_x, q_y, q_z erfahren im Allgemeinen Sprünge. Wiederum stetig ist aber q_n, wenn das Element ds, worauf q_n sich bezieht, ein Element der Grenzfläche beider Körper ist. Die Nothwendigkeit hiervon sieht man durch eine Betrachtung ein, wie wir sie schon angestellt haben. Wir denken uns ein unendlich kleines rechtwinkliges Parallelepipedon, dessen Kanten die Längen a, b, c haben und von dem *ein* Theil in dem einen Körper, der *andere* in dem anderen liegt; die Kanten von der Länge a sollen senkrecht auf der Grenzfläche stehen. Die Wärmemenge, welche diesem in der Zeiteinheit zugeführt wird, ist bei der schon gebrauchten Bezeichnung

$$bc(q_a + q_a') + ca(q_b + q_b') + ab(q_c + q_c').$$

Diese muss von der Ordnung abc sein. Nimmt man a als unendlich klein gegen b und c an, so folgt hieraus genau wie in dem vorher betrachteten Falle,

$$q_a + q_a' = 0,$$

wodurch gerade die ausgesprochene Behauptung bewiesen ist.

Bei Versuchen über Wärmeerscheinungen hat man es oft mit einem festen Körper zu thun, der sich in einer lebhaft bewegten Flüssigkeit befindet. Die Vorgänge, die dabei stattfinden, mit Genauigkeit zu verfolgen, ist unmöglich, man kann die Bewegung der etwa durch eine Rührvorrichtung durch einander geschleuderten Theilchen, die Temperaturänderungen, die sie dabei erfahren, und die Wärmemengen, die sie einander abgeben, nicht berechnen; um eine Theorie, die näherungsweise richtig ist, zu erhalten, hat man für solche Fälle eine eigene Hypothese eingeführt: man erlaubt sich, die Temperatur in einer lebhaft bewegten Flüssigkeit als überall gleich anzusehen. Sie sei ϑ_0. Für die Oberfläche eines festen Körpers, der in der Flüssigkeit sich befindet, darf man dann aber nicht $\vartheta = \vartheta_0$ annehmen; man benutzt als hier zu erfüllende Bedingung die, dass durch ein Element der Oberfläche ds in der Zeit dt aus dem festen Körper in die Flüssigkeit eine Wärmemenge strömt, die gleich

$$dt\ ds\ h\ (\vartheta - \vartheta_0)$$

ist, so dass, wenn n die nach dem Innern des festen Körpers gerichtete Normale von ds ist,

$$q_n = -h(\vartheta - \vartheta_0).$$

Die Grösse h nennt man die *äussere Leitungsfähigkeit* des Körpers. Sie hängt von der Natur und in gewissem Grade sicher auch von der Bewegung der Flüssigkeit ab. Wäre $h = \infty$, so wäre die Grenzbedingung $\vartheta = \vartheta_0$. Auch für einen festen Körper, der in der Luft sich abkühlt oder sich erwärmt, ohne dass diese durch eine besondere Vorrichtung in Bewegung erhalten wird, betrachtet man das eben Ausgesprochene als gültig. Hier ist die hauptsächlichste Ursache der Abkühlung oder Erwärmung die Strahlung; die Temperatur ϑ_0 in der aufgestellten Gleichung ist die *Temperatur der Umgebung*.

Die Art, wie der Begriff der äusseren Leitungsfähigkeit eingeführt ist, enthält viel Willkührliches und Ungerechtfertigtes. Man kann daher auch nie darauf rechnen, einigermassen zuverlässige Werthe für die äussere Leitungsfähigkeit zu finden; und vielleicht der Hauptgrund dafür, dass die Messungen von Wärmeerscheinungen nur eine geringe Genauigkeit gewähren, liegt darin, dass man es nicht vermeiden kann, von diesem Begriffe Gebrauch zu machen.

Zweite Vorlesung.

Maasseinheiten. — Wärmeleitung in homogenen isotropen Körpern. — Die isothermen Flächen seien Ebenen. — Stationärer Zustand. — Methode von Péclet. — Nichtstationärer Zustand. — Particuläre Lösungen der Differentialgleichung. — An der von einer Ebene gebildeten Oberfläche des Körpers wechselt die Temperatur periodisch in gegebener Weise. — Anwendung auf die Erde. — Tägliche und jährliche Periode. — An der Oberfläche wird die Temperatur constant gleich Null gehalten, während sie Anfangs im ganzen Körper einen anderen gleichmässigen Werth hatte. — Verallgemeinerung auf eine beliebige Anfangsvertheilung der Temperatur. — Entsprechender Fall, dass die Anfangstemperatur Null und die Grenztemperatur beliebig gegeben ist.

§ 1.

Bevor wir die allgemeinen Gleichungen, die wir aufgestellt haben, auf specielle Fälle anwenden, wollen wir einen Augenblick bei der Betrachtung der *Einheiten* verweilen, die wir nöthig haben, um die vorkommenden Grössen auszudrücken.

In der Mechanik gebraucht man drei Grundeinheiten, die beliebig gewählt werden können: die der Zeit, der Länge und der Masse. Der Regel nach wollen wir für diese 1 sec, 1 mm und 1 mgr annehmen. Aus der Einheit der Länge ergiebt sich die der Fläche und des Volumens; ist 1 mm = 1, so ist 1 qmm = 1 und 1 cub mm = 1. Aus den Einheiten des Volumens und der Masse bestimmt sich die der Dichtigkeit; bei jenen Festsetzungen ist die Dichtigkeit des Wassers bei 4^0 C = 1. Hier bei der Wärmelehre sind noch zwei weitere Grundeinheiten nöthig: Einheiten für zwei der drei Grössen: Temperaturänderung, Wärmemenge, specifische Wärme. Die Einheit für die dritte von diesen drei Grössen ist dann bestimmt durch die Gleichung

$$dQ = mc\,d\vartheta.$$

Wir haben schon festgesetzt, dass die Temperatur nach einem Quecksilberthermometer gemessen werden soll. Es sei dies ein Celsius'sches. Als Einheit der Temperaturänderung nehmen wir also 1^0 C an; als Einheit der specifischen Wärme die des Wassers bei 4^0 C; die Einheit der Wärmemenge ist dann sehr nahe derjenigen gleich, die 1 mgr Wasser von 4^0 auf 5^0 C erwärmt, nämlich in so weit, als die specifische Wärme des Wassers zwischen 4^0 und 5^0 C als constant betrachtet werden kann.

Wir betrachten nun zunächst näher *isotrope* Körper. Wir haben es zu thun mit der partiellen Differentialgleichung (S. 10)

$$\frac{\partial\left(k\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(k\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(k\frac{\partial\vartheta}{\partial z}\right)}{\partial z}=c\mu\frac{\partial\vartheta}{\partial t}.$$

Wir nehmen den Körper als homogen, abgesehen von den Temperaturverschiedenheiten, an; dann ist k eine Function von ϑ oder eine Constante. Wir nehmen weiter an, dass ϑ von x und y unabhängig ist. Dann wird die Gleichung

$$\frac{\partial\left(k\frac{\partial\vartheta}{\partial z}\right)}{\partial z}=c\mu\frac{\partial\vartheta}{\partial t}.$$

Um den zuerst zu betrachtenden Fall noch mehr zu vereinfachen, setzen wir endlich voraus, dass der Zustand ein *stationärer* ist; dann erhalten wir

$$\frac{\partial\left(k\frac{\partial\vartheta}{\partial z}\right)}{\partial z}=0.$$

Es sei k eine bekannte Function von ϑ; man setze

$$K=\int^{\vartheta}k\,d\vartheta$$

bei willkührlich gewählter unterer Grenze. Dann ist

$$\frac{dK}{d\vartheta}=k,\qquad\frac{\partial K}{\partial z}=k\frac{\partial\vartheta}{\partial z},$$

also

$$\frac{\partial^2 K}{\partial z^2}=0$$

also

$$K=Az+B,$$

wo A und B Constante bedeuten.

Ist k als eine Constante zu betrachten (und bei kleinen Temperaturunterschieden wird das immer erlaubt sein), so haben wir

$$\frac{\partial^2\vartheta}{\partial z^2}=0,$$

also

$$\vartheta=az+b.$$

Die Wärmemenge, die in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit strömt, ist, abgesehen vom Vorzeichen, gleich

$$k\frac{\partial\vartheta}{\partial z}=ka=k\frac{\vartheta_1-\vartheta_2}{z_1-z_2},$$

wo ϑ_1 und ϑ_2 die Werthe von ϑ für $z=z_1$ und $z=z_2$ sind.

Hierauf beruht eine Methode zur Messung von k, die von Péclet*) angewandt ist. Das Prinzip der dabei benutzten Anordnung lässt

*) Pogg. Ann. 55, p. 167, 1842.

sich folgendermaassen beschreiben. Ein Gefäss ist durch eine Platte von der zu untersuchenden Substanz in zwei Abtheilungen getheilt, die mit Wasser von verschiedener Temperatur gefüllt sind. Die beiden Wassermassen werden in lebhafter Bewegung erhalten; durch bewegte Stücke von Haartuch wird namentlich dafür gesorgt, dass nicht Wassertheilchen an den Grundflächen der Platte haften. So glaubte Péclet zu bewirken, dass die äussere Leitungsfähigkeit der Platte unendlich wäre, also ihre Grundflächen die Temperaturen der Wassermassen hätten, die durch Thermometer gemessen wurden. Diese Temperaturen seien ϑ_1 und ϑ_2 und $z_1 - z_2$ sei die Dicke der Platte. Ist f die Fläche der Platte, so ist dann

$$f k \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{z_1 - z_2}$$

die Wärmemenge, die in der Zeiteinheit durch die Platte von der einen Wassermasse zur anderen überströmt. Diese Wärmemenge berechnete Péclet andrerseits aus der langsamen Temperaturänderung der einen Wassermasse und ihrem Gewicht; so erhielt er eine Gleichung zur Bestimmung von k. Er fand so aber Werthe, die noch nicht den dritten Theil *der* Werthe ausmachen, die später andere genauere Methoden ergeben haben. Der Grund davon war der, dass die Temperaturen der Grundflächen der Platten auch nicht näherungsweise mit den mittleren Temperaturen der beiden Wassermassen übereinstimmten. Dieses Beispiel zeigt besonders auffallend die Unzulässigkeit einer Annahme, die nicht selten bei Wärmeversuchen gemacht ist und die zu machen allerdings sehr nahe liegt.

§ 2.

Wir wollen jetzt die Voraussetzung fallen lassen, dass der Zustand ein stationärer ist, aber k, ebenso wie c und μ als constant, und ϑ als unabhängig von x und y zu betrachten fortfahren. Die Differentialgleichung für ϑ ist dann

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2},$$

wo $a^2 = \frac{k}{c\mu} =$ const. ist. Mit dieser Gleichung werden wir uns längere Zeit zu beschäftigen haben; die wichtigsten Folgerungen, die wir aus ihr ziehen werden, sind zuerst von Fourier in seiner *Théorie analytique de la chaleur* ausgesprochen; zum grössten Theile finden sie sich auch entwickelt in den von Hattendorf herausgegebenen Vorlesungen Riemann's über partielle Differentialgleichungen.

Wir suchen particuläre Lösungen. Eine solche haben wir in

$$\vartheta = e^{\alpha t + \beta z},$$

wenn $\alpha = a^2 \beta^2$ ist.

Demgemäss können wir setzen

$$\alpha = \frac{2\pi}{T} i, \quad \beta = -\frac{1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{T}}(1+i), \quad i = \sqrt{-1}.$$

Der Ausdruck von ϑ ist dann complex; man erhält eine reelle Lösung der Differentialgleichung, wenn man seinen reellen Theil gleich ϑ setzt. Dadurch wird

$$\vartheta = e^{-\frac{1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{T}}z} \cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{z}{2a}\sqrt{\frac{T}{\pi}}\right).$$

In jedem Punkte ist hiernach ϑ eine periodische Function von t. Die Dauer der Periode ist T. Es ist

$$\text{für} \quad z = 0 \qquad \vartheta = \cos\frac{2\pi t}{T},$$
$$z = \infty \qquad \vartheta = 0.$$

Sind in diesen Ebenen diese Bedingungen hinreichend lange erfüllt, so wird dazwischen ϑ jener Gleichung gemäss sich ändern.

Es lässt sich hiervon eine Anwendung auf die *Erde* machen. In den oberen Erdschichten wechselt die Temperatur ähnlich wie in der Atmosphäre. Strenge genommen sind diese Temperaturänderungen äusserst verwickelt; in roher Annäherung wird man aber sagen dürfen, dass die Temperatur in einem Punkte der Erdoberfläche eine tägliche und eine jährliche Periode hat und in jeder dieser Perioden nach dem Sinusgesetz (oder, was dasselbe ist, nach dem Cosinusgesetz) sich ändert. In grosser Tiefe ist die Temperatur constant. In jeder Tiefe z finden nach unserer Formel dann dieselben Perioden statt, aber die Amplituden der Schwankungen und die Zeiten der Maxima und Minima sind von der Tiefe z abhängig. Nach der Formel verhält sich die Amplitude in der Tiefe z zu der an der Oberfläche wie

$$e^{-\frac{1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{T}}\cdot z} \quad \text{zu } 1,$$

und die Verspätung des Eintritts eines Maximums oder Minimums ist

$$\frac{z}{2a}\sqrt{\frac{T}{\pi}},$$

so dass, wie man sagen kann, jedes Maximum oder Minimum sich mit der Geschwindigkeit

$$2a\sqrt{\frac{\pi}{T}}$$

in die Tiefe fortpflanzt. Diese Geschwindigkeit der Wärmewellen und das Amplitudenverhältniss für eine gewisse Tiefe sind wesentlich von der Dauer der Periode T abhängig. Für die *tägliche* Periode ist nach Beobachtungen von Quetelet*) in Brüssel jene

*) Schmid, Meteorologie p. 172.

Geschwindigkeit nahe gleich 1, wenn 1 Tag = 1 und 1 m = 1. Daraus folgt

$$a = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cdot$$

Nach demselben Beobachter war das Amplitudenverhältniss

$$\text{für} \quad z = 0{,}2 \text{ m} \qquad \text{gleich } \frac{1}{6} \cdot$$

Aus der obigen Formel und dem genannten Werthe von a ergiebt sich dasselbe gleich

$$\frac{1}{3{,}5} \cdot$$

Diese Zahlen stimmen freilich schlecht überein; sie sind aber doch von derselben Grössenordnung und die Beobachtungen gewährten nur eine sehr geringe Genauigkeit. Zuverlässiger schon sind die Messungen, die sich auf die jährliche Periode beziehen. Bei derselben Zeiteinheit hat man hier

$$T = 365{,}25$$

$$\sqrt{T} = 19 \text{ circa.}$$

Quetelet fand hier die Geschwindigkeit gleich

1 Par. Fuss in 7 Tagen,

d. h. gleich

0,0464 m in 1 Tag.

Berechnet man hiermit die Geschwindigkeit für die tägliche Periode, so ergiebt sich diese gleich

$$19 \cdot 0{,}0464 \text{ m} = 0{,}882 \text{ m in 1 Tag,}$$

in genügender Uebereinstimmung mit dem direct gefundenen Werthe von 1 m in 1 Tag. Berechnet man für verschiedene Tiefen das Amplitudenverhältniss für die jährliche Periode mit der für diese angegebenen Geschwindigkeit, so findet man Werthe, die mit den beobachteten bis auf wenige Zehntel von 1° C stimmen. Quetelet fand:

Tiefe		Jährliche Schwankung
0,188 m	= 0,58 Par. Fuss	13°,28
0,75	2,31	11,35
1,95	6,00	7,59
3,90	12,00	4,49
7,80	24,00	1,43

Nach unserer Gleichung findet bei hinreichender Tiefe immer und überall dieselbe Temperatur statt. Dass in einer Tiefe von mehr als etwa 20 m die zeitlichen Temperaturänderungen unmerklich sind, hat die Beobachtung bestätigt; sie hat aber gezeigt, dass die Temperatur mit wachsendem z langsam steigt, etwa um 1° C in einer Tiefe von

25 m.*) Das ist eine Folge der hohen Temperatur, die einst die ganze Erde gehabt hat.

Ein zweites particuläres Integral unserer Differentialgleichung wird uns zu diesem Gegenstande zurückführen und zeigen, welcher Schluss sich an dieses numerische Resultat knüpfen lässt.

§ 3.

Wir setzen nunmehr

$$x = \frac{z}{\sqrt{t}}$$

und untersuchen, ob es eine Lösung unserer Differentialgleichung giebt, die eine Function der *einen* Variabeln x ist. Für eine solche ist

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = -\frac{1}{2}\frac{z}{t\sqrt{t}}\frac{d\vartheta}{dx},$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial z} = \frac{1}{\sqrt{t}}\frac{d\vartheta}{dx},$$

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} = \frac{1}{t}\frac{d^2\vartheta}{dx^2},$$

woraus folgt

$$\frac{d^2\vartheta}{dx^2} = -\frac{x}{2a^2}\frac{d\vartheta}{dx},$$

eine Gleichung, der genügt werden kann, wenn ϑ passend als Function von x bestimmt wird. Sie lässt sich schreiben:

$$d\log\frac{d\vartheta}{dx} = -\frac{x\,dx}{2a^2}.$$

Ein particuläres Integral hiervon ist

$$\log\frac{d\vartheta}{dx} = -\frac{x^2}{4a^2}$$

oder

$$\frac{d\vartheta}{dx} = e^{-\frac{x^2}{4a^2}},$$

also

$$\vartheta = \int_0^x e^{-\frac{x^2}{4a^2}}\,dx = \int_0^{\frac{z}{\sqrt{t}}} e^{-\frac{x^2}{4a^2}}\,dx.$$

Das allgemeine Integral erhält man, wenn man diesem Ausdrucke von ϑ eine multiplicative und eine additive willkührliche Constante hinzufügt. Schreibt man x für $\frac{x}{2a}$, so hat man hiernach das particuläre Integral**)

*) Schmid, a. a. O. p. 93.

**) Kramp, Analyse des réfractions astronomiques et terrestres. Strasbourg 1799.

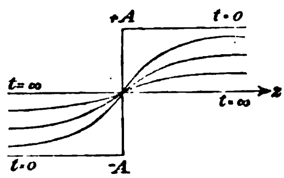
$$\vartheta = A \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{z}{2a\sqrt{t}}} e^{-x^2} dx.$$

Der Factor $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$ ist hier hinzugefügt, damit die Constante A eine einfache Bedeutung erhalte. Es ist nämlich*)

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

und daher A gleich dem Werthe von ϑ für $t = 0$ und irgend einen positiven Werth von z. Für $t = 0$ und negative Werthe von z ist $\vartheta = -A$; für $t = 0$ und $z = 0$ ist ϑ unbestimmt; für $z = 0$ ist, wenn t von 0 verschieden, $\vartheta = 0$. Wir wollen annehmen, dass unser Körper den Theil des Raumes erfüllt, für den z positiv ist. Der für ϑ aufgestellte Ausdruck gilt dann für positive Werthe von t, wenn bis $t = 0$ in dem Körper überall $\vartheta = A$ ist und im Augenblick $t = 0$ die Fläche $z = 0$ auf die Temperatur Null gebracht und diese Temperatur hier erhalten wird.

Fig. 2.



Wir knüpfen hieran eine Betrachtung, die sich auf die Erde bezieht und die von W. Thomson**) herrührt. Die Erde war einst in feuerflüssigem Zustande mit einer Temperatur über dem Schmelzpunkt der Gesteine. Durch Ausstrahlung in den Weltenraum kühlte die flüssige Lavakugel allmählich sich ab; zuerst erlitten die obersten Schichten eine Temperaturerniedrigung; sie wurden dadurch specifisch schwerer, sanken unter und machten neuen Flüssigkeitstheilchen Platz, die dann ihrerseits abgekühlt wurden. War so die Temperatur an der Oberfläche bis zum Erstarrungspunkt der Lava gesunken, so bildeten sich hier feste Massen, die aber in Folge der Zusammenziehung, die sie beim Erstarren erfahren hatten, untersanken. Dabei sank die Temperatur nicht weiter, indem der Wärmeverlust, der durch die fortdauernde Ausstrahlung stattfand, durch die freiwerdende sogenannte *latente* Schmelzwärme der Gesteine ersetzt wurde. Dieser Process dauerte fort, bis die ganze Erdkugel ein Haufen fester Felsmassen war, die bis zur Oberfläche sich erstreckten, deren Zwischenräume von flüssiger Lava erfüllt waren. Die nun in Folge der Ausstrahlung sich neu bildende feste Kruste konnte nicht mehr untersinken, da sie getragen wurde, und in kurzer Zeit musste diese Kruste die ganze Erdoberfläche ausmachen. Zugleich hörten die

*) Kirchhoff, Vorlesungen über Optik, p. 120. D. H.

**) Trans. Roy. Soc. Edinburgh, 1862.

mächtigen Strömungen auf, die bisher die Wärme aus dem Innern der Erde nach ihrer Oberfläche getragen hatten und die Temperatur dieser Oberfläche musste nun schnell sinken. W. Thomson meint, wenige Wochen hätten hingereicht, um zu bewirken, dass man ungestraft hätte über die Oberfläche gehen können, und in einem Zeitraum von einem Jahre etwa wäre die Temperatur der heutigen fast gleich geworden. Hiernach würde unsere Gleichung für die Erde gelten, wenn wir unter z eine mässige Tiefe unter der Erdoberfläche verstehen, die Zeit von dem Augenblicke an rechnen, wo die Erdoberfläche ganz erstarrt war, die jetzige Temperatur derselben als Null annehmen und durch A die Erstarrungstemperatur geschmolzener Felsmassen bezeichnen, die etwa zu

$$4000^0 \text{ C} = A$$

geschätzt werden kann. Giebt man dieses zu, so erlaubt unsere Gleichung, die Zeit zu berechnen, die vergangen ist, seit die Oberfläche der Erde erstarrte, wenn man die früher erwähnten Angaben über die Zunahme der Temperatur mit der Tiefe in der Erde und über den Werth von a in derselben hinzunimmt. Unsere Gleichung nämlich giebt für $z = 0$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial z} = \frac{A}{\sqrt{\pi}\, a \sqrt{t}},$$

und nach den früher gemachten Angaben ist, wenn 1 m = 1 und 1 Tag = 1 gesetzt wird,

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial z} = \frac{1^0 \text{ C}}{25}, \quad \text{(S. 16 und 17)}$$

$$a = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}. \quad \text{(S. 16)}$$

Daraus folgt dann

$$\sqrt{t} = 200\,000,$$

$$t = \text{circa 100 Millionen Jahre.}$$

Nur eine rohe Schätzung kann das Resultat sein; W. Thomson meint aber, mit vieler Wahrscheinlichkeit behaupten zu können, dass die gedachte Zeit zwischen 400 und 20 Millionen Jahren liegt.

§ 4.

Wir wollen nun andere Lösungen unserer Differentialgleichung suchen. Wir gehn aus von der eben behandelten

$$\vartheta = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{z}{2a\sqrt{t}}} e^{-x^2}\, dx.$$

Wir können dieselbe auch auf den Fall beziehen, dass der Körper den ganzen Raum erfüllt, also z von $-\infty$ bis $+\infty$ variirt; die Zeit aber müssen wir positiv annehmen, widrigenfalls der Werth von ϑ imaginär werden würde. Den angegebenen speciellen Werth von ϑ wollen wir durch $\varphi(z, t)$ oder kürzer durch φ bezeichnen, also

$$\varphi(z, t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{z}{2a\sqrt{t}}} e^{-x^2} dx$$

setzen und annehmen, dass z von $-\infty$ bis $+\infty$, t von 0 bis $+\infty$ variirt. Dann ist φ eine Lösung der Gleichung für ϑ:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2}.$$

Eine Lösung derselben Gleichung ist auch

$$\vartheta = \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

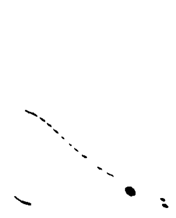
wie durch Differentiation der Gleichung $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$ nach z sich ergiebt. Sehen wir zu, auf welche Anfangsvertheilung der Temperatur diese Lösung

$$\vartheta = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{1}{a\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot e^{-\frac{z^2}{4a^2 t}}$$

sich bezieht. Zu diesem Zwecke haben wir t unendlich klein zu setzen. Für jeden endlichen Werth von z wird dann $\vartheta = 0$; ist aber z^2 von derselben Ordnung wie t oder kleiner, so wird $\vartheta = \infty$. Dabei ist offenbar

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \vartheta\, dz = \varphi \Big|_{z=-\varepsilon}^{z=+\varepsilon} = 2,$$

Fig. 3.



wo ε eine beliebig kleine endliche Grösse bedeutet*). Eine Curve, die für $t = 0$ die Temperatur als Function von z darstellt, fällt also überall mit der Abscissenachse zusammen, ausser bei $z = 0$, wo sie einen unendlich schmalen unendlich hohen Berg bildet, dessen Flächeninhalt aber endlich ist. Im Verlaufe der Zeit flacht dieser Berg sich mehr und mehr ab, wobei sein Gipfel immer bei $z = 0$ bleibt, wo [illegible]

$$\vartheta = [illegible]$$

[illegible] $\vartheta = 0$. Für irgend einen

[illegible]

endlichen Werth von z findet ein Maximum von ϑ bei einem Werthe von t statt, der durch

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = 0,$$

d. h.

$$\frac{1}{2} t^{-\frac{3}{2}} - \frac{z^2}{4a^2} t^{-\frac{5}{2}} = 0,$$

also

$$t = \frac{z^2}{2a^2}$$

gegeben ist. Der Werth des Maximums ist

$$\sqrt{\frac{2}{\pi e}} \cdot \frac{1}{z} .$$

§ 5.

Die eben discutirte Lösung lässt sich leicht verallgemeinern. Es sei z' irgend eine Constante;

$$\vartheta = \frac{\partial \varphi(z - z', t)}{\partial z} = \frac{1}{a\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(z-z')^2}{4a^2t}}$$

ist dann auch eine Lösung unserer Differentialgleichung, und zwar diejenige, für welche die Curve, die die Anfangsvertheilung der Temperatur darstellt, einen Berg darbietet, der bei $z = z'$ statt bei $z = 0$ liegt, aber dieselbe Gestalt wie früher hat.

Multiplicirt man den Ausdruck für ϑ mit einer willkührlichen Constanten C, bildet den so entstehenden Ausdruck für verschiedene Werthe von z' und C und nimmt die Summe, so erhält man wiederum eine Lösung der Differentialgleichung. Eine solche Summe, die aus unendlich vielen Gliedern besteht, oder vielmehr ein Integral, das eine solche Summe ist, lässt sich dem Falle anpassen, dass die Anfangsvertheilung der Temperatur eine ganz beliebige ist.

Es sei Z eine stetige Function von z, Z' die Function, die aus Z entsteht, wenn man darin z' für z setzt; dann ist

$$\vartheta = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} Z' \frac{\partial \varphi(z - z', t)}{\partial z} dz'$$

eine Lösung unserer Differentialgleichung; suchen wir die Anfangsvertheilung der Temperatur. Wir nehmen also t unendlich klein an. Dem z geben wir irgend einen festen Werth. So lange z' einen Werth hat, für den $z - z'$ endlich ist, ist dann $\frac{\partial \varphi(z - z', t)}{\partial z}$ (nach dem dafür aufgestellten Ausdruck) gleich Null. Statt der Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ darf daher $z - \varepsilon$ und $z + \varepsilon$ und statt Z' Z geschrieben werden, wo ε eine beliebig kleine endliche Grösse ist. Es ist daher für $t = 0$*)

$$\vartheta = Z\,\frac{1}{2}\int\limits_{z-\varepsilon}^{z+\varepsilon}\frac{\partial\varphi(z-z',t)}{\partial z}\,dz' = Z\,\frac{1}{2}\int\limits_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\frac{\partial\varphi(\zeta,t)}{\partial\zeta}\,d\zeta,$$

d. h.

$$\vartheta = Z.$$

Die gefundene Lösung wollen wir etwas specialisiren. Wir wollen nämlich annehmen, dass Z für entgegengesetzte Werthe von z entgegengesetzte Werthe hat. Indem man als Integrationsvariable $-z'$ statt z' einführt, erhält man dann

$$\int\limits_{-\infty}^{0} Z'\,\frac{\partial\varphi(z-z',t)}{\partial z}\,dz' = -\int\limits_{0}^{\infty} Z'\,\frac{\partial\varphi(z+z',t)}{\partial z}\,dz',$$

also

$$\vartheta = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\infty} Z'\left(\frac{\partial\varphi(z-z',t)}{\partial z} - \frac{\partial\varphi(z+z',t)}{\partial z}\right)dz'.$$

Für $z = 0$ verschwindet der Ausdruck in der Parenthese für jeden Werth von t; für jeden Werth von t ist also $\vartheta = 0$ für $z = 0$; unsere Gleichung gilt also für einen Körper, der durch die Ebene $z = 0$ begrenzt ist, für den, wie wir annehmen wollen, $z > 0$ ist, wenn die Anfangsvertheilung der Temperatur eine beliebige ist und die Temperatur der Grenzfläche $z = 0$ auf Null erhalten wird.

§ 6.

In ähnlicher Weise können wir eine Gleichung ableiten, die für denselben Körper gilt, wenn die Anfangstemperatur überall gleich Null ist und die Temperatur der Grenze $z = 0$ eine beliebige Function der Zeit ist.

Wir haben die Function $\varphi(z, t)$ durch die Gleichung

$$\varphi(z, t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{\frac{z}{2\sqrt{t}}} e^{-x^2}\,dx$$

für positive Werthe von t definirt; wir wollen sie nun auch für negative definiren, indem wir für solche (und für positive Werthe von z, die wir allein in Betracht ziehen) setzen

$$\varphi(z, t) = 1.$$

Für irgend einen endlichen Werth von z ist dann φ stetig bei $t = 0$,

*) Dabei ist zu berücksichtigen, dass

$$\frac{\partial\varphi(z,t)}{\partial z} = -\frac{\partial\varphi(-z,t)}{\partial z}. \quad \text{D. H.}$$

und auch alle Differentialquotienten von φ nach t und z sind hier stetig, nämlich gleich Null, da für $t > 0$ in jedem dieser Differentialquotienten der Factor

$$e^{-\frac{z^2}{4a^2t}}$$

vorkommt, der mit irgend einer reciproken Potenz von t multiplicirt für $t = +0$ verschwindet. Die Lösung unserer Differentialgleichung

$$\vartheta = \varphi,$$

die wir für positive Werthe von t discutirt haben, gilt dann von $t = -\infty$ bis $t = +\infty$; sie drückt aus, dass bis $t = 0$ überall $\vartheta = 1$ ist.

Eine andere Lösung ist daher:

$$\vartheta = \frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\frac{z}{t^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{z^2}{4a^2t}}, \quad \text{wenn } t > 0,$$

$$= \quad 0 \qquad\qquad , \quad \text{wenn } t < 0.$$

Ist z unendlich klein, so ist für jeden endlichen Werth von t $\vartheta = 0$; ist t unendlich klein, so ist für jeden endlichen Werth von z $\vartheta = 0$; sind z und t unendlich klein, so wird ϑ unbestimmt und hat alle Werthe zwischen 0 und $-\infty$. Die Gleichung $\vartheta = \frac{\partial\varphi}{\partial t}$ gilt daher, wenn der Körper bis zur Zeit $t = 0$ überall die Temperatur Null hat und an der Oberfläche $z = 0$ im Augenblicke $t = 0$ eine unendliche Temperaturerniedrigung hervorgebracht, gleich darauf aber die Temperatur Null wieder hergestellt und erhalten wird.

Allgemeinere Lösungen, die alle die Eigenschaft haben, dass $\vartheta = 0$ ist für $t = 0$ bei jedem endlichen Werthe von z, sind

$$\vartheta = C\frac{\partial\varphi(z, t - t')}{\partial t},$$

$$\vartheta = \sum C\frac{\partial\varphi(z, t - t')}{\partial t},$$

wobei $t' > 0$ (dann ist nämlich $t - t' < 0$ für $t = 0$),

und
$$\vartheta = -\int_0^{+\infty} T'\frac{\partial\varphi(z, t - t')}{\partial t}\,dt',$$

wo T eine willkührliche Function von t, T' dieselbe Function von t' bedeuten soll. Suchen wir den Werth von ϑ für $z = 0$. Wenn $t - t'$ endlich ist, so ist hierfür:

$$\frac{\partial\varphi(z, t - t')}{\partial t} = 0,$$

also ist für $z = 0$

$$\vartheta = -T\int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon}\frac{\partial\varphi(z, t - t')}{\partial t}\,dt'$$

$$= -T[\varphi(0, t)]_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} = T.$$

Der für ϑ aufgestellte Ausdruck kann dadurch noch geändert werden, dass als obere Grenze t statt ∞ geschrieben wird, da $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ für negative Werthe des zweiten Arguments verschwindet.

Vereinigen wir die beiden Lösungen, die wir gefunden haben, so erhalten wir

$$\vartheta = -\int_0^t T' \frac{\partial \varphi(z, t-t')}{\partial t}\, dt'$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^\infty Z' \left(\frac{\partial \varphi(z-z', t)}{\partial z} - \frac{\partial \varphi(z+z', t)}{\partial z}\right) dz'$$

als den Ausdruck der Temperatur in dem Falle, dass

$$\text{für } t = 0 \qquad \vartheta = Z$$

$$\text{und für } z = 0 \qquad \vartheta = T$$

ist, wenn $t > 0$ und $z > 0$.

Dritte Vorlesung.

Strahlung von der Oberfläche gegen eine Umgebung von der Temperatur Null, bei Anfangs gleichmässiger Temperatur. — Der Körper ist durch zwei Ebenen begrenzt. — Eindeutigkeit der Lösung. — Die Grenztemperatur ist Null, bei beliebigem Anfangszustand. — An der Grenze findet Strahlung statt. — Cylindrischer Stab von unendlich kleinem Querschnitt. — Stationärer Zustand. Methode von Desprez, Wiedemann und Franz. — Nichtstationärer Zustand. Methode von F. Neumann. Vorgänge für späte Zeiten. — Gekrümmter, ringförmiger unendlich dünner Stab.

§ 1.

Wir wollen jetzt den Fall untersuchen, dass unser Körper, der den Raum von $z = 0$ bis $z = +\infty$ erfüllt, bis zur Zeit $t = 0$ überall die Temperatur 1 besitzt und in diesem Augenblicke aus seiner Oberfläche $z = 0$ seine Wärme gegen eine Umgebung von der Temperatur Null auszustrahlen beginnt, wobei dann bei $z = \infty$ immer die Temperatur 1 erhalten bleiben wird. Es muss dann sein:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2}$$

und

$$\text{für } t = 0 \qquad \vartheta = 1$$

$$\text{für } z = 0 \qquad k\frac{\partial \vartheta}{\partial z} = h\vartheta,$$

wo h die äussere Leitungsfähigkeit ist, oder

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial z} = b\vartheta,$$

wo $b = \frac{h}{k}$ ist,
endlich

$$\text{für } z = \infty \qquad \vartheta = 1.$$

Die Aufgabe, diesen Gleichungen gemäss ϑ zu bestimmen, lässt sich auf eine Aufgabe zurückführen, deren Lösung wir bereits kennen. Setzen wir nämlich

$$\vartheta - \frac{1}{b}\frac{\partial \vartheta}{\partial z} = V,$$

so muss

$$\frac{\partial V}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

sein und

$$\text{für } t = 0 \qquad V = 1,$$
$$\text{für } z = 0 \qquad V = 0,$$
$$\text{für } z = \infty \qquad V = 1.$$

Allen diesen Bedingungen wird nach unseren früheren Betrachtungen genügt durch

$$V = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{z}{2a\sqrt{t}}} e^{-x^2}\, dx.$$

Um aus V ϑ zu bestimmen, dient die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\vartheta - \frac{1}{b} \frac{\partial \vartheta}{\partial z} = V$$

und die Bedingung, dass

$$\text{für } z = \infty \qquad \vartheta = 1$$

sein soll. Um demgemäss ϑ zu bestimmen, hat man bekanntlich in dem Integral der Gleichung

$$\vartheta - \frac{1}{b} \frac{\partial \vartheta}{\partial z} = 0,$$

nämlich

$$\vartheta = C \cdot e^{bz},$$

die Constante der Integration C als Function von z zu betrachten; zu ihrer Bestimmung ergiebt sich

$$-\frac{1}{b} \frac{dC}{dz} e^{bz} = V,$$

also

$$\frac{dC}{dz} = -b e^{-bz} V$$

und

$$\vartheta = b e^{bz} \left(\int_z^\infty V e^{-bz} dz + \text{const.} \right).$$

Die Grösse const. ist gleich Null. Denn für $z = \infty$ ist $V = 1$, also

$$\int_z^\infty V e^{-bz}\, dz = \int_z^\infty e^{-bz}\, dz = \frac{1}{b} e^{-bz}$$

und daher genügt

$$\vartheta = b e^{bz} \int_z^\infty V e^{-bz}\, dz$$

der Bedingung, dass $\vartheta = 1$ für $z = \infty$.

Das hier vorkommende Integral gestalten wir um. Da

$$e^{-bz}\, dz = -\frac{1}{b}\, d(e^{-bz}),$$

so ist

$$\int V e^{-bz} dz = -\frac{1}{b} e^{-bz} V + \frac{1}{b}\int e^{-bz} \frac{\partial V}{\partial z} dz,$$

also

$$b\int_z^\infty V e^{-bz} dz = e^{-bz} V + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_z^\infty e^{-\frac{z^2}{4a^2t} - bz} \frac{dz}{2a\sqrt{t}}.$$

Nun ist

$$\frac{z^2}{4a^2t} + bz = \left(\frac{z}{2a\sqrt{t}} + ab\sqrt{t}\right)^2 - a^2b^2t;$$

setzt man unter dem zweiten Integralzeichen

$$x = \frac{z}{2a\sqrt{t}} + ab\sqrt{t},$$

und schreibt man für V seinen Werth, so erhält man

$$\vartheta = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left\{\int_0^{\frac{z}{2a\sqrt{t}}} e^{-x^2} dx + e^{bz + a^2b^2t}\int_{\frac{z}{2a\sqrt{t}}+ab\sqrt{t}}^\infty e^{-x^2} dx\right\}.$$

Für $z = 0$ ist hiernach

$$\vartheta = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{a^2b^2t}\int_{ab\sqrt{t}}^\infty e^{-x^2} dx.$$

Sehen wir zu, wie sich dieser Ausdruck für sehr *grosse* Werthe von t gestaltet. Es ist

$$\int e^{-x^2} x^n dx = -\frac{1}{2}\int x^{n-1} d(e^{-x^2})$$
$$= -\frac{1}{2} x^{n-1} e^{-x^2} + \frac{n-1}{2}\int e^{-x^2} x^{n-2} dx,$$

also

$$\int_x^\infty e^{-x^2} x^n dx = \frac{1}{2} x^{n-1} e^{-x^2} + \frac{n-1}{2}\int_x^\infty e^{-x^2} x^{n-2} dx.$$

Setzt man hier $n = 0, -2, -4$, etc., so ergiebt sich

$$\int_x^\infty e^{-x^2} dx = \frac{e^{-x^2}}{2}\left\{\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\frac{1}{x^3} + \frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{x^5} - \cdots\right\}.$$

Das ist eine *semiconvergente* Reihe.*) Aus ihr folgt für $t = \infty$ und $z = 0$

$$\vartheta = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{ab\sqrt{t}},$$

und da

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial z} = b\vartheta$$

*) Vgl. G. Kirchhoff, Optik, p. 126. D. H.

ist, so folgt

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial z} = \frac{1}{a\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{t}},$$

also *unabhängig von b oder h*, so gross als ob b oder h unendlich gross wäre, in welchem Falle für $z = 0$ $\vartheta = 0$ sein müsste, welche Grenzbedingung wir früher untersucht haben. In Bezug auf den Zeitpunkt, in dem die Oberfläche der Erde erstarrt ist, giebt also die jetzt verfolgte Hypothese, welches auch der Werth von h sei, aus dem gemessenen $\frac{\partial \vartheta}{\partial z}$ dasselbe Resultat wie die frühere.

§ 2.

Wir wollen nun annehmen, dass unser Körper durch die *zwei* Ebenen

$$z = 0 \quad \text{und} \quad z = l$$

begrenzt sei. Es kann dann ϑ für jeden dieser beiden Werthe von z als Function von t und für $t = 0$ als Function von z in dem Intervalle von $z = 0$ bis $z = l$ beliebig gegeben sein. Diese drei Bedingungen bestimmen im Verein mit

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2}$$

die Function ϑ *eindeutig*. Ich will das zuerst nachweisen mit Hilfe einer Methode, die in ähnlichen Fällen oft anwendbar ist. Es soll gezeigt werden, dass die Differenz zweier Lösungen dieser Gleichung gleich Null sein muss.

Es sei u eine solche Differenz; dann muss sein

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

$$\begin{array}{llll} \text{für } t = 0 & \text{und} & 0 < z < l & u = 0, \\ \text{für } z = 0 & \text{und} & t > 0 & u = 0, \\ \text{für } z = l, & \text{und} & t > 0 & u = 0. \end{array}$$

Multipliciren wir die Differentialgleichung mit

$$u\, dt\, dz$$

und integriren von 0 bis t und von 0 bis l. Die linke Seite der Gleichung wird dann

$$\frac{1}{2}\int_0^l u^2 dz,$$

da für $t = 0$ $u = 0$ sein soll. Um die rechte zu bilden, benutzen wir, dass

$$\int u \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dz = u \frac{\partial u}{\partial z} - \int \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 dz,$$

also, da u für $z = 0$ und für $z = l$ verschwindet,

$$\int_0^l u \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\, dz = -\int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 dz.$$

Hiernach ist die entstehende Gleichung

$$\frac{1}{2}\int_0^l u^2 dz + a^2 \int_0^t dt \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 dz = 0,$$

aus welcher folgt

$$u = 0.$$

§ 3.

Wir untersuchen nun zuerst den Fall, dass für die beiden Ebenen

$$z = 0 \qquad \text{und} \qquad z = l$$

immer

$$\vartheta = 0$$

ist. Eine Lösung von

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2},$$

die dieser Bedingung genügt, ist

$$\vartheta = \sum A_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{l} z\right),$$

wo n eine ganze positive Zahl und A_n eine willkührliche Constante ist. Soll

$$\text{für } t = 0 \quad \vartheta = Z$$

sein, so muss

$$Z = \sum A_n \sin\left(\frac{n\pi}{l} z\right)$$

sein. Da nun, falls n und n' verschieden:

$$\int_0^l \sin\left(\frac{n\pi}{l} z\right) \sin\left(\frac{n'\pi}{l} z\right) dz = 0,$$

und

$$\int_0^l \sin^2\left(\frac{n\pi}{l} z\right) dz = \frac{l}{2},$$

so ist

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l Z \sin\left(\frac{n\pi}{l} z\right) dz$$

zu setzen. Die Reihe für Z ist immer convergent und gültig für jeden Werth von z, der zwischen 0 und l liegt, wenn Z, wie wir annehmen, stetig und endlich ist; für $z = 0$ und $z = l$ gilt sie aber nur, wenn hier $Z = 0$ ist. Je grösser t, um so schneller convergirt die Reihe für ϑ.

Es sei $Z = 1$; dann wird

$$A_n = \frac{4}{n\pi}, \text{ wenn } n \text{ ungerade,}$$
$$= 0, \quad \text{wenn } n \text{ gerade ist,}$$

und daher

$$Z = \frac{4}{\pi}\left[\sin\left(\frac{\pi}{l}z\right) + \frac{1}{3}\sin\left(\frac{3\pi}{l}z\right) + \frac{1}{5}\sin\left(\frac{5\pi}{l}z\right) + \cdots\right]$$

und

$$\vartheta = \frac{4}{\pi}\left[e^{-\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 t}\sin\left(\frac{\pi}{l}z\right) + \frac{1}{3}e^{-9\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 t}\sin\left(\frac{3\pi}{l}z\right)\right.$$
$$\left. + \frac{1}{5}e^{-25\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 t}\sin\frac{5\pi}{l}z + \cdots\right],$$

eine Reihe, die um so schneller convergirt, je grösser t und je kleiner l ist. Durch Differentiation derselben folgt

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial z} = \frac{4}{l}\left[e^{-\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 t}\cos\left(\frac{\pi}{l}z\right) + e^{-9\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 t}\cos\left(\frac{3\pi}{l}z\right) + \cdots\right].$$

Diese Reihe ist eine der nach Jacobi sogenannten Θ-Functionen, auf welche die elliptischen Functionen sin am, cos am, Δam zurückführbar sind. Man kann sie transformiren in eine Reihe, die um so schneller convergirt, je grösser l und je kleiner t ist. Setzt man in der transformirten Reihe $l = \infty$, so kommt man zu den Ausdrücken für $\frac{\partial\vartheta}{\partial z}$ und ϑ, die wir bei der Annahme, dass der Körper sich in die Unendlichkeit erstreckt, entwickelt haben.

§ 4.

Nun wollen wir den Fall untersuchen, dass

$$\text{für } z = 0 \quad \frac{\partial\vartheta}{\partial z} = +b\vartheta,$$
$$\text{für } z = l \quad \frac{\partial\vartheta}{\partial z} = -b\vartheta$$

ist, wo $b = \frac{h}{k}$, wie früher (S. 25). Eine particuläre Lösung von

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2\vartheta}{\partial z^2},$$

die der ersten Bedingung genügt, ist

$$\vartheta = e^{-\alpha^2 a^2 t}\left(\cos\alpha z + \frac{b}{\alpha}\sin\alpha z\right),$$

wo α eine beliebige positive Grösse. Die zweite Grenzbedingung giebt für α

$$\operatorname{tang}\alpha l = \frac{2\alpha b}{\alpha^2 - b^2}$$

oder, wenn

$$\alpha l = x$$

gesetzt wird,

$$\frac{2}{\operatorname{tang} x} = \frac{x}{bl} - \frac{bl}{x},$$

wo die Wurzel $x = 0$, d. h. $\alpha = 0$ aber auszuschliessen ist, da die Gleichung ursprünglich lautet

$$-\alpha \sin \alpha l + b \cos \alpha l = -b\left(\cos \alpha l + \frac{b}{\alpha} \sin \alpha l\right),$$

welche durch $\alpha = 0$ nur erfüllt wird, wenn $2 = -bl$, was nicht sein kann, da bl positiv ist. Um ein Urtheil über die Lage der Wurzeln der für x aufgestellten Gleichung zu gewinnen, construiren wir die Curven

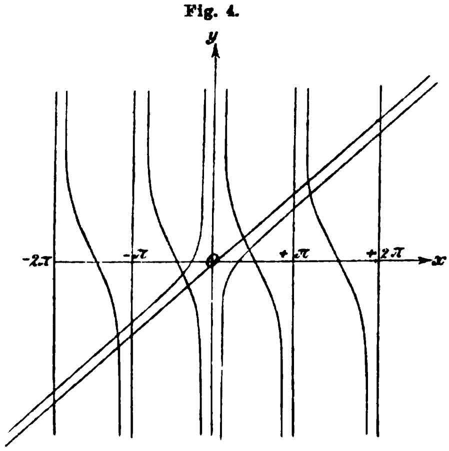
$$\frac{2}{\operatorname{tang} x} = y$$

und

$$\frac{x}{bl} - \frac{bl}{x} = y;$$

von denen die zweite eine Hyperbel ist, deren Mittelpunkt der Anfangspunkt und deren eine Asymptote die y-Achse ist. Die Werthe von x, die den Durchschnitten entsprechen, sind die Wurzeln jener Gleichung. Die negativen Wurzeln sind den positiven absolut gleich; die letzteren liegen zwischen 0 und π, π und 2π, etc.*) Im Intervall von $n\pi$ bis $(n+1)\pi$ ist nur *eine* Wurzel vorhanden, denn dafür ist stets

Fig. 4.



$$\frac{d}{dx}\left(\frac{2}{\operatorname{tang} x}\right) < 0$$

und

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{bl} - \frac{bl}{x}\right) > 0.$$

Die beiden Curven können sich also nur einmal treffen.

Es seien $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ der Grösse nach geordnet die den positiven Wurzeln entsprechenden Werthe von α. Allen ausgesprochenen Bedingungen wird dann genügt durch

$$\vartheta = \sum A_n e^{-\alpha_n^2 a^2 t} Z_n,$$

wo

$$Z_n = \cos \alpha_n z + \frac{b}{\alpha_n} \sin \alpha_n z.$$

*) Da in jedem dieser Intervalle das y der ersten Gleichung alle Werthe zwischen $+\infty$ und $-\infty$ annimmt. D. H.

Soll für $t = 0$ $\vartheta = Z$ sein, so lässt sich auch dieser Bedingung genügen, falls sich Z in der Form

$$Z = \sum A_n Z_n$$

darstellen lässt. Diese Möglichkeit vorausgesetzt, findet man die Coefficienten A mit Hilfe des Satzes, dass

$$\int_0^l Z_n Z_m \, dz = 0,$$

wenn n von m verschieden ist.*) Der Beweis dieses Satzes ist der folgende. Es ist

$$\frac{d^2 Z_m}{dz^2} = -\alpha_m^2 Z_m,$$

$$\frac{d^2 Z_n}{dz^2} = -\alpha_n^2 Z_n;$$

daher

$$-\alpha_m^2 \int_0^l Z_n Z_m \, dz = \int_0^l Z_n \frac{d^2 Z_m}{dz^2} dz = \left[Z_n \frac{dZ_m}{dz} \right]_0^l - \int_0^l \frac{dZ_n}{dz} \frac{dZ_m}{dz} dz;$$

folglich

$$(\alpha_n^2 - \alpha_m^2) \int_0^l Z_n Z_m \, dz = \left[Z_n \frac{dZ_m}{dz} - Z_m \frac{dZ_n}{dz} \right]_0^l.$$

Da aber für $z = 0$

$$\frac{dZ_m}{dz} = b Z_m,$$

$$\frac{dZ_n}{dz} = b Z_n,$$

und für $z = l$

$$\frac{dZ_m}{dz} = -b Z_m,$$

$$\frac{dZ_n}{dz} = -b Z_n,$$

so verschwindet die rechte Seite; es verschwindet also das Integral, da $\alpha_n^2 - \alpha_m^2$ nicht gleich Null ist.

Bei der Berechnung von A_n wird noch gebraucht, dass

$$\int_0^l Z_n Z_n \, dz = \frac{\alpha_n^2 + b^2}{2\alpha_n^2} \cdot l + \frac{b}{\alpha_n^2}.$$

Man kann dies auf folgendem Wege ableiten. Es ist, ähnlich wie oben:

*) Man multiplicirt nämlich die letzte Gleichung für Z mit Z_n und integrirt auf beiden Seiten nach z von 0 bis l. Dann ist der Ausdruck links bekannt, und auf der rechten Seite fallen alle Coefficienten fort bis auf A_n. D. H.

$$\alpha_n^2 \int_0^l Z_n Z_n dz = -\left[Z_n \frac{dZ_n}{dz}\right]_0^l + \int_0^l \left(\frac{dZ_n}{dz}\right)^2 dz.$$

Aber

$$\frac{dZ_n}{dz} = -\alpha_n \sin \alpha_n z + b \cos \alpha_n z,$$

$$\alpha_n Z_n = +\alpha_n \cos \alpha_n z + b \sin \alpha_n z,$$

also

$$\alpha_n^2 Z_n^2 + \left(\frac{dZ_n}{dz}\right)^2 = \alpha_n^2 + b^2$$

und durch Integration:

$$\alpha_n^2 \int_0^l Z_n^2 dz = +(\alpha_n^2 + b^2)\, l - \int_0^l \left(\frac{dZ_n}{dz}\right)^2 dz,$$

daher durch Addition zur ersten Gleichung:

$$2\alpha_n^2 \int_0^l Z_n^2 dz = (\alpha_n^2 + b^2)\, l - \left[Z_n \frac{dZ_n}{dz}\right]_0^l.$$

Für $z = l$ ist aber

$$\frac{dZ_n}{dz} = -b Z_n,$$

also nach der drittletzten Gleichung:

$$Z_n^2 = 1$$

und folglich:

$$-Z_n \frac{dZ_n}{dz} = b Z_n^2 = b.$$

Für $z = 0$ ist andererseits:

$$Z_n = 1,$$

$$\frac{dZ_n}{dz} = b,$$

also

$$Z_n \frac{dZ_n}{dz} = b,$$

woraus folgt

$$\int_0^l Z_n^2 dz = \frac{\alpha_n^2 + b^2}{2\alpha_n^2}\, l + \frac{b}{\alpha_n^2},$$

wie zu beweisen war.

§ 5.

Wir haben den Körper, in dem wir die Wärmebewegung betrachten, bis jetzt als unbegrenzt in der Richtung der x- und der y-Achse, und ϑ als unabhängig von x und y angenommen.

Als unabhängig von x und y kann man ϑ auch annehmen, wenn der Körper ein Stab von unendlich kleinem Querschnitt ist, der die Richtung der z-Achse hat.

Diesen für Messungen wichtigen Fall wollen wir jetzt ins Auge fassen.

Wir gehen von der Differentialgleichung (S. 13)

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} = \frac{c\mu}{k}\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial \vartheta}{\partial t}$$

und der Grenzbedingung (S. 25)

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial n} = \frac{h}{k}\vartheta = b\vartheta$$

aus, wo n die nach dem Innern des Körpers gerichtete Normale bedeutet und die Temperatur der Umgebung gleich Null gesetzt ist. Der Stab soll cylindrisch sein, $dx\,dy$ ein Element des Querschnitts. Mit diesem multipliciren wir die partielle Differentialgleichung und integriren. Es sei dl ein Element des Umfangs des Querschnitts; dann ist

$$\int\left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2}\right) dx\,dy = -\int\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\cos(nx) + \frac{\partial \vartheta}{\partial y}\cos(ny)\right) dl$$

$$= -\int \frac{\partial \vartheta}{\partial n}\,dl = -\,b\int \vartheta\,dl,$$

oder, wenn u der Umfang des Querschnitts, ϑ' die Mitteltemperatur des Umfangs des Querschnitts ist:

$$\int\left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2}\right) dx\,dy = -\,b\,u\,\vartheta'.$$

Es sei ferner ϑ'' die Mitteltemperatur des Querschnitts und w seine Fläche; dann ist

$$\int \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2}\,dx\,dy = w\,\frac{\partial^2 \vartheta''}{\partial z^2},$$

$$\int \frac{\partial \vartheta}{\partial t}\,dx\,dy = w\,\frac{\partial \vartheta''}{\partial t}.$$

Diese Werthe substituire man in die obige Differentialgleichung. Nun benutzen wir die Annahme, dass der Querschnitt unendlich klein ist, und setzen voraus, dass $\frac{\partial \vartheta}{\partial x}$ und $\frac{\partial \vartheta}{\partial y}$ nicht unendlich gross sind; dann sind ϑ' und ϑ'' bis auf unendlich Kleines einander gleich. Schreiben wir für beide ϑ, so erhalten wir

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} = b\,\frac{u}{w}\,\vartheta + \frac{1}{a^2}\frac{\partial \vartheta}{\partial t}$$

oder

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} - \gamma\vartheta,$$

wenn $\gamma = a^2 b\,\frac{u}{w} = \frac{h}{c\mu}\,\frac{u}{w}$ ist.

Ist der Zustand ein stationärer, d. h. $\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = 0$, so ist hiernach

$$\vartheta = A\,e^{+\frac{z\sqrt{\gamma}}{a}} + B\,e^{-\frac{z\sqrt{\gamma}}{a}}.$$

wo A und B willkürliche Constanten sind. Ist der Stab als unendlich gross in der Richtung der positiven z-Achse zu betrachten, so muss $A = 0$ sein, weil sonst ϑ unendlich gross für $z = \infty$ werden würde, also ist

$$\vartheta = B \cdot e^{-z\frac{f}{a}} = B \cdot e^{-z\sqrt{\frac{h}{k}\frac{u}{w}}}.$$

Auf dieser Gleichung beruht eine Methode, die zuerst von Desprez, dann von Wiedemann und Franz benutzt ist, zur Bestimmung der Verhältnisse der inneren Leitungsfähigkeit verschiedener Metalle. Lange Stäbe von gleichen Dimensionen wurden mit gleichen Ueberzügen (Russ oder Silber) versehen, um h gleich zu machen, und an einem Ende erwärmt; war der Zustand ein stationärer geworden, so wurde an verschiedenen Stellen die Temperatur gemessen; von Desprez durch Thermometer, von Wiedemann und Franz mit Hilfe einer Thermokette. Die Genauigkeit der Methode ist eine sehr beschränkte, da bei ihr $k : h$ gemessen wird und h, dessen Begriff, wie S. 11 bemerkt, durchaus kein scharfer ist, unter scheinbar gleichen Umständen erheblich schwankt.

§ 6.

Eine viel bessere Methode, bei der eben die Schwankungen von h einen geringeren Einfluss ausüben und die daher absolute Bestimmungen von k gewährt, ist von F. Neumann angegeben und beruht auf der Beobachtung des nicht-stationären Zustandes eines Stabes.

Eine Lösung unserer partiellen Differentialgleichung ist offenbar:

$$\vartheta = e^{-\beta t}(A \cos \alpha z + B \sin \alpha z),$$

falls

$$\beta = a^2 \alpha^2 + f^2.$$

Für die Enden des Stabes sei $z = 0$ und $z = l$ $(l > 0)$; dann soll nach der Grenzbedingung sein:

$$\text{für } z = 0 \qquad \frac{\partial \vartheta}{\partial z} = + b\vartheta,$$

$$\text{für } z = l \qquad \frac{\partial \vartheta}{\partial z} = - b\vartheta;$$

diesen Bedingungen wird genügt durch

$$\vartheta = \sum_1^\infty A_n e^{-\beta_n t}\left(\cos \alpha_n z + \frac{b}{\alpha_n} \sin \alpha_n z\right),$$

wenn

$$\operatorname{tang} \alpha_n l = \frac{2\alpha_n b}{\alpha_n^2 - b^2},$$

$$\beta_n = a^2 \alpha_n^2 + f^2,$$

wo $\alpha_0 = 0$ ausgeschlossen ist, und $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \dots$ (vgl.

S. 31). Diese Lösung lässt sich einem beliebigen Anfangszustande anpassen, vorausgesetzt, dass ϑ für $t = 0$ sich in eine gewisse Reihe (die wir schon früher betrachtet haben) entwickeln lässt.

Bilden wir ϑ_0 und ϑ_l, d. h. die Werthe von ϑ für $z = 0$ und $z = l$. Setzen wir, wie S. 31,

$$Z_n = \cos \alpha_n z + \frac{b}{\alpha_n} \sin \alpha_n z,$$

so ist für $z = 0$ $Z_n = 1$. Wir haben bereits S. 33 bewiesen, dass für $z = l$ $Z_n^2 = 1$ ist; bestimmen wir noch das Vorzeichen von Z_n für $z = l$. Es ist für diesen Werth von z

$$Z_n = \left(\frac{b}{\alpha_n} + \frac{\alpha_n^2 - b^2}{2\alpha_n b}\right) \sin \alpha_n l$$

$$= \frac{\alpha_n^2 + b^2}{2\alpha_n b} \sin \alpha_n l.$$

Nun liegt, wie wir gesehen haben, $\alpha_1 l$ zwischen 0 und π, $\alpha_2 l$ zwischen π und 2π, u. s. f.; daraus folgt, dass $\sin \alpha_1 l$, $\sin \alpha_3 l, \ldots$ positiv, $\sin \alpha_2 l$, $\sin \alpha_4 l, \ldots$ negativ ist, also für $z = l$: $Z_1, Z_3, \ldots = +1$ und $Z_2, Z_4, \ldots = -1$. Hiernach haben wir:

$$\frac{\vartheta_0 + \vartheta_l}{2} = A_1 e^{-\beta_1 t} + A_3 e^{-\beta_3 t} + \cdots$$

$$\frac{\vartheta_0 - \vartheta_l}{2} = A_2 e^{-\beta_2 t} + A_4 e^{-\beta_4 t} + \cdots.$$

Nun wächst β_n mit n, weil α_n diese Eigenschaft hat; ist t gross genug, so wird daher bei jedem Anfangszustande

$$\frac{\vartheta_0 + \vartheta_l}{2} = A_1 e^{-\beta_1 t},$$

$$\frac{\vartheta_0 - \vartheta_l}{2} = A_2 e^{-\beta_2 t}$$

sein. Man kann auch β_1 und β_2 in getrennten Versuchsreihen bestimmen und für jede die Erwärmung passend wählen. Es werden diese Gleichungen bei um so kleineren Werthen von t zu gelten beginnen, je näher für $t = 0$ ϑ durch die zwei ersten Glieder seiner Entwickelung dargestellt ist. Auf diesen Gleichungen beruht die Neumann'sche Methode. Der Stab wird an den Enden mit Vorrichtungen versehen, durch welche die Temperaturen dieser gemessen werden können; Neumann wandte Thermoketten an. Nun erwärmte er das eine Ende durch eine Flamme, entfernte die Wärmequelle und begann einige Zeit darauf in gleichen Zeitintervallen ϑ_0 und ϑ_l oder vielmehr $\vartheta_0 + \vartheta_l$ und $\vartheta_0 - \vartheta_l$ zu messen. Diese Messungen liessen erkennen, wann jene Gleichungen Geltung bekommen hatten, und dann β_1 und β_2 berechnen. In ihren Ausdrücken

$$a^2 \alpha_1^2 + f^2 \quad \text{und} \quad a^2 \alpha_2^2 + f^2$$

kommen *zwei* Unbekannte k und h oder a und b vor. Diese lassen sich aus den Werthen von β_1 und β_2 berechnen. Diese Rechnung wird dadurch verwickelter, dass α_1 und α_2 nicht unmittelbar gegeben sind, sondern von b durch die Gleichungen

$$\operatorname{tang}\frac{\alpha_1 l}{2} = \frac{b}{\alpha_1}$$

$$\operatorname{tang}\frac{\alpha_2 l}{2} = -\frac{\alpha_2}{b}$$

abhängen.*) Man muss mit einem Näherungswerth für b die Rechnung beginnen. Mit Hülfe desselben berechne man α_1 und α_2, hierauf aus den Gleichungen für β_1 und β_2 a und b, mit den so gefundenen Werthen genauere Werthe für α_1 und α_2, mit diesen wieder genauere für a und b u. s. f.

Man kann die Rechnung wesentlich vereinfachen, wenn man ausser ϑ_0 und ϑ_l auch noch $\vartheta_{\frac{l}{2}}$ beobachtet. Wir haben für $z = \frac{l}{2}$

$$Z_n = \cos\frac{\alpha_n l}{2} + \frac{b}{\alpha_n}\sin\frac{\alpha_n l}{2}.$$

Ist n ungerade, so ist nach den letzten Gleichungen:

$$\frac{b}{\alpha_n} = \operatorname{tang}\frac{\alpha_n l}{2}$$

und daher

$$Z_n = \frac{1}{\cos\frac{\alpha_n l}{2}};$$

ist n gerade, so ist

$$\frac{b}{\alpha_n} = -\frac{1}{\operatorname{tang}\frac{\alpha_n l}{2}},$$

also

$$Z_n = 0.$$

Wir haben daher

$$\vartheta_{\frac{l}{2}} = A_1\frac{e^{-\beta_1 t}}{\cos\frac{\alpha_1 l}{2}} + A_3\frac{e^{-\beta_3 t}}{\cos\frac{\alpha_3 l}{2}} + \cdots$$

und also für hinreichend grosse Werthe von t

$$\frac{\vartheta_0 + \vartheta_l}{2\vartheta_{\frac{l}{2}}} = \cos\frac{\alpha_1 l}{2}.$$

Da $\frac{\alpha_1 l}{2}$ im ersten Quadranten liegt, so findet man hieraus α_1, dann b aus

$$\operatorname{tang}\frac{\alpha_1 l}{2} = \frac{b}{\alpha_1}$$

und α_2 aus

*) Ergiebt sich unmittelbar aus der Gleichung für tang $\alpha_n l$ mit Berücksichtigung der Quadranten, in denen $\frac{\alpha_1 l}{2}$ und $\frac{\alpha_2 l}{2}$ liegen. D. H.

$$\operatorname{tang} \frac{\alpha_2 l}{2} = -\frac{\alpha_2}{b}.$$

Aus

$$\beta_1 = a^2 \alpha_1^2 + f^2,$$
$$\beta_2 = a^2 \alpha_2^2 + f^2$$

findet man dann ohne Weiteres a^2 und f^2 oder k und h.

§ 7.

Wir erwähnen noch eine gleichfalls von Neumann herrührende Modification der eben besprochenen Methode. Zu diesem Zwecke beweisen wir zuerst, dass die von uns für einen *geraden* unendlich dünnen Stab abgeleitete Differentialgleichung auch für einen beliebig gekrümmten gilt.

Wir wollen die Bogenlänge der Linie, welche die Schwerpunkte der Querschnitte enthält, zwischen einem festen und einem variablen Punkte p nennen, $d\tau$ ein Element des Theiles des Stabes zwischen den durch diese Punkte gelegten Querschnitten. Die Gleichung

$$\Delta\vartheta = \frac{c\mu}{k} \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial \vartheta}{\partial t}$$

multipliciren wir mit $d\tau$ und integriren. Wir haben, wenn n die innere Normale des Oberflächenelementes ds bedeutet:

$$\int \Delta\vartheta \, d\tau = -\int \frac{\partial \vartheta}{\partial n} \, ds.$$

Wir berechnen nun zuerst *den* Theil dieses Oberflächen-Integrals, der sich auf die Mantelfläche des Stabes bezieht. Hier ist

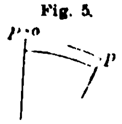
$$\frac{\partial \vartheta}{\partial n} = b\vartheta,$$

also der genannte Theil des Integrals

$$-b\int \vartheta \, ds.$$

Wir nennen ϑ' den Mittelwerth von ϑ in dem Umfange u des einem Werthe von p entsprechenden Querschnitts, so dass wieder:

Fig. 5.



$$u\vartheta' = \int \vartheta \, dl.$$

Der Stab soll unendlich dünn, seine Krümmungen aber endlich sein; daraus folgt, dass jener Theil des Oberflächenintegrals

$$-bu\int_0^p \vartheta' \, dp$$

ist.*) Für den durch den Werth von p bestimmten Querschnitt ist bis auf unendlich Kleines

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial n} = -\frac{\partial \vartheta}{\partial p}$$

und daher in Bezug auf ihn

$$-\int \frac{\partial \vartheta}{\partial n}\, ds = \frac{\partial}{\partial p}\int \vartheta\, ds.$$

Nennt man ϑ'' den Mittelwerth von ϑ für die Fläche eines Querschnitts, so dass wieder:

$$w\vartheta'' = \int \vartheta\, ds,$$

so wird

$$-\int \frac{\partial \vartheta}{\partial n}\, ds = w\,\frac{\partial \vartheta''}{\partial p}.$$

Für den Querschnitt $p = 0$ ist

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial n} = \frac{\partial \vartheta}{\partial p}$$

und daher

$$-\int \frac{\partial \vartheta}{\partial n}\, ds = -\,w\left(\frac{\partial \vartheta''}{\partial p}\right)_{p=0}.$$

Die Summe dieser zwei auf die Querschnitte $p = 0$ und p bezüglichen Glieder ist daher:

$$-\int \frac{\partial \vartheta}{\partial n}\, ds = w\int_0^p \frac{\partial^2 \vartheta''}{\partial p^2}\, dp.$$

Endlich ist**)

$$\int \frac{\partial \vartheta}{\partial t}\, d\tau = \frac{\partial}{\partial t}\, w\int_0^p \vartheta''\, dp = w\int_0^p \frac{\partial \vartheta''}{\partial t}\, dp.$$

Setzt man nun die zu bildende Gleichung zusammen, so findet man

$$\int_0^p \left(w\,\frac{\partial^2 \vartheta''}{\partial p^2} - b\,u\,\vartheta' - w\,\frac{c\mu}{k}\,\frac{\partial \vartheta''}{\partial t}\right) dp = 0.$$

Erwägt man, dass p beliebig ist, und nimmt an, dass $\vartheta'' - \vartheta'$ unendlich klein ist, so erhält man, wenn ϑ für ϑ' und ϑ'' geschrieben wird,

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial p^2} = b\,\frac{u}{w}\,\vartheta + \frac{1}{a^2}\,\frac{\partial \vartheta}{\partial t}$$

oder

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a^2\,\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial p^2} - f^2 \vartheta;\ \text{w. z. b. w.}$$

---

*) Hier und im Folgenden ist Grösse und Form eines Querschnitts als unabhängig von p vorausgesetzt. D. H.

**) Da $$\int \vartheta\, d\tau = w\int_0^p \vartheta''\, dp.$$ D. H.

Eine Lösung dieser Differentialgleichung ist

$$\vartheta = \sum e^{-\beta_n t} (A_n \cos(\alpha_n p) + B_n \sin(\alpha_n p)),$$

wo α_n beliebig und

$$\beta_n = a^2 \alpha_n^2 + f^2.$$

Nun sei der Stab ein geschlossener Ring von der Länge l; dann muss ϑ in Bezug auf p um l periodisch sein; dem genügen wir, wenn wir

$$\alpha_n = n \frac{2\pi}{l}$$

machen und unter n eine positive ganze Zahl oder Null verstehen. α_n hat jetzt eine andere Bedeutung als früher. Hier erhalten wir für grosse Werthe von t offenbar:

$$\frac{\vartheta_0 + \vartheta_{\frac{l}{2}}}{2} = A_0 e^{-\beta_0 t}$$

$$\frac{\vartheta_0 - \vartheta_{\frac{l}{2}}}{2} = A_1 e^{-\beta_1 t}$$

β_0 und β_1 können gemessen werden, wenn der Ring an einer geeigneten Stelle erwärmt ist; aus

$$\beta_0 = f^2,$$

$$\beta_1 = \left(a \frac{2\pi}{l}\right)^2 + f^2$$

ist dann a und f, also k und h zu berechnen.

Vierte Vorlesung.

Wärmeleitung in einem cylindrischen Stabe von endlichem, rechtwinkligem Querschnitt. — Zerlegung in drei Differentialgleichungen. — Vorgänge für späte Zeiten. — Die isothermen Flächen sind concentrische Kugeln. — Wärmeleitung in einem krystallinischen Medium. — Vereinfachung der Differentialgleichung durch passende Wahl der Coordinaten. — Die isothermen Flächen sind ähnliche Ellipsoide. — Wärmeleitung in einer Krystallplatte.

§ 1.

Wir wollen das Problem der Wärmebewegung in einem Stabe von speciell rechteckigem Querschnitt noch von einer anderen Seite aus angreifen, indem wir von dem Falle ausgehn, dass die Dimensionen des Querschnitts endlich sind.

Wir gehen aus von der Gleichung

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2}\right)$$

und der Bedingung, dass für die Oberfläche

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial n} = b\vartheta.$$

Der Anfangspunkt der x, y, z sei der eine Eckpunkt des rechtwinkligen Parallelepipedons, die Achsen parallel den Kanten, deren Längen l', l'', l seien. Wir suchen zunächst eine particuläre Lösung und setzen

$$\vartheta = e^{-\beta t} Z' Z'' Z,$$

wo Z' nur von x, Z'' nur von y, Z nur von z abhängen soll. Diese Lösung in unsere Differentialgleichung eingesetzt, ergiebt

$$0 = \beta + a^2\left(\frac{\frac{d^2 Z'}{dx^2}}{Z'} + \frac{\frac{d^2 Z''}{dy^2}}{Z''} + \frac{\frac{d^2 Z}{dz^2}}{Z}\right),$$

eine Gleichung, die nur dann für alle Werthe der Veränderlichen gelten kann, wenn alle darin vorkommenden Grössen constant sind. Setzen wir also

$$\frac{d^2 Z'}{dx^2} = -\alpha'^2 Z',$$

$$\frac{d^2 Z''}{dy^2} = -\alpha''^2 Z'',$$

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} = -\alpha^2 Z,$$

wo α', α'', α Constante sind, so heisst die Gleichung

$$\beta = a^2(\alpha'^2 + \alpha''^2 + \alpha^2).$$

Die drei Differentialgleichungen für Z', Z'', Z lassen sich integriren. Unter Berücksichtigung der Grenzbedingungen, dass

$$\text{für } x = 0 \qquad \frac{dZ'}{dx} = +bZ',$$

$$\text{für } x = l' \qquad \frac{dZ'}{dx} = -bZ',$$

und analog für Z'' und Z, erhält man

$$Z' = \cos(\alpha' x) + \frac{b}{\alpha'}\sin(\alpha' x), \quad \operatorname{tang}(\alpha' l') = \frac{2\alpha' b}{\alpha'^2 - b^2},$$

$$Z'' = \cos(\alpha'' y) + \frac{b}{\alpha''}\sin(\alpha'' y), \quad \operatorname{tang}(\alpha'' l'') = \frac{2\alpha'' b}{\alpha''^2 - b^2},$$

$$Z = \cos(\alpha z) + \frac{b}{\alpha}\sin(\alpha z), \quad \operatorname{tang}(\alpha l) = \frac{2\alpha b}{\alpha^2 - b^2}.$$

Eine particuläre Lösung unserer Diffentialgleichung ist also

$$\vartheta = Z' Z'' Z e^{-ta^2(\alpha'^2 + \alpha''^2 + \alpha^2)},$$

wo Z', Z'', Z die angegebenen Werthe haben. Eine allgemeinere Lösung ist*):

$$\vartheta = \sum\sum\sum A_{n'n''n} Z'_{n'} Z''_{n''} Z_n e^{-ta^2(\alpha'^2_{n'} + \alpha''^2_{n''} + \alpha^2_n)}$$

wo

$$Z'_{n'} = \cos(\alpha'_{n'} x) + \frac{b}{\alpha'_{n'}}\sin(\alpha'_{n'} x), \quad \operatorname{tang}(\alpha'_{n'} l') = \frac{2\alpha'_{n'} b}{\alpha'^2_{n'} - b^2},$$

$$Z''_{n''} = \cos(\alpha''_{n''} y) + \frac{b}{\alpha''_{n''}}\sin(\alpha'_{n} y), \quad \operatorname{tang}(\alpha''_{n''} l'') = \frac{2\alpha''_{n''} b}{\alpha''^2_{n''} - b^2},$$

$$Z_n = \cos(\alpha_n z) + \frac{b}{\alpha_n}\sin(\alpha_n z), \quad \operatorname{tang}(\alpha_n l) = \frac{2\alpha_n b}{\alpha_n^2 - b^2}.$$

Diese Lösung lässt sich jedem Anfangszustande anpassen, vorausgesetzt, dass jede Function von z sich nach den Grössen Z_n entwickeln lässt.

*) Die Grössen Z_n und α_n sind offenbar identisch mit den früher so bezeichneten Grössen. D. H.

§ 2.

Je grösser t wird, um so näher wird ϑ durch diejenigen Glieder dargestellt, für welche

$$\alpha_{n'}'^2 + \alpha_{n''}''^2 + \alpha_n^2$$

die kleinsten Werthe hat. Der kleinste Werth hiervon ist

$$\alpha_1'^2 + \alpha_1''^2 + \alpha_1^2,$$

wobei nach S. 37

$$\operatorname{tang} \frac{\alpha_1' l'}{2} = \frac{b}{\alpha_1'},$$

$$\operatorname{tang} \frac{\alpha_1'' l''}{2} = \frac{b}{\alpha_1''},$$

$$\operatorname{tang} \frac{\alpha_1 l}{2} = \frac{b}{\alpha_1}$$

und $\alpha_1' l'$, $\alpha_1'' l''$, $\alpha_1 l$ zwischen 0 und π liegen.

Was den nächstkleinsten Werth anbetrifft, so erhält man durch Differentiation der Gleichung:

$$\alpha l = \operatorname{arc\,cotg} \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{b} - \frac{b}{\alpha}\right)$$

$$\alpha\, d\alpha = -\, dl \frac{\alpha^2}{l + \frac{2b}{b^2 + \alpha^2}}\,.$$

Hieraus ergiebt sich durch Integration von l bis l' der Werth von

$$\alpha_1'^2 - \alpha_1^2 \text{ und von } \alpha_2'^2 - \alpha_2^2.$$

Ist nun $l > l'$, wie wir annehmen wollen, so sind beide Differenzen positiv, und ausserdem, da $\alpha_2 > \alpha_1$ (für jeden Werth der Integrationsvariabeln l)

$$\alpha_2'^2 - \alpha_2^2 > \alpha_1'^2 - \alpha_1^2$$

oder:

$$\alpha_2'^2 - \alpha_1'^2 > \alpha_2^2 - \alpha_1^2.$$

Ebenso ist, wenn $l > l''$ angenommen wird:

$$\alpha_2''^2 - \alpha_1''^2 > \alpha_2^2 - \alpha_1^2$$

und hiernach:

$$\alpha_1'^2 + \alpha_1''^2 + \alpha_2^2$$

der nächstkleinste in Betracht kommende Werth.*)

Wir nehmen nun t so gross an, dass ϑ durch die zwei ersten Glieder der Reihe darstellbar ist; wir bezeichnen durch ϑ_0 und ϑ_l die Werthe von ϑ für $z=0$ und $z=l$ und *gleiche* Werthe von x und y; dann wird**):

---

*) Dieser Beweis ist im Manuscript des Verf. nur ganz kurz skizzirt und vom Herausgeber ausgearbeitet worden.

**) Hierbei ist benutzt, dass nach S. 36 für $z = l$ $Z_1 = +1$ und $Z_2 = -1$. Die Grössen A_1 und A_2 hängen noch von x und y ab. D. H.

$$\frac{\vartheta_0 + \vartheta_l}{2} = A_1 e^{-\beta_1 t},$$
$$\frac{\vartheta_0 - \vartheta_l}{2} = A_2 e^{-\beta_2 t},$$

wo

$$\beta_1 = a^2\alpha_1^2 + f^2,$$
$$\beta_2 = a^2\alpha_2^2 + f^2,$$
$$f^2 = a^2(\alpha_1'^2 + \alpha_1''^2).$$

Setzen wir nun bl' und bl'' als unendlich klein voraus, so haben wir (indem $\frac{\alpha_1' l'}{2}$ für $\operatorname{tang}\left(\frac{\alpha_1' l'}{2}\right)$ gesetzt wird)

$$\alpha_1' = \sqrt{2\frac{b}{l'}},$$
$$\alpha_1'' = \sqrt{2\frac{b}{l''}},$$

also

$$f^2 = 2a^2 b\left(\frac{1}{l'} + \frac{1}{l''}\right) = a^2 b\,\frac{u}{w},$$

in Uebereinstimmung mit dem Früheren. Vgl. S. 34.

Von der Voraussetzung, dass l' und l'' unendlich klein sind, ist hier nur bei der Auflösung der Gleichungen für α_1' und α_1'' Gebrauch gemacht; diese Voraussetzung ist daher bei der ganzen Methode unwesentlich. Wir werden nach unseren Betrachtungen beurtheilen können, ob bei gewissen Dimensionen des Querschnitts dieser als unendlich klein bezeichnet werden darf, und die etwa nöthigen Correctionen anbringen.

Wir führen ein Beispiel an. H. Weber*) fand für einen Eisenstab, bei dem

$$l' = l'' = 7{,}5\text{ mm},\quad l = 230{,}4\text{ mm},$$

bei 40° C

$k = 14{,}85,\quad h = 0{,}00266$, wenn 1 sec = 1, 1 mm = 1, 1 mg = 1.

Daraus folgt

$$b = \frac{h}{k} = 0{,}00018,\quad bl' = bl'' = 0{,}00134.$$

Während die Annahme, dass $bl' = bl''$ unendlich klein ist,

$$f^2 = a^2 b\,\frac{u}{w}$$

giebt, ergiebt die genauere Rechnung**)

*) H. Weber, Pogg. Ann. 146, p. 257. 1872.

**) Man setze in der Gleichung:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha_1' l'}{2} = \frac{b}{\alpha_1'}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha_1' l'}{2} = \frac{\alpha_1' l'}{2}\left(1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{\alpha_1'^2 l'^2}{4}\right)$$

und in dem Correctionsgliede den Näherungswerth

$$\alpha_1'^2 = \frac{2b}{l'}.\quad \text{D. H.}$$

$$f^2 = a^2 b \frac{u}{w}\left(1 - \frac{bl'}{6}\right) = a^2 b \frac{u}{w} (1-0{,}0002).$$

Dieser Unterschied ist so klein, dass er bei der beschränkten Genauigkeit, die die Versuche zulassen, das Resultat nicht merklich entstellen kann. Aus anderen Gründen ist es aber zweckmässig, die Querdimensionen grösser zu wählen; es würde vortheilhaft sein, dabei sich nicht in den Grenzen zu halten, innerhalb deren dieselben als unendlich klein angesehen werden können, und die für endliche Dimensionen aufgestellten Formeln zu benutzen.

§ 3.

Verfolgen wir nun die Wärmebewegung in einer Kugel unter der Voraussetzung, dass ϑ nur eine Function von r und t ist. Unsere Differentialgleichung

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a^2 \Delta \vartheta$$

verwandelt sich hier, weil

$$\Delta \vartheta = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r\vartheta)}{\partial r^2}$$

in die folgende:

$$\frac{\partial (r\vartheta)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 (r\vartheta)}{\partial r^2};$$

für die Oberfläche sei

$$r = R,$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial r} = -b\vartheta$$

oder

$$\frac{\partial (r\vartheta)}{\partial r} = -b' r\vartheta, \quad \text{wobei} \quad b' = b - \frac{1}{R}.$$

Für $r = 0$ muss ferner $r\vartheta$ verschwinden, damit hier nicht ϑ unendlich gross werde. Diesen Bedingungen wird genügt durch

$$r\vartheta = \sum A_n e^{-a^2 \alpha_n^2 t} \sin(\alpha_n r),$$

wenn α_n der Gleichung

$$\operatorname{tang}(\alpha R) = -\frac{\alpha}{b'}$$

genügt; es brauchen offenbar nur die positiven α benutzt zu werden.

§ 4.

Wir wenden uns nun zur Betrachtung der Wärmebewegung in *krystallinischen* Medien.*) Wir haben die Differentialgleichungen derselben bereits S. 10 und 9 aufgestellt in der Form

*) Vgl. Lamé, Leçons sur la théorie analytique de la chaleur. Paris 1861.

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} = - c\mu \frac{\partial \vartheta}{\partial t},$$

$$- q_x = a_{11} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + a_{13} \frac{\partial \vartheta}{\partial z},$$

$$- q_y = a_{21} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + a_{23} \frac{\partial \vartheta}{\partial z},$$

$$- q_z = a_{31} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + a_{32} \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + a_{33} \frac{\partial \vartheta}{\partial z}.$$

Die Grössen a nehmen wir als Constante an. Wir setzen

$$\frac{a_{12} + a_{21}}{2} = b_{12} = b_{21},$$

$$\frac{a_{23} + a_{32}}{2} = b_{23} = b_{32},$$

$$\frac{a_{31} + a_{13}}{2} = b_{31} = b_{13}$$

und der Uebereinstimmung wegen

$$a_{11} = b_{11},$$
$$a_{22} = b_{22},$$
$$a_{33} = b_{33}.$$

Dann ist die partielle Differentialgleichung

$$c\mu \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = b_{11} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + b_{22} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + b_{33} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} + 2 b_{23} \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \frac{\partial \vartheta}{\partial z}$$
$$+ 2 b_{31} \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + 2 b_{12} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \frac{\partial \vartheta}{\partial y}.$$

Dieselbe lässt sich vereinfachen durch Einführung anders gerichteter rechtwinkliger Coordinaten, die denselben Anfangspunkt haben. Es seien diese ξ, η, ζ. Dann sind ξ, η, ζ lineare homogene Functionen von x, y, z und umgekehrt und daher

$$x = \frac{\partial x}{\partial \xi} \xi + \frac{\partial x}{\partial \eta} \eta + \frac{\partial x}{\partial \zeta} \zeta,$$

$$y = \frac{\partial y}{\partial \xi} \xi + \frac{\partial y}{\partial \eta} \eta + \frac{\partial y}{\partial \zeta} \zeta,$$

$$z = \frac{\partial z}{\partial \xi} \xi + \frac{\partial z}{\partial \eta} \eta + \frac{\partial z}{\partial \zeta} \zeta.$$

Andrerseits ist

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x},$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial y} = \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \vartheta}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \vartheta}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial y},$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial z} = \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \vartheta}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \vartheta}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z}.$$

Aber

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial \xi} = \cos(x\xi),$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial \eta} = \cos(x\eta),$$

u. s. w.

Daraus folgt, dass $\frac{\partial\vartheta}{\partial x}, \frac{\partial\vartheta}{\partial y}, \frac{\partial\vartheta}{\partial z}$ *dieselben* linearen Functionen von $\frac{\partial\vartheta}{\partial\xi}, \frac{\partial\vartheta}{\partial\eta}, \frac{\partial\vartheta}{\partial\zeta}$ sind, wie x, y, z von ξ, η, ζ; und daraus weiter, dass man einen linearen Ausdruck von $\frac{\partial\vartheta}{\partial x}, \frac{\partial\vartheta}{\partial y}, \frac{\partial\vartheta}{\partial z}$ mit constanten Coefficienten in die neuen Coordinaten transformiren kann, indem man x, y, z für $\frac{\partial\vartheta}{\partial x}, \frac{\partial\vartheta}{\partial y}, \frac{\partial\vartheta}{\partial z}$ schreibt, den gewonnenen Ausdruck in ξ, η, ζ transformirt und $\frac{\partial\vartheta}{\partial\xi}, \frac{\partial\vartheta}{\partial\eta}, \frac{\partial\vartheta}{\partial\zeta}$ für ξ, η, ζ setzt.

Ferner findet man

$$x^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\right)^2\xi^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)^2\eta^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial\zeta}\right)^2\zeta^2 + 2\frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial x}{\partial\zeta}\eta\zeta + 2\frac{\partial x}{\partial\zeta}\frac{\partial x}{\partial\xi}\zeta\xi + 2\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial x}{\partial\eta}\xi\eta,$$

$$y^2 = \dots\dots\dots\dots$$

$$z^2 = \dots\dots\dots\dots$$

$$yz = \frac{\partial y}{\partial\xi}\frac{\partial z}{\partial\xi}\xi^2 + \frac{\partial y}{\partial\eta}\frac{\partial z}{\partial\eta}\eta^2 + \frac{\partial y}{\partial\zeta}\frac{\partial z}{\partial\zeta}\zeta^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\eta}\frac{\partial z}{\partial\zeta} + \frac{\partial y}{\partial\zeta}\frac{\partial z}{\partial\eta}\right)\eta\zeta + \left(\frac{\partial y}{\partial\zeta}\frac{\partial z}{\partial\xi} + \frac{\partial y}{\partial\xi}\frac{\partial z}{\partial\zeta}\right)\zeta\xi + \left(\frac{\partial y}{\partial\xi}\frac{\partial z}{\partial\eta} + \frac{\partial y}{\partial\eta}\frac{\partial z}{\partial\xi}\right)\xi\eta,$$

$$zx = \dots\dots\dots\dots$$

$$xy = \dots\dots\dots\dots$$

und andrerseits

$$\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\vartheta}{\partial\xi^2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^2\vartheta}{\partial\eta^2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^2\vartheta}{\partial\zeta^2}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2\vartheta}{\partial\eta\partial\zeta}\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial x} + 2\frac{\partial^2\vartheta}{\partial\zeta\partial\xi}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial x} + 2\frac{\partial^2\vartheta}{\partial\xi\partial\eta}\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2\vartheta}{\partial y^2} = \dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{\partial^2\vartheta}{\partial z^2} = \dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{\partial^2\vartheta}{\partial y\partial z} = \frac{\partial^2\vartheta}{\partial\xi^2}\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\xi}{\partial z} + \frac{\partial^2\vartheta}{\partial\eta^2}\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial z} + \frac{\partial^2\vartheta}{\partial\zeta^2}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\frac{\partial\zeta}{\partial z} + \frac{\partial^2\vartheta}{\partial\eta\partial\zeta}\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial\zeta}{\partial z} + \frac{\partial\eta}{\partial z}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right) + \frac{\partial^2\vartheta}{\partial\zeta\partial\xi}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\frac{\partial\xi}{\partial z} + \frac{\partial\zeta}{\partial z}\frac{\partial\xi}{\partial y}\right) + \frac{\partial^2\vartheta}{\partial\xi\partial\eta}\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial z} + \frac{\partial\xi}{\partial z}\frac{\partial\eta}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial^2\vartheta}{\partial z\partial x} = \dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x\partial y} = \dots\dots\dots\dots$$

Bei Rücksicht auf

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial\xi}, \text{ u. s. w.,}$$

folgt hieraus, dass $\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x^2}, \frac{\partial^2\vartheta}{\partial y^2}, \frac{\partial^2\vartheta}{\partial z^2}, \frac{\partial^2\vartheta}{\partial y\partial z}, \frac{\partial^2\vartheta}{\partial z\partial x}, \frac{\partial^2\vartheta}{\partial x\partial y}$ *dieselben* linearen Functionen von $\frac{\partial^2\vartheta}{\partial\xi^2}, \frac{\partial^2\vartheta}{\partial\eta^2}, \frac{\partial^2\vartheta}{\partial\zeta^2}, \frac{\partial^2\vartheta}{\partial\eta\partial\zeta}, \frac{\partial^2\vartheta}{\partial\zeta\partial\xi}, \frac{\partial^2\vartheta}{\partial\xi\partial\eta}$ sind, wie x^2, y^2, z^2, yz, zx, xy von $\xi^2, \eta^2, \zeta^2, \eta\zeta, \zeta\xi, \xi\eta$; und weiter, dass ein linearer

Ausdruck von $\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x^2}, \frac{\partial^2\vartheta}{\partial y^2}, \frac{\partial^2\vartheta}{\partial z^2}, \frac{\partial^2\vartheta}{\partial y\,\partial z}, \frac{\partial^2\vartheta}{\partial z\,\partial x}, \frac{\partial^2\vartheta}{\partial x\,\partial y}$ mit constanten Coefficienten in die neuen Coordinaten transformirt wird, indem man für diese Grössen x^2, y^2, z^2, yz, zx, xy setzt, den gewonnenen Ausdruck transformirt und dann $\frac{\partial^2\vartheta}{\partial \xi^2}, \frac{\partial^2\vartheta}{\partial \eta^2}, \frac{\partial^2\vartheta}{\partial \zeta^2}, \frac{\partial^2\vartheta}{\partial\eta\,\partial\zeta}, \frac{\partial^2\vartheta}{\partial\zeta\,\partial\xi}, \frac{\partial^2\vartheta}{\partial\xi\,\partial\eta}$ für ξ^2, η^2, ζ^2, $\eta\zeta$, $\zeta\xi$, $\xi\eta$ schreibt.

Wir haben also den Ausdruck

$$F = b_{11}x^2 + b_{22}y^2 + b_{33}z^2 + 2b_{23}yz + 2b_{31}zx + 2b_{12}xy$$

in ξ, η, ζ zu transformiren. Wählt man die Richtungen dieser passend, so kann man bekanntlich bewirken, dass er gleich

$$\lambda_1\xi^2 + \lambda_2\eta^2 + \lambda_3\zeta^2$$

wird; man hat zu diesem Zwecke die Achsen der $\xi\,\eta\,\zeta$ parallel den Hauptachsen des Ellipsoids $F = 1$ zu nehmen. (Diese Fläche zweiten Grades ist ein Ellipsoid; es wäre sonst das Wärmegleichgewicht des Körpers ein labiles, wie in einem isotropen Körper von negativer Leitungsfähigkeit.) λ_1, λ_2, λ_3 sind die reciproken Quadrate der Halbachsen dieses Ellipsoids.

Die Differentialgleichung S. 46 wird dann

$$\lambda_1\frac{\partial^2\vartheta}{\partial\xi^2} + \lambda_2\frac{\partial^2\vartheta}{\partial\eta^2} + \lambda_3\frac{\partial^2\vartheta}{\partial\zeta^2} = c\mu\frac{\partial\vartheta}{\partial t},$$

oder, wenn wir

$$p_1 = \frac{\xi}{\sqrt{\lambda_1}},$$

$$p_2 = \frac{\eta}{\sqrt{\lambda_2}},$$

$$p_3 = \frac{\zeta}{\sqrt{\lambda_3}}$$

setzen,

$$\frac{\partial^2\vartheta}{\partial p_1^2} + \frac{\partial^2\vartheta}{\partial p_2^2} + \frac{\partial^2\vartheta}{\partial p_3^2} = c\mu\frac{\partial\vartheta}{\partial t},$$

eine Gleichung, die von derselben Form ist, wie die entsprechende für isotrope Körper, von der wir eine Reihe particulärer Lösungen untersucht haben.

§ 4.

Eine solche particuläre Lösung der letzten Gleichung war (S. 45)

$$\vartheta = f\left(\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2},\ t\right),$$

wo f eine gewisse, aber noch manches Willkührliche enthaltende Function bedeutet. Dieselbe Lösung kann also auch in unserem Falle gelten. Die *isothermen* Flächen sind dann in jedem Augenblicke die ähnlichen Ellipsoide: $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = \text{const.}$ oder:

$$\frac{\xi^2}{\lambda_1} + \frac{\eta^2}{\lambda_2} + \frac{\zeta^2}{\lambda_3} = \text{const.}$$

Diese sind reciprok den Ellipsoiden $F=$ const.; d. h. sie haben dieselben Achsenrichtungen und die reciproken Achsenlängen. Es gilt der für ϑ aufgestellte Ausdruck unter Anderem für ein unbegrenztes Mittel, das zur Zeit $t=0$ überall dieselbe Temperatur hat und dem im Anfangspunkte der Coordinaten (der zu den genannten Ellipsoiden gehört) in beliebiger Weise Wärme zugeführt wird. In einem solchen Falle lassen sich allerdings Messungen nicht ausführen. Die Verschiedenheit der Leitung in verschiedenen Richtungen hat sich gezeigt bei *Krystallplatten.*

Wir denken uns eine seitlich unbegrenzte Platte, deren Gleichungen $z=0$ und $z=\varepsilon$ sein mögen. Dabei sei

$$\text{für } z=0 \qquad q_z = -h\vartheta,$$
$$\text{für } z=\varepsilon \qquad q_z = +h\vartheta,$$

wo h als constant angenommen wird. Die Gleichung

$$\frac{\partial q_x}{\partial x}+\frac{\partial q_y}{\partial y}+\frac{\partial q_z}{\partial z} = -c\mu\frac{\partial\vartheta}{\partial t}$$

multipliciren wir mit dz und integriren von $z=0$ bis $z=\varepsilon$. Nehmen wir an, dass für constante Werthe von x, y und t ϑ nur unmerklich sich ändert, so haben wir

$$\int_0^\varepsilon \frac{\partial q_x}{\partial x}dz = \frac{\partial}{\partial x}\int_0^\varepsilon q_x dz = -\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}\left(a_{11}\frac{\partial\vartheta}{\partial x}+a_{12}\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\right),$$

$$\int_0^\varepsilon \frac{\partial q_y}{\partial y}dz = \frac{\partial}{\partial y}\int_0^\varepsilon q_y dz = -\varepsilon\frac{\partial}{\partial y}\left(a_{21}\frac{\partial\vartheta}{\partial x}+a_{22}\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\right),$$

$$\int_0^\varepsilon \frac{\partial q_z}{\partial z}dz = 2h\vartheta$$

und also

$$a_{11}\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x^2}+(a_{12}+a_{21})\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x\,\partial y}+a_{22}\frac{\partial^2\vartheta}{\partial y^2} = \frac{2h}{\varepsilon}\vartheta + c\mu\frac{\partial\vartheta}{\partial t}.$$

Für x und y führen wir andere rechtwinklige Coordinaten ξ und η ein, deren Achsen die Richtungen der Achsen der Ellipse

$$a_{11}x^2+(a_{12}+a_{21})xy+a_{22}y^2 = 1$$

haben; die Halbachsen derselben seien $\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}$ und $\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}$; setzen wir dann noch

$$p_1 = \frac{\xi}{\sqrt{\lambda_1}},$$

$$p_2 = \frac{\eta}{\sqrt{\lambda_2}},$$

so wird die Differentialgleichung ähnlich wie oben:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial p_1^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial p_2^2} = \frac{2h}{\varepsilon}\, \vartheta + c\mu \frac{\partial \vartheta}{\partial t}.$$

Man findet leicht eine Lösung dieser Gleichung von der Form

$$\vartheta = f(\sqrt{p_1^2 + p_2^2},\ t).$$

Wenn sie gilt, so sind die Isothermen die Ellipsen

$$\frac{\xi^2}{\lambda_1} + \frac{\eta^2}{\lambda_2} = \text{const.},$$

die reciprok sind den Ellipsen

$$a_{11}x^2 + (a_{12} + a_{21})xy + a_{22}y^2 = \text{const.},$$

in denen die xy Ebene die Ellipsoide $F = \text{const.}$ schneidet. Die Lösung gilt, wenn die Platte als unbegrenzt angesehen werden kann, zur Zeit $t = 0$ überall dieselbe Temperatur hat und ihr im Anfangspunkte der x, y Wärme zugeführt wird.

Fünfte Vorlesung.

Mechanische Wärmetheorie oder Thermodynamik. — Aeussere Arbeit. — Erhaltung der Energie. — Aequivalenz von Arbeit und Wärme. — Kreisprocesse. — Anwendung auf ein Gas unter Benutzung von Stempeln und Wärmereservoiren. — Combination zweier Kreisprocesse. — Carnot'sches Princip. — Definition der absoluten Temperatur. — Anwendung auf einen Kreisprocess mit beliebig vielen Wärmereservoiren. — Erster, zweiter Hauptsatz der Wärmelehre. — Existenz und Definition der Entropie.

§ 1.

Wir haben uns bis jetzt mit der *reinen Wärmelehre* beschäftigt, d. h. mit den Erscheinungen, bei denen allein Temperaturänderungen ins Auge zu fassen sind; wir wenden uns jetzt zu Erscheinungen, bei denen zugleich Temperaturänderungen und Bewegungen vorkommen. Das Gebiet, mit dem wir es nun zu thun haben werden, pflegt man *mechanische Wärmetheorie* oder *Thermodynamik* zu nennen; in neuerer Zeit erst, in den letzten vierzig Jahren etwa, ist dasselbe mit Erfolg angebaut; dabei ist die Vorstellung sehr förderlich gewesen, dass die Wärme in Bewegung besteht; der Name *mechanische Wärmetheorie* weist auf diese Vorstellung hin und bei der Entwicklung ihrer Sätze pflegt man von dieser Vorstellung auszugehen. Wir wollen aber den Standpunkt, den wir gewählt haben, auch hier beibehalten und fortfahren, die Temperatur als eine besondere Eigenschaft der Materie zu betrachten, die nicht auf Bewegung zurückführbar zu sein braucht.

Die Physik stellt die Erscheinungen, mit denen sie es zu thun hat, dar als bedingt durch *Einwirkungen*, die die Körper auf einander ausüben. Zu diesen Einwirkungen gehört die Mittheilung und Entziehung von Wärme, die wir eben besprochen haben; zu ihnen gehören auch die *Kräfte*, die in der Mechanik betrachtet werden, z. B. die Gravitationskräfte und die Drucke, mit denen zwei sich berührende Körper auf einander wirken; endlich giebt es noch andere Einwirkungen, wie elektrische und magnetische.

Denken wir uns ein System von Körpern, auf welches von fremden Körpern keine anderen Einwirkungen ausgeübt werden, als

Kräfte, die wir *äussere Kräfte* nennen wollen. Das System kann dabei sehr mannigfaltige Veränderungen erleiden: Bewegungen, Temperaturänderungen, Aenderungen des Aggregatzustandes, des chemischen Zustandes. Falls Bewegungen der Theile, auf welche äussere Kräfte wirken, vorhanden sind, so leisten diese Kräfte *Arbeit*; wir wollen von dieser sagen: sie sei von Aussen dem Systeme zugeführt; das negative derselben soll heissen: die von dem System nach Aussen abgegebene oder die *von ihm geleistete äussere Arbeit.* Wir stellen uns vor, dass die äusseren Kräfte nach Willkühr abgeändert werden können; man wird dann bewirken können, dass das System auf verschiedene Weisen oder auf verschiedenen Wegen, wie wir sagen wollen, aus einem gewissen Anfangszustande in einen gewissen Endzustand übergeht. *Die geleistete äussere Arbeit ist bei jedem dieser Wege die gleiche.* Dieser wichtige, aus der Erfahrung abstrahirte Satz pflegt mit dem Namen des *Princips von der Erhaltung der Energie* belegt zu werden.

Stellen wir uns vor, dass jeder von den Zuständen, die das System durchlaufen kann, bestimmt ist durch die Werthe beliebig vieler Variabeln, so muss es hiernach eine Funktion dieser Variabeln geben, und zwar eine einwerthige, aber mit einer additiven willkürlichen Constanten behaftete, die die Eigenschaft hat, dass die Differenz der Werthe, die sie für irgend zwei Zustände des Systems hat, der äusseren Arbeit gleich ist, die bei dem Uebergange aus dem einen in den anderen dieser Zustände geleistet wird. Man nennt diese Function die *Energie* des Systems.

Bestehen die Einwirkungen, die das gedachte System von Aussen erleidet, nicht ausschliesslich in Kräften, sondern findet ausser diesen eine Uebertragung von Wärme zwischen dem System und fremden Körpern statt, so gilt das Princip von der Erhaltung der Energie in der angegebenen Form nicht; es ist dann aber die Summe der von dem Systeme geleisteten äusseren Arbeit und der nach Aussen abgegebenen Wärmemenge für alle Wege, auf denen das System aus einem gewissen Anfangszustande in einen gewissen Endzustand übergehen kann, dieselbe; vorausgesetzt, dass für die Wärmemenge eine gewisse Einheit, das mechanische Aequivalent der Wärmeeinheit, eingeführt ist. *Es sind* — wie sich das kurz ausdrücken lässt — *in Bezug auf das Princip von der Erhaltung der Energie Arbeit und Wärme äquivalent.*

Auch bei einem System, wie wir es uns jetzt denken, findet hiernach der Begriff der Energie seine Anwendung. Es ist diese eine Function der Variabeln, von denen der jedesmalige Zustand des Systems abhängig ist, welche die Eigenschaft hat, dass die Differenz ihrer Werthe für zwei Zustände gleich ist der Summe der geleisteten äusseren Arbeit und der nach Aussen abgegebenen Wärmemenge, während das System aus dem einen in den anderen der beiden Zustände übergeht.

Ist der Endzustand des Systems und sein Anfangszustand der gleiche, oder hat, wie man sagt, das System einen *Kreisprocess* durchgemacht, so ist die Summe der geleisteten äusseren Arbeit und der nach Aussen abgegebenen Wärmemenge gleich Null; es ist dann, wie man sich ausdrückt, Wärme in Arbeit oder umgekehrt *verwandelt*.

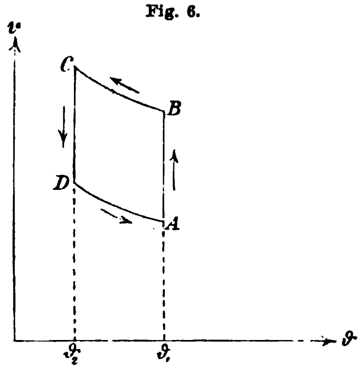
Solche Kreisprocesse werden wir jetzt näher zu betrachten haben.

§ 2.

Es ist bekannt, dass eine Gasmasse sich erwärmt, wenn sie zusammengedrückt wird, und sich abkühlt, wenn man sie sich ausdehnen lässt. An diese Thatsache wollen wir anknüpfen.

Wir wollen uns eine Gasmasse denken, die in einem mit einem Stempel versehenen Cylinder sich befindet. Bei den Zuständen, die, wie wir annehmen werden, die Gasmasse durchläuft, soll dieselbe sich immer im Gleichgewicht oder dem Gleichgewicht unendlich nahe befinden; dazu gehört auch, dass die Temperatur bis auf unendlich kleine Unterschiede überall dieselbe ist. Diese Temperatur kann aber, so stellen wir uns vor, durch Wärme, die man von Aussen zu- oder nach Aussen ableitet, beliebig geändert werden, und auch der Druck des Gases kann beliebig geändert werden dadurch, dass man den Stempel durch Gewichte mehr oder weniger beschwert. Der jedesmalige Zustand des Gases ist dann bestimmt durch die Werthe zweier von einander unabhängiger Variabeln; wir können als diese annehmen die Temperatur ϑ und das Volumen v; der auf die Flächeneinheit bezogene Druck p ist eine Function von v und ϑ. Die Zustandsänderungen, welche das Gas erfährt, wenn v und ϑ geändert werden, kann man sich veranschaulichen, indem man v und ϑ als die rechtwinkligen Coordinaten in einer Ebene betrachtet; einem jeden Zustande entspricht dann ein Punkt, einem jeden Processe, dem das Gas unterworfen wird, eine Linie, die der Punkt durchläuft, einem Kreisprocesse eine in sich zurücklaufende Linie.

Fig. 6.



Wir wollen nun einen Kreisprocess verfolgen, der durch die Linie $ABCDA$ dargestellt ist. Für die Linie AB soll ϑ gleich der Constanten ϑ_1, für CD $\vartheta = \vartheta_2$ sein, während die Linien BC und DA die Eigenschaft haben sollen, dass bei den entsprechenden Zustandsänderungen des Gases diesem keine Wärme zugeführt oder entzogen wird. Bei dem Processe, der der Linie AB entspricht, bei dem das Gas sich ausdehnt, muss ihm eine Wärmemenge durch Leitung zugeführt werden, da die Temperatur constant bleibt; sie sei q_1; bei dem Processe CD muss ihm eine Wärmemenge entzogen werden; sie sei q_2. Die während des Processes geleistete Arbeit, d. h. das über die Linie $ABCDA$ ausgedehnte Integral

$$\int p\,dv$$

sei a; dann ist nach dem Satze von der Aequivalenz von Wärme und Arbeit:

$$a = q_1 - q_2,$$

wobei a, q_1, q_2 positive Grössen sind. Wir können und wollen uns denken, dass die Wärmemenge q_1 aus einem Körper von der Temperatur ϑ_1 entnommen sei, und dass die Wärmemenge q_2 in einen von der tieferen Temperatur ϑ_2 fliesse; wir wollen diese Körper durch R_1, R_2 bezeichnen und *Wärmereservoirs* nennen. Andere Aenderungen als Temperaturänderungen sollen in ihnen nicht vorkommen und diese sollen als unendlich klein zu betrachten sein in Folge der Grösse ihrer Massen.

Wird der gedachte Kreisprocess n mal nach einander ausgeführt, wo n eine beliebige positive ganze Zahl bedeutet, so wird die äussere Arbeit A geleistet, dem R_1 die Wärmemenge Q_1 entzogen, dem R_2 die Wärmemenge Q_2 zugeführt, wenn

$$A = na, \quad Q_1 = nq_1, \quad Q_2 = nq_2,$$

woraus auch folgt

$$A = Q_1 - Q_2.$$

Wir wollen uns a sehr klein, n sehr gross denken; durch passende Wahl von n kann dann dem A jeder beliebige positive Werth gegeben werden. Unsere *Maschine*, wie wir die gedachte Vorrichtung nennen wollen, kann eine beliebige positive äussere Arbeit A leisten, entzieht dabei aber dem R_1 die proportionale positive Wärmemenge Q_1 und führt dem R_2 die proportionale positive Wärmemenge Q_2 zu.

Wir können in unseren Formeln, ohne sonst etwas zu ändern, für n aber auch eine negative ganze Zahl setzen, wodurch A, Q_1, Q_2 negativ werden. Wir können das, da der beschriebene einfache Kreisprocess bei unserer Maschine ein *umkehrbarer* ist. Der Process, der dadurch dargestellt ist, dass der Punkt, dessen Coordinaten v, ϑ sind, die Linie $ADCBA$ durchläuft, ist die Umkehrung des vorher gedachten; bei ihm wird die äussere Arbeit $-a$ geleistet, dem R_1 die Wärmemenge $-q_1$ entzogen, dem R_2 die Wärmemenge $-q_2$ zugeführt. Denken wir uns diesen Process n mal — wo n eine positive ganze Zahl ist — ausgeführt, nennen wir A die geleistete äussere Arbeit, Q_1 die dem R_1 entzogene, Q_2 die dem R_2 zugeführte Wärmemenge, so ist

$$A = -na, \quad Q_1 = -nq_1, \quad Q_2 = -nq_2,$$

Gleichungen, die aus den obigen entstehen, wenn man $-n$ an Stelle von n setzt.

§ 3.

Denken wir uns nun eine zweite Maschine, welche äussere Arbeit durch Kreisprocesse liefert, bei denen sie Wärme aus R_1 aufnimmt und solche an R_2 abgiebt. Während sie die positive äussere Arbeit A leistet, möge sie von R_1 die Wärmemenge Q_1' aufnehmen und an R_2 die Wärmemenge Q_2' abgeben, während Q_1 und Q_2, wie früher, die entsprechenden Grössen bei der erstgedachten Maschine sind. Nachdem durch die zweite Maschine die Arbeit A geleistet ist, möge durch die erste die Arbeit $-A$ geleistet werden. Es hat dann ein Kreisprocess stattgefunden, durch welchen die äussere Arbeit Null geleistet, dem R_1 die Wärmemenge $Q_1' - Q_1$ entzogen, dem R_2 die Wärmemenge $Q_2' - Q_2$ zugeführt ist. Nach dem Satze von der Aequivalenz von Wärme und Arbeit müssen diese Wärmemengen einander gleich sein; nach dem *Carnot'schen Principe* können sie nicht negativ sein.

Durch unmittelbare Leitung wird positive Wärme stets von wärmeren zu kälteren Körpern übergeführt; das Carnot'sche Princip sagt aus, dass auch durch Vermittelung irgend eines Systems, welches Kreisprocesse erleidet, durch welche keine äussere Arbeit geleistet wird, nie positive Wärme aus einem kälteren Körper in einen wärmeren übergeleitet werden kann. Auf unseren Fall angewendet, ergiebt dieses Princip unmittelbar, dass $Q_1' - Q_1$ oder $Q_2' - Q_2$ nicht negativ sein kann.

Sind die Kreisprocesse der zweiten Maschine, wie die der ersten, umkehrbare, so gelten auch die Betrachtungen, die aus den angestellten entstehen, wenn man die beiden Maschinen gegen einander vertauscht; es kann dann auch $Q_1 - Q_1'$ oder, was dasselbe ist, $Q_2 - Q_2'$ nicht negativ sein, d. h. es muss sein

$$Q_1' = Q_1, \quad Q_2' = Q_2.$$

Wir haben hiernach den Satz:

Wenn eine Maschine äussere Arbeit leistet durch umkehrbare Kreisprocesse, bei denen sie aus R_1 Wärme aufnimmt und an R_2 Wärme abgiebt, so sind die Wärmemengen Q_1 und Q_2, welche einer gewissen Arbeit entsprechen, von der Natur der Maschine im Uebrigen unabhängig und nur bedingt durch die Temperaturen ϑ_1 und ϑ_2 und durch A. Nach den Betrachtungen, die wir für *eine* Maschine durchgeführt haben, ist $Q_1 : Q_2$ von A unabhängig;*) es gilt das also allgemein für die Maschinen der bezeichneten Art und für alle diese ist

$$\frac{Q_1}{Q_2} = f(\vartheta_1, \vartheta_2),$$

wo f eine unbekannte Function der beiden angegebenen Argumente bedeutet.

§ 4.

Das Carnot'sche Princip erlaubt diese Function f von zwei Argumenten auszudrücken durch zwei Werthe einer Function von einem Argument. Denken wir uns drei Wärmereservoirs R_1, R_2, R_3, deren Temperaturen $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ sind, und nehmen wir an, dass

$$\vartheta_1 > \vartheta_2 > \vartheta_3.$$

Durch einen umkehrbaren Kreisprocess — zu dem etwa die beschriebene Gasmaschine dienen möge — werde zuerst dem R_1 die Wärmemenge Q_1 entzogen, dem R_2 die Menge Q_2' zugeführt, dann durch einen zweiten dem R_2 die Menge Q_2 entzogen, dem R_3 die Menge Q_3' zugeführt, endlich durch einen dritten dem R_3 die Menge Q_3 entzogen, dem R_1 die Menge Q_1' zugeführt. Von den sechs Grössen Q können drei, etwa Q_1, Q_2, Q_3 beliebig gewählt werden; die drei anderen sind dann bestimmt durch die Gleichungen:**)

$$\frac{Q_1}{Q_2'} = f(\vartheta_1, \vartheta_2),$$

$$\frac{Q_2}{Q_3'} = f(\vartheta_2, \vartheta_3),$$

$$\frac{Q_1'}{Q_3} = f(\vartheta_1, \vartheta_3).$$

Ueber die Grössen, über welche verfügt werden kann, werde nun so verfügt, dass erstens

$$Q_2 = Q_2'$$

und dass zweitens die ganze äussere Arbeit gleich Null, d. h.

$$Q_1 - Q_1' + Q_2 - Q_2' + Q_3 - Q_3' = 0,$$

also

$$Q_1 - Q_1' = Q_3' - Q_3.$$

Der Erfolg des ganzen Processes ist dann der, dass ohne Leistung von Arbeit die Wärmemenge $Q_1 - Q_1'$ oder $Q_3' - Q_3$ aus dem Reservoir R_1 in das Reservoir R_3 übergeleitet ist. Nach dem Carnot'schen Principe kann diese nicht negativ sein. Der ganze Process ist aber

*) Denn wenn man n variirt, ändert sich A, nicht aber $Q_1 : Q_2$. D. H.

**) Die dritte dieser Gleichungen ist offenbar gleichbedeutend mit:

$$\frac{Q_3}{Q_1'} = f(\vartheta_3, \vartheta_1). \qquad \text{D. H.}$$

umkehrbar. Wird er umgekehrt, so behalten die sechs Grössen Q dieselben absoluten Werthe, bekommen aber die entgegengesetzten Vorzeichen. Auch dabei dürfen die genannten Differenzen nicht negativ werden; sie müssen also gleich Null sein; d. h. es muss sein

$$Q_1 = Q_1',$$
$$Q_3 = Q_3'.$$

Mit Hülfe hiervon ergiebt sich

$$f(\vartheta_1, \vartheta_2) = \frac{f(\vartheta_1, \vartheta_3)}{f(\vartheta_2, \vartheta_3)}.$$

Wir wollen nun ϑ_3 als eine willkührliche Constante*), ϑ_1 und ϑ_2 aber als Variable ansehen; $f(\vartheta_1, \vartheta_3)$ ist dann eine Function der *einen* Variabeln ϑ_1, $f(\vartheta_2, \vartheta_3)$ *dieselbe* Function von ϑ_2. Bezeichnen wir durch T eine gewisse positive Function von ϑ, durch T_1, T_2 ihre Werthe für $\vartheta = \vartheta_1$ und $\vartheta = \vartheta_2$, so haben wir also

$$f(\vartheta_1, \vartheta_2) = \frac{T_1}{T_2}.$$

Für einen umkehrbaren Kreisprocess, bei welchem dem R_1 die Menge Q_1 entzogen, dem R_2 die Menge Q_2 zugeführt wird, ist daher

$$\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} = 0.$$

§ 5.

Jetzt können wir die Definition der Temperatur, die wir bisher sehr unvollständig gegeben haben (S. erste Vorlesung), vervollständigen. Wir haben ein Merkmal für die Gleichheit der Temperaturen zweier Körper angegeben: wenn nach dem Zusammenbringen zweier Körper ihre Zustände sich nicht ändern, so haben sie gleiche Temperatur. Aber über die *Grösse* des Unterschiedes oder des Verhältnisses zweier Temperaturen haben wir Nichts gesagt. Wir haben bisher die Temperatur durch Ausdehnung von Quecksilber gemessen; ebenso gut hätten wir die Ausdehnung oder irgend eine andere Veränderung durch die Wärme eines anderen Körpers benutzen können, wenn sie nur bei der Erwärmung immer in gleichem *Sinne* vor sich geht. Viel besser ist es aber, die Definition der Temperatur unabhängig von den Eigenschaften eines bestimmten Körpers zu geben. Dann werden die Gesetze der Wärmewirkungen die einfachste Form annehmen und sie werden am leichtesten zu finden sein. Das erreichen wir, indem wir die Temperatur der Function T gleich setzen. Wir wollen T die *absolute Temperatur* nennen; die Temperatur, für die $T = 0$ ist, haben wir dann als den absoluten Nullpunkt der Wärme zu bezeichnen.

---

*) Der Werth dieser Constanten ist für die Bestimmung von $f(\vartheta_1, \vartheta_2)$ ganz gleichgültig, da er sich im Zähler und Nenner fortheben muss. D. H.

Nach der aufgestellten Definition hat man, um *Messungen* über absolute Temperaturen aufzustellen, den folgenden Weg einzuschlagen.

Es seien R_1 und R_2 zwei Körper, deren absolute Temperaturen T_1 und T_2 sind. Das Instrument, welches man gebraucht, ist irgend eine Maschine, die durch umkehrbare Kreisprocesse Wärme in Arbeit verwandeln kann, indem sie von R_1 Wärme aufnimmt und in R_2 Wärme überführt. Man messe die Wärmemengen Q_1 und Q_2, die bei einem solchen Kreisprocess resp. von R_1 aufgenommen und an R_2 abgegeben werden; man hat dann

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{Q_1}{Q_2}.$$

Wenn $T_2 = 0$ ist, dann ist $Q_2 = 0$; d. h. einem Körper, dessen absolute Temperatur Null ist, kann durch Aufwand von Arbeit keine Wärme mehr entzogen werden, und überhaupt auf keine Weise; wir werden sagen können, dass dann keine Wärme mehr in dem Körper enthalten ist.

Nur das *Verhältniss* zweier Werthe von T ist nach der obigen Gleichung messbar. Um T vollständig zu definiren, könnten wir den Werth von T für *eine* Temperatur beliebig wählen oder auch die Differenz der Werthe von T für *zwei* Temperaturen beliebig festsetzen. Das Letztere wollen wir thun. Wir bezeichnen die Werthe von T für die Temperaturen, die man 0^0 C und 100^0 C nennt, durch T_0 und T_{100} und setzen fest, dass

$$T_{100} - T_0 = 100.$$

§ 6.

Der durch die Gleichung

$$\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} = 0$$

ausgesprochene Satz, welcher uns soeben zur Definition der absoluten Temperatur geführt hat, erlaubt eine Verallgemeinerung, die wir nun ableiten wollen.

Wir denken uns eine Maschine M, die durch Kreisprocesse Wärme in Arbeit verwandeln kann, indem sie von den Wärmereservoirs

$$R_1, R_2, \ldots . R_n,$$

deren absolute Temperaturen

$$T_1 > T_2 > \ldots . > T_n$$

sind, die Wärmemengen

$$Q_1, Q_2, \ldots . Q_n$$

aufnimmt.

Wir denken uns daneben eine zweite Maschine m, die durch *umkehrbare* Kreisprocesse Wärme in Arbeit verwandeln kann, indem sie von *zwei* Reservoirs Wärme aufnimmt.

Nachdem mit der ersten Maschine der bezeichnete Process ausgeführt ist, denken wir uns mit der zweiten die folgenden bewirkt. Zuerst werden R_1 und R_2 benutzt und dabei diesen die Wärmemengen q_1, q_2' zugeführt, dann R_2, R_3 und ihnen q_2, q_3' zugeführt, u. s. f. Zuletzt werden R_{n-1}, R_n benutzt und ihnen q_{n-1}, q_n' zugeführt. Diese Processe sollen dabei so geleitet werden, dass

$$\begin{aligned} Q_2 &= q_2 + q_2', \\ Q_3 &= q_3 + q_3', \\ &\dots\dots\dots, \\ Q_{n-1} &= q_{n-1} + q_{n-1}', \end{aligned}$$

und dass die durch die beiden Maschinen im Ganzen geleistete Arbeit gleich Null, d. h. dass

$$q_1 - Q_1 = Q_n - q_n'$$

ist.*) Es ist das möglich; denn diese $n-1$ Gleichungen in Verbindung mit den $n-1$ Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{q_1}{T_1} &+ \frac{q_2'}{T_2} = 0 \\ \frac{q_2}{T_2} &+ \frac{q_3'}{T_3} = 0 \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{q_{n-1}}{T_{n-1}} &+ \frac{q_n'}{T_n} = 0 \end{aligned}$$

erlauben gerade die $2(n-1)$ Grössen q und q' zu bestimmen.

Nun lässt sich das Carnot'sche Princip anwenden. Es sagt aus, dass $q_1 - Q_1$ oder $Q_n - q_n'$ nicht positiv sein kann. Die Addition des letzten Systemes von Gleichungen giebt bei Rücksicht auf die Gleichungen für $Q_2, \dots Q_{n-1}$:

$$\frac{q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} + \dots + \frac{Q_{n-1}}{T_{n-1}} + \frac{q_n'}{T_n} = 0.$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} + \dots + \frac{Q_n}{T_n} &= \frac{Q_1 - q_1}{T_1} + \frac{Q_n - q_n'}{T_n} \\ &= (Q_1 - q_1)\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_n}\right). \end{aligned}$$

Da nun $T_1 > T_n$, so ist der zweite Factor auf der rechten Seite dieser Gleichung negativ; der erste kann nach dem Carnot'schen Princip nicht negativ sein. Daraus folgt

*) Das Resultat aller Processe besteht also ausschliesslich in der Ueberführung der (nothwendig negativen) Wärme $q_1 - Q_1 = Q_n - q_n'$ aus R_n in R_1. D. H.

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} + \cdots + \frac{Q_n}{T_n} \leq 0.$$

Diese Ungleichung spricht den sogenannten *zweiten Hauptsatz* der Wärmelehre in seiner allgemeinsten Form aus. Als *ersten Hauptsatz* bezeichnet man den Satz von der Aequivalenz von Wärme und Arbeit.

§ 7.

Um nun eine wichtige Anwendung des zweiten Hauptsatzes zu machen, denken wir uns mit irgend einem System einen Kreisprocess nach Art des eben betrachteten ausgeführt.

Die Wärmemengen dQ sollen dabei von unendlich vielen Wärmereservoirs geliefert werden, und zwar die einzelne Wärmemenge dQ, die dem Systeme zufliessen soll, während es die Temperatur T hat, von einem Reservoir, das die Temperatur $T + \varepsilon$ besitzt, wo ε eine unendlich kleine Grösse ist, die aber dasselbe Vorzeichen wie dQ haben muss und also mit diesem sein Vorzeichen wechselt. Der zweite Hauptsatz lehrt dann, dass

$$\int \frac{dQ}{T+\varepsilon} \leq 0.$$

Nun denke man sich den Kreisprocess umkehrbar und in umgekehrter Richtung ausgeführt. Die Zeichen dQ und ε sollen dabei dieselben Werthe wie früher bezeichnen, sodass dQ nun die Wärmemenge ist, die dem System bei der Temperatur T durch ein Reservoir von der Temperatur $T - \varepsilon$ *entzogen* wird; dann giebt der zweite Hauptsatz

$$\int \frac{dQ}{T-\varepsilon} > 0.$$

Da nun ε unendlich klein ist, so ist bis auf unendlich kleine Grössen höherer Ordnung

$$\frac{1}{T \pm \varepsilon} = \frac{1}{T} \mp \frac{\varepsilon}{T^2}$$

und daher sind $\int \frac{dQ}{T+\varepsilon}$ und $\int \frac{dQ}{T-\varepsilon}$ von $\int \frac{dQ}{T}$ nur um unendlich Kleines verschieden. Die beiden Ungleichungen zeigen also, dass, wenn man nur Endliches berücksichtigt,

$$\int \frac{dQ}{T} = 0.$$

Statt dessen können wir sagen: Wird das System aus einem gewissen Anfangszustand in einen gewissen Endzustand einmal auf *einem*, dann auf einem *anderen* umkehrbaren Wege übergeführt, so hat

$$\int \frac{dQ}{T}$$

für beide Wege denselben Werth.

Ist der Zustand des Systems durch eine beliebige Zahl von Variabeln charakterisiert, so folgt hieraus die Existenz einer gewissen Function dieser Variablen in ähnlicher Weise, wie aus einem ähnlichen Satze die Existenz der Function derselben Variabeln, die wir die Energie des Systems genannt haben, folgte. (Vgl. S. 52). In der That muss es eine (eindeutige, aber mit einer additiven willkührlichen Constanten behaftete) Function geben, welche die Eigenschaft hat, dass die Differenz der Werthe, die sie für den Anfangs- und Endzustand hat, jenem Integral gleich ist. Diese Function ist von Clausius die *Entropie* des Systems genannt worden.

Bezeichnet S diese Entropie, so ist also

$$dS = \frac{dQ}{T}.$$

Die Betrachtungen, die uns auf den Begriff der Entropie hier geführt haben, können offenbar auch auf den Fall ausgedehnt werden, dass die Temperatur der verschiedenen Theile des Systems eine verschiedene ist; man kann dann

$$dS = \sum \frac{dQ}{T}$$

setzen, wo die Summe sich auf die Theile bezieht, welche verschiedene Temperatur T haben. Die Entropie S ist, wenn die Zustände des Systems von beliebig vielen Variabeln abhängen, eine Function dieser Variabeln, wie es auch die Energie U ist. Zu beachten ist aber, dass, während der Begriff der Energie sich auf alle Veränderungen anwenden lässt, welche ein System von Körpern erleidet, der Begriff der Entropie sich nur auf *umkehrbare* Processe bezieht.

Sechste Vorlesung.

Anwendungen der beiden Hauptsätze. — Zustand des Systems bestimmt durch zwei Variable, als deren eine die Temperatur genommen wird. — Ausdrücke für Energie und Entropie. — Fall, dass das Differential der äusseren Arbeit dasjenige der Temperatur nicht enthält. — Freie Energie, auch bei beliebig vielen Variabeln. — System nach Aussen abgeschlossen. — Umkehrbare, nicht umkehrbare Processe. — Wachsthum der Entropie. — Adiabatische, isothermische Processe. — Thermische Ausdehnung eines Körpers. — Specifische Wärme bei constantem Druck, bei constantem Volumen und bei anderen Bedingungen. — Gasförmiger Körper. — Gay Lussac- und Mariotte'sches Gesetz. — Messung der absoluten Temperatur. — Messung des Verhältnisses $C_p : C_v$ aus der Beobachtung adiabatischer Processe, insbesondere aus der Schallgeschwindigkeit. — Ideelle und wirkliche Gase.

§ 1.

Wir haben die beiden Hauptsätze der mechanischen Wärmetheorie kennen gelernt und zwei mit diesen Sätzen verbundene Begriffe: den der *Energie U* und den der *Entropie S*. Sie beziehen sich auf ein System, das verschiedene Zustände durchlaufen kann, während ihm von Aussen Arbeit dW und Wärme dQ zugeführt wird. Die Zustände dachten wir uns charakterisirt durch eine beliebige Zahl von Variabeln, von denen U und S Functionen sind. Immer ist dann, wenn die Indices 0 und 1 sich auf zwei Zustände beziehn,

$$U_1 - U_0 = \int_0^1 (dW + dQ)$$

und, wenn die Veränderungen auf umkehrbarem Wege geschehen,

$$S_1 - S_0 = \int_0^1 \frac{dQ}{T}.$$

Nun sollen Anwendungen der beiden Hauptsätze der mechanischen Wärmelehre auf verschiedene Processe gemacht werden, die in den Körpern stattfinden können, und mit Hülfe derselben Beziehungen abgeleitet werden zwischen den Grössen, die bei diesen Processen in Betracht kommen.

Wir wollen uns ein System von Körpern denken — das sich auch auf *einen* Körper reducieren kann — welches Zustände durchläuft, die durch *zwei* von einander unabhängige Variable bestimmt sind. Die eine von diesen soll die absolute Temperatur T sein, wobei vorausgesetzt ist, dass alle Punkte des Systems dieselbe Temperatur haben. Die andre Variable wollen wir x nennen und uns vorbehalten, über ihre Bedeutung je nach dem zu betrachtenden Falle zu verfügen. Der Zustand des Systems, also die Werthe von x und T sollen geändert werden können durch Zufuhr von Wärme und dadurch, dass man äussere Kräfte auf Theile des Systems wirken und Arbeit leisten lässt. Um zu bewirken, dass T um dT und x um dx wachse, sei es nöthig, die Wärmemenge dQ zuzuführen und die äufseren Kräfte die Arbeit dW leisten zu lassen. Wir setzen

$$\begin{aligned} dQ &= X dx + Y dT, \\ dW &= A dx + B dT \end{aligned}$$

und nehmen an, dass X, Y, A, B Functionen von x und T, d. h. bestimmt sind, wenn x und T bestimmte Werthe haben. Es ist das durchaus nicht immer der Fall (z. B. da nicht, wo die Reibung eine Rolle spielt); findet es statt, so ist der Process, bei dem x und T sich ändern, ein *umkehrbarer*; man braucht nämlich dem dQ und dem dW nur die entgegengesetzten Werthe zu geben, um zu bewirken, dass auch dx und dT die entgegengesetzten Werthe erhalten. Zur näheren Erläuterung des Gesagten diene folgendes Beispiel: Es sei das System ein schwerer Körper und eine horizontale Unterlage, auf welcher jener in einer Richtung mit Reibung verschiebbar ist. Es sei x die Verschiebung, die der Körper von einer gewissen Anfangslage aus erlitten hat. Dann ist

$$dW = A dx,$$

wo der absolute Werth von A gleich der Reibung ist; das Vorzeichen von A ist aber immer dem von dx gleich, da die Reibung immer der Bewegung entgegenwirkt. Es ist daher A *nicht* eine Function von x und T, sondern hängt von dem Vorzeichen von dx ab. Solche Fälle also schliessen wir aus, indem wir annehmen, dass X, Y, A, B Functionen von x und T sind. Zwischen diesen Functionen werden die zwei Hauptsätze zwei Relationen ergeben.

§ 2.

Es sei U die Energie des Systems: eine Function von x und T. Dann ist

$$\begin{aligned} dU &= dQ + dW \\ &= (X + A) dx + (Y + B) dT, \end{aligned}$$

also

$$\frac{\partial U}{\partial x} = X + A$$

und

$$\frac{\partial U}{\partial T} = Y + B,$$

somit

$$\frac{\partial (X+A)}{\partial T} = \frac{\partial (Y+B)}{\partial x}.$$

Das ist eine dieser beiden Relationen.

Es sei ferner S die Entropie des Systems: ebenfalls eine Function von x und T. Dann ist für eine umkehrbare Veränderung:

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{X}{T}\,dx + \frac{Y}{T}\,dT,$$

also

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{X}{T},$$

$$\frac{\partial S}{\partial T} = \frac{Y}{T},$$

folglich

$$\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{X}{T}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Y}{T}\right);$$

das ist die zweite von den Relationen, auf welche ich hingewiesen habe.

Es lassen sich dieselben in verschiedene bemerkenswerthe Formen bringen. Die Entwicklung der letzten giebt

$$\frac{X}{T} = \frac{\partial X}{\partial T} - \frac{\partial Y}{\partial x};$$

mit Hinzuziehung der ersten hat man also die Doppelgleichung

$$\frac{X}{T} = \frac{\partial X}{\partial T} - \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial T}.$$

Andrerseits findet man aus der letzten auch

$$\frac{1}{T}\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{X}{T}\right);$$

man hat also auch die Doppelgleichung

$$\frac{1}{T}\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\partial X}{\partial T} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial T}\right).$$

Aus A, B, X, Y kann man U und S finden und zwar offenbar in verschiedenen Formen ausgedrückt, da zwischen jenen vier Functionen zwei Relationen bestehn. Wir haben

$$\frac{\partial U}{\partial x} = A + X,$$

$$\frac{\partial U}{\partial T} = B + Y.$$

Es sei nun x_0 ein beliebig gewählter constanter Werth von x; dann ist

$$U = U_0 + \int_{x_0}^{x} dx (A + X),$$

$$U_0 = \int^{T} dT (B_0 + Y_0),$$

wobei U_0, B_0, Y_0 die Functionen von T bezeichnen, in welche U, B, Y übergehn, wenn man darin x_0 für x setzt, und wobei in dem ersten Integral T als constant zu betrachten ist. Bei entsprechender Bezeichnung hat man

$$S = S_0 + \int_{x_0}^{x} dx \left(\frac{X}{T}\right),$$

$$S_0 = \int^{T} dT \frac{Y_0}{T}.$$

Die Ausdrücke von U und S kann man schreiben

$$U = U_0 + \int_{x_0}^{x} dx \left\{A + T\left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial T}\right)\right\},$$

$$S = S_0 + \int_{x_0}^{x} dx \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial T}\right).$$

Man sieht hieraus, dass U und S (bis auf die additiven Constanten, welche sie enthalten) bestimmt sind, wenn A und B als Functionen von x und T und Y_0 als Function von T gegeben ist.

Umgekehrt sind A, B, X, Y durch U und S ausgedrückt in den Gleichungen

$$X = T\frac{\partial S}{\partial x},$$

$$Y = T\frac{\partial S}{\partial T},$$

$$A = \frac{\partial U}{\partial x} - T\frac{\partial S}{\partial x},$$

$$B = \frac{\partial U}{\partial T} - T\frac{\partial S}{\partial T}.$$

§ 3.

Wenn x in gewisser Weise gewählt ist, so lassen sich U und S, also auch A, B, X, Y durch *eine* Function ausdrücken. Es sei so gewählt, dass

$$B = 0,$$

also

$$dW = A\,dx$$

ist*), dann ist

$$\frac{\partial U}{\partial T} = T\frac{\partial S}{\partial T}.$$

Man setze

$$S = -\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial T};$$

dann wird

$$\frac{\partial U}{\partial T} = -T\frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial T^2},$$

aber $T\frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial T^2}$ ist ein vollständiger Differentialquotient, nämlich

$$T\frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial T^2} = \frac{\partial}{\partial T}\left(T\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial T} - \mathfrak{F}\right);$$

man genügt also dieser Gleichung durch

$$U = \mathfrak{F} - T\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial T}$$

und hat so U und S durch die *eine* Function $\mathfrak{F}$ ausgedrückt. Dieselbe ist von Helmholtz**) die *freie Energie* des Systems genannt worden; es folgt aus den Gleichungen für S und U

$$\mathfrak{F} = U - TS,$$

woraus man ersieht, dass in $\mathfrak{F}$ ein Glied von der Form

$$a + bT$$

enthalten sein muss, wo a und b willkührliche Constanten sind, da in U und S je eine willkührliche additive Constante vorkommt. Für X, Y, A, B hat man

$$A = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x},$$

$$B = 0,$$

$$X = -T\frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial x \partial T},$$

$$Y = -T\frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial T^2}.$$

Auch der Begriff der freien Energie findet Anwendung auf den Fall, dass eine beliebige Anzahl von Variabeln nöthig sind zur Charakterisirung der betrachteten Zustände des Systems. Es seien diese x_1, x_2, ... und T; wieder seien dQ und dW die Wärmemenge und die Arbeitsgrösse, die dem Systeme zugeführt werden müssen, wenn x_1, x_2, ... T wachsen um dx_1, dx_2, ... dT, und es sei

---

*) D. h. dass Temperaturänderung bei constantem x nicht mit Arbeitsleistung oder -Verbrauch verbunden ist. Die bezeichnete Wahl ist immer möglich, weil sich jede mechanische Arbeit ohne Einführung des Temperaturbegriffs definiren lässt. D. H.

**) H. v. Helmholtz, Sitzungsber. der Berl. Akad. vom 2. Febr., 27. Juni 1882. p. 22 u. 825. Gesammelte Abhdl. II, p. 968, 1883.

$$dQ = X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + Y dT,$$
$$dW = A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + \cdots, \text{*)}$$

wo die Coefficienten der Differentiale Functionen von $x_1, x_2, \ldots T$ sind. Auch hier ist dann

$$dU = dQ + dW,$$
$$dS = \frac{dQ}{T},$$

woraus folgt

$$\begin{array}{lll}
\frac{\partial U}{\partial x_1} = X_1 + A_1, & \frac{\partial S}{\partial x_1} = \frac{X_1}{T}, & A_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}(U - TS), \\
\frac{\partial U}{\partial x_2} = X_2 + A_2, & \frac{\partial S}{\partial x_2} = \frac{X_2}{T}, & A_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}(U - TS), \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
\frac{\partial U}{\partial T} = Y, & \frac{\partial S}{\partial T} = \frac{Y}{T}. &
\end{array}$$

Setzt man wieder

$$\mathfrak{F} = U - TS,$$

also

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial T} = \frac{\partial U}{\partial T} - T\frac{\partial S}{\partial T} - S,$$

so folgt aus den beiden letzten der obigen Gleichungen

$$S = -\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial T}$$

und dann weiter

$$U = \mathfrak{F} - T\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial T}.$$

Daraus ergiebt sich

$$\begin{array}{lll}
A_1 = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x_1}, & X_1 = -T\frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial x_1 \partial T}, & Y = -T\frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial T^2}. \\
A_2 = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x_2}, & X_2 = -T\frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial x_2 \partial T}. & \\
\cdots & \cdots &
\end{array}$$

§ 4.

Bevor wir specielle Annahmen über die Beschaffenheit des betrachteten Systems einführen, wollen wir noch einige Schlüsse ziehn unter der Voraussetzung gewisser äusserer Bedingungen, denen das System unterworfen sein kann.

Stellen wir uns vor, dass dem Systeme weder Wärme noch Arbeit zugeführt wird, also

$$dQ = 0 \quad \text{und} \quad dW = 0$$

oder, wie wir sagen wollen, dass das System nach Aussen abgeschlossen ist; dann ist

$$U = \text{const.},$$
$$S = \text{const.}$$

*) Also auch hier $B = 0$. D. H.

Sind die möglichen Zustände des Systemes durch nur *zwei* Variable bedingt, so sind diese durch diese beiden Gleichungen bestimmt; es können gar keine Veränderungen stattfinden. Anders ist es aber, wenn mehr als zwei Variable in Betracht kommen; dann sind Veränderungen möglich, für die aber die beiden Differentialgleichungen

$$dQ = 0,$$
$$dW = 0$$

oder die beiden Integralgleichungen

$$U = \text{const.},$$
$$S = \text{const.}$$

gelten. Dabei ist aber vorausgesetzt, dass die Veränderungen, die stattfinden, *umkehrbare* sind.

§ 5.

Es ist schon darauf hingewiesen, dass es *nicht-umkehrbare* Processe giebt; als ein Beispiel eines solchen ist die mit *Reibung* stattfindende Verschiebung eines schweren Körpers auf einer horizontalen Unterlage angeführt (S. 63); andre Beispiele sind: die *Auflösung* eines Salzes in Wasser, die durch einen elektrischen Funken zu bewirkende *Vereinigung* von Wasserstoff und Sauerstoff zu Wasser, die *Temperatur-Ausgleichung*, die stattfindet, wenn man zwei Körper von verschiedener Temperatur zusammenbringt. Der Begriff der Energie ist unmittelbar auch auf Processe, die nicht-umkehrbar sind, anwendbar; nicht so der Begriff der Entropie, der ja nur auf umkehrbare Processe sich bezieht. (Vgl. S. 61.) Auch auf nicht-umkehrbare Processe wird aber der Begriff der Entropie anwendbar, wenn die Veränderungen, die durch dieselben erzeugt werden, auch auf umkehrbarem Wege hervorgebracht werden können. Das ist möglich in dem Falle des mit Reibung auf einer horizontalen Unterlage beweglichen Körpers; man braucht den Körper nur aus seiner Anfangslage durch äussere Kräfte um eine beliebige Strecke von der Unterlage zu *heben*, dann die horizontale Bewegung auszuführen und endlich ihn auf die Unterlage herabzulassen; die Reibung ist dann eliminirt und der ganze Vorgang ein umkehrbarer. Auch die Auflösung eines Salzes in Wasser kann auf umkehrbarem Wege geschehn; man muss das Wasser in Dampf von genügender Verdünnung übergehn lassen, den Dampf mit dem Salz in Berührung bringen und nun seine Condensation durch Vermehrung des Druckes bewirken. Einen solchen Process werden wir später ausführlich erörtern; ich führe ihn hier an, als ein Beispiel dafür, dass Veränderungen, die auf nicht-umkehrbarem Wege geschehn, oft auch auf umkehrbarem Wege hervorgebracht werden können.

Denken wir uns ein nach Aussen hin abgeschlossenes System, in dem nicht-umkehrbare Processe stattfinden, aber nur Zustände vorkommen, welche aus einander auch durch umkehrbare Processe entstehen können. Jedem Zustande des Systems entspricht dann ein gewisser Werth der Entropie: *der* Werth, der sich ergiebt, wenn man annimmt, dass die Zustände auf umkehrbarem Wege geändert werden. Die Energie U bleibt in dem gedachten Falle constant; nicht so die Entropie S. Nehmen wir an, es gehe das System aus einem Zustande, auf den sich der Index 0 beziehen soll, über in einen, auf den sich der Index 1 bezieht. Den nicht-umkehrbaren Process, durch den dieser Uebergang geschieht, denken wir uns zu einem *Kreis*process ergänzt durch Hinzufügung von *umkehrbaren* Veränderungen, bei denen dann aber gewisse Einwirkungen auf das System von Aussen stattfinden müssen. Ueber diesen Kreisprocess ausgedehnt, ist nach S. 62*)

$$\int \frac{dQ}{T} = \int_0^1 \frac{dQ}{T} + S_0 - S_1 .$$

Dieser Ausdruck ist nach dem zweiten Hauptsatz (S. 60) kleiner oder gleich Null; andererseits ist, da bei dem Uebergange von 0 zu 1 keine äussere Einwirkung stattfinden soll,

$$\int_0^1 \frac{dQ}{T} = 0;$$

mithin

$$S_0 - S_1 \leqq 0,$$

d. h.

$$S_1 \geqq S_0 .$$

Das Resultat ist also, dass bei dem abgeschlossenen Systeme kein Process stattfinden kann, bei dem die Entropie verkleinert würde.

Clausius**) hat diese Schlüsse auch auf das Weltall angewendet und die Sätze ausgesprochen: Die Energie der Welt ist constant. Die Entropie der Welt strebt einem Maximum zu.

Das setzt aber voraus, dass alle Veränderungen, die in der Welt stattfinden, auf umkehrbarem Wege vor sich gehen *könnten.****)

Wir haben oben vorausgesetzt, dass bei dem Uebergange des Systems aus dem Zustande 0 in den Zustand 1 weder Wärme noch

*) Hierbei bedeutet dQ die Wärmemenge, welche im Laufe des Kreisprocesses aus einem Reservoir von der Temperatur T in das System übergegangen ist. Während des ersten, nichtumkehrbaren Theils des Kreisprocesses ist $dQ = 0$, weil derselbe ohne jede äussere Einwirkung verläuft. D. H.

**) Clausius, Poggendorff's Ann. 125. p. 400.

***) Bis jetzt ist noch keine Veränderung aufgefunden worden, bei der diese Voraussetzung zu einem Widerspruch mit der Erfahrung führt. D. H.

Arbeit ihm von Aussen zugeführt werde; bei unseren Schlüssen haben wir aber nur benutzt, dass die zugeführte Wärme $dQ = 0$ ist. Sobald dieses der Fall ist, muss also

$$S_1 \geqq S_0$$

sein. Die genannte Bedingung wird erfüllt sein, wenn das System in eine für Wärme undurchdringliche Hülle eingeschlossen ist, oder auch, wenn der Process so schnell vor sich geht, dass während desselben keine merkliche Wärmemenge nach Aussen abgegeben oder von Aussen aufgenommen werden kann. Man nennt solche Processe, für die $dQ = 0$ ist, *adiabatische*.

§ 6.

Wir wollen auch den Fall in's Auge fassen, dass während des Ueberganges des Systemes vom Zustande 0 in den Zustand 1 die Temperatur dieselbe bleibt, der Process ein sogenannter *isothermischer* ist. Das wird näherungsweise der Fall sein, wenn die Umgebung des Systems eine constante Temperatur besitzt und der Process sehr langsam vor sich geht. Dieselbe Betrachtung, die wir für ein abgeschlossenes System durchgeführt haben, führt dann auch hier zu der Ungleichung

$$\int_0^1 \frac{dQ}{T} + S_0 - S_1 \leqq 0;$$

hier aber ist nicht $dQ = 0$; dafür ist T constant und das Integral gleich

$$\frac{Q}{T},$$

wenn man unter Q die Wärmemenge versteht, die dem Systeme von Aussen zugeführt ist. Man hat dann also

$$\frac{Q}{T} + S_0 - S_1 \leqq 0.$$

Die Wärmemenge Q wollen wir anders ausdrücken. Es sei W die dem System von Aussen zugeführte Arbeit, so dass

$$Q + W = U_1 - U_0.$$

Die Ungleichung wird dann

$$(U_1 - TS_1) - (U_0 - TS_0) \leqq W,$$

also, wenn $\mathfrak{F}$ wieder die freie Energie bedeutet,

$$\mathfrak{F}_1 - \mathfrak{F}_0 \leqq W.$$

Es ist hierdurch ein Kriterium dafür gegeben, ob ein Process (z. B. die Auflösung eines Körpers oder eine gewisse chemische Umsetzung) bei gleichbleibender Temperatur „*von selbst*“, d. h. ohne Zufuhr von positiver äusserer Arbeit geschehen kann. Findet eine solche nicht statt, so ist

$$W \leqq 0;$$

es muss also sein:

$$\mathfrak{F}_1 \leqq \mathfrak{F}_0,$$

d. h. ein isothermischer Process, durch den die freie Energie vergrössert wird, kann unmöglich von selbst eintreten. Es ist die Behauptung ausgesprochen, dass nur solche chemische Processe von selbst eintreten könnten, bei welchen positive Wärme entwickelt würde, bei denen also

$$Q < 0 \quad \text{oder} \quad U_1 < U_0$$

wäre.*) Das ist aber nicht richtig.

§ 7.

Wir wollen nun bestimmte Processe, zuerst die *thermische Ausdehnung* eines Körpers, untersuchen.

Unser System sei die Masseneinheit eines im Gleichgewicht befindlichen Körpers, auf dessen Oberfläche der überall gleiche, senkrechte Druck p wirkt; v sei das Volumen. Wir gehen aus von den Gleichungen (S. 63)

$$dQ = X\,dx + Y\,dT,$$
$$dW = A\,dx + B\,dT,$$

und müssen zunächst über die Bedeutung von x verfügen. Immer ist

$$\text{für } dx = 0 \qquad \frac{dQ}{dT} = Y,$$

d.h. immer ist Y die specifische Wärme des Körpers bei constantem x; diejenige specifische Wärme, welche man im Sinne hat, wenn man schlechthin von der specifischen Wärme eines Körpers redet, und welche durch directe Messungen für die meisten Körper bestimmt ist, ist die specifische Wärme bei *constantem Druck*. Diese wollen wir in unsere Rechnungen einführen und zu diesem Zwecke

$$x = p$$

setzen; dann wird (wie wir schreiben wollen)

$$Y = C_p.$$

Um die Bedeutung von X zu finden, führen wir die specifische Wärme bei *constantem Volumen* C_v ein; es ist nämlich:

$$C_v = \frac{dQ}{dT} \qquad \text{für } dv = 0,$$

d. h. $$\text{für } \frac{\partial v}{\partial p}\,dp + \frac{\partial v}{\partial T}\,dT = 0,$$

also durch Benutzung des Werthes von dQ:

*) Das „Princip der grössten Arbeit“ von Berthelot. D. H.

$$C_v = -X \frac{\frac{\partial v}{\partial T}}{\frac{\partial v}{\partial p}} + C_p$$

oder

$$X = (C_p - C_v) \frac{\frac{\partial v}{\partial p}}{\frac{\partial v}{\partial T}}.$$

Ferner ist

$$dW = -p\,dv = A\,dp + B\,dT,$$

also, da $dv = \frac{\partial v}{\partial p} dp + \frac{\partial v}{\partial T} dT$,

$$A = -p \frac{\partial v}{\partial p},$$

$$B = -p \frac{\partial v}{\partial T},$$

woraus folgt:

$$\frac{\partial B}{\partial p} - \frac{\partial A}{\partial T} = -\frac{\partial v}{\partial T}.$$

Zwischen X, Y, A, B haben wir zwei Relationen in verschiedenen Formen abgeleitet. Wir wählen diese (S. 64)

$$X = T\left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial T}\right),$$

und

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = T \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial T}\right).$$

Daraus folgt hier

$$C_p - C_v = -T \frac{\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)^2}{\frac{\partial v}{\partial p}}$$

und

$$\frac{\partial C_p}{\partial p} = -T \frac{\partial^2 v}{\partial T^2}.$$

Die Ausdrücke für U und S (S. 65)

$$U = U_0 + \int_{x_0}^{x} dx \left\{A + T\left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial T}\right)\right\},$$

$$U_0 = \int^{T} dT\,(B_0 + Y_0),$$

$$S = S_0 + \int_{x_0}^{x} dx \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial T}\right),$$

$$S_0 = \int^{T} dT \frac{Y_0}{T}$$

werden hier bei entsprechender Bezeichnung:

$$U = U_0 - \int_{p_0}^{p} dp \left\{ p \frac{\partial v}{\partial p} + T \frac{\partial v}{\partial T} \right\},$$

$$U_0 = \int^{T} d\,T \left(C_{p_0} - p_0 \frac{\partial v_0}{\partial T} \right) = \int^{T} d\,T\, C_{p_0} - p_0 v_0 ,$$

$$S = S_0 - \int_{p_0}^{p} dp \frac{\partial v}{\partial T},$$

$$S_0 = \int^{T} \frac{d\,T}{T} C_{p_0}.$$

Die Differentialgleichung für eine *adiabatische* Veränderung, nämlich*)

$$\frac{d\,T}{dx} = -\frac{T}{Y} \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial T} \right)$$

wird

$$\frac{d\,T}{dp} = \frac{T}{C_p} \frac{\partial v}{\partial T}.$$

Neben den specifischen Wärmen C_p und C_v hat man bisweilen noch andere Arten der specifischen Wärme zu betrachten: solche, bei denen $\frac{dp}{dT}$ einen irgendwie gegebenen Werth hat. Es sei C eine solche; so ist

$$C = \frac{dQ}{dT} = C_p + X \frac{dp}{dT},$$

wo für $\frac{dp}{dT}$ eben der gegebene Werth zu setzen ist. Substituirt man hier für X seinen Werth

$$X = T \left(\frac{\partial B}{\partial p} - \frac{\partial A}{\partial T} \right) = -T \frac{\partial v}{\partial T},$$

so erhält man

$$C = C_p - T \frac{\partial v}{\partial T} \frac{dp}{dT}.$$

§ 8.

Jetzt wollen wir annehmen, der Körper sei ein *Gas.* Regnault hat durch seine Versuche gefunden, dass für ein solches C_p sich *nicht* mit p ändert, dass also

$$\frac{\partial C_p}{\partial p} = 0.$$

Dieser Satz ist von hoher theoretischer Wichtigkeit; aus ihm und der zweiten unserer beiden Relationen (S. 72) folgt

*) Aus $dQ = 0$ folgt

$$\frac{d\,T}{dx} = -\frac{X}{Y}$$

und daraus die Gleichung im Text. D. H.

$$\frac{\partial^2 v}{\partial T^2} = 0,$$

also

$$v = aT + b,$$

wo a und b von T unabhängig sind, aber von p abhängen können. Wir nehmen an, dass sowohl v als auch T beliebig klein gemacht werden kann; es muss dann, da v und T beide positiv, a positiv und b Null sein;*) also

$$v = aT,$$

d. h. v ist mit T proportional. Wir sind so zu einem praktisch anwendbaren Mittel gekommen, um Temperaturänderungen zu messen an den Volumenvergrösserungen, die ein Gas bei constantem Drucke durch dieselben erfährt. Sind v_0 und v_{100} die Volumina bei 0° C und 100° C, und setzt man, wie wir es schon früher (S. 58) gethan haben, fest, dass die Differenz der beiden Werthe von T bei diesen beiden Temperaturen gleich 100 ist, so ist

$$\frac{v_{100} - v_0}{100} = a,$$

also

$$T = v \frac{100}{v_{100} - v_0}.$$

Verschiedene Gase müssen übereinstimmende Werthe von T liefern; das stimmt überein mit dem sogenannten *Gay-Lussac'schen Gesetze*, nach dem, wie man zu sagen pflegt, alle Gase bei gleicher Erwärmung und gleichbleibendem Drucke sich um gleich viel ausdehnen. Nach den Versuchen von Regnault und von Magnus ist bei dem Drucke *einer* Atmosphäre für atmosphärische Luft und Wasserstoff sehr nahe

$$\frac{v_{100} - v_0}{v_0} = 0{,}3665 = \frac{1}{2{,}73};$$

daraus folgt für die Temperatur von 0° C

$$T_0 = \frac{v_0}{v_{100} - v_0} 100 = 273.$$

Auf diese Weise haben wir eine Bestimmung der Lage des absoluten Nullpunkts der Wärme gewonnen.

Die Grösse, die wir mit a bezeichnet haben, ist von p abhängig. Das *Mariotte'sche Gesetz* lehrt diese Abhängigkeit kennen; nach ihm ist bei gleicher Temperatur v mit $\frac{1}{p}$ proportional; wir haben also

$$v = \frac{RT}{p},$$

wo R von p und T unabhängig, also nur durch die chemische Natur des Gases bedingt ist; offenbar ist R mit dem specifischen Gewicht desselben, bei einer festen Temperatur und einem festen Druck gemessen, umgekehrt proportional.

*) Denn wäre z. B. b positiv, so würde für kleine Werthe von v T negativ. D. H.

§ 9.

Führen wir nun diesen Werth von v in die Gleichungen, die wir abgeleitet haben, ein. Es ist

$$\frac{\partial v}{\partial T} = \frac{R}{p},$$

$$\frac{\partial v}{\partial p} = -\frac{v}{p},$$

daher wird die erste von unseren beiden Relationen S. 72

$$C_p - C_v = R.$$

Die Differenz $C_p - C_v$ ist also von p und T unabhängig; da, wie schon benutzt, C_p nicht von p abhängt, so hängt auch C_v nicht davon ab. Nach Versuchen von Regnault ist C_p auch von T nicht abhängig, und daher auch C_v nicht; es sind also C_p und C_v Constanten, die mit der Constanten R in der gefundenen Relation stehen.

Für U und S findet sich nach den Formeln S. 73

$$U = U_0 = T(C_p - R) + \text{const} = TC_v + \text{const},$$

$$S = C_p \log T - R \log p + \text{const}.$$

Die adiabatische Differentialgleichung ist

$$\frac{dT}{dp} = \frac{R}{C_p} \cdot \frac{T}{p}$$

oder, wenn

$$\frac{C_p}{C_v} = \gamma,$$

also

$$R = (\gamma - 1)\, C_v$$

gesetzt wird:

$$\frac{dT}{dp} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{T}{p},$$

woraus folgt

$$\log T = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \log p + \text{const},$$

eine Gleichung, die keine andere ist, wie

$$S = \text{const},$$

welche ja allgemein für umkehrbare adiabatische Processe gilt. Zu dieser Gleichung können wir die identischen hinzufügen

$$\gamma \log v + \log p = \text{const}$$

und

$$\log T + (\gamma - 1) \log v = \text{const}.$$

Die Werthe der mit const bezeichneten Grössen lassen sich ermitteln, wenn man ein Paar zusammengehöriger Werthe von zweien der drei Grössen p, T, v kennt und auch γ bekannt ist.

Den Werth von γ für verschiedene Gase hat man mit Hülfe dieser Gleichungen aus Versuchen*) zu ermitteln gesucht, bei denen die Temperaturänderung gemessen wurde, die eine Gasmasse erfuhr, wenn sie plötzlich zusammengedrückt oder ausgedehnt wurde. Solche Versuche sind schwierig, weil sie so angeordnet sein müssen, dass die Wärmemenge zu vernachlässigen ist, die die Luftmasse während der Dichtigkeitsänderung an die Gefässwände abgiebt oder von ihnen aufnimmt. Mit Anwendung aller möglichen Vorsichtsmassregeln fand Röntgen für trockene atmosphärische Luft $\gamma = 1{,}405$.

§ 10.

Ein indirecter Weg zur Bestimmung von γ, der manche Vortheile bietet, beruht darauf, dass die *Schallgeschwindigkeit* in einem Gase von dem Werthe von γ abhängig ist.

Ist μ die Dichtigkeit, p der Druck in einem Gase, so ist, wie in der Hydrodynamik gelehrt wird,**) das Quadrat der Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer unendlich kleinen Bewegung

$$\omega^2 = \frac{dp}{d\mu}.$$

Beim Schalle wechseln die verschiedenen Dichtigkeiten so schnell, dass die Wärme, die durch Verdichtung erregt oder durch Verdünnung verbraucht ist, nicht merklich an die Umgebung abgegeben oder von ihr ersetzt wird; es ist also die Beziehung zwischen p und μ als die adiabatische anzunehmen. Da

$$\mu = \frac{1}{v},$$

so ist also

$$\log p - \gamma \log \mu = \text{const},$$

also

$$\frac{dp}{p} = \gamma \frac{d\mu}{\mu}$$

oder

$$\frac{dp}{d\mu} = \gamma \frac{p}{\mu} = \gamma v p.$$

(Bei sehr langsamen Schwingungen würde $T = \text{const}$, d. h. $\frac{p}{\mu} = \text{const}$, also

$$\frac{dp}{d\mu} = \frac{p}{\mu} = vp$$

sein.)

Ist ω die Geschwindigkeit des Schalles, so ist also

$$\omega^2 = \gamma R T.$$

Nach Moll und van Beck***) ist für trockene atmosphärische Luft

*) Unter Anderen Röntgen, Pogg. Ann. *141*, p. 552, 1870 und *148*, p. 580. 1873.

**) Kirchhoff, Mechanik, 23. Vorlesung, § 1.

***) Schröder van der Kolk, Pogg. Ann. *124*. p. 453. 1865.

bei 0^0 C, oder $T = 273$:

$$\omega = 332{,}8 \text{ m in 1 sec.}$$

R findet man aus

$$R = \frac{vp}{T},$$

wo p und T beliebig gewählt sein können; man wähle die Temperatur von 0^0 C, p gleich dem Drucke einer Atmosphäre; dann ist

$$p = \frac{1033 \text{ gr}}{1 \text{ qcm}} \frac{9{,}809 \text{ m}}{(1 \text{ sec})^2},$$

wenn 1 gr die *Masse* eines Grammes bedeutet; der Werth von v ist dabei nach Regnault

$$v = \frac{773{,}3 \text{ ccm}}{1 \text{ gr}}.$$

Daraus folgt

$$vp = 78340 \left(\frac{1 \text{ m}}{1 \text{ sec}}\right)^2$$

und, da $T = 273$,

$$R = 286{,}9 \left(\frac{1 \text{ m}}{1 \text{ sec}}\right)^2 \frac{1}{1^0 \text{ C}}$$

und weiter

$$\gamma = \frac{\omega^2}{RT} = 1{,}414,$$

in naher Uebereinstimmung mit dem Resultat von Röntgen.

§ 11.

Einen dritten Weg zur Bestimmung von γ bietet die Gleichung

$$C_p - C_v = R,$$

die sich schreiben lässt

$$C_p \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) = R.$$

Den Werth von R haben wir eben berechnet; C_p kann man aus vorliegenden Beobachtungen berechnen. Unter Zugrundelegung einer anderen Einheit der Wärmemenge, als wir sie hier benutzt haben, ist von Regnault die specifische Wärme der Luft

$$c_p = 0{,}2375$$

gefunden worden. Die Einheit der Wärmemenge, auf welche diese Zahl sich bezieht, ist diejenige, welche die Masseneinheit Wasser von 0^0 C um die Einheit der Temperaturänderung erwärmt, wobei dann die specifische Wärme des Wassers bei 0^0 C $= 1$ wird, während wir hier als Einheit die Wärmemenge benutzt haben, welche äquivalent der Einheit der Arbeit ist. Ist $\varkappa$ das mechanische Aequivalent *jener* Wärmeeinheit, so ist daher

$$C_p = \varkappa \, c_p.$$

Nun ist nach Joule

$$\varkappa = \frac{423{,}5 \text{ m}}{1^0 \text{ C}} \frac{9{,}809 \text{ m}}{(1 \text{ sec})^2} = 4154 \left(\frac{1 \text{ m}}{1 \text{ sec}}\right)^2 \frac{1}{1^0 \text{ C}}.$$

Daraus ergiebt sich C_p, und mittelst des Werthes von R:

$$\gamma = 1{,}410.$$

Wir machen noch einige numerische Angaben über die Temperaturerhöhung, die eintritt, wenn die Luft zusammengedrückt wird, und zwar so plötzlich, dass keine merkliche Wärme aufgenommen oder verbraucht wird. Die Luft habe zunächst das Volumen v_0 und die Temperatur $T_0 = 273$, sie werde dann plötzlich auf das Volumen v comprimirt. Wir wollen die Temperatur T bestimmen, welche sie dann besitzt. Wir benutzen die Formeln (S. 75)

$$\log T + (\gamma - 1) \log v = \text{const},$$
$$\log T_0 + (\gamma - 1) \log v_0 = \text{const}.$$

Die Constante ist in beiden Gleichungen dieselbe. Durch Subtraction erhält man

$$\log\left(\frac{T}{T_0}\right) = (\gamma - 1) \log\left(\frac{v_0}{v}\right),$$

folglich

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{v_0}{v}\right)^{\gamma - 1} = \left(\frac{v_0}{v}\right)^{0{,}41},$$

wenn $\gamma = 1{,}410$ gesetzt wird.

Man findet hieraus:

$$\text{für } \frac{v}{v_0} = \frac{1}{2} \quad \text{ist} \quad T - T_0 = 90^\circ \text{ C}$$
$$\frac{1}{4} \qquad 209^\circ \text{ C}$$
$$\frac{1}{10} \qquad 429^\circ \text{ C.}$$

Man sieht, dass bei plötzlicher starker Compression die Luft in Glühhitze versetzt werden kann. Auf dieser Thatsache beruht das pneumatische Feuerzeug.

Die wirklichen Gase zeigen, wenn auch kleine, Abweichungen von dem Mariotte'schen Gesetze; ohne Zweifel ist bei ihnen auch das Regnault'sche Gesetz, nach dem c_p constant sein soll, nicht in aller Strenge erfüllt, wenn auch directe Messungen noch keine Veränderlichkeit von c_p gezeigt haben. Gase, von denen man annimmt, dass sie in aller Strenge die Eigenschaften besitzen, die wir hier entwickelt haben, nennt man *ideelle* Gase. Man kann annehmen, dass im Allgemeinen ein jedes Gas einem ideellen um so mehr sich nähert, je geringer seine Dichtigkeit wird.

Siebente Vorlesung.

Körper von beliebigem Aggregatzustand. — Anwendung auf flüssiges Wasser. — Fester cylindrischer Körper, der einem Zuge in der Längsrichtung unterworfen ist. — Energie eines Gases. — Joule'scher Ausströmungsversuch. — Abweichungen von dem ideellen Gaszustand, nachgewiesen durch die Versuche von W. Thomson und Joule, mittelst Ausströmen durch einen Pfropf von Watte. — Modification des Gesetzes von Mariotte und Gay Lussac.

§ 1.

Die Gleichungen der mechanischen Wärmetheorie, aus denen wir die Eigenschaften eines ideellen Gases abgeleitet haben, wollen wir nun auf einen anderen Körper, sei er fest, flüssig oder gasförmig, anwenden; *die* Voraussetzung aber behalten wir bei, dass der Druck ein überall gleicher und senkrechter sei. Wir nehmen zuerst die Gleichung (S. 72)

$$\frac{\partial C_p}{\partial p} = -T\frac{\partial^2 v}{\partial T^2}$$

oder

$$\frac{\partial c_p}{\partial p} = -\frac{1}{\varkappa}T\frac{\partial^2 v}{\partial T^2}.$$

Für ein ideelles Gas schlossen wir aus dieser Gleichung und der Annahme

$$\frac{\partial c_p}{\partial p} = 0,$$

dass v mit T proportional oder $\frac{\partial v}{\partial T}$ von T unabhängig sein müsse. Bei einem Körper, bei dem dieses nicht der Fall ist, muss auch c_p mit p variiren, und, wenn wir $\frac{\partial^2 v}{\partial T^2}$ kennen, so können wir $\frac{\partial c_p}{\partial p}$ berechnen.

Eine sehr auffallende Veränderlichkeit des $\frac{\partial v}{\partial T}$ mit der Temperatur bietet das Wasser dar, das bei etwa 4° C ein Maximum der Dichtigkeit zeigt. Wenden wir auf dieses unsere Gleichung an.

Setzt man

$$
\begin{aligned}
T - 273 &= t, \\
1^0\,\mathrm{C} &= 1, \\
1\,\mathrm{gr} &= 1, \\
1\,\mathrm{cm} &= 1.
\end{aligned}
$$

so ist nach Kopp*) zwischen $t = 0$ und $t = 25$

$$v = \frac{1}{0{,}999877}\left\{1 - \frac{6{,}1045}{10^5}\,t + \frac{7{,}7183}{10^6}\,t^2 - \frac{3{,}734}{10^8}\,t^3\right\}.$$

Das Minimum von v ist gleich 1 und findet statt bei $t = 4{,}08$.

Hieraus folgt für t nahe Null

$$\frac{\partial^2 v}{\partial T^2} = 1{,}54 \cdot 10^{-5}.$$

Berechnen wir nun dc_p für $dp = 1$ Atmosphäre, also

$$dc_p = -\frac{1}{\varkappa}\,T\,\frac{\partial^2 v}{\partial T^2}\cdot 1\ \mathrm{Atm}.$$

Wir haben

$$T = 273$$

und, wenn noch

$$
\begin{aligned}
1\,\mathrm{sec} &= 1, \\
1\,\mathrm{Atm} &= 1033 \cdot 980{,}9 = 1{,}013 \cdot 10^6, \\
\varkappa &= 4{,}154 \cdot 10^7
\end{aligned}
$$

gesetzt wird, so ist

$$dc_p = -1{,}025 \cdot 10^{-4}.$$

Das c_p für $t = 0$, welches für kleine Drucke gleich 1 gesetzt ist, würde bei einer Steigerung des Druckes um 100 Atmosphären nur etwa um 0,01 abnehmen; das ist zu wenig, als dass es bei dem Versuche hätte bemerkt werden können.

§ 2.

Betrachten wir jetzt die andere von unseren beiden Relationen (S. 72)

$$C_p - C_v = -T\,\frac{\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)^2}{\frac{\partial v}{\partial p}}$$

oder

$$c_p - c_v = -\frac{1}{\varkappa}\,T\,\frac{\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)^2}{\frac{\partial v}{\partial p}}.$$

Die Bedeutung der hier vorkommenden Differentialquotienten ist die, dass

$\frac{1}{v}\,\frac{\partial v}{\partial T}$ der thermische Ausdehnungscoefficient,

$\frac{1}{v}\,\frac{\partial v}{\partial p}$ die Zusammendrückbarkeit

*) Pogg. Ann. 72, p. 1 u. 223. 1847.

des Körpers ist. Kennt man diese, so kann man hiernach $c_p - c_v$, also auch c_p und c_v berechnen. Es ist immer

$$c_p \geq c_v,$$

da $\frac{\partial v}{\partial p}$ stets negativ ist, welches auch das Vorzeichen von $\frac{\partial v}{\partial T}$ sei. Bei Wasser ist bei etwa 4° C

$$\frac{\partial v}{\partial T} = 0,$$

also

$$c_v = c_p.$$

Berechnen wir c_v für Wasser bei 0° C. Nach der schon benutzten Formel von Kopp ist hier

$$\frac{\partial v}{\partial T} = -6{,}1 \cdot 10^{-5}.$$

Nach Grassi ist die Zusammendrückbarkeit des Wassers

$$\frac{\partial v}{\partial p} = 5{,}0 \cdot 10^{-5} \frac{1}{1 \text{ Atm}} = 5{,}0 \cdot 10^{-11}.$$

Hieraus folgt, da

$$c_p = 1,$$

$$c_v = 0{,}9995.$$

Auf ähnlichem Wege findet man nach Versuchen von Regnault aus:

$$c_p = 1{,}0016; \quad c_v = 0{,}9918 \text{ für } 25^0 \text{ C},$$

$$= 1{,}0042; \quad = 0{,}9684 \quad 50^0 \text{ C}.$$

Auch an die Differentialgleichung eines adiabatischen Processes (S. 73)

$$\frac{dT}{dp} = \frac{T}{C_p} \frac{\partial v}{\partial T}$$

oder

$$\frac{dT}{dp} = \frac{T}{\varkappa c_p} \frac{\partial v}{\partial T}$$

wollen wir ein paar Bemerkungen knüpfen. Sie zeigt, dass eine Vermehrung des Druckes Erwärmung oder Abkühlung bewirkt, je nachdem $\frac{\partial v}{\partial T}$ positiv oder negativ ist. Beides kommt beim Wasser vor. Bei diesem fand Joule für dp = etwa 25 Atmosphären

$$dT = -0^0{,}008 \text{ C} \quad \text{für} \quad t = 1^0{,}2 \text{ C}$$

$$= +0{,}020 \quad\quad = 11^0{,}7$$

$$= +0{,}054 \quad\quad = 30^0{,}0$$

in fast völliger Uebereinstimmung mit der Theorie.

§ 3.

Wie für eine Flüssigkeit gelten die entwickelten Formeln auch für einen *festen* Körper, wenn dieser einem überall gleichen, senkrechten Druck ausgesetzt ist. Ganz ähnliche Gleichungen kann man aber auch für den Fall bilden, dass ein cylindrischer fester Körper (ein Stab, Draht oder Faden) nur in der Richtung seiner Länge einem Zuge ausgesetzt wird. Nennen wir P diesen Zug, etwa das Gewicht, das an das untere Ende des Drahtes gehängt ist, während das obere fest ist; l sei die Länge. Nehmen wir P und T als Variable, die den Zustand des Körpers bedingen, d. h. setzen wir in den allgemeinen Formeln (S. 63) $x = P$. Wir haben dann

$$dW = P\,dl,$$

d. h.

$$A = P\frac{\partial l}{\partial P},$$

$$B = P\frac{\partial l}{\partial T},$$

daraus:

$$\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial T} = \frac{\partial l}{\partial T}.$$

Ferner ist

$$Y = C_P.$$

Um X zu finden, führen wir C_l ein; es ist

$$C_l = \frac{dQ}{dT} \quad \text{für} \quad dl = 0,$$

d. h. für

$$\frac{\partial l}{\partial P}dP + \frac{\partial l}{\partial T}dT = 0,$$

woraus folgt

$$C_l = -X\frac{\frac{\partial l}{\partial T}}{\frac{\partial l}{\partial P}} + C_P,$$

also

$$X = (C_P - C_l)\frac{\frac{\partial l}{\partial P}}{\frac{\partial l}{\partial T}}.$$

Daher nehmen die Gleichungen (S. 64)

$$X = T\left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial T}\right),$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = T\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial T}\right)$$

die Form an:

$$C_P - C_l = T\frac{\left(\frac{\partial l}{\partial T}\right)^2}{\frac{\partial l}{\partial P}},$$

$$\frac{\partial C_P}{\partial P} = T\frac{\partial^2 l}{\partial T^2}.$$

Für eine adiabatische Aenderung erhält man aus der Gleichung S. 73

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{T}{Y}\left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial T}\right)$$

die Gleichung

$$\frac{dT}{dP} = -\frac{T}{C_p}\frac{\partial l}{\partial T}.$$

Die letzte Gleichung zeigt, dass mit der Vermehrung des Zuges eine Abkühlung oder Erwärmung eintritt, je nachdem der Körper bei der Erwärmung (und gleichbleibendem Zuge) sich ausdehnt oder zusammenzieht. Es ist dies von Joule durch Versuche an Metallstäben und, in besonders auffallender Weise, an Streifen vulkanisirten Kautschuks bestätigt worden. Die Metalle dehnten sich bei der Erwärmung aus und zeigten demgemäss bei der Vermehrung des Zuges Abkühlung. Ebenso verhielt sich Kautschuk, wenn die Spannung einen gewissen Werth nicht überstieg; that sie das, so wurde das Verhalten des Kautschuks das entgegengesetzte: er zog sich zusammen bei der Erwärmung und erwärmte sich bei weiterer Vermehrung des Zuges. Was die *Grösse* der beobachteten Temperaturänderungen betrifft, so stimmte diese, auch bei den Metallen, nicht ganz mit den theoretisch berechneten überein; ja bei den Versuchen mit Metalldrähten fand Edlund diese Temperaturänderungen nur etwa gleich zwei Drittel der theoretisch berechneten. Der Grund hiervon ist noch nicht aufgeklärt; man kann argwöhnen, dass die Temperaturmessungen, welche mit Hülfe eines sogenannten Thermoelementes ausgeführt wurden, nicht zuverlässig genug waren; oder, dass eine der Annahmen, die bei der Berechnung der Formel gemacht wurden, nicht richtig war; oder endlich, dass die Formel sich auf diese Versuche nicht anwenden lässt, weil bei ihnen innere Reibung, bleibende Dehnung oder elastische Nachwirkung eine wesentliche Rolle spielen und bewirken, dass der Vorgang nicht als ein umkehrbarer betrachtet werden darf.*)

§ 4.

Wir wollen noch einmal zur Betrachtung des Falles zurückkehren, dass unser Körper die Masseneinheit eines *Gases* ist, um gewisse Betrachtungen kennen zu lernen, die man über die Abweichungen eines solchen von einem ideellen Gase angestellt hat.

Die Energie U der Masseneinheit eines *ideellen* Gases ist, wie wir gesehen haben,

$$U = C_v \cdot T,$$

wo C_v eine Constante ist. Lässt man das Gas ohne Zufuhr von Arbeit und Wärme ein anderes Volumen annehmen, so bleibt U sich gleich, es muss also auch T dasselbe bleiben. Hängt aber U ausser von T auch von v ab, wie es bei einem wirklichen Gase genau genommen der Fall ist, so muss unter diesen Umständen T sich

*) Vgl. hierzu H. Haga, Wied. Ann. 15, p. 1, 1882. D. H.

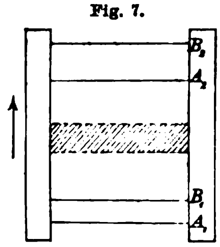
ändern. Um zu sehen, ob das geschieht, hat Joule einen berühmten Versuch angestellt. Er schloss das Gas in ein Gefäss A ein, das durch eine, durch einen Hahn verschliessbare Röhre mit einem zweiten Gefässe B von gleichem Inhalt communicirte, welches luftleer gemacht war. Bei dem Versuch wurde der Hahn geöffnet. Nach kurzer Zeit war die Bewegung durch Reibung zerstört und es hatte das Gas (auf nicht-umkehrbarem Wege) das doppelte Volumen angenommen. Arbeit war dem Gase nicht zugeführt. Um die etwa zugeführte Wärmemenge und gleichzeitig die schliessliche Temperatur des Gases messen zu können, waren beide Gefässe in *eine* Wassermasse gestellt, in welche ein äusserst empfindliches Thermometer tauchte. Bei Versuchen mit atmosphärischer Luft, bei denen der Druck im Gefässe A bis 22 Atmosphären getrieben war, zeigte der Stand dieses Thermometers aber nicht die geringste Veränderung; es verhielt sich die Luft, wie ein ideelles Gas. Es darf das auch nicht Wunder nehmen: die Masse der Luft war zu klein gegen die Masse der Gefässwandungen und des umgebenden Wassers, als dass Temperaturänderungen des letzteren hätten merklich werden können.

§ 5.

Bei anders angeordneten Versuchen, die von Sir W. Thomson und Joule in Gemeinschaft ausgeführt wurden, sind Abweichungen der atmosphärischen Luft von einem ideellen Gase deutlich hervorgetreten.

In einer Röhre von Buchsbaumholz war ein Pfropfen von Watte angebracht, die zwischen zwei durchlöcherten Metallplatten eingepresst war. Durch diesen Pfropfen wurde mit Hülfe einer Druckpumpe ein bleibender Luftstrom hindurchgepresst und auf beiden Seiten Druck und Temperatur gemessen, wenn der Zustand ein stationärer geworden war. Hinter dem Pfropfen war eine kleine Temperaturerniedrigung zu constatiren. Dies war, wie wir sogleich sehen werden, eine Folge davon, dass die Luft sich *nicht* wie ein vollkommenes Gas verhält. Fassen wir die Gasmenge ins Auge, die in einem Augenblick zwischen den Querschnitten A_1 und A_2 liegt, und betrachten den Zuwachs, den die Energie dieser Masse in dem Zeitraum erfährt, in welchem die Masseneinheit Gas durch den Pfropfen getrieben wird. Nach diesem Zeitraum ist dieselbe Gasmasse durch die Querschnitte B_1 und B_2 begrenzt, welche so liegen, dass sowohl zwischen A_1 und B_1, als auch zwischen A_2 und B_2 die Masseneinheit Gas sich befindet. v_1 und v_2 seien die Volumina zwischen A_1 und B_1 einerseits und A_2 und B_2 andererseits;

Fig. 7.



es seien ferner p_1, p_2 die Drucke, T_1, T_2 die Temperaturen hier und dort; dann sind v_1, p_1, T_1 und v_2, p_2, T_2 specielle Werthe der Variabeln, die wir bisher mit v, p, T bezeichnet haben. Die zugehörigen, auf den Fall der Ruhe bezüglichen Werthe der Energie seien U_1 und U_2. U_1 und U_2 können wir dann auch als die Energien der zwischen A_1 und B_1 und zwischen A_2 und B_2 befindlichen Gasmengen betrachten, indem wir die lebendigen Kräfte derselben vernachlässigen, was bei der Langsamkeit der Strömung erlaubt ist. In der Differenz $U_2 - U_1$ haben wir dann den Zuwachs, den die Energie des Gases, das in einem Augenblick zwischen A_1, A_2 liegt, erfährt in dem Zeitraum, den es gebraucht, um in die Lage B_1, B_2 zu kommen, da die Energie der Gasmenge zwischen B_1, A_2 in den beiden Grenzen dieses Zeitraumes, des stationären Zustandes wegen, dieselbe ist. Die Differenz $U_2 - U_1$ ist also gleich der Summe der Arbeit und der Wärmemenge, welche der gedachten Gasmenge in der gedachten Zeit von Aussen zugeführt sind. Die zugeführte Arbeit ist offenbar:

$$p_1 v_1 - p_2 v_2.$$

Die von Aussen zugeführte Wärmemenge ist eine kleine negative Grösse; in dem Pfropfen wird nämlich durch Reibung Wärme erzeugt und ein Theil von dieser wird, auch beim stationären Zustande, durch die Holzröhre hindurchgeleitet werden und in die Atmosphäre entweichen. Bei der geringen Leitungsfähigkeit des Holzes wird aber dieser Theil sehr klein sein und vernachlässigt werden können. Ist das der Fall, so ist die Wärme, welche das strömende Gas an Pfropfen und Röhre abgiebt, gleich Null zu setzen, d. h. es ist:

$$U_2 - U_1 = p_1 v_1 - p_2 v_2.$$

Diese Differenz $U_2 - U_1$ lässt sich aber noch auf andere Weise ausdrücken. Von den Zuständen, auf welche die Indices 2 und 1 sich beziehen, ist in unserem Falle der eine aus dem anderen auf einem nicht-umkehrbaren Wege hervorgegangen; er kann aber auch auf umkehrbarem Wege in ihn verwandelt werden, und da die Aenderung der Energie von dem Wege der Ueberführung unabhängig ist, so können wir $U_2 - U_1$ berechnen aus den Formeln, welche wir bei der Betrachtung umkehrbarer Processe abgeleitet haben. Wir wollen die Rechnung ein wenig dadurch vereinfachen, dass wir die Zustände 2 und 1 als unendlich wenig verschieden von einander annehmen; setzen wir dann

$$U_2 - U_1 = dU, \qquad U_1 = U,$$
$$p_2 - p_1 = dp, \qquad p_1 = p \quad \text{etc.},$$

so haben wir, wenn wir p und T als unabhängige Variable benutzen, nach unseren früheren Betrachtungen auf S. 73

$$dU = -dp\left(p\frac{\partial v}{\partial p} + T\frac{\partial v}{\partial T}\right) + dT\left(C_p - p\frac{\partial v}{\partial T}\right).$$

Die für unseren Versuch abgeleitete Gleichung wird aber

$$dU = -d(pv) = -dp \cdot \left(v + p\frac{\partial v}{\partial p}\right) - dT \cdot p\frac{\partial v}{\partial T};$$

durch Subtraction erhält man daher:

$$\frac{dT}{dp} = \frac{1}{C_p}\left(T\frac{\partial v}{\partial T} - v\right).$$

§ 6.

In der letzten Gleichung bedeutet $-dT$ die Temperaturerniedrigung hinter dem Pfropfen; sie wäre gleich Null, wenn das Gas ein ideelles wäre, weil für ein solches die rechte Seite der Gleichung verschwindet. Thomson und Joule fanden für atmosphärische Luft, wenn

$$T_1 = 273 + 15,$$

$$p_2 = 1 \text{ Atmosphäre}$$

war, folgende zusammengehörige Werthe:

$p_1 - p_2$:	0,43	1,26	4,18 Atm
$T_1 - T_2$:	0,108	0,365	1,10° C,

und daraus

$$\frac{T_1 - T_2}{p_1 - p_2} = 0{,}26.$$

Versuche bei verschiedenen Temperaturen ergaben:

$$\frac{T_1 - T_2}{p_1 - p_2} = \frac{\alpha}{T_1^2}, \qquad \alpha = 0{,}28 \cdot (273)^2.$$

Für Kohlensäure zeigte sich dieselbe Formel erfüllt, wenn

$$\alpha = 1{,}39 \cdot (273)^2$$

gesetzt wurde. Der Umstand, dass $T_1 - T_2$ mit $p_1 - p_2$ proportional ist, erlaubt zu schliessen, dass, wenn man $p_2 - p_1$ unendlich klein $= dp$ macht und den entsprechenden Werth von $T_2 - T_1 = dT$ setzt, auch

$$\frac{dT}{dp} = \frac{\alpha}{T^2}$$

ist. Diese Gleichung nun in Verbindung mit der vorher für $\frac{dT}{dp}$ abgeleiteten giebt:

$$T\frac{\partial v}{\partial T} - v = C_p\frac{\alpha}{T^2}$$

oder

$$\frac{\partial\left(\frac{v}{T}\right)}{\partial T} = C_p\frac{\alpha}{T^4},$$

eine Differentialgleichung für v, als Function von T. Wir multipliciren sie mit dT und integriren, während wir p als constant betrachten. Bei einem ideellen Gase ist C_p von T unabhängig; bei einem wirklichen wird das nicht stattfinden, aber die Aenderungen werden nur klein sein, und man vernachlässigt nur kleine Grössen höherer Ordnung, wenn man dabei C_p als constant betrachtet; dadurch erhält man

$$\frac{v}{T} = -\frac{C_p \alpha}{3} \frac{1}{T^3} + \text{const},$$

wo die Constante der Integration von p abhängig sein kann. Man nimmt an, dass für unendlich grosses T*) jedes Gas sich wie ein ideelles verhält, also

$$\frac{v}{T} = \frac{R}{p}$$

wird; dadurch ergiebt sich

$$v = \frac{RT}{p} - \frac{C_p \alpha}{3} \frac{1}{T^2}.$$

Diese Gleichung stellt auch in befriedigender Weise die Abweichungen vom Mariotte'schen und Gay Lussac'schen Gesetze dar, welche Regnault bei der Kohlensäure durch directe Messungen gefunden hat.

Noch bemerken wir, dass die Gleichung (S. 72)

$$\frac{\partial C_p}{\partial p} = -T \frac{\partial^2 v}{\partial T^2},$$

hiernach giebt:**)

$$\frac{\partial C_p}{\partial p} = 2 C_p \alpha \frac{1}{T^3}$$

oder

$$\log C_p = 2\alpha \frac{p}{T^3} + \text{const.}$$

Die Constante könnte von T abhängen; aber für jedes unendlich kleine p verhält sich jedes Gas wie ein ideelles, ist also seine specifische Wärme unabhängig von T; daher ist es auch diese Constante. Setzt man

$$\text{für } p = 0 \qquad C_p = C_p^0,$$

so ist

$$\log \frac{C_p}{C_p^0} = 2\alpha \frac{p}{T^3}$$

oder auch

$$\log \frac{c_p}{c_p^0} = 2\alpha \frac{p}{T^3}.$$

*) Bei nicht unendlich grossem p. D. H.

**) Sowohl im Manuscript des Verf. als auch in einer Nachschrift dieser Stelle steht hier und in den drei folgenden Gleichungen T^4 statt T^3 rechts im Nenner. D. H.

Achte Vorlesung.

Aenderung des Aggregatzustandes, zunächst durch Verdampfung einer Flüssigkeit. — Verdampfungswärme. — Specifische Wärme „des gesättigten Dampfes", speciell für Wasserdampf. — Berechnung der Dampfdichte aus der Verdampfungswärme und aus der Abhängigkeit der Dampfspannung von der Temperatur, speciell für Wasser. Abweichung vom ideellen Gaszustand. — Energie für ein System von Flüssigkeit und Dampf. — Näherungsformel für die Dampfspannung mit Anwendung auf den Quecksilberdampf, und für die specifische Wärme eines Dampfes.

§ 1.

Es soll jetzt die Aenderung des Aggregatzustandes eines Körpers untersucht werden: zunächst die Verdampfung einer Flüssigkeit und die Condensation eines Dampfes zu Flüssigkeit.

In ein Gefäss, dessen Inhalt nach Willkühr verändert werden kann, etwa in einen, durch einen beweglichen Stempel verschlossenen Cylinder, möge die Masseneinheit einer Flüssigkeit gebracht sein. Je nach der Stellung des Stempels ist ein grösserer oder kleinerer Theil der Flüssigkeit in Dampf übergegangen, der den Raum über der Flüssigkeit erfüllt und hier im Maximum der Dichtigkeit vorhanden ist; sein Druck muss also gleich dem Maximum des Druckes, den der Dampf bei der stattfindenden Temperatur aushalten kann: gleich der *Spannung* des Dampfes sein. Es sei dieser Druck gleich p, eine gewisse Function der einen Variabeln T allein. Als zweite Variable zur Bestimmung des Zustandes des Systems nehmen wir die Masse x des gebildeten Dampfes. Ist s das „specifische Volumen" des Dampfes, σ das der Flüssigkeit, so ist

$$v = sx + \sigma(1 - x)$$

wo auch s und σ reine Temperaturfunctionen sind. Ferner hat man, da

$$dW = -p dv,$$

nach S. 63

$$dW = A dx + B dT,$$

folglich:

$$A = -p\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$B = -p\frac{\partial v}{\partial T},$$

und daraus:

$$\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial T} = \frac{dp}{dT}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{dp}{dT}(s-\sigma).$$

Die Gleichung

$$dQ = Xdx + YdT$$

zeigt weiter, dass X *das* ist, was man die *latente* Wärme des Dampfes oder die *Verdampfungswärme* der Flüssigkeit nennt*), und dass

$$Y = Hx + C(1-x)$$

ist, wo H und C *die* specifischen Wärmen des Dampfes und der Flüssigkeit sind, welche sich auf den Fall beziehn, dass p mit T so variirt, dass es stets der dieser Temperatur entsprechenden Dampfspannung gleich ist.**) Die beiden allgemeinen Gleichungen (S. 64)

$$\frac{X}{T} = \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial T}$$

und

$$\frac{1}{T}\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{X}{T}\right)$$

geben daher hier

$$X = T(s-\sigma)\frac{dp}{dT}$$

und

$$H - C = T\frac{d\left(\frac{X}{T}\right)}{dT}.$$

Hier ist Einheit der Wärmemenge das Aequivalent der Arbeits-Einheit; führen wir die Wärmemenge als Einheit ein, welche die Masseneinheit Wasser von 0° C um die Einheit der Temperaturänderung erwärmt, und setzen wir zu dem Zwecke

$$C = \varkappa c,$$

$$H = \varkappa h,$$

$$X = \varkappa r,$$

so werden diese Gleichungen

$$r = \frac{1}{\varkappa}T(s-\sigma)\frac{dp}{dT},$$

$$h - c = T\frac{d\left(\frac{r}{T}\right)}{dT}.$$

*) D. h. diejenige Wärmemenge, die von Aussen aufgenommen wird, wenn die Masseneinheit der Flüssigkeit bei constanter Temperatur (und folglich constantem Druck) verdampft. D. H.

**) Y ist nämlich die specifische Wärme des Systems für $dx = 0$. Diese specifische Wärme zerfällt in zwei Theile, von denen der eine, Hx, dem dampfförmigen, der andere, $C(1-x)$, dem flüssigen Bestandtheil des Systems zu Gute kommt. H und C hängen nur von der Temperatur ab. D. H.

§ 2.

Als auf ein Beispiel wollen wir diese Gleichungen auf den Wasserdampf anwenden und zunächst zusehn, welche von den in ihnen vorkommenden Grössen für diesen durch Versuche mit Genauigkeit bekannt geworden sind. Zu diesen gehört c, das, wie wir zeigen wollen, gleich c_p, d. h. gleich der specifischen Wärme bei constantem Druck, gesetzt werden kann.

Nach einer früher (S. 73) abgeleiteten Formel haben wir bei den jetzt gebrauchten Zeichen

$$c = c_p - \frac{1}{\varkappa} T \frac{\partial \sigma}{\partial T} \frac{dp}{dT}.$$

Berechnen wir hiernach c für die Temperatur von 100° C. Hier ist $p = 1$ Atmosphäre, ferner hat man nach Regnault

$$\frac{1}{p} \frac{dp}{dT} = \frac{27,2}{760} \cdot \frac{1}{1^0\,C},$$

also

$$\frac{dp}{dT} = \frac{27,2}{760} \cdot 1,013 \cdot 10^6 = 3,624 \cdot 10^4 \cdot \frac{1\,gr}{1\,cm(1\,sec)^2\,1^0\,C},$$

nach Kopp ist für die Ausdehnung des Wassers bei constantem Druck:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial T} = 8,0 \,.\, 10^{-4} \frac{(1\,cm)^3}{1\,gr\;1^0\,C},$$

$$T = 373 \,.\, 1^0\,C.$$

$$\frac{1}{\varkappa} = 2,407 \,.\, 10^{-8} \frac{(1\,sec)^2\,1^0\,C}{(1\,cm)^2},$$

Ueberdies ist nach Regnault

$$c_p = 1,013;$$

daraus folgt

$$c = 1,013 - 0,00026 = 1,01274.$$

Diese Zahlen unterscheiden sich nicht in den Ziffern, die verbürgt werden können, und dürfen daher als gleich betrachtet werden. Aehnlich ist es bei anderen Temperaturen. Nach Regnault ist zu setzen

$$c = c_p = 1 + \frac{4}{10^5} t + \frac{9}{10^7} t^2.$$

Ferner ist nach Regnault

$$r = 606,5 + 0,305\, t - \int_0^t c\, dt$$

und demselben Physiker verdanken wir Tafeln, welche p als Function von t darstellen. Da auch σ bekannt ist, so enthalten unsere beiden Gleichungen nur die zwei Unbekannten h und s, die aus ihnen berechnet werden können. Wenn man sich erlaubt, (mit Clausius) den

Werth von r in folgender Form zu schreiben, welche etwa in dem Intervall von 0° C bis 200° C richtig ist:

$$r = 607 - 0{,}708\,t,$$

so findet man aus

$$h = c + \frac{dr}{dT} - \frac{r}{T}$$

nunmehr:*)

$$h = 1{,}013 - \frac{800{,}3}{273 + t}$$

und bei genauerer Rechnung nahe übereinstimmend hiermit

$$\begin{array}{lll} \text{für} & t = 0 & h = -\,1{,}916 \\ & \phantom{t = {}}100 & \phantom{h = {}}-\,1{,}133 \\ & \phantom{t = {}}150 & \phantom{h = {}}-\,0{,}879. \end{array}$$

Es ist also h („die specifische Wärme des gesättigten Wasserdampfes" nach Clausius) *negativ*. Sehen wir zu, was das besagt. Wenn T wächst, so wächst auch p, aber s nimmt ab; das ist bei allen Dämpfen der Fall. Drückt man eine Menge gesättigten Dampfes auf ein kleineres Volumen zusammen und sorgt durch Zufuhr oder Entziehung von Wärme dafür, dass er gerade gesättigt bleibt, so *steigt* hiernach seine Temperatur. Dass h negativ ist, sagt aus, dass man dabei dem Dampf hat Wärme *entziehen* müssen. Entzieht man ihm keine Wärme, so wird seine Temperatur zu hoch, als dass er gesättigt wäre; er ist *überhitzt*. Wenn man umgekehrt den gesättigten Dampf sich ausdehnen lässt, so muss man ihm Wärme zuführen, damit er gerade gesättigt bleibt, obwohl seine Temperatur abnimmt. Führt man ihm keine Wärme zu, so muss ein Theil desselben sich tropfbar flüssig niederschlagen. Diese zuerst von Clausius gezogene Folgerung ist zuerst von Hirn in sehr einfacher Weise experimentell bestätigt worden. Ein cylinderförmiges Gefäss von Metall war an seinen beiden Enden mit Glasscheiben verschlossen, so dass man hindurchsehen konnte. Dieses Gefäss war mit Wasserdampf von hohem Druck, der vollkommen durchsichtig war, gefüllt. Wurde ein Hahn geöffnet, so strömte ein Theil des Dampfes in die Atmosphäre; der zurückbleibende Dampf dehnt sich aus. Es zeigte sich ein dichter Nebel im Cylinder in Folge davon, dass ein Theil des Dampfes tropfbar flüssig wurde.

---

*) Nach der Regnault'schen Formel ist:

$$c + \frac{dr}{dT} = 0{,}305,$$

also:

$$h = 0{,}305 - \frac{607 - 0{,}708\,t}{273 + t},$$

und daraus die Formel im Text. D. H.

Nicht alle Dämpfe verhalten sich in dieser Beziehung, wie Wasserdampf. Bei Aetherdampf ist h positiv; er zeigt die Nebelbildung bei der Compression und nicht bei der Ausdehnung. Bei Chloroformdampf ist h negativ oder positiv, je nachdem t kleiner oder grösser, als etwa 130° C ist.

§ 3.

Die andere von unseren beiden Relationen (S. 89) wollen wir nun benutzen, um für verschiedene Werthe von t s zu berechnen. Dabei ist es zuerst nöthig, die Werthe von $\frac{dp}{dt}$ zu ermitteln. Das kann geschehn mit Hülfe einer von Regnault gegebenen Tabelle, die die Werthe von p von Grad zu Grad angiebt. Wir gehen von einer bekannten Interpolationsformel aus. Es sei t eine Variable, und $a_0, a_1, a_2, \ldots$ die Werthe einer Function von t für $t = 0, 1, 2, \cdots$. Wir bilden die Differenzen

$$\begin{array}{lll} a_0 & & \\ & a_1 - a_0 & \\ a_1 & & (a_2 - a_1) - (a_1 - a_0) \\ & a_2 - a_1 & \\ a_2 & & \end{array}$$

und bezeichnen dieselben so, dass dieses Schema wird

$$\begin{array}{llll} a_0 & & & \\ & b_0 & & \\ a_1 & & c_0 & \\ & b_1 & & d_0 \\ a_2 & & c_1 & \\ & b_2 & & \\ a_3 & & & \end{array} .$$

Man hat dann:

$$a_1 = a_0 + b_0,$$
$$a_2 = a_0 + 2b_0 + c_0,$$
$$a_3 = a_0 + 3b_0 + 3c_0 + d_0$$

u. s. w.; die Coefficienten sind die sogenannten Binomialcoefficienten. Bildet man den Ausdruck

$$a_0 + tb_0 + \frac{t(t-1)}{1.2} c_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{1.2.3} d_0 + \cdots,$$

so hat dieser demzufolge die Eigenschaft, für $t = 0, 1, 2 \ldots$ die Werthe $a_0, a_1, a_2, \ldots$ anzunehmen. Man benutzt ihn, um die Werthe der Function a für zwischenliegende Werthe des Arguments zu finden. Differentiirt man ihn nach t und setzt dann $t = 0$, so findet man

$$\left(\frac{da}{dt}\right)_{t=0} = b_0 - \frac{c_0}{2} + \frac{d_0}{3} - \cdots$$

und dies ist die Formel, nach welcher man die Differentialquotienten einer Function, die in eine Tafel gebracht ist, berechnen kann.

Nach Regnault sind die Werthe von p und ihre Differenzen (vgl. das obige Schema)

$$\begin{array}{lllll} \text{für } t = 0 & 4,600 & & & \\ & & 0,340 & & \\ 1 & 4,940 & & 0,022 & \\ & & 0,362 & & \\ 2 & 5,302 & & 0,023 & \\ & & 0,385 & & \\ 3 & 5,687 & & & \end{array}$$

Daraus folgt

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)_{t=0} = 0,340 - 0,011 = 0,329.$$

Ebenso findet man für 50° C durch das analoge Schema:

$$\frac{dp}{dt} = 4,580.$$

Einheit des Druckes ist hier der Druck eines Millimeters Quecksilber, — dieselbe, bei welcher der Druck einer Atmosphäre gleich 760 ist. In den Grundeinheiten ausgedrückt ist daher

$$\text{für } t = 0 \quad \frac{dp}{dt} = \frac{0,329}{760}\, 1,013 \,.\, 10^6$$

$$= 438,4 \, \frac{1 \text{ gr}}{1 \text{ cm } (1 \text{ sec})^2 \, 1^0 \text{ C}},$$

$$\text{für } t = 50 \quad \frac{dp}{dt} = \frac{4,580}{760}\, 1,013 \,.\, 10^6$$

$$= 6103 \, \frac{1 \text{ gr}}{1 \text{ cm } (1 \text{ sec})^2 \, 1^0 \text{ C}}.$$

Weiter ist

$$\begin{array}{lll} \text{für } t = 0 & r = 606,5 \,.\, 1^0 \text{ C} & T = 273 \,.\, 1^0 \text{ C} \\ 50 & 571,7 \,.\, 1^0 \text{ C} & 323 \,.\, 1^0 \text{ C}, \end{array}$$

endlich ist mit genügender Annäherung:

$$\sigma = \frac{(1 \text{ cm})^3}{1 \text{ gr}}.$$

Daraus ergiebt sich mittelst unserer Relation (S. 89):

$$\begin{array}{lllll} \text{für } t = & 0 & 50 & 100 & \\ s = & 210600 & 12050 & 1650 & \frac{(1 \text{ cm})^3}{1 \text{ gr}}. \end{array}$$

Man pflegt die Dichtigkeiten der Gase und Dämpfe in *der* Einheit anzugeben, welche die Dichtigkeit der atmosphärischen Luft bei gleicher Temperatur und gleichem Drucke bildet. Das Volumen von 1 gr atmosphärischer Luft bei 0° C und 760 mm Druck ist 773 ccm; daher ist das Volumen dieser Luftmasse, wenn

$$t = 0 \qquad 50 \qquad 100^0 \text{ C}$$

und

$$p = 4,600 \qquad 91,98 \qquad 760$$

gleich

$$127700 \qquad 7556 \qquad 1056$$

und daher die Dichtigkeit des gesättigten Wasserdampfes bei

$$\begin{array}{llllll} t = & 0 & 50 & 100 & 150 & 200^0 \text{ C}. \\ & 0,606 & 0,627 & 0,640 & 0,661 & 0,693. \end{array}$$

Folgte der Wasserdampf bis zu seiner Condensation dem Mariotteschen und Gay-Lussac'schen Gesetze, so müssten, da man von den kleinen Abweichungen der atmosphärischen Luft von diesen Gesetzen hier absehen kann, diese Zahlen einander gleich sein; ihre Unterschiede zeigen, dass der Wasserdampf erheblich von einem ideellen Gase abweicht.

Für Wasserdampf, der so verdünnt ist, dass er sich wie ein ideelles Gas verhält, kann man nach einer wohlbegründeten Theorie annehmen, dass zwei Volumina desselben aus zwei Volumina Wasserstoff und einem Volumen Sauerstoff, genommen bei derselben Temperatur und demselben Druck, bestehn; hiernach kann man die Dichtigkeit des hinreichend verdünnten Wasserdampfes berechnen; sie muss sein:*)

$$\mu = \frac{2 \,.\, 0{,}06926 + 1 \,.\, 10563}{2} = 0{,}622.$$

Wir haben für die höheren Temperaturen μ erheblich grösser gefunden; um so grösser, je höher die Temperatur ist. Dass wir für $t = 0$ eine kleinere Dichtigkeit als die ideelle gefunden haben, ist wohl die Folge davon, dass $\frac{dp}{dt}$ nur unsicher durch die Beobachtung bestimmt ist, wegen der Kleinheit der Spannungen.

Es ist wahrscheinlich, dass auch hier μ etwas, aber sehr wenig grösser ist, als 0,622. Wir können also aus unseren Zahlen schliessen, dass gesättigter Wasserdampf bei höheren Temperaturen erheblich, bei niedrigen aber nur wenig von einem ideellen Gase abweicht.

§ 4.

Wir wollen nun noch für unser aus Flüssigkeit und Dampf bestehendes System den Ausdruck der Energie bilden. Wir hatten S. 65 gefunden:

$$U = \int_{x_0}^{x} dx \left\{ A + T\left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial T}\right) \right\} + \int^{T} d\,T (B_0 + Y_0).$$

Ferner ist hier nach. S. 89

$$A = -p \frac{\partial v}{\partial x},$$

$$B = -p \frac{\partial v}{\partial T},$$

$$\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial T} = \frac{dp}{dT} \frac{\partial v}{\partial x},$$

$$v = xs + (1 - x)\,\sigma,$$

$$Y = xH + (1 - x)\,C.$$

*) Die in zwei Volumina enthaltene Masse Wasserdampf: 2μ ist gleich der Summe der in zwei Volumina Wasserstoff und der in einem Volumen Sauerstoff enthaltenen Massen. D. H.

Da p von x unabhängig ist, wird das erste Integral:

$$\int dx \left(T \frac{dp}{dT} - p\right) \frac{\partial v}{\partial x}$$

leicht ausführbar; setzt man noch

$$x_0 = 0,$$

so erhält man

$$U = \left(T \frac{dp}{dT} - p\right)(s - \sigma)\, x + \int^{T} dT \left(C - p \frac{d\sigma}{dT}\right).$$

Hieraus kann man leicht p als Function von T darstellen, wenn man sich erlaubt, den Dampf bis zu seiner Condensation als ideelles Gas zu betrachten, was, wie wir gesehen haben, bei niederen Temperaturen wahrscheinlich sehr nahe richtig ist, während bei höheren Temperaturen eine solche Annahme auf grosse Fehler führen kann.

Setzen wir $x = 1$, vernachlässigen wir ferner σ gegen s, was bei niederen Temperaturen sicher erlaubt ist, und nehmen wir C als constant an; dann erhalten wir, wenn wir noch

$$s = \frac{RT}{p}$$

machen:

$$U = \left(T \frac{dp}{dT} - p\right) \frac{RT}{p} + CT + \text{const.}$$

Andrerseits ist die Energie der Masseneinheit eines ideellen Gases nach S. 75 aber auch gleich

$$C_v T + \text{const.}$$

Man hat also für p die Differentialgleichung

$$\left(T \frac{dp}{dT} - p\right) \frac{RT}{p} + CT = C_v T + \text{const.}$$

Erinnern wir uns an die Gleichung (S. 75)

$$C_p - C_v = R,$$

so können wir diese Gleichung schreiben:

$$\frac{dp}{p} + \frac{C - C_p}{C_p - C_v} \frac{dT}{T} - \frac{K\,dT}{T^2} = 0,$$

wo K eine Constante bedeutet. Hieraus folgt:

$$\log p = \text{const.} - \frac{C - C_p}{C_p - C_v} \log T - \frac{K}{T}.$$

Kennt man die Verhältnisse der drei specifischen Wärmen C, C_p, C_v und nimmt man die für zwei Temperaturen beobachteten Werthe von p hinzu, so kann man alle in dieser Gleichung vorkommenden Constanten, mithin auch p für jede nicht zu hohe Temperatur berechnen.

Unter Umständen kann diese Gleichung sehr nützlich sein. Ich will ein Beispiel anführen. Mit Hülfe der Quecksilberpumpe kann man heutzutage sehr hohe Grade der Luftverdünnung hervorbringen. In dem ausgepumpten Raume sind aber immer noch gesättigte Quecksilberdämpfe vorhanden. Es hat ein Interesse zu wissen, wie gross der Druck dieser ist. Ihn direkt zu messen ist nicht möglich, weil er zu klein ist; mit Hülfe unserer Gleichung kann man ihn mit ziemlicher Sicherheit berechnen. Hertz*) hat eine solche Rechnung ausgeführt und gefunden:

für $t = 0$	$p = 0{,}0002$ mm Quecksilber.
20	0,0013
40	0,0064

Wir knüpfen noch eine Bemerkung an die Gleichung, welche wir soeben durch die Voraussetzung, dass der Dampf sich wie ein ideelles Gas verhält, aus der Betrachtung der Energie abgeleitet haben. Diese lässt sich schreiben

$$T(s - \sigma)\frac{dp}{dT} + (C - C_p)T = \text{const.}$$

oder nach S. 89:

$$r = \text{const.} - (c - c_p)T.$$

Nun ist nach Regnault für nicht zu hohe Temperaturen für Wasserdampf

$$r = 796{,}3 - 0{,}695\ T.$$

Da weiter $c = 1$ ist, so folgt hieraus

$$c_p = 0{,}305.$$

Regnault hat dieses c_p direkt gemessen und gleich

$$0{,}475$$

gefunden. Aber die Zahl 0,305 bezieht sich auf sehr verdünnten Wasserdampf. Regnault hat die seinige gefunden, indem er die Wärmemenge mass, welche der Dampf beim Drucke der Atmosphäre abgab, indem er von etwa 220° auf 120° sich abkühlte. Es erklärt sich der Unterschied der beiden Zahlen daraus, dass der Dampf unter den Verhältnissen, unter denen er bei dem Versuche sich befand, schon erheblich von einem ideellen Gase abwich.

*) H. Hertz, Wied. Ann. 17, p. 177 und 193. 1882.

Neunte Vorlesung.

Allgemeine Zustandsgleichung von van der Waals. — System der Isothermen. — Labile Zustände überhitzter Flüssigkeit und übersättigten Dampfes. — Berechnung der Lage des Sättigungspunktes auf jeder Isotherme. — Kritischer Punkt. — Anwendung auf Kohlensäure. — Zustandsgleichung von Clausius. — Uebergang aus dem festen in den flüssigen Aggregatzustand. — Schmelzwärme. — Abhängigkeit der Schmelztemperatur vom Druck. — Abhängigkeit der Schmelzwärme vom Druck.

§ 1.

Wir wollen jetzt etwas näher auf die Abweichungen der Gase — zu denen wir auch die Dämpfe rechnen — von ideellen Gasen eingehen. Wir haben schon die Formel kennen gelernt, die Thomson und Joule für atmosphärische Luft und Kohlensäure in Bezug hierauf aufgestellt haben, und die wegen der Art ihrer Ableitung sehr interessant ist. Andere Formeln, welche denselben Zweck haben, sind in grosser Zahl aufgestellt. Eine, die grosses Interesse verdient wegen der Folgerungen, die sich an sie knüpfen lassen, ist die von van der Waals angegebene. Für ein ideelles Gas ist

$$pv = RT;$$

statt dessen setzt van der Waals für ein wirkliches Gas:

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT$$

oder

$$p = \frac{RT}{v - b} - \frac{a}{v^2},$$

wo a, b, R positive Constanten sind. Diese Gleichung soll nicht allein für ein Gas, sondern bei ungeänderten Constanten auch für die Flüssigkeit gelten, welche durch Condensation des Gases erhalten wird.

Für gegebene Werthe von p und T, welche beide positiv sind, ist v durch eine cubische Gleichung bestimmt. Diese hat eine oder drei reelle Wurzeln, welche, wie man aus der zweiten Form leicht sieht, positiv und grösser als b sind.*) Sind drei reelle Wurzeln vor-

*) Denn für negative Werthe von $v - b$ ist p negativ. D. H.

handen, so entsprechen diese drei Zuständen des Körpers: eine dem flüssigen, eine dem gasförmigen, die dritte einem labilen, welcher, weil er labil ist, nicht verwirklicht werden kann. Suchen wir die Beziehung, welche zwichen p und v bei *gegebenem* T besteht, uns durch eine Curve anschaulich zu machen. Hat p sehr grosse positive Werthe, so ist $v - b$ sehr klein und

$$p = \frac{RT}{v - b}.$$

Die Curve, welche man erhält, wenn man p und v als rechtwinklige Coordinaten eines Punktes betrachtet, nähert sich für solche Werthe von p einer Hyperbel.

Für sehr grosse Werthe von v wird auch

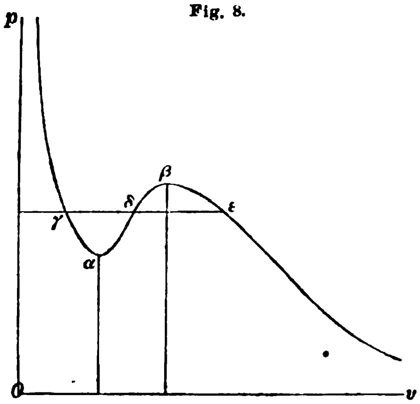
$$p = \frac{RT}{v - b}$$

oder auch

$$p = \frac{RT}{v}.$$

Auch hier wird die Curve also dieselbe Hyperbel.*) Sollen für gewisse Werthe von p *drei* reelle Werthe von v existiren, so muss, wenn man die Curve von $p = +\infty$ an durchläuft, p ein Minimum bei α, dann ein Maximum bei β erlangen und dann fortwährend abnehmen. Eine Gerade $p =$ const schneidet dann die Curve in drei Punkten, wenn p zwischen p_α und p_β liegt, aber nur in einem, wenn p ausserhalb dieses Intervalles sich befindet. Sind γ, δ, ε drei solche Durchschnittspunkte, so entspricht γ dem flüssigen, ε dem gasförmigen, δ einem labilen Zustande. Für den letzteren ist nämlich $\frac{dp}{dv}$ positiv, und das ist die Bedingung dafür, dass der Zustand labil ist, während für die beiden anderen Punkte $\frac{dp}{dv}$ negativ und also der Zustand stabil ist.

Fig. 8.



§ 2.

Gesetzt man mässe für einen Körper, etwa für eine gewisse Menge Wasser, und für *eine* Temperatur, etwa für 100° C, das Volumen v für verschiedene Drucke. Man fange mit hohen Werthen

*) Nur um die Strecke b in der Richtung der abnehmenden v verschoben. D. H.

von p an; da ist die ganze Wassermasse flüssig. Sobald $p = 1$ Atmosphäre geworden ist und man den Druck weiter zu verkleinern sucht, indem man das Volumen v vergrössert, so gelingt das nicht; es bildet sich bei gleichbleibendem Druck Wasserdampf, um so mehr, je grösser man v macht; das geht fort, bis alles Wasser verdampft ist; von diesem Augenblick an verringert sich bei wachsendem v p weiter.

Stellt man die Beziehung zwischen v und p durch eine Curve dar, so stimmt diese mit der geschilderten (wenn die Constanten passend gewählt sind) überein bis auf einen Unterschied: das Stück $\gamma\alpha\delta\beta\varepsilon$ (wenn $p_\gamma = 1$ Atmosphäre) ist ersetzt durch die gerade Linie $\gamma\varepsilon$. Sie bezieht sich auf den Theil des Processes, bei welchem der Körper theils flüssig, theils gasförmig ist, während die Curve $\gamma\alpha\delta\beta\varepsilon$ gedachte Zustände darstellt, bei welchen der Körper homogen bleibt. Dass die Zustände, welche durch das Stück $\alpha\delta\beta$ dargestellt sind, nicht auftreten, ist nicht auffallend, da sie labil sind; fragen muss man aber, ob die Zustände, welche den Stücken $\gamma\alpha$ und $\varepsilon\beta$ entsprechen, sich nicht verwirklichen lassen. Theilweise kann das wirklich geschehen, nämlich für das Stück der Curve $\gamma\alpha$ in der Nähe von γ. Ich habe die Erscheinungen, wie sie *der Regel nach* eintreten, geschildert; unter Umständen kann aber Wasser bei 100° C unter etwas kleinerem Druck als 1 Atmosphäre gesetzt werden, ohne dass es verdampft; man nennt es dann *überhitzt*. Wasser, welches von der absorbirten Luft befreit ist, kann in einem sorgfältig gereinigten Glasgefäss bei dem Druck von 1 Atmosphäre um mehrere Grade über 100° erhitzt werden, es kann also auch bei 100° bestehen unter einem Drucke, welcher kleiner ist als 1 Atmosphäre. Bei überhitztem Wasser kann aber die Einführung einer Luftblase genügen, um plötzliche Verdampfung zu bewirken und den normalen Zustand herzustellen. Die Punkte der Curve $\varepsilon\beta$ stellen Zustände des Dampfes dar, bei denen die Temperatur 100° C und der Druck grösser als 1 Atmosphäre ist; solche Zustände stellen *übersättigten* Dampf vor.

Wie aus der theoretischen Curve der Maximaldruck des Dampfes, d. h. die Lage der Linie $\gamma\varepsilon$, gefunden werden kann, hat Clausius durch die folgende Betrachtung gezeigt. Man denke sich den Körper aus dem Zustande γ in den Zustand ε durch Zufuhr von Wärme und Arbeit auf dem Wege $\gamma\alpha\delta\beta\varepsilon$ übergeführt. Zu verwirklichen ist das freilich unmöglich, da ein Theil der Zustände, welche dabei durchlaufen werden müssen, labil sind. Um zu verhindern, dass durch unendlich kleine Störungen ein Umsturz der augenblicklichen Anordnung herbeigeführt werde, müsste man über Kräfte zu verfügen haben, welche auf alle materiellen Punkte des Körpers wirkten und in jedem Augenblicke eine jenen Störungen angepasste Wirkung ausübten. Aber *denken* kann man sich solche Kräfte; die Arbeit, welche sie zu leisten hätten, wäre dabei nur eine unendlich kleine, und aus diesem Grunde ist die gedachte Ueberführung als eine umkehrbare zu bezeichnen. Aus dem Zustande ε denke man sich den Körper wieder in den Zustand γ auf dem Wege $\varepsilon\delta\gamma$ zurückgebracht. Dieser Process ist ausführbar und ohne Zweifel umkehrbar. Im Ganzen hat dann unser Körper einen umkehrbaren Kreisprocess durchgemacht. Es ist daher:

$$0 = \int \frac{dQ}{T},$$

also, da

$$T = \text{const},$$

so ist

$$0 = \int dQ;{}^{*})$$

und, da durch den Kreisprocess die Energie nicht geändert sein kann, so ist

$$0 = \int p\, dv.^{**})$$

Diese Gleichung sagt aus, dass die Flächenräume $\gamma\alpha\delta$ und $\delta\beta\varepsilon$ einander gleich sind.

Benutzt man die Gleichung

$$p = \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v^2},$$

so erhält man***) für die Spannung des Dampfes:

$$p(s-\sigma) = RT \log \frac{s-b}{\sigma-b} + a\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{\sigma}\right),$$

wo s die grösste, σ die kleinste der drei Wurzeln der vorstehenden Gleichung ist. Daraus sind dann p, s, σ als Functionen von T zu berechnen.

§ 3.

Bei der gezeichneten Isotherme hat, wenn der Druck innerhalb eines gewissen Intervalles liegt, die Gleichung für v drei reelle Wurzeln, und daher kommt bei der entsprechenden Temperatur bei gewissen Drucken unser Körper in zwei Zuständen, flüssig und gasförmig, vor. Das findet aber nicht bei allen Temperaturen statt. Für eine Temperatur, bei der es der Fall ist, muss p, wenn v von b bis ∞ wächst, ein Minimum und ein Maximum, die Gleichung

*) D. h. die im Ganzen von Aussen aufgenommene Wärme ist gleich Null. D. H.

**) D. h. die im Ganzen von Aussen zugeführte Arbeit ist gleich Null. D. H.

***) aus der Gleichung:

$$p \cdot (s-\sigma) = \int_\sigma^s p\, dv. \qquad \text{D. H.}$$

$$\frac{dp}{dv} = 0,$$

d. h. nach der van der Waals'schen Formel:

$$\frac{RT}{(v-b)^2} = 2\frac{a}{v^3}$$

also zwei reelle Wurzeln haben. *Eine* Wurzel dieser Gleichung dritten Grades liegt zwischen 0 und b,*) die beiden anderen also müssen dann reell sein; ein Werth von T, bei welchem sie einander gleich sind, bei welchem also

$$\frac{d^2p}{dv^2} = 0,$$

d. h.

$$2\frac{RT}{(v-b)^3} = 6\frac{a}{v^4},$$

d. h.

$$v = 3b,$$

$$T = \frac{8a}{27bR} = T_1,$$

bildet eine Grenze, bei welcher die Wurzeln aufhören, reell zu sein. Es giebt nur *einen* solchen Werth, welchen wir T_1 nennen, es ist ferner für $T = +\infty$ immer

$$\frac{RT}{(v-b)^2} > 2\frac{a}{v^3};$$

daraus folgt, dass für $T < T_1$ die beiden Wurzeln reell, für $T > T_1$ imaginär sind. Eine Isotherme, für welche $T > T_1$ ist, verläuft so, dass p stetig abnimmt, wenn v wächst, dass es also für jedes p nur *ein* v, d. h. nur *einen* möglichen Zustand des Körpers giebt; während, wenn $T < T_1$ ist, für gewisse Drucke zwei Zustände möglich sind. Man nennt T_1 die *kritische Temperatur*. Auf der dieser entsprechenden Isotherme giebt es einen einzigen Punkt, für welchen $\frac{dp}{dv} = 0$ ist; man nennt ihn den *kritischen Punkt;* die ihm entsprechenden Werthe von p und v den *kritischen Druck* und das *kritische Volumen;* bezeichnet man sie mit p_1 und v_1, so ist nach dem Obigen:

$$v_1 = 3b,$$

$$p_1 = \frac{a}{27b^2}.$$

Die sorgfältigsten und ausgedehntesten Messungen, welche mit der Formel von van der Waals verglichen werden können, sind an *Kohlensäure* von Andrews ausgeführt worden. Aus diesen hat van der Waals die folgenden Werthe der Constanten in seiner Formel

$$p = \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v^2}$$

berechnet:

*) Weil in diesem Intervall die Differenz der Ausdrücke links und rechts ihr Vorzeichen wechselt. D. H.

$$R = \frac{1{,}00646}{273},$$
$$a = 0{,}00874,$$
$$b = 0{,}0023,$$

wobei die Einheit des Druckes 1 Atmosphäre, die Einheit des Volumens das Volumen der Kohlensäure bei $p = 1$ und der Temperatur von 0^0 C ist. Daraus folgt

$$t_1 = 32,$$
$$v_1 = 0{,}0069,$$
$$p_1 = 61.$$

Die Resultate der Messungen werden im grossen Ganzen durch die Formel von van der Waals richtig dargestellt, doch bleiben Unterschiede, die nicht aus Beobachtungsfehlern erklärt werden zu können scheinen. Es hat Clausius*) die Uebereinstimmung durch eine Veränderung der Formel zu verbessern gesucht; er setzt

$$p = \frac{RT}{v - \alpha} - \frac{c}{T(v + \beta)^2}$$

und berechnet bei denselben Einheiten des Druckes und des Volumens

$$R = \frac{1{,}00682}{273},$$
$$c = 2{,}0935,$$
$$\alpha = 0{,}000843,$$
$$\beta = 0{,}000977.$$

Offenbar gelten die allgemeinen Schlüsse, welche wir an die van der Waals'sche Gleichung geknüpft haben, auch bei dieser. Sie schliesst sich dabei noch besser an die Beobachtungen an, enthält aber freilich auch eine Constante mehr.

Es ist zu vermuthen, dass eine Gleichung von derselben Form, nur mit anderen Constanten, auch für andere Gase gelten wird.

Noch möge bemerkt werden, dass aus der Clausius'schen Formel bei Vernachlässigung gewisser kleiner Grössen die von Joule und Thomson aufgestellte und früher (S. 87) erwähnte Formel abgeleitet werden kann. Wenn v *nicht* klein ist gegen das als Einheit eingeführte Volumen, so haben α und β einen sehr geringen Einfluss und die Clausius'sche Gleichung lässt sich schreiben

$$p = \frac{RT}{v} - \frac{c}{Tv^2}$$

oder, wenn man mit $\frac{v}{p}$ multiplicirt,

$$v = \frac{RT}{p} - \frac{c}{Tvp}$$

*) Clausius, Wied. Ann. 9. p. 337.

oder näherungsweise

$$v = \frac{RT}{p} - \frac{c}{R}\frac{1}{T^2},$$

welches die Thomson'sche Gleichung ist.

§ 4.

Aehnliche Ueberlegungen, wie wir sie in Bezug auf den Uebergang eines Körpers aus dem flüssigen in den gasförmigen Zustand, oder umgekehrt, angestellt haben, lassen sich auch in Bezug auf den Uebergang aus dem festen in den flüssigen Zustand, oder umgekehrt, durchführen. Die Anwendung der beiden Hauptsätze auf ein System, das aus einer Flüssigkeit und ihrem Dampfe besteht, hat uns zu den beiden Gleichungen (S. 89)

$$r = \frac{1}{\varkappa} T (s - \sigma) \frac{dp}{dT},$$

$$h - c = T \frac{d\left(\frac{r}{T}\right)}{dT} = \frac{dr}{dT} - \frac{r}{T}$$

geführt; dieselben Gleichungen müssen bei passend veränderter Bedeutung der Zeichen auch gelten für ein System, das aus einem festen Körper und der durch Schmelzung aus diesem entstandenen Flüssigkeit besteht. T ist dann die Temperatur des *Schmelzpunktes;* so wird die Temperatur genannt, bei welcher feste und flüssige Theile des Körpers neben einander bestehen; r ist die *latente Wärme* der Flüssigkeit oder die latente Schmelzwärme, s das specifische Volumen der Flüssigkeit, σ das des festen Körpers, h eine gewisse specifische Wärme der Flüssigkeit und c eine des festen Körpers.

Die erste Folgerung, die aus diesen Gleichungen zu ziehen ist, ist die, dass T variabel und zwar abhängig von p sein muss. Die Gleichung

$$dT = \frac{1}{\varkappa}\frac{1}{r} T (s - \sigma)\, dp$$

erlaubt, die Aenderung dT zu berechnen, welche einem Druckzuwachs dp entspricht; sie zeigt, dass beide von gleichem Vorzeichen sind, wenn $s > \sigma$ ist, d. h. wenn bei dem Schmelzen eine Ausdehnung stattfindet, von entgegengesetztem Vorzeichen im anderen Falle. Bei dem Eis findet das zweite statt. Berechnen wir hier dT für $dp = 1$ Atmosphäre. Wir haben

$$\frac{1}{\varkappa} = 2{,}407 \cdot 10^{-8} \frac{(1\ \mathrm{sec})^2\ 1^0\ \mathrm{C}}{(1\ \mathrm{cm})^2},$$

$$r = 79 \cdot 1^0\ \mathrm{C},$$

$$T = 273 \cdot 1^0\ \mathrm{C},$$

$$s = 1{,}000 \frac{(1\ \mathrm{cm})^3}{1\ \mathrm{gr}},$$

$$\sigma = 1{,}087\ \frac{(1\ \mathrm{cm})^3}{1\ \mathrm{gr}},$$

$$1\ \text{Atmosphäre} = 1{,}013 \cdot 10^6\ \frac{1\ \mathrm{gr}}{(1\ \mathrm{sec})^2\ 1\ \mathrm{cm}}.$$

Das giebt

$$dT = -0{,}0073 \cdot 1^0\ \mathrm{C}.$$

Eine solche Rechnung ist zuerst im Jahre 1850 von James Thomson ausgeführt und ihr Resultat von W. Thomson experimentell sehr genau bestätigt worden. Ungefähr gleichzeitig hatte Bunsen bei zwei anderen Körpern die Abhängigkeit des Schmelzpunktes von dem Drucke experimentell nachgewiesen, und zwar bei solchen, die bei dem Schmelzen sich ausdehnen, bei denen also der Schmelzpunkt durch Druck erhöht wird. Er fand den Schmelzpunkt beim Wallrath

für	1 Atmosphäre	bei	$47^0{,}7$ C,
	156 „		50,9,

beim Paraffin

für	1 Atmosphäre	bei	$46^0{,}3$ C,
	100 „		49,9.

§ 5.

Die zweite unserer beiden Gleichungen

$$\frac{dr}{dT} = h - c + \frac{r}{T}$$

zeigt, dass die latente Schmelzwärme r sich ändert, wenn der Schmelzpunkt durch Druck geändert wird. Wenden wir auch diese Gleichung auf Eis und Wasser an. Wir müssen zunächst dann c und h berechnen; das sind die specifischen Wärmen für Eis und Wasser für den Fall, dass $\frac{dp}{dT}$ den soeben berechneten Werth hat; nach einer früher (S. 73) aufgestellten Formel ist daher für Eis

$$c = c_p - \frac{1}{\varkappa}\, T\, \frac{\partial \sigma}{\partial T}\, \frac{dp}{dT}$$

und ebenso für Wasser

$$h = h_p - \frac{1}{\varkappa}\, T\, \frac{\partial s}{\partial T}\, \frac{dp}{dT}.$$

Nun ist

$$\frac{dp}{dT} = -\frac{1\ \mathrm{Atm}}{0{,}0073 \cdot 1^0\ \mathrm{C}} = -1{,}382 \cdot 10^8\ \frac{1\ \mathrm{gr}}{(1\ \mathrm{sec})^2\ 1\ \mathrm{cm}\ 1^0\ \mathrm{C}},$$

$$T = 273 \cdot 1^0\ \mathrm{C},$$

$$\frac{1}{\varkappa} = 2{,}407 \cdot 10^{-8}\ \frac{(1\ \mathrm{sec})^2\ 1^0\ \mathrm{C}}{(1\ \mathrm{cm})^2},$$

ferner

$$\frac{\partial \sigma}{\partial T} = \frac{1{,}53 \cdot 10^{-4}}{1^0\ \mathrm{C}}\ 1{,}087\ \frac{(1\ \mathrm{cm})^3}{1\ \mathrm{gr}},$$

wo der erste Factor der räumliche Ausdehnungscoefficient bei constantem Druck, der zweite das Volumen der Masseneinheit Eis bei 0^0 C ist, d. h.

$$\frac{\partial \sigma}{\partial T} = 1{,}663 \cdot 10^{-4} \frac{(1\ \mathrm{cm})^3}{1\ \mathrm{gr}\ 1^0\ \mathrm{C}},$$

und ebenso

$$\frac{\partial s}{\partial T} = -\,6{,}1 \cdot 10^{-5} \frac{(1\ \mathrm{cm})^3}{1\ \mathrm{gr}\ 1^0\ \mathrm{C}}.$$

Endlich hat man für die specifischen Wärmen bei constantem Druck von Eis und Wasser bei 0° C

$$c_p = 0{,}48,$$
$$h_p = 1.$$

Daraus folgt

$$c = 0{,}631,$$
$$h = 0{,}945$$

und dann weiter

$$\frac{dr}{dT} = h - c + \frac{r}{T} = 0{,}314 + 0{,}289 = 0{,}603.$$

[Bei steigendem Druck nimmt also mit der Schmelztemperatur zugleich auch die Schmelzwärme des Eises ab. D. H.]

Zehnte Vorlesung.

System von chemisch differenten Körpern. — Bei festen und flüssigen Körpern ist die erzeugte chemische Wärme gleich der Energieabnahme und unabhängig vom Wege der Ueberführung. — Bestätigung an Messungen von J. Thomsen über die Verdünnungswärme und über die Neutralisationswärme von Schwefelsäure. — Abhängigkeit der erzeugten Wärme von der Temperatur. — Verdünnung von Schwefelsäure auf umkehrbarem Wege. Anwendung beider Hauptsätze. — Berechnung der Verdünnungswärme aus der Abhängigkeit der Dampfspannung von der Temperatur.

§ 1.

Die Anwendungen, die wir bis jetzt von der mechanischen Wärmetheorie gemacht haben, bezogen sich auf ein System, welches aus einem *chemisch homogenen* Körper besteht. Wir verfolgten zuerst den Fall, dass der Körper auch physikalisch homogen wäre, d. h. dass er durchweg in demselben Aggregatzustande sich befände, dann den Fall, dass ein Theil desselben sich in einem, ein Theil in einem anderen Aggregatzustande befände. Wir wollen uns nun ein System denken, das aus *chemisch differenten* Körpern zusammengesetzt ist. Bei einem solchen können Processe sehr mannigfaltiger Art eintreten; es kann z. B. ein Gas von einer Flüssigkeit absorbirt, ein fester Körper aufgelöst werden, es können chemische Veränderungen, Verbindungen und Zersetzungen, stattfinden. Bei allen solchen Processen tritt etwas auf, was der Messung verhältnissmässig leicht zugänglich ist, nämlich eine Wärmeentwicklung oder Wärmeverschluckung; in Bezug auf diese sind auch, namentlich bei chemischen Processen, unzählige Messungen ausgeführt.

Geht das System aus einem gewissen Anfangszustand in einen gewissen Endzustand über, so erfährt seine *Energie* eine gewisse Veränderung, sagen wir eine gewisse Abnahme. Es ist diese gleich der Summe der nach Aussen abgegebenen Wärmemenge und der nach Aussen abgegebenen Arbeitsgrösse. Findet der gedachte Process unter dem Druck der Atmosphäre statt, so ist diese Arbeitsgrösse gleich dem Producte aus diesem Drucke in die eingetretene Volumenvergrösserung. Sind alle Körper des Systems fest oder flüssig, so ist die Volumenänderung meist so klein, dass die genannte Arbeitsgrösse ohne merkbaren Fehler gegen die Wärmemenge, zu welcher sie zu addiren ist, vernachlässigt werden kann. Die Abnahme der Energie ist dann gleich der abgegebenen Wärmemenge. Nun nehmen wir noch an, dass die Temperatur beim Endzustande der beim Anfangszustande gleich ist; die abgegebene Wärmemenge ist dann diejenige, welche man die *erzeugte* nennt. Der Abnahme der Energie ist also die erzeugte Wärmemenge gleich. Um zu machen, dass dieser Satz auch richtig bleibt, wenn die abgegebene Arbeitsgrösse nicht zu vernachlässigen ist, müssen wir unter der erzeugten Wärmemenge die Summe der abgegebenen Wärme und dieser Arbeit verstehn. *Erzeugte Wärme* ist dann immer nur ein anderer Name für *Energieabnahme* in dem Falle, dass die Temperaturen beim Endzustande und beim Anfangszustande gleich sind.

Wir wissen nun, dass die Aenderung der Energie von dem *Wege* der Ueberführung unabhängig ist; daraus folgt dann unmittelbar der Hauptsatz für die Wärmeentwicklungen, die wir hier betrachten, nämlich der Satz, dass, wenn ein System von chemisch verschiedenen Körpern aus einem gewissen Anfangszustande in einen gewissen Endzustand von derselben Temperatur und demselben Drucke auf *verschiedenen Wegen* übergeführt werden kann, die Summe der erzeugten Wärmemengen für alle Wege dieselbe ist.

§ 2.

Wir wollen einige Beispiele für diesen Satz anführen.

Bei der Mischung von Schwefelsäure und Wasser findet eine erhebliche Wärmeentwickelung statt. Mischt man 1 gr Schwefelsäurehydrat SO_3H_2O mit x gr Wasser, so ist nach Thomsen*) die entwickelte Wärmemenge gleich

$$\frac{x}{x+0{,}3204}\,177{,}1,$$

wo Einheit der Wärmemenge diejenige ist, welche 1 gr Wasser von 0^0 C auf 1^0 C erwärmt. Es ist

$$\begin{aligned} 2H &= 2, \\ O &= 16, \\ S &= 32, \\ H_2O &= 18, \\ SO_3 &= 80, \\ SO_3H_2O &= 98. \end{aligned}$$

Thomsen hat die obige Formel aus Versuchen abgeleitet, bei denen x ein Multiplum von $\frac{18}{98}$, d. h. die zugesetzte Wassermasse ein

*) Thomsen, Pogg. Ann. 90. p. 278. 1853.

Multiplum der Wassermenge war, die mit 1 gr Schwefelsäurehydrat äquivalent ist; wir nehmen sie als gültig für jeden Werth von x an. Die entwickelte Wärmemenge ist

$$\text{für } x = 1 \quad \text{gleich} \quad 134{,}2,$$
$$2 \qquad\qquad 152{,}6.$$

Die Differenz 18,4 muss nach unserem Satze die Wärmemenge sein, welche erzeugt wird, wenn zu

$$(1 \text{ gr } SO_3H_2O + 1 \text{ gr } H_2O)$$

gesetzt wird:

$$(1 \text{ gr } H_2O).$$

Dieser Satz lässt sich experimentell prüfen; er ist durch vielfache Versuche genau bestätigt worden.

Noch ein anderes Beispiel wollen wir betrachten. Unser System bestehe aus einem Aequivalent Schwefelsäure

$$SO_3 = 32 + 48 = 80 \text{ gr},$$

einem Aequivalent Natron

$$Na_2O = 46 + 16 = 62 \text{ gr}$$

und einem Aequivalent Baryt

$$BaO = 137 + 16 = 153 \text{ gr},$$

jedes in so viel Wasser gelöst, dass ein weiterer Zuschuss von Wasser keine Temperaturänderung mehr bewirkt; der Anfangszustand sei der, in welchem die drei Körper gesondert vorhanden sind. Man giesse die Schwefelsäure in das Natron; es bildet sich schwefelsaures Natron; dabei wird eine Wärmemenge erregt, welche nach Thomsen*) gleich

$$31\,378$$

ist, wenn wieder 1 gleich der Wärmemenge ist, die 1 gr Wasser um 1^0 erwärmt. Nun giesse man das Barytwasser dazu. Jenes Salz wird dann wieder zerlegt und schwefelsaurer Baryt gefällt; dabei wird die Wärmemenge

$$5\,492$$

erzeugt; die Summe ist

$$36\,870.$$

Denselben Endzustand kann man herbeiführen, indem man *zuerst* den Baryt mit der Schwefelsäure zusammenbringt, wobei das Barytsalz niederfällt, und dann das Natron zugiesst. Bei der zweiten Operation tritt keine chemische und keine Wärmewirkung ein; bei der Bildung des Barytsalzes müsste also eine Wärmemenge erzeugt werden, die der letzten Zahl gleich ist. Die Messung ergab

$$36\,896.$$

---

*) Thomsen, Pogg. Ann. 143. p. 358. 1871.

§ 3.

Die bei einem gewissen Processe erzeugte Wärme ist, strenge genommen, von der Temperatur abhängig, die die Körper vor und nach dem Processe haben. Das lehrt die folgende Betrachtung. Es sei Q die Wärmemenge, welche bei der Temperatur T erzeugt wird, wenn die Massen m_1, m_2 zweier Körper zusammengebracht werden, Q' die Wärmemenge, welche bei demselben Process bei der Temperatur $T + dT$ erzeugt wird, und es seien c_1, c_2, c die specifischen Wärmen bei constantem Druck der Bestandtheile und der Verbindung.

Nun kühle man die beiden Körper von $T + dT$ auf T ab, lasse sie bei T zusammentreten, und erwärme die Verbindung dann auf $T + dT$. Die Wärmemenge, welche man dann im Ganzen aus dem System erhalten hat, muss gleich Q' sein, d. h.

$$Q' = (m_1 c_1 + m_2 c_2) dT + Q - (m_1 + m_2) c dT.$$

Setzt man

$$Q' - Q = \frac{dQ}{dT} dT,$$

so hat man also

$$\frac{dQ}{dT} = (m_1 c_1 + m_2 c_2) - (m_1 + m_2) c.$$

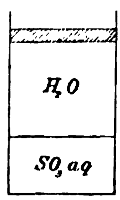
Hieraus kann man $\frac{dQ}{dT}$ berechnen und findet es im Allgemeinen von Null verschieden.

§ 4.

In gewissen Fällen kann man über die Wärmemenge Q noch weiteren Aufschluss erhalten, dann nämlich, wenn die gedachte Ueberführung auf *umkehrbarem* Wege vorgenommen werden kann, was bisweilen möglich ist. Die Mischung von Wasser mit Schwefelsäure bietet ein Beispiel hierfür dar.

Ueber wässeriger Schwefelsäure bilden sich reine Wasserdämpfe, deren Spannung kleiner ist als ihre Spannung über Wasser bei derselben Temperatur; es zieht, wie man zu sagen pflegt, die Schwefelsäure das Wasser an. Denken wir uns die wässerige Säure in einem mit einem Kolben versehenen Cylinder; durch Bewegung des Kolbens kann man den Wassergehalt der Säure auf umkehrbarem Wege nach Willkühr verkleinern oder vergrössern, indem man aus ihr Wasserdampf herauszieht oder in sie welchen hineinpresst. Indem man das benutzt, kann man auf umkehrbarem Wege Wasser mit Schwefelsäure mischen.

Fig. 9.



In dem Cylinder denke man sich nun das Wasser über der Schwefelsäure, von dieser getrennt durch eine Zwischenwand, die den Druck durch sich hindurchwirken lassen möge, über dem Wasser den Stempel. Auf diesen soll ein Druck*) wirken, welcher grösser ist als die Spannung p_0 des Wasserdampfes über reinem Wasser bei der stattfindenden Temperatur. Nun soll der folgende Process, bei welchem die Temperatur immer gleich erhalten werden soll, vorgenommen werden.

Erstens vermindere man den Druck bis p_0.

Zweitens, während $p = p_0$ ist, bewege man den Stempel aufwärts, bis alles Wasser sich in Dampf verwandelt hat.

Drittens bewege man den Stempel weiter aufwärts, bis $p = p_1$, der Spannung des Wasserdampfes über der Schwefelsäure, geworden ist.

Nun nehme man die Wand über der Schwefelsäure fort, wodurch das Gleichgewicht nicht gestört wird, und bewege *viertens* den Stempel abwärts, während man den Druck passend vermehrt**), bis aller Wasserdampf verschwunden ist.

Endlich *fünftens* vermehre man den Druck auf seinen ursprünglichen Werth.

Es soll die Abnahme der Energie unseres Systems für diesen ganzen Process berechnet werden; diese ist nach dem S. 107 entwickelten Satze gleich der Wärmemenge Q, welche erzeugt wird, wenn man Wasser und Schwefelsäure geradezu zusammengiesst, welche dann abgeleitet werden muss, wenn man Temperatur und Druck ihre ursprünglichen Werthe annehmen lässt.

Für den ersten und den fünften Theil des Processes kann die Aenderung der Energie vernachlässigt werden; eine solche findet statt nur in Folge davon, dass bei Aenderung des Druckes das Volumen der Flüssigkeit ein anderes wird. Die hierbei geleistete Arbeit ist verschwindend klein gegen die anderen in Betracht kommenden Arbeitsgrössen.

Für den zweiten Theil ist nach der Formel auf Seite 95

$$U = \left(T\frac{dp}{dT} - p\right)(s - \sigma)x + \int^T dT\left(C - p\frac{d\sigma}{dT}\right)$$

die *Zunahme* der Energie also hier:***)

$$\delta U = \left(T\frac{dp_0}{dT} - p_0\right)(s - \sigma)m,$$

wo m die Masse des vorhandenen Wassers bezeichnet; oder genau genug:

$$\delta U = \left(T\frac{dp_0}{dT} - p_0\right)s_0 m,$$

*) z. B. der Atmosphärendruck. D. H.

**) Denn je mehr Wasser die Schwefelsäure aufnimmt, desto grösser wird die Spannung des Wasserdampfes über ihr. D. H.

***) Da das Integral nur von T abhängt. D. H wenn wir jetzt s_0 das specifische Volumen des gesättigten Dampfes *über Wasser* nennen.

Ist ferner s das specifische Volumen des Dampfes bei irgend einem Drucke p und der Temperatur T und ist p_1 die Spannung des Dampfes über der abgeschlossenen Schwefelsäure, so ist nach der Formel auf S. 73:

$$U = -\int_{p_0}^{p} dp\left(p\frac{\partial v}{\partial p} + T\frac{\partial v}{\partial T}\right) + \int^{T} dT\left(C_{p_0} - p_0\frac{\partial v_0}{\partial T}\right)$$

die Zunahme der Energie für den dritten Theil

$$\delta U = m\int_{p_1}^{p_0}\left(p\frac{\partial s}{\partial p} + T\frac{\partial s}{\partial T}\right)dp.$$

Wir kommen endlich zum vierten Theil. Hier nimmt der Druck im Allgemeinen zu, in dem Maasse, in dem die Schwefelsäure verdünnter wird. Wir wollen m als unendlich klein annehmen, dann fällt der Einfluss dieses Umstandes fort und es bleibt während des vierten Theiles des Processes $p = p_1$ und ähnlich wie bei dem zweiten Theil ist für den vierten Theil*)

$$\delta U = -\left(T\frac{dp_1}{dT} - p_1\right)s_1 m,$$

wo s_1 das specifische Volumen des Dampfes bei p_1 und T ist und wo die Volumenänderungen der Säure, ebenso wie oben die des Wassers, vernachlässigt sind.

Ist Q die Wärmemenge, welche erzeugt wird, wenn die Wassermasse m zu der Anfangs abgesperrten Schwefelsäure gegossen wird, so ist mithin:

$$\frac{Q}{m} = \left(T\frac{dp_1}{dT} - p_1\right)s_1 - \left(T\frac{dp_0}{dT} - p_0\right)s_0 - \int_{p_1}^{p_0}\left(p\frac{\partial s}{\partial p} + T\frac{\partial s}{\partial T}\right)dp.$$

Wir wollen die Bezeichnung ändern, und für Q und m (welche unendlich klein angenommen sind) dQ und dm schreiben; dann ist Q die Wärmemenge, welche erzeugt wird, wenn die endliche Wassermasse m zu einer beliebigen Menge Schwefelsäure gesetzt wird, und es ist

$$\frac{dQ}{dm} = \left(T\frac{dp_1}{dT} - p_1\right)s_1 - \left(T\frac{dp_0}{dT} - p_0\right)s_0 - \int_{p_1}^{p_0}\left(p\frac{\partial s}{\partial p} + T\frac{\partial s}{\partial T}\right)dp.$$

Sehr einfach wird diese Gleichung, wenn man sich erlaubt, den Wasserdampf bis zu seiner Condensation als ideelles Gas anzusehen,

*) Hier gilt das entgegengesetzte Vorzeichen, weil dort Ausdehnung, hier Compression stattfindet. D. H.

was bei niederen Temperaturen keine grossen Fehler herbeiführen kann. Dann ist

$$s_1 p_1 = s_0 p_0 = s p = R T.$$

Das Integral wird dann gleich Null, die Glieder $-p_1 s_1$ und $+p_0 s_0$ heben sich fort und es wird

$$T s_1 \frac{d p_1}{d T} = R T^2 \frac{1}{p_1} \frac{d p_1}{d T} = R T^2 \frac{d \log p_1}{d T}$$

und daher

$$\frac{d Q}{d m} = R T^2 \frac{d \log \left(\frac{p_1}{p_0}\right)}{d T}.$$

Aus den schon erwähnten Beobachtungen von Thomsen ist Q*) als Function von m bekannt, und Regnault hat für verdünnte Schwefelsäure von verschiedenen Concentrationen p_1 bestimmt. An diesen Beobachtungen habe ich**) die abgeleitete Gleichung geprüft und sie in hinreichender Uebereinstimmung mit der Erfahrung gefunden.

Ganz ähnliche Betrachtungen lassen sich offenbar über die Auflösung von Salzen und die Verdünnung von Salzlösungen anstellen.

*) In der obigen Berechnung bedeutet Q die Summe der nach Aussen abgegebenen Wärme und der nach Aussen abgegebenen Arbeit. (S. 107). Bei der directen Vermischung von Wasser und Schwefelsäure ist aber die letztere zu vernachlässigen. D. H.

**) Kirchhoff, Pogg. Ann. Bd. 104. p. 612. 1858.

Elfte Vorlesung.

Bewegte Flüssigkeit. — Erweiterung der Definition der Temperatur. — Bewegungsgleichungen mit Berücksichtigung der inneren Reibung und Wärmeleitung. Wärmeerzeugung durch die innere Reibung. — Grenzbedingungen. — Wärmeerzeugung durch die äussere Reibung. — Vereinfachung der Formeln durch Vernachlässigung von Reibung und Wärmeleitung. — Existenz eines Geschwindigkeitspotentials. Stationärer Zustand.

§ 1.

Wir haben bis jetzt nur Fälle betrachtet, in denen die lebendige Kraft der Theile des betrachteten Systems zu vernachlässigen ist; wir wollen jetzt zur Betrachtung solcher Fälle übergehen, in welchen das nicht zutrifft, dabei uns aber auf Flüssigkeiten beschränken. Beim Gleichgewicht hängt der Zustand einer solchen von *zwei* Variablen ab, als welche wir die Dichtigkeit μ und die Temperatur T annehmen wollen; von diesen ist die Energie eine Function, die wir als bekannt annehmen. Wir denken uns nun eine irgendwie bewegte Flüssigkeit und wollen die Dichtigkeit, die Temperatur und die Energie eines unendlich kleinen Theiles derselben in einem gewissen Augenblicke ins Auge fassen. Der Begriff der Dichtigkeit bedarf keiner Erläuterung: sie ist die Masse, dividirt durch das Volumen. Dass dem Theile eine gewisse Energie zukommt, ist auch klar; sie kommt jedem Körper zu, sie hängt aber ab von der Bewegung. Die Art dieser Abhängigkeit lässt sich leicht angeben, wenn alle materiellen Punkte die gleiche Geschwindigkeit besitzen. Lassen wir in einem solchen Falle auf den Körper äussere Kräfte wirken, welche die Geschwindigkeit allmählich*) verkleinern, während keine Wärme zu- und abgeführt wird. Ist die Geschwindigkeit vernichtet, so ist äussere Arbeit geleistet, die der ursprünglichen lebendigen Kraft gleich ist; die Temperatur und die Dichtigkeit aber sind ungeändert geblieben; daraus folgt, dass die ursprüngliche Energie gleich ist der lebendigen Kraft plus der Energie, die der Körper in der Ruhe bei gleicher Temperatur und Dichtigkeit besitzt.

*) und in allen Punkten gleichmässig. D. H.

Es ist in diesem Satze die Rede von der *Temperatur* einer gleichmässig bewegten Flüssigkeit; man kann von dieser mit demselben Rechte sprechen, wie von einer *ruhenden;* man kann sie auf dieselbe Weise sich gemessen denken mit Hülfe eines hineingebrachten Thermometers; nur muss dieses die Bewegung der Flüssigkeit mitmachen.

Denken wir uns aber, dass in einem unendlich kleinen Theile der Flüssigkeit *relative* Bewegungen stattfinden, so sind wir so ohne Weiteres nicht berechtigt, von seiner Temperatur zu sprechen, da nach dem, was wir bis jetzt über den Begriff der Temperatur festgesetzt haben, kein Weg *denkbar* ist, auf dem jene Temperatur gemessen werden könnte. Als die nothwendige Grundlage jeder Temperaturmessung haben wir nämlich bis jetzt den Satz betrachtet, dass zwei mit einander in Berührung befindliche Körper, deren Zustände der Zeit nach unveränderlich sind, *gleiche Temperaturen* haben müssen. Unsere Flüssigkeit ändert aber nach der Annahme, eben durch die relativen Bewegungen ihrer Theile, mit endlicher Geschwindigkeit ihren Zustand; der genannte Satz kann also auf unsere Flüssigkeit nicht angewandt, die Temperatur dieser mit seiner Hülfe nicht gemessen werden. Wir können hiernach die Temperatur der bewegten Flüssigkeit noch willkürlich definiren; nur müssen wir dabei dem nicht widersprechen, was wir über die Temperatur ruhender Körper festgesetzt haben. Wir geben eine solche Definition, indem wir einen Satz aufstellen, der sich auf die Energie der beliebig bewegten Flüssigkeit bezieht, und in dem ihre Temperatur vorkommt; dieser Satz ist der, dass die Energie der bewegten unendlich kleinen Flüssigkeitsmasse gleich ist ihrer lebendigen Kraft plus der Energie, die sie in der Ruhe bei gleicher Dichtigkeit und gleicher Temperatur haben würde. Auf eine ruhende Flüssigkeit angewandt giebt der Satz eine identische Gleichung, kann also nicht zu Widersprüchen mit Sätzen führen, welche für den Fall der Ruhe gelten.

§. 2.

Wir wollen nun die Differentialgleichungen für die Bewegung einer Flüssigkeit mit Rücksicht auf die Temperaturänderungen, die in ihr stattfinden können, aufstellen.

Es sei μ die Dichte; u, v, w die Componenten der Geschwindigkeit des Flüssigkeitstheilchens an der Stelle x, y, z; X_x, Y_x, Z_x, bez. X_y, Y_y, Z_y, bez. X_z, Y_z, Z_z die Componenten der Drucke auf die Flächen, welche im Raumpunkte x, y, z senkrecht zur X, bez. Y, bez. Z Achse gelegt sind; XYZ seien die Componenten der äusseren auf die Masseneinheit wirkenden Kräfte; endlich sei t die Zeit. Dann gelten die hydrodynamischen Gleichungen:*)

*) Kirchhoff, Mechanik, Elfte Vorlesung. — In diesen Gleichungen bezieht sich die Differentiation nach t auf einen bestimmten *materiellen* Punkt. D. H.

$$\frac{d\mu}{dt} + \mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0,$$

$$\mu\frac{du}{dt} = \mu X - \frac{\partial X_x}{\partial x} - \frac{\partial X_y}{\partial y} - \frac{\partial X_z}{\partial z},$$

$$\mu\frac{dv}{dt} = \mu Y - \frac{\partial Y_x}{\partial x} - \frac{\partial Y_y}{\partial y} - \frac{\partial Y_z}{\partial z},$$

$$\mu\frac{dw}{dt} = \mu Z - \frac{\partial Z_x}{\partial x} - \frac{\partial Z_y}{\partial y} - \frac{\partial Z_z}{\partial z},$$

$$X_y = Y_x, \quad Y_z = Z_y, \quad Z_x = X_z.$$

Diese Gleichungen gelten für jeden continuirlichen Körper. Ist der Körper eine Flüssigkeit, in der keine Reibung stattfindet, so verschwinden die Grössen

$$X_x - p, \; Y_y - p, \; Z_z - p, \quad Y_z, \; Z_x, \; X_y,$$

wo p der Druck der ruhenden Flüssigkeit bei gleichem μ und T ist. Dasselbe findet statt auch in einer *ruhenden* reibenden Flüssigkeit, wenn p der Druck ist, der den stattfindenden Werthen von μ und T entspricht. Sonst sind bei einer reibenden Flüssigkeit diese sechs Grössen von Null verschieden. Wir nehmen an, dass sie lineare homogene Functionen von

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \; \frac{\partial v}{\partial y}, \; \frac{\partial w}{\partial z}, \; \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \; \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \; \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

sind, von welchen Grössen die relativen Geschwindigkeiten der Theile eines unendlich kleinen Volumens abhängen, und zwar Functionen, die vom Coordinatensystem unabhängig sind. Diese Annahme ergiebt, wenn p der Druck der ruhenden Flüssigkeit bei gleichem μ und T ist:*)

$$X_x = p - 2\varrho\frac{\partial u}{\partial x} + 2\varrho'\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right),$$

$$Y_y = p - 2\varrho\frac{\partial v}{\partial y} + 2\varrho'\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right),$$

$$Z_z = p - 2\varrho\frac{\partial w}{\partial z} + 2\varrho'\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right),$$

$$Y_z = -\varrho\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right),$$

$$Z_x = -\varrho\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right),$$

$$X_y = -\varrho\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right),$$

*) Die Ableitung dieser Gleichungen erfolgt ganz auf demselben Wege, wie die Berechnung der Drucke in einem elastischen isotropen festen Körper als Functionen der sechs Deformationsgrössen. Vgl. Kirchhoff, Mechanik, l. c. D. H.

wo ϱ und ϱ', ebenso wie p, Functionen von μ und T sind. (Eine später zu erörternde Theorie (17. Vorlesung § 2) giebt für *Gase*

$$3p = X_x + Y_y + Z_z,$$

d. h.

$$\varrho' = \frac{1}{3}\varrho.)$$

Ist die Flüssigkeit als incompressibel anzusehen, so ist der Werth von ϱ' gleichgültig und kann gleich Null gesetzt werden.

§ 3.

Um eine weitere Differentialgleichung zu bilden, müssen wir die *Wärmeleitung* in Betracht ziehen; in Bezug auf diese nehmen wir an, entsprechend dem, was wir für die Wärmeleitung in ruhenden Körpern angenommen haben (S. 9), dass die Wärmemenge, welche in der Zeiteinheit durch ein Element ds in der Richtung seiner Normale n strömt, gleich ist:

$$-\varkappa\frac{\partial T}{\partial n}ds,$$

wo die Leitungsfähigkeit $\varkappa$ nur von μ und T abhängt. Die letztere Annahme ist eine Hypothese.

Die gesuchte Differentialgleichung werden wir erhalten, indem wir auf zweifache Weise die Aenderung ausdrücken, welche im Zeitelement dt die Energie eines beliebigen Theiles der Flüssigkeit erleidet.*)

Für eine unendlich langsame Bewegung sei die Wärmemenge dQ, die der Masseneinheit zugeführt werden muss, um μ um $d\mu$, T um dT zu vergrössern:

$$dQ = -M\,d\mu + C_v\,dT,$$

wo C_v die specifische Wärme bei constantem Volumen ist und**)

$$M = (C_p - C_v)\frac{\frac{\partial p}{\partial \mu}}{\frac{\partial p}{\partial T}}.$$

*) Hierzu benutzen wir zunächst den Satz (S. 114), dass die Energie eines unendlich kleinen Flüssigkeitstheilchens gleich ist seiner lebendigen Kraft plus der Energie, welche das Theilchen in der Ruhe bei gleicher Dichtigkeit μ und gleicher Temperatur T haben würde. Die Aenderung der letzteren Energie im Zeitelement dt ergiebt folgende Betrachtung. D. H.

**) $M = -\left(\frac{dQ}{d\mu}\right)_T = -\left(\frac{dQ}{dp}\right)_T\left(\frac{\partial p}{\partial \mu}\right)_T$. Hierbei bedeutet der Index, dass T constant bleibt. Der Werth von $\left(\frac{dQ}{dp}\right)_T$ ist identisch mit dem von X auf S. 72, worin noch $v = \frac{1}{\mu}$ zu setzen und die Differentiationen auf die unabhängigen Variablen μ und T zurückzuführen sind. D. H.

Da ferner $\frac{1}{\mu}$ das Volumen der Masseneinheit ist, so ist die Arbeit, die äussere Kräfte bei der gedachten Veränderung leisten, gleich

$$-p\,d\left(\frac{1}{\mu}\right)=\frac{p}{\mu^2}\,d\mu.$$

Die Aenderung der Energie der Masseneinheit, wenn μ um $d\mu$, T um dT wächst, ist daher

$$\left(\frac{p}{\mu^2}-M\right)d\mu+C_v\,dT.$$

Ist also dm ein Massenelement des betrachteten Theiles, so ist die im Zeitelement dt stattfindende Vergrösserung der Energie nach der Definition der Temperatur (S. 114) gleich

$$dt\int dm\left(\frac{1}{2}\frac{d(u^2+v^2+w^2)}{dt}+\left(\frac{p}{\mu^2}-M\right)\frac{d\mu}{dt}+C_v\frac{dT}{dt}\right).$$

Dieser Ausdruck muss nun gleich sein der Summe der Arbeit, welche die äusseren Kräfte in Wirklichkeit leisten, und der gleichzeitig zugeführten Wärmemenge. Jene Arbeit ist

$$dt\int dm(Xu+Yv+Zw)+dt\int ds(X_n u+Y_n v+Z_n w),$$

wo ds ein Element der Oberfläche, n die nach Innen gerichtete Normale ist. Diesen Ausdruck gestalten wir mit Hülfe unserer Differentialgleichungen auf S. 115 um. Wir multipliciren die dort stehenden Differentialgleichungen für $\mu\frac{du}{dt}$, $\mu\frac{dv}{dt}$, $\mu\frac{dw}{dt}$ der Reihe nach mit $ud\tau$, $vd\tau$, $wd\tau$, wo

$$\mu\,d\tau=dm$$

ist, addiren und integriren, dann kommt

$$\begin{aligned}\int dm&\left(\frac{1}{2}\frac{d(u^2+v^2+w^2)}{dt}-Xu-Yv-Zw\right)\\&=\int ds\,(X_n u+Y_n v+Z_n w)\\&\quad+\int d\tau\left(X_x\frac{\partial u}{\partial x}+Y_y\frac{\partial v}{\partial y}+Z_z\frac{\partial w}{\partial z}+Y_z\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right.\\&\quad\left.+Z_x\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)+X_y\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right).\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass jene Arbeit gleich ist:

$$\begin{aligned}dt&\int\frac{1}{2}\frac{d(u^2+v^2+w^2)}{dt}\,dm\\&-dt\int\frac{dm}{\mu}\left(X_x\frac{\partial u}{\partial x}+Y_y\frac{\partial v}{\partial y}+Z_z\frac{\partial w}{\partial z}+Y_z\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right.\\&\qquad\left.+Z_x\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)+X_y\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right),\end{aligned}$$

oder, wenn man die Werthe von X_x, Y_y, Z_z, Y_z, Z_x, X_y substituirt und die Gleichung der Continuität:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dt}$$

benutzt, gleich

$$dt\int \frac{1}{2}\frac{d(u^2+v^2+w^2)}{dt}\,dm + dt\int \frac{dm}{\mu^2}\,p\,\frac{d\mu}{dt}$$
$$+ dt\int \frac{dm}{\mu}\Big\{\varrho\Big(2\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2 + 2\Big(\frac{\partial v}{\partial y}\Big)^2 + 2\Big(\frac{\partial w}{\partial z}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\Big)^2$$
$$+ \Big(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\Big)^2\Big) - 2\varrho'\Big(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\Big)^2\Big\}.$$

Die Wärmemenge aber, welche der betrachteten Masse in der Zeit dt zugeführt wird, ist, wie oben:

$$-dt\int \varkappa\frac{\partial T}{\partial n}\,ds$$

oder, wenn man das Flächenintegral in ein Raumintegral verwandelt:

$$dt\int \frac{dm}{\mu}\left(\frac{\partial\left(\varkappa\frac{\partial T}{\partial x}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\varkappa\frac{\partial T}{\partial y}\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(\varkappa\frac{\partial T}{\partial z}\right)}{\partial z}\right).$$

Setzt man nun den oben gewonnenen Ausdruck für die Aenderung der Energie gleich der Summe der beiden Ausdrücke, die wir hier für die Arbeit der äusseren Kräfte und für die zugeführte Wärmemenge erhalten haben, und berücksichtigt man, dass die Masse, deren Element dm genannt ist, auch unendlich klein angenommen werden kann, so erhält man:

$$-M\frac{d\mu}{dt} + C_v\frac{dT}{dt} = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial\left(\varkappa\frac{\partial T}{\partial x}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\varkappa\frac{\partial T}{\partial y}\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(\varkappa\frac{\partial T}{\partial z}\right)}{\partial z}\right)$$
$$+ \frac{1}{\mu}\Big\{\varrho\Big(2\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2 + 2\Big(\frac{\partial v}{\partial y}\Big)^2 + 2\Big(\frac{\partial w}{\partial z}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\Big)^2$$
$$+ \Big(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\Big)^2\Big) - 2\varrho'\Big(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\Big)^2\Big\}.$$

Das zweite Glied der rechten Seite bezeichnet man als die in der Masseneinheit *durch Reibung erzeugte Wärmemenge.*

Zu dieser Gleichung kommt noch die Definition, durch die wir p in unsere jetzige Rechnung eingeführt haben, nämlich *die* Gleichung zwischen p, μ, T, die beim Gleichgewicht besteht.

§ 4.

Ferner müssen an der Oberfläche der Flüssigkeit, da, wo sie mit einem anderen Körper in Berührung ist, gewisse Grenzbedingungen erfüllt sein; wir wollen diese aufstellen.

Den anderen Körper wollen wir auch als eine Flüssigkeit bezeichnen; wir schliessen dadurch den wichtigen Fall nicht aus, dass derselbe ein *starrer* Körper ist; einen solchen können wir nämlich als eine Flüssigkeit ansehen, bei der die Grösse ϱ, von welcher die innere Reibung abhängt, unendlich gross ist; ist das der Fall, so müssen

$$\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial w}{\partial z},\ \frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y},\ \frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z},\ \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}$$

gleich Null sein, weil X_x, Y_y, Z_z, Y_z, Z_x, X_y nicht unendlich werden können, widrigenfalls unendlich grosse Beschleunigungen stattfinden müssten; es können also keine relativen Bewegungen in dem Körper stattfinden.

Für jedes Element der Grenzfläche dS, dessen in das Innere *unserer* Flüssigkeit gerichtete Normale n ist, muss dann zunächst sein:*)

$$(u-u')\cos(nx)+(v-v')\cos(ny)+(w-w')\cos(nz)=0,$$

wenn u', v', w' die Geschwindigkeitscomponenten in der anderen Flüssigkeit bezeichnen.

Ferner muss nach dem Princip von Wirkung und Gegenwirkung sein:

$$X_n=X_n',\quad Y_n=Y_n',\quad Z_n=Z_n'.$$

Im Allgemeinen verschwinden $u-u'$, $v-v'$, $w-w'$ nicht, d. h. es findet eine relative Geschwindigkeit an der Grenzfläche statt. Es ist die Hypothese aufgestellt worden, dass mit diesen Grössen proportional sind die Componenten nach den Achsen derjenigen Componente von (X_n, Y_n, Z_n), welche senkrecht auf n ist;**) das giebt:

$$X_n-(X_n\cos(nx)+Y_n\cos(ny)+Z_n\cos(nz))\cos(nx)=\lambda(u'-u),$$
$$Y_n-(X_n\cos(nx)+Y_n\cos(ny)+Z_n\cos(nz))\cos(ny)=\lambda(v'-v),$$
$$Z_n-(X_n\cos(nx)+Y_n\cos(ny)+Z_n\cos(nz))\cos(nz)=\lambda(w'-w),$$

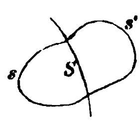
wo λ von den Geschwindigkeiten unabhängig ist und die sogenannte äussere Reibung bedingt.

Weiter nehmen wir an

$$T=T'.$$

Nun fehlt für die Grenze noch *eine* Bedingung, die aus der Betrachtung der Energie herzuleiten ist. Wir denken uns genau dieselbe Betrachtung wiederholt, die uns zu der letzten partiellen Differentialgleichung geführt hat, nur mit dem Unterschiede, dass die Masse, deren Element dm ist, zum Theil der einen, zum Theil der anderen Flüssigkeit angehört. Dann bleibt zunächst Alles wie oben, indem die Integrale einfach über beide Theile der Masse zu

Fig. 10.



*) Kirchhoff, Mechanik, Zehnte Vorlesung.

**) l. c. Sechsundzwanzigste Vorlesung. — Der Gesammtdruck auf die Grenzfläche: X_n, Y_n, Z_n zerfällt in den Normaldruck: $X_n\cos(nx)+Y_n\cos(ny)+Z_n\cos(nz)$ und in den Tangentialdruck, dessen Componenten also durch Subtraction der Componenten des Normaldrucks von denen des Gesammtdruckes erhalten werden. D. H.

erstrecken sind. Aber die durch partielle Integration oben (S. 117) hergeleitete Gleichung

$$\int dm \left(\frac{1}{2}\frac{d(u^2+v^2+w^2)}{dt} - Xu - Yv - Zw\right)$$
$$= \int ds\,(X_n u + Y_n v + Z_n w)$$
$$+ \int d\tau \left(X_x \frac{\partial u}{\partial x} + Y_y \frac{\partial v}{\partial y} + Z_z \frac{\partial w}{\partial z} + Y_z\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\right.$$
$$\left. + Z_x\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) + X_y\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right)$$

gilt hier nicht; um sie richtig zu machen, ist auf ihrer rechten Seite das Glied

$$\int dS\,(X_n(u-u') + Y_n(v-v') + Z_n(w-w'))$$

hinzuzufügen, wie man sieht, wenn man jene Gleichung bildet für jeden der beiden Theile der betrachteten Masse und die Summe nimmt. Der Ausdruck für die äussere Arbeit lautet also jetzt:

$$dt\int \frac{1}{2}\frac{d(u^2+v^2+w^2)}{dt}\,dm + dt\int \frac{dm}{\mu^2}\,p\,\frac{d\mu}{dt}$$
$$+ dt\int \frac{dm}{\mu}\left\{\varrho\left(2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right.\right.$$
$$\left.\left. + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right) - 2\varrho'\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right\}$$
$$- dt\int dS\,(X_n(u-u') + Y_n(v-v') + Z_n(w-w')).$$

Die in der Zeit dt zugeführte Wärmemenge ist wieder

$$- dt\int \varkappa \frac{\partial T}{\partial n}\,ds$$

oder, da $\varkappa$ und $\frac{\partial T}{\partial x}$, $\frac{\partial T}{\partial y}$, $\frac{\partial T}{\partial z}$ an der Fläche S Sprünge erleiden können:

$$dt\int \frac{dm}{\mu}\left(\frac{\partial\left(\varkappa \frac{\partial T}{\partial x}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\varkappa \frac{\partial T}{\partial y}\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(\varkappa \frac{\partial T}{\partial z}\right)}{\partial z}\right)$$
$$+ dt\int dS\left(\varkappa \frac{\partial T}{\partial n} - \varkappa' \frac{\partial T'}{\partial n}\right).$$

Setzt man nun wieder den Ausdruck für die Aenderung der Gesammtenergie gleich der Summe der äusseren Arbeit und der zugeführten Wärmemenge, so erhält man mit Rücksicht auf die letzte partielle Differentialgleichung (S. 118)

$$dt\int dS\left(\varkappa \frac{\partial T}{\partial n} - \varkappa' \frac{\partial T'}{\partial n}\right)$$
$$= dt\int dS(X_n(u-u') + Y_n(v-v') + Z_n(w-w')),$$

also, da diese Gleichung für jedes Element dS gelten muss:

$$\varkappa\frac{\partial T}{\partial n}-\varkappa'\frac{\partial T'}{\partial n}=X_n(u-u')+Y_n(v-v')+Z_n(w-w')$$

und nach S. 119:

$$\varkappa\frac{\partial T}{\partial n}-\varkappa'\frac{\partial T'}{\partial n}=-\lambda\left((u-u')^2+(v-v')^2+(w-w')^2\right).$$

Dieser Ausdruck, negativ genommen, ist die Wärme, welche in der Einheit der Zeit und der Fläche durch die „äussere Reibung" erzeugt wird und welche nach beiden Seiten hin abfliesst.

Ist $\lambda=\infty$, so sind $u-u'$, $v-v'$, $w-w'$ gleich Null und zwar so, dass $\lambda(u-u')$, $\lambda(v-v')$, $\lambda(w-w')$ nicht unendlich sind, da X_x, Y_y, Z_z, Y_z, Z_x, X_y endlich sind; hiernach ist

$$\lambda\left((u-u')^2+(v-v')^2+(w-w')^2\right)=0,$$

und die Reibungswärme verschwindet, ebenso wie für $\lambda=0$. Der Natur der Sache nach sind die entwickelten Gleichungen verwickelter, als die entsprechenden der reinen Mechanik, die auf Temperaturänderungen keine Rücksicht zu nehmen haben. Es ist die letzte partielle Differentialgleichung und die letzte Grenzbedingung, welche hier die grössere Complication herbeiführen.

§ 5.

Eine grosse Vereinfachung tritt ein, wenn man die Wärmeleitung und die Reibung vernachlässigen, also $\varkappa$, ϱ, ϱ', λ gleich Null setzen darf,*) was in manchen Fällen näherungsweise erlaubt ist. Die letzte partielle Differentialgleichung (S. 118) giebt dann

$$-M\,d\mu+C_v\,dT=0;$$

das ist die Differentialgleichung der *adiabatischen* Beziehung zwischen μ und T; hat man sie integrirt und zieht man hinzu die Gleichung zwischen p, μ, T, die für die Flüssigkeit gilt, so reduciren sich die *drei* Unbekannten p, μ, T auf *eine*, etwa μ. Die Gleichungen sind dann von derselben Form, wie in der reinen Mechanik; nur die Beziehung zwischen p und μ ist eine andere, als wenn T sich nicht änderte; die Aenderungen von T sind zu berechnen aus denen von μ.

Einige hierher gehörige Fälle wollen wir betrachten. Zu weiterer Vereinfachung nehmen wir an, dass ein Geschwindigkeitspotential φ existirt, dass also

$$u=\frac{\partial\varphi}{\partial x},$$

$$v=\frac{\partial\varphi}{\partial y},$$

$$w=\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

*) Mithin auch:

$$X_x=Y_y=Z_z=p,\qquad Y_z=Z_x=X_y=0.$$ D. H.

Setzt man ausserdem noch voraus, dass keine äussere Kräfte wirken, so folgt dann, wenn man in den drei Gleichungen S. 115 setzt:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z},$$
$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z},$$
$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x} = 0,$$
$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial y} = 0,$$
$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z} = 0.$$

Führt man hier das Geschwindigkeitspotential ein, multiplicirt mit dx, dy, dz, addirt und integrirt dann, so ergiebt sich:

$$0 = \int\frac{dp}{\mu} + \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right)$$

und, wenn weiter der Zustand ein stationärer ist:

$$0 = \int\frac{dp}{\mu} + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right),$$

wofür wir schreiben

$$0 = \int\frac{dp}{\mu} + \frac{1}{2}V^2.$$

Zwölfte Vorlesung.

Ausströmen eines Gases in Form eines Strahles. — Untersuchung des stationären Strahles in der Nähe der Ausflussöffnung, speciell für atmosphärische Luft. — Ausströmen eines Gemisches von Flüssigkeit und ihrem Dampf. — Tabellen von Zeuner für Wasserdampf. — Strömung von Flüssigkeit aus einer engeren in eine weitere conaxiale lange Röhre, die ursprünglich mit ruhender Flüssigkeit angefüllt war. — Stationärer Zustand an den Enden der weiteren Röhre. — Einführung vereinfachender Näherungsannahmen. — Beispiele für Wasserdampf und Wasser. — Specielle Fälle.

§ 1.

Von den in der vorigen Vorlesung entwickelten Gleichungen wollen wir zunächst eine Anwendung machen auf den Ausfluss einer Flüssigkeit aus einem Gefässe.

Wenn Wasser aus der Oeffnung eines Gefässes ausfliesst, so bildet sich bekanntlich ein *Strahl*; es ist dieser anfangs ganz zusammenhängend, dann trennen einzelne Tropfen sich ab, endlich zerfällt er ganz in Tropfen. Ganz Aehnliches findet statt, wenn Luft aus einem Gefässe, in dem sie verdichtet ist, in die Atmosphäre tritt; man sieht den Strahl, wenn man etwa Rauch dem verdichteten Gase beigemengt hat; nur eine Tropfenbildung giebt es hier nicht; an ihrer Stelle zeigt sich hier Folgendes: in einiger Entfernung von der Ausflussöffnung treten Theile des Strahles in die äussere Luft und Theile dieser in den Strahl; an der Oberfläche dieses bildet sich eine lebhafte Wirbelbewegung, die die äussere und die innere Luft vermischt, den Querschnitt des Strahles vergrössert und seine Grenze unbestimmt macht. Diese Wirbelbewegung greift, je weiter man auf dem Strahle fortgeht, mehr und mehr um sich nach Aussen und nach der Achse desselben; der Querschnitt wird immer grösser, die Grenze immer unbestimmter, zugleich der Rauch immer verdünnter und die Geschwindigkeit immer kleiner; in einem gewissen Abstande von der Ausflussöffnung ist von dem Strahle nichts mehr wahrnehmbar.

Diese Veränderungen des Strahles sind eine Folge der Reibung; ohne diese würde Geschwindigkeit und Querschnitt desselben ungeändert bleiben und eine Vermischung desselben mit der äusseren Luft gar nicht stattfinden. Andererseits übt die Reibung ihren Einfluss vorwiegend gerade da aus, wo die ursprünglich ruhende und die lebhaft bewegte Luft sich mit einander vermischen, und wir können, näherungsweise richtig, annehmen, dass im Gefässe und vor der Ausflussöffnung, da, wo der Strahl noch scharf begrenzt ist, keine Reibung stattfindet. Das wollen wir thun; wir wollen ferner annehmen, dass in dem genannten Raume die Wärmeleitung unmerklich ist und dass vor dem Freimachen der Oeffnung die Luft überall ruhte; dann giebt es in dem bezeichneten Gebiete ein Geschwindigkeitspotential φ, da es ursprünglich eines gab (welches gleich Null oder constant war). Ferner wollen wir annehmen, dass die Bewegung als eine stationäre angesehen werden kann und dass in einem Theile des Gefässes die Geschwindigkeit verschwindend klein ist; hier sei der Druck gleich p_1. Die äussere Luft in der Nähe der Mündung ruht, wie Versuche mit einer Lichtflamme gezeigt haben; hier sei der Druck gleich $p_2 < p_1$. Es sei V_2 die Geschwindigkeit in irgend einem Punkte der Oberfläche des Strahles da, wo eine scharfe Oberfläche noch existirt; dann giebt die vorausgeschickte Gleichung

$$\frac{1}{2} V_2^2 = \int_{p_2}^{p_1} \frac{dp}{\mu} .$$

Dabei gilt zwischen p und μ nach S. 121 die Beziehung, die immer zwischen ihnen bei einem Gase besteht, welches ohne Zufuhr oder Entziehung von Wärme sein Volumen in umkehrbarer Weise ändert. Brauchen wir das frühere Zeichen für das Volumen der Masseneinheit:

$$v = \frac{1}{\mu},$$

so ist, wenn das Gas ein ideelles ist, nach S. 75

$$\frac{v}{v_1} = \left(\frac{p_1}{p}\right)^{\frac{1}{\gamma}},$$

wo für atmosphärische Luft $\gamma = 1,41$ ist: also

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} V_2^2 = \int_{p_2}^{p_1} v\,dp &= v_1 p_1^{\frac{1}{\gamma}} \int_{p_2}^{p_1} p^{-\frac{1}{\gamma}} dp \\ &= \frac{\gamma}{\gamma-1} v_1 p_1^{\frac{1}{\gamma}} \left(p_1^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - p_2^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right) \\ &= \frac{\gamma}{\gamma-1} v_1 p_1 \left(1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right).\end{aligned}$$

Für die Temperatur T gilt dabei:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}.$$

Also, da $\gamma > 1$: $\qquad T_2 < T_1$.

Da, wo die Geschwindigkeit zerstört ist, ist die Temperatur wieder T_1, vorausgesetzt, dass dieses auch die Temperatur der äusseren Atmosphäre war; durch Reibung ist die lebendige Kraft in Wärme umgesetzt.

Thomson und Joule erhielten diese Abkühlungen, indem sie ein Thermometer seitwärts an die Ausflussöffnung brachten; nämlich für

$p_2 = 1$ Atmosphäre,

$p_1 =$	8,4	4,9	2,1 Atmosphären
Abkühlung $=$	$13^0,4$	$10^0,3$	$5^0,8$ C,

dagegen fanden sie die Erwärmungen

$23^0,7 \quad 17^0,2 \quad 4^0,2$ C,

indem sie das Thermometer in einer Röhre gerade über die Oeffnung brachten. Der Finger, welcher die Oeffnung zuzuhalten sucht, empfindet starke Hitze, während das Metall, in dem die Oeffnung ist, sehr kalt ist. Diese Temperaturerhöhungen sind *theilweise* wohl Folge der Reibung, aber nicht allein; denn an einem Theile des Fingers ist $V = 0$; also $p = p_1$ und $T = T_1$, wenn keine Leitung und keine Reibung stattfände; von der Wand an der Oeffnung hat aber die abgekühlte Luft durch Leitung Wärme aufgenommen und erwärmt sich daher bis über die ursprüngliche Temperatur bei der Compression am Finger.

Ist die Oeffnung nur klein, so kann man p und daher auch V im ganzen Strahl als constant betrachten da, wo dieser cylindrisch ist. Ist f die Fläche des Querschnittes, so ist daher das in der Zeiteinheit bei p_2 und T_2 austretende Luftvolumen gleich

$$fV_2;$$

die Masse hiervon ist

$$\frac{fV_2}{v_2},$$

d. h.

$$fV_2 \frac{1}{v_1} \frac{T_1}{T_2} \frac{p_2}{p_1},$$

wo für V_2 und $\frac{T_1}{T_2}$ ihre obigen Werthe zu substituiren sind. Es ist f nicht die Fläche der Oeffnung, sondern wegen der *Contraction* des Strahles kleiner als diese.

§ 2.

Wir betrachten nun das Ausströmen eines Gemisches von Flüssigkeit und ihrem Dampf. Auch hier gilt die Gleichung

$$\frac{V_2^2}{2} = \int_{p_2}^{p_1} v\,dp,$$

wo zwischen v und p die „adiabatische Gleichung" des Gemisches besteht. Wir könnten das hier vorkommende Integral aus der früher aufgestellten Gleichung der adiabatischen Linie berechnen; wir finden es aber in passender Form bequemer auf folgendem Wege. Wir können, um es zu finden, die Bewegung gleich Null setzen, da die Beziehung zwischen v und p von der Bewegung unabhängig ist; dann ist nach S. 95 die Energie der Masseneinheit des Gemisches in der dort gebrauchten Bezeichnung, wenn noch σ vernachlässigt wird:

$$U = \int C\,dT + \left(T\frac{dp}{dT} - p\right) s x,$$

wobei

$$s x = v.$$

Wird keine Wärme zugeführt, so ist aber:

$$U = -\int p\,dv.$$

Also, wenn wieder r die latente Verdampfungswärme bedeutet:

$$-\int p\,dv = \int C\,dT + r x - p v.$$

Dies ergiebt durch Differentiation:

$$-p\,dv = C\,dT + d(rx) - d(pv)$$

oder:

$$0 = C\,dT + d(rx) - v\,dp,$$

die adiabatische Bedingung.

Setzt man hierin:

$$v\,dp = \frac{rx}{T}\,dT,$$

so folgt

$$0 = \frac{C\,dT}{T} + d\left(\frac{rx}{T}\right),$$

d. h.

$$\frac{rx}{T} = -\int \frac{C\,dT}{T},$$

woraus x als Function von T zu berechnen ist.

Es hat Zeuner für Wasserdampf Tabellen berechnet, mit deren Hülfe man hiernach $\int_{p_2}^{p_1} v\,dp$, also auch V_2 findet, wenn p_1, p_2*) und x_1 gegeben sind; dabei findet man dann auch x_2. Ist im Kessel reiner Wasserdampf, also $x_1 = 1$, so enthält der austretende Dampf flüssiges Wasser, d. h. $x_2 < x_1$. (Vgl. S. 91.) Nach Zeuner ist die Erscheinung, die der Strahl dann zeigt, diese: an der Ausflussöffnung zeigt sich ein genauer Kegel; das ist der mit Wasser vermischte Dampf. Schon in der Nähe der Oeffnung mischt sich mit dem Strahle

*) Dadurch unmittelbar auch T_1, T_2. D. H.

die äussere Luft. Diese übt einen doppelten Einfluss aus; sie entzieht dem schon an der Oeffnung auf 100°*) abgekühlten Dampfe Wärme und befördert dadurch das Tropfbarwerden; auf der anderen Seite vergrössert sie das Volumen und erregt durch Reibung Wärme; dadurch befördert sie die Verdampfung. Der Beobachtung zufolge überwiegt in mässiger Entfernung von der Oeffnung die zweite Wirkung; alles Wasser verdampft hier, der Strahl ist vollkommen durchsichtig und man kann ungestraft die Hand in ihn halten; in gewisser Entfernung wird die erste Wirkung überwiegend, es bilden sich wieder Nebel, die aber in noch grösserem Abstande von der Oeffnung wiederum aufgelöst werden.

Zeuner hat die Ausflussgeschwindigkeiten V_2 und die Ausflussmengen

$$\frac{V_2 f}{v_2} \quad \text{(S. 125)}$$

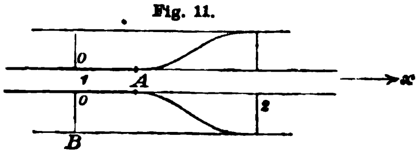
nach den entwickelten Formeln berechnet für die Fälle, dass reiner Wasserdampf und dass reines Wasser zum Ausfluss gelangt, und dass $p_1 = 2, 3, \ldots 14$ Atmosphären ist. Für reines Wasser ergiebt sich das überraschende, aber mit der Wirklichkeit, wie es scheint, übereinstimmende Resultat, dass die Ausflussmenge für alle jene Werthe von p_1 fast gleichen Werth hat, während V_2 auf etwa das doppelte steigt. Das liegt daran, dass an der Oeffnung immer eine Dampfbildung stattfindet, die um so reichlicher ist, je grösser p_1 ist.

§ 3.

Wir wollen jetzt noch einen verwickelteren Fall des Ausflusses einer Flüssigkeit betrachten, bei dem wir zu den schon bei dem früheren Falle benutzten Annahmen noch neue hinzufügen müssen.

Aus der Mündung A einer Röhre trete ein Strahl von Flüssigkeit in ursprünglich ruhende Flüssigkeit derselben Art. Ueber die Röhre sei eine zweite weitere, an beiden Enden offene Röhre geschoben; fände keine Reibung und keine Wärmeleitung statt, so würde der Strahl ungeändert fortgehn und die Flüssigkeit in dem weiteren Rohre ruhend bleiben. In Folge der Reibung breitet aber der Strahl sich aus, mischt sich mit der umgebenden Flüssigkeit und reisst einen Theil dieser mit sich fort; durch das Ende B muss daher (wir betrachten nur den stationären Zustand) Flüssigkeit angesaugt werden. Wir wollen nun annehmen: erstens, dass in einigem Abstand

Fig. 11.



*) Da $p_2 = 1$ Atmosphäre. D. H.

von A die Wirbelbewegungen, welche bei der Vermischung stattfinden, durch die Reibung vollständig erloschen sind, und dass hier die Theilchen überall mit gleicher Geschwindigkeit parallel der Achse sich bewegen; zweitens, dass an den Röhrenwandungen überall keine Reibung stattfindet, d. h. dass jeder Theil dieser einen *senkrechten Druck* erleidet.

Mit Hülfe dieser Annahmen werden wir über die Bewegungen in den Enden der weiteren Röhre Aufschluss erhalten können, obwohl wir die Vorgänge in dem zwischenliegenden Raume, da wo die Vermischung stattfindet und die Reibung ihren Einfluss übt, zu ermitteln ausser Stande sind. Wir ziehen zunächst aus den Differentialgleichungen der Bewegung die Schlüsse, die zu diesem Aufschluss führen.

Aus der Continuitätsgleichung des stationären Zustandes:

$$\frac{\partial(\mu u)}{\partial x} + \frac{\partial(\mu v)}{\partial y} + \frac{\partial(\mu w)}{\partial z} = 0$$

folgt durch Multiplication mit $dx\,dy\,dz$ und Integration

$$\int ds\,\mu(u\cos(nx) + v\cos(ny) + w\cos(nz)) = 0.$$

Diese Gleichung sagt aus, dass die Masse in dem von der Fläche s begrenzten Raume ungeändert bleibt. Es sei die Achse der Röhre die x-Achse; dann folgt hieraus, wenn 0, 1, 2 sich auf die in der Figur bezeichneten Querschnitte q*) beziehen,

$$q_0\mu_0 u_0 + q_1\mu_1 u_1 = q_2\mu_2 u_2 \tag{1}$$

Die erste der anderen Differentialgleichungen (S. 115) schreiben wir (indem wir keine Massenkräfte als wirksam annehmen)

$$\mu\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} = 0;$$

wo X_x, X_y, X_z die wesentlich durch die Reibung bedingten, Druckcomponenten sind; wo Reibung nicht stattfindet, ist

$$X_y = X_z = 0,$$
$$X_x = p.$$

Diese Gleichung multipliciren wir mit $dx\,dy\,dz$, integriren und berücksichtigen, dass:

$$\frac{\partial(\mu u)}{\partial x} + \frac{\partial(\mu v)}{\partial y} + \frac{\partial(\mu w)}{\partial z} = 0;$$

wir erhalten dann

$$\int ds\,\mu u\,(u\cos(nx) + v\cos(ny) + w\cos(nz))$$
$$+ \int ds\,(X_x\cos(nx) + X_y\cos(ny) + X_z\cos(nz)) = 0,$$

welche Gleichung einen der Schwerpunktssätze ausdrückt. Wenden

*) q_1 der Querschnitt der engeren, q_2 der der weiteren Röhre, q_0 ihre Differenz.

wir sie auf denselben Raum, wie die frühere, an und nennen p_0', p_1', p_2' die Drucke in den Querschnitten q_0, q_1, q_2, so kommt:*)

$$q_0 \mu_0 u_0^2 + q_1 \mu_1 u_1^2 - q_2 \mu_2 u_2^2 + q_0 p_0' + q_1 p_1' - q_2 p_2' = 0. \tag{2}$$

Die enge Röhre komme aus dem Dampfraum eines Kessels, die weite führe in den Wasserraum eines zweiten Kessels und münde andererseits in ein mit kaltem Wasser gefülltes Reservoir; die Drucke in dem Reservoir und in den Kesseln, da, wo die Geschwindigkeit Null ist, seien p_0, p_1, p_2. An der Einflussöffnung im zweiten Kessel ist der eintretende Strahl mit *ruhender* Flüssigkeit in Berührung, wie ein Strahl, der in die freie Atmosphäre tritt; daraus folgt:

$$p_2' = p_2. \tag{3}$$

Die Betrachtung des Strahles vor A ergiebt, wenn man der Einfachheit wegen die Dicke der Wand der inneren Röhre vernachlässigt, wobei

$$q_0 + q_1 = q_2$$

wird**),

$$p_1' = p_0'. \tag{4}$$

Hierzu kommen endlich die Gleichungen

$$\frac{u_1^2}{2} = \int_{p_1'}^{p_1} \frac{dp}{\mu}, \tag{5}$$

$$\frac{u_0^2}{2} = \int_{p_0'}^{p_0} \frac{dp}{\mu}. \tag{6}$$

Diese sechs Gleichungen reichen aus, um bei gegebenen p_0, p_1, p_2, q_0, q_1, q_2 die sechs Unbekannten u_0, u_1, u_2, p_0', p_1', p_2' zu bestimmen, vorausgesetzt, dass die Beziehungen zwischen p und μ, die der Bildung der beiden letzten Gleichungen zu Grunde zu legen sind, bekannt sind. In unserem Beispiel ist für die vorletzte Gleichung diese Beziehung die adiabatische, für die letzte Gleichung ist $\mu = 1$ zu setzen, wenn man die kleine thermische Ausdehnung des Wassers vernachlässigt.

§ 4.

Ist die Temperatur des Wassers im Reservoir nicht zu hoch, so wird aller Dampf in dem weiteren Rohr condensirt; dann ist $\mu_2 = 1$ und

$$u_2 q_2$$

ist die *Masse* des in der Zeiteinheit in den zweiten Kessel geführten Wassers.

*) Die auf die Röhrenwand bezüglichen Integrale sind gleich Null. D. H.

**) Genauer genommen ist unmittelbar an der Ausflussöffnung der Druck in der engen Röhre gleich dem in der weiten Röhre. D. H.

Setzen wir also

$$\mu_0 = \mu_2 = 1$$

und nach den Gleichungen (3), (4) und (6)

$$p_2' = p_2,$$
$$p_0' = p_1' = p_0 - \frac{u_0^2}{2}$$

und benutzen, dass

$$q_0 + q_1 = q_2,$$

so werden die Gleichungen (1), (2) und (5)

$$q_0 u_0 + q_1 \mu_1 u_1 = q_2 u_2,$$
$$\frac{q_0 - q_1}{2} u_0^2 + q_1 \mu_1 u_1^2 - q_2 u_2^2 = q_2(p_2 - p_0),$$
$$\frac{u_1^2}{2} = \int\limits_{p_0 - \frac{u_0^2}{2}}^{p_1} \frac{dp}{\mu}.$$

Aus diesen drei Gleichungen sind u_0, u_1, u_2 zu berechnen. Man kann dieselben nur durch ein successives Verfahren auflösen. In vielen Fällen wird das folgende zum Ziele führen. Man nehme als Näherungswerth $u_0 = 0$ an, bestimme aus der dritten Gleichung u_1, aus der ersten u_2, dann aus der zweiten u_0; mit diesem Werthe von u_0 wieder aus der dritten u_1, aus der ersten u_2 u. s. w.

Ohne auf den schon genannten Fall, dass aus dem ersten Kessel Dampf ausströmt, näher einzugehn, wollen wir bei dem viel einfacheren Falle verweilen, dass kaltes Wasser aus ihm ausfliesst, so dass auch

$$\mu_1 = 1.$$

(Das wird näherungsweise auch gelten bei Gasen, wenn die Druckunterschiede nur klein sind, wie z. B. bei der Bunsen'schen Lampe.) In diesem Falle wird die letzte und die vorletzte Gleichung:

$$p_0 - \frac{u_0^2}{2} = p_1 - \frac{u_1^2}{2},$$
$$q_0\left(\frac{u_0^2}{2} + p_0\right) + q_1\left(\frac{u_1^2}{2} + p_1\right) = q_2(u_2^2 + p_2).$$

Drückt man hiermit u_0^2 und u_1^2 durch u_2^2 aus, so wird die Gleichung

$$q_0 u_0 + q_1 u_1 = q_2 u_2$$

eine quadratische Gleichung für u_2^2. Hat diese Gleichung keine positive Wurzel, so ist dies ein Zeichen, dass eine Bewegung, wie wir sie angenommen haben, nicht möglich ist. Aber es kann auch der Fall eintreten, dass einer reellen Lösung unserer Gleichungen, bei welcher u_0, u_1, u_2 *positiv* sind, keine mögliche Bewegung entspricht, wie sich aus folgender Ueberlegung ergiebt. Wir haben die Kräfte der Reibung eliminirt, die in *dem* Theile der weiteren Röhre, in dem die Mischung stattfindet, wirksam ist; thatsächlich kann die Arbeit dieser Kräfte nur negativ sein*), während unsere Formeln sie auch positiv ergeben können. Der Ausdruck dieser Arbeit ist nach dem Satze von der lebendigen Kraft, angewandt auf die Grenzflächen, in denen die Geschwindigkeiten unendlich klein sind**),

$$p_2 q_2 u_2 - p_0 q_0 u_0 - p_1 q_1 u_1;$$

eine nothwendige Bedingung dafür, dass eine Bewegung unseren Gleichungen gemäss möglich ist, ist die, dass dieser Ausdruck sich negativ ergiebt.

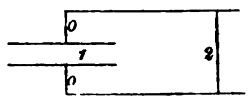
§ 5.

Wir wollen nun unsere Gleichungen noch auf ein paar einfache Fälle anwenden. Nehmen wir zuerst an, es sei

$$u_0 = 0;$$

das ist der Fall, wenn die weitere Röhre hinten geschlossen ist; dann ist p_0 nicht von vornherein gegeben; aus der drittletzten Gleichung folgt vielmehr:

Fig. 12.



$$p_0 = p_1 - \frac{u_1^2}{2},$$

die vorletzte wird mit Benutzung hiervon, und weil $q_0 + q_1 = q_2$:

$$p_1 - p_2 = \frac{q_0 - q_1}{q_2} \frac{u_1^2}{2} + u_2^2.$$

Hieraus und aus der Gleichung

$$q_1 u_1 = q_2 u_2$$

folgt

$$\frac{u_1^2}{2} = (p_1 - p_2) \frac{q_2^2}{q_0^2 + q_1^2},$$

$$\frac{u_2^2}{2} = (p_1 - p_2) \frac{q_1^2}{q_0^2 + q_1^2},$$

ferner

$$p_2 - p_0 = (p_1 - p_2) \frac{2 q_0 q_1}{q_0^2 + q_1^2}.$$

Diese Lösung ist immer reell, und der Verlust von Arbeit durch die Reibung***) positiv, falls $p_1 > p_2$ ist. Die Länge der äusseren Röhre ist gleichgültig, nur muss sie so lang sein, dass in ihr die Mischung sich vollendet, und so kurz, dass an ihrer Wand die Reibung sich

*) D. h. die Reibung bewirkt nothwendig Vernichtung von lebendiger Kraft. D. H.

**) D. h. gleich und entgegengesetzt der Arbeit, welche die äusseren Drucke p_0, p_1, p_2 in der Zeiteinheit an dem ganzen System leisten. Hierbei ist benutzt, dass wegen $\mu = 1$ das Product qu für jeden Strom constant ist, auch wenn u unendlich klein wird. D. H.

***) $= (p_1 - p_2) \cdot q_1 u_1$ nach der Schlussbemerkung des § 4. D. H.

nicht merklich macht. Ist q_1 gegeben, und bestimmt man q_0 so, dass die Ausflussmenge aus der weiteren Röhre:

$$q_2 u_2$$

ein Maximum wird, so findet man

$$q_0 = q_1$$

und

$$p_2 - p_0 = p_1 - p_2.$$

Ein zweiter Fall, den wir untersuchen wollen, ist der, dass

$$p_2 = p_0;$$

bei der Bunsen'schen Lampe findet das statt. Man setze

$$u_2^2 = 2x(p_1 - p_0)\frac{q_0 q_1}{q_2^2},$$

wobei dann nach den beiden Gleichungen S. 130 unten:

$$u_0^2 = \frac{2(p_1 - p_0)}{q_2^2}(2xq_0q_1 - 2q_1q_2),$$

$$u_1^2 = \frac{2(p_1 - p_0)}{q_2^2}(2xq_0q_1 + q_0^2 - q_1^2)$$

wird, und setze ferner

$$\frac{q_1}{q_0} = \alpha,$$

dann erhält man aus:

$$q_0 u_0 + q_1 u_1 = q_2 u_2$$

für x die quadratische Gleichung

$$x^2(1 - 6\alpha + \alpha^2) - 2x(2 - 3\alpha - 4\alpha^2 + \alpha^3) + (2 + \alpha - \alpha^2)^2 = 0$$

und

$$u_0^2 = 2(p_1 - p_0)\frac{2\alpha(x - (1 + \alpha))}{(1 + \alpha)^2},$$

$$u_1^2 = 2(p_1 - p_0)\frac{2\alpha x + 1 - \alpha^2}{(1 + \alpha)^2},$$

$$u_2^2 = 2(p_1 - p_0)\frac{\alpha x}{(1 + \alpha)^2}.$$

Nehmen wir an, dass α unendlich klein ist; dann wird die quadratische Gleichung unter Vernachlässigung der Glieder, welche gegen α unendlich klein sind:

$$x^2 - 2x(2 + 9\alpha) + 4 + 28\alpha = 0,$$

d. h.

$$x = 2 + 9\alpha \pm \sqrt{8\alpha}.$$

Nur die Wurzel mit dem *unteren* Zeichen ist brauchbar, da nur sie der Gleichung*)

$$u_0 + \alpha u_1 = (1 + \alpha) u_2$$

bei *positiven* Werthen von u_0, u_1, u_2 genügt. Es ist nämlich für sie

*) D. h. $q_0 u_0 + q_1 u_1 = q_2 u_2$. D. H.

$$u_0^2 = 2(p_1 - p_0)\, 2\alpha\, (1 - \sqrt{8\alpha})$$
$$u_1^2 = 2(p_1 - p_0)\,(1 + 2\alpha)$$
$$u_2^2 = 2(p_1 - p_0)\, 2\alpha\, (1 - \sqrt{2\alpha})$$

also

$$u_0 = \sqrt{2(p_1 - p_0)} \quad (\sqrt{2\alpha} - 2\alpha)$$
$$u_1 = \sqrt{2(p_1 - p_0)} \quad (1 + \alpha)$$
$$u_2 = \sqrt{2(p_1 - p_0)} \quad (\sqrt{2\alpha} - \alpha).$$

Die Bedingung S. 131

$$p_1 q_1 u_1 + p_0(q_0 u_0 - q_2 u_2) > 0$$

ist:

$$(p_1 - p_0)\, q_1 u_1 > 0,$$

also erfüllt, da $p_1 > p_0$ ist.

Das Verhältniss $\frac{q_0 u_0}{q_1 u_1}$ wird $= \frac{1}{\alpha}\, \frac{u_0}{u_1}$ und nach den obigen Werthen $= \sqrt{\frac{2}{\alpha}}$.

Dreizehnte Vorlesung.

Atome und Moleküle. — Kinetische Theorie der Gase. — Zusammenstoss zweier Moleküle. — Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses. — Die beiden Hauptsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung. — Beispiele. — Vertheilung einer grossen Anzahl von Molekülen in der Volumeneinheit. — Vertheilung der Geschwindigkeiten in einem ruhenden Gas. — Gesetz von Maxwell. Erster Beweis.

§ 1.

Wir haben bis jetzt die Begriffe, auf welche die Wärmeerscheinungen geführt haben: die Begriffe der *Temperatur* und der *Wärmemenge* als selbständige aufgefasst, d. h. als solche, die nicht auf die Begriffe der Mechanik zurückführbar sind; und, wie wir im Eingange dieser Vorträge gesehen haben, *müssen* wir das, wenn wir die Vorstellung festhalten wollen, dass die Materie die Körper *stetig* erfüllt und die Bewegung in ihnen von Punkt zu Punkt *stetig* sich ändert, wie es der Fall zu sein *scheint*. Dabei bleiben die Beziehungen zwischen Bewegungen und Temperaturänderungen, die stattfinden: die Verwandlung von Wärme in Arbeit und umgekehrt, unerklärlich. Diese Thatsachen haben naturgemäss das Streben erweckt, die Wärmeerscheinungen als auf Bewegungen beruhend aufzufassen und die Vorstellung von der Stetigkeit der Materie aufzugeben. Es giebt eine uralte Vorstellung von der Beschaffenheit der Körper, welche die Grundlage der Betrachtungen bilden konnte: die Vorstellung, dass die Körper aus *Atomen* oder, wie man jetzt gewöhnlicher zu sagen pflegt, aus *Molekülen* bestehen. Das sollen einzelne Körperchen, getrennte Individuen, sein, von denen in dem kleinsten Raume, den wir wahrnehmen können, eine unzählbare Menge sich befindet; alle diese haben die verschiedensten Bewegungen in demselben Augenblicke. Die Hypothese, dass solche Moleküle existiren, ist für sich allein offenbar nicht ausreichend, um zu einer Theorie zu führen, die die beobachteten Erscheinungen darstellen soll; es müssen noch weitere Annahmen gemacht werden über die Eigenschaften der Moleküle, ihre Anordnung, ihre Bewegung, die Kräfte, die sie auf einander ausüben. Geeignete Annahmen dieser Art zu finden, ist nicht leicht, einmal, weil der Sprung von den Erscheinungen zu den Molekülen ein so grosser ist; dann, weil bei allen Annahmen, die man machen kann, es sehr schwer ist, sie durch strenge mathematische Schlüsse zu verfolgen. Dennoch ist es gelungen, eine Theorie auf der bezeichneten Grundlage aufzustellen, welche viele Eigenschaften der *Gase* in befriedigender Weise darstellt und einen werthvollen Leitfaden bei der weiteren Untersuchung dieser Eigenschaften abgiebt. Man muss dabei freilich oft zu Betrachtungen greifen, die in Bezug auf Strenge manches zu wünschen übrig lassen. Wir werden dabei zunächst die Dimensionen der Moleküle als unendlich klein gegen alle Längen, die sonst in Betracht kommen, annehmen, die Moleküle also als Punkte betrachten, die bei demselben Gase gleichartig sind; je zwei Moleküle sollen eine Anziehungs- oder Abstossungskraft auf einander ausüben, die bei wachsender Entfernung abnimmt; auch die nächsten Moleküle sind aber der Regel nach so weit von einander entfernt, dass die Kraft, mit der sie auf einander wirken, sich nicht merklich macht; nur ausnahmsweise kommen zwei einander so nahe, dass das der Fall ist; einen solchen Vorgang wollen wir eine *Collision*, einen *Zusammenstoss* nennen; der Regel nach bewegt sich daher, wenn keine fremden Kräfte wirksam sind, ein jedes Molekül in gerader Linie mit gleichbleibender Geschwindigkeit; bei einem Zusammenstoss mit einem anderen ändert sich in sehr kurzer Zeit die Grösse und die Richtung seiner Bewegung.

§ 2.

Die Erscheinungen, die beobachtet werden können, hängen nicht ab von der Bewegung eines einzelnen Moleküls, sondern nur von gewissen *Mittelwerthen;* solche Mittelwerthe werden wir daher aufzusuchen haben und unsere Betrachtungen werden eine gewisse Aehnlichkeit besitzen mit denen der Statistik, in der es sich auch immer um Mittelwerthe handelt, z. B. um die mittlere Lebensdauer der Menschen überhaupt oder gewisser Menschenklassen. In der Statistik ist oft die Rede von der *Wahrscheinlichkeit* eines Ereignisses; den Begriff der Wahrscheinlichkeit wollen wir auch hier einführen, theils um den Ausdruck zu kürzen, theils um das Verständniss zu erleichtern durch Anknüpfung an Vorstellungen, die, wenigstens theilweise, schon aus dem gewöhnlichen Leben bekannt sind. Im gewöhnlichen Leben spricht man von der grösseren oder geringeren Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses, ohne diese durch eine Zahl anzugeben; in der exacten Wissenschaft ist eine Wahrscheinlichkeit immer eine Zahl, und zwar ein echter positiver Bruch, der um so mehr der Eins sich nähert, je näher die Wahrscheinlichkeit der Gewissheit kommt, und um so mehr der Null, je näher die Wahrscheinlichkeit der Unmöglichkeit kommt. Man bezieht hier diesen Begriff stets auf eine grosse Zahl von vergleichbaren Fällen, in denen ein gewisses Ereigniss theils eingetreten, theils nicht eingetreten ist, und versteht unter der Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses die Zahl der Fälle, in denen es eingetreten ist, dividirt durch die Gesammtzahl der Fälle; je grösser dieser Bruch ist, um so sicherer kann man darauf rechnen, dass auch in der Zukunft unter gleich bleibenden Verhältnissen das betreffende Ereigniss eintreten wird. Dass dieser Bruch einer bestimmten Grenze sich nähert, je grösser man die Zahl der Fälle, die in Betracht gezogen werden, wählt, ist eine Voraussetzung, die erfüllt sein muss, wenn der Begriff der Wahrscheinlichkeit anwendbar sein soll, d. h. wenn die Erscheinungen, um die es sich handelt, so zu sagen, statistisch begreiflich oder darstellbar sein sollen.

Denken wir uns, um ein sehr gebräuchliches Beispiel anzuführen, einen *Spielwürfel*, mit dem eine sehr grosse Zahl von Malen geworfen wird. Ist der Würfel richtig, so wird jede von den sechs Zahlen nahe gleich oft oben zu liegen kommen; bei 600 Würfen wird jede Zahl nahe 100 mal, bei 6000 Würfen nahe 1000 mal geworfen werden. Wäre das nicht der Fall, käme z. B. die Eins erheblich häufiger oben zu liegen, als die anderen Zahlen, so würden wir sagen: der Würfel ist nicht richtig; wir würden etwa vermuthen, dass der Schwerpunkt von der mit Eins bezeichneten Seite weiter entfernt wäre, als von den übrigen, und dass die Eins deswegen vorzugsweise erschiene, weil der Schwerpunkt den tiefsten Ort einzunehmen bestrebt ist. Die Wahrscheinlichkeit, mit einem richtigen Würfel eine gewisse Zahl zu werfen, ist also gleich $\frac{1}{6}$.

§ 3.

Es sind hauptsächlich *zwei* Sätze, die bei der Wahrscheinlichkeitsrechnung fortwährend gebraucht werden. Der erste, der unmittelbar und ausschliesslich auf der Definition der Wahrscheinlichkeit beruht, lautet: Sind A und B zwei sich ausschliessende Ereignisse und α und β respective ihre Wahrscheinlichkeiten, so ist $\alpha + \beta$ die Wahrscheinlichkeit, dass *A oder B* eintritt. Die Wahrscheinlichkeit, mit einem Spielwürfel eine Eins *oder* eine Zwei zu werfen, ist also $\frac{1}{3}$.

Der zweite Satz bezieht sich auf das gleichzeitige Eintreten zweier *unabhängiger* Ereignisse und enthält die Definition für die *Unabhängigkeit* zweier Ereignisse. Er lautet: Sind A und B zwei von einander unabhängige Ereignisse, α und β ihre Wahrscheinlichkeiten, so ist $\alpha\beta$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie *zusammen* eintreffen. Es sei nämlich n die Gesammtzahl der zu betrachtenden Fälle; in αn

Fällen tritt dann A, in βn Fällen B ein; in jenen αn Fällen ist, wenn A und B von einander unabhängig genannt werden, B $\beta\alpha n$ mal eingetreten; es ist also A und B zusammen $\alpha\beta n$ mal eingetreten, und das spricht der Satz eben aus. Die Wahrscheinlichkeit, mit 2 Würfeln zwei Einsen zu werfen, ist $\frac{1}{36}$; bei 3600 Würfen wird das nahe 100 mal geschehen.

§ 4.

Wir wollen diese Betrachtungen noch etwas ausdehnen und dann eine Anwendung unserer Resultate auf den Gleichgewichtszustand eines einfachen Gases machen, auf welches keine äusseren Kräfte wirken.

Man denke sich N Spielwürfel, deren jeder (statt sechs) a Seiten hat. Die Wahrscheinlichkeit, mit einem derselben eine bestimmte seiner Zahlen, etwa 1, zu werfen, ist dann $\frac{1}{a}$. Die Wahrscheinlichkeit, bei einem Wurfe mit allen Würfeln *keine* 1 zu bekommen, ist*)

$$\left(1 - \frac{1}{a}\right)^N \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Die Wahrscheinlichkeit, mit einem bestimmten Würfel 1, mit allen anderen keine 1 zu bekommen, ist

$$\frac{1}{a}\left(1 - \frac{1}{a}\right)^{N-1},$$

die Wahrscheinlichkeit, überhaupt eine 1 und nicht mehr zu erhalten, ist**)

$$N\frac{1}{a}\left(1 - \frac{1}{a}\right)^{N-1} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Die Wahrscheinlichkeit, mit einem bestimmten Paare zwei 1, mit allen anderen nicht 1 zu werfen, ist

$$\left(\frac{1}{a}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{a}\right)^{N-2};$$

also, da es

$$\frac{N \cdot (N-1)}{1 \cdot 2}$$

Paare giebt, ist die Wahrscheinlichkeit, überhaupt zwei 1 und nicht mehr zu werfen,

*) Nach dem zweiten der oben angeführten Sätze, da die Wahrscheinlichkeit, mit einem einzigen Würfel keine Eins zu werfen, gleich $1 - \frac{1}{a}$ ist. D. H.

**) Nach dem ersten der oben angeführten Sätze, da der erwartete Fall durch N sich ausschliessende Ereignisse (indem die Eins bei irgend einem der N Würfel erscheint) zu Stande kommen kann. Die folgenden Beispiele sind ganz analog behandelt. D. H.

$$\frac{N\cdot(N-1)}{1\cdot 2}\left(\frac{1}{a}\right)^2\left(1-\frac{1}{a}\right)^{N-2} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Offenbar ist ebenso die Wahrscheinlichkeit, überhaupt drei 1 und nicht mehr zu werfen,

$$\frac{N\cdot(N-1)\cdot(N-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{1}{a}\right)^3\left(1-\frac{1}{a}\right)^{N-3}$$

u. s. f.

Die Wahrscheinlichkeit endlich, mit allen N Würfeln gleichzeitig 1 zu bekommen, ist*)

$$\left(\frac{1}{a}\right)^N \quad \ldots\ldots\ldots \quad (n+1)$$

Die Summe aller dieser Ausdrücke (1) bis $(n+1)$ ist, wie es sein muss, gleich

$$\left(\frac{1}{a}+1-\frac{1}{a}\right)^N=1.$$

Diesen Ausdrücken kann auch eine andere Bedeutung gegeben werden; sie erlauben nämlich eine Anwendung auf die Frage, die uns beschäftigt.

Die Einheit des Volumens des Gases denken wir uns in a gleiche Theile getheilt und nehmen an, dass N Moleküle in der Volumeneinheit sich befinden und dass es für jedes gleich wahrscheinlich ist, in einem oder einem anderen der Theile zu liegen; jene Ausdrücke geben dann die Wahrscheinlichkeiten dafür an, dass in *einem* bestimmten der a Theile 0, 1, 2, 3 . ., N Moleküle enthalten sind.**) Dabei sollen N und a sehr gross sein; dann wird, wenn

$$a=\frac{N}{x}$$

gesetzt wird:

$$\lim_{N=\infty}\left(1-\frac{1}{a}\right)^N=\lim_{N=\infty}\left(1-\frac{x}{N}\right)^N=e^{-x}=e^{-\frac{N}{a}}.$$

Ebenso:

$$\lim_{N=\infty}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{N-1}=e^{-\frac{N}{a}} \quad \text{u. s. w.}$$

Wir wollen schliesslich a unendlich gross gegen N annehmen, nämlich $\frac{1}{a}$ gleich dem Volumenelement $d\tau$ setzen. Dann ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich in einem Volumenelement kein Molekül befindet, nach (1):

$$e^{-\frac{N}{a}}=1;$$

*) Ergiebt sich sowohl direct, als auch durch die Fortsetzung der begonnenen Reihe. D. H.

**) Denn ein Wurf mit den Würfeln entspricht einer bestimmten Vertheilung der Moleküle, wenn man jedem Würfel ein bestimmtes Molekül und jeder Würfelseite einen bestimmten Volumentheil zuordnet. D. H.

die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in ihm 1 Molekül sich befindet, nach (2):

$$\frac{N}{a} = N d\tau$$

(eine unendlich kleine Grösse). Die Wahrscheinlichkeit für die Anwesenheit zweier Moleküle nach (3):

$$\frac{1}{2} (N d\tau)^2$$

u. s. f.

Wir führen rechtwinklige Coordinaten ein und nennen x, y, z die Coordinaten eines Punktes des betrachteten Raumes; die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Raume, dessen Dimensionen sämmtlich unendlich klein sind, ein Molekül sich befindet, ist dann

$$N \int dx dy dz,$$

das Integral ausgedehnt über diesen Raum.

§ 5.

Fassen wir nun die Geschwindigkeiten ins Auge, die die einzelnen Moleküle in demselben Zeitpunkte haben. ξ, η, ζ nennen wir die Componenten der Geschwindigkeit eines Moleküls und

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta$$

die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem Molekül die Componenten zwischen

$$\xi \text{ und } \xi + d\xi, \quad \eta \text{ und } \eta + d\eta, \quad \zeta \text{ und } \zeta + d\zeta$$

liegen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einem Molekül die Componenten in einem unendlich kleinen *Gebiet* von ξ, η, ζ liegen, ist dann

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta) \iiint d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

das Integral über dieses Gebiet ausgedehnt. Wir können, um die Vorstellung zu erleichtern, ξ, η, ζ uns als die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes in Bezug auf die Achsen der x, y, z denken; das genannte Integral ist dann ein unendlich kleines Volumen.

Nimmt man das Gebiet der ξ, η, ζ jedesmal von $-\infty$ bis $+\infty$, so folgt als Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einem Molekül die Geschwindigkeitscomponenten in dem ganzen unendlich ausgedehnten Gebiet liegen, die identische Gleichung

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi d\eta d\zeta = 1.$$

Wir wollen nunmehr die Function φ aufstellen. Zuerst machen wir die Annahme, dass in Bezug auf die Vertheilung der Geschwindigkeiten unter die Moleküle keine Richtung von einer anderen sich unterscheidet, und zeigen, was hieraus für die Function φ folgt. Wir führen ein zweites Coordinatensystem mit dem nämlichen Anfangspunkt ein und nennen ξ', η', ζ' die Coordinaten in diesem des Punktes, dessen Coordinaten in dem alten ξ, η, ζ sind; jene Grössen sind dann lineare homogene Functionen dieser, deren Coefficienten willkührlich sind und nur *die* Relationen erfüllen, in Folge deren

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2$$

ist. Dabei ist

$$\iiint d\xi\, d\eta\, d\zeta = \iiint d\xi'\, d\eta'\, d\zeta'.$$

Bezeichnet man durch $\varphi'(\xi', \eta', \zeta')$ die Function, in die $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$ durch Einführung von ξ', η', ζ' übergeht, so ist ferner

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta) = \varphi'(\xi', \eta', \zeta').$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ξ, η, ζ in dem für diese Grössen angenommenen Gebiete liegen, ist gleich der Wahrscheinlichkeit, dass ξ', η', ζ' in dem entsprechenden Gebiete sich befinden. Die letztere st daher (wie die erstere) gleich

$$\varphi'(\xi', \eta', \zeta') \iiint d\xi'\, d\eta'\, d\zeta'.$$

Dieselbe ist aber auch gleich

$$\varphi(\xi', \eta', \zeta') \iiint d\xi'\, d\eta'\, d\zeta',$$

wenn alle Richtungen sich gleich verhalten, die Wahl des Coordinatensystem also gleichgültig für die Function φ ist. Hieraus folgt

$$\varphi(\xi', \eta', \zeta') = \varphi'(\xi', \eta', \zeta')$$

d. h.

$$= \varphi(\xi, \eta, \zeta),$$

falls

$$\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2.$$

Es ist hiernach

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta) = f(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2),$$

wo f eine unbekannte Function *eines* Arguments bedeutet, die nach S. 139 der Bedingung genügt:

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} f(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) \cdot d\xi\, d\eta\, d\zeta = 1.$$

§ 6.

Zur Auffindung der Function f hat Maxwell zwei Wege angegeben. Der erste ist einfach, aber nicht streng. Doch führt er zu denselben Resultaten, wie der zweite, strengere. Wir geben in dieser Vorlesung noch den ersten Maxwell'schen Beweis. Maxwell betrachtet die Geschwindigkeiten parallel der x, y, z Achse und setzt die Wahrscheinlichkeiten, dass die Geschwindigkeitscomponenten eines Moleküls bez. zwischen ξ und $\xi + d\xi$, η und $\eta + d\eta$, ζ und $d\zeta$ liegen, bez. gleich

$$F(\xi)\,d\xi$$
$$F(\eta)\,d\eta$$
$$F(\zeta)\,d\zeta.$$

Diese drei Wahrscheinlichkeiten sollen — und dies ist eine willkührliche Annahme — von einander *unabhängig* sein, also ist*)

$$\varphi(\xi,\ \eta,\ \zeta)\,d\xi\ d\eta\ d\zeta = F(\xi)\ F(\eta)\ F(\zeta)\,d\zeta\cdot d\eta\ d\zeta,$$

oder

$$\varphi(\xi,\ \eta,\ \zeta) = F(\xi)\ F(\eta)\ F(\zeta),$$

also, wenn die vorhin gefundene Gleichung benutzt wird,

$$F(\xi)\ F(\eta)\ F(\zeta) = f(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2).$$

Wenn man auf beiden Seiten den Logarithmus nimmt und dann differentiirt, so folgt, falls

$$\xi\ d\xi + \eta\ d\eta + \zeta\ d\zeta = 0$$

gesetzt wird, die Gleichung

$$\frac{F'(\xi)}{F(\xi)}\,d\xi + \frac{F'(\eta)}{F(\eta)}\,d\eta + \frac{F'(\zeta)}{F(\zeta)}\,d\zeta = 0,$$

also

$$\frac{F'(\xi)}{F(\xi)} = -\frac{2\xi}{\alpha^2},$$
$$\frac{F'(\eta)}{F(\eta)} = -\frac{2\eta}{\alpha^2},$$
$$\frac{F'(\zeta)}{F(\zeta)} = -\frac{2\zeta}{\alpha^2},$$

wo α eine gewisse Constante bedeutet; d. h.

$$F(\xi) = C\,e^{-\frac{\xi^2}{\alpha^2}},$$
$$F(\eta) = C\,e^{-\frac{\eta^2}{\alpha^2}},$$
$$F(\zeta) = C\,e^{-\frac{\zeta^2}{\alpha^2}},$$

also**)

$$f(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) = C^3 e^{-\frac{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}{\alpha^2}}.$$

*) Nach dem S. 136 abgeleiteten Satze. D. H.

**) Ueber den Zusammenhang der Constanten C und α siehe unten S. 148. D. H.

Vierzehnte Vorlesung.

Gesetz der Geschwindigkeitsvertheilung von Maxwell. Zweiter Beweis. — Mathematischer Hülfssatz. — Wahrscheinlichkeit dafür, dass zwei Moleküle gleichzeitig in bestimmten Raum- und Geschwindigkeitsgebieten liegen. — Vorgänge beim Zusammenstoss. — Stationärer Zustand. — Wahrscheinlichkeit für eine bestimmte Grösse der Geschwindigkeit. — Mittelwerth der Quadrate der Geschwindigkeitscomponenten. — Verallgemeinerung für ein Gemisch beliebiger Gase. — Mittlere lebendige Kraft eines Moleküls. — Ausdrücke für die Dichtigkeit und für den Druck. — Berechnung der mittleren Geschwindigkeiten für einige Gase. — Kinetische Definition der Temperatur. — Gesetz von Avogadro.

§ 1.

Wir wollen nun die Function f auf dem anderen, strengeren Wege bestimmen; es ist das möglich, indem wir ausdrücken, dass der Zustand des Gases ein *stationärer* ist, dass nämlich f sich nicht mit der Zeit ändert durch die Collisionen der Moleküle.

Wir schicken folgende Bemerkungen in Betreff vielfacher Integrale voraus.

Es seien $x_1', x_2', \ldots x_n'$ unabhängige Functionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$. Das Verhältniss der über unendlich kleine, entsprechende Gebiete ausgedehnten Integrale

$$\int dx_1' dx_2' dx_3' \ldots$$

und

$$\int dx_1 dx_2 dx_3 \ldots$$

ist dann

$$\pm \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1'}{\partial x_1}, & \frac{\partial x_2'}{\partial x_1}, & \ldots \\ \frac{\partial x_1'}{\partial x_2}, & \frac{\partial x_2'}{\partial x_2}, & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = R$$

wo *das* Vorzeichen zu wählen ist, bei dem R positiv wird, so dass

$$\int dx_1' \, dx_2' \ldots = R \int dx_1 \, dx_2 \cdots.$$

Gesetzt nun, es seien

$$x_1' - x_1 = \delta x_1$$
$$x_2' - x_2 = \delta x_2$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

unendlich klein, so wird

$$R = 1 + \frac{\partial \delta x_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \delta x_2}{\partial x_2} + \cdots$$

bei Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen höherer Ordnung.

Es seien nun $x_1, x_2, \ldots x_n$ Functionen der n Variabeln a_1, $a_2, \ldots a_n$ und der $(n+1)^{\text{ten}}$ Variabeln t; es seien ferner $x_1', x_2', \ldots x_n'$ die Werthe, die $x_1, x_2, \ldots x_n$ annehmen, wenn darin für t $t + dt$ gesetzt wird; weiter sei

$$\int dx_1 \; dx_2 \cdots = \varDelta \int da_1 \, da_2 \; \ldots,$$
$$\int dx_1' \; dx_2' \cdots = \varDelta' \int da_1 \, da_2 \; \ldots,$$

also

$$\varDelta = \pm \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial a_1} & \frac{\partial x_2}{\partial a_1} & \ldots \\ \frac{\partial x_1}{\partial a_2} & \frac{\partial x_2}{\partial a_2} & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

$$\varDelta' = \pm \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1'}{\partial a_1} & \frac{\partial x_2'}{\partial a_1} & \ldots \\ \frac{\partial x_1'}{\partial a_2} & \frac{\partial x_2'}{\partial a_2} & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

und

$$\varDelta' = \varDelta + \frac{\partial \varDelta}{\partial t} dt.$$

Dabei wird (bei der oben gebrauchten Bezeichnung)

$$\frac{\varDelta'}{\varDelta} = R = 1 + \frac{\partial \delta x_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \delta x_2}{\partial x_2} + \cdots$$

und

$$\delta x_1 = \frac{\partial x_1}{\partial t} dt,$$
$$\delta x_2 = \frac{\partial x_2}{\partial t} dt,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Hieraus folgt

$$\frac{1}{\varDelta} \frac{\partial \varDelta}{\partial t} = \frac{\partial \left(\frac{\partial x_1}{\partial t}\right)}{\partial x_1} + \frac{\partial \left(\frac{\partial x_2}{\partial t}\right)}{\partial x_2} + \cdots$$

oder, wenn

$$\frac{\partial x_1}{\partial t} = u_1,$$
$$\frac{\partial x_2}{\partial t} = u_2,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

gesetzt wird:

$$\frac{1}{\Delta}\frac{\partial \Delta}{\partial t} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \cdots.$$

Wir haben also den folgenden Satz bewiesen:

Es seien $x_1, x_2, \ldots x_n$ unabhängige Functionen der n Variabeln $a_1, a_2, \ldots a_n$ und der $(n+1)^{\text{ten}}$ t, und es werde gesetzt*):

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial a_1}, & \frac{\partial x_2}{\partial a_1}, & \cdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial a_2}, & \frac{\partial x_2}{\partial a_2}, & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

eine Function von $a_1, a_2, \ldots t$. (Die Functionaldeterminante.) Ferner seien

$$u_1 = \frac{\partial x_1}{\partial t}, \quad u_2 = \frac{\partial x_2}{\partial t}, \ldots$$

dargestellt als Functionen von $x_1, x_2, \ldots t$; dann ist

$$\frac{1}{\Delta}\frac{\partial \Delta}{\partial t} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \cdots.$$

Diese sehr merkwürdige Gleichung, von der wir eine Anwendung zu machen haben werden und die zuerst in ihrer Allgemeinheit von Liouville**) abgeleitet ist, spielt in verschiedenen Theilen der Mechanik eine wichtige Rolle. Sie ist z. B. die Grundlage der Theorie des letzten Multiplikators von Jacobi. In dem Falle $n = 3$ kommt sie in der Hydrodynamik vor. Hier hat man sich x_1, x_2, x_3 als die rechtwinkligen Coordinaten zur Zeit t eines Flüssigkeitstheilchens zu denken, das durch die Werthe der drei Variabeln a_1, a_2, a_3 bestimmt ist; u_1, u_2, u_3 sind dann die Componenten der Geschwindigkeit zur Zeit t am Orte (x_1, x_2, x_3). Die räumliche Dilatation, die im Zeitelemente dt am Orte (x_1, x_2, x_3) hervorgerufen wird, ist dann gleich

$$\frac{1}{\Delta}\frac{\partial \Delta}{\partial t}\, dt\text{***)}$$

oder auch gleich

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right) dt;$$

man wendet den einen oder den anderen dieser beiden Ausdrücke an, je nachdem man die Lagrange'schen oder die Euler'schen hydrodynamischen Gleichungen aufstellen will. †)

§ 2.

Wir kehren nun zur Betrachtung unserer Gasmoleküle zurück. Nach dem zweiten Hauptsatze der Wahrscheinlichkeitsrechnung (S. 136) und bei der Bezeichnung, die wir eingeführt haben, ist die

---

*) Diesmal ohne Rücksicht auf das Vorzeichen. D. H.

**) Jacobi, Dynamik. p. 93.

***) Bei der Differentiation von Δ nach t ist a_1, a_2, a_3 constant zu setzen. D. H.

†) Vgl. Kirchhoff, Mechanik, Fünfzehnte Vorlesung.

Wahrscheinlichkeit dafür, dass in dem Raumelement $dx\,dy\,dz$ ein Molekül sich befindet, dessen Geschwindigkeitscomponenten zwischen ξ und $\xi + d\xi$, η und $\eta + d\eta$, ζ und $\zeta + d\zeta$ liegen,

$$Nf(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)\, dx\, dy\, dz\, d\xi\, d\eta\, d\zeta$$

und die Wahrscheinlichkeit dafür, dafs *zwei* Moleküle, deren Geschwindigkeitscomponenten zwischen ξ_1 und $\xi_1 + d\xi_1$, η_1 und $\eta_1 + d\eta_1$, ζ_1 und $\zeta_1 + d\zeta_1$ und zwischen ξ_2 und $\xi_2 + d\xi_2$, η_2 und $\eta_2 + d\eta_2$, ζ_2 und $\zeta_2 + d\zeta_2$ liegen, in den Raumelementen $dx_1\, dy_1\, dz_1$ und $dx_2\, dy_2\, dz_2$ sich befinden, deren Entfernung gross ist gegen den Radius der Wirkungssphäre der Molekularkräfte, gleich

$$N^2 f(\xi_1^2+\eta_1^2+\zeta_1^2) f(\xi_2^2+\eta_2^2+\zeta_2^2)\, dx_1 dy_1 dz_1 dx_2 dy_2 dz_2 d\xi_1 d\eta_1 d\zeta_1 d\xi_2 d\eta_2 d\zeta_2.$$

Wir stellen uns ein unendlich kleines Gebiet G der 12 Variabeln $x_1, y_1, z_1, \xi_1, \eta_1, \zeta_1, x_2, y_2, z_2, \xi_2, \eta_2, \zeta_2$ vor, dessen Grenze bestimmt ist durch eine geeignete Gleichung zwischen ihnen; wir nennen W die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es zwei diesem Gebiete entsprechende Moleküle giebt; dann ist nach dem ersten Hauptsatze der Wahrscheinlichkeitsrechnung (S. 136)

$$W = N^2 f(\xi_1^2+\eta_1^2+\zeta_1^2) f(\xi_2^2+\eta_2^2+\zeta_2^2) \int dx_1 dy_1 dz_1\, dx_2 dy_2 dz_2\, d\xi_1 d\eta_1 d\zeta_1\, d\xi_2 d\eta_2 d\zeta_2,$$

die Integration über das Gebiet G erstreckt.

Für den Abstand der Punkte (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) haben wir bereits eine untere Grenze festgesetzt: er sollte unendlich gross sein gegen den Radius der Wirkungssphäre der Molekularkräfte; wir setzen nun auch eine obere Grenze fest: die beiden Punkte sollen nämlich in einem Raume liegen, der so klein ist, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in ihm neben jenen zwei Molekülen noch ein drittes sich befindet, unendlich klein gegen W ist. Wir wollen nun die Bewegung der beiden Moleküle, deren Existenz die Wahrscheinlichkeit W hat, während eines Zeitraums verfolgen, der so klein ist, dass die Wahrscheinlichkeit dafür gleich Null gesetzt werden kann, dass ein drittes Molekül in den eben genannten Raum eintritt, aber doch so gross, dass während desselben eine Collision der beiden Moleküle stattgefunden haben kann. Während dieses Zeitraumes können *nur* die Kräfte, die die beiden Moleküle aufeinander ausüben, wenn sie einander hinreichend nahe gekommen sind, ihre Bewegungen modificiren; *nur* diese Kräfte haben wir also zu berücksichtigen. Den Augenblick, auf den die eingeführten Zeichen sich beziehen, wollen wir als den Anfangspunkt der Zeit bezeichnen, und

$$x_1', y_1', z_1', \quad x_2', y_2', z_2', \quad \xi_1', \eta_1', \zeta_1', \quad \xi_2', \eta_2', \zeta_2'$$

die Coordinaten und Geschwindigkeitscomponenten der beiden Moleküle zur Zeit t nennen. Für diese 12 Variabeln haben wir dann die Differentialgleichungen

$$\frac{\partial x_1'}{\partial t} = \xi_1', \qquad \frac{\partial x_2'}{\partial t} = \xi_2'$$
$$\frac{\partial y_1'}{\partial t} = \eta_1', \qquad \frac{\partial y_2'}{\partial t} = \eta_2'$$
$$\frac{\partial z_1'}{\partial t} = \zeta_1', \qquad \frac{\partial z_2'}{\partial t} = \zeta_2'$$
$$\frac{\partial \xi_1'}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial x_1'}, \qquad \frac{\partial \xi_2'}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial x_2'}$$
$$\frac{\partial \eta_1'}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial y_1'}, \qquad \frac{\partial \eta_2'}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial y_2'}$$
$$\frac{\partial \zeta_1'}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial z_1'}, \qquad \frac{\partial \zeta_2'}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial z_2'}$$

und die Bedingung, dass sie für $t = 0$ den entsprechenden ungestrichenen Buchstaben gleich werden; hier bedeutet V das Potential der beschleunigenden*) Kräfte, mit denen die beiden Moleküle auf einander wirken, dessen Existenz wir annehmen und von dem wir weiter annehmen wollen, dass es verschwindet, wenn die Entfernung der beiden Moleküle sehr gross gegen den Radius der Wirkungssphäre der Molekularkräfte ist.

Kennt man V, so sind hierdurch die gestrichenen Grössen durch die ungestrichenen und t vollständig bestimmt.

§ 3.

Dem Gebiete G entspricht ein gewisses Gebiet der x_1', x_2', ..., das wir G' nennen wollen; wenn zur Zeit $t = 0$ zwei Moleküle vorhanden sind, die dem Gebiete G angehören, so *müssen* zur Zeit t**) zwei dem Gebiete G' angehörige Moleküle vorhanden sein. Es ist der oben für W aufgestellte Ausdruck daher auch gleich der Wahrscheinlichkeit dafür, dass zur Zeit t zwei dem Gebiete G' angehörige Moleküle vorhanden sind. Wir wollen diesen Ausdruck dadurch umgestalten, dass wir in ihn statt der ungestrichenen Zeichen die gestrichenen einführen. Wir benutzen hierbei zunächst, dass, wie aus den Differentialgleichungen folgt, (nach dem Satze von der lebendigen Kraft)

$$\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2 = \xi_1'^2 + \eta_1'^2 + \zeta_1'^2 + Q'$$
$$\xi_2^2 + \eta_2^2 + \zeta_2^2 = \xi_2'^2 + \eta_2'^2 + \zeta_2'^2 - Q'$$

gesetzt werden kann, wo Q' eine gewisse Function der 12 Grössen x_1', x_2', ... und t bedeutet; wir nennen ferner Δ' die Functionaldeterminante der 12 gestrichenen Grössen nach den ungestrichenen, als Function der ersteren dargestellt; dann erhalten wir

$$W = N^2 f(\xi_1'^2 + \eta_1'^2 + \zeta_1'^2 + Q') f(\xi_2'^2 + \eta_2'^2 + \zeta_2'^2 - Q') \frac{1}{\Delta'} \cdot$$
$$\int dx_1'\, dy_1'\, dz_1'\, dx_2'\, dy_2'\, dz_2'\, d\xi_1'\, d\eta_1'\, d\zeta_1'\, d\xi_2'\, d\eta_2'\, d\zeta_2'.$$

*) Siehe Kirchhoff, Mechanik, S. 5.

**) nach Beendigung des Zusammenstosses. D. H.

Hier kommen *nur* die gestrichenen Gröfsen vor und die Integration ist über das Gebiet G' auszudehnen. Der Ausdruck vereinfacht sich dadurch, dass dem vorausgeschickten Satze (S. 144) zufolge

$$\Delta' = 1$$

falls, was wir annehmen, das Potential V von den Geschwindigkeiten der Moleküle unabhängig ist. Es ist nämlich

in alter Bezeichnung	in jetziger Bezeichnung
$x_1, x_2, \ldots$	$x_1', y_1', z_1', \xi_1', \eta_1', \zeta_1', x_2', y_2', z_2', \xi_2', \eta_2', \zeta_2'$
$a_1, a_2, \ldots$	$x_1, y_1, z_1, \xi_1, \eta_1, \zeta_1, x_2, y_2, z_2, \xi_2, \eta_2, \zeta_2$

und in Folge der Differentialgleichungen

$u_1, u_2, \ldots$	$\xi_1', \eta_1', \zeta_1', \frac{\partial V}{\partial x_1'}, \frac{\partial V}{\partial y_1'}, \frac{\partial V}{\partial z_1'}, \xi_2', \eta_2', \zeta_2', \frac{\partial V}{\partial x_2'}, \frac{\partial V}{\partial y_2'}, \frac{\partial V}{\partial z_2'}$
Δ	Δ'

Wir haben daher unter der genannten Voraussetzung bezüglich des Potentials:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \cdots = 0^*),$$

d. h. nach dem genannten Satze:

$$\frac{\partial \Delta'}{\partial t} = 0;$$

nun ist aber für $t = 0$, wo $x_1' = x_1$, $\xi_1' = \xi_1 \ldots$,

$$\Delta' = 1,$$

also für jeden Werth von t

$$\Delta' = 1.$$

Das Gebiet G' kann beliebig gewählt werden; wir machen es gleich dem früher G genannten Gebiete und ändern die Bezeichnung dadurch, dass wir die Striche fortlassen, wobei dann Q eine gewisse Function der 12 Grössen $x_1, x_2, \ldots$ und t wird. Dann finden wir die Wahrscheinlichkeit dafür, dass *zur Zeit* t zwei Moleküle, die dem Gebiete G angehören, vorhanden sind, gleich

$$N^2 f(\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2 + Q)\, f(\xi_2^2 + \eta_2^2 + \zeta_2^2 - Q) \cdot$$
$$\int dx_1\, dy_1\, dz_1\, dx_2\, dy_2\, dz_2\, d\xi_1\, d\eta_1\, d\zeta_1\, d\xi_2\, d\eta_2\, d\zeta_2,$$

während die Wahrscheinlichkeit, dass *zur Zeit* $t = 0$ zwei ebensolche Moleküle existiren, gleich

$$N^2 f(\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2)\, f(\xi_2^2 + \eta_2^2 + \zeta_2^2) \cdot$$
$$\int dx_1\, dy_1\, dz_1\, dx_2\, dy_2\, dz_2\, d\xi_1\, d\eta_1\, d\zeta_1\, d\xi_2\, d\eta_2\, d\zeta_2$$

---

*) Alle Glieder der Summe verschwinden einzeln. So ist $\frac{\partial \xi_1'}{\partial x_1'} = 0$, weil ξ_1' selber zu den unabhängigen Variabeln gehört. D. H.

war. Sind diese beiden Ausdrücke einander gleich, so ist der Zustand des Gases ein stationärer; setzt man

$$\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2 = u_1,$$
$$\xi_2^2 + \eta_2^2 + \zeta_2^2 = u_2,$$

so muss also sein:

$$f(u_1 + Q) f(u_2 - Q) = f(u_1) f(u_2).$$

Hier können u_1, u_2, Q beliebig gewählt werden, da Q ausser den Grössen ξ, η, ζ abhängt von t und den Grössen x, y, z. Die Gleichung erfordert daher (durch Logarithmiren und Differentiiren nach Q)

$$\frac{\partial \log f(u_1 + Q)}{\partial Q} + \frac{\partial \log f(u_2 - Q)}{\partial Q} = 0$$

oder, wenn gesetzt wird:

$$u_1 + Q = v_1, \qquad u_2 - Q = v_2,$$
$$\frac{d \log f(v_1)}{d v_1} = \frac{d \log f(v_2)}{d v_2},$$

also constant, d. h.

$$\frac{d^2 \log f(v)}{d v^2} = 0.$$

Hieraus folgt

$$\log f(v) = -\frac{1}{\alpha^2} v + \beta,$$

$$f(v) = A e^{-\frac{v}{\alpha^2}},$$

wo A und α zwei Constanten sind. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Geschwindigkeitcomponenten eines Moleküls in den Intervallen ξ und $\xi + d\xi$, η und $\eta + d\eta$, ζ und $\zeta + d\zeta$ liegen, ist also

$$A e^{-\frac{1}{\alpha^2}(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)} d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

derselbe Ausdruck, den wir früher (S. 141) gefunden hatten.

§ 4.

Von den beiden Constanten A und α lässt sich die eine durch die andere ausdrücken, da nach der ursprünglichen Definition von f (S. 140)

$$\int\!\!\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta = 1$$

sein muss; das ergiebt

$$\frac{1}{A} = \int\!\!\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{\alpha^2}(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)} d\xi\, d\eta\, d\zeta$$

$$= \alpha^3 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^3.$$

Das hier vorkommende Integral ist leicht zu finden. Es ist nämlich

$$\int\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx\, dy$$

einerseits gleich

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx\right)^2,$$

andrerseits gleich

$$2\pi \int_0^{\infty} e^{-r^2} r\, dr = \pi,$$

also

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi},$$

mithin

$$A = \frac{1}{\pi^{\frac{3}{2}} \alpha^3}$$

und

$$f(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) = \frac{1}{\pi^{\frac{3}{2}} \alpha^3} e^{-\frac{1}{\alpha^2}(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)},$$

also die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Geschwindigkeitscomponenten eines Moleküls in den Intervallen ξ und $\xi + d\xi$, η und $\eta + d\eta$, ζ und $\zeta + d\zeta$ liegen, ist

$$\frac{1}{\pi^{\frac{3}{2}} \alpha^3} e^{-\frac{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}{\alpha^2}} d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

Die *Zahl* der Moleküle in der Volumeneinheit, die eine solche Geschwindigkeit besitzen, ist gleich N mal diesem Ausdruck, wenn N die Zahl der Moleküle in der Volumeneinheit überhaupt ist.

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Geschwindigkeitscomponenten in irgend einem endlichen Gebiete von ξ, η, ζ liegen, ist das Integral hiervon, über dieses Gebiet ausgedehnt.

§ 5.

Es ist von Interesse, noch eine Umformung des Maxwell'schen Gesetzes vorzunehmen. Setzen wir

$$v = +\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$$

und suchen die Wahrscheinlichkeit dafür, dass v zwischen Null und einem beliebig gewählten Werthe liege, einerlei, welches die Richtung der Bewegung sei. Um das Integral zu finden, welches diese Wahrscheinlichkeit darstellt, können wir uns auf ein schon benutztes Bild (S. 139) stützen; setzen wir etwa

$$\xi = v \cos \vartheta$$
$$\eta = v \sin \vartheta \cos \omega$$
$$\zeta = v \sin \vartheta \sin \omega,$$

so wird jene Wahrscheinlichkeit gleich

$$\frac{1}{\pi^{\frac{3}{2}} \alpha^3} \int \int \int e^{-\frac{v^2}{\alpha^2}} v^2 \, dv \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\omega$$

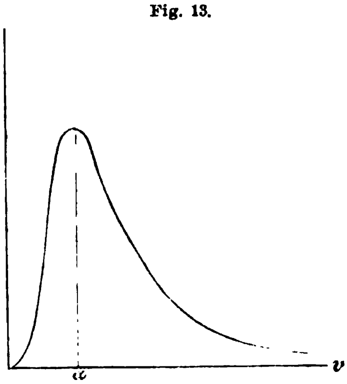
$$= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\alpha^3} \int_0^v e^{-\frac{v^2}{\alpha^2}} v^2 \, dv;$$

daher die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Geschwindigkeit zwischen v und $v + dv$ liegt, gleich

$$\frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\alpha^3} v^2 e^{-\frac{v^2}{\alpha^2}} dv.$$

Eine Curve, deren Ordinate der Factor von dv ist, während die Abscisse v ist, hat ungefähr die nebengezeichnete Gestalt; die Ordinate ist 0 für $v = 0$ und $v = \infty$ und hat dazwischen ein Maximum. Der diesem Maximum entsprechende Werth von v ist bestimmt durch

Fig. 13.



$$\frac{d}{d(v^2)} \left(v^2 e^{-\frac{v^2}{\alpha^2}} \right) = 0,$$

d. h.

$$e^{-\frac{v^2}{\alpha^2}} \left(1 - \frac{v^2}{\alpha^2} \right) = 0,$$

also

$$v = \alpha.$$

Geschwindigkeiten, die nahezu gleich α sind, sind wahrscheinlicher, d. h. kommen häufiger vor als alle anderen.

Wir wollen noch den Mittelwerth von v^2, den wir mit $\overline{v^2}$ bezeichnen, durch α ausdrücken. Er ist*)

$$\overline{v^2} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\alpha^3} \int_0^\infty v^4 e^{-\frac{v^2}{\alpha^2}} dv$$

$$= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \alpha^2 \int_0^\infty v^4 e^{-v^2} dv.$$

*) Der gesuchte Mittelwerth ist die Summe aller Geschwindigkeitsquadrate, dividirt durch die Gesammtzahl der Moleküle; man findet ihn, indem man zunächst die innerhalb eines unendlich kleinen Gebietes gelegenen Geschwindigkeitsquadrate zu ihrem Mittelwerth zusammenfasst und diesen Werth mit der Wahrscheinlichkeit dieses Geschwindigkeitsgebietes (d. h. dem Verhältniss der in das Gebiet fallenden Moleküle zur Gesammtzahl der Moleküle) multiplicirt, und hierauf die Summe nimmt. D. H.

Nun ist aber

$$\int v^{n+2} e^{-v^2} dv = -\frac{1}{2}\int v^{n+1} d(e^{-v^2})$$
$$= -\frac{1}{2} v^{n+1} e^{-v^2} + \frac{n+1}{2}\int v^n e^{-v^2} dv,$$
$$\int_0^\infty v^{n+2} e^{-v^2} dv = \frac{n+1}{2}\int_0^\infty v^n e^{-v^2} dv,$$

wenn

$$n + 1 > 0.$$

Folglich, durch successive Berechnung (vgl. S. 149):

$$\int_0^\infty v^4 e^{-v^2} dv = \frac{3}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

mithin

$$\overline{v^2} = \frac{3}{2}\alpha^2.$$

§ 6.

Die durchgeführten Betrachtungen lassen sich leicht so verallgemeinern, dass sie für ein Gemisch von beliebig vielen Gasen gelten, deren Moleküle verschiedenartig sind. Sie gelten ungeändert für die Moleküle eines jeden Bestandtheiles. Beziehen wir den Index 1 auf einen Bestandtheil, so ist, wie oben (S. 149):

$$f_1(\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2) = \frac{1}{\pi^{\frac{3}{2}}\alpha_1^3}\, e^{-\frac{1}{\alpha_1^2}(\xi_1^2+\eta_1^2+\zeta_1^2)}.$$

Für einen zweiten Bestandtheil ist:

$$f_2(\xi_2^2 + \eta_2^2 + \zeta_2^2) = \frac{1}{\pi^{\frac{3}{2}}\alpha_2^3}\, e^{-\frac{1}{\alpha_2^2}(\xi_2^2+\eta_2^2+\zeta_2^2)}.$$

Zwischen α_1 und α_2 aber besteht eine Beziehung, die man findet, wenn man die Stösse zwischen einem Moleküle der ersten Art und einem der zweiten Art untersucht. Für diese gelten die früheren Betrachtungen mit einer gewissen Modification. Sind m_1 und m_2 die Massen der Moleküle, so ist nämlich hier, statt wie auf S. 146, nach dem Satze der lebendigen Kraft:

$$\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2 = \xi_1'^2 + \eta_1'^2 + \zeta_1'^2 + \frac{Q'}{m_1},$$
$$\xi_2^2 + \eta_2^2 + \zeta_2^2 = \xi_2'^2 + \eta_2'^2 + \zeta_2'^2 - \frac{Q'}{m_2}$$

und daher (vgl. S. 148)

$$f_1\left(u_1 + \frac{Q}{m_1}\right) f_2\left(u_2 - \frac{Q}{m_2}\right) = f_1(u_1)\, f_2(u_2),$$

woraus auf entsprechendem Wege:

$$\frac{1}{m_1}\frac{d\log f_1(v_1)}{dv_1} = \frac{1}{m_2}\frac{d\log f_2(v_2)}{dv_2} = \text{const.}$$

oder

$$m_1\alpha_1^2 = m_2\alpha_2^2$$

folgt; da nun $\frac{3}{2}\alpha^2$ das mittlere Geschwindigkeitsquadrat darstellt, so ist mithin die *mittlere lebendige Kraft eines Moleküls* bei allen Bestandteilen dieselbe.

§ 7.

Wir wollen nun zusehen, wie die wahrnehmbaren Eigenschaften des Gases, welches unser System von Molekülen bilden soll, nämlich Dichtigkeit, Druck und Temperatur, mit den Grössen, die wir eingeführt haben, zusammenhängen.

Die *Dichtigkeit*, μ, ist die Masse in der Volumeneinheit; ist N die Zahl der Moleküle in der Volumeneinheit, m die Masse des einzelnen Moleküls, so ist also

$$\mu = Nm.$$

Sind verschiedenartige Moleküle vorhanden, so ist

$$\mu = N_1 m_1 + N_2 m_2 + \cdots$$

oder auch:

$$\mu = N\overline{m}.$$

Um einen Ausdruck für den *Druck*, p, zu finden, denken wir uns das Gas in ein Gefäss eingeschlossen; ein Theil seiner Wand sei die Ebene $x=0$, die positive x Achse gehe in das Gas hinein; es handelt sich darum, die Kraft zu finden, die hier auf die Einheit der Fläche von den Molekülen ausgeübt wird. Die Beschaffenheit des Gases in unmittelbarer Nähe der Wand ist dieselbe, wie in grösserer Entfernung; auch hier sind die Geschwindigkeiten gleich auf die verschiedenen Richtungen vertheilt; gewisse Moleküle bewegen sich auf die Wand hin, ebenso viele von der Wand fort. Die letzteren sind von der Wand zurückgeworfen. Es müssen *Kräfte* von der Wand auf die Moleküle ausgeübt werden, die das bewirken. Das Gesetz dieser Kräfte können wir unbestimmt lassen, nur *das* nehmen wir an, dass sie allein in äusserst kleiner Entfernung thätig sind und dem Principe von der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung entsprechen. Diesem Principe zufolge ist die Kraft, die die Moleküle auf die Wand ausüben, der Kraft gleich, die die Wand auf die Moleküle ausübt, und diese ist zu ermitteln aus der Veränderung der Bewegung der Moleküle, die die Wand bei dem Zurückwerfen hervorbringt. Fassen wir ein Molekül in der Nähe der Wand ins Auge, dessen Geschwindigkeit die x Componente $-\xi$ besitzt, wo $\xi > 0$. Dasselbe bewegt sich auf die Wand zu, tritt in den Bereich ihrer

Abstossung, wird von ihr zurückgeschleudert, und bewegt sich dann von der Wand fort. Nehmen wir, der Einfachheit wegen, die Wand als homogen an; dann wird die von ihr ausgehende Kraft immer die Richtung der x Achse haben; bezeichnen wir sie durch X. Es wird in Folge dessen die y Componente und die z Componente der Geschwindigkeit des Moleküles nicht geändert werden; die x Componente geht von $-\xi$ in $+\xi$ über und es ist daher*)

$$2m\xi = \int X\,dt,$$

die Integration über die Zeit genommen, die das Molekül in der Wirkungssphäre der Wand verweilt, oder über eine längere Zeit, da $X = 0$ ist bei grösserer Entfernung des Moleküls. Es ist daher

$$\int_0^1 X\,dt = 2m\xi \qquad \text{oder} \qquad = 0,$$

je nachdem das gewählte Molekül in der Zeit von $t = 0$ bis $t = 1$ die Wand trifft oder nicht trifft.

Nach der vorausgeschickten Bemerkung ist nun

$$p = \sum X,$$

die Summe genommen über diejenigen Moleküle, die im betrachteten Augenblick in der Wirkungssphäre der gewählten Flächeneinheit der Wand liegen, also in unmittelbarer Nähe an dieser Flächeneinheit sich befinden. Aus dieser Gleichung bilden wir**)

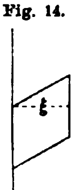
$$p = \sum \int_0^1 X\,dt,$$

wo die Summe zu nehmen ist in Bezug auf alle Moleküle, welche die Flächeneinheit der Wand in der Zeit von $t = 0$ bis $t = 1$ treffen; oder

$$p = 2m \sum \xi$$

bei gleicher Bedeutung der Summe.

Fig. 14.



Nun suchen wir die Zahl dieser Moleküle. Wir fassen zuerst diejenigen ins Auge, denen gewisse Werthe von ξ, η, ζ zukommen; sie bewegen sich in *einer* Richtung mit unveränderter relativer Lage; von ihnen treffen unsere Flächeneinheit so viele, als in einem schiefwinkligen Parallelepipedon enthalten sind, dessen Grundfläche gleich 1, dessen Höhe gleich ξ ist; sind von dieser Art von Molekülen in der Volumeneinheit n vorhanden, so

*) $m\dfrac{d\xi}{dt} = X.$ D. H.

**) Durch Multiplication mit dt und Integration von $t=0$ bis $t=1$. D. H.

ist diese Zahl $n\xi$; sie liefern also zu p den Beitrag

$$2mn\xi^2.$$

Nun sind *alle* Arten von Molekülen zu berücksichtigen, denen positive ξ zukommen. Ihre Anzahl in der Volumeneinheit ist $\frac{N}{2}$, da N die Zahl sämmtlicher Moleküle in der Volumeneinheit ist; und daher ist

$$p = mN\overline{\xi^2},$$

oder

$$= \mu\,\overline{\xi^2},$$

oder auch*)

$$= \frac{1}{3}\mu\,\overline{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} = \frac{1}{3}\mu\,\overline{v^2}.$$

Wir werden später sehen, dass dieser Ausdruck in gewissem Sinne auch als der *Druck* im *Innern* des Gases angesehen werden kann.

§ 8.

Aus der obigen Gleichung kann man einen gewissen Mittelwerth für die Geschwindigkeit eines Moleküls finden; derselbe ist:

$$\sqrt{\overline{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}} = \sqrt{\frac{3p}{\mu}} = \sqrt{3}\,x,$$

wo x der Newtonsche Werth für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles ist. Man erhält so bei 0° C. die mittlere Molekulargeschwindigkeit für

Wasserstoff	1840 m in 1 sec.
Stickstoff	490
Sauerstoff	460

Wir haben nun noch nach der *Temperatur* unseres Gases zu fragen. Wir wollen uns ein Gemisch von zwei Gasen, wie wir es betrachtet haben, denken. Wir wollen uns erlauben, von der Temperatur eines jeden Bestandtheiles zu reden, wie es vielfach geschieht, wiewohl die Berechtigung hierzu angezweifelt werden kann, da kein Weg denkbar ist, die Temperatur eines Bestandtheiles eines Gemisches zu messen. Dürfen wir von der Temperatur der Bestandtheile reden, so müssen wir sie für beide als gleich betrachten. Nun haben wir aber S. 152 gesehen, dass für die beiden Bestandtheile

$$\frac{m_1}{2}\,\overline{\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2} = \frac{m_2}{2}\,\overline{\xi_2^2 + \eta_2^2 + \zeta_2^2};$$

wir schliessen daraus, dass zwei Gase dann gleiche Temperatur besitzen, wenn ihre Moleküle gleiche mittlere lebendige Kraft haben. Denken wir uns nun zwei getrennte Gase von gleicher Temperatur

*) Da $\overline{\xi^2} = \overline{\eta^2} = \overline{\zeta^2}$ und $\overline{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} = \overline{\xi^2} + \overline{\eta^2} + \overline{\zeta^2}$. D. H.

und gleichem Drucke, so haben wir wegen der Gleichheit der Drucke neben der letzten Gleichung die andere:

$$N_1 m_1 \overline{\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2} = N_2 m_2 \overline{\xi_2^2 + \eta_2^2 + \zeta_2^2},$$

woraus folgt

$$N_1 = N_2,$$

d. i. das Avogadro'sche Gesetz. Es könnte nun die Temperatur T irgend eine Function von $\frac{m}{2} \overline{v^2}$ sein. Daraus aber, dass der Druck mit T proportional ist, folgt die Proportionalität der Temperatur T mit $\frac{m \overline{v^2}}{2}$.

Fünfzehnte Vorlesung.

Gas, das nicht in Ruhe ist. Theorie von Maxwell. — Mittelwerth irgend einer Function Q der Geschwindigkeitscomponenten in der Volumeneinheit und zeitliche Aenderung dieses Mittelwerthes durch Eintritt neuer Moleküle, durch Einwirkung äusserer Kräfte und durch Zusammenstösse. — Grundgleichung der Theorie. — Die Mittelwerthe der Geschwindigkeitscomponenten ergeben die scheinbare Bewegung des Gases. — Umformungen der Grundgleichung. — Specielle Werthe für die Function Q: ersten und zweiten Grades. — Allgemeine Gleichungen für die scheinbare Bewegung des Gases. — Geschwindigkeitsvertheilung im allgemeinen Fall. — Verhältniss der specifischen Wärmen $C_p : C_v = \frac{5}{3}$, gültig nur für punkt- oder kugelförmige Moleküle. — Beliebige Moleküle. Energie der fortschreitenden und der rotirenden Bewegung. — Moleküle rotationsförmig.

§ 1.

Wir wenden uns jetzt zur Betrachtung eines Gases, das nicht in Ruhe ist, und folgen dabei der Maxwell'schen Darstellung.*)

Wir denken uns in dem Gase ein rechtwinkliges Parallelepipedon, bei dem zwei diametral gegenüber liegende Ecken die Coordinaten x, y, z und $x + dx, y + dy, z + dz$ haben. dx, dy, dz sollen unendlich klein gegen wahrnehmbare Längen, aber doch noch so gross sein, dass unendlich viele Moleküle in dem Parallelepipedon sich befinden; die Zahl derselben sei in irgend einem Augenblicke:

$$N\, dx\, dy\, dz.^{**})$$

Ist wieder m die Masse eines Moleküls, so ist:

$$Nm = \mu$$

gleich der *Dichtigkeit* des Gases im Punkte x, y, z. Die Zahl der Moleküle in $dx\, dy\, dz$, deren Geschwindigkeitscomponenten zwischen ξ_1 und $\xi_1 + d\xi_1$, η_1 und $\eta_1 + d\eta_1$, ζ_1 und $\zeta_1 + d\zeta_1$ liegen, sei gleich

$$dx\, dy\, dz\, f(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)\, d\xi_1\, d\eta_1\, d\zeta_1,$$

so dass

---

*) Maxwell, Phil. Mag. 35, p. 129, p. 185, 1868.

**) wobei N von x, y, z und von der Zeit abhängt. D. H.

$$\int\!\!\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)\, d\xi_1\, d\eta_1\, d\zeta_1 = N.$$

Es sei ferner Q irgend eine Function von ξ_1, η_1, ζ_1 und $\overline{Q}$ der Mittelwerth aller Werthe von Q für die Moleküle in dem gedachten Parallelepipedon, d. h.

$$\overline{Q} N\, dx\, dy\, dz = dx\, dy\, dz \int\!\!\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)\, d\xi_1\, d\eta_1\, d\zeta_1\, Q$$

oder:

$$N\overline{Q} = \int\!\!\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} Q\, f(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)\, d\xi_1\, d\eta_1\, d\zeta_1.$$

Wir wollen die Aenderung untersuchen, die dieses Integral erleidet in einer Zeit dt, die gegen wahrnehmbare Zeiträume unendlich klein ist. Diese Aenderung bezeichnen wir durch

$$\frac{\partial (N\overline{Q})}{\partial t}\, dt.$$

Es setzt sich diese aus drei Theilen zusammen. Der erste rührt davon her, dass in der Zeit dt gewisse Moleküle in das Parallelepipedon eintreten und andere, denen andere Werthe von Q entsprechen, austreten. Der zweite rührt her von äusseren Kräften, wie die Schwere, die auf die Moleküle wirken und ihre Geschwindigkeiten ändern; der dritte von den Zusammenstössen je zweier Moleküle in dem Parallelepipedon.

Um den ersten Theil zu berechnen, fassen wir zunächst die Moleküle ins Auge, deren Geschwindigkeitscomponenten zwischen ξ_1 und $\xi_1 + d\xi_1$, η_1 und $\eta_1 + d\eta_1$, ζ_1 und $\zeta_1 + d\zeta_1$ liegen; diese bewegen sich so, dass ihre relative Lage nicht geändert wird; durch die Seite $dy\, dz$ des Parallelepipedons, welche den Eckpunkt x, y, z enthält, treten von ihnen in der Zeit dt so viele, als in einer an dieser Seite anliegenden Schicht sich befinden, deren Dicke $\xi_1\, dt$ ist; die Zahl dieser ist

$$dy\, dz\, \xi_1\, dt\, f(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)\, d\xi_1\, d\eta_1\, d\zeta_1.$$

Dadurch erleidet der Wert von $N\overline{Q}\, dx\, dy\, dz$ den Zuwachs

$$dy\, dz\, \xi_1\, dt\, f(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)\, d\xi_1\, d\eta_1\, d\zeta_1\, Q.$$

Wenn man nun über ξ_1, η_1, ζ_1 von $-\infty$ bis $+\infty$ integrirt, so erhält man, da

$$\int\!\!\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)\, \xi_1\, Q\, d\xi_1\, d\eta_1\, d\zeta_1 = N\, \overline{\xi_1 Q},$$

für jenen Zuwachs den Ausdruck*)

$$dy\, dz\, dt\, N\, \overline{\xi_1 Q}.$$

Setzt man in diesem Ausdruck $x + dx$ für x und giebt ihm das entgegengesetzte Vorzeichen, so erhält man den Zuwachs, den $N\overline{Q}\, dx\, dy\, dz$ in der Zeit dt in Folge davon erleidet, dass Moleküle der betrachteten Art durch *die* Fläche $dy\, dz$ treten, die den Punkt $x + dx, y, z$ enthält; die Summe dieser beiden Zuwachse ist, wenn wieder über ξ_1, η_1, ζ_1 von $-\infty$ bis $+\infty$ integrirt ist, gleich

$$-\, dx\, dy\, dz\, dt\, \frac{\partial (N\, \overline{\xi_1 Q})}{\partial x}.$$

Die Summe dieses Ausdrucks und der beiden anderen, die sich auf die Richtungen der y und z Achse beziehen, ist

$$-\, dx\, dy\, dz\, dt\, \left(\frac{\partial (N\, \overline{\xi_1 Q})}{\partial x} + \frac{\partial (N\, \overline{\eta_1 Q})}{\partial y} + \frac{\partial (N\, \overline{\zeta_1 Q})}{\partial z} \right).$$

Es ist dies der gesammte Zuwachs, den

$$N\overline{Q}\, dx\, dy\, dz$$

in der Zeit dt in Folge davon erleidet, dass Moleküle in das Parallelepipedon $dx\, dy\, dz$ eintreten und andere austreten.

Wir suchen nun zweitens die Aenderung, die $N\overline{Q}$ in Folge der äusseren Kräfte erfährt. Es seien X, Y, Z die Componenten der beschleunigenden Kraft, die auf ein Molekül, das am Orte (x, y, z) sich befindet, wirkt; in der Zeit dt verwandeln sich dann ξ_1, η_1, ζ_1 in $\xi_1 + X\, dt$, $\eta_1 + Y\, dt$, $\zeta_1 + Z\, dt$; es nimmt also Q um

$$dt \left(X \frac{\partial Q}{\partial \xi_1} + Y \frac{\partial Q}{\partial \eta_1} + Z \frac{\partial Q}{\partial \zeta_1} \right).$$

zu, und $N\overline{Q}$ um

$$dt\, N \left(X \overline{\frac{\partial Q}{\partial \xi_1}} + Y \overline{\frac{\partial Q}{\partial \eta_1}} + Z \overline{\frac{\partial Q}{\partial \zeta_1}} \right).$$

Wir wollen endlich drittens die Vergrösserung, die $N\overline{Q}$ in der Zeit dt durch die Zusammenstösse der Moleküle erleidet, gleich

$$\frac{D(N\overline{Q})}{Dt}\, dt \quad \text{oder**) gleich} \quad N \frac{D\overline{Q}}{Dt}\, dt$$

setzen; dann haben wir also

$$\frac{\partial (N\overline{Q})}{\partial t} - N \frac{D\overline{Q}}{Dt} = - \left(\frac{\partial (N\, \overline{\xi_1 Q})}{\partial x} + \frac{\partial (N\, \overline{\eta_1 Q})}{\partial y} + \frac{\partial (N\, \overline{\zeta_1 Q})}{\partial z} \right)$$
$$+ N \left(X \overline{\frac{\partial Q}{\partial \xi_1}} + Y \overline{\frac{\partial Q}{\partial \eta_1}} + Z \overline{\frac{\partial Q}{\partial \zeta_1}} \right),$$

oder nach Multiplication mit m

---

*) Hierbei sind, wegen des Vorzeichens von ξ_1, sowohl die eintretenden als auch die austretenden Moleküle berücksichtigt. D. H.

**) Denn durch die Zusammenstösse wird N nicht geändert. D. H.

$$\frac{\partial(\mu\overline{Q})}{\partial t} - \mu\frac{D\overline{Q}}{Dt} = -\left(\frac{\partial(\mu\overline{\xi_1 Q})}{\partial x} + \frac{\partial(\mu\overline{\eta_1 Q})}{\partial y} + \frac{\partial(\mu\overline{\zeta_1 Q})}{\partial z}\right)$$
$$+\mu\left(X\frac{\overline{\partial Q}}{\partial\xi_1} + Y\frac{\overline{\partial Q}}{\partial\eta_1} + Z\frac{\overline{\partial Q}}{\partial\zeta_1}\right).$$

§ 2.

Wir können die so gefundene Gleichung als die *Grundgleichung* der Theorie, die wir zu entwickeln haben, bezeichnen. Wir werden von ihr verschiedene Anwendungen machen, indem wir für Q verschiedene Functionen von ξ_1, η_1, ζ_1 setzen. Zuerst werden wir Q so wählen, dass $\frac{D\overline{Q}}{Dt}$ verschwindet. Das ist zunächst der Fall, wenn

$$Q = 1, \quad \text{d. h.} \quad \overline{Q} = 1$$

gesetzt wird. Dadurch erhalten wir

$$\frac{\partial\mu}{\partial t} = -\left(\frac{\partial(\mu\overline{\xi_1})}{\partial x} + \frac{\partial(\mu\overline{\eta_1})}{\partial y} + \frac{\partial(\mu\overline{\zeta_1})}{\partial z}\right).$$

Wir wollen nun die Mittelwerthe von ξ_1, η_1, ζ_1:

$$\overline{\xi_1} = u, \quad \overline{\eta_1} = v, \quad \overline{\zeta_1} = w,$$

setzen, so dass für

$$\xi_1 = u + \xi, \quad \eta_1 = v + \eta, \quad \zeta_1 = w + \zeta,$$
$$\overline{\xi} = 0, \quad \overline{\eta} = 0, \quad \overline{\zeta} = 0$$

wird.

Die Grössen u, v, w haben die folgende Eigenschaft: durch die Flächeneinheit, die senkrecht zu der x Achse ist, geht, wenn sie ruht, in der Zeiteinheit in der Richtung der x Achse die Masse μu; bewegt sie sich in der Richtung der x Achse mit der Geschwindigkeit u, so geht durch sie die Masse 0; d. h. gleich viele Moleküle gehen durch sie in den beiden entgegengesetzten Richtungen (da eben $\overline{\xi} = 0$ ist). Entsprechendes gilt von v und w. Denkt man sich mithin eine geschlossene Fläche, deren Punkte sich immer mit den Geschwindigkeitscomponenten u, v, w bewegen, so bleibt die Grösse der Masse innerhalb der Fläche, nämlich die Zahl der darin enthaltenen Moleküle, dieselbe; die Moleküle selbst sind aber *nicht* immer dieselben. In dem letzten Umstande liegt ein wesentlicher Unterschied zwischen der Molekularbewegung, die wir betrachten, und der Bewegung einer continuirlichen Materie. Nennt man bei einer solchen u, v, w die Geschwindigkeitscomponenten eines materiellen Punktes und denkt man sich auch hier eine geschlossene Fläche, deren Punkte so sich bewegen, dass auch ihre Geschwindigkeitscomponenten u, v, w sind, so bleibt nicht allein die *Grösse* der durch die Fläche begrenzten Masse, sondern auch diese Masse *selbst* dieselbe. Vergleicht man die Molekularbewegung mit der Bewegung einer continuirlichen Materie, so hat man *die Mittel* von ξ_1, η_1, ζ_1 bei jener als entsprechend den *Geschwindigkeitscomponenten* bei dieser zu betrachten. Die Gleichung, die wir abgeleitet haben:

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = -\left(\frac{\partial(\mu u)}{\partial x} + \frac{\partial(\mu v)}{\partial y} + \frac{\partial(\mu w)}{\partial z}\right),$$

ist auch die sogenannte Gleichung der Continuität, wenn man unter u, v, w die Geschwindigkeitscomponenten bei einer Bewegung einer continuirlichen Materie versteht.

§ 3.

In unsere allgemeine Grundgleichung wollen wir auch

$$\begin{aligned} \xi_1 &= u + \xi \\ \eta_1 &= v + \eta \\ \zeta_1 &= w + \zeta \end{aligned}$$

gesetzt denken; dabei wird

$$\overline{\xi_1 Q} = u\overline{Q} + \overline{\xi Q}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \xi_1} = \frac{\partial Q}{\partial u}\,^{*)}$$

also:

$$\overline{\frac{\partial Q}{\partial \xi_1}} = \overline{\frac{\partial Q}{\partial u}} = \frac{\partial \overline{Q}}{\partial u} \quad \text{u. s. w.}$$

Ziehen wir von ihr die mit $\overline{Q}$ multiplicirte „Gleichung der Continuität“ ab, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \mu\left(\frac{\partial \overline{Q}}{\partial t} + u\frac{\partial \overline{Q}}{\partial x} + v\frac{\partial \overline{Q}}{\partial y} + w\frac{\partial \overline{Q}}{\partial z}\right) - \mu\frac{\overline{DQ}}{Dt} \\ = -\left(\frac{\partial(\mu\overline{\xi Q})}{\partial x} + \frac{\partial(\mu\overline{\eta Q})}{\partial y} + \frac{\partial(\mu\overline{\zeta Q})}{\partial z}\right) \\ + \mu\left(X\frac{\partial \overline{Q}}{\partial u} + Y\frac{\partial \overline{Q}}{\partial v} + Z\frac{\partial \overline{Q}}{\partial w}\right). \end{aligned}$$

Zur Vereinfachung führen wir ein neues Zeichen ein. Bedeutet bei einer Bewegung einer continuirlichen Materie F eine Function von x, y, z und t und setzt man

$$\frac{\partial F}{\partial t} + u\frac{\partial F}{\partial x} + v\frac{\partial F}{\partial y} + w\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{dF}{dt},$$

*) Man denke sich in Q statt ξ_1 das Argument $u + \xi$ gesetzt und behandle bei der Differentiation ξ als unabhängig von u. D. H.

so ist $\frac{dF}{dt}dt$ der Zuwachs, den das auf einen *bestimmten materiellen* Punkt bezogene F in dt erleidet. Wir wollen das Zeichen $\frac{dF}{dt}$ in des durch diese Gleichung definirten Bedeutung auch hier anwenden, obwohl die genannte mechanische Bedeutung hier nicht vorhanden ist. Die Gleichung der Continuität lässt sich dann schreiben

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dt}+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0,$$

und unsere Grundgleichung:

$$\mu\left(X\frac{\partial\overline{Q}}{\partial u}+Y\frac{\partial\overline{Q}}{\partial v}+Z\frac{\partial\overline{Q}}{\partial w}\right)$$
$$=\mu\frac{d\overline{Q}}{dt}-\mu\frac{D\overline{Q}}{Dt}+\frac{\partial(\mu\,\overline{\xi Q})}{\partial x}+\frac{\partial(\mu\,\overline{\eta Q})}{\partial y}+\frac{\partial(\mu\,\overline{\zeta Q})}{\partial z}.$$

§ 4.

Sehen wir nun zu, für welche Werthe von Q $\frac{D\overline{Q}}{Dt}$ ferner verschwindet. Es seien 1 und 2 zwei Moleküle in dem Parallelepipedon $dx\,dy\,dz$, die innerhalb der Zeit dt einander so nahe kommen, dass sie eine merkliche Einwirkung auf einander ausüben. Es seien $\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \xi_2, \eta_2, \zeta_2$ ihre ursprünglichen, $\xi_1', \eta_1', \zeta_1', \xi_2', \eta_2'\ \zeta_2'$ ihre durch die Collision geänderten Geschwindigkeiten. Die Sätze von der Bewegung des Schwerpunktes und von der lebendigen Kraft geben dann

$$\xi_1+\xi_2=\xi_1'+\xi_2',$$
$$\eta_1+\eta_2=\eta_1'+\eta_2',$$
$$\zeta_1+\zeta_2=\zeta_1'+\zeta_2',$$
$$\xi_1^2+\eta_1^2+\zeta_1^2+\xi_2^2+\eta_2^2+\zeta_2^2=\xi_1'^2+\eta_1'^2+\zeta_1'^2+\xi_2'^2+\eta_2'^2+\zeta_2'^2.$$

Daraus folgt, dass

$$\overline{\xi_1},\ \overline{\eta_1},\ \overline{\zeta_1},\ \overline{\xi_1^2+\eta_1^2+\zeta_1^2}$$

durch die Zusammenstösse nicht geändert werden, dass also für Q gleich einer der Grössen:

$$\xi_1,\ \eta_1,\ \zeta_1,\ \xi_1^2+\eta_1^2+\zeta_1^2$$
$$\frac{D\overline{Q}}{Dt}=0.$$

Diese Werthe wollen wir nach einander in unsere Grundgleichung setzen. Durch

$$Q=\xi_1=u+\xi,$$

oder

$$Q=\eta_1=v+\eta,$$

oder

$$Q=\zeta_1=w+\zeta,$$

erhalten wir aus ihr*)

$$\mu X = \mu \frac{du}{dt} + \frac{\partial(\mu \overline{\xi^2})}{\partial x} + \frac{\partial(\mu \overline{\xi\eta})}{\partial y} + \frac{\partial(\mu \overline{\xi\zeta})}{\partial z},$$

$$\mu Y = \mu \frac{dv}{dt} + \frac{\partial(\mu \overline{\eta\xi})}{\partial x} + \frac{\partial(\mu \overline{\eta^2})}{\partial y} + \frac{\partial(\mu \overline{\eta\zeta})}{\partial z},$$

$$\mu Z = \mu \frac{dw}{dt} + \frac{\partial(\mu \overline{\zeta\xi})}{\partial x} + \frac{\partial(\mu \overline{\zeta\eta})}{\partial y} + \frac{\partial(\mu \overline{\zeta^2})}{\partial z}.$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen wollen wir unsere allgemeine Grundgleichung abermals transformiren, nämlich X, Y, Z aus ihr fortschaffen. Wir multipliciren die letzten drei Gleichungen der Reihe nach mit $\frac{\partial \overline{Q}}{\partial u}, \frac{\partial \overline{Q}}{\partial v}, \frac{\partial \overline{Q}}{\partial w}$, subtrahiren sie von der Grundgleichung und erhalten dann

$$\begin{aligned}
&\mu \frac{D\overline{Q}}{Dt} \\
&= \mu \left(\frac{d\overline{Q}}{dt} - \frac{\partial \overline{Q}}{\partial u}\frac{du}{dt} - \frac{\partial \overline{Q}}{\partial v}\frac{dv}{dt} - \frac{\partial \overline{Q}}{\partial w}\frac{dw}{dt}\right) \\
&\quad + \frac{\partial(\mu \overline{\xi Q})}{\partial x} - \frac{\partial(\mu \overline{\xi^2})}{\partial x}\frac{\partial \overline{Q}}{\partial u} - \frac{\partial(\mu \overline{\xi\eta})}{\partial x}\frac{\partial \overline{Q}}{\partial v} - \frac{\partial(\mu \overline{\xi\zeta})}{\partial x}\frac{\partial \overline{Q}}{\partial w} \\
&\quad + \frac{\partial(\mu \overline{\eta Q})}{\partial y} - \frac{\partial(\mu \overline{\eta\xi})}{\partial y}\frac{\partial \overline{Q}}{\partial u} - \frac{\partial(\mu \overline{\eta^2})}{\partial y}\frac{\partial \overline{Q}}{\partial v} - \frac{\partial(\mu \overline{\eta\zeta})}{\partial y}\frac{\partial \overline{Q}}{\partial w} \\
&\quad + \frac{\partial(\mu \overline{\zeta Q})}{\partial z} - \frac{\partial(\mu \overline{\zeta\xi})}{\partial z}\frac{\partial \overline{Q}}{\partial u} - \frac{\partial(\mu \overline{\zeta\eta})}{\partial z}\frac{\partial \overline{Q}}{\partial v} - \frac{\partial(\mu \overline{\zeta^2})}{\partial z}\frac{\partial \overline{Q}}{\partial w}
\end{aligned}$$

oder auch

$$\begin{aligned}
&\mu \frac{D\overline{Q}}{Dt} \\
&= \mu \left(\frac{d\overline{Q}}{dt} - \frac{\partial \overline{Q}}{\partial u}\frac{du}{dt} - \frac{\partial \overline{Q}}{\partial v}\frac{dv}{dt} - \frac{\partial \overline{Q}}{\partial w}\frac{dw}{dt}\right) \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial x}\left\{\mu\left(\overline{\xi Q} - \overline{\xi^2}\frac{\partial \overline{Q}}{\partial u} - \overline{\xi\eta}\frac{\partial \overline{Q}}{\partial v} - \overline{\xi\zeta}\frac{\partial \overline{Q}}{\partial w}\right)\right\} \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial y}\left\{\mu\left(\overline{\eta Q} - \overline{\eta\xi}\frac{\partial \overline{Q}}{\partial u} - \overline{\eta^2}\frac{\partial \overline{Q}}{\partial v} - \overline{\eta\zeta}\frac{\partial \overline{Q}}{\partial w}\right)\right\} \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial z}\left\{\mu\left(\overline{\zeta Q} - \overline{\zeta\xi}\frac{\partial \overline{Q}}{\partial u} - \overline{\zeta\eta}\frac{\partial \overline{Q}}{\partial v} - \overline{\zeta^2}\frac{\partial \overline{Q}}{\partial w}\right)\right\} \\
&\quad + \mu\,\overline{\xi^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \overline{Q}}{\partial u}\right) + \mu\,\overline{\eta^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \overline{Q}}{\partial v}\right) + \mu\,\overline{\zeta^2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \overline{Q}}{\partial w}\right) \\
&\quad + \mu\,\overline{\eta\zeta}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \overline{Q}}{\partial w}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \overline{Q}}{\partial v}\right)\right) + \mu\,\overline{\zeta\xi}\left(\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \overline{Q}}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \overline{Q}}{\partial w}\right)\right) \\
&\quad + \mu\,\overline{\xi\eta}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \overline{Q}}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \overline{Q}}{\partial u}\right)\right).
\end{aligned}$$

*) Mit Benutzung von $\overline{\xi} = 0$, $\overline{\eta} = 0$, $\overline{\zeta} = 0$. D. H.

§ 5.

Wir machen aufmerksam auf gewisse Eigenschaften einiger in der letzten Gleichung vorkommender Glieder, die ihre Anwendung erleichtern. Es ist Q eine Function von $u + \xi$, $v + \eta$, $w + \zeta$, also $\overline{Q}$ eine Function von u, v, w und $\overline{\xi^2}$, $\overline{\xi\eta}$, ...; ist Q eine ganze rationale Function (und nur solche werden wir in Betracht ziehen), so ist die Zahl dieser „Mittelwerthe" endlich und abhängig von dem Grade von Q. Der Factor von μ in der obigen Gleichung:

$$\frac{d\overline{Q}}{dt} - \frac{\partial \overline{Q}}{\partial u}\frac{du}{dt} - \frac{\partial \overline{Q}}{\partial v}\frac{dv}{dt} - \frac{\partial \overline{Q}}{\partial w}\frac{dw}{dt}$$

ist daher *der* nach t genommene Differentialquotient von $\overline{Q}$, der zu bilden ist unter der Annahme, dass u, v, w constant und nur jene Mittelwerthe $\overline{\xi^2}$, $\overline{\xi\eta}$, ... von t abhängig sind.*)

Die Factoren von μ in den drei folgenden Zeilen haben in dem Falle, dass Q eine Function zweiten Grades von ξ_1, η_1, ζ_1 ist, welcher Fall uns zunächst interessirt, die Eigenschaft, von u, v, w unabhängig zu sein. Um das zu beweisen, bezeichnen wir durch Q_0 die Function von u, v, w, die aus Q entsteht, wenn wir darin ξ, η, ζ gleich Null setzen. Nach der Taylor'schen Reihe ist dann

$$Q = Q_0 + \xi\frac{\partial Q_0}{\partial u} + \eta\frac{\partial Q_0}{\partial v} + \zeta\frac{\partial Q_0}{\partial w} + \text{const},$$

wo die Constante ein von u, v, w unabhängiges (nämlich die zweiten Differentialquotienten von Q_0 nach u, v, w enthaltendes) Glied bezeichnet. Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\xi Q &= \xi Q_0 + \xi^2\frac{\partial Q_0}{\partial u} + \xi\eta\frac{\partial Q_0}{\partial v} + \xi\zeta\frac{\partial Q_0}{\partial w} + \text{const},\\
\frac{\partial Q}{\partial u} &= \frac{\partial Q_0}{\partial u} + \text{const},\\
\frac{\partial Q}{\partial v} &= \frac{\partial Q_0}{\partial v} + \text{const},\\
\frac{\partial Q}{\partial w} &= \frac{\partial Q_0}{\partial w} + \text{const}
\end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned}
\overline{\xi Q} &= \overline{\xi^2}\frac{\partial Q_0}{\partial u} + \overline{\xi\eta}\frac{\partial Q_0}{\partial v} + \overline{\xi\zeta}\frac{\partial Q_0}{\partial w} + \text{const},\\
\overline{\xi^2}\frac{\partial \overline{Q}}{\partial u} &= \overline{\xi^2}\frac{\partial Q_0}{\partial u} + \text{const},\\
\overline{\xi\eta}\frac{\partial \overline{Q}}{\partial v} &= \overline{\xi\eta}\frac{\partial Q_0}{\partial v} + \text{const},\\
\overline{\xi\zeta}\frac{\partial \overline{Q}}{\partial w} &= \overline{\xi\zeta}\frac{\partial Q_0}{\partial w} + \text{const},
\end{aligned}$$

*) und zwar nicht für ein ruhendes, sondern für ein mit der Geschwindigkeit u, v, w bewegtes Raumelement (S. 161). D. H.

woraus die Richtigkeit der ausgesprochenen Behauptung sich ergiebt.

Den in Rede stehenden Coefficienten kann man schreiben*)

$$\overline{\xi Q} - \overline{\xi^2 \frac{\partial Q}{\partial \xi}} - \overline{\xi\eta \frac{\partial Q}{\partial \eta}} - \overline{\xi\zeta \frac{\partial Q}{\partial \zeta}};$$

nach der eben bewiesenen Thatsache darf man also in ihm dann u, v, w gleich Null setzen; es werde dadurch aus Q Q^0 (eine Function von ξ, η, ζ).

Nehmen wir nun an, dass Q eine *homogene* Function zweiten Grades von ξ_1, η_1, ζ_1 ist, so wird, da

$$\bar{\xi} = 0, \quad \bar{\eta} = 0, \quad \bar{\zeta} = 0,$$

$$\overline{\frac{\partial Q^0}{\partial \xi}} = 0, \quad \overline{\frac{\partial Q^0}{\partial \eta}} = 0, \quad \overline{\frac{\partial Q^0}{\partial \zeta}} = 0,$$

und daher derselbe Coefficient gleich

$$\overline{\xi Q^0}.$$

Die Coefficienten von μ in den beiden folgenden Zeilen ergeben sich auf demselben Wege gleich

$$\overline{\eta Q^0}$$

und

$$\overline{\zeta Q^0}.$$

§ 6.

Nun setzen wir

$$Q = \xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2,$$

also

$$\bar{Q} = u^2 + v^2 + w^2 + \overline{\xi^2} + \overline{\eta^2} + \overline{\zeta^2},$$

$$Q^0 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2.$$

Unsere Gleichung giebt dann**)

$$0 = \mu \frac{d\,\overline{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}}{dt}$$

$$+ 2\mu \left(\overline{\xi^2}\frac{\partial u}{\partial x} + \overline{\eta^2}\frac{\partial v}{\partial y} + \overline{\zeta^2}\frac{\partial w}{\partial z} + \overline{\eta\zeta}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) + \overline{\zeta\xi}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) + \overline{\xi\eta}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\, \overline{\xi(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\, \overline{\eta(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\, \overline{\zeta(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)}\right).$$

*) Da $\frac{\partial Q}{\partial u} = \frac{\partial Q}{\partial \xi}$. D. H.

**) Da hierfür $\frac{D\bar{Q}}{Dt} = 0$. D. H.

Wir wollen nun setzen

$$\mu\,\overline{\xi^2} = X_x,$$
$$\mu\,\overline{\eta^2} = Y_y,$$
$$\mu\,\overline{\zeta^2} = Z_z,$$
$$\mu\,\overline{\eta\zeta} = Y_z = Z_y,$$
$$\mu\,\overline{\zeta\xi} = Z_x = X_z,$$
$$\mu\,\overline{\xi\eta} = X_y = Y_x;$$

die oben (S. 162) aus den Annahmen $Q = \xi_1, \eta_1, \zeta_1$ hergeleiteten Gleichungen werden dann

$$\mu X = \mu\frac{du}{dt} + \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z},$$
$$\mu Y = \mu\frac{dv}{dt} + \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z},$$
$$\mu Z = \mu\frac{dw}{dt} + \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z};$$

sie stimmen genau überein mit Gleichungen, die für die Bewegung einer continuirlichen Materie gelten und in denen $X_x, X_y, \ldots$ die *Druckcomponenten* bezeichnen; wir sehen hieraus, dass den Druckcomponenten bei einer continuirlichen Materie die Ausdrücke $\mu\,\overline{\xi^2}$, $\mu\,\overline{\eta^2}\ldots$ bei unserem Molekularsystem entsprechen. Erfahrungsgemäss ist bei einem Gase, wie bei einer jeden Flüssigkeit, sehr nahe:

$$X_x = Y_y = Z_z,$$
$$Y_z = Z_x = X_y = 0,$$

d. h.

$$\overline{\xi^2} = \overline{\eta^2} = \overline{\zeta^2},$$
$$\overline{\eta\zeta} = \overline{\zeta\xi} = \overline{\xi\eta} = 0.$$

Setzen wir $\mu\,\overline{\xi^2} = \mu\,\overline{\eta^2} = \mu\,\overline{\zeta^2} = p$, so erhalten wir die bekannten, näherungsweise richtigen Gleichungen der Hydrodynamik:

$$\mu X = \mu\frac{du}{dt} + \frac{\partial p}{\partial x},$$
$$\mu Y = \mu\frac{dv}{dt} + \frac{\partial p}{\partial y},$$
$$\mu Z = \mu\frac{dw}{dt} + \frac{\partial p}{\partial z},$$

und p ist der *Druck*, in Uebereinstimmung mit dem oben, S. 154. auf anderem Wege gefundenen Resultat.*)

*) Dabei ist zu beachten, dass in diesem allgemeineren Falle ξ, η, ζ nicht die absoluten, sondern die relativ zu u, v, w genommenen Geschwindigkeitscomponenten bedeuten. D. H.

§ 7.

Das Gesetz, das wir oben für die Vertheilung der Geschwindigkeiten unter die Moleküle eines scheinbar ruhenden Gases gefunden haben, lässt sich in gewisser Weise leicht verallgemeinern. Denken wir uns, dass die Geschwindigkeiten ξ, η, ζ aller Moleküle um *dieselben* Grössen u, v, w vergrössert werden, so bekommen wir auch einen möglichen Zustand des Gases: einen, bei dem das Gas mit der Geschwindigkeit, deren Componenten u, v, w sind, *strömt*.

$$\frac{N}{\pi^{\frac{3}{2}}\alpha^3} e^{-\frac{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}{\alpha^2}} d\xi\, d\eta\, d\zeta$$

ist dann nach S. 149 die Zahl der in der Volumeneinheit befindlichen Moleküle, deren Geschwindigkeitscomponenten in den Intervallen

$$\begin{array}{lcl} \xi + u & \text{und} & \xi + u + d\xi, \\ \eta + v & \text{und} & \eta + v + d\eta, \\ \zeta + w & \text{und} & \zeta + w + d\zeta \end{array}$$

liegen; die Zahl der Moleküle, deren Geschwindigkeitscomponenten zwischen

$$\begin{array}{lcl} \xi & \text{und} & \xi + d\xi, \\ \eta & \text{und} & \eta + d\eta, \\ \zeta & \text{und} & \zeta + d\zeta \end{array}$$

liegen, ist hiernach

$$\frac{N}{\pi^{\frac{3}{2}}\alpha^3} e^{-\frac{(\xi-u)^2+(\eta-v)^2+(\zeta-w)^2}{\alpha^2}} d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

Das gilt zunächst und streng nur, wenn u, v, w und α dem Raume und der Zeit nach constant sind; aber da, wie wir an einzelnen Beispielen (S. 154) bereits gesehen haben, die mittleren Geschwindigkeiten der Wärmebewegung sehr bedeutend sind (mehrere hundert Meter in der Secunde), so wird dieser Ausdruck sehr nahe richtig auch dann sein, wenn u, v, w und α Aenderungen, die nicht gar zu schnell sind, der Zeit und dem Orte nach erfahren.*)

§ 8.

Die Grösse p wollen wir nun auch in die aus der Annahme $\varrho = \xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2$ abgeleitete Gleichung (S. 164) einführen; diese können wir dabei noch vereinfachen. Daraus, dass nahe

*) Unter dieser Voraussetzung gelten dann die S. 165 angegebenen Mittelwerthe, welche Reibung und Wärmeleitung ausschliessen. D. H.

$$\overline{\xi^2} = \overline{\eta^2} = \overline{\zeta^2} = \frac{p}{\mu}$$

und

$$\overline{\eta\zeta} = \overline{\zeta\xi} = \overline{\xi\eta} = 0,$$

schliessen wir, dass die Geschwindigkeiten ξ, η, ζ nahe gleichmässig nach den verschiedenen Richtungen vertheilt sind, d. h. dass der Mittelwerth einer beliebigen Function $\overline{F(\xi, \eta, \zeta)}$ nahe unabhängig von der Richtung der Coordinatenachsen ist. Ist das der Fall, so muss nahe

$$\overline{\xi(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)} = 0,$$
$$\overline{\eta(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)} = 0,$$
$$\overline{\zeta(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)} = 0$$

sein, weil, wenn die Richtung *einer* der Coordinatenachsen verkehrt wird, diese Ausdrücke die entgegengesetzten Werthe annehmen. Die genannte Gleichung giebt daher

$$0 = 3\mu \frac{d\left(\frac{p}{\mu}\right)}{dt} + 2p\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right),$$

oder, da

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

$$0 = 3\mu \frac{d\left(\frac{p}{\mu}\right)}{dt} - 2\frac{p}{\mu}\frac{d\mu}{dt},$$

woraus mit Einführung der absoluten Temperatur T:

$$p = R\mu T,$$

$$\frac{d\mu}{\mu dt} = \frac{3}{2}\frac{dT}{Tdt},$$

oder

$$\frac{dp}{pdt} = \frac{5}{3}\frac{d\mu}{\mu dt}$$

folgt.

Wir hatten früher (S. 121) gefunden bei Vernachlässigung der durch Reibung erregten Wärme und der Wärmeleitung:

$$C_v dT - M d\mu = 0,$$

wo (S. 116)

$$M = (C_p - C_v)\frac{\frac{\partial p}{\partial \mu}}{\frac{\partial p}{\partial T}} = (C_p - C_v)\frac{T}{\mu},$$

also

$$\frac{d\mu}{\mu}\left(\frac{C_p}{C_v} - 1\right) = \frac{dT}{T}.$$

Diese Gleichung wird mit der eben abgeleiteten identisch, wenn

$$\frac{C_p}{C_v} - 1 = \frac{2}{3},$$

d. h.

$$\frac{C_p}{C_v} = \frac{5}{3}.$$

Für Quecksilberdampf ist dieses Verhältniss in der That nach den Versuchen von Kundt und Warburg*) gleich $\frac{5}{3}$. Dagegen ist für Sauerstoff, Stickstoff, Wasserstoff dies Verhältniss nahe gleich 1,40 (S. 76 ff.). Ueberhaupt hat die Beobachtung für dieses Verhältniss bei allen Gasen, ausser bei Quecksilberdampf, einen kleineren Werth, als den aus der Theorie folgenden Werth $\frac{5}{3}$ ergeben. Dieser Widerspruch zwischen Theorie und Thatsache ist aufzuklären; nach Clausius kann das in einer Weise geschehen, die im Folgenden besprochen wird.

§ 9.

Wir haben die Moleküle bisher als *Punkte* angenommen, deren Bewegung nur eine *fortschreitende* sein kann. Diese Annahme hat sich insofern als falsch gezeigt, als sie das Verhältniss $\frac{C_p}{C_v} = \frac{5}{3}$ ergab, während es bei der Mehrzahl der Gase einen kleineren Werth hat. Ebenso ist es, wenn man die Moleküle als *Kugeln* voraussetzt; diese können sich allerdings drehen; aber durch die Kräfte, die sie auf einander ausüben, kann ihre Drehung nicht hervorgerufen oder, wenn sie besteht, nicht geändert werden.**) Es verhält sich immer so, als ob sie sich nicht drehen.

Anders ist es, wenn die Moleküle eine andere Gestalt besitzen; dann kann $\frac{C_p}{C_v}$ einen anderen Werth haben. Es ist dieses Verhältniss gleich dem der Wärmemengen, welche dem Gase bei constantem p und bei constantem v zugeführt werden müssen, um es von *einer* Temperatur auf *eine andere* zu erwärmen. Jene Temperatur sei der absolute Nullpunkt, die zweite sei T. Die zweite Wärmemenge ist dann die Energie U des Gases bei T (S. 75), die erste ist $U + pv$; also

$$\frac{C_p}{C_v} = 1 + \frac{pv}{U}.$$

---

*) Kundt und Warburg, Pogg. Ann. Bd. 157. p. 353.

**) Da kugelförmige Moleküle immer mit Centralkräften auf einander wirken. D. H.

Ferner ist nach einem Satze der Mechanik:

$$U = U_p + U_r,$$

d. h. gleich der Summe der lebendigen Kraft der progressiven und der der Rotationsbewegung, und es ist

$$U_p = \frac{1}{2}\sum m(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) = \frac{3}{2}\sum m\xi^2,$$

wo m die Masse, ξ, η, ζ die Geschwindigkeitscomponenten des Schwerpunktes eines Moleküls sind. Andrerseits ist

$$p = \mu\overline{\xi^2},$$

also, da

$$v = \frac{\Sigma m}{\mu},$$

$$pv = \sum m\xi^2,$$

d. h.

$$pv = \frac{2}{3}U_p$$

und daher

$$\frac{C_p}{C_v} = 1 + \frac{2}{3}\frac{U_p}{U_p + U_r}.$$

§ 10.

Für $U_r = 0$ erhält man hieraus:

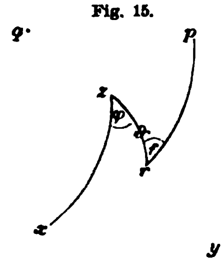
$$\frac{C_p}{C_v} = \frac{5}{3},$$

wie vorher. In allen anderen Fällen ist $\frac{C_p}{C_v}$ kleiner als $\frac{5}{3}$ und es kommt darauf an, das Verhältniss $\frac{U_r}{U_p}$ zu bestimmen. Zu diesem Zwecke muss man die Wahrscheinlichkeit eines jeden Bewegungszustandes eines Gasmoleküls kennen. Durch den Schwerpunkt eines Moleküls denke man sich die drei Hauptträgheitsachsen; p, q, r seien die Drehungsgeschwindigkeiten, P, Q, R die Trägheitsmomente für sie; dann ist die lebendige Kraft des Moleküls gleich

$$\frac{1}{2}\{m(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) + Pp^2 + Qq^2 + Rr^2\}.$$

Die Richtungen der Hauptachsen lassen sich durch drei Winkel ϑ, f, φ bestimmen, von denen der erste zwischen 0 und π, die beiden anderen zwischen 0 und 2π variiren.*) Man setze die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einem Molekül

Fig. 15.



*) Kirchhoff, Mechanik, Fünfte Vorlesung.

$$\xi,\ \eta,\ \zeta,\ \vartheta,\ f,\ \varphi,\ p,\ q,\ r$$

in den Intervallen

$$d\xi,\ d\eta,\ d\zeta,\ d\vartheta,\ df,\ d\varphi,\ dp,\ dq,\ dr$$

liegen, gleich

$$\text{const}\, e^{-\frac{m(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)+Pp^2+Qq^2+Rr^2}{a^2}}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta \sin\vartheta\, d\vartheta\, df\, d\varphi\, dp\, dq\, dr,$$

so lässt sich beweisen,

1) dass keine Richtung des Raumes vor einer anderen ausgezeichnet ist*),

2) dass die genannte Wahrscheinlichkeit durch die Stösse nicht geändert wird.**)

Man kann daher den aufgestellten Ausdruck als den der scheinbaren Ruhe des Gases entsprechenden annehmen; der Factor const. ist dadurch bestimmt, dass der Ausdruck gleich Eins wird, wenn man ihn integrirt nach den einzelnen Variabeln

$$\begin{array}{llllllllll} \text{von} & -\infty, & -\infty, & -\infty, & 0, & 0, & 0, & -\infty, & -\infty, & -\infty \\ \text{bis} & +\infty, & +\infty, & +\infty, & \pi, & 2\pi, & 2\pi, & +\infty, & +\infty, & +\infty. \end{array}$$

Die Zahl der Moleküle, bei denen $\xi,\ \eta,\ \zeta,\ p,\ q,\ r$ in den Intervallen $d\xi,\ d\eta,\ d\zeta,\ dp,\ dq,\ dr$ liegen, ist daher

$$C\cdot e^{-\frac{m(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)+Pp^2+Qq^2+Rr^2}{a^2}}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta\, dp\, dq\, dr.$$

Hieraus folgt

$$\frac{U_r}{U_p} = \frac{(6)\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (Pp^2+Qq^2+Rr^2)\, e^{-\frac{m(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)+Pp^2+Qq^2+Rr^2}{a^2}}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta\, dp\, dq\, dr}{(6)\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} m(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)\, e^{-\frac{m(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)+Pp^2+Qq^2+Rr^2}{a^2}}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta\, dp\, dq\, dr}.$$

Man setze

$$\begin{aligned} \xi\sqrt{m} &= \xi', \\ \eta\sqrt{m} &= \eta', \\ \zeta\sqrt{m} &= \zeta', \\ p\sqrt{P} &= p', \\ q\sqrt{Q} &= q', \\ r\sqrt{R} &= r', \end{aligned}$$

dann wird dieser Bruch gleich

---

*) Durch Transformation der Coordinatenrichtungen $x,\ y,\ z$. D. H.

**) Durch Berechnung der Wahrscheinlichkeit des Bewegungszustandes zweier collidirender Moleküle vor und nach dem Stoss. D. H.

$$\frac{\overset{(6)}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}}(p'^2+q'^2+r'^2)\,e^{-\frac{\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2+p'^2+q'^2+r'^2}{a^2}}\,d\xi'\,d\eta'\,d\zeta'\,dp'\,dq'\,dr'}{\overset{(6)}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}}(\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2)\,e^{-\frac{\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2+p'^2+q'^2+r'^2}{a^2}}\,d\xi'\,d\eta'\,d\zeta'\,dp'\,dq'\,dr'}$$

d. h.

$$\frac{U_r}{U_p}=1,$$

da im Zähler und im Nenner nur die Bezeichnung der Integrationsvariabeln verschieden ist; mithin

$$\frac{C_p}{C_v}=1+\frac{1}{3}\,.$$

§ 11.

Nun sei das Molekül ein *Rotationskörper* und die r-Achse die Rotationsachse, wobei $P=Q$ wird. Bei jedem Molekül kann dann r durch nichts geändert werden*) und es verhält sich so, wie wenn bei allen Molekülen $r=0$ wäre. Um für diesen Fall die aufgestellten Ausdrücke und Gleichungen gültig zu machen, haben wir überall das Differential dr fortzulassen, $r=0$ und überdies $P=Q$ zu setzen. Demnach ist hier

$$\frac{U_r}{U_p}=\frac{\overset{(5)}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}}(p'^2+q'^2)\,e^{-\frac{\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2+p'^2+q'^2}{a^2}}\,d\xi'\,d\eta'\,d\zeta'\,dp'\,dq'}{\overset{(5)}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}}(\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2)\,e^{-\frac{\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2+p'^2+q'^2}{a^2}}\,d\xi'\,d\eta'\,d\zeta'\,dp'\,dq'}\,.$$

Der Zähler ist 2mal, der Nenner 3mal so gross als

$$\overset{(5)}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}}\xi'^2 e^{-\frac{\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2+p'^2+q'^2}{a^2}}\,d\xi'\,d\eta'\,d\zeta'\,dp'\,dq',$$

mithin

$$\frac{U_r}{U_p}=\frac{2}{3}$$

und

$$\frac{C_p}{C_v}=1+\frac{2}{5}\,.$$

Diese Angaben sind zuerst von Boltzmann**) gemacht.

Dieser Werth 1,40 findet für Sauerstoff, Stickstoff, Wasserstoff und viele andere Gase, die die Chemiker als zweiatomig betrachten,

*) Da jeder Stoss durch die Achse des Moleküls geht. D. H.

**) Boltzmann. Sitzungsberichte der Wiener Akademie. 74, p. 553, 1878.

statt. Ein Molekül eines solchen Gases kann man sich daher denken als eine starre Verbindung zweier kugelförmiger Atome. Bei mehratomigen Gasen ist $\frac{C_p}{C_v}$ kleiner, bei einigen nahe gleich 1,33. Quecksilberdampf betrachten die Chemiker als einatomig und es ist ja auch in der That bei ihm $\frac{C_p}{C_v}$ gleich dem zunächst gefundenen Werte $\frac{5}{3}$. Das ist eine merkwürdige Bestätigung der denkbar einfachsten Hypothese über die Beschaffenheit der Moleküle.

Sechzehnte Vorlesung.

Reibung und Wärmeleitung eines Gases. — Die Function Q wird quadratisch oder kubisch angenommen, und die Aenderung, welche ihr Mittelwerth durch die Zusammenstösse der Moleküle erleidet, zuerst aus der Grundgleichung berechnet, sodann durch directe Betrachtung der Vorgänge beim Zusammenstoss zweier Moleküle. — Integration der Gleichungen für die relative Bewegung zweier Moleküle mittelst des Satzes der Flächen und der lebendigen Kraft. — Die Moleküle stossen sich mit einer Kraft ab, welche umgekehrt proportional ist der fünften Potenz ihrer Entfernung. — Ablenkung durch einen Stoss. — Aenderung des Mittelwerthes von Q durch alle Stösse.

§ 1.

Die letzten Gleichungen, die wir aufgestellt haben, geben nicht Rechenschaft von den Erscheinungen, die man der *Reibung* und der *Wärmeleitung* zuschreibt. Um diese zu umfassen, müssen wir die kleinen Grössen $\overline{\xi\eta}$, $\overline{\xi^2} - \overline{\eta^2}, \ldots$, die wir (S. 165) vernachlässigt haben, berücksichtigen.*) Um das zu können, müssen wir die Stösse der Moleküle näher verfolgen und $\frac{D\overline{Q}}{Dt}$ für $Q = \xi_1{}^2$, $\xi_1\eta_1$, $\xi_1(\xi_1{}^2 + \eta_1{}^2 + \zeta_1{}^2)$ und die ähnlichen Ausdrücke berechnen. Zunächst wollen wir den Werth von $\frac{D\overline{Q}}{Dt}$ aus unserer Grundgleichung bilden.

In dem Ausdrucke für $\frac{D\overline{Q}}{Dt}$ wollen wir

$$\overline{\xi^2} = \overline{\eta^2} = \overline{\zeta^2} = \frac{p}{\mu},$$
$$\overline{\eta\xi} = \overline{\zeta\xi} = \overline{\xi\eta} = 0$$

setzen.**) Es wird dann nach S. 162

$$\begin{aligned}\frac{D\overline{Q}}{Dt} = \frac{d\overline{Q}}{dt} &- \frac{\partial \overline{Q}}{\partial u}\frac{du}{dt} - \frac{\partial \overline{Q}}{\partial v}\frac{dv}{dt} - \frac{\partial \overline{Q}}{\partial w}\frac{dw}{dt} \\ &+ \frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\mu\left(\overline{\xi Q} - \overline{\xi^2}\,\frac{\partial \overline{Q}}{\partial u}\right)\right\} + \frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial y}\left\{\mu\left(\overline{\eta Q} - \overline{\eta^2}\,\frac{\partial \overline{Q}}{\partial v}\right)\right\} \\ &+ \frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial z}\left\{\mu\left(\overline{\zeta Q} - \overline{\zeta^2}\,\frac{\partial \overline{Q}}{\partial w}\right)\right\} \\ &+ \frac{p}{\mu}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \overline{Q}}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \overline{Q}}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \overline{Q}}{\partial w}\right)\right).\end{aligned}$$

---

*) Die folgende Untersuchung geht wieder von der Annahme punkt- oder kugelförmiger Moleküle aus. D. H.

**) Was als eine erste Annäherung erlaubt sein wird. D. H.

Wir machen nun zuerst

$$\varrho = \xi_1^2 = \xi^2 + 2u\xi + u^2,$$
$$\overline{\varrho} = u^2 + \overline{\xi^2},$$
$$\frac{\partial \overline{\varrho}}{\partial u} = 2u,$$
$$\frac{\partial \overline{\varrho}}{\partial v} = 0,$$
$$\frac{\partial \overline{\varrho}}{\partial w} = 0,$$
$$\overline{\xi \varrho} = 2u\overline{\xi^2},$$
$$\overline{\eta \varrho} = 0,$$
$$\overline{\zeta \varrho} = 0^{*}),$$

also durch Substitution und gehörige Vereinfachung:

$$\frac{D\overline{\xi_1^2}}{Dt} = -\frac{d\left(\frac{p}{\mu}\right)}{dt} + 2\frac{p}{\mu}\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Mit demselben Grade der Genauigkeit hatten wir aber S. 167 gefunden

$$0 = \frac{d\left(\frac{p}{\mu}\right)}{dt} + \frac{2}{3}\frac{p}{\mu}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right),$$

also ist

$$\frac{D\overline{\xi_1^2}}{Dt} = 2\frac{p}{\mu}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right).$$

Wir machen dann

$$\varrho = \xi_1\eta_1 = (u + \xi)(v + \eta) = uv + u\eta + v\xi + \xi\eta,$$
$$\overline{\varrho} = uv,$$
$$\frac{\partial \overline{\varrho}}{\partial u} = v,$$
$$\frac{\partial \overline{\varrho}}{\partial v} = u,$$
$$\frac{\partial \overline{\varrho}}{\partial w} = 0,$$
$$\overline{\xi \varrho} = v\overline{\xi^2},$$
$$\overline{\eta \varrho} = u\overline{\eta^2},$$
$$\overline{\zeta \varrho} = 0,$$

also

$$\frac{D\overline{\xi_1\eta_1}}{Dt} = \frac{p}{\mu}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

---

*) In den letzten drei Gleichungen ist noch näherungsweise $\overline{\xi^3}$, $\overline{\eta\xi^2}$ und $\overline{\zeta\xi^2}$ gleich Null gesetzt. D. H.

§ 2.

Wir machen endlich

$$
\begin{aligned}
Q = \xi_1(\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2) \\
= u(u^2 + v^2 + w^2) \\
&+ (3u^2 + v^2 + w^2)\xi + 2uv\eta + 2uw\zeta \\
&+ 3u\xi^2 + u\eta^2 + u\zeta^2 + 2v\xi\eta + 2w\xi\zeta \\
&+ \xi(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2),
\end{aligned}
$$

$$\overline{Q} = u(u^2 + v^2 + w^2) + 5u\overline{\xi^2},$$

$$\frac{\partial \overline{Q}}{\partial u} = 3u^2 + v^2 + w^2 + 5\overline{\xi^2},$$

$$\frac{\partial \overline{Q}}{\partial v} = 2uv,$$

$$\frac{\partial \overline{Q}}{\partial w} = 2uw,$$

$$\overline{\xi Q} = (3u^2 + v^2 + w^2)\overline{\xi^2} + \overline{\xi^2(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)},$$

$$\overline{\eta Q} = 2uv\overline{\eta^2},$$

$$\overline{\zeta Q} = 2uw\overline{\zeta^2},$$

also

$$\overline{\xi Q} - \overline{\xi^2}\,\frac{\partial \overline{Q}}{\partial u} = \overline{\xi^2(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)} - 5\overline{\xi^2}\;\overline{\xi^2}$$

oder, da, wie im nächsten § bewiesen werden wird, annäherungsweise

$$\overline{\xi^4} = 3\overline{\xi^2}\;\overline{\xi^2}$$

und

$$\overline{\xi^2\eta^2} = \overline{\xi^2\zeta^2} = \overline{\xi^2}\;\overline{\xi^2},$$

so ist

$$\overline{\xi Q} - \overline{\xi^2}\,\frac{\partial \overline{Q}}{\partial u} = 0$$

und ebenso:

$$\overline{\eta Q} - \overline{\eta^2}\,\frac{\partial \overline{Q}}{\partial v} = \overline{\zeta Q} - \overline{\zeta^2}\,\frac{\partial \overline{Q}}{\partial w} = 0.$$

Darnach erhalten wir:

$$\frac{D\,\overline{\xi_1(\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2)}}{Dt} = 5u\,\frac{d\left(\frac{p}{\mu}\right)}{dt} + \frac{p}{\mu}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \overline{Q}}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \overline{Q}}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \overline{Q}}{\partial w}\right)\right).$$

Aber nach der schon bei der Bildung von $\frac{D\overline{\xi_1^2}}{Dt}$ benutzten Gleichung ist:

$$5\,\frac{d\left(\frac{p}{\mu}\right)}{dt} = -\frac{10}{3}\,\frac{p}{\mu}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right),$$

ferner:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \overline{Q}}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \overline{Q}}{\partial v}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \overline{Q}}{\partial w}\right)=$$

$$6u\frac{\partial u}{\partial x}+2v\frac{\partial v}{\partial x}+2w\frac{\partial w}{\partial x}+5\frac{\partial\left(\frac{p}{\mu}\right)}{\partial x}$$

$$+2u\frac{\partial v}{\partial y}+2v\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$+2u\frac{\partial w}{\partial z}+2w\frac{\partial u}{\partial z}$$

also, wenn wir die erste dieser beiden Gleichungen mit u, die zweite mit $\frac{p}{\mu}$ multipliciren und beide addiren:

$$\frac{D\overline{\xi_1(\xi_1^2+\eta_1^2+\zeta_1^2)}}{Dt}=4\frac{p}{\mu}u\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right)$$

$$+2\frac{p}{\mu}v\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)+2\frac{p}{\mu}w\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)+5\frac{p}{\mu}\frac{\partial\left(\frac{p}{\mu}\right)}{\partial x}.$$

Diese Gleichung lässt sich kürzer schreiben:

$$\frac{D\overline{\xi_1(\xi_1^2+\eta_1^2+\zeta_1^2)}}{Dt}=2u\frac{D\overline{\xi_1^2}}{Dt}+2v\frac{D\overline{\xi_1\eta_1}}{Dt}+2w\frac{D\overline{\xi_1\zeta_1}}{Dt}+5\frac{p}{\mu}\frac{\partial\left(\frac{p}{\mu}\right)}{\partial x}.$$

§ 3.

Wir haben zunächst noch eine Ergänzung der Rechnung vorzunehmen. Wir haben im vorigen § die Gleichungen

$$\overline{\xi^4}=3\,\overline{\xi^2}\;\overline{\xi^2}$$

und

$$\overline{\xi^2\eta^2}=\overline{\xi^2\zeta^2}=\overline{\xi^2}\,\overline{\xi^2}$$

benutzt. Wir wollen sie nun beweisen. Es ist nach dem hier annähernd gültigen Maxwell'schen Gesetz der Geschwindigkeitsvertheilung (S. 149)

$$\overline{\xi^4}=\frac{1}{(\alpha\sqrt{\pi})^3}\iiint_{-\infty}^{+\infty}\xi^4 e^{-\frac{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}{\alpha^2}}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta,$$

wo nach S. 151

$$\alpha^2=\frac{2}{3}\,\overline{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}=2\,\overline{\xi^2}.$$

Wir zerlegen das Integral in drei Factoren, indem wir es setzen gleich

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\xi^4 e^{-\frac{\xi^2}{\alpha^2}}d\xi\left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{\eta^2}{\alpha^2}}d\eta\right)^2.$$

Wie wir gesehen haben, ist*):

*) Man setze S. 151 $v=\frac{\xi}{\alpha}$ und integrire von $-\infty$ bis $+\infty$. D. H.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \xi^{n+2} e^{-\frac{\xi^2}{\alpha^2}} d\xi = \frac{n+1}{2} \alpha^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^n e^{-\frac{\xi^2}{\alpha^2}} d\xi$$

und

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\xi^2}{\alpha^2}} d\xi = \alpha\sqrt{\pi}.$$

Hieraus folgt durch successive Berechnung:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \xi^4 e^{-\frac{\xi^2}{\alpha^2}} d\xi = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \alpha^5 \sqrt{\pi};$$

ferner

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\eta^2}{\alpha^2}} d\eta\right)^2 = \alpha^2 \pi;$$

also ist

$$\overline{\xi^4} = \frac{3}{4} \alpha^4 = 3\left(\overline{\xi^2}\right)^2,$$

Ferner ist*)

$$\begin{aligned}
\overline{\xi^2 \eta^2} &= \frac{1}{(\alpha\sqrt{\pi})^3} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 \eta^2 e^{-\frac{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}{\alpha^2}} d\xi\, d\eta\, d\zeta \\
&= \frac{1}{(\alpha\sqrt{\pi})^3} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 e^{-\frac{\xi^2}{\alpha^2}} d\xi\right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\xi^2}{\alpha^2}} d\xi \\
&= \frac{1}{(\alpha\sqrt{\pi})^3} \left(\frac{1}{2} \alpha^3 \sqrt{\pi}\right)^2 \alpha\sqrt{\pi} \\
&= \frac{\alpha^4}{4} = \left(\overline{\xi^2}\right)^2.
\end{aligned}$$

§ 4.

Um aus den abgeleiteten Gleichungen Nutzen zu ziehen, müssen wir nun die Grössen $\frac{D\overline{Q}}{Dt}$, die wir durch sie auf *eine* Weise ausgedrückt haben, noch auf eine *andere* Weise, nämlich durch Untersuchung der *Stösse* auszudrücken suchen.

Wir betrachten die Bewegung zweier materieller Punkte, 1 und 2, denen wir zunächst die verschiedenen Massen m_1 und m_2 beilegen wollen, und die eine von der Entfernung r abhängige Anziehungs- oder Abstossungskraft auf einander ausüben sollen. V sei das Potential dieser Kraft, (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) seien die Oerter der Punkte zur Zeit t. Dann ist

*) Die folgende Berechnung lässt sich abkürzen durch die Ueberlegung, dass:

$$\overline{\xi^2 \eta^2} = \overline{\xi^2}\ \overline{\eta^2} = \overline{\xi^2}\ \overline{\xi^2}. \quad \text{D. H.}$$

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial x_1},$$
$$m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial y_1},$$
$$m_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial z_1},$$
$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial x_2} = -\frac{\partial V}{\partial x_1},$$
$$m_2 \frac{d^2 y_2}{\partial t^2} = \frac{\partial V}{\partial y_2} = -\frac{\partial V}{\partial y_1},$$
$$m_2 \frac{d^2 z_2}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial z_2} = -\frac{\partial V}{\partial z_1}.$$

Hieraus folgt

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 = \alpha t + \alpha',$$
$$m_1 y_1 + m_2 y_2 = \beta t + \beta',$$
$$m_1 z_1 + m_2 z_2 = \gamma t + \gamma'.$$

Das sind die Sätze von der Bewegung des Schwerpunktes. Wir setzen ferner

$$x_2 - x_1 = x,$$
$$y_2 - y_1 = y,$$
$$z_2 - z_1 = z,$$

also

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

x, y, z sind die relativen Coordinaten von 2 gegen 1; wir können sie, um die Vorstellung zu erleichtern, ansehen als die absoluten Coordinaten eines Punktes.

Dann kommt

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \frac{dV}{dr} \frac{x}{r}$$
$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \frac{dV}{dr} \frac{y}{r}$$
$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \frac{dV}{dr} \frac{z}{r}.$$

Hieraus folgt

$$y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} = g',$$
$$z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} = g'',$$
$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = g'''.$$

Das sind die Flächensätze.

§ 5.

Wir nennen in einem neuen Coordinatensystem*) mit dem Anfangspunkte des alten a, b, c die Coordinaten des Punktes, dessen

*) Mit festen Achsenrichtungen. D. H.

Coordinaten im alten x, y, z sind; es bleiben diese Gleichungen dann richtig, wenn wir a, b, c an Stelle von x, y, z setzen und den Constanten g', g'', g''' andere Werthe geben. Das System der a, b, c bestimmen wir so, dass erstens für $t = 0$

$$c = 0$$

und

$$\frac{dc}{dt} = 0$$

ist; dann wird

$$b\frac{dc}{dt} - c\frac{db}{dt} = 0,$$
$$c\frac{da}{dt} - a\frac{dc}{dt} = 0,$$
$$a\frac{db}{dt} - b\frac{da}{dt} = g,$$

d. h. (durch Multiplication der Gleichungen mit a, b, c und Addition)

$$gc = 0,$$

also immer

$$c = 0.$$

Die Bahn ist also eine *Ebene*, und zwar die ab Ebene.

Es soll zweitens für $t = 0$ sein:

$$\frac{db}{dt} = 0,$$
$$b > 0,$$
$$a > 0,$$
$$\frac{da}{dt} < 0, \qquad \text{also } g > 0.$$

Da $a^2 + b^2 = r^2$, so können wir setzen

$$a = r\cos\vartheta,$$
$$b = r\sin\vartheta,$$
$$da = \cos\vartheta\, dr - r\sin\vartheta\, d\vartheta,$$
$$db = \sin\vartheta\, dr + r\cos\vartheta\, d\vartheta,$$

woraus folgt

$$r^2 d\vartheta = g\,dt;$$

mithin wächst ϑ mit t.

Wir haben ferner durch Integration der Bewegungsgleichungen auf voriger Seite:

$$2\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2}V + h^2 = \frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}$$
$$= \frac{da^2+db^2}{dt^2} = \frac{dr^2+r^2 d\vartheta^2}{dt^2};$$

das ist der Satz von der lebendigen Kraft. Damit ist das Problem der Bewegung der Punkte auf Quadraturen zurückgeführt.

§ 6.

Es ist ϑ durch r auszudrücken durch

$$d\vartheta = \frac{g\,dr}{\pm\sqrt{r^4\left(2\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2}V+h^2\right)-g^2r^2}}.$$

Nun wollen wir annehmen, dass für $t=0$ r als unendlich zu betrachten ist*); ist die in V vorkommende additive Constante so bestimmt, dass V für $r=\infty$ verschwindet, so wird

$$h^2 = \left(\frac{da}{dt}\right)^2$$

für $t=0$, also h reell; wir nehmen es (was wir dürfen) als positiv an; es ist, wenn ξ_1, η_1, ζ_1, ξ_2, η_2, ζ_2 die Componenten**) der Geschwindigkeiten sind:

$$h = \sqrt{(\xi_2-\xi_1)^2+(\eta_2-\eta_1)^2+(\zeta_2-\zeta_1)^2}$$

für $t=0$ und auch

$$h = -\frac{da}{dt}$$

für $t=0$. Setzen wir noch $b=b_0$ für $t=0$, so wird damit:

$$g = b_0 h$$

und daher

$$\vartheta = \int_\infty^r \frac{b_0 h\,dr}{\pm\sqrt{r^4\left(2\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2}V+h^2\right)-b_0^2h^2r^2}};$$

die untere Grenze haben wir ∞ gesetzt und dadurch ausgedrückt, dass für $t=0$, d. h. $r=\infty$, ϑ verschwindet, was der Fall sein muss, wenn die beiden Moleküle aus unendlicher Entfernung in endliche kommen sollen.***) Für hinreichend kleine Werthe von t ist der Quadratwurzel das negative Zeichen zu geben, weil r anfangs abnimmt und ϑ immer wächst, wenn t wächst. Wird r gleich einer *einfachen* Wurzel der Gleichung

$$r^4\left(2\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2}V+h^2\right)-b_0^2h^2r^2=0,$$

so muss hier das Vorzeichen der Quadratwurzel wechseln, weil von da ab r mit t wachsen muss.†) Im Laufe der Zeit wächst dann r wieder bis ∞. Dadurch werde schliesslich aus ϑ ϑ'; dann ist††)

---

*) Im Verhältniss zum Radius einer Wirkungssphäre. D. H.

**) In Bezug auf das ursprüngliche, ruhende Coordinatensystem. D. H.

***) D. h. die Moleküle müssen gerade aufeinander zufliegen. Denn sonst würden sie in einer Entfernung aneinander vorbeigehen, die unendlich gross ist im Verhältniss zum Radius einer Wirkungssphäre. D. H.

†) Denn die Quadratwurzel muss für alle Zeiten reell bleiben. D. H.

††) Der Winkel ϑ' misst die Ablenkung, welche die Richtung der relativen Geschwindigkeit der beiden Moleküle durch den Zusammenstoss erfährt. D. H.

$$\vartheta' = 2\int\limits_r^\infty \frac{b_0 h\, dr}{\sqrt{r^4\left(2\,\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2}\,V + h^2\right) - b_0^2 h^2 r^2}},$$

wo die Quadratwurzel positiv zu nehmen ist und r die grösste Wurzel der angegebenen Gleichung bedeutet.

Hat diese Gleichung aber keine reellen Wurzeln, so wechselt die Quadratwurzel garnicht ihr Vorzeichen, r nimmt unbegrenzt ab und die beiden materiellen Punkte fallen schliesslich zusammen.

§ 7.

Aus einem später anzugebenden Grunde (vgl. unten § 10 und 18. Vorlesung § 1) wollen wir

$$V = -\,m_1 m_2 \frac{K}{4}\frac{1}{r^4}$$

annehmen; das entspricht nach den Gleichungen S. 178 einer Abstossungskraft, die proportional mit $\frac{1}{r^5}$ ist, wenn K positiv, einer Anziehungskraft, die auch mit $\frac{1}{r^5}$ proportional ist, wenn K negativ. Die fragliche Gleichung ist dann

$$r^4 - b_0^2 r^2 = \frac{m_1+m_2}{2}\,\frac{K}{h^2},$$

d. h.

$$r^2 = \frac{b_0^2}{2} \pm \sqrt{\frac{b_0^4}{4} + \frac{m_1+m_2}{2}\,\frac{K}{h^2}}.$$

Ist K positiv, so ist *einer* der hierdurch dargestellten Werthe von r immer reell und positiv, die beiden Moleküle entfernen sich also immer wieder von einander; ist K aber negativ und

$$-(m_1+m_2)K > \frac{h^2 b_0^4}{2},$$

so ist keiner von den Werthen von r reell und die Moleküle stürzen schliesslich in einander. Wir nehmen aus diesem Grunde K positiv an.

Setzen wir

$$x = \frac{b_0}{r}$$

und

$$\alpha = b_0\sqrt{h}\,\sqrt[4]{\frac{1}{(m_1+m_2)K}},$$

so wird

$$\vartheta' = 2\int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2 - \frac{x^4}{2\alpha^4}}},$$

wo die Grenze x die positive, reelle Wurzel der Gleichung ist:*)

$$1 - x^2 - \frac{x^4}{2\alpha^4} = 0.$$

Es hängt hiernach ϑ' von der *einen* Variabeln α ab, die selbst proportional mit $b_0 \sqrt{h}$ ist; es ist ϑ' ein ganzes elliptisches Integral erster Gattung, dessen Modul durch α bestimmt ist.

Aus ϑ' finden wir zunächst die Werthe von $\frac{da}{dt}$ und $\frac{db}{dt}$ nach dem Stosse; hier ist $r\frac{d\vartheta}{dt} = 0$, obwohl r unendlich gross ist, da $r\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{g}{r}$, und daher nach den Gleichungen S. 179

$$\frac{da}{dt} = \cos\vartheta' \frac{dr}{dt},$$
$$\frac{db}{dt} = \sin\vartheta' \frac{dr}{dt},$$

oder, da nach dem Satze von der lebendigen Kraft *nach* dem Stosse:

$$\frac{dr}{dt} = +h,$$
$$\frac{da}{dt} = h\cos\vartheta',$$
$$\frac{db}{dt} = h\sin\vartheta'.$$

Allgemein haben wir nun nach S. 179 die Transformationsformeln:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{da}{dt}\cos(xa) + \frac{db}{dt}\cos(xb),$$
$$\frac{dy}{dt} = \frac{da}{dt}\cos(ya) + \frac{db}{dt}\cos(yb),$$
$$\frac{dz}{dt} = \frac{da}{dt}\cos(za) + \frac{db}{dt}\cos(zb).$$

§ 8.

Die Werthe von $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ vor dem Stosse nennen wir ξ, η, ζ, nach dem Stosse ξ', η', ζ' und berechnen mittelst der letzten Gleichungen ξ', η', ζ' aus ξ, η, ζ. Es sind $\cos(xa)$, $\cos(ya)$, $\cos(za)$ dann gegeben durch**)

$$\xi = -h\cos(xa),$$
$$\eta = -h\cos(ya),$$
$$\zeta = -h\cos(za).$$

*) Eine andere Wurzel ist negativ, die beiden letzten imaginär. D. H.

**) Ergiebt sich durch Einsetzen der Werthe, die für $t = 0$ gelten. D. H.

Wir setzen ferner:*)

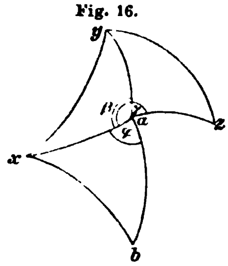
$$\cos(xb) = \sin(xa)\cos\varphi \qquad , \quad (\varDelta\, xab),$$
$$\cos(yb) = \sin(ya)\cos(\varphi+\beta), \quad (\varDelta\, yab),$$
$$\cos(zb) = \sin(za)\cos(\varphi+\gamma), \quad (\varDelta\, zab),$$

mit der Bestimmung, dass (xa), (ya), (za) zwischen 0 und π liegen, **ihre** sin also positiv sind. Dabei ist:

$$0 = \cos(xa)\cos(ya) + \sin(xa)\sin(ya)\cos\beta, \quad (\varDelta\, xya),$$
$$0 = \cos(xa)\cos(za) + \sin(xa)\sin(za)\cos\gamma, \quad (\varDelta xza).$$

Folglich durch Benutzung der gefundenen Werthe von (xa), (ya) und (za):

Fig. 16.



$$0 = \xi\eta + \sqrt{h^2-\xi^2}\sqrt{h^2-\eta^2}\cos\beta,$$
$$0 = \xi\zeta + \sqrt{h^2-\xi^2}\sqrt{h^2-\zeta^2}\cos\gamma,$$

d. h.

$$\cos\beta = -\frac{\xi\eta}{\sqrt{h^2-\xi^2}\sqrt{h^2-\eta^2}},$$
$$\cos\gamma = -\frac{\xi\zeta}{\sqrt{h^2-\xi^2}\sqrt{h^2-\zeta^2}},$$

und es wird, wenn man nun in die obigen Coordinatentransformationsformeln die Werthe einsetzt, welche *nach* dem Stoss gelten:**)

$$\xi' = -\xi\cos\vartheta' + \sqrt{h^2-\xi^2}\sin\vartheta'\cos\varphi \qquad ,$$
$$\eta' = -\eta\cos\vartheta' + \sqrt{h^2-\eta^2}\sin\vartheta'\cos(\varphi+\beta),$$
$$\zeta' = -\zeta\cos\vartheta' + \sqrt{h^2-\zeta^2}\sin\vartheta'\cos(\varphi+\gamma).$$

Nun führen wir mit entsprechender Bedeutung (vgl. S. 180) die Zeichen ξ_1, ξ_2, ξ_1', ξ_2', ... ein; dann ist nach den Schwerpunktssätzen

$$m_1\xi_1' + m_2\xi_2' = m_1\xi_1 + m_2\xi_2.$$

Aber es ist:

$$\xi_1' - \xi_2' = -\xi',$$
$$\xi_1 - \xi_2 = -\xi.$$

Folglich mit Elimination von ξ_2 und ξ_2':

$$\xi_1' = \xi_1 - \frac{m_2}{m_1+m_2}(\xi'-\xi)$$

und, wenn man die Indices 1 und 2 vertauscht und $-\xi$, $-\xi'$ für ξ, ξ' schreibt:

---

*) Die Bedeutung der Winkel φ, β, γ ergiebt sich aus der Berücksichtigung bekannter Formeln der sphärischen Trigonometrie, wie aus Fig. 16 ersichtlich. Hierbei sind die Dreiecksseiten $(xy) = (yz) = (zx) = (ab) = \frac{\pi}{2}$. D. H.

**) Hierbei ist zu beachten, dass die Winkel (xa) u. s. w. für alle Zeiten constant sind. D. H.

$$\xi_2' = \xi_2 + \frac{m_1}{m_1 + m_2}(\xi' - \xi).$$

Hieraus folgt:

$$\xi_1' = \xi_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\left(2\cos^2\frac{\vartheta'}{2}\,\xi - \sqrt{h^2 - \xi^2}\sin\vartheta'\cos\varphi\right),$$

$$\eta_1' = \eta_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\left(2\cos^2\frac{\vartheta'}{2}\,\eta - \sqrt{h^2 - \eta^2}\sin\vartheta'\cos(\varphi + \beta)\right),$$

$$\zeta_1' = \zeta_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\left(2\cos^2\frac{\vartheta'}{2}\,\zeta - \sqrt{h^2 - \zeta^2}\sin\vartheta'\cos(\varphi + \gamma)\right).$$

Es hängen hiernach die geänderten Geschwindigkeiten ξ_1', η_1', ζ_1' ab von ξ_1, η_1, ζ_1 und ξ_2, η_2, ζ_2 (nämlich von ξ, η, ζ) und von φ und b_0.*) Von a_0 (dem Anfangswerthe von a) hängen sie nicht ab; sein Werth bedingt aber den Augenblick des Zusammenstosses; dieser findet statt zur Zeit**)

$$t = \frac{a_0}{h}.$$

In dem Zeitelement von t bis $t + dt$ werden also die Geschwindigkeitscomponenten ξ_1, η_1, ζ_1 übergehen in jene ξ_1', η_1', ζ_1', falls in dem Raume, in dem a_0 von ht bis $ht + hdt$, b_0 von b_0 bis $b_0 + db_0$, φ von φ bis $\varphi + d\varphi$ wächst,***) ein Molekül liegt, dessen Geschwindigkeiten ξ_2, η_2, ζ_2 sind. Dieser Raum †) hat das Volumen

$$h\,dt\,b_0\,db_0\,d\varphi.$$

§ 9.

Wir stellen uns nun der Reihe nach die Moleküle in der von vorneherein gewählten Volumeneinheit vor, deren Geschwindigkeiten dem Gebiete $d\xi_1$, $d\eta_1$, $d\zeta_1$ angehören; ihre Zahl ist bei der gewählten Bezeichnung

$$f_1(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)\,d\xi_1\,d\eta_1\,d\zeta_1.$$

Wir betrachten jedes von diesen Molekülen als das Molekül 1 und sehen zu, ob in dem entsprechenden Raume

$$h\,dt\,b_0\,db_0\,d\varphi$$

ein Molekül 2 vorhanden ist, dessen Geschwindigkeiten in dem Gebiete $d\xi_2$, $d\eta_2$, $d\zeta_2$ liegen. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein solches Molekül vorhanden ist, ist für jeden einzelnen Fall ††)

---

*) Denn ϑ' ist nach S. 181 durch b_0 und h bestimmt, wobei $h^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$, und β und γ sind durch die Gleichungen S. 183 gegeben. D. H.

**) Da a_0 unendlich gross ist im Verhältniss zum Radius einer Wirkungssphäre und auch im Verhältniss zu b_0. D. H.

***) zur Zeit $t = 0$. D. H.

†) Ein unendlich kleines rechtwinkliges Parallelepiped, dessen Kanten hdt, db_0 und $b_0 d\varphi$ sind. D. H.

††) Die Functionen f sind in diesem und in dem vorigen Ausdruck mit verschiedenen Indices versehen, um den Fall mit zu umfassen, dass die zusammen-

$$= h\, dt\, b_0\, db_0\, d\varphi\, f_2(\xi_2, \eta_2, \zeta_2)\, d\xi_2\, d\eta_2\, d\zeta_2;$$

daher die Zahl der Fälle, in denen ein Molekül 2 der bezeichneten Art angetroffen wird, im Ganzen

$$= f_1(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)\, d\xi_1\, d\eta_1\, d\zeta_1\, f_2(\xi_2, \eta_2, \zeta_2)\, d\xi_2\, d\eta_2\, d\zeta_2\, h\, dt\, b_0\, db_0\, d\varphi$$
$$= a.$$

Nun sei wieder Q eine Function von ξ_1, η_1, ζ_1 und*)

$$N_1 \overline{Q} = \iiint_{-\infty}^{+\infty} Q\, f_1(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)\, d\xi_1\, d\eta_1\, d\zeta_1;$$

es handelt sich dann darum,

$$N_1 \frac{D_2 \overline{Q}}{D_2 t}\, dt$$

zu finden,**) d. h. den Zuwachs, den das Integral $N_1 \overline{Q}$ durch Stösse mit den Molekülen zweiter Art im Zeitintervall dt erleidet. Es sei Q' dieselbe Function von $\xi_1', \eta_1', \zeta_1'$, wie Q von ξ_1, η_1, ζ_1; durch jeden der Stösse, deren Zahl wir a genannt haben, wird das Integral $N_1 \overline{Q}$ um $Q' - Q$ vergrössert; der Theil von $N_1 \frac{D\overline{Q}}{Dt}$, der von diesen a Stössen herrührt, ist daher

$$(Q' - Q)\, f_1(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)\, d\xi_1\, d\eta_1\, d\zeta_1\, f_2(\xi_2, \eta_2, \zeta_2)\, d\xi_2\, d\eta_2\, d\zeta_2\, h\, b_0\, db_0\, d\varphi.$$

Wir erhalten $N_1 \frac{D_2 \overline{Q}}{D_2 t}$ selbst, wenn wir diesen Ausdruck integriren in Bezug auf

φ	von 0	bis 2π,	
b_0	0	∞,	
ξ_2, η_2, ζ_2	$-\infty$	$+\infty$,	
ξ_1, η_1, ζ_1	$-\infty$	$+\infty$.	

Aehnlich findet sich $\frac{D_1 \overline{Q}}{D_1 t}$.

---

stossenden Moleküle verschiedener Natur sind. Findet der Stoss zwischen zwei gleichartigen Molekülen statt, so werden f_2 und f_1 identisch. D. H.

*) N_1 ist die Zahl der Moleküle erster Art in der Volumeneinheit. D.

**) Hierbei ist gesetzt:

$$\frac{D\overline{Q}}{Dt} = \frac{D_1 \overline{Q}}{D_1 t} + \frac{D_2 \overline{Q}}{D_2 t} + \cdots$$

indem unterschieden wird, ob der Zusammenstoss mit einem Molekül erster, zweiter . . . Art erfolgt. Durch die Untersuchung des zweiten Gliedes allein wird offenbar zugleich die Erledigung des allgemeinen Falles ermöglicht. D. H.

§ 10.

Wir wollen diese Integrationen zunächst ausführen, indem wir

$$Q = \xi_1$$

setzen. Dann ist:

$$Q' - Q = \xi_1' - \xi_1$$

und nach S. 184

$$= \frac{m_2}{m_1 + m_2}\left(2\cos^2\frac{\vartheta'}{2}(\xi_2 - \xi_1) - \sqrt{h^2 - \xi^2}\sin\vartheta'\cos\varphi\right).$$

Die Ausführung der Integration nach φ ergiebt

$$4\pi\frac{m_2}{m_1 + m_2}\cos^2\frac{\vartheta'}{2}(\xi_2 - \xi_1).$$

Die nach b_0 erfordert die Bildung von

$$\int_0^\infty h\, b_0\, db_0 \cos^2\frac{\vartheta'}{2};$$

wir haben aber S. 181 gesehen, dass ϑ' eine Function von α ist, wo

$$\alpha = \sqrt{h}\, b_0 \sqrt[4]{\frac{1}{(m_1 + m_2) K}};$$

durch Einführung von α wird also:

$$\int_0^\infty h\, b_0\, db_0 \cos^2\frac{\vartheta'}{2} = \sqrt{(m_1 + m_2) K}\int_0^\infty \alpha\, d\alpha \cos^2\frac{\vartheta'}{2}.$$

Das nach α zu nehmende Integral ist leicht numerisch zu berechnen; die Integration nach b_0 ist also ausführbar, so dass $h = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$ in dem Resultate verschwindet; das ist *nur* der Fall bei dem von uns für die Molekularkräfte angenommenen Gesetze. Maxwell*) hat berechnet

$$4\pi\int_0^\infty \alpha\, d\alpha \cos^2\frac{\vartheta'}{2} = 2{,}6595 = A_1.$$

Hiernach ist

$$\int\int (Q' - Q)\, h\, b_0\, db_0\, d\varphi = A_1\sqrt{\frac{K}{m_1 + m_2}}\, m_2 (\xi_2 - \xi_1).$$

Die Integrationen nach $\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \xi_2, \eta_2, \zeta_2$ lassen sich nun unmittelbar durch Einführung der Mittelwerthe bewirken. Nach der Definition der Functionen f_1 und f_2 ist ja:

$$\int f_1(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)\, d\xi_1\, d\eta_1\, d\zeta_1 = N_1,$$

$$\int f_2(\xi_2, \eta_2, \zeta_2)\, d\xi_2\, d\eta_2\, d\zeta_2 = N_2,$$

$$\int \xi_1 f_1(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)\, d\xi_1\, d\eta_1\, d\zeta_1 = \overline{\xi_1}\, N_1,$$

$$\int \xi_2 f_2(\xi_2, \eta_2, \zeta_2)\, d\xi_2\, d\eta_2\, d\zeta_2 = \overline{\xi_2}\, N_2.$$

*) Phil. Mag. *35*, p. 144, 1868.

So findet man für $Q = \xi_1$:

$$N_1 \frac{D_2 \overline{\xi_1}}{D_2 t} = N_1 N_2 A_1 \sqrt{\frac{K}{m_1 + m_2}} m_2 (\overline{\xi_2} - \overline{\xi_1}),$$

oder, wenn wieder:

$$\overline{\xi_1} = u_1,$$

$$\overline{\xi_2} = u_2,$$

$$N_2 m_2 = \mu_2$$

gesetzt wird:

$$\frac{D_2 \overline{\xi_1}}{D_2 t} = A_1 \sqrt{\frac{K}{m_1 + m_2}} \mu_2 (u_2 - u_1).$$

Ebenso ist

$$\frac{D_1 \overline{\xi_2}}{D_1 t} = A_1 \sqrt{\frac{K}{m_1 + m_2}} \mu_1 (u_1 - u_2),$$

$$\frac{D_1 \overline{\xi_1}}{D_1 t} = 0,\text{*)}$$

$$\frac{D_2 \overline{\xi_2}}{D_2 t} = 0.$$

Aehnliche Gleichungen gelten für die der y Achse und der z Achse parallelen Geschwindigkeitscomponenten.

§ 11.

Wir setzen nun für Q gewisse Functionen zweiten und dritten Grades von ξ_1, η_1, ζ_1; wir wollen uns dabei aber auf die Betrachtung eines *einfachen* Gases beschränken.**)

Wir setzen zunächst

$$Q = \xi_1^2.$$

Dann ist, da nach S. 184 hier:

$$\xi_1' = \xi_1 + \xi \cos^2 \frac{\vartheta'}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{h^2 - \xi^2} \sin \vartheta' \cos \varphi,$$

$$\int_0^{2\pi} (\xi_1'^2 - \xi_1^2) d\varphi = 2\pi \left(2 \xi \xi_1 \cos^2 \frac{\vartheta'}{2} + \xi^2 \cos^4 \frac{\vartheta'}{2} + \frac{1}{8} (h^2 - \xi^2) \sin^2 \vartheta' \right),$$

oder, da

$$\cos^4 \frac{\vartheta'}{2} = \cos^2 \frac{\vartheta'}{2} - \frac{1}{4} \sin^2 \vartheta',$$

$$\int_0^{2\pi} (\xi_1'^2 - \xi_1^2) d\varphi = 2\pi \left(\xi(\xi + 2\xi_1) \cos^2 \frac{\vartheta'}{2} + \frac{1}{8} (h^2 - 3\xi^2) \sin^2 \vartheta' \right)$$

$$= \frac{\pi}{4} \left(8 (\xi_2^2 - \xi_1^2) \cos^2 \frac{\vartheta'}{2} + ((\eta_2 - \eta_1)^2 + (\zeta_2 - \zeta_1)^2 - 2(\xi_2 - \xi_1)^2) \sin^2 \vartheta' \right).$$

---

*) D. h. durch die Zusammenstösse von Molekülen gleicher Art wird der Mittelwerth der Geschwindigkeitscomponenten dieser Moleküle nicht geändert, wie natürlich. D. H.

**) Also wird $m_1 = m_2 = m$, ferner f_1 und f_2 identisch, im Folgenden mit f bezeichnet. D. H.

Nun hat man mit $h\, b_0\, db_0$ zu multipliciren und von $b_0 = 0$ bis $b_0 = \infty$ zu integriren. Man erhält dann die Summe zweier Glieder, von denen in dem ersten das schon S. 186 betrachtete Integral

$$\int_0^\infty h b_0\, db_0 \cos^2 \frac{\vartheta'}{2},$$

in dem anderen das Integral

$$\int_0^\infty h b_0\, db_0 \sin^2 \vartheta' = \sqrt{2mK} \int_0^\infty \alpha\, d\alpha \sin^2 \vartheta'$$

vorkommt. Maxwell*) hat berechnet:

$$\pi \int_0^\infty \alpha\, d\alpha \sin^2 \vartheta' = A_2 = 1{,}3682.$$

Multiplicirt man mit

$$f(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)\, d\xi_1\, d\eta_1\, d\zeta_1 \quad f(\xi_2, \eta_2, \zeta_2)\, d\xi_2\, d\eta_2\, d\zeta_2$$

und integrirt von $-\infty$ bis $+\infty$, so treten wieder die Mittelwerthe auf; da hier $\overline{\xi_2^2} = \overline{\xi_1^2}$ ist, so verschwindet das erste von den beiden genannten Gliedern und man erhält den gesuchten Werth:**)

$$\frac{D\overline{\xi_1^2}}{Dt} = A_2 \frac{1}{2} \sqrt{\frac{mK}{2}}\, N(\overline{\eta_2^2} + \overline{\eta_1^2} - 2\,\overline{\eta_2}\,\overline{\eta_1} + \overline{\zeta_2^2} + \overline{\zeta_1^2} - 2\,\overline{\zeta_2}\,\overline{\zeta_1} - 2\overline{\xi_2^2} - 2\overline{\xi_1^2} + 4\,\overline{\xi_2}\,\overline{\xi_1})$$

$$= A_2 \sqrt{\frac{K}{2m}}\, \mu \left(\overline{\eta_1^2} + \overline{\zeta_1^2} - 2\overline{\xi_1^2} - (\eta_1\,\overline{\eta_1} + \overline{\zeta_1}\,\overline{\zeta_1} - 2\,\overline{\xi_1}\,\overline{\xi_1})\right).$$

§ 12.

Nun setzen wir

$$\varrho = \xi_1\, \eta_1.$$

Den Werth $\frac{D\overline{\xi_1 \eta_1}}{Dt}$ kann man entweder direct, nach dem obigen Verfahren, oder auch aus dem Werthe von $\frac{D\overline{\xi_1^2}}{Dt}$ folgendermaassen finden.

Man führe ein neues Coordinatensystem ein, so dass bei Fortlassung des Index 1)

$$\xi = \xi'\alpha_1 + \eta'\beta_1 + \zeta'\gamma_1,$$
$$\eta = \xi'\alpha_2 + \eta'\beta_2 + \zeta'\gamma_2,$$
$$\zeta = \xi'\alpha_3 + \eta'\beta_3 + \zeta'\gamma_3,$$

und führe auf beiden Seiten der Gleichung für $\frac{D\overline{\xi_1^2}}{Dt}$ mit Hülfe dieser

*) l. c.

**) Die Klammer rechts ist die Entwicklung des Ausdrucks

$$(\eta_2 - \overline{\eta_1})^2 + (\zeta_2 - \zeta_1)^2 - 2(\xi_2 - \xi_1)^2.$$ D. H.

Gleichungen ξ', η', ζ' an Stelle von ξ, η, ζ ein. Vorher transformiren wir die genannte Gleichung in folgende:

$$\frac{D\overline{\xi^2}}{Dt} = A_2\sqrt{\frac{K}{2m}}\,\mu\left\{\overline{\xi^2} + \overline{\eta^2} + \overline{\zeta^2} - (\bar{\xi}\bar{\xi} + \bar{\eta}\bar{\eta} + \bar{\zeta}\bar{\zeta}) - 3(\overline{\xi^2} - \bar{\xi}\bar{\xi})\right\}.$$

Sie wird dann

$$\frac{D\overline{\xi'^2}}{Dt}\alpha_1^2 + \frac{D\overline{\eta'^2}}{Dt}\beta_1^2 + \frac{D\overline{\zeta'^2}}{Dt}\gamma_1^2 + 2\frac{D\overline{\eta'\zeta'}}{Dt}\beta_1\gamma_1$$

$$+ 2\frac{D\overline{\zeta'\xi'}}{Dt}\gamma_1\alpha_1 + 2\frac{D\overline{\xi'\eta'}}{Dt}\alpha_1\beta_1$$

$$= A_2\sqrt{\frac{K}{2m}}\,\mu\Big[\overline{\xi'^2} + \overline{\eta'^2} + \overline{\zeta'^2} - (\bar{\xi}'\bar{\xi}' + \bar{\eta}'\bar{\eta}' + \bar{\zeta}'\bar{\zeta}')$$

$$- 3\Big\{(\overline{\xi'^2} - \bar{\xi}'\bar{\xi}')\alpha_1^2 + (\overline{\eta'^2} - \bar{\eta}'\bar{\eta}')\beta_1^2 + (\overline{\zeta'^2} - \bar{\zeta}'\bar{\zeta}')\gamma_1^2$$

$$+ 2(\overline{\eta'\zeta'} - \bar{\eta}'\bar{\zeta}')\beta_1\gamma_1 + 2(\overline{\zeta'\xi'} - \bar{\zeta}'\bar{\xi}')\gamma_1\alpha_1 + 2(\overline{\xi'\eta'} - \bar{\xi}'\bar{\eta}')\alpha_1\beta_1\Big\}\Big].$$

Daraus folgt unter Anderem:*)

$$\frac{D\overline{\xi_1\eta_1}}{Dt} = -A_2\sqrt{\frac{K}{2m}}\,\mu\, 3(\overline{\xi_1\eta_1} - \bar{\xi}_1\bar{\eta}_1),$$

wo die Striche fortgelassen sind und der Index 1 wieder eingesetzt ist.

§ 13.

Wir setzen endlich

$$Q = \xi_1(\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2).$$

Nach S. 184 ist wieder:

$$\xi_1' = \xi_1 + \xi\cos^2\frac{\vartheta'}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{h^2 - \xi^2}\sin\vartheta'\cos\varphi,$$

$$\eta_1' = \eta_1 + \eta\cos^2\frac{\vartheta'}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{h^2 - \eta^2}\sin\vartheta'\cos(\varphi + \beta),$$

$$\zeta_1' = \zeta_1 + \zeta\cos^2\frac{\vartheta'}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{h^2 - \zeta^2}\sin\vartheta'\cos(\varphi + \gamma),$$

wobei:

$$\cos\beta = -\frac{\xi\eta}{\sqrt{h^2 - \xi^2}\sqrt{h^2 - \eta^2}},$$

$$\cos\gamma = -\frac{\xi\zeta}{\sqrt{h^2 - \xi^2}\sqrt{h^2 - \zeta^2}}.$$

Man findet dann zunächst, zum Zwecke der Berechnung von Q':

$$\xi_1'^2 + \eta_1'^2 + \zeta_1'^2 = \left(\xi_1 + \xi\cos^2\frac{\vartheta'}{2}\right)^2 + \left(\eta_1 + \eta\cos^2\frac{\vartheta'}{2}\right)^2 + \left(\zeta_1 + \zeta\cos^2\frac{\vartheta'}{2}\right)^2$$

$$+ \frac{1}{4}\sin^2\vartheta'\left((h^2 - \xi^2)\cos^2\varphi + (h^2 - \eta^2)\cos^2(\varphi + \beta) + (h^2 - \zeta^2)\cos^2(\varphi + \gamma)\right)$$

$$- \sin\vartheta'\Big(\left(\xi_1 + \xi\cos^2\frac{\vartheta'}{2}\right)\sqrt{h^2 - \xi^2}\cos\varphi + \left(\eta_1 + \eta\cos^2\frac{\vartheta'}{2}\right)\sqrt{h^2 - \eta^2}\cos(\varphi + \beta)$$

$$+ \left(\zeta_1 + \zeta\cos^2\frac{\vartheta'}{2}\right)\sqrt{h^2 - \zeta^2}\cos(\varphi + \gamma)\Big).$$

*) Da die Coefficienten von $\alpha_1\beta_1$ auf beiden Seiten der Gleichung einander gleich sein müssen. D. H.

Benutzt man nun die Relationen

$$\int_0^{2\pi} \cos\varphi\, d\varphi = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(\varphi+\beta)\, d\varphi = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos\varphi \cos(\varphi+\beta)\, d\varphi = \pi \cos\beta,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(\varphi+\beta)\, d\varphi = \pi,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos\varphi \cos^2(\varphi+\beta)\, d\varphi = 0,$$

$$h^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2,$$

so findet man hieraus:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \xi_1'(\xi_1'^2+\eta_1'^2+\zeta_1'^2)\, d\varphi$$

$$= \left(\xi_1+\xi\cos^2\frac{\vartheta'}{2}\right)\left(\left(\xi_1+\xi\cos^2\frac{\vartheta'}{2}\right)^2+\left(\eta_1+\eta\cos^2\frac{\vartheta'}{2}\right)^2\right.$$
$$\left.+\left(\zeta_1+\zeta\cos^2\frac{\vartheta'}{2}\right)^2+\frac{1}{4}h^2\sin^2\vartheta'\right)$$
$$+\frac{1}{4}\sin^2\vartheta'\left(\left(\xi_1+\xi\cos^2\frac{\vartheta'}{2}\right)(h^2-\xi^2)-\left(\eta_1+\eta\cos^2\frac{\vartheta'}{2}\right)\xi\eta\right.$$
$$\left.-\left(\zeta_1+\zeta\cos^2\frac{\vartheta'}{2}\right)\xi\zeta\right),$$

oder, da

$$\cos^4\frac{\vartheta'}{2} = \cos^2\frac{\vartheta'}{2} - \frac{1}{4}\sin^2\vartheta',$$

so ist:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \xi_1'(\xi_1'^2+\eta_1'^2+\zeta_1'^2)\, d\varphi$$

$$= \left(\xi_1+\xi\cos^2\frac{\vartheta'}{2}\right)\left(\xi_1^2+\eta_1^2+\zeta_1^2+2\left(\xi\xi_1+\eta\eta_1+\zeta\zeta_1+\frac{h^2}{2}\right)\cos^2\frac{\vartheta'}{2}\right)$$
$$+\frac{1}{4}\sin^2\vartheta'\left(h^2\xi_1-\xi(\xi\xi_1+\eta\eta_1+\zeta\zeta_1)\right).$$

Mithin wird:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(Q' - Q)\cdot d\varphi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\xi_1'(\xi_1'^2 + \eta_1'^2 + \zeta_1'^2) - \xi_1(\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2))\,d\varphi$$

$$= ((\xi + \xi_1)(h^2 + 2(\xi\xi_1 + \eta\eta_1 + \zeta\zeta_1)) + \xi(\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2))\cos^2\frac{\vartheta'}{2}$$

$$+ \frac{1}{4}\sin^2\vartheta'\,(h^2(\xi_1 - \xi) - 3\xi(\xi\xi_1 + \eta\eta_1 + \zeta\zeta_1))$$

oder, da*)

$$h^2 + 2(\xi\xi_1 + \eta\eta_1 + \zeta\zeta_1) = \xi_2^2 + \eta_2^2 + \zeta_2^2 - \xi_1^2 - \eta_1^2 - \zeta_1^2,$$

so wird der vorige Ausdruck:

$$(\xi_2(\xi_2^2 + \eta_2^2 + \zeta_2^2) - \xi_1(\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2))\cos^2\frac{\vartheta'}{2}$$

$$+ \frac{1}{4}\sin^2\vartheta' \cdot \left\{\begin{aligned} 2\xi_1(\xi_2^2 + \eta_2^2 + \zeta_2^2) - \xi_1(\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2)& \\ - \xi_1(\xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2 + \zeta_1\zeta_2)& \\ + 2\xi_2(\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2) - \xi_2(\xi_2^2 + \eta_2^2 + \zeta_2^2)& \\ - \xi_2(\xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2 + \zeta_1\zeta_2)& \end{aligned}\right\}.$$

Indem man die übrigen Integrationen ausführt,**) findet man hieraus

$$\frac{D\,\overline{\xi_1(\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2)}}{Dt} = A_2\sqrt{\frac{K}{2m}}\,\mu\Big(4\,\overline{\xi_1}\,\overline{(\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2)} - 2\,\overline{\xi_1}\,\overline{(\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2)}$$
$$- 2(\overline{\xi_1}\,\overline{\xi_1^2} + \overline{\eta_1}\,\overline{\xi_1\eta_1} + \overline{\zeta_1}\,\overline{\xi_1\zeta_1})\Big).$$

---

*) Wegen $\xi = \xi_2 - \xi_1,\ \eta = \eta_2 - \eta_1,\ \zeta = \zeta_2 - \zeta_1$. D. H.

**) Die Integration nach b_0 ergiebt 2 Glieder, von denen das erste den Zahlencoefficienten A_1, das zweite den A_2 besitzt. Bei der nun folgenden Integration verschwindet das erste Glied, weil die Mittelwerthe von $\xi_2(\xi_2^2 + \eta_2^2 + \zeta_2^2)$ und von $\xi_1(\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2)$ einander gleich sind. Das zweite Glied vereinfacht sich durch die Berücksichtigung der Mittelwerthe, indem z. B.

$$\overline{\xi_1\xi_2^2} = \overline{\xi_1}\,\overline{\xi_2^2} = \overline{\xi_2}\,\overline{\xi_1^2} = \overline{\xi_1}\,\overline{\xi_1^2}.$$ D. H.

Siebenzehnte Vorlesung.

Vergleichung der auf zwei verschiedenen Wegen erhaltenen Resultate. — Allgemeine Differentialgleichungen für Reibung und Wärmeleitung. — Zahlenwerthe aus Beobachtungen. — Gemenge von zwei Gasen. — Partialdrucke. — Diffusion.

§ 1.

Wir vergleichen nun die jetzt für

$$\frac{D\overline{\xi_1^2}}{Dt}, \qquad \frac{D\overline{\xi_1\eta_1}}{Dt}, \qquad \frac{D\overline{\xi_1(\xi_1^2+\eta_1^2+\zeta_1^2)}}{Dt}$$

gewonnenen Ausdrücke mit den früher abgeleiteten. Dabei geben wir den Zeichen ξ, η, ζ, die wir bei den jetzigen Rechnungen in anderer Bedeutung (S. 182) gebraucht haben, die frühere (S. 159) zurück, d. h. wir setzen

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= u + \xi, \\
\eta_1 &= v + \eta, \\
\zeta_1 &= w + \zeta.
\end{aligned}$$

Zugleich machen wir

$$A_2 \int \frac{\overline{K}}{2m} = \varkappa.$$

Wir haben dann

$$\begin{aligned}
\overline{\xi_1} &= u, \\
\overline{\eta_1} &= v, \\
\overline{\zeta_1} &= w, \\
\overline{\xi_1^2} &= u^2 + \overline{\xi^2}, \\
\overline{\eta_1^2} &= v^2 + \overline{\eta^2}, \\
\overline{\zeta_1^2} &= w^2 + \overline{\zeta^2}, \\
\overline{\eta_1\zeta_1} &= vw + \overline{\eta\zeta}, \\
\overline{\zeta_1\xi_1} &= wu + \overline{\zeta\xi}, \\
\overline{\xi_1\eta_1} &= uv + \overline{\xi\eta}, \\
\overline{\xi_1^3} &= u^3 + 3u\overline{\xi^2} + \overline{\xi^3}, \\
\overline{\xi_1\eta_1^2} &= uv^2 + u\overline{\eta^2} + 2v\overline{\xi\eta} + \overline{\xi\eta^2}, \\
\overline{\xi_1\zeta_1^2} &= uw^2 + u\overline{\zeta^2} + 2w\overline{\xi\zeta} + \overline{\xi\zeta^2} \quad \text{u. s. w.}
\end{aligned}$$

Dadurch werden unsere jetzt abgeleiteten Gleichungen

$$\frac{D\overline{\xi_1^2}}{Dt} = \varkappa\mu(\overline{\eta^2} + \overline{\zeta^2} - 2\overline{\xi^2}),$$

$$\frac{D\overline{\xi_1\eta_1}}{Dt} = -3\varkappa\mu\,\overline{\xi\eta},$$

$$\frac{D\overline{\xi_1(\xi_1^2+\eta_1^2+\zeta_1^2)}}{Dt} = 2\varkappa\mu\Big(u(\overline{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}) - 3(u\overline{\xi^2} + v\overline{\xi\eta} + w\overline{\xi\zeta}) - \overline{\xi(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)}\Big)$$

$$= 2u\frac{D\overline{\xi_1^2}}{Dt} + 2v\frac{D\overline{\xi_1\eta_1}}{Dt} + 2w\frac{D\overline{\xi_1\zeta_1}}{Dt} - 2\varkappa\mu\,\overline{\xi(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)}.$$

Ihre Vergleichung mit den früheren (S. 174 ff.) ergiebt:

$$\varkappa\mu(\overline{\eta^2} + \overline{\zeta^2} - 2\overline{\xi^2}) = 2\frac{p}{\mu}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right),$$

$$3\varkappa\mu\,\overline{\xi\eta} = -\frac{p}{\mu}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

$$2\varkappa\mu\,\overline{\xi(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)} = -5\frac{p}{\mu}\frac{\partial\left(\frac{p}{\mu}\right)}{\partial x}.$$

Da die Factoren von $\varkappa$ auf den linken Seiten erfahrungsmässig klein sind, wie schon S. 167 bemerkt wurde, so muss $\varkappa$ sehr gross sein. Aus jeder dieser Gleichungen erhält man durch Vertauschung der Buchstaben zwei ähnliche, die wir auch gebrauchen werden, um die Gleichungen auf S. 162 und 165 zu bilden.

§ 2.

Wir definiren nun p genauer, als es bisher geschehen ist,*) durch die Gleichung

$$\mu(\overline{\xi^2} + \overline{\eta^2} + \overline{\zeta^2}) = 3p.$$

Wir finden dann nach S. 165:

$$X_x = \mu\overline{\xi^2} = p - \frac{2}{3\varkappa}\frac{p}{\mu}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right),$$

$$Y_y = \mu\overline{\eta^2} = p - \frac{2}{3\varkappa}\frac{p}{\mu}\left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right),$$

$$Z_z = \mu\overline{\zeta^2} = p - \frac{2}{3\varkappa}\frac{p}{\mu}\left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{1}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right),$$

$$Y_z = \mu\overline{\eta\zeta} = -\frac{1}{3\varkappa}\frac{p}{\mu}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right),$$

$$Z_x = \mu\overline{\zeta\xi} = -\frac{1}{3\varkappa}\frac{p}{\mu}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right),$$

$$X_y = \mu\overline{\xi\eta} = -\frac{1}{3\varkappa}\frac{p}{\mu}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

*) Denn die bisherige Definition (S. 165) bezieht sich nur auf den Fall, wo
$\overline{\xi^2} = \overline{\eta^2} = \overline{\zeta^2}$. D. H.

Endlich:

$$\mu\,\overline{\xi(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)} = -\frac{5}{2\varkappa}\frac{p}{\mu}\frac{\partial\left(\frac{p}{\mu}\right)}{\partial x},$$

$$\mu\,\overline{\eta(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)} = -\frac{5}{2\varkappa}\frac{p}{\mu}\frac{\partial\left(\frac{p}{\mu}\right)}{\partial y},$$

$$\mu\,\overline{\zeta(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)} = -\frac{5}{2\varkappa}\frac{p}{\mu}\frac{\partial\left(\frac{p}{\mu}\right)}{\partial z}.$$

Wir stellen die Differentialgleichungen, die wir hiernach haben, zusammen.

$$0 = \frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\mu X = \mu\frac{du}{dt} + \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{3\varkappa}\frac{p}{\mu}\left(\Delta u + \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right)$$

$$\mu Y = \mu\frac{dv}{dt} + \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{1}{3\varkappa}\frac{p}{\mu}\left(\Delta v + \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right)$$

$$\mu Z = \mu\frac{dw}{dt} + \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{1}{3\varkappa}\frac{p}{\mu}\left(\Delta w + \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right).$$

Hier sind mit Maxwell die Glieder, welche $\frac{\partial\left(\frac{p}{\mu}\right)}{\partial x}$, $\frac{\partial\left(\frac{p}{\mu}\right)}{\partial y}$, $\frac{\partial\left(\frac{p}{\mu}\right)}{\partial z}$ enthalten, fortgelassen, d. h. die Abhängigkeit der Reibung von der Temperatur ist nicht berücksichtigt.*)

Endlich haben wir noch nach S. 164 die Gleichung:

$$\begin{aligned}0 = 3\mu\frac{d\left(\frac{p}{\mu}\right)}{dt} &+ 2p\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\\ &- \frac{4}{3\varkappa}\frac{p}{\mu}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right) + \frac{4}{9\varkappa}\frac{p}{\mu}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\\ &- \frac{2}{3}\frac{p}{\varkappa\mu}\left(\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right)\\ &- \frac{5}{2\varkappa}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\mu}\frac{\partial\left(\frac{p}{\mu}\right)}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p}{\mu}\frac{\partial\left(\frac{p}{\mu}\right)}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{p}{\mu}\frac{\partial\left(\frac{p}{\mu}\right)}{\partial z}\right)\right).\end{aligned}$$

§ 3.

Wir haben bis jetzt die Gasmasse uns als unbegrenzt gedacht; bei Versuchen ist sie mit festen Körpern, die ruhen oder sich bewegen, in Berührung; wir nehmen an, dass die Differentialgleichungen bis zu der Oberfläche gelten; an dieser sind dann gewisse Grenzbedingungen zu erfüllen. Als solche werden wir annehmen, dass

*) Denn $\frac{p}{\mu}$ hängt ausschliesslich von der Temperatur ab. D. H.

u, v, w in dem Gase dieselben Werthe haben, wie in dem festen Körper, also verschwinden, wenn dieser ruht; und dass die absolute Temperatur im Gase, die $\frac{p}{\mu}$ mal einer Constanten ist, gleich ist der Temperatur des festen Körpers. Es stimmen diese Annahmen mit den meisten Versuchen überein. In neuerer Zeit haben allerdings Kundt und Warburg*) theoretisch und experimentell gezeigt, dass die erstere genau richtig nicht sein kann, dass vielmehr, wenn man nur die mittlere, durch u, v, w repräsentirte Bewegung ins Auge fasst, ein *Gleiten* der Gastheilchen an der festen Wand stattfindet, und dass dieses bei den höchsten erreichbaren Verdünnungen sich geltend macht. Sie haben auch ein Bedenken in Bezug auf die die Temperatur betreffende Annahme erhoben; ob dieses berechtigt ist, lässt sich, wie mir scheint, mit Sicherheit nicht entscheiden, da man von der Wärmebewegung in festen Körpern zu wenig weiss.

Auf die Oberflächen der festen Körper werden von dem Gase *Druckkräfte* ausgeübt; diese setzen wir den Werthen gleich, die X_n, Y_n, Z_n in dem Gase an der Oberfläche haben.

Die mit $\frac{1}{\varkappa}$ proportionalen Glieder, durch welche unsere Gleichungen sich unterscheiden von den in erster Annäherung geltenden, bedingen die Erscheinungen der *Reibung* und der *Wärmeleitung*.

Die Grösse $\frac{1}{3\varkappa}\frac{p}{\mu}$ heisst der *Reibungscoefficient*. Sie ist, wie man sieht, bei gleicher Temperatur constant, d. h. vom Drucke unabhängig, und mit der absoluten Temperatur proportional. Die erste, sehr merkwürdige, theoretische Folgerung hat sich bis zu erheblichen Verdünnungen bewährt; bei dem höchsten Grade der Verdünnung gelang es Kundt und Warburg freilich, den Reibungscoefficienten auf ein Drittel seines ursprünglichen Werthes zu reduciren. Die Proportionalität desselben mit der absoluten Temperatur ist näherungsweise bestätigt. Für atmosphärische Luft bei 15° C ist nach Kundt und Warburg**)

$$\frac{1}{3\varkappa}\frac{p}{\mu} = 0{,}0189\,\frac{1\text{ mgr}}{1\text{ mm }1\text{ sec}},$$

für Wasserstoff

$$\frac{1}{3\varkappa}\frac{p}{\mu} = 0{,}0092\,\frac{1\text{ mgr}}{1\text{ mm }1\text{ sec}}.$$

§ 4.

Denken wir uns den Fall, dass

$$u = 0,$$
$$v = 0,$$
$$w = 0$$

*) Pogg. Ann. 155, p. 337, 1875.
**) l. c., p. 539.

also auch
$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = 0,$$
so wird die letzte Gleichung:
$$3\mu \frac{\partial\left(\frac{p}{\mu}\right)}{\partial t} = \frac{5}{2\varkappa}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\mu}\frac{\partial\left(\frac{p}{\mu}\right)}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p}{\mu}\frac{\partial\left(\frac{p}{\mu}\right)}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{p}{\mu}\frac{\partial\left(\frac{p}{\mu}\right)}{\partial z}\right)\right).$$
Vergleichen wir diese Gleichung mit derjenigen, die wir früher (S. 10) für die Wärmeleitung in einem ruhenden Körper aufgestellt haben:
$$c\mu \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \frac{\partial\left(k\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(k\frac{\partial \vartheta}{\partial y}\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(k\frac{\partial \vartheta}{\partial z}\right)}{\partial z},$$
wo k die Leitungsfähigkeit, c die specifische Wärme bedeutet, so ergiebt sich:
$$k = \frac{1}{3\varkappa}\frac{p}{\mu}\frac{5}{2}c,$$
dabei ist c die specifische Wärme des Gases bei constantem Volumen, weil $\frac{\partial \mu}{\partial t} = 0$. Es ist also k, wie der Reibungscoefficient, mit $\frac{p}{\mu}$ proportional und von p unabhängig; das ist in Uebereinstimmung mit der Erfahrung. Berechnen wir den absoluten Werth von k. Ist c' die specifische Wärme bei constantem Druck, so ist *nach unserer Theorie*
$$c' = \frac{5}{3}c,$$
also
$$k = \frac{1}{3\varkappa}\frac{p}{\mu}\frac{3}{2}c';$$
das giebt aus den oben mitgetheilten Reibungscoefficienten bei 15^0 C für

atmosphärische Luft, wo	$c' = 0{,}237$,	$k = 0{,}00656 \frac{1\,\mathrm{mgr}}{1\,\mathrm{mm}\;1\,\mathrm{sec}}$
Wasserstoff	3,29	0,045.

Nach Versuchen von Stefan leitet Wasserstoff siebenmal besser als atmosphärische Luft, und für die letztere ist
$$k = 0{,}0055 \frac{1\,\mathrm{mgr}}{1\,\mathrm{mm}\;1\,\mathrm{sec}}.$$
Der Unterschied dieser Zahl und der theoretischen hat sicher denselben Grund, wie der Unterschied in Betreff des Verhältnisses der beiden specifischen Wärmen.

Wir wollen nun annehmen, dass die Geschwindigkeiten, so wie die Aenderungen von p und μ unendlich klein sind; dann vereinfachen sich zunächst unsere fünf Gleichungen dadurch, dass überall für das Zeichen $\frac{d}{dt}$ das Zeichen $\frac{\partial}{\partial t}$ gesetzt werden kann, und dass p und μ, wo sie ausserhalb von Differentiationszeichen stehn, als constant betrachtet werden können. Ueberdies nimmt die fünfte Gleichung diese Gestalt an:

$$0 = 3\mu \frac{\partial\left(\frac{p}{\mu}\right)}{\partial t} + 2p\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) - \frac{5}{2\varkappa}\frac{p}{\mu}\,\Delta\,\frac{p}{\mu}.$$

Nehmen wir noch an, dass die Bewegung eine stationäre ist, so giebt die Gleichung der Continuität

$$0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z};$$

d. h. das Gas bewegt sich wie eine incompressible Flüssigkeit; die vier ersten Gleichungen bestimmen u, v, w, die letzte:

$$0 = \Delta\,\frac{p}{\mu}$$

die Temperatur, die constant sein kann.

§ 5.

Wir wollen nun noch einige einfache Betrachtungen anstellen über ein Gemenge von *zwei* Gasen.

Wir kehren zu der Gleichung S. 159 zurück, die ich mehrfach als die Grundgleichung der kinetischen Gastheorie bezeichnet habe, und wenden sie auf den ersten Bestandtheil eines solchen Gemenges an. Wir setzen zuerst

$$Q = 1, \quad \text{also auch} \quad \overline{Q} = 1$$

und der Kürze wegen

$$\frac{d_1}{d_1 t} = \frac{\partial}{\partial t} + u_1\frac{\partial}{\partial x} + v_1\frac{\partial}{\partial y} + w_1\frac{\partial}{\partial z};$$

wir erhalten dann aus der Grundgleichung die Gleichung der Continuität*)

$$\frac{1}{\mu_1}\frac{d_1\mu_1}{d_1 t} + \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z} = 0,$$

wofür sich auch schreiben lässt:

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial t} + \frac{\partial(\mu_1 u_1)}{\partial x} + \frac{\partial(\mu_1 v_1)}{\partial y} + \frac{\partial(\mu_1 w_1)}{\partial z} = 0.$$

Mit Hülfe hiervon wird die Grundgleichung**)

*) Zunächst unter der Form:

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial t} = -\frac{\partial(\mu_1\overline{\xi_1})}{\partial x} - \frac{\partial(\mu_1\overline{\eta_1})}{\partial y} - \frac{\partial(\mu_1\overline{\zeta_1})}{\partial z}.$$

Hierbei ist μ_1 die Masse des ersten Bestandtheils in der Volumeneinheit. D. H.

**) Hierbei ist wieder gesetzt: $D = D_1 + D_2$, zur Unterscheidung der Zusammenstösse mit Molekülen erster und solcher mit Molekülen zweiter Art. D. H.

$$\mu_1\left(X\overline{\frac{\partial Q}{\partial \xi_1}}+Y\overline{\frac{\partial Q}{\partial \eta_1}}+Z\overline{\frac{\partial Q}{\partial \zeta_1}}\right)=$$

$$\mu_1\frac{d_1\overline{Q}}{d_1 t}-\mu_1\frac{D_1\overline{Q}}{D_1 t}-\mu_1\frac{D_2\overline{Q}}{D_2 t}$$

$$+\frac{\partial(\mu_1\overline{(\xi_1-u_1)Q})}{\partial x}+\frac{\partial(\mu_1\overline{(\eta_1-v_1)Q})}{\partial y}+\frac{\partial(\mu_1\overline{(\zeta_1-w_1)Q})}{\partial z}.$$

Setzen wir hier

$$Q=\xi_1, \quad \text{also} \quad \overline{Q}=u_1,$$

und benutzen die S. 187 für $\frac{D_1\overline{\xi_1}}{D_1 t}$ und $\frac{D_2\overline{\xi_1}}{D_2 t}$ gefundenen Werthe, so kommt

$$\mu_1 X=\mu_1\frac{d_1 u_1}{d_1 t}-\varkappa\mu_1\mu_2(u_2-u_1)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu_1\overline{(\xi_1-u_1)^2}\right)$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu_1\overline{(\xi_1-u_1)(\eta_1-v_1)}\right)$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu_1\overline{(\xi_1-u_1)(\zeta_1-w_1)}\right),$$

wo

$$\varkappa=A_1\sqrt{\frac{K}{m_1+m_2}}.$$

Indem wir annehmen, dass die relativen Geschwindigkeiten, deren Componenten ξ_1-u_1, η_1-v_1, ζ_1-w_1 sind, symmetrisch in Bezug auf die verschiedenen Richtungen vertheilt sind*), erhalten wir hieraus

$$\mu_1 X=\mu_1\frac{d_1 u_1}{d_1 t}-\varkappa\mu_1\mu_2(u_2-u_1)+\frac{\partial p_1}{\partial x},$$

wenn

$$p_1=\mu_1\overline{(\xi_1-u_1)^2}$$

gesetzt wird.

Wir wollen annehmen, dass die u, v, w so klein sind, dass sie in dieser Gleichung vernachlässigt werden können, ausser wo sie mit dem grossen $\varkappa$ multiplicirt vorkommen. Dann wird dieselbe

$$\mu_1 X=\varkappa\mu_1\mu_2(u_1-u_2)+\frac{\partial p_1}{\partial x}.$$

Ebenso ist**)

$$\mu_2 X=\varkappa\mu_1\mu_2(u_2-u_1)+\frac{\partial p_2}{\partial x};$$

und

$$p_1=\mu_1\overline{\xi_1^2},$$

$$p_2=\mu_2\overline{\xi_2^2}.$$

*) Diese Annahme entspricht der S. 167 für ein einfaches Gas benutzten Annäherung. D. H.

**) Hierbei ist X in beiden Gleichungen als gleich angenommen, d. h. es wird vorausgesetzt, dass die aus der Ferne wirkenden Kräfte nur von der Masse, nicht von der sonstigen Beschaffenheit der Moleküle abhängen. D. H.

Wir setzen:

$$p_1 + p_2 = p.$$

Dann ist

$$(\mu_1 + \mu_2) X = \frac{\partial p}{\partial x},$$

und da $\mu_1 + \mu_2$ die Dichtigkeit des Gasgemenges ist, so folgt hieraus, dass p der Druck desselben ist; p_1 und p_2 sind die *Theile* des Druckes, die von den beiden Bestandtheilen herrühren. Sie lassen sich auch definiren als die Drucke, die stattfinden würden, wenn nur das eine oder das andere Gas bei der Dichtigkeit, die es besitzt, und bei der Temperatur, die das Gemenge hat, vorhanden wäre. Um die Richtigkeit dieser Behauptung einzusehen, muss man in Betracht ziehen, wodurch die Temperatur bei einem Gasgemenge oder einem einfachen Gase bestimmt ist. Wir machen die Hypothese, dass sie immer (bis auf einen constanten Factor) die mittlere lebendige Kraft eines Moleküls ist. Wir haben früher (S. 152) gesehen, dass bei einem Gasgemenge, das im Gleichgewichte sich befindet, $m_1 \overline{\xi_1^2} = m_2 \overline{\xi_2^2}$ ist; hieraus folgt bei der aufgestellten Definition der Temperatur, dass bei einem Gasgemenge die Moleküle eines jeden Bestandtheils dieselben Geschwindigkeiten haben, wie wenn dieser Bestandtheil *allein* bei der stattfindenden Temperatur vorhanden wäre; woraus dann folgt, dass p_1 und p_2, wie angegeben, sich definiren lassen.

§ 6.

Kehren wir nun zu unseren Gleichungen zurück; nehmen wir zunächst an, dass Gleichgewicht besteht, also $u_1 = 0$, $u_2 = 0$; dann haben wir

$$\mu_1 X = \frac{\partial p_1}{\partial x};$$

dieselbe Gleichung, die bestehn würde, wenn das zweite Gas gar nicht vorhanden wäre. Wäre Gleichgewicht in der Atmosphäre, so müsste das Mischungsverhältniss von Sauerstoff und Stickstoff mit der Höhe variiren*); dass es das nicht thut, ist eine Folge der Strömungen.

Nehmen wir andrerseits an, dass äussere Kräfte nicht wirken, dass aber u_1 und u_2 von Null verschieden sind; sie mögen aber nur von x und t abhängen und die v und w seien gleich Null. Man hat dann

$$\frac{\partial p_1}{\partial x} = \varkappa \mu_1 \mu_2 (u_2 - u_1),$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial x} = \varkappa \mu_1 \mu_2 (u_1 - u_2),$$

*) Da Sauerstoff specifisch schwerer ist, so müssten die oberen Schichten sauerstoffärmer sein. D. H.

dazu die Gleichungen der Continuität:

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial t} + \frac{\partial(\mu_1 u_1)}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial \mu_2}{\partial t} + \frac{\partial(\mu_2 u_2)}{\partial x} = 0.$$

Diese Gleichungen enthalten die Theorie der *Diffusion* zweier Gase in einer vertikalen cylindrischen Röhre; (von der Wirkung der Schwere kann man bei ihr absehn, wenn das schwerere Gas ursprünglich das untere ist.)

Die Temperatur soll immer und überall dieselbe sein; dann ist

$$\frac{p_1}{\mu_1} = \text{const.}$$

und

$$\frac{p_2}{\mu_2} = \text{const.};$$

daher ist auch

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} + \frac{\partial(p_1 u_1)}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial t} + \frac{\partial(p_2 u_2)}{\partial x} = 0.$$

Aus den ersten Gleichungen folgt

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0;$$

aus den letzten:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial(p_1 u_1 + p_2 u_2)}{\partial x} = 0,$$

also durch Differentiation nach x:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(p_1 u_1 + p_2 u_2) = 0,$$

mithin ist $p_1 u_1 + p_2 u_2$ gleich einer linearen Function von x; an jedem Ende der Röhre ist aber $u_1 = 0$ und $u_2 = 0$; also allgemein

$$p_1 u_1 + p_2 u_2 = 0,$$

und daher auch

$$\frac{\partial p}{\partial t} = 0.$$

Es ist also p der Zeit und dem Orte nach constant. Ferner ist, wie soeben gefunden:

$$u_2 = - u_1 \frac{p_1}{p_2},$$

also:

$$u_2 - u_1 = - u_1 \frac{p}{p_2},$$

und:

$$\frac{\partial p_1}{\partial x} = - \varkappa \frac{\mu_1 \mu_2}{p_1 p_2} p \, u_1 p_1,$$

wo $\frac{\mu_1\mu_2}{p_1p_2}$ constant und mit $\frac{1}{T^2}$ proportional ist. Nimmt man hinzu

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = -\frac{\partial(u_1p_1)}{\partial x},$$

so folgt durch Elimination von u_1:

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = \frac{1}{\varkappa}\frac{p_1p_2}{\mu_1\mu_2}\frac{1}{p}\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2};$$

eine Gleichung, welche von derselben Form ist, als diejenige, die die Wärmeleitung in irgend einem Körper bedingt. Die Grösse

$$\frac{1}{\varkappa}\frac{p_1}{\mu_1}\frac{p_2}{\mu_2}\frac{1}{p},$$

die von *beiden* Gasen abhängt, heisst der *Diffusionscoefficient*; er ist mit dem Quadrate der absoluten Temperatur und mit $\frac{1}{p}$ proportional. Das stimmt überein mit den Versuchen von Loschmidt.*)

*) Loschmidt. Wiener Berichte. März 1870.

Achtzehnte Vorlesung.

Theorie von Clausius. — Moleküle als elastische Kugeln. — Wahrscheinlichkeit für die Zurücklegung eines bestimmten Weges. — Mittlere Weglänge. — Berechnung der von einer Schicht „ausgesandten" Moleküle. — Bewegte Gasmasse. — Anwendung des Maxwell'schen Gesetzes der Geschwindigkeitsvertheilung. — Berechnung der Mittelwerthe derjenigen Geschwindigkeitsfunctionen, welche in den allgemeinen Bewegungsgleichungen auftreten, unter Benutzung verschiedener Annäherungen, die aber, wie sich schliesslich zeigt, mit einander in Widerspruch stehen.

§ 1.

Bei den Betrachtungen, die wir über die Reibung, die Wärmeleitung und die Diffusion der Gase angestellt haben, war die Maxwell'sche Hypothese wesentlich, dass die Moleküle mit einer Kraft sich abstossen, die der fünften Potenz ihrer Entfernung umgekehrt proportional ist. Maxwell hat diese Hypothese hauptsächlich damit gestützt, dass das aus ihr folgende Resultat, der Reibungscoefficient sei proportional mit der absoluten Temperatur, mit den Beobachtungen in Uebereinstimmung sei. Doch ist diese Uebereinstimmung noch zweifelhaft, und auch von anderer Seite sind Bedenken gegen diese Hypothese erhoben worden. Eine andere Hypothese, die aufgestellt ist und wegen ihrer verhältnissmässig grossen Anschaulichkeit viele Anhänger gefunden hat, ist die, dass die Moleküle als elastische Kugeln zu betrachten sind, die gar nicht auf einander wirken, so lange sie einander nicht berühren, bei eintretender Berührung aber von einander abprallen. Diese Hypothese kann aber nicht auf dem Wege verfolgt werden, der bei der Maxwell'schen zum Ziele geführt hat.*) Um hier zu der Theorie der Reibung, Wärmeleitung und Diffusion zu gelangen, sind gewisse Betrachtungen über die Weglängen erforderlich, die ein Molekül zwischen zwei auf einander folgenden Stössen zurücklegt.

Wir denken uns ein scheinbar in Ruhe befindliches Gas und wollen die Wahrscheinlichkeit dafür aufsuchen, dass ein Molekül

*) Dieser Punkt erscheint dem Herausgeber doch noch einer besonderen Untersuchung werth.

einen Weg von der Länge r zurücklegt, ohne mit einem anderen zusammen zu stossen.

Wir denken uns nach Clausius*) zuerst ein *ruhendes* System von Molekülen, die regellos so vertheilt sind, dass auf die Volumeneinheit n_1 kommen, und ein mit constanter Geschwindigkeit bewegtes Molekül. Die Wahrscheinlichkeit, dass es, ohne anzustossen, die Strecke 1 zurücklegt, sei

$$e^{-\alpha},$$

die Wahrscheinlichkeit, dass es die Strecke 2 zurücklegt, ist dann**)

$$e^{-2\alpha},$$

u. s. w.; also die Wahrscheinlichkeit, dass es auf der Strecke r nicht anstösst, ist gleich

$$e^{-\alpha r}.$$

Ist r unendlich klein, so kann man diese Wahrscheinlichkeit noch anders ausdrücken und dadurch eine Bestimmung von α erlangen. Man denke sich senkrecht zur Bahn des bewegten Moleküls durch dasselbe gelegt eine Flächeneinheit. In einem rechtwinkligen Parallelepipedon, dessen Basis diese, dessen Höhe r ist, befinden sich $n_1 r$ Moleküle. ε sei der *Durchmesser* eines Moleküls; jedem jener $n_1 r$ Moleküle entspricht dann eine Kreisfläche von der Grösse $\pi\varepsilon^2$, die für den Mittelpunkt des bewegten Moleküls nicht frei ist***); von der ganzen Flächeneinheit ist also $n_1 \pi \varepsilon^2 r$ nicht frei und $1 - n_1 \pi \varepsilon^2 r$ ist frei; also die Wahrscheinlichkeit, dass das Molekül auf dem Wege r nicht anstösst, ist gleich

$$1 - n_1 \pi \varepsilon^2 r$$

und dieses muss gleich sein

$$e^{-\alpha r} = 1 - \alpha r,$$

d. h. es muss sein:

$$\alpha = n_1 \pi \varepsilon^2.$$

§ 2.

Es sei h die Geschwindigkeit des bewegten Moleküls, t die Zeit, die es braucht, um den Weg r zurückzulegen, dann ist nach dem Vorigen

$$e^{-\alpha h t} = e^{-n_1 \pi \varepsilon^2 h t}$$

die Wahrscheinlichkeit, dass das Molekül während der Zeit t nicht anstösst. Dieser Ausdruck behält dieselbe Bedeutung auch, wenn die bisher als ruhend gedachten Moleküle alle mit derselben Geschwindig-

*) Clausius. Pogg. Ann. 105. p. 239. 1858.

**) gleich dem Product $e^{-\alpha} \cdot e^{-\alpha}$ (vgl. S. 136). D. H.

***) Denn dieser Mittelpunkt kann sich dem Mittelpunkt eines anderen Moleküls höchstens bis auf die Entfernung ε nähern. D. H.

keit in gleicher Richtung sich bewegen, falls h die *relative* Geschwindigkeit des einen Moleküls gegen das System bedeutet. Die Componenten der Geschwindigkeit des Systems mögen in den Intervallen zwischen ξ_1 und $\xi_1 + d\xi_1$, η_1 und $\eta_1 + d\eta_1$, ζ_1 und $\zeta_1 + d\zeta_1$ liegen und es sei

$$n_1 = f(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)\, d\xi_1\, d\eta_1\, d\zeta_1$$

und die Komponenten der Geschwindigkeit des einen Moleküls seien ξ, η, ζ, so dass

$$h = \sqrt{(\xi - \xi_1)^2 + (\eta - \eta_1)^2 + (\zeta - \zeta_1)^2};$$

die genannte Wahrscheinlichkeit ist dann

$$e^{-\pi \varepsilon^2 h f\, d\xi_1\, d\eta_1\, d\zeta_1\, t}.$$

Nun seien mehrere oder viele solcher Systeme von Molekülen vorhanden; dass unser Molekül in der Zeit t nicht mit einem Moleküle der verschiedenen Systeme zusammenstösst, sind *unabhängige* Ereignisse; die Wahrscheinlichkeit, dass es mit keinem zusammenstösst, ist also das Product der Wahrscheinlichkeiten dafür, dass es nicht mit den einzelnen zusammenstösst, mithin

$$e^{-\pi \varepsilon^2 t \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} h f(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)\, d\xi_1\, d\eta_1\, d\zeta_1}.$$

Nennen wir wieder r den Weg, den das eine Molekül in der Zeit t zurücklegt, so dass

$$r = t\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2},$$

so ist derselbe Ausdruck oder

$$e^{-r \frac{\pi \varepsilon^2}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}} \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} h f(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)\, d\xi_1\, d\eta_1\, d\zeta_1} = W = e^{-\beta r},$$

wobei

$$\beta = \frac{\pi \varepsilon^2}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}} \cdot \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} h f(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)\, d\xi_1\, d\eta_1\, d\zeta_1,$$

die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Molekül den Weg r ohne Anstoss zurücklegt

Haben wir im Ganzen n Moleküle, so werden von diesen nW den Weg r, ohne anzustossen, zurücklegen, und $n\left(W + \frac{dW}{dr} dr\right)$ den Weg $r + dr$. D. h.

$$-n \frac{dW}{dr} dr = n\beta e^{-\beta r} dr$$

Moleküle werden einen Zusammenstoss erleiden, wenn der durchlaufene Weg zwischen r und $r + dr$ liegt. $\beta \cdot e^{-\beta r} dr$ ist also die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der bis zu einem Stosse zurückgelegte

Weg in diesem Intervalle liegt. Umgekehrt ist derselbe Ausdruck auch gleich der Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Molekül den letzten Zusammenstoss in einem Abstande erlitten hat, der zwischen r und $r + dr$ liegt. Das Gesagte gilt auch, wenn das Molekül im Augenblick, indem $r = 0$ ist, gerade einen Zusammenstoss erlitten hat*); daraus folgt, dass $\beta e^{-\beta r} dr$ auch als die Wahrscheinlichkeit dafür bezeichnet werden kann, dass der Weg eines Moleküls zwischen zwei Stössen zwischen r und $r + dr$ liegt.

§ 3.

Der Mittelwerth aller zurückgelegten Wege r wird die *mittlere Weglänge* genannt; sie ist gleich

$$\int_0^\infty \beta e^{-\beta r} dr\, r = \frac{1}{\beta} \int_0^\infty y e^{-y} dy$$
$$= \frac{1}{\beta} \Big[- y e^{-y} - e^{-y} \Big]_0^\infty = \frac{1}{\beta},$$

so dass β eine einfache angebbare Bedeutung hat. Sein Werth ist eine Function von ξ, η, ζ oder vielmehr von $\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$ wegen der Symmetrie der Bewegung. Dieselbe ist von O. E. Meyer (Die kinetische Theorie der Gase, 1877) unter Annahme des Maxwell'schen Gesetzes für die Vertheilung der Geschwindigkeiten der Moleküle berechnet; wir wollen sie unter der einfacheren Annahme berechnen, dass die Geschwindigkeiten alle von gleicher Grösse sind, einer Annahme, welche Clausius seinen Rechnungen in der kinetischen Gastheorie zu Grunde gelegt hat. Nennt man g diese Geschwindigkeit, ϑ den Winkel, den die Bewegungsrichtung eines beliebigen Moleküls mit der des einen Moleküls bildet, N die Zahl der Moleküle in der Volumeneinheit, so hat man hier nach S. 204**)

*) Denn in jedem Falle ist die berechnete Wahrscheinlichkeit unabhängig davon, welche Strecke das Molekül vorher ohne Anstoss zurückgelegt hat, bez. später ohne Anstoss zurücklegen wird. Ueber diesen Punkt, der leicht zu einem Trugschluss Anlass giebt, vgl. ausführlicher Clausius, Kinetische Theorie der Gase, p. 208 (§ 3). D. H.

**) Das dreifache Integral reducirt sich wegen der Constanz von

$$\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2 = g^2$$

auf ein zweifaches. Dabei ist

$$f(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)\, d\xi_1\, d\eta_1\, d\zeta_1 = \frac{N}{4\pi} \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\omega$$

die Zahl der Moleküle in der Volumeneinheit, deren Geschwindigkeitsrichtung in den Intervallen zwischen ϑ und $\vartheta + d\vartheta$, ω und $\omega + d\omega$ liegt. Ferner ist

$$h = \sqrt{(\xi - \xi_1)^2 + (\eta - \eta_1)^2 + (\zeta - \zeta_1)^2} = \sqrt{2g^2 - 2g^2 \cos\vartheta}. \quad \text{D. H.}$$

$$\beta = \frac{\pi\varepsilon^2}{g}\,\frac{N}{4\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{2g^2(1-\cos\vartheta)}\sin\vartheta\;d\vartheta\;d\omega$$

$$= N\pi\,\varepsilon^2\int\limits_0^{\pi}\sin\vartheta\,\sin\frac{\vartheta}{2}\,d\vartheta = \frac{4}{3}\,\pi\varepsilon^2\,N,$$

also

$$\frac{1}{\beta} = \frac{3}{4}\,\frac{1}{\pi\varepsilon^2 N}.$$

§ 4.

Denken wir uns nun in dem Gase eine Kugel A, deren Mittelpunkt der Anfangspunkt der Coordinaten sein möge und deren Radius unendlich klein gegen die mittlere Weglänge der Moleküle*) ist. Das Volumen derselben soll als die Volumeneinheit bezeichnet werden.

Wir wollen untersuchen, wo die Moleküle, die in der Kugel in einem Augenblicke enthalten sind, sich befanden, als sie den letzten Zusammenstoss erlitten. Wir fassen zuerst die Moleküle ins Auge, deren Geschwindigkeitscomponenten ξ, η, ζ sind.**) Diese sind alle in *einer* Richtung angekommen und befanden sich in jedem Augenblicke (nach dem letzten Stosse, den sie erlitten haben,) in einer Kugel B von gleichem Radius, deren Mittelpunkt auf der Linie liegt, die durch den Anfangspunkt in der der Geschwindigkeit (ξ, η, ζ) entgegengesetzten Richtung gezogen ist. Diese Kugel schreitet mit der Geschwindigkeit (ξ, η, ζ) vor.***) Denken wir uns um den Anfangspunkt zwei grosse Kugelflächen mit den Radien r und $r+dr$ beschrieben, und die eben besprochene kleine Kugel ganz nahe an der inneren Seite der Kugel vom Radius r; für ein Molekül der kleinen Kugel ist die Wahrscheinlichkeit, dass es den letzten Zusammenstoss in der Schicht von der Dicke dr erfahren hat, gleich $\beta\,dr$; †) d. h., ist n die Zahl der Moleküle ††) in der kleinen Kugel, also in der Volumeneinheit, so haben von diesen

Fig. 17.

$$n\beta\,dr$$

den letzten Zusammenstoss in der genannten Schicht erlitten. Von diesen Molekülen kommen aber nicht alle, sondern nach S. 204 nur

*) und unendlich gross gegen den Durchmesser eines Moleküls. D. H.

**) Im Folgenden ist die Annahme, dass alle Geschwindigkeiten von gleicher Grösse sind, wieder aufgehoben. D. H.

***) Wir betrachten nun *alle* in dieser beweglichen Kugel enthaltenen Moleküle mit der Geschwindigkeit (ξ, η, ζ), nicht blos diejenigen, welche den Anfangspunkt wirklich erreichen. D. H.

†) Ergiebt sich aus dem Ausdruck $\beta \cdot e^{-\beta r}\,dr$ (S. 204) für $r = 0$. D. H.

††) mit der Geschwindigkeit (ξ, η, ζ). D. H.

$$e^{-\beta r} n\beta\, dr$$

in der um den Anfangspunkt beschriebenen kleinen Kugel an, ohne einen Zusammenstoss erlitten zu haben. (Diejenigen, die einen Zusammenstoss erlitten haben, kommen dort gar nicht oder nicht mit der Geschwindigkeit (ξ, η, ζ) an.) Der gefundene Ausdruck beantwortet die aufgeworfene Frage für die Moleküle von der Geschwindigkeit (ξ, η, ζ),*) eine Probe für seine Richtigkeit ist die Gleichung**)

$$\int_0^\infty e^{-\beta r} n\beta\, dr = n.$$

Nennen wir wieder $f(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta$ die Zahl der Moleküle in der Volumeneinheit, deren Geschwindigkeitscomponenten in den Intervallen $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ liegen,***) so finden wir, dass unter den von der Schicht von der Dicke dr *ausgesendeten* Molekülen dieser Art

$$\beta e^{-\beta r} dr\, f(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta$$

in die kleine Kugel am Anfangspunkte gelangen.

§ 5.

Nun denken wir uns eine bewegte Gasmasse; um die Betrachtungen etwas abzukürzen, nehmen wir die scheinbare Bewegung aber als stationär an. Wir setzen weiter u, v, w im Anfangspunkte gleich Null.

In die Kugel A werden auch hier von allen anderen Theilen der Gasmasse Moleküle hingesendet sein und auch jetzt wird der letzte Ausdruck näherungsweise seine Bedeutung behalten, wenn nur berücksichtigt wird, dass $f(\xi, \eta, \zeta)$ vom Orte der Kugel B abhängig ist. (Streng genommen wird freilich β in den verschiedenen Theilen der Gasmasse etwas verschiedene Werthe haben).

Ferner wird nach Maxwell (S. 166) näherungsweise

$$f(\xi, \eta, \zeta) = \frac{N}{\pi^{\frac{3}{2}} \alpha^3} e^{-\frac{(\xi-u)^2+(\eta-v)^2+(\zeta-w)^2}{\alpha^2}}$$

gesetzt werden dürfen, wo N, α, u, v, w Functionen von x, y, z sind.

Es wird f als *lineare* Function von x, y, z angesehen werden können, also

*) D. h. von den genannten in der Einheitskugel befindlichen n Molekülen befanden sich beim letzten Zusammenstoss $e^{-\beta r} n\beta\, dr$ in einer Entfernung zwischen r und $r + dr$ vom Anfangspunkt. D. H.

**) Denn das Integral giebt die Zahl derjenigen Moleküle an, die sich beim letzten Zusammenstoss in einer Entfernung zwischen 0 und ∞ vom Anfangspunkt befanden. D. H.

***) Also $f(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta = n$. D. H.

$$f = f_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 z,$$

wo rechts in $f, \frac{\partial f}{\partial x} \cdots x, y, z = 0$ zu setzen sind.

In f kommen zwei Constanten N, α vor, die Dichtigkeit und Temperatur bedingen; diese sind als lineare Functionen, u, v, w als homogene lineare Functionen von x, y, z anzusehen. Hiernach ist*)

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 = \frac{\partial f_0}{\partial N}\frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial f_0}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x} - \frac{\partial f_0}{\partial \xi}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial f_0}{\partial \eta}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial f_0}{\partial \zeta}\frac{\partial w}{\partial x}.$$

Setzen wir

$$\varrho^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2,$$

so ist f_0 eine Function von ϱ, also

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 = \frac{\partial f_0}{\partial N}\frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial f_0}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x} - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial f_0}{\partial \varrho}\left(\xi\frac{\partial u}{\partial x} + \eta\frac{\partial v}{\partial x} + \zeta\frac{\partial w}{\partial x}\right).$$

Ferner ist**)

$$x : y : z = \xi : \eta : \zeta,$$

also

$$x = \frac{\xi}{\varrho} r,$$

$$y = \frac{\eta}{\varrho} r,$$

$$z = \frac{\zeta}{\varrho} r.$$

Daher ist die Zahl der Moleküle in der Kugel A, deren Geschwindigkeitscomponenten in den Intervallen $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ liegen und die von der Schicht von der Dicke dr ausgesendet sind, gleich

$$\begin{aligned}
&\beta e^{-\beta r} dr\, f_0\, d\xi\, d\eta\, d\zeta \\
&\quad + \beta r e^{-\beta r} dr \frac{1}{\varrho} d\xi\, d\eta\, d\zeta \left\{\frac{\partial f_0}{\partial N}\left(\frac{\partial N}{\partial x}\xi + \frac{\partial N}{\partial y}\eta + \frac{\partial N}{\partial z}\zeta\right)\right. \\
&\qquad + \frac{\partial f_0}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\xi + \frac{\partial \alpha}{\partial y}\eta + \frac{\partial \alpha}{\partial z}\zeta\right) \\
&\qquad - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial f_0}{\partial \varrho}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\xi^2 + \frac{\partial v}{\partial y}\eta^2 + \frac{\partial w}{\partial z}\zeta^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\xi\eta\right. \\
&\qquad \left.\left. + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)\eta\zeta + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\zeta\xi\right)\right\}.
\end{aligned}$$

Diesen Ausdruck integriren wir in Bezug auf r von 0 bis ∞ und erhalten dadurch die Zahl der Moleküle in der Kugel A, deren Geschwindigkeitscomponenten in den Intervallen $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ liegen, gleich

*) wobei benutzt wird, dass

$$\frac{\partial f}{\partial u} = -\frac{\partial f}{\partial \xi} \quad \text{u. s. w.} \qquad \text{D. H.}$$

**) x, y, z sind die Coordinaten eines Punktes der Kugelschicht dr, von der die Moleküle nach dem Anfangspunkt ausgesendet werden. D. H.

$$f_0\, d\xi\, d\eta\, d\zeta + \frac{1}{\beta\varrho}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta \left\{\frac{\partial f_0}{\partial N}\left(\frac{\partial N}{\partial x}\xi + \frac{\partial N}{\partial y}\eta + \frac{\partial N}{\partial z}\zeta\right)\right.$$
$$+ \frac{\partial f_0}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\xi + \frac{\partial \alpha}{\partial y}\eta + \frac{\partial \alpha}{\partial z}\zeta\right)$$
$$- \frac{1}{\varrho}\frac{\partial f_0}{\partial \varrho}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\xi^2 + \frac{\partial v}{\partial y}\eta^2 + \frac{\partial w}{\partial z}\zeta^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\xi\eta\right.$$
$$\left.\left. + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)\eta\zeta + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\zeta\xi\right)\right\}.$$

Integrirt man diesen Ausdruck nach ξ, η, ζ von $-\infty$ bis $+\infty$, so erhält man die Gesammtzahl, N, der Moleküle in der Kugel A; und integrirt man, nachdem man ihn mit Q multiplicirt hat, so erhält man $N\overline{Q}$.

Die Ausführung dieser Integrationen wird dabei wesentlich dadurch erleichtert, dass f_0, $\frac{\partial f_0}{\partial N}$, $\frac{\partial f_0}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial f_0}{\partial \varrho}$ und β Functionen von $\varrho^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$ sind, und dass in Folge dessen zu dem Werthe des Integrals alle diejenigen Glieder nichts beitragen, in denen jene Grössen mit einer Function von ξ, η, ζ multiplicirt vorkommen, die in Bezug auf eine oder mehrere dieser Grössen eine ungerade ist. Eine Folge desselben Umstandes ist es, dass in jedem Gliede die Zeichen ξ, η, ζ beliebig vertauscht werden können, ohne dass der Werth des Integrals geändert wird.

§ 6.

Durch unmittelbare Integration des letzten Ausdruckes erhält man hiernach

$$N = \int\!\!\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} f_0\, d\xi\, d\eta\, d\zeta + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \times . \text{Factor.}$$

Aber nach der Gleichung der Continuität ist für die Kugel A:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

da wegen des stationären Zustandes $\frac{\partial \mu}{\partial t} = 0$ und ausserdem u, v, w verschwinden; also ist

$$N = \int\!\!\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} f_0\, d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

wie es sein muss.

Mit Leichtigkeit erhält man die Werthe von $\overline{\xi^2}$, $\overline{\xi\eta}$ u. s. f., die die Reibung bedingen.*) Sie ergeben sich von derselben Form, wie

*) Indem man dem oben angegebenen Verfahren gemäss setzt: $Q = \xi^2$, $\xi\eta$, u. s. f. D. H.

wir sie früher gefunden haben; es wird z. B. $\overline{\xi\eta} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$, multiplicirt mit einem Factor, der den Reibungscoefficienten bestimmt.

Um die Wärmeleitung zu untersuchen, muss man $\overline{\xi(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)}$ berechnen; hier tritt der Factor

$$\frac{\partial f_0}{\partial N}\frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial f_0}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x}$$

auf.*) Fassen wir nur den Fall ins Auge, dass u, v, w überall verschwinden, dass wir also nur Wärmeleitung ohne scheinbare Bewegung haben, so muss sein:

$$p = \text{const},$$

d. h.

$$N\alpha^2 = \text{const}$$

und aus dieser Gleichung ist $\frac{\partial N}{\partial x}$ durch $\frac{\partial \alpha}{\partial x}$ auszudrücken.**) Thut man das, so erhält man für $\overline{\xi(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)}$ wieder einen Ausdruck von derselben Form, wie wir ihn bei der Maxwell'schen Theorie gefunden haben (S. 194).

Berechnet man aber $\overline{\xi}$,***) so kommt man auf einen Widerspruch. Diese Grösse ergiebt sich offenbar nicht gleich Null, wie es der Annahme der scheinbaren Ruhe entspricht. Meyer erfüllt diese Gleichung, indem er ihr gemäss $\frac{\partial N}{\partial x} : \frac{\partial \alpha}{\partial x}$ bestimmt; bei ihm wird dann aber nicht $N\alpha^2 = \text{const}$, was ebenso nöthig ist. Der Grund des Widerspruchs liegt in einem Fehler der gemachten Hypothese,†) bei der Grössen vernachlässigt sind, die freilich nur klein sind, aber von derselben Ordnung als die beibehaltenen ††)

---

*) Denn durch die Multiplication mit $Q = \xi(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)$ entstehen im Uebrigen nur Glieder, die in Bezug auf ξ, η oder ζ ungerade sind und daher bei der Integration fortfallen. D. H.

**) Nämlich:

$$\alpha^2 \frac{\partial N}{\partial x} + 2N\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial x} = 0. \qquad \text{D. H.}$$

***) Durch Multiplication mit ξ und Integration. D. H.

†) Wohl besser: der angestellten Rechnung. D. H.

††) Vgl. ferner Boltzmann, Wiener Sitzungsberichte:
vom 10. October 1872. (*66*, p. 213),
„ 14. „ 1875. (*72*, p. 427),
„ 15. Januar 1880. (*81*, p. 117),
„ 17. Juni 1881. (*84*, p. 40),
„ 15. December 1881. (*84*, p. 1230).