VORLESUNGEN

ÜBER

THEORIE DER TURBINEN.

MIT VORBEREITENDEN UNTERSUCHUNGEN

AUS DER

TECHNISCHEN HYDRAULIK

VON

DR. GUSTAV ZEUNER,

KÖNIGL. SÄCHS. GEHEIMER RATH UND PROFESSOR A. D.

MIT 90 IN DEN TEXT GEDRUCKTEN HOLZSCHNITTEN.

LEIPZIG

VERLAG VON ARTHUR FELIX

1899.

VORWORT.

Das vorliegende Buch umfasst, wie der Titel zum Ausdruck bringen soll, den Hauptinhalt der Vorträge, welche ich in langjähriger Lehrthätigkeit, zuerst am eidgenössischen Polytechnikum in Zürich und später an der Technischen Hochschule in Dresden gehalten habe. Natürlich handelt es sich dabei nicht um die Wiedergabe von alten Collegienheften, sondern um eine vollständige Umarbeitung des gesammten Stoffes unter Beachtung der bis in die neueste Zeit reichenden Fortschritte.

Als Schüler Weisbach's wurde ich sehr früh dem Studium der Turbinen zugeführt und habe dann jederzeit aus den weiten Gebieten der technischen Mechanik und theoretischen Maschinenlehre, denen meine Lehrthätigkeit galt, mit besonderer Vorliebe die hydraulischen Motoren und die denselben zu Grunde liegenden Theile der technischen Hydraulik vorgetragen, angeregt durch die grossen Schwierigkeiten, die uns bei der Anwendung der Hydraulik auf technische Fragen bei jedem Schritte entgegentreten und die zum Theil auch heute noch nicht in befriedigender Weise überwunden werden können. In dem Buche werden dem Leser solche Stellen wiederholt von selbst vor Augen treten.

Wie ich es vom pädagogischen Standpunkte aus von Anfang an für nützlich erachtete, vor der eigentlichen Turbinentheorie die entsprechenden hydraulischen Grundlagen, in gewissem Sinne abgerundet, vorzutragen, so ist auch in diesem Buche im ersten Theile ein Abriss der technischen Hydraulik vorausgeschickt worden.

Derselbe behandelt zunächst die strömende Bewegung der Flüssigkeiten in kanalartigen Gefässen mit Anwendungen auf die Theorie der Strahlapparate, dann aber mit ganz besonderer Ausführlichkeit die Theorie der Reaction der Flüssigkeiten in ruhenden und bewegten Gefässen.

Die zuletzt genannten Untersuchungen habe ich in der vorgeführten Art schon sehr früh in meinen Vorlesungen gegeben; die Behandlungsweise weicht vollständig von derjenigen ab, wie sie sonst und vorher von Anderen veröffentlicht worden ist; sie dürfte, was für Lehrvorträge von Wichtigkeit ist, wegen ihrer Einfachheit beachtenswerth erscheinen. Dabei ist zugleich in neuer Art der allgemeine Fall der Betrachtung unterzogen worden, dass das Wasser nicht stossfrei, sondern unter plötzlicher Aenderung der Richtung und Geschwindigkeit in das Gefäss eintritt; ein Fall, wie er vorliegt, wenn eine Turbine mit beliebiger Geschwindigkeit umläuft.

Als neu und eigenartig dürften auch die Untersuchungen über die relative und absolute Bahn der Wasserstrahlen in bewegten Gefässen anzusehen sein.

Der zweite Theil behandelt dann die eigentliche Theorie der Turbinen und ihrer Umkehrungen, der Pumpen und Ventilatoren.

Durch die vorbereitenden Studien des ersten Theiles wurde es ermöglicht, die Darlegungen übersichtlich zu gestalten, ohne dieselben durch Zwischenuntersuchungen unterbrechen zu müssen.

Hier wurde möglichste Vollständigkeit angestrebt, nicht durch Aufführung aller je in Vorschlag gekommenen Turbinenanordnungen, sondern durch gleichzeitige Behandlung weiterer, mit dem Turbinenfache zusammenhängenden Aufgaben, die vielleicht noch einer gründlicheren Bearbeitung von Anderen entgegensehen; dass hierbei auch die Dampfturbinen besondere Beachtung finden mussten, ist selbstverständlich.

Das Erscheinen eines Buches über Theorie und Neuberechnung der Turbinen, welches das ganze Gebiet möglichst vollständig umfasst, ist wohl nicht unzeitgemäss.

Denn die ausserordentlichen Fortschritte der Elektrotechnik haben dazu geführt, die vorhandenen Wasserkräfte immer mehr und sorgfältiger auszunutzen; von allen hydraulischen Kraftmaschinen sind es aber gerade die Turbinen, denen hierbei aus naheliegenden Gründen ein ganz besonderer Vorzug eingeräumt werden muss.

Der Bau der Turbinen hat daher in den letzten Jahren einen neuen Aufschwung genommen; es sind grossartige Anlagen entstanden, bei denen, wie es der elektrische Betrieb erfordert, vor Allem die Frage der Regulirung des Ganges der Turbinen in constructiver Beziehung der Lösung zugeführt worden ist.

Nach wie vor wird man aber neben den constructiven Gesichtspunkten bei der Berechnung der Turbinen immer streng die Forderungen der theoretischen Maschinenlehre im Auge behalten müssen.

Dresden, Juni 1899.

Dr. Gustav Zeuner.

Inhaltsverzeichniss.

Erster Theil.

Technische Hydraulik.

Vorbereitende Untersuchungen.

Zweiter Theil.

Theorie der Turbinen,

Turbinenpumpen und Ventilatoren.

Erster Abschnitt.

Von den Axialturbinen.

Kapitel I.

Die Axialturbine als Kraftmaschine.

A. Axialvollturbine.

Henschel-Jonval-Turbine.

B. Axialpartialturbine.

Girard-Turbine.

Kapitel II.

Die Axialturbine als Pumpe.

Kapitel III.

Die Axialturbine als Ventilator.

Kapitel IV.

Die Axialturbine als Propeller.

Kapitel V.

Die Axial-Dampfturbine von de Laval.

Zweiter Abschnitt.

Von den Radialturbinen.

Kapitel I.

Die Radialturbine als Kraftmaschine.

A. Radial-Vollturbine.

Fourneyron-Turbine — Francis-Turbine.

B. Radial-Partialturbine.

Schwamkrug-Turbine. — Zuppinger-Turbine.

Kapitel II.

Die Radialturbine als Pumpe.

Von den Centrifugalpumpen.

Erster Theil.

Technische Hydraulik.

Vorbereitende Untersuchungen.

Einleitung.

Der Druck, welchen die Theilchen einer Flüssigkeit, sei dieselbe tropfbarflüssig oder luftförmig, im ruhenden oder bewegten Zustande an irgend einem Punkte auf einander oder auf die Gefässwände ausüben, soll im Folgenden auf zweierlei Weise gemessen werden; entweder wird der Druck in Gewichtseinheiten (Kilogrammen) auf die Flächeneinheit (ein Quadratmeter) bezogen, in diesem Falle mit p bezeichnet und der »specifische Druck« an der betreffenden Stelle genannt, oder es wird als Maass des Druckes die Höhe einer Flüssigkeitssäule angegeben, die in ihrer ganzen Ausdehnung ein specifisches Gewicht hat, das dem gleich ist, welches die Flüssigkeit an der betreffenden Druckstelle besitzt.

Bezeichnet γ das »specifische Gewicht« der Flüssigkeit (Gewicht von einem Cubikmeter in Kilogrammen) an dem Orte der Druckmessung, so ist unter der erwähnten Voraussetzung das Gewicht G einer Flüssigkeitssäule von der Basis F und der Höhe von a Metern

$$G = Fa\gamma.$$

Für $F = 1$ qm wird G mit p identisch, also $p = a\gamma$; ist dagegen $G = 1$ kg, so repräsentirt Fa das Volumen der Gewichtseinheit Flüssigkeit, welches in der Folge mit v bezeichnet und das »specifische Volumen« der Flüssigkeit genannt werden soll; daher gilt die Beziehung $v\gamma = 1$ und hiernach

$$a = \frac{p}{\gamma} = pv. \tag{1}$$

Bei tropfbarflüssigen Körpern, die wir bei den gewöhnlich vorkommenden Pressungen als unzusammendrückbar ansehen können, ist das specifische Gewicht γ und daher auch das specifische Volumen v als eine constante Grösse zu betrachten. Bei Wasser beträgt das Gewicht von einem Cubikmeter $\gamma = 1000$ kg, bei Quecksilber dagegen, welches 13,596 Mal so schwer wie Wasser ist, ist $\gamma = 13596$ zu setzen. Am Meeresspiegel beträgt der mittlere Barometerstand $a = 0,760$ m Quecksilbersäule, daher folgt nach Gleichung (1) der entsprechende »specifische Druck der Luft« daselbst

$$p = 0,760 \,.\, 13596 = 10333 \text{ kg},$$

und diesem Drucke entspricht eine Wassersäule von $a = 10,333$ m.

Der hier berechnete Werth wurde früher allgemein — und bei physikalischen Untersuchungen geschieht es noch — als Einheit eines anderen Druckmaasses benutzt, indem man den n-fachen Werth als Druck von n Atmosphären bezeichnete.

In neuerer Zeit ist es, entsprechend gewissen gesetzlichen Vorschriften, Gebrauch geworden, bei technischen Untersuchungen den specifischen Druck $p = 10000$ kg pro Quadratmeter oder von 1 kg pro Quadratcentimeter als Einheit zu nehmen und diesen Werth als eine Atmosphäre Druck zu bezeichnen. Nach Gleichung (1) entspricht diesem Drucke eine Wassersäule von 10 m oder eine Quecksilbersäule von 0,7355 m Höhe.

In der Technik bezeichnet man den Druck im vorstehenden Sinne genommen als »absoluten Druck« und unterscheidet davon den »Ueberdruck«, welch letzterer dadurch bestimmt wird, dass man von dem in einem Gefässe vorliegenden Druck den äusseren Atmosphärendruck in Abzug bringt. Die gewöhnlichen, jetzt allgemein, wenigstens in Deutschland, gebräuchlichen Druckmesser (Manometer) lassen unmittelbar den Ueberdruck (in Kilogrammen pro Quadratcentimeter) ablesen; da man nun bei allen Versuchsberechnungen den absoluten Druck zu Grunde zu legen hat, so hat man vorerst zu der Manometerangabe den äusseren Atmosphärendruck zu addiren und diesen bei genaueren wissenschaftlich-technischen Beobachtungen durch gleichzeitige Barometerbeobachtung zu ermitteln.

Bei tropfbarflüssigen Körpern ist, wie erwähnt, das specifische Volumen v als constante Grösse anzusehen; bei Dämpfen und Luftarten ist dagegen v veränderlich und zwar tritt es bei gesättigten Dämpfen als eine Function des Druckes p auf und bei den Luftarten (überhitzten oder ungesättigten Dämpfen) als eine Function des Druckes **und** der Temperatur.

Bei hoch überhitzten Dämpfen, d. h. Dämpfen, die weit von ihrem Condensationspunkte abliegen — und dazu rechnet man alle Luftarten, die früher als »permanente Gase« bezeichnet wurden und als deren wichtigster Repräsentant die **atmosphärische Luft** anzusehen ist — gilt für die Beziehung zwischen Druck, Volumen und Temperatur das Mariotte- und Gay-Lussac'sche Gesetz.

Dieses Gesetz lässt sich in der einfachsten Form durch die Gleichung:

$$pv = \frac{p}{\gamma} = BT \tag{2}$$

darstellen. Hierbei bedeutet T die sogenannte »**absolute Temperatur**«, welche zu der nach Celsius gemessenen Temperatur t, in der Beziehung

$$T = 273 + t$$

steht. Der Factor B ist eine Constante, die für jede Luftart einen bestimmten und bekannten Werth hat. Nach **Regnault's** Versuchen ist z. B. für atmosphärische trockene reine Luft (für Paris) $B = 29{,}269$.

Bei technischen Untersuchungen, wie bei der Betrachtung der Gebläse und Ventilatoren hat man es mit gewöhnlicher atmosphärischer Luft zu thun, die fast immer eine gewisse Menge Wasserdampf in sich schliesst; man rechnet hier gewöhnlich mit einer mittleren Temperatur von $t = 15^\circ$ C. und setzt einen mittleren Flüssigkeitsgehalt von 60 Procent voraus, d. h. man nimmt an, dass diese Luft dem Gewichte nach 0,6 derjenigen Wassermenge enthält, die ihr inne wohnen würde, wenn der Wasserdampf bei 15° Temperatur gerade gesättigt wäre. Für solche Luft wird in der Folge, als hinreichend genau, der entsprechenden Berechnung gemäss $B = 29{,}375$ und damit nach Gleichung (2)

$$pv = 8460$$

angenommen. Dieser Werth entspricht also der Höhe einer Luftsäule, in Metern gemessen, welche bei durchgängig gleichem specifischem Volumen den Druck p auf die Basis ausübt. Für den mittleren atmosphärischen Druck $p = 10333$ kg folgt hiernach das mittlere specifische Volumen $v = 0,8187$ cbm und das specifische Gewicht $\gamma = 1,2214$ kg. Da diesem Drucke eine Wassersäule von 10,333 m entspricht, so ist die entsprechende Luftsäule 818,7 mal so hoch.

In Fällen, wo der Luftdruck nur wenig vom mittleren atmosphärischen Druck abweicht, wie das bei Gebläsen und Ventilatoren vorliegt, kann man das specifische Volumen der Luft als constant ansehen und die Formeln, welche für die Bewegung des Wassers abgeleitet werden, sofort auf die Bewegung der Luft übertragen.

§ 1. Strömende Bewegung der Flüssigkeiten in Gefässen.

Die Gleichgewichts- und Bewegungsverhältnisse der Flüssigkeiten sind in erster Linie abhängig von den äusseren Kräften, welche auf die Flüssigkeitstheilchen einwirken; bei allen folgenden Untersuchungen wird ausschliesslich nur die Wirkung der Schwerkraft vorausgesetzt; aber selbst unter dieser vereinfachenden Voraussetzung muss man bei der Ableitung der hydrodynamischen Grundgleichungen von Annahmen ausgehen, die der Wirklichkeit nicht entsprechen und hat daher von vornherein Abweichungen der Rechnungsergebnisse von den wirklichen Beobachtungsresultaten zu erwarten, die unter Umständen auch in der That sehr beträchtliche sind. Es ist daher unerlässlich, in der technischen Hydraulik in allen Fällen der Anwendung auf die Correctionen hinzuweisen, die auf Grund der zahlreich vorliegenden hydraulischen Versuche an den hydrodynamischen Gleichungen vorgenommen werden müssen, um eine Uebereinstimmung der Rechnungsergebnisse mit der Wirklichkeit herbeizuführen.

Die Ableitung der Grundgleichungen der Hydrodynamik geht von folgenden einschränkenden Annahmen aus.

Vor Allem setzt man vollkommene Beweglichkeit der Flüssigkeitstheilchen voraus, man nimmt also an, dass zur gegenseitigen Verschiebung der Theilchen unter sich keinerlei Kräfte erforderlich seien, vernachlässigt mit anderen Worten die innere Reibung, wie man zunächst auch die äussere Reibung, d. h. Widerstände ausser Acht lässt, welche die Flüssigkeitstheilchen beim Hinströmen an den Gefässwandungen zu überwinden haben.

Ferner setzt man die Continuität der Flüssigkeit voraus, dass nämlich bei tropfbaren Flüssigkeiten keine Trennung der Flüssigkeitstheilchen unter sich, kein Hervortreten leerer Räume erfolgt, mit anderen Worten, man nimmt an, dass der gegenseitige Druck der Theilchen auf einander allezeit und überall im Innern der Flüssigkeit positiv ist.

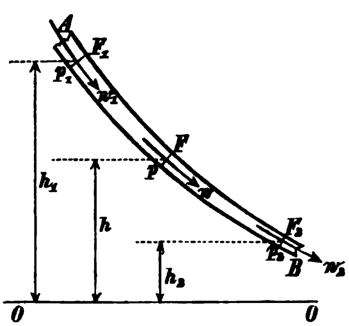
Weitere Einschränkungen gehen aus den folgenden Bemerkungen hervor.

Um dabei alle in vorliegender Schrift vorkommenden Fälle zu umschliessen, möge angenommen werden, dass eine Flüssigkeit durch ein rohr- oder kanalartiges Gefäss AB (Fig. 1) hindurchströme und zwar unter dem Einfluss der Schwerkraft.

Um zugleich für gewisse folgende Specialfälle die Grundgleichungen zu gewinnen, sei zunächst vorausgesetzt, dass allgemein eine expansible Flüssigkeit vorliege, deren specifisches Volumen v veränderlich ist.

An einer gewissen Stelle, die um h_1 über einem beliebig gewählten Horizontalniveau OO liegt, sei F_1 der Gefässquerschnitt, p_1 der Druck daselbst, v_1 das specifische Volumen und w_1 die Geschwindigkeit, mit welcher die Flüssigkeit den Querschnitt durchströmt; die letztgenannten Grössen werden für alle Punkte des Querschnittes gleich gross vorausgesetzt, eine weitere Annahme, die genau nur für unendlich kleine Querschnitte gültig erscheint.

Fig. 1.



Im unteren Gefässquerschnitt F_2, der um h_2 über dem Niveau OO liegt, sei Druck, specifisches Volumen und Geschwindigkeit mit p_2, v_2 und w_2 bezeichnet.

Er fragt sich nun, welche Beziehungen zwischen den genannten Grössen stattfinden. Dabei beschränken wir uns auf den Fall, dass der Beharrungszustand vorliegt, d. h. dass durch den oberen Querschnitt dem Gewichte nach die gleiche Flüssigkeitsmenge zugeführt wird, die durch den unteren ab- oder weiterfliesst, und dass an jeder Stelle des Gefässes der Druck, das Volumen und die Geschwindigkeit unveränderlich, diese Grössen also unabhängig von der Zeit sind.

Ist M die Masse der Flüssigkeit, welche in der Secunde durch das Gefäss strömt, so nimmt dieselbe beim Uebergange vom Querschnitt F_1 zum Querschnitt F_2 die Arbeit

$$\frac{M(w_2^2 - w_1^2)}{2}$$

in sich auf; diese Arbeit rührt nun her zunächst von der Wirkung der Schwerkraft. Das Flüssigkeitsgewicht Mg (unter g die Acceleration des freien Falles $g = 9{,}81$ m verstanden) ist um die Höhe $h_1 - h_2$ herabgesunken, und diesem Herabsinken entspricht die Arbeit

$$Mg\,(h_1 - h_2)\,.$$

Nun hat aber überdies die Flüssigkeit im Querschnitte F_1, aut die Secunde bezogen, die Arbeit $F_1 p_1 w_1$ aufgenommen und im Querschnitte F_2 die Arbeit $F_2 p_2 w_2$ abgegeben.

Um das zu beweisen, braucht man sich nur in den beiden Querschnitten F_1 und F_2 Kolben eingesetzt zu denken; auf den oberen Kolben wirkt die oberhalb desselben befindliche Flüssigkeit mit dem Drucke $F_1 p_1$ und da der Kolben in der Secunde um den Weg w_1 vorwärts rückt, so ist die auf den Flüssigkeitskörper $F_1 F_2$ übertragene Arbeit $F_1 p_1 w_1$, auf die Secunde bezogen, wie behauptet wurde.

Ebenso giebt der Flüssigkeitskörper in der gleichen Zeit durch den unteren Kolben F_2 an die darunter befindliche Flüssigkeit die Arbeit $F_2 p_2 w_2$ ab.

Ausser den genannten Arbeitsquantitäten ist aber endlich noch diejenige Arbeit in Betracht zu ziehen, welche auf dem Wege $F_1 F_2$ durch die Volumenveränderung frei wird, wenn die Flüssigkeit allgemein als expansibel angesehen wird.

Ist v das Volumen der Gewichtseinheit Flüssigkeit, die unter dem Drucke p steht und wächst das Volumen um dv, so wird die Arbeit pdv von der Flüssigkeit an dieser Stelle abgegeben; im vorliegenden Falle geht in der Secunde das Flüssigkeitsgewicht Mg aus dem specifischen Volumen v_1 in das Volumen v_2 über; man hat daher die durch Expansion frei werdende Arbeit

$$Mg\int_{v_1}^{v_2} p\,dv$$

und müsste zur Ermittelung dieses Arbeitswerthes demnach wissen wie auf dem Wege von F_1 nach F_2 der Druck p mit dem Volumen v sich ändert.

Für die im Vorstehenden untergelegten Annahmen, dass sich der Bewegung der Flüssigkeit keinerlei Widerstände entgegenstellen und dass sich die Kanal- oder Gefässdurchschnitte continuirlich und ganz allmählich, im Uebrigen aber nach beliebigem Gesetze ändern, ergiebt sich unter entsprechender Benutzung der angegebenen einzelnen Arbeitsquantitäten die Grundgleichung:

$$\frac{M(w_2^2 - w_1^2)}{2} = Mg(h_1 - h_2) + F_1 p_1 w_1 - F_2 p_2 w_2 + Mg\int_{v_1}^{v_2} p\,dv\,.$$

Nun ist aber das Volumen der Flüssigkeit, welches in der Secunde durch den ersten Querschnitt F_1 hindurchgeht,

$$Mgv_1 = F_1 w_1$$

und ebenso das Flüssigkeitsvolumen im zweiten Querschnitte F_2

$$Mgv_2 = F_2 w_2\,,$$

wobei allerdings noch ausdrücklich die Annahme gemacht wird, dass beim Strömen der Flüssigkeit durch einen Gefässquerschnitt Parallelismus der Wasserfäden vorliege.

Die Benutzung der letzten beiden Ausdrücke in der vorstehenden Grundgleichung ergiebt nun

$$\frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} = h_1 - h_2 + p_1 v_1 - p_2 v_2 + \int_{v_1}^{v_2} p\,dv\,, \qquad (3)$$

welche Gleichung sich auch in folgender Form schreiben lässt:

$$\frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} = h_1 - h_2 + \int_{p_2}^{p_1} v\,dp\,. \qquad (4)$$

Man erkennt aus diesen Gleichungen, dass die vorgelegte Aufgabe eine unbestimmte ist, sobald man es mit einer expansiblen Flüssigkeit zu thun hat, denn die Ermittelung des Werthes des hier auftretenden Integrales erfordert noch die Kenntniss des Gesetzes, nach welchem sich der Druck der strömenden Flüssigkeit auf ihrem ganzen Wege mit dem Volumen ändert und diese Druckänderung ist davon abhängig, ob der Flüssigkeit während ihrer Bewegung Wärme zugeführt oder entzogen wird und in welcher Art und Weise die Zu- oder Ableitung von Wärme erfolgt.

Man tritt demnach mit der vorgelegten Frage, sobald man sie in allgemeinerer Art zu lösen beabsichtigt, in das Gebiet der mechanischen Wärmetheorie*).

Das in Gleichung (4) auftretende Integral schreibt sich auch, wenn man unter p_0 einen ganz beliebigen Werth eines specifischen Druckes versteht:

$$\int_{p_2}^{p_1} v\,dp = \int_{p_0}^{p_1} v\,dp - \int_{p_0}^{p_2} v\,dp$$

und damit folgt aus Gleichung (4), wenn man die Glieder mit gleichem Index auf je eine Seite der Gleichung setzt:

$$\frac{w_2^2}{2g} + h_2 + \int_{p_0}^{p_2} v\,dp = \frac{w_1^2}{2g} + h_1 + \int_{p_0}^{p_1} v\,dp\,. \qquad (5)$$

Die Grössen auf der linken Seite beziehen sich auf den unteren Querschnitt F_2 (Fig. 1), die der rechten Seite auf den oberen Querschnitt F_1; die Summe der drei Glieder ist also in beiden Querschnitten gleich gross; bezeichnet man die Summe mit E und führt man für einen beliebigen Querschnitt F, der um h über dem angenommenen Niveau OO liegt, die Bezeichnungen w, v und p

---

*) Auf den Zusammenhang der hydrodynamischen Gleichungen mit den Formeln der Thermodynamik habe ich zuerst hingewiesen in meiner Schrift »Das Locomotivenblasrohr«, Zürich 1863, und dort für Gase und Dämpfe unter verschiedenen Voraussetzungen die Ausflussgeschwindigkeit bei Gefässmündungen bestimmt. Ausführlich bin ich in dem Buche »Technische Thermodynamik«, Leipzig 1887—1890, Band I, S. 212 f. und Band II, S. 137 auf die Frage eingegangen.

Da es in der Thermodynamik von Anfang an in Gebrauch kam, zur Bezeichnung des specifischen Volumens eines Körpers den Buchstaben v zu benutzen, es aber andererseits in der Physik und Mechanik üblich war, den gleichen Buchstaben als Bezeichnung der »Geschwindigkeit« anzuwenden, so musste bei der Verbindung der hydrodynamischen Gleichungen mit solchen der mechanischen Wärmetheorie, um Verwechselungen zu vermeiden, eine Aenderung in der Bezeichnung getroffen werden. Ich benutze daher in der vorliegenden Schrift, wie auch schon in meinen früheren Arbeiten, als Bezeichnung für die Geschwindigkeit im Allgemeinen den Buchstaben w, dagegen den Buchstaben v ausschliesslich für das specifische Volumen eines Körpers.

für Geschwindigkeit, Volumen und Druck ein, so ist allgemein für den vorliegenden Fall:

$$\frac{w^2}{2g} + h + \int_{p_0}^{p} v\,dp = E, \tag{6}$$

wobei also E eine Constante ist, die für alle zwischen F_1 und F_2 liegenden Querschnitte denselben Werth hat.

Geht man zur Differentialform über, so folgt auch

$$d\left(\frac{w^2}{2g}\right) + dh + v\,dp = 0, \tag{7}$$

in welcher Form die Gleichung später Benutzung finden wird. Die drei Glieder der linken Seite der Gleichung (6) bedeuten Längen oder Höhen und den Werth $\frac{w^2}{2g}$ bezeichnet man speciell als »Geschwindigkeitshöhe«. Die Gleichung gilt für die Gewichtseinheit; denkt man sich daher alle Grössen von Gleichung (6) mit 1 kg multiplicirt, so treten dieselben als »Arbeitsquantitäten« hervor. Der Werth E kann daher als die Arbeit angesehen werden, welche der Gewichtseinheit Flüssigkeit in dem betreffenden Querschnitte innewohnt; man bezeichnet sie als Gesammtenergie oder als Energie der Gewichtseinheit kurzweg und kann daher aussprechen, dass die Energie der Gewichtseinheit einer Flüssigkeit in allen Querschnitten dieselbe, also unveränderlich ist.

Sie besteht aber nach Gleichung (6) aus den Summen von drei veränderlichen Werthen.

Die Grösse $\frac{w^2}{2g}$ bezeichnet man als kinetische Energie und, wie sie in der Folge genannt werden soll, als »Strömungsenergie«. Die beiden anderen Glieder

$$h + \int_{p_0}^{p} v\,dp$$

nennt man die »potentielle Energie«; das Glied h hängt von der Lage des Querschnittes und der Werth des Integrales von dem augenblicklichen Zustande der Flüssigkeit, von v und p ab.

Die kinetische Energie lässt sich dem absoluten Werthe nach bestimmen, sobald die Geschwindigkeit w bekannt ist; die potentielle

Energie dagegen enthält, selbst wenn das Integral durch Angabe der Beziehung zwischen v und p ermittelt werden kann, noch eine additive constante Grösse, da die Wahl der Lage der Horizontale OO in Fig. 1 und die des Druckes p_0 eine willkürliche ist. Demnach lässt sich auch die Gesammtenergie E nur bis auf eine unbestimmte Constante feststellen.

Diese Unbestimmtheiten kommen bei Lösung bestimmter Aufgaben in Wegfall, wenn man von der Gleichung in der Form (4) Gebrauch macht; im Uebrigen aber muss wiederholt werden, dass alle vorstehenden Betrachtungen zunächst von der Annahme ausgingen, dass sich der strömenden Flüssigkeit keine schädlichen Widerstände (Reibung u. s. w.) entgegenstellen, mit anderen Worten, dass keine Energieverluste auftreten.

Mit Rücksicht auf die im weiteren Verfolg dieser Schrift auftretenden Untersuchungen ist bei der Ableitung der vorstehenden Grundgleichungen angenommen worden, es liege allgemein eine expansible Flüssigkeit, Luft oder Dampf vor; der weitaus grösste Theil der nachfolgenden Betrachtungen bezieht sich aber auf tropfbare Flüssigkeiten, deren specifisches Volumen v als constant anzunehmen ist, oder auf luftförmige Körper bei geringen Druckdifferenzen, in welchem Falle das specifische Volumen näherungsweise ebenfalls als eine constante Grösse angesehen werden darf.

Unter dieser Voraussetzung fällt in Gleichung (3) das Integral fort, weil $dv = 0$ ist und man erhält als Grundgleichung:

$$\frac{w_1{}^2 - w_1{}^2}{2\,g} = h_1 - h_2 + p_1 v_1 - p_2 v_2 \tag{8}$$

und in dieser Form mag nun die Gleichung bis auf Weiteres durchgehends Verwendung finden. Setzt man hier $p_1 v_1 = a_1$ und $p_2 v_2 = a_2$, so folgt:

$$\frac{w_2{}^2}{2g} + h_2 + a_2 = \frac{w_1{}^2}{2g} + h_1 + a_1 \tag{9}$$

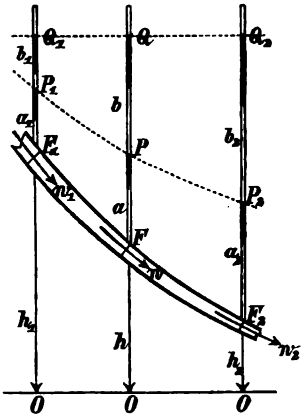
und allgemein für einen dazwischenliegenden Querschnitt F (Fig. 2)

$$\frac{w^2}{2g} + h + a = E \tag{10}$$

den Gleichungen (5) und (6) analog, nur treten hier an die Stelle der Integralausdrücke die Grössen a_1, a_2 und a, welche nach den bei Gleichung (1) S. 3 gemachten Angaben die Drücke an den entsprechenden Stellen, in Flüssigkeitssäulen gemessen, darstellen.

Die Flüssigkeitshöhen a_1, a und a_2 sollen im Folgenden die »Piezometerstände« in den Querschnitten F_1, F und F_2 heissen; denkt man sich nämlich ein oben geschlossenes, luftleeres Glasrohr derart vertical durch die Gefässwand gesteckt, dass das untere offene Ende an den Punkt im Innern kommt, an welchem man den Druck zu messen hat, so wird die tropfbare Flüssigkeit in das Rohr, in das Piezometer, eintreten und sich auf eine Höhe einstellen, die mit derjenigen a_1, a oder a_2 (Fig. 2) identisch ist, die wir oben als Maass für den Flüssigkeitsdruck eingeführt haben

Fig. 2.



Es ist zweckmässig, bei hydraulischen Untersuchungen luftleere geschlossene Piezometerröhren in Anwendung gebracht zu denken, wenn solche speciell für Wasser auch nicht verwendbar sind, da sich der luftleere, über der Wassersäule liegende Raum mit Dampf von bestimmtem, der äusseren atmosphärischen Temperatur entsprechendem Druck füllen würde. Ganz undenkbar ist natürlich bei Luft oder Dampf als strömende Flüssigkeit das Einstellen einer homogenen Luft- oder Dampfsäule von der Höhe a im Piezometer; nichtsdestoweniger kann man bei den der gestellten Aufgabe beigegebenen bildlichen Darstellungen, wie in Fig. 2 für Wasser, Luft oder Dampf die Piezometerstände als wirklich möglich einzeichnen, weil man sich dadurch den Einblick in den Zusammenhang aller einzelnen in Betracht fallenden Grössen sehr erleichtert.

So bezeichnen z. B. in Fig. 2 die Punkte P_1, P und P_2 die Spiegel in den einzelnen Piezometern und die durch dieselben gelegte Curve giebt das Gesetz der Druckänderungen auf dem Wege $F_1 F_2$ an. Bezeichnet man die einzelnen Geschwindigkeitshöhen mit b_1, b und b_2, setzt man also

$$b_1 = \frac{w_1^2}{2g}\,; \qquad b = \frac{w^2}{2g}\,; \quad -b_2 = \frac{w_2^2}{2g}$$

und trägt man diese Höhen in der Figur noch von den Piezometerspiegeln aus nach oben auf, so gelangt man zu den Punkten Q_1, Q und Q_2, und diese liegen nun nach den Gleichungen (9) und (10) in einer horizontalen Linie. Die ganze Höhe OQ repräsentirt nach Gleichung (10), an Arbeitsquantität gedacht, die Energie E, welche demnach auf dem ganzen Wege $F_1 F_2$ constant erscheint, da zunächst von Energieverlusten (Widerständen) abgesehen wurde. Man hat damit zugleich ein Bild vor sich, wie die Energie sich hinsichtlich ihrer Einzelenergien, der Strömungsenergie (PQ) und der potentiellen Energie (OP) in den einzelnen Querschnitten verhält.

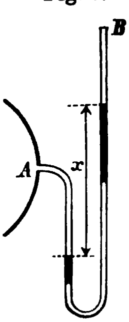
Ist das Gefäss auf seiner ganzen Längenerstreckung prismatisch, also $F_1 = F = F_2$, so strömt die Flüssigkeit durch alle Querschnitte mit derselben Geschwindigkeit, daher folgt auch $b_1 = b = b_2$ und die Curve $P_1 P P_2$ (Fig. 2) geht gleichfalls in eine horizontale Gerade über.

Liegen auf dem Wege $F_1 F_2$ Widerstände, also Energieverluste vor, so verwandelt sich die Gerade $Q_1 Q Q_2$ in eine nach der Bewegungsrichtung hin abfallende Curve. Dieser allgemeine Fall wird in der Folge weiterer Untersuchung zu unterwerfen sein.

Sind die Piezometerröhren (bei flüssigen Körpern) oben offen, so stellt sich in denselben die Wassersäule in einer Höhe ein, die um die atmosphärische Pressung, in Wassersäulen gemessen, kleiner erscheint.

Sollen in praktischen Fällen die Piezometerstände durch Beobachtung ermittelt werden, so verwendet man bei Luft und Dampf, sowie bei flüssigen Körpern, wenn hier grössere Drücke vorliegen, Manometer, wenn der Druck grösser als der atmosphärische ist, dagegen wendet man die Vacuummeter an, wenn er kleiner als der Atmosphärendruck ist.

Fig. 3.



Die Druckmesser, welche den Druck direct in Flüssigkeitssäulen ablesen lassen, bestehen gewöhnlich aus einer heberartig gebogenen Glasröhre (Fig. 3), deren eines Ende A an derjenigen Stelle durch die Gefässwandung eingeführt ist, an welcher der Druck zu bestimmen ist, während das andere Ende B in die freie Atmosphäre mündet. Der untere Theil beider Schenkel ist bei Luftdruckmessungen gewöhnlich mit Wasser bis zu einer gewissen Höhe gefüllt, dagegen mit Quecksilber bei Dampf- oder Wasserdruckmessungen. Ist der zu messende Druck grösser als der atmosphärische, so steht der Spiegel im äusseren Schenkel um x höher, als im inneren (Manometer), während das Umgekehrte vorliegt, wenn der zu messende Druck unter dem Atmosphärendrucke liegt (Vacuummeter).

Der Verticalabstand x beider Spiegel bestimmt den »Ueberdruck« in Flüssigkeitssäule der Rohrfüllung, die dann nach den Angaben auf S. 4 leicht in Wasser-, Luft- oder Dampfsäule umzurechnen ist, wobei in naheliegender Weise zur Bestimmung des »absoluten Druckes« noch der gleichzeitig vorliegende Atmosphärendruck in Anrechnung gebracht werden muss.

§ 2. Druckverhältnisse bei stetig veränderlichem Querschnitt.

Die Gleichungen (9) und (10) kommen bei den einfacheren Aufgaben der Hydraulik in Anwendung. Aus Gleichung (9) findet sich

$$\frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} = (a_1 + h_1) - (a_2 + h_2)$$

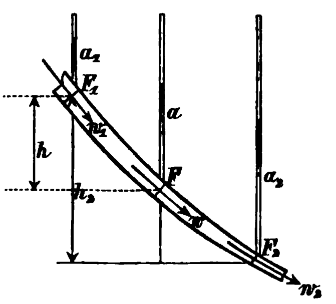
und aus der Verbindung mit Gleichung (10)

$$\frac{w_2^2 - w^2}{2g} = (a + h) - (a_2 + h_2),$$

wobei Fig. 2 zu Grunde gelegt wurde.

Da die Wahl der Horizontalen OO ganz willkürlich ist, so kann man sie, weil dadurch besserer Ueberblick erreicht wird, auch durch den oberen Querschnitt F_1 hindurch legen; dann ist $h_1 = 0$ und die Höhen h und h_2 sind von oben nach unten zu rechnen, also in vorstehenden Gleichungen mit negativem Vorzeichen einzusetzen, man hat daher unter Zugrundelegung der nebenstehenden Figur 4:

Fig. 4.



$$\frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} = a_1 - a_2 + h_2, \tag{11}$$

$$\frac{w_2^2 - w^2}{2g} = a - a_2 + h_2 - h. \tag{12}$$

Nun schiebt sich durch den Querschnitt F_2 in der Secunde ein Wasserprisma von der Länge w_2 hindurch, es ist also die Wassermenge V

$$V = F_2 w_2$$

in der Secunde und da wegen des vorausgesetzten Beharrungszustandes durch jeden Querschnitt die gleiche Wassermenge strömt, so gelten auch die Gleichungen:

$$F_1 w_1 = F_2 w_2, \tag{13}$$

$$F w = F_2 w_2; \tag{14}$$

aus denen man ersieht, dass die Verhältnisse der Querschnitte eine besondere Rolle spielen. Setzt man:

$$\frac{F_2}{F_1} = \lambda, \tag{15}$$

$$\frac{F_2}{F} = m, \tag{16}$$

so folgt

$$w_1 = \lambda w_2, \tag{17}$$

$$w = m w_2 \tag{18}$$

und damit aus den Gleichungen (11) und (12):

$$(1 - \lambda^2)\frac{w_2^2}{2g} = a_1 - a_2 + h_2, \tag{19}$$

$$(1 - m^2)\frac{w_2^2}{2g} = a - a_2 + h_2 - h. \tag{20}$$

Die letzten vier Gleichungen sind es denn nun, welche zur Lösung einer grossen Anzahl von in der Technik vorkommenden Aufgaben führen. Gewöhnlich sind zunächst bekannt die Querschnitte F_2 und F_1 und damit λ, ferner a_1, a_2 und h_2; die Gleichung (19) giebt dann w_2 und damit die Wassermenge $V = F_2 w_2$.

Ist nun weiterhin für einen beliebigen, zwischenliegenden Querschnitt F der Werth h und nach Gleichung (16) auch m bekannt, so ermittelt sich aus Gleichung (20) der daselbst vorliegende Druck, oder der Piezometerstand a.

Die Verbindung der beiden Gleichungen (19) und (20) ergiebt durch Division und einfache Umformung:

$$a = a_2 - h_2 + h - \frac{(m^2 - 1)}{(1 - \lambda^2)}(a_1 - a_2 + h_2). \tag{21}$$

Dieser Druck muss nun aber unter allen Umständen, in jedem Querschnitte F, also bei den zugehörigen Werthen von m und h positiv sein; man erhält daher als Bedingungsgleichung:

$$(m^2 - 1) < \frac{(a_2 - h_2 + h)(1 - \lambda^2)}{(a_1 - a_2 + h_2)} \tag{22}$$

oder wegen der Bedeutung von m nach Gleichung (16):

$$F > F_2 \sqrt{\frac{a_1 - a_2 + h_2}{a_1 - a_2 + h_2 + (a_2 - h_2 + h)(1 - \lambda^2)}}. \tag{23}$$

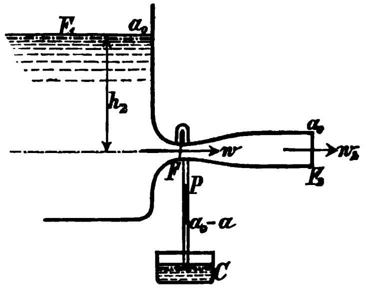
Würden diese beiden Ungleichungen auch nur in einem einzigen Querschnitte nicht erfüllt, so würden, eine tropfbare Flüssigkeit, also Wasser vorausgesetzt, an der betreffenden Stelle die Flüssigkeitstheilchen sich von einander trennen, ihr Zusammenhang würde aufhören und sich ein leerer Raum bilden. In solchem Falle hört die Gültigkeit der hydrodynamischen Formeln auf und die vorgelegte Aufgabe erscheint als unlösbar. Auf experimentellem Wege lässt sich dieser Fall sehr leicht vorführen, wie noch besprochen werden wird; das Wasser strömt dann unregelmässig und pulsirend durch das Gefäss.

Nach dem Vorstehenden scheint es, dass selbst die Lösung einfachster Aufgaben eine sehr umständliche sein müsse, weil man erst in jedem zwischen F_1 und F_2 liegenden Querschnitte prüfen müsste, ob Gleichung (23) erfüllt und der Druck a daselbst positiv ist; in Wirklichkeit gestaltet sich aber die Sache günstiger, da man oft ohne jede Rechnung schliessen kann, in welchem Schnitte F der Druck am kleinsten ist, also hier auch kleiner als Null erscheinen wird; gewöhnlich fällt dieser Querschnitt mit dem kleinsten der zwischen F_1 und F_2 liegenden Querschnitte zusammen. Die Betrachtung eines besonderen Falles wird den Gebrauch der vorstehenden Formeln hervortreten lassen.

Aus einem weiten Gefässe (Fig. 5) ströme Wasser durch ein Rohr FF_2 mit horizontal liegender Axe direct in die freie Atmosphäre, es sei also der Querschnitt F_2 der Ausflussquerschnitt und der Druck a_2 daselbst mit dem Atmosphärendrucke, der in der Folge jederzeit mit a_0 bezeichnet werden soll, identisch; in Wassersäule gemessen wäre also nach Früherem $a_0 = 10{,}333$ m.

Das Ansatzrohr soll sich, wie Fig. 5 darstellt, von der Gefässwand aus erst auf F verengen und dann von hier aus ganz allmählich auf den Mündungsquerschnitt F_2 erweitern, der übrigens als klein und als sehr klein gegenüber dem oberen Querschnitt, dem Gefässquerschnitt F_1 im Wasserspiegel vorausgesetzt wird. Auf dem Spiegel ruhe ebenfalls der Atmosphärendruck, es sei also auch $a_1 = a_0$. Da F_1 als sehr gross gegen F_2 vorausgesetzt wird, so lässt sich nach Gleichung (15) $\lambda = 0$ setzen; substituirt man diesen Werth und überdies $a_1 = a_2 = a_0$ in Gleichung (19) und setzt man die Tiefe der Ausströmungsöffnung unter dem Wasserspiegel h_2, so folgt:

Fig. 5.



$$\frac{w_2^2}{2g} = h_2 \quad \text{und damit} \quad w_2 = \sqrt{2gh_2}. \tag{24}$$

Die Ausflussgeschwindigkeit w_2 ist also nur von h_2 abhängig, sonst aber unabhängig von der Gefässform und der Formveränderung des Ansatzrohres, wenn nur alle Querschnitte continuirlich und ganz allmählich sich ändern. Da der Beharrungszustand, also die »Druckhöhe« h_2 als constant vorausgesetzt wird, so ist anzunehmen, dass dem Gefässe oben regelmässig so viel Wasser zugeführt wird, wie unten abströmt.

Die Wassermenge, welche in der Secunde zum Ausströmen gelangt, ist $V = F_2 w_2$.

Da die Rohraxe als horizontale Gerade vorausgesetzt wurde, so ist überdies noch für jeden Querschnitt des Rohres $h = h_2$ (Fig. 4) und daher hier nach den gemachten Annahmen nach Gleichung (21):

$$a = a_0 - (m^2 - 1) h_2 \tag{25}$$

und nach Gleichung (23) muss die Bedingung

$$F > F_2 \sqrt{\frac{h_2}{a_0 + h_2}} \tag{26}$$

erfüllt sein. Man erkennt aus der letzten Gleichung, dass die Gefahr der Trennung der Wassertheilchen zuerst im engsten

Querschnitt vorliegt, man hat daher sein Augenmerk sogleich auf diesen zu richten, wenn (bei horizontaler Gefässaxe) die Zulässigkeit der Behandlung der vorgelegten Aufgabe geprüft werden soll.

Ist $F_2 > F$, wie Fig. 5 voraussetzt, so ist nach Gleichung (16) $m > 1$ und daher folgt aus Gleichung (25) auch $a < a_0$, daher folgt der Druck im Querschnitt F kleiner als der atmosphärische Druck; würde man demnach das Rohr an dieser Stelle anbohren, so würde der Wasserstrahl Luft ansaugen, die dann in Form von Luftblasen und unter Störung des vollen Ausflusses im Querschnitte F_2 mit dem Wasser austritt.

Handelt es sich um wirkliche Beobachtung des Druckes a im Querschnitte F, so kann man, da ein luftleeres Piezometer nicht anwendbar ist, ein heberförmig gebogenes Glasrohr bei F durch die Rohrwand einführen und den verticalen Schenkel in ein Gefäss C unten eintauchen lassen (Fig. 5). Wegen des Ueberdruckes der äusseren Atmosphäre steigt dann das Wasser im Glasrohre auf eine Höhe

$$a_0 - a = (m^2 - 1) h_2,$$

die leicht messbar ist, und aus welcher a bestimmt werden kann, wenn der gleichzeitig stattfindende Barometerstand, in Wassersäule a_0 ausgedrückt, beobachtet wird. Das hier dargestellte Vacuummeter ist es, welches in der Technik mit Wasser- oder Quecksilberfüllung gewöhnlich angewendet wird.

Würde bei dem in Fig. 5 dargestellten Falle der Spiegel P im Vacuummeterrohre so hoch zu liegen kommen, dass er ins Innere des Ausflussrohres fällt, so tritt Saugen ein, der ausströmende Wasserstrahl entleert saugend das Gefäss C des Vacuummeters, ein Fall, wie er bei den sogenannten Wasserstrahlpumpen vorliegt und der noch nähere Betrachtung finden wird.

Aus Gleichung (25) ist übrigens ersichtlich, dass der Druck a Null oder negativ wird, die hydrodynamischen Gleichungen hier also ihre Gültigkeit verlieren, wenn

$$h_2 > \frac{a_0}{m^2 - 1}$$

ist.

Wären also z. B. die Querschnitte des Ansatzrohres kreisförmig und der Durchmesser d_2 der Ausflussöffnung nur doppelt so gross, wie der Durchmesser d des engsten Querschnittes F, so wäre $m = 4$ und $m^2 = 16$, sonach

$$h_2 > \tfrac{1}{15}\, a_0 \quad \text{oder} \quad h_2 > 0{,}689 \text{ m}.$$

Es müsste demnach bei dem in Fig. 5 dargestellten Falle der Spiegel im Ausflussgefäss um weniger als 0,689 m über der Ausflussöffnung liegen, wenn man überhaupt regelmässigen, durch Rechnung verfolgbaren Ausfluss haben wollte. Wenn auch durch Einführung der Widerstände die Rechnungsergebnisse etwas verändert werden, so ersieht man doch, wie leicht auf experimentellem Wege sich die besprochenen Druckerscheinungen vorführen lassen.

Würde das in Fig. 5 dargestellte Ansatzrohr durch eines ersetzt, welches sich auf dem ganzen Verlaufe nach der Ausströmungsöffnung zusammenzieht, so dass überall $F > F_2$ ausfällt, so wäre $m < 1$ und dann nach Gleichung (25):

$$a = a_0 + (1 - m^2)\, h_2,$$

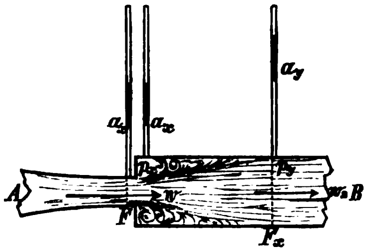
daher der Druck an allen Stellen grösser als der Atmosphärendruck a_0.

§ 3. Druckverhältnisse bei plötzlichen Querschnittsänderungen.

Von ganz besonderer technischer Wichtigkeit ist die Frage, welchen Einfluss plötzliche Erweiterungen der Gefässquerschnitte auf die Bewegungsverhältnisse der Flüssigkeit ausüben. Die hierbei stattfindenden Vorgänge sind von der Art, dass eine strenge Lösung der Aufgabe beim jetzigen Stande der Hydrodynamik ausgeschlossen erscheint, doch lässt sich, wie die Vergleiche der Rechnungsergebnisse mit den Beobachtungsresultaten zeigen, die Untersuchung mit hinreichender Genauigkeit auf dem folgenden Wege durchführen, der freilich zunächst nur für tropfbare Flüssigkeiten als zulässig angesehen werden kann, während er für expansible Flüssigkeiten nur unter Voraussetzung geringer Druckdifferenzen gilt, so lange nämlich das specifische Volumen als eine nahezu unveränderliche Grösse angesehen werden kann. Durch das Gefäss AB (Fig. 6) ströme im Beharrungszustande in der Secunde die Wassermasse M hindurch. Aus dem Rohre A strömt das Wasser durch den Querschnitt F in parallelen Fäden mit der Geschwindigkeit w, und nach dem Eintritt in das weitere Gefäss B geht der Strahlquerschnitt allmählich in den Querschnitt F_x des Gefässes B über; durch den Querschnitt F_x ströme das Wasser wieder in parallelen Fäden mit der Geschwindigkeit w_x hindurch und von da aus weiter.

Der Wasserstrahl zwischen F und F_x ist nun von wirbelnden Wassertheilchen umgeben (wie durch Beobachtungen festgestellt ist), der Druck rings um den Strahl sei p_x und dieser Druck herrscht auch in der Mündung F. Nun ist nach hydrostatischen Sätzen der Wasserdruck in einer vorgeschriebenen Richtung gleich dem Druck auf die Projection der krummen gedrückten Fläche auf eine Ebene, welche auf der Druckrichtung senkrecht steht.

Fig. 6.



Im vorliegenden Falle ist daher der in der Bewegungsrichtung wirkende Druck $F_x p_x$. Im Querschnitte F_x, in welchem der Strahl wieder vollständig an der Wand anliegt, sei der specifische Druck p_y, daher ist der Gegendruck im ganzen Querschnitte $F_x p_y$. Die beiden hier berechneten Drucke sind aber nicht gleich gross, weil hier noch der Druck in Betracht fällt, welchen die Wassermasse M in der Bewegungsrichtung beim Uebergange aus der grösseren Geschwindigkeit w in die kleinere w_x ausübt.

Dieser Druck bestimmt sich aber direct, wie folgt: Wirkt auf eine Masse M, welche die Geschwindigkeit w hat, die als Function der Zeit bekannt ist, eine Kraft P in der Bewegungsrichtung, so ist die Acceleration

$$\frac{dw}{dt} = \frac{P}{M}$$

und hieraus folgt, wenn in der Zeit t die Masse aus der Geschwindigkeit w in die Geschwindigkeit w_x übergehen soll,

$$\int_0^t P\,dt = M(w_x - w).$$

Ist nun die Kraft P constant und soll der Uebergang in der Zeiteinheit, also in der Secunde, erfolgen, so ist $t = 1$ und damit

$$P = M(w_x - w).$$

Ist hierbei $w > w_x$, so erscheint P negativ, d. h. die Kraft repräsentirt einen Widerstand und es bedeutet nun

$$-P = M(w - w_x)$$

den Druck, welchen die Masse in der Bewegungsrichtung auf den ihr vorausgehenden Körper ausübt, und dieser Fall liegt in der durch Fig. 6 dargestellten Aufgabe vor.

Hier folgt also nun der gesammte Druck in der Bewegungsrichtung $F_x p_x + M(w - w_x)$ und dieser Werth ist mit $F_x p_y$ unter den gemachten Annahmen identisch. Man erhält hiernach die Grundgleichung

$$F_x(p_y - p_x) = M(w - w_x).$$

Ist γ das specifische Gewicht der Flüssigkeit, so schreibt sich das Gewicht der Flüssigkeitsmenge, welche in der Secunde das Gefäss durchströmt,

$$F_x w_x \gamma = Mg$$

und damit giebt die vorhergehende Gleichung

$$\frac{p_y - p_x}{\gamma} = \frac{(w - w_x)\, w_x}{g}.$$

Nach Früherem ist aber die linke Seite die Druckdifferenz in Flüssigkeitssäule, also nach Fig. 6 die Differenz der Piezometerstände und damit folgt endlich

$$a_y - a_x = \frac{(w - w_x)\, w_x}{g}. \tag{27}$$

Diese Gleichung schreibt sich auch, wenn man auf der rechten Seite $\frac{w^2}{2g}$ addirt und subtrahirt, nach einfacher Umformung

$$a_y - a_x = \frac{w^2 - w_x^2}{2g} - \frac{(w - w_x)^2}{2g} \tag{28}$$

oder auch

$$a_y + \frac{w_x^2}{2g} = a_x + \frac{w^2}{2g} - \frac{(w - w_x)^2}{2g}. \tag{29}$$

Würde nun statt einer plötzlichen Erweiterung, wie in Fig. 6, eine allmähliche Erweiterung vorliegen, wie in Fig. 7, so besteht nach Gleichung (9) S. 12 die Beziehung

$$a_y + \frac{w_x^2}{2g} = a_x + \frac{w^2}{2g}, \tag{30}$$

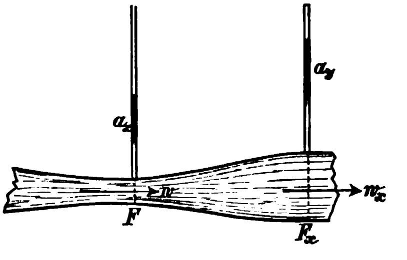
weil hier beide Querschnitte im gleichen Niveau liegen. Diese

Gleichung drückt aus, dass die Energie in beiden Schnitten die gleiche ist und zeigt im Vergleiche mit Gleichung (29), dass bei der plötzlichen Querschnittsänderung die Druckanschwellung $a_y - a_x$ eine geringere und zwar um

$$h' = \frac{(w - w_x)^2}{2g} \tag{31}$$

kleiner ist; es liegt demnach hier ein Arbeits- oder Energieverlust, oder wie man in der Hydraulik gewöhnlich sagt, ein Druckhöhenverlust vor, der durch den Werth h' gemessen wird.

Fig. 7.



Der Ausdruck (31), in welchem $(w - w_x)$ einfach den Geschwindigkeitsverlust darstellt, ist zuerst von Borda gegeben worden, doch bezeichnet man ihn gewöhnlich als die Carnot'sche Formel.

Der besprochene Arbeitsverlust zeigt sich bei Versuchen in Glasröhren durch Wirbelbewegung, durch sichtbare Bewegung der kleinsten Theile an, die allmählich bei der weiteren Fortbewegung des Strahles verschwindet und sich in Molekularbewegung, d. h. in Wärme umsetzt.

Neben dem Umstande, dass die gewonnenen Sätze nur als Annäherungen angesehen werden können, ist bei dem in Fig. 6 dargestellten Falle noch hervorzuheben, dass eine Unsicherheit insofern vorliegt, als die Lage des Querschnittes F_x (Fig. 6), in welchem sich der Strahl vollständig wieder an die Gefässwand angelegt hat, sich nur errathen, also nicht bestimmen lässt; wollte man daher den Piezometerstand a_y wirklich beobachten, so könnte man im Zweifel sein, an welcher Stelle und in welcher Entfernung, vom Querschnitte F ab gerechnet, man das Piezometerrohr in das Rohr einführen müsste. In den gewöhnlichen Fällen der Technik interessirt übrigens nur der Piezometerstand a_x; die Einführung und Benutzung des Standes a_y wird in der Folge auch nur zur leichteren und bequemeren Darlegung bei der Aufstellung der den verschiedenen Problemen entsprechenden Grundgleichungen eingeführt.

Bezüglich des anderen, schon oben allgemeiner behandelten und in Fig. 7 dargestellten Falles ist ferner ausdrücklich zu bemerken, dass die abgeleiteten Formeln nur gültig sind, wenn der Wasserstrahl beim Durchgange durch die allmähliche Erweiterung sich durchgängig dicht ringsum an die Gefässwand anlegt.

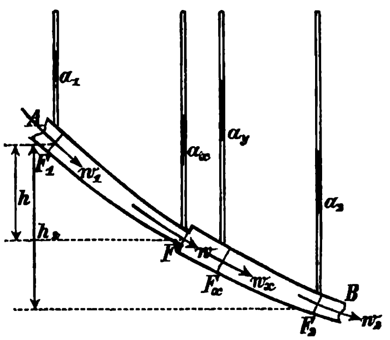
Würde ein Ablösen des Strahles eintreten, was zu befürchten ist, wenn die Erweiterung zu rasch erfolgt, so werden die Formeln unbrauchbar, da in diesem Falle in ähnlicher Weise, wie bei plötzlicher Erweiterung, ein Energieverlust auftreten kann, der sich freilich der Berechnung vollständig entzieht.

In technischen Fällen wird man daher Uebergänge von engeren nach weiteren Quersehnitten möglichst vermeiden, und wenn sie erforderlich sind, die allmähliche Erweiterung auf eine möglichst lange Strecke vertheilen.

Es mögen nun die vorstehenden Untersuchungen bei der Behandlung eines allgemeineren Falles, der eine Reihe specieller, technischer Fälle in sich schliesst, Verwendung finden.

In dem kanalartigen Gefässe AB (Fig. 8) befinde sich zwischen dem oberen und unteren Querschnitte F_1 und F_2 eine Stelle, in welcher sich der Querschnitt F plötzlich auf F_x erweitert; die Wassergeschwindigkeiten daselbst seien w und w_x und die Piezometerstände a_x und a_y, wie in Fig. 6 (S. 21); Geschwindigkeit und Wasserdruck im oberen Querschnitte F_1 seien w_1 und a_1, im unteren Querschnitte F_2 dagegen w_2 und a_2, wie in Fig. 4 (S. 15). Die Verticalabstände der Querschnitte von einander mögen, vom oberen Querschnitte F_1 ab gerechnet, h und h_2 sein.

Fig. 8.



Hier folgt nun nach den Darlegungen bei Gleichung (11) S. 15 für den oberen Gefässtheil:

$$\frac{w^2 - w_1{}^2}{2g} = a_1 - a_x + h\,, \tag{32}$$

für den unteren Theil

$$\frac{w_2^2 - w_x^2}{2g} = a_y - a_2 + h_2 - h, \tag{33}$$

weil in jedem Theile für sich continuirliche Querschnittsänderungen vorausgesetzt sind.

Für die Stelle der plötzlichen Querschnittsänderung folgt endlich aus Gleichung (28)

$$\frac{w_x^2 - w^2}{2g} = a_x - a_y - \frac{(w - w_x)^2}{2g}. \tag{34}$$

Addirt man diese drei Gleichungen, so ergiebt sich als erste Hauptgleichung für den vorgelegten Fall

$$\frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} = a_1 - a_2 + h_2 - \frac{(w - w_x)^2}{2g}. \tag{35}$$

Wäre die plötzliche Erweiterung nicht vorhanden, so wäre $w = w_x$, so dass Gleichung (35) für diesen Fall ganz richtig in Gleichung (11) S. 15 übergeht.

Würden auf dem Wege $F_1 F_2$ mehrere plötzliche Erweiterungen vorliegen, so hätte man für jede einzelne den Energieverlust h' nach Gleichung (31) zu berechnen und die Summe der Verluste auf der rechten Seite der vorstehenden Gleichung in Abzug zu bringen.

Bei dem angenommenen Beharrungszustande strömt durch alle Querschnitte die gleiche Wassermenge V in der Secunde hindurch, es ist daher

$$V = F_2 w_2 = F_1 w_1 = F w = F_x w_x .$$

Führt man für die Querschnittsverhältnisse noch folgende Bezeichnungen ein:

$$\frac{F_2}{F_1} = \lambda; \qquad \frac{F_2}{F} = m; \qquad \frac{F_2}{F_x} = n, \tag{36}$$

so folgen, sofern w_2 bekannt ist, die übrigen Geschwindigkeiten sofort:

$$w_1 = \lambda w_2; \qquad w = m w_2; \qquad w_x = n w_2. \tag{37}$$

Die letzten drei Gleichungen geben dann mit den drei Gleichungen (32), (33), (34) sechs Gleichungen, aus denen sich ebensoviele Unbekannte berechnen lassen.

Als gegeben sind gewöhnlich anzusehen

$$h_2, \ h; \quad a_1, \ a_2; \quad F_2, \ F_1, \ F, \ F_x$$

und zu bestimmen sind

$$w_2, \ w_1, \ w, \ w_x, \ a_x \text{ und } a_y,$$

sowie $V = F_2 w_2$.

Zur endgültigen Lösung der Aufgabe benutzt man dann die Gleichungen (37) und Gleichung (35) und erhält zur Berechnung von w_2

$$\frac{w_2^2}{2g} = \frac{a_1 - a_2 + h_2}{1 - \lambda^2 + (m - n)^2}. \tag{38}$$

Aus Gleichung (32) berechnet sich

$$a_x = a_1 + h - (m^2 - \lambda^2) \frac{w_2^2}{2g}$$

oder

$$a_x = a_1 + h - \frac{(m^2 - \lambda^2)(a_1 - a_2 + h_2)}{1 - \lambda^2 + (m - n)^2} \tag{39}$$

und auf gleichem Wege aus Gleichung (27)

$$a_y - a_x = \frac{2(m - n) n (a_1 - a_2 + h_2)}{1 - \lambda^2 + (m - n)^2}. \tag{40}$$

Ist eine plötzliche Erweiterung nicht vorhanden, ist also $F = F_x$ und damit $m = n$, so gelangt man auf die § 2 entwickelten Sätze und die plötzliche Druckanschwellung $a_y - a_x$ verschwindet.

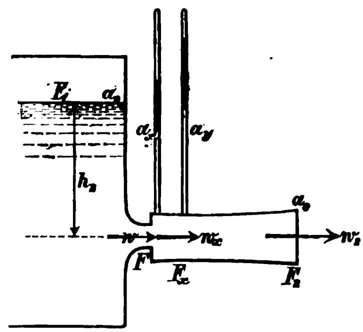
Uebrigens verlieren vorstehende Gleichungen ihre Gültigkeit, d. h. der Beharrungszustand der Bewegung der Flüssigkeit hört auf, sobald der Druck a_x an der Erweiterungsstelle Null oder negativ wird. Die Zulässigkeit des Problems erfordert also nach Gleichung (39) zwischen den Pressungen und Querschnittsverhältnissen die Erfüllung der Bedingung

$$\frac{m^2 - \lambda^2}{1 - \lambda^2 + (m - n)^2} < \frac{a_1 + h}{a_1 - a_2 + h_2}. \tag{41}$$

Zu näherer Erläuterung des im Vorstehenden besprochenen allgemeineren Falles möge folgendes Beispiel behandelt werden.

In der verticalen Wand eines sehr weiten Gefässes befinde sich in der Tiefe h_2 unter dem Wasserspiegel F_1 (Fig. 9) eine gut abgerundete Mündung F und dieser schliesse sich ein weiteres Rohr $F_x F_2$ solcher Art an, dass an der Verbindungsstelle eine plötzliche Erweiterung von F auf F_x stattfinde.

Fig. 9.



Auf den Wasserspiegel F_1 im Gefässe, dessen Querschnitt sehr gross gegen den Querschnitt der Ausflussöffnung F_2 sein soll, so dass man das Verhältniss $\lambda = 0$ setzen kann, wirke der Atmosphärendruck, der wieder in Wassersäule gemessen mit a_0 bezeichnet sein mag; derselbe Druck herrsche auch in der Ebene der Mündung F_2; es wäre demnach auch $a_1 = a_2 = a_0$ und somit folgt aus Gleichung (38) die Ausflussgeschwindigkeit

$$w_2 = \sqrt{\frac{2gh_2}{1 + (m - n)^2}}. \tag{42}$$

Da ferner die Rohraxe horizontal liegt, so folgt überdies $h = h_2$ und damit aus Gleichung (39)

$$a_x = a_0 + h_2 - \frac{m^2 h_2}{1 + (m - n)^2}$$

oder auch

$$a_x = a_0 - \frac{((2m - n)\, n - 1)}{1 + (m - n)^2} \cdot h_2, \tag{43}$$

und nach Gleichung (40) folgt die Druckanschwellung an der Erweiterungsstelle

$$a_y - a_x = \frac{2(m - n)\, n}{1 + (m - n)^2} \cdot h_2\,. \tag{44}$$

Da unter allen Umständen $a_x > 0$ sein muss, so ist nach Gleichung (43) die Bedingungsgleichung

$$h_2 < \frac{1 + (m - n)^2}{(2m - n)\, n - 1} \cdot a_0 \tag{45}$$

zu erfüllen. Würde die Druckhöhe h_2 grösser sein, so hört die Gültigkeit der Formeln auf, an der Erweiterungsstelle zerreisst der

Wasserstrahl und das Wasser strömt, was die Beobachtungen bestätigen, zerrissen und pulsirend durch die Ausströmungsöffnung F_2.

Das Volumen V der Wassermenge, welche in der Secunde zum Ausfluss gelangt, ist $V = F_2 w_2$. Da nach der zweiten der Gleichungen (36) $F_2 = mF$ ist, so folgt mit Rücksicht auf Gleichung (42)

$$V = mFw_2 = F \cdot \sqrt{\frac{m^2 \cdot 2gh_2}{1 + (m-n)^2}}\,.$$

Nimmt man das Ansatzrohr $F_x F_2$ (Fig. 9) fort, sodass nur die abgerundete Mündung F übrig bleibt, so strömt bei gleicher Druckhöhe durch diese das Wasser mit der Geschwindigkeit $\sqrt{2gh_2}$ aus, und die auf die Secunde bezogene Ausflussmenge V' findet sich

$$V' = F\sqrt{2gh_2}$$

und daher

$$\frac{V}{V'} = \frac{m}{\sqrt{1 + (m-n)^2}}\,.$$

Hieraus folgt, dass man einem Gefässe mit ein und derselben Ausflussmündung F bei gleicher Druckhöhe h_2 ganz verschiedene Wassermengen entziehen kann, wenn man an die Mündung verschiedene Ansatzröhren von grösserem Querschnitte anschraubt. Würde sich z. B. das Ansatzrohr allmählich von F auf F_2 erweitern, so wäre $m = n$ und damit

$$\frac{V}{V'} = m\,;$$

man kann also unter Umständen beträchtlich mehr Wasser dem Gefässe entziehen, als durch die Mündung F für sich ausströmen würde.

Setzt man voraus, das Ansatzrohr sei prismatisch, also $F_2 = F_x$ (Fig. 9) und daher $n = 1$, so giebt Gleichung (42) für diesen Fall

$$w_2 = \sqrt{\frac{2gh_2}{1 + (m-1)^2}}$$

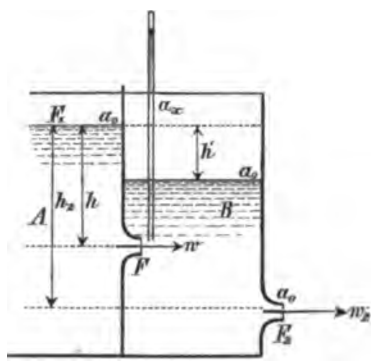
und aus Gleichung (43) folgt der Ueberdruck der äusseren Atmosphäre über den Druck an der Erweiterungsstelle

$$a_0 - a_x = \frac{2(m-1)}{1+(m-1)^2} \cdot h_2 .$$

Man erkennt leicht, dass in diesem Falle bei $m = 2$, d. h. bei $F_2 = F_x = 2F$, ein Maximum dieses Ueberdruckes vorliegt und zwar beträgt derselbe $a_0 - a_x = h_2$, natürlich immer noch abgesehen von den vorhandenen Widerständen*).

Als ein weiterer Specialfall mag der in Fig. 10 dargestellte Fall behandelt werden. Aufgaben dieser Art finden sich mit besonderer Vorliebe bei den älteren Hydraulikern, insbesondere bei Eytelwein, wenn auch in anderer Art, behandelt. Aus einem weiten Gefässe A ströme Wasser durch die Mündung F in ein zweites weites Gefäss B und von diesem durch die Mündung F_2 ins Freie. Auf den beiden Spiegeln der Gefässe A und B liege, wie vor der Mündung F_2, der Atmosphärendruck, es ist also auch hier $a_1 = a_2 = a_0$. Die Mündung F liege um h und F_2 um h_2 unter dem Spiegel F_1 des ersten Gefässes A, genau wie es bei Fig. 8 (S. 24) auch angenommen wurde. Der Spiegel F_1 sei wieder sehr gross gegen F_2, so dass wie früher das Verhältniss $F_2 : F_1$ oder λ Null gesetzt werden kann.

Fig. 10.



Der früher mit F_x bezeichnete Querschnitt wird durch den Verticalschnitt des ganzen Gefässes B dargestellt, sodass hier das Verhältniss $F_2 : F_x$ als verschwindend klein angenommen, also auch $n = 0$ gesetzt werden kann. Unter den angegebenen Verhältnissen ergiebt daher Gleichung (38)

*) Versuche mit prismatischen, cylindrischen Ansatzröhren der angegebenen Art habe ich mit Wasser und Wasserdampf ausgeführt und schon in meiner Schrift »Das Locomotiven-Blasrohr« (1863) veröffentlicht. Die Uebereinstimmung der Versuchsresultate mit den Rechnungsergebnissen ist, unter entsprechender Einführung der Reibungswiderstände, wie dort gezeigt wird, eine durchaus befriedigende.

$$\frac{w_2^2}{2g} = \frac{h_2}{1 + m^2} \tag{46}$$

und für die Ausflussgeschwindigkeit durch den Querschnitt F folgt $w = m w_2$, wo m das Verhältniss der beiden Mündungsquerschnitte $F_2 : F$ darstellt; es ist daher auch

$$\frac{w^2}{2g} = \frac{m^2 h_2}{1 + m^2}. \tag{47}$$

Ist nun der Abstand der Wasserspiegel in beiden Gefässen h', so folgt der Fig. 10 gemäss auch

$$\frac{w_2^2}{2g} = h_2 - h'.$$

Hieraus folgt umgekehrt unter Benutzung von Gleichung (46)

$$h' = \frac{m^2 h_2}{1 + m^2}$$

oder unter Beachtung von Gleichung (47)

$$\frac{w^2}{2g} = h'. \tag{48}$$

Die Ausflussgeschwindigkeit w der Mündung F, die vollständig unter Wasser liegt, hängt also nur von der Niveaudifferenz der beiden Wasserspiegel in den Gefässen A und B ab, also nur von h'; sie ist also unabhängig von der Tiefe der Mündung unter den Wasserspiegeln; ein wichtiger Satz, von dem in der Technik häufig Gebrauch zu machen ist.

Haben die beiden Mündungen F_2 und F gleichen Querschnitt, so ist $m = 1$, und nach den Gleichungen (46) und (47) $w = w_2$, sowie nach den Gleichungen (47) und (48)

$$h' = \frac{1}{2} h_2.$$

Im Beharrungszustande stellt sich demnach bei $m = 1$ der Spiegel im Gefässe B auf die Hälfte der ganzen Höhe h_2 ein.

Der Piezometerstand (im luftleeren Piezometer) unmittelbar an der Mündung F findet sich nach Gleichung (39)

$$a_x = a_0 + h - \frac{m^2 h_2}{1 + m^2}$$

oder mit den Gleichungen (47) und (48):

$$a_x = a_0 + h - h'.$$

Ist das Piezometerrohr oben offen, so stellt sich das Wasser in demselben auf der Höhe $a_x - a_0 = h - h'$ ein; der Spiegel in demselben steht also mit dem Wasserspiegel im Gefässe B in gleicher Höhe; übrigens ergiebt sich, wegen $n = 0$, auch noch aus Gleichung (40) $a_y = a_x$.

§ 4. Einführung der Widerstandscoefficienten in die hydrodynamischen Gleichungen.

Es ist die wichtigste Aufgabe der technischen Hydraulik, die Correctionen zu bestimmen, welche an den theoretischen Formeln anzubringen sind, um die Rechnungsergebnisse mit den Beobachtungsresultaten in Uebereinstimmung zu setzen. Für die Lösung, selbst der meisten einfachsten Probleme der Technik, sind die hydrodynamischen Grundgleichungen ohne solche Correctionen vollständig unbrauchbar und daher musste von jeher die Bau- und Maschinenmechanik durch besondere Versuche die erforderlichen Rechnungsunterlagen zu gewinnen suchen.

Die älteren experimentellen Untersuchungen gingen von hervorragenden italienischen, dann von französischen Hydraulikern aus, die späteren von deutschen. Im ersten Viertel dieses Jahrhunderts wirkte Eytelwein, dann aber in bedeutsamster Weise Weisbach, dessen überaus zahlreichen Versuchsresultaten aus den Jahren 1840 bis 1870 die Technik eine Fülle von Rechnungsunterlagen verdankt*). Es ist Weisbach auch die Einführung und consequente Verwendung der sogenannten »Widerstandscoefficienten« in den hydraulischen Formeln zuzuschreiben, ein Verfahren, wie es in der vorliegenden Schrift durchgängig benutzt werden soll.

Man geht bei der Einführung in die Frage in der praktischen

---

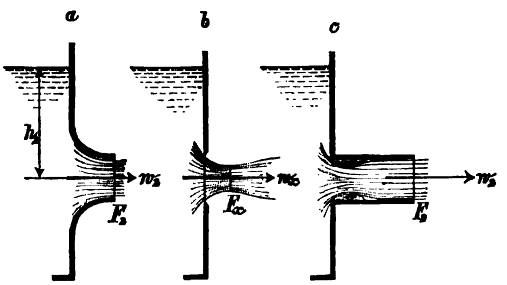
*) In geschichtlicher Beziehung ist bezüglich der älteren hydraulischen Untersuchungen auf die wenig bekannten, aber classischen Arbeiten Weisbach's in »Hülsse, Maschinen-Encyclopädie«, Leipzig 1841, Band I und zwar auf die beiden Artikel »Ausfluss« und »Bewegung« hinzuweisen. Hier giebt Weisbach auch theoretische Untersuchungen, welche wie z. B. die über die Staucurve heute noch unübertroffen dastehen. Das genannte, grossartig angelegte Werk ist nur bis zum Buchstaben C erschienen.

Hydraulik am besten von drei einfachen Mündungen aus, durch welche man sich den Ausfluss des Wassers unter dem atmosphärischen Druck aus einem weiten Gefässe in die freie Atmosphäre vorstellt und unterscheidet dabei a) die gut abgerundete Mündung, b) die Mündung in dünner Wand und c) das kurze, cylindrische Ansatzrohr (Fig. 11, *a*, *b*, *c*).

a) Gut abgerundete Mündung.

Hier tritt, die oben angewandte Bezeichnung beibehalten, bei der angenommenen Druckhöhe h_2 das Wasser theoretisch genommen mit der Geschwindigkeit $w_2 = \sqrt{2gh_2}$ durch die Mündung F_2 mit vollem Querschnitte aus. In Wirklichkeit ist aber, wegen der in der Mündung stattfindenden Widerstände, die Geschwindigkeit eine kleinere und zwar schreibt man als Werth für die wahre Geschwindigkeit

Fig. 11.



$$w_2 = \varphi \sqrt{2gh_2}, \tag{49}$$

wobei φ einen Correctionsfactor darstellt, der kleiner als Eins ist und gewöhnlich der Geschwindigkeitscoefficient genannt wird. Man sagt, die Geschwindigkeitsverminderung rühre her von der Reibung des Wassers an der Mündungswandung, doch schliesst dieselbe zugleich den Widerstand mit ein, welcher der gegenseitigen Verschiebung der Wassertheilchen unter sich entspricht.

Die ganze Druckhöhe h_2 lässt sich nun in zwei Theile h' und h'' zerlegt denken, so dass

$$h_2 = h' + h''$$

ist, von denen der eine Theil h'' zur Erzeugung der Geschwindigkeit w_2 verwendet wird, also

$$h'' = \frac{w_2^2}{2g} \tag{50}$$

anzunehmen ist, während der zweite Theil h' als **verloren** erscheint und zur Ueberwindung der Widerstände verwendet wird.

Aus Gleichung (49) folgt

$$\frac{w_2^2}{2g} = \varphi^2 h_2$$

und daher

$$h'' = \varphi^2 h_2 \quad \text{und} \quad h' = h_2 - h'' = (1 - \varphi^2) h_2$$

als verlorene Druckhöhe oder als entsprechender Energieverlust. Bezeichnet man das Verhältniss der beiden Werthe $h' : h''$ mit ζ, so ist

$$h' = \zeta h''$$

und mit Gleichung (50)

$$h' = \zeta \cdot \frac{w_2^2}{2g}, \tag{51}$$

ferner

$$h_2 = (1 + \zeta) \cdot \frac{w_2^2}{2g}. \tag{52}$$

Den Werth ζ bezeichnet man als »**Widerstandscoefficient**« (nach Weisbach); derselbe bestimmt sich nach vorstehenden Formeln:

$$\zeta = \left(\frac{1}{\varphi^2} - 1\right). \tag{53}$$

Ist φ oder ζ bekannt, so berechnet sich nach Gleichung (52) die Geschwindigkeit w_2 und dann die Ausflussmenge $V = F_2 w_2$ in der Secunde.

Zahlreiche Versuche von Michelotti, Eytelwein, Weisbach u. A. haben ergeben, dass der Geschwindigkeitscoefficient φ von den kleinsten bis zu den grössten Druckhöhen und den verschiedensten Mündungsdurchmessern zwischen die engen Grenzen 0,96 und 0,98 fällt, so dass man allgemein den Mittelwerth $\varphi = 0{,}97$ annehmen darf und damit für die **gut abgerundete Mündung** am weiten Ausflussgefäss nach Gleichung (53) den Widerstandscoefficienten

$$\zeta = 0{,}063$$

benutzen kann.

b) Mündung in dünner Wand (Fig. 11, *b*).

Unter Mündung in dünner Wand versteht man eine solche, bei welcher die Mündungswand **ringsum scharf begrenzt** ist. In diesem Falle tritt der Strahl mit Contraction aus der Mündung heraus, d. h. er zieht sich bis zu einer gewissen Stelle ausserhalb der Mündung zusammen, um sich von da an weiterhin wieder zu verstärken. Bei kreisförmigen Mündungen und beim Ausfluss aus weiten Gefässen liegt die Stelle der stärksten Contraction in einer Entfernung von der Mündungsebene, die ohngefähr die Hälfte des Mündungsdurchmessers beträgt; ist F_x der Querschnitt daselbst und F der Mündungsquerschnitt, so nennt man das Verhältniss beider den »Contractionscoefficienten«; wird derselbe mit α bezeichnet, so setzt man sonach:

$$\alpha = \frac{F_x}{F} \,. \tag{54}$$

Die Versuche zeigen, dass unter gleich angenommenen Verhältnissen die Sprungweite eines mit Contraction ausströmenden Wasserstrahles nahezu dieselbe ist, wie bei der gut abgerundeten Mündung; man schliesst daraus, dass bei beiden Mündungen der Widerstandscoefficient derselbe ist; es berechnet sich daher die Geschwindigkeit im Querschnitte der stärksten Contraction, d. h. ihr grösster Werth, der mit w_x bezeichnet werden mag, nach der Angabe der Gleichung (52) durch die Formel

$$w_x = \sqrt{\frac{2gh_2}{1+\zeta}}$$

mit $\zeta = 0{,}063$.

Die Wassermenge, welche in der Secunde zum Ausfluss gelangt, ist $V = F_x w_x$ oder mit Gleichung (54)

$$V = \alpha F \sqrt{\frac{2gh_2}{1+\zeta}},$$

wobei unter den gewöhnlichen und hier vorausgesetzten Umständen $\alpha = 0{,}64$ angenommen wird.

Im Uebrigen zeigen aber die Versuche, dass der Contractionscoefficient α veränderlich ist; der Werth nimmt ab mit grösser werdender Mündung (bei Wasser) und ebenso mit wachsender Druckhöhe.

Die Erscheinungen der Contraction haben zu vielfachen theoretischen Untersuchungen Anlass gegeben und ebenso liegen überaus zahlreiche Versuche vor, unter denen diejenigen von Weisbach und die von Poncelet und Lesbros, welche speciell mit rectangulären Mündungen von 20 cm Breite und verschiedener

Höhe ausgeführt wurden, obenan stehen. Ueber diese Versuche berichtet ausführlich Rühlmann*); für die Zwecke der vorliegenden Schrift genügen die vorliegenden Angaben.

c) Kurzes cylindrisches Ansatzrohr (Fig. 11, *c*).

Durch ein derartiges Rohr, welches beim Ansatz an die Gefässwand mit scharfen Kanten (ohne Abrundung) versehen und $2^1/_2$ bis 3 mal so lang wie weit ist, strömt das Wasser mit vollem Querschnitte, aber mit wesentlich geringerer Geschwindigkeit aus; der Wasserstrahl erscheint getrübt und an der Oberfläche geschuppt, während er bei den beiden vorher besprochenen Mündungen klar und krystallrein hervortritt. Aus den Versuchen von Michelotti, Bidone, D'Aubuisson, Bossut und Weisbach stellt sich hier der Geschwindigkeitscoefficient im Mittel auf $\varphi = 0{,}815$ und zeigt sich so wenig veränderlich (er nimmt ganz wenig zu, wenn der Durchmesser abnimmt und die Druckhöhe grösser wird), dass man diesen Mittelwerth bei technischen Untersuchungen ganz unbedenklich in allen Fällen, bei Anwendung weiter Ausflussgefässe als gleich gross ansehen darf. Aus Gleichung (53) berechnet sich dann der Widerstandscoefficient des kurzen Ansatzrohres zu

$$\zeta = 0{,}505.$$

Die nützlich verwerthete Druckhöhe, die ausschliesslich auf Erzeugung der Ausflussgeschwindigkeit verwendet wird, ergiebt sich dann aus den bei Gleichung (52) gemachten Bemerkungen

$$h'' = \varphi^2 h_2 = \frac{1}{1+\zeta} h_2 = 0{,}664 \cdot h_2$$

und die verlorene Druckhöhe

$$h' = (1-\varphi^2) h_2 = \frac{\zeta}{1+\zeta} h_2 = 0{,}336 h_2 ,$$

wenn h_2 die ganze disponible Druckhöhe ist.

Es geht hier ohngefähr der dritte Theil der Druckhöhe verloren, während sich bei der gut abgerundeten Mündung dieser Verlust nur auf $h' = 0{,}059 \cdot h_2$ stellte. Man schreibt den starken Druckhöhen- oder Energieverlust beim Ausfluss durch Ansatzröhren ohne Abrundung dem Umstande zu, dass im Innern des Rohres

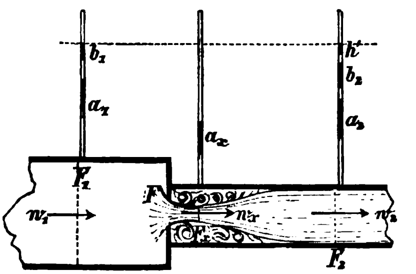
*) Rühlmann, »Hydromechanik«. Hannover 1880.

Wirbelbildung erzeugt werde und kann, wie aus dem Folgenden hervorgehen wird, nach dem Vorgange von Navier und Weisbach den Vorgang näher verfolgen.

d) Durchgang des Wassers durch ein Diaphragma.

Ein Rohr vom Querschnitte F_1 (Fig. 12) sei vom Rohre mit dem Querschnitte F_2 durch eine Scheidewand mit der Durchlassöffnung F, die eine Mündung in dünner Wand bildet, getrennt. Im Querschnitt F_x der stärksten Contraction sei die Geschwindigkeit w_x, die Zuflussgeschwindigkeit w_1, die Geschwindigkeit im Abflussrohre sei w_2; die Piezometerstände seien a_1, a_x und a_2; im Uebrigen liege die Rohraxe horizontal.

Fig. 12.



Trägt man im Geiste auf die einzelnen Piezometerspiegel die zugehörigen Geschwindigkeitshöhen auf, so erhält man die Gesammtenergie im Querschnitte F_1, F_x und F_2 beziehentlich:

$$\left(a_1 + \frac{w_1^2}{2g}\right), \quad \left(a_x + \frac{w_x^2}{2g}\right) \quad \text{und} \quad \left(a_2 + \frac{w_2^2}{2g}\right).$$

Ohne Energieverluste wären diese Werthe gleich gross; im vorliegenden Falle findet aber zunächst auf dem Wege von F_1 nach F_x beim Durchgange durch das Diaphragma der nach dem Vorstehenden bei der Mündung in dünner Wand berechnete Energieverlust:

$$\zeta' \frac{w_x^2}{2g}$$

statt, wobei $\zeta' = 0{,}063$ zu setzen ist; daher folgt zunächst:

$$\left(a_1 + \frac{w_1^2}{2g}\right) - \zeta' \frac{w_x^2}{2g} = a_x + \frac{w_x^2}{2g}. \tag{55}$$

Beim Uebergange von F_x nach F_2 liegt ein Energieverlust vor, wie er bei der Untersuchung der plötzlichen Erweiterung S. 23 gefunden wurde; derselbe beträgt nach Borda-Carnot:

$$\frac{(w_x - w_2)^2}{2g};$$

es folgt daher

$$a_x + \frac{w_x^2}{2g} - \frac{(w_x - w_2)^2}{2g} = a_2 + \frac{w_2^2}{2g} \tag{56}$$

und mit diesen beiden Gleichungen ist die Lösung der vorgelegten Aufgabe schon vollständig gegeben. Sie umschliesst in der gegebenen Form eine Reihe wichtiger Einzelfälle.

Die Addition der beiden Gleichungen (55) und (56) giebt:

$$\left(a_1 + \frac{w_1^2}{2g}\right) - \left[\zeta' \frac{w_x^2}{2g} + \frac{(w_x - w_2)^2}{2g}\right] = a_2 + \frac{w_2^2}{2g}. \tag{57}$$

Hier bedeutet aber der in der eckigen Klammer stehende Ausdruck nichts anderes, als den Energie- oder Druckhöhenverlust auf der ganzen Strecke $F_1 F_2$, der mit h' bezeichnet werden mag. (Vergleiche Fig. 12, wo $\frac{w_1^2}{2g}$ und $\frac{w_2^2}{2g}$ bez. mit b_1 und b_2 bezeichnet sind.)

Nun gilt die Beziehung $F_x w_x = F_2 w_2$, oder wenn der Mündungsquerschnitt im Diaphragma mit F und der Contractionscoefficient $F_x : F$ mit α bezeichnet wird,

$$\alpha \cdot F w_x = F_2 w_2;$$

hieraus w_x bestimmt und den Werth im Klammerausdrucke der Gleichung (57) substituirt, giebt den Energieverlust

$$h' = \left[\zeta' \left(\frac{F_2}{\alpha F}\right)^2 + \left(\frac{F_2}{\alpha F} - 1\right)^2\right] \frac{w_2^2}{2g}.$$

Hier ist jetzt nach Gleichung (51) der Klammerausdruck nichts anderes als der Widerstandscoefficient ζ für den vorgelegten Fall. Berechnet man daher ζ nach der Formel:

$$\zeta = \zeta' \left(\frac{F_2}{\alpha F}\right)^2 + \left(\frac{F_2}{\alpha F} - 1\right)^2, \tag{58}$$

so ergiebt sich aus Gleichung (57):

$$a_1 - a_2 = (1 + \zeta) \frac{w_2^2}{2g} - \frac{w_1^2}{2g},$$

und wenn man das Verhältniss $F_2 : F_1$ mit λ bezeichnet, also $w_1 = \lambda w_2$ einsetzt:

$$a_1 - a_2 = (1 + \zeta - \lambda^2)\frac{w_2{}^2}{2g}. \tag{59}$$

Aus Gleichung (56) folgt endlich nach einfacher Umformung:

$$2g(a_2 - a_x) = 2(w_x - w_2)w_2$$

oder

$$a_2 - a_x = 2\left(\frac{F_2}{\alpha F} - 1\right)\frac{w_2{}^2}{2g}, \tag{60}$$

aus welcher Gleichung sich der Piezometerstand a_x an der Stelle der stärksten Contraction, also unmittelbar am Diaphragma berechnen lässt. Die drei Gleichungen (58), (59) und (60) geben also vollständigen Einblick in die vorgelegte Frage.

Für den speciellen Fall, dass ein Diaphragma nicht vorliegt, ist in den vorstehenden Formeln einfach $F = F_2$; eine Contraction des Strahles liegt aber nichtsdestoweniger vor, weil beim Uebergange aus dem weiten Rohre F_1 nach dem engeren F_2 scharfe Kanten vorhanden sind.

In diesem Falle könnte bei numerischen Rechnungen nur ein Zweifel bezüglich der Annahme der Grösse des Contractionscoefficienten α vorliegen, da die Beobachtungen zeigen, dass der Strahl sich um so weniger zusammenzieht, je grösser die Geschwindigkeit w_1 ist, mit welcher das Wasser bei der Mündung F_2 anlangt. Weisbach spricht hier von »unvollkommener Contraction«, während er in dem Falle, wo der Ausfluss aus einem weiten Gefässe durch das Rohr F_2 erfolgt, die Contraction als »vollkommen« bezeichnet; hierüber liegen von ihm zahlreiche Versuche mit kreisförmigen und rectangulären Mündungen vor*), deren Resultate im besonderen Falle an der Hand der vorstehenden Formeln leicht zu verwerthen sind.

Liegt unter Wegfall des Diaphragmas statt des Zuflussrohres F_1 (Fig. 12) ein weites Ausflussgefäss vor, aus welchem das Rohr F_2 das Wasser direct ins Freie führt, so gelangt man auf das einfache Ansatzrohr, wie es bei Fig. 11, c besprochen worden ist.

Hier ist dann in den Gleichungen (58) bis (60) $F = F_2$ und $\lambda = 0$ einzusetzen und überdies, wenn man bei der Druckhöhe

*) Weisbach, »Versuche über die unvollkommene Contraction« u. s. w. Leipzig 1843.

h_2 atmosphärischen Druck auf den Wasserspiegel voraussetzt, $a_1 = h_2 + a_0$ und $a_2 = a_0$.

Der Widerstandscoefficient für das Ansatzrohr berechnet sich dann nach Gleichung (58):

$$\zeta = \frac{\zeta'}{\alpha^2} + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2. \tag{58a}$$

Ferner folgt aus Gleichung (59):

$$h_2 = (1 + \zeta)\frac{w_2^2}{2g} \tag{59a}$$

und aus Gleichung (60)

$$a_x = a_0 - 2\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)\frac{w_2^2}{2g}. \tag{60a}$$

Setzt man hier nach obigen Angaben $\zeta' = 0{,}063$ und nimmt man $\alpha = 0{,}63$ an, was unter gewöhnlichen Verhältnissen bei vollkommener Contraction gestattet ist, so ergiebt die Rechnung aus Gleichung (58a) $\zeta = 0{,}504$ und dann Gleichung (59a) $w_2 = 0{,}815\sqrt{2gh_2}$, was den oben angegebenen directen Versuchsresultaten durchaus entspricht.

Aus Gleichung (60a) folgt mit den gegebenen Werthen:

$$a_x = a_0 - 0{,}7810\,h_2\,.$$

Da a_x jedenfalls positiv sein muss, so würde der volle Ausfluss aufhören und die Anwendung der vorstehenden Formeln nicht mehr gültig sein, sobald (da $a_0 = 10{,}333$ m) sich $h_2 > 13{,}23$ m ergiebt. Dieses Resultat stimmt ganz vortrefflich mit Weisbach's Versuchswerthe überein, welcher die Grenze bei $h_2 = 13{,}3$ m erreichte*).

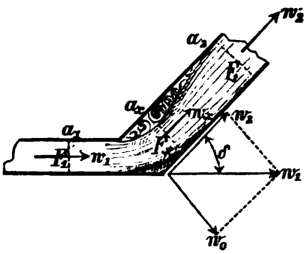
e) Energieverlust bei Richtungs- und Querschnittsänderungen.

Strömt das Wasser aus dem engeren Rohre vom Querschnitte F_1 (Fig. 13) nach dem weiteren Rohre F_2, dessen Axe um den Winkel δ von der des ersten Rohres abweicht, so findet an der Uebergangsstelle eine Contraction des Strahles in der angedeuteten

*) Weisbach, »Versuche über den Ausfluss des Wassers bei hohem Druck«. Civilingenieur, Bd. 9, 1863, p. 14.

Art statt; am Orte der grössten Zusammenziehung des Strahles sei der Querschnitt F_x, die Geschwindigkeit w_x und der Piezometerstand a_x; in den Querschnitten F_1 und F_2 sollen die Geschwindigkeiten wieder mit w_1 und w_2 und die Piezometerstände mit a_1 und a_2 bezeichnet werden.

Fig. 13.



Die Energiewerthe in den drei Schnitten F_1, F_x und F_2 sind beziehentlich:

$$a_1 + \frac{w_1^2}{2g}, \qquad a_x + \frac{w_x^2}{2g} \quad \text{und} \quad a_2 + \frac{w_2^2}{2g},$$

wenn man die Rohraxen horizontal liegend, also die Figur im Grundriss dargestellt denkt. Auf dem Wege von F_1 nach F_x liegt ein Energieverlust nicht vor, es ist daher:

$$a_1 + \frac{w_1^2}{2g} = a_x + \frac{w_x^2}{2g}.$$

Auf dem Wege von F_x nach F_2 liegt dagegen eine plötzliche Geschwindigkeitsänderung von w_x auf w_2 vor; es ist also

$$a_x + \frac{w_x^2}{2g} - \frac{(w_x - w_2)^2}{2g} = a_2 + \frac{w_2^2}{2g}.$$

Die Addition beider Gleichungen giebt den Energie- oder Druckverlust, der wieder mit h' bezeichnet werden mag, auf der ganzen Strecke:

$$h' = \frac{(w_x - w_2)^2}{2g} = \left(a_1 + \frac{w_1^2}{2g}\right) - \left(a_2 + \frac{w_2^2}{2g}\right). \tag{61}$$

In dem vorliegenden Falle lässt sich h' auch noch auf andere Weise ausdrücken. Zerlegt man nämlich (Fig. 13) w_1 in die beiden Componenten w_2 und w_0, so repräsentirt w_0 die verlorene Geschwindigkeit und dann ist auch

$$h' = \frac{w_0^2}{2g}$$

oder, da der Ablenkungswinkel mit δ bezeichnet wurde, der Figur gemäss:

$$2gh' = w_1^2 + w_2^2 - 2w_1 w_2 \cos\delta.$$

Setzt man hier $\cos\delta = 1 - 2\sin^2\frac{1}{2}\delta$, so ergiebt sich:

$$h' = \frac{(w_1 - w_2)^2}{2g} + \frac{4w_1w_2\sin^2\frac{1}{2}\delta}{2g}. \qquad (62)$$

Das erste Glied der rechten Seite entspricht dem Energieverluste, welcher dem Uebergange der Geschwindigkeit w_1 in den Werth w_2 entspricht; das zweite Glied entspricht dem Einflusse der Ablenkung.

Der Vergleich mit Gleichung (62) und (61) ergiebt nach einfacher Umformung die Druckanschwellung in Folge der Erweiterung und der Ablenkung des Rohres

$$a_2 - a_1 = \frac{w_1{}^2 - w_2{}^2}{2g} - h'$$

oder

$$2g(a_2 - a_1) = 2w_2(w_1 - w_2) - 4w_1w_2\sin^2\tfrac{1}{2}\delta \qquad (63)$$

oder einfacher:

$$2g(a_2 - a_1) = 2w_2(w_1\cos\delta - w_2). \qquad (63\text{a})$$

Setzt man die verlorene Druckhöhe

$$h' = \zeta\frac{w_2{}^2}{2g},$$

so repräsentirt ζ den Widerstandscoefficienten für den vorliegenden Fall. Mit Benutzung der Beziehung $F_xw_x = F_2w_2$ folgt dann nach Gleichung (61)

$$\zeta = \left(\frac{F_2}{F_x} - 1\right)^2. \qquad (64)$$

Andererseits folgt aus der Beziehung $F_1w_1 = F_2w_2$ und, wenn man $\frac{F_2}{F_1} = \lambda$ setzt, aus Gleichung (62) auch

$$\zeta = (\lambda - 1)^2 + 4\lambda\sin^2\tfrac{1}{2}\delta, \qquad (65)$$

wobei aber ausdrücklich $F_2 > F_1$, also $\lambda > 1$ vorausgesetzt wird.

Ist der Werth λ und der Ablenkungswinkel δ gegeben, so bestimmt sich ζ aus der letzten Gleichung, und dann lässt sich nach Gleichung (64) auch der Querschnitt F_x an der Stelle der stärksten Contraction berechnen, sowie die an dieser Stelle vorliegende Geschwindigkeit w_x und damit gelangt man unter Benutzung der oben gegebenen Gleichung

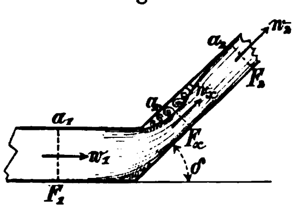
$$a_x + \frac{w_x^2}{2g} = a_1 + \frac{w_1^2}{2g}$$

auch auf den zugehörigen Werth des Piezometerstandes a_x.

Liegt eine Ablenkung nicht vor, ist also $\delta = 0$, so ergeben die Gleichungen (64) und (65) $F_x = F_1$, damit $w_x = w_1$ und $a_x = a_1$, wie in dem Falle, der unter Zugrundelegung von Fig. 6 auf S. 22 behandelt worden ist (bei etwas verschiedener Bezeichnung).

Die vorstehende Aufgabe ist nicht umkehrbar, d. h. die Formeln gelten nicht mehr, wenn das Wasser in umgekehrter Richtung durch das Rohr (Fig. 13) hindurchströmt, wenn sich also das Wasser aus dem weiteren Rohre F_1 nach dem engeren Rohre F_2 hin bewegt, wie es Fig. 14 andeutet; hier ist $\lambda < 1$.

Fig. 14.



In diesem Falle fällt in Gleichung (62) und Gleichung (65) das erste Glied auf der rechten Seite fort, nicht nur, wenn $w_2 = w_1$ ist, sondern auch für $w_2 > w_1$ und der Widerstandscoefficient wird einfach

$$\zeta = 4\lambda \sin^2 \tfrac{1}{2}\delta \,, \tag{66}$$

wonach sich dann nach Gleichung (64) auch wieder der Grad der Contraction an der Uebergangsstelle ermitteln lässt.

Nach Gleichung (61) berechnet sich dann durch

$$2g(a_1 - a_2) = w_2^2 - w_1^2 + \zeta w_2^2$$

die Senkung der Piezometerstände in der Bewegungsrichtung.

Setzt man voraus, dass eine Ablenkung nicht vorliege, also $\delta = 0$ sei, so ergiebt Gleichung (66) auch $\zeta = 0$, es fände demnach der Durchgang des Wassers aus dem weiteren nach dem engeren Rohre ohne Energieverlust statt; man gelangt unter der gemachten Voraussetzung auf den bei Fig. 12 (S. 36) besprochenen Fall, wenn man dort nur das Diaphragma beseitigt und $F = F_2$ gesetzt denkt. Allerdings ist dort besprochen worden, dass beim Eintritte des Wassers in das Rohr F_2 immer noch ein gewisser Grad von Contraction des Strahles vorliege, der nach den angeführten Versuchen beurtheilt werden sollte.

Die Contraction tritt um so mehr zurück, je weniger die beiden Querschnitte F_1 und F_2 von einander abweichen und mit diesem Falle hat man es gewöhnlich bei technischen Aufgaben zu thun und dann von jeher die Wirkung der Contraction unberücksichtigt gelassen.

Auf die Frage der Bewegung des Wassers durch kanalartige Gefässe mit scharfen Ablenkungen ist hier etwas ausführlicher eingegangen worden, als es sonst in hydraulischen Schriften geschehen ist, weil gerade diese Frage für die Theorie der Turbinen von Interesse ist.

In den zuletzt entwickelten Sätzen und Formeln liegt aber leider noch eine sehr grosse Unsicherheit; es ist eben nicht möglich, beim jetzigen Stande der Hydrodynamik die Frage schärfer zu verfolgen; bei der Verwendung der gegebenen Formeln fragt es sich daher vor Allem, wie weit in den später zu behandelnden Aufgaben eine Uebereinstimmung der Rechnungsergebnisse mit den wirklichen Beobachtungen zu erwarten ist; hierüber können nur Versuche entscheiden, solche Versuche liegen aber bedauerlicher Weise nur sehr wenige vor.

Hervorzuheben wären zunächst die Resultate, welche Weisbach mit Knieröhren erhalten hat; man gelangt auf das einfache Knierohr, wenn man sich in Fig. 13 und 14 die beiden Rohrquerschnitte F_1 und F_2 von gleichem Werthe denkt; dann folgt in den vorstehenden Formeln $w_1 = w_2$ und $\lambda = 1$ und damit aus den Gleichungen (65) und (66) der Widerstandscoefficient ζ beim Ablenkungswinkel δ

$$\zeta = 4 \sin^2 \tfrac{1}{2} \delta \tag{67}$$

oder auch:

$$\zeta = 2 (1 - \cos \delta) , \tag{67a}$$

wonach sich dann nach Gleichung (64) auch der Grad der Contraction $F_x : F_2$ bestimmen liesse.

Nun hat Weisbach*) aus Versuchen mit einem Rohre von kreisförmigem Querschnitte und 30 mm Durchmesser den Widerstandscoefficienten ζ für verschiedene Ablenkungswinkel δ

*) Weisbach, »Lehrbuch der Ingenieur- und Maschinen-Mechanik«, Braunschweig, Bd. 1 der verschiedenen Auflagen. Vergl. auch dessen »Experimental-Hydraulik«, Freiberg 1855.

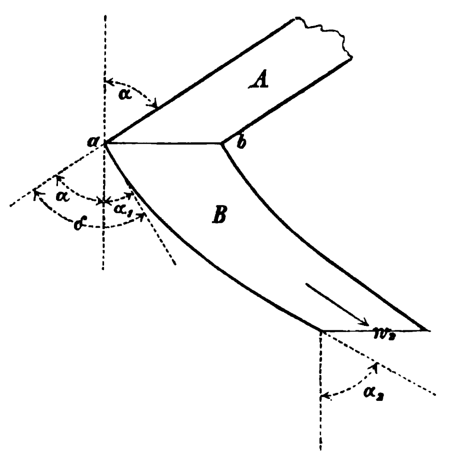
ermittelt und zur Berechnung desselben die folgende empirische Formel aufgestellt:

$$\zeta = 0{,}9457 \sin^2 \tfrac{1}{2}\delta + 2{,}047 \sin^4 \tfrac{1}{2}\delta.$$

Diese Formel giebt z. B. für rechtwinklige Ablenkung ($\delta = 90^0$) $\zeta = 0{,}984$ und den zugehörigen Contractionscoefficienten $\alpha = F_x : F_2 = 0{,}502$, während die theoretische Formel (67) $\zeta = 2$ und $\alpha = 0{,}414$ ergiebt. Die Abweichung ist bedeutend, erscheint aber in anderem Lichte, wenn Weisbach bei gleicher Ablenkung bei einem Rohrdurchmesser von 10 mm $\zeta = 1{,}536$ mit $\alpha = 0{,}446$ findet und damit experimentell nachweist, dass der Durchmesser des Rohres von wesentlichem Einflusse ist. Nun haben wir es aber in den später folgenden Untersuchungen (Eintritt des Wassers in Turbinenkanäle mit plötzlicher Ablenkung) nicht mit Gefässen von kreisförmigen, sondern mit solchen von rectangulären Querschnitten zu thun, sodass hier die Verwerthung der Weisbach'schen Versuche mit Knieröhren ohnehin nicht statthaft ist.

Von Wichtigkeit für die vorliegenden Zwecke erscheint daher eine andere von Prof. Fliegner*) herrührende Versuchsreihe; übrigens die einzige, die in der bezeichneten Richtung vorliegt.

Fig. 15.



Fliegner benutzte als Zuflussgefässe Röhren von rectangulärem Querschnitte von verschiedener Breite, aber sämmtlich von gleicher Höhe von 30 mm (A, Fig. 15); die Röhren waren schief abgeschnitten, so aber, dass bei sämmtlichen vorhandenen 6 Zuflussröhren die Breite ab im Schnitte 15 mm betrug, der mit α in der Figur bezeichnete Winkel aber bezüglich 0, 15, 30, 45, 60, 75° betrug.

*) Fliegner, »Versuche zur Theorie der Reactionsturbinen«. Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, 1879, Bd. 23, p. 459.

Ausserdem lagen 9 Gefässe vor, welche Turbinenkanälen nachgebildet waren, wie B in Fig. 15, und welche sich durch die mit α_1 und α_2 bezeichneten Winkel, sowie durch die Kanalkrümmung unterschieden. Jeder einzelne Kanal hatte an der Eintrittsstelle ab ebenfalls eine Breite von 15 mm, war 30 mm hoch und konnte mit jedem einzelnen der Einlaufkanäle verbunden werden, wie es Fig. 15, welche in natürlicher Grösse dargestellt ist, vorführt.

Von den vielen Combinationen, welche Fliegner auf diesem sinnreichen Wege erzielen konnte, stellt Fig. 15 den speciellen Fall vor, bei welchem die Winkel $\alpha = 60^\circ$, $\alpha_1 = 30^\circ$ und $\alpha_2 = 60^\circ$ betrugen; der Ablenkungswinkel beim Eintritt war demnach

$$\delta = \alpha + \alpha_1 = 90^\circ.$$

Bezeichnet w_2 die Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser durch den unteren Querschnitt des Kanals B ausströmt, so schreibt sich die ganze beim Eintritte und dem Durchgange durch den Kanal verlorene Druckhöhe h':

$$h' = \zeta \cdot \frac{w_2^2}{2g}$$

und der Widerstandscoefficient ζ ist es nun, dessen Werthe Fliegner für die verschiedenen Combinationen seiner Einlauf- und Turbinenkanäle und für verschiedene Druckhöhen (von 1 bis 30 m) in einer umfangreichen durch Interpolation gewonnenen Tabelle (a. a. O.) zusammengestellt hat.

Die aufmerksame Betrachtung der Tabelle lässt die Sorgfalt erkennen, mit welcher die Versuche durchgeführt worden sind; es treten aber dabei unter den verschiedenen Werthen von ζ Abweichungen auf, die sich kaum anders als dadurch erklären lassen, dass die Versuche in allzukleinem Maassstabe ausgeführt worden sind, — zeigt doch, wie wiederholt bemerkt werden mag, Fig. 15 den Turbinenkanal in natürlicher Grösse.

Die Fliegner'schen Werthe von ζ umfassen den Energieverlust beim Eintritt in den Turbinenkanal in Folge der Ablenkung und der Querschnittsänderung mit Einschluss der Widerstände, welche der Krümmung der Kanäle und der Wasserreibung im Kanale entspricht. Die oben entwickelten Formeln (65) und (66) beziehen sich aber nur auf den ersteren Verlust, ein directer Vergleich zwischen Rechnungs- und Versuchsergebniss ist daher nicht möglich. Im Laufe der Jahre bin ich, um eine festere Basis für den folgenden Haupttheil des vorliegenden Buches zu gewinnen, wiederholt auf das Studium der Fliegner'schen Arbeit zurückgekommen und habe durch überaus zeitraubende Rechnungen versucht, die beiden eben genannten Arten des Energieverlustes getrennt zu ermitteln, aber ohne durchgreifenden Erfolg. Von einer Wiedergabe der betreffenden Rechnungsresultate mag hier abgesehen und nur hervorgehoben werden, dass die Versuche für den durch Ablenkung und Querschnittsänderung hervorgerufenen Energieverlust durchweg einen kleineren Werth als die Formeln (65) und (66) ergeben, dass die Abweichungen aber nur bei grossen Ablenkungen (bis zu 90° und darüber) beträchtlicher ausfallen. Nun kommen aber bei Turbinen, wie das Weitere zeigen wird, solch bedeutende Ablenkungen nur in extremen Fällen vor (in der Nähe des Stillstandes oder des Leerganges der Turbinen, wo ohnedies noch andere störende Einflüsse vorliegen); die Fliegner'schen Versuche lassen es daher auch im Weiteren noch statthaft erscheinen, von den oben entwickelten Formeln Gebrauch zu machen; muss man ja ohnehin bei der Lösung aller technisch-hydraulischen Probleme immer im Auge behalten, dass es sich beim heutigen Stande der theoretischen Hydrodynamik jederzeit nur um Gewinnung von Näherungsausdrücken handeln kann.

§ 5. Bewegung der Flüssigkeiten in Leitungen und kanalartigen Gefässen.

Bei der Ermittelung des Energieverlustes für den Durchgang des Wassers durch Leitungen spricht man gewöhnlich aus, derselbe entspringe der »Reibung« und versteht darunter den Widerstand, welchen die Flüssigkeit beim Hingange an den festen Wandungen zu überwinden hat. Daneben liegt aber jederzeit auch ein Widerstand vor, welcher der relativen Verschiebung der Flüssigkeitstheilchen unter sich entspricht und der gewöhnlich als »innere Reibung« bezeichnet wird. Unter Annahme gewisser Hypothesen kann man in einzelnen Fällen diesen letzteren Widerstand auf analytischem Wege zum Ausdruck bringen, doch ist es bei technischen Untersuchungen Gebrauch, bei der Aufstellung der Grundformeln nur von dem Widerstande der Flüssigkeit an der festen

Wandung zu sprechen; man nimmt dabei stillschweigend an, dass jedenfalls der Einfluss der inneren Reibung durch die Correctionen zum Ausdruck kommt, die man schliesslich auf Grund der Versuche in die Formeln einzuführen hat.

Strömt Wasser mit der Geschwindigkeit w an einer Fläche von O Quadratmetern hin, so geht man zunächst hypothetisch von der Annahme aus, dass die Kraft P zur Ueberwindung des Reibungswiderstandes dem Quadrate der Geschwindigkeit und der ersten Potenz der Fläche proportional sei, setzt daher

$$P = \psi \cdot O w^2 \tag{68}$$

und versteht unter ψ einen Coefficienten, der vorerst als constant und durch Versuche ermittelt angesehen wird. So setzt z. B. Rankine für die Reibung des Wassers an Schiffswandungen $\psi = 0{,}185$ für P in Kilogrammen, O in Quadratmetern und w in Metern; Knapp für die Bewegung des Wassers an den Schiffsschraubenflächen $\psi = 0{,}250$, während Froude bei Schiffswandungen $P = 0{,}159\, O w^{1,83}$ gefunden hat; nach ihm wäre daher in Gleichung (68)

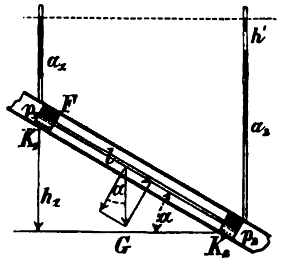
$$\psi = \frac{0{,}159}{w^{0,17}}$$

anzunehmen, wonach der Factor ψ variabel erscheint und mit grösser werdender Geschwindigkeit abnimmt, ein Resultat, wie es sich ähnlich auch durch genaue Versuche in Leitungen herausstellte, was noch besprochen werden wird. Vorerst mag an der Formel (68) mit constantem Werthe ψ festgehalten werden.

a) Energieverlust in einer prismatischen Leitung.

Es werde eine prismatische Leitung mit geradliniger Axe vom Querschnitte F angenommen; die Neigung der Axe gegen den Horizont sei α (Fig. 16) und in der Leitung befinden sich in der Entfernung l von einander zwei mit einander fest verbundene Kolben K_1 und K_2, die ohne Reibung verschiebbar sein sollen. Das zwischen beiden Kolben befindliche Flüssigkeitsvolumen Fl hat das Gewicht $G = Fl\gamma$; die Kraft, welche erforderlich ist, beide Kolben nebst der Flüssigkeit im Rohre mit der constanten Geschwindigkeit w fortzuschieben, wird demnach durch Gleichung (68) bestimmt. Für diese Kraft findet sich aber noch ein zweiter Ausdruck. Herrscht hinter dem Kolben K_1 der specifische Druck p_1 und vor dem vorderen Kolben K_2 der Druck p_2, so schreibt sich unter Hinzunahme der Schwerkraftscomponente $G \sin \alpha$ die Grösse der Kraft P auch

Fig. 16.



$$P = F(p_1 - p_2) + G \sin \alpha .$$

In Verbindung mit Gleichung (68) folgt hieraus, wenn die Piezometerstände $a_1 \gamma = p_1$ und $a_2 \gamma = p_2$ eingeführt werden, ferner der benetzte Umfang U der Leitung und damit die ganze benetzte Oberfläche $O = Ul$ gesetzt wird,

$$a_1 - a_2 + l \sin \alpha = \psi \cdot \frac{Ul}{F\gamma} \cdot w^2 .$$

Setzt man zur Vereinfachung

$$\psi \cdot \frac{2g}{\gamma} = \varphi , \tag{69}$$

sowie der Fig. 16 entsprechend $h_1 = l \sin \alpha$, so folgt

$$h_1 + a_1 - a_2 = \varphi \cdot \frac{Ul}{F} \cdot \frac{w^2}{2g} .$$

Bei Wegfall der Reibung wäre die rechte Seite Null, wonach die Wasserspiegel in den beiden Piezometern im gleichen Niveau liegen würden, die Reibung führt also einen Druckhöhen- oder Energieverlust h' herbei, welcher durch die Gleichung

$$h' = \varphi \cdot \frac{Ul}{F} \cdot \frac{w^2}{2g} \tag{70}$$

bestimmt ist, die auch gültig ist, wenn das Rohr in der Bewegungsrichtung um den Winkel α ansteigt, statt, wie es in Fig. 16 dargestellt ist, abzufallen.

Die Gleichung (70) spielt in der praktischen Hydraulik eine sehr wichtige Rolle, sie gilt auch für die gleichförmige Bewegung des Wassers in Flüssen und offenen Kanälen. Hier nahm man früher nach Eytelwein im Mittel $\varphi = 0{,}007565$ an, was nach Gleichung (69) auf den in Gleichung (68) vorkommenden Werth von ψ, nämlich $\psi = 0{,}386$ führt, doch haben die Untersuchungen der neueren Zeit auf eine ganze Reihe verschiedener Vorschläge geführt, durch Correctionen an Gleichung (70) den Gefällverlust h' bei Flüssen und Kanälen mit grösserer Genauigkeit auf dem Rechnungswege zu ermitteln.

Für die Zwecke der vorliegenden Schrift ist es wichtiger, den Energieverlust für **Rohrleitungen mit kreisförmigem Querschnitte** näher zu ermitteln. Ist d der Rohrdurchmesser, so ist in Gleichung (70) zu setzen $U = \pi d$ und $F = \frac{\pi d^2}{4}$; man erhält daher, wenn man speciell für eine solche Rohrleitung

$$\zeta r = 4 \varphi \tag{71}$$

einführt:

$$h' = \zeta r \cdot \frac{l}{d} \frac{w^2}{2g} . \tag{72}$$

Den Werth ζr bezeichnet man häufig als »**Reibungscoefficienten**« des Wassers im Rohre und nach der früheren Bezeichnung würde

$$\zeta = \zeta r \frac{l}{d}$$

als der der Rohrlänge l und Rohrweite d entsprechende »Widerstandscoefficient« anzusehen sein. Schon ältere Hydrauliker, wie Prony, Eytelwein und D'Aubuisson erkannten, dass genau genommen der Reibungscoefficient ζr nicht constant sei, sondern mit wachsender Geschwindigkeit langsam abnehme.

Für genauere Rechnungen benutzt man in neuerer Zeit gewöhnlich zur Bestimmung von ζr die Weisbach'sche empirische Formel:

$$\zeta r = \alpha + \frac{\beta}{\sqrt{w}} , \tag{73}$$

wobei α und β constante Werthe darstellen, die aus den Versuchen hervorgegangen sind.

Aus 52 Versuchen von Couplet, du Buat, Bossut und Gueymard, sowie 11 eigenen Versuchen hat Weisbach diese Constanten bestimmt. Da bei sehr kleinen Geschwindigkeiten der Werth ζr grösser ausfällt und entschiedener zum Ausdruck kommt, habe ich s. Z. auf Weisbach's Veranlassung an dessen hydraulischem Observatorium weitere 25 Versuche bei sehr kleinen Druckhöhen ausgeführt und dann auf Grund sämmtlicher 88 Versuche die beiden Constanten der Weisbach'schen Formel (73) $\alpha = 0{,}014312$ und $\beta = 0{,}010327$ gefunden*). Verbindet man Gleichung (71) mit Gleichung (69), so würde sich der in Gleichung (68) eingeführte Werth von ψ ergeben: $\psi = 12{,}742 \cdot \zeta r$.

So erhält man beispielsweise für w in Metern

$w =$ 0,25	$\zeta r =$ 0,03500	$\psi =$ 0,446
0,50	0,02892	0,368
1	0,02464	0,314
2	0,02161	0,275
4	0,01947	0,248
6	0,01853	0,236
8	0,01796	0,229
10	0,01758	0,224

Man sieht, dass bei genaueren Rechnungen die Veränderlichkeit von ζr nicht unbeachtet bleiben darf; bei Berechnung der Zuflussröhren von Turbinen setzt man gewöhnlich als mittlere Durchflussgeschwindigkeit $w = 1$ m und geht nur ungern zu einem grösseren Werthe über, weil der Energieverlust durch Reibung im Rohre rasch wächst; kleinere Werthe von w führen umgekehrt wieder auf grössere Rohrdurchmesser und damit auf grössere Gewichte des Rohres. Man setzt daher gewöhnlich im Mittel $\zeta r = 0{,}025$ und damit $\psi = 0{,}318$; bei Bewegung von Luftarten in Rohrleitungen nimmt man, was Versuche als zulässig ergaben, den Reibungscoefficienten ζr genau wie bei Wasser an, allerdings unter der ausdrücklichen Voraussetzung, dass nur geringe Druckdifferenzen vorliegen. Bei grosser Druckdifferenz, wenn demnach während des Durchströmens des Gases eine starke Expansion, also grosse Veränderung des specifischen Volumens vorliegt, gelten die entwickelten Sätze nicht mehr. Bemerkt mag noch werden, dass man bei der Berechnung der Rohrdurchmesser bei städtischen Hochdruckwasserleitungen in neuerer Zeit gewöhnlich $\zeta r = 0{,}0303$ nach Dupuit annimmt, um den Einfluss anderer schädlicher Widerstände noch annähernd in Rechnung zu bringen.

Die in vorstehender Zusammenstellung angegebenen Werthe von ψ gelten nur für Wasser und wurden aus den Resultaten der Versuche mit Röhren abgeleitet; um ψ für atmosphärische

*) Civilingenieur, 1854, Bd. I, p. 84.

Luft zu bestimmen, müsste der für Wasser angegebene Werth erst mit $\frac{1{,}2214}{1000}$ multiplicirt werden. (S. 6 Einleitung.)

Es erscheint übrigens nicht statthaft, die in vorstehender Tabelle angegebenen Werthe von ψ auf die Reibung des Wassers an ebenen oder schwach gekrümmten Flächen zu übertragen; so giebt z. B. Froude für Schiffsoberflächen bei denselben Geschwindigkeiten Werthe von ψ, die zufälligerweise ganz genau die Hälfte der Werthe ψ der vorstehenden Zusammenstellung sind. (Innerhalb der angegebenen Geschwindigkeitsgrenzen.) Das Gesetz der Veränderlichkeit stimmt daher fast genau mit der Weisbach'schen Formel (73).

Bei der Behandlung der Frage der Bewegung der Flüssigkeiten in Leitungen ist man übrigens auch noch von anderen Hypothesen, als der oben angenommenen, ausgegangen, doch liegt eine weitere Besprechung derselben ausserhalb der Grenzen, welche in vorliegender Schrift vorgeschrieben sind; nur auf einen Fall mag wegen seines allgemein technischen Interesses in der Kürze noch hingewiesen werden.

Würde man an Stelle der bei Aufstellung der Gleichung (68) gemachten Annahme von der Voraussetzung ausgehen, dass die Kraft zur Ueberwindung der Widerstände dem Querschnitte F und der Länge l der Leitung und überdies der ersten Potenz der Geschwindigkeit w proportional wäre, so fände sich nach der dort angegebenen Bezeichnung für eine horizontal liegende Leitung

$$F(p_1 - p_2) = \alpha F l w,$$

wo α einen durch Versuche festzustellenden Factor darstellt; diese Gleichung schreibt sich auch, wenn man mit G das Gewicht der in der Secunde durchgehenden Flüssigkeit bezeichnet, also $G = Fw\gamma$ setzt,

$$a_1 - a_2 = \frac{\alpha}{\gamma^2} \frac{l}{F} \cdot G.$$

Bezeichnet man den Factor von G mit R, setzt man also

$$R = \frac{\alpha}{\gamma^2} \frac{l}{F}, \tag{74}$$

so folgt:

$$a_1 - a_2 = R G \tag{75}$$

und die Arbeit L, welche in der Secunde zur Ueberwindung der Widerstände verbraucht wird, ergiebt sich:

$$L = G(a_1 - a_2) = R\,G^2 = \frac{(a_1 - a_2)^2}{R} \,. \tag{76}$$

Diese Formeln stimmen aber genau mit denjenigen überein, welche in der Elektrotechnik für die Bewegung eines elektrischen Stromes in einem Leiter gelten.

Der Differenz der Piezometerstände entspricht dort die Potentialdifferenz oder elektromotorische Kraft (in Volt); der Flüssigkeitsmenge G entspricht die Elektricitätsmenge oder Stromstärke (nach Ampère) und der Constanten R entspricht der Widerstand (nach Ohm).

Gleichung (75) repräsentirt das Ohm'sche und Gleichung (76) das Joule'sche Gesetz; nach Gleichung (74) ist der Widerstand der Länge l des Leiters direct und dem Querschnitte F umgekehrt proportional und der Factor $\frac{\alpha}{\gamma^2}$ ist vom Material des Leiters abhängig, ganz wie es die Elektrotechnik lehrt.

Die Analogie zwischen elektrischen und Flüssigkeits-Strömen ist wiederholt hervorgehoben und wenigstens mit Erfolg benutzt worden, gewisse Erscheinungen des elektrischen Stromes auf einfache Weise dem Verständnisse näher zu führen.

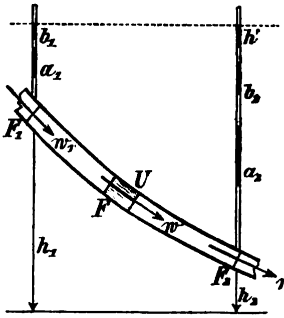
b) Energieverlust in einer Leitung mit veränderlichem Querschnitt.

Strömt die Flüssigkeit durch ein Rohr mit veränderlichem Querschnitt, so lässt sich für ein solches der Widerstandscoefficient der Reibung auf dem Näherungswege wie folgt ermitteln. Es möge dabei angenommen werden, dass zugleich, wie in Fig. 17 angedeutet ist, eine Rohrkrümmung vorliege, die aber nur eine mässige sein soll, um voraussetzen zu können, dass nicht etwa zugleich Wirbelbildungen eintreten, weil der durch solche hervorgerufene Energieverlust nicht bestimmt werden kann.

Man theile nun die Rohrlänge F_1F_2 in gleich lange kurze Strecken von der Länge s, solcher Art, dass man die einzelnen Stücke als prismatisch ansehen darf; für das in Fig. 17 durch Schraffur angedeutete Stück sei F der Querschnitt, U der Umfang, daher $O = Us$ die benetzte Oberfläche, w die Durchflussgeschwindigkeit; dann schreibt sich der Energie- oder Druckverlust für das Element s nach Gleichung (70):

$$\varphi \cdot \frac{Us}{F} \frac{w^2}{2g}.$$

Fig. 17.



Bezeichnet V das Flüssigkeitsvolumen, welches in der Secunde durch das Rohr geht, so findet sich w aus $V = Fw$ und damit erhält man statt des vorstehenden Ausdruckes:

$$\frac{\varphi}{2g} V^2 \cdot \frac{Us}{F^3}.$$

Durch Addition sämmtlicher Druckverluste auf der ganzen Strecke $F_1 F_2$ ergiebt sich nun der gesammte in Fig. 17 mit h' bezeichnete, der Reibung entsprechende Druckhöhenverlust:

$$h' = \frac{\varphi}{2g} V^2 \cdot \sum \left(\frac{Us}{F^3}\right). \tag{77}$$

Der hier angedeutete Summenausdruck lässt sich in der angegebenen Weise aus der Gefässform ableiten, wenn solche bekannt ist; Gleichung (77) zeigt zugleich, dass der Druckhöhenverlust h' der gleiche ist, wenn die Flüssigkeit bei gleichem Flüssigkeitsvolumen in der umgekehrten Richtung durch das Gefäss strömt. Nach den früheren Darlegungen wurde der Energieverlust einfach durch

$$h' = \zeta \frac{w_2^2}{2g} \tag{78}$$

dargestellt und ζ als Widerstandscoefficient bezeichnet; w_2 galt als Geschwindigkeit im vorderen Querschnitte F_2 (in der Bewegungsrichtung). Setzt man in Gleichung (77) $V = F_2 w_2$, so ergiebt sich daher in Verbindung mit vorstehendem Ausdruck:

$$\zeta = \varphi F_2^2 \cdot \sum \left(\frac{Us}{F^3}\right) \tag{78a}$$

als der der Reibung entsprechende Widerstandscoefficient für den angenommenen Fall.

Wollte man bei umgekehrter Bewegungsrichtung wieder an den vorderen Querschnitt denken, so wäre nach Fig. 17 in Gleichung (78a) F_1 statt F_2 zu setzen und in Gleichung (78) w_1 statt w_2, dabei würde aber ζ einen anderen Werth haben; in solchen Fällen, wie sie unten hervortreten werden, ist es aber bequemer, um für ζ ein und denselben Werth benutzen zu können, bei dem Hin- oder Rückgange der Flüssigkeit im Gefässe von ein- und demselben Querschnitte auszugehen, wobei man gewöhnlich den engeren Querschnitt zum Anhalt nimmt.

Bei Benutzung der Gleichung (78a) liesse sich im Mittel $\varphi = 0{,}007$ annehmen und der dort angegebene Summenausdruck unter Umständen auch durch Integration bestimmen. Ist nämlich x die Entfernung des Querschnittes F vom Anfangsquerschnitte F_1 und $F_1F_2 = l$ (Fig. 17) die ganze Kanallänge, so lässt sich die Länge s des Flüssigkeitselementes durch dx ersetzen; wäre nun der Umfang U sowohl, wie der Querschnitt F als Function von x bekannt, die Querschnittsänderung also analytisch bestimmbar, so fände sich statt Gleichung (78a) auch

$$\zeta = \varphi F_2{}^2 \cdot \int_0^l \frac{U}{F^3} dx. \tag{78b}$$

Es ist leicht, für verschiedene Kanalformen diese Gleichung zu verwerthen, doch werde hier von der Behandlung besonderer Fälle abgesehen. Die vorstehenden Betrachtungen wurden vorzugsweise angestellt, um die Grundlagen zur Bestimmung der Reibungswiderstände in »Turbinenkanälen« zu gewinnen und die entsprechenden Beobachtungen zu erläutern; solcher Beobachtungen liegen nun freilich nur wenige vor.

Zunächst ist Weisbach*) auf die Frage eingegangen und fand für den Durchgang des Wassers durch zwei verschiedene Kanäle, welche im verjüngten Maassstabe Turbinenkanälen nachgebildet waren, durch Versuche im Mittel $\zeta = 0{,}05$ bis $0{,}10$, wobei der Bezugsquerschnitt F_2 (Gleichung (78a)) der kleinere und zwar der Ausflussquerschnitt war.

Einen weiteren Einblick gewähren die Versuche von Fliegner, welche bereits oben auf S. 44 nach anderer Richtung hin Bespre-

---

*) Weisbach, »Versuche über den Widerstand, welchen das Wasser beim Durchgange durch Turbinenkanäle erleidet«. Polytechnisches Centralblatt 1850, p. 129.

chung gefunden haben. Verfolgt man in der Tabelle, in welcher Fliegner seine Versuchsresultate (a. a. O.) zusammenstellt, diejenigen Fälle, bei denen das Wasser ohne Ablenkung in die Turbinenkanäle eingeführt wurde, so zeigt sich bei einigen Kanälen der Coefficient ζ innerhalb der von Weisbach angegebenen Grenzen, bei der Mehrzahl aber grösser und zwar zwischen 0,1 und 0,2 liegend und in zwei Fällen sogar noch grösser, doch dürften hier Wirbelbildungen im Innern des Kanales vorgelegen haben.

Es liegt der Gedanke nahe, dass zuverlässige Werthe des Coefficienten ζ wohl nur durch Versuche an wirklich ausgeführten Turbinen gewonnen werden können; Versuche solcher Art müssten aber nach ihren Zielen weiter gesteckt sein, als dies gewöhnlich der Fall ist. Von den umfänglichen Versuchsreihen, welche veröffentlicht worden sind, wäre an diesem Orte vor Allem die ausgezeichnete Abhandlung von Haenel*) hervorzuheben, um so mehr, als in derselben zum ersten Male der Versuch gemacht wird, die in Rede stehenden Reibungscoefficienten aus Turbinenversuchen abzuleiten; die schönen Versuche und ihre vortreffliche Bearbeitung rühren von Bernhard Lehmann her, welcher nebenher auch einige Werthe von ζ berechnet, mit dem Hinweise allerdings, dass dieselben noch andere Widerstände, als die Reibung einschliessen. In anderer Weise habe ich diese Versuche ebenfalls in gleicher Richtung zu verwerthen gesucht und gefunden, dass der mittlere Werth von ζ zwischen 0,1 und 0,2 fällt, während mir die Untersuchung einer anderen grösseren Versuchsreihe von Francis**) mit einer Fourneyron-Turbine ζ zwischen 0,1 und 0,15 liegend ergab. Nach allem Vorstehenden soll daher bei den unten folgenden Berechnungen der Turbinen für den Widerstandscoefficienten der Reibung in Turbinenkanälen als Mittelwerth $\zeta = 0{,}125$ benutzt werden, wobei immer als Bezugsquerschnitt der engere Querschnitt gilt, auch wenn das Wasser vom engeren nach dem weiteren Querschnitte strömt. Die Annahme, dass der Energieverlust bei beiden Strömungsrichtungen der gleiche sei, wie oben bemerkt wurde, stützt sich auf das theoretische Ergebniss, dass allmähliche Querschnittsänderungen keine Energieverluste ergeben sollen; in Wirklichkeit gilt der Satz aber bei Erweiterungen allerdings

*) Eduard Haenel, »Ueber eine verbesserte Turbinenconstruction«. Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure. Bd. V. 1861. S. 163.

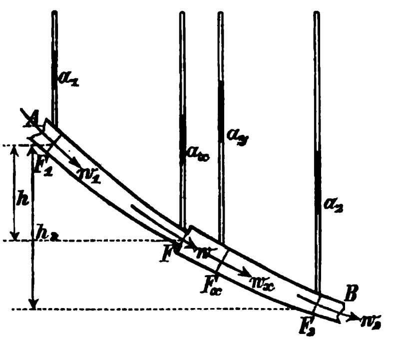
**) James B. Francis, »Lowell hydraulic experiments«. New York 1868.

nur, wenn die Querschnittszunahme sehr allmählich auf längere Strecken hin erfolgt; rasche Erweiterungen können sich unter Umständen wie plötzliche Querschnittsänderungen geltend machen*).

§ 6. Verallgemeinerung der Aufgabe: Bewegung der Flüssigkeiten durch Gefässe.

Nach den im Vorstehenden angegebenen Regeln über die Einführung des Reibungswiderstandes lässt sich nun die auf S. 24 unter Benutzung der dort angegebenen Fig. 8 behandelte allgemeine Aufgabe zu einem endlichen Abschlusse bringen.

Fig. 18.



Ist ζ_1 der Widerstandscoefficient der Reibung im oberen Rohrstück $F_1 F$ (Fig. 18) und ζ_2 der für das untere Rohrstück $F_x F_2$, so sind die entsprechenden Druckhöhenverluste

$$\zeta_1 \frac{w^2}{2g} \quad \text{und} \quad \zeta_2 \frac{w_2^2}{2g},$$

wenn man in beiden Fällen die Coefficienten auf den unteren Querschnitt des betreffenden Rohrstückes bezieht.

Nun folgt an Stelle von Gleichung (32) S. 24 für den oberen Gefässtheil:

$$\frac{w^2 - w_1^2}{2g} = a_1 - a_x + h - \zeta_1 \frac{w^2}{2g}, \tag{32a}$$

an Stelle von Gleichung (33) für den unteren Theil:

$$\frac{w_2^2 - w_x^2}{2g} = a_y - a_2 + h_2 - h - \zeta_2 \frac{w_2^2}{2g}. \tag{33a}$$

Die Gleichung (34) für den Vorgang an der plötzlichen Querschnittsänderung, nämlich:

$$\frac{w_x^2 - w^2}{2g} = a_x - a_y - \frac{(w - w_x)^2}{2g}, \tag{34a}$$

bleibt unverändert.

*) Fliegner, »Der Einfluss von Erweiterungen in Rohrleitungen«. Civilingenieur, Bd. 21, 1875, S. 97.

Die Addition der drei Gleichungen giebt:

$$2g(a_1 - a_2 + h_2) = w_2^2 - w_1^2 + (w - w_x)^2 + \zeta_1 w_1^2 + \zeta_2 w_2^2.$$

Benutzt man wiederum die in der Gleichung (36) angegebenen Beziehungen, nämlich:

$$\frac{F_2}{F_1} = \lambda, \quad \frac{F_2}{F} = m \quad \text{und} \quad \frac{F_2}{F_x} = n$$

und damit $w_1 = \lambda w_2$, $w = m w_2$ und $w_x = n w_2$, so folgt als Hauptgleichung zur Berechnung von w_2:

$$\frac{w_2^2}{2g} = \frac{a_1 - a_2 + h_2}{1 - \lambda^2 + (m-n)^2 + \zeta_1 m^2 + \zeta_2}. \tag{79}$$

Aus vorstehender Gleichung (32a) folgt dann sofort:

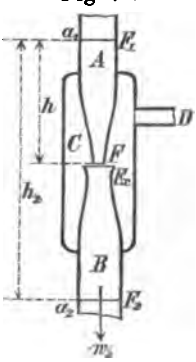
$$a_x = a_1 + h - ((1 + \zeta_1) m^2 - \lambda^2) \frac{w_2^2}{2g} \tag{80}$$

und aus Gleichung (34a):

$$a_y - a_x = 2n(m-n)\frac{w_2^2}{2g}. \tag{81}$$

Die letzten drei Gleichungen umfassen die Lösung einer grossen Reihe von einzelnen Aufgaben; würde übrigens an Stelle der plötzlichen Erweiterung ein allmählicher Uebergang vorliegen, so wäre einfach in den vorstehenden Formeln $w = w_x$ und damit $m = n$ zu setzen sein.

Fig. 19.



Das unter Zugrundelegung von Fig. 9 auf S. 27 behandelte Beispiel lässt sich mit Hilfe der vorstehenden Formeln leicht derart erweitern, dass die Versuchsergebnisse mit den Rechnungsresultaten in Uebereinstimmung zu bringen sind.

Hier mag nur als Beispiel eine Anordnung kurz besprochen werden, die als Bunsen'sche oder als Wasserstrahl-Luftpumpe ausserordentlich häufige Anwendung findet.

Aus einem Rohre A (Fig. 19) mit verticaler Axe strömt Wasser durch die Mündung F vertical abwärts in ein weiteres Rohr B vom Querschnitte F_x, das sich allmählich auf den Querschnitt F_2 erweitert. Im Querschnitte F_1 sei der Wasserdruck in Wassersäule gemessen a_1, und a_2 im Querschnitte F_2.

Die beiden Röhren A und B sollen vom Gehäuse C luftdicht umschlossen sein.

Verlangt man nun, dass in Folge des Durchströmens von Wasser beim Uebergange von F nach F_x, also im Gehäuse C Luftleere entsteht, so muss $a_x < 0$ sein und daher nach Gleichung (80):

$$\frac{w_2^2}{2g} > \frac{a_1 + h}{(1 + \zeta_1)m^2 - \lambda^2}.$$

Nach Gleichung (79) schreibt sich auch

$$\frac{w_2^2}{2g} = \frac{a_1 - a_2 + h_2}{(1 + \zeta_1)m^2 - \lambda^2 - (2m - n)n + 1 + \zeta_2}.$$

Die Verbindung beider Gleichungen giebt als Bedingung für Erzeugung der Luftleere:

$$\frac{a_1 + h}{a_2 + h - h_2} > \frac{(1 + \zeta_1)m^2 - \lambda^2}{(2m - n)n^2 - (1 + \zeta_2)}. \tag{82}$$

Bei den gewöhnlichen Wasserstrahl-Luftpumpen mündet das Saugrohr B ins Freie, es ist daher a_2 mit dem Atmosphärendruck a_0 identisch; überdies sind die Höhen h und h_2 sehr klein gegen a_1 und a_0 und wenn man den Querschnitt F_1 auf das Wasserleitungsrohr bezieht, lässt sich auch $\lambda = 0$ setzen; man erhält dann mit hinreichender Genauigkeit:

$$\frac{a_1}{a_0} > \frac{(1 + \zeta_1)m^2}{(2m - n)n - (1 + \zeta_2)}. \tag{82a}$$

Der Werth auf der linken Seite ist nun ohne Weiteres der erforderliche absolute Wasserdruck in der Zuleitung (Hochdruckwasserleitung) in Atmosphären gemessen.

Sind z. B. die Durchmesser der drei kreisförmigen Querschnitte F, F_x und F_2 beziehungsweise 2, 4 und 8 mm, so folgt $m = 16$ und $n = 4$; die vorstehende Formel giebt dann bei Vernachlässigung der Reibungswiderstände, also für $\zeta_1 = \zeta_2 = 0$, das Verhältniss $\frac{a_1}{a_0} > 2{,}3$; dagegen beispielsweise für $\zeta_1 = \zeta_2 = 0{,}1$

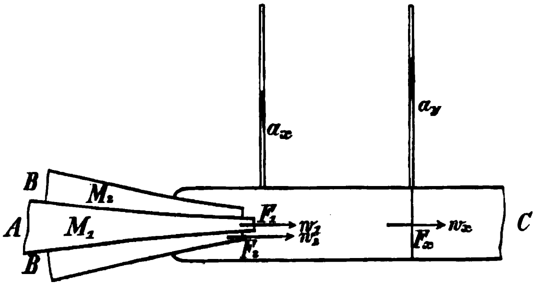
$$\frac{a_1}{a_0} > 2{,}5 \text{ Atmosphären.}$$

Der in den Hochdruckleitungen zur Verfügung stehende Druck ist gewöhnlich wesentlich grösser. Um in einem Raume Luftleere zu erzeugen, verbindet man übrigens diesen Raum durch das Seitenrohr D (Fig. 19) mit dem Gehäuse C*).

§ 7. Zur Theorie der Strahlapparate. Vereinigung oder Mischung mehrerer Flüssigkeitsstrahlen.

Aus einem Rohre oder einer Düse A (Fig. 20) ströme eine Flüssigkeit mit der Geschwindigkeit w_1 durch die Mündung vom Querschnitt F_1 und gleichzeitig unter anderem Drucke eine zweite Flüssigkeit durch das Rohr B, welches das erstere umschliesst, mit der Geschwindigkeit w_2 durch die Mündung F_2, welche die erstere Mündung F_1 ringförmig umgeben mag. Beide Strahlen treten in das geschlossene Rohr C, vereinigen oder mischen sich hier, bis sie vom Querschnitte F_x ab mit der gemeinschaftlichen Geschwindigkeit w_x weiter strömen.

Fig. 20.



Der Raum C zwischen den Düsenmündungen und dem Querschnitte F_x soll der »Mischungsraum« genannt und auf seiner ganzen Erstreckung prismatisch gedacht werden. Vor den Düsen herrsche der durch den Piezometerstand a_x gemessene Druck p_x

---

*) Auf die Möglichkeit, in der angedeuteten Weise Luftleere zu erzeugen, habe ich bereits 1863 in meiner Schrift »Das Locomotiven-Blasrohr« S. 116 hingewiesen; bei den Versuchen stand mir aber damals in Zürich an einem Reservoir zum Speisen der Tender nur eine Druckhöhe von 4,39 m Wassersäule zur Verfügung und gelangte ich daher nur auf eine Luftverdünnung, die 190,5 mm unter dem Quecksilberbarometerstande betrug. Heute, wo in allen grösseren Städten Hochdruckwasserleitungen bestehen, ist die Anwendung der Wasserstrahl-Luftpumpen in den chemischen und physikalischen Laboratorien eine ganz verbreitete. Die Theorie dieser Pumpe ist bereits in den Formeln enthalten, die ich in der angezogenen Schrift abgeleitet habe.

und im Querschnitte F_x der Druck p_y, welcher durch den Piezometerstand a_y angezeigt wird.

Das zu lösende Problem besteht nun darin, die Vorgänge im **Mischungsraume** festzustellen, d. h. die Beziehung zwischen den Piezometerständen a_x und a_y, den Geschwindigkeiten w_1, w_2 und w_x und den Querschnitten F_1, F_2 und F_x.

Mit der Beantwortung dieser Frage ist dann die Grundlage geschaffen, um in Verbindung mit den oben abgeleiteten Sätzen über die Bewegung der Flüssigkeiten in Gefässen die Vorgänge in einer Reihe verschiedener Apparate, die unter dem Namen »Strahlapparate« bekannt sind, rechnerisch zu verfolgen.

Der aus der Düse *A* strömende Flüssigkeitsstrahl kommt von einer Hochdruckleitung, während in der Regel die Düse *B* das obere Ende eines Rohres bildet, welches unten in ein Gefäss mit Flüssigkeit eintaucht, die vom Druckstrahl angesaugt und gehoben wird.

Dabei hat man aber zwei verschiedene Arten der Mischung zu unterscheiden:

Bei dem in Fig. 20 dargestellten Falle liegen die Axen der beiden Düsen und des Mischungsraumes in einer Geraden, während bei einzelnen anderen Strahlapparaten die Axen der beiden Düsen senkrecht auf einander stehen, der Strahl aus der Düse *B* also seitlich in den Mischungsraum *C* tritt. (Vergl. Fig. 21.)

Beide Fälle müssen von einander unterschieden werden, doch sollen hier die Untersuchungen nur unter der ausdrücklichen Voraussetzung durchgeführt werden, dass die Flüssigkeiten **vor und nach** der Mischung genau oder wenigstens nahezu das gleiche specifische Volumen haben, **dass also keine Dichtigkeitsänderungen stattfinden** *).

*) Das Problem der Mischung ist zur Zeit noch als ungelöst anzusehen, sobald Dichtigkeitsänderungen vorliegen; insbesondere hat man es mit einem solchen Falle zu thun bei Giffard's Injector, bei welchem ein Dampfstrahl mit einem kalten Wasserstrahl zusammentritt und im Mischungsraume (Fig. 20) Condensation stattfindet. Die Resultate der wenigen bekannten Versuche einer Theorie des Injectors sind nur als rohe Annäherungen zu betrachten.

Das Problem der Mischung von Flüssigkeitsstrahlen habe ich zuerst in meinem Buche »Das Locomotiven-Blasrohr« 1863 ausführlicher behandelt. Später ist nur Macquorn Rankine (1870) auf die Frage zurückgekommen, denn Grashof wiederholt in seiner »Theoretischen Maschinenlehre«, Bd. I, 1875, einfach dessen Darlegungen. Rankine entwickelt die Grundgleichung für den Mischungsvorgang auf etwas anderem Wege, als es von mir geschah

Mischung erster Art. (Fig. 20.)

Ist p_x der specifische Druck im Mischungsraume unmittelbar vor den beiden Düsen, so ist der Druck in der Bewegungsrichtung $F_x p_x$. Hierzu treten aber noch die Drücke, welche von den beiden austretenden Strahlen herrühren; ist M_1 die auf die Secunde bezogene Flüssigkeitsmasse, welche durch die Düse A ausströmt und ebenso M_2 die der Düse B entsprechende Masse, so ist nach den Angaben auf S. 22 der Druck der beiden Strahlen in der Bewegungsrichtung

$$M_1 (w_1 - w_x) + M_2 (w_2 - w_x)$$

und demnach der Gesammtdruck

$$F_x p_x + M_1 (w_1 - w_x) + M_2 (w_2 - w_x) .$$

Nach Beendigung der Mischung im Querschnitte F_x (Fig. 20) ist der gesammte Gegendruck $F_x p_y$ und dieser Werth ist mit dem vorstehenden identisch; durch Gleichsetzen erhält man

---

(vergl. Proceedings of the Royal Society 1870, deutsch im Civilingenieur, Bd. 17, 1871, S. 297 »Ueber die mathematische Theorie combinirter Ströme«) und erwähnt ausdrücklich die Uebereinstimmung seiner Grundgleichung mit der meinigen, deren Richtigkeit ich überdies (a. a. O.) durch zahlreiche Versuche bestätigt gefunden hatte.

Rankine erweitert das Problem insofern, als er mehr als zwei sich mischende Strahlen voraussetzt und führt die Formeln vor, wie sie sich gestalten, wenn beim Mischen Dichtigkeitsänderungen auftreten; praktisch verwerthen lassen sich aber diese Formeln nicht und daher ist oben im Texte von der Wiedergabe derselben abgesehen worden; die andere Erweiterung, die Entwickelung der Grundformeln auf die Mischung beliebig vieler Strahlen auszudehnen, ist oben im Texte berührt worden, doch hat man es bei den bekannten Strahlapparaten immer nur mit der Mischung von zwei Strahlen zu thun.

Einer der wichtigsten und verbreitetsten Strahlapparate ist der Blasrohrapparat der Locomotiven. Hier mischt sich im Mischungsraume (der Rauchkammer) der aus dem Blasrohre tretende Dampfstrahl mit den heissen Feuergasen, welche aus den Heizröhren kommen (nach Art der Fig. 21). Allein der zufällige Umstand, dass die Feuergase bei 300° bis 500° Temperatur nahezu dasselbe specifische Gewicht haben, wie der austretende Dampf, ermöglichte es mir, in der angegebenen Schrift in der Blasrohrtheorie auf praktisch verwerthbare Formeln zu gelangen. Eine Erweiterung dieser älteren Untersuchungen habe ich im Civilingenieur 1871 »Ueber die Wirkung des Blasrohrapparates bei Locomotiven mit conisch-divergenter Esse« gegeben.

$$F_x(p_y - p_x) = M_1(w_1 - w_x) + M_2(w_2 - w_x).$$

Ist γ das specifische Gewicht der Mischung im Querschnitte F_x beim Drucke p_y, so gilt die Beziehung

$$(M_1 + M_2)g = F_x w_x \gamma$$

und damit folgt aus der vorhergehenden Gleichung

$$\frac{p_y - p_x}{\gamma} = \frac{w_x}{g}\left[\frac{M_1 w_1 + M_2 w_2}{M_1 + M_2} - w_x\right]. \tag{83}$$

Es verdient hervorgehoben zu werden, dass diese Gleichung, so lange γ die angegebene Bedeutung hat, auch für den Fall gilt, dass während der Mischung Dichtigkeitsänderungen auftreten, sie ist auch, wogegen sich nichts einwenden lässt, wiederholt verwendet worden, um auf dem Näherungswege die Vorgänge beim Giffard'schen Injector zu verfolgen. Da hier und in der Folge von solchen Dichtigkeitsänderungen abgesehen wird, so ist die linke Seite dieser Gleichung einfach durch $a_y - a_x$, d. h. die Anschwellung der Piezometerstände zu ersetzen; man hat also

$$a_y - a_x = \frac{w_x}{g}\left[\frac{M_1 w_1 + M_2 w_2}{M_1 + M_2} - w_x\right]. \tag{84}$$

Liegt nur ein Strahl vor, wäre also $M_2 = 0$, so folgt

$$a_y - a_x = \frac{w_x(w_1 - w_x)}{g}$$

wie in Gleichung (27) S. 22 beim Eintritte eines Strahles in eine plötzliche Erweiterung.

Mischen sich beliebig viele Strahlen, so giebt Gleichung (84) sofort

$$a_y - a_x = \frac{w_x}{g}\left[\frac{\Sigma(Mw)}{\Sigma(M)} - w_x\right]. \tag{84a}$$

Für die in der Praxis vorkommenden Fälle ist nur Gleichung (84) von Bedeutung. Ist γ auch das specifische Gewicht der einzelnen Strahlen, so folgt wegen

$$M_1 g = F_1 w_1 \gamma, \quad M_2 g = F_2 w_2 \gamma \quad \text{und} \quad (M_1 + M_2)g = F_x w_x \gamma$$

aus Gleichung (84) sofort:

$$a_y - a_x = \frac{1}{g}\left[\frac{F_1}{F_x} w_1^2 + \frac{F_2}{F_x} w_2^2 - w_x^2\right]. \tag{85}$$

Während der Vereinigung der Strahlen im Mischungsraume findet nun aber in der Secunde ein **Arbeitsverlust** statt, der sich leicht in folgender Weise ermittelt.

Nach Gleichung (10) S. 12 unter Zugrundelegung der Fig. 2 war die Gesammtenergie im Strahle $E = \frac{w^2}{2g} + h + a$ bezogen auf die Gewichtseinheit, wofür sich bei horizontal liegender Gefässaxe und wenn man das Niveau OO (Fig. 2) mit der Gefässaxe zusammenfallen lässt, schreibt:

$$E = \frac{w^2}{2g} + a\,.$$

Da $M_1 g$ das Gewicht des in der Secunde aus der Düse A strömenden Strahles ist, so folgt die Gesammtenergie E_1 desselben

$$E_1 = M_1 g\left(\frac{w_1^2}{2g} + a_x\right);$$

ebenso die Energie im zweiten Strahle

$$E_2 = M_2 g\left(\frac{w_2^2}{2g} + a_x\right),$$

welche Werthe sich auf den Zustand **vor** der Mischung beziehen. Der Energiewerth E_x nach der Mischung findet sich:

$$E_x = (M_1 + M_2)g\left(\frac{w_x^2}{2g} + a_y\right)$$

und daher der Energie- oder Arbeitsverlust in der Secunde, der mit L bezeichnet werden mag

$$L = E_1 + E_2 - E_x$$

oder mit Benutzung vorstehender Formeln:

$$L = \frac{M_1}{2}(w_1^2 - w_x^2) + \frac{M_2}{2}(w_2^2 - w_x^2) - (M_1 + M_2)g\,(a_y - a_x). \quad (86)$$

Verwendet man nun hier Gleichung (84), so ergiebt sich nach einigen einfachen Reductionen

$$L = \frac{M_1(w_1 - w_x)^2}{2} + \frac{M_2(w_2 - w_x)^2}{2}, \quad (87)$$

gültig für zwei Strahlen; für beliebig viele Strahlen schreibt sich

$$L = \sum \left[\frac{M(w - w_x)^2}{2} \right] \tag{88}$$

und für einen Strahl, also für $M_2 = 0$, ergiebt sich der Arbeitsverlust der Gewichtseinheit $M_1 g = 1$:

$$L = \frac{(w_1 - w_x)^2}{2g} = h'.$$

Das ist die verlorene Druckhöhe, wie sie bereits durch Gleichung (31) S. 23 gegeben wurde.

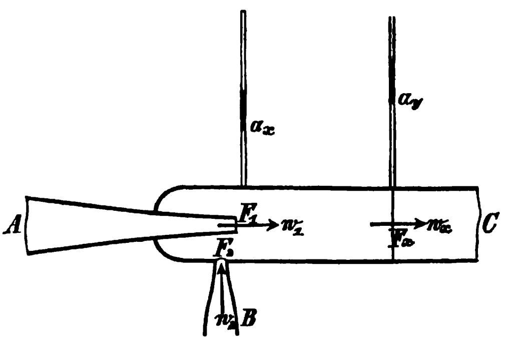
Man erkennt, dass Gleichung (88) der allgemeine Ausdruck für den Borda-Carnot'schen Satz ist.

Mischung zweiter Art. (Fig. 21.)

Hier mündet, wie bereits erwähnt wurde, die zweite Düse B seitlich in den Mischungsraum; beide Düsenaxen stehen senkrecht auf einander.

Bei der gleichen Bezeichnung, wie im obigen Falle findet sich hier der Arbeitsverlust bei der Mischung gleichfalls durch Gleichung (86), die Verhältnisse für die einzelnen Strahlen sind aber andere; der Arbeitsverlust für den ersten Strahl, der mit L_1 bezeichnet werden mag, ist wie vorhin:

Fig. 21.



$$L_1 = \frac{M_1 (w_1 - w_x)^2}{2}.$$

Der Arbeitsverlust L_2 für den zweiten Strahl aber findet sich durch folgende Betrachtung: beim Eintritte des Strahles in den Mischungsraum geht die Geschwindigkeit w_2 und damit die Arbeit $\frac{M_2 w_2^2}{2}$ verloren, die Versetzung der Masse M_2 aus der Ruhe in die Geschwindigkeit w_x erfordert den Arbeitsaufwand $\frac{M_2 w_x^2}{2}$ und daher folgt

$$L_2 = \frac{M_2(w_2^2 + w_x^2)}{2}$$

und demnach der gesammte Arbeitsverlust $L = L_1 + L_2$ oder

$$L = \frac{M_1(w_1 - w_x)^2}{2} + \frac{M_2(w_2^2 + w_x^2)}{2}, \tag{89}$$

wofür sich auch schreibt:

$$L = \frac{M_1(w_1 - w_x)^2}{2} + \frac{M_2(w_2 - w_x)^2}{2} + M_2 w_2 w_x.$$

Der Vergleich mit Gleichung (87) zeigt, dass bei der zweiten Art der Mischung ein grösserer Arbeitsverlust vorliegt, als bei der ersten Art.

Durch Gleichsetzen der Gleichungen (89) und (86) erhält man jetzt nach einfacher Reduction

$$a_y - a_x = \frac{w_x}{g}\left[\frac{M_1 w_1}{M_1 + M_2} - w_x\right], \tag{90}$$

und der Vergleich dieser Formel mit Gleichung (84) zeigt wiederum den Unterschied zwischen beiden Arten der Mischung.

Beachtet man wieder die Beziehungen

$$M_1 g = F_1 w_1 \gamma \quad \text{und} \quad (M_1 + M_2) g = F_x w_x \gamma,$$

so folgt auch:

$$a_y - a_x = \frac{1}{g}\left[\frac{F_1}{F_x} w_1^2 - w_x^2\right] \tag{91}$$

neben Gleichung (85).

Die beiden Gleichungen (85) und (91) sind es nun, welche bei der Ableitung der Grundformeln der verschiedenen in Vorschlag und Anwendung gekommenen Strahlapparate Verwendung finden; um dabei nicht für jede der beiden verschiedenen Mischungsarten die Hauptgleichungen gesondert entwickeln zu müssen, ist es zweckmässig, Gleichung (85) in folgender Form zu benutzen:

$$a_y - a_x = \frac{1}{g}\left[\frac{F_1}{F_x} w_1^2 + \varphi \frac{F_2}{F_x} w_2^2 - w_x^2\right]. \tag{92}$$

Liegt nun der erste Fall der Mischung vor (Fig. 20), so hat man schliesslich $\varphi = 1$ zu setzen, während im anderen Falle der Mischung (Fig. 21) $\varphi = 0$ zu substituiren ist.

Der Arbeitsverlust im Mischungsraume, auf die Secunde bezogen, schreibt sich

$$L = \frac{1}{2}[M_1 w_1^2 + M_2 w_2^2 + (M_1 + M_2) w_x^2 - 2 w_x (M_1 w_1 + \varphi M_2 w_2)]. \qquad (93)$$

Setzt man $\varphi = 1$, so gelangt man auf Gleichung (87) und für $\varphi = 0$ auf Gleichung (89).

Führt man, wie es im Vorstehenden wiederholt geschehen ist, an Stelle der Flüssigkeitsmassen die Querschnitte und Geschwindigkeiten ein, so ergiebt sich aus Gleichung (93) auch:

$$L = \frac{\gamma}{2g}[(F_1 w_1^3 + F_2 w_2^3 + F_x w_x^3) - 2 w_x (F_1 w_1^2 + \varphi \cdot F_2 w_2^2)], \qquad (93a)$$

in welchem Ausdrucke wiederum je nach dem vorliegenden Falle der Mischungsart $\varphi = 1$ oder $\varphi = 0$ zu setzen ist und γ das specifische Gewicht der Flüssigkeitsstrahlen vor und nach der Mischung bedeutet.

Es würden die Ziele der vorliegenden Schrift weit überschritten werden, wenn nun hier die Strahlapparate in ihren verschiedenen Anordnungen der Untersuchung unterworfen werden sollten; es soll daher hier nur ein Fall behandelt und derart vorgeführt werden, dass sich aus ihm eine ganze Reihe anderer Fälle mit Leichtigkeit ableiten lassen.

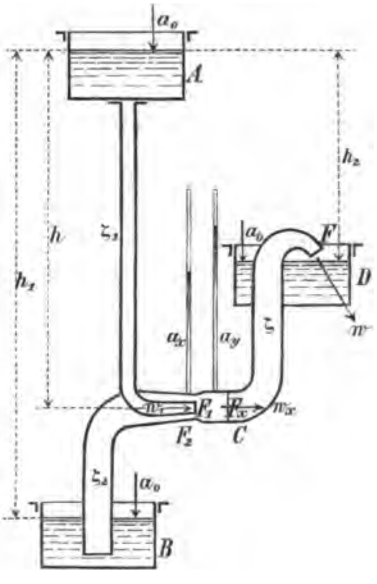
Hierzu eignet sich am besten die Thomson'sche Wasserstrahlpumpe, wenn man sich dieselbe zugleich als Saug- und Druckpumpe ausgeführt denkt.

Theorie der Thomson'schen Wasserstrahlpumpe und verwandter Apparate.

Aus einem Gefässe A (Fig. 22), in welchem Wasser unter atmosphärischem Drucke a_0 steht, ströme dasselbe in einem Rohre, dem Einfallrohre, herab und aus einer Düse vom Mündungsquerschnitte F_1 mit der Geschwindigkeit w_1 in den Mischungsraum C: diese Düse wird von einer zweiten Düse vom Querschnitte F_2, durch welchen das Wasser mit der Geschwindigkeit w_2 strömt, umschlossen; sie befindet sich am oberen Ende eines Rohres, dem

Saugrohre, welches unten in das Gefäss B eintaucht. Vom Mischungsraume C aus, dessen Querschnitt wieder mit F_x bezeichnet werden mag und welches von der Mischung mit der Geschwindigkeit w_x durchflossen wird, erstreckt sich ein Rohr, das Druckrohr, vertical aufwärts und aus diesem tritt das Wasser durch eine Mündung vom Querschnitte F mit der Geschwindigkeit w unter atmosphärischem Drucke a_0 in das Abflussgefäss D. Die Spiegel der beiden Gefässe A und B liegen um h_1 über einander und der Spiegel im Gefässe D um h_2 unter dem des Gefässes A, unter welch letzterem die Axe des Mischungsraumes im Abstande h liegen mag. Der Vorgang im Mischungsraume unter Einführung der beiden Piezometerstände a_x und a_y ist vorhin ermittelt worden; Fig. 22 ist unter der Annahme gezeichnet worden, dass eine Mischung erster Art, wie in Fig. 20, vorliege; die folgenden Ableitungen gelten aber auch für die zweite Mischungsart nach Fig. 21, nur hat man sich dann Fig. 22 in der Art abgeändert zu denken, dass die Düse F_2 normal zur Düse F_1 in den Mischungsraum einmündet.

Fig. 22.



Für das Einfallrohr sei der Widerstandscoefficient ζ_1 als gegegeben anzusehen, ebenso ζ_2 für das Saugrohr und ζ für das Druckrohr; überdies werde vorausgesetzt, dass die Höhen h_1, h_2 und h, sowie die Querschnitte F_1, F_2, F_x und F gegeben seien und dass der Apparat richtig spielt, dass nämlich durch das aus A kommende Wasser aus dem Gefässe B Wasser herangesaugt wird und die vereinigte Wassermenge im Druckrohre hinaufströmt und oben zum Ausguss gelangt. Die Theorie muss den Nachweis liefern, welche Bedingungen hierbei zu erfüllen sind und ob der Apparat überhaupt und unter welchen Verhältnissen er der Praxis empfohlen werden kann.

Nach den früheren Untersuchungen über die Bewegung der Flüssigkeiten durch Gefässe lassen sich nun sogleich die folgenden Formeln anschreiben:

Für die Bewegung durch das Einfallrohr findet sich:

$$2g(a_0 - a_x + h) = (1 + \zeta_1) w_1^2. \tag{94}$$

Für die Bewegung durch das Saugrohr:

$$2g(a_0 - a_x + h - h_1) = (1 + \zeta_2) w_2^2 \tag{95}$$

und für die Bewegung durch das Druckrohr:

$$2g(a_y - a_0 - (h - h_2)) = (1 + \zeta) w^2 - w_x^2. \tag{96}$$

Für den Vorgang bei der Mischung fand sich allgemein nach Gleichung (92)

$$2g(a_y - a_x) = 2\frac{F_1}{F_x} w_1^2 + 2\varphi \frac{F_2}{F_x} w_2^2 - 2w_x^2.$$

Nimmt man von den beiden letzten Gleichungen die Differenz und berücksichtigt man dabei die Beziehung $Fw = F_x w_x$, so findet sich

$$g(a_0 - a_x + h - h_2) = \frac{F_1}{F_x} w_1^2 + \varphi \frac{F_2}{F_x} w_2^2$$
$$- \frac{1}{2}\left[1 + (1 + \zeta)\frac{F_x^2}{F^2}\right] \cdot w_x^2.$$

Nun ist aber:

$$F_x w_x = F_1 w_1 + F_2 w_2$$

oder:

$$w_x = \frac{F_1}{F_x} w_1 + \frac{F_2}{F_x} w_2$$

und wenn man für die hier auftretenden Querschnittsverhältnisse die Beziehungen

$$\frac{F_x}{F_1} = m, \qquad \frac{F_2}{F_1} = n, \qquad \text{also} \qquad \frac{F_x}{F_2} = \frac{m}{n}, \qquad \text{sowie}$$

$$\frac{1}{2}\left[1 + (1 + \zeta)\frac{F_x^2}{F^2}\right] = \lambda \tag{97}$$

einführt:

$$m^2 g\left(\frac{a_0 - a_x + h - h_2}{w_1^2}\right)$$
$$= (m - \lambda) - (\lambda n^2 - \varphi m n)\left(\frac{w^2}{w_1}\right)^2 - 2\lambda n\left(\frac{w_2}{w_1}\right). \tag{98}$$

Die drei Gleichungen (94), (95) und (98) führen jetzt zur Lösung des vorgelegten Problems; die Verbindung der genannten Formeln ergiebt durch Elimination von $(a_0 - a_x + h)$ nach einigen leicht zu verfolgenden Zwischenrechnungen als erste Hauptgleichung:

$$\left[\frac{(1+\zeta_2)m^2}{2}\frac{h_2}{h_1} + (\lambda n^2 - \varphi m n)\right]\left(\frac{w_2}{w_1}\right)^2 + 2\lambda n\left(\frac{w_2}{w_1}\right)$$
$$= (m - \lambda) - \frac{(1+\zeta_1)m^2}{2}\left(1 - \frac{h_2}{h_1}\right). \tag{99}$$

Aus der Differenz von Gleichung (94) und (95) ergiebt sich

$$w_1 = \sqrt{\frac{2gh_1}{(1+\zeta_1) - (1+\zeta_2)\left(\frac{w_2}{w_1}\right)^2}} \tag{100}$$

und dann aus Gleichung (94)

$$a_0 - a_x + h = (1+\zeta_1)\frac{w_1^2}{2g}. \tag{101}$$

Der Gang der Rechnungen ist nun ein einfacher; aus Gleichung (99) bestimmt sich unter Berücksichtigung der Gleichungen (97) das Verhältniss $\left(\frac{w_2}{w_1}\right)$, dann folgt w_1 aus Gleichung (100) und $w_2 = \left(\frac{w_2}{w_1}\right) w_1$, sowie endlich der Piezometerstand a_x im Mischungsraume nach Gleichung (101).

Wirkt der Apparat als Pumpe, so ist das Gewicht G_1 der Betriebswassermenge $G_1 = F_1 w_1 \gamma$ und das Gewicht G_2 der gehobenen Wassermenge $G_2 = F_2 w_2 \gamma$. Die Gefällhöhe ist h_2 und die Förderhöhe $(h_1 - h_2)$, daher die Betriebsarbeit $G_1 h_2$ und die Nutzarbeit $G_2(h_1 - h_2)$ sowie der Wirkungsgrad η der Pumpe:

$$\eta = \frac{G_2(h_1 - h_2)}{G_1 h_2} = n \cdot \frac{(h_1 - h_2)}{h_2}\left(\frac{w_2}{w_1}\right). \tag{102}$$

Man ersieht aus den letzten vier Formeln, dass die Theorie des einfachen Apparates auf complicirte Gleichungen führt; allerdings enthalten dieselben auch die Grundlagen für die Lösung einer ganzen Reihe von verschiedenen Anordnungen. Liegt der in Fig. 22 gezeichnete Apparat in Zeichnung oder wirklicher Ausführung vor, so hat es keine Schwierigkeit, nach den gegebenen Formeln die Rechnung durchzuführen und zu erkennen, ob der Apparat wirklich

Flüssigkeit zu heben vermag und welcher Wirkungsgrad hierbei vorliegt; auf fast unüberwindliche Schwierigkeiten stösst man aber, wenn man an der Hand der Formeln die günstigsten Querschnittsverhältnisse ableiten soll, bei welchen der Wirkungsgrad η ein Maximum ist. Die Formeln gelten, wie hier wiederholt werden mag, für beide Mischungsarten (Fig. 20 und Fig. 21); man hat in Gleichung (99) nur $\varphi = 1$ oder $\varphi = 0$ zu substituiren; der Fall $\varphi = 1$ ist der günstigere, weil hier, wie oben nachgewiesen worden ist, der Arbeitsverlust im Mischungsraume kleiner ausfällt.

Der Apparat ist hier als Wasserstrahlpumpe behandelt worden, die Formeln gelten aber auch für Luft und Luft, in welchem Falle der Apparat als Ventilator wirkt und die Höhen h_1 und h_2 in Luftsäulen substituirt werden müssen.

So complicirt die letzten Gleichungen sind, so lassen sich doch aus denselben einige wichtige allgemeine Schlüsse ziehen.

Zunächst ist zu bemerken, dass die Hauptformeln (99), (100) und (102) die Grösse h, d. h. die Höhenlage des Mischungsraumes C nicht enthalten, der Werth h ist nach Gleichung (101) nur auf die Grösse a_x von Einfluss.

Man kann hiernach die Lage des Mischungsraumes beliebig wählen, ohne dadurch an der Wirkung des Apparates etwas zu ändern, nur die Werthe der Widerstandscoefficienten ζ_1, ζ_2 und ζ stellen sich dabei etwas verschieden.

So kann man also die Axe des Mischungsraumes C (Fig. 22) in die Höhe des Auffanggefässes D legen; die Axe des Druck- oder Ausgussrohres liegt dann horizontal und die Pumpe wirkt nur als Saugpumpe, es ist $h = h_2$ zu setzen. Diese Anordnung lag bei Thomson vor. Andererseits kann man auch die Axe des Mischungsraumes C in das untere Gefäss B legen; dann fällt das Saugrohr fort und die Pumpe wirkt als reine Druckpumpe. Diese Anordnung, bei der $h = h_1$ ist, erscheint als die bessere und ist von Nagel zur Entleerung von Baugruben angewendet worden*).

Zum allgemeinen Falle (Fig. 22) zurückkehrend, ist von besonderer Wichtigkeit zu bemerken, dass in Gleichung (99) sich w_2 positiv ergeben muss, wenn von wirklicher Wasserhebung die Rede

*) R. R. Werner, »Nagel's Wasserstrahlpumpe, nebst einer Theorie der Wasserstrahlpumpen«. Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure. Bd. 10, 1866, S. 121.

sein soll. Für den unteren Grenzwerth $w_2 = 0$ steht das Wasser im Saugrohre still und das aus dem Einfallrohre kommende Wasser strömt einfach im Druckrohre hinauf. Setzt man in Gleichung (99) $w_2 = 0$, so folgt für diesen Gleichgewichtszustand

$$\frac{h_1 - h_2}{h_1} = \frac{2(m - \lambda)}{(1 + \zeta_1)\,m^2}$$

und wenn eine wirkliche Wasserhebung stattfinden soll, muss die Bedingung

$$\frac{h_1 - h_2}{h_1} < \frac{2(m - \lambda)}{(1 + \zeta_1)\,m^2}$$

erfüllt sein, wobei m und λ die in den Gleichungen (97) gegebene Bedeutung haben.

Die näheren Untersuchungen praktischer Fälle zeigen, dass hierbei die Förderhöhe $h_1 - h_2$ immer nur einen kleinen Theil der Höhe h_1 bildet und dass die Gleichung (102) jederzeit auf einen sehr ungünstigen Wirkungsgrad η führt. Dieser Umstand allein schon lässt es rechtfertigen, dass eine weitere Verfolgung der Aufgabe in der angegebenen Richtung hier unterlassen wird; man wird derartige Hebeapparate wegen ihrer einfachen constructiven Anordnung nur dann anwenden, wenn das Druckwasser billig zur Verfügung steht und vielleicht nur vorübergehende Wasserförderung stattfinden soll.

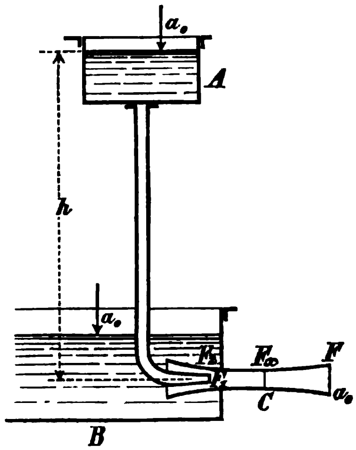
Die ungünstige Wirkung liegt, wenn, wie hier angenommen worden ist, die Mischung ohne Dichtigkeitsänderungen erfolgt, in dem grossen Arbeitsverlust, der im Mischungsraume vorliegt; die verlorene Arbeit setzt sich hier unerwünschter Weise in Wärme um.

Ganz anders liegen die Verhältnisse beim Giffard'schen Injector, der gleichfalls zur Classe der Wasserhebungsapparate zu zählen ist, denn hier wird das Speisewasser vom atmosphärischen Druck auf den Druck im Dampfkessel gehoben. Die durch die plötzlichen Geschwindigkeitsänderungen und die Dampfcondensation hervorgerufene Wärmeentwickelung bewirkt, dass das Speisewasser stark vorgewärmt in den Kessel tritt, und darin liegt ein solcher Vortheil, dass nach der thermodynamischen Theorie der Injector als ein sehr vollkommener Apparat anzusehen ist*).

*) Vergl. des Verfassers »Technische Thermodynamik«, Bd. II, Leipzig 1890, S. 127, ebenso die ältere Auflage »Grundzüge der mech. Wärmetheorie«, 1866.

Im Vorstehenden sind die Strahlapparate als Pumpen, als Hebeapparate besprochen worden; es verdient aber noch der Fall der Berücksichtigung, dass eine Hebung nicht vorliegt, sondern die angesaugte Flüssigkeit einfach aus einem Raume nach einem zweiten gefördert wird, wo sie unter dem gleichen Drucke steht. Fig. 23 stellt diesen Fall dar. Die aus dem Gefässe A im Einfallrohre herabströmende Flüssigkeit saugt die zweite Flüssigkeit aus dem Gefässe B nach dem Mischungsraume C und die vereinigten Strahlen fliessen dann durch die Mündung F ins Freie.

Fig. 23.



Hier ist einfach, wie der Vergleich mit Figur 22 zeigt, $h_1 = h_2 = h$ und daher folgt aus Gleichung (99)

$$\left[\frac{(1+\zeta_2)}{2}m^2 + \lambda n^2 - \varphi m n\right]\left(\frac{w_2}{w_1}\right)^2 + 2\lambda n\left(\frac{w_2}{w_1}\right) = m - \lambda, \qquad (103)$$

wobei für den in Fig. 23 dargestellten Fall $\varphi = 1$ zu setzen wäre; das Ausgussrohr ist conisch divergent gezeichnet, es ist daher in der für λ gegebenen Formel (97) $F > F_x$ und damit, wenn man den Widerstandscoefficienten ζ als sehr klein vernachlässigt, $\lambda < 1$; für ein prismatisches Rohr wäre $F = F_x$ und damit $\lambda = 1$.

An Stelle von Gleichung (100) wäre zu schreiben

$$w_1 = \sqrt{\frac{2gh}{(1+\zeta_1) - (1+\zeta_2)\left(\frac{w_2}{w_1}\right)^2}},$$

und diese Gleichung giebt mit Gleichung (101) verbunden:

$$\frac{a_0 - a_x}{h} = \frac{\left(\frac{w_2}{w_1}\right)^2}{\frac{1+\zeta_1}{1+\zeta_2} - \left(\frac{w_2}{w_1}\right)^2}. \qquad (104)$$

Das Gewicht der in der Secunde vom Gefässe A kommenden

Flüssigkeit ist $G_1 = F_1 w_1 \gamma$ und das Gewicht der angesaugten Flüssigkeit $G_2 = F_2 w_2 \gamma$ und daher ergiebt sich:

$$\frac{G_2}{G_1} = n \cdot \frac{w_2}{w_1}. \tag{105}$$

Bemerkenswerth ist, dass Gleichung (103) den Werth der Druckhöhe h nicht enthält, es ist daher das Verhältniss $\frac{w_2}{w_1}$ und damit auch $\frac{G_2}{G_1}$ von der Grösse h unabhängig.

Die angegebenen Formeln gelten auch, wenn Luft an Stelle von Wasser tritt; das Gefäss A ist dann durch einen geschlossenen Raum ersetzt zu denken, in welchem sich comprimirte Luft befindet, welche unter dem Ueberdruck h in Luftsäule gemessen ausströmt und aus dem geschlossenen Raume B Luft, die unter atmosphärischem Druck steht, ansaugt, um sie durch das Austrittsrohr C ins Freie zu führen.

Würde man sich das Gefäss A durch einen Wasserdampfkessel ersetzt denken, so würde durch den austretenden Dampfstrahl kalte Luft aus dem Raume B gefördert und das Ganze als Dampfstrahlventilator hervortreten.

Für diesen Fall würden allerdings die Formeln nur auf Näherungswerthe führen, weil die angesaugte kalte Luft ein anderes specifisches Gewicht als der austretende Dampf hat, also Dichtigkeitsänderungen bei der Mischung auftreten, und in einem solchen Falle, wie oben schon erwähnt wurde, eine strenge Lösung des Problemes bis jetzt noch nicht möglich erschienen ist.

Nimmt man aber an, dass die aus dem Raume B kommende Luft auf 300° bis 500° erhitzt ist, so tritt nahezu Gleichheit des specifischen Gewichtes der angesaugten Luft und des austretenden Dampfes, der nahezu atmosphärischen Druck besitzt, ein und damit wird die Zuverlässigkeit der Formeln (103) bis (105) wieder erreicht.

Dieser Fall liegt nun aber bei einem der wichtigsten und verbreitetsten Strahlapparate, nämlich beim Blasrohrapparate der Locomotiven vor; man hat es hier aber mit dem zweiten Falle der Mischung (Fig. 21, S. 64) zu thun und sich Fig. 23 derart umgeändert zu denken, dass die angesaugte Luft seitlich in den

Mischungsraum C tritt; es ist demnach hier $\varphi = 0$ und Gleichung (103) zu schreiben:

$$\left[\frac{1+\zeta_2}{2} m^2 + \lambda n^2\right]\left(\frac{w_2}{w_1}\right)^2 + 2\lambda n \left(\frac{w_2}{w_1}\right) = m - \lambda, \qquad (103\,\mathrm{a})$$

während die Gleichungen (104) und (105) unverändert bleiben. Das sind aber dieselben Formeln, welche ich seiner Zeit ursprünglich für $\lambda = 1$ (cylindrische Esse) auf ganz anderem Wege abgeleitet habe. Dabei ist in den Formeln (97), nämlich:

$$\frac{F_x}{F_1} = m; \quad \frac{F_2}{F_1} = n; \quad \frac{1}{2}\left[1 + (1+\zeta)\frac{F_x^2}{F^2}\right] = \lambda,$$

F_1 der Blasrohrquerschnitt,
F_2 die Summe der Querschnitte aller Heizröhren,
F_x der untere und F der obere Essenquerschnitt,
w_1 die Geschwindigkeit des Dampfes in der Blasrohrmündung,
w_2 die Geschwindigkeit der Feuergase, mit welcher sie in den Mischungsraum (die Rauchkammer) eintreten,
ζ_2 der Widerstandscoefficient für den Durchgang der Luft durch die Brennstoffschicht und die Heizröhren und ζ der Widerstandscoefficient für die Esse, den man im Allgemeinen vernachlässigen kann.

Bestimmt man aus Gleichung (103a) den Werth $\frac{w_2}{w_1}$, so berechnet sich nach Gleichung (105) das Verhältniss $\frac{G_2}{G_1}$, d. h. das Gewicht der Luftmenge, welche von der Gewichtseinheit Dampf, zur Anfachung des Feuers auf dem Roste der Feuerbüchse, angesaugt wird.

Diese Verhältnisse sind, was besonders bemerkenswerth ist, unabhängig vom Blasrohrüberdruck h, der hier nicht constant, sondern periodisch veränderlich ist.

Setzt man den Werth $\frac{w_2}{w_1}$ in Gleichung (104) ein, so berechnet sich der Werth $a_0 - a_x$; dabei ist a_0 der Atmosphärendruck, a_x der Druck in der Rauchkammer und $a_0 - a_x$ die sogenannte Depression in der Rauchkammer, die hier bei normalen Verhältnissen dem Werthe h proportional erscheint und durch Beobachtung verfolgt werden kann; sie ändert sich periodisch wie h. Unbequem für praktische Rechnungen ist die unrein quadratische Form der Gleichung (103a); die Benutzung der bei Locomotiven gebräuchlichen Querschnittsverhältnisse m, n und λ ergab, insbesondere auch mit Rücksicht auf die Unsicherheit des Coefficienten ζ_2, dass sich näherungsweise in Gleichung (103a) das zweite Glied der linken Seite vernachlässigen und daher einfach schreiben lässt:

$$\frac{w_2}{w_1} = \sqrt{\frac{2(m-\lambda)}{(1+\zeta_2)m^2 + 2\lambda n^2}}.$$

Die Substitution dieses Ausdruckes in Gleichung (104) und (105) giebt dann die Formeln, die ich a. a. O. für den Blasrohrapparat aufgestellt habe; mittleren Beobachtungen entsprechend setzte ich dabei $\zeta = 11$ und $\zeta_2 = 0{,}2$. Hält man die angegebene Vernachlässigung als zu weitgehend, so muss man zu Gleichung (103a) zurückgehen.

Grove gab später eine andere näherungsweise Lösung*) auf Grund der obigen Gleichungen und findet schliesslich Formeln, die von den meinigen etwas abweichen, weniger einfach sind und in mehreren Schriften über Locomotiven seitdem als genauer hingestellt wurden. Grove macht aber den bei Näherungsrechnungen häufig wiederkehrenden Fehler, dass er in einem Theile seiner Entwickelungen ein Glied als klein vernachlässigt, das er im anderen Theile stehen lässt; ohne diesen Fehler würde er wieder auf meine Formeln gelangt sein.

Es giebt schon Wege, eine bessere Näherungsrechnung durchzuführen, doch ist hier nicht der Ort, die Sache weiter zu verfolgen.

Als allgemeine Bemerkung über die vorstehende Theorie der Strahlapparate überhaupt ist es wichtig hinzuzufügen, dass die Entwickelungen an einer Unsicherheit leiden, die sich auf theoretischem Wege nicht beseitigen lässt. Es lässt sich nämlich nicht angeben, in welcher Entfernung von den Düsenmündungen der Querschnitt F_x liegt, in welchen im Mischungsraume C (vergl. Fig. 20 bis 23) die Flüssigkeitstheilchen die gemeinschaftliche Geschwindigkeit w_x erlangt haben, an welcher Stelle also der Piezometerstand a_y zu messen ist. Ist die Geschwindigkeit w_1 des einen

*) Handbuch für specielle Eisenbahn-Technik. Leipzig 1882. Bd. 3. S. 140.

Strahles beträchtlich grösser, als die Geschwindigkeit w_2 des anderen, so kann vielleicht die Länge des Mischungsraumes grösser sein, als man anzunehmen geneigt ist. Diesem Umstande schreibe ich es zu, dass die neueren Versuche von Troske*) an Locomotiven mit conisch divergenter Esse nicht die günstigen Erfolge ergeben haben, die man nach Prüssmann's Angaben und meinen theoretischen Untersuchungen erwartete.

Die vorstehende Bemerkung ist auch von Wichtigkeit und wohl zu beachten beim Uebergange eines Flüssigkeitsstrahles in eine plötzliche Erweiterung und selbst beim Uebergange in allmähliche Erweiterung. Lässt man Wasser, wie ich es experimentell ausgeführt habe, durch eine Mündung im Boden eines mit ruhendem Wasser gefüllten weiten Gefässes unter höherem Drucke vertical aufwärts strömen, so sieht man an der Wasseroberfläche, dass der Wasserstrahl im Innern weit nach oben strömen kann, bevor er sich mit dem Wasser mischt, also zur Ruhe gelangt. Die betreffenden Versuche haben mir keine genügenden Unterlagen geliefert, die genannte Unsicherheit auch nur annähernd durch Rechnung aufzuklären.

§ 8. Reaction strömender Flüssigkeiten in ruhenden Gefässen.

a) Stossfreier Eintritt.

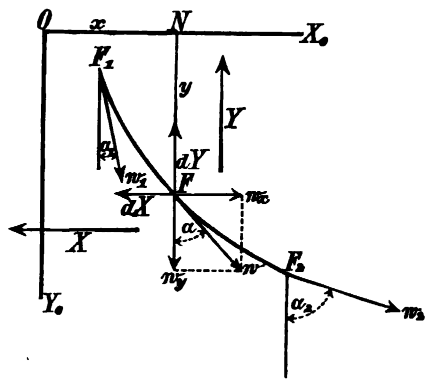
Die Curve F_1FF_2 (Fig. 24), die man sich der Einfachheit wegen und weil dadurch an der Allgemeinheit der folgenden Untersuchungen nichts geändert wird, als eine ebene Curve denken kann, bilde die Axe eines kanalartigen Gefässes, durch welches Flüssigkeit unter der Einwirkung beliebiger äusserer Kräfte hinströmt. Die Buchstaben F_1, F und F_2 der einzelnen Punkte der Kanalaxe sollen im weiteren Verlaufe der Rechnung zugleich die Querschnitte des Strahles an den betreffenden Stellen repräsentiren und die Strömungsgeschwindigkeit an der Eintrittsstelle F_1 sei w_1, an der Austrittsstelle F_2 und der beliebigen Stelle F beziehentlich w_2 und w; die Coordinaten des Punktes F auf ein rechtwinkeliges Axensystem OX_0 und OY_0 bezogen, seien $ON = x$ und $NF = y$ und die Richtungswinkel der tangential

*) Glaser's Annalen für Gewerbe- und Bauwesen. 1896. Bd. 36.

zur Curve $F_1 F_2$ liegenden Geschwindigkeiten auf die Ordinatenaxe OY_0 bezogen mit α_1, α und α_2 bezeichnet.

Zerlegt man die Geschwindigkeit w nach den Coordinatenaxen in die Coordinatengeschwindigkeiten

Fig. 24.



$$w_x = w \sin \alpha$$

und

$$w_y = w \cos \alpha$$

und denkt man sich w_x und w_y als Functionen der Zeit t gegeben, so folgen die Coordinatenaccelerationen:

$$\frac{dw_x}{dt} = \frac{d(w \sin \alpha)}{dt}$$

und

$$\frac{dw_y}{dt} = \frac{d(w \cos \alpha)}{dt}.$$

Bezeichnet nun dm die Masse eines Flüssigkeitselementes im Punkte F, welches man sich auch als eine unendlich dünne Scheibe vom Querschnitte F denken kann, so sind die auf das Element wirkenden Kraftcomponenten, welche mit dX und dY bezeichnet werden mögen und zunächst als positiv betrachtet werden sollen, wenn sie im Sinne von X_0 und Y_0 wirken:

$$dX = dm \cdot \frac{d(w \sin \alpha)}{dt} \quad \text{und} \quad dY = dm \cdot \frac{d(w \cos \alpha)}{dt}.$$

Nun wird aber auch bei allen weiteren Untersuchungen ausdrücklich die Annahme gemacht, dass der Beharrungszustand vorliege, dass also in der Zeiteinheit durch alle Querschnitte die gleiche Flüssigkeitsmasse hindurchgehe.

Betrachtet man die auf die Secunde bezogene Flüssigkeitsmasse M als gegeben, so geht durch den Querschnitt F in der Zeit dt die Masse Mdt hindurch und dieser Werth kann mit dem Werthe dm, der ja willkürlich gewählt werden kann, identisch gesetzt werden. Die vorstehenden Gleichungen geben daher mit

$$dm = Mdt:$$

$$dX = Md(w \sin \alpha) \quad \text{und} \quad dY = Md(w \cos \alpha). \qquad (106)$$

Nach der Ableitung sind dies die Kraftcomponenten der auf das Element dm wirkenden Kräfte; kehrt man im Geiste ihre Richtung in die entgegengesetzten um, wie das bei hydraulischen Untersuchungen allgemein Gebrauch ist, so geben die Werthe die Drücke an, welche das Element auf die Gefässwandungen ausübt. Man bezeichnet dann die in der Fig. 24 angedeuteten Kräfte dX und dY als die Horizontal- und Verticalreaction des Elementes dm, wobei die Bezeichnung horizontal und vertical sich zunächst noch allgemein auf die Bildebene, nicht auf den Raum bezieht.

Die Gleichungen (106) sind integrabel; man erhält nach der eingeführten und in Fig. 24 angegebenen Bezeichnung:

$$\left.\begin{aligned} X &= M(w_2 \sin \alpha_2 - w_1 \sin \alpha_1) \\ Y &= M(w_2 \cos \alpha_2 - w_1 \cos \alpha_1) \end{aligned}\right\} \qquad (107)$$

als die Componenten der Reaction der durch das Gefäss strömenden Flüssigkeit auf der gesammten Längenerstreckung $F_1 F_2$. Könnte das Gefässstück $F_1 F_2$ in horizontaler und verticaler Richtung unter dem Einflusse dieser Flüssigkeitsdrücke ausweichen, so müssten an bestimmten Punkten, auf deren Bestimmung es hier zunächst nicht ankommt, den beiden Kräften X und Y gleiche Gegenkräfte als Widerstände angebracht werden, um das Gleichgewicht zu erhalten.

Da hier von vornherein ein ruhendes Gefäss vorausgesetzt wurde, so ist das Vorhandensein dieser Gegenkräfte stillschweigend angenommen worden.

Bemerkenswerth ist, dass die vorstehenden Formeln (107) unter allen Umständen gültig sind, welche äusseren Kräfte auch auf die Flüssigkeitselemente einwirken mögen und welche durch Reibung oder plötzliche Querschnittsänderungen erzeugten Widerstände im Innern des Kanales auf dem Wege F_1 nach F_2 auch vorliegen mögen. Die Form der Gleichungen (107) bleibt unverändert, nur die Werthe der Geschwindigkeiten w_1 und w_2 werden verschieden sein und sind dann, wie auch die Masse M, für jeden besonderen Fall noch zu ermitteln.

Weiterhin bestehen die Gleichungen (107) aber auch für jede Art von Flüssigkeit, also auch für Luft und Dampf, und es ist dabei gleichgültig, welche Veränderungen die Flüssigkeit innerhalb des Weges $F_1 F_2$ durch Expansion oder Compression oder durch Zuführung oder Ableitung von Wärme erfährt.

Nur eine Bedingung muss vermöge der Ableitung der Gleichungen erfüllt werden, es muss nämlich die Einführung der Flüssigkeit in den Anfangsquerschnitt F_1 genau mit der Geschwindigkeit w_1 und der angegebenen Richtung α_1 erfolgen, mit kurzen Worten, die Gleichungen gelten nur für stossfreien Eintritt.

Es bleibt weiterer Untersuchung vorbehalten, wie sich die Frage gestaltet, wenn beim Eintritte Geschwindigkeits- und Richtungsänderungen vorliegen.

Bei tropfbaren Flüssigkeiten oder wenn bei luftförmigen Körpern nur unbedeutende Dichtigkeitsänderungen eintreten, ist, wenn γ das specifische Gewicht darstellt:

$$Mg = F_2 w_2 \gamma = F_1 w_1 \gamma$$

und wenn, wie früher $\frac{F_2}{F_1} = \lambda$, also $w_1 = \lambda w_2$ gesetzt wird, ergiebt sich an Stelle der Gleichungen (107)

$$\left.\begin{aligned} X &= 2(\sin\alpha_2 - \lambda\sin\alpha_1)F_2\gamma\cdot\frac{w_2^2}{2g} \\ Y &= 2(\cos\alpha_2 - \lambda\cos\alpha_1)F_2\gamma\cdot\frac{w_2^2}{2g}. \end{aligned}\right\} \tag{108}$$

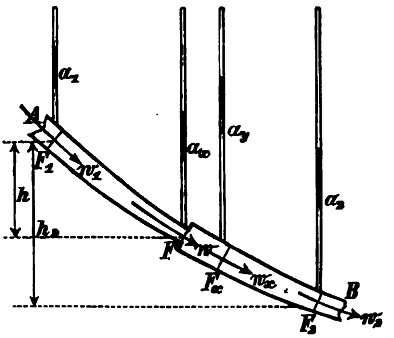
Wendet man nun diese Sätze in dem allgemeinen Falle an, der auf S. 56 unter Zugrundelegung der auf folgender S. 80 stehenden Fig. 25 behandelt wurde, so ergeben sich wichtige Erweiterungen. Nach den dort angegebenen Bezeichnungen fand sich nach Gleichung (79)

$$\frac{w_2^2}{2g} = \frac{a_1 - a_2 + h_2}{1 - \lambda^2 + (m-n)^2 + \zeta_1 m^2 + \zeta_2}. \tag{109}$$

Die Substitution dieses Ausdruckes in die Gleichungen (108) führt dann auf die Grösse der gesammten horizontalen und verticalen Reaction für die ganze Längenerstreckung $F_1 F_2$ des Kanales; dabei sind unter α_1, α und α_2 die Winkel zu verstehen, um welche die Geschwindigkeitsrichtungen w_1, w und w_r sowie w_2 von der Verticalen abweichen.

Man erkennt jetzt den Einfluss des durch die Widerstandscoefficienten ζ_1 und ζ_2 gemessenen Reibungswiderstandes und den Einfluss der plötzlichen Erweiterung, welcher durch das Glied $(m-n)^2$ zu beurtheilen ist; je grösser diese Werthe sind, um so kleiner fällt nach vorstehender Formel w_2 aus und damit werden auch nach Gleichung (108) die Reactionen X und Y verkleinert.

Fig. 25.



Von besonderem Interesse ist der Einfluss der im Kanal angenommenen plötzlichen Erweiterung, der noch zu einer Bemerkung Anlass giebt.

Die Gleichungen (107) geben wie die unter (108) die Gesammtreactionen. Aus denselben ist aber der Schluss zu ziehen, dass nach Fig. 25 die Reactionen für den oberen Gefässtheil $F_1 F$, die mit X_1 und Y_1 bezeichnet werden mögen, sich schreiben:

$$X_1 = M(w \sin \alpha - w_1 \sin \alpha_1) \text{ und } Y_1 = M(w \cos \alpha - w_1 \cos \alpha_1)$$

und ebenso die für den unteren Theil $F_x F_2$

$$X_2 = M(w_2 \sin \alpha_2 - w_x \sin \alpha) \text{ und } Y_2 = M(w_2 \cos \alpha_2 - w_x \cos \alpha).$$

Bezeichnet nun X_x und Y_x bez. die Horizontal- und Verticalreaction, welche durch die Vorgänge an der plötzlichen Erweiterung herrühren, so ist

$$X_x = X - (X_1 + X_2)$$
$$Y_x = Y - (Y_1 + Y_2)$$

und daher unter Benutzung vorstehender Gleichungen sowie der Gleichungen (107)

$$X_x = - M(w - w_x) \sin \alpha$$
$$Y_x = - M(w - w_x) \cos \alpha.$$

Diese Kräfte wirken den Kräften X und Y entgegengesetzt; ihre Resultante P, die sich

$$P = M(w - w_x)$$

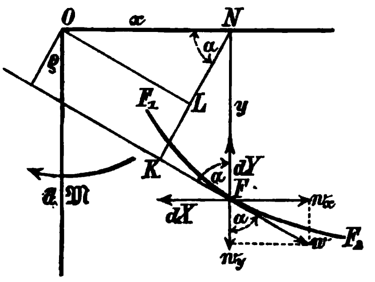
ergiebt, wird demnach in der Rohraxe und in der Bewegungsrichtung des Strahles als continuirlicher Druck direct auf das Gefäss übertragen.

Aus dem Angeführten geht hervor, wie wichtig es ist, bei Ausnutzung der Reaction des Wassers in Turbinenkanälen die Entstehung von Wirbeln im Innern sorgfältig zu vermeiden.

b) Drehmoment der Gesammtreaction.

Durch den ruhenden oder festgehaltenen Kanal mit der Kanalaxe $F_1 F_2$ (Fig. 26) ströme, wie vorhin, in der Secunde die Flüssigkeitsmasse M hindurch; im Punkte F, dessen Coordinaten mit x und y bezeichnet wurden, betrug dann die Horizontal- und Verticalreaction des Flüssigkeitselementes Mdt nach den Gleichungen (106)

Fig. 26.



$$dX = Mdw_x$$

und

$$dY = Mdw_y .$$

Denkt man sich nun im Coordinatenanfangspunkte O eine Axe senkrecht zur Bildebene, so ist das Moment $d\mathfrak{M}$, mit welchem die beiden Kräfte eine Drehung um O anstreben:

$$d\mathfrak{M} = ydX - xdY$$

oder

$$d\mathfrak{M} = M(ydw_x - xdw_y) .$$

Nun schreibt sich, wenn man die Beziehungen

$$w_x = \frac{dx}{dt} \qquad \text{und} \qquad w_y = \frac{dy}{dt}$$

berücksichtigt,

$$ydw_x = d(yw_x) - w_x \frac{dy}{dt} dt = d(yw_x) - w_x w_y dt$$

und

$$xdw_y = d(xw_y) - w_y \frac{dx}{dt} dt = d(xw_y) - w_x w_y dt .$$

Substituirt man die Differenz dieser beiden Gleichungen in die Gleichung für $d\mathfrak{M}$, so folgt:

$$d\mathfrak{M} = Md(yw_x - xw_y) .$$

Es ist aber

$$w_x = w \sin \alpha \quad \text{und} \quad w_y = w \cos \alpha$$

und daher auch:

$$d\mathfrak{M} = Md[w(y \sin \alpha - x \cos \alpha)].$$

Man ziehe nun in Fig. 26 senkrecht zur Richtung von w die Linie NK und OL parallel zu w, so folgt

$$KL = NK - NL = y \sin \alpha - x \cos \alpha,$$

und diese Strecke ist nichts anderes, als das Perpendikel ϱ vom Drehpunkte O auf die Richtung von w; daher ist endlich:

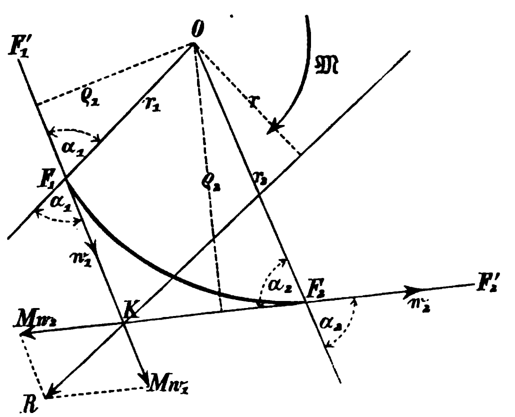
$$d\mathfrak{M} = Md(w\varrho). \tag{110}$$

Es lässt sich jetzt leicht das Drehmoment für die ganze im Kanale F_1F_2 befindliche Flüssigkeitsmenge bestimmen; fällt man von O aus auf die Richtung der Eintrittsgeschwindigkeit w_1 das Perpendikel ϱ_1 und ebenso das Perpendikel ϱ_2 auf die Richtung der Austrittsgeschwindigkeit w_2 (Fig. 27), so ergiebt sich durch Integriren der Gleichung (110) das ganze Drehmoment:

$$\mathfrak{M} = Mw_2\varrho_2 - Mw_1\varrho_1. \tag{111}$$

Diese Gleichung gilt wieder bei ruhendem Gefäss für jede Art von Flüssigkeit, Wasser, Luft oder Dampf und für beliebige Widerstände im Innern des Kanales, gleichgültig welche äusseren Kräfte auch auf die Flüssigkeitselemente wirken mögen.

Fig. 27.



Nur die eine Bedingung ist wieder erfüllt zu denken, dass stossfreier Eintritt vorliegt.

Die Gleichung (111) spielt in der Theorie der Turbinen eine hervorragende Rolle, doch lassen sich schon hier an dieselbe einige wichtige Bemerkungen knüpfen.

Denkt man sich im Querschnitte F_2 die Kraft Mw_2 entgegengesetzt der Bewegungsrichtung der Flüssigkeit und im Eintrittsquerschnitte F_1 die Kraft Mw_1 in der Richtung der Bewegung aufgetragen und nach dem Durchschnittspunkte K der Geschwindigkeiten w_1 und w_2 (Fig. 27) verlegt, so vereinigen sich hier die beiden Kräfte zu einer Resultante R, welche jetzt die Gesammtwirkung der Reaction repräsentirt. Fällt man vom Drehpunkte O die Senkrechte r auf die Richtung von R, so ist das Drehmoment auch $\mathfrak{M} = Rr$.

Wäre der Drehpunkt O oder die in diesem Punkte senkrecht zur Bildebene stehende Drehaxe fest mit dem Kanale verbunden, so würde unter den in Fig. 27 dargestellten Verhältnissen die durch den Kanal strömende Flüssigkeit diesen mit dem Momente $\mathfrak{M}$ von links nach rechts (in positiver Richtung) zu drehen suchen. Fällt der Drehpunkt in die Verlängerung von R, so ist kein Bestreben zur Drehung vorhanden, fällt er auf die andere Seite von R, so ändert die Drehrichtung das Zeichen, es läge dann das Bestreben zu einer Drehung von rechts nach links vor.

Denkt man sich, um noch auf einen anderen in der Praxis häufig vorkommenden Fall hinzudeuten, die Rohraxe $F_1 F_2$ nach beiden Richtungen hin geradlinig verlängert ($F_1 F_1'$ und $F_2 F_2'$) und das Ganze als eine Rohrleitung, so giebt R die Kraft, mit welcher die durch die Krümmung $F_1 F_2$ strömende Flüssigkeit auf die Leitung einwirkt und Lagenveränderung derselben anstrebt. Die Rohrleitung muss daher entsprechend befestigt werden, wenn Verschiebungen derselben vermieden werden sollen. Ist der Rohrquerschnitt überall derselbe, so wird bei tropfbarer Flüssigkeit $w_1 = w_2 = w$ sein, die beiden Kräfte, die sich zur Gesammtreaction R zusammensetzen, sind gleich gross (Mw) und daher wird $R = Mw\sqrt{2}$, wenn die geradlinigen Rohrstränge senkrecht auf einander stehen, die Krümmung $F_1 F_2$ also einen Viertelkreis bildet, ist sie halbkreisförmig, liegen also die Rohrstränge parallel, so ergiebt sich $R = 2Mw$.

Der ursprünglich angenommene Fall lässt noch eine andere Darstellung zu; verbindet man nämlich den Eintrittspunkt F_1 wie den Austrittspunkt F_2 mit dem Drehpunkte O durch die Linien r_1 und r_2 und bezeichnet man, abweichend von der obigen Darstellung, den Winkel, welchen die Geschwindigkeitsrichtungen

w_1 und w_2 mit den beiden Radien r_1 und r_2 bilden, mit α_1 und α_2, so ergiebt sich nach Fig. 27

$$\varrho_1 = r_1 \sin \alpha_1 \quad \text{und} \quad \varrho_2 = r_2 \sin \alpha_2$$

und hiernach an Stelle von Gleichung (111)

$$\mathfrak{M} = M r_2 w_2 \sin \alpha_2 - M r_1 w_1 \sin \alpha_1 . \tag{111a}$$

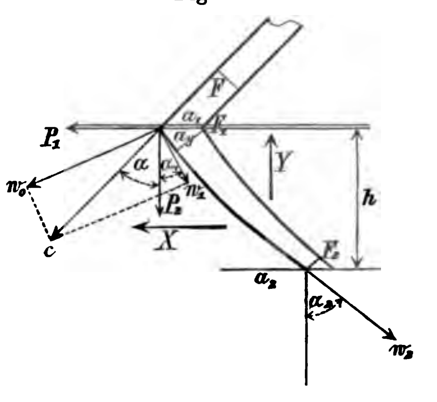
Die Werthe $w_2 \sin \alpha_2$ und $w_1 \sin \alpha_1$ repräsentiren die Geschwindigkeitscomponenten und $M w_2 \sin \alpha_2$ und $M w_1 \sin \alpha_1$ die Kraftcomponenten senkrecht zu den Radien r_2 und r_1 genommen; die radialen Kraftcomponenten $M w_2 \cos \alpha_2$ und $M w_1 \cos \alpha_1$ sind demnach ohne Einfluss auf das Drehmoment $\mathfrak{M}$, da sie vom fest liegend gedachten Drehpunkte O aufgenommen werden.

Die vorstehende Gleichung, die in der angegebenen Form in der Theorie der Turbinen ebenfalls eine wichtige Rolle spielt, giebt das Kraftmoment $\mathfrak{M} = Rr$ an, mit welchem der Kanal $F_1 F_2$, denselben frei beweglich, drehbar um die Axe O gedacht, im Gleichgewicht gehalten wird.

c) Eintritt mit Stoss.

Das kanalartige Gefäss $F_1 F_2$ (Fig. 28) sei oben horizontal abgeschnitten und an diese Schnittfläche schliesse sich in geringer Entfernung, welcher Zwischenraum im Weiteren als »Spalt« bezeichnet werden wird, der festliegende Einlaufkanal F an, durch welchen in der Secunde die Flüssigkeitsmasse M mit der Geschwindigkeit c in der durch den Winkel α bezeichneten Richtung herbeigeführt wird; im Kanale $F_1 F_2$ ist aber die Geschwindigkeit w_1 und deren Richtung durch α_1 bestimmt; es findet daher beim Eintritte Geschwindigkeits- und Richtungsänderung statt und zwar beträgt die Ablenkung des Strahles $(\alpha + \alpha_1)$.

Fig. 28.



Die ankommende Flüssigkeit hat horizontal die Geschwindigkeit $c \sin \alpha$ in positiver Richtung, d. h. in der Richtung der Horizontalreaction X, die im Kanale befindliche Flüssigkeit dagegen in gleicher Richtung die Geschwindigkeit $-w_1 \sin \alpha_1$; die Differenz beider Geschwindigkeitscomponenten mit M multiplicirt, giebt den Horizontaldruck P_1 beim Eintritt

$$P_1 = M(c \sin \alpha + w_1 \sin \alpha_1).$$

Die Verticalcomponenten der Geschwindigkeiten der ankommenden und im Kanale befindlichen Flüssigkeit sind $c \cos \alpha$ und $w_1 \cos \alpha_1$ und daher folgt der Verticaldruck P_2 abwärts, d. h. der Verticalreaction Y entgegengesetzt,

$$P_2 = M(c \cos \alpha - w_1 \cos \alpha_1).$$

Daher folgen nun unter Zuziehung der Gleichungen (107) die beiden Reactionen in horizontaler und verticaler Richtung

$$X = M(w_2 \sin \alpha_2 - w_1 \sin \alpha_1) + P_1$$
$$Y = M(w_2 \cos \alpha_2 - w_1 \cos \alpha_1) - P_2$$

und hiernach unter Benutzung der für P_1 und P_2 gefundenen Werthe:

$$\left.\begin{aligned} X &= M(w_2 \sin \alpha_2 + c \sin \alpha) \\ Y &= M(w_2 \cos \alpha_2 - c \cos \alpha). \end{aligned}\right\} \tag{112}$$

Die Formeln sind also von ebenso einfachem Bau wie die für stossfreien Eintritt; ihre Benutzung erfordert also wiederum die Kenntniss der Durchflussgeschwindigkeiten. Ist a_1 der Druck in Flüssigkeitssäule im Spalte und a_y der Druck nach dem Eintritte ins Gefäss, so ist nach früheren Sätzen die Gesammtenergie im Strahle

$$Mg\left(a_1 + \frac{c^2}{2g}\right) \text{ im Spalte,}$$

$$Mg\left(a_y + \frac{w_1^2}{2g}\right) \text{ nach dem Eintritte,}$$

und daraus ergiebt sich durch Subtraction der Arbeits- oder Energieverlust L beim Eintritte

$$L = Mg(a_1 - a_y) + \frac{M}{2}(c^2 - w_1^2). \tag{113}$$

Dieser Arbeitsverlust lässt sich aber auch noch auf zwei verschiedene andere Arten ausdrücken.

Zerlegt man (Fig. 28) die Geschwindigkeit c in zwei Componenten, wovon die eine mit w_1 identisch ist und die andere mit w_0 bezeichnet werde, so repräsentirt die letztere die verlorene Geschwindigkeit, und daher ist der Arbeitsverlust L auch:

$$L = \frac{M w_0^2}{2} = \frac{M}{2}[c^2 + w_1^2 - 2 c w_1 \cos(\alpha + \alpha_1)] .$$

Durch Gleichsetzen mit Gleichung (113) folgt daraus auch die Beziehung

$$2g(a_y - a_1) = 2w_1 (c \cos(\alpha + \alpha_1) - w_1) ,$$

welche Gleichung übrigens mit Gleichung (63a) S. 41 übereinstimmt, wie es sein muss; man überzeugt sich von der Gleichheit, wenn man die verschiedene Bezeichnung dort und hier beachtet.

Bei den weiteren Untersuchungen soll in vorstehender Gleichung der Factor 2 auf der rechten Seite durch den Buchstaben ζ ersetzt und der Werth als »Eintrittscoefficient« bezeichnet werden, es soll also geschrieben werden:

$$2g(a_y - a_1) = \zeta w_1 (c \cos(\alpha + \alpha_1) - w_1) . \qquad (114)$$

Theoretisch ist $\zeta = 2$; es wird aber jetzt die Möglichkeit offen gehalten, durch Einsetzen eines entsprechenden Versuchswerthes für ζ eine vollkommenere Uebereinstimmung der Rechnungsergebnisse mit den wirklichen Beobachtungen herbeizuführen. Es muss allerdings bemerkt werden, dass derartige schärfere Beobachtungen noch nicht vorliegen, man also doch bei numerischen Rechnungen bis auf Weiteres gewöhnlich zu der Näherungsannahme $\zeta = 2$ zurückgreifen muss.

Auf einen dritten Ausdruck für den Arbeitsverlust L führt endlich noch folgende Betrachtung. Das Gefäss $F_1 F_2$ (Fig. 28) liege in der Verticalebene und auf die Flüssigkeit wirke die Schwerkraft ein, so ist, wenn h den Verticalabstand der beiden Querschnitte F_1 und F_2 darstellt, die Arbeit, welche in der Masse M wegen ihrer Geschwindigkeit c und wegen der angenommenen Druckhöhen zur Verfügung steht,

$$Mg(h + a_1 - a_2) + \frac{Mc^2}{2} .$$

Subtrahirt man davon die Arbeit $\frac{M w_2^2}{2}$, welche der aus der Mündung F_2 kommenden Flüssigkeit innewohnt und überdies die Arbeit $\zeta_2 \frac{M w_2^2}{2}$, welche dem Widerstande im Kanale entspricht, so folgt der Arbeitsverlust L auch

$$L = \frac{M}{2}[2g(h + a_1 - a_2) + c^2 - (1 + \zeta_2) w_2^2].$$

Die Verbindung mit Gleichung (113) giebt jetzt

$$2g(h + a_y - a_2) = (1 + \zeta_2) w_2^2 - w_1^2, \tag{115}$$

und wenn man davon Gleichung (114) subtrahirt, so folgt

$$2g(h + a_1 - a_2)$$
$$= (1 + \zeta_2) w_2^2 - w_1^2 - \zeta w_1 (c \cos(\alpha + \alpha_1) - w_1), \tag{116}$$

womit die Unterlagen für die Lösung der vorgelegten Aufgabe gegeben sind.

Bei stossfreiem Eintritte ist in Gleichung (115) $a_y = a_1$ zu setzen und wenn die Gefässaxen in der Horizontalebene liegen, also die Schwerkraft keinen Einfluss üben würde, wäre $h = 0$ zu setzen. Ist F der Querschnitt des Einlaufrohres, so gelten die Beziehungen $Fc = F_1 w_1 = F_2 w_2$; sind daher die Querschnitte, sowie die Druckhöhen h, a_1 und a_2 und die Winkel α, α_1 und α_2 gegeben, so berechnen sich in Verbindung mit Gleichung (116) die einzelnen Geschwindigkeiten; aus $Mg = F_2 w_2 \gamma$ ergiebt sich M und dann folgen aus den Gleichungen (112) die Componenten der Reaction, X und Y, für das ruhende Gefäss.

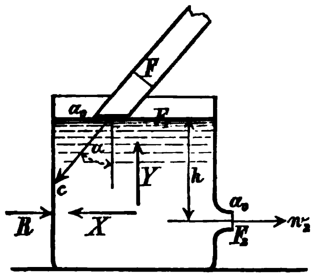
Die hier gewonnenen Formeln mögen an einigen speciellen Aufgaben nähere Erläuterung finden.

Specialfall 1.

Aus einem weiten Gefässe (Fig. 29 f. S.) ströme Wasser unter der Druckhöhe h und unter atmosphärischem Drucke stehend durch eine Mündung von verhältnissmässig kleinem Querschnitte F_2 und horizontaler Axe in die freie Atmosphäre mit der Geschwindigkeit w_2. Das Wasser werde dem Gefässe durch einen Kanal vom Querschnitte F, dessen Axe um α gegen die Verticale geneigt ist, mit der Geschwindigkeit c zugeführt; die Wassertheilchen im Spiegel F_1

sinken vertical abwärts, es ist also $\alpha_1 = 0$, und ebenso ist, wegen der Annahme einer sehr grossen Gefässweite F_1, die Geschwindigkeit $w_1 = 0$ anzunehmen, und da der Strahl horizontal ausströmen soll, $\alpha_2 = 90^{\circ}$ zu setzen.

Fig. 29.



Man erhält nun hier, weil $a_1 = a_2 = a_0$ angenommen wurde, mit $w_1 = 0$ aus Gleichung (114) auch $a_y = a_0$, so dass also am Spalte eine Druckänderung nicht vorliegt und Gleichung (116) giebt dann zur Berechnung der Ausflussgeschwindigkeit w_2 die einfache Formel

$$(1 + \zeta_2) w_2^2 = 2gh,$$

wobei der Widerstandscoefficient ζ_2 von der Form und Gestalt der Ausflussmündung abhängig ist.

Die Wassermasse M, welche in der Secunde zum Austritte gelangt, ist:

$$M = \frac{F_2 w_2 \gamma}{g},$$

und nun berechnet sich nach den Gleichungen (112), weil $\alpha_2 = 90^{\circ}$ ist, die Horizontalreaction:

$$X = M(w_2 + c \sin \alpha)$$

und die Verticalreaction:

$$Y = -Mc \cos \alpha .$$

Würde das Gefäss auf horizontaler Basis auf Rädern stehen, so würde sich dasselbe unter dem Einflusse der Kraft X entgegengesetzt der Richtung des austretenden Strahles fortzubewegen suchen. Da die Formeln für ein ruhendes Gefäss abgeleitet worden sind, so ist hier vorauszusetzen, dass von aussen her ein Widerstand R angenommen worden ist, der der Reaction X gleich ist. Die Verticalreaction Y erscheint nach vorstehender Formel negativ, wirkt also von oben nach unten und vergrössert daher den Druck der Räder gegen die Bahn, der herrührt vom Gewichte des Gefässes und dem Gewichte der im Gefässe enthaltenen Wassermenge.

Die beiden Reactionen X und Y erscheinen abhängig von dem Richtungswinkel α, unter welchem das Wasser zugeleitet wird; unter sonst gleichen Verhältnissen wird die Horizontalreaction um so kleiner, je kleiner der Winkel α wird; fällt die Richtung von c auf die andere Seite der Verticalen, so ist natürlich $\sin \alpha$ negativ in Rechnung zu stellen.

Ist F der Zuflussquerschnitt, so gilt, weil der Beharrungszustand vorausgesetzt worden ist, auch die Beziehung $Fc = F_2 w_2$ und damit liesse sich in den beiden letzten Gleichungen noch die Zuflussgeschwindigkeit eliminiren.

Wird das Wasser in verticaler Richtung zugeleitet, so ist $\alpha = 0$ und damit

$$X = M w_2 \quad \text{und} \quad Y = -Mc.$$

Benutzt man hier die vorstehenden Formeln für M und w_2, so ergiebt sich in diesem Falle die Horizontalreaction:

$$X = \frac{1}{1 + \zeta_2} \cdot 2 F_2 h \gamma,$$

wo ζ_2 der Widerstandscoefficient für die angenommene Ausflussöffnung ist.

Für eine gut abgerundete Mündung, ebenso für eine Mündung in dünner Wand war $\zeta_2 = 0{,}063$ (S. 33), wonach:

$$X = 0{,}941 \cdot (2 F_2 h \gamma).$$

Für das kurze cylindrische Ansatzrohr war $\zeta_2 = 0{,}505$ (S. 35), daher für dieses:

$$X = 0{,}664 \cdot (2 F_2 h \gamma).$$

Für andere, zusammengesetzte Ausflussmündungen lässt sich nach den oben abgeleiteten Sätzen der Gesammtwiderstandscoefficient ζ_2 für jeden einzelnen Fall durch Rechnung an der Hand der entsprechenden Beobachtungen leicht ermitteln, so dass damit auch unter allen Umständen die Ermittelung des Werthes der Reaction ermöglicht ist.

Rein theoretisch, d. h. für eine Mündung ohne Widerstände, würde sich mit $\zeta_2 = 0$ die Horizontalreaction

$$X = 2 \cdot F_2 h \gamma$$

ergeben. Denkt man sich die Mündung geschlossen, so ist der **hydrostatische** Druck auf die Mündungsebene durch die Formel

$P = F_2 h\gamma$ gegeben; projicirt man die Mündungsfläche auf die Rückwand des Gefässes, so ist dort der Druck ebenso gross, da ja ringsum Gleichgewicht vorliegt. Lässt man dagegen das Wasser ausströmen, so vergrössert sich der Druck auf die Rückwand auf das Doppelte.

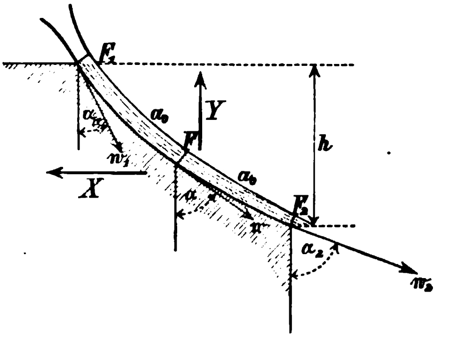
Der Satz, auf diese Weise ausgesprochen, hat in früheren Jahren wiederholt Zweifel an der Richtigkeit der Theorie der Reaction der Flüssigkeiten überhaupt hervorgerufen und noch jetzt begegnet man vereinzelt eigenthümlichen Anschauungen über die hier auftretenden Fragen.

Die Theorie der Reaction, auf welche in dieser Schrift bis zu dieser Stelle nur bezüglich der zunächst liegenden Fragen hingedeutet worden ist, wurde in der Mitte des vorigen Jahrhunderts schon von Euler in ihren Grundzügen festgelegt; die Versuche Weisbach's in diesem Jahrhundert haben dann die Richtigkeit der bezüglichen Sätze unwiderleglich dargethan.

Specialfall 2.

Ein Wasserstrahl ströme frei unter atmosphärischem Drucke auf einer krummen Fläche (Fig. 30) unter dem Einflusse der Schwerkraft herab; die verticale Fallhöhe sei h. Sind nun die Richtungen der Anfangs- und Endgeschwindigkeit, w_1 und w_2, gegenüber der Verticalen durch die Winkel α_1 und α_2 gegeben, so findet sich, weil $a_1 = a_2 = a_0$ angenommen worden ist und man im Anfange keine plötzliche Geschwindigkeitsänderung voraussetzt, nach Gleichung (116)

Fig. 30.



$$2gh = (1 + \zeta_2) w_2^2 - w_1^2.$$

Setzt man die Geschwindigkeit w_1 und den Strahlquerschnitt F_1 im Anfange als bekannt voraus, so berechnet sich die Wassermasse M und nach vorstehender Formel die Endgeschwindigkeit

w_2 und dann aus der Beziehung $F_2 w_2 = F_1 w_1$ auch der Strahlquerschnitt F_2, sowie endlich nach den Gleichungen (107) S. 78 die Horizontal- und Verticalreaction:

$$X = M(w_2 \sin \alpha_2 - w_1 \sin \alpha_1) \text{ und } Y = M(w_2 \cos \alpha_2 - w_1 \cos \alpha_1)$$

Dabei ist nur zu bemerken, dass die Verticalreaction Y nicht nur auf der ganzen Strecke F_1 bis F_2, sondern selbst in jedem Curvenelemente negativ ausfallen muss, weil sich sonst der Strahl von der Fläche abheben würde; diese Bedingung ist immer erfüllt, wenn der Winkel α (Fig. 30) auf der ganzen Strecke zunimmt, die Curve $F_1 F_2$ also von oben gesehen auf der gesammten Erstreckung concav verläuft.

Liegt die Curve, nach welcher der Strahl hinströmt, in der Horizontalebene, so ist $h = 0$ zu setzen, und ist dabei, was im Allgemeinen erlaubt sein wird, der Einfluss der Reibung des Wassers an der krummen Fläche zu vernachlässigen, so ist auch $\zeta_2 = 0$ anzunehmen. Die vorstehende Beziehung zwischen den Geschwindigkeiten ergiebt dann $w_2 = w_1 = w$; der Wasserstrahl strömt daher gleichförmig, also mit constanter Geschwindigkeit w an der krummen Fläche hin.

Die Componenten der Reaction finden sich dann:

$$X = Mw(\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1)$$

und

$$Y = Mw(\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2).$$

Liegt die Tangente der Curve im Anfangspunkte F_1 vertical, ist also $\alpha_1 = 0$, so folgt einfach:

$$X = Mw \sin \alpha_2$$
$$Y = -Mw(1 - \cos \alpha_2).$$

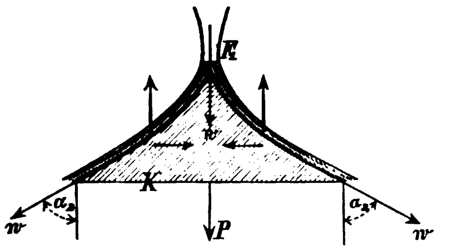
Die beiden letzten Formeln führen noch auf die Lösung eines besonderen Problems. Denkt man sich einen Rotationskörper K (Fig. 31 f. S.), dessen Leitlinie die in Fig. 30 angenommene Curve $F_1 F_2$ ist und strömt ein Wasserstrahl vom Querschnitte F_1 mit der Geschwindigkeit w in der angegebenen Richtung an den Rotationskörper heran, so vertheilt sich der Strahl nach allen Richtungen gleichmässig über die Fläche und verlässt dieselbe ringsum mit der Geschwindigkeit w in der durch den Winkel α_2 angegebenen Richtung.

Die Horizontalreactionen heben sich hier ringsum auf und die gesammte Verticalreaction stellt sich nun durch eine Kraft $P = -Y$ dar, welche sich nach der letzten der vorstehenden Formeln durch

$$P = Mw(1 - \cos \alpha_2)$$

berechnen lässt. Man hat also hiermit die Grösse des Wasserstosses eines isolirten Strahles gegen eine krumme Fläche gewonnen.

Fig. 31.



Ist der Ablenkungswinkel $\alpha_2 = 90^\circ$, so beträgt der Stoss $P = Mw$, welche Formel man auch für die Bestimmung des normalen Stosses eines Wasserstrahles gegen eine ebene Fläche verwendet. Ist $\alpha_2 \lesseqgtr 90^\circ$, so ergiebt sich $P \lesseqgtr Mw$ als der Stoss gegen convexe und concave Rotationsflächen; Weisbach's Versuche bestätigen die Richtigkeit der gewonnenen Formeln*).

§ 9. Reaction der Flüssigkeit in einem Gefässe, welches geradlinig und gleichförmig im Raume fortschreitet.

Für die unten folgende allgemeine Theorie der Turbinen bildet die Untersuchung der Reaction in bewegten Gefässen oder Kanälen die Grundlage für alle weiteren Betrachtungen; dabei ist es aber für die technischen Fälle durchaus hinreichend, von vornherein eine gleichförmige, d. h. eine Bewegung mit constanter Geschwindigkeit vorauszusetzen, weil für eine solche ohne Weiteres der Beharrungszustand als vorhanden angenommen werden kann und die Theorie der hydraulischen Kraft- und Arbeitsmaschinen überhaupt nur unter der Voraussetzung des Beharrungszustandes in der Bewegung der Flüssigkeit durchgeführt werden kann.

Weiter soll angenommen werden, dass das kanalartige Gefäss sich entweder geradlinig und gleichförmig im Raume fortbewegt

---

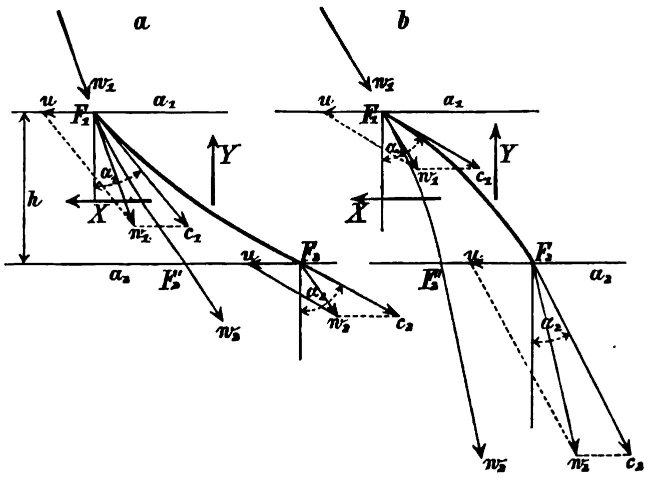
*) Civilingenieur, Bd. I, 1854, S. 1: »Die Weisbach'schen Versuche über den Stoss des isolirten Wasserstrahles gegen ruhende und bewegte Flächen.« Vom Verfasser bearbeitet.

oder dass dasselbe gleichförmig, d. h. mit constanter Winkelgeschwindigkeit um eine mit ihm fest verbundene Axe rotirt. Zunächst soll der erstere Fall vorgeführt werden.

a) Stossfreier Eintritt.

Die Curve $F_1 F_2$ (Fig. 32, *a* und *b*) stelle wieder die Kanalaxe dar; der Kanal soll sich aber mit der constanten Geschwindigkeit u von rechts nach links bewegen, also in horizontaler Richtung. Die Figur gilt als Aufriss, h bedeutet die verticale Fallhöhe

Fig. 32 *a* und *b*.



unter dem Einflusse der Schwerkraft, a_1 ist der Piezometerstand an der Eintrittsstelle F_1 und a_2 derjenige an der Austrittsstelle F_2; die beiden Figuren *a* und *b* unterscheiden sich nur durch die Krümmung der Bahncurve, die nachfolgenden Entwickelungen und Formeln gelten gleichzeitig für beide Darstellungen, doch führen dieselben bei der numerischen Verwerthung auf zwei verschiedene Fälle. Es dürfte nützlich sein, schon an dieser Stelle vorgreifend zu bemerken, dass Fig. 32 *a* im Allgemeinen ein treibendes Gefäss vorstellt; die in der angegebenen Richtung wirkende Horizontalreaction X überwindet, da gleichförmige Bewegung vorliegt, einen constanten Gegendruck oder Widerstand $R = X$, es wird also Arbeit gewonnen. Fig. 32 *b* repräsentirt im Allgemeinen ein getriebenes Gefäss, die Horizontalreation X wirkt der

Richtung der Geschwindigkeit u entgegengesetzt; es ist daher eine bewegende Kraft $R = X$ vorauszusetzen und dieser entspricht ein Verbrauch an Arbeit. Der ganze Unterschied liegt demnach nur im Vorzeichen der Horizontalreaction X und über dieses entscheidet der Gang der Rechnung selbst; es ist daher nicht nöthig, bei den folgenden bildlichen Darstellungen die beiden Figuren getrennt vorzuführen; die Darstellung nach Fig. 32 a genügt allein als Unterlage für die theoretischen Entwickelungen, wobei zu bemerken ist, dass der Kanal auch in der hier vorgeführten Form als »getrieben« angesehen werden kann.

Es sei nun c_1 die Geschwindigkeit der Flüssigkeit an der Eintrittsstelle F_1 und c_2 diejenige an der Austrittsstelle F_2, aber beide relativ zur Gefässaxe und an beiden Stellen tangential zu derselben angenommen; ihre Richtungen sollen von der Verticalen um die Winkel α_1 und α_2 abweichen.

Nun haben aber alle Flüssigkeitselemente im Innern des Kanales die Geschwindigkeit u mit dem Kanale gemeinschaftlich; das erste Element an der Eintrittsstelle hat demnach die beiden Geschwindigkeiten c_1 und u, also, beide vereinigt gedacht, die absolute Geschwindigkeit w_1. Da hier zunächst stossfreier Eintritt vorausgesetzt werden soll, so denkt man sich, dass der eingeführte Flüssigkeitsstrahl nach Grösse und Richtung genau mit der Geschwindigkeit w_1 herbeikommt. Da die Flüssigkeitselemente während ihres Hinströmens im Kanale mit diesem die Geschwindigkeit u gemeinschaftlich haben, so ist die wahre oder absolute Bahn durch die Curve $F_1 F_2'$ gegeben, die Kanalaxe $F_1 F_2$ repräsentirt die relative Bahn. Es wird unten folgenden Untersuchungen vorbehalten, auf den einfachen und eigenthümlichen Zusammenhang hinzuweisen, welcher zwischen den beiden Curven $F_1 F_2$ und $F_1 F_2'$, d. h. zwischen der relativen und absoluten Bahn besteht, vorerst ist die Kenntniss dieses Zusammenhanges für die Beantwortung der Hauptfragen nicht erforderlich. Zur Berechnung der Horizontal- und Verticalreaction gelten auch hier die Gleichungen (107) S. 78, nämlich

$$X = M(w_2 \sin \alpha_2 - w_1 \sin \alpha_1),$$
$$Y = M(w_2 \cos \alpha_2 - w_1 \cos \alpha_1),$$

wobei allerdings unter α_2 und α_1 die Winkel verstanden waren, welche die Richtungen von w_2 und w_1 mit der Verticalen bildeten.

Ein Blick auf Fig. 32 zeigt nun aber, dass für den vorliegenden Fall in den vorstehenden Gleichungen einfach zu substituiren ist:

$$
\begin{array}{lcl}
c_2 \sin \alpha_2 - u & \text{statt} & w_2 \sin \alpha_2 \\
c_1 \sin \alpha_1 - u & \text{»} & w_1 \sin \alpha_1 \\
c_2 \cos \alpha_2 & \text{»} & w_2 \cos \alpha_2 \\
c_1 \cos \alpha_1 & \text{»} & w_1 \cos \alpha_1 .
\end{array}
$$

Es folgt demnach sofort:

$$
\left.\begin{array}{l}
X = M(c_2 \sin \alpha_2 - c_1 \sin \alpha_1) \\
Y = M(c_2 \cos \alpha_2 - c_2 \cos \alpha_1),
\end{array}\right\} \tag{117}
$$

wobei wie früher M die Masse der Flüssigkeit ist, welche in der Secunde im Beharrungszustande durch das Gefäss strömt und die sich hier durch die Formel:

$$
M = \frac{F_2 c_2 \gamma}{g} \tag{118}
$$

bestimmt.

Der Vergleich der Gleichungen (117) mit den vorhergehenden, welche für das ruhende Gefäss gefunden wurden, zeigt denselben Bau, nur sind einfach an die Stelle der absoluten Geschwindigkeiten w_2 und w_1 die relativen Geschwindigkeiten c_2 und c_1 getreten; ausserdem ersieht man, dass die beiden Componenten der Reaction von der Geschwindigkeit u, mit welcher sich das Gefäss gleichförmig fortbewegt, unabhängig sind.

Da wegen der gleichförmigen Bewegung vom Gefässe ein constanter Widerstand $R = X$ überwunden wird, so ist die gewonnene Arbeit, welche mit L bezeichnet werden mag, auf die Secunde bezogen, $L = Xu$ oder

$$
L = Mu(c_2 \sin \alpha_2 - c_1 \sin \alpha_1). \tag{119}
$$

Die Arbeit der Verticalreaction Y ist Null, da eine Verticalbewegung nicht vorliegt. Da an Arbeitsgewinn gedacht wird, so ist L nach Gleichung (119) als positiv, also ein treibendes Gefäss vorausgesetzt worden. Sollte sich in einem bestimmten Falle die Arbeit L negativ durch Gleichung (119) herausstellen, so würde, wie vorhin schon erwähnt wurde, ein getriebenes Gefäss vorliegen; die beiden Fälle stehen sich gegenüber, wie Turbine und Centrifugalpumpe. Bemerkenswerth ist wieder, dass die vorstehenden Formeln für jede Art von Flüssigkeit (Wasser, Luft oder

Dampf) giltig sind, welche Widerstände auch im Innern des Gefässes (Reibung, plötzliche Geschwindigkeitsänderungen u. s. f.) vorliegen mögen, nur die eine Voraussetzung muss erfüllt sein, dass stossfreier Eintritt stattfindet.

Die vorstehenden Gleichungen sind nun aber zur Lösung bestimmter Probleme unzureichend. Die beiden Geschwindigkeiten c_1 und c_2 sind zwar durch die Beziehung $F_1 c_1 = F_2 c_2$ verbunden, wenn F_1 und F_2 die normalen Kanalquerschnitte im Anfange und am Ende darstellen, und damit wäre c_1 durch c_2 bestimmt. Die Ermittelung der Geschwindigkeit c_2 und damit der Wassermasse M nach Gleichung (118) erfordert aber die Aufstellung einer weiteren Gleichung, zu welchem Zwecke ein besonderer Weg eingeschlagen werden soll.

Es lässt sich nämlich neben der Gleichung (119) für die Arbeit L noch ein Ausdruck von anderer Form hinstellen, der dann in Verbindung mit der genannten Gleichung auf die verlangte Beziehung führt.

Nach der Bezeichnung in Fig. 32 ist die Arbeit, welche in der Secunde zur Verfügung steht:

$$Mg(h + a_1 - a_2).$$

Die Wassermasse M geht aus der absoluten Geschwindigkeit w_1 in den Werth w_2 über, was einer Arbeitsaufnahme entspricht vom Werthe

$$\frac{M(w_2^2 - w_1^2)}{2}.$$

Endlich ist der den Widerständen im Innern des Kanales entsprechende Arbeitsverlust nach früher abgeleiteten Sätzen und wenn ζ_2 den Widerstandscoefficienten des Kanales entspricht,

$$\zeta_2 \frac{Mc_2^2}{2}.$$

Hiernach folgt die Arbeit L auch, wenn man die beiden letzten Glieder von dem erstgenannten subtrahirt:

$$L = \tfrac{1}{2} M(2g(h + a_1 - a_2) - \zeta_2 c_2^2 - (w_2^2 - w_1^2)).$$

Nun ist ohne Weiteres nach Fig. 32:

$$w_2^2 = c_2^2 + u^2 - 2 c_2 u \sin \alpha_2$$

und

$$w_1^2 = c_1^2 + u^2 - 2 c_1 u \sin \alpha_1$$

und daher die Differenz:

$$w_2{}^2 - w_1{}^2 = c_2{}^2 - c_1{}^2 - 2u(c_2 \sin\alpha_2 - c_1 \sin\alpha_1).$$

Benutzt man diese Differenz in vorstehender Gleichung für L, so folgt:

$$L = \frac{M}{2}[2g(h + a_1 - a_2) - ((1 + \zeta_2)c_2{}^2 - c_1{}^2)] + Mu(c_2 \sin\alpha_2 - c_1 \sin\alpha_1).$$

Da aber das zweite Glied der rechten Seite mit L nach Gleichung (119) identisch ist, so folgt die Beziehung:

$$(1 + \zeta_2)c_2{}^2 - c_1{}^2 = 2g(h + a_1 - a_2). \qquad (120)$$

Die Gleichungen (117) bis (120) lösen nun das Problem und werden später bei einer gewissen Gruppe von Turbinen ohne Weiteres Verwendung finden. Sie gelten, wie ausdrücklich wiederholt betont werden muss, aber nur für stossfreien Eintritt; sie sind auch nur für diese specielle Voraussetzung, allerdings in etwas anderer Form auf ganz anderem Wege entwickelt, für die gedachte Gruppe von Turbinen bis jetzt allgemein in verschiedenen Schriften gegeben und angewendet worden.

Bemerkt werden mag noch, dass Gleichung (120) vollkommen mit den Formeln übereinstimmt, welche in § 6 (S. 56) Verwendung gefunden haben bei der Untersuchung der Bewegung der Flüssigkeiten in ruhendem Gefässe. In Gleichung (120) treten wieder nur die relativen Geschwindigkeiten c_2 und c_1 an Stelle der absoluten.

b) Eintritt mit Stoss.

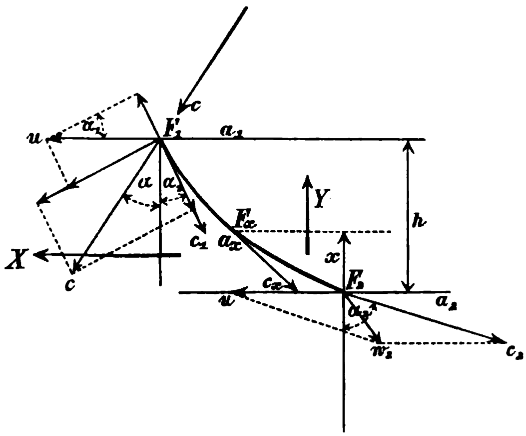
Die Geschwindigkeit c, mit welcher die Flüssigkeit in der durch α angegebenen Richtung (Fig. 33 a. f. S.) herbeikommt, weiche nach Grösse und Richtung ab von der absoluten Geschwindigkeit w_1, welche die Flüssigkeitselemente im Innern des Gefässes an der Eintrittsstelle F_1 besitzen. In diesem Falle treten plötzliche Geschwindigkeitsänderungen auf, welche Pressungen auf das Gefäss zur Folge haben, auf deren Ermittelung es zunächst ankommt.

Die ankommende Flüssigkeit hat in horizontaler Richtung die Geschwindigkeit $c \sin\alpha$, die bereits im Kanal befindliche in gleicher Richtung die Geschwindigkeit $(u - c_1 \sin\alpha_1)$; die Differenz beider Geschwindigkeiten mit der Masse M multiplicirt, ergiebt nun in horizontaler Richtung, in der Richtung von X einen Druck P_1 (Stosskraft):

$$P_1 = M[c \sin \alpha - (u - c_1 \sin \alpha_1)].$$

In verticaler Richtung ist die Geschwindigkeit der ankommenden Flüssigkeit $c \cos \alpha$ und die Geschwindigkeit der Flüssigkeit im Gefässe $c_1 \cos \alpha_1$, daher der Druck oder Stoss P_2 vertical abwärts:

Fig. 33.



$$P_2 = M(c \cos \alpha - c_1 \cos \alpha_1).$$

Der erstere Werth P_1 vergrössert die Horizontalreaction X und der andere Werth P_2 vermindert die Verticalreaction Y; es sind daher die beiden Componenten der Reaction unter Benutzung der Gleichungen (117) jetzt:

$$X = M(c_2 \sin \alpha_2 - c_1 \sin \alpha_1) + P_1$$
$$Y = M(c_2 \cos \alpha_2 - c_1 \cos \alpha_1) - P_2$$

oder unter Benutzung der Ausdrücke für P_1 und P_2

$$X = M(c_2 \sin \alpha_2 + c \sin \alpha - u) \tag{121}$$

$$Y = M(c_2 \cos \alpha_2 - c \cos \alpha), \tag{122}$$

wobei wieder die Flüssigkeitsmasse M durch

$$M = \frac{F_2 c_2 \gamma}{g} \tag{123}$$

bestimmt ist.

Da das Gefäss in horizontaler Richtung mit der constanten Geschwindigkeit u zurückweicht, so ist die gewonnene Arbeit $L = Xu$, oder nach Gleichung (121)

$$L = Mu(c_2 \sin \alpha_2 + c \sin \alpha - u). \tag{124}$$

Nun ist aber auch hier noch eine weitere Gleichung aufzustellen, welche die Berechnung der einzelnen Geschwindigkeiten zulässt; zuerst soll folgende Bemerkung vorausgeschickt werden.

Der Geschwindigkeitsverlust beim Eintritte ist in horizontaler Richtung: $[c \sin\alpha - (u - c_1 \sin\alpha_1)]$ und in verticaler Richtung: $[c \cos\alpha - c_1 \cos\alpha_1]$, daher findet sich der gesammte Geschwindigkeitsverlust, der mit w_0 bezeichnet werden mag, durch die Formel:

$$w_0^2 = [c \sin\alpha - (u - c_1 \sin\alpha_1)]^2 + [c \cos\alpha - c_1 \cos\alpha_1]^2,$$

welche bei Ausführung des Quadrirens auf der rechten Seite auch ergiebt:

$$\begin{aligned} w_0^2 = c^2 - c_1^2 + u^2 - 2cu \sin\alpha \\ - 2c_1[c \cos(\alpha + \alpha_1) + u \sin\alpha_1 - c_1]. \end{aligned} \qquad (125)$$

Nun mag für die gewonnene Arbeit L noch ein zweiter Ausdruck abgeleitet werden.

Es sei der Piezometerstand im Innern des Kanales unmittelbar an der Eintrittsstelle F_1 mit a bezeichnet; derselbe ist, wie das Weitere zeigen wird, von dem Drucke a_1 vor dem Kanale (im Spalte) zu unterscheiden; an der Austrittsstelle F_2 sei wieder der Piezometerstand a_2 und die verticale Fallhöhe h. Da die Wassermasse M mit der Geschwindigkeit c herbeikommt, so beträgt die im Anfange des Kanales zur Verfügung stehende Arbeit

$$Mg(h + a - a_2) + \frac{Mc^2}{2}.$$

Von dieser Arbeit geht aber verloren:

1. an der Eintrittsstelle wegen des daselbst stattfindenden Geschwindigkeitsverlustes

$$\frac{Mw_0^2}{2};$$

2. im Innern des Kanales wegen der daselbst zu überwindenden Widerstände

$$\zeta_2 \frac{Mc_2^2}{2} \qquad \text{und}$$

3. weil die Wassermasse M den Kanal mit der absoluten Geschwindigkeit w_2 verlässt,

$$\frac{Mw_2^2}{2}.$$

Die drei zuletzt angegebenen Arbeitsverluste addirt und von der disponiblen Arbeit subtrahirt, ergiebt nun für die gewonnene Arbeit L auch den Ausdruck:

$$L = \tfrac{1}{2} M[2g(h + a - a_2) + c^2 - w_0^2 - w_2^2 - \zeta_2 c_2^2].$$

Zur Berechnung von w_2 ergiebt sich nach Fig. 33 die Formel:

$$w_2^2 = c_2^2 + u^2 - 2 c_2 u \sin \alpha_2.$$

Benutzt man diesen Ausdruck, sowie auch Gleichung (125) in vorstehender Gleichung für L, so folgt nach einigen Reductionen:

$$L = Mg(h + a - a_2) - \frac{M}{2}[(1 + \zeta_2)c_2^2 - c_1^2]$$
$$+ Mc_1[c \cos(\alpha + \alpha_1) + u \sin \alpha_1 - c_1] + Mu[c_2 \sin \alpha_2 + c \sin \alpha - u].$$

Der Vergleich mit Gleichung (124) zeigt, dass das letzte Glied auf der rechten Seite der vorstehenden Gleichung mit L identisch ist, die beiden Werthe heben sich daher auf beiden Seiten und man erhält schliesslich:

$$(1 + \zeta_2)c_2^2 - c_1^2 - 2c_1[c \cos(\alpha + \alpha_1) + u \sin \alpha_1 - c_1]$$
$$= 2g(h + a - a_2).$$

Das Glied in der eckigen Klammer entspricht dem Stosseintritte; um dasselbe den wirklichen Verhältnissen näher zu bringen, soll der Factor 2 durch den Buchstaben ζ bezeichnet und in der Folge der »Eintrittscoefficient« genannt werden.

Zerlegt man fernerhin in Fig. 33 die Geschwindigkeiten c und u nach der Richtung von c_1 und normal dazu, so bedeutet in vorstehender Formel

$$c \cos(\alpha + \alpha_1) + u \sin \alpha_1$$

nichts anderes, als die Geschwindigkeit der ankommenden Flüssigkeit relativ zum ruhend gedachten Kanal in der Richtung der Tangente der Bahn im Anfange des Kanales, oder auch umgekehrt die relative Geschwindigkeit, mit welcher sich der Kanalquerschnitt F_1 normal gegen die ruhend gedachte Flüssigkeit ausserhalb bewegt.

Wird diese relative Geschwindigkeit noch mit c_0 bezeichnet, so schreibt sich vorstehende Formel einfacher:

$$(1 + \zeta_2)c_2^2 - c_1^2 - \zeta c_1(c_0 - c_1) = 2g(h + a - a_2),$$

wobei

$$c_0 = c \cos(\alpha + \alpha_1) + u \sin \alpha_1 \tag{126}$$

zu setzen ist.

Für stossfreien Eintritt ist $c_0 = c_1$ und überdies, wie sogleich gezeigt werden wird, die Druckhöhe $a = a_1$, d. h. gleich dem Spaltdrucke; es ergiebt sich dann Gleichung (120) S. 97.

Die vorstehende Gleichung (126) ist, abgesehen von der Unbestimmtheit des Eintrittscoefficienten ζ, über dessen Werth noch keine Erfahrungen vorliegen und der nur theoretisch als $\zeta = 2$ bekannt ist, für den praktischen Gebrauch noch unverwendbar, so lange nicht der Werth des Piezometerstandes a im Anfange des Kanales ermittelt ist.

c) Druckänderungen an der Eintrittsstelle.

Es ist soeben hervorgehoben worden, dass der Werth c_0 in Gleichung (126) die Geschwindigkeit darstellt, mit welcher der Kanalquerschnitt F_1 sich normal relativ zu dem aussen in Ruhe gedachten Wasser fortbewegt; denkt man sich den Querschnitt F_1 durch eine ebene feste Wand ersetzt, so wäre das in der Secunde verdrängte Flüssigkeitsvolumen $F_1 c_0$; da aber das Volumen $F_1 c_1$ in den Kanal eintritt, so ist das wirklich verdrängte Volumen, welchem die Geschwindigkeit c_0 ertheilt wird, $F_1(c_0 - c_1)$ und die entsprechende Masse

$$\frac{F_1(c_0 - c_1)\gamma}{g}$$

und sonach der Druck in der Bewegungsrichtung

$$\frac{F_1 c_0 \gamma}{g}(c_0 - c_1).$$

Bezeichnet man den auf die Flächeneinheit bezogenen Druck mit p, so folgt

$$\frac{p}{\gamma} = 2 \cdot \frac{c_0(c_0 - c_1)}{2g}.$$

Ersetzt man, um den wirklichen Verhältnissen Rechnung zu tragen, den Factor 2 durch den Buchstaben ζ_0, welcher Werth ζ_0 im Weiteren als »Stosscoefficient« bezeichnet werden mag, und setzt man den Druck ausserhalb a_1 und in der Mündungsebene selbst a, wie oben, als Wassersäule im luftleeren Piezometer gedacht, so ist $p = (a - a_1)\gamma$ und daher folgt nach vorstehender Gleichung

$$2g(a - a_1) = \zeta_0 c_0 (c_0 - c_1), \tag{127}$$

woraus sich der Anfangsdruck a in der Mündungsebene berechnet, wenn der Spaltdruck a_1 bekannt ist. Substituirt man den aus Gleichung (127) hervorgehenden Werth von a in Gleichung (126), so folgt endlich die Hauptgleichung in der verwerthbaren Form:

$$(1 + \zeta_2) c_2^2 - c_1^2 - (\zeta_0 c_0 + \zeta c_1)(c_0 - c_1) = 2g(h + a_1 - a_2), \tag{128}$$

wobei

$$c_0 = c \cos(\alpha + \alpha_1) + u \sin \alpha_1 \tag{128a}$$

anzunehmen ist.

Da der Eintrittsquerschnitt F_1 sich mit der Geschwindigkeit $u \sin \alpha_1$ in der Stossrichtung fortbewegt und der Gegendruck $F_1 \gamma (a - a_1)$ beträgt, so ist die Arbeit L', welche zur Erhaltung der Druckanschwellung $a - a_1$ verbraucht wird:

$$L' = F_1 \gamma (a - a_1) u \sin \alpha_1$$

und dieser Werth ist abzuziehen von der in Gleichung (124) gegebenen Grösse.

Es findet sich daher zugleich mit Rücksicht auf die Druckänderung vor der Eintrittsöffnung für die Arbeit L der Horizontalreaction an Stelle von Gleichung (124) unter Benutzung von Gleichung (127):

$$L = Mu(c_2 \sin \alpha_2 + c \sin \alpha - u) - \frac{\zeta_0 \gamma}{2g} F_1 c_0 (c_0 - c_1) u \sin \alpha_1 \tag{129}$$

und daraus an Stelle von Gleichung (121) jetzt auch die Grösse der Horizontalreaction

$$X = M(c_2 \sin \alpha_2 + c \sin \alpha - u) - \frac{\zeta_0 \gamma}{2g} F_1 c_0 (c_0 - c_1) \sin \alpha_1 \tag{121a}$$

und die Verticalreaction an Stelle von Gleichung (122)

$$Y = M(c_2 \cos \alpha_2 - c \cos \alpha) - \frac{\zeta_0 \gamma}{2g} F_1 c_0 (c_0 - c_1) \cos \alpha_1 . \tag{122a}$$

Die Gleichungen gelten sowohl für einen »treibenden« wie für den »getriebenen« Kanal und bilden die Unterlage für die unten folgenden Untersuchungen über eine gewisse Classe von Turbinen, unter der Voraussetzung, dass die Bewegung nicht stossfrei stattfindet. Für stossfreien Durchgang ist $c_0 = c_1$ und damit nach Gleichung (127) auch $a = a_1$; die Gleichungen (128) und (129) führen dann auf die Formeln (120) und (119), weil in diesem Falle $u - c \sin\alpha = c_1 \sin\alpha_1$ ist.

Von besonderem Interesse ist Gleichung (128), welche für die unten folgenden Untersuchungen zweckmässiger Weise noch einer Umformung unterworfen wird.

a_1 war der Druck im Spalt, vor dem Eintritte, in Wassersäule im luftleeren Piezometer gemessen,

a der Druck an der Eintrittsstelle im Querschnitte F_1 selbst; bezeichnet man noch mit

a_1' den Druck hinter der Eintrittsstelle im Innern des Kanales, so besteht nach Gleichung (120) S. 97 die Beziehung:

$$(1 + \zeta_2)c_2^2 - c_1^2 = 2g(h + a_1' - a_2). \tag{130}$$

Subtrahirt man von dieser Gleichung die Gleiehung (128), so ergiebt sich:

$$2g(a_1' - a_1) = (\zeta_0 c_0 + \zeta c_1)(c_0 - c_1), \tag{131}$$

wobei wiederum c_0 durch Gleichung (128a) bestimmt ist.

Die gesammte Druckänderung $a_1' - a_1$ ist es, auf welche es bei den unten folgenden Untersuchungen ankommt.

d) Druckänderungen im Innern des Gefässes.

Nun lässt sich auch der Druck a_x an einer beliebigen Stelle im Innern des Kanales feststellen; es sei an der betreffenden Stelle, welche um x über dem unteren Querschnitte F_2 liegt, der Kanalquerschnitt F_x und die relative Durchflussgeschwindigkeit daselbst c_x, dann findet man analog der Gleichung (130)

$$(1 + \zeta_2')c_x^2 - c_1^2 = 2g(h - x + a_1' - a_x),$$

wobei ζ_2' der Widerstandscoefficient für die Kanallänge $F_1 F_x$ ist. Vernachlässigt man der Einfachheit wegen die Widerstände im Kanal, was bei flach verlaufenden Kanälen und continuirlich veränderlichem Querschnitte gestattet ist, setzt man also $\zeta_2 = \zeta_2' = 0$ und subtrahirt man die vorstehende Gleichung von Gleichung (130), so ergiebt sich

$$c_2^2 - c_x^2 = 2g(x + a_x - a_2). \tag{132}$$

Wegen der Beziehung $F_x c_x = F_2 c_2$ folgt demnach

$$a_x = a_2 - x + \left(1 - \frac{F_2^2}{F_x^2}\right)\frac{c_2^2}{2g}, \tag{132a}$$

wodurch also der Druck a_x in der Höhe x über dem Austrittsquerschnitte F_2 bestimmt ist. Sollte beispielsweise der Druck an allen Stellen im Innern der Gefässe der gleiche, also $a_x = a_2 = a_1'$ sein, so folgt nach Gleichung (132a)

$$x = \left(1 - \frac{F_2^2}{F_x^2}\right)\frac{c_2^2}{2g},$$

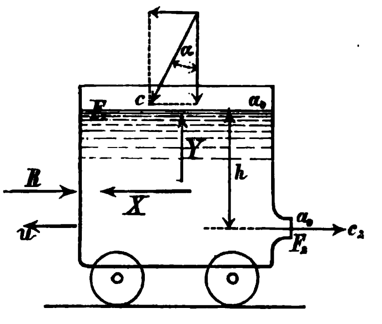
aus welcher Formel sich der erforderliche Kanalquerschnitt F_x für jeden Werth von x berechnen liesse.

§ 10. Anwendung der vorstehenden Sätze in einzelnen Specialfällen.

a) Bewegung eines Ausflussgefässes auf horizontaler Bahn.

Aus einem weiten Gefässe (Fig. 34) ströme unter constant erhaltener Druckhöhe h Wasser in horizontaler Richtung durch eine verhältnissmässig kleine Oeffnung vom Querschnitte F_2 aus. Das Gefäss bewege sich auf Rädern, die auf Schienen laufen, gleichförmig mit der Geschwindigkeit u in der, der relativen Austrittsgeschwindigkeit c_2 entgegengesetzten Richtung geradlinig fort, in Folge der Wirkung der Horizontalreaction X, die hierbei den constanten äusseren Widerstand $R = X$ überwindet.

Fig. 34.



Im Spiegel, dem Eintrittsquerschnitte F_1, sinken die Wassertheilchen vertical herab, es ist also $\alpha_1 = 0$, und da der Querschnitt F_1 als sehr gross gegen den Ausflussquerschnitt F_2 angenommen wurde, so lässt sich auch $c_1 = 0$ annehmen.

Herrscht im Spiegel, wie vor der Ausflussöffnung, der atmosphärische Druck a_0, so ist $a_1 = a_2 = a_0$; überdies aber auch in Gleichung (127) $a = a_0$ und ebenso nach Gleichung (131) $a_1' = a_0$.

Unter den gemachten Annahmen folgt daher aus der Hauptgleichung (128) die relative Ausflussgeschwindigkeit:

$$c_2 = \sqrt{\frac{2gh}{1+\zeta_2}}, \tag{133}$$

wo wieder ζ_2 den Widerstandscoefficienten für die Ausflussöffnung darstellt.

Die Wassermasse, welche in der Secunde zum Ausfluss gelangt, ist:

$$M = \frac{F_2 c_2 \gamma}{g}. \tag{134}$$

Man erkennt aus diesen Formeln schon, dass sowohl c_2, wie auch M von der Geschwindigkeit u, mit welcher das Gefäss fortschreitet, unabhängig ist.

Da die Druckhöhe h constant vorausgesetzt wurde, so ist in der gleichen Zeit die Wassermasse M von oben zuzuführen; geschieht die Zuführung mit der absoluten Geschwindigkeit c in der Richtung α (Fig. 34), so bestimmt sich nach Gleichung (129) die Arbeit L der Horizontalreaction, da $\alpha = 90^{\circ}$ ist:

$$L = Mu(c_2 + c \sin \alpha - u) \tag{135}$$

und die Reaction selbst, also der constante Widerstand R durch:

$$R = M(c_2 + c \sin \alpha - u). \tag{136}$$

Wird das Wasser dem Gefässe in der Art zugeführt, dass die Horizontalcomponente $c \sin \alpha$ der Zutrittsgeschwindigkeit c mit der Geschwindigkeit u des Gefässes identisch ist, d. h. hat das ankommende Wasser relativ zum Gefässe in horizontaler Richtung schon die Geschwindigkeit $c \sin \alpha = u$, so ergiebt sich nach den letzten Gleichungen die Arbeit der Reaction

$$L = Muc_2 \tag{135a}$$

und die Horizontalreaction

$$R = Mc_2. \tag{136a}$$

Hier mag aber der Fall noch näherer Untersuchung unterworfen werden, bei welchem das Wasser in verticaler Richtung zugeführt wird, also $\alpha = 0$ zu setzen ist.

Hier folgt die Arbeit der Reaction:

$$L = Mu(c_2 - u) \tag{135b}$$

und die Horizontalreaction oder der Widerstand R:

$$R = M(c_2 - u). \tag{136b}$$

Da nach Gleichung (133) c_2 und daher auch M von u unabhängig ist, so giebt Gleichung (135b) für die gewonnene Arbeit ein Maximum für

$$u = \frac{c_2}{2}$$

und die Maximalarbeit selbst, die mit L_m bezeichnet werde, findet sich durch Substitution dieses Werthes:

$$L_m = \frac{Mc_2^2}{4}$$

oder unter Benutzung von Gleichung (133):

$$L_m = \frac{Mgh}{2(1+\zeta_2)}.$$

Um also, vorausgesetzt die ganze Anordnung wäre technisch ausführbar, das Maximum der Arbeit zu gewinnen, müsste man das Gefäss mit einer Geschwindigkeit u zurücklaufen lassen, welche gleich der Hälfte der relativen Ausflussgeschwindigkeit c_2 ist. Der entsprechende Widerstand R_m findet sich $R_m = \frac{1}{2}Mc_2$, während für den Stillstand des Gefässes der Widerstand R_0 sich findet bei $u = 0$, und zwar $R_0 = Mc_2$. Die Benutzung von Gleichung (133) giebt bez.:

$$R_m = \frac{F_2 h \gamma}{1+\zeta_2} \quad \text{und} \quad R_0 = 2 \cdot \frac{F_2 h \gamma}{1+\zeta_2}.$$

Beim vortheilhaftesten Gange ist also die Reaction oder der von derselben überwundene constante Widerstand halb so gross, wie die Kraft, welche erforderlich wäre, das Gefäss vor dem Zurückweichen zu schützen.

Da die Flüssigkeit mit der Geschwindigkeit c herbeikommt und die verticale Fallhöhe h vorliegt, so steht, auf die Secunde bezogen, die Arbeit

$$Mgh + \frac{Mc^2}{2}$$

zur Verfügung; dividirt man mit diesem Werthe (der disponiblen Arbeit) in den Ausdruck für die Reactionsarbeit L nach Gleichung (135b), so erhält man den Wirkungsgrad η der ganzen Anordnung, solche als Betriebsmaschine gedacht:

$$\eta = \frac{2u(c_2 - u)}{2gh + c^2}.$$

Hieraus folgt der Maximalwirkungsgrad η_m für $u = \frac{c_2}{2}$ unter gleichzeitiger Berücksichtigung von Gleichung (133)

$$\eta_m = \frac{gh}{(1+\zeta_2)(2gh+c^2)}.$$

Ist die Geschwindigkeit c, mit der das Wasser zugeleitet wird, als sehr klein zu vernachlässigen, so folgt bez.:

$$\eta = \frac{u(c_2-u)}{gh} \quad \text{und} \quad \eta_m = \frac{1}{2(1+\zeta_2)},$$

woraus ersichtlich ist, dass bei dieser Anordnung selbst im günstigsten Falle der Wirkungsgrad noch nicht einmal den Werth 0,5 erreicht.

Würde das Gefäss (Fig. 34) zurückweichen, ohne einen Widerstand R zu überwinden (wobei von Luftwiderstand und den Reibungswiderständen in den Lagern und am Umfange der Räder abgesehen wird), so giebt Gleichung (136b) mit $R = 0$

$$u = c_2 = \sqrt{\frac{2gh}{1+\zeta_2}}$$

für die Geschwindigkeit u des Gefässes, welcher Werth als »Leerlaufgeschwindigkeit« bezeichnet werden kann.

Nach dem Vorhergehenden ist daher die vortheilhafteste Geschwindigkeit u des Gefässes (bei der Maximalarbeit) gleich der halben Geschwindigkeit beim Leergange.

Endlich ist noch der Fall hervorzuheben, bei welchem $u > c_2$ ist; dann ergiebt Gleichung (136b) R negativ und es bedeutet

$$R = M(u - c_2)$$

die constant wirkende Kraft, mit welcher das Gefäss zurückgezogen, d. h. »getrieben« werden muss und

$$L = Mu(u - c_2)$$

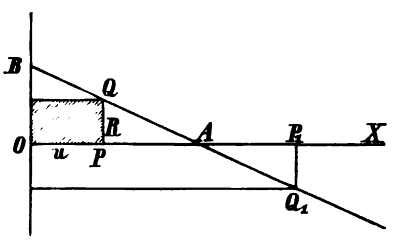
ergiebt die Arbeit, welche hierbei aufzuwenden ist.

Uebrigens ist $(c_2 - u)$ nichts anderes, als die absolute Geschwindigkeit des Wassers in der Ebene der Mündung; beim »getriebenen« Gefässe strömt das Wasser, absolut genommen, rückwärts aus.

Die im Vorstehenden behandelte Anordnung lässt sich in Rücksicht auf die Art der angenommenen Wasserzuführung in Wirklichkeit nicht ausführen, die Entwickelungen sind auch nur gegeben worden, um die Sätze über die Reaction in einfachster Form vorzuführen und in die folgenden allgemeineren Untersuchungen überzuleiten. Die gewonnenen Sätze lassen sich übrigens, was auch für die nachfolgenden Betrachtungen nützlich zu erwähnen ist, einfach graphisch darstellen.

Trägt man auf der horizontalen Axe OX (Fig. 35) die Strecke $OA = c_2$ auf, als Anfangsordinate $OB = Mc_2$ und zieht man die gerade Linie BQ_1, so ist sofort, der Abscisse $OP = u$ entsprechend, die Ordinate $PQ = R$ der Kraft des treibenden Gefässes entsprechend, während die aus u und R gebildete Rechteckfläche ihrem Inhalte nach die gewonnene Arbeit L darstellt. Man ersieht sofort aus der Figur, dass für $u = 0$ und $u = c_2$ die Arbeit $L = 0$ wird, und dass für einen dazwischen liegenden Werth von u $\left(\text{für } u = \frac{c_2}{2}\right)$ die gewonnene Arbeit ein Maximum wird.

Fig. 35.



Ist $u > c_2$, also in der Figur durch OP_1 gegeben, so ist die Ordinate P_1Q_1 für den Punkt Q_1 der geneigten Geraden negativ; die Strecke $P_1Q_1 = R$ entspricht der treibenden Kraft des getriebenen Gefässes und die aus OP_1 und P_1Q_1 gebildete Rechteckfläche entspricht ihrem Inhalte nach der »Treibarbeit«, welche mit wachsendem u fortwährend zunimmt.

Diese Darlegung setzt allerdings, wie es bei den vorhin entwickelten Formeln ebenso der Fall ist, voraus, dass bei der Bewegung des Gefässes keinerlei schädliche Widerstände vorliegen. Wäre der ganze Apparat praktisch ausführbar, so liessen sich für einen bestimmt vorgelegten Fall leicht die Hauptgleichungen entwickeln.

Sieht man von der wälzenden Reibung der Räder auf den Schienen ab, so schreibt sich die Arbeit der Zapfenreibung in den Lagern der Räder, die dem u proportional ist: φMu, wobei die

Constante φ von der Axenbelastung, dem Durchmesser der Zapfen und dem Zapfenreibungscoefficienten abhängig und zwar der constanten Wassermasse M umgekehrt proportional gedacht ist.

Der Luftwiderstand, welchen das Gefäss zu überwinden hat, ist dem u^2 proportional und der demselben entsprechende Arbeitsverlust schreibt sich $\psi M u^3$, wobei wiederum ψ eine Constante bedeutet, die sich leicht berechnen lässt. Wenn man die beiden Widerstandsarbeiten zusammenfasst und von dem Werthe L nach Gleichung (135 b) subtrahirt, so erhält man den wahren Werth von L:

$$L = Mu[c_2 - \varphi - u - \psi u^2]$$

und die Kraft

$$R = \pm M[c_2 - \varphi - u - \psi u^2],$$

wobei das obere Zeichen für das treibende, das untere Zeichen für das getriebene Gefäss gilt. Die Gerade BQ_1 in Fig. 35 verwandelt sich dann in einen Parabelzweig und der Schnittpunkt A rückt näher nach O hin.

Auch für die vorstehenden Formeln, wie für alle vorhergehenden, finden sich Analogien bei den Turbinen.

b) Zur Theorie der Reactionsschiffe.

Der Gedanke, die Horizontalreaction ausströmender Wasserstrahlen zur Bewegung von Schiffen zu verwerthen, ist zuerst von dem Engländer Ruthven und dem Deutschen Seydell der Verwirklichung zugeführt werden. Den ersten bemerkenswerthen Erfolg erzielte Seydell in Stettin durch sein im Jahre 1855 erbautes Reactionschiff »Albert«, welches mehrere Jahre nacheinander auf der Oder dem Personentransport diente. Durch den Bericht, welchen Butzke über seine mit dem Schiffe im Jahre 1858 angestellten Versuche unter Beifügung einer Zeichnung der ganzen Schiffsanordnung veröffentlichte*), wurde man in den Kreisen der deutschen Ingenieure allgemeiner für die Frage angeregt. Die genannten Versuche führten nun freilich nicht auf ein günstiges Resultat. Butzke führt aber nicht die Mängel auf das System zurück, sondern auf die unvollkommene Leistung des Dampfkessels

---

*) Bericht über das Turbinendampfschiff »Albert« des Schiffsbaumeisters Seydell in Stettin von Baurath Butzke in Coblenz. Erbkam, Zeitschrift für Bauwesen. Jahrgang IX, 1859, S. 535.

und seiner Feuerungsanlage; es war nicht möglich, den vorgeschriebenen Dampfdruck im Kessel und die verlangte Umdrehungszahl der Betriebsdampfmaschine zu erreichen; vielleicht standen auch sonst die Dimensionen des eigentlichen Betriebsapparates nicht in dem erforderlichen Verhältnisse zu einander.

Bei Seydell's Schiff wurde durch eine im Innern des Schiffes liegende, von einer Dampfmaschine betriebene Centrifugalpumpe das Wasser durch Oeffnungen im Schiffsboden durch ein Rohr nach verticaler Richtung angesaugt und nach zwei Röhren gedrückt, von denen die eine Röhre rechts, die andere links aus der Schiffswand hervorragte; beide Röhren waren aussen rechtwinkelig gekröpft. Beim Vorwärtsgange waren die Ausflussöffnungen nach hinten gerichtet; wurden beide Kropfröhren durch Drehung um 180° nach vorn gerichtet, so fand der Rückwärtsgang des Schiffes statt; bei geneigter Stellung der Axen der Ausflussöffnungen fand eine Verminderung der Treibkraft, bei verticaler Stellung ein vollständiges Aufheben derselben statt. Das Schiff dreht sich um seine verticale Mittelaxe, wenn die eine Mündung nach vorn, die andere nach hinten gerichtet ist. B. Lehmann, welcher in seiner Abhandlung*) auch die historische Seite der Frage näher berührt, hebt mit Recht als bedeutsame Vorzüge die eben angedeutete vollkommene Steuerung und Manövrirfähigkeit dieser Fahrzeuge hervor, sowie die Möglichkeit ihrer Anwendung für jeden Tiefgang.

Als Nachtheile dürften dagegen wohl hervorzuheben sein einmal der Umstand, dass durch den umfänglichen Betriebsapparat, die Centrifugalpumpe, der Fassungsraum des Schiffes vermindert wird und andererseits, dass die hydraulischen Widerstände nicht unbedeutend sein können, da das Wasser mit grosser Geschwindigkeit durch Röhren mit Ablenkungen und Krümmungen hindurchgetrieben werden muss.

Nach Seydell's Vorgehen hat während mehrerer Jahre die Frage die Schiffsbau-Ingenieure, insbesondere in England, lebhaft beschäftigt, nachdem Ruthven's Patent (1863) aufs Neue verlängert worden war. Weitere Ausführungen derartiger Reactionsschiffe ergaben aber gleichfalls keine befriedigenden Resultate, auch nicht

---

*) Bernhard Lehmann, »Ueber das Reactionspropellersystem für Schiffe«. Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, Bd. IX, 1865, S. 261.

das von Coquerill in Belgien erbaute Schiff, und mit dem grossen englischen Dampfer »Waterwitch« scheinen die betreffenden Versuche*) als abgeschlossen betrachtet werden zu müssen.

Von theoretischen Untersuchungen liegen nach Kenntniss des Verfassers nur wenige vor, die aber unter sich abweichen, und zwar von B. Lehmann (a. a. O.), Werner**), Brin***) und Grashof†).

Wird der Vorwärtsgang des Schiffes vorausgesetzt, ist also die relative Ausflussgeschwindigkeit c_2 horizontal nach hinten gerichtet und ist F_2 die Summe der Querschnitte der Ausflussöffnungen, wird überhaupt die bisher benutzte Bezeichnung, insbesondere auch die im vorigen Beispiele, beibehalten, so sind bezüglich der Anordnung des Saugrohres der Pumpe drei Fälle zu unterscheiden: der Eintrittsquerschnitt, der dem Querschnitte des Saugrohres gleich gesetzt wird, liegt horizontal im Schiffsboden (Seydell's Anordnung), oder die Axe des Saugrohres liegt ausserhalb des Schiffes horizontal, die Eintrittsmündung F_1 liegt vertical und ist nach vorn gerichtet, oder endlich die Eintrittsöffnung ist nach hinten gerichtet. Durchgängig werde angenommen, das Schiff schwimme im ruhenden Wasser, es sei also $c = 0$, die Schiffsgeschwindigkeit u, und der Austritt des Wassers finde in freier Luft oder unter Wasser in der Nähe des Wasserspiegels statt.

Fall 1. Horizontal liegende Einströmungsöffnung.

Hier ist $\alpha_1 = 0$ und wegen $c = 0$ auch nach Gleichung (128a) $c_0 = 0$, daher nach Gleichung (127) $a = a_1$, d. h. es findet vor der Mündung keine Druckänderung statt und aus Gleichung (129) folgt nun sofort, da die Axe der Ausströmungsöffnung horizontal liegt, also $\alpha_2 = 90^\circ$ ist, die Arbeit der Reaction:

---

*) Eine Abbildung des Betriebsapparates der »Waterwitch« findet sich bei John Bourne »A Treatise of the Screw Propellers«, London 1867, S. 329 und zwei Versuchsreihen sind in »Engineering« Vol. III, 1867, S. 83 angegeben.

**) »Turbinenschiffe« von R. R. Werner, Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure, Bd. XIX, 1875, S. 7.

***) »On the efficiency of jet propellers« von B. Brin, Director im Marineministerium in Florenz. The Artizan, 1871, S. 115 und 125.

†) »Zur Theorie der Reactionspropeller-Schiffe« von F. Grashof. Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure, Bd. XX, 1876, p. 65.

$$L = Mu(c_2 - u)$$

und die Grösse der Reaction selbst:

$$R = M(c_2 - u)$$

mit

$$M = \frac{F_2 c_2 \gamma}{g}.$$

Hier ist sofort L die Schiffstreibarbeit und R repräsentirt zugleich den Schiffswiderstand, der sich bekanntlich auch nach folgender Formel berechnet. Ist F der eingetauchte Theil des Querschnittes vom Hauptspanten und ζ' der Widerstandscoefficient des Schiffes, welcher sich nach einer der verschiedenen bekannten Formeln für den gegebenen Fall aus Grösse und Schiffsform berechnen lässt, so folgt auch

$$R = \zeta' F \gamma \cdot \frac{u^2}{2g}$$

oder unter Benutzung vorstehender Formeln

$$2 F_2 c_2 (c_2 - u) = \zeta' F u^2,$$

und wenn man das Verhältniss $c_2 : u$ mit x bezeichnet,

$$2 F_2 x (x - 1) = \zeta' F,$$

aus welcher Formel sich eine der Grössen berechnen lässt, wenn die übrigen gegeben sind. Es bedeute nun aber weiterhin L_p die effective Leistung der Centrifugalpumpe (mit Einschluss der Reibungswiderstände in den Röhren); diese Arbeit wird verwendet zur Arbeit L des Schiffswiderstandes; ferner ist $c_2 - u$ die absolute Geschwindigkeit, mit der das Wasser die Ausflussmündung verlässt, es geht also die Arbeit

$$\frac{M(c_2 - u)^2}{2}$$

verloren; endlich muss das Wasser die Geschwindigkeit u des Schiffes beim Eintritt annehmen; das erfordert die Arbeit

$$\frac{Mu^2}{2}.$$

Daher besteht die Beziehung:

$$L_p = Mu(c_2 - u) + \frac{M(c_2 - u)^2}{2} + \frac{Mu^2}{2},$$

aus der sich die einfache Formel

$$L_p = \frac{Mc_2^2}{2}$$

durch Reduction ergiebt. Der Wirkungsgrad η des Treibapparates ist daher

$$\eta = \frac{L}{L_p} = \frac{2Mu(c_2 - u)}{Mc_2^2}.$$

Setzt man wieder x für das Verhältniss $c_2 : u$, so folgt auch:

$$\eta = \frac{2(x-1)}{x^2}.$$

Dieser Werth ist ein Maximum für $x = 2$, d. h. $c_2 = 2u$ und es ergiebt sich daher der Maximalwirkungsgrad

$$\eta_{max} = 0{,}5.$$

Man erkennt übrigens den engen Zusammenhang der vorstehenden Formeln mit denen des vorigen Beispieles.

Ist L_i die indicirte und L_e die effective Arbeit der Betriebsdampfmaschine und setzt man $L_e = \eta_1 L_i$, sowie die effective Arbeit der Pumpe $L_p = \eta_2 L_e$, wo η_2 der Wirkungsgrad der Pumpe ist, so findet sich mit $L = \eta L_p$ der Gesammtwirkungsgrad η_n

$$\eta_n = \frac{L}{L_i} = \eta\eta_1\eta_2.$$

Setzt man für η den Maximalwerth 0,5, sowie im günstigsten Falle $\eta_1 = 0{,}85$ und $\eta_2 = 0{,}70$, so ergiebt sich das Verhältniss der Nutzarbeit zur indicirten $\eta_n = 0{,}30$, während man in der englischen Kriegsmarine für Schraubenschiffe als günstigsten Werth 0,42 gefunden hat. Das ungünstige Resultat ist wohl im Wesentlichen der unzweckmässigen Wasserzuführung nach der Pumpe zuzuschreiben.

Fall 2. Die Einströmungsöffnung des Saugrohres ist nach vorn gerichtet.

Hier ist nach Gleichung (128a) $\alpha_1 = 90°$ und daher $c_0 = u$ wegen $c = 0$, demnach die Druckanschwellung $a - a_1$ vor der Saugöffnung nach Gleichung (127) durch

$$2g(a - a_1) = \zeta_0 u(u - c_1)$$

bestimmt, wobei c_1 die Wassergeschwindigkeit im Saugrohre darstellt. Nun ist aber in Gleichung (129) $\alpha_2 = 90^\circ$ und, da das Wasser ausserhalb des Schiffes in Ruhe ist, $c = 0$.

Es folgt daher nach der angezogenen Gleichung sofort die Treibarbeit des Schiffes:

$$L = Mu(c_2 - u) - \zeta_0 \frac{F_1 \gamma}{2g} u^2 (u - c_1).$$

Weil nun

$$M = \frac{F_1 c_1 \gamma}{g},$$

ist, so kann gesetzt werden

$$L = M[u(c_2 - u) - \tfrac{1}{2} \zeta_0 \frac{u^2}{c_1}(u - c_1)],$$

und daher folgt die Reaction selbst oder der Schiffswiderstand R

$$R = M[(c_2 - u) - \tfrac{1}{2} \zeta_0 \frac{u}{c_1}(u - c_1)].$$

Hier bedeutet übrigens $(u - c_1)$ die absolute Geschwindigkeit des Wassers in der Einströmungsöffnung; die erforderliche Arbeit zur Erzeugung dieser Geschwindigkeit ist

$$\frac{M(u - c_1)^2}{2},$$

und da überdies in der Ausströmungsmündung die Arbeit

$$\frac{M(c_2 - u)^2}{2}$$

verloren geht, so ist die effective Arbeit der Pumpe

$$L_p = Ru + \frac{M(c_2 - u)^2}{2} + \frac{M(u - c_1)^2}{2},$$

in welcher Form die vorstehende Gleichung für R benutzt werden kann. Die Substitution mag hier unterbleiben. In der Praxis wird man die Druckanschwellung vor der Saugmündung vermeiden und $c_1 = u$ machen, indem man den Querschnitt F_1 des Saugrohres aus der Beziehung $F_1 u = F_2 c_2$ ermittelt. Da $c_2 > u$ ist, so fällt natürlich auch $F_1 > F_2$ aus.

Unter der angegebenen Voraussetzung ergiebt vorstehende Gleichung für R

$$R = M(c_2 - u)$$

wie im vorigen Falle; die Arbeit der Pumpe dagegen wird:

$$L_p = \frac{M(c_2^2 - u^2)}{2}$$

und damit wird der Wirkungsgrad des Treibapparates

$$\eta = \frac{L}{L_p} = \frac{2u(c_2 - u)}{c_2^2 - u^2} = \frac{2u}{c_2 + u}$$

oder, wenn man das Verhältniss $c_2 : u$ wieder mit x bezeichnet,

$$\eta = \frac{2}{x+1},$$

ein wesentlich anderes Resultat, wie im ersten Falle. Man soll also x nahezu der Einheit gleich wählen, also c_2 wenig von u verschieden annehmen; das hat aber seine Grenzen, weil dann der erforderliche Ausflussquerschnitt F_2 leicht zu gross ausfällt.

Setzt man, wie im vorigen Falle $x = 2$, so findet sich hier der Wirkungsgrad:

$$\eta = \frac{2}{3} = 0{,}667.$$

Bei $x = 1{,}5$ würde sogar schon $\eta = 0{,}80$; jedenfalls geht aus den Rechnungen hervor, dass bei richtiger Ausführung die Reactionsschiffe ganz wohl noch die Schraubenschiffe überflügeln können. Seit dem Bekanntwerden der Versuche mit der Waterwitch hat die Frage fast gänzlich geruht, wenigstens ist nichts von der erneuten Ausführung der hier in Rede stehenden Schiffe bekannt geworden; es kann den Anschein haben, als hätten die genannten Versuche der ganzen Frage den Todesstoss gegeben. Es darf aber keinem Zweifel unterliegen, dass die Einführung des Wassers in das Schiff bei der Waterwitch in unzweckmässiger Weise stattfand. Sie erfolgte von unten, durch Oeffnung im Schiffsboden, zwar nicht vertical aufwärts, wie bei Seydell, aber wie man aus den Zeichnungen ersehen kann, in einer Weise, bei welcher sicherlich starke hydraulische Widerstände und Wirbelbildungen eintraten. Ausserdem scheint auch, nach Brin's Bemerkungen (a. a. O.), die Centrifugalpumpe nicht den Verhältnissen entsprechend construirt worden zu sein. Nach Brin's Angaben betrug bei der Waterwitch der Ausströmungsquerschnitt beider Mündungen $F_2 = 0{,}5538$ qm und die Schiffsgeschwindigkeit bei einer Versuchsreihe $u = 4{,}57$ m; daher folgt mit $c_2 = 2u$ die geförderte Wassermenge $V = F_2 c_2 =$

5,062 cbm in der Secunde, die Wassermasse $M = 516$ und damit die Treibkraft oder der Schiffswiderstand $R = M(c_2 - u) = 2358$ kg. Die Treibarbeit in Pferdestärken war daher

$$N = \frac{Ru}{75} = 144.$$

Die indicirte Arbeit der Dampfmaschine wurde zu $N_i = 828$ gefunden, was auf einen Wirkungsgrad 0,174 der ganzen Anordnung führt. Die Verhältnisse lagen also in der That bei der Waterwitch sehr ungünstig.

Fall 3. Die Einströmungsöffnung des Saugrohres ist nach hinten gerichtet.

Durch die Saugöffnung strömt hier das Wasser im Saugrohre mit der Geschwindigkeit c_1 horizontal nach vorn, während die Ausströmungsgeschwindigkeit c_2 nach hinten gerichtet ist. Da hier ein Stoss beim Eintritt nicht vorliegt, so ist die Reaction nach Gleichung (117) S. 95 zu beurtheilen, man hat dort nur $\alpha_2 = 90^\circ$ und $\alpha_1 = 270^\circ$ zu substituiren. Es ist daher die Treibkraft oder der Schiffswiderstand R in diesem Falle:

$$R = M(c_2 + c_1)$$

und die Treibarbeit

$$L = Mu(c_2 + c_1).$$

Die absolute Geschwindigkeit des Wassers im Ausflussquerschnitte ist $(c_2 - u)$ und diejenige im Eintrittsquerschnitte $(c_1 + u)$, es ergiebt sich daher die effective Arbeit der Pumpe

$$L_p = Mu\,(c_2 + c_1) + \frac{M(c_2 - u)^2}{2} + \frac{M(c_1 + u)^2}{2},$$

oder nach einfacher Reduction:

$$L_p = \frac{M}{2}\,[c_2^2 - c_1^2 + 2(c_1 + u)^2].$$

Setzt man wieder

$$x = \frac{c_2}{u} \quad \text{und überdies} \quad y = \frac{c_1}{u},$$

so ergiebt sich der Wirkungsgrad des Treibapparates

$$\eta = \frac{2\,(x + y)}{x^2 - y^2 + 2(y + 1)^2}.$$

Für $y = 1$ und $x = 2$, also für $c_1 = u$ und $c_2 = 2u$ ergiebt sich $\eta = 0{,}545$. Für jeden angenommenen Werth von y findet sich bei einem gewissen Werth von x ein Maximum von η, doch soll ein weiteres Eingehen auf diese Frage unterbleiben, da die Wasserzuführung im Fall 2 auf grösseren Wirkungsgrad führt, dieser also allein der Praxis empfohlen werden kann.

Brin legt allerdings in seiner vortrefflichen Arbeit auf den Fall 3 besonderes Gewicht, doch stützt sich das Urtheil auf ein falsches Rechnungsresultat, da er irrthümlich für die absolute Geschwindigkeit im Saugrohre $(c_1 - u)$ statt $(c_1 + u)$ setzte; im Uebrigen macht Brin aber auf einen Punkt aufmerksam, der noch berührt werden mag.

In Fall 2 war die Treibkraft oder der Schiffswiderstand $R = M(c_2 - u)$ für $c_1 = u$. Wäre das gleiche Schiff nach Fall 3 angeordnet und hierbei die erforderliche Wassermasse M' bei den gleichen Werthen von u, c_1 und c_2, so fände sich nach Vorstehendem $R = M'(c_2 + u)$ und daher durch Gleichsetzen der beiden Werthe von R

$$M' = \tfrac{1}{3} M \quad \text{für} \quad c_2 = 2u.$$

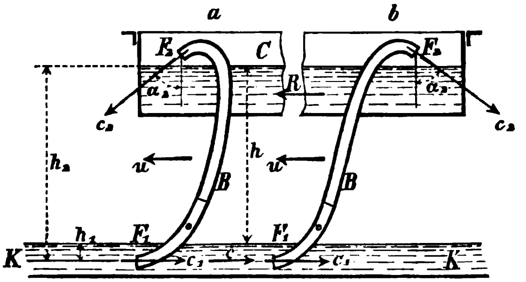
Die Pumpe hätte also viel weniger Wasser zu fördern, müsste dasselbe aber mit sehr bedeutender Geschwindigkeit ansaugen, was jedenfalls eine besondere Construction der Centrifugalpumpe, und zwar keine vortheilhafte, voraussetzen würde.

Maassgebend aber können nur die erlangten Wirkungsgrade sein, wenn man Fall 3 mit Fall 2 vergleichen will; die Anordnung im letzteren Falle ist jedenfalls die vortheilhaftere.

c) Zur Theorie des Tenderspeiseapparates (Water-Scoops) von Ramsbottom.

In einem Kanale KK (Fig. 36 f. S.) bewege sich Wasser mit der Geschwindigkeit c; in das Wasser tauche ein Rohr B ein, welches sich nach oben erstreckt und mit der constanten Geschwindigkeit u, der Kanalgeschwindigkeit entgegengesetzt gerichtet in horizontaler Richtung fortbewegt wird. Die untere Mündung F_1 des Rohres liegt vertical und das Wasser trete durch dieselbe mit der Geschwindigkeit c_1 ein; das Wasser steigt im Rohre nach oben und wird unter Umständen durch die Ausflussmündung F_2 am oberen Ende mit der Geschwindigkeit c_2 austreten.

Fig. 36.



Es mag nun zunächst einmal die Bewegung des Wassers im Rohre untersucht werden ohne Rücksicht auf die in der Ueberschrift angegebene praktische Verwendung des Apparates.

Hier gelten nun ohne Weiteres die allgemeinen Gleichungen (128), (128 a) und (129); man hat in diesen Formeln, wie ersichtlich, nur $\alpha_1 = 90^\circ$ und $\alpha = -90^\circ$, also $\alpha + \alpha_1 = 0$ zu setzen, und damit erhält man nach Gleichung (128 a) $c_0 = c + u$.

Liegt die Mitte der Einströmungsöffnung F_1 um h_1 unter dem Kanalwasserspiegel und um h_2 unter der Mitte der Ausströmungsöffnung, die ins Freie mündet, so ist $a_2 = a_0$ dem Atmosphärendruck gleich und $a_1 = a_0 + h_1$.

Es folgt $(h + a_1 - a_2)$ in Gleichung (128) gleich dem Werthe $(-h_2 + a_0 + h_1 - a_0)$ oder $-(h_2 - h_1)$. Nun bedeutet aber $h_2 - h_1$ nichts anderes als die Hub- oder Förderhöhe, welche im Weiteren kurz mit h bezeichnet werden mag. Hiernach folgt aus Gleichung (128) für vorliegenden Fall die erste Grundgleichung:

$$(1 + \zeta_2)c_2^2 - c_1^2 = [\zeta_0(c + u) + \zeta c_1](c + u - c_1) - 2gh \qquad (\alpha)$$

und in dieser Formel ist, wie erinnert werden mag, ζ_2 der Widerstandscoefficient für das Rohr, der sich nach früheren Angaben ermitteln lässt; ζ_0 ist der Stoss- und ζ der Eintrittscoefficient (vergl. S. 100 und 101), für welche beiden Werthe sich oben theoretisch der Werth 2 ergeben hat.

Die Gleichung (α) gilt für beide Rohrformen Fig. 36*a* und 36*b*, doch dürfte die letztere vorzuziehen sein, weil bei der ersteren in Folge der stärkeren Ablenkungen der Rohraxe der Widerstandscoefficient ζ_2 jedenfalls grösser ausfällt.

Nimmt man an, das Wasser im Rohre bewege sich nicht, es liege also Gleichgewicht vor, so ist $c_1 = 0$ und $c_2 = 0$ und daher nach Gleichung (α):

$$\zeta_0 (c + u)^2 = 2gh.$$

Bewegt sich das Rohr nicht, ist also auch $u = 0$, so ergiebt sich der Wasserstand h in demselben

$$h = \zeta_0 \frac{c^2}{2g}$$

und das ist der Fall, wie er beim Pitot'schen Hydrometer vorliegt, bei welchem man aus der beobachteten Höhe h einen Schluss auf die Wassergeschwindigkeit c im Kanal zieht.

Ruht dagegen das Wasser im Kanal ($c = 0$) und bewegt man das Rohr gleichförmig mit der Geschwindigkeit u fort, so wird die Höhe h

$$h = \zeta_0 \frac{u^2}{2g}$$

und damit der hydrostatische Druck P in der Mündungebene:

$$P = \zeta_0 F_1 \gamma \frac{u^2}{2g},$$

d. i. die erforderliche Kraft zur Fortbewegung, also der zu überwindende Widerstand.

Gerade für den letzteren Fall liegen Versuche von Dubuat vor, welcher ein 40 mm weites Rohr, welches unten rechtwinkelig umgebogen war, in ruhendem Wasser fortbewegte und die Steighöhe h beobachtete. Er fand für die Geschwindigkeiten $u = 0{,}78$ m, 1,08 m und 1,80 m die Werthe $\zeta_0 = 1{,}22$ bez. 1,11 und 1,08.

Durch Versuche an einem kleinen Modell einer Henschel-Jonval-Turbine fand der Verfasser bei angetriebener Turbine im Wassergleichgewichtszustande, was unten noch besprochen werden wird, im Mittel $\zeta_0 = 1{,}25$ und dieser Werth mag bis auf Weiteres in vorliegender Schrift bei numerischen Rechnungen Verwendung finden.

Was den anderen Coefficienten ζ betrifft, der als »Eintrittscoefficient« bezeichnet wurde, so stellt sich für diesen nach gewissen hydraulischen Beobachtungen aus theoretischen Gründen, — directe Versuche liegen nicht vor, — der Werth zwischen 1 und 1,5 heraus, also im Mittel ebenfalls $\zeta_0 = 1{,}25$, so dass im Folgenden näherungsweise für technische Rechnungen $\zeta = \zeta_0 = 1{,}25$ angenommen werden mag.

Es mögen nun die obigen Formeln zur Untersuchung des Tenderspeiseapparates verwendet werden. Auf der Fahrstrecke, auf welcher die Füllung des Tenders mit Wasser erfolgen soll, befindet sich zwischen den Schienen auf gewisse Erstreckung ein Kanal KK (Fig. 36) mit ruhendem Wasser gefüllt. Der untere Theil des Rohres ist um eine Axe drehbar, so dass dieser Rohrtheil gewöhnlich mit der Fangöffnung über der Fahrbahn liegt; im Anfange des Kanales dreht der Locomotivführer den Rohrtheil so, dass die Fangöffnung ins Wasser taucht und vertical zu stehen kommt; nach Füllung des Tenders wird das Rohrstück in die ursprüngliche Lage zurückgebracht*).

Setzt man nun in Gleichung (α) $c = 0$ und $\zeta = \zeta_0$, so ergiebt sich

$$(1 + \zeta_2) c_2{}^2 + (\zeta_0 - 1) c_1{}^2 = \zeta_0 u^2 - 2gh,$$

oder wegen $F_1 c_1 = F_2 c_2$:

$$\left[(1 + \zeta_2)\left(\frac{F_1}{F_2}\right)^2 + \zeta_0 - 1\right] c_1{}^2 = \zeta_0 u^2 - 2gh. \qquad (\beta)$$

Aus dieser Gleichung berechnet sich die Eintrittsgeschwindigkeit c_1 und aus $V = F_1 c_1$ das Volumen der in der Secunde gehobenen Wassermenge V und die Austrittsgeschwindigkeit c_2. Die Hubarbeit L_e ist

$$L_e = Vh\gamma = Mgh$$

und damit wäre die Aufgabe gelöst.

Es ist aber nicht ohne Interesse, noch die constante Kraft R zu ermitteln, welche zur Fortbewegung des Apparates erforderlich ist.

Aus Gleichung (129) ergiebt sich mit $c = 0$, $\alpha_1 = 0$ und $L = Ru$, weil hier das Gefäss getrieben wird, also ein Zeichenwechsel vorzunehmen ist:

$$R = M(u - c_2 \sin \alpha_2) + \frac{F_1 \gamma}{2g} (a - a_1) u$$

---

*) In der »Zeitschrift deutscher Ingenieure«, Bd. 38, 1894, ist auf Tafel 25, welche der hervorragenden Abhandlung von E. Brückmann: »Verbundlocomotiven in Nordamerika« beigefügt ist, der Speiseapparat abgebildet. S. auch: Weisbach-Herrmann, »Ingenieur- und Maschinen-Mechanik«, 1880, 2. Aufl., 3. Th., S. 513.

und mit Gleichung (127), weil $c_0 = u$ und $\frac{F_1 \gamma c_1}{g} = M$ ist,

$$R = M\left[u - c_2 \sin \alpha_2 + \tfrac{1}{2}\zeta_0 \frac{u(u - c_1)}{c_1}\right].$$

Wegen der in Fig. 36 eingeführten Bezeichnung des Winkels α_2 ist aber hier, weil in vorliegender Gleichung α_2 nach Fig. 33 (S. 98) gültig ist, zu setzen $180^0 + \alpha_2$ im Falle der Fig. 36 a und $180^0 - \alpha_2$ im Falle der Fig. 36 b, es ist daher beziehentlich für die beiden Fälle:

$$R = M\left[u \pm c_2 \sin \alpha_2 + \tfrac{1}{2}\zeta_0 \frac{u(u - c_1)}{c_1}\right].$$

Diese Formel giebt aber die Kraft zur Fortbewegung unter der Voraussetzung, dass das aus der Mündung F_2 tretende Wasser in den Kanalwasserspiegel zurückfallen würde.

Das Wasser fällt jedoch in den Wasserspiegel des Tenders, dessen Wassermenge sich schon mit der Geschwindigkeit u bewegt, wie die Mündung F_2 selbst, es findet daher beim Eintritt in das Tenderwasser eine Reaction statt, welche im Falle der Fig. 36 a den Werth $-Mc_2 \sin \alpha_2$ und im Falle der Fig. 36 b den Werth $+Mc_2 \sin \alpha_2$ hat; das Hinzufügen dieses Gliedes auf der rechten Seite vorstehender Gleichung giebt daher endlich die Treibkraft für den Speiseapparat:

$$R = Mu\left[1 + \tfrac{1}{2}\zeta_0 \frac{(u - c_1)}{c_1}\right]. \qquad (\gamma)$$

Die Formel gilt für beide Figuren 36; der Austrittswinkel α_2 ist einflusslos. In der Praxis liegt die Ausströmungsöffnung F_2 horizontal, man macht also $\alpha_2 = 0$. Die Treibarbeit L findet sich:

$$L = Mu^2\left[1 + \tfrac{1}{2}\zeta_0 \frac{(u - c_1)}{c_1}\right], \qquad (\delta)$$

worauf sich der Wirkungsgrad η dieses Wasserhebungsapparates durch

$$\eta = \frac{L_e}{L}$$

ermitteln lässt.

Nun ist aber ausdrücklich hervorzuheben, dass die vorstehenden Formeln für den Beharrungszustand gelten; sie würden auch, wie alle hydraulischen Formeln, ihre Gültigkeit verlieren, wenn bezüglich der Druckverhältnisse im Innern des Kanales nicht gewisse Bedingungen erfüllt sein würden. Hier ist von besonderem Einflusse der Druck (Piezometerstand) a in der Ebene der Eintrittsöffnung F_1, während a_1 den Druck im Wasser ausserhalb der Mündung darstellte. Nach Gleichung (127) ist, weil hier $c_0 = u$ ist:

$$a - a_1 = \zeta_0 \frac{u(u - c_1)}{2g}. \qquad (\varepsilon$$

Da die Eintrittsöffnung nur in geringer Entfernung unter dem Spiegel des Kanales liegt, so ist nahezu $a_1 = a_0$, d. h. gleich dem Wasserbarometerstand $a_0 = 10{,}333$ m, es wäre daher für:

$$c_1 \lesseqgtr u \quad \text{auch} \quad a \gtreqless a_0 .$$

Für $c_1 > u$ findet ein Ansaugen des Wassers statt, wobei dann $a < a_0$ ist und die Grenze der Wirksamkeit würde bei $a = 0$ liegen; in diesem Falle hört der Beharrungszustand auf und müsste dann eine eigenthümliche, polternde und pulsirend wirkende Wasserhebung stattfinden.

Am besten erscheint es, die Dimensionen so zu wählen, dass $a = a_0$ also $c_1 = u$ und damit die gehobene Wassermenge $V = F_1 u$ in der Secunde sich ergiebt.

Sauvage*) berechnet auch in der That die Wassermenge nach dieser Formel, doch kann man diese Berechnungsweise nicht als allgemeine Regel hinstellen, denn die Wassermenge hängt auch von der Hubhöhe, sowie von der Form und den Dimensionen des Fangrohres ab.

Ein recht klares Bild von der Wirkungsweise dieses Speiseapparates kann man sich in einem bestimmt vorgelegten Falle durch graphische Darstellung verschaffen, wenn man die Fahrgeschwindigkeit u verschieden denkt und diese als Abscisse, dagegen die zugehörigen Werthe von c_1, R, L_e, L, η und $a - a_1$ als Ordinaten aufträgt. Die Curve, welche dabei c_1, also auch $V = F_1 c_1$ darstellt, ist, wie Gleichung (β) zeigt, eine Hyperbel, deren Axe mit der X-Axe zusammenfällt und deren Scheitel in der Entfernung

$$u = \sqrt{\frac{2gh}{\zeta_0}}$$

vom Ursprunge liegt, wobei $c_1 = 0$ ist und die Wasserförderung

*) Sauvage, »La machine locomotive«. Paris 1894, S. 307.

eben beginnen würde. Ein näheres Eingehen auf die Sache wäre hier nicht gerechtfertigt; in Anbetracht des Umstandes aber, dass der Apparat in hydraulischen Schriften sonst nirgends behandelt worden ist, dürfte wohl die Vorführung eines numerischen Beispiels zweckmässig erscheinen.

Demoulin*) giebt an, dass bei einer Locomotive der Pennsylvania-Linie mit einem solchen Apparate bei einer Fahrgeschwindigkeit von 110 km in der Stunde, also bei $u = 30{,}5$ m in der Secunde, ein Tender von 13 cbm Inhalt in 9 Secunden, das wäre auf einer Fahrstrecke von 275 m, gefüllt worden sei; die Hubwassermenge wäre demnach in der Secunde 1,444 cbm gewesen.

Da dem Verfasser die Hauptdimensionen dieses Speiseapparates nicht mit Sicherheit bekannt sind, so ist leider hier ein Vergleich der Beobachtungen mit den Rechnungsresultaten nicht ausführbar; es soll daher eine andere Speisevorrichtung dieser Art hier berechnet werden, deren Dimensionen etwa denen der verschiedenen praktischen Ausführungen entsprechen dürfte.

Die Ausführung sei gedacht, wie Fig. 36*b* andeutet. Das Fangrohr sei durchgängig 300 mm breit bei rechteckigem Querschnitt; die Höhe der Eintrittsöffnung F_1 sei 75 mm und die der Austrittsöffnung F_2 sei 200 mm; es ist daher $F_1 = 0{,}0225$ qm und $F_2 = 0{,}0600$ qm. Die Hubhöhe sei $h = 2$ m und der Widerstandscoefficient des Rohres (Reibung, Krümmungen und Eintrittswiderstand in Rechnung gezogen) sei $\zeta_2 = 4$, auf die obere Mündung bezogen; er wäre dann 0,56 bezogen auf die untere Mündung. Mit Rücksicht auf den Eintrittswiderstand dürfte der Werth $\zeta_2 = 4$ eher zu klein, als zu gross gewählt sein. Mit $\zeta_0 = 1{,}25$ ergiebt sich nun für den angenommenen Apparat, wenn u Meter die Fahrgeschwindigkeit in der Secunde bedeutet, die Eintrittsgeschwindigkeit c_1 nach Gleichung (β):

$$c_1 = \sqrt{1{,}316\, u^2 - 41{,}30}\,.$$

Daraus folgt die gehobene Wassermenge in Litern $V = 1000\, F_1 c_1$ und der Druck a in der Ebene der Eintrittsöffnung F_1 (Wassersäule in Metern im luftleeren Piezometerrohre), wenn näherungsweise für

*) »Traité pratique de la machine locomotive« par Demoulin. Paris 1898, t. 4, p. 278.

den Druck ausserhalb der Mündung im Kanal $a_1 = a_0 = 10,33$ m gesetzt wird:

$$a = a_0 + \frac{\zeta_0}{2g} u(u - c_1).$$

Hiernach ergiebt sich folgende Uebersicht der Rechnungsresultate:

$u =$	5,6	10	11,44	20	30	34,0	Meter
$c_1 =$	0	9,50	11,44	22,02	33,81	38,50	»
$V =$	0	214	257	495	761	866	Liter
$a =$	12,33	10,65	10,33	7,74	3,05	0	Meter

Für $u = 5,6$ m liegt der Gleichgewichtszustand vor.

Bei $u = 11,44$ m Fahrgeschwindigkeit herrscht in der Einmündung gerade der Atmosphärendruck, bei kleinerer Geschwindigkeit ist der Druck grösser, bei grösserer Geschwindigkeit kleiner, hier findet dann ein Ansaugen des Wassers statt. Bei $u = 34$ m ist $a = 0$; es liegt daher hier die Grenze der Wirksamkeit des Apparates, da in der Bewegung des Wassers der Beharrungszustand aufhört.

Speciell bei $u = 30$ m Fahrgeschwindigkeit werden 761 kg auf die Höhe von $h = 2$ m gehoben, die Nutzarbeit ist daher $L_e = 1522$ mkg und nach Gleichung (δ) ergiebt sich mit vorstehenden Zahlenwerthen die Treibarbeit in der Secunde $L = 64898$ mkg oder in Pferdestärken $N = 865$; diese bedeutende Arbeit ist aber nur während weniger Secunden zu verrichten, denn in 10 Secunden würde schon ein Tenderraum von 7,610 cbm mit Wasser gefüllt. Der Wirkungsgrad dieses Speiseapparates als Pumpe führt zwar nur auf $\eta = 0,023$; unter den obwaltenden Verhältnissen darf dieser Werth aber keineswegs dazu benutzt werden, den Apparat als minderwerthig hinzustellen; müsste man den ganzen Eisenbahnzug nur zum Zweck der Tenderspeisung erst zur Ruhe und dann wieder in die normale Geschwindigkeit überführen, so wäre der Arbeitsverlust ebenfalls ein sehr beträchtlicher.

Bei der angegebenen Anordnung dürfte übrigens vor dem Eintritte des Beharrungszustandes ausserhalb der Eintrittsöffnung eine starke Zerstreuung des Wassers im Kanal erfolgen, ganz besonders aber, wenn bei Ueberschreitung der Grenzgeschwindigkeit der Beharrungszustand in der Bewegung des Wassers im Rohre aufhört; hier müssen dann ganz eigenthümliche tumultuarische

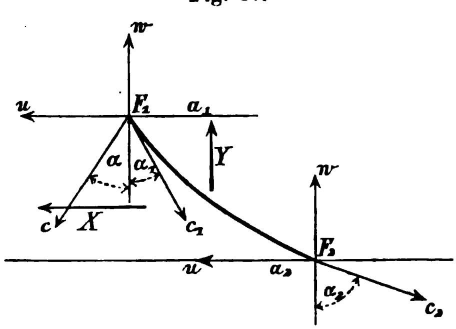
Bewegungen des Wassers, auch vor der Eintrittsöffnung hervortreten. Man hat wohl deshalb in neuerer Zeit den unteren Rohrtheil oben unbegrenzt gelassen, so dass das Wasser auf der so gebildeten Schaufel erst in gewisser Höhe über dem Unterwasserspiegel in das geschlossene Rohr eintritt. Hier liegen natürlich andere Verhältnisse vor, die sich ebenfalls der Rechnung unterwerfen lassen, doch würde eine weitere Verfolgung der Frage den Zwecken der vorliegenden Schrift nicht entsprechen.

§ 11. Reaction der Flüssigkeit in einem kanalartigen Gefässe, welches in der Horizontalebene nach zwei verschiedenen Richtungen geradlinig gleichförmig fortschreitet.

Der vorgelegte Fall bildet eine Erweiterung der Untersuchungen in § 9 und soll dazu dienen, die Unterlagen für die Behandlung des Turbinenpropellers zu gewinnen, wenn die Fortbewegung eines Schiffes durch eine getriebene Turbine erfolgt.

Der Kanal $F_1 F_2$ (Fig. 37) bewege sich gleichförmig in horizontaler Richtung mit der Geschwindigkeit u und mit der Geschwindigkeit w in verticaler Richtung, wobei sich, da der Kanal in der Horizontalebene liegend gedacht wird, im Folgenden die Bewegungen »horizontal« und »vertical« ausdrücklich auf die horizontale Bildebene, nicht auf den Raum, beziehen.

Fig. 37.



a) Stossfreier Eintritt.

Grösse und Richtung der Eintrittsgeschwindigkeit (c und α) soll übereinstimmen mit der absoluten Geschwindigkeit w_1, welche das Wasser an der Eintrittsstelle im Innern des Kanales besitzt, d. h. mit der Resultirenden aus den Geschwindigkeiten c_1, u und w.

Absolut genommen hat demnach die Eintrittsgeschwindigkeit w_1 die Componenten

$$(c_1 \sin \alpha_1 - u) \quad \text{und} \quad (c_1 \cos \alpha_1 - w$$

in horizontaler und verticaler Richtung und die Austrittsgeschwindigkeit w_2 ebenso:

$$(c_2 \sin \alpha_2 - u) \quad \text{und} \quad (c_2 \cos \alpha_2 - w).$$

Setzt man diese Werthe an Stelle von $w_1 \sin \alpha_1$ und $w_1 \cos \alpha_1$, sowie von $w_2 \sin \alpha_2$ und $w_2 \cos \alpha_2$ in Gleichung (107) S. 78, so ergiebt sich hier die Horizontal- und Verticalreaction

$$X = M(c_2 \sin \alpha_2 - c_1 \sin \alpha_1), \tag{137}$$

$$Y = M(c_2 \cos \alpha_2 - c_1 \cos \alpha_1), \tag{138}$$

genau wie nach Gleichung (117) S. 95.

Die Arbeit L der Gesammtreaction findet sich dagegen im vorliegenden Falle, weil dieselbe gleich der Arbeit der Componenten ist:

$$L = Xu + Yw$$

oder

$$L = Mu(c_2 \sin \alpha_2 - c_1 \sin \alpha_1) + Mw(c_2 \cos \alpha_2 - c_1 \cos \alpha_1). \tag{139}$$

Für diese Arbeit findet sich aber noch ein anderer Ausdruck.

Ist a_1 der Druck in Wassersäule an der Eintrittsstelle und a_2 derjenige am Austritte, so findet sich durch die auf S. 96 vorgeführten Erläuterungen für die Arbeit L auch die Beziehung:

$$L = Mg(a_1 - a_2) - \frac{M}{2}(w_2^2 - w_1^2) - \zeta_2 \frac{Mc_2^2}{2}.$$

Ersetzt man hier die Geschwindigkeiten w_1 und w_2 durch ihre vorhin angegebenen Componenten, so folgt nach einigen Reductionen

$$\begin{aligned} L = \frac{M}{2}[2g(a_1 - a_2) - ((1 + \zeta_2)c_2^2 - c_1^2)] \\ + Mu(c_2 \sin \alpha_2 - c_1 \sin \alpha_1) \\ + Mw(c_2 \cos \alpha_2 - c_1 \cos \alpha_1) \end{aligned}$$

und hieraus durch Verbindung mit Gleichung (139) die Fundamentalgleichung

$$(1 + \zeta_2)c_2^2 - c_1^2 = 2g(a_1 - a_2). \tag{140}$$

In Verbindung mit der Beziehung $F_1 c_1 = F_2 c_2$ berechnen sich aus diesen beiden Formeln c_1, c_2 und M und dann nach den Gleichungen (137), (138) und (139) für stossfreien Eintritt die horizontale und verticale Reaction, sowie die Arbeit der Gesammtreaction.

b) Eintritt mit Stoss.

Vorhin wurde vorausgesetzt, dass die Geschwindigkeit c des ankommenden Wassers die Resultante der Geschwindigkeiten c_1, u und w sei (Fig. 37). Ist diese Voraussetzung nicht erfüllt, so ist der Geschwindigkeitsverlust an der Eintrittsstelle in horizontaler Richtung:

$$c \sin\alpha - (u - c_1 \sin\alpha_1)$$

und in verticaler Richtung:

$$c \cos\alpha - (c_1 \cos\alpha_1 - w).$$

Beide Werthe quadrirt und addirt geben das Quadrat des Geschwindigkeitsverlustes w_0 und durch $\frac{1}{2} M w_0^2$ den entsprechenden Arbeitsverlust beim Eintritt.

Die aus den Geschwindigkeitsdifferenzen hervorgehenden Kräfte geben an der Eintrittsstelle den Stoss P_1 in horizontaler Richtung:

$$P_1 = M[c \sin\alpha - (u - c_1 \sin\alpha_1)]$$

und die Stosskraft P_2 in verticaler Richtung:

$$P_2 = M[c \cos\alpha - (c_1 \cos\alpha_1 - w)].$$

Addirt man P_1 auf der rechten Seite der Gleichung (137) und subtrahirt man P_2 rechts in Gleichung (138), so folgt nun die Horizontalreation nach einfacher Reduction:

$$X = M[c_2 \sin\alpha_2 - u + c \sin\alpha] \tag{141}$$

und die Verticalreaction:

$$Y = M[c_2 \cos\alpha_2 - w - c \sin\alpha], \tag{142}$$

sowie nach der Beziehung $L = Xu + Yw$ die Arbeit der Gesammtreaction:

$$L = Mu[c_2 \sin\alpha_2 - u + c \sin\alpha] + Mw[c_2 \cos\alpha_2 - w - c \cos\alpha], \tag{143}$$

in welchen Gleichungen allerdings der Einfluss der Druckänderung ausserhalb der Eintrittsmündung noch unberücksichtigt ist.

Jetzt ist wieder für die Arbeit L ein zweiter Ausdruck abzuleiten. Stellt a den Druck in der Einströmungsöffnung dar, während ausserhalb der Mündung der Druck a_1 ist, so ist die im Anfange des Kanales zur Verfügung stehende Arbeit:

$$Mg(a - a_2) + \frac{Mc^2}{2}.$$

Davon sind wieder die drei Arbeitsverluste abzuziehen, welche auf S. 99 aufgeführt und besprochen worden sind; es folgt demnach auch:

$$L = \tfrac{1}{2} M [2g(a - a_2) + c^2 - w_0{}^2 - w_2{}^2 - \zeta_2 c_2{}^2].$$

Bestimmt man w_0 auf die vorhin angegebene Weise und beachtet man die Beziehung

$$w_2{}^2 = (u - c_2 \sin \alpha_2)^2 + (c_2 \cos \alpha_2 - w)^2,$$

so ergiebt sich nach einer Reihe von Umformungen für L ein Ausdruck, welcher, mit Gleichung (143) verbunden, auf folgende Beziehung führt:

$$(1 + \zeta_2) c_2{}^2 - c_1{}^2 - 2 c_1 [(c \cos(\alpha + \alpha_1) + u \sin \alpha_1 + w \cos \alpha_1) - c_1] \\ = 2g(a - a_2).$$

Ersetzt man hier wieder, um der Wirklichkeit besser Rechnung zu tragen, den Factor 2 auf der linken Seite durch ζ, den »Eintrittscoefficienten«, und setzt man überdies der Vereinfachung wegen:

$$c \cos(\alpha + \alpha_1) + u \sin \alpha_1 + w \cos \alpha_1 = c_0, \tag{144}$$

so schreibt sich die letzte Gleichung einfacher:

$$(1 + \zeta_2) c_2{}^2 - c_1{}^2 - \zeta c_1 (c_0 - c_1) = 2g(a - a_2).$$

Der Werth c_0 hat aber eine ganz bestimmte Bedeutung; zerlegt man in Fig. 37 die Geschwindigkeiten c, u und w im Geiste in die Richtung von c_1 und normal dazu, d. h. nach der Tangente und Normale zur Kanalcurve im Anfangspunkte, so bedeutet der nach Gleichung (144) bestimmte Werth von c_0 nichts anderes, als die relative Geschwindigkeit des ankommenden Wassers nach der Richtung von c_1. Für stossfreien Eintritt ist $c_0 = c_1$.

Es bedeutet aber c_0 auch die Geschwindigkeit, mit welcher sich der Kanalquerschnitt F_1 normal gegen das aussen in Ruhe gedachte Wasser bewegt; es entsteht daher an der Mündung eine Druckänderung $(a - a_1)$, die auf die gleiche Weise, wie auf S. 101 ermittelt und durch den Ausdruck

$$a - a_1 = \frac{\zeta_0 c_0 (c_0 - c_1)}{2g}$$

nach Gleichung (127) bestimmt wird; ζ_0 wurde dabei als »Stosscoefficient« bezeichnet.

Benutzt man diese Formel in der letzten Gleichung, so ergiebt sich:

$$(1+\zeta_2)c_2^2 - c_1^2 - (\zeta_0 c_0 + \zeta c_1)(c_0 - c_1) = 2g(a_1 - a_2), \tag{145}$$

wobei c_0 durch Gleichung (144) bestimmt ist.

Die Querschnittsfläche F_1 bewegt sich absolut genommen mit der Geschwindigkeit

$$u \sin \alpha_1 + w \cos \alpha_1 .$$

Da hierbei der gesammte Druck $F_1(a - a_1)\gamma$ zu überwinden ist, so erfordert die Erzeugung dieser Druckanschwellung die Arbeit L':

$$L' = F_1(a - a_1)\gamma\,[u \sin \alpha_1 + w \cos \alpha_1],$$

oder wenn man vorstehenden Ausdruck für $(a - a_1)$ benutzt:

$$L' = \frac{\zeta_0 \gamma}{2g} F_1 c_0 (c_0 - c_1)(u \sin \alpha_1 + w \cos \alpha_1).$$

Diese Arbeitsquantität ist nun in Gleichung (143) auf der rechten Seite in Abzug zu bringen, da in der ganzen Entwickelung die Arbeit L als gewonnen angesehen wurde. Es ist daher an Stelle von Gleichung (143) zu schreiben:

$$L = Mu\,[c_2 \sin \alpha_2 - u + c \sin \alpha] + Mw\,[c_2 \cos \alpha_2 - w - c \cos \alpha]$$
$$- \frac{\zeta_0 \gamma}{2g} F_1 c_0 (c_0 - c_1)(u \sin \alpha_1 + w \cos \alpha_1), \tag{146}$$

und damit ist die vorgelegte Aufgabe auch in der allgemeinsten Form zur Lösung gebracht, wobei nur noch zu bemerken ist, dass an die Stelle der Gleichungen (141) und (142) die folgenden Ausdrücke treten, wie sich leicht übersehen lässt.

Die Horizontalreaction ist:

$$X = M[c_2 \sin \alpha_2 - u + c \sin \alpha] - \frac{\zeta_0 \gamma}{2g} F_1 c_0 (c_0 - c_1) \sin \alpha_1 \tag{141 a}$$

und die Verticalreaction:

$$Y = M[c_2 \cos \alpha_2 - w - c \sin \alpha] - \frac{\zeta_0 \gamma}{2g} F_1 c_0 (c_0 - c_1) \cos \alpha_1 . \tag{142 a}$$

Für die praktische Verwerthung der Formeln ist es zweckmässig, noch den Druck a_1' im Innern des Kanales unmittelbar nach den Eintritten in Rechnung zu bringen. Dann besteht die Beziehung:

$$(1+\zeta_2)c_2^2 - c_1^2 = 2g(a_1' - a_2), \tag{147}$$

und wenn man davon Gleichung (145) subtrahirt

$$(\zeta_0 c_0 + \zeta c)(c_0 - c_1) = 2g(a_1' - a_1), \tag{148}$$

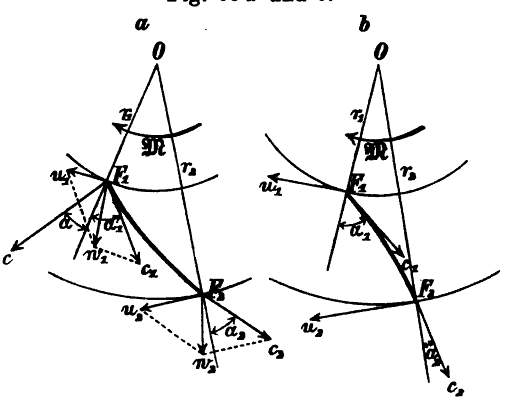
wobei wiederum c_0 durch Gleichung (144) bestimmt ist.

Für $c_0 = c_1$ gelangt man wieder auf die Formeln für stossfreien Eintritt, und für $w = 0$ treten die Formeln hervor, welche in § 9 speciell entwickelt wurden, weil diese für eine gewisse Klasse von Turbinen und Ventilatoren ausschliesslich von Bedeutung sind, während der im Vorstehenden betrachtete Fall nur beschränkte Anwendung findet.

§ 12. Reaction der Flüssigkeit in einem kanalartigen Gefässe, welches gleichförmig um eine Axe rotirt.

Der Kanal $F_1 F_2$, dessen Axe in der Horizontalebene liegen mag, rotire mit constanter Winkelgeschwindigkeit ε um eine im Punkte O (Fig. 38 a und b) auf der Bildebene senkrecht stehende Axe; die Radien an der Ein- und Austrittsstelle seien r_1 und r_2, daher die Umdrehungsgeschwindigkeiten daselbst $u_1 = r_1 \varepsilon$ und $u_2 = r_2 \varepsilon$. Die relative Eintrittsgeschwindigkeit c_1 schliesse mit dem Radius r_1 den Winkel α_1 ein und die relative Austrittgeschwindigkeit c_2 weiche von dem Radius r_2 um α_2 ab.

Fig. 38 a und b.

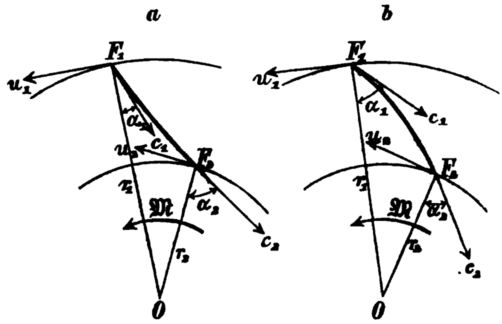


Die Krümmung der Kanal- oder Strahlaxe kann in der Form von Fig. 38 a oder b vorausgesetzt werden, die nachfolgenden Untersuchungen gelten für beide Fälle; die Flüssigkeit strömt dabei von innen nach aussen.

Die nachfolgenden Formeln gelten aber auch für die umgekehrte Bewegungsrichtung, wie es in Fig. 39 a und b angedeutet ist; man hat nur die mit dem Index 1 bezeichneten Buchstaben auf die Eintrittsstelle und die mit dem Index 2 bezeichneten auf die Austrittsstelle zu beziehen. Ob in dem einen oder anderen der vier angedeuteten Fälle ein »treibender« oder »getriebener« Kanal vorliegt ist gleichgültig und entscheidet sich nur am Ende der Rechnungen durch das Hervortreten des positiven oder negativen Vorzeichens für das Drehmoment $\mathfrak{M}$ oder die Arbeit L.

Bei den folgenden Untersuchungen mag ausschliesslich Fig. 38 a zu Grunde gelegt und an einen treibenden Kanal gedacht werden, wobei die Arbeit L als gewonnen angesehen wird.

Fig. 39 a und b.



a) Stossfreier Eintritt.

Denkt man sich die Resultirende w_1 der Geschwindigkeiten u_1 und c_1 bestimmt, so ist w_1 die absolute Eintrittsgeschwindigkeit (Fig. 38 a), von dieser soll zunächst angenommen werden, dass sie der Grösse und Richtung nach mit der Geschwindigkeit c identisch sei, mit welcher die Flüssigkeit herantritt.

Die Vereinigung von u_2 und c_2 führt auf die absolute Austrittsgeschwindigkeit w_2. Zerlegt man die Geschwindigkeiten c_1 und c_2 radial und tangential, so repräsentirt $(c_1 \sin \alpha_1 - u_1)$ die Tangentialcomponente der absoluten Eintrittsgeschwindigkeit und $(c_2 \sin \alpha_2 - u_2)$ die Tangentialcomponente der absoluten Austrittsgeschwindigkeit. Die beiden Geschwindigkeitscomponenten in der Richtung der Radien sind $c_1 \cos \alpha_1$ und $c_2 \cos \alpha_2$.

Um nun das Drehmoment $\mathfrak{M}$ für den gleichförmig rotirenden Kanal zu ermitteln, hat man einfach in Gleichung (111 a) S. 84 an die Stelle von $w_2 \sin \alpha_2$ den Werth $(c_2 \sin \alpha_2 - u_2)$ und an Stelle von $w_1 \sin \alpha_1$ den Werth $(c_1 \sin \alpha_1 - u_1)$ zu substituiren. Man erhält daher sofort:

$$\mathfrak{M} = M[(c_2 \sin \alpha_2 - u_2) r_2 - (c_1 \sin \alpha_1 - u_1) r_1], \qquad (149)$$

wobei wieder M die Flüssigkeitsmasse darstellt, welche in der Secunde durchströmt.

Ist R der normale Widerstand, der am Hebelarme r überwunden wird, so schreibt sich auch:

$$\mathfrak{M} = Rr,$$

und wenn u die Geschwindigkeit des Angriffspunktes der Kraft R dargestellt, die in der Secunde gewonnene Arbeit:

$$L = Ru$$

oder wegen $u = r\varepsilon$

$$L = \mathfrak{M}\varepsilon. \tag{150}$$

Man hat also zur Bestimmung der Secundenarbeit L das Drehmoment einfach mit der Winkelgeschwindigkeit ε zu multipliciren. Führt man dies in Gleichung (149) aus und berücksichtigt man die Beziehungen $u_2 = r_2\varepsilon$ und $u_1 = r_1\varepsilon$, so folgt für den vorliegenden Fall:

$$L = M[c_2u_2 \sin\alpha_2 - c_1u_1 \sin\alpha_1 - (u_2^2 - u_1^2)] \tag{151}$$

als erste Hauptgleichung.

Die Verwerthung vorstehender Gleichungen erfordert aber noch die Ableitung einer Formel, aus der sich die Geschwindigkeiten c_1 und c_2, die in der Beziehung $F_1c_1 = F_2c_2$ zu einander stehen, ermitteln lassen.

Zu diesem Zwecke wird wieder für L ein zweiter Ausdruck abgeleitet.

Ist a_1 der Druck an der Eintrittsstelle, a_2 der an der Austrittsstelle, so ist

$$Mg(a_1 - a_2) + \frac{Mw_1^2}{2}$$

die Arbeit, welche dem Kanale in der Secunde geboten wird. Davon sind nun die beiden Arbeitsverluste

$$\frac{Mw_2^2}{2} \quad \text{und} \quad \zeta_2\frac{Mc_2^2}{2}$$

abzuziehen; der erstere Werth ist die Arbeit, welche der austretenden Flüssigkeit noch innewohnt und der andere Werth entspricht der Arbeit der Widerstände im Innern des Kanales. Man hat demnach auch:

$$L = Mg(a_1 - a_2) + \frac{M(w_1^2 - w_2^2)}{2} - \zeta_2\frac{Mc_2^2}{2}.$$

Nun ist aber, wie aus Fig. 38 a sofort hervorgeht:

$$w_1^2 = c_1^2 + u_1^2 - 2 u_1 c_1 \sin \alpha_1$$
$$w_2^2 = c_2^2 + u_2^2 - 2 u_2 c_2 \sin \alpha_2,$$

daher folgt auch:

$$L = \frac{M}{2} [2 g (a_1 - a_2) + c_1^2 - (1 + \zeta_2) c_2^2 + 2 u_2 c_2 \sin \alpha_2$$
$$- 2 u_1 c_1 \sin \alpha_1 - (u_2^2 - u_1^2)],$$

welcher Werth mit dem in Gleichung (151) gegebenen identisch sein muss. Durch Gleichsetzen erhält man den einfachen Ausdruck:

$$(1 + \zeta_2) c_2^2 - c_1^2 = 2 g (a_1 - a_2) + u_2^2 - u_1^2 \tag{152}$$

als zweite Hauptgleichung.

Die Gleichungen (151) und (152) sind für die Theorie der Turbinen und Ventilatoren von Wichtigkeit, im Uebrigen längst bekannt, wenn sie auch jederzeit auf ganz anderem Wege abgeleitet worden sind.

Bemerkenswerth ist es, dass sie auch die früher entwickelten Formeln für geradliniges gleichförmiges Fortschreiten des Kanales (§ 9) einschliessen, man hat nur $u_1 = u_2 = u$ zu setzten.

b) Eintritt mit Stoss.

Tritt die Flüssigkeit in einer Richtung, die um α vom Eintrittsradius r_1 abweicht, mit der Geschwindigkeit c herbei (Fig. 38 a), so findet an der Eintrittsstelle normal zum Radius der Geschwindigkeitsverlust

$$[c \sin \alpha - (u_1 - c_1 \sin \alpha_1)]$$

und radial der Geschwindigkeitsverlust

$$(c \cos \alpha - c_1 \cos \alpha_1)$$

statt; daraus resultirt normal zum Radius ein constanter Druck

$$P_1 = M [c \sin \alpha - (u_1 - c_1 \sin \alpha_1)]$$

und in radialer Richtung der Druck

$$P_2 = M [c \cos \alpha - c_1 \cos \alpha_1].$$

Der letztere Druck fällt hier ausser Betracht, da er von der fest liegenden Rotationsaxe aufgenommen wird; der normale Druck P_1 dagegen wirkt in der Drehrichtung und zwar am Hebelarme r_1;

das Drehmoment $\mathfrak{M}$, welches die durch den Kanal strömende Flüssigkeit nach Gleichung (149) erzeugt, wird daher um den Werth

$$P_1 r_1 = M r_1 [c \sin \alpha + c_1 \sin \alpha_1 - u_1]$$

vergrössert; addirt man daher diesen Ausdruck auf der rechten Seite der Gleichung (149), so folgt jetzt allgemein das Drehmoment:

$$\mathfrak{M} = M[r_1 c \sin \alpha + r_2 (c_2 \sin \alpha_2 - u_2)]$$

und hieraus weiter, indem mit der Winkelgeschwindigkeit ε multiplicirt und $r_1 \varepsilon = u_1$ sowie $r_2 \varepsilon = u_2$ gesetzt wird, die Arbeit L, auf die Secunde bezogen:

$$L = M[u_1 c \sin \alpha + u_2 c_2 \sin \alpha_2 - u_2^2], \tag{153}$$

wobei allerdings auf die ausserhalb der Eintrittsmündung auftretende Druckänderung noch keine Rücksicht genommen ist.

Es sei nun a der Druck in der Einströmungsöffnung F_1, während a_1, wie bisher, den Druck ausserhalb der Eintrittsmündung darstelle.

Es ist hiernach die Arbeit, welche dem Kanale geboten wird:

$$Mg(a - a_2) + \frac{Mc^2}{2}.$$

Davon sind wieder die Arbeitsverluste

$$\frac{Mw_2^2}{2} \quad \text{und} \quad \zeta_2 \frac{Mc_2^2}{2}$$

in Abzug zu bringen, wie vorhin bei Besprechung des stossfreien Eintrittes hervorgehoben wurde. Hier tritt aber noch der Arbeitsverlust $\frac{1}{2} M w_0^2$ hinzu, wobei w_0 den Geschwindigkeitsverlust an der Eintrittsstelle darstellt. Es schreibt sich demnach:

$$L = \tfrac{1}{2} M[2g(a - a_2) + c^2 - w_0^2 - w_2^2 - \zeta_2 c_2^2]. \tag{153a}$$

Der Geschwindigkeitsverlust w_0 berechnet sich aus seinen vorhin angegebenen Componenten durch die Formel:

$$w_0^2 = [c \sin \alpha - (u_1 - c_1 \sin \alpha_1)]^2 + [c \cos \alpha - c_1 \cos \alpha_1]^2$$

und überdies ist nach (Fig. 38 a)

$$w_2^2 = c_2^2 + u_2^2 - 2 c_2 u_2 \sin \alpha_2.$$

Die Benutzung dieser Formeln in der vorstehenden Gleichung für L ergiebt dann unter gleichzeitiger Beachtung von Gleichung (153)

$$(1+\zeta_2)c_2^2 - c_1^2 - 2c_1[c\cos(\alpha+\alpha_1)+u_1\sin\alpha_1 - c_1] \\ = 2g(a-a_2)+u_2^2-u_1^2,$$

wovon man sich leicht überzeugen kann.

Ersetzt man wieder, wie in den oben behandelten Fällen, den Factor 2 vor der Klammer auf der linken Seite durch ζ, den Eintrittscoefficienten, und setzt man zur Vereinfachung

$$c\cos(\alpha+\alpha_1)+u_1\sin\alpha_1 = c_0, \tag{154}$$

so ergiebt sich:

$$(1+\zeta_2)c_2^2 - c_1^2 - \zeta c_1(c_0-c_1) = 2g(a-a_2)+u_2^2-u_1^2. \tag{155}$$

Die Grösse c_0 bedeutet wieder nichts anderes, als die relative Geschwindigkeit der ankommenden Flüssigkeit in der Richtung von c_1, d. h. in der Richtung der Tangente zur Kanalcurve an der Eintrittsstelle. Wäre $c_0 = c_1$, so wäre auch noch, wie sich gleich zeigen wird, $a = a_1$; Gleichung (155) geht dann in Gleichung (152) über, welche für stossfreien Eintritt gefunden wurde.

Nun kommt es aber noch darauf an, den Druck a in der Eintrittsmündung zu bestimmen.

Der Querschnitt F_1 bewegt sich normal relativ mit der Geschwindigkeit c_0 gegen die, aussen in Ruhe gedachte, Flüssigkeit vorwärts; da die Flüssigkeitsmenge $F_1 c_1$ in den Kanal tritt, so ist die ausserhalb verdrängte Flüssigkeitsmenge $F_1(c_0-c_1)$ und daher die erforderliche Kraft:

$$2\frac{F_1 c_0 \gamma}{2g}(c_0-c_1).$$

Ersetzt man, um der Wirklichkeit Rechnung zu tragen, den Factor 2 durch ζ_0, den Stosscoefficienten, so folgt der Druck auf die Flächeneinheit des Querschnittes oder die Druckanschwellung $(a-a_1)$:

$$a-a_1 = \zeta_0\frac{c_0(c_0-c_1)}{2g}, \tag{156}$$

woraus sich a berechnen lässt, wenn der Druck a_1 ausserhalb der Mündung bekannt ist.

Die Substitution von a in Gleichung (155) ergiebt nun endlich:

$$(1+\zeta_2)c_2^2 - c_1^2 - (\zeta_0 c_0+\zeta c_1)(c_0-c_1) = 2g(a_1-a_2)+u_2^2-u_1^2. \tag{155a}$$

Führt man den Druck a_1' im Innern des Kanales unmittelbar nach dem Eintritte ein, so ist

$$(1+\zeta_2)c_2^2 - c_1^2 = 2g(a_1' - a_2) + u_2^2 - u_1^2. \qquad (157)$$

Die Subtraction beider Gleichungen giebt

$$(\zeta_0 c_0 + \zeta c_1)(c_0 - c_1) = 2g(a_1' - a_1), \qquad (158)$$

wobei c_0 nach Gleichung (154) bestimmt ist.

In dieser Form sollen die Gleichungen später Verwendung finden.

Jetzt kommt es noch darauf an, die entsprechende Correction an der Arbeitsgleichung (153) anzubringen.

Nach vorstehenden Bemerkungen ist die Kraft, mit welcher der Kanalquerschnitt F_1 vorwärts gedrückt werden muss:

$$\zeta_0 \frac{F_1 c_0 \gamma}{2g}(c_0 - c_1).$$

Da der Kanalquerschnitt sich in der Kraftrichtung mit der absoluten Geschwindigkeit $u_1 \sin\alpha_1$ bewegt, so ist der Arbeitsaufwand L':

$$L' = \frac{\zeta_0 \gamma}{2g} F_1 c_0 (c_0 - c_1) u_1 \sin\alpha_1$$

und nun tritt an Stelle der Gleichung (153) für die gewonnene Arbeit die Gleichung:

$$L = M[u_1 c \sin\alpha + u_2 c_2 \sin\alpha_2 - u_2^2] - \frac{\zeta_0 \gamma}{2g} F_1 c_0 (c_0 - c_1) u_1 \sin\alpha_1, \qquad (159)$$

wobei wiederum c_0 durch Gleichung (154) bestimmt ist.

Dividirt man diese Gleichung durch die Winkelgeschwindigkeit ε, so findet sich der endgültige Werth $\mathfrak{M}$ des Drehmomentes:

$$\mathfrak{M} = M[r_1 c \sin\alpha + r_2(c_2 \sin\alpha_2 - u_2)] - \frac{\zeta_0 \gamma}{2g} F_1 c_0 (c_0 - c_1) r_1 \sin\alpha_1. \qquad (160)$$

c) Druckverhältnisse im Innern des Kanales.

Legt man im Folgenden Fig. 40 den Betrachtungen zu Grunde, so ergiebt sich nach Gleichung (157)

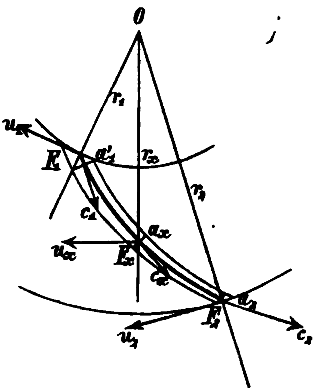
$$(1+\zeta_2)c_2^2 - c_1^2 = 2g(a_1' - a_2) + u_2^2 - u_1^2,$$

wobei ζ_2 der Widerstandscoefficient ist, welcher der Reibung der

Flüssigkeit auf dem ganzen Wege vom Eintrittsquerschnitte F_1 bis zum Austrittsquerschnitte F_2 entspricht.

Es sei nun F_x der Querschnitt des gefüllt gedachten Kanales oder, wenn der Strahl den Kanal nicht ausfüllt, der Querschnitt des Strahles, gemessen an einer Stelle im Innern, welche um r_x von der Axe abliegt; die relative Strömungsgeschwindigkeit daselbst sei c_x und die Umdrehungsgeschwindigkeit u_x; der Piezometerstand endlich an der betreffenden Stelle a_x; dann findet sich analog dem vorstehenden Ausdrucke:

Fig. 40.



$$(1 + \zeta_x) c_x^2 - c_1^2 = 2g(a_1' - a_x) + u_x^2 - u_1^2,$$

wobei ζ_x der Widerstandscoefficient, entsprechend der Strecke $F_1 F_x$, sein soll.

Setzt man nun der Einfachheit wegen und weil dies für die vorliegenden, nebensächlichen Untersuchungen hinreichend genau ist, $\zeta_2 = \zeta_x = 0$ und subtrahirt man die vorstehenden beiden Gleichungen von einander, so ergiebt sich:

$$2g(a_x - a_2) = (c_2^2 - c_x^2) - (u_2^2 - u_x^2). \qquad (161\,\mathrm{a})$$

Nun besteht aber die Beziehung $F_x c_x = F_2 c_2$ sowie $u_x : u_2 = r_x : r_2$ und sonach ist

$$a_x = a_2 + \left[1 - \left(\frac{F_2}{F_x}\right)^2\right]\frac{c_2^2}{2g} - \left[1 - \left(\frac{r_x}{r_2}\right)^2\right]\frac{u_2^2}{2g}, \qquad (161)$$

und damit lässt sich a_x für jeden Querschnitt im Innern des Kanales berechnen.

Da der Kanal (Fig. 40) in der Horizontalebene liegend gedacht wird, so kann man sich den Druck a_x im Querschnitte F_x senkrecht zur Bildebene aufgetragen denken; führt man das im Geiste für alle Kanalquerschnitte aus, so liegen die Spiegel aller Piezometerstände in einer Rotationsoberfläche, deren Axe mit der Drehaxe zusammenfällt; Gleichung (161) repräsentirt dann die Gleichung dieser Fläche.

Setzt man einmal voraus, der Kanal wäre bei F_2 geschlossen, es fände also keine Bewegung im Kanale statt, so ist $c_2 = 0$ und damit folgt aus Gleichung (161):

$$a_x = a_2 - \left[1 - \left(\frac{r_x}{r_2}\right)^2\right]\frac{u_2^2}{2g}.$$

Bezeichnet noch a den Piezometerstand in der Axe selbst, d. h. für $r_x = 0$, so ist auch

$$a = a_2 - \frac{u_2^2}{2g}$$

und durch Subtraction beider Gleichungen ergiebt sich:

$$a_x - a = \left(\frac{r_x}{r_2}\right)^2 \frac{u_2^2}{2g} = \frac{u_x^2}{2g}.$$

Das ist aber die Gleichung eines Rotationsparaboloides, dessen Axe mit der Drehaxe zusammenfällt und dessen Scheitel in der Höhe a liegt, also die bekannte Niveaufläche eines mit Wasser gefüllten Gefässes, welches um eine verticale Axe gleichförmig rotirt.

Als besonders wichtig ist aber noch der Fall hervorzuheben, in welchem $a_x = a_2$, also der Druck in allen Querschnitten gleich gross ist, die Spiegel aller Piezometer in einer Horizontalebene liegen. Dieser Fall liegt vor, wenn ein Wasserstrahl in der Horizontalebene frei unter atmosphärischem Druck an einer gleichförmig rotirenden Fläche hinströmt. Man erhält für diesen Fall aus Gleichung (161) für $a_x = a_2$

$$\left[\left(\frac{F_2}{F_x}\right)^2 - 1\right]c_2^2 = \left[\left(\frac{r_x}{r_2}\right)^2 - 1\right]u_2^2,$$

woraus sich für jeden Radius r_x der Strahlquerschnitt F_x berechnet.

Wäre hierbei noch, was bei gewissen Turbinen vorkommen kann, $c_2 = u_2$, so folgt die einfache Beziehung $F_x r_x = F_2 r_2$, wonach der Strahlquerschnitt F_x dem zugehörigen Radius r_x umgekehrt proportional erscheint.

§ 13. Reaction einer elastischen Flüssigkeit (Luft oder Dampf) in einem kanalartigen Gefässe, welches gleichförmig um eine Axe rotirt oder geradlinig gleichförmig fortschreitet.

Die nachfolgenden Untersuchungen bilden die Unterlagen für die Theorie der Dampfturbinen, die in neuester Zeit eine wichtige Rolle zu spielen beginnen, sowie für den Luftpropeller. Dabei muss aber gleich von vornherein betont werden, dass die Betrachtungen sich nur auf die Voraussetzung »stossfreien Eintrittes« beschränken müssen, auf denjenigen Fall, der allerdings technisch von vorwaltender Bedeutung ist. Liegt Eintritt mit Stoss vor, finden also plötzliche Geschwindigkeitsänderungen statt, so stellen sich der Lösung der Frage Schwierigkeiten entgegen, welche beim heutigen Stande der Thermodynamik noch nicht überwunden werden können; selbst der einfachste Fall, Durchgang einer elastischen Flüssigkeit durch ein Rohr mit plötzlicher Erweiterung, ist noch ungelöst*); bei Wasser treten, da das Volumen desselben constant angenommen werden kann, nur Druckänderungen auf, welche in allen obigen Entwickelungen nach dem Borda-Carnotschen Satze bestimmt wurden; bei Luft und Dampf treten dagegen Druck- und Volumenänderungen gleichzeitig auf. Der entsprechende Arbeitsverlust verwandelt sich in Wärme, die eine nicht bestimmbare Zustandsänderung hervorbringt.

a) Reaction im ruhenden Kanale.

Für ein ruhendes Gefäss wurde auf S. 9 für die Bewegung einer elastischen Flüssigkeit unter Zuhülfenahme von Fig. 1 (S. 7) Gleichung (4) abgeleitet. Setzt man voraus, dass der Kanal in der Horizontalebene liegt, so ist in der angegebenen Formel $h_1 = h_2 = 0$ zu setzen, aber auch bei verticaler Lage des Kanales kann $h_1 = h_2 = 0$ angenommen werden, weil diese Differenz gegenüber den anderen in der Formel vorkommenden Gliedern sehr klein ist. Es folgt daher für vorliegenden Fall:

$$\frac{w_2{}^2 - w_1{}^2}{2g} = \int_{p_2}^{p_1} v\,dp \tag{162}$$

oder auch:

$$\frac{M(w_2{}^2 - w_1{}^2)}{2} = Mg\int_{p_2}^{p_1} v\,dp\,. \tag{162a}$$

---

*) Der Versuch von Grashof, »Theoretische Maschinenlehre«, Bd. I, S. 421, Leipzig 1875, die Frage zu beantworten, kann nicht als gelungen angesehen werden. Selbst wenn man sich mit den Voraussetzungen einverstanden erklären wollte, von denen die Entwickelungen ausgehen, enthalten doch die Schlussformeln noch unbekannte Grössen, die eine Verwerthung an sich schon nicht ermöglichen.

Hier sind p und v der specifische Druck und das specifische Volumen an einer beliebigen Stelle im Innern des Kanales; p_1 und v_1 bedeuten dieselben Grössen für den Eintrittsquerschnitt F_1 und p_2 und v_2 für den Austrittsquerschnitt F_2; hierbei bestehen auch die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} Mgv_1 &= F_1 w_1 \\ Mgv_2 &= F_2 w_2. \end{aligned}\right\} \tag{163}$$

Ist p_0 der Druck für irgend einen beliebigen Anfangszustand, wobei $p_0 < p_2$ gedacht werden mag, so schreibt sich Gleichung (162) auch wie folgt:

$$\frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} = \int_{p_0}^{p_1} v\,dp - \int_{p_0}^{p_2} v\,dp\,,$$

und setzt man:

$$\int_{p_0}^{p_1} v\,dp = a_1 \quad \text{und} \quad \int_{p_0}^{p_2} v\,dp = a_2, \tag{164}$$

so folgt einfach:

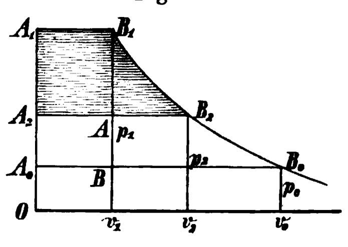
$$w_2^2 - w_1^2 = 2g(a_1 - a_2) \tag{165}$$

und

$$\frac{M(w_2^2 - w_1^2)}{2} = Mg(a_1 - a_2) \tag{165a}$$

in Uebereinstimmung mit den Gleichungen, wie sie für tropfbarflüssige Körper gefunden worden sind; bei elastischen Flüssigkeiten treten einfach nur an Stelle der Piezometerstände a_1 und a_2 die Werthe der beiden Integrale (164), welche sich aber nur ermitteln lassen, wenn man das Gesetz kennt, nach welchem sich beim Durchströmen der Druck p mit dem Volumen v ändert. Denkt man sich die Beziehung $p = \mathfrak{F}(v)$ gegeben, so lässt sich durch die graphische Darstellung (Fig. 41) Einblick in die Frage gewinnen.

Fig. 41.



Trägt man die Volumina v_1, v_2 und v_0 als Abscissen und die Drucke p_1, p_2 und p_0 als Ordinaten auf, so repräsentirt die Curve $B_1 B_2 B_0$, die als »Druckcurve« bezeichnet werden mag, das Gesetz der Druckänderungen. Die ganze Fläche $A_1 B_1 B_0 A_0$ stellt jetzt den Werth des Integrales a_1 (164) und der untere Theil die Fläche $A_2 B_2 B_0 A_0$, das Integral a_2 dar; die Differenz $a_1 - a_2$ in Gleichung (165) ist dann durch die horizontal schraffirte Fläche $A_1 B_1 B_2 A_2$ dargestellt.

Bei tropfbaren Flüssigkeiten verwandelt sich die Druckcurve in die Verticale $B_1 A B$, die Rechteckfläche $A_1 B_1 B A_0$ stellt dann den Piezometerstand a_1 und die Rechteckfläche $A_2 A B A_0$ den Druck a_2 dar, so dass das Rechteck $A_1 B_1 A A_2$ die Druckdifferenz $a_1 - a_2$ in Flüssigkeitssäule repräsentirt. Bei geringer Druckdifferenz $(p_1 - p_2)$ wird die Fläche des Curvendreiecks $B_1 B_2 A$ klein und kann dann gegenüber der Rechteckfläche $A_1 B_1 A A_2$ unter Umständen vernachlässigt werden, d. h. man kann dann bei elastischen Flüssigkeiten die für tropfbare Flüssigkeiten gewonnenen Formeln benutzen, wie das schon vielfach geschehen ist.

Der Gang der Rechnung wird nun im allgemeinen Falle der folgende sein.

Als gegeben werden betrachtet die Querschnitte F_1 und F_2, der Zustand p_1 und v_1 beim Eintritte, der Druck p_2 beim Austritte und das Gesetz der Druckänderung $p = \mathfrak{F}(v)$. Aus dem letzteren berechnet sich v_2 und dann aus den beiden Gleichungen (163)

$$\frac{w_2}{w_1} = \frac{F_1}{F_2}\frac{v_2}{v_1}. \tag{166}$$

Die Verbindung dieser Gleichung mit Gleichung (162) ergiebt dann die Grösse der beiden Geschwindigkeiten w_1 und w_2, worauf aus einer der beiden Gleichungen (163) sich die Masse M der durchströmenden Flüssigkeit, auf die Secunde bezogen, ermittelt.

Denkt man sich nun, der Kanal sei nach Angabe der Fig. 27 (S. 82) um eine verticale Axe O drehbar, so ist das Drehmoment $\mathfrak{M}$, welches erforderlich ist, den ruhend gedachten Kanal festzuhalten nach Gleichung (111 a) S. 84

$$\mathfrak{M} = M(r_2 w_2 \sin\alpha_2 - r_1 w_1 \sin\alpha_1). \tag{166a}$$

Könnte dagegen der Kanal in horizontaler Richtung ausweichen, so wäre der horizontal anzubringende Widerstand R, um das Fortschreiten zu verhindern, nach Gleichung (107) (S. 78)

$$R = M(w_2 \sin\alpha_2 - w_1 \sin\alpha_1), \tag{166b}$$

welche beide Grössen sich nun nach Vorstehendem berechnen lassen.

Bei der technischen Verwerthung vorstehender Sätze **muss** man aber bezüglich des Verlaufes der Druckcurve von bestimmten Annahmen ausgehen. Der nächst liegende Gedanke ist, anzunehmen, dass die Curve eine »adiabatische« sei, d. h. dass bei der elastischen Flüssigkeit diejenigen Aenderungen vorliegen, welche auftreten, wenn die Expansion ohne Zu- und Ableitung von Wärme erfolgt. Es ist oft vortheilhafter, an Stelle der adiabatischen Curve diejenige zu setzen, welche der Verfasser als polytropische Curve*) bezeichnet hat und welche dem Gesetze

$$p v^n = p_1 v_1{}^n \tag{167}$$

folgt, wobei n eine constante Grösse ist, über welche noch nähere Angaben erforderlich sind. Die Gleichung gilt auch für die Adiabate; ersetzt man für diese, dem Gebrauch gemäss, n durch $\varkappa$, so ist für atmosphärische Luft $\varkappa = 1{,}410$, für anfänglich trocknen gesättigten Wasserdampf $\varkappa = 1{,}135$ (T. Th., Bd. II, S. 73) und für überhitzten Wasserdampf $\varkappa = 1{,}333$ (T. Th., Bd. II, S. 234). Für die polytropische Curve setzt man $n < \varkappa$, weil dadurch in gewissem Maasse zugleich dem Einflusse der Widerstände im Kanale Rechnung getragen werden kann (T. Th., Bd. I, S. 226).

Aus Gleichung (167) findet sich durch Differenziren für $n = \varkappa$

$$v dp + \varkappa p dv = 0,$$

oder wenn man links $\varkappa v dp$ addirt und subtrahirt:

$$(\varkappa - 1) v dp + \varkappa d(pv) = 0,$$

daher:

$$v dp = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} d(pv).$$

Demnach folgt an Stelle der Gleichungen (162) und (162a)

$$\frac{w_2{}^2 - w_1{}^2}{2g} = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1}(p_1 v_1 - p_2 v_2) \tag{168}$$

und

$$\frac{M(w_2{}^2 - w_1{}^2)}{2} = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} M g (p_1 v_1 - p_2 v_2). \tag{168 a}$$

*) »Technische Thermodynamik«, Leipzig 1887 und 1890. 2 Bände. (Bd. I, S. 142.) Im Texte wird unter der Bezeichnung (T. Th.) auf das Buch verwiesen.

Aus Gleichung (167) folgt dabei für die Adiabate

$$p_2 v_2 = p_1 v_1 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}. \tag{169}$$

Die letzten Gleichungen*) sollen im Folgenden benutzt werden; will man eine andere Druckcurve zu Grunde legen, so ist auf die Gleichungen (162) bis (164) zurückzugreifen.

Im Uebrigen schreibt sich mit $p_0 = 0$ bei adiabatischer Zustandsänderung an Stelle der Gleichung (164)

$$a_1 = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} p_1 v_1 \quad \text{und} \quad a_2 = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} p_2 v_2. \tag{170}$$

Die letzteren Gleichungen gehen in die für tropfbarflüssige Körper gültigen über bei $\varkappa = \infty$ und $v_1 = v_2 = \frac{1}{\gamma}$.

b) Reaction im gleichförmig rotirenden Kanale.

Hier verrichtet die durch den Kanal strömende Flüssigkeit die Arbeit L, es ist demnach an Stelle von Gleichung (168a) zu schreiben:

$$\frac{M(w_2^2 - w_1^2)}{2} = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} Mg(p_1 v_1 - p_2 v_2) - L.$$

Es folgt daher:

$$L = \tfrac{1}{2} M\left[\frac{\varkappa}{\varkappa - 1} 2g(p_1 v_1 - p_2 v_2) - (w_2^2 - w_1^2)\right],$$

Nun ist aber nach Fig. 38a (S. 130):

$$w_2^2 = u_2^2 + c_2^2 - 2 u_2 c_2 \sin \alpha_2$$
$$w_1^2 = u_1^2 + c_1^2 - 2 u_1 c_1 \sin \alpha_1$$

und daher auch:

$$L = \tfrac{1}{2} M\left[\frac{\varkappa}{\varkappa - 1} 2g(p_1 v_1 - p_2 v_2) - (c_2^2 - c_1^2 + u_2^2 - u_1^2)\right] + M[u_2 c_2 \sin \alpha_2 - u_1 c_1 \sin \alpha_1].$$

Andererseits fand sich für diese Arbeit nach Gleichung (151) S. 132 auch:

$$L = M[u_2 c_2 \sin \alpha_2 - u_1 c_1 \sin \alpha_1 - (u_2^2 - u_1^2)], \tag{171}$$

*) Vergl. »Technische Thermodynamik«, Bd. I, S. 228.

und daher folgt durch Gleichsetzen die Beziehung:

$$c_2^2 - c_1^2 = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} 2g(p_1 v_1 - p_2 v_2) + u_2^2 - u_1^2 \tag{172}$$

analog der Gleichung (152) S. 133 für tropfbare Flüssigkeiten. Hierzu treten noch die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} Mg v_1 &= F_1 c_1 \\ Mg v_2 &= F_2 c_2 , \end{aligned}\right\} \tag{173}$$

wonach unter Heranziehung von Gleichung (167) und (168) die Grundlagen zur Lösung der Aufgabe gegeben sind.

c) Reaction im geradlinig gleichförmig fortschreitenden Kanale.

Es ist nicht nöthig, die Entwickelung in vorstehender Art zu wiederholen, sondern es lässt sich sofort auf die Formeln zurückgreifen, welche oben für tropfbare Flüssigkeiten unter Voraussetzung stossfreien Eintrittes abgeleitet wurden.

Nimmt man den in Fig. 37 (S. 125) dargestellten allgemeinen Fall an, nach welchem der Kanal horizontal mit der Geschwindigkeit u und vertical mit der Geschwindigkeit w fortschreiten sollte, so ergiebt sich, wie in § 11, auch für **elastische** Flüssigkeiten nach den Gleichungen (137), (138) und (139)
die Horizontalreaction:

$$X = M[c_2 \sin \alpha_2 - c_1 \sin \alpha_1], \tag{174}$$

die Verticalreaction:

$$Y = M[c_2 \cos \alpha_2 - c_1 \cos \alpha_1] \tag{175}$$

und die Arbeit der Gesammtreaction in der Secunde:

$$L = Mu[c_2 \sin \alpha_2 - c_1 \sin \alpha_1] + Mw[c_2 \cos \alpha_2 - c_1 \cos \alpha_1]. \tag{176}$$

An Stelle von Gleichung (140) ist aber zu schreiben:

$$c_2^2 - c_1^2 = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} 2g(p_1 v_1 - p_2 v_2), \tag{177}$$

und überdies gelten hier wieder die vorstehenden Gleichungen (173) und (169).

Für den in § 9 behandelten Fall, nach welchem die Bewegung des Kanales nur in horizontaler Richtung erfolgen sollte, hat man in vorstehender Gleichung (176) einfach $w = 0$ zu setzen, ohne sonstige Aenderungen vorzunehmen.

§ 14. Relative und absolute Bahn eines Wasserstrahles im bewegten Kanale.

In den nachfolgenden Betrachtungen soll wieder die Bewegung einer tropfbaren Flüssigkeit (Wasser) zu Grunde gelegt werden; die gewonnenen Sätze lassen sich dann, was aber nicht weiter verfolgt werden soll, auf die Bewegung elastischer Flüssigkeiten übertragen.

Wir nehmen an, das Wasser fülle den bewegten Kanal vollständig aus, was bei elastischen Flüssigkeiten ohnehin immer der Fall ist; die Entwickelungen gelten aber auch, wenn das Wasser den Kanal nicht ausfüllt, der Wasserstrahl also frei an der concaven Begrenzungsfläche des Kanales hinströmt; in diesem Falle hätte man nur an Stelle der Kanalquerschnitte in den einzelnen Punkten des Wasserweges die Strahlquerschnitte zu substituiren.

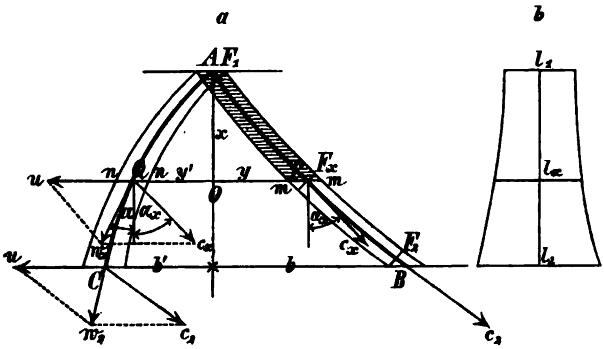
a) Der Kanal bewegt sich horizontal geradlinig und gleichförmig.

Es sei APB (Fig. 42 f. S.) die Kanalaxe (oder Strahlaxe) und der Kanal bewege sich horizontal mit der constanten Geschwindigkeit u. Die relativen Durchflussgeschwindigkeiten seien wieder, wie früher, c_1, c_x und c_2 in den Querschnitten F_1, F_x und F_2; die Kanalaxe repräsentirt daher die relative Bahn eines Wasserelementes in der Axe. Es ist nun bemerkenswerth, dass in allen obigen Untersuchungen nur diese relative Bahn in Betracht kam; es ist aber immerhin von Werth, die betreffenden Bewegungsverhältnisse noch näher zu untersuchen.

Verfolgt man ein Wasserelement vom Eintrittspunkte A auf seinem Wege bis zum Punkte P und hat dasselbe diesen Weg in der Zeit t zurückgelegt, so ist der Punkt P in der gleichen Zeit um den Weg $PQ = ut$ fortgeschritten. In Wirklichkeit befindet sich daher das Wasserelement am Ende der Zeit t nicht im Punkte P, sondern in der Lage Q, und wenn man für jeden Punkt P die entsprechende Lage von Q bestimmt und die letzteren Punkte durch eine Curve AQC (Fig. 42) verbunden denkt, so ergiebt diese die wahre oder absolute Bahn des Wasserelementes.

Es ist nun die Aufgabe, den Zusammenhang der beiden Curven APB und AQC derart darzulegen, dass man die eine aus der

Fig. 42.



anderen bestimmen und zeichnen kann, welcher Verlauf für die letztere auch vorliegen mag. Die Lösung dieser Aufgabe ist bisher in verschiedenen Schriften, aber mit wenig Erfolg behandelt worden, nur für einzelne specielle Fälle liegen richtige Lösungen vor; es unterliegt aber, wie das Folgende zeigen wird, keiner Schwierigkeit, die Frage ganz allgemein zu behandeln.

Man lege durch den Anfangspunkt A eine verticale Linie AO und betrachte diese als Abscissenaxe; es sei nun $AO = x$ die Abscisse und $OP = y$ die Ordinate des Punktes P, während andererseits derselben Abscisse die Ordinate y' des zugehörigen Punktes Q der wahren oder absoluten Bahn entsprechen möge.

Die Vereinigung der beiden Geschwindigkeiten c_x und u im Punkte Q liefert nun die wahre Geschwindigkeit w_x des Flüssigkeitselementes an dieser Stelle. Die Richtung von w_x fällt mit der Tangente der absoluten Bahn im Punkte Q zusammen, der Winkel derselben zur Abscissenaxe AO sei α, wie derjenige der Tangente oder der Richtung von c_x in der relativen Bahn mit α_x bezeichnet werden mag. — Nun folgt direct aus Fig. 42:

$$w_x \sin \alpha = u - c_x \sin \alpha_x$$

sowie

$$w_x \cos \alpha = c_x \cos \alpha_x.$$

Die Division beider Gleichungen giebt:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{u - c_x \sin\alpha_x}{c_x \cos\alpha_x}$$

oder auch

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha_x = \frac{u}{c_x \cos\alpha_x}.$$

Multiplicirt man auf der rechten Seite oben und unten mit dem normalen Querschnitte F_x des Kanales im Punkte P, so ersieht man, dass $V = F_x c_x$ nichts anderes, als das Flüssigkeitsvolumen ist, welches in der Secunde durch den Kanal strömt und das eine constante Grösse ist, da der Beharrungszustand vorausgesetzt wird. In den obigen Untersuchungen wurde für jede Geschwindigkeit u die durchströmende Masse M bestimmt und daher ist auch aus der Beziehung $Mg = V\gamma$ das Volumen unter allen Umständen bekannt.

Nach dem Gesagten ergiebt sich aus vorstehender Gleichung

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha_x = \frac{F_x u}{V \cos\alpha_x}.$$

Man lege nun durch den Punkt P einen Horizontalschnitt mm und bezeichne dessen Querschnitt mit F, so folgt auch $F_x = F \cos\alpha_x$ und damit aus der letzten Gleichung:

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha_x = \frac{Fu}{V}.$$

Benutzt man hier die bekannten Formeln:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy'}{dx} \quad \text{und} \quad \operatorname{tg}\alpha_x = \frac{dy}{dx},$$

so folgt

$$dy' + dy = \frac{u}{V} F dx$$

und durch Integration

$$y' + y = \frac{u}{V}\int_0^x F dx.$$

Nun bedeutet aber das hier auftretende Integral nichts anderes, als den (in Fig. 42 horizontal schraffirten) Cubikinhalt des Kanales vom Eintrittspunkte A bis zum horizontalen Querschnitte F gemessen; bezeichnet man diesen Inhalt, den man für verschiedene

Lagen des Punktes P messen und berechnen kann, wenn der Kanal gezeichnet vorliegt, mit V_x, so folgt endlich:

$$y' + y = \frac{V_x u}{V} \tag{178}$$

als die sehr einfache Beziehung zwischen den beiden Curven.

Entsprechend der ganzen Höhe des Kanales sei b die Ordinate für den Austrittspunkt B der relativen Bahn und b' die Ordinate für den Austrittspunkt C der absoluten Bahn; bezeichnet man noch mit $V_\varkappa$ den Cubikinhalt des ganzen Kanales AB, so ist nach Gleichung (179) auch

$$b' + b = \frac{V_\varkappa u}{V}, \tag{179}$$

woraus durch Division auch folgt:

$$\frac{y' + y}{b' + b} = \frac{V_x}{V_\varkappa}. \tag{180}$$

Man kann also, wenn b gegeben ist, aus Gleichung (179) b' berechnen und dann mit Hülfe von Gleichung (180) y' für jeden Werth von V_x bestimmen.

V_x als Abscisse und $y' + y$ als Ordinate aufgetragen gedacht, giebt einen Einblick in die Veränderlichkeit von $y' + y$. Die Zeit t, welche ein Wasserelement zur Zurücklegung des Weges AP oder AQ braucht, findet sich nebenbei aus der Beziehung

$$t = \frac{y' + y}{u}.$$

Denkt man sich einen gefüllten Kanal und die veränderlichen senkrecht zur Bildebene (Fig. 42 *b*) genommenen Kanalbreiten mit l_1, l und l_2 bezeichnet und trägt man die Länge mm des Horizontalschnittes F im Punkte P im Punkte Q derart auf, dass $\overline{nn} = \overline{mm}$ ist, so erhält man die wahre Form des ganzen Strahlquerschnittes in der absoluten Bahn.

Uebrigens folgt hieraus, dass der der Strecke AQ entsprechende Cubikinhalt des Wassers ebenfalls durch V_x gegeben ist; da nun die Wassermenge V, welche in der Secunde durchgeht und die Geschwindigkeit u constante Grössen sind, so erkennt man, dass zwischen den beiden Curven AB und AC eine reciproke Beziehung besteht. Man kann sich daher auch die absolute Bahn AQC durch y' und b' gegeben denken und nach denselben Formeln (178) oder (180) die Ordinaten der relativen Bahn y und b berechnen und damit die erforderliche Kanalcurve für den bewegten Kanal ermitteln.

Die absolute Bahn AQC verläuft auf der rechten Seite der Verticalen AO, wenn die Berechnung von y' und b' negative Werthe ergiebt; unter Umständen könnte die absolute Bahn sich auch durch die Gerade AO darstellen, wenn sich nämlich $y' = 0$ und $b' = 0$ ergiebt.

Specialfälle.

Fall 1. Der bewegte Kanal sei vollständig mit Wasser gefüllt und der Horizontalquerschnitt F an allen Stellen des bewegten Kanales derselbe. Die horizontale Strecke mm (Fig. 42) werde mit e bezeichnet, an der Eintrittsstelle mit e_1 und an der Austrittsstelle mit e_2, es soll also die Bedingung:

$$F = el = e_1 l_1 = e_2 l_2$$

erfüllt werden. Dieser Fall kommt bei gewissen Turbinenkanälen (bei der Henschel-Jonval-Turbine) vor, nur ist hierbei gewöhnlich noch $l = l_1 = l_2$ und deshalb auch $e = e_1 = e_2$, mit hinreichender Annäherung. Hier findet sich nun sofort:

$$V_x = \int_0^x F dx = Fx,$$

da F constant sein soll und hiernach für den Zusammenhang der beiden Curven nach Gleichung (178) und (179)

$$y' + y = \frac{Fu}{V} x. \tag{178a}$$

Wenn die Verticalhöhe des Kanales mit h bezeichnet wird, so ist

$$b' + b = \frac{Fu}{V} h \tag{179a}$$

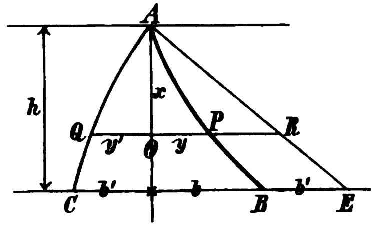
und durch Division

$$\frac{y' + y}{b' + b} = \frac{x}{h}. \tag{180a}$$

Hiernach lässt sich für diesen Fall die Construction der absoluten

Bahn sehr leicht ausführen. Es sei wieder (Fig. 43) APB die relative Bahn; man berechnet dann $(b'+b)$ nach Gleichung (179a), trägt $BE = b'$ auf und zieht die Gerade AE; dann ist die Strecke OR sogleich mit dem Werthe $y'+y$ identisch und $OQ = y'$ durch PR gegeben.

Fig. 43.



Ist dagegen die absolute Bahn AQC gegeben, so macht man $PR = y'$ und erhält damit den zugehörigen Punkt P der relativen Bahn.

Fall 2. Es soll der bewegte Kanal mit Wasser gefüllt, aber der normale Querschnitt F_x überall derselbe, also $F_x = F_1 = F_2$ oder

$$F_2 = el\cos\alpha_x = e_1 l_1 \cos\alpha_1 = e_2 l_2 \cos\alpha_2$$

sein (Fig. 42), es ist dann aber auch

$$c_x = c_1 = c_2,$$

d. h. das Wasser strömt mit constanter relativer Geschwindigkeit durch den Kanal.

Bei der hierher gehörigen Turbinenconstruction ist mit hinreichender Genauigkeit $e = e_1 = e_2$ zu setzen, woraus wegen $F = el$ folgt:

$$F_2 = F\cos\alpha_x$$

und

$$\frac{l}{l_1} = \frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_x}, \quad \frac{l_2}{l_1} = \frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2};$$

es muss demnach hier eine bestimmt vorgeschriebene Kanalerweiterung vorliegen, wie es Fig. 42 b andeutet.

Nun findet sich hier:

$$V_x = \int_0^x F dx = F_2 \int_0^x \frac{dx}{\cos\alpha_x},$$

oder, wenn man die Länge der Curvenstrecke OP mit s bezeichnet und die Beziehung $dx = ds\cos\alpha_x$ beachtet:

$$V_x = F_2 s$$

und daher nach Gleichung (178)

$$y' + y = \frac{F_2 u}{V} s; \tag{178b}$$

in welcher Formel sich auch noch $V = F_2 c_2$ setzen liesse.

Ist s_2 die Curvenlänge für die ganze Kanalaxe APB, so ist

$$b' + b = \frac{F_2 u}{V} s_2 \tag{179b}$$

und durch Division

$$\frac{y' + y}{b' + b} = \frac{s}{s_2}. \tag{180b}$$

Da in einem vorgelegten Falle sich die Rectification der Curvenlängen AP und AB mit hinreichender Genauigkeit auf graphischem Wege ausführen lässt, so kann man also auch hier die absolute Bahn bestimmen und zeichnen, wenn die relative Bahn gegeben ist und umgekehrt aus der absoluten Bahn die relative ermitteln.

Der vorstehende Fall tritt auch auf bei einer gewissen Classe von Turbinen (bei axialen Partial- oder Freistrahlturbinen) und liegt bei Hänel's Turbine mit Rückschaufeln vor. Mündet der Kanal (Fig. 42) unten in die freie Atmosphäre und strömt der Wasserstrahl frei unter atmosphärischem Drucke auf der concaven Fläche des Kanales herab, so folgt nach den Darlegungen in § 9 d nach Gleichung (132) (S. 103) wegen $a_x = a_2$:

$$c_2^2 - c_x^2 = 2gx.$$

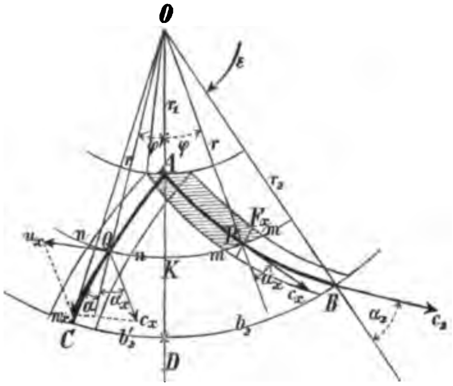
Nun ist aber bei Turbinen die Höhe h und damit auch x verhältnissmässig klein, so dass man mit hinreichender Annäherung $c_x = c_2 = c_1$ setzen kann, so dass hier die vorstehenden Entwickelungen ebenfalls Anwendung finden; man könnte aber diese Entwickelungen leicht unter Anwendung vorstehender Beziehung verallgemeinern.

b) Der Kanal rotirt gleichförmig.

Wir verfolgen, während der Kanal AB (Fig. 44 f. S.) sich mit constanter Winkelgeschwindigkeit ε um die Axe O dreht, ein Flüssigkeitselement auf seinem Wege in der Kanalaxe von A nach

P; es sei c_x die relative Geschwindigkeit desselben im Punkte P und schliesse c_x mit dem Radius $OP = r$ den Winkel α_x ein. Dann wird während des Durchschreitens des Weges AP in Folge der Rotation der Punkt P den Kreisbogen PQ zurücklegen; es ist daher Q der wahre Ort des Flüssigkeitselementes und AQC die wahre oder absolute Bahn desselben.

Fig. 44.



Im Punkte Q hat das Element neben der Geschwindigkeit c_x noch die Drehgeschwindigkeit $u = r\varepsilon$ mit dem Kanale gemeinschaftlich; die Vereinigung beider führt auf die absolute Geschwindigkeit w_x, die mit der Tangente der absoluten Bahn im Punkte Q zusammenfällt. Es sei nun α der Winkel, welchen die Richtung von w_x mit dem Radius einschliesst, dann folgt sofort aus der Betrachtung der Fig. 44:

$$w_x \sin\alpha = u - c_x \sin\alpha_x$$

sowie

$$w_x \cos\alpha = c_x \cos\alpha_x$$

und hieraus durch Division:

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha_x = \frac{u}{c_x \cos\alpha_x}.$$

Multiplicirt und dividirt man rechts mit dem normalen Kanalquerschnitte F_x im Punkte P, und beachtet man, dass das Volumen V der Flüssigkeit, welche in der Secunde durch den Kanal strömt, durch $V = F_x c_x$ bestimmt ist, so ergiebt sich auch

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha_x = \frac{F_x u}{V \cos\alpha_x}.$$

Es sei nun weiter F der Kanalquerschnitt im Punkte P, senkrecht zum Radius r genommen (mm in Fig. 44), dann besteht noch die

Beziehung $F_x = F \cos \alpha_x$, und wenn man diese in vorstehender Gleichung benutzt und zugleich $u = r\varepsilon$ substituirt, so folgt:

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha_x = \frac{F r \varepsilon}{V}.$$

Es sollen jetzt die beiden Curven APB und AQC auf Polarcoordinaten bezogen werden, indem man O als Ursprung und die Richtung OD als Anfangslage wählt, von welcher aus die Drehwinkel $AOP = \varphi$ und $AOQ = \varphi'$ gerechnet werden. Nun ist bekanntlich

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{r\,d\varphi'}{dr} \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} \alpha_x = \frac{r\,d\varphi}{dr}.$$

Die Benutzung in vorstehender Gleichung ergiebt dann

$$d\varphi' + d\varphi = \frac{F \varepsilon\, dr}{V},$$

oder durch Integration, wenn man den Radius für den Eintrittspunkt A mit r_1 bezeichnet:

$$\varphi' + \varphi = \frac{\varepsilon}{V} \int_{r_1}^{r} F\,dr.$$

Das hier auftretende Integral ist aber nichts anderes als der Cubikinhalt des Wasserkörpers zwischen der Eintrittsstelle A und dem Punkte P; bezeichnet man diesen Inhalt, der sich bei einem gegebenen Kanale für jeden Punkt P, d. h. für jeden Radius r ermitteln lässt, mit V_r, so folgt endlich die merkwürdig einfache Beziehung:

$$\varphi' + \varphi = \frac{V_r}{V} \cdot \varepsilon, \tag{181}$$

durch welche die vorgelegte Frage Beantwortung findet. V und ε sind constante Grössen und da für jeden Punkt P der relativen Bahn V_r und φ bekannt sind, so berechnet sich φ' und damit die Lage des Punktes Q der absoluten Bahn, der auf dem durch P gehenden Kreise liegt.

Uebrigens ist V_r zugleich der Inhalt des Wasserkörpers AQ auf der absoluten Bahn; man kann daher die Aufgabe auch umkehren und aus der absoluten Bahn die relative, d. h. die Kanalform des rotirenden Kanales ableiten; in diesem Falle ist φ' bekannt und dieselbe Gleichung liefert den Winkel φ.

Setzt man die Bogenlängen $\widehat{PK} = b = r\varphi$ und $\widehat{QK} = b' = r\varphi'$, so folgt aus Gleichung (181) auch:

$$b' + b = \frac{V_r}{V} r\varepsilon.$$

Bezeichnet man weiterhin den ganzen Kanalinhalt mit V_x und setzt man die Bogenlänge am äusseren Umfange:

$$b_2 = r_2\varphi_2 \quad \text{und} \quad b_2' = r_2\varphi_2',$$

so folgt auch:

$$b_2' + b_2 = \frac{V_x}{V} r\varepsilon \tag{182}$$

und durch Division beider Gleichungen:

$$\frac{b' + b}{b_2' + b_2} = \frac{V_r}{V_x} \cdot \frac{r}{r_2}. \tag{183}$$

Ist b und b_2 gegeben, so kann man erst aus Gleichung (182) b_2' und dann aus Gleichung (183) b' berechnen.

Der in den Formeln auftretende Werth

$$V_r = \int_{r_1}^{r} F dr$$

lässt sich am besten mit dem Planimeter bestimmen; man trägt r als Abscisse und F, d. h. den Kanalquerschnitt senkrecht zum Radius r genommen, der übrigens für die absolute und relative Bahn denselben Werth hat, als Ordinate auf und verbindet die Punkte durch eine Curve.

Die über $r - r_1$ stehende Fläche repräsentirt dann V_r und die über $r_2 - r_1$ stehende den Werth V_x.

Specialfälle.

Fall 1. Der Kanal sei vollständig mit Wasser gefüllt; die Kanalbreite im Punkte P sei mit e bezeichnet ($\overline{mm} = e$) und die Kanalweite (senkrecht zur Bildebene) mit l; an der Ein- und Austrittsstelle seien die Grössen bez. e_1 und l_1 sowie e_2 und l_2.

Bei gewissen Turbinenkanälen (Fourneyron-Turbinen) ist nun die Weite l überall die gleiche, also $l = l_1 = l_2$, während für die Breiten e die Beziehung $e : e_2 = r : r_2$ besteht; es ist daher:

$$e = \frac{e_2}{r_2} r \quad \text{und} \quad F = el = \frac{e_2}{r_2} lr$$

und damit:

$$V_r = \int_{r_1}^{r} F dr = \frac{e_2 l}{r_2} \int_{r_1}^{r} r\,dr = \frac{e_2 l}{2 r_2}(r^2 - r_1^2).$$

Bezeichnet, wie in allen früheren Untersuchungen, F_2 den normalen Austrittsquerschnitt und α_2 die Austrittsrichtung, so ist:

$$F_2 = e_2 l \cos \alpha_2 \quad \text{und} \quad V = F_2 c_2.$$

Daher ergiebt sich aus Gleichung (181) unter Beachtung der Beziehung $u_2 = r_2 \varepsilon$:

$$\varphi' + \varphi = \frac{u_2}{c_2 \cos \alpha_2} \frac{(r^2 - r_1^2)}{2 r_2^2}, \tag{181a}$$

ein einfacher Zusammenhang zwischen dem Radius r und der Summe $(\varphi' + \varphi)$ der beiden Drehwinkel; die Gleichung stellt die Polargleichung einer Curve dar.

Multiplicirt man die Gleichung auf beiden Seiten mit r oder r_2, so folgt bez.:

$$b' + b = \frac{u_2}{c_2 \cos \alpha_2} \frac{(r^2 - r_1^2) r}{2 r_2^2}$$

und

$$b_2' + b_2 = \frac{u_2}{c_2 \cos \alpha_2} \frac{(r_2^2 - r_1^2) r_2}{2 r_2^2}, \tag{182a}$$

woraus durch Division folgt:

$$\frac{b' + b}{b_2' + b_2} = \frac{(r^2 - r_1^2) r}{(r_2^2 - r_1^2) r_2}. \tag{183a}$$

Ist beispielsweise b_2 bekannt, so berechnet sich nach Gleichung (182a) das zugehörige b_2' und dann nach Gleichung (183a) die Bogenlänge b' für jeden zugehörigen Werth von b und r, wodurch die Axe der absoluten Bahn bestimmt ist. Umgekehrt kann man, wenn b_2' und b' gegeben sind, nach denselben Gleichungen aus der gegebenen absoluten Bahn die relative Bahn, d. h. Axe und Form des bewegten Kanales (des Turbinenkanales) bestimmen.

Fall 2. Der Kanal werde vom Wasser ausgefüllt, die axiale Kanalweite l soll veränderlich sein und von l_1 auf l_2 nach Art von Fig. 42b zunehmen. Der Druck im Innern des Kanales soll aber überall der gleiche sein. Dieser Fall liegt auch vor, wenn der Wasserstrahl frei unter atmosphärischem Drucke (wie bei radialen Freistrahlturbinen) an der concaven Fläche des Kanales hinströmt.

Hier findet sich aus Gleichung (161) in § 12 c, weil $\alpha_x = \alpha_2$ sein soll:

$$c_x^2 = u^2 + c_2^2 - u_2^2,$$

und wegen $F_x c_x = F_2 c_2 = V$:

$$\frac{F_x}{F_2} = \frac{c_2}{c_x} = \frac{c_2}{\sqrt{c_2^2 - (u_2^2 - u^2)}},$$

oder wenn $u_2 = r_2 \varepsilon$ und $u = r\varepsilon$ substituirt wird:

$$\frac{F_x}{F_2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u_2^2}{c_2^2}\left(1 - \frac{r^2}{r_2^2}\right)}}. \tag{184}$$

Nun ist aber

$$F_x = el \cos \alpha_x = F \cos \alpha_x,$$

daher

$$F = \frac{F_2}{\cos \alpha_x \sqrt{1 - \frac{u_2^2}{c_2^2}\left(1 - \frac{r^2}{r_2^2}\right)}}$$

und damit folgt die Kanalfüllung V_r auf der Strecke OP (Fig. 44):

$$V_r = \int_{r_1}^{r} F dr = \int_{r_1}^{r} \frac{F_2 dr}{\cos \alpha_x \sqrt{1 - \frac{u_2^2}{c_2^2}\left(1 - \frac{r^2}{r_2^2}\right)}}. \tag{185}$$

Die Integration lässt sich auf dem vorhin angedeuteten graphischen Wege durch Planimetriren ausführen, wenn man F und r als Coordinaten aufträgt.

Ist V_r für verschiedene Werthe von r bekannt, so lässt sich dann unter Benutzung der früheren Gleichung:

$$\varphi' + \varphi = \frac{V_r}{V} \varepsilon$$

auf dem wiederholt angegebenen Wege die absolute Bahn aus der relativen ableiten.

Die vorstehende Entwickelung setzt nun allerdings voraus, dass das Gesetz, nach welchem sich die Kanalweite l mit dem

Radius ändert, bekannt sei. Die Annahme der Veränderung von l ist aber keineswegs eine willkürliche und erfordert noch folgende Ueberlegung.

Es wurde vorhin gegeben $F_x = e l \cos \alpha_x$, ebenso folgt $F_2 = e_2 l_2 \cos \alpha_2$, daher ist

$$\frac{F_x}{F_2} = \frac{e l \cos \alpha}{e_2 l_2 \cos \alpha_2}.$$

Besteht nun, wie gewöhnlich, bei vollständig gefülltem Kanale die Beziehung $e : e_2 = r : r_2$, so folgt auch

$$\frac{F_x}{F_2} = \frac{r l \cos \alpha_x}{r_2 l_2 \cos \alpha_2},$$

und daher in Verbindung mit Gleichung (184)

$$\frac{r l \cos \alpha_x}{r_2 l_2 \cos \alpha_2} \cdot \sqrt{1 - \frac{u_2^2}{c_2^2}\left(1 - \frac{r^2}{r_2^2}\right)} = 1. \tag{186}$$

Hieraus lässt sich l für jeden Werth von r berechnen, also das Gesetz ermitteln, nach welchem die Kanalerweiterung von l_1 auf l_2 parallel zur Rotationsaxe erfolgen muss, wenn bei gefülltem Kanal der Druck im Innern des Kanales überall der gleiche sein soll.

Findet die Kanalerweiterung in stärkerem Verhältnisse statt, als die Rechnung ergiebt, so löst sich der Strahl von der convexen Seite des Kanales ab und strömt frei an der concaven Seite unter atmosphärischem Drucke herab, vorausgesetzt, dass an der Ausströmungsöffnung F_2 der Atmosphärendruck vorliegt.

Wollte man die Kanalweite an allen Stellen gleich gross, also $l = l_1 = l_2$ annehmen, so würde nach Gleichung (186) dann eine ganz bestimmte Curve für die Kanalaxe vorliegen müssen; man kann dann den Winkel α_x für jeden Werth von r berechnen und damit die Strahlaxen zur Darstellung bringen.

Manche der hierher gehörigen Turbinenkanäle lässt man, was möglich ist, derart umlaufen, dass $c_2 = u_2$ ausfällt. Für diesen speciellen Fall giebt Gleichung (186)

$$r^2 l \cos \alpha_x = r_2^2 l_2 \cos \alpha_2,$$

und wenn noch $l = l_2$ ist,

$$r^2 \cos \alpha_x = r_2^2 \cos \alpha_2,$$

welche Gleichung als Polargleichung der Kanalaxen angesehen werden kann.

Ist φ der Winkel, welchen der Radius r mit dem Anfangsradius r_1 einschliesst, so findet man die Polargleichung in der gewöhnlichen Form, wie nur nebenbei bemerkt werden mag,

$$2\varphi = \sqrt{\left(\frac{r}{r_1}\right)^4 - 1} - \operatorname{arctg} \sqrt{\left(\frac{r}{r_1}\right)^4 - 1}\,;$$

man erkennt also, dass selbst für diesen einfachen, ausnahmsweise vorkommenden Fall die analytische Behandlungsweise auf sehr complicirte Formeln führt, und dass man daher immer in die angenäherte graphische Behandlung eintreten wird.

Die in diesem Paragraphen vorgeführten Untersuchungen sind für die Zwecke der vorliegenden Schrift vollständig hinreichend und erschöpfend.

An sich liefern die Untersuchungen noch eine ganze Fülle von Unterlagen zu Specialbetrachtungen, insbesondere von rein mathematischem Gepräge.

So könnte man z. B. beim rotirenden Kanal bezüglich der Annahme des Verlaufes der Kanalaxe für die relative oder absolute Bahn von der Annahme ausgehen, dass dieselbe einen Theil einer beliebigen Spirallinie oder beim geradlinig fortschreitenden Kanal einen Theil einer in rechtwinkeligen Coordinaten gegebenen Curve bilde, wie es in einzelnen Schriften über Turbinen geschehen ist. Man erhält aber auf diesem Wege nicht den allgemeinen Einblick in die ganze Frage, welche obige Darstellung gewährt.

§ 15. Anhang. Geschichtliches über die Untersuchung der Reaction des Wassers in rotirenden Gefässen.

Die ersten Untersuchungen über Reaction des Wassers in rotirenden Gefässen rühren von Euler her.

Angeregt durch die Vorgänge am Segner'schen Wasserrade, von dem sich heute noch Modelle in jeder physikalischen Sammlung befinden, schrieb Euler 1750 und 1751 seine Abhandlungen *).

*) »Histoire de l'Academie royale des Sciences et belles lettres«. Berlin 1750, 1751 und 1754.

»Recherches sur l'effet d'une machine hydraulique proposée par M. Segner, Professeur à Göttingue« und »Application de la machine hydraulique de M. Segner etc.« und liess diesen im Jahre 1754 eine weitere Arbeit folgen unter dem Titel:

»Théorie plus complette des machines qui sont mises en mouvement par la réaction de l'eau«.

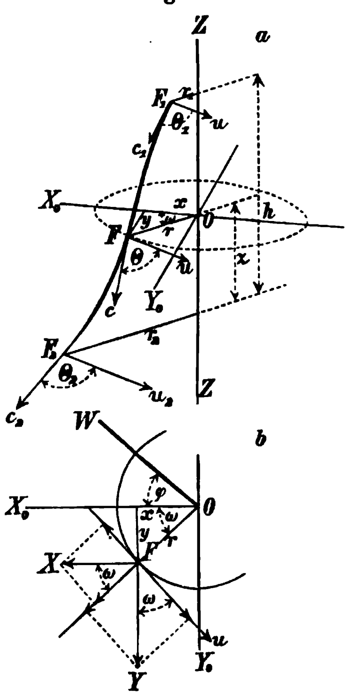
Die letztere Arbeit ist von ganz besonderer Wichtigkeit und merkwürdig, einmal dadurch, dass hier die Hauptsätze über die Reaction des Wassers schon vollständig klar dargelegt werden und dann dadurch, dass Euler an dem Segner'schen Wasserrade Verbesserungen in Vorschlag bringt und an einer Figur vorführt, die ihn fast zum eigentlichen Erfinder unserer heutigen Vollturbinen stempeln. Er verlangt, dass dem rotirenden Rade das Wasser durch festliegende Leitkanäle derart zugeführt werde, dass an der Eintrittsstelle kein Stoss stattfinde, d. h. keine plötzlichen Geschwindigkeitsänderungen auftreten, und berechnet dann für sein Rad unter Annahme bestimmter Dimensionen die vortheilhafteste Geschwindigkeit, bespricht überhaupt die Bedingungen für den besten Gang in ähnlicher Weise, wie es heute noch geschieht. In constructiver Beziehung würde das Euler'sche Rad allerdings den heutigen Anforderungen der Technik nicht entsprechen.

Bei den theoretischen Untersuchungen über die Reaction des Wassers geht Euler von einem sehr allgemeinen Falle aus; er betrachtet die Wirkung des bewegten Wassers in einem Kanale, dessen Axe eine Curve im Raume bildet und welcher *ungleichförmig* um eine gegen den Horizont geneigte festliegende Axe rotirt. Das Ziel seiner Untersuchungen bildet die Ableitung von zwei Grundformeln; die eine giebt das Drehmoment und die andere das Gesetz der Bewegung des Wassers durch den Kanal und die entsprechenden Druckverhältnisse. Schliesslich leitet Euler aus den allgemeinen Gleichungen den speciellen Fall ab, der technisch allein von Bedeutung ist, dass nämlich der Kanal *gleichförmig* um eine verticale Axe rotirt und in der Bewegung des Wassers im Kanale der Beharrungszustand vorliegt, immer aber, was ausdrücklich betont werden mag, unter der Voraussetzung *stossfreien Eintrittes*.

Es dürfte nun angemessen sein, die beiden für den genannten Specialfall gültigen Formeln hier genau unter Einhaltung des Euler'schen Gedankenganges besonders abzuleiten, um Vergleiche mit unseren früheren, oben gegebenen Formeln und anderen Arbeiten hervorheben zu können.

Ein Kanal, dessen Axe F_1FF_2 (Fig. 45) mit der Rotationsaxe ZZ fest verbunden ist, werde zunächst festliegend gedacht; der Punkt F, in welchem sich ein Wasserelement von der Masse m befindet, liege um r von der Rotationsaxe ab; die Coordinaten in Hinsicht der zunächst auch festliegend gedachten Axen OX_0 und OY_0 seien x und y und die Richtung vom Radius r durch $\angle FOX = \omega$ gegeben (Fig. 45 *b*, Grundriss).

Fig. 45.



Die auf den Punkt m wirkenden Kräfte X, Y und Z lassen sich auch durch die Kräfte P_u, P_r und Z ersetzen, wovon die erste Kraft in der Rotationsrichtung, d. h. in der Richtung der Rotationsgeschwindigkeit u (Drehkraft) und die andere in der Richtung des Radius r wirkt. Für die vorliegenden Zwecke kommt nur die Drehkraft P_u in Betracht; dieselbe findet sich der Figur gemäss

$$P_u = Y\cos\omega - X\sin\omega\,,$$

wobei

$$X = m\frac{d^2x}{dt^2} \quad \text{und} \quad Y = m\frac{d^2y}{dt^2}$$

und

$$x = r\cos\omega \quad \text{und} \quad y = r\sin\omega$$

zu setzen ist.

Durch zweimaliges Differentiiren der letzten Werthe ergiebt sich d^2x und d^2y und dann nach einfacher Reduction:

$$P_u = \frac{m}{dt^2}\left[2\,dr\,d\omega + r\,d^2\omega\right].$$

Das ist aber die relative Drehkraft; in Wirklichkeit rotiren die Axen OX_0 und OY_0 gleichförmig mit dem Kanale; geht man von der festen Lage OW aus und nimmt man an, OX_0 habe sich in der Zeit t um den Winkel $WOX = \varphi$ gedreht, so hat man in vorstehender Formel $\varphi + \omega$ an die Stelle von ω zu setzen und erhält nun die wahre Drehkraft:

$$P_u = m\left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\omega}{dt} + r\frac{d^2\varphi}{dt^2} + r\frac{d^2\omega}{dt^2}\right].$$

Bezeichnet man die constante Winkelgeschwindigkeit mit ε, so ist

$$\frac{d\varphi}{dt} = \varepsilon \quad \text{und} \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0$$

und daher

$$P_u = m\left[2\varepsilon\frac{dr}{dt} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\omega}{dt} + r\frac{d^2\omega}{dt^2}\right].$$

Es sei nun c die relative Geschwindigkeit des Wasserelementes im Punkte F der Bahn und Θ der Winkel, welchen c mit der Richtung der Umdrehungsgeschwindigkeit u einschliesst, dann ist $c \cos \Theta$ die relative Umdrehungsgeschwindigkeit, daher:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{c \cos \Theta}{r}$$

und hieraus

$$\frac{d^2\omega}{dt^2} = \frac{1}{r}\frac{d(c\cos\Theta)}{dt} - \frac{c\cos\Theta}{r^2}\frac{dr}{dt}.$$

Die Benutzung beider Ausdrücke in vorstehender Formel giebt jetzt:

$$P_u = \frac{m}{dt}\left[2\varepsilon dr + \frac{c\cos\Theta}{r}dr + d(c\cos\Theta)\right].$$

Ersetzt man hier P_u durch dP_u und m durch dm und führt man, wie früher, die Wassermasse M ein, welche in der Secunde im Beharrungszustande durch den Kanal geht, so ist $dm = Mdt$; ferner das Differential $d\mathfrak{M}$ des Drehmomentes der Reaction $d\mathfrak{M} = r dP_u$, demnach aus vorstehender Gleichung

$$d\mathfrak{M} = M[2\varepsilon r dr + c\cos\Theta dr + r d(c\cos\Theta)]$$

oder

$$d\mathfrak{M} = M[2\varepsilon r dr + d(rc\cos\Theta)].$$

Integrirt man unter Benutzung der in Fig. 45 *a* angegebenen Bezeichnung, so folgt

$$\mathfrak{M} = M[\varepsilon(r_1^2 - r_2^2) + r_1 c_1 \cos\Theta_1 - r_2 c_2 \cos\Theta_2],$$

oder auch wegen der Beziehungen $u_1 = r_1\varepsilon$ und $u_2 = r_2\varepsilon$:

$$\mathfrak{M} = M[(c_1 \cos\Theta_1 + u_1) r_1 - (c_2 \cos\Theta_2 + u_2) r_2]. \tag{I}$$

Das ist die erste Hauptgleichung von Euler für den angenommenen speciellen Fall, nach welcher also das Drehmoment von der Kanalform unabhängig ist, was auch Euler ausdrücklich betont (a. a. O. S. 255).

Multiplicirt man Gleichung (I) mit der Winkelgeschwindigkeit ε, so erhält man nach früher gegebenen Sätzen die Arbeit L, welche in der Secunde die Reaction verrichtet. Es folgt daher:

$$L = M[(c_1 u_1 \cos\Theta_1 - c_2 u_2 \cos\Theta_2) - (u_2^2 - u_1^2)], \tag{Ia}$$

eine Gleichung, welche bei Euler nicht vorkommt, die aber hier gegeben wird, um auf anderem und kürzerem Wege dessen Formel für die Bewegungs- und Druckverhältnisse im Innern des Kanales zu entwickeln.

Leitet man, wie oben wiederholt geschehen ist, eine zweite Formel für die Arbeit L nach dem Princip der lebendigen Kräfte ab, so führt die Verbindung beider Formeln leicht auf die verlangte Beziehung.

Ist nämlich a_1 der Piezometerstand an der Eintrittsstelle F_1 und a_2 derjenige an der Austrittsstelle F_2, sowie h die verticale Fallhöhe (Fig. 45 *a*), ist weiter w_1 die absolute Eintrittsgeschwindigkeit und w_2 die absolute Austrittsgeschwindigkeit, so findet sich die gewonnene Arbeit L, wenn als äussere Kraft nur die Schwerkraft wirkt und der Arbeitsverlust vernachlässigt wird, welcher der Wasserreibung im Kanale entspricht,

$$L = Mg(h + a_1 - a_2) + \frac{M(w_1^2 - w_2^2)}{2}.$$

Nun ist aber nach Fig. 45 *a* sogleich zu ersehen, dass man zu setzen hat:

$$w_1^2 = c_1^2 + u_1^2 + 2u_1c_1 \cos\Theta_1$$
$$w_2^2 = c_2^2 + u_2^2 + 2u_2c_2 \cos\Theta_2.$$

Daher folgt auch:

$$L = \tfrac{1}{2} M [2g(h + a_1 - a_2) + c_1^2 - c_2^2 + u_1^2 + u_2^2 \\ + M(u_1 c_1 \cos \Theta_1 - u_2 c_2 \cos \Theta_2)]$$

und hiernach durch Gleichsetzen mit obigem Werthe von L:

$$2g(h + a_1 - a_2) = (c_2^2 - c_1^2) - (u_2^2 - u_1^2). \qquad \text{(II a)}$$

Für den Querschnitt F, der um z vertical über dem unteren Querschnitte F_2 liegt und in welchem der Piezometerstand a sein mag, findet sich analog:

$$2g(z + a - a_2) = (c_2^2 - c^2) - (u_2^2 - u^2), \qquad \text{(II)}$$

woraus sich a berechnet. Gleichung (II a) dient zur Berechnung von c_2, also der durchgehenden Wassermenge, und Gleichung (II) ist die zweite Euler'sche Gleichung, welcher dieser für den vorgelegten speciellen Fall angegeben hat (a. a. O. S. 266).

Um nun den Zusammenhang der Euler'schen Gleichung (I) für das Drehmoment mit unseren oben gegebenen Ableitungen darzulegen, werde zuerst einmal angenommen, dass die Kanalaxe $F_1 F_2$ (Fig. 45 a) eine in der Horizontalebene liegende Curve sei. Bezeichnet man den Winkel, welchen die Richtung der relativen Geschwindigkeit c mit dem Radius r einschliesst, mit α, so folgt $\Theta = 90^\circ + \alpha$ und damit $\cos \Theta = -\sin \alpha$, also auch $\cos \Theta_1 = -\sin \alpha_1$ und $\cos \Theta_2 = -\sin \alpha_2$. Die Substitution in Gleichung (I) ergiebt dann

$$\mathfrak{M} = M[(c_2 \sin \alpha_2 - u_2) r_2 - (c_1 \sin \alpha_1 - u_1) r_1]$$

in Uebereinstimmung mit der oben in § 12 (S. 131) abgeleiteten Gleichung (149), die dort aber auf ganz anderem Wege gefunden wurde.

Nimmt man dagegen an, die Bahncurve $F_1 F_2$ (Fig. 45 a) liege in einem Cylindermantel vom Radius r, dessen Axe mit der Drehaxe ZZ zusammenfällt, so ist $r_1 = r_2 = r$ sowie $u_1 = u_2$, und damit giebt Euler's Formel

$$\mathfrak{M} = Mr[c_1 \cos \Theta_1 - c_2 \cos \Theta_2].$$

Bezeichnet α den Winkel, welchen die relative Geschwindigkeit c mit einer Parallelen zur Axe ZZ einschliesst, so ist $\Theta = 90^\circ + \alpha$ und $\cos \Theta = -\sin \alpha$, also $\cos \Theta_1 = -\sin \alpha_1$ und $\cos \Theta_2 = -\sin \alpha_2$, wonach aus vorstehender Gleichung folgt:

$$\mathfrak{M} = Mr(c_2 \sin \alpha_2 - c_1 \sin \alpha_1).$$

Bezeichnet X die Drehkraft am Radius r, ist also $\mathfrak{M} = Xr$, so ergiebt sich hieraus die Reaction X des durchströmenden Wassers

$$X = M(c_2 \sin \alpha_2 - c_1 \sin \alpha_1)$$

in Uebereinstimmung mit Gleichung (117) in § 9 (S. 95), wo überdies auch noch die Verticalreaction Y bestimmt worden ist, die Euler nicht erwähnt. Die Arbeit der Reaction ist dann:

$$L = Mu(c_2 \sin \alpha_2 - c_1 \sin \alpha_1).$$

Aus der vorstehenden Darlegung geht hervor, dass die Grundformeln zur Berechnung einer Turbine von Euler herrühren, denn bei dieser Berechnung geht man bis zum heutigen Tage noch von der Annahme stossfreien Eintrittes des Wassers in den rotirenden Kanal aus.

Die Euler'schen Sätze haben von der Mitte des vorigen Jahrhunderts bis zum zweiten Viertel des jetzigen vollständig brach gelegen; erst nachdem Fourneyron mit seiner Turbine hervortrat, erschienen die weiteren grundlegenden theoretischen Arbeiten von Poncelet, Combes, Redtenbacher und Weisbach, die hier allein in Betracht kommen können.

Die erste Arbeit rührt von Poncelet*) her, aus dem Jahre 1838 und ist deswegen von besonderer Bedeutung, weil hier zum ersten Male dem Arbeitsverluste Rechnung getragen wird, der dem plötzlichen Geschwindigkeitsverluste beim Eintritte in den Kanal entspringt, und weil diese Arbeit überhaupt von grösstem Einfluss auf die späteren Arbeiten gewesen ist.

Um die nachfolgenden Besprechungen zu vereinfachen, mag durchgängig auf unsere Darstellung in § 12 b (S. 133 bis 138) Bezug genommen werden.

Poncelet berechnet die Arbeit der Reaction, doch kommt in seiner Abhandlung das Wort »Reaction« nicht vor, auch kein Hinweis auf die Euler'schen Arbeiten; derselbe vernachlässigt die Wasserreibung im Kanal, führt aber dagegen Contractionscoefficienten ein, sowohl für den Eintritt in den bewegten Kanal, wie für den Austritt aus dem Kanale, welcher das Wasser zuführt. Da

---

*) »Sur la théorie des effets mécanique de la turbine Fourneyron«, par M. Poncelet. Comptes rendus T. VII, Juillet-Décembre 1838, p. 260.

man jetzt allgemein die Kanäle so construirt, dass das Wasser in parallelen Fäden die Austrittsquerschnitte verlässt, so ist in unseren obigen Untersuchungen von der Einführung von Contractionscoefficienten von vornherein abgesehen worden, wie das auch von Combes und Weisbach geschehen ist.

Poncelet berechnet die Reactionsarbeit nach dem Princip der lebendigen Kräfte und gewinnt eine Gleichung, mit welcher unsere Gleichung (153a) S. 134 im Grunde genommen identisch ist, nur liegt hierbei ein ganz besonderer Umstand vor. Poncelet setzt nämlich den Fourneyron'schen Ausführungen entsprechend den Winkel $\alpha_1 = 0$ und entwickelt unter dieser speciellen Annahme alle seine Formeln. Die Substitution $\alpha_1 = 0$ in unseren Gleichungen des § 12 b führt dann in der That auf die Poncelet'schen Formeln, die auf gänzlich verschiedenem Wege abgeleitet worden sind. Bemerkenswerth ist der Hinweis auf unsere Gleichung (159) S. 136, welche nach der bezeichneten Annahme für die Arbeit auf die einfache Formel:

$$L = M[u_1 c_1 \sin \alpha + u_2 c_2 \sin \alpha_2 - u_1^2]$$

führt, eine Gleichung, die bei Poncelet nicht vorkommt, auf welche derselbe aber aus der Verbindung einzelner seiner Gleichungen ebenfalls hätte gelangen können.

Des Zusammenhanges wegen soll nun zunächst die Arbeit von Redtenbacher*) besprochen werden. Derselbe folgt in seinen Entwickelungen dem Gedankengange Poncelet's, behält die Contractionscoefficienten bei, führt aber nach dem Vorgange von Combes und Weisbach noch die Widerstandscoefficienten ein, um dem der sogenannten Wasserreibung entsprechenden Widerstande Rechnung zu tragen. Der wesentliche Unterschied mit Poncelet besteht aber darin, dass Redtenbacher nicht $\alpha_1 = 0$ setzt; im Verlaufe seiner Entwickelungen gelangt Redtenbacher dann nebenbei auf die im Vorstehenden angegebene Gleichung für die Arbeit L, ohne weitere Bemerkungen daran zu knüpfen. Diese Gleichung ist bei Poncelet (wegen $\alpha_1 = 0$) richtig, bei Redtenbacher aber nicht; ist α_1 von Null verschieden, so tritt, wie unsere Gleichung (159) S. 136 zeigt, noch ein Glied auf der rechten Seite hinzu, welches davon herrührt, dass der Eintrittsquerschnitt sich dem ankommenden Wasser mit

*) Redtenbacher, »Theorie und Bau der Turbinen und Ventilatoren«. Mannheim 1844 und 1860.

einer gewissen relativen Geschwindigkeit entgegenbewegt. Der Druck im Mündungsquerschnitte selbst ist nicht identisch mit dem Drucke ausserhalb, dem sogenannten Spaltdrucke. Es wird sich unten bei der speciellen Besprechung der Turbinen Gelegenheit bieten, auf die Frage zurückzukommen, hier mag nur bemerkt werden, dass die Grundformeln auch gültig bleiben müssen, wenn der Kanal nicht treibt, sondern in der gleichen Richtung getrieben wird; hier versagen die Redtenbacher'schen Formeln ihren Dienst, ein Zeichen, dass sie unvollständig sind.

Kurze Zeit nach Poncelet und noch vor Redtenbacher erschien die Hauptarbeit vom Combes*), die für unsere Zwecke durch ihre Zusätze am Schlusse wichtig ist. In der Note A behandelt Combes die Hauptfragen für stossfreien Eintritt, giebt zunächst (a. a. O. S. 89) die Formel für die Bewegung des Wassers durch den Kanal und findet hier denselben Ausdruck, der oben in § 12 unter Gleichung (152) allerdings auf anderem Wege abgeleitet wurde. Bedeutsam ist, dass hier Combes zum ersten Male die Kanalreibung richtig in Rechnung bringt, die wir in Gleichung (152) nach dem Vorgange Weisbach's in einfacherer Weise durch den Widerstandscoefficienten ζ_2 zum Ausdruck brachten, den aber Combes auf dem Wege darstellt, welchen wir oben in § 5 (S. 53) vorgeführt haben.

Im Weiteren entwickelt dann Combes die Arbeitsgleichung in der Form der Gleichung (Ia), die wir vorhin bei Besprechung der Euler'schen Arbeit angegeben und aus dessen Momentengleichung abgeleitet haben. Combes entwickelt die Formel auf anderem Wege, erwähnt aber nachdrücklich die Euler'schen theoretischen Untersuchungen, auf welche selbst bis zum heutigen Tage kein anderer Schriftsteller in seinen Entwickelungen hingewiesen hat.

In der Note B (a. a. O. S. 95) behandelt dann Combes den Eintritt des Wassers mit Stoss, beachtet aber nur die Stosswirkung in der Richtung der Umdrehungsgeschwindigkeit u_1 und nimmt an, dass in radialer Richtung ein Stoss nicht vorliege, da $c \cos \alpha = c_1 \cos \alpha_1$ sei; die letztere Annahme gilt aber keineswegs allgemein, sondern nur unter bestimmten, allerdings häufig vorkommenden Verhältnissen. Beachtenswerth ist hier noch die Bemerkung von

*) Combes, »Recherches théoriques et expérimentales sur les roues à réaction ou à tuyaux«. Paris 1843.

Combes, dass er zuerst auf die Druckänderungen hingewiesen habe, welche jederzeit an der Eintrittsstelle in Folge der Stosswirkung vorliege, und dass das in einer Abhandlung geschehen sei, welche er der Pariser Akademie bereits am 23. Juli 1838 vorgelegt habe.

Grosse Verdienste um die Verbreitung der Kenntnisse über das Wesen der Turbinen hat sich Weisbach durch sein weit verbreitetes und jedem Maschinen-Ingenieur bekanntes Werk*) erworben. Es entsprach dem Zwecke des Gesammtwerkes, dass Weisbach in dem Abschnitte über Turbinen sein Augenmerk in erster Linie auf die Vorführung der verschiedensten Constructionen richtete, die überhaupt in Vorschlag gekommen waren, sowie die theoretischen Untersuchungen vor Allem der Frage der Berechnung neuer Turbinen widmete. Hier geht Weisbach ebenfalls von der Annahme stossfreien Eintrittes aus, entwickelt aber dann doch auch den allgemeinen Fall, den wir im vorliegenden Berichte über die älteren Arbeiten allein im Auge haben, dass nämlich Eintritt mit Stoss vorliege. Die Formel für die Arbeit L der Reaction entwickelt Weisbach, wie Poncelet und Redtenbacher, nach dem Princip der lebendigen Kräfte und geht von der Formel aus, die wir in § 12 (S. 134) unter Gleichung (153a) gegeben haben, nur mit dem Unterschiede, dass Weisbach statt des Druckes a den Spaltdruck a_1 einsetzt; im Uebrigen berechnet er den Werth w_0, wie dort angegeben ist (a. a. O. S. 596). Bei der weiteren Durchführung verlässt er aber den allgemeinen Fall und nimmt, wie Combes, an, dass wenigstens in radialer Richtung kein Stoss vorliege (a. a. O. S. 603). Verdienstlich ist bei Weisbach vor Allem die allgemeine Einführung des Widerstandscoefficienten, an der auch in der vorliegenden Schrift durchgängig festgehalten worden ist.

*) Weisbach, »Lehrbuch der Ingenieur- und Maschinen-Mechanik« Bd. II, Braunschweig 1865. Es wird hier auf die 4. Auflage Bezug genommen, deren Bearbeitung noch von Weisbach selbst herrührt.

Zweiter Theil.

Theorie der Turbinen.

Turbinenpumpen und Ventilatoren.

Einleitung.

Bei den Wasserrädern, welche als »Umtriebs- oder Betriebsmaschinen«, als »hydraulische Motoren«, als »Kraftmaschinen« dienen, wird die rotirende Bewegung direct dadurch erzeugt, dass das Wasser drückend, Widerstand überwindend, auf die Wandungen gefässartiger Theile (Zellen) oder auf ebene oder gekrümmte Schaufeln wirkt, welche am Umfange des Rades angebracht sind.

Hierbei sind zwei Fälle zu unterscheiden. Das am Rade anlangende und mit den Zellenwandungen oder Schaufeln in Berührung tretende Wasser bewegt sich entweder mit denselben während der Rotation des Rades eine bestimmte Strecke entlang und befindet sich während dieser Bewegung, von Wirbelbewegung abgesehen, in gewissem Sinne relativ zu denselben in Ruhe, oder das Wasser hat während der erwähnten gemeinschaftlichen Bewegung zugleich noch eine strömende Bewegung relativ zu den Schaufeln.

Der erstere Fall kommt bei den eigentlichen Wasserrädern — Wasserräder im engeren Sinne — vor, während der andere Fall bei denjenigen Wasserrädern vorliegt, die man Turbinen oder Kreiselräder nennt.

Bei den Wasserrädern im engeren Sinne, von denen man bekanntlich ober-, mittel- und unterschlächtige Räder unterscheidet, je nachdem das Wasser in der Nähe des Scheitels oder mehr in der Höhe der Radaxe oder nahe am Fusse eintritt, liegt die Radebene, wie schon die letzten Bemerkungen über die Lage des Eintrittspunktes andeuten, vertical, während bei Turbinen die Radebene (in der Regel) horizontal liegt; man hat daher auch »verticale und horizontale Wasserräder« unterschieden; doch ist diese Unterscheidung deshalb unzutreffend, weil auch Turbinen mit vertical liegender Radebene, also horizontal liegender Drehaxe ausgeführt werden*).

Die Turbinen theilt man zunächst ein in

Axialturbinen und
Radialturbinen.

Denkt man sich die Geschwindigkeit eines Wasserelementes in drei senkrecht auf einander stehende Componenten zerlegt, von denen die eine Seitengeschwindigkeit parallel der Drehaxe, jede der beiden anderen in der Ebene normal zur Axe, die eine davon radial gerichtet ist, so ist bei der Axialturbine die Radialgeschwindigkeit gleich Null, während bei der Radialturbine das Wasser keine Geschwindigkeit parallel der Drehaxe hat, sich also in Ebenen normal zur Axe bewegt.

Fast ohne Ausnahme sind die Turbinen noch mit einem Leitapparate versehen, d. h. einem Systeme von festliegenden, durch Schaufeln gebildeten Kanälen, durch welche das Wasser in vorgeschriebener Richtung den rotirenden Turbinenkanälen, dem Laufrade, zugeführt wird. Bei dem in Fig. 46 (s. S. 176) skizzirten Laufrade einer Axialturbine würde der Leitapparat A oben liegen, das Wasser also von oben nach unten zuströmen, doch liesse sich das Ganze auch umgekehrt denken, so dass durch den unterhalb des Laufrades liegenden Leitapparat das Wasser von unten nach oben zugeführt würde.

In ähnlicher Weise könnte bei dem in Fig. 47 (s. S. 176) dargestellten Laufrade einer Radialturbine der Leitapparat A im Innern oder ausserhalb des Rades liegen, so dass das Wasser von innen nach aussen oder von aussen nach innen strömt, wobei natürlich

---

*) Redtenbacher behandelt in seinem Werke »Theorie und Bau der Wasserräder«, Mannheim 1846 und Weisbach in der »Ingenieur- und Maschinenmechanik« als zur Klasse der unterschlächtigen Räder gehörig zugleich das Poncelet-Rad, welches zwar nach unserer im Texte gegebenen Definition zu den Turbinen zu zählen ist, in vorliegender Schrift aber nicht behandelt werden soll; denn einmal wird dieses Rad nur noch selten ausgeführt, und dann auch sind die Untersuchungen dieses Rades von Redtenbacher und Weisbach, die beide hierbei verschiedene Wege gehen, erschöpfend. Das Poncelet-Rad ist übrigens von allen Turbinen die einzige, bei welcher das Wasser an krummen Schaufeln hin- und zurückströmt, also nach der Eintrittstelle zurückkehrt.

in beiden Fällen verschiedene Formen der Laufradkanäle vorausgesetzt werden.

Man spricht daher von einer Beaufschlagung von oben oder unten, beziehungsweise von innerer oder äusserer Beaufschlagung.

In allen diesen Fällen kann der Leitapparat den ganzen Eintrittsquerschnitt des Turbinenlaufrades überdecken oder nur aus einigen wenigen Leitkanälen bestehen; im ersteren Falle hat der Leitapparat eine dem Laufrade ähnliche Form, nur dass der Leitapparat mit seinen Kanälen feststeht.

Von besonderer Wichtigkeit ist aber ein weiterer Unterschied unter den Turbinengattungen, auf welchen schon bei den theoretischen Untersuchungen im ersten Theile dieser Schrift, bei der Besprechung der Druckverhältnisse im Innern rotirender Kanäle, Rücksicht genommen worden ist.

Sowohl die Axial- wie die Radialturbinen sind entweder:

Vollturbinen oder
Partialturbinen.

Bei den Vollturbinen oder den Turbinen mit voller Beaufschlagung überdeckt der Leitapparat den gesammten Eintrittsquerschnitt des Laufrades und die Leitrad- wie Laufradkanäle sind sämmtlich vollständig von dem durchströmenden Druckwasser gefüllt; derartige Turbinen können ohne Nachtheil für die Arbeitsleistung im Unterwasser laufen.

Diese Turbinenart hat im Laufe der Zeit verschiedene Benennungen erhalten, man hat von Reactionsturbinen, Ueberdruckturbinen, Pressstrahlturbinen gesprochen, Bezeichnungen, die keineswegs für alle vorkommenden Fälle zutreffend sind. In vorliegender Schrift ist die ältere und durchaus passende Bezeichnung Vollturbine beibehalten worden, weil hier jederzeit auch die Umkehrung der Turbine, ihre Anwendung als Arbeitsmaschine (Pumpen, Ventilatoren) ins Auge gefasst werden soll.

Bei den Partialturbinen oder Turbinen mit partieller Beaufschlagung überdeckt dagegen der Leitapparat gewöhnlich nur einen Theil der Eintrittsfläche des Laufrades, wobei gleichzeitig nur eine beschränkte Zahl der vor den Leitkanälen vorübergehenden Turbinenkanäle mit Wasser gefüllt sind und auch das nur theilweise und zwar solcher Art, dass der Wasserstrahl frei auf der concaven Seite der Schaufeln hinströmt, ohne den Kanal zu füllen und die convexe Seite der nächstliegenden Schaufeln zu berühren.

Die Partialturbinen können auch mit einem Leitapparate versehen sein, der sich, wie bei den Vollturbinen, über die ganze Eintrittsfläche des Laufrades erstreckt, doch müssen dann die Turbinendimensionen so gewählt werden, dass der Strahl frei durch die Laufradkanäle hindurchgeht. Die Partialturbinen dürfen niemals tauchen, d. h. nicht im Unterwasser, sondern sollen jederzeit in freier Luft laufen; denn fände ein Untertauchen statt, so würde sich der vom Druckwasser nicht erfüllte Theil der Laufradkanäle mit Unterwasser (mit »todtem« Wasser) füllen, was auf Wirbel und Störungen in der Bewegung des Druckwassers und damit auf namhafte Arbeitsverluste führt.

Die Partialturbine hat man auch unter dem Namen »Druckturbine« behandelt oder, wie das in neuester Zeit häufig geschehen ist, als »Strahlturbine« oder »Freistrahlturbine« bezeichnet.

Der wesentliche Unterschied zwischen Voll- und Partialturbinen liegt in den Druckverhältnissen im Innern des Laufradkanales, wie wir solche bereits oben auf S. 103 und 136 besprochen haben. Bei Vollturbinen ist der Druck veränderlich und hängt vorzugsweise von dem Gesetze der Veränderung der Kanalquerschnitte ab; bei den Partialturbinen ist der Druck überall der gleiche und zwar der atmosphärische. Strömt der Wasserstrahl frei an der concaven Fläche der Schaufel hin, so ist natürlich die Bedingung constanten Druckes ohne Weiteres erfüllt, doch kann, wie oben (a. a. O.) schon betont wurde, der Druck auch constant erhalten werden, wenn das Wasser den Kanal vollständig füllt, nur hat man dann die Aenderung der Kanalquerschnitte nach bestimmtem Gesetze erfolgen zu lassen. Turbinen dieser Art hat man als »Grenzturbinen« bezeichnet. Eine eigenthümliche Eintheilung der Turbinen giebt v. Rittinger*), wobei derselbe allerdings zunächst nur die Axialturbine im Auge hat. Da die v. Rittinger'sche Bezeichnungsweise in neuerer Zeit vielfach in Abhandlungen in Gebrauch gekommen ist, so ist es wohl zweckmässig, hier einige Bemerkungen einzuschalten. Es unterscheidet nämlich v. Rittinger: a) reine Actionsturbinen, b) reine Reactionsturbinen und c) gemischte

*) v. Rittinger, »Theorie und Bau der Rohrturbinen«. Prag 1865.

Turbinen. Unter »reinen Actionsturbinen« sollen solche Turbinen verstanden werden, bei denen das Wasser ohne Druckänderung mit veränderlicher Geschwindigkeit durch den Laufradkanal geht; das wäre also unsere Partialturbine. Unter »reinen Reactionsturbinen« werden solche verstanden, bei denen das Wasser unter veränderlichem Drucke, aber mit constanter absoluter Geschwindigkeit durch den Kanal geht, ein Fall der vorkommen kann, aber bei Turbinen selten vorkommen wird. Endlich bei »gemischten Turbinen« sollen Druck- und Geschwindigkeitsänderungen gleichzeitig vorliegen und das wäre unsere Vollturbine. Diese Eintheilung hat ihren Grund darin, dass v. Rittinger dem Worte »Reaction« eine eingeschränkte Bedeutung unterlegt, die der seit Euler gültigen wissenschaftlichen Auffassung nicht entspricht. Die Benennung »Actionsturbine«, die jetzt sehr verbreitet ist, muss als eine wenig glückliche bezeichnet werden, denn auch hier ist die Reaction die treibende Kraft; die Bezeichnung ist auch ohne besondere Erklärung nicht sofort verständlich.

Bei den obigen allgemeinen Besprechungen ist immer nur an durchströmendes Wasser gedacht worden; liegt, wie bei den Dampfturbinen, Wasserdampf vor, so ist die Turbine jederzeit eine Vollturbine; weiterhin wurden bisher die Turbinen in ihrer Eigenschaft als »Kraftmaschinen« besprochen, also dabei vorausgesetzt, dass die Turbine »treibend« wirke.

Wird dagegen die Turbine von einer anderen Kraftmaschine, z. B. einer Dampfmaschine, in Umdrehung versetzt, wird sie also »getrieben«, so verwandelt sie sich in eine »Pumpe«, oder wenn Luft durch das Laufrad gefördert wird, in einen »Ventilator«; natürlich liegt dann immer eine Vollturbine vor*).

Man hat daher auch zu unterscheiden:

Axialpumpen und
Radialpumpen;

die letzteren sind unter der allgemeinen Bezeichnung »Centrifugalpumpen« bekannt.

---

*) Wiebe, »Allgemeine Theorie der Turbinen«. Berlin 1868. In diesem Werke, welches übrigens gegenüber den älteren in § 15 besprochenen Schriften (nebenbei bemerkt, ohne jede Hindeutung auf dieselben) principiell Neues nicht enthält, kehrt Wiebe die Bezeichnung um; bei ihm ist, indem er an die durchgehende Flüssigkeit denkt, die Turbine »getrieben« und die Pumpe bez. der Ventilator als »treibend« angenommen worden.

Ebenso sind dann zu unterscheiden:

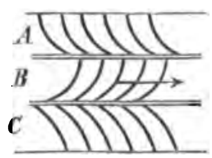
Axialventilatoren und Radialventilatoren.

Bei den Vollturbinen, bei den treibenden sowohl, wie insbesondere bei den getriebenen, kommt der Fall vor, dass das Laufrad auch an der gesammten Austrittsfläche mit einer Art Leitapparat versehen ist, der aus einem System von fest liegenden krummen Schaufeln besteht, die zwischen sich Kanäle bilden, in welche die aus dem Laufrade kommende Flüssigkeit, Wasser oder Luft, eintritt um darin weiter geführt zu werden.

Ein solcher Apparat soll im Folgenden »Effuser« genannt werden; die Wirkung desselben besteht in der Erzeugung vortheilhafterer Druckverhältnisse an der Ausmündung der Turbinenlaufradkanäle, wie die folgenden Untersuchungen zeigen werden.

Bei Benutzung des Effusers kann ein doppelter Zweck vorliegen; entweder will man der aus dem Laufrade kommenden Flüssigkeit die ihr innewohnende Geschwindigkeit weiter entziehen, um den entsprechenden Theil der Strömungsenergie noch auf das Laufrad zu übertragen, oder man will umgekehrt die Geschwindigkeit erhöhen; das erstere geschieht, wenn die Effuserkanäle sich vom Laufradumfang ab gerechnet allmählich erweitern, das andere, wenn umgekehrt eine allmähliche Verengung dieser Kanäle vorliegt. Im ersteren Falle hat man nach dem Vorgange der Amerikaner Boyden und Francis dem Apparate den Namen »Diffuser« gegeben, im anderen Falle kann er als »Confuser« oder »Contractor« bezeichnet werden.

Fig. 46.



So lange nicht bei den allgemeinen Untersuchungen der Zweck des Apparates besonders zu betonen ist, wird im Folgenden die Benennung Effuser benutzt, im anderen Falle dagegen vom Diffuser bez. Contractor gesprochen werden.

Fig. 47.

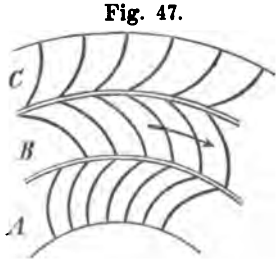


Fig. 46 zeigt die Anordnung bei einer Axialturbine, Fig. 47 die bei einer Radialturbine; A repräsentirt einen Theil der Schaufeln des Leitapparates, B den des Laufrades und C einen Theil der Schaufeln des Effusers; in beiden Figuren ist derselbe als Diffuser gedacht.

Erster Abschnitt.

Von den Axialturbinen.

Kapitel I.

Die Axialturbine als Kraftmaschine.

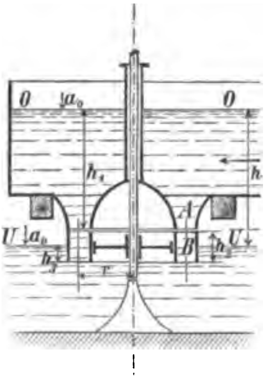
A. Axialvollturbine.

Henschel-Jonval-Turbine.

§ 16. Anordnung der Turbine. Winkel- und Querschnittsverhältnisse bei stossfreiem Eintritte.

Den nachfolgenden Betrachtungen mag die in Fig. 48 angegebene Anordnung*) zu Grunde gelegt werden. OO ist der Ober- und UU der Unterwasserspiegel, A stellt den Leitapparat und B das Laufrad der Turbine vor. Die untere Ebene des Leitapparates (der Spalt) liege um h_1 unter dem Oberwasserspiegel, h_2 sei die Höhe des Laufrades und die untere Ebene desselben liege um h_3 unter dem Unterwasserspiegel, die Turbine laufe also im Unterwasser. Das disponible Gefälle h, d. h. der Verticalabstand von Ober- und Unterwasserspiegel, sei demnach $h = h_1 + h_2 - h_3$; der mittlere Radius des Laufrades sei r.

Fig. 48.

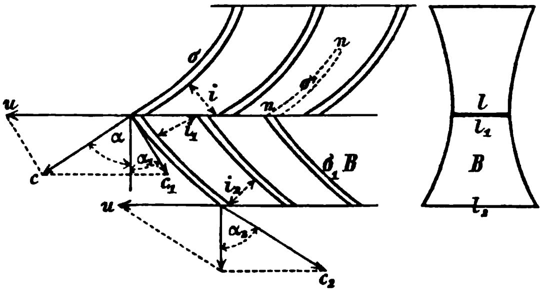


Um nun zugleich die Unterlagen für später folgende Untersuchungen zu

*) M. Rühlmann giebt in seinem vortrefflichen Werke »Allgemeine Maschinenlehre«, Braunschweig 1875, Bd. I, Beschreibungen und Abbildungen

gewinnen, mag zunächst angenommen werden, dass die radiale Radweite im Laufrade an der Eintrittsstelle l_1 und an der Austrittsstelle l_2 sei, dagegen im Leitapparate an der Austrittsstelle l (Fig. 49); gewöhnlich ist l nur einige Millimeter kleiner als l_1 und bei der Henschel-Jonval-Turbine ist immer $l_1 = l_2$.

Fig. 49.



Es sei nun σ_1 die Dicke der Schaufeln im Laufrade und z_1 die Anzahl der Kanäle daselbst, so ist die Theilung des Laufrades, d. h. die Entfernung von Schaufel- zu Schaufelmitte im Kreisumfange des mittleren Radius r

$$\frac{2 r \pi}{z_1}$$

und daher die lichte normale Kanalweite i_1 daselbst (Fig. 49)

$$i_1 = \left(\frac{2 r \pi}{z_1} \cos \alpha_1 - \sigma_1\right).$$

Die Summe aller normalen Querschnitte im Laufrade an der Eintrittsstelle, die mit F_1 bezeichnet werde, ist $F_1 = i_1 l_1 z_1$ oder nach vorstehendem Werthe von i_1:

$$F_1 = (2 r \pi \cos \alpha_1 - z_1 \sigma_1) l_1. \tag{1}$$

Auf dem gleichen Wege findet sich die Summe F_2 der Querschnitte am Austritte:

$$F_2 = (2 r \pi \cos \alpha_2 - z_1 \sigma_1) l_2. \tag{2}$$

Bezeichnet z die Anzahl der Leitkanäle und σ die Dicke der

wohl fast aller in Vorschlag gekommenen Turbinen mit geschichtlichen Notizen. Nach Rühlmann ist die oben im Texte behandelte Turbine zuerst (1837) von Henschel in Cassel und dann von Jonval in Mühlhausen i. E. gebaut worden.

Leitschaufeln, sowie l die radiale Weite, so wäre ebenso die Summe F der Querschnitte aller Leitkanäle:

$$F = (2 r \pi \cos \alpha - z \sigma) l. \tag{3a}$$

Speciell an dieser Formel ist aber noch eine Correction anzubringen, welche der Einwirkung der sogenannten »Deckung« entspringt. Denkt man sich (Fig. 49) das Laufrad momentan feststehend, so entsteht durch die Dicke σ_1 der Laufradschaufel im darüber liegenden Leitkanal ein schaufelartiger Raum nn, der mit »todtem« Wasser gefüllt ist und durch welchen der Leitkanal verengt erscheint. Ist δ die Dicke der Schaufel des Laufrades in der Radebene gemessen, so ist $\sigma_1 = \delta \cos \alpha_1$ und die Dicke σ' des genannten todten Raumes $\sigma' = \delta \cos \alpha$, woraus durch Verbindung folgt

$$\sigma' = \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_1} \sigma_1.$$

Es ist daher auf der rechten Seite der Gleichung (3a) der »überdeckte« Querschnitt

$$l \sigma' z_1 = \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_1} \sigma_1 l z_1$$

in Abzug zu bringen; es ergiebt sich also genauer, doch immerhin näherungsweise, da eine schärfere Bestimmung nicht möglich ist, die Summe F der Durchflussquerschnitte aller Leitkanäle:

$$F = \left(2 r \pi \cos \alpha - z \sigma - \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_1} \sigma_1 z_1\right) l. \tag{3}$$

Unter Umständen kann man das Correctionsglied weglassen; bei gewissen Betrachtungen kann man auch den Einfluss der Schaufeldicken gänzlich vernachlässigen, also $\sigma = \sigma_1 = 0$ setzen; man erhält dann für die Querschnitte einfach:

$$F = 2 r l \pi \cos \alpha, \quad F_1 = 2 r l_1 \pi \cos \alpha_1, \quad F_2 = 2 r l_2 \pi \cos \alpha_2. \tag{4}$$

Ist c, wie früher, die Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser aus dem Leitapparate tritt, und ist c_1 und c_2 die relative Durchflussgeschwindigkeit an der Ein- und Austrittsstelle des Laufrades, so besteht auch die Beziehung

$$F c = F_1 c_1 = F_2 c_2$$

und daher folgt unter Benutzung der Gleichung (4)

$$\frac{c}{c_1} = \frac{l_1 \cos \alpha_1}{l \cos \alpha} \tag{5}$$

und

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{l_1 \cos \alpha_1}{l_2 \cos \alpha_2}. \tag{6}$$

Da nahezu $l_1 = l$ ist, so folgt aus der ersten Gleichung

$$c \cos \alpha = c_1 \cos \alpha_1 .$$

Es würde also parallel zur Drehaxe beim Eintritt ins Laufrad keine Geschwindigkeitsänderung, also auch kein Stoss stattfinden. Das ist auch die Annahme, welche Combes und Weisbach (vergl. S. 166) gemacht haben; man erkennt jetzt, unter welchen Voraussetzungen diese Annahme zulässig ist.

Bei der Henschel-Jonval-Turbine ist immer $l_1 = l_2$, daher folgt für diese aus Gleichung (6):

$$c_2 \cos \alpha_2 = c_1 \cos \alpha_1 = c \cos \alpha ; \tag{7}$$

es ergiebt diese Beziehung einen nicht unwichtigen Satz: Die axiale, relative Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser durch das Laufrad strömt, ist unter den gemachten Voraussetzungen eine constante Grösse; es ist daher auch auf Grund der Gleichung (117) S. 95 die Verticalreaction Y gleich Null. Die Reaction Y wäre es, welche als Treibkraft wirken würde, wenn man das Laufrad der vorliegenden Turbine, wie es sich Redtenbacher dachte*), für sich allein (also ohne Effuser oder Contractor) an Stelle der Schiffsschraube, als Propeller anwenden wollte. Die Unmöglichkeit für diese Verwendungsart in der angegebenen Weise ist Redtenbacher ganz entgangen.

In den vorstehenden Entwickelungen ist die Schaufelcurve auf einem Cylindermantel vom Radius r liegend angenommen worden, und auf diesen Ort beziehen sich die Schaufelwinkel α, α_1 und α_2, wie das auch im Weiteren geschehen soll, wobei auch noch die durch die Piezometerstände a_1 und a_2 dargestellten Drücke im Spalte und unter dem Laufrade auf den gleichen Ort bezogen werden. Es ist nun einleuchtend, dass in dieser Annahme eine

---

*) Redtenbacher, »Der Maschinenbau«, Bd. III, S. 190. Mannheim-Heidelberg 1865.

Ungenauigkeit liegt, denn verfolgt man den Verlauf der Laufradschaufel einer Henschel-Jonval-Turbine, die eine windschiefe Fläche bildet, in radialer Richtung von innen nach aussen, so werden die angegebenen Winkel und Drücke veränderlich erscheinen, die benutzten Werthe gelten eben nur für den Cylindermantel vom Radius r und müssen daher als mittlere Werthe angesehen werden. Hierzu kommt aber weiter, dass die früher gegebenen Entwickelungen für die Bewegung des Wassers durch einen rotirenden Kanal, die wir auch im Weiteren benutzen müssen, streng genommen nur für einen Wasserfaden von unendlich geringem Querschnitte, aber nicht oder nur annähernd für einen Kanal von endlichem Querschnitte giltig sind.

Jedenfalls ist hieraus zu schliessen, dass die Rechnungsergebnisse um so besser mit den Beobachtungen in Uebereinstimmung treten werden, je geringer die radiale Radweite ist und je grösser die Zahl der Radkanäle einer Turbine gewählt wird. Durch die Verschiedenheit der Pressungen a_1 und a_2 in radialer Richtung werden bei Axialturbinen ohne Zweifel Störungen in der Wasserbewegung eintreten; dieselbe entziehen sich aber jeder Verfolgung auf theoretischem Wege und dürfen nur dann übersehen werden, wenn nicht zu wenig Kanäle vorliegen und die radialen Radweiten l_1 und l_2 des Laufrades klein gegenüber dem mittleren Radius r gewählt werden, eine Regel, die auch von den Turbinenconstructeuren befolgt wird, so weit es irgend möglich ist und so lange nicht die Befolgung der Regel allzugrosse Turbinendurchmesser ergiebt.

Die erwähnten Unsicherheiten in der theoretischen Behandlung treten besonders bei den Axialturbinen hervor, und doch sind es gerade diese, die in neuerer Zeit vorzugsweise zur Ausführung gelangen. Weit günstiger liegen in dieser Beziehung die Verhältnisse bei den später zu behandelnden Radialturbinen, die den theoretischen Anforderungen vollkommen entsprechen, weil bei diesen die Schaufelwinkel sowohl, wie die Wasserdrücke in der ganzen Erstreckung der Radhöhe unveränderlich sind.

Nach dieser Einschaltung zu den unterbrochenen Darlegungen zurückkehrend, mag nun die Beziehung zwischen den Schaufelwinkeln unter der Voraussetzung abgeleitet werden, dass die beste Umdrehungsgeschwindigkeit u vorliege, bei welcher die grösste Arbeit auf die Turbine übertragen wird.

Es kann allgemein angenommen werden, dass dies der Fall ist, wenn das Wasser stossfrei in die Turbine eintritt und mit möglichst geringer absoluter Geschwindigkeit das Laufrad verlässt.

Die erstere Bedingung wird erfüllt, wenn, wie sofort aus Fig. 49 hervorgeht, die Beziehung

$$\frac{c_1}{u} = \frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha + \alpha_1)} \tag{8}$$

gilt. Die andere Bedingung wird erfüllt, wenn die Horizontalcomponente $c_2 \sin\alpha_2$ der relativen Austrittsgeschwindigkeit c_2 mit u identisch wird, also

$$c_2 \sin\alpha_2 = u \tag{9}$$

gemacht wird. In diesem Falle ist die absolute, horizontale Ausflussgeschwindigkeit Null und die vertical gerichtete absolute Austrittsgeschwindigkeit:

$$w_2 = c_2 \cos\alpha_2,$$

und da diese so klein als möglich sein soll, so wird man als Regel hinstellen, den Winkel α_2 möglichst gross anzunehmen.

Mit Rücksicht auf Gleichung (7) folgt auch $w_2 = c\cos\alpha$, es tritt also die weitere Regel hinzu, bei der Henschel-Jonval-Turbine auch den Winkel α möglichst gross zu wählen.

Durch Division der beiden Gleichungen (8) und (9) folgt:

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{\sin(\alpha + \alpha_1)}{\cos\alpha \sin\alpha_2}$$

und aus deren Verbindung mit der Näherungsformel (6) ergiebt sich die Beziehung:

$$\frac{\sin(\alpha + \alpha_1)}{\cos\alpha \sin\alpha_2} = \frac{l_1 \cos\alpha_1}{l_2 \cos\alpha_2},$$

oder nach einfacher Reduction:

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{l_1}{l_2} \operatorname{tg}\alpha_2. \tag{10}$$

Bei der Henschel-Jonval-Turbine folgt einfach, wegen $l_1 = l_2$:

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha_1 = \operatorname{tg}\alpha_2, \tag{11}$$

wonach also die drei Winkel in einer bestimmten Beziehung zu einander stehen müssen; durch die Wahl zweier Winkel ist der dritte gegeben.

§ 17. Beste Umfangsgeschwindigkeit und Berechnung einer neuen Turbine.

Ist a_0 der Atmosphärendruck in Wassersäule, h_1 die Tiefe der unteren Ebene des Leitapparates unter dem Oberwasserspiegel (Fig. 48 S. 177), h_2 die Höhe des Turbinenlaufrades und h_3 die Tiefe der unteren Radebene desselben unter dem Unterwasserspiegel; ist ferner a_1 der Druck im Spalte und a_2 der Druck unter dem Laufrade, so gilt für den Durchgang des Wassers durch den Leitapparat nach früheren Sätzen die Gleichung:

$$2g(h_1 + a_0 - a_1) = (1 + \zeta_1)c^2, \tag{12}$$

wenn ζ_1 den Widerstandscoefficienten für den Leitapparat darstellt. Für den Durchgang des Wassers durch das Laufrad fand sich bei stossfreiem Eintritte nach Gleichung (120) S. 97:

$$2g(h_2 + a_1 - a_2) = (1 + \zeta_2)c_2^2 - c_1^2, \tag{13}$$

wo ζ_2 der Widerstandscoefficient für die Radkanäle ist. Endlich ist auch

$$2g(a_2 - a_0 - h_3) = 0, \tag{14}$$

weil der Druck unter der Turbine $a_2 = a_0 + h_3$ ist. Addirt man die letzten drei Gleichungen und beachtet man, dass $h_1 + h_2 - h_3$ nichts anderes als das Gefälle h (Fig. 48) darstellt, so ergiebt sich:

$$2gh = (1 + \zeta_1)c^2 + (1 + \zeta_2)c_2^2 - c_1^2. \tag{15}$$

Diese Formel gilt auch für den Fall, dass die Turbine in freier Luft läuft, nur hat man dann unter h die Tiefe der unteren Laufradebene unter dem Oberwasserspiegel und nicht etwa den Verticalabstand der beiden Wasserspiegel, das sogenannte disponible Gefälle, zu verstehen.

Die Formel gilt auch für die Fig. 50 f. S. vorgeführte Aufstellung der Turbine mit Saugrohr, wie sie früher oft vorkam, in neuerer Zeit aber kaum noch in Anwendung kommt; die Gründe werden später Besprechung finden.

Das Turbinenlaufrad B befindet sich hier im Innern eines luftdichten Rohres C, welches ins Unterwasser taucht und mit einer Perspectivschütze PP versehen ist. Das Wasser strömt aus dem Laufrade kommend im Rohre C vom Querschnitte F_3 vertical herab und durch die ringförmige Mündung F_4 ins Unterwasser. Der Druck a_2 unter dem Laufrade ist (näherungsweise) nach der Bezeichnung in der Figur:

$$a_2 = a_0 - (h_3 - h_4);$$

es tritt daher an die Stelle der Gleichung (14) die Formel:

$$2g(a_2 + h_3 - h_4 - a_0) = 0, \tag{14 a}$$

und wenn man jetzt zu dieser die beiden Gleichungen (12) und (13) addirt, so folgt ebenfalls die Gleichung (15), weil der Figur gemäss

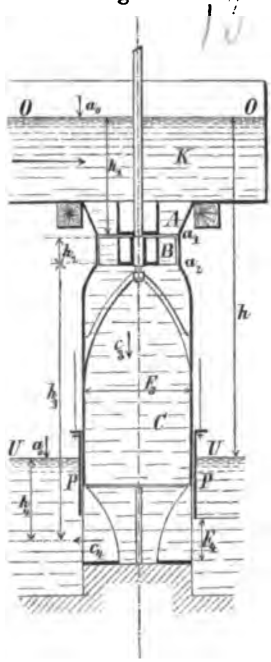
$$h_1 + h_2 + h_3 - h_4 = h$$

ist, d. h. weil wieder das ganze Gefälle h den Verticalabstand von Ober- und Unterwasserspiegel darstellt. Der Druck a_2 unter dem Laufrade ist hier kleiner, als der atmosphärische Druck a_0; da derselbe aber niemals Null sein darf, so muss die Bedingung

$$h_3 - h_4 < a_0$$

erfüllt sein; die untere Laufradebene muss also um weniger als 10,33 m über dem Unterwasserspiegel liegen.

Fig. 50.



Die Gleichung (15), die für das Nächstfolgende als Grundformel anzusehen ist, gilt demnach gleichzeitig für alle drei Aufstellungsarten.

Aus der in Fig. 49 angedeuteten Geschwindigkeitszerlegung ergiebt sich:

$$c_1{}^2 = c^2 + u^2 - 2cu \sin \alpha$$

und durch Substitution in Gleichung (15):

$$2gh = 2cu \sin \alpha + \zeta_1 c^2 + (1 + \zeta_2) c_2{}^2 - u^2.$$

Nun gelten aber nach derselben Figur auch die Beziehungen:

$$c = \frac{u \cos \alpha_1}{\sin(\alpha + \alpha_1)}; \quad c_1 = \frac{u \cos \alpha}{\sin(\alpha + \alpha_1)} \quad \text{und} \quad c_2 = \frac{u}{\sin \alpha_2}. \tag{16}$$

Benutzt man die erste und dritte dieser Gleichungen in vorstehender Formel, so erhält man nach einfacher Reduction:

$$u = \sqrt{\frac{2gh}{\frac{2 \sin \alpha \cos \alpha_1}{\sin(\alpha + \alpha_1)} + \zeta_1 \frac{\cos^2 \alpha_1}{\sin^2(\alpha + \alpha_1)} + \frac{\zeta_2 + \cos^2 \alpha_2}{\sin^2 \alpha_2}}} \qquad (17)$$

Mit Hülfe dieser Gleichung berechnet sich jetzt die beste Radgeschwindigkeit u für das vorgeschriebene Gefälle h, wenn die Winkel α, α_1 und α_2 bekannt sind. Nach den Angaben auf S. 55 sollen im Weiteren die beiden Widerstandscoefficienten ζ_1 und ζ_2, beide auf den engeren Querschnitt des betreffenden Kanales bezogen, gleich gross und zwar bei Vollturbinen im Mittel $\zeta_1 = \zeta_2 = 0{,}125$ angenommen werden.

Gleichung (17) stimmt nahezu mit derjenigen überein, welche Weisbach für denselben Fall abgeleitet hat, nur steht bei ihm im dritten Gliede im Nenner unter der Wurzel einfach ζ_2, was daher rührt, dass Weisbach an Stelle der dritten der Gleichungen (16) einfach $c_2 = u$ substituirt. Bei der praktischen Benutzung weichen die Rechnungsergebnisse der Weisbach'schen Formel und der Gleichung (17) nur wenig von einander ab.

Es verdient hervorgehoben zu werden, dass man an Stelle von Gleichung (17) auch noch einen anderen Ausdruck für die beste Geschwindigkeit u unter denselben Voraussetzungen ableiten kann. Für stossfreien Eintritt ergab sich nach Gleichung (119) S. 95 für die auf den Kanal, also hier auf das Laufrad übertragene Arbeit:

$$L = Mu(c_2 \sin \alpha_2 - c_1 \sin \alpha_1).$$

Bei stossfreiem Eintritt ist aber

$$c_1 \sin \alpha_1 = u - c \sin \alpha,$$

und daher folgt mit $c_2 \sin \alpha_2 = u$ einfach:

$$L = Muc \sin \alpha. \qquad (18)$$

Dem Gefälle h entspricht aber die disponible Arbeit $L_m = Mgh$; es folgt daher der beste Wirkungsgrad, der mit η_m bezeichnet werden mag:

$$\eta_m = \frac{L}{L_m} = \frac{uc \sin \alpha}{gh}. \qquad (19)$$

Da hier von dem Arbeitsverluste abgesehen wird, welcher der Reibung am Turbinenzapfen entspricht, so bezeichnet man η_m als den »hydraulischen« Wirkungsgrad der Anlage, wir sagen ausdrücklich »der Anlage« und sprechen nicht vom Wirkungsgrade der eigentlichen Turbine, d. h. des Laufrades; das letztere erfordert eine andere Berechnungsweise, denn $L_m = Mgh$ ist nicht die Arbeit, welche dem Turbinenlaufrade zur Verwerthung geboten wird, weil ja schon Arbeit in der Zuleitung verloren geht, deren Verlust man nicht der Turbine zur Last legen darf. Wird im vorliegenden Falle die dem Laufrade gebotene Arbeit mit L_t bezeichnet, so ist

$$L_t = Mgh - \zeta_1 \frac{Mc_1}{2}$$

und daher der beste Wirkungsgrad η der eigentlichen Turbine:

$$\eta = \frac{L}{L_t} = \frac{2uc \sin \alpha}{2gh - \zeta_1 c^2}, \tag{19a}$$

welcher Werth grösser ausfällt, als der nach Gleichung (19) berechnete.

Die hier berührte Frage ist für den Turbinenbau wegen der gebräuchlichen Garantieleistungen von grosser Wichtigkeit, denn es kommen Turbinenanlagen vor, bei denen der (unvermeidliche) Arbeitsverlust in der Zuleitung sehr beträchtlich ist.

Auf die Frage näher einzugehen, wird sich später Gelegenheit bieten; für den vorliegenden Zweck soll Gleichung (19) in Betracht gezogen werden; ersetzt man in derselben c durch den ersten der unter (16) gegebenen Ausdrücke, so folgt:

$$\eta_m = \frac{u^2}{gh} \cdot \frac{\sin \alpha \cos \alpha_1}{\sin(\alpha + \alpha_1)}$$

und hieraus die beste Umdrehungsgeschwindigkeit u:

$$u = \sqrt{\eta_m} \cdot \sqrt{\frac{\sin(\alpha + \alpha_1)}{2 \sin \alpha \cos \alpha_1} \cdot 2gh}. \tag{17a}$$

Diesen Ausdruck hat zuerst Redtenbacher benutzt, nur erkennt derselbe die Bedeutung des Factors $\sqrt{\eta_m}$ nicht, er setzt für denselben den Werth 0,774 und und betrachtet ihn als einen einfachen Correctionsfactor, den er aus Versuchen abgeleitet hat. Später erst hat dann Gustav Schmidt*) die richtige Bedeutung dieses Factors angegeben, entwickelt aber Gleichung (17a) auf anderem Wege, als es oben geschehen ist. Aeltere, insbesondere französische Schriftsteller setzten einfach $\sqrt{\eta_m} = 1$.

An sich hat Gleichung (17a) hier keinen besonderen Werth, bei den weiteren Untersuchungen soll vielmehr zunächst Gleichung (17) den Betrachtungen untergelegt werden.

Bei der Berechnung einer neu zu construirenden Henschel-Jonval-Turbine wird als gegeben angesehen das Gefälle h und die Wassermenge V cbm, welche in der Secunde zur Verfügung steht.

Man wählt zunächst die Winkel $\alpha_2 = 70^\circ$ bis 75°, $\alpha_1 = 10^\circ$ bis 30° und α zwischen 65° und 75° und zwar derart, dass sie der Gleichung (11) $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1$ Genüge leisten. Nun berechnet man unter Annahme $\zeta_1 = \zeta_2 = 0{,}125$ die beste Umdrehungsgeschwindigkeit u nach Gleichung (17) und dann die Geschwindigkeiten c, c_1 und c_2 nach den Gleichungen (16).

Hieraus ermitteln sich die Kanalquerschnitte nach den Formeln:

$$F = \frac{V}{c}, \quad F_1 = \frac{V}{c_1} \quad \text{und} \quad F_2 = \frac{V}{c_2}. \tag{20}$$

Nun kommt es nur darauf an, die Dimensionen der Turbine so zu berechnen, dass diese berechneten Querschnitte wirklich hervortreten. Wegen $l_1 = l_2$ ergeben die Gleichungen (1) und (2):

$$F_1 = (2r\pi \cos\alpha_1 - z_1\sigma_1)l_1$$
$$F_2 = (2r\pi \cos\alpha_2 - z_1\sigma_1)l_1$$

und hieraus folgt durch Subtraction:

$$rl_1 = \frac{F_1 - F_2}{2\pi(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)}. \tag{21}$$

Multiplicirt man dagegen die erstere Gleichung auf beiden Seiten mit $\cos\alpha_2$ und die andere mit $\cos\alpha_1$, und subtrahirt man die erhaltenen Ausdrücke wieder von einander, so folgt, wie man sich leicht überzeugen kann:

$$z_1\sigma_1 l_1 = \frac{F_1\cos\alpha_2 - F_2\cos\alpha_1}{\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2}. \tag{22}$$

*) Gustav Schmidt, »Zur Turbinentheorie«. Oesterreichische Zeitschrift für Berg- und Hüttenwesen, 1860. Jahrgang VIII, S. 209.

Wählt man nun die radiale Radweite l_1, so bestimmt sich jetzt aus Gleichung (21) der mittlere Turbinenradius r; die Wahl von l_1 erfolgt dabei derart, dass das Verhältniss $l_1 : r$ zwischen 0,2 und 0,4 fällt. Hat man sich für bestimmte Werthe von r und l_1 entschieden, so wählt man nun die Schaufeldicken, und zwar bei Blechschaufeln $\sigma = \sigma_1 = 0{,}006$ bis $0{,}008$ m, und bei Gussschaufeln $\sigma = \sigma_1 = 0{,}010$ bis $0{,}012$ m, worauf sich dann aus Gleichung (22) der Werth z_1 ergiebt, für welchen man die nächste ganze Zahl nimmt; der Werth z_1 repräsentirt die Anzahl der Schaufeln oder Kanäle im Laufrade.

Die radiale Weite l des Leitapparates nimmt man etwas kleiner als l_1 (etwa $l_1 - l = 0{,}005$ m) und berechnet nun aus Gleichung (3)

$$z\sigma = 2r\pi\cos\alpha - \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_1}\sigma_1 z_1 - \frac{F}{l}, \tag{23}$$

woraus mit dem angenommenen Werthe von σ die Anzahl z der Schaufeln im Leitapparate folgt. Die Höhe h_2 des Laufrades beträgt gewöhnlich $h_2 = 0{,}25\,r$ bis $0{,}50\,r$ und die verticale Höhe der Schaufel im Leitapparate etwas mehr; hierüber entscheidet sich der Constructeur bei der Zeichnung der Schaufelcurven und einer Skizze des Rades, wobei sich vielleicht auch sonst eine Aenderung der Grössen, die als frei wählbar bezeichnet wurden, als zweckmässig herausstellt. Die Berechnung einer Turbine erfordert gewisse Uebung und Erfahrung und erfolgt nicht immer in einem Wurfe.

Die Anzahl n der Umdrehungen endlich, welche die Turbine in der Minute machen muss, ermittelt sich aus der Gleichung

$$n = \frac{30\cdot u}{\pi r}. \tag{24}$$

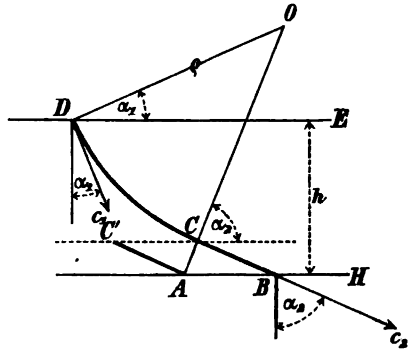
Was endlich die Schaufelform im Laufrade und im Leitapparate betrifft, so mögen hierüber noch einige Bemerkungen folgen.

Der Austritt des Wassers aus den Kanälen soll ohne Contraction erfolgen; man erreicht dies dadurch, dass man in der Ausflussmündung die einander gegenüber liegenden Schaufelelemente parallel legt. An dem Laufrade ist die Theilung t von Schaufelmitte zu Schaufelmitte auf dem Cylinderumfange vom mittleren Radius r durch

$$t = \frac{2r\pi}{z_1}$$

bestimmt. Wird der Cylindermantel abgewickelt, und trägt man (Fig. 51) die beiden Parallelen AH und DE in der Verticalentfernung der Laufradhöhe h auf, so lässt sich nun die Mittellinie der Radschaufel in folgender Art zeichnen. Man trägt die Strecke $AB = t$ auf und zieht unter der Richtung α_2 die Gerade BC so weit, bis sie von dem aus A auf dieselbe gerichteten Perpendikel AC getroffen wird. Die Strecken BC, AC' bilden nun den unteren, geradlinig verlaufenden Theil der Schaufelcurve. Den weiteren Verlauf der Schaufelcurve CD nimmt man dann derart, dass sie im Punkte C tangential herantritt und ihre Tangente im Punkte D um α_1 von der Verticalen abweicht; will man, was das einfachste ist, die Strecke CD als Kreisbogen ausführen, so hat man in der Verlängerung von AC den Kreismittelpunkt O und den Kreisradius $OC = OD = \varrho$ so zu wählen, dass derselbe, wie sich leicht verfolgen lässt, der Gleichung

Fig. 51.



$$\varrho = \frac{h - t \sin \alpha_2 \cos \alpha_2}{\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1}$$

entspricht. Leicht lässt sich dann auch der Verlauf der Schaufelcurve auf dem äusseren und inneren Cylindermantel darstellen. Auf gleichem Wege erfolgt auch die Schaufelconstruction für den Leitapparat.

Als Ergänzung der vorstehenden Untersuchungen mag noch ein Beispiel aus der Praxis berechnet werden.

Im Wasserwerke von Augsburg finden sich vorzüglich ausgeführte, aus der Maschinenfabrik Augsburg hervorgegangene Henschel-Jonval-Turbinen aufgestellt, die bereits seit 1880 Tag und Nacht in Betrieb stehen. Eine jede derselben ist für ein Gefälle $h = 1{,}850$ m und eine Wassermenge von $V = 4$ cbm pro Secunde berechnet. Die Schaufelwinkel sind: $\alpha_2 = 70^\circ 30'$, $\alpha_1 = 8^\circ 45'$ und $\alpha = 69^\circ 30'$ und entsprechen in der That in ihrem Zusammenhange der Gleichung (11). Mit $\zeta_1 = \zeta_2 = 0{,}125$ berechnet sich die beste Geschwindigkeit nach

Gleichung (17) zu $u = 3,986$ m, und daraus folgen nach den Gleichungen (16) die Wassergeschwindigkeiten $c = 4,024$; $c_1 = 1,426$ und $c_2 = 4,228$; hieraus berechnen sich nach den Gleichungen (20) die erforderlichen Kanalquerschnitte zu: $F = 0,9941$; $F_1 = 3,0762$ und $F_2 = 0,9460$ qm. Dann folgt aus Gleichung (21)

$$r l_1 = 0,5180$$

und nach Gleichung (22)

$$z_1 \sigma_1 l_1 = 0,1404.$$

Wählt man, wie bei der Ausführung geschehen ist, $l_1 = 0,440$ m, so ergiebt sich hieraus der mittlere Radius der Turbine $r = 1,180$ m und $z_1 \sigma_1 = 0,320$, woraus sich bei einer Schaufeldicke von $\sigma_1 = 8$ mm die Schaufelzahl im Laufrade zu $z_1 = 40$ ergiebt. Für eine radiale Radweite des Leitapparates von $l = 0,435$ m berechnet sich aus Gleichung (23) $z\sigma = 0,217$, woraus für 8 mm Schaufeldicke die Anzahl der Leitschaufeln $z = 27$ folgt. Die Rechnungsergebnisse stimmen in allen Theilen mit den Ausführungen, nur die Schaufelzahl des Laufrades ist in Wirklichkeit eine etwas kleinere, nämlich $z_1 = 30$. Nach Gleichung (24) ist die Umdrehungszahl der Turbine in der Minute rund $n = 32$.

Die durchgehende Wassermasse beträgt:

$$M = \frac{V\gamma}{g} = 407,75$$

und hiernach die auf die Turbine übertragene Arbeit nach Gleichung (18):

$$L = Muc \sin \alpha = 6126,0 \text{ mkg}$$

und die Drehkraft R am Hebelarm r (die Reaction):

$$R = Mc \sin \alpha = 1537 \text{ kg}.$$

Nach Gleichung (19) folgt der hydraulische Wirkungsgrad der Anlage $\eta_m = 0,828$; dagegen der hydraulische Wirkungsgrad des Laufrades nach Gleichung (19a) $\eta = 0,877$.

§ 18. Beurtheilung einer bestehenden Henschel-Jonval-Turbine.

In allen vorstehenden Betrachtungen wurde stossfreier Eintritt des Wassers in das Laufrad vorausgesetzt und dabei als Ziel die Gewinnung von Formeln ins Auge gefasst, nach denen eine neu zu construirende Turbine berechnet werden sollte. Dieses Ziel liegt fast ausschliesslich in allen neueren Schriften über Turbinen vor, während doch schon die oben angeführten älteren Arbeiten auch die allgemeinere Aufgabe zu lösen suchten. Der erwähnten speciellen Voraussetzung entspricht eine ganz bestimmte Umdrehungsgeschwindigkeit u, die auch durch Gleichung (17) ihren Ausdruck gefunden hat, sowie eine bestimmte Umdrehungskraft R oder, wie sich auch sagen lässt, ein bestimmter nützlicher zu überwindender Widerstand und ein vorgeschriebenes Gefälle h. Liegt bei der gleichen Turbine ein anderes Gefälle vor oder wird, welcher Fall hier allein, als der gewöhnliche, der Betrachtung unterzogen werden soll, bei gleichem Gefälle der nützliche Widerstand geändert, so läuft die Turbine mit anderer Geschwindigkeit um, und der Eintritt ins Laufrad ist dann nicht mehr stossfrei. Die äussersten Grenzen der Umdrehungsgeschwindigkeit liegen zwischen »Stillstand« und »Leergang«; im ersten Falle ist $u = 0$, im letzten $R = 0$ (abgesehen vom Einfluss der Zapfenreibung). Es entsteht daher die Frage nach dem Verhalten der Turbine bei einer beliebigen Geschwindigkeit u und nach den zugehörigen Werthen der durchgehenden Wassermenge, der gewonnenen Arbeit, dem Wirkungsgrade, der Drehkraft und den Wasserpressungen an der Uebergangsstelle vom Leitapparate nach dem Laufrade.

Wird den Untersuchungen wieder die Anordnung nach Fig. 48 S. 177 zu Grunde gelegt, so findet sich auch hier für die Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser aus dem Leitapparate kommt, die Beziehung wie in Gleichung (12):

$$2g(h_1 + a_0 - a_1) = (1 + \zeta_1)c^2, \tag{12a}$$

wobei a_1 der Spaltdruck, d. h. der Druck des Wassers vor dem Eintritte ins Laufrad ist. Für den Durchgang des Wassers durch das Laufrad gilt hier dagegen Gleichung (130) S. 103):

$$2g(h_2 + a_1' - a_2) = (1 + \zeta_2)c_2^2 - c_1^2,$$

wo a_1' der Druck im Laufrade nach dem Eintritte und a_2 der Druck unter dem Rade ist.

Weiter ist, wie auf S. 183 Gleichung (14):

$$2g(a_2 - a_0 - h_3) = 0.$$

Aus der Addition dieser drei Formeln folgt nach den Angaben S. 183

$$2gh + 2g(a_1' - a_1) = (1 + \zeta_1)c^2 + (1 + \zeta_2)c_2^2 - c_1^2. \tag{25}$$

Nach Gleichung (131) S. 103 ist aber:

$$2g(a_1' - a_1) = (\zeta_0 c_0 + \zeta c_1)(c_0 - c_1), \tag{26}$$

und nach Gleichung (127) S. 102:

$$2g(a - a_1) = \zeta_0 c_0 (c_0 - c_1), \tag{27}$$

wo a der Druck in der Mündungsebene des Laufrades selbst ist; der Vereinfachung wegen wurde hierbei

$$c \cos(\alpha + \alpha_1) + u \sin \alpha_1 = c_0 \tag{28}$$

gesetzt; ζ_0 wurde der »Stosscoefficient« und ζ der »Eintrittscoefficient« genannt.

Nach den auf S. 119 gemachten Bemerkungen möge auch hier $\zeta_0 = \zeta = 1{,}25$, bis genauere Beobachtungen vorliegen, angenommen werden.

Aus Gleichung (26) folgt hiernach:

$$2g(a_1' - a_1) = \zeta_0 (c_0^2 - c_1^2) \tag{26a}$$

und daher mit Gleichung (28):

$$2g(a_1' - a_1)$$
$$= \zeta_0 [c^2 \cos^2(\alpha + \alpha_1) - c_1^2 + 2cu \sin \alpha_1 \cos(\alpha + \alpha_1) + u^2 \sin^2 \alpha_1].$$

Beachtet man die Beziehungen $F_2 c_2 = F_1 c_1 = Fc$, und benutzt man vorstehende Gleichung in Gleichung (25), so erhält man, wenn man des besseren Ueberblickes wegen setzt:

$$(1 + \zeta_1) + (1 + \zeta_2)\frac{F^2}{F_2^2} + (\zeta_0 - 1)\frac{F^2}{F_1^2} - \zeta_0 \cos^2(\alpha + \alpha_1) = A, \tag{29}$$

$$\zeta_0 \sin \alpha_1 \cos(\alpha + \alpha_1) = B, \tag{30}$$

$$\zeta_0 \sin^2 \alpha_1 = C, \tag{31}$$

aus Gleichung (25) die Grundgleichung:

$$Ac^2 - 2Buc - Cu^2 = 2gh \tag{32}$$

und hieraus:

$$c = \frac{1}{A}\left[Bu + \sqrt{A \cdot 2gh + (AC + B^2)u^2}\right]. \tag{32a}$$

Da man nun für eine gegebene Turbine alle Werthe kennt, die zur Feststellung der hier eingeführten Hülfsgrössen A, B und C erforderlich sind, so lässt sich für jede beliebige Umfangsgeschwindigkeit u nach Gleichung (32a) die Geschwindigkeit c, mit der das Wasser die Leitkanäle verlässt, berechnen. Kennt man aber diese Grösse, so sind alle übrigen Werthe bestimmbar. Die entsprechende Aufschlagwassermenge ist $V = Fc$ cbm auf die Secunde bezogen, und die Wassermenge M folgt aus $Mg = V$; es bestimmt sich:

$$c_1 = \frac{F}{F_1}c; \quad c_2 = \frac{F}{F_2}c \quad \text{und} \quad c_0 = c\cos(\alpha + \alpha_1) + u\sin\alpha_1. \tag{33}$$

Aus Gleichung (12a) ermittelt sich dann der Spaltdruck a_1 nach Meter Wassersäule gemessen im luftleeren Piezometer, und ebenso a_1' aus Gleichung (26a) und a aus Gleichung (27). Von besonderer Wichtigkeit ist die vom Laufrade aufgenommene und abgegebene Arbeit L; für diese fand sich durch Gleichung (129) S. 102:

$$L = Mu(c_2 \sin\alpha_2 + c\sin\alpha - u) - \frac{\zeta_0\gamma}{2g}F_1 c_0(c_0 - c_1)u\sin\alpha_1, \tag{34}$$

oder, wenn

$$M = \frac{F_1 c_1 \gamma}{g}$$

substituirt wird:

$$L = \frac{F_1\gamma}{g}u\left[c_1(c_2\sin\alpha_2 + c\sin\alpha - u) - \tfrac{1}{2}\zeta_0 c_0(c_0 - c_1)\sin\alpha_1\right]. \tag{34a}$$

Die Drehkraft R am Hebelarme r bestimmt sich dann aus $L = Ru$ und der Wirkungsgrad η_m der ganzen Anlage:

$$\eta_m = \frac{L}{Mgh}, \tag{35}$$

endlich der Wirkungsgrad η der eigentlichen Turbine nach den Darlegungen auf S. 186:

$$\eta = \frac{2L}{M[2gh - \zeta_1 c^2]}, \tag{36}$$

womit die Behandlung der allgemeinen Frage als erledigt angesehen werden könnte; der Rechnungsgang ist, wie das in der Natur der Sache liegt, etwas umständlich, aber doch leicht durchführbar und für eine zum Zweck der Ausführung neu entworfene und berechnete Turbine zu empfehlen.

Aus Gleichung (32a) ist ersichtlich, dass die Geschwindigkeit c, also auch die Aufschlagwassermenge $V = Fc$ um so grösser ist, je grössere Umfangsgeschwindigkeit bei **constantem** Gefälle h

vorliegt. Es ist eine besondere Eigenschaft aller Vollturbinen, dass die verbrauchte Wassermenge auch von der Umdrehungsgeschwindigkeit u abhängt; von besonderem Einfluss ist hierbei der Schaufelwinkel α_1; wäre derselbe $\alpha_1 = 0$, wie das bei älteren Turbinen vorkam, so fände sich nach den Gleichungen (30) und (31) $B = 0$ und $C = 0$ und demnach aus Gleichung (32)

$$Ac^2 = 2gh,$$

wonach in diesem besonderen Falle c sich für alle Umdrehungszahlen als unveränderlich herausstellt. Gewöhnlich wird der Winkel α_1 klein gewählt, so dass die Grössen B und C von geringem Einflusse sind und damit c im Ganzen nur wenig mit dem Werthe u variirt.

Dividirt man Gleichung (34a) rechts durch u, so ergiebt sich die Drehkraft R am Radius r, und wenn man weiter die Gleichungen (33) entsprechend benutzt, so folgt unter Einführung folgender Hülfsgrössen:

$$\frac{F}{F_1}\left(\frac{F}{F_2}\sin\alpha_2+\sin\alpha\right)-\tfrac{1}{2}\zeta_0\left(\cos(\alpha+\alpha_1)-\frac{F}{F_1}\right)\sin\alpha_1\cos(\alpha+\alpha_1)=D, \quad (37)$$

$$\frac{F}{F_1}+\left(2\cos(\alpha+\alpha_1)-\frac{F}{F_1}\right)\tfrac{1}{2}\zeta_0\sin^2\alpha_1 = E, \quad (38)$$

die übersichtlichere Formel:

$$R = \frac{F_1\gamma}{g}\left[Dc^2 - Ecu - \tfrac{1}{2}\zeta_0 u^2\sin^3\alpha_1\right] \quad (39)$$

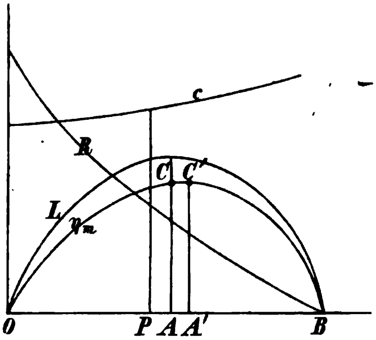
und für die Arbeit:

$$L = \frac{F_1\gamma}{g}u\left[Dc^2 - Ecu - \tfrac{1}{2}\zeta_0 u^2\sin^3\alpha_1\right]. \quad (40)$$

Da für eine berechnete oder in Construction vorliegende Turbine sich die Hülfsgrössen D und E leicht berechnen lassen und aus Gleichung (32a) sich für jeden Werth u die Grösse c ergiebt, so sind nun auch nach vorstehenden Gleichungen die Werthe von R und L leicht zu berechnen, wie sich dann auch die Wirkungsgrade η_m und η nach Gleichung (35) und (36) ergeben.

Sehr übersichtlich tritt das Verhalten der Turbine durch graphische Darstellung der Rechnungsresultate hervor. Trägt man (Fig. 52) die angenommene Umdrehungsgeschwindigkeit $OP = u$ oder nach Befinden die Anzahl der Umdrehungen des Laufrades pro Minute als Abscisse auf und die zugehörigen aus der Rechnung hervorgegangenen Werthe von c, R, L, η_m nach geeignetem Maassstabe als Ordinaten, so erhält man Curven, die den in der Figur angedeuteten Verlauf haben. Auch die Curven für α_1, α, α_1' lassen sich derart darstellen.

Fig. 52.



Um bei der Besprechung des Verlaufes dieser Curven auf einige Besonderheiten aufmerksam machen zu können, mag als besonderes Beispiel die Augsburger Turbine herangezogen werden, für welche oben auf S. 189 alle erforderlichen Angaben gemacht wurden.

Für dieselbe ergeben sich die eingeführten Hülfsgrössen nach den Gleichungen (29), (30), (31), (37) und (38) $A = 2{,}3415$, $B = 0{,}0387$, $C = 0{,}0289$, $D = 0{,}6251$ und $E = 0{,}3244$. Damit folgt für den Stillstand, d. h. für $u = 0$ aus Gleichung (32) wegen $h = 1{,}850$ m, $c = 3{,}937$, die Wassermenge $V = 3{,}914$ cbm und die Drehkraft $R = 3038$ kg; dabei ist natürlich $L = 0$ und $\eta_m = 0$.

Für den Leergang dagegen findet sich, weil hier (ohne Rücksicht auf die Zapfenreibung) $R = 0$ ist, aus Gleichung (39):

$$\frac{c}{u} = 0{,}5156,$$

und damit aus Gleichung (32a) die Leergangsgeschwindigkeit $u = 8{,}097$, weiter $c = 4{,}175$ m und $V = 4{,}150$ cbm. Für den entsprechenden Punkt B (Fig. 52) ist natürlich ebenfalls $L = 0$ und $\eta_m = 0$.

Die beste Geschwindigkeit u, bei welcher näherungsweise das Maximum der Arbeit L zu erwarten ist, fand sich nach Gleichung (17) für diese Turbine auf S. 190 $u = 3{,}986$ m ($OA = u$ in Fig. 52) und hierbei $R = 1537$ kg sowie $\eta_m = 0{,}828$ ($\eta_m = AC$ in Fig. 52).

Es tritt daher das bekannte Resultat hervor, dass die beste Geschwindigkeit nahezu mit der Hälfte der Leerlaufgeschwindigkeit identisch ist; weiterhin ist aber auch ersichtlich, dass die Drehkraft beim besten Gange nahezu gleich ist der Hälfte der Drehkraft beim Stillstande, was hauptsächlich dem Umstande entspringt, dass der Winkel α_1 einen kleinen Werth hat. Bemerkenswerth ist, dass die

Strecke AC in Fig. 52 nicht zugleich das Maximum $A'C'$ für die Curve des Wirkungsgrades η_m darstellt; um dieses allgemein zu berechnen, müsste man c nach Gleichung (32 a) in Gleichung (40) substituiren und um η_m zu erhalten durch

$$Mgh = \frac{F_1 c_1 \gamma}{g}$$

dividiren; man erhielte dann η_m als Function von u, aus der sich der Werth von $u = OC'$ bestimmen liesse, welcher η_m zu einem Maximum macht; in Wirklichkeit liegen aber die beiden Punkte A und A' (Fig. 52) so nahe bei einander, dass es nicht lohnend ist, die aus ihrer Unterscheidung entspringenden ausserordentlich verwickelten Formeln abzuleiten*). Uebrigens mag noch bemerkt werden, dass die Curve für c (Fig. 52) einen flachen Hyperbelzweig darstellt; die anderen Curven sind solche höheren Grades, von denen diejenige für R unter den gewöhnlichen Verhältnissen wenig von einer Geraden abweicht.

Es ist nun hier der Ort, auf den Unterschied hinzuweisen, welcher zwischen unseren Hauptgleichungen (32) und (34) und denen besteht, welche bis jetzt von anderer Seite gegeben worden sind; dabei kann nur die Darstellung von Redtenbacher in Frage kommen, dem einzigen Schriftsteller, der die Henschel-Jonval-Turbine in gleich allgemeiner Richtung verfolgt hat.

Redtenbacher kommt ebenfalls auf Gleichung (32), doch haben bei ihm die Gleichungen für die Hülfsgrössen A und B etwas andere Form und die Hülfsgrösse C soll, worin der Hauptunterschied liegt, Null sein; fernerhin enthält bei ihm unsere Gleichung (34) das mit dem Factor $\zeta_{\prime\prime}$ versehene Glied nicht.

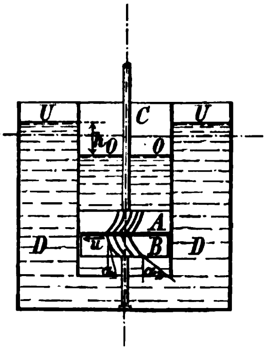
Dass in Folge dessen die Redtenbacher'schen Formeln unannehmbar sind, lässt sich leicht durch folgende Betrachtung und die angefügten Versuchsergebnisse nachweisen.

Leitapparat A und Laufrad B einer Turbine befinde sich in einem Rohre C (Fig. 53) und dieses liege in einem Reservoir DD; das Laufrad B stehe still und der anfängliche Wasserspiegel in beiden Räumen falle mit der horizontalen punktirten Linie zusammen. Wird nun die Turbine angetrieben, so dass sie mit

*) In einer interessanten Studie verfolgt Martin Grübler, »Zur Theorie der Vollturbinen«, Civilingenieur 1883, Bd. 39, S. 401, die Frage weiter und geht dabei von Gleichungen aus, welche der Verfasser des vorliegenden Buches früher in seinen Vorlesungen ableitete. Diese Gleichungen haben aber oben im Texte eine wesentliche Erweiterung und Aenderung erfahren.

constanter Geschwindigkeit u in derjenigen Richtung umläuft, in der sie sich als Turbine bewegen würde, so stellen sich im Gleichgewichtszustande, d. h. wenn eine Bewegung des Wassers durch das Laufrad nicht stattfindet, die Wasserspiegel im Rohre C und im Gefässe D in verschiedener Höhe ein und zwar liegt dann der Spiegel im Rohre C um h tiefer als im Gefässe D.

Fig. 53.



Die Gleichungen (32) und (34) müssen nun aber bei unveränderter Richtung von c und u für alle Fälle gültig sein, also auch für den Fall $c = 0$, weil wir hier den Gleichgewichtszustand voraussetzen.

Man erhält daher aus Gleichung (32) unter Benutzung von (31) sofort:

$$h = -\zeta_0 \frac{u^2}{2g} \sin^2 \alpha_1 \tag{41}$$

und nach Gleichung (34), weil nach (33) $c_0 = u \sin \alpha_1$ wird, die Arbeit:

$$L = -\zeta_0 \frac{F_1 \gamma}{2g} u^3 \sin^3 \alpha_1 . \tag{42}$$

Das negative Zeichen für L deutet darauf hin, dass die Turbine getrieben werden muss und das negative Zeichen für h darauf, dass die beiden Wasserspiegel sich in der bemerkten Weise und wie Fig. 53 andeutet einstellen. Nach den Gleichungen (26) und (27) findet sich:

$$a_1' = a = a_1 + \zeta_0 \frac{u^2}{2g} \sin^2 \alpha_1 ,$$

und daraus mit Gleichung (25) wiederum Gleichung (41).

Wäre die Höhe h vorgeschrieben, so liesse sich umgekehrt unter Aenderung des Vorzeichens aus Gleichung (41) die für den Gleichgewichtszustand erforderliche Umdrehungsgeschwindigkeit u berechnen, und würde man dann bei gleichem Werthe von h die Geschwindigkeit u grösser annehmen, so fände eine Wasserförderung aus dem inneren nach dem äusseren Gefässe statt, wenn ein entsprechender Wasserzufluss nach dem inneren Rohre C vorliegen würde; es läge daher eine Pumpe vor, die nun freilich in dieser Anordnung eine sehr unvollkommene wäre.

Man bemerkt den grossen Einfluss des Winkels α_1; für $\alpha_1 = 0$ wäre $h = 0$ und $L = 0$, so dass sich in diesem Falle keine Niveaudifferenz einstellen würde.

Auf diese Vorgänge, auf die man bis jetzt niemals hingewiesen hat, konnte auch Redtenbacher nicht gelangen, weil derselbe in Gleichung (32) unrichtiger Weise unter allen Umständen die Hülfsgrösse $C = 0$ annahm.

Wenn man das Laufrad B (Fig. 53) in entgegengesetzter Richtung umdreht, so kehrt sich die Lage der Wasserspiegel um, der Spiegel im Rohre C stellt sich über den Spiegel im Gefässe D und zwar findet sich ohne Weiteres die Niveaudifferenz h

$$h = \zeta_0 \frac{u^2}{2g} \sin^2 \alpha_2, \tag{41a}$$

wenn wie oben der Austrittswinkel der Laufradschaufel mit α_2 bezeichnet wird. Da im einen, wie im anderen Falle die Werthe u und h sich leicht beobachten lassen, so hat man auf diesem Wege das Mittel in der Hand, den Stosscoefficienten ζ_0 zu bestimmen.

Der Verfasser hat zu dem angegebenen Zwecke unter der in Fig. 53 dargestellten Anordnung schon vor Jahren Versuche angestellt, welche die Richtigkeit der vorhin gewonnenen Sätze vollständig bestätigten.

Die Versuche konnten allerdings nur mit einem sehr kleinen, wenn auch sorgfältig ausgeführten Modell einer Henschel-Jonval-Turbine ausgeführt werden; damit das Laufrad das unter ihm befindliche Wasser nicht mit in Umdrehung versetzte, befanden sich unter ihm, bis nahe an die untere Laufradebene reichend, verticale, kreuzförmig eingesetzte Blechwände, doch zeigte sich diese Anordnung von geringem Einfluss auf das Endergebniss.

Der mittlere Radius des Laufrades betrug nur $r = 89,5$ mm und für die Winkel wurde $\alpha_1 = 39^\circ\,28'$ und $\alpha_2 = 70^\circ\,22'$ durch Messung gefunden. Ersetzt man die Umdrehungsgeschwindigkeit u durch die minutliche Umdrehungszahl n, so findet sich mit den angegebenen Werthen aus Gleichung (41):

$$\frac{h}{n^2} = 0,00181 \cdot \zeta_0$$

für den in Fig. 53 dargestellten Fall, wobei h in Millimetern zu messen ist. Bei neun Versuchen zeigte sich nun in der That der Werth $h : n^2$ fast genau constant; zwischen den Umdrehungszahlen $n = 121$ bis 293 stieg h von 38 mm auf 224 mm und im Mittel zeigte sich

$$\frac{h}{n^2} = 0{,}00258\,,$$

woraus sich durch Gleichsetzen mit der vorhergehenden Formel $\zeta_0 = 1{,}43$ ergiebt.

Für die entgegengesetzte Drehrichtung, wobei, wie erwähnt, die beiden Wasserspiegel die umgekehrte Lage einnehmen, giebt Gleichung (41 a):

$$\frac{h}{n^2} = 0{,}00397 \cdot \zeta_0\,;$$

bei den Versuchen fand sich zwischen $n = 138$ bis 347 Umdrehungen, wobei h zwischen 86 mm und 543 mm lag, im Mittel:

$$\frac{h}{n^2} = 0{,}00445$$

und damit wäre

$$\zeta_0 = 1{,}12\,.$$

Die Verschiedenheit der beiden Werthe von ζ_0 liegt in der Unsicherheit der Abmessungen bei der Kleinheit der benutzten Turbine; es wäre daher sehr erwünscht, wenn die Versuche an einem grösseren Modelle oder noch besser an einer in Betrieb befindlichen Turbine wiederholt werden könnten. In den obigen allgemeinen Untersuchungen wurde auf Grund der vorstehenden Versuchsreihen bis auf Weiteres der mittlere Werth $\zeta_0 = 1{,}25$ benutzt (s. S. 119).

Zum Abschluss der Untersuchungen über die Henschel-Jonval-Turbine ist nun endlich darauf hinzuweisen, dass dieselbe bei der zu Grunde gelegten Anordnung nur mit unveränderlicher Wassermenge vortheilhaft arbeiten kann. Liegt der Fall veränderlicher Wassermenge bei constantem Gefälle vor, so wird die Turbine für die Maximalwassermenge berechnet werden müssen. Es fragt sich aber dann, was zu thun ist, wenn nach der Ausführung bei gleichem Gefälle der Turbine einmal eine geringere Wassermenge zu Gebote steht. Der nächst liegende Gedanke ist der, einzelne oder eine ganze Reihe von Leitkanälen oben durch Klappen, Schieber oder Lederstreifen zu überdecken, so dass das

Wasser nur durch die frei gebliebenen Leitkanäle dem Laufrade zuströmt. Diese Anordnung hat man auch ausgeführt, aber, wie schon zahlreiche ältere Versuche zeigten, mit sehr ungünstigem Erfolge, sobald die Turbine im Unterwasser lief oder mit Saugrohr versehen war. Das Resultat ist leicht erklärlich; taucht die Turbine, so ist das unter den verdeckten Leitkanälen befindliche Wasser in Ruhe, der Kanal ist mit todtem Wasser gefüllt; tritt nun ein in Bewegung befindlicher Laufradkanal mit seinem strömenden Wasser unter den verdeckten Leitkanal, so müssen plötzliche Störungen in der Wasserbewegung eintreten, weil auf das todte Wasser eine saugende Wirkung ausgeübt wird und gleichzeitig das unter dem Laufrade befindliche Wasser einen Gegendruck von unten nach oben ausübt. Kommt dann der Laufradkanal unter einen offenen Leitkanal, so wird keineswegs die Wasserbewegung im ersteren sofort wieder die anfängliche werden, vielmehr steht zu erwarten, dass die Durchflussbewegung in allen rotirenden Kanälen unter fortwährenden Wirbelbildungen und durchaus nicht in derjenigen Weise erfolgt, wie es bei der Berechnung der Turbine vorausgesetzt wurde*).

Die bei der Aufstellung mit Saugrohr (Fig. 50 S. 184) am Fusse des Saugrohres angebrachte Ringschütze *PP* kann bekanntlich zu dem angegebenen Zwecke nicht verwendet werden; das Heben und Senken derselben, welches gewöhnlich durch einen Regulator erfolgt, dient nur dazu, Unregelmässigkeiten in der Umdrehungsbewegung des Laufrades auszugleichen. Diese Art der Regulirung besteht ausschliesslich in der Erzeugung fortwährender Störungen des Beharrungszustandes. Bei der Anwendung des Saugrohres kann der regelmässige Gang der Turbine auch durch Eindringen von Luft in das Innere der Saugrohres gestört werden.

Einige Erfolge hat man durch Anwendung von Doppelturbinen erzielt. Der äussere Radkranz wird für die Minimalwassermenge berechnet, der innere für die Differenz der grössten und kleinsten

*) Taucht das Laufrad nicht tiefer in das Unterwasser, als höchstens bis zum Spalt, so hat man eine Verbesserung mit einigem Erfolg dadurch erzielt, dass man das Innere der luftdicht verschlossenen Leitkanäle durch enge Rohrleitung mit der äusseren Atmosphäre in Verbindung setzte. Die verdeckten Kanäle waren dann nicht mit todtem Wasser, sondern mit Luft gefüllt. Schröter, »Die Jonvalturbinen in Göggingen«. Zeitschrift des Ver. d. Ing., Bd. 30, 1886, S. 782.

Wassermenge; nur der innere Radkranz ist mit Schützenvorrichtung versehen, die in Gebrauch kommt, wenn die vorhandene Wassermenge zwischen dem Maximum und Minimum liegt, in diesem Falle treten die besprochenen Uebelstände nur beim inneren Rade auf und erscheinen daher weniger fühlbar. Man ist nach Allen im Laufe der Zeit dazu gelangt, die Vollturbinen nur in Anwendung zu bringen, wenn eine unveränderliche Wassermenge zur Verfügung steht und die durchaus sachgemässe Regel zu verfolgen, bei veränderlicher Aufschlagwassermenge, welcher Fall der häufigere ist, das Laufrad in freier Luft gehen zu lassen, das Rad also über dem Unterwasserspiegel aufzustellen. Man gelangt dadurch auf die Partialturbine; dass bei einer solchen, insbesondere wenn im Laufradkanale das Wasser frei auf der Schaufel herabströmt, die Regulirung durch Verdecken einzelner Leitkanäle nicht die vorhin besprochene schädliche Wirkung haben kann, ist einleuchtend, da die verdeckten Leitkanäle nicht mit todtem Wasser, sondern mit Luft gefüllt sind. Die Erfahrungen zeigen denn auch, dass solche Turbinen veränderliche Wassermengen gleich gut verwerthen.

B. Axialpartialturbine.

Girard-Turbine.

§ 19. Der Leitapparat überdeckt das Laufrad vollständig. Stossfreier Eintritt. Winkelverhältnisse. Berechnung einer neuen Turbine.

Die Untersuchungen lassen sich hier am übersichtlichsten durchführen, wenn man sich gleich von vornherein die Aufgabe vorlegt, eine neue Turbine zu berechnen und das Gefälle h sich gegeben denkt, welches aber hier, da das Laufrad in freier Luft läuft, gemessen ist vom Oberwasserspiegel bis zur unteren Ebene des Laufrades. Ist der Unterwasserspiegel veränderlich, so ist die Turbine so aufgestellt zu denken, dass die untere Laufradebene immer noch um eine gewisse, wenn auch sehr kleine Höhe (das Freihängen) über den höchsten Unterwasserstand zu liegen kommt, damit auf keinen Fall Tauchen eintritt.

Als gegeben wird weiterhin angesehen das Maximum der Aufschlagwassermenge V, und für dieses wird die Turbine unter der Voraussetzung berechnet, dass alle Leitkanäle geöffnet sind.

Es gelten dann auch im Allgemeinen die Formeln, welche oben für die Henschel-Jonval-Turbine entwickelt worden sind; der Unterschied besteht hier zunächst nur darin, dass der Druck a_1 im Spalte, wie derjenige a_2 unter dem Laufrade und überall im Innern desselben mit dem Atmosphärendruck a_0 identisch ist. Es soll also hier der Fall vorliegen, welcher oben auf S. 150 als Fall 2 beim Vergleiche der relativen und absoluten Bahn des Wasserstrahles besprochen worden ist.

Fig. 54.

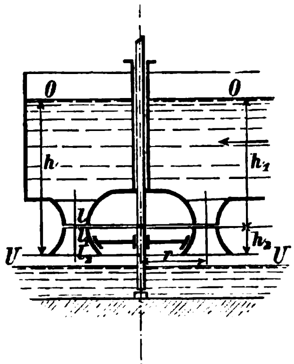
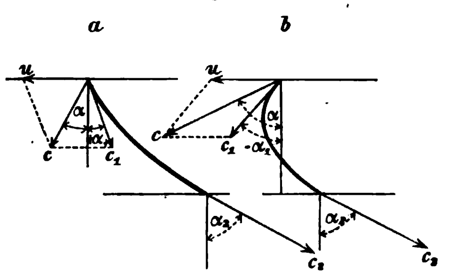


Fig. 54 zeigt die Skizze einer Girard-Turbine; ob nun diese bei den gegebenen Werthen von h und V wirklich auszuführen ist, d. h. der Leitapparat sich über das ganze Laufrad erstrecken darf, stellt sich erst im Laufe der Rechnungen heraus, wenn aus der zu Grunde gelegten Annahme von Fig. 54 unausführbare Verhältnisse hervortreten. Die Berechnung einer Girard-Turbine ist nicht so einfach wie die der Henschel-Jonval-Turbine; man muss hier vielmehr vorerst gewisse Näherungsrechnungen durchführen, bevor man die endgültige Bestimmung der Hauptdimensionen vornehmen kann. Der wesentlichste Unterschied beider Turbinengattungen liegt in der Verschiedenheit der Schaufelwinkel und der erforderlichen Schaufelform.

Fig. 55.



Legen wir zunächst die bisher vorgeführte Schaufelform Fig. 55a den Betrachtungen zu Grunde.

An Stelle der Gleichungen (12) und (13) S. 183 treten hier, wegen $a_1 = a_2 = a_0$, die Formeln

$$2gh_1 = (1 + \zeta_1)c^2 \tag{43}$$

und

$$2gh_2 = (1 + \zeta_2)c_2{}^2 - c_1{}^2, \tag{44}$$

aus denen durch Addition (Fig. 54) folgt:

$$2gh = (1+\zeta_1)c^2 + (1+\zeta_2)c_2^2 - c_1^2. \qquad (45)$$

Ist wie früher F die Summe der normalen Querschnitte aller Leitradkanäle, so ist $V = Fc$ und, da nach der ersten der Gleichungen (4) S. 179 näherungsweise

$$F = 2rl\pi \cos \alpha$$

gesetzt werden kann, wo l die radiale Leitradkanalweite ist, so folgt

$$rl = \frac{V}{2\pi \cos \alpha}. \qquad (46)$$

Nun ist in Gleichung (43) der Werth von h_1 nur wenig vom Gesammtgefälle h verschieden, man kann daher mit $\zeta_1 = 0{,}125$ als erste Annäherung

$$c = \sqrt{\frac{2gh}{1+\zeta_1}} \qquad (47)$$

berechnen und findet dann nach Gleichung (46) den Werth rl und daraus, wenn man l wählt oder aus der Beziehung

$$l = 0{,}15r \text{ bis } 0{,}35r \qquad (48)$$

bestimmt, den mittleren Turbinenradius r. Erscheint dieser für die praktische Ausführung gross genug, so geht man in der Berechnung der Turbine weiter vor unter der Voraussetzung, dass der Leitapparat das ganze Laufrad überdeckt. Man erkennt aus Gleichung (46) und Gleichung (47), dass im Allgemeinen dieser Fall bei grösserer Wassermenge V und kleinerem Gefälle h eintreten wird. Bei geringerer Wassermenge V und grösserem Gefälle h kann sich dagegen ein so kleiner Werth von r ergeben, dass man zu der zweiten Anordnung sich entschliessen muss, den Leitapparat nur über einen Theil des Laufrades hinzuführen, ein Fall, der unten behandelt werden soll. Hier mag zuerst angenommen werden, dass sich die erstere Anordnung als ausführbar herausgestellt habe.

Aus der Zerlegung der Geschwindigkeiten nach Fig. 55a ergiebt sich:

$$c = \frac{u \cos \alpha_1}{\sin(\alpha + \alpha_1)},$$

und wenn man diese Gleichung mit Gleichung (17a) S. 186 verbindet:

$$\frac{c^2}{2g} = \frac{\eta_m h \cos \alpha_1}{2 \sin \alpha \sin (\alpha + \alpha_1)};$$

hierauf aus der Verbindung mit Gleichung (43) nach einfacher Reduction:

$$\frac{2 \sin \alpha \sin (\alpha + \alpha_1)}{\cos \alpha_1} = \frac{(1 + \zeta_1) \eta_m h}{h_1},$$

und dann nach weiterer leicht zu übersehender Umformung:

$$\frac{\cos (2\alpha + \alpha_1)}{\cos \alpha_1} = 1 - (1 + \zeta_1) \eta_m \frac{h}{h_1}. \tag{49}$$

Der Werth η_m stellt hierbei den hydraulischen Wirkungsgrad beim besten Gange dar.

Die nähere Betrachtung des zweiten Gliedes der rechten Seite der vorstehenden Gleichung zeigt nun aber, dass dasselbe nur wenig von der Einheit abweicht. Setzt man zunächst näherungsweise das Glied in der That gleich der Einheit, so folgt:

$$\cos (2\alpha + \alpha_1) = 0$$

oder:

$$2\alpha + \alpha_1 = 90^\circ$$

und damit:

$$\alpha + \alpha_1 = 90^\circ - \alpha \quad \text{und} \quad \alpha_1 = 90^\circ - 2\alpha. \tag{50}$$

Man erkennt hieraus, dass nach Fig. 55*a* unter den angenommenen Voraussetzungen ($a_1 = a_0$) die Richtung der Austrittsgeschwindigkeit c den Winkel zwischen c_1 und u halbiren soll, das aus c_1 und u construirte Parallelogramm demnach ein Rhombus sein soll. Es folgt daraus:

$$c_1 = u \quad \text{und} \quad c = 2u \sin \alpha. \tag{51}$$

Nun wird und soll aber der Winkel α jederzeit so gross wie möglich gewählt werden, daher folgt aus Gleichung (50) der Winkel α_1 negativ und damit eine Schaufelform, wie Fig. 55*b* andeutet und wie sie auch bei der Partialturbine aus den angegebenen Gründen allgemein in Anwendung kommt.

Dividirt man Gleichung (44) durch Gleichung (43), so folgt

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{(1+\zeta_2)c_2{}^2 - c_1{}^2}{(1+\zeta_1)c^2}.$$

Nun wird man hier zur Erreichung des besten Ganges das Wasser mit möglichst geringer absoluter Geschwindigkeit aus dem Laufrade treten lassen, was man erreicht, wenn man, wie bei der Henschel-Jonval-Turbine besprochen wurde, $c_2 \sin \alpha_2 = u$ und den Winkel α_2 möglichst gross voraussetzt. Benutzt man den angegebenen Werth von c_2, sowie die Werthe c_1 und c der Gleichungen (51) in vorstehendem Ausdrucke, so ergiebt sich nach einigen einfachen Umformungen:

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{\zeta_2 + \cos^2 \alpha_2}{4(1+\zeta_1)\sin^2 \alpha \sin^2 \alpha_2}, \tag{52}$$

ein Verhältniss, das mit λ bezeichnet werden mag und sich nun leicht berechnen lässt. Aus $h = h_1 + h_2$ findet man damit die Laufradhöhe:

$$h_2 = \frac{\lambda}{1+\lambda} h, \tag{53}$$

wodurch nun auch die Tiefe des Spaltes unter dem Oberwasserspiegel $h_1 = h - h_2$ ermittelt ist.

Mit der bekannten Höhe h_2 und den Winkeln α_1 und α_2 kann man jetzt nach Art von Fig. 55*b* eine Skizze der Laufradschaufel, entsprechend der Lage auf dem Cylindermantel vom mittleren Radius r zeichnen, wobei nur zu berücksichtigen ist, dass die Schaufel nicht zu tief und sackförmig ausfällt, damit an der Stelle der stärksten Krümmung nicht etwa Wasserwirbel zu befürchten stehen. Zweckmässig ist es, dabei zugleich nach den Angaben auf S. 150 zu der angenommenen Schaufelcurve die absolute Bahn des Wasserfadens zu construiren. Treten hierbei Schwierigkeiten auf, was im Besonderen zu erwarten steht, wenn die Radhöhe h_2 klein ist, so kann man diese ohne Nachtheil anders wählen, als sie sich nach Gleichung (53) herausgestellt hat. Die Bestimmung einer zweckmässigen Radhöhe und einer guten Schaufelform macht die vorstehende, vorläufige Rechnung erforderlich.

Hat man sich jetzt für eine bestimmte Radhöhe h_2 entschieden, so beginnt nun erst die eigentliche Berechnung der Turbine.

Man bestimmt $h_1 = h - h_2$ und wählt die Winkel α und α_2 und zwar $\alpha = 60^\circ$ bis 65° und $\alpha_2 = 65^\circ$ bis 75°. Die Widerstandscoefficienten ζ_1 und ζ_2 wählt man bei der vorliegenden Turbinengattung der Partialturbine mit offener Turbinenkammer $\zeta_1 = \zeta_2 = 0{,}10$ und geht zu einer genaueren Bestimmung des Winkels α_1 auf Gleichung (49) zurück; aus derselben findet sich nach einfacher Umformung

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{(1 + \zeta_1)\eta_m}{\sin 2\alpha} \cdot \frac{h}{h_1} - \operatorname{tg} \alpha, \tag{54}$$

wobei man mit hinreichender Sicherheit $\eta_m = 0{,}80$ bis $0{,}85$ setzen kann. Der Winkel α_1 ergiebt sich hierbei negativ und im Allgemeinen von dem Werthe $\alpha_1 = 90^\circ - 2\alpha$ wenig abweichend.

Aus Gleichung (43) folgt nun:

$$c = \sqrt{\frac{2gh_1}{1 + \zeta_1}} \tag{55}$$

und dann:

$$c_1 = \frac{c \cos \alpha}{\cos \alpha_1} \quad \text{und} \quad u = \frac{c \cos \alpha_1}{\sin (\alpha + \alpha_1)}, \tag{56}$$

dabei ist natürlich α_1 negativ einzusetzen. Nun folgt aus Gleichung (44):

$$c_2 = \sqrt{\frac{2gh_2 + c_1{}^2}{1 + \zeta_2}}, \tag{57}$$

wobei sich gewöhnlich c_2 nur wenig grösser als c_1 herausstellt; meist hat man kurzweg $c_2 = c_1$ angenommen. (Vergl. S. 150.)

Aus der Beziehung:

$$V = Fc = F_1 c_1 = F_2 c_2$$

berechnen sich jetzt die Summen der Strahlquerschnitte:

$$F = \frac{V}{c}, \quad F_1 = \frac{V}{c_1}, \quad F_2 = \frac{V}{c_2}, \tag{58}$$

wobei man an der Voraussetzung festhält, dass das Leitrad bei der Maximalwassermenge V vollständig vom durchströmenden Wasser gefüllt ist. Allerdings wird auch stillschweigend angenommen, dass im Innern des Laufrades an allen Stellen der atmosphärische Druck vorliegt, was entweder eine Aenderung der normalen Kanalquerschnitte voraussetzt, wie es auf S. 151 (Fall 2) besprochen wurde oder in einer Art erreicht werden kann, die sogleich näher erläutert werden soll.

Aus Gleichung (3) S. 179 findet man nach der dort angegebenen Bezeichnung die Summe F der Durchflussquerschnitte aller Leitkanäle oder, was hier das Gleiche ist, die Summe aller Strahlquerschnitte:

$$F = \left(2 r \pi \cos\alpha - z\sigma - \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_1} z_1 \sigma_1\right) l = \frac{V}{c}. \tag{59}$$

Hierzu tritt die Gleichung (1) für die Summe F_1 aller Kanalquerschnitte im Laufrade an der Eintrittsstelle:

$$F_1 = (2 r \pi \cos\alpha_1 - z_1 \sigma_1) l_1 .$$

Dieser Gesammtquerschnitt ist aber bei der Partialturbine nicht identisch mit dem Gesammtquerschnitt aller Wasserstrahlen, wie er sich nach der Gleichung (58) aus der Beziehung $V = F_1 c_1$ herausstellte. Der letztere Werth fällt nämlich wegen der Einwirkung der Schaufeldicken und weil l_1 wenig grösser als l gewählt werden muss, an sich schon etwas kleiner als der gesammte Kanalquerschnitt aus; der Strahl soll auch sonst schon an der Eintrittsstelle den Kanal nicht vollständig füllen, damit bereits beim Eintritte atmosphärischer Druck vorliegt, also beim Uebergange keine Druckänderungen auftreten.

Wir schreiben daher:

$$F_1 = \varepsilon_1 (2 r \pi \cos\alpha_1 - z_1 \sigma_1) l_1 = \frac{V}{c_1} \tag{60}$$

und verstehen unter ε_1 einen echten Bruch, der als »Füllungscoefficient« bezeichnet werden mag und der im Mittel $\varepsilon_1 = 0{,}90$ gesetzt werden kann.

Analog möge gesetzt werden an Stelle von Gleichung (2) S. 178

$$F_2 = \varepsilon_2 (2 r \pi \cos\alpha_2 - z_1 \sigma_1) l_2 = \frac{V}{c_2}, \tag{61}$$

wobei ε_2 den Füllungsgrad an der Austrittsstelle des Laufrades vorstellt und gegen früher nun die Werthe F_1 und F_2 die Strahlquerschnitte und nicht die Kanalquerschnitte bezeichnen.

Die Gleichungen (59) und (60) sind es, welche zur Berechnung der Hauptdimensionen der Turbine zu benutzen sind.

Als gegeben sind anzusehen die Grössen F, F_1 und F_2 nach den Gleichungen (58), ferner die Winkel α, α_1 und α_2, sowie die gewählten Schaufeldicken σ und σ_1 und der Füllungscoefficient ε_1.

In Gleichung (60) hat man daher drei Unbekannte: r, l_1 und die Schaufelzahl x_1, die nun derart zu wählen sind, dass sie der Gleichung Genüge leisten und wobei man etwa

$$l_1 = 0{,}15\,r \text{ bis } 0{,}35\,r$$

annehmen kann. Glaubt man durch mehrmaliges Probiren auf passende Werthe gekommen zu sein, so substituirt man dieselben in Gleichung (59), setzt dabei l um einige Millimeter kleiner als l_1 ein und bestimmt aus $x\sigma$ die Schaufelzahl im Leitapparate, wobei man unter Umständen sich veranlasst sehen kann, noch einmal auf Gleichung (60) unter Aenderung einzelner Grössen zurückzugehen.

Zuletzt wählt man den Füllungscoefficienten ε_2 (mit $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$) und berechnet mit Hülfe von Gleichung (61) die radiale Weite l_2 des Laufradkanales an der Austrittsstelle. Man wird hier darauf bedacht sein müssen, dass nicht eine zu geringe Anzahl von Radschaufeln x und x_1 hervortritt, wobei man von der Annahme ausgehen kann, dass die normale Entfernung der Schaufelmitten an der Eintrittsstelle des Laufrades etwa 40 bis 85 mm betragen soll.

Man erkennt, wie schon bemerkt wurde, dass die Berechnung einer Girard-Turbine umständlicher, als die der Henschel-Jonval-Turbine ist und gewisse Erfahrungen und Kenntniss guter Muster voraussetzt.

Die radiale Erweiterung des Laufrades von l_1 auf l_2 (Fig. 54 S. 202), von oben nach unten hin, fällt nach der vorstehenden Rechnungsart ziemlich gross aus, wesentlich grösser als die Näherungsformel Gleichung (55) zunächst ergiebt; man kann daher sicher sein, dass ein freies Herabströmen des Wasserstrahles auf der concaven Fläche der Laufradschaufel erfolgt. In Fig. 54 ist angenommen worden, dass von der verticalen Mittellinie vom Ende des mittleren Radius aus die Erweiterung von l_1 auf l_2 nach beiden Seiten hin in gleicher Weise stattfindet; doch findet man in neuerer Zeit Ausführungen, bei denen die Erweiterung nach aussen grösser als nach innen hin angenommen wird, also gewissermassen der mittlere Turbinenradius in der Austrittsebene des Laufrades etwas grösser erscheint, als in der Eintrittsebene.

§ 20. Beurtheilung einer bestehenden Girard-Turbine.

Die grosse Verbreitung, welche die axialen Partialturbinen in neuerer Zeit gewonnen haben, lässt es gerechtfertigt erscheinen, die im Vorstehenden entwickelten Sätze an einem besonderen Beispiele zu verwerthen und etwas weiter zu verfolgen.

Auf der Fürstlich Bismarck'schen Herrschaft Varzin wurden im Jahre 1877 in der dortigen Campmühle von der Gräflich Stolberg'schen Maschinenfabrik in Magdeburg zwei Girard-Turbinen von gleicher Bauart aufgestellt, welche von dem hervorragenden Turbinenconstructeur Ed. Haenel entworfen und ausgeführt worden waren.

Beide Turbinen sind in ihrer Ausführung musterhaft, und eine kurze Besprechung derselben ist umsomehr geboten, als mit einer der Turbinen vor der Uebernahme eine sorgfältige technische Prüfung vorgenommen wurde*). Jede der beiden Turbinen ist berechnet und con-

*) Ed. Haenel, »Ueber die Girard-Turbine der Campmühle auf der Fürstlich Bismarck'schen Herrschaft Varzin«. Civilingenieur, Bd. 24, 1878, S. 101.

Die Abhandlung giebt eine vollständige Beschreibung der ganzen Anlage und der Turbinen. Die eine der Turbinen wurde von dem Verfasser des vorliegenden Buches in den ersten Tagen des November 1877 einer möglichst genauen Prüfung mit Hülfe des Bremsdynamometers bei voller und bei halber Beaufschlagung (bez. bei rund 200 und 100 Pferdestärken) unterworfen. Die Wassermessungen fanden mit Hülfe eines, für die vorliegenden Verhältnisse besonders justirten Woltmann'schen Flügels statt. Die Versuche gingen glatt und ohne Störung von statten; die Bremsscheibe hatte einen Durchmesser von 2,5 m und eine Breite von 0,400 m; die Länge des Bremshebelarmes betrug 4,240 m; das Hebelende drückte auf die Brücke einer Decimalwage. Die Kühlung der Bremsbacken musste durch zwei Handfeuerspritzen erfolgen; die Bremsscheibe sass auf der horizontalen Vorgelegwelle, welche im Verhältniss der Zähnezahl des Vorgeleges (136 : 54) mehr Umdrehungen als die Turbine machte. Der aus der Zapfenreibung der horizontalen Welle und der Zahnreibung der Vorgelegeräder hervorgehende Arbeitsverlust musste natürlich der Turbine zu Gute gerechnet werden.

Die im Vorstehenden erwähnte Abhandlung von Haenel enthält im Anhange den Bericht, welcher über die Versuchsergebnisse erstattet wurde, vollständig abgedruckt; da derselbe ursprünglich nicht für die Veröffentlichung bestimmt war, so wurden Nebenfragen nicht weiter berührt, insbesondere nicht ausführlicher die Art und Weise besprochen, nach welcher die Justirung des benutzten Woltmann'schen Flügels erfolgt war.

C. Bach glaubt in seinem Werke »Die Wasserräder«, Stuttgart 1886, S. 246, Zweifel an der Zuverlässigkeit des hohen Wirkungsgrades der Turbinen aussprechen zu dürfen, die aber unberechtigt sind; insbesondere sind auch dessen Bemerkungen über die Unzulässigkeit der Bestimmung der Flügelconstanten unhaltbar, da hierbei gar nicht das von ihm vorausgesetzte Verfahren befolgt worden ist.

Es wurde dabei die schon vor einer langen Reihe von Jahren von Weisbach angewandte Methode benutzt. Man lässt Wasser durch ein langes struirt für eine Maximalwassermenge $V = 5$ cbm in der Secunde und ein Gefälle $h = 4$ m, gemessen vom Oberwasserspiegel bis zur unteren Laufradebene.

Die Schaufelwinkel betragen $\alpha = 65^\circ$, $\alpha_1 = -40^\circ$ und $\alpha_2 = 70^\circ$, es ist also hier der Beziehung $\alpha_1 = 90^\circ - 2\alpha$ Folge geleistet worden.

Die Widerstandscoefficienten ζ_1 und ζ_2 sind oben bei der Berechnung der Vollturbine zu 0,125 angenommen worden, bei der Partialturbine ist der Werth derselben, wie bereits erwähnt wurde, zweifellos etwas geringer anzunehmen; nach Weisbach würde deren Werth zwischen 0,05 bis 0,1 liegen; bei den folgenden Rechnungen mag $\zeta_1 = \zeta_2 = 0{,}1$ angenommen werden, obgleich dieser Werth vielleicht noch zu reichlich bemessen ist; damit würde sich nach den Gleichungen (52) und (53) die Höhe des Laufrades zu $h_2 = 0{,}255$ m herausstellen; der Constructeur hat aber, wohl mit Rücksicht auf die Schaufelform, was gestattet ist, $h_2 = 0{,}350$ m gewählt.

Damit wird $h_1 = 3{,}650$ m*) und die Gleichungen (56) und (57) ergeben die Durchflussgeschwindigkeiten:

$$c = 8{,}069, \quad c_1 = 4{,}451 \quad \text{und} \quad c_2 = 4{,}925 \text{ m},$$

woraus dann nach den Gleichungen (58) folgende Strahlquerschnittssummen sich herausstellen:

$$F = 0{,}6197; \quad F_1 = 1{,}1232; \quad F_2 = 1{,}0152 \text{ qm}.$$

hölzernes Gerinne strömen, in welchem man durch verschiedene Neigungen des Gerinnes und durch Verstellen einer Schütze an der Eintrittsmündung verschiedene Durchflussgeschwindigkeiten herstellen kann; die Wassermessung geschieht durch ein Aichgefäss, in welches sich das Wasser aus dem Gerinne ergiesst. In einem etwa in der Mitte der Gerinnlänge liegenden Querschnitte, dessen Dimensionen sich genau ermitteln lassen, hält man den Flügel ein, aber nicht etwa, wie Bach annimmt, nur in der Mitte der Gerinnbreite. In dem hydraulischen Observatorium für die Voruntersuchungen zu den Varziner Versuchen betrug die Gerinnbreite 0,5 m. Der Flügel wurde erst in der Mitte eingehalten, dann langsam nach der einen Bordseite, hierauf ebenso nach der andern Bordseite und zuletzt wieder nach der Mitte geschoben und an jeder der vier Stellen während ein Viertel der Zeitdauer der Beobachtung festgehalten. Die Weisbach'sche Methode der Justirung des Flügels in fliessendem Wasser entspricht viel vollkommener den Verhältnissen, wie sie wirklich vorliegen, als die sonst gebräuchliche Methode, den Flügel in ruhendem Wasser mit bestimmter Geschwindigkeit fortzubewegen. Stoss und Widerstand des Wassers sind theoretisch allerdings nach derselben Formel zu beurtheilen, in Wirklichkeit liegt aber nach den Versuchen von Dubuat und Thibault ein Unterschied vor.

*) Mit diesem Werthe von h_1 und für $\eta_m = 0{,}80$ würde Gleichung (54) den Winkel α_1 genauer zu $-41\frac{1}{2}^\circ$ ergeben.

Die Turbine hat einen mittleren Radius $r = 1{,}360$ m (Fig. 54 S. 202), der Leitapparat eine radiale Weite $l = 0{,}206$ m, das Laufrad oben die Weite $l_1 = 0{,}216$ m und unten $l_2 = 0{,}650$ m. Die Zahl der Leitschaufeln ist $z = 64$ und ihre Dicke beträgt $\sigma = 5$ mm. Die Zahl der Radschaufeln beträgt $z_1 = 70$ bei einer Schaufelstärke $\sigma_1 = 8$ mm, damit wird $z\sigma = 0{,}320$ und $z_1\sigma_1 = 0{,}560$, und wenn die gegebenen Werthe in Gleichung (59) mit Ausnahme von l benutzt werden, so berechnet sich die radiale Weite des Leitapparates $l = 0{,}208$ m, während der Constructeur $l = 0{,}206$ m angenommen hat. Diese Controlrechnung zeigt, mit welcher Sorgfalt die Turbine berechnet worden ist.

Mit den Constructionswerthen ergiebt sich jetzt nach den Gleichungen (60) und (61) der Füllungscoefficient für den Eintritt $\varepsilon_1 = 0{,}87$ und derjenige für den Austritt $\varepsilon_2 = 0{,}68$, ein Beweis, dass in den Laufradkanälen zweifellos überall atmosphärischer Druck vorliegen muss.

Die mittlere Umfangsgeschwindigkeit des Laufrades ist nach Gleichung (51) $u = c_1 = 4{,}451$ und sonach die Umdrehungszahl n in der Minute

$$n = \frac{30u}{\pi r} = 31{,}25,$$

wofür im Mittel $n = 30$ gesetzt wurde.

Bei Turbinen, wie die vorstehende, bei welcher das Wasser direct aus der weiten Turbinenkammer in den Leitapparat strömt, ist die Arbeit L_t, welche der Turbine in der Secunde, in Meterkilogramm gemessen, geboten wird:

$$L_t = \frac{Mc^2}{2} + Mgh_2 = Mgh\left(\frac{c^2}{2gh} + \frac{h_2}{h}\right).$$

Nun ist die disponible Arbeit, die mit L_m bezeichnet werde, $L_m = Mgh = Vh\gamma$, es folgt daher das Verhältniss $L_t : L_m$, welches mit η_1 bezeichnet und der W i r k u n g s g r a d d e r Z u l e i t u n g genannt werden mag:

$$\eta_1 = \frac{c^2}{2gh} + \frac{h_2}{h}. \tag{62}$$

Beim Durchgange des Wassers durch das Laufrad verrichtet dasselbe eine Arbeit, welche durch Gleichung (119) S. 95, nämlich

$$L = Mu(c_2 \sin \alpha_2 - c_1 \sin \alpha_1)$$

gegeben wird. Auf diese Formel muss zurückgegangen werden, weil durch Einführung der Schaufeldicken die Beziehung $c_2 \sin \alpha_2 = u$

nicht mehr vollständig erfüllt wird. Die Gleichung schreibt sich auch:

$$L = Mgh \cdot \frac{u}{gh}(c_2 \sin \alpha_2 - c_1 \sin \alpha_1).$$

Bezeichnet man das Verhältniss $L : L_m$ mit η, welches den hydraulischen Wirkungsgrad der Turbine darstellt, so folgt:

$$\eta = \frac{u}{gh}(c_2 \sin \alpha_2 - c_1 \sin \alpha_1). \qquad (63)$$

Vergleicht man aber die Arbeit L der Turbine mit derjenigen L_t, welche ihr geboten wird, und ersetzt man $L : L_t$ durch η_2, so erscheint der eigentliche Wirkungsgrad der Turbine; die berechneten Wirkungsgrade stehen daher in der Beziehung

$$\eta = \eta_1 \eta_2.$$

Ist endlich L_e die effective Arbeit, welche an die Transmission abgegeben wird, so ist der effective Wirkungsgrad der ganzen Anlage:

$$\eta_e = \frac{L_e}{L_m},$$

und dieser ist es, nach welchem in der Praxis ausschliesslich gefragt wird. Bezeichnet man das Verhältniss $L_e : L$ mit η_3, so folgt

$$\eta_e = \eta_1 \eta_2 \eta_3. \qquad (64)$$

Die Zerlegung hat den Vortheil, dass man erkennt, welchen Antheil der Leitapparat, die Turbine selbst und die Zapfenreibung an der Turbinenwelle, jeder Umstand für sich, an der Gesammtwirkung hat.

Für die Varziner Turbine geben die oben aufgeführten Zahlenwerthe nach Gleichung (62) $\eta_1 = 0{,}917$ und nach Gleichung (63) $\eta = \eta_1 \eta_2 = 0{,}850$ als hydraulischen Wirkungsgrad der Turbine, und damit folgt $\eta_2 = 0{,}927$. Aus den Bremsversuchen und den Wassermessungen ging der effective Wirkungsgrad der ganzen Anlage zu $\eta_e = 0{,}800$ hervor, wonach $\eta_3 = 0{,}941$ wäre.

Der hohe Wirkungsgrad dieser Anlage im Betrage von 0,80 entspringt einmal dem Umstande, dass hier eine vorzüglich construirte Turbine, dann aber auch dem Umstande, dass eine Turbine von grosser Arbeitsstärke vorlag und bei einer solchen der Arbeitsverlust, welcher der Zapfenreibung entspringt, procentual geringer ausfällt, als bei Turbinen von geringerer Leistung.

Uebrigens zeigten die Versuche fast genau den gleichen Wirkungsgrad bei voller und bei halber Beaufschlagung, also den grossen Vortheil, welchen in dieser Beziehung die Partialturbinen bieten. Die Verhältnisse gestatteten leider nicht, die Versuche auf andere Umlaufsgeschwindigkeiten, als die vortheilhafteste, auszudehnen, dagegen wurden noch einige Bremsversuche unter Rückstau ausgeführt, bei welchen also das Laufrad ins Unterwasser eintauchte. Hier zeigte sich, wie zu erwarten war, ein Zurückgehen der Arbeitsstärke der Turbine mit Vergrösserung der Tauchung. Ein Festbremsen der Turbine und die Beobachtung des zugehörigen Drehmomentes unterblieb wegen der Besorgniss der Ueberlastung einzelner Constructionstheile; dagegen wurde am Schlusse der Versuche das Vorgelegerad ausgerückt und der Leerlauf der Turbine beobachtet. Bei voller Beaufschlagung machte dieselbe hierbei 65 und bei halber Beaufschlagung 66 Umdrehungen in der Minute, also nahezu doppelt so viel, wie beim besten Gange. Bei Vollturbinen lässt sich, wie oben bei der Henschel-Jonval-Turbine gezeigt wurde, dieser Satz theoretisch begründen, bei Partialturbinen aber nicht; bei diesen ist es überhaupt unmöglich, die Arbeitsverhältnisse bei anderem als bei stossfreiem Eintritte auf theoretischem Wege zu verfolgen, weil hier, da der Wasserstrahl den Eintrittsquerschnitt im Laufrade nicht ausfüllt, der Strahl zersplittert und dann der aus dem Stosse hervorgehende Arbeitsverlust nicht nach dem Borda-Carnot'schen Satze bestimmt werden kann. Dass die Varziner Turbine bezüglich der Umdrehungen beim Leergange sich trotzdem nahezu wie die Vollturbine verhielt, dürfte dem Umstande zuzuschreiben sein, dass der Füllungscoefficient ε_1 an der Eintrittsstelle sich nach obigen Rechnungen nur wenig verschieden von der Einheit herausstellte.

§ 21. Der Leitapparat überdeckt nur einen Theil des Laufrades. Bemerkungen über die im Vorstehenden behandelten Turbinen im Allgemeinen.

Bei Behandlung der Henschel-Jonval-Turbine und der Girard-Turbine wurde im Vorstehenden nach den Figuren 48, 50 und 54 vorausgesetzt, dass der über dem Leitrade befindliche Raum, die »Turbinenkammer«, oben offen sei und das Wasser aus dem

Oberkanal direct in die Kammer einströme. Bei grösseren Gefällen bildet die Turbinenkammer ein geschlossenes Gehäuse, welchem das Wasser vom Oberkanale her durch ein »Einfallrohr« zugeführt wird. In diesem Falle gelten die abgeleiteten Formeln gleichfalls, nur ist dann bei der Berechnung der Ausflussgeschwindigkeit c aus den Leitkanälen auf die neu hinzutretenden hydraulischen Widerstände im Einlaufe Rücksicht zu nehmen, und der mit ζ_1 bezeichnete Widerstandscoefficient ist in entsprechendem Maasse grösser in Rechnung zu stellen. Ueber die Bestimmung desselben werden unten bei der Betrachtung der Radialturbine in § 33 nähere Angaben gemacht werden.

Ist das gegebene Gefälle h gross und die Wassermenge V, für welche wieder das Maximum vorausgesetzt wird, klein, so stösst man bei Berechnung der Girard-Turbine bei der auf S. 203 angegebenen Voruntersuchung mit der Gleichung (46) unter Umständen auf einen so geringen Werth für den mittleren Radius r der Turbine, dass deren Ausführung unstatthaft erscheint. In diesem Falle wird man die Anordnung treffen, dass der Leitapparat nur einen Theil des Laufrades überdeckt und die Turbine würde sich so verhalten, wie eine Girard-Turbine der oben behandelten Art, bei der aber ein grosser Theil, vielleicht der weitaus grösste Theil aller Leitkanäle bleibend durch Klappen oder Schieber abgeschlossen wäre; man führt dann so viel Leitkanäle aus, als für den Durchfluss des Wassers nothwendig sind und ist in der Wahl des Turbinenhalbmessers r nicht weiter beschränkt; man wählt ihn dann nur mit Berücksichtigung einer vorgeschriebenen oder wünschbaren Umdrehungszahl des Laufrades.

Nach dem oben Vorgeführten unterliegt die Berechnung einer derartigen Turbine keiner weiteren Schwierigkeit, und es soll daher auch nicht weiter auf dieselbe eingegangen werden. Im Uebrigen hat man diese Axialturbine schon früher nur selten und nur für Gefälle bis zu ohngefähr $h = 10$ m ausgeführt; in neuerer Zeit zieht man vor, und zwar mit vollem Rechte, an deren Stelle Radialturbinen mit partieller Beaufschlagung anzuwenden, die später einer näheren Besprechung unterzogen werden sollen.

An dieser Stelle mögen dagegen noch einige Bemerkungen folgen, welche den Unterschied zwischen den axialen Voll- und Partialturbinen etwas weiter beleuchten sollen.

Bei der Vollturbine, Henschel-Jonval, ergab sich die Geschwindigkeit c, mit welcher das Wasser die Leitkanäle verlässt, aus Gleichung (12) S. 183, nämlich:

$$2g(h_1 + a_0 - a_1) = (1 + \zeta_1)c^2.$$

Hier bedeutet h_1 die Tiefe des Spaltes unter dem Oberwasserspiegel und a_1 den Piezometerstand im Spalte. Da a_0 der äussere Atmosphärendruck ist, so bedeutet $(a_1 - a_0)$ den Ueberdruck im Spalte in Wassersäule gemessen. Derselbe findet sich direct durch vorstehende Formel, wenn noch h das ganze Gefälle, in früher angegebener Weise bestimmt, darstellt:

$$a_1 - a_0 = h_1\left[1 - (1 + \zeta_1)\frac{h}{h_1} \cdot \frac{c^2}{2gh}\right]. \qquad (65)$$

Nun fand sich aber für den besten Gang, d. h. für den Eintritt ohne Stoss und für $c_2 \sin \alpha_2 = u$ nach den Darlegungen auf S. 185 die Beziehung:

$$\eta_m = \frac{uc \sin \alpha}{gh}\text{*)},$$

aus welcher sich durch Benutzung der ersten der Gleichungen (16):

$$\frac{c^2}{2gh} = \frac{\eta_m \cos \alpha_1}{2 \sin \alpha \sin (\alpha + \alpha_1)}$$

ergiebt. Gleichung (65) gilt für jeden Werth von c, d. h. für jede Umlaufsgeschwindigkeit u; benutzt man in derselben den vorstehenden Ausdruck, so folgt speciell für den besten Gang:

$$a_1 - a_0 = h_1\left[1 - (1 + \zeta_1)\eta_m \frac{h}{h_1} \cdot \frac{\cos \alpha_1}{2 \sin \alpha \sin (\alpha + \alpha_1)}\right], \qquad (66)$$

woraus sich der Spaltüberdruck für axiale Voll- und Partialturbinen

---

*) Diese schon längst bekannte Gleichung stellt von Reiche in seinem Buche »Die Gesetze des Turbinenbaues«, Leipzig 1877, als ein von ihm aufgefundenes Grundgesetz des »gesammten« Turbinenbaues hin, mit deren Entwickelung »die eigentliche allgemeine (!) Turbinentheorie beendigt sei«. »Zur Beruhigung ängstlicher Gemüther« leitet v. Reiche dieses sein Grundgesetz auch »auf dem bereits ausgetretenen Wege der Wissenschaft« (!) ab (a. a. O. S. 17). Die Gleichung ist aber schon in den Formeln von Combes und Weisbach enthalten und direct von Gustav Schmidt (1860) verwerthet worden (s. oben S. 187). Das v. Reiche'sche Buch weicht allen Schwierigkeiten aus, die uns in der Turbinentheorie entgegentreten.

berechnet; für erstere unter der Voraussetzung, dass der Unterwasserspiegel höchstens bis an den Spalt heranreicht.

Bei den Vollturbinen (Niederdruckturbinen) berechnet sich dieser Ueberdruck bei der gebräuchlichen Wahl der Winkel α und α_1 gewöhnlich von

$$a_1 - a_0 = 0{,}5\, h_1$$

wenig abweichend.

Bei den Partialturbinen ist $a_1 = a_0$, daher der Klammerausdruck der Gleichung (66) Null, woraus die Beziehung hervorgeht, welche bereits oben durch Gleichungen (49) und (54) für den Zusammenhang zwischen den Winkeln α und α_1 abgeleitet worden ist.

Bei der Girard-Turbine füllt der Wasserstrahl den Laufradkanal nicht vollständig aus, was insbesondere auch, wie oben gezeigt wurde, durch starke radiale Erweiterung des Laufrades nach der Austrittsstelle erzielt wird. Um den Strahl von der convexen Seite der nächsten Schaufel abzuziehen, hat man in diesen Stellen auch Schlitze im Laufradmantel angebracht, durch welche atmosphärische Luft ins Innere der Kanäle gelangt.

Wiederholt ist oben darauf hingewiesen worden, dass man die Laufradkanäle auch solcher Art construiren kann, dass selbst bei voller Füllung an allen Stellen derselben der gleiche Druck herrscht, also wenn das Laufrad in freier Luft läuft überall der Atmosphärendruck vorliegt.

Man hat also bei ganz gefülltem Laufradkanale nur dafür zu sorgen, dass in Gleichung (13) S. 183 $a_1 = a_2 = a_0$ ausfällt. Vernachlässigt man die Kanalreibung, setzt man also $\zeta_2 = 0$, was hier annähernd gestattet ist, so giebt die angezogene Gleichung

$$2gh_2 = c_2{}^2 - c_1{}^2,$$

wobei h_2 die Höhe des Laufrades ist. Ist c_x die relative Durchflussgeschwindigkeit durch den Kanalquerschnitt, welcher um x unter der Eintrittsstelle liegt, so folgt ebenso:

$$2gx = c_x{}^2 - c_1{}^2.$$

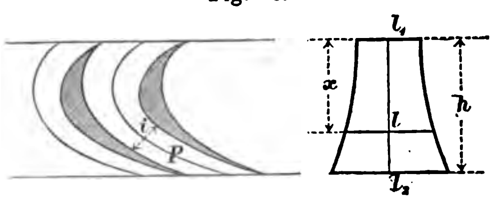
Nun ist aber, da der Kanal gefüllt ist, $F_x c_x = F_1 c_1 = F_2 c_2$ und damit folgt:

$$\left[\left(\frac{F_1}{F_x}\right)^2 - 1\right] c_1{}^2 = 2gx,$$

nach welcher Gleichung sich der normale Kanalquerschnitt F_x für jeden Werth von x berechnen lässt, da der Anfangsquerschnitt F_1 und die relative Eintrittsgeschwindigkeit c_1 bekannt sind. Man sieht, dass F_x mit wachsendem x abnimmt; diese Abnahme ist aber immer nur geringfügig, da die Radhöhe h_2 und damit auch x kleine Werthe sind; der Kanal- und damit auch der Strahlquerschnitt ist also nahezu constant.

Betrachtet man die Kanalaxe P nach ihrem Verlaufe (Fig. 56), sowie das Gesetz der radialen Kanalerweiterung von l_1 auf l_2 als gewählt, so berechnet sich für einen beliebigen Punkt derselben die normale Kanalweite i aus der Beziehung $F_x = il$, und wenn man von P aus nach beiden Seiten hin $\frac{1}{2} i$ aufträgt, so ergiebt sich der Kanalquerschnitt und damit treten zugleich die eigenthümlichen Schaufelquerschnitte hervor, die als Haenel'sche Rückschaufeln bekannt sind*). Ueber die absolute Bahn des Wasserstrahles ist das Nähere bereits auf S. 150 unter Fall 2 besprochen worden.

Fig. 56.



Kapitel II.

Die Axialturbine als Pumpe.

§ 22. Henschel-Jonval-Turbine als Wasserhebungsmaschine. Stossfreier Durchgang des Wassers. Winkelverhältnisse. Wirkungsgrad.

Die axiale Vollturbine zur Wasserförderung zu verwenden scheint schon mehrere Male, aber mit ungünstigem Erfolge, versucht worden zu sein. Wenn hier trotzdem, wenigstens im Allgemeinen, auf die Anordnung eingegangen werden soll, so geschieht es in der Annahme, dass derartige Pumpen doch vielleicht in

---

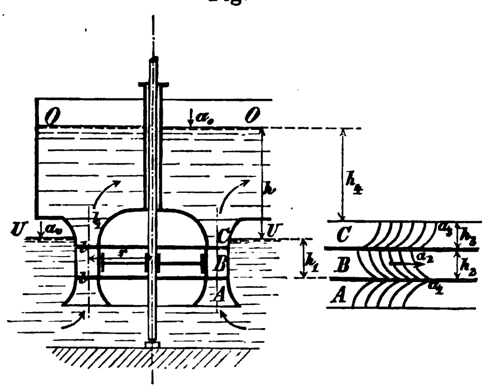
*) Ed. Haenel, »Ueber eine verbesserte Turbinenconstruction«. Zeitschrift des Ver. deutscher Ingenieure. Bd. 5, 1861, p. 163.

B. Lehmann, »Nachtrag zu vorstehender Abhandlung«. Bd. 5, S. 267.

Gebrauch kommen und die vorliegenden Misserfolge zum Theil in unzweckmässiger Ausführung ihren Grund haben; aus theoretischen Gründen muss man schliessen, dass bei geringerer Hubhöhe und bei grossen zu fördernden Wassermengen ein guter Erfolg zu erwarten steht, dann aber liefern auch die folgenden Entwickelungen zugleich die beste Gelegenheit, Grundformeln zu entwickeln, welche bei den weiteren Untersuchungen, die ein anderes Ziel verfolgen, direct Verwendung finden werden und die zugleich die Grundlagen bilden für den Fall, dass man die Henschel-Jonval-Turbine mit einem Diffuser versehen wollte.

Fig. 57 zeigt die Anordnung einer axialen Turbinenpumpe, wie sie den Untersuchungen zu Grunde gelegt werden soll.

Fig. 57



A ist ein festliegender Leitapparat, B das Laufrad und C der Effuser, der hier als Diffuser gezeichnet worden ist. Die Schaufelung geht aus der Figur hervor; das Laufrad dreht sich mit der Umfangsgeschwindigkeit u (der Laufradhalbmesser ist r) nach der Richtung, welche der der gewöhnlichen Turbine entgegengesetzt ist. Das Wasser wird von unten nach oben gefördert; UU ist der Unterwasser- und OO der Oberwasserspiegel, die ganze Förderhöhe h gleich dem Abstande beider. Der Eintrittsspalt (zwischen Leitrad und Laufrad) liege um h_1 unter dem Unterwasserspiegel, die Höhe des Laufrades sei h_2, die des Effusers h_3 und die obere Ebene des letzteren liege um h_4 unter dem Oberwasserspiegel; es ist daher

$$h = h_2 + h_3 + h_4 - h_1. \tag{67}$$

Es sei weiterhin a_0, wie früher, der Atmosphärendruck in Wassersäule, a_1 der Piezometerstand im Eintrittsspalt, a_2 derjenige im Austrittsspalt (zwischen Laufrad und Effuser) und a_3 derjenige beim Austritt aus dem Effuser.

Unter Zugrundelegung der Bezeichnung der Geschwindigkeiten und der Winkel nach Angabe von Fig. 58 gelten sonach folgende Gleichungen:

$$2g(h_1 + a_0 - a_1) = (1 + \zeta_1)c^2, \tag{68}$$

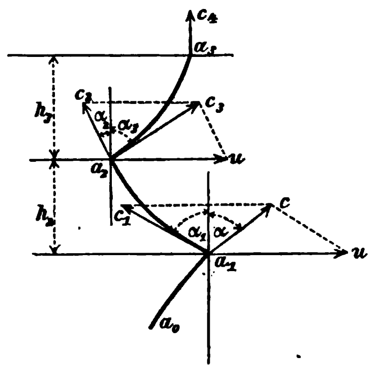
$$2g(a_1 - a_2 - h_2) = (1 + \zeta_2)c_2^2 - c_1^2, \tag{69}$$

$$2g(a_2 - a_3 - h_3) = (1 + \zeta_3)c_4^2 - c_3^2, \tag{70}$$

$$2g(a_3 - h_4 - a_0) = 0.$$

Hierbei sind ζ_1, ζ_2 und ζ_3 die Widerstandscoefficienten beziehentlich für den Leitapparat, das Laufrad und für den Effuser, wobei nur zu beachten ist, dass dieselben für den **Austrittsquerschnitt** der betreffenden Kanäle giltig sind. Bei der Turbinenpumpe sind diese Austrittsquerschnitte für das Laufrad und den Effuser **die grösseren** und daher die numerischen Werthe von ζ_2 und ζ_3 andere als bei der Turbine, wenn solche als Kraftmaschine wirkt.

Fig. 58.



Addirt man die vorstehenden vier Gleichungen, so findet sich mit Rücksicht auf Gleichung (67)

$$-2gh = c^2 + c_2^2 - c_1^2 - c_3^2 + \zeta_1 c^2 + \zeta_2 c_2^2 + (1 + \zeta_3)c_4^2 \tag{71}$$

als Fundamentalgleichung.

Es ist bemerkenswerth, dass man auf dieselbe Gleichung bei der Behandlung der Henschel-Jonval-Turbine gelangt, wenn dieselbe mit einem Diffuser versehen ist, nur mit dem Unterschiede, dass dann das Glied der linken Seite, nämlich $2gh$, mit dem **positiven** statt des negativen Vorzeichens hervortritt.

Es sei fernerhin l die radiale Weite des Laufrades, sowie des Leitrades an der Austrittsstelle und des Effusers an der Eintrittsstelle, sowie l_1 die des letzteren an der Austrittsstelle (Fig. 57), dann berechnen sich **ohne Rücksicht** auf die Schaufeldicken die Summen der Durchflussquerschnitte F, F_1, F_2, F_3 und F_4 bez. an der Austrittsstelle des Leitrades, der Eintritts- und

Austrittsstelle des Laufrades sowie der Ein- und Austrittsstelle des Effusers nach den Formeln:

$$F = 2r\pi l \cos\alpha;\quad F_1 = 2r\pi l \cos\alpha_1;\quad F_2 = 2r\pi l\cos\alpha_2;$$
$$F_3 = 2r\pi l \cos\alpha_3;\quad F_4 = 2r\pi l_1. \tag{72}$$

Die Wassermenge V in Cubikmetern, welche in der Secunde gehoben wird, ist:

$$V = Fc = F_1 c_1 = F_2 c_2 = F_3 c_3 = F_4 c_4, \tag{73}$$

und daher folgt mit den Gleichungen (72) näherungsweise die wichtige Beziehung:

$$\frac{V}{2r\pi l} = c\cos\alpha = c_1\cos\alpha_1 = c_2\cos\alpha_2 = c_3\cos\alpha_3 = \frac{l_1}{l}c_4. \tag{74}$$

Sind daher die Winkel bekannt, so berechnen sich die Durchflussgeschwindigkeiten, wenn nur eine derselben, z. B. c, gegeben ist.

Die Winkel müssen aber dabei unter einander in einer gewissen Beziehung stehen und dürfen nicht sämmtlich willkürlich gewählt werden; diese Beziehung stellt sich leicht auf folgendem Wege heraus.

Aus der in Fig. 58 angedeuteten Zerlegung der Geschwindigkeiten folgt sofort:

$$\frac{c_2}{u} = \frac{\cos\alpha_3}{\sin(\alpha_2+\alpha_3)} \quad \text{und} \quad \frac{c_1}{u} = \frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha+\alpha_1)}, \tag{75}$$

und durch Division:

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{\cos\alpha_3\sin(\alpha+\alpha_1)}{\cos\alpha\sin(\alpha_2+\alpha_3)}. \tag{75a}$$

Andererseits folgt aus Gleichung (74) auch:

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2},$$

und daher durch Gleichsetzen beider Ausdrücke:

$$\frac{\sin(\alpha_2+\alpha_3)}{\cos\alpha_2\cos\alpha_3} = \frac{\sin(\alpha+\alpha_1)}{\cos\alpha\cos\alpha_1}.$$

Durch einfache Reduction folgt hieraus die gesuchte einfache Beziehung:

$$\operatorname{tg}\alpha_2 + \operatorname{tg}\alpha_3 = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha_1, \tag{76}$$

sodass durch drei Winkel der vierte bestimmt ist. Die erforderliche Arbeit L »zum Treiben« der Turbine ist nun nach Gleichung (119) S. 95:

$$L = Mu(c_1 \sin \alpha_1 - c_2 \sin \alpha_2),$$

da stossfreier Durchgang vorausgesetzt worden ist. Benutzt man hier für c_1 und c_2 die Gleichungen (75), so folgt auch:

$$L = Mu^2 \left[\frac{\sin \alpha_1 \cos \alpha}{\sin(\alpha + \alpha_1)} - \frac{\sin \alpha_2 \cos \alpha_3}{\sin(\alpha_2 + \alpha_3)}\right]$$

und hieraus nach einfacher Umformung unter gleichzeitiger Beachtung von Gleichung (76):

$$L = Mu^2 \cdot \frac{(\operatorname{tg} \alpha_3 - \operatorname{tg} \alpha)}{(\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha)}. \tag{77}$$

Nun ist, wie erwähnt, L die Arbeit, welche zum Betriebe der Pumpe (ohne Berücksichtigung der Zapfenreibung) erforderlich ist; die gewonnene Arbeit dagegen ist Mgh, weil in der Secunde das Wassergewicht $Mg = V\gamma$ auf die Höhe h gehoben wird; es ergiebt sich daher der hydraulische Wirkungsgrad η der Pumpe:

$$\eta = \frac{Mgh}{L},$$

und demnach folgt unter Benutzung der Gleichung (77):

$$u^2 = \frac{1}{\eta}\left(\frac{\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha_3 - \operatorname{tg} \alpha}\right) gh. \tag{78}$$

Wären daher die Schaufelwinkel bekannt, so liesse sich, wenn für η ein gewisser Mittelwerth angenommen werden dürfte, die vortheilhafteste Umdrehungsgeschwindigkeit u sofort berechnen. Man ersieht, dass u^2 unter sonst gleichen Verhältnissen der Hubhöhe h proportional ist.

Gleichung (78) ist übrigens analog der Gleichung (17a) S. 186, welche dort für die beste Geschwindigkeit u der Henschel-Jonval-Turbine gegeben wurde und oben wiederholt benutzt worden ist.

Es lässt sich für die Treibarbeit der Pumpe und für die Geschwindigkeit u aber noch ein anderer Ausdruck ableiten. Nach Fig. 58 ist

$$c_3^2 = c_2^2 + u^2 - 2c_2 u \sin \alpha_2,$$

sowie

$$c^2 = c_1^2 + u^2 - 2c_1 u \sin \alpha_1.$$

Aus der Differenz beider Formeln findet sich:

$$2u(c_1 \sin \alpha_1 - c_2 \sin \alpha_2) = c_1{}^2 + c_3{}^2 - c^2 - c_2{}^2,$$

und wenn man diesen Ausdruck in Gleichung (77a) substituirt, stellt sich für die Betriebsarbeit L auch die Formel

$$L = \frac{M}{2}[c_1{}^2 + c_3{}^2 - c^2 - c_2{}^2] \tag{77a}$$

heraus. Die Grundgleichung (71) ergiebt beim Zeichenwechsel:

$$Mgh = \frac{M}{2}(c_1{}^2 + c_3{}^2 - c^2 - c_2{}^2) - \frac{M}{2}[\zeta_1 c^2 + \zeta_2 c_2{}^2 + (1 + \zeta_3)c_4{}^2],$$

woraus mit Gleichung (77a) folgt:

$$L = Mgh + \frac{M}{2}[\zeta_1 c^2 + \zeta_2 c_2{}^2 + (1 + \zeta_3)c_4{}^2],$$

und diese Formel giebt im zweiten Gliede der rechten Seite die Summe der Arbeitsverluste, wobei aber, wie erwähnt, die Widerstandscoefficienten auf die Austrittsquerschnitte der betreffenden Kanäle bezogen worden sind, d. h. beim Laufrade und Diffuser auf die grösseren Querschnitte. Will man sie, was hier geschehen soll, auf den engeren Querschnitt beziehen, wie früher bei der Turbine, also auf den Eintrittsquerschnitt des Laufrades und des Diffusers, so ist zu setzen:

$$\zeta_2 c_1{}^2 \text{ statt } \zeta_2 c_2{}^2 \quad \text{und} \quad \zeta_3 c_3{}^2 \text{ statt } \zeta_3 c_4{}^2$$

Es folgt daher an Stelle von vorstehender Gleichung:

$$L = Mgh + \frac{M}{2}[\zeta_1 c^2 + \zeta_2 c_1{}^2 + \zeta_3 c_3{}^2 + c_4{}^2], \tag{77b}$$

und wenn man die Beziehungen der Gleichungen (74) benutzt:

$$L = Mgh + \frac{Mc^2 \cos^2 \alpha}{2}\left[\frac{\zeta_1}{\cos^2 \alpha} + \frac{\zeta_2}{\cos^2 \alpha_1} + \frac{\zeta_3}{\cos^2 \alpha_3} + \left(\frac{l}{l_1}\right)^2\right]. \tag{77c}$$

Setzt man jetzt der Vereinfachung wegen

$$\frac{\zeta_1}{\cos^2 \alpha} + \frac{\zeta_2}{\cos^2 \alpha_1} + \frac{\zeta_3}{\cos^2 \alpha_3} + \left(\frac{l}{l_1}\right)^2 = \psi, \tag{79}$$

welcher Werth sich für eine gegebene Ausführung berechnen lässt, so folgt:

$$L = Mgh + \psi \cdot \frac{Mc^2 \cos^2 \alpha}{2}. \tag{80}$$

Aus der in Fig. 58 angegebenen Zerlegung der Geschwindigkeiten folgt:

$$\frac{c}{u} = \frac{\cos\alpha_1}{\sin(\alpha + \alpha_1)}$$

und damit:

$$c\cos\alpha = \frac{u\cos\alpha\cos\alpha_1}{\sin(\alpha + \alpha_1)} = \frac{u}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha_1}. \qquad (81)$$

Die Substitution dieses Ausdruckes in Gleichung (80) ergiebt, wenn man zugleich die für L gegebene Formel (77) benutzt, nach einigen leicht zu verfolgenden Reductionen für die Umdrehungsgeschwindigkeit:

$$u = (\operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\alpha)\sqrt{\frac{2gh}{2(\operatorname{tg}\alpha_3 - \operatorname{tg}\alpha)(\operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\alpha) - \psi}}. \qquad (82)$$

Aus Gleichung (78) ergiebt sich dagegen:

$$u = (\operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\alpha)\sqrt{\frac{1}{\eta}}\sqrt{\frac{2gh}{2(\operatorname{tg}\alpha_3 - \operatorname{tg}\alpha)(\operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\alpha)}},$$

wonach sich durch Gleichsetzen der hydraulische Wirkungsgrad η der Pumpe findet:

$$\eta = 1 - \frac{\psi}{2(\operatorname{tg}\alpha_3 - \operatorname{tg}\alpha)(\operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\alpha)}. \qquad (83)$$

Die Gleichung (82) ist der Gleichung (17) S. 185 analog, welche oben für die Berechnung der besten Umlaufsgeschwindigkeit der Henschel-Jonval-Turbine gegeben worden ist und die sich auch in ähnliche Form hätte bringen lassen. Bei der constructiven Ausführung der Axialpumpe wird man nun aber eine ganz wesentliche Vereinfachung dadurch erzielen, dass man den Winkel $\alpha = 0$ setzt, also die Leitschaufeln (Fig. 57) als verticale ebene Flächen ausführt oder, noch einfacher, im Leitapparate A die Schaufeln überhaupt ganz weglässt.

Mit $\alpha = 0$ ergiebt sich jetzt für den Zusammenhang der anderen Winkel nach Gleichung (76):

$$\operatorname{tg}\alpha_2 + \operatorname{tg}\alpha_3 = \operatorname{tg}\alpha_1; \qquad (76\,a)$$

die Hülfsgrösse ψ wird nach Gleichung (79):

$$\psi = \zeta_1 + \frac{\zeta_2}{\cos {\alpha_1}^2} + \frac{\zeta_3}{\cos^2 \alpha_3} + \left(\frac{l}{l_1}\right)^2$$

oder auch:

$$\psi = \zeta_1 + \zeta_2 (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_1) + \zeta_3 (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_3) + \left(\frac{l}{l_1}\right)^2, \qquad (79\text{a})$$

und nach Gleichung (82) ergiebt sich die richtige Umlaufsgeschwindigkeit:

$$u = \operatorname{tg} \alpha_1 \sqrt{\frac{2gh}{2 \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_3 - \psi}}, \qquad (82\text{a})$$

sowie nach Gleichung (83) der hydraulische Wirkungsgrad beim besten Gange:

$$\eta = 1 - \frac{\psi}{2 \operatorname{tg} \alpha_3 \operatorname{tg} \alpha_1}. \qquad (83\text{a})$$

Nach Gleichung (81) ist dann:

$$c = \frac{u}{\operatorname{tg} \alpha_1}.$$

Weiter folgt dann nach der ersten der Gleichungen (72) der Austrittsquerschnitt F am Leitapparate aus $F = 2r\pi l$ und damit die Hubwassermenge $V = Fc$ sowie aus $Mg = V\gamma$ die entsprechende Wassermasse M. Die hydraulische Betriebsarbeit L endlich berechnet sich durch die Formel:

$$L = \frac{Mgh}{\eta},$$

wobei allerdings zunächst in allen Gleichungen vom Einflusse der Schaufeldicken abgesehen worden ist, wie das auch sonst allgemein bei der vorläufigen Berechnung der Turbinen Gebrauch ist; die Berücksichtigung des bemerkten Einflusses macht sich erst erforderlich, wenn es sich um genauere Berechnung der einzelnen Dimensionen handelt, auf welche hier nicht näher eingetreten werden soll, da die axialen Turbinenpumpen bis jetzt noch nicht zur praktischen Verwendung gekommen sind und da die Weiterverfolgung nach dem, was oben bei der Henschel-Jonval-Turbine gegeben worden ist, keinen Schwierigkeiten unterliegt. Aus denselben Gründen soll eine weitere Untersuchung der Pumpe für den Fall unterbleiben, dass dieselbe mit einer beliebigen anderen Geschwindigkeit, als der vorhin berechneten vortheilhaftesten, umläuft. Der erste Theil dieses Buches würde auch hierzu die erforderlichen Unterlagen bieten. Nach der letzteren Richtung mag nur der Gleichgewichtszustand in der Kürze noch betrachtet werden. Ist die Hubhöhe h gegeben, so liegt eine gewisse Umfangsgeschwindigkeit u_1 vor, bei welcher Gleichgewicht herrscht und kein Wasser gefördert wird. Die Wasserhebung tritt erst ein, wenn die Geschwindigkeit u den Werth u_1 überschreitet und ist die günstigste, wenn u den nach Gleichung (82) oder Gleichung (82a) berechneten Werth erreicht.

Nach der auf S. 198 angegebenen Gleichung (41a) findet sich hier aber sofort mit der in Fig. 58 eingeführten Bezeichnung die Geschwindigkeit u_1 aus

$$h = \zeta_0 \frac{u_1^2}{2g} \sin^2 \alpha_1 , \tag{84}$$

wobei bis auf Weiteres $\zeta_0 = 1{,}25$ angenommen werden sollte.

Zum Schluss erscheint vielleicht das Folgende noch am Platze.

Nach Gleichung (68) ist der Druck a_1 kleiner als der hydrostatische Druck $a_0 + h_1$, es findet demnach beim Eintritte ins Laufrad ein **Ansaugen** des Wassers statt. Man wird daher bei der Anordnung einer derartigen Pumpe Sorge tragen müssen, dass das Wasser senkrecht von unten nach oben und nicht seitwärts zuströmt. Entschliesst man sich daher, die verticalen ebenen Leitschaufeln wegzulassen, so muss wenigstens der **Leitradmantel beibehalten werden.**

Ferner sollte man die Schaufeldicken so gering wie möglich, also Blechschaufeln, unter Umständen Stahlschaufeln, in Anwendung bringen, die Schaufelenden an den Eintrittsstellen zuschärfen und den Schaufelwinkel am Eintritte ins Laufrad nicht zu klein, jedenfalls grösser annehmen, als er gewöhnlich bei der Henschel-Jonval-Turbine gewählt wird, damit sich die Laufradkanäle nicht allzu stark, vielmehr möglichst allmählich von der Eintritts- nach der Austrittsstelle hin erweitern.

Beim Diffuser wird allerdings eine ziemlich rasch erfolgende Erweiterung nicht zu umgehen und damit vielleicht zu erwarten sein, dass die hydraulischen Widerstände in demselben etwas grösser ausfallen, als bei der umgekehrten Bewegungsrichtung des Wassers anzunehmen ist. Aus dieser Bemerkung wäre übrigens der Schluss zu ziehen, dass auch der bei Turbinen als Kraftmaschinen wiederholt in Anwendung gekommene Diffuser nicht in dem erwarteten Maasse vortheilhaft wirkt. Hierüber fehlt es noch an sorgfältig ausgeführten Versuchen, die am besten an einer axialen Turbinenpumpe vorzunehmen wären. Als Abschluss möge noch ein Beispiel Platz finden.

Als Schaufelwinkel sollen gewählt werden $\alpha_1 = 72^{\circ}$, $\alpha_2 = 43^{\circ}$ und $\alpha_3 = 65^{\circ}$, welche der Gleichung (76a) Genüge leisten. Die Widerstandscoefficienten ζ_1, ζ_2 und ζ_3 sollen mit 0,125 in Rechnung gestellt werden, und die obere radiale Weite des Diffuser sei gleich der unteren, also $l_1 = l$. Dann folgt mit Gleichung (79a) die Hülfsgrösse $\psi = 3{,}134$ und mit Gleichung (82a) die beste Umfangsgeschwindigkeit des Laufrades

$$u = 4{,}297\sqrt{h}$$

und die Geschwindigkeit c, mit welcher das Wasser in verticaler Richtung ins Laufrad tritt,

$$c = 1{,}396\sqrt{h},$$

wonach sich bei gegebener Wassermenge V aus der Formel

$$V = 2r\pi lc$$

der erste Näherungswerth des Laufradhalbmessers r berechnet, wenn man die radiale Radweite l derart wählt, dass ein passendes Verhältniss von $l:r$ hervortritt. Mit Rücksicht auf eine nicht zu klein gewählte Schaufelzahl und auf die Schaufeldicken macht man dann l entsprechend grösser.

Für den vorgelegten Fall berechnet sich der hydraulische Wirkungsgrad nach Gleichung (83a)

$$\eta = 0{,}763,$$

und nach Gleichung (84) mit $\zeta_0 = 1{,}25$ die Umfangsgeschwindigkeit u_1 beim Gleichgewichtszustande

$$u_1 = 4{,}166\sqrt{h}.$$

Man ersieht, dass die Umlaufsgeschwindigkeit beim besten Gange nur wenig grösser als beim Gleichgewichtsgange ist, ein Resultat, welches auch bei den gewöhnlichen Centrifugalpumpen hervortritt.

Kapitel III.

Die Axialturbine als Ventilator.

§ 23. Axialventilator als Druck- und Saugventilator. Stossfreier Durchgang der Luft.

Man unterscheidet Druck- oder Saugventilatoren und Blaseventilatoren; bei den letzteren, die nicht als Axialturbinen ausgeführt werden, bringt man Luft auf höhere Pressung und lässt dieselbe durch Düsen ausströmen, bei den ersteren dagegen, die hier in Betracht kommen, wird Luft aus einem weiten Raume nach einem anderen gefördert. Herrscht im zweiten Raume atmosphärische Pressung, so liegt ein Saugventilator vor, wie er beim Bergbau zur Ventilation der Gruben verwendet wird.

Herrscht dagegen im ersten Raume die atmospärische Pressung, so liegt der höhere Druck im zweiten Raume vor, von dem aus die Luft durch Kanäle nach den Räumen eines Gebäudes fortgeleitet wird, in denen ein Luftwechsel erzielt werden soll (Druckventilator). Bei der Beurtheilung und Berechnung kommen für den Saug- und Druckventilator dieselben Formeln in Anwendung, da hier nur die zu erzeugende Druckdifferenz in Betracht zu ziehen ist, und bezüglich der Dimensionen des Ventilators es sich nur um das zu fördernde Luftvolumen handelt.

Fig. 59.

a *b*

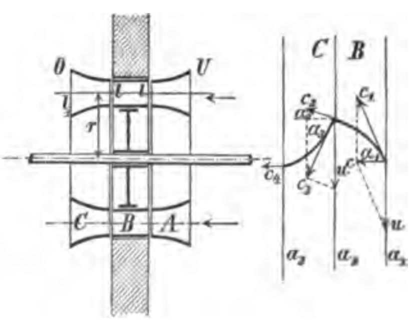


Fig. 59*a* zeigt die Anordnung eines solchen Ventilators und Fig. 59*b* die Art der Schaufelung. *A* ist der Leitapparat, *B* das Laufrad und *C* der Diffuser; die Luftförderung findet vom Raume *U* nach dem Raume *O* statt. Der Leitapparat erhält gewöhnlich keine Leitschaufeln, sodass die Luft axial in das Laufrad tritt; man lässt gewöhnlich auch den Mantel des Leitrades weg, was nicht zweckmässig erscheint.

Man ersieht übrigens, dass die Anordnung vollständig mit der in Fig. 57 gegebenen Skizze einer Axialpumpe übereinstimmt, nur dass die Laufradaxe horizontal, statt vertical liegt, was aber beim Ventilator nicht weiter in Betracht kommt.

Bei der theoretischen Untersuchung unterscheidet man zweckmässiger Weise, ob sehr geringe oder ob stärkere Druckdifferenzen mit dem Ventilator erzielt werden sollen.

Fall 1. Voraussetzung sehr geringer Druckdifferenz.

Hier gelten ohne Weiteres die sämmtlichen Gleichungen, welche in § 22 für die Turbinenpumpe abgeleitet worden sind. Bei sehr geringer Druckdifferenz kann man nämlich die Annahme machen, dass das specifische Volumen, also auch der reciproke Werth, das specifische Gewicht γ der atmosphärischen Luft vor und nach der Verdichtung das gleiche ist.

Man hat dann einfach in allen Gleichungen von § 22 an Stelle der in Metern gemessenen Förderhöhe h des Wassers die in Metern gemessene Luftsäule von überall gleicher Dichte zu substituiren.

Nun ist aber nach den Angaben auf S. 6 bei der atmosphärischen Luft unter mittleren Verhältnissen die Höhe einer Luftsäule, welche denselben Druck wie eine Wassersäule von der Höhe h auf die Basis ausübt, das 818,7 fache; wenn man daher bei einem Ventilator den Ueberdruck h in Millimeter Wassersäule an einem Manometer sich abgelesen denkt, so ist in den angezogenen Formeln an Stelle von h einfach

$$0{,}8187 h = v h$$

zu substituiren, wo v das specifische Volumen der Luft in Cubikmetern darstellt.

Man erhält dann für den in Fig. 59 dargestellten Fall und die daselbst angegebene Winkelbezeichnung nach Gleichung (82a) die beste Umlaufsgeschwindigkeit u des Laufrades:

$$u = \operatorname{tg} \alpha_1 \sqrt{\frac{2 g h v}{2 \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_3 - \psi}}, \tag{85}$$

wobei ψ nach Gleichung (79a) zu berechnen ist und die Winkel α_1, α_2 und α_3 der Beziehung (76a) folgen müssen. Der Wirkungsgrad (hydraulisch) berechnet sich nach Gleichung (83a) und die Eintrittsgeschwindigkeit c:

$$c = \frac{u}{\operatorname{tg} \alpha_1}. \tag{86}$$

Ist F der lichte Eintrittsquerschnitt am Laufrade, so ist das auf die Secunde bezogene geförderte Luftquantum $V = Fc = Gv$, wenn G das entsprechende Luftgewicht in Kilogrammen darstellt; demnach die hydraulische Betriebsarbeit:

$$L = \frac{Fhc}{v\eta}. \tag{87}$$

Ein Beispiel giebt am besten die Gelegenheit, einige weitere Bemerkungen dem Angegebenen beizufügen. Bei einem axialen Druckventilator, welcher zur Ventilation der Räume eines grösseren Gebäudes diente, ergaben die Abmessungen den mittleren Radius $r = 0{,}7$ m, die radiale Weite des Laufrades $l = 0{,}3$ m und die des Diffusers an der Austrittsstelle $l_1 = 0{,}39$ m. Die Winkel $\alpha_1 = 68^1/_2{}^0$, $\alpha_2 = 30^0$ und $\alpha_3 = 63^0$ erfüllten die Bedingung der Gleichung (76a). Mit $\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 = 0{,}1$ berechnet sich nach Gleichung (79a) $\psi = 1{,}921$ und dann nach den Gleichungen (85) und (86)

$$u = 3{,}965\sqrt{h} \quad \text{und} \quad c = 1{,}562\sqrt{h}.$$

Der Constructeur hat nun angenommen, dass im Zuflussraume, von welchem aus die Luft nach den verschiedenen Räumen durch Luftkanäle geleitet wurde, ein Ueberdruck von $h = 14$ mm Wassersäule vorliegen sollte. Damit folgt:

$$u = 14{,}83 \text{ m} \quad \text{und} \quad c = 5{,}84 \text{ m}$$

sowie die erforderliche Umdrehungszahl des Laufrades in der Minute

$$n = \frac{30u}{\pi r} = 200.$$

Aus Gleichung (83a) folgt der hydraulische Wirkungsgrad $\eta = 0{,}807$. Der Eintrittsquerschnitt F am Laufrade ist $F = 2rl\pi = 1{,}319$ qm oder richtiger, da das Laufrad 32 Schaufeln hat und die Schaufeldicke $\sigma_1 = 5$ mm beträgt, $F = 1{,}188$ qm. Damit folgt das Luftvolumen, welches in der Secunde gefördert wird, $V = Fc = 6{,}94$ cbm und aus $Gv = Fc$ mit $v = 0{,}8187$ das Luftgewicht $G = 8{,}48$ kg, dann nach Gleichung (17) die erforderliche Treibarbeit:

$$L = 147 \text{ mkg oder } N = 1{,}96 \text{ Pferdestärken},$$

wozu noch die zum Betriebe erforderliche Zapfenreibungsarbeit zu rechnen ist.

Fall 2. Voraussetzung grösserer Druckdifferenz.

Bei grösserer Druckdifferenz ändern sich die im ersten Falle benutzten Formeln wesentlich, weil dann das specifische Volumen der Luft beim Durchgange durch den Ventilator nicht mehr constant ($v = 0{,}8187$) angenommen werden darf; das Volumen ändert sich vielmehr mit dem jeweiligen Drucke und daher muss man bezüglich der Zustandsänderungen der Luft, der Druck- und Volumenänderungen, während ihres Durchganges durch den Apparat von einer bestimmten Hypothese ausgehen.

Bei ähnlichen Untersuchungen hat man bisher angenommen, die Aenderung geschehe adiabatisch, befolge also das Gesetz $pv^{\varkappa} = \text{Const.}$, wobei $\varkappa = 1{,}410$ gesetzt wurde, welches Gesetz vorliegt, wenn Luft ohne Wärmemittheilung oder Wärmeentziehung der Expansion oder Compression unterworfen wird. Diese Voraussetzung soll auch im Folgenden gemacht werden, wonach allerdings vom Einflusse der sogenannten Luftreibungswiderstände abgesehen wird und die Lösung der Aufgabe nur als eine angenäherte anzusehen ist.

Es liegt der Gedanke nahe, die adiabatische Curve durch die polytropische Curve $pv^n = \text{Const.}$ mit $n < \varkappa$ zu ersetzen und auf diese Weise den Widerständen Rechnung zu tragen, wie dies vom Verfasser bei der Behandlung des einfachen Ausflussproblems, wie die entsprechenden Versuche bewiesen, mit Erfolg geschehen ist*). Im vorliegenden Falle, wo man es mit abwechselnder Expansion und Compression unter gleichzeitiger Zuführung von Arbeit zu thun hat, erscheint die Anwendung dieser Hypothese als verfrüht, um so mehr, als für solche Fälle noch keinerlei Beobachtungen über den einzuführenden numerischen Werth des Exponenten n vorliegen.

Die Grösse a, welche früher die Höhe einer Flüssigkeitssäule darstellte und direct zur Druckmessung diente, ist hier durch die Gleichung (170) S. 143, nämlich

$$a = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} pv \tag{88}$$

gegeben, wobei p den specifischen Druck und v das specifische Volumen der Luft angiebt. Der Druck wird im Weiteren durch p

*) »Technische Thermodynamik«. Bd. I, S. 227 und 245.

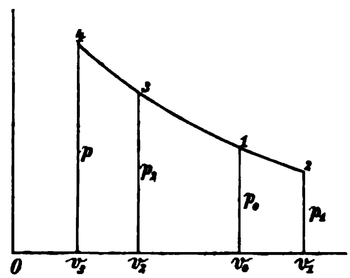
gemessen und, zunächst wenigstens, von einer Messung desselben in Wasser- oder Luftsäule abgesehen.

Die folgenden Entwickelungen, welchen die Fig. 58 und 59 zu Grunde liegen, sollen etwas vollständiger durchgeführt werden, als es der vorliegenden speciellen Aufgabe entspricht, um zugleich die Unterlagen für später folgende Untersuchungen zu gewinnen.

Der Druck im Abfluss- oder Saugraume sei der atmosphärische p_0, und v_0 das zugehörige specifische Volumen; Druck und Volumen der Luft im ersten Spalte, beim Uebertritte aus dem Leitapparate in das Laufrad, seien p_1 und v_1; Druck und Volumen im zweiten Spalte beim Uebergange aus dem Laufrade in den Effuser, gleichgültig, ob er Diffuser oder Contractor ist, seien p_2 und v_2, endlich seien p und v_3 Druck und Volumen beim Austritte aus dem Effuser, wobei angenommen wird, dass sich der Druck p im Zufluss- oder Druckraume bis in die Ebene der Austrittsmündung des Effusers erstreckt. Es finde stossfreier Durchgang der Luft statt.

Zur vorläufigen Orientirung wird die Darstellung des Druckdiagrammes Fig. 60 dienen, in welchem Druck und Volumen an den vier Hauptpunkten als Coordinaten aufgetragen worden sind. Punkt 1 entspricht dem Zustande der Luft im Saugraume; beim Durchgange derselben durch den Leitapparat findet Expansion nach dem Curvenstücke 1—2 von v_0 auf das Volumen v_1 statt; beim Durchgange durch das Laufrad liegt auf der Curve 2—3 Compression von p_1 auf p_2 vor, das Volumen vermindert sich von v_1 auf v_2; endlich wird die Luft im Effuser auf dem Wege 3—4 von v_2 auf v_3 weiter comprimirt und der Druck p_2 steigt auf den Druck p im Druckraume. Die letzterwähnte Compression liegt aber nur vor, wenn, wie das beim Druckventilator, also in dem zu behandelnden Apparat der Fall ist, ein Diffuser vorausgesetzt wird.

Fig. 60.



Liegt dagegen ein Contractor vor, so findet in demselben Expansion statt und die beiden Punkte 3 und 4 vertauschen in Fig. 60 ihre Lage; ein Fall, der später zur Besprechung gelangen wird.

Nach der angegebenen Voraussetzung besteht zwischen den einzelnen Grössen die Beziehung

$$p_0 v_0^{\varkappa} = p_1 v_1^{\varkappa} = p_2 v_2^{\varkappa} = p v_3^{\varkappa} \tag{89}$$

und an Stelle der Gleichungen (68) treten unter Berücksichtigung der in Fig. 58 angegebenen Bezeichnung folgende Formeln:

$$\left.\begin{aligned} 2g(a_0 - a_1) &= c^2 \\ 2g(a_1 - a_2) &= c_2^2 - c_1^2 \\ 2g(a_2 - a_3) &= c_4^2 - c_3^2 \\ 2g(a_3 - a) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{90}$$

Durch Addition folgt hieraus:

$$2g(a - a_0) = c_1^2 + c_3^2 - c^2 - c_2^2 - c_4^2, \tag{91}$$

alles unter der Voraussetzung, dass stossfreier Durchgang der Luft vorliegt. Gleichgültig ist dabei, ob ein Diffuser oder ein Contractor vorhanden ist.

Die einzelnen Kanalquerschnitte sind wieder nach den Gleichungen (72) zu bestimmen.

Bedeutet nun G das Gewicht der Luft, welche in der Secunde durch den Ventilator geht, so besteht die Beziehung:

$$G = \frac{Fc}{v_1} = \frac{F_1 c_1}{v_1} = \frac{F_2 c_2}{v_2} = \frac{F_3 c_3}{v_2} = \frac{F_4 c_4}{v_3} \tag{92}$$

Daraus ergiebt sich mit Benutzung der Gleichungen (72):

$$\begin{aligned} \frac{G v_0}{2 r \pi l} = \frac{v_0}{v_1} c \cos\alpha = \frac{v_0}{v_1} c_1 \cos\alpha_1 = \frac{v_0}{v_2} c_2 \cos\alpha_2 = \frac{v_0}{v_2} c_3 \cos\alpha_3 \\ = \frac{v_0}{v_3}\frac{l_1}{l} c_4, \end{aligned} \tag{93}$$

und hieraus:

$$\left.\begin{aligned} c_1 \cos\alpha_1 &= c \cos\alpha \\ c_2 \cos\alpha_2 &= \frac{v_2}{v_1} c \cos\alpha \\ c_4 &= \frac{l}{l_1}\frac{v_3}{v_1} c \cos\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{94}$$

Die beiden ersten Gleichungen ergeben durch Division:

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{v_2}{v_1}\frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2}, \tag{95}$$

und aus der Verbindung derselben mit Gleichung (75a) S. 220 ergiebt sich dann nach einigen Reductionen:

$$\operatorname{tg}\alpha_2 + \operatorname{tg}\alpha_3 = \frac{v_1}{v_2}(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha_1) \tag{96a}$$

an Stelle von Gleichung (76), welche dort für Wasser abgeleitet wurde.

Die vier Schaufelwinkel müssen also wieder für stossfreien Durchgang in einer bestimmten Beziehung zu einander stehen, die aber im vorliegenden Falle noch von dem Verhältniss $v_1 : v_2$, also auch von dem Druckverhältniss abhängt, welches im Laufrade zu erzielen ist.

Bei allen weiteren Untersuchungen soll nun aber zur Erzielung einfacherer Formeln, und weil diese Annahme bei praktischen Ausführungen immer zutreffend sein wird, der Winkel $\alpha = 0$ gesetzt, also angenommen werden, es liege der in Fig. 59 (S. 227) bezeichnete Fall vor; dann ist in allen vorstehenden Formeln $\cos\alpha = 1$ und $\operatorname{tg}\alpha = 0$ zu setzen und die zuletzt gegebene wichtige Grundformel (96a) schreibt sich einfach:

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{v_2}{v_1}(\operatorname{tg}\alpha_2 + \operatorname{tg}\alpha_3). \tag{96}$$

Die Betriebsarbeit für den Ventilator findet sich wieder nach Gleichung (119) S. 95:

$$L = Mu(c_1 \sin\alpha_1 - c_2 \sin\alpha_2).$$

Mit Gleichung (95) und den aus den Gleichungen (94) hervorgehenden Beziehungen

$$c_1 \cos\alpha_1 = c \quad \text{und} \quad c_2 \cos\alpha_2 = \frac{v_2}{v_1} c$$

folgt:

$$L = Muc\left(\operatorname{tg}\alpha_1 - \frac{v_2}{v_1}\operatorname{tg}\alpha_2\right),$$

und wenn man $u = c \operatorname{tg}\alpha_1$ einsetzt und Gleichung (96) benutzt, ergiebt sich:

$$L = Mc^2\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 (\operatorname{tg}\alpha_2 + \operatorname{tg}\alpha_3)\operatorname{tg}\alpha_3. \tag{97}$$

Andererseits war aber die Betriebsarbeit nach Gleichung (77a) auch

$$L = \tfrac{1}{2} M(c_1{}^2 + c_3{}^2 - c^2 - c_2{}^2),$$

und daher folgt durch Gleichsetzen beider Ausdrücke die Beziehung:

$$c_1^2 + c_3^2 - c^2 - c_2^2 = 2\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 c^2(\operatorname{tg}\alpha_2 + \operatorname{tg}\alpha_3)\operatorname{tg}\alpha_3\,.$$

Benutzt man diese Beziehung in Gleichung (91) unter gleichzeitiger Verwendung der ersten der Gleichungen (90), und beachtet man, dass nach Angabe von Gleichung (93)

$$c_4 = \frac{v_3}{v_1}\frac{l}{l_1}c$$

ist, so hat man:

$$\frac{a - a_0}{a_0 - a_1} = 2\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2(\operatorname{tg}\alpha_2 + \operatorname{tg}\alpha_3)\operatorname{tg}\alpha_3 - \left(\frac{v_3}{v_1}\right)^2\left(\frac{l}{l_1}\right)^2,$$

oder unter Benutzung der Gleichungen (89) nach einfacher Umformung:

$$\frac{\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{2}{\varkappa}}\left(\frac{a}{a_0} - 1\right)}{\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{2}{\varkappa}}\left(1 - \frac{a_1}{a_0}\right)} = 2\left(\frac{p}{p_2}\right)^{\frac{2}{\varkappa}}(\operatorname{tg}\alpha_2 + \operatorname{tg}\alpha_3)\operatorname{tg}\alpha_3 - \left(\frac{l}{l_1}\right)^2. \qquad (98\,\mathrm{a})$$

Neben dieser Gleichung lässt sich aber noch eine zweite ableiten.

Addirt man die ersten beiden Gleichungen (90), und dividirt man die Summe durch die erste dieser Gleichungen, so ergiebt sich

$$\frac{a_2 - a_0}{a_0 - a_1} = \left(\frac{c_1}{c}\right)^2 - \left(\frac{c_2}{c}\right)^2 - 1,$$

und hieraus nach den Gleichungen (93) auf demselben Wege der Untersuchungen wie im Vorstehenden:

$$\frac{\left(\frac{p_2}{p^0}\right)^{\frac{2}{\varkappa}}\left(\frac{a_2}{a_0} - 1\right)}{\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{2}{\varkappa}}\left(1 - \frac{a_1}{a_0}\right)} = (2\operatorname{tg}\alpha_2 + \operatorname{tg}\alpha_3)\operatorname{tg}\alpha_3 - 1. \qquad (99\,\mathrm{a}$$

Nach den Gleichungen (170) S. 143 findet sich weiter:

$$\frac{a}{a_0} = \frac{p\,v}{p_0 v_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}; \quad \frac{a_1}{a_0} = \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}; \quad \frac{a_2}{a_0} = \left(\frac{p_2}{p_0}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}},$$

und wenn man für die Druckverhältnisse folgende Bezeichnung einführt:

$$\frac{p}{p_0} = \lambda, \qquad \frac{p_1}{p_0} = \lambda_1 \quad \text{und} \quad \frac{p_2}{p_0} = \lambda_2,$$

folgt nun aus den Gleichungen (98a) und (99a):

$$\frac{\lambda^{\frac{\varkappa+1}{\varkappa}} - \lambda^{\frac{2}{\varkappa}}}{\lambda_1^{\frac{2}{\varkappa}} - \lambda_1^{\frac{\varkappa+1}{\varkappa}}} = \left(\frac{\lambda}{\lambda_2}\right)^{\frac{2}{\varkappa}} \cdot 2\,(\operatorname{tg}\alpha_2 + \operatorname{tg}\alpha_3)\operatorname{tg}\alpha_3 - \left(\frac{l}{l_1}\right)^2, \tag{98}$$

$$\frac{\lambda_2^{\frac{\varkappa+1}{\varkappa}} - \lambda_2^{\frac{2}{\varkappa}}}{\lambda_1^{\frac{2}{\varkappa}} - \lambda_1^{\frac{\varkappa+1}{\varkappa}}} = 2\,(\operatorname{tg}\alpha_2 + \operatorname{tg}\alpha_3)\operatorname{tg}\alpha_3 - (1 + \operatorname{tg}^2\alpha_3), \tag{99}$$

und ausserdem findet sich nach Gleichung (96):

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\frac{1}{\varkappa}} (\operatorname{tg}\alpha_2 + \operatorname{tg}\alpha_3). \tag{100}$$

Diese Gleichungen lösen jetzt die Aufgabe für jeden beliebigen, selbst sehr grossen Ueberdruck $(p - p_0)$.

Als gegeben oder gewählt sind die Winkel α_2 und α_3 anzusehen, fernerhin ist gegeben l und l_1, der Ueberdruck $p - p_0$ und damit λ; die Gleichungen (98) und (99) geben dann λ_2 und λ_1 und damit die Drucke p_2 und p_1 an der Austritts- und Eintrittsstelle des Laufrades. Gleichung (100) ergiebt dann die erforderliche Grösse des Winkels α_1.

Die Geschwindigkeit c, mit welcher die Luft in das Laufrad eintritt, findet sich aus der Gleichung (90):

$$c^2 = 2g\,(a_0 - a_1),$$

oder mit Gleichung (170) S. 143:

$$c^2 = 2g\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}(p_0 v_0 - p_1 v_1)$$

und nach Vorstehendem:

$$c = \sqrt{2g\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}p_0 v_0\left(1 - \lambda_1^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right)}. \tag{101}$$

Ist F der Eintrittsquerschnitt im Laufrade, so ist das Luftgewicht G, welches in der Secunde durch das Laufrad geht, aus:

$$G v_1 = F c$$

zu berechnen und daher folgt wegen

$$\frac{v_1}{v_0} = \left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{1}{\varkappa}} = \left(\frac{1}{\lambda_1}\right)^{\frac{1}{\varkappa}}:$$

$$G = \frac{F}{v_0}\sqrt{2g\frac{\varkappa}{\varkappa-1}p_0 v_0\left(\lambda_1^{\frac{2}{\varkappa}} - \lambda_1^{\frac{\varkappa+1}{\varkappa}}\right)}. \tag{102}$$

Aus Gleichung (97) findet sich dann auch die Betriebsarbeit L:

$$L = G\frac{c^2}{g}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\frac{2}{\varkappa}}(\operatorname{tg}\alpha_2 + \operatorname{tg}\alpha_3)\operatorname{tg}\alpha_3. \tag{103}$$

Die vorstehenden Formeln sind für sehr grossen Ueberdruck, hier zugleich mit Rücksicht auf unten folgende Aufgaben abgeleitet worden; dieselben können aber in dem Falle, der **hier** in Betracht fällt, in einfachere Formen übergeführt werden.

Ist x ein Werth, der nur wenig von der Einheit verschieden ist, so schreibt sich unter Benutzung der binomischen Reihe für den Exponenten m:

$$x^m = [1 + (x-1)]^m = 1 + m(x-1) + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}\cdot(x-1)^2 + \cdots$$

Setzt man hier der Reihe nach λ, λ_1 und λ_2 für x und ebenso der Reihe nach $\frac{\varkappa+1}{\varkappa}$, $\frac{2}{\varkappa}$, $\frac{\varkappa-1}{\varkappa}$ für m, so genügt es, für den gewöhnlichen Druckventilator von vorstehender Reihe rechts nur die ersten beiden Glieder zu benutzen, doch kann man auch noch das dritte Glied hinzuziehen. Im ersten Falle verwandeln sich, wie sich leicht verfolgt, die obigen allgemeinen Gleichungen in folgende Näherungsformeln, die selbst noch für stärkeren Ueberdruck für Axialventilatoren brauchbar sind.

Setzt man zur Vereinfachung

$$2(\operatorname{tg}\alpha_2 + \operatorname{tg}\alpha_3)\operatorname{tg}\alpha_3 = A,\quad 1 + \operatorname{tg}^2\alpha_3 = B \quad\text{und}\quad \left(\frac{l}{l_1}\right)^2 = C, \tag{104}$$

so ergeben die Gleichungen (98) und (99):

$$\frac{\lambda_2 - 1}{\lambda - 1} = \frac{A-B}{A-C}, \tag{98b}$$

$$\frac{1-\lambda_1}{\lambda-1} = \frac{1}{A-C}, \tag{99b}$$

wobei die zweiten Potenzen von $(\lambda - 1)$ und $(\lambda_2 - 1)$ und ihr Product, als sehr klein, vernachlässigt worden sind.

Aus Gleichung (100) folgt:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \left[1 - \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\varkappa}\right](\operatorname{tg} \alpha_2 + \operatorname{tg} \alpha_3), \tag{100a}$$

aus Gleichung (101) die Eintrittsgeschwindigkeit:

$$c = \sqrt{2 g p_0 v_0 (1 - \lambda_1)}, \tag{101a}$$

und dann nach Gleichung (102) die Luftmenge in Kilogramm:

$$G = \frac{Fc}{v_0}. \tag{102a}$$

Hierauf wird die Umdrehungsgeschwindigkeit durch

$$u = c \operatorname{tg} \alpha_1$$

und die Betriebsarbeit durch

$$L = \left[1 - \frac{2}{\varkappa}(\lambda_2 - \lambda_1)\right] A \cdot G \frac{c^2}{2g} \tag{103a}$$

bestimmt.

Beispiel. Durch einen Axialventilator (Fig. 59) soll ein Druckverhältniss $\lambda = \frac{p}{p_0} = 1{,}010$ erzielt werden; es wäre also die Druckdifferenz in Wassersäule gemessen 103,3 mm. Gewählt werde $\alpha_2 = 30^\circ$, $\alpha_3 = 68^\circ$, sowie $l : l_1 = 1 : 1{,}3$.

Nach den letzten der vorstehenden Formeln findet sich daher $A = 15{,}110$, $B = 7{,}1260$ und $C = 0{,}5917$ und damit:

$$\lambda_2 = 1{,}0055 \quad \text{und} \quad \lambda_1 = 0{,}999311$$

und:

$$\alpha_1 = 71^\circ 47'.$$

Mit $p_0 v_0 = 8460$ (S. 5) findet sich die Eintrittsgeschwindigkeit $c = 10{,}69$ m und die Umdrehungsgeschwindigkeit $u = 32{,}50$ m. Die in der Secunde geförderte Luftmenge ergiebt sich $G = 13{,}062 F$ kg mit $v_0 = 0{,}8187$ und die Betriebsarbeit $L = 1145{,}4 F$ mkg.

Ist bei diesem Ventilator der mittlere Radius $r = 0{,}7$ m, die radiale Radweite $l = 0{,}3$ mit dem Eintrittsquerschnitte $F = 1{,}188$ qm (s. Beispiel S. 229), so berechnet sich die Anzahl der Umdrehungen in der Minute zu 443; die geförderte Luftmenge $G = 15{,}52$ kg in der Secunde und die Betriebsarbeit in Pferdestärken $N = 18{,}1$ (ohne Rücksicht auf Zapfenreibung und auf die inneren Bewegungswiderstände der Luft).

Die vorstehenden Entwickelungen unter der Voraussetzung grösserer Druckdifferenz sind insofern weniger befriedigend, als die sogenannten hydraulischen Widerstände vernachlässigt worden sind und angenommen wurde, die Luft verfolge beim Durchgange durch den Apparat nach Druck und Volumenänderung die adiabatische Curve. Nun wurde bereits auf S. 230 angedeutet, dass es vielleicht gestattet sei, an Stelle der Adiabate, welche das Gesetz $pv^{\varkappa} =$ Const. mit $\varkappa = 1{,}410$ befolgt, die polytropische Curve $pv^n =$ Const. mit $n < \varkappa$ in die Rechnungen einzuführen, um den genannten Widerständen Rechnung zu tragen. Es käme dann nur darauf an, den zuverlässigsten Werth des Exponenten n festzustellen.

Um noch in der Kürze anzudeuten, wie sich in diesem Falle die Frage gestaltet, ist zunächst zu betonen, dass die vorstehenden Gleichungen (89) bis (100) unverändert bleiben, nur hat man überall an Stelle von $\varkappa$ den Werth n zu substituiren; dagegen treten an die Stelle der Gleichungen (101) bis (103) die folgenden:

Die Geschwindigkeit c, mit welcher die Luft in das Laufrad eintritt, ergiebt sich aus:

$$c = \sqrt{2g\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}p_0 v_0\left(1 - \lambda_1^{\frac{n-1}{n}}\right)}. \tag{101 b}$$

Das Gewicht G der Luftmenge, welche in der Secunde durch den Ventilator geht, findet sich an Stelle von Gleichung (102)

$$G = \frac{F}{v_0}\sqrt{2g\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}p_0 v_0\left(\lambda_1^{\frac{2}{n}} - \lambda_1^{\frac{n+1}{n}}\right)} \tag{102 b}$$

und für die Betriebsarbeit L folgt an Stelle von Gleichung (103)

$$L = G\frac{c^2}{g}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\frac{2}{n}}(\operatorname{tg}\alpha_2 + \operatorname{tg}\alpha_3)\operatorname{tg}\alpha_3. \tag{103 b}$$

Für geringere Druckdifferenz gelten wieder die Gleichungen (104), (98 b) und (99 b), dagegen ergiebt sich an Stelle der Gleichungen (100 a) bis (103 a) zunächst:

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \left[1 - \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{n}\right](\operatorname{tg}\alpha_2 + \operatorname{tg}\alpha_3),$$

$$c = \sqrt{2g\frac{\varkappa(n-1)}{(\varkappa - 1)n}p_0 v_0(1 - \lambda_1)}.$$

Dann folgt:

$$G = \frac{Fc}{v_0} \quad \text{und} \quad u = \operatorname{ctg} \alpha_1$$

und

$$L = [1 - \frac{2}{n}(\lambda_2 - \lambda_1)] A\, G \cdot \frac{c^2}{2g} \cdot$$

Beispiel. Die letzten der vorstehenden Formeln mögen in dem Beispiele auf S. 237 Verwendung finden; dort war $\alpha_2 = 30^0$, $\alpha_3 = 68^0$ angenommen und $\lambda_2 = 1{,}0055$, $\lambda_1 = 0{,}999311$ für $\lambda = 1{,}010$ gefunden worden. Es werde nun an Stelle von $\varkappa = 1{,}410$ der Werth $n = 1{,}350$ als zutreffend angesehen, dann findet sich:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 71^0\, 47', \\ c &= 10{,}10, \\ G &= 12{,}334\, F, \\ u &= 30{,}68, \\ L &= 959{,}67\, F, \end{aligned}$$

und mit $r = 0{,}7$ m und $F = 1{,}188$ qm wie dort, folgt hier $G = 14{,}65$ kg, $N = 15{,}20$ Pferdekräfte bei 418,5 Umdrehungen in der Minute, so dass also beim Vergleich der Einfluss der Widerstände hervortritt. Die Hypothese, dass an Stelle der Adiabate die polytropische Curve mit $n = 1{,}350$ gesetzt werden darf, kann aber nur durch entsprechende Beobachtungen erwiesen werden.

Kapitel IV.

Die Axialturbine als Propeller.

§ 24. Axialturbine als Schiffstreibapparat. Stossfreier Durchgang des Wassers. Schiffswiderstand und Betriebsarbeit.

Der Gedanke, die Henschel-Jonval-Turbine an Stelle der Schiffsschraube zur Fortbewegung der Schiffe zu benutzen, ist zuerst von Redtenbacher ausgesprochen worden; derselbe dachte sich aber das Laufrad ohne Einlauf und Effuser, eine Anordnung, die nicht zum Ziele führen konnte (vergl. oben S. 180), wie auch der spätere Vorschlag von R. R. Werner eine Verbesserung nicht enthielt*), da dieser nur die Hinzufügung eines Einlaufapparates empfohlen hat. Der Axialturbinenpropeller ist aber nur dann wirksam, wenn man das Laufrad als Pumpe (§ 22 S. 217) wirken lässt, dagegen an Stelle des Diffusers einen »Contractor« in Anwendung bringt. Es tritt dann ein Reactionspropeller hervor, der den auf S. 109 u. f. besprochenen an Vollkommenheit wesentlich übertrifft und der, zunächst vom rein theoretischen Standpunkte aus beurtheilt, unter Umständen selbst günstigere Wirkung erzielen muss, als die Schiffsschraube und das Ruderrad.

Auf Anregung des Verfassers hat die Schiffswerft »Kette« in Uebigau bei Dresden, Deutsche Elbschifffahrtsgesellschaft, in den letzten Jahren eine Reihe von Schiffen mit dem neuen Propeller ausgerüstet, worüber unten einige Bemerkungen folgen sollen. Ueber die Vorversuche und ersten Ausführungen berichten Busley und Grosch**); an dieser Stelle soll zunächst die allgemeine Anordnung des Propellers besprochen und die Theorie desselben gegeben werden.

Fig. 61.

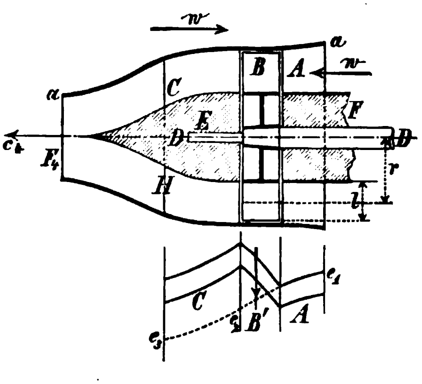


Fig. 61 zeigt eine Skizze im Durchschnitt; der Propeller ist an Stelle einer Schiffsschraube am Hintertheil des Schiffes gedacht und auf der Schraubenaxe DD das Turbinenlaufrad B angebracht. Vor dem Laufrade liegt der Leitapparat A und hinter demselben der Contractor C; der Leitapparat umschliesst einen hohlen Blechcylinder F, der nach dem Laufrade hin durch eine ebene Blechwand geschlossen ist und sich an der anderen Seite an die Schiffswandung dicht anschliesst, um ein Eindringen des Wassers in das Innere des Cylinders zu verhindern; die äussere Cylinderoberfläche

*) Vergl. die Abhandlung von R. R. Werner »Turbinenschiffe« am Schlusse. Zeitschrift des Ver. deutscher Ing. 1875, Bd. 19, p. 7.

**) C. Busley, »Turbinenpropeller mit Contractor«. Zeitschrift des Ver. deutscher Ing. 1894, Bd. 38, p. 1. — G. Grosch, »Das Strahlschiff Dresden«. Civilingenieur 1895, Bd. 41, p. 363.

dient dann zugleich als Leitfläche für die axiale Einführung des Wassers in den Leitapparat A. Der Contractor C wird durch den Raum zwischen zwei kegelförmigen Mänteln gebildet; der Hohlraum E des inneren Mantels ist nach dem Laufrade B hin ebenfalls durch eine ebene Blechwand geschlossen, um das Eindringen des Wassers zu vermeiden; auch das Laufrad besitzt im Innern auf beiden Seiten Blechwände, damit kein todtes Wasser eintritt und an der Rotation Theil nimmt.

Die Art der Schaufelung geht aus Fig. 61*b* hervor; die Contractorschaufeln erstrecken sich nur bis zur Stelle H, an welcher sich die einzelnen Wasserstrahlen zu einem Strahle vereinigen, der dann, der Schiffsbewegung entgegengesetzt, durch die Ausflussmündung F_4 zum Austritt gelangt; derartige Schiffe können daher kurz als »Strahlschiffe« bezeichnet werden.

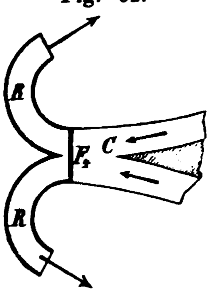
Man erkennt die Verwandtschaft des Apparates mit demjenigen, welchen die früheren Reactionsschiffe benutzten (s. S. 109); an Stelle der Centrifugalpumpe ist hier die Axialpumpe getreten, der Durchgang des Wassers ist aber weit zweckmässiger; das Wasser tritt axial ein und aus und die ganze Ablenkung des Wassers erfolgt bei richtiger Umlaufgeschwindigkeit der Turbine und stossfreiem Durchgang auf dem absoluten Wege $e_1 e_2 e_3$ (Fig. 61*b*), während bei der älteren Anordnung das Wasser durch Röhren mit verschiedenen Kröpfungen und Ablenkungen hindurchgedrückt werden musste, wie auch die Zuführung des Wassers nach der Centrifugalpumpe noch beträchtliche hydraulische Widerstände in sich schloss (s. S. 110). Im vorliegenden Falle treten nur Wasserreibungsverluste im Leit- und Laufrade und im Contractor ein, die aber nicht grösser sein können, als bei den gewöhnlichen Turbinen, wenn diese als Kraftmaschinen verwendet werden.

Das Steuerruder liegt beim Turbinenpropeller hinter der Austrittsöffnung F_4 des Contractors und halbirt bei mittlerer Stellung den austretenden Strahl; bei Drehung des Ruders trifft der Strahl die Ruderfläche stossend und bewirkt dadurch, wie auch die Beobachtungen bestätigen, eine bedeutend verstärkte Ablenkung der Bewegungsrichtung des Schiffes. Die Wirkung des Laufrades auf das durchgehende Wasser ist gänzlich verschieden von der einer Schiffsschraube, denn im Laufrade selbst findet keinerlei axiale Beschleunigung des Wassers statt, vielmehr erhöht dasselbe nur den Wasserdruck beim Eintritte in den Contractor, unter welch erhöhtem Drucke nun das Wasser beschleunigt durch den Contractor nach der engeren Ausströmungsöffnung fliesst; die ganze Reactionswirkung fällt also ausschliesslich dem Contractor zu.

Die neue Anordnung steht der alten nur insofern nach, als die Umkehrung der Bewegungsrichtung des Schiffes, der Rückwärtsgang desselben, nicht auf gleich einfache Weise bewerkstelligt werden kann (s. S. 110). Bei der Schraube erzeugt man den Rückwärtsgang des Schiffes durch Umsteuern der Betriebsmaschine, indem man die Schraube in entgegengesetzter Richtung umdreht. Dieses Umsteuern der Dampfmaschinen bei den grossen Seedampfern ist bei den riesigen Dimensionen ihrer Maschinen und den enorm grossen bewegten Massen mit ganz bedeutenden Arbeitsverlusten verbunden; dass die Schraube überdies beim Rückwärtsgange weniger günstig arbeitet und das Schiff dem Steuer weniger willig folgt, ist eine bekannte Sache; ebenso dass die Schraube bei geringem Tiefgange des Schiffes, wie er auf Flüssen und Kanälen vorliegt, entweder gar nicht oder nur mit Nachtheil angewendet werden kann.

Beim Turbinenpropeller ist die Erzeugung des Rückwärtsganges durch Umkehrung der Drehrichtung des Laufrades vollständig ausgeschlossen, da ein Turbinenlaufrad immer in der gleichen Richtung umlaufen muss; man wird daher die Umkehrung der Bewegung auf andere Weise bewerkstelligen und zwar ist das bei den einzelnen Ausführungen durch Anwendung eines »Rückstrahlapparates« oder »Rückstrahlers« geschehen. Derselbe besteht bei kleineren Schiffen und der in Fig. 61*a* angedeuteten Anordnung aus zwei gekrümmten Röhren *RR* (Fig. 62) mit gemeinschaftlicher Eintrittsöffnung F_4, welche vor die Ausströmungsöffnung F_4 des Contractors gebracht wird, so dass das aus demselben tretende Wasser nahezu nach vorn gerichtet ausströmt. Die Reaction des ausströmenden Wassers treibt dann das Schiff rückwärts; bei kleineren Schiffen wird der Rückstrahler aus dem Wasser herausgehoben und zum Zwecke der Ueberführung zum Rückwärtsgange vor die Ausflussöffnung des Contractors hinabgeschoben; die Umkehrung der Richtung der treibenden Kraft geschieht dabei ohne Stoss und

Fig. 62.

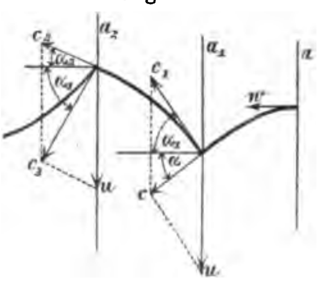


ohne jede Erschütterung des Schiffes, selbst wenn man während der Manipulation die Betriebsdampfmaschine mit voller Kraft weiter arbeiten lässt.

Es bedarf keines weiteren Hinweises, dass sowohl bezüglich der constructiven Ausführung des Turbinenpropellers, wie auch bezüglich seiner Lage innerhalb oder ausserhalb des Schiffskörpers sich sehr verschiedene Anordnungen denken lassen (vergl. Busley a. a. O.); es wird sich unten Gelegenheit bieten, auf einige darauf bezügliche Fragen zurückzukommen; an dieser Stelle mag nur noch hervorgehoben werden, dass der Propeller auch zum grossen Theile aus dem Wasser herausragen kann, wenn nur durch Anbringung einer Haube oder durch vollständige Ummantelung und durch ein Zuflussrohr die Herbeiführung des Wassers unter dem Wasserspiegel erfolgt, um dem Eindringen von Luft in den Apparat vorzubeugen.

Der nun folgenden theoretischen Untersuchung des Propellers soll die in Fig. 61 vorgeführte Anordnung zu Grunde gelegt und angenommen werden, dass sich das Schiff in ruhendem Wasser mit der Geschwindigkeit w fortbewege. Das Wasser tritt dann axial mit der relativen Geschwindigkeit w in den Leitapparat und verlässt die Contractormündung mit der relativen Geschwindigkeit c_4; für die Wassergeschwindigkeiten im Innern und für die Schaufelwinkel sollen die bisher benutzten Bezeichnungen beibehalten werden, wie sie in Fig. 63 wiederholt angegeben sind.

Fig. 63.



Da das Laufrad als Pumpe wirkt, so gelten hier ohne Weiteres eine Reihe von Formeln, die in Kapitel II, § 22 S. 233 abgeleitet worden sind.

Hier wie dort besteht zwischen den einzelnen Winkeln die Beziehung:

$$\operatorname{tg} \alpha_2 + \operatorname{tg} \alpha_3 = \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha_1, \tag{105}$$

wenn zunächst vom Einflusse der Schaufeldicken abgesehen wird.

Ist F_0 der Eintrittsquerschnitt im Leitapparate und F_4 der Austrittsquerschnitt im Contractor, so findet sich wegen $F_0 = 2rl\pi$

hier an Stelle der Gleichung (74):

$$w = c \cos \alpha = c_1 \cos \alpha_1 = c_2 \cos \alpha_2 = c_3 \cos \alpha_3 = \frac{F_4}{F_0} c_4. \qquad (106)$$

Die Betriebsarbeit für das Laufrad findet sich aus Gleichung (77) S. 221, und wenn man dort für die Umfangsgeschwindigkeit u nach Fig. 63

$$u = c_1 \sin \alpha_1 + c \sin \alpha$$

oder unter Benutzung vorstehender Gleichung

$$u = w(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha_1)$$

benutzt:

$$L = Mw^2 (\operatorname{tg} \alpha_3 - \operatorname{tg} \alpha)(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha_1). \qquad (107)$$

Führt man der Vereinfachung wegen bis auf Weiteres für die Winkelfunktion folgende Bezeichnung ein:

$$(\operatorname{tg} \alpha_3 - \operatorname{tg} \alpha)(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha_1) = \mathfrak{F}(\alpha), \qquad (108)$$

so schreibt sich einfacher:

$$L = Mw^2 \mathfrak{F}(\alpha). \qquad (107a)$$

Andererseits fand sich durch Gleichung (77a) S. 222 die Arbeit L auch:

$$L = \tfrac{1}{2} M[c_1^2 + c_3^2 - c^2 - c_2^2]. \qquad (109)$$

Bezeichnet man nun mit a den mittleren Druck vor dem Einlaufe, so ist dieser hier auch mit dem Drucke hinter der Contractorausmündung identisch; es ergeben sich daher ähnlich wie früher die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} a - a_1 &= (1 + \zeta_1)c^2 - w^2 \\ a_1 - a_2 &= (1 + \zeta_2)c_2^2 - c_1^2 \\ a_2 - a &= (1 + \zeta_3)c_4^2 - c_3^2, \end{aligned}\right\} \qquad (110)$$

wobei ζ_1, ζ_2, ζ_3 bez. die Widerstandscoefficienten für den Einlauf, für das Laufrad und für den Contractor bedeuten; will man hierbei den Coefficienten ζ_2 für das Laufrad ebenfalls auf den engeren Querschnitt, also auf F_1 beziehen, so ist $\zeta_2 c_1^2$ an Stelle von $\zeta_2 c_2^2$ zu setzen und die Addition vorstehender Gleichungen ergiebt dann für den Zusammenhang aller Geschwindigkeiten bei stossfreiem Durchgange die Grundgleichung:

$$c_1^2 + c_3^2 - c^2 - c_2^2 = c_4^2 - w^2 + \zeta_1 c^2 + \zeta_2 c_1^2 + \zeta_3 c_4^2. \quad (111)$$

Multiplicirt man diese Gleichung auf beiden Seiten mit $\frac{1}{2}M$, so folgt mit Rücksicht auf Gleichung (109) für die Betriebsarbeit L, welche das Laufrad fordert, noch eine dritte Gleichung, nämlich

$$L = \frac{M}{2}(c_4^2 - w^2) + \frac{M}{2}[\zeta_1 c^2 + \zeta_2 c_1^2 + \zeta_3 c_4^2]. \tag{112}$$

Das zweite Glied der rechten Seite umfasst, wie man sofort erkennt, den ganzen Arbeitsverlust, welcher den hydraulischen Widerständen im Innern des Apparates entspricht.

Bezeichnet man diesen Arbeitsverlust mit W, so findet sich unter Benutzung der Gleichungen (106):

$$W = \frac{Mw^2}{2}\left[\frac{\zeta_1}{\cos^2\alpha} + \frac{\zeta_2}{\cos^2\alpha_1} + \zeta_3\left(\frac{c_4}{w}\right)\right], \tag{113}$$

und nach Gleichung (112):

$$L - W = \frac{M}{2}(c_4^2 - w^2). \tag{112a}$$

Es sei nun weiter R der Widerstand, welchen das Schiff bei seiner Fortbewegung im ruhenden Wasser bei der Schiffsgeschwindigkeit w zu überwinden hat; dann ist die erforderliche Schiffstreibarbeit Rw. Diese muss gleich sein der Betriebsarbeit L vermindert um die Widerstandsarbeit W im Propeller und weiterhin um die Arbeit, welche der Wassermasse innewohnt, die mit der absoluten Geschwindigkeit $(c_4 - w)$ die Contractorausmündung F_4 verlässt. Man hat daher

$$Rw = L - W - \frac{M}{2}(c_4 - w)^2,$$

oder unter Benutzung von Gleichung (112a) die Schiffstreibarbeit nach einfacher Reduction:

$$Rw = Mw(c_4 - w), \tag{114}$$

und hieraus den Schiffswiderstand oder die Reaction des Propellers:

$$R = M(c_4 - w). \tag{115}$$

Diese Formel hätte nach den Darlegungen auf S. 105 ohne Weiteres angeschrieben werden können; es ist aber vorgezogen worden, auf dem vorstehenden Wege die Gleichung unabhängig von früher Gegebenem abzuleiten.

Gleichung (115) ist dieselbe, die auch für die Schiffsschraube und das Ruderrad gegeben wird, wobei man die Differenz $(c_4 - w)$ als »Rücklauf« bezeichnet; bei der theoretischen Behandlung stösst man aber dabei bezüglich der Bestimmung der wirksamen Wassermasse M und der hydraulischen Widerstände auf Schwierigkeiten, die bis jetzt noch nicht überwunden werden konnten. Die grossartigen Fortschritte der Neuzeit, insbesondere bezüglich der Construction der Schiffsschrauben, sind ausschliesslich auf empirischem Wege erzielt worden. In der Theorie des Turbinenpropellers lassen sich aber in präciser Weise die einzelnen Arbeitsquantitäten zum analytischen Ausdruck bringen.

Für die Berechnung eines zu construirenden Turbinenpropellers ist es nun erforderlich, die angegebenen Formeln praktisch verwerthbar zu machen.

Die Verbindung von Gleichung (109) und (107a) giebt:

$$c_1^2 + c_3^2 - c^2 - c_2^2 = 2w^2 \mathfrak{F}(\alpha).$$

Damit folgt aus Gleichung (111):

$$(1 + \zeta_3)c_4^2 = 2w^2 \mathfrak{F}(\alpha) + w^2 - \zeta_1 c^2 - \zeta_2 c_1^2,$$

und hieraus mit Beachtung der Beziehung (106):

$$(1 + \zeta_3)\left(\frac{c_4}{w}\right)^2 = 2\mathfrak{F}(\alpha) + \left(1 - \frac{\zeta_1}{\cos^2 \alpha} - \frac{\zeta_2}{\cos^2 \alpha_1}\right).$$

Setzt man nun der Abkürzung wegen

$$1 - \frac{\zeta_1}{\cos^2 \alpha} - \frac{\zeta_2}{\cos^2 \alpha_1} = \psi \tag{116a}$$

und bezeichnet man das Verhältniss $c_4 : w$ mit k, welcher Werth der Beschleunigungsmodul genannt werden mag, so folgt:

$$(1 + \zeta_3) k^2 = 2\mathfrak{F}(\alpha) + \psi. \tag{116}$$

Damit ergiebt sich mit Gleichung (107a) die Betriebsarbeit L für das Laufrad:

$$L = \frac{Mw^2}{2}((1 + \zeta_3) k^2 - \psi), \tag{117}$$

und da nach Gleichung (114) die Schiffstreibarbeit

$$Rw = Mw^2(k - 1) \tag{118}$$

folgt, so ergiebt sich durch Division der Wirkungsgrad η des Propellers:

$$\eta = \frac{2(k-1)}{(1+\zeta_3)k^2 - \psi}. \tag{119}$$

Da ψ nur von den Winkeln α und α_1 und den Widerstandscoefficienten ζ_1 und ζ_2 abhängt, auch ζ_3 als bekannt angesehen werden kann, so lässt sich der Wirkungsgrad η für einen beliebig gewählten Beschleunigungsmodul k berechnen.

Bei praktischer Ausführung wird man aber jederzeit den Werth k solcher Art annehmen, dass für η der Maximalwerth hervortritt.

Durch Differentiation der Gleichung (119) findet sich mit Leichtigkeit der vortheilhafteste Werth des Moduls k, der mit k_m bezeichnet werde, durch den Ausdruck:

$$k_m = 1 + \sqrt{1 - \frac{\psi}{1+\zeta_3}}. \tag{120}$$

Durch Benutzung dieses Werthes in Gleichung (110) ergiebt sich dann der Maximalwerth η_m des Wirkungsgrades, wie sich leicht nachrechnen lässt:

$$\eta_m = \frac{1}{(1+\zeta_3)k_m}. \tag{121}$$

Durch Gleichung (116) findet sich nun auch der vortheilhafteste Werth der Winkelfunktion $\mathfrak{F}(\alpha)$, oder wenn man für diese Gleichung (108) benutzt und $\operatorname{tg}\alpha_3$ durch Gleichung (105) ausdrückt:

$$(\operatorname{tg}\alpha_1 - \operatorname{tg}\alpha_2)(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha_1) = \tfrac{1}{2}[(1+\zeta_3)k_m^2 - \psi]. \tag{122}$$

Aus dieser Gleichung berechnet sich, da α und α_1 als gewählt vorausgesetzt werden, der Winkel α_2 und dann mit Hülfe von Gleichung (105) der Winkel α_3. Bei der Verwerthung der Gleichungen dürfte es zweckmässig erscheinen, die Winkel α und α_2 derart zu wählen, dass α_2 nicht zu klein erscheint, damit die Laufradkanäle sich nicht allzustark nach der Austrittsstelle hin erweitern.

Bemerkenswerth dürfte noch Folgendes sein. Die ganze für den Betrieb des Laufrades erforderliche Arbeit L theilt sich, wie bereits auf S. 245 angedeutet wurde, in drei Theile; der erste Theil umfasst die eigentliche Nutzarbeit, welche auf die Fortbewegung des Schiffes verwendet wird und welche, wenn die vortheilhafteste Beschleunigung k_m vorliegt, nach Gleichung (118) durch die Formel

$$2(k_m - 1) \cdot \frac{Mw^2}{2} \tag{123a}$$

gegeben ist. Der zweite Theil umschliesst die durch die hydraulischen Widerstände im Innern des Treibapparates verlorene Arbeit, welche sich nach Gleichung (113) mit Hülfe der oben eingeführten Bezeichnung berechnet durch die Formel

$$[\zeta_3 k_m^2 + 1 - \psi] \frac{Mw^2}{2}. \tag{123b}$$

Endlich geht durch die mit der absoluten Geschwindigkeit $c_4 - w$ durch die Contractorausmündung F_4 strömende Wassermasse die Arbeit

$$(k_m - 1)^2 \cdot \frac{Mw^2}{2} \tag{123c}$$

verloren. Die Addition der drei Formeln, die übrigens auch für andere Werthe von k gelten, führt ganz richtig wieder auf Gleichung (117).

Um einen Einblick in die wirklichen Verhältnisse zu gewähren, dürfte es zweckmässig erscheinen, ein Beispiel zu berechnen. Von besonderer Wichtigkeit ist hierbei die Wahl der Widerstandscoefficienten ζ_1, ζ_2 und ζ_3; es möge für jede der drei Grössen der Werth 0,125 angenommen werden, wenn auch dieser Werth, der bereits oben bei der Berechnung von Turbinen und der Axialpumpe angewendet wurde, für den Leitapparat und das Laufrad wohl etwas zu gross sein dürfte; die Effectberechnung des Propellers wird daher etwas ungünstigere Resultate ergeben, als sie in Wirklichkeit vorliegen.

Angenommen, der Turbinenpropeller besitze keinen Leitapparat, wie das bei den bisherigen praktischen Ausführungen der Fall ist, das Wasser trete also in axialer Richtung direct in das Laufrad ein, so ist $\alpha = 0$ und ebenso $\zeta_1 = 0$; wählt man $\alpha_1 = 55^\circ$, so berechnet sich mit Gleichung (116a) $\psi = 0{,}6201$, dann nach Gleichung (120) der vortheilhafteste Beschleunigungsmodul $k_m = 1{,}670$ und nach Gleichung (121) der Maximalwirkungsgrad:

$$\eta_m = 0{,}532.$$

Aus Gleichung (122) folgt weiter $\alpha_2 = 28^\circ 40'$ und nach Gleichung (105) der Schaufelwinkel für den Contractor $\alpha_3 = 41^\circ 23'$. Nach den Gleichungen (123a,b,c) betragen die daselbst besprochenen drei Arbeitsquantitäten bez.

$$1{,}340 \cdot \frac{Mw^2}{2}, \qquad 0{,}728 \cdot \frac{Mw^2}{2}, \qquad 0{,}449 \cdot \frac{Mw^2}{2};$$

deren Summe ergiebt die Betriebsarbeit für das Laufrad

$$L = 2{,}517 \cdot \frac{Mw^2}{2},$$

zu der die Summanden in den Verhältnissen stehen

$$0{,}532, \qquad 0{,}289, \qquad 0{,}179.$$

Das zweite Glied, welches dem eigentlichen hydraulischen Arbeitsverluste entspricht, erscheint ziemlich gross, und man kann geneigt sein, anzunehmen, dass gerade dieser Verlust bei der Schiffsschraube kleiner sein müsste, weil hier gewöhnlich nur von der Reibung des Wassers an den Flügelflächen gesprochen wird. In Wirklichkeit sind aber directe Vergleiche nicht statthaft, weil bei der Schraube zugleich eine centrifugale Beschleunigung des Wassers vorliegen wird, die beim Turbinenpropeller in Wegfall kommt. Ist L_i die indicirte Arbeit der Betriebsdampfmaschine, und setzt man die Betriebsarbeit L für das Laufrad $L = \eta_1 L_i$, so folgt das Verhältniss der Treibarbeit für das Schiff zur indicirten Dampfmaschinenarbeit:

$$\frac{Rw}{L_i} = \eta_1 \eta_m,$$

und daher für vorliegendes Beispiel mit $\eta_1 = 0{,}825$ (unter gleichzeitiger Berücksichtigung der Zapfenreibung an der Turbinenwelle):

$$\eta_1 \eta_m = 0{,}449,$$

welcher Werth nur wenig grösser erscheint, als er in der englischen Marine für grosse Schraubendampfer gefunden worden ist (s. S. 113); dabei ist aber zu bemerken, dass im vorliegenden Beispiele, um völlig sicher zu gehen, die hydraulischen Widerstände hoch in Rechnung gestellt worden sind. Würde auch der Werth $\zeta_3 = 0{,}125$ für den Contractor beibehalten, so hätte doch ganz wohl für das Laufrad $\zeta_2 = 0{,}1$ eingeführt werden können (Weisbach setzt für Turbinen den Mittelwerth 0,075); auch durch Verkleinerung des Winkels α_1 wären die Resultate günstiger ausgefallen. Auf dem gleichen Wege hätte sich z. B. für $\alpha_1 = 50^\circ$ und $\zeta_1 = 0{,}1$ ergeben $\eta_m = 0{,}566$ und $\eta_1 \eta_m = 0{,}467$, wobei sich dann die anderen Schaufelwinkel zu $\alpha_2 = 19^\circ 0'$ und $\alpha_3 = 40^\circ 16'$ herausgestellt haben würden.

Die gesammten vorstehenden Untersuchungen konnten durchgeführt werden, ohne dass über die eigentliche Leistung und Grösse des Propellers weitere Angaben vorzuliegen brauchten. Bezeichnet nun, wie oben, R den Widerstand, welchen das Schiff bei seiner Fortbewegung im ruhenden Wasser mit der Geschwindigkeit w zu überwinden hat, so gilt nach Gleichung (118) die Beziehung

$$R = M(c_1 - w) = Mw(k - 1).$$

Ist F_0 der Eintrittsquerschnitt in das Leitrad, so folgt:

$$M = \frac{F_0 w \gamma}{g}$$

und damit:

$$R = \frac{F_0 \gamma}{g} w^2 (k - 1). \tag{124}$$

Ist der Widerstand R für das Schiff für eine vorgeschriebene Geschwindigkeit w bekannt, so liesse sich aus vorstehender Gleichung für den angenommenen Beschleunigungsmodul k der Querschnitt F_0 und damit der Laufradradius r bei bestimmter radialer Radweite l berechnen.

Man stösst nun hier auf dieselbe Schwierigkeit, die bei der Berechnung aller neuen Schiffstreibapparate bezüglich der Bestimmung des Schiffswiderstandes R hervortritt; es ist bekanntlich nicht möglich eine Formel abzuleiten, nach welcher sich aus der Form und Grösse des Schiffskörpers der Widerstand R berechnen lässt, und schwierig, unter den verschiedenen empirischen Formeln, welche aufgestellt worden sind, die rechte Auswahl zu treffen; bei Flüssen und Kanälen tritt auch noch der bedeutende Einfluss ins Spiel, welchen der Querschnitt des Wasserlaufes und die Wassertiefe auf die Grösse des Widerstandes ausübt.

Gerade bei der Berechnung des Turbinenpropellers muss man sich sichern, dass der in Rechnung zu stellende Widerstand der Wirklichkeit so nahe wie möglich kommt; man wird daher das betreffende Schiff in verkleinertem Modell ausführen und mit demselben nach der Froude'schen Methode durch Schleppversuche in einem Versuchskanale den Widerstand bestimmen und in der bekannten Weise auf die Grösse des Widerstandes beim wirklichen Schiffe Schlüsse ziehen*), sofern nicht Beobachtungen an Schiffen von nahezu gleicher Form und Grösse verwerthet werden können.

---

*) Busley, »Turbinenpropeller mit Contractor«. Zeitschrift d. Ver. deutscher Ing. 1894, Bd. 38, S. 5.

Ist für die vorgeschriebene Fahrgeschwindigkeit w der Widerstand R mit hinreichender Sicherheit bestimmt, so ist die Wassermenge V in Cubikmetern, welche in der Secunde durch den Propeller getrieben werden muss:

$$V = F_0 w,$$

und daher folgt aus Gleichung (124):

$$V = \frac{gR}{\gamma w(k-1)}, \tag{125}$$

wobei man für k den vortheilhaftesten Werth nach Gleichung (120) benutzen wird, da die Winkel α und α_1 als gewählt vorausgesetzt werden. Ohne Rücksicht auf die Schaufeldicken folgt die Beziehung:

$$V = 2\pi r l w.$$

Bezeichnet man das Verhältniss der radialen Radweite zum mittleren Laufradhalbmesser, also $l:r$, mit μ, so folgt aus vorstehender Formel:

$$r = \sqrt{\frac{V}{2\pi\mu w}} \quad \text{und} \quad l = \mu r, \tag{126}$$

wobei man μ zwischen 0,3 und 0,6 wählen kann und zwar derart, dass für r und l annehmbare Werthe hervortreten, die aber mit Rücksicht auf die Schaufeldicken noch eine Abänderung erfahren. Sind bez. σ, σ_1, σ_2 die Schaufeldicken im Leitrad, Laufrad und Contractor und bedeuten z, z_1 und z_2 die zugehörigen Schaufelzahlen, so ergeben sich nach den Gleichungen (1), (2) und (3a) S. 179 für vorliegenden Fall die normalen Kanalquerschnitte aus den Formeln:

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= (2r\pi \cos\alpha_1 - z_1\sigma_1)l, \\ F_2 &= 2r\pi \cos\alpha_2 - (z_1\sigma_1)l, \\ F_3 &= (2r\pi \cos\alpha_3 - z_2\sigma_2)l \\ \text{und} \qquad F &= (2r\pi \cos\alpha - z\sigma)l, \end{aligned}\right\} \tag{127}$$

und dabei ist:

$$V = F_0 w = F_1 c_1 = F_2 c_2 = F_3 c_3 = F_4 c_4. \tag{128}$$

Hält man an dem früher bestimmten Werthe der Winkel α_1 und α_2 fest, so ermittelt sich mit Beachtung der Beziehungen $V = F_1 c_1$ und $w = c_1 \cos\alpha_1$ aus der ersten der Gleichungen (127) der richtige Werth l der radialen Radweite unter Berücksichtigung der Schaufeldicke:

$$l = \frac{V \cos \alpha_1}{w(2 r \pi \cos \alpha_1 - z_1 \sigma_1)}, \tag{129}$$

wenn man bezüglich der Schaufelzahl z_1 und der Schaufelstärke σ_1 eine bestimmte Wahl getroffen hat.

Dann berechnet sich mit Hülfe der zweiten Gleichung:

$$c_2 = \frac{V}{F_2} = \frac{V}{(2 r \pi \cos \alpha_2 - z_1 \sigma_1) l}, \tag{130}$$

welcher Werth etwas verschieden von dem früher berechneten ausfällt.

Die Umdrehungsgeschwindigkeit u findet sich nach Fig. 63 aus

$$u = \frac{c_1 \sin(\alpha + \alpha_1)}{\cos \alpha} = w(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha_1). \tag{131}$$

Wegen der Veränderung von c_2 tritt auch, alles in Folge der Einführung der Schaufeldicken, eine geringe Aenderung des Winkels α_3 ein, und zwar bestimmt sich α_3, immer stossfreien Durchgang vorausgesetzt, aus der Formel nach Fig. 63:

$$\operatorname{tg} \alpha_3 = \frac{u - c_2 \sin \alpha_2}{c_2 \cos \alpha_2}, \tag{132}$$

und dann die Geschwindigkeit c_3 aus der Beziehung:

$$c_3 = \frac{c_2 \cos \alpha_2}{\cos \alpha_3}. \tag{133}$$

Aus der dritten der Gleichungen (127) folgt:

$$V = (2 r \pi \cos \alpha_3 - z_2 \sigma_2) l c_3, \tag{134}$$

woraus sich das Product $z_2 \sigma_2$ berechnet, und daraus ergiebt sich, wenn man die Schaufeldicke σ_2 wählt, die erforderliche Anzahl z_2 der Schaufeln im Contractor.

Auch der Winkel α erleidet eine entsprechende Aenderung. Durch die Formel

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{u - c_1 \sin \alpha_1}{c \cos \alpha_1}$$

folgt α und dann aus

$$c = \frac{c_1 \cos \alpha_1}{\cos \alpha}$$

die Geschwindigkeit c, worauf sich aus der vierten der Gleichungen (127)

$$V = (2r\pi \cos\alpha - z\sigma)lc$$

bei bestimmter Annahme von σ die Schaufelzahl z im Einlauf berechnet.

Wegen des veränderten Werthes von c_2 stellt sich endlich auch nach der Gleichung (119) S. 95

$$L = Mu(c_1 \sin\alpha_1 - c_2 \sin\alpha_2)$$

die Betriebsarbeit für das Laufrad etwas anders heraus.

Numerisches Beispiel. Für einen kleinen Flussdampfer, welcher mit der Geschwindigkeit $w = 4$ m, auf ruhendes Wasser bezogen, fahren soll, ist durch Vorversuche für diese Geschwindigkeit der vom Schiffe zu überwindende Widerstand $R = 225$ kg gefunden worden.

Für denselben soll ein Turbinenpropeller nach der Anordnung in Fig. 61 berechnet werden; der Leitapparat soll fehlen, also das Wasser relativ mit der Geschwindigkeit $c = w$ axial in das Laufrad eintreten.

Als Grundannahmen sollen diejenigen gewählt werden, welche in dem Beispiele S. 248 gegeben worden sind; es sei also $\alpha_1 = 55^\circ$, $\alpha_2 = 28^\circ 40'$ und der für den Maximalwirkungsgrad abgeleitete Werth des Beschleunigungsmoduls $k = 1{,}670$.

Hier findet sich zuerst die Wassermenge V in Cubikmetern, welche in der Secunde durch den Propeller getrieben werden muss, nach Gleichung (125):

$$V = 0{,}8235.$$

Wählt man $\mu = 0{,}5$, so folgt nach den Gleichungen (126) vorläufig ohne Rücksicht auf Schaufeldicke

$$r = 0{,}256 \text{ m} \quad \text{und} \quad l = 0{,}128 \text{ m}.$$

Man wähle nun definitiv den Radius des Laufrades $r = 0{,}255$, gebe dem Rade $z_1 = 20$ Schaufeln bei $\sigma_1 = 4$ mm Schaufeldicke, setze also $z_1\sigma_1 = 0{,}08$, dann folgt aus Gleichung (129) der richtige Werth der radialen Radweite

$$l = 0{,}140 \text{ m},$$

und damit der äussere Durchmesser des Laufrades

$$2r + l = 0{,}650 \text{ m}.$$

Nach der ersten und zweiten der Gleichungen (127) berechnen sich dann die normalen Durchgangsquerschnitte F_1 und F_2 an der Ein- und Austrittsstelle des Laufrades:

$$F_1 = 0{,}1176 \quad \text{und} \quad F_2 = 0{,}1856 \text{ qm}.$$

Aus der Beziehung $V = F_2 c_2$ bestimmt sich nun $c_2 = 4{,}437$ m, und nach Gleichung (131), da $\alpha = 0$ angenommen wurde, die mittlere Umdrehungsgeschwindigkeit u des Laufrades

$$u = 5{,}713 \text{ m},$$

wonach sich die erforderliche Anzahl n der Umdrehungen in der Minute:

$$n = 214$$

herausstellt.

Mit Hülfe der Gleichung (132) berechnet sich

$$\alpha_3 = 42^\circ 38'$$

an Stelle von $41^\circ 23'$ der früheren Annahme. Aus Gleichung (133) folgt nun $c_3 = 5{,}292$ m und aus der Beziehung $V = F_3 c_3$ der normale Anfangsquerschnitt F_3 im Contractor

$$F_3 = 0{,}1556 \text{ qm}$$

und dann aus der dritten der Gleichungen (127)

$$z_2 \sigma_2 = 0{,}067 \text{ qm},$$

woraus sich bei $\sigma_2 = 4$ mm Schaufeldicke die erforderliche Schaufelzahl z_2 im Contractor $z_2 = 17$ ergiebt.

Die Geschwindigkeit c_4, mit welcher das Wasser die Contractormündung F_4 verlässt, findet sich aus Gleichung (111) S. 244, weil hier $w = c$ und $\zeta_1 = 0$ ist:

$$c_4 = kw = 6{,}828 \text{ m},$$

und daher folgt der Querschnitt F_4 aus der Beziehung $V = F_4 c_4$:

$$F_4 = 0{,}1206 \text{ qm}.$$

Bei kreisförmiger Mündung entspricht diesem Querschnitte ein Strahldurchmesser von 0,392 m.

Der dem Beispiele zu Grunde gelegte Werth von $R = 225$ kg entspricht dem kleinen Schraubendampfer »Elbfee«, welcher der Schiffahrtsgesellschaft »Kette« in Dresden gehört; auf dem der Gesellschaft gehörenden hydraulischen Observatorium der Schiffswerft Uebigau bei Dresden*) wurde durch Modell-Schleppversuche der Widerstand $R = 200$ kg gefunden; später bei den Fahrten auf der Elbe selbst mit Hülfe eines Druckdynamometers, ähnlich dem, welches Isherwood benutzte; dabei fand sich $R = 227$ kg bei

*) Die Anlage ist beschrieben und gezeichnet bei H. Engels, »Modellversuche über den Einfluss der Form und Grösse des Kanalquerschnittes auf den Schiffswiderstand«. Berlin 1898. W. Ernst & Sohn.

$w = 3{,}78$ m Schiffsgeschwindigkeit, auf ruhendes Wasser bezogen. Die ersten Versuche mit dem Schiffe fanden, um einen Vergleich zu ermöglichen, zuerst mit der Schraube statt, welche einen Durchmesser von 0,690 m hatte und im Mittel 360 Umdrehungen in der Minute aufwies.

Später wurde dann auf die Schraubenwelle ein Turbinenpropeller aufgesetzt, der aber etwas andere Dimensionen haben musste, als die obigen Rechnungen fordern, also nicht unter den vortheilhaftesten Verhältnissen arbeiten konnte, weil es darauf ankam, den Propeller zugleich der vorhandenen Betriebsdampfmaschine und der bezeichneten Umdrehungszahl der Schraube anzupassen; trotzdem zeigte sich der Turbinenpropeller selbst bei seinem geringeren äusseren Durchmesser von 0,574 m der Schraube überlegen.

Ueber die Dimensionen der »Elbfee«, die des Propellers und über die Versuchsergebnisse berichtet Busley (a. a. O. S. 4).

In neuester Zeit ist der Turbinenpropeller mit wesentlichem Vortheil bei Kettendampfern in Anwendung gekommen; auf der Elbe bewegen sich zwei derartige neue Dampfer zwischen Magdeburg und Dresden, und neuerdings ist ein solcher von der Schiffswerft Uebigau bei Dresden an die kgl. bayer. Generaldirection der Staatseisenbahnen für die Main-Kettenschifffahrt, Strecke Würzburg-Aschaffenburg geliefert worden, dem zwei weitere Schiffe gleicher Construction folgen sollen. Diese Schleppdampfer gehen stromaufwärts an der Kette; die Kette geht aber nicht, wie bei den älteren Kettendampfern, über Rollen, die sie umschlingen, sondern wird durch das sinnreiche Bellingrath'sche Kettengreifrad angehoben und geleitet. Dadurch fallen die übermässigen Spannungen fort, welche die Kette auf und zwischen den Rollen erleidet und welche vorzugsweise zu den häufig stattfindenden Kettenbrüchen Anlass gaben.

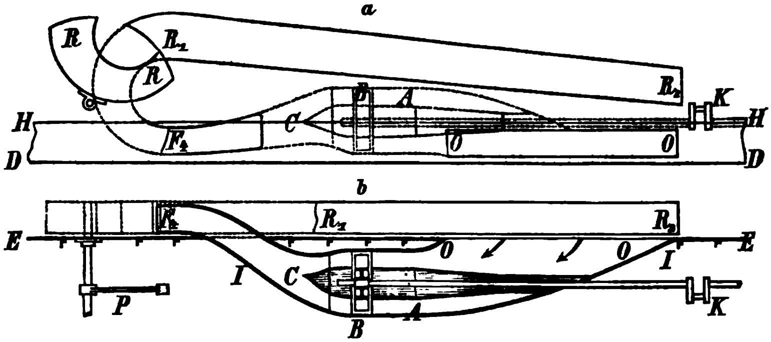
Stromabwärts gehen diese Dampfer ausserhalb der Kette unter der Wirkung der Turbinenpropeller, natürlich gleichfalls schleppend. Dadurch wird eine weitere und zwar bedeutende Schonung der kostspieligen Kette erzielt und zugleich fällt das lästige Oeffnen und Schliessen der Kette beim Begegnen zweier einander entgegenkommender Kettendampfer fort.

Fig. 64 *a* (S. 256) zeigt in Skizze den Aufriss und Fig. 64 *b* den Grundriss der Turbinenanordnung beim Main-Kettendampfer. Das Schiff hat in der Wasserlinie eine Länge von 46 m, eine Breite von

6,4 m und betriebsfertig mit 1500 kg Kohlen nur einen Tiefgang von 0,56 m.

Das Schiff besitzt zwei im Innern *II* liegende Propeller, auf jeder Schiffsseite einen, jeder durch eine besondere Dampfmaschine mittels der Kurbel *K* direct angetrieben. *HH* ist der Wasserspiegel und *DD* Fig. 64*a* der Schiffsboden; *EE* die Schiffsseitenwand (Fig. 64*b*), in welcher sich die rectanguläre Eintrittsöffnung *OO* für das Wasser befindet, die durch horizontal liegende Schienen rechenartig gebildete Durchlassspalten enthält, um den Eintritt fremder, fester Körper zu verhindern, da die Turbine stark saugend wirkt. Durch die Eintrittsöffnung *OO* tritt das Wasser in den ringsum geschlossenen Raum *A* und von hier, bei allmählich sich verminderndem Durchflussquerschnitt und ohne Leitschaufeln, in das Laufrad *B*, um dann in den Contractor *C* zu

Fig. 64.



gelangen. Das Ende des Contractors tritt aus der Schiffswand *EE* heraus, die Ausflussmündung F_4 ist rectangulär und durch dieselbe strömt dann das Wasser mit der Geschwindigkeit c_4 rückwärts aus. Zur Erzielung des Rückwärtsganges des Schiffes dient der Rückstrahler *RR*, ein gekröpftes Rohr von rectangulärem Querschnitte, welches durch den Hebel *P* in die punktirt gezeichnete Lage gebracht wird. Das Wasser strömt dann durch die Krümmung *RR* nach dem geneigt nach vorn liegenden Rohre $R_1 R_2$ und durch die Oeffnung R_2 ins Freie. Die Länge des Rohres ist so gewählt, dass die Austrittsöffnung R_2 noch vor die Eintrittsöffnung *OO* zu liegen kommt, um eine Störung des eintretenden Wassers zu vermeiden. Diese von Bellingrath angegebene Einrichtung des Rückstrahlers hat sich sehr gut bewährt. Der Durchmesser der Laufräder beider Turbinen beträgt 0,850 m, sodass nahezu die obere Hälfte über dem Wasserspiegel liegt; die Beobachtung zeigt, dass unmittelbar nach dem Anlaufe das ganze Gehäuse mit Wasser gefüllt und alle Luft ausgetrieben ist, nur darf die obere Kante des Eintrittskanales OO nicht über den Wasserspiegel HH heraustreten, weil in diesem Falle zugleich Luft angesaugt würde. Wegen der dabei auftretenden hydraulischen Widerstände beim Einlaufe wären die oben vorgeführten theoretischen Untersuchungen etwas zu erweitern, doch soll hier von einer Ergänzung jener Betrachtungen abgesehen werden.

§ 25. Untersuchung eines bestehenden Turbinenpropellers. Durchgang des Wassers bei beliebiger Schiffsgeschwindigkeit und Umdrehungszahl des Laufrades.

Den nachfolgenden Untersuchungen dienen als Grundlage die Entwickelungen in § 11 S. 125. Es soll wieder ein Schiff mit einem Propeller nach der Anordnung Fig. 61 S. 240 vorausgesetzt werden; das Schiff soll im ruhenden Wasser gehen und es soll angenommen werden, wie das bei den bis jetzt ausgeführten Propellern der Fall war, dass kein Leitapparat vorliegt, das Wasser also direct axial in das Laufrad eintritt.

Hier findet sich zunächst wegen $c = 0$ und $\alpha = 0$ die relative Zutrittsgeschwindigkeit c_0 nach dem Laufrade aus Gleichung (144) S. 128:

$$c_0 = u \sin \alpha_1 + w \cos \alpha_1, \tag{135}$$

und die relative Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser aus dem Laufrade an der Contractorschaufel in der Richtung von c_3 anlangt und welche vorübergehend mit c_n bezeichnet werden mag:

$$c_n = c_2 \cos (\alpha_2 + \alpha_3) + u \sin \alpha_3. \tag{136}$$

Ist a_1 der Druck vor dem Laufrade und a_1' der Druck nach dem Eintritte, so ist die Druckänderung $(a_1' - a_1)$ in Folge der plötzlichen Geschwindigkeitsänderungen nach dem auf S. 128 Vorgeführten bestimmt durch die Gleichung:

$$2g(a_1 - a_1') = (\zeta_0 c_0 + \zeta c_1)(c_1 - c_0), \tag{137}$$

wobei ζ_0 als Stosscoefficient und ζ als Eintrittscoefficient bezeichnet worden ist.

Ist a_2 der Druck an der Austrittsstelle des Laufrades, so folgt nach früheren Sätzen

$$2g(a_1' - a_2) = c_2^2 - \zeta_2 c_1^2 - c_1^2, \tag{138}$$

wobei der Widerstandscoefficient ζ_2 auf die Eintrittsstelle des Laufrades bezogen ist. Für den Uebertritt aus dem Laufrade in den Contractor ist, weil der Druck a_2 wegen des Stosses in den Werth a_2' übergeht:

$$2g(a_2 - a_2') = \zeta c_3(c_3 - c_n), \tag{139}$$

und endlich gilt für den Durchgang durch den Contractor die Formel:

$$2g(a_2' - a_1) = (1 + \zeta_3)c_4^2 - c_3^2, \tag{140}$$

weil ausserhalb der Contractormündung wieder der Druck a_1 vorliegt.

Addirt man die vorstehenden vier Gleichungen, so ergiebt sich:

$$[(1 + \zeta_3)c_4^2 + c_2^2 - (\zeta_2 - 1)c_1^2 - c_3^2] + (\zeta_0 c_0 + \zeta c_1(c_1 - c_0) \\ + \zeta c_3(c_3 - c_n) = 0. \tag{141}$$

Für stossfreien Durchgang ist nun $c_1 = c_0$ und $c_3 = c_n$ und daher für diesen Fall:

$$(1 + \zeta_3)c_4^2 + c_2^2 - (\zeta_2 - 1)c_1^2 - c_3^2 = 0,$$

welche Gleichung der oben vorgeführten Berechnung eines neuen Propellers zu Grunde gelegt worden ist.

Ist der Propeller für stossfreien Durchgang berechnet worden, was im Folgenden vorausgesetzt werden soll, so folgt allgemein nach Gleichung (141) die Gleichung

$$(\zeta_0 c_0 + \zeta c_1)(c_1 - c_0) + \zeta c_3(c_3 - c_n) = 0$$

für eine beliebige andere Schiffsgeschwindigkeit w und andere Umdrehungsgeschwindigkeit u.

Nimmt man, wie es bereits oben geschehen ist, die beiden z. Z. noch unsicher bestimmten Coefficienten ζ_0 und ζ gleich gross, so folgt aus der letzten Gleichung:

$$c_1^2 + c_3^2 - c_3 c_n = c_0^2.$$

Benutzt man nun hier die Beziehungen:

$$V = F_4 c_4 = F_3 c_3 = F_2 c_2 = F_1 c_1 \tag{142}$$

und überdies die Gleichungen (135) und (136) und setzt man zur Abkürzung:

$$\left(\frac{F_4}{F_1}\right)^2 + \left(\frac{F_4}{F_3}\right)^2 - \frac{F_4{}^2}{F_2 F_3} \cos(\alpha_2 + \alpha_3) = A, \tag{143a}$$

$$\frac{1}{2}\frac{F_4}{F_3} \sin\alpha_3 = B, \tag{143b}$$

so ergiebt sich, wie leicht verfolgt werden kann, die Gleichung:

$$A c_4 = B u + \sqrt{A(u \sin\alpha_1 + w \cos\alpha_1)^2 + B^2 u^2}. \tag{144}$$

Da für den angenommenen Propeller sich die Grössen A und B leicht berechnen lassen, so ergiebt sich aus vorstehender Gleichung für einen angenommenen Werth der Schiffsgeschwindigkeit w und der Umdrehungsgeschwindigkeit u des Laufrades die Geschwindigkeit c_4, mit welcher das Wasser die Austrittsmündung F_4 des Contractors verlässt; das Wasservolumen V, welches in der Secunde durch den Propeller geht, findet sich aus Gleichung (142) und dann aus der Beziehung $Mg = V\gamma$ die entsprechende Wassermasse M.

Die Betriebsarbeit L findet sich dann aus Gleichung (146) S. 129 (wo L als gewonnene Arbeit angeschrieben wurde) wegen $c = 0$:

$$L = Mu(u - c_2 \sin\alpha_2) - Mw(c_2 \cos\alpha_2 - w) + \frac{\zeta_0 \gamma}{2\gamma} F_1 c_0{}^2 (c_0 - c_1), \tag{145}$$

und die Treibkraft R für das Schiff, wenn man in Gleichung (142a) S. 129 zu der Reaction Y die Reaction $M(c_4 - c_2 \cos\alpha_2)$ im Contractor addirt:

$$R = M(c_4 - w) - \frac{\zeta_0 \gamma}{2\gamma} F_1 c_0 (c_0 - c_1) \cos\alpha_1, \tag{146}$$

wobei in beiden Formeln c_0 durch Gleichung (135) bestimmt ist.

Der Wirkungsgrad η ermittelt sich aus dem Verhältniss $Rw : L$, und damit wäre die Frage auch für den allgemeinen Fall beantwortet.

Von besonderem Interesse ist der Specialfall, dass der Propeller bei stillstehendem Schiffe im ruhenden Wasser in Umdrehung gesetzt wird; auch deshalb, weil in diesem Falle auf dem Versuchswege sehr leicht die Zuverlässigkeit vorstehender Entwickelungen sich prüfen lässt.

Unter der angegebenen Voraussetzung ist $w = 0$ zu setzen und so ergiebt sich aus Gleichung (135):

$$c_0 = u \sin \alpha_1 ,$$

und nach Gleichung (144):

$$A c_4 = (B + \sqrt{A \sin^2 \alpha_1 + B^2})\, u ,$$

wonach also c_4, sowie die durchgehende Wassermenge $V = F_4 c_4$ und die Wassermasse M, aus $Mg = V\gamma$ bestimmt, der beliebig vorausgesetzten Umdrehungsgeschwindigkeit u direct proportional ist.

Die Geschwindigkeiten c_1, c_2 und c_3 berechnen sich aus der Beziehung $V = F_1 c_1 = F_2 c_2 = F_3 c_3$, und da auch $Mg = F_1 c_1 \gamma$ ist, so ergiebt sich nach Gleichung (145) die Betriebsarbeit L für das Laufrad:

$$L = M\left[(u - c_2 \sin \alpha_2)\, u - \tfrac{1}{2} \zeta_0 c_0^2 \left(1 - \frac{c_0}{c_1}\right)\right],$$

und die Treibkraft des Propellers unter der angegebenen Voraussetzung:

$$R = M\left[c_4 + \tfrac{1}{2} \zeta_0 \left(1 - \frac{c_0}{c_1}\right) c_0 \cos \alpha_1\right].$$

Es ergiebt sich aus diesen Formeln, dass die Arbeit L mit u^3 und die Treibkraft R mit u^2 proportional ist. Im Uebrigen ist nach Früherem bis auf Weiteres $\zeta_0 = 1,25$ anzunehmen.

Beispiel. Bei einem ausgeführten Turbinenpropeller war der mittlere Radius des Laufrades $r = 0,220$ m, die radiale Radweite betrug $l = 0,134$ m; Rad und Contractor hatten bei $\sigma = 4$ mm Schaufeldicke jedes 20 Schaufeln. Die Schaufelwinkel waren $\alpha_1 = 60^\circ$, $\alpha_2 = 43^\circ 32'$ und $\alpha_3 = 40^\circ 32'$, und die einzelnen Querschnitte betrugen in Quadratmetern:

$$F_1 = 0,08175, \quad F_2 = 0,12356, \quad F_3 = 0,12950 \quad \text{und} \quad F_4 = 0,09340.$$

Es ist das der oben im Beispiele S. 253 erwähnte Propeller des Dampfbootes »Elbfee«, mit welchem die vergleichenden Versuche mit der Schiffsschraube (Busley, a. a. O. S. 4) gemacht worden sind, der aber aus oben angegebenen Gründen nicht die vortheilhaftesten Dimensionen erhalten konnte. Dieser Propeller giebt für den im Vorstehenden behandelten Specialfall $w = 0$ folgende Rechnungsresultate.

Zuerst ergeben die Gleichungen (143a und b) die beiden dort eingeführten Hülfsgrössen $A = 1,7691$, $B = 0,2348$; damit folgt aus den zuletzt entwickelten Formeln:

$$c_4 = 0,7972 \cdot u; \qquad c_0 = 0,8660 \cdot u; \qquad c_1 = 0,9108 \cdot u$$
$$c_2 = 0,6026 \cdot u; \qquad c_3 = 0,5750 \cdot u; \qquad V = F_4 c_4 = 0,0745 \cdot u$$
$$M = 7,5902 \cdot u.$$

Die vorstehende Formel für die Betriebsarbeit L, welche das Laufrad fordert, giebt:

$$L = 0,5619 \cdot Mu^2 = 4,2648 \cdot u^3$$

und für die Treibkraft des Propellers folgt:

$$R = 0,8105 \cdot Mu = 6,1518 \cdot u^2.$$

Für die Umdrehungsgeschwindigkeit u lässt sich in vorstehenden Resultaten die Umdrehungszahl n des Laufrades in der Minute substituiren; da $r = 0,220$ ist, so findet sich die Beziehung: $u = 0,02304 \cdot n$.

Der hier berechnete Werth der Treibkraft R stimmt durchaus befriedigend mit den Ergebnissen von Versuchen überein, welche mit dem erwähnten Schiffe beim Stillstand im ruhenden Wasser mit dem der Rechnung zu Grunde gelegten Turbinenpropeller ausgeführt wurden, wie folgende Zusammenstellung zeigt.

In einem Elbhafen mit ruhendem Wasser wurde das Schiff durch ein Seil am Ufer festgelegt und bei verschiedenen Umdrehungszahlen des Laufrades durch ein im Seile eingeschaltetes Dynamometer die Zugkraft R, mit welcher der Propeller das Schiff fortzubewegen suchte, beobachtet. Eine gleichzeitige Bestimmung der indicirten Arbeit der Dampfmaschine fand dabei aber nicht statt.

Umdrehungen in der Minute Beobachtet	R Treibkraft des Propellers in kg		Wassermenge V cbm in der Secunde Berechnet	Betriebsarbeit für das Laufrad in Pferdestärken Berechnet
	Beobachtet	Berechnet		
120	45	47,0	0,2059	1,20
149	71	72,4	0,2556	2,31
198	133	127,9	0,3397	5,40
250	191	203,9	0,4289	10,87
304	304	301,5	0,5215	19,54

Bei der zuletzt angegebenen Umdrehungszahl $n = 304$ entwickelte die Dampfmaschine bei normaler Fahrt 22,55 Pferdestärken indicirt bei 10 kg:qcm Dampfüberdruck im Kessel. Beim letzten Versuche war demnach die Leistungsfähigkeit der Betriebsmaschine erreicht, wie auch die Beobachtung bestätigt.

Bei den vorstehenden Versuchen wurde die aufgewendete Arbeit dazu verwendet, die Wassermasse in die Geschwindigkeit c_4 zu versetzen; die erforderliche Arbeit ist mit obigen Angaben:

$$\tfrac{1}{2} M c_4^2 = 2{,}4117\, u^3$$

und dies mit dem Werthe $L = 4{,}2648\, u^3$ verglichen, giebt das Verhältniss 0,566, welches also bei allen Umdrehungsgeschwindigkeiten den gleichen Werth hat.

Zusatz. Zur Theorie des Luftpropellers.

Es liegt der Gedanke nahe, wie die Schiffsschraube auch den Turbinenpropeller für die Luftschifffahrt in Vorschlag zu bringen; die Frage hat wenigstens vorläufig ein theoretisches Interesse, weil beim Turbinenpropeller sich die Vorgänge auf dem Rechnungswege verfolgen lassen, was bei der Schraube keineswegs in gleichem Maasse der Fall ist.

Die oben bei der Untersuchung des Axialventilators entwickelten Formeln auf S. 230 bis 237 sind absichtlich in ausführlicherer Weise, als es für jene Zwecke nothwendig gewesen wäre, vorgeführt worden; es sollten die Grundlagen u. A. auch für die hier zu behandelnden Fragen gegeben werden. Zunächst werde angenommen, der Propeller (Fig. 61 S. 240) bewege sich in ruhender Luft und besitze keine fortschreitende Bewegung; der Durchgang der Luft durch den Apparat erfolge stossfrei und adiabatisch. Da vor dem Eintritte in den Leitapparat und nach dem Austritte aus dem Contractor der Luftdruck der atmosphärische ist, so folgt $p = p_0$ und damit in Gleichung (98) S. 235 $\lambda = 1$. Der Eintrittsquerschnitt (senkrecht zur Drehaxe) sei F und derjenige der Ausflussmündung im Contractor F_4, dann ergiebt sich, wegen $\alpha = 0$, nach den Gleichungen (72):

$$\frac{l}{l_1} = \frac{F}{F_4}$$

und damit unter Benutzung der Gleichungen (104), nämlich:

$$A = 2(\operatorname{tg}\alpha_2 + \operatorname{tg}\alpha_3)\operatorname{tg}\alpha_3 \quad \text{und} \quad B = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha_3,$$

wobei die Winkel α_2 und α_3 als gegeben angesehen werden, nach Gleichung (98):

$$0 = A\left(\frac{1}{\lambda_2}\right)^{\frac{2}{\varkappa}} - \left(\frac{F}{F_4}\right)^2$$

oder:

$$A\left(\frac{F}{F_4}\right)^2 = \lambda_2^{\frac{2}{\varkappa}}. \tag{147}$$

Nun war aber $\lambda_2 = p_2 : p_0$, wobei p_2 den Druck der Luft im Contractor beim Austritte aus dem Laufrade und p_0 den Atmosphärendruck darstellte. Ist daher p_2 oder λ_2 gegeben oder gewählt, so giebt die letztere Gleichung das erforderliche Verhältniss $F_4 : F$; dann aber bestimmt sich nach Gleichung (99)

$$(A - B)\left(\lambda_1^{\frac{2}{\varkappa}} - \lambda_1^{\frac{\varkappa+1}{\varkappa}}\right) = \lambda_2^{\frac{\varkappa+1}{\varkappa}} - \lambda_2^{\frac{2}{\varkappa}} \tag{148}$$

womit auch λ_1 oder das Verhältniss $p_1 : p_0$ bestimmt wäre, wenn p_1 den Druck der Luft beim Eintritte ins Laufrad darstellt.

Nach Gleichung (92) S. 232 ergiebt sich:

$$\frac{F_4 c_4}{v_3} = \frac{Fc}{v_1},$$

und daraus wegen $v_3 = v_0$:

$$\left(\frac{c_4}{c}\right)^2 = \left(\frac{F}{F_4}\right)^2 \left(\frac{v_0}{v_1}\right)^2 = \left(\frac{F}{F_4}\right)^2 \cdot \lambda_1^{\frac{2}{\varkappa}}$$

und in Verbindung mit Gleichung (147):

$$\left(\frac{c_4}{c}\right)^2 = A\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\frac{2}{\varkappa}}. \tag{149}$$

Diese Gleichung giebt, mit Gleichung (103) zusammengefasst, die Arbeit L, welche der Betrieb des Laufrades fordert:

$$L = \frac{Mc_4^2}{2},$$

eine Formel, welche sich auch ohne Weiteres hätte anschreiben lassen, da hier bei stossfreiem Durchgange und Vernachlässigung der Luftreibungswiderstände die Arbeit L in der That nur dazu verwendet wird, die Luftmasse M aus der Ruhe in die Geschwindigkeit c_4 zu versetzen.

Die Reaction oder Treibkraft R des Propellers ist durch

$$R = M c_4$$

gegeben und daher folgt aus der Verbindung der letzten beiden Formeln die Beziehung:

$$L = \frac{R c_4}{2}, \tag{150}$$

deren Ableitung hier als Ziel vorlag.

Beim Luftpropeller wird es nämlich darauf ankommen, eine gewisse Treibkraft R mit möglichst geringem Arbeitsaufwande L zu erzielen und das ist nach Gleichung (150) zu erreichen, wenn man die Geschwindigkeit c_4, mit welcher die Luft die Contractormündung verlässt, so klein als möglich werden lässt.

Nun findet sich aber aus der Verbindung der Gleichung (101) S. 235 mit Gleichung (148) und (149):

$$c_4 = \sqrt{2g \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} p_0 v_0 \frac{A}{A - B}\left[\lambda_2^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} - 1\right]},$$

es wird daher c_4 um so kleiner sein, je kleiner λ_2 oder der Druck p_2 im Contractor ist.

Es würde daraus die praktische Regel folgen, im Contractor keinen starken Ueberdruck, sondern nur etwa 20 mm bis 10 mm, unter Umständen noch weniger, in Wassersäule gemessen, aufrecht zu erhalten.

Dann werden aber die Volumenänderungen der Luft beim Durchgange durch den Propeller so geringfügige, dass man das specifische Volumen $v_0 = 0{,}8187$ der Luft, also auch deren specifisches Gewicht $\gamma = 1{,}221$ als constant voraussetzen darf.

Aus Allem folgt aber, und das zu beweisen, war der Zweck der vorliegenden Entwickelungen, dass der Luftpropeller genau nach denselben Gleichungen zu berechnen und zu beurtheilen ist, welche auf S. 243 u. f. für den Schiffspropeller gegeben worden sind. Man wird hier wie dort die Treibkraft R und die Geschwindigkeit u des Fortschreitens als gegeben ansehen und in den Formeln anstatt $\gamma = 1000$ für Wasser, nur den Werth $\gamma = 1{,}221$ für Luft zu substituiren haben.

Es möge unterlassen werden, durch ein Zahlenbeispiel hier die Fragen weiter zu verfolgen; nach dem Gegebenen unterliegt die Aufgabe keiner weiteren Schwierigkeit, wenn die Zeit gekommen ist, in der Luftschifffahrt einen Vergleich zwischen Turbinenpropeller und Luftschraube, bei der ebenfalls nur sehr geringe Druck- und Volumenänderungen der Luft vorliegen, anzustellen.

Kapitel V.

Die Axial-Dampfturbine von de Laval.

§ 26. Ausfluss des Wasserdampfes durch de Laval'sche Düsen.

Der Gedanke, die Reaction des ausströmenden Dampfes zur Erzeugung rotirender Bewegung zu verwerthen, ähnlich wie es im vorigen Jahrhunderte zuerst mit dem ausströmenden Wasser am Segner'schen Wasserrade geschah, ist uralt, aber erst der neuesten Zeit ist es vorbehalten geblieben, eigentliche Dampfturbinen zur Ausführung zu bringen.

Seit der Zeit der Ausbildung der Theorie und Construction der heutigen Turbinen ist wiederholt ausgesprochen worden, dass man zum Betriebe derselben statt des Wassers auch strömenden Wasserdampf benutzen könne und dass derartige »rotirende Dampfmaschinen« gegenüber den allgemein verbreiteten Kolbenmaschinen eine Reihe von bedeutsamen Vorzügen zeigen müssten. So oft man sich aber auf dem rechnerischen Wege der Untersuchung der Frage zuwendete, gelangte man zu Bedingungen, welche für die praktische Ausführung unerfüllbar erschienen. Bei einer gewöhnlichen Partialturbine ist bei richtigem Gange die Umfangsgeschwindigkeit des Laufrades nicht wesentlich verschieden von der Hälfte der Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser dem Rade zugeführt wird; dasselbe gilt für die Beaufschlagung mit Dampf. Nun ist aber die Ausflussgeschwindigkeit des Dampfes selbst schon bei mässigem Dampfüberdrucke so bedeutend, dass sehr grosse Umfangsgeschwindigkeiten und damit enorme Umdrehungszahlen für das Turbinenlaufrad hervortreten. Das Bestreben der Ingenieure scheint im Laufe der Zeit fast ausschliesslich darauf gerichtet gewesen zu sein, Mittel und Wege zu ersinnen, geringere Umdrehungszahlen zu erzielen unter gleichzeitiger Aufrechterhaltung der vortheilhaftesten Ausnutzung der im strömenden Dampfe zur Verfügung stehenden Energie. Es wird sich unten die Gelegenheit bieten, auf die Erfolge derartiger Bestrebungen, die in der Anwendung sogenannter »Stufenturbinen« bestehen, zurückzukommen. Diese Dampfturbinen von Parson werden in neuester Zeit als Radialturbinen ausgeführt; als Axialturbine hat dagegen die Dampfturbine von de Laval in Stockholm einen unerwarteten Erfolg gezeigt; unerwartet deswegen, weil de Laval nicht auf eine Verminderung der Umlaufgeschwindigkeit bedacht war, vielmehr für die Turbine Umdrehungszahlen zur Anwendung brachte (30 000 und mehr auf die Minute bezogen), an die man bis dahin nicht zu denken wagte. Die de Laval-Dampfturbine ist eine der bedeutungsvollsten Erfindungen der Neuzeit, und es ist bemerkenswerth, dass die Turbine mit seltener Vollkommenheit aus der Hand des genialen Erfinders, welcher auch die theoretischen Grundlagen vollständig beherrscht, der Praxis zur Ausnutzung geboten worden ist.

Zwei Dinge sind es vornehmlich, welche bei der ersten Betrachtung der de Laval-Turbine hervortreten.

Das eine betrifft die Lagerung der Turbinenwelle.

Bei der enormen Umdrehungszahl würde es ganz unmöglich sein, selbst durch sorgfältigste Ausbalancirung den Schwerpunkt der rotirenden Massen genau mit der Wellenaxe zusammenfallen zu lassen. De Laval setzt nun das Laufrad auf eine dünne, federnde Welle und erreicht damit, dass die Rotationsaxe des Rotationskörpers durch entsprechende Verschiebung desselben von selbst mit der Hauptträgheitsaxe zusammenfällt*).

Der andere Punkt betrifft die Zuleitung des Dampfes nach dem Leitrade.

Der Leitapparat der Turbine ist ersetzt durch mehrere Düsen von kreisförmigem Querschnitt, durch welche die Dampfstrahlen

---

*) A. Föppl, »Das Problem der de Laval'schen Turbinenwelle«. Civilingenieur Bd. 41, 1895, p. 333 und Bd. 42, 1896, p. 249.

L. Klein, »Versuche über die Selbsteinstellung dünner Wellen um den Schwerpunkt bei hoher Tourenzahl«. Civilingenieur Bd. 41, 1895, p. 519.

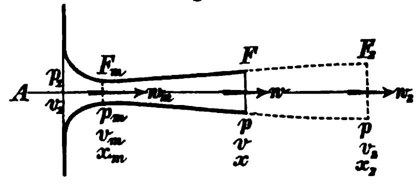
A. Stévart, »Note sur la turbine de Laval«. Revue universelle des Mines, t. 33, 1896, p. 141.

in entsprechender Richtung den Laufradschaufeln zugeführt werden. Diese Düsen bestehen aus verhältnissmässig kurzen Röhren mit veränderlichem Querschnitt, der Art, dass der Durchmesser von der Eintrittsstelle aus sich vermindert und dann nach der Dampfaustrittsseite hin sich allmählich vergrössert.

Hier machte de Laval glücklichen Gebrauch von Sätzen, die damals bezüglich des Durchganges von Luft und Dampf durch Röhren mit veränderlichem Querschnitt wenigstens im Allgemeinen bekannt waren und die nun hier zunächst ausführlicher, als es sonst geschehen ist, abgeleitet werden sollen. Die Berechnung der Arbeit der de Laval-Turbine steht mit den nachfolgenden Voruntersuchungen in engem Zusammenhange.

Aus einem weiten Gefässe A (Fig. 65), in welchem sich Dampf vom Drucke p_1 und vom specifischen Volumen v_1 befindet, ströme der Dampf durch das in der Figur angedeutete Rohr von veränderlichem Querschnitt ab nach einem zweiten Raume, in welchem der Druck, ebenso wie im Abflussraume A, auf constanter Höhe erhalten wird; es liege der Beharrungszustand der strömenden Bewegung vor und in dem beliebigen Querschnitte F des Rohres sei w die Durchflussgeschwindigkeit; Druck und Volumen daselbst seien mit p und v bezeichnet.

Fig. 65.



Hier gilt nun ohne Weiteres die in § 1 S. 11 abgeleitete Gleichung (7):

$$d\left(\frac{w^2}{2g}\right) + dh + v\,dp = 0$$

oder einfacher, weil die dort eingeführte Steig- und Fallhöhe h als verschwindend klein vernachlässigt werden kann:

$$d\left(\frac{w^2}{2g}\right) = -\,v\,dp. \tag{151}$$

Nimmt man nun an, dass beim Strömen die Druck- und Volumenänderungen des Dampfes nach der adiabatischen Curve erfolgen, was im Folgenden durchgängig vorausgesetzt werden soll, so gilt für Wasserdampf, wie bei atmosphärischer Luft, die Beziehung:

$$p\,v^{x} = p_1\,v_1^{x}, \tag{152}$$

wobei der Exponent $\varkappa = 1{,}135$ zu setzen ist, wenn der Wasserdampf bei Beginn der Expansion trocken gesättigt ist.

Wäre derselbe anfänglich nass, d. h. bestände derselbe aus einer Mischung von Dampf und Wasser und wäre die anfängliche specifische Dampfmenge, d. h. das Dampfgewicht in der Gewichtseinheit Mischung, gleich x_1, so ist zu setzen:

$$\varkappa = 1{,}035 + 0{,}1 \cdot x_1\,,$$

so lange x_1 zwischen 0,7 und 1 liegt*).

Bei den nachfolgenden Untersuchungen soll angenommen werden, dass der Dampf im Ausflussgefässe A trocken gesättigt, also $x_1 = 1$ und $\varkappa = 1{,}135$ anzunehmen ist.

Aus Gleichung (152) folgt ohne Weiteres:

$$\frac{pv}{p_1 v_1} = \left(\frac{v_1}{v}\right)^{\varkappa - 1} = \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}, \tag{153}$$

und durch Differentiation derselben Gleichung, weil die rechte Seite constant ist:

$$\varkappa p dv + v dp = 0$$

oder:

$$(\varkappa - 1)\, v dp = \varkappa d\,(pv).$$

Bestimmt man hieraus vdp, so findet sich durch Substitution des Werthes in Gleichung (151):

$$d\left(\frac{w^2}{2g}\right) = -\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\, d\,(pv) \tag{154a}$$

und hiermit durch Integration, da im Raume A (Fig. 65), in welchem der Druck p_1 und das Volumen v_1 herrscht, die Geschwindigkeit $w_1 = 0$ ist:

$$\frac{w^2}{2g} = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\,(p_1 v_1 - pv). \tag{154}$$

Mit Benutzung der Beziehung (153) findet sich dann endlich die Geschwindigkeit w, mit welcher der Dampf durch den Querschnitt F geht:

$$w = \sqrt{2g \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} p_1 v_1 \left(1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}\right)}. \tag{155}$$

*) »Techn. Thermodynamik« Bd. II, S. 75.

Die Durchflussgeschwindigkeit w liesse sich also berechnen, sobald der Druck p im Querschnitte F bekannt oder gegeben wäre; dann bestimmt sich nach Gleichung (152) aber auch das specifische Volumen v des Dampfes an dieser Stelle und damit weiter die specifische Dampfmenge x. Mit der adiabatischen Expansion trocknen Wasserdampfes, ebenso auch des nassen Dampfes, wenn die anfängliche specifische Dampfmenge x_1 nicht allzu stark von der Einheit abweicht, ist jederzeit ein Niederschlagen von Dampf verbunden, so dass sich also während der strömenden Bewegung mit dem Drucke p auch fortwährend die specifische Dampfmenge x ändert.

Ist s das specifische Volumen des trocknen gesättigten Dampfes vom Drucke p und σ das specifische Volumen des Wassers ($\sigma = 0{,}001$), so findet sich das Volumen v der Gewichtseinheit Mischung:

$$v = xs + (1 - x)\,\sigma\,,$$

oder mit hinreichender Genauigkeit, da x von der Einheit wenig abweicht und der Werth σ sehr klein ist:

$$v = xs.$$

Im Ausflussgefässe selbst, wenn daselbst zunächst wieder allgemein die specifische Dampfmenge mit x_1 bezeichnet wird, ist:

$$v_1 = x_1 s_1$$

und hieraus folgt:

$$\frac{x}{x_1} = \frac{v}{v_1} \cdot \frac{s_1}{s}\,. \tag{156}$$

Nun besteht aber für den Verlauf der Grenzcurve, d. h. der Beziehung zwischen p und s für den trocknen gesättigten Wasserdampf, mit sehr grosser Genauigkeit zwischen den weitesten in der Praxis vorkommenden Dampfdrücken die Formel:

$$ps^n = p_1 s_1^n = D\,,$$

wobei $n = 1{,}0646$ zu setzen ist und D eine constante Grösse bedeutet, deren Werth $D = 1{,}7617$ beträgt, wenn der Druck p in Kilogramm, auf das Quadratcentimeter bezogen, ausgedrückt wird*); der Exponent n ist übrigens fast genau $n = \frac{33}{31}$.

*) »Techn. Thermodynamik« Bd. II, S. 36. In dieser Schrift ist auch unter Hinweis auf ältere Arbeiten der Ausfluss der Gase aus einfachen

Benutzt man vorstehende Gleichung, sowie Gleichung (152) in Gleichung (156), so folgt endlich:

$$\frac{x}{x_1} = \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa - n}{n\varkappa}}, \tag{157}$$

wonach sich x für jeden Werth von p im zugehörigen Querschnitt F berechnen lässt.

Nun ist aber noch die Hauptfrage zu beantworten, welche Beziehung zwischen dem Rohrquerschnitte F und dem daselbst herrschenden Dampfdrucke p besteht.

Bezeichnet man mit G das Gewicht der Dampf- und Flüssigkeitsmischung, welche in der Secunde das Rohr durchströmt, so ist das Volumen beim Durchgange durch den Querschnitt F sowohl Gv als auch Fw, daher folgt $Gv = Fw$ und mit Gleichung (152):

$$G = \frac{F}{v_1}\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{1}{\varkappa}} \cdot w.$$

Benutzt man hier Gleichung (155), so ergiebt sich:

$$G = F\sqrt{2g\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\frac{p_1}{v_1}\left[\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{2}{\varkappa}} - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa+1}{\varkappa}}\right]}, \tag{158}$$

und damit ist der Zusammenhang zwischen dem Druck p und dem zugehörigen Querschnitte F gegeben, da die Gewichtsmenge G für alle Querschnitte den gleichen Werth haben muss.

Aus der Gleichung erkennt man sofort, dass bei einem gewissen Werthe von p der Klammerausdruck unter der Wurzel ein Maximum sein wird; dann ist aber der zugehörige Querschnitt ein Minimum. Bezeichnet man die entsprechenden Werthe mit p_m und F_m, so findet sich leicht aus Gleichung (158) der Werth $p = p_m$, welcher für den Klammerausdruck ein Maximum ergiebt, durch Diffentiiren und Nullsetzen des Differentialquotienten:

$$\frac{p_m}{p_1} = \left(\frac{2}{\varkappa + 1}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}}, \tag{159}$$

Mündungen (Bd. I, S. 212—261), sowie der Dämpfe (Bd. II, S. 137—180) ausführlich behandelt.

woraus sich der Druck p_m im kleinsten Querschnitte F_m (Fig. 65) berechnen lässt. Die specifische Dampfmenge x_m daselbst findet sich dann nach Gleichung (157) durch:

$$\frac{x_m}{x_1} = \left(\frac{2}{\varkappa + 1}\right)^{\frac{(\varkappa - n)}{n(\varkappa - 1)}}, \tag{160}$$

und das Mischungsgewicht G kg, welches in der Secunde durch den kleinsten Querschnitt strömt, ergiebt sich nach Gleichung (158) mit Gleichung (159):

$$G = F_m \sqrt{2g \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} \frac{p_1}{v_1} \cdot \frac{(\varkappa - 1)}{(\varkappa + 1)} \left(\frac{2}{\varkappa + 1}\right)^{\frac{2}{\varkappa - 1}}}. \tag{161}$$

Nach Gleichung (155) folgt somit die Durchflussgeschwindigkeit:

$$w_m = \sqrt{2g \frac{\varkappa}{\varkappa + 1} p_1 v_1}. \tag{162}$$

Setzt man voraus, wie das im Weiteren geschehen soll, dass im Ausflussgefässe A (Fig. 65) der Dampf vom Drucke p_1 trocken gesättigt, also $x_1 = 1$ ist, so ist nach Obigem $\varkappa = 1,135$ zu setzen und man erhält dann nach vorstehenden Formeln:

$$p_m = 0,5744 \cdot p_1, \tag{159a}$$

$$\frac{G}{F_m} = 199 \cdot \sqrt{\frac{p_1}{v_1}}, \tag{161a}$$

$$w_m = 323 \sqrt{p_1 v_1}, \tag{162a}$$

wobei p_1 in kg:qcm zu substituiren ist. Die specifische Dampfmenge im kleinsten Querschnitte bestimmt sich aus Gleichung (160):

$$x_m = 0,9655,$$

erscheint also für jeden Werth des Druckes p_1 im Ausflussgefässe gleich gross.

Auf Grund der vorhin gegebenen Gleichung für die Grenzcurve ist wegen $x_1 = 1$ auch:

$$p_1 v_1^n = D,$$

woraus sich mit den angegebenen Werthen der Constanten n und D die Grösse v_1 berechnet.

An Stelle der letzten Gleichungen ergiebt sich dann:

$$\frac{G}{F_m} = 152{,}59 p_1^{0{,}9696}, \tag{161b}$$

$$w_m = 421{,}4 \cdot p_1^{0{,}0303}, \tag{162b}$$

wobei p_1 in kg:qcm und F_m in Quadratmetern zu substituiren ist.

Mit Hülfe dieser Formeln ist für das Ausströmen des Wasserdampfes, der im Ausflussgefässe als trocken gesättigt vorausgesetzt wurde, die folgende Zusammenstellung berechnet worden.

Tabelle A.

1.	2.	3.	4.	5.
p_1	p_m	w_m	$H_m = \frac{w_m^2}{2g}$	$\frac{G}{F_m}$
5 kg	2,887 kg	442,4 m	9977 mkg	727 kg
6	3,465	444,9	10088	867
7	4,042	447,0	10182	1007
8	4,619	448,8	10265	1146
9	5,197	450,4	10339	1285
10	5,774	451,8	10405	1423
11	6,352	453,1	10465	1561
12	6,929	454,3	10521	1698

Man ersieht aus der Tabelle, dass die Geschwindigkeit w_m, mit welcher der Dampfstrahl durch den kleinsten Querschnitt hindurchgeht, sehr langsam mit dem Drucke p_1 zunimmt, und zwar so langsam, dass man unter Umständen dafür einen constanten Mittelwerth näherungsweise annehmen könnte.

Dasselbe gilt auch für die Strömungsenergie H_m der Gewichtseinheitsmischung im kleinsten Querschnitte, in welchem, wie bereits hervorgehoben wurde, die specifische Dampfmenge in allen Fällen $x_m = 0{,}9685$ beträgt. Mit Hülfe der Werthe der letzten Columne berechnet sich das auf die Secunde bezogene Gewicht G der Mischung, welche durch den Querschnitt F_m geht, oder umgekehrt der Querschnitt, wenn G gegeben sein sollte.

Setzt man voraus, dass das Rohr, welches in Fig. 65 S. 267 angedeutet ist, in der Ebene bei F_m abgeschnitten wäre, so dass der Dampf direct in die Vorlage ausströmen würde, so ergeben die Werthe der Columne 2 den Druck p_m in der Mündungsebene, welches auch der Druck in der Vorlage sein mag; würde daselbst der gewöhnliche Condensatordruck oder selbst Luftleere herrschen, so wäre doch der Mündungsdruck der angegebene, und die Strömungsenergie, sowie die Ausflussgeschwindigkeit würde nahezu die gleiche sein bei jeder der gebräuchlichen Kesselspannungen.

Es folgt daraus ohne Weiteres, wie unzweckmässig es wäre, einer Dampfturbine den Dampf durch eine derartige einfache conische Düse zuzuführen.

Ganz anders aber liegen die Verhältnisse, wenn man das Rohr vom kleinsten Querschnitte ab noch weiterführt und dessen Querschnitte derart zunehmen lässt, bis im Querschnitte F ein bestimmt vorgeschriebener kleinerer Druck p, z. B. der in der Vorlage herrschende Druck, erreicht worden ist.

Denkt man sich jetzt das Rohr (Fig. 65) im Querschnitte F abgeschnitten, so kann man herbeiführen, dass der ausströmende Dampf die Ausflussmündung mit dem gegebenen Drucke in der Vorlage verlässt, und damit sind Vortheile verbunden, die sogleich näher besprochen werden sollen.

In dieser Anordnung beruht der glückliche Griff von de Laval, welcher damit bereits bekannte, aus den Untersuchungen von de Saint-Venant und Wantzel über den Ausfluss der Luft abgeleitete Sätze*) technisch verwerthete.

Ist der Druck p in der Vorlage gegeben und ebenso der Kesseldruck p_1, sowie damit der Druck p_m im engsten Querschnitte, so findet sich nach Gleichung (155) die Geschwindigkeit w, mit welcher der Dampf die Ausflussmündung verlässt; aus Gleichung (162) dagegen ergiebt sich die Geschwindigkeit w_m, mit welcher der Dampf durch den kleinsten Querschnitt geht; daher folgt das Verhältniss beider Geschwindigkeiten:

$$\frac{w}{w_m} = \sqrt{\frac{(\varkappa+1)}{(\varkappa-1)}\left(1-\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right)}. \qquad (163)$$

Die Durchflussmenge G findet sich für den Querschnitt F nach Gleichung (158), dagegen für den engsten Querschnitt F_m

*) »Techn. Thermodynamik« Bd. I, S. 234 und Bd. II, S. 170.

nach Gleichung (161). Durch Gleichsetzen beider Formeln für G ergiebt sich dann das Querschnittsverhältniss:

$$\frac{F}{F_m} = \sqrt{\frac{\frac{(\varkappa-1)}{(\varkappa+1)}\left(\frac{2}{\varkappa+1}\right)^{\frac{2}{\varkappa-1}}}{\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{2}{\varkappa}} - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa+1}{\varkappa}}}}, \qquad (164)$$

oder wenn $\varkappa = 1{,}135$ substituirt wird:

$$\frac{w}{w_m} = 3{,}3768\sqrt{1-\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}}, \qquad (163\,\mathrm{a})$$

$$\frac{F}{F_m} = \frac{0{,}1550}{\sqrt{\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{2}{\varkappa}} - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa+1}{\varkappa}}}}. \qquad (164\,\mathrm{a})$$

Ist der Querschnitt des Rohres kreisförmig, so ist das entsprechende Verhältniss der Durchmesser:

$$\frac{d}{d_m} = \sqrt{\frac{F}{F_m}}.$$

Die specifische Dampfmenge in der Mündungsebene F findet sich nach Gleichung (156) wegen $x_1 = 1$:

$$x = \left(\frac{p}{p_1}\right)^{0{,}05826}. \qquad (165)$$

Nach diesen Formeln ist die folgende Hülfstabelle berechnet worden.

Tabelle B.

$\frac{p_1}{p}$	$\frac{w}{w_m}$	$\frac{F}{F_m}$	$\frac{d}{d_m}$	x
100	2,583	13,802	3,715	0,765
90	2,560	12,690	3,562	0,769
80	2,535	11,555	3,399	0,775
70	2,505	10,395	3,224	0,781
60	2,469	9,163	3,027	0,788
50	2,426	7,980	2,825	0,796
20	2,177	3,966	1,991	0,840
10	1,924	2,436	1,561	0,874
8	1,861	2,069	1,438	0,886
6	1,742	1,716	1,310	0,901
4	1,550	1,349	1,161	0,922
2	1,119	1,015	1,007	0,960
1,7318	1	1	1	0,968

Die ganze vorstehende Entwickelung setzt voraus, dass, wie es bei Dampfturbinen immer der Fall sein wird, der Druck p_1 grösser als $1{,}7318 \cdot p$ oder

$$p < 0{,}5774 \cdot p_1$$

ist. Wäre der Druck p grösser, so stellt sich in der Ausflussmündung ohne Weiteres der äussere Druck p ein; man berechnet dann w und G sogleich nach den Gleichungen (155) und (158).

Für die de Laval'schen Düsen ist nun der Gebrauch der vorstehenden beiden Tabellen A und B sehr einfach.

Wäre z. B. der Kesseldruck $p_1 = 8$ kg (absolut), so giebt Tab. A die Geschwindigkeit des Dampfes im engsten Querschnitte $w_m = 448{,}8$ m und das ausströmende Gewicht des Dampfes auf die Secunde bezogen $G = 1146 \cdot F_m$, oder wenn der Durchmesser im engsten Querschnitte in Millimeter gemessen d_m ist:

$$d_m = 33{,}333 \sqrt{G},$$

wobei G in Kilogrammen einzusetzen ist.

Sollte nun der Dampf nach einem Raume strömen, in welchem Condensatorpressung und zwar der Druck $p = 0{,}16$ kg vorliegt, so findet sich für das Verhältniss $p_1 : p$ der Werth 50, und diesem entspricht nach Tab. B:

$$\frac{w}{w_m} = 2{,}426, \quad \frac{d}{d_m} = 2{,}825 \quad \text{und} \quad x = 0{,}796.$$

Es folgt daraus die Ausflussgeschwindigkeit $w = 1089$ m, der Grad der Rohrerweiterung von d_m auf d ist bestimmt und ebenso der Zustand des Dampfes in der Ausflussöffnung, der demnach in der Gewichtseinheit 0,796 kg Dampf und 0,204 kg Wasser enthält. Würde dagegen der Dampf in einen Raum einströmen, in welchem atmosphärische Pressung herrscht (Dampfturbine ohne Condensation), so lässt sich genau genug $p = 1$, also das Verhältniss $p_1 : p = 8$ setzen. Für diesen Werth giebt Tab. B:

$$\frac{w}{w_m} = 1{,}861, \quad \frac{d}{d_m} = 1{,}438, \quad x = 0{,}885,$$

und damit die Ausflussgeschwindigkeit $w = 835$ m.

Bei den Dampfturbinen soll die Strömungsenergie, also die Ausflussgeschwindigkeit w, so gross wie möglich sein, und das erreicht man eben durch die richtige Rohrerweiterung in der de Laval'schen Weise. Es ist bemerkenswerth, dass die Strömungsenergie überhaupt ein Maximum wird, wenn man das Verhältniss $d : d_m$ in der angegebenen Weise berechnet und zur Ausführung bringt.

Würde man das Rohr noch von F auf F_2 verlängern und noch mehr erweitern, wie es in Fig. 65 durch die punktirten Linien angedeutet ist, so wäre damit eine Abnahme der Strömungsgeschwindigkeit verbunden.

Ist im Querschnitte F der äussere Druck p erreicht, so bleibt derselbe bis zum Querschnitte F_2 unverändert, es findet demnach eine Zustandsänderung der Mischung unter constantem Druck p statt. Bedeutet w_2 die Geschwindigkeit und x_2 die specifische Dampfmenge im Austrittsquerschnitte F_2 und gelten die Grössen w und x für den Querschnitt F, welch letztere Werthe nach Vorstehendem bekannt sind, so ist die Strömungsenergie H_2 bez. H in den beiden Querschnitten F_2 und F:

$$H_2 = \frac{w_2^2}{2g} \quad \text{und} \quad H = \frac{w^2}{2g} \tag{166}$$

und die in Wärme verwandelte Energie ist

$$A(H - H_2),$$

wobei nach der mechanischen Wärmetheorie $A = \frac{1}{424}$ das Wärmeäquivalent der Arbeitseinheit ist. Die Wärmemenge wird dazu benutzt, die specifische Dampfmenge x in den grösseren Werth x_2 überzuführen, also den entsprechenden Theil des anwesenden Wassers zu verdampfen. Ist r die latente oder Verdampfungswärme, so besteht, da die Verdampfung hier unter constantem Druck p und der zugehörigen Dampftemperatur t erfolgt, die Beziehung:

$$A(H - H_2) = r(x_2 - x). \tag{167}$$

Hieraus bestimmt sich H_2 für einen beliebigen Werth von $x_2 > x$ und dann folgt nach Gleichung (166) auch die Geschwindigkeit w_2.

Nun ist weiter:

$$F_2 w_2 = G v_2 \qquad \text{und} \qquad F w = G v,$$

woraus:

$$\frac{F_2}{F} = \frac{v_2}{v} \frac{w}{w_2}$$

folgt, oder weil nach dem auf S. 269 Angeführten $v = xs$ und $v_2 = x_2 s$ ist:

$$\frac{F_2}{F} = \frac{x_2}{x} \frac{w}{w_2}. \tag{168}$$

Sollte im Ausflussquerschnitte F_2 der ausströmende Dampf gerade trocken gesättigt sein, so hätte man $x_2 = 1$ zu substituiren. So fand sich z. B. oben für den Ausfluss aus einer de Laval'schen Düse in den Condensatorraum, in welchem der Druck $p = 0{,}16$ und der Kesseldruck $p_1 = 8$ kg angenommen wurde (S. 276) $w = 1089$ und $x = 0{,}796$, wonach $H = 60420$ mkg ist; dem Drucke p entspricht die Temperatur $t = 55^\circ$ und die latente Wärme $r = 568$, und damit folgt aus Gleichung (167)

$$H_2 = 11314 \text{ mkg}, \quad w_2 = 471 \text{ m} \quad \text{und} \quad \frac{w_2}{w} = 0{,}434.$$

Damit berechnet sich:

$$\frac{F_2}{F} = 2{,}904 \qquad \text{und} \qquad \frac{d_2}{d} = 1{,}704;$$

es findet demnach eine sehr bedeutende Geschwindigkeits**abnahme** statt; wollte man das Rohr noch weiter mit zunehmendem Durchmesser führen, so würde sich nun der Dampf überhitzen; auch unter dieser Voraussetzung liesse sich der Vorgang weiter verfolgen, doch mag dies unterlassen werden.

Es kam hier nur darauf an, durch das Vorstehende den Nachweis zu führen, dass es sehr nachtheilig wirkt, wenn man die Erweiterung der Düse in stärkerem Maasse, als von d_m auf d, wie oben berechnet wurde, stattfinden lässt, weil beim Düsendurchmesser d schon das Maximum der Ausflussgeschwindigkeit vorliegt. Wie aus Messungen an praktischen Ausführungen hervorgeht, scheint auch de Laval in der That die Regel zu befolgen.

Führt man die Strecke FF_2 (Fig. 65), wie es von de Laval geschieht, prismatisch aus, so ergeben die Gleichungen (167) und (168) für $F = F_2$ auch $x = x_2$ und $w_2 = w$, der Durchgang des Dampfes durch das prismatische Stück findet dann ohne weitere Zustandsänderungen statt, sofern man wegen der Kürze desselben die Reibungswiderstände vernachlässigen kann.

Es darf nun aber am Schlusse nicht unerwähnt bleiben, dass die gesammten Darlegungen über den Ausfluss des Dampfes durch die de Laval'sche Düse nur als angenäherte anzusehen sind, insbesondere wird es erforderlich sein, durch Einführung von Correctionen, die durch Versuche festzustellen sind, die ausströmende Dampfmenge G mit der Wirklichkeit in Einklang zu bringen. Die Darlegungen stützen sich im Grunde auf die Entwickelungen, die de Saint-Venant und Wantzel (1839) für Luftausfluss gegeben haben und die wenigstens für **einfache Mündungen** auch durch neuere Versuche hinreichend bestätigt worden sind*). Dass der Druck und die Geschwindigkeit in allen Theilen der Mündung gleich gross angenommen werden, dürfte nicht vollständig zutreffend sein; auch bezüglich der Druckbestimmung im Innern und in der Mündung der Düse, wie sie oben durch Rechnung dargelegt worden ist, geben genauere Versuche**) möglicherweise Abweichungen.

---

*) »Techn. Thermodynamik« Bd. I, S. 245 und Bd. II, S. 171.

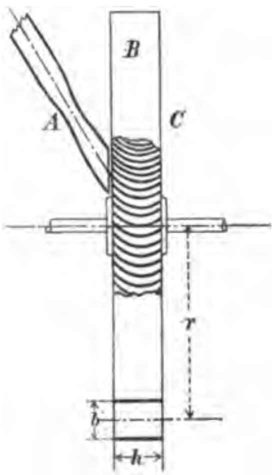
) In der Schweizerischen Bauzeitung Bd. 31, 1898, S. 68, 78 u. 84 befindet sich eine interessante Abhandlung von **Fliegner, »Versuche über das Ausströmen von Luft durch conisch divergente Rohre«. Die Ergebnisse dieser Versuche, deren Richtigkeit nicht angezweifelt werden darf, v ran-

§ 27. Beurtheilung der de Laval-Turbine bei stossfreiem Eintritte des Dampfes.

Dem Laufrade B (Fig. 66) mit der in der Figur angedeuteten Schaufelung wird der Dampf durch einzelne Dampfdüsen in vorgeschriebener Richtung zugeführt.

Gewöhnlich sind zwei und mehr Düsen vorhanden, die auf dem Umfange des Laufrades in gleichen Entfernungen von einander vertheilt sind. Das Rad B ist von einem, in der Figur nicht angegebenen, cylindrischen Gehäuse umschlossen, an welches sich an der Seite, wo der Dampf das Laufrad verlässt, ein zweiter Raum C anschliesst, der mit dem Condensatorraume oder mit der freien Atmosphäre in Verbindung steht. Die Wand zwischen diesem Raume und dem Gehäuse des Turbinenlaufrades ist mit Schlitzen versehen, welche den einzelnen Düsen gegenüber liegen und durch welche der Durchlass des Dampfes nach dem Raume C erfolgt; es herrscht daher im Turbinengehäuse und in der Ausflussmündung der Düsen derselbe Druck, wie im Raume C, also der Condensator- oder Atmosphärendruck, je nachdem die Turbine mit oder ohne Condensator arbeitet.

Fig. 66.



Bemerkenswerth ist die Kleinheit der de Laval'schen Turbine; so beträgt z. B. bei einer ausgeführten Turbine bei einer effectiven Arbeit von 50 Pferdestärken der mittlere Halbmesser des Laufrades nur $r = 154$ mm, die radiale Radbreite $b = 23$ mm und die Radhöhe $h = 10$ mm (Fig. 66) bei 200 Schaufeln.

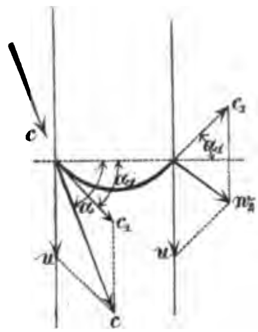
Allgemein ist die Schaufelconstruction in Fig. 67 (a. f. S.) angegeben.

---

lassen Fliegner zu dem Schlusse, dass die bis dahin für den Ausfluss des Dampfes aus der de Laval'schen Düse benutzten Formeln zu unrichtigen Resultaten führten; es ist aber dabei doch zu beachten, dass bei der strömenden Bewegung von nassem Dampf andere Verhältnisse vorliegen; die Veränderung des Druckes mit dem Querschnitte bringt hier gleichzeitig eine Veränderung der specifischen Dampfmengen mit sich.

Die Richtung des aus der Düse mit der Geschwindigkeit $w = c$ ankommenden Dampfstrahles weiche um den Winkel α von einer Parallelen zur Radaxe ab; die Schaufeltangente an der Eintrittsstelle sowohl, wie an der Austrittsstelle um den Winkel α_1.

Fig. 67.



Die relative Geschwindigkeit, mit welcher der Dampf an der Schaufel hinströmt, sei c_1 und u die Umfangsgeschwindigkeit, bezogen, wie früher, auf den Endpunkt des mittleren Halbmessers r. Da nun stossfreier Eintritt stattfinden soll, so ergiebt sich durch die entsprechende Zerlegung die Geschwindigkeit $w = c$ an der Eintrittsstelle nach Fig. 67, wenn man die Winkel α und α_1 als gegeben ansieht:

$$\frac{u}{w} = \frac{\sin(\alpha - \alpha_1)}{\cos \alpha_1}, \tag{169}$$

sowie:

$$\frac{c_1}{w} = \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_1}. \tag{170}$$

Die auf den Laufradkranz übertragene Arbeit, die mit L_i bezeichnet und analog, wie bei Kolbendampfmaschinen, die indicirte Arbeit genannt werden mag, lässt sich nun nach früher gegebenen Formeln bestimmen, doch mag eine directe Bestimmung vorgezogen werden.

Ist M die Dampfmasse auf die Secunde bezogen und w_2 die absolute Geschwindigkeit, mit welcher der Dampf das Laufrad verlässt, so folgt:

$$L_i = \frac{M(w^2 - w_2^2)}{2}.$$

Nun ist aber nach Fig. 67:

$$w^2 = u^2 + c_1^2 + 2c_1 u \sin \alpha_1$$
$$w_2^2 = u^2 + c_1^2 - 2c_1 u \sin \alpha_1,$$

wonach sich aus vorstehender Formel für L_i auch ergiebt:

$$L_i = 2Mc_1 u \sin \alpha_1$$

oder unter Benutzung von Gleichung (170), wenn man zugleich nach der Beziehung $G = Mg$ die Dampfmasse durch ihr Gewicht G ersetzt:

$$L_i = G \frac{w^2}{2g} \cdot 4 \frac{u}{w} \cos\alpha \operatorname{tg}\alpha_1,$$

oder wenn man wieder nach Gleichung (166) die Strömungsenergie des eintretenden Dampfes mit H bezeichnet:

$$L_i = GH . 4 \frac{u}{w} \cos\alpha \operatorname{tg}\alpha_1, \tag{171}$$

in welcher Gleichung auch noch Gleichung (169) benutzt werden könnte.

Da in Gleichung (171) GH die ganze Arbeit darstellt, welche in der Secunde dem Laufrade geboten wird, so repräsentirt der Factor dieser Grösse in Gleichung (171), der mit η_i bezeichnet werden mag, also

$$\eta_i = 4 \cdot \frac{u}{w} \cos\alpha \operatorname{tg}\alpha_1, \tag{172}$$

den »indicirten Wirkungsgrad« dieser Dampfturbine.

Die Grösse

$$\frac{L_i}{G} = \eta_i H \tag{173}$$

ist dann die indicirte Arbeit, welche der Gewichtseinheit Dampf entspricht.

Bedeutet N_i die indicirte Arbeit in Pferdestärken und G_h die stündliche Dampfmenge, so ist $L_i = 75 \cdot N_i$ und $G_h = 3600 \cdot G$ und daher auch:

$$\frac{G_h}{N_i} = \frac{75 \cdot 3600}{\eta_i H}, \tag{174}$$

d. i. die »Dampfmenge stündlich pro Pferdestärke indicirt«.

Ist N_e die Leistung in Pferdestärken effectiv, also die Arbeit, welche an der Turbinenwelle z. B. zum Betriebe einer Dynamomaschine abgegeben wird, und bezeichnet man das Verhältniss $N_e : N_i$ mit η, so ergiebt sich durch

$$\frac{G_h}{N_e} = \frac{75 \cdot 3600}{\eta \eta_i H} \tag{175}$$

die »Dampfmenge stündlich, pro Pferdestärke effectiv«.

Die Formeln mögen an einem besonderen Falle der Prüfung unterworfen werden.

Eine de Laval-Dampfturbine soll effectiv die Leistung von $N_e = 50$ Pferdestärken entwickeln; die Winkel seien

$$\alpha = 70^\circ \quad \text{und} \quad \alpha_1 = 63^\circ.$$

Hier ergiebt sich nach Gleichung (169)

$$u = 0{,}2684 \cdot w \tag{169a}$$

und dann nach Gleichung (172)

$$\eta_i = 0{,}7208. \tag{172a}$$

Fall 1. Die Turbine arbeite mit Condensation.

Der Kesseldruck sei $p_1 = 8$ kg (absolut), die Condensatorpressung $p = 0{,}16$ kg. Hierbei ergab sich (S. 276) $w = 1089$ m und $H = 60420$ mkg.

Die praktische Ausführung einer solchen Turbine zeigte einen Radhalbmesser $r = 0{,}154$ m; das Laufrad müsste daher in der Minute eine Umdrehungszahl aufweisen, sofern stossfreier Eintritt erzielt werden soll, welche sich, da die Umfangsgeschwindigkeit $u = 292{,}3$ m (nach vorstehender Gleichung (169a) beträgt, zu

$$\frac{30 \cdot u}{\pi r} = 18120$$

ergiebt.

Nach den Gleichungen (172) und (173) folgt jetzt:

$$\frac{L_i}{G} = 43550 \quad \text{und} \quad \frac{G_h}{N_i} = 6{,}20 \text{ kg}.$$

Setzt man in Gleichung (175) den Werth $\eta = 0{,}75$ als Schätzungswerth, so lange genauere Versuche nicht vorliegen, so ergiebt sich die stündliche Dampfmenge auf eine Pferdestärke effectiv

$$\frac{G_h}{N_e} = 8{,}27 \text{ kg},$$

und daher bei $N_e = 50$ Pferdestärken der stündliche Dampfverbrauch $G_h = 413{,}5$ kg oder in der Secunde $G = 0{,}1149$ kg.

Bei Anwendung von drei Düsen muss jede derselben 0,0383 kg Dampf liefern und diesem Dampfgewichte entspricht für den Dampfdruck von $p_1 = 8$ kg ein Düsendurchmesser von $d_m = 6{,}52$ mm an der engsten Stelle (nach Tab. A S. 272). An der Ausflussöffnung müsste die Düse (nach Tab. B S. 275) einen Durchmesser von

$$d = 2{,}825\, d_m = 18{,}4 \text{ mm}$$

erhalten.

Diese Rechnungsresultate stimmen sehr gut mit einer Ausführung von de Laval überein; nur einer der drei Düsen hat derselbe an der engsten Stelle einen grösseren Durchmesser gegeben, um eine Regulirung des Dampfzutrittes zu erzielen. Durch Vor- und Zurückziehen eines in den engsten Querschnitt hineinragenden spitzen Kegels wird der Durchflussquerschnitt daselbst veränderlich gemacht.

Fall 2. Die Turbine arbeite ohne Condensation.

Soll die im Vorstehenden berechnete Turbine auch ohne Condensation in Benutzung genommen werden, so werden drei andere Düsen für die Dampfzuführung geöffnet. Bei gleichem Dampfdruck $p_1 = 8$ kg ist hier $p = 1$ kg zu setzen; wobei $w = 835$ m (S. 276) und $H = 35536$ mkg sich ergiebt. Die Umfangsgeschwindigkeit ist $u = 0{,}2684\,w$ oder $u = 224$ m und die Umdrehungszahl in der Minute 13900.

Ferner folgt:

$$\frac{L_i}{G} = 25614 \text{ und } \frac{G_h}{N_i} = 10{,}54 \text{ kg}$$

und mit $\eta = 0{,}75$:

$$\frac{G_h}{N_e} = 14{,}06.$$

Bei $N_e = 50$ ist daher stündlich die Dampfmenge $G_h = 702{,}8$ kg erforderlich und bei Annahme von drei Düsen hat jede derselben in der Secunde

$$G = 0{,}0651 \text{ kg}$$

Dampf zu liefern.

Hiernach folgt der Durchmesser der Düsen an der engsten Stelle (s. S. 275)

$$d_m = 33{,}333\sqrt{G} = 8{,}51 \text{ mm},$$

und nach Tab. B S. 275 der Durchmesser an der Austrittsmündung

$$d = 1{,}438\,d_m = 12{,}23 \text{ mm}.$$

Zweiter Abschnitt.

Von den Radialturbinen.

Kapitel I.

Die Radialturbine als Kraftmaschine.

A. Radialvollturbine.

Fourneyron-Turbine — Francis-Turbine.

§ 28. Anordnung der Turbine. Winkel- und Querschnittsverhältnisse bei stossfreiem Eintritte.

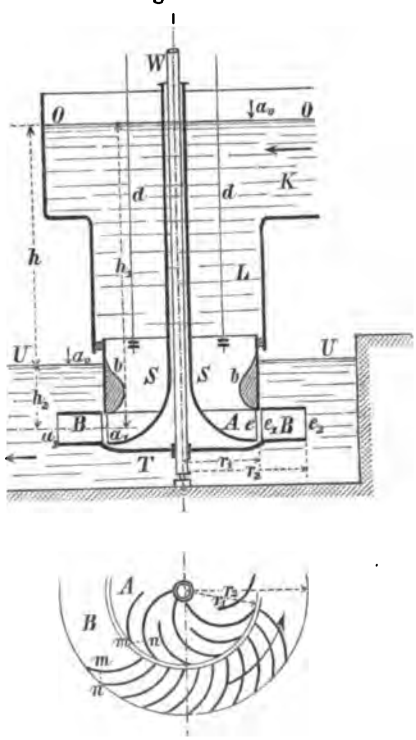
Bei den Radialturbinen strömt das Wasser durch das Leitrad, wie durch das Laufrad in Ebenen hindurch, welche senkrecht auf der Turbinenwelle stehen. Bei der Fourneyron-Turbine strömt das Wasser von innen nach aussen, bei der Francis-Turbine von aussen nach innen.

Die theoretischen Untersuchungen beider Turbinenarten lassen sich, wie es im Folgenden geschehen soll, unter Einführung entsprechender Bezeichnungen, an der Hand derselben Formeln durchführen; es wird daher bei der Ableitung der betreffenden Grundgleichungen nur von der Radialturbine allgemein die Rede sein und erst bei der Besprechung der Hauptdimensionen auf den Unterschied zwischen den Anordnungen von Fourneyron und Francis besonders eingegangen werden. Fourneyron erbaute seine Turbine bereits vor dem Jahre 1829; dieselbe ist als die erste Turbine anzusehen, welche den theoretischen Anforderungen vollständig entsprach, und wurde auch von besonderer Bedeutung dadurch, dass sie Poncelet zu seinen classischen Untersuchungen (s. o. S. 164) Veranlassung gab.

Fig. 68 zeigt im Verticaldurchschnitt und im Grundriss die Skizze einer Fourneyron-Turbine.

Das im Kanale *K* herbeikommende Wasser tritt durch den Einfallcylinder *L* in den am Fusse desselben festliegenden mit Leitcanälen versehenen Einlaufapparat *A*, aus welchem das Wasser horizontal in das Laufrad *B* eingeführt wird; das Laufrad ist durch den Teller *T* fest mit der Turbinenwelle *W* verbunden. In dem ringförmigen Spalte zwischen Leitapparat und Laufrad lässt sich zum Zweck der Regulirung ein Blechcylinder *SS* (Ringschütze) durch die Zugstangen *dd* auf- und abschieben; im Innern dieses Cylinders sind Holzbacken *bb* befestigt, welche zwischen je zwei Leitschaufeln hineinpassen und damit zugleich eine sichere Führung der Ringschütze abgeben.

Fig. 68.



In der Figur erscheint die Schütze vollständig gehoben, die Turbine also voll beaufschlagt.

OO stellt den Oberwasser- und *UU* den Unterwasserspiegel dar; nach der Zeichnung läuft also die Turbine im Unterwasser und der Verticalabstand *h* beider Spiegel repräsentirt das disponible Gefälle.

Läuft die Turbine in freier Luft, so liegt der Unterwasserspiegel *UU* unter der unteren Radebene, so dass die Turbine freihängt, was freilich mit einem unvermeidlichen Gefällverluste verbunden ist, der von der **mittleren** Turbinenhöhe herab bis zum Unterwasserspiegel zu bemessen ist.

Die Schaufelung des Leitapparates und des Laufrades geht aus der Darstellung des Grundrisses in Fig. 68 hervor und wird noch näher besprochen werden.

Die Berechnung der Turbine erfolgt für vollen Schützenzug und unter der Voraussetzung, dass stossfreier Eintritt ins Laufrad vorliegt. Wird bei geringerer Aufschlagwassermenge die Ringschütze SS herabgeschoben, so werden bei ungeänderter Umfangsgeschwindigkeit des Laufrades an der Uebergangsstelle (am Spalte) plötzliche Geschwindigkeitsänderungen und damit Arbeitsverluste eintreten, sofern die Turbine unter Wasser läuft. Diese Ringschützen zeigen sich daher bei veränderlicher Aufschlagwassermenge ebenso nachtheilig, wie das Verdecken der Leitkanäle bei einer unter Wasser laufenden Henschel-Jonval-Turbine (vergl. S. 200); wie dort wird man auch bei den Radialturbinen bei sehr veränderlichen Wassermengen das Laufrad in freier Luft laufen lassen und damit eine partielle Beaufschlagung herbeiführen.

Bei der Fourneyron-Turbine hat man durch Ausführung sogenannter Etagenräder den Nachtheil zu beseitigen gesucht. Die ganze Höhe des Laufrades ist durch Zwischenböden getheilt, sodass dem Einlaufsapparate gewissermassen zwei oder drei gleiche, über einander liegende Laufräder gegenüberstehen. Bei vollem Schützenzuge laufen die über einander liegenden Laufräder gleich vortheilhaft. Das unterste Laufrad ist für die Minimalwassermenge bei gleicher Umdrehungsgeschwindigkeit berechnet und bei dieser Beaufschlagung wird die Ringschütze so weit herabgestossen, dass nur der unteren Etage das Druckwasser zugeführt und dabei ebenfalls stossfreier Eintritt erzielt wird.

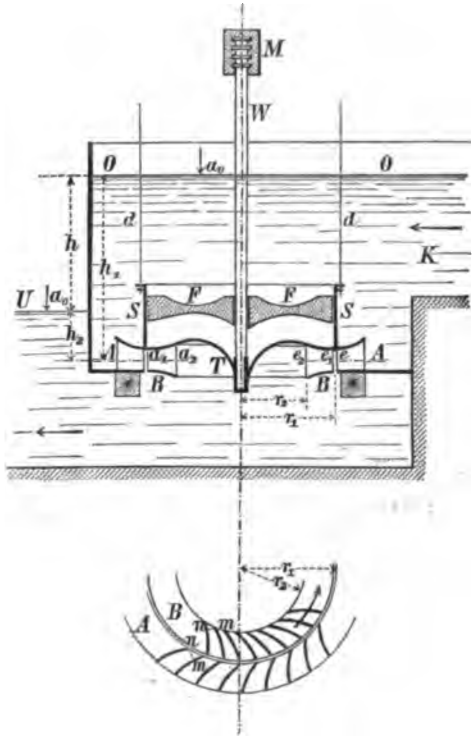
Theoretisch richtig wäre es, wenn man die Kranzhöhe des Laufrades in gleicher Weise veränderlich ausführen könnte, wie die Austrittshöhe des Leitrades; die dahin zielenden Versuche sind aber sehr complicirt und kostspielig ausgefallen.

Fig. 69 zeigt im Verticaldurchschnitt und im Grundriss die Skizze einer Francis-Turbine oder, wie sie häufig bezeichnet worden ist, einer »Fourneyron-Turbine mit äusserer Beaufschlagung« *).

*) In einer Abhandlung »Theorie und Entwurf einer Reactionsturbine mit äusserer Beaufschlagung« im Civilingenieur Bd. 2, 1856, S. 101 hat der Verfasser dieses Buches bereits auf die Vortheile dieser Turbinenart und ihre Berechnungsweise hingewiesen. Durch Gegenüberstellung der Rechnungsergebnisse für eine Fourneyron-Turbine mit innerer und eine mit

Der Leitapparat A umgiebt ringförmig das Laufrad B, durch welches das Wasser nach innen strömt und durch die besondere Form des Turbinentellers nach unten geleitet wird. Ueber dem Laufrade befindet sich ein befestigter Leitkörper FF, auf dessen äusserer, cylindrischer Oberfläche durch die Zugstangen dd die als Blechcylinder gebildete Ringschütze SS sich auf und ab und in den ringförmigen Spalt zwischen Leitapparat und Laufrad hinein schieben lässt. Das Zapfenlager der Turbinenwelle W befindet sich am oberen Ende; die Welle ist daselbst mit ringförmigen Vorsprüngen versehen, die in einem mit Lagermetall ausgegossenen Lagergehäuse M ruhen.

Fig. 69.



Die Turbinenlaufradhöhe vergrössert sich von

äusserer Beaufschlagung bei gleichem Gefälle und gleicher Wassermenge wurde dort nachgewiesen, dass die letztere Art bei wesentlich kleinerer Umdrehungszahl im vortheilhaftesten Gange einen höheren Wirkungsgrad ergeben müsse und daher ihre praktische Ausführung in Vorschlag gebracht.

Kurze Zeit nach dem Erscheinen dieser Arbeit wurde aber in Deutschland das vorzügliche Werk von James B. Francis, »Lowell hydraulic experiments« etc., Boston 1855, bekannt, von dem 1868 eine schön ausgestattete vermehrte 2. Auflage mit 23 Kupfertafeln erschien. Von der ersten Auflage findet sich ein vortrefflich bearbeiteter Auszug von Bornemann im Civilingenieur Bd. 2, 1856, S. 163. Nach diesem Buche hatte Francis schon früher Turbinen mit äusserer Beaufschlagung ausgeführt und giebt schon eine sorgfältig ausgeführte Versuchsreihe mit einer solchen und zugleich eine Versuchsreihe mit einer gewöhnlichen Fourneyron-Turbine; seit-der Eintritts- nach der Austrittsstelle hin von e_1 auf e_2, während bei der Fourneyron-Turbine (Fig. 68) gewöhnlich $e_2 = e_1$ ist. Die in Fig. 69 gegebene Abbildung stellt eine Francis-Turbine im Unterwasser laufend dar und zwar als sogenannte Niederdruckturbine, für ein verhältnissmässig geringes Gefälle h ausgeführt, wie das auch bei der Fourneyron-Turbine Fig. 68 der Fall ist.

Bei grossem Gefälle, bei Hochdruckturbinen, wird der Raum L (Fig. 68) über dem Leitapparate nach oben hin vollständig geschlossen und ihm das Aufschlagwasser durch ein seitwärts einmündendes Einfallrohr vom Oberwasserspiegel her zugeführt.

Bei der Francis-Turbine hat man in diesem Falle in neuerer Zeit mit entschiedenem Vortheil wieder ein »Saugrohr« in Anwenwendung gebracht*), das bei Henschel-Jonval-Turbinen (vergl. Fig. 50, S. 184) ausser Gebrauch gekommen ist.

Um nun bei den folgenden Entwickelungen den Unterschied zwischen Fourneyron- und Francis-Turbine nicht von vornherein festhalten zu müssen, sei der Radius des Leitapparates an der Austrittsstelle mit r_1 bezeichnet; ebenso der Radius des Laufrades an der Eintrittsstelle mit r_1 und an der Austrittsstelle mit r_2; es werden also beim Laufrade die Bezeichnungen äusserer und innerer Radius vermieden und alle auf die Eintrittsstelle bezüglichen Grössen sollen dann ebenfalls mit dem Index 1 und die auf die Austrittsstelle bezüglichen mit dem Index 2 bezeichnet werden; der ganze Unterschied in den Formeln für beide Turbinengattungen tritt nur bei ihrer numerischen Verwerthung hervor; das Verhältniss $r_1 : r_2$ ist dann bei Fourneyron < 1 und bei Francis > 1.

Fig. 70, a und b zeigt die Schaufelformen und die Geschwindigkeitszerlegungen für den Fall des stossfreien Eintrittes des Wassers. Bei E tritt das Wasser, aus dem Leitapparate kommend, mit der Geschwindigkeit c in das Laufrad ein; α ist der Winkel, um welchen die Richtung der Geschwindigkeit c vom Radius abweicht,

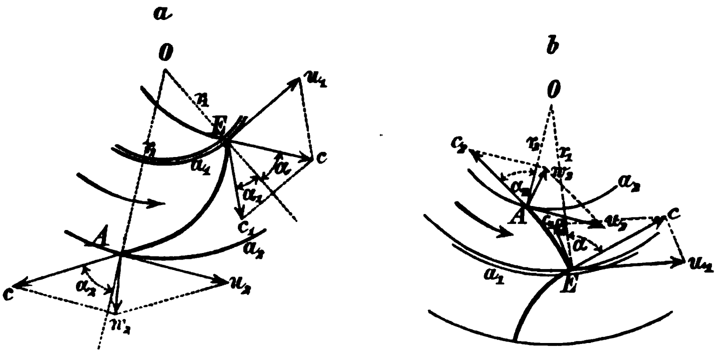
---

dem bezeichnet man mit Recht die erstere Turbine als »Francis-Turbine«. — Das Werk von Francis enthält zugleich höchst werthvolle Versuchsresultate über den Ausfluss des Wassers durch breite Ueberfälle, die bei den Bremsversuchen zur Bestimmung der Aufschlagwassermengen Verwerthung fanden.

*) A. Pfarr, »Bremsergebnisse an radialen Reactionsturbinen (Francis-Turbinen)«. Zeitschrift des Ver. deutscher Ing. Bd. 36, 1892, S. 797.

während die Tangente am ersten Schaufelelement, also die **relative** Eintrittsgeschwindigkeit c_1 mit r_1 den Winkel α_1 einschliesst; u_1 ist die Umfangsgeschwindigkeit an der Eintrittsstelle E, und u_1 und c_1 bilden die Componenten der Geschwindigkeit c. An der Aus-

Fig. 70 *a* und *b*.



trittsstelle A des Laufrades ist u_2 die Umfangsgeschwindigkeit und c_2 die relative Austrittsgeschwindigkeit und beide vereinigt geben die absolute Geschwindigkeit w_2, mit welcher das Wasser das Laufrad verlässt; die Schaufeltangente an der Austrittsstelle schliesst mit dem Radius r_2 daselbst den Winkel α_2 ein.

Ist nun t_1 die **Theilung**, d. h. die Entfernung von Schaufelmitte zu Schaufelmitte auf dem Umfange des Eintrittskreises des Laufrades und x_1 dessen Schaufelzahl, sowie σ_1 die Schaufeldicke, so folgt:

$$t_1 = \frac{2r_1\pi}{x_1},$$

daher die normale lichte Kanalweite i_1:

$$i_1 = (t_1 \cos\alpha_1 - \sigma_1)$$

und weiter die Summe F_1 aller Durchflussquerschnitte beim Eintritte ins Laufrad:

$$F_1 = x_1 i_1 e_1,$$

wenn e_1 die Radhöhe an dieser Stelle ausdrückt. Es folgt daher:

$$F_1 = (2r_1\pi \cos\alpha_1 - x_1\sigma_1)e_1. \tag{176}$$

Auf demselben Wege folgt für die Summe F_2 aller Durchflussquerschnitte des Laufrades an der Austrittsstelle, wenn e_2 die Höhe daselbst darstellt:

$$F_2 = (2 r_2 \pi \cos \alpha_2 - z_1 \sigma_1) e_2 . \tag{177}$$

Ebenso folgt für die Summe F aller Ausflussquerschnitte des Leitapparates, wenn z dessen Schaufelzahl, σ die Schaufeldicke und e die Höhe der Ausströmungsöffnungen daselbst bedeutet:

$$F = (2 r_1 \pi \cos \alpha - z \sigma) e \tag{178a}$$

oder richtiger, wenn man die sogenannte »Deckung« in Rechnung bringt, wie auf S. 179 gezeigt wurde:

$$F = \left(2 r_2 \pi \cos \alpha - z \sigma - \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_1} z_1 \sigma_1 \right) e . \tag{179}$$

Streng genommen müsste auch bei Berechung des F_1 auf die Deckung Rücksicht genommen werden, welche von den Schaufeln des Leitapparates herrührt, wobei sich ergeben würde:

$$F_1 = \left(2 r_1 \pi \cos \alpha_1 - z_1 \sigma_1 - \frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha} z \sigma \right) e .$$

Hier tritt aber der Einfluss der Deckung mehr zurück, so dass zur Berechnung von F_1 die einfachere Formel (176) Benutzung finden mag.

Die in der Secunde durch Leit- und Laufrad strömende Wassermenge V ist:

$$V = Fc = F_1 c_1 = F_2 c_2 .$$

Wird nun, um Näherungsformeln zu gewinnen, zunächst die Schaufeldicke vernachlässigt, also $\sigma = \sigma_1 = 0$ gesetzt, so folgt:

$$\frac{c}{c_1} = \frac{e_1}{e} \frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha} , \tag{180}$$

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{r_1}{r_2} \frac{e_1}{e_2} \frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha_2} . \tag{181}$$

Gewöhnlich ist die Höhe e_1 des Laufrades an der Eintrittsstelle nur einige Millimeter grösser, als die Höhe e des Leitrades, so dass man unbedenklich $e_1 = e$ setzen kann, also nach Gleichung (180):

$$c_1 \cos \alpha_1 = c \cos \alpha ,$$

wonach die radiale Componente der Wassergeschwindigkeit vor und nach dem Eintritte in das Laufrad nahezu von gleicher Grösse ist.

Bei der Fourneyron-Turbine ist gewöhnlich $e_2 = e_1$, bei der Francis-Turbine dagegen immer $e_2 > e_1$.

Bei der Radial-Vollturbine geht man ebenso, wie es bei der Axial-Vollturbine (S. 184) besprochen worden ist, von der Annahme aus, dass der vortheilhafteste Gang der Turbine vorliegen werde, wenn der Eintritt des Wassers in das Laufrad ohne Stoss stattfindet und die absolute Austrittsgeschwindigkeit w_2 aus dem Laufrade möglichst klein ausfällt.

Die erstere Bedingung liefert nach Fig. 70 sogleich die Beziehung:

$$\frac{c_1}{u_1} = \frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha + \alpha_1)} \tag{182}$$

und die andere Bedingung wird erfüllt, wenn der Winkel α_2 so gross als möglich gewählt und

$$c_2 \sin\alpha_2 = u_2 \tag{183}$$

gesetzt wird. Im letzteren Falle ist $w_2 = c_2 \cos\alpha_2$ radial gerichtet.

Nun besteht aber die Beziehung:

$$u_2 : u_1 = r_2 : r_1$$

und die Verbindung der beiden vorstehenden Gleichungen giebt:

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{r_2}{r_1} \frac{\sin(\alpha + \alpha_1)}{\sin\alpha_2 \cos\alpha}. \tag{184}$$

Setzt man hier auf der linken Seite den in Gleichung (181) angegebenen Werth ein, so folgt:

$$\frac{\sin(\alpha + \alpha_1)}{\sin\alpha_2 \cos\alpha} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \frac{e_1 \cos\alpha_1}{e_2 \cos\alpha_2},$$

oder nach einfacher Reduction:

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{e_1}{e_2}\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \operatorname{tg}\alpha_2. \tag{185}$$

Die drei Schaufelwinkel α, α_1 und α_2 sollen also, nahezu, in diesem Zusammenhange zu einander stehen.

§ 29. Beste Umfangsgeschwindigkeit der Radial-Vollturbine.

Es sei a_0 der Atmosphärendruck in Wassersäule gemessen, h_1 die Tiefe der mittleren Höhe des Leitrades und des Laufrades unter dem Oberwasserspiegel (Fig. 68 und 69) und h_2 die Entfernung desselben Punktes vom Unterwasserspiegel, ferner sei a_1 der Druck im Spalte und a_2 beim Austritt aus dem Laufrade, in Wassersäule des luftleeren Piezometers gemessen. Dann gilt für die Ausflussgeschwindigkeit c am Leitapparate die Gleichung:

$$2g(h_1 + a_0 - a_1) = (1 + \zeta_1)c^2, \tag{186}$$

wobei ζ_1 den Widerstandscoefficienten für die Leitkanäle darstellt.

Für den Durchgang des Wassers durch das Laufrad gilt bei stossfreiem Eintritte Gleichung (152) S. 133:

$$2g(a_1 - a_2) = (1 + \zeta_2)c_2^2 - c_1^2 - (u_2^2 - u_1^2), \tag{187}$$

mit ζ_2 als Widerstandscoefficienten in den Laufradkanälen.

Endlich gilt die Gleichung:

$$a_2 = a_0 + h_2 \tag{188}$$

und daher folgt aus der Verbindung vorstehender drei Gleichungen, weil $h_1 - h_2 = h$ das disponible Gefälle darstellt:

$$2gh = (1 + \zeta_1)c^2 + (1 + \zeta_2)c_2^2 - c_1^2 - (u_2^2 - u_1^2). \tag{189}$$

Diese Gleichung gilt zunächst nach ihrer Ableitung für Turbinen, welche im Unterwasser laufen; sie findet aber auch ohne Weiteres Verwendung für Turbinen, welche, wie das neuerdings bei Francis-Turbinen wiederholt vorkommt, mit Saugrohr versehen sind.

Läuft die Turbine in freier Luft, so ist an Stelle von h, dem Verticalabstande des Ober- und Unterwasserspiegels, d. h. dem disponiblen Gefälle die Höhe h_1 (Fig. 68 und 69) in Gleichung (189) zu substituiren. Liegt eine Hochdruckturbine vor, bei welcher das Wasser durch ein Einfallrohr in die Turbinenkammer eingeführt wird, so erhöhen die hydraulischen Widerstände in demselben in entsprechendem Maasse den Widerstandscoefficienten ζ_1; ohne Einfallrohr dürfte wieder, wie auf S. 185 angegeben, $\zeta_1 = \zeta_2 = 0{,}125$ gesetzt werden.

Nach dem oben Angegebenen finden sich nach Fig. 70 folgende Beziehungen:

$$c = \frac{u_1 \cos \alpha_1}{\sin(\alpha + \alpha_1)}; \quad c_1 = \frac{u_1 \cos \alpha}{\sin(\alpha + \alpha_1)}; \quad c_2 = \frac{r_2}{r_1} \frac{u_1}{\sin \alpha_2}. \qquad (190)$$

Benutzt man dieselben in Gleichung (189), so ergiebt sich zur Berechnung der vortheilhaftesten Umfangsgeschwindigkeit u_1 an der Eintrittsstelle des Laufrades nach leicht zu übersehenden Reductionen, wenn man gleichzeitig die Beziehung

$$c_1^2 = c^2 + u_1^2 - 2 c u_1 \sin \alpha$$

benutzt:

$$u_1 = \sqrt{\frac{2gh}{\frac{2 \sin \alpha \cos \alpha_1}{\sin(\alpha + \alpha_1)} + \zeta_1 \frac{\cos^2 \alpha_1}{\sin^2(\alpha + \alpha_1)} + \frac{(\zeta_2 + \cos^2 \alpha_2)}{\sin^2 \alpha_2} \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2}}. \qquad (191)$$

Die Umfangsgeschwindigkeit an der Austrittsstelle des Laufrades ist dann:

$$u_2 = \frac{r_2}{r_1} u_1, \qquad (192)$$

worauf sich auch nach den Gleichungen (190) die einzelnen Wassergeschwindigkeiten c, c_1 und c_2 berechnen lassen.

Gleichung (191) ist es, welche bei Berechnung neuer Turbinen in Anwendung kommt. Bei der Fourneyron-Turbine bezieht sich u_1 auf den kleineren Radius, bei der Francis-Turbine auf den grösseren Radius des Laufrades; aus diesem Grunde schon wird unter sonst gleichen Umständen die Francis-Turbine beim vortheilhaftesten Gange eine geringere Umdrehungszahl ergeben.

Es ist aber nützlich, noch auf eine andere Form der Gleichung für die vortheilhafteste Umlaufsgeschwindigkeit der Radial-Vollturbine hinzuweisen.

Nach Gleichung (151) S. 132 im 1. Theile ergab sich die übertragene Arbeit L:

$$L = M[c_2 u_2 \sin \alpha_2 - c_1 u_1 \sin \alpha_1 - (u_2^2 - u_1^2)],$$

wobei M die Wassermasse bedeutet, welche in der Secunde durch das Laufrad geht. Setzt man hier, wie vorhin, $c_2 \sin \alpha_2 = u_2$ und stossfreien Eintritt voraus, für welchen nach Fig. 70 die Beziehung

$$c \sin \alpha = u_1 - c_1 \sin \alpha_1$$

gilt, so folgt einfach:

$$L = M u_1 c \sin \alpha \,, \tag{193a}$$

oder unter Benutzung der ersten der Gleichungen (190):

$$L = M u_1^2 \cdot \frac{\sin \alpha \cos \alpha_1}{\sin (\alpha + \alpha_1)} \,. \tag{193b}$$

Dividirt man diesen Ausdruck durch die disponible Arbeit $L_m = Mgh$, so ergiebt sich der hydraulische Maximalwirkungsgrad η_m (ohne Rücksicht auf die Zapfenreibung):

$$\eta_m = \frac{u_1 c \sin \alpha}{gh} \,, \tag{194a}$$

oder:

$$\eta_m = \frac{u_1^2}{2gh} \cdot \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha_1}{\sin (\alpha + \alpha_1)} \tag{194b}$$

und aus dem letzten Ausdrucke folgt:

$$u_1 = \sqrt{\eta_m} \sqrt{\frac{\sin (\alpha + \alpha_1)}{2 \sin \alpha \cos \alpha_1} 2gh} \,, \tag{195}$$

oder auch:

$$u_1 = \sqrt{\eta_m} \sqrt{(1 + \operatorname{cotg} \alpha \operatorname{tg} \alpha_1) \cdot gh} \,. \tag{195a}$$

(Vergl. hier die Bemerkungen auf S. 186.)

Es verdient hervorgehoben zu werden, dass die Verbindung der beiden vorstehenden Gleichungen (195) und (191) sofort auf einen Ausdruck führt, welcher den Maximalwirkungsgrad η_m direct ergeben würde.

§ 30. Vom Spaltüberdruck bei Radial-Vollturbinen und die Berechnung neuer Turbinen.

Ein Blick auf Fig. 68 und 69 S. 285 und 287 zeigt, dass das über den Spalt, d. h. durch den ringförmigen Raum zwischen Leit- und Laufrad strömende Druckwasser mit dem Unterwasser in Verbindung steht, also eine Abdichtung nicht vorliegt, auch praktisch nicht durchführbar ist.

Nun ist aber a_1 der Piezometerstand im Spalte und a_2 der beim Austritt des Wassers aus dem Laufrade; die Differenz $a_1 - a_2$ bezeichnet man als »Spaltüberdruck«.

Ist derselbe positiv, so strömt ein Theil des Aufschlagwassers unausgenutzt direct durch den Spalt in das Unterwasser, ohne durch das Laufrad zu gehen. In diesem Falle tritt ein Arbeitsverlust ein, der um so grösser sein wird, je weiter der Spalt und je grösser der Spaltüberdruck ist. Es gilt daher als eine der ersten Regeln, diesen Spalt so eng wie möglich zu machen. Sollte dagegen der Spaltüberdruck $a_1 - a_2$ negativ ausfallen, so tritt Unterwasser durch den Spalt in das Innere und strömt gleichzeitig mit dem Druckwasser durch das Laufrad. Sollte dabei die Turbine in freier Luft laufen, so findet durch den Spalt ein Eintritt von Luft statt; in beiden Fällen, die in der That leicht eintreten können, sagt man, es finde ein Ansaugen von Wasser bez. Luft statt. Dieses Ansaugen muss man als ganz besonders nachtheilig ansehen, da durch dasselbe der regelmässige Eintritt des Druckwassers in das Laufrad Störungen erleidet, die alle Vorausberechnungen der Laufradkanäle hinfällig erscheinen lassen.

Es gilt daher auch durchaus als streng festzuhaltende Regel, die Dimensionen der Art zu wählen, dass der Spaltüberdruck bei Radial-Vollturbinen positiv ausfällt, da ein Ansaugen als weit schädlicher anzusehen ist, als der Wasserverlust durch den Spalt.

Die Frage nach der Berechnung des Spaltüberdruckes ist daher bei der hier in Betrachtung stehenden Turbine von besonderer Bedeutung.

Subtrahirt man Gleichung (197) von Gleichung (187), so folgt:

$$2g\,[h - (a_1 - a_2)] = (1 + \zeta_1)\,c^2$$

und hieraus der Spaltüberdruck:

$$a_1 - a_2 = \left(1 - (1 + \zeta_1)\,\frac{c^2}{2gh}\right)h\,. \qquad (196)$$

Man erkennt zunächst aus dieser Gleichung, dass der Spaltüberdruck positiv ausfällt, sofern

$$c < \sqrt{\frac{2gh}{1 + \zeta_1}}$$

ist, d. h. die Ausflussgeschwindigkeit c des Wassers aus dem Leitapparate kleiner ist, als sie sein würde, wenn das Wasser direct aus dem Leitapparate in das Unterwasser ausströmen würde.

Wichtiger aber ist folgende Betrachtung.

Aus der ersteren der Gleichungen (190) findet sich:

$$u_1 = \frac{c \sin(\alpha + \alpha_1)}{\cos \alpha_1},$$

und dieser Werth, in Gleichung (194a) benutzt, ergiebt:

$$\eta_m = \frac{2 \sin \alpha \sin(\alpha + \alpha_1)}{\cos \alpha_1} \cdot \frac{c^2}{2gh}$$

oder mit Gleichung (196) verbunden:

$$a_1 - a_2 = \left[1 - \frac{(1 + \zeta_1)\,\eta_m \cos \alpha_1}{2 \sin \alpha \sin(\alpha + \alpha_1)}\right] h, \qquad (196\,a)$$

/4/2

wonach allerdings für die numerische Berechnung des Spaltüberdruckes der hydraulische Maximalwirkungsgrad bekannt sein müsste.

Man erkennt aber doch, dass dieser Ueberdruck positiv ausfällt, wie es sein soll, wenn

$$2 \sin \alpha \sin(\alpha + \alpha_1) > (1 + \zeta_1)\,\eta_m \cos \alpha_1$$

ist, oder, wie eine einfache Umformung ergiebt, wenn

$$\cos(2\alpha + \alpha_1) < [1 - (1 + \zeta_1)\,\eta_m] \cos \alpha_1 \qquad (197)$$

ist.

Setzt man für die rechte Seite dieser Ungleichung:

$$[1 - (1 + \zeta_1)\,\eta_m] \cos \alpha_1 = \cos \varphi, \qquad (198)$$

wobei φ einen Hülfswinkel darstellt, der sich nach dieser Gleichung berechnen liesse, so ergiebt sich nach Gleichung (197):

$$(2\alpha + \alpha_1) > \varphi \quad \text{oder} \quad \alpha + \alpha_1 > \varphi - \alpha. \qquad (199)$$

Setzt man für den äussersten Grenzfall, der aber in Wirklichkeit nicht erreicht wird, $\zeta_1 = 0$ und $\eta_m = 1$, so ergiebt Gleichung (198) $\varphi = 90^\circ$ und daher müsste, wenn der Ueberdruck Null sein sollte, also weder aus dem Spalte Wasser ausströmen noch daselbst angesaugt werden sollte,

$$2\alpha + \alpha_1 = 90^\circ \quad \text{oder} \quad \alpha + \alpha_1 = 90^\circ - \alpha \qquad (199\,a)$$

sein, d. h. die Richtung der Ausströmungsgeschwindigkeit c müsste den Winkel zwischen c_1 und u_1 (Fig. 70) gerade halbiren.

Setzt man dagegen richtiger $\zeta_1 = 0{,}125$ und für grosse Turbinen $\eta_m = 0{,}85$, was nahe zutreffend sein wird, so ergiebt Gleichung (197):

$$\cos(2\alpha + \alpha_1) < 0{,}044 \cos\alpha_1 .$$

Fourneyron nahm seiner Zeit bei seinen Ausführungen und Poncelet bei seinen theoretischen Untersuchungen $\alpha_1 = 0$, wonach:

$$\cos 2\alpha < 0{,}044 \quad \text{oder} \quad \alpha > 43^\circ\, 44'$$

folgt. Fourneyron wählte α zwischen 57° bis 60°, erzielte also jedenfalls einen positiven Spaltüberdruck. Für $\alpha_1 = 0$ und $\alpha = 60^\circ$ ergiebt übrigens Gleichung (196a) diesen Spaltüberdruck selbst:

$$a_1 - a_2 = 0{,}363 \cdot h,$$

also nicht unbedeutend.

Für den vorhin angedeuteten Grenzfall müsste (bei $\varphi = 90^\circ$) $\alpha > 45^\circ$ sein bei $\alpha_1 = 0$. Man kann daraus den Schluss ziehen, dass bei solchen Turbinen, bei welchen man durch die Richtung der Eintrittsgeschwindigkeit c den Winkel zwischen c_1 und u_1 gerade halbiren lässt, wie das bei den unten zu behandelnden Radial-Partialturbinen im Allgemeinen geschieht, beim besten Gange immer ein geringer positiver Spaltüberdruck vorliegen wird, was als zweckmässig anzusehen ist.

Der Spaltüberdruck wird allgemein um so grösser ausfallen, je mehr der Winkel α von dem Werthe $\left(45^\circ - \frac{\alpha_1}{2}\right)$ (nach Gleichung 199a) abweicht; diese Differenz ist, nach der gebräuchlichen Wahl der Schaufelform, besonders gross bei der Francis-Turbine, bei der daher in der Regel auch ein grösserer Wasserverlust durch den Spalt stattfinden wird.

Was nun die Berechnung einer neu zu construirenden Radial-Vollturbine betrifft, so ist hier als gegeben anzusehen das Gefälle h und die Maximal-Aufschlagwassermenge V in Cubikmetern auf die Secunde bezogen; die Turbinendimensionen werden für vollen Schützenzug bestimmt.

Hier sind zunächst die beiden Turbinenarten zu unterscheiden.

Bei der Turbine von Fourneyron berechnet man den Eintrittsradius r_1 nach der empirischen Formel:

$$r_1 = 0{,}5 \cdot \sqrt{V} \quad \text{bis} \quad 0{,}6 \cdot \sqrt{V}; \tag{200 a}$$

in diesem Falle ist die Zuflussgeschwindigkeit im Einfallrohre L (Fig. 63) ohngefähr gleich einem Meter.

Man wählt ferner den Austrittswinkel α am Leitapparate (Fig. 70)

$$\alpha = 50^\circ \text{ bis } 65^\circ \tag{201 a}$$

und den Eintrittswinkel α_1 im Leitrade

$$\alpha_1 = 10^\circ \text{ bis } 30^\circ. \tag{202 a}$$

Das Verhältniss der Radhalbmesser und der Radhöhe an der Austritts- und Eintritsstelle des Laufrades ist:

$$\frac{r_2}{r_1} = 1{,}25 \text{ bis } 1{,}67 \quad \text{und} \quad \frac{e_2}{e_1} = 1. \tag{203 a}$$

Bei der Turbine von Francis finden sich dagegen gewöhnlich folgende Verhältnisse:

Der Eintrittsradius r_1 des Laufrades nach der empirischen Formel:

$$r_1 = 0{,}75\sqrt{V} \text{ bis } 0{,}80\sqrt{V}, \tag{200 b}$$

$$\alpha = 65^\circ \text{ bis } 0{,}75^\circ, \tag{201 b}$$

$$\alpha_1 = 10^\circ \text{ bis } 30^\circ, \tag{202 b}$$

$$\frac{r_2}{r_1} = 0{,}75 \text{ bis } 0{,}85, \quad \frac{e_2}{e_1} = 1 \text{ bis } 1{,}43. \tag{203 b}$$

Hat man für die eine oder die andere Turbinenart nach Vorstehendem vorläufige Wahlen getroffen, so erfolgt die weitere Berechnung bei beiden Arten der Turbinen nach folgenden Formeln.

Zunächst berechnet sich der Austrittswinkel am Laufrade nach Gleichung (185):

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 \frac{e_2}{e_1} (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha_1), \tag{204}$$

wobei einzelne Werthe der rechten Seite unter Umständen neu gewählt werden und zwar derart, dass α_2 sich zu mindestens 70° herausstellt.

Mit $\zeta_1 = \zeta_2 = 0{,}125$ berechnet man jetzt nach den Gleichungen (191) und (192) S. 293 die vortheilhafteste Umdrehungsgeschwindigkeit u_1 und u_2 des Laufrades und dann die Umdrehungszahl n in der Minute:

$$n = \frac{30\, u_1}{\pi r_1}. \tag{205}$$

Das Resultat dieser Rechnung kann Veranlassung geben, den Turbinenradius r_1 nachträglich anders zu wählen, um für n einen runden Werth zu erhalten.

Jetzt bestimmt man nach den Gleichungen (190) die Geschwindigkeiten c, c_1 und c_2 und erhält nun die erforderlichen Durchflussquerschnitte:

$$F = \frac{V}{c}, \qquad F_1 = \frac{V}{c_1}, \qquad F_2 = \frac{V}{c_2}. \tag{206}$$

Die Verbindung der beiden Gleichungen (176) und (177) führt ohne Weiteres auf die Formel:

$$2\pi (r_1 \cos \alpha_1 - r_2 \cos \alpha_2) \cdot e_2 = \frac{e_2}{e_1} F_1 - F_2, \tag{207}$$

durch welche sich die Laufradhöhe e_2 an der Austrittsstelle berechnet. Damit ist auch die Höhe e_1 an der Eintrittsstelle bestimmt.

Aus Gleichung (177) folgt dann:

$$z_1 \sigma_1 = 2 r_2 \pi \cos \alpha_2 - \frac{F_2}{e_2} \tag{208}$$

und hieraus, wenn man die Schaufeldicke σ_1 gewählt hat (s. S. 188) die Anzahl z_1 der Schaufeln im Laufrade. Ebenso berechnet sich aus Gleichung (179) $z\sigma$ und damit die Anzahl z der Schaufeln im Leitapparate.

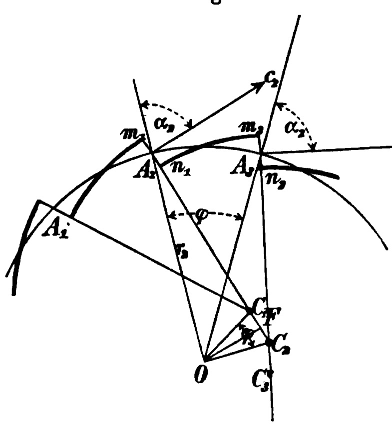
Die ganze Berechnung ist so oft zu wiederholen, bis man für alle einzelnen Grössen zweckentsprechende Werthe gefunden hat; bei den zahlreichen Einzeldimensionen dürfte es kaum vorkommen, dass schon im ersten Wurfe die Berechnung der Turbine befriedigend ausfällt.

Die ganze im Vorstehenden vorgeführte Berechnungsweise geht nun, was bestimmt hervorgehoben werden muss, von einer Annahme aus, die bei einzelnen ausgeführten, insbesondere bei älteren Turbinen nicht zutreffend ist.

Das Vorstehende setzt nämlich voraus, dass das Wasser sowohl aus den Leitradkanälen, wie auch aus den Laufradkanälen **ohne Contraction**, d. h. in parallelen Wasserfäden **austritt**, und das wird nur der Fall sein, wenn an den betreffenden Austrittsstellen die im Grundrisse der Figuren 68 und 69 mit m und n bezeichneten, einander gegenüberliegenden Schaufelelemente **parallel** gerichtet sind.

Befolgt man z. B. bei der Construction der Fourneyron-Turbine die Regel Redtenbacher's, die Laufradschaufeln nach einem einzigen Kreisbogen zu krümmen, so werden die Schaufelelemente immer convergiren; es wird daher der Wasserstrahl mit Contraction austreten, die allerdings Redtenbacher auch durch Einführung von Contractionscoefficienten in Rechnung stellen will. Wegen der Unbestimmtheit dieses Coefficienten in jedem einzelnen Falle wird aber in die Berechnung der Turbine eine grosse Unsicherheit gebracht. Ist z. B. F_2 der Austrittsquerschnitt im Laufrade nach obigen Bestimmungen, so müsste in die Rechnung für F_2 der Werth kF_2 eingesetzt werden, wobei $k < 1$ der Contractionscoefficient ist. Geschieht dies nicht, so würde die oben gegebene Berechnungsmethode Resultate ergeben, nach denen die ausgeführte Turbine gar nicht die der Rechnung zu Grunde gelegte Wassermenge V durchzuleiten vermag, wenn nicht die Radhöhe in entsprechender Weise vergrössert angenommen worden ist.

Fig. 71.



Die erwähnte Convergenz der Schaufelelemente lässt sich aber hier, wie es auch bei der Berechnung der Henschel-Jonval-Turbine (S. 189) schon geschehen ist, leicht beseitigen, sodass die Einführung von Contractionscoefficienten in die Rechnung unnöthig wird und die vorhin gegebene Methode der Turbinenberechnung volle Gültigkeit erhält.

Beschreibt man mit dem Austrittsradius $OA_1 = OA_2 = r_2$ einen Kreis (Fig. 71) und trägt man die Theilung

$$t_2 = A_1 A_2 = A_2 A_3 = \frac{2 r_2 \pi}{x_1}$$

auf, wobei wieder x_1 die Anzahl der Laufradschaufeln ist, so ist der Theilwinkel φ in Bogenlänge gemessen:

$$\varphi = \frac{2\pi}{x_1}. \tag{209}$$

Man trage nun die Richtung der Austrittsgeschwindigkeit c_2 in A_1 und A_2 von den Radien des Rades um α_2 abweichend auf und ziehe dazu die Senkrechten $A_1 C_1$ und $A_2 C_2$ und von O aus auf $C_1 C_2$ die Normale OF, so ist $\angle A_1 O A_2 = \angle C_1 O C_2 = \varphi$ und

$$\angle A_1 OF = \alpha_2 \quad \text{und} \quad \angle C_1 OF = \angle C_2 OF = \frac{\varphi}{2}.$$

Bezeichnet man die Strecke $A_2 F$ mit ϱ und $C_1 C_2$ mit i, so folgt:

$$\varrho = r_2 \sin \alpha_2 \tag{210}$$

und

$$i = 2 r_2 \cos \alpha_2 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}. \tag{211}$$

Beschreibt man mit dem Werthe ϱ als Radius von den Punkten C_1, C_2, C_3 aus die Kreisbögen $n m_1$, $n_1 m_2$, $n_2 m_3$ u. s. f., so bilden diese jetzt bei der Fourneyron-Turbine die äusseren, bei der Francis-Turbine die inneren Radschaufelenden, die nun in der That die Bedingungen erfüllen, dass die Schaufelelemente m und n an der Austrittsstelle parallel liegen, also eine Contraction des ausströmenden Strahles nicht stattfinden wird.

Bei Fourneyron setzt man dann die Schaufelcurve nach innen hin bis zum inneren Umfange, bei der Francis-Turbine bis zum äusseren Umfange fort, solcher Art, dass dort der Umfang unter dem Winkel α_1 getroffen wird. Diese Fortsetzung kann ebenfalls durch einen Kreisbogen erfolgen, dessen Radius sich leicht durch Probiren, aber auch, was hier nicht weiter behandelt werden soll, durch Berechnung findet. Bei der Francis-Turbine besitzt dann allerdings die Schaufelcurve einen Wendepunkt.

Ist σ_1 wieder die Schaufeldicke, so ist die lichte Kanalweite $i - \sigma_1$ und daher mit vorstehenden Gleichungen:

$$F_2 = \left(2 r_2 \cos \alpha_2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{z_1} - \sigma_1\right) z_1 e_2, \tag{212}$$

woraus sich dann die Radhöhe e_2 bestimmt.

Die letzte Gleichung tritt also an die Stelle von Gleichung (177) und geht bei enger Theilung in diese über.

Die im Vorstehenden gegebenen Regeln zur Berechnung der Radial-Vollturbinen mögen an einem Beispiele aus der Praxis der Prüfung unterworfen werden und zwar möge die von Francis selbst construirte Turbine gewählt werden, an welcher derselbe eine sorgfältig ausgeführte Versuchsreihe angestellt hat, deren Resultate dann mit denen der theoretischen Untersuchungen verglichen werden sollen.

Die Hauptdimensionen sind dem auf S. 287 citirten Werke von Francis entnommen (2. Auflage 1868) und die Schaufelwinkel der Tafel IX daselbst durch Abmessungen an der Figur gefunden, die allerdings nicht mit voller Sicherheit gewonnen werden konnten.

Es sei für ein Gefälle von $h = 4$ m und eine Wassermenge von $r = 3{,}2$ cbm in der Secunde die Francis-Turbine zu berechnen.

Die Laufradhalbmesser seien $r_1 = 1{,}420$ m, $r_2 = 1{,}220$ m und damit $r_2 : r_1 = 0{,}860$; das Höhenverhältniss $e_2 : e_1 = 1{,}230$.

Die Schaufelwinkel betragen:

$$\alpha = 75^\circ, \quad \alpha_1 = 25^\circ \quad \text{und} \quad \alpha_2 = 70^\circ,$$

welche der Näherungsformel (185) nahe entsprechen.

Mit $\zeta_1 = \zeta_2 = 0{,}125$ folgt nun aus Gleichung (191) für die vortheilhafteste Umfangsgeschwindigkeit u_1 an der Eintrittsstelle:

$$\frac{u_1{}^2}{2gh} = 0{,}4793 \quad \text{und} \quad \frac{u_1}{\sqrt{2gh}} = 0{,}6923$$

und hieraus mit $h = 4$:

$$u_1 = 6{,}133 \text{ m},$$

und die vortheilhafteste Umdrehungszahl n in der Minute:

$$n = \frac{30 u_1}{\pi r_1} = 41{,}24.$$

Nach Gleichung (195) ergiebt sich dann der hydraulische Maximalwirkungsgrad:

$$\eta_m = 0{,}852.$$

Die Wassergeschwindigkeiten ergeben sich dabei nach den Gleichungen (190):

$$c = 8{,}946, \quad c_1 = 1{,}612, \quad c_2 = 8{,}896 \text{ m},$$

und der Spaltüberdruck ist nach Gleichung (196a):

$$a_1 - a_2 = 0{,}543 h = 2{,}17 \text{ m}$$

Wassersäule, also sehr beträchtlich.

Nach den Gleichungen (206) finden sich nun die Kanalquerschnitte:

$$F = 0{,}5670, \quad F_1 = 1{,}9853, \quad F_2 = 0{,}5701 \text{ qm},$$

und damit ergiebt sich aus Gleichung (207) die Radhöhe e_2 an der Austrittsstelle $e_2 = 0{,}341$; die an der Eintrittsstelle $e_1 = 0{,}277$ m.

Francis hat bei der Ausführung $e_2 = 0{,}375$ m und $e_1 = 0{,}305$ m angenommen; die Turbine hätte daher bei 4 m Gefälle eine grössere Wassermenge als $V = 3{,}2$ cbm durchlassen müssen; dass das nicht geschah, lag daran, dass die Schaufelemente an den Austrittsstellen des Leit- und des Laufrades, wie die Zeichnungen zeigen, etwas convergiren, also beim Austritt des Wassers ein gewisser Grad von Contraction des Strahles vorgelegen hat. Das Laufrad besitzt übrigens 40 Schaufeln, ebenso das Leitrad.

Nach vorstehenden Annahmen und Berechnungen wäre die disponible Arbeit:

$$L_m = Vh\gamma = 12800 \text{ mkg oder } N_m = 170{,}67 \text{ Pferdestärken;}$$

die hydraulische Maximalarbeit:

$$L = \eta_m Vh\gamma = 10907 \text{ mkg}$$

oder in Pferdestärken:

$$N = 145{,}41.$$

An dieser Turbine hat nun Francis eine ganze Reihe von Versuchen mit dem auf der Turbinenwelle aufgesetzten Bremsdynamometer, bei verschiedenen Schützenstellungen vom Stillstand bis zum Leergang angestellt.

Bei vollem Schützenzuge und beim vortheilhaftesten Gange beobachtete derselbe $V = 3{,}2$ cbm und $h = 4{,}077$ m und die effective Arbeit am Bremsdynamometer $L_e = 10390$ mkg und $N_e = 138{,}53$ Pferdestärke, woraus sich der effective Maximalwirkungsgrad zu $\eta = 0{,}797$ berechnet.

Dabei stellte sich:

$$\frac{u_1}{\sqrt{2gh}} = 0{,}6719,$$

und die vortheilhafteste Umdrehungszahl in der Minute zu $n = 40{,}32$ heraus.

Der, allerdings unbedeutende Unterschied mit unseren Rechnungsresultaten liegt in dem Umstande, dass bei den Versuchen noch die Zapfenreibung ins Spiel kommt.

Der der Zapfenreibung entspringende Effectverlust beurtheilt sich aus der Differenz:

$$\eta_m - \eta = 0{,}852 - 0{,}797 = 0{,}055.$$

Die Zapfenreibung hat also nur $5^1/_2$ Procent der disponiblen Arbeit erfordert und der effective Wirkungsgrad nahezu $\eta = 0{,}80$ betragen, ein Resultat, auf welches auch die neueren Versuche an gut construirten Turbinen von grosser Arbeitsstärke geführt haben.

Alle im Vorstehenden gegebenen Untersuchungen der Radial-Vollturbine bezogen sich nur auf den vortheilhaftesten Gang.

Für andere Schützenstellungen und beliebige andere Umlaufsgeschwindigkeiten sind die Rechnungen und theoretischen Untersuchungen zu erweitern.

§ 31. Beurtheilung einer bestehenden Radial-Vollturbine.

Bei den nachfolgenden Untersuchungen soll nun unter Aufrechterhaltung der eingeführten Bezeichnungen die Annahme verlassen werden, dass das Wasser stossfrei in das Laufrad eintritt; es wird demnach angenommen, dass das Laufrad mit einer beliebig gewählten Umfangsgeschwindigkeit u_1 (auf die Eintrittsstelle bezogen) umlaufe.

Hier kommen die Sätze in Anwendung, welche in § 12 S. 133 abgeleitet worden sind.

Zunächst findet sich für die Austrittsgeschwindigkeit c am Leitapparate unter Zugrundelegung der Figuren 68 und 69 wie früher die Formel:

$$(1+\zeta_1)c^2 = 2g(a_0+h_1-a_1)\,, \tag{213}$$

wenn wieder durch a_1 der absolute Spaltdruck dargestellt wird.

Ist nun a_1' der Druck im Laufradkanale unmittelbar nach dem Eintritt des Wassers, so besteht nach Gleichung (157) S. 136 die Beziehung:

$$(1+\zeta_2)c_2{}^2 - c_1{}^2 = 2g(a_1'-a_2)+u_2{}^2-u_1{}^2\,, \tag{213a}$$

wobei a_2 der Druck an der Austrittsstelle des Laufrades ist, welcher sich wieder wie auf S. 299 durch die Gleichung

$$a_2 = a_0 + h_2 \tag{213b}$$

bestimmt.

Die Verbindung dieser drei Gleichungen ergiebt:

$$2g(h+a_1'-a_1) = (1+\zeta_1)c^2+(1+\zeta_2)c_2{}^2-c_1{}^2-(u_2{}^2-u_1{}^2)\,. \tag{214}$$

Bei stossfreiem Eintritte ist $a_1' = a_1$, wobei dann wieder Gleichung (189) S. 292 hervortritt.

Beim Eintritt mit Stoss ist aber, wenn man die Hilfsgrösse

$$c_0 = c\cos(\alpha+\alpha_1)+u_1\sin\alpha_1 \tag{215}$$

nach Gleichung (154) S. 135 einführt:

$$2g(a_1'-a_1) = (\zeta_0 c_0+\zeta c_1)(c_0-c_1)\,, \tag{216}$$

zufolge Gleichung (158) S. 136, wobei ζ_0 als »Stosscoefficient« und ζ als »Eintrittscoefficient« bezeichnet worden ist; beide Werthe stellten sich theoretisch zu $\zeta_0 = \zeta = 2$ heraus und jeder derselben müsste durch Versuche bestimmt werden. Aus den auf S. 119 angegebenen Gründen wurde, wie es auch im Weiteren geschehen soll, $\zeta_0 = \zeta = 1{,}25$ angenommen.

Für $\zeta_0 = \zeta$ giebt die Verbindung der Gleichungen (215) und (216):

$$2g(a_1' - a_1)$$
$$= \zeta_0 [c^2 \cos^2(\alpha + \alpha_1) - c_1{}^2 + 2cu_1 \sin\alpha \cos(\alpha + \alpha_1) + u_1{}^2 \sin^2 \alpha_1], \quad (217)$$

welcher Werth dann in Gleichung (214) benutzt werden kann.

Aus der Beziehung $Fc = F_1 c_1 = F_2 c_2$ folgt:

$$c_1 = \frac{F}{F_1} c \quad \text{und} \quad c_2 = \frac{F}{F_2} c, \quad (218)$$

und überdies ist

$$u_2 = \frac{r_2}{r_1} u_1 .$$

Berechnet man nun für eine gegebene Vollturbine die Hilfsgrössen A, B und C nach den folgenden Formeln:

$$\left.\begin{aligned} (1+\zeta_1) + (1+\zeta_2)\left(\frac{F}{F_2}\right)^2 + (\zeta_0 - 1)\left(\frac{F}{F_1}\right)^2 - \zeta_0 \cos^2(\alpha + \alpha_1) &= A, \\ 2\zeta_0 \sin\alpha \cos(\alpha + \alpha_1) &= B, \\ \zeta_0 \sin^2 \alpha_1 + \left[\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 - 1\right] &= C, \end{aligned}\right\} (219)$$

welche Hilfsgrössen sich also leicht bestimmen lassen, so erhält man mittelst der Gleichungen (214) und (217) die Grundgleichung:

$$Ac^2 - Bcu_1 - Cu_1{}^2 = 2gh . \quad (220)$$

Für ein gegebenes Gefälle h und eine beliebige Umfangsgeschwindigkeit u_1 berechnet sich hieraus die Geschwindigkeit c, mit welcher das Wasser den Leitapparat verlässt; die Gleichungen (218) geben dann auch die Geschwindigkeiten c_1 und c_2; die Verbindung der Gleichungen (213) und (213b) giebt für den Spaltüberdruck:

$$a_1 - a_2 = h - (1 + \zeta_1)\frac{c^2}{2g},$$

und aus Gleichung (213a) ermittelt sich überdies die Druckänderung $(a_1' - a_1)$.

Mit c ist endlich die Aufschlagwassermenge V und die entsprechende Wassermasse gegeben durch:

$$V = Fc \quad \text{und} \quad M = \frac{Fc\gamma}{\gamma}. \tag{221}$$

Bemerkenswerth ist, dass hier zunächst an vollen Schützenzug gedacht worden ist; die Formeln gelten aber auch für andere Schützenstellung. Wird die Ringschütze herabgestossen, so ändert sich damit der Ausflussquerschnitt F des Leitapparates in entsprechendem Maasse, und damit ändert sich nur der Werth der Hilfsgrösse A.

Sind auf die angegebene Weise für einen bestimmten Fall die einzelnen Grössen berechnet, so bestimmt sich nun auch nach Gleichung (159) S. 136 die hydraulische Arbeit der Turbine durch:

$$L = M[u_1 c \sin\alpha + u_2 c_2 \sin\alpha_2 - u_2^2] - \frac{\zeta_0\gamma}{2g} F_1 c_0 (c_0 - c_1) u_1 \sin\alpha_1 \tag{222}$$

und das Drehmoment nach Gleichung (160) S. 136:

$$\mathfrak{M} = M[r_1 c \sin\alpha + r_2 (c_2 \sin\alpha_2 - u_2)] - \frac{\zeta_0\gamma}{2g} F_1 c_0 (c_0 - c_1) r_1 \sin\alpha_1. \tag{223}$$

Dividirt man L durch $Mgh = Vh\gamma$, so ergiebt sich der hydraulische Wirkungsgrad η. Man kann dann auch jedem einzelnen Schützenzuge entsprechend bei unveränderlichem Gefälle die Rechnungsresultate graphisch darstellen, wie es in Fig. 52 auf S. 195 für die Henschel-Jonval-Turbine gezeigt worden ist und daraus einen Schluss auf die vortheilhafteste Geschwindigkeit ziehen, bei welcher der Maximalwirkungsgrad erzielt wird, eine Frage, die oben nur auf dem Näherungswege beantwortet worden ist. Die Lösung dieser Frage auf dem Rechnungswege durch Verbindung der vorstehenden Formeln würde auf ausserordentlich complicirte Ausdrücke führen, doch geben dieselben die Möglichkeit, das Verhalten der Turbine für gewisse Grenzfälle zu untersuchen.

Zunächst möge der Stillstand des Laufrades in Betracht gezogen, also vorausgesetzt werden, dass beim Bremsen der Turbine die Bremsbacken entsprechend scharf angezogen worden sind.

In diesem Falle ist in vorstehenden Formeln $u_1 = 0$ und $u_2 = 0$ und nach Gleichung (215) ist $c_0 = c \cos(\alpha + \alpha_1)$ zu setzen.

Aus Gleichung (220) berechnet sich dann, da A nach Gleichung (219) bestimmt ist, die Geschwindigkeit c durch:

$$c = \sqrt{\frac{2gh}{A}},$$

worauf sich dann auch nach Gleichung (223) das Kraftmoment $\mathfrak{M}$ ermittelt, welches erforderlich ist, die Turbine festzuhalten. Es findet sich, wie leicht verfolgt werden kann, dieses Moment (ohne Rücksicht auf Zapfenreibung) nach der Gleichung;

$$\mathfrak{M} = Mr_1c\left\{\left(\sin\alpha + \frac{r_2}{r_1}\frac{F}{F_2}\sin\alpha_2\right) - \tfrac{1}{2}\zeta_0\left(\frac{F_1}{F}\cos^2(\alpha+\alpha_1) - \cos(\alpha+\alpha_1)\right)\sin\alpha_1\right\}.$$

Für den Leergang dagegen hat man in Gleichung (223) $\mathfrak{M} = 0$ zu setzen und aus der Verbindung mit Gleichung (220) die Grössen u_1 und c und damit $V = Fc$ zu bestimmen.

Leider sind die schönen Versuche von Francis (a. a. O.) nicht verwendbar, die vorstehenden Formeln unter Annahme der auf S. 302 angegebenen Dimensionen näher zu prüfen, wegen der Unsicherheit, auf welche man bei der Abmessung der Schaufelwinkel und der Kanalquerschnitte nach den vorliegenden Zeichnungen stösst und insbesondere, weil auch die Schaufeln an den Austrittsstellen des Leit- und Laufrades nicht richtig construirt worden sind, sondern Contraction der Wasserstrahlen herbeiführten. Es hätte sich hier die günstige Gelegenheit geboten, aus dem Vergleiche der Versuchsergebnisse mit denen der Rechnung auf die Grösse der Widerstandscoefficienten ζ_1, ζ_2 und ζ_0 einen Schluss zu ziehen, unter Umständen festzustellen, ob die in allen obigen Rechnungen festgehaltene Annahme gestattet ist, den Stosscoefficienten ζ_0 und den Eintrittscoefficienten ζ im Mittel gleich gross anzunehmen.

Wäre das nicht der Fall, so würden die Gleichungen (217) und (219) nach Gleichung (216) eine andere Form annehmen. Würde man dabei $\zeta_0 = 0$ setzen, was aber unzulässig ist, so würde man auf die Redtenbacher'schen Formeln und für $\alpha_1 = 0$ auf Poncelet's Formeln für die Fourneyron-Turbine gelangen, allerdings hier unter Berücksichtigung der Widerstandscoefficienten ζ_1 und ζ_2 in den Leit- und Radkanälen.

Bei der Radial-Vollturbine findet sich endlich für den Gleichgewichtszustand, d. h. wenn kein Wasser durch das Leit- und

20*

Laufrad strömt, also $c = 0$ ist, aus der Verbindung der dritten der Gleichungen (219) mit Gleichung (220):

$$h = -\left[\zeta_0 \sin^2 \alpha_1 + \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 - 1\right]\frac{u_1^2}{2g}, \tag{224}$$

und nach Gleichung (222), weil auch $M = 0$ ist, die hydraulische Arbeit (ohne Rücksicht auf Zapfenreibung):

$$L = -\frac{\zeta_0 \gamma}{2g} F_1 u_1^3 \sin^3 \alpha_1 . \tag{225}$$

Es muss daher die Turbine getrieben werden.

Bei der Fourneyron-Turbine ist $r_2 > r_1$ und daher h jedenfalls negativ, d. h. der Unterwasserspiegel stellt sich über den Oberwasserspiegel ein, immer vorausgesetzt, dass das Laufrad in derjenigen Richtung umgedreht wird, nach welchem es als Turbine laufen würde.

Bei der Francis-Turbine ist dagegen $r_2 < r_1$, sodass hier h positiv oder negativ ausfallen kann.

So ist z. B. für die oben vorgeführte Francis-Turbine $r_2 : r_1 = 0{,}86$ und $\alpha_1 = 25^0$ (s. S. 302), es ergäbe sich daher mit $\zeta_0 = 1{,}25$:

$$h = + 0{,}0372 \frac{u_1^2}{2g},$$

wonach sich bei dieser Turbine der Oberwasserspiegel über den Unterwasserspiegel einstellen würde, gleichgültig, mit welcher Umfangsgeschwindigkeit u_1 das Laufrad auch umgetrieben wird.

Bei der Henschel-Jonval-Turbine ist $r_2 = r_1$, woraus sich wieder die Formeln ergeben, welche bereits auf S. 197 aufgeführt worden sind.

B. Radialpartialturbine.

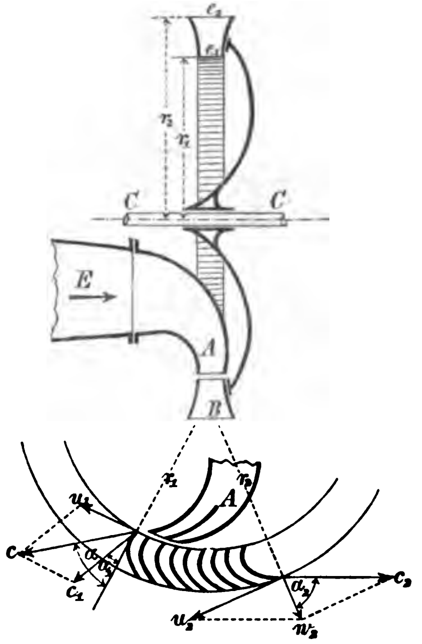
Schwamkrug-Turbine — Zuppinger-Turbine.

§ 32. Anordnung der Turbinen. Winkelverhältnisse bei stossfreiem Eintritte. Grenzturbine.

Die beiden genannten Turbinenarten werden jederzeit über dem Unterwasser aufgestellt, laufen also in freier Luft und kommen in Anwendung bei grossen Gefällen und kleinen Aufschlagwassermengen.

Fig. 72 zeigt die Skizze einer Schwamkrug-Turbine, die häufig auch, aber mit Unrecht, als Girard-Turbine bezeichnet wird. Schwamkrug hat seine Turbine zuerst 1848 bei bergbaulichen Anlagen in Freiberg in Sachsen in Ausführung gebracht*).

Fig. 72.



Das Laufrad *B* sitzt auf einer horizontalen Welle *CC*, doch kann dieselbe, wie das sonst bei Turbinen Gebrauch ist, auch vertical gestellt werden.

Das Aufschlagwasser strömt aus einem Reservoir durch das Einfallrohr *E* von oben herbei nach dem Einlaufe *A*, der hier gewöhnlich nur ein, zwei oder drei Leitkanäle umschliesst, die durch Schieber, welche in der Figur nicht angedeutet sind, eröffnet und abgeschlossen werden können. Die Schaufelung von Leitapparat und Laufrad geht aus der Figur hervor; die Laufradschaufeln sind aus Gründen, die bei der Besprechung der Girard-Turbine S. 208 angegeben worden sind, sackförmig gekrümmt, wie in Fig. 55b S. 206 angedeutet worden ist.

Das Druckwasser strömt, wie bei der Fourneyron-Turbine, von innen nach aussen durch das Laufrad.

Fig. 73 zeigt die Skizze einer Zuppinger-Turbine. Diese Turbine, die häufig auch kurz als »Tangentialrad« bezeichnet wird, ist zuerst 1844 von Zuppinger (Escher-Wyss in Zürich) ausgeführt worden.

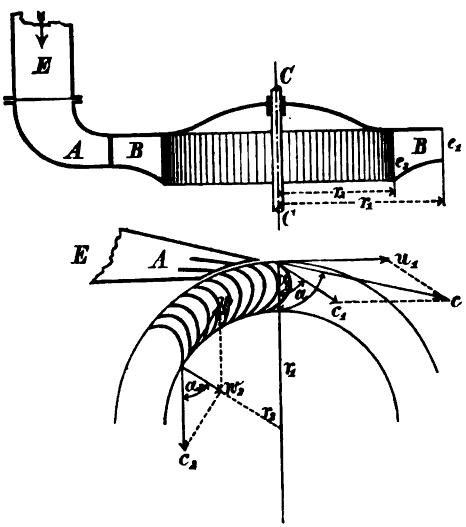
Das Wasser strömt vom Einfallrohr *E* durch die Leitkanäle *A* fast tangential gegen den äusseren Umfang des Laufrades *B* und

*) »Freiberger Jahrbuch für den Berg- und Hüttenmann« für 1849 u. 1850.

durch die Radkanäle von aussen nach innen, wie bei der Francis-Turbine. Die Radaxe C steht vertical.

Die theoretischen Untersuchungen lassen sich auch hier wieder für beide Turbinen gemeinschaftlich durch dieselben Formeln durchführen, wenn man nur alle Grössen, welche sich auf die Eintrittsstelle des Laufrades beziehen, mit dem Index 1 und die an der Austrittsstelle mit dem Index 2 bezeichnet.

Fig. 73.



Zweckmässiger Weise geht man dabei von einer »Grenzturbine« aus, indem man zunächst annimmt, dass der Leitapparat den gesammten Eintrittsumfang des Laufrades vollständig umschliesst und dass die Turbine voll läuft; nur mit dem Unterschiede gegen die Vollturbine, dass der Druck im Laufrade, also auch beim Eintritt (a_1) und beim Austritt (a_2 überall von gleicher Grösse vorausgesetzt wird.

Damit folgt allerdings, dass die Kanalquerschnitte des Laufrades nach ganz bestimmtem Gesetz sich ändern; beim Uebergange von der Grenzturbine zu den Turbinen mit partieller Beaufschlagung tritt aber dann diese Frage wieder zurück, so dass hier in dieser Beziehung auf die Darlegungen verwiesen werden kann, die sich auf S. 156 mit hinreichender Vollständigkeit angegeben finden.

Läuft die Grenzturbine in freier Luft, so ist $a_1 = a_2 = a_0$, wo mit a_0 der Atmosphärendruck bezeichnet ist. In diesem Falle ergiebt sich nun nach Gleichung (187) S. 292, wenn die früher benutzte und in Fig. 72 und 73 angegebene Bezeichnung verwendet wird:

$$(1 + \zeta_2)\, c_2{}^2 - c_1{}^2 = u_2{}^2 - u_1{}^2.$$

Für den vortheilhaftesten Gang setzt man nun zunächst stossfreien Eintritt voraus; nach den Geschwindigkeitszerlegungen in Fig. 72 und 73 findet sich dann:

$$\frac{c_1}{u_1} = \frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha - \alpha_1)} \tag{226}$$

und fernerhin, wenn man wie bei der Vollturbine das Wasser am Laufrade absolut radial ausströmen lässt:

$$c_2 \sin\alpha_2 = u_2, \tag{227}$$

wobei, um die absolute Austrittsgeschwindigkeit $w_2 = c_2 \cos\alpha_2$ möglichst klein zu erhalten, der Winkel möglichst gross gewählt werden möge.

Die Benutzung dieser Ausdrücke in vorstehender Gleichung ergiebt dann, wenn man zugleich die Beziehung $r_2 : r_1 = u_2 : u_1$ beachtet, nach einfacher Reduction:

$$\frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha - \alpha_1)} = \sqrt{1 + \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 \frac{(\zeta_2 + \cos^2\alpha_2)}{\sin^2\alpha_2}}. \tag{228}$$

Sind die Grössen auf der rechten Seite dieser Gleichung bekannt (bei der Neuberechnung einer Turbine werden dieselben gewählt), so ist die Beziehung zwischen den beiden Schaufelwinkeln α und α_1 bestimmt vorgeschrieben; wählt man daher den Winkel α, der möglichst gross sein, also wenig von 90^0 abweichen soll, so berechnet sich der Winkel α_1. Da $\cos\alpha = \sin(90^0 - \alpha)$, so schliesst man aus Gleichung (228), dass:

$$90^0 - \alpha \not< \alpha - \alpha_1$$

ausfällt. Die Richtung von c (Fig. 72 und 73) wird also mit der Richtung von u_1 einen etwas grösseren Winkel einschliessen, als mit der Richtung von c_1.

Bei $r_1 = r_2$, wie bei der Girard-Turbine, ist bei grossem Werthe von α_2 nahezu $90^0 - \alpha = \alpha - \alpha_1$, wie auch auf S. 204 angenommen wurde. Bei der Grenzturbine ist wie bei der Vollturbine die Wassermenge, welche in der Secunde durch das Laufrad strömt:

$$F_1 c_1 = F_2 c_2$$

und daraus folgt mit den Gleichungen (226) und (227).

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{r_1}{r_2} \frac{\sin\alpha_2 \cos\alpha}{\sin(\alpha - \alpha_1)}.$$

Werden wieder mit e_2 und e_1 die axialen Radweiten an den Austritts- und Eintrittsstellen bezeichnet, so findet sich ohne Berücksichtigung der Schaufeldicken nach den Gleichungen (176) und (177):

$$F_2 = 2\pi r_2 e_2 \cos\alpha_2 \quad \text{und} \quad F_1 = 2\pi r_1 e_1 \cos\alpha_1$$

und daher auch:

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{r_2}{r_1}\frac{e_2}{e_1}\frac{\cos\alpha_2}{\cos\alpha_1}.$$

Durch Gleichsetzen der beiden Ausdrücke für das Verhältniss $F_2 : F_1$ folgt dann nach einfacher Reduction:

$$\frac{e_2}{e_1} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \frac{\operatorname{tg}\alpha_2}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha_1}, \tag{229}$$

woraus sich das Verhältniss der Laufradweiten $e_2 : e_1$ berechnet.

Nach Fig. 72 und 73 findet sich bei stossfreiem Eintritt:

$$u_1 = \frac{c\sin(\alpha - \alpha_1)}{\cos\alpha_1}, \tag{230}$$

woraus sich die vortheilhafteste Radgeschwindigkeit u_1 berechnet, wenn die Geschwindigkeit c bekannt ist, mit welcher das Wasser die Leitkanäle verlässt, und die durch die Gleichungen (227) und (228) gegebenen Bedingungen erfüllt sind.

Unter diesen Umständen ist dann aber die auf das Laufrad übertragene Arbeit L nach Gleichung (193a) S. 294:

$$L = M u_1 c \sin\alpha.$$

Benutzt man hier Gleichung (230), so ergiebt sich:

$$L = \frac{Mc^2}{2} \cdot \frac{2\sin\alpha\sin(\alpha - \alpha_1)}{\cos\alpha_1}. \tag{231}$$

Nun ist aber, wenn mit L_t die Arbeit bezeichnet wird, welche dem aus dem Leitapparate kommenden Wasser innewohnt, also dem Laufrade geboten wird:

$$L_t = \frac{Mc^2}{2}, \tag{232}$$

demnach ist der hydraulische Maximalwirkungsgrad der eigentlichen Turbine, d. h. des Laufrades, wenn derselbe mit η_t bezeichnet wird:

$$\eta_t = \frac{L}{L_t} = \frac{2\sin\alpha\sin(\alpha - \alpha_1)}{\cos\alpha_1}, \tag{233}$$

wobei zwischen den Winkeln α und α_1 die durch Gleichung (228) gegebene Beziehung besteht.

Nach einfacher Umformung schreibt sich diese Gleichung auch:

$$\eta_t = 1 - \frac{\cos(2\alpha - \alpha_1)}{\cos \alpha_1} \qquad (233\,a)$$

Ist h das disponible Gefälle, h_1 die Tiefe der Mitte der Ausströmungsöffnung der Leitkanäle unter dem Oberwasserspiegel und ζ_1 der Widerstandscoefficient für das ganze Zuströmungsrohr sammt Leitapparat, so folgt auch

$$(1 + \zeta_1)\, c^2 = 2 g h_1$$

und hieraus:

$$L_t = \frac{M c^2}{2} = \frac{M g h_1}{1 + \zeta_1}. \qquad (234)$$

Dividirt man diesen Werth durch die ganze disponible Arbeit $L_m = Mgh$, so erhält man einen Wirkungsgrad η_1, welcher der Zu- und Ableitung entspricht, weil hier zugleich der Einfluss des Freihängens mit ins Spiel kommt:

$$\eta_1 = \frac{L_t}{L_m} = \frac{h_1}{(1 + \zeta_1) h}. \qquad (235)$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit Gleichung (233), so folgt:

$$\eta_m = \frac{L}{L_t} \cdot \frac{L_t}{L_m} = \frac{L}{L_m} = \eta_t \eta_1 \qquad (236)$$

oder:

$$\eta_m = \frac{2 h_1 \sin \alpha \sin(\alpha - \alpha_1)}{(1 + \zeta_1) h \cos \alpha_1} \qquad (236\,a)$$

als hydraulischer Maximalwirkungsgrad der ganzen Anlage.

Dieser Werth ist es, der oben bei den Vollturbinen und bei den sogenannten Niederdruckturbinen überhaupt in Betrachtung gezogen worden ist, wobei stillschweigend vorausgesetzt wurde, dass der Widerstandscoefficient ζ_1 einen kleinen Werth habe. Auch bei der Beurtheilung der Turbinen in der Praxis ist es allgemein Gebrauch, den Wirkungsgrad η_m, unter nachträglicher Correction desselben mit Rücksicht auf die Zapfenreibung, zu benutzen.

Liegt aber Hochdruck vor und wird das Aufschlagwasser, wie das bei den hier in Betrachtung stehenden Radial-Partialturbinen wohl immer der Fall ist, in einer längeren Röhrenleitung herbeigeführt, dann umschliesst der Widerstandscoefficient ζ_1 zugleich alle Widerstände in der Zuleitung, wie die Röhrenreibung, den Widerstand in Krümmungen, etwaige Verengungen und Erweiterungen und kann in Folge dessen einen beträchtlichen Werth annehmen.

In diesem Falle muss der Wirkungsgrad η_t der eigentlichen Turbine von dem Wirkungsgrade η_1 der Zu- und Ableitung wohl unterschieden werden; ihr Product giebt nach Gleichung (236) den Wirkungsgrad η_m der ganzen Anlage und mit der Garantieleistung bezüglich des letzteren Werthes sind die Turbinenconstructeure zu ihrem Nachtheile nicht immer mit der erforderlichen Vorsicht verfahren. Bei einer Streitfrage ist dem Verfasser der Fall vorgekommen, dass die Turbine zurückgenommen werden musste, weil die Garantie bezüglich des Wirkungsgrades der ganzen Anlage nicht erfüllt wurde. Die nähere Untersuchung zeigte dann, dass die Turbine tadellos construirt war und der Fehler in der Wasserzuleitung lag, durch welche der Werth η_1 stark herabgedrückt wurde. In den Fällen längerer Zuleitungen sollte auch die Berechnung ihrer Dimensionen unter Beachtung der hinreichend festliegenden Regeln über die hydraulischen Widerstände in Rohrleitungen sorgfältig stattfinden. Diese Bemerkungen sind auch zu beziehen auf die Henschel-Jonval- und die Fourneyron-Turbine, wenn denselben das Wasser bei Hochdruck in Leitungen zugeführt wird.

Die im Vorstehenden entwickelten Formeln sind unter der Voraussetzung gefunden worden, dass eine »Grenzturbine« mit voller Beaufschlagung vorliege, bei welcher im Laufrade, da dasselbe in freier Luft läuft, überall der atmosphärische Druck herrscht.

Die letztere Bedingung ist aber auch erfüllt, wenn die Laufradkanäle nicht vollständig mit Wasser gefüllt sind und das Wasser frei an den Radschaufeln hinströmt.

Die Formeln behalten ihre Gültigkeit auch, wenn der Leitapparat nur aus wenig Kanälen besteht, derselbe also nur einen kleinen Theil des Laufradumfanges umschliesst.

Die gegebenen Gleichungen sind daher ohne Weiteres zur Berechnung der in Fig. 72 und 73 dargestellten Schwamkrug- und Zuppinger-Turbine verwerthbar.

§ 33. Berechnung einer neuen Radialpartialturbine.

Als gegeben ist anzusehen das Gefälle h und die Aufschlagwassermenge V in der Secunde, wobei der Berechnung das Maximum von V zu Grunde gelegt wird, sofern variable Wassermenge vorliegt.

Hier sind beide Turbinenarten zunächst von einander zu unterscheiden.

Bei der Schwamkrug-Turbine (Fig. 72) wählt man den Austrittswinkel α am Leitapparate:

$$\alpha = 60^\circ \text{ bis } 70^\circ$$

und denjenigen am Laufrade α_2:

$$\alpha_2 = 65^\circ \text{ bis } 75^\circ,$$

das Halbmesserverhältniss:

$$\frac{r_2}{r_1} = 1{,}20 \text{ bis } 1{,}33\,.$$

Bei der Zuppinger-Turbine dagegen setzt man $\alpha = 65^\circ$ bis 75° und $\alpha_2 = 60^\circ$ bis 70°, sowie

$$\frac{r_2}{r_1} = 0{,}75 \text{ bis } 0{,}83\,.$$

Für die eine, wie die andere Turbine berechnet sich jetzt, indem hier wohl richtiger der Widerstandscoefficient für das Laufrad $\zeta_2 = 0{,}1$ substituirt wird, aus Gleichung (228) die Winkeldifferenz $\alpha - \alpha_1$, womit der Schaufelwinkel α_1 an der Eintrittsstelle des Laufrades durch die Formel

$$\alpha_1 = \alpha - (\alpha - \alpha_1)$$

gegeben ist.

Dann berechnet sich das Verhältniss der Radhöhen $e_2 : e_1$ nach Gleichung (229), ferner nach Gleichung (233) der hydraulische Maximalwirkungsgrad η_t der eigentlichen Turbine oder richtiger ausgesprochen des Laufrades allein.

Die vortheilhafteste Umfangsgeschwindigkeit u_1 berechnet man aus Gleichung (230):

$$u_1 = \frac{c \sin(\alpha - \alpha_1)}{\cos \alpha_1} \qquad (237)$$

und die Anzahl n der Umdrehungen des Laufrades in der Minute:

$$n = \frac{30 u_1}{\pi r_1} . \tag{238}$$

Hier stösst man nun unter Umständen auf gewisse Schwierigkeiten bei den Berechnungen. Was zunächst den Eintrittshalbmesser r_1 des Laufrades betrifft, so ist derselbe zwischen ziemlich weiten Grenzen wählbar*).

Bei der Schwamkrug-Turbine kann man nach hierüber vorliegenden praktischen Ausführungen die empirische Formel

$$r_1 = 1{,}6 \sqrt{V} \text{ bis } 2\sqrt{V}$$

und bei der Zuppinger-Turbine

$$r_1 = 1{,}5 \sqrt{V}$$

zum Anhalt nehmen, wobei V das Maximum der Wassermenge darstellt. Eine von dem Rechnungsresultate abweichende Wahl von r_1 ist aber durchaus zulässig, wenn es darauf ankommt, eine erwünschte Umdrehungszahl n nach Gleichung (238) zu erzielen.

Die angedeuteten Schwierigkeiten beziehen sich weit mehr auf die Bestimmung der in Gleichung (237) vorkommenden Geschwindigkeit c, mit welcher das Wasser die Leitkanäle verlässt, für den Fall, dass sehr grosse Gefälle (bis zu 200 m und mehr) und sehr lange Zuleitungsröhren vorliegen, wie das bei den hier in Betracht stehenden Turbinen meist der Fall ist.

Um dabei den Wirkungsgrad η_1 der Zu- und Ableitung zu ermitteln, müssen die Dimensionen des Zuleitungsrohres bekannt sein. Ist F_0 der Rohrquerschnitt und c_0 die Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser das Rohr durchströmt, so findet sich F_0 aus der Beziehung

$$V = F_0 c_0 ,$$

wobei man $c_0 = 1$ m bis 2,5 m wählt, die grösseren Werthe nur, wenn das Rohr zu weit und daher zu kostspielig ausfällt.

Ist F_0 bekannt, so ist damit auch der Rohrdurchmesser d_0 gegeben, und dann berechnet sich mit der gegebenen Länge l_0 des

---

*) Zu vergleichen sind hier die sachgemässen Bemerkungen von Krumper, »Ueber Hochdruckturbinen«, Zeitschrift des Ver. deutscher Ing. 1882, Bd. 26, p. 342.

Rohres der Druckhöhenverlust h_r, welcher der Reibung entspricht, durch die Formel:

$$h_r = \zeta_r \frac{l_0}{d_0} \frac{c_0{}^2}{2g}. \tag{239}$$

Dabei ist ζ_r der sogenannte Reibungscoefficient, über welchen auf S. 49 nähere Angaben gemacht worden sind. Für vorliegenden Fall kann man ganz wohl den mittleren Werth $\zeta_r = 0{,}025$ substituiren.

Nimmt man an, dass im Einfallrohre scharfe Krümmungen, Kniee und plötzliche Erweiterungen vermieden worden sind und setzt man den Widerstandscoefficienten speciell für die Einlaufkanäle ζ', so findet sich die Grundgleichung:

$$h_1 = \zeta_r \frac{l_0}{d_0} \frac{c_0{}^2}{2g} + (1 + \zeta') \frac{c^2}{2g}, \tag{240}$$

aus welcher Formel sich jetzt mit $\zeta' = 0{,}125$ die Geschwindigkeit c berechnet, mit welcher das Wasser in das Laufrad eintritt.

Dann ist nach Gleichung (237) auch die beste Umdrehungsgeschwindigkeit u_1 des Laufrades und durch Gleichung (238) die Umdrehungszahl bestimmt.

Ist F wieder die Summe der Austrittsquerschnitte am Leitapparate, so ergiebt sich wegen der Beziehung

$$V = Fc = F_0 c_0 \tag{241}$$

zunächst aus Gleichung (240):

$$h_1 = \left[\zeta_r \frac{l_0}{d_0} \left(\frac{F}{F_0}\right)^2 + (1 + \zeta')\right] \frac{c_2}{2g}. \tag{242}$$

Der Klammerausdruck bedeutet nichts anderes als den Werth $(1 + \zeta_1)$, wobei dann ζ_1 den Widerstandscoefficienten für die Zuführung darstellt, der bei Niederdruck-Turbinen, bei denen ein eigentliches Einfallrohr nicht vorliegt, sich einfach $\zeta_1 = \zeta'$ schreibt, wie in den früheren Untersuchungen von vornherein angenommen worden ist.

Aus Gleichung (241) berechnet sich F, und wenn man z Einlaufkanäle voraussetzt, die lichte Kanalweite mit i, sowie die axiale Kanalhöhe mit e bezeichnet, bestimmt sich dann der letztere Werth durch

$$e = \frac{F}{zic}, \tag{243}$$

wobei man z und i wählt; die letztere Grösse setzt man gewöhnlich:

$$i = 20 \text{ bis } 30 \text{ mm}.$$

Die Höhe des Laufrades e_1 an der Eintrittsstelle nimmt man etwas grösser als e und berechnet dann mit Gleichung (229) die Radhöhe e_2 am Austrittsumfange; den letzteren Werth wählt man bei der Ausführung gewöhnlich, ohne Nachtheil, grösser als die Rechnung ergiebt; eine übermässige Erweiterung des Laufrades von e_1 auf e_2 hat aber keinen Nutzen.

Damit sind nun die Regeln zur Berechnung der Radial-Partialturbine gegeben; unter Zugrundelegung der gewonnenen Dimensionen liessen sich dann nach den Gleichungen (233), (235) und (236) auch die Wirkungsgrade η_t, η_1 und η_m berechnen, die nun freilich hier mit grossen Unsicherheiten behaftet sind. So erhält man für den hydraulischen Maximalwirkungsgrad η_t des Laufrades gewöhnlich sehr günstige Werthe und damit auch für den Wirkungsgrad η_m der ganzen Anlage, die jedoch noch eine Reduction erfahren müssten, welche sich der Berechnung vollständig entzieht. Diese Turbinen laufen nämlich bei grossem Gefälle mit sehr grosser Geschwindigkeit um und daher wird der Luftwiderstand noch einen beträchtlichen Arbeitsverlust herbeiführen, der bei den vorstehenden Berechnungen unberücksichtigt bleiben musste. Die Umhüllung des Laufrades durch ein Gehäuse wird wenig zur Verminderung dieses Arbeitsverlustes beitragen.

Ueber experimentelle Untersuchungen von Schwamkrug-Turbinen liegen zwei schöne Versuchsreihen von Schröter vor. Ueber die eine derselben berichtet Seemann*), über die andere Reifer**).

In dem Berichte über die erste der beiden Turbinen fehlt die Angabe der Schaufelwinkel, in dem anderen die über die Dimensionen des Zulaufrohres, sodass obige Formeln nicht direct zur Beurtheilung der Versuchsergebnisse benutzt werden können. Ueberdies beobachtete Schröter den Wasserdruck am Fusse des Einfallrohres vor dem Eintritte in den Leitapparat mit Hülfe eines Metallmanometers und bezeichnete diesen Druck in Wassersäule gemessen als disponibles Gefälle, wogegen sich vom praktischen Standpunkte aus nichts einwenden lässt.

---

*) Seemann, »Turbinen-Bremsversuche in der mechanischen Bindfadenfabrik Immenstadt«. Zeitschrift des Ver. deutscher Ing. 1882, Bd. 26, p. 302.

**) Reifer, »Einfache Berechnung der Turbinen«. Zürich 1881, 2. Aufl.

In diesem Falle wäre in Gleichung (236 a) $h = h_1$ zu setzen und daher der hydraulische Maximalwirkungsgrad der Turbinenanlage

$$\eta_m = \frac{2 \sin \alpha \sin (\alpha - \alpha_1)}{(1 + \zeta_1) \cos \alpha_1},$$

wobei ζ_1 der Widerstandscoefficient für den Einlaufapparat allein ist und mit $\zeta_1 = 0{,}125$ in Rechnung gestellt werden kann; auch sei ausdrücklich bemerkt, dass die Beziehung zwischen den Winkeln α und α_1 nach Gleichung (228) bestimmt sein muss.

Für die betreffende Schwamkrug-Turbine giebt nun Reifer (a. a. O.)

$$\alpha = 68^\circ, \quad \alpha_2 = 70^\circ, \quad \frac{r_2}{r_1} = 1{,}2 \quad \text{und} \quad r_1 = 0{,}580 \text{ m}.$$

Damit berechnet sich nach Gleichung (228) mit $\zeta_2 = 0{,}1$:

$$\alpha - \alpha_1 = 19^\circ \quad \text{und damit} \quad \alpha_1 = 49^\circ,$$

und nach vorstehender Gleichung:

$$\eta_m = 0{,}818.$$

Es findet nun Schröter als Mittel aus 3 Versuchen beim Gefälle von 175 m (Manometerbeobachtung) und einer Wassermenge von $V = 0{,}0662$ cbm bei $n = 427$ Umdrehungen einen effectiven Wirkungsgrad von $\eta_e = 0{,}706$, welcher Werth mit Rücksicht auf die Zapfenreibung und den Luftwiderstand als durchaus günstig bezeichnet werden muss. Bei dieser Turbine ist übrigens der Winkel $\alpha_1 = 41^\circ$, etwas abweichend von unserer Berechnung, in Anwendung gekommen. Das Laufrad hat 100 Schaufeln, die Radhöhen sind $e_1 = 0{,}078$ m und $e_2 = 0{,}164$ m, wonach $e_2 : e_1 = 2{,}1$ ausfällt, während Gleichung (229) hierfür als hinreichend den Werth 1,44 ergiebt.

Der Einlaufapparat besteht aus nur einem Kanale von $e = 0{,}055$ m Breite und einer mittleren Weite von $i = 0{,}024$ m; damit berechnet sich mit dem angegebenen Werthe der Wassermenge V die Ausflussgeschwindigkeit:

$$c = \frac{V}{ei} = 50{,}15 \text{ m},$$

ferner mit Gleichung (237) die Umfangsgeschwindigkeit $u_1 = 24{,}9$ m und damit die Umdrehungszahl $n = 410$, so dass hier gute Uebereinstimmung vorliegt.

Kapitel II.

Die Radialturbine als Pumpe.

Von den Centrifugalpumpen.

§ 34. Anordnung der Centrifugalpumpe. Winkelverhältnisse bei stossfreiem Eintritte. Vortheilhafteste Geschwindigkeit.

Die Centrifugal- oder Kreiselpumpen sind »getriebene« Vollturbinen, bei denen ein Leitapparat nicht vorliegt, das Wasser also radial in das Laufrad eintritt*), gewöhnlich ist aber ein Diffuser von besonderer Form vorhanden.

Bei den Centrifugalpumpen stösst man auf verschiedene constructive Ausführungen, bei deren theoretischen Begründungen in den bis jetzt bekannt gewordenen Veröffentlichungen nicht bestimmt genug hervorgehoben worden ist, welcher der verschiedenen Anordnungen der Vorzug eingeräumt werden soll. Man kann zwei wesentlich von einander verschiedene Fälle unterscheiden, die auch durchgeführt werden mögen.

Den folgenden Untersuchungen soll zunächst nebenstehende Fig. 74 *a* und *b* zu Grunde gelegt werden. Dieselbe stellt die ältere und die am häufigsten vorkommende Ausführung dar.

Anordnung erster Art.

B ist das Laufrad, *C* der Diffuser, *D* das Saugrohr und *E* das Steig- oder Druckrohr. Der Diffuser *C* besteht aus einem excentrisch zum Laufrad liegenden Gehäuse, welches, sich allmählich erweiternd, das aus dem Rade kommende Wasser nach dem Druckrohre hinleitet.

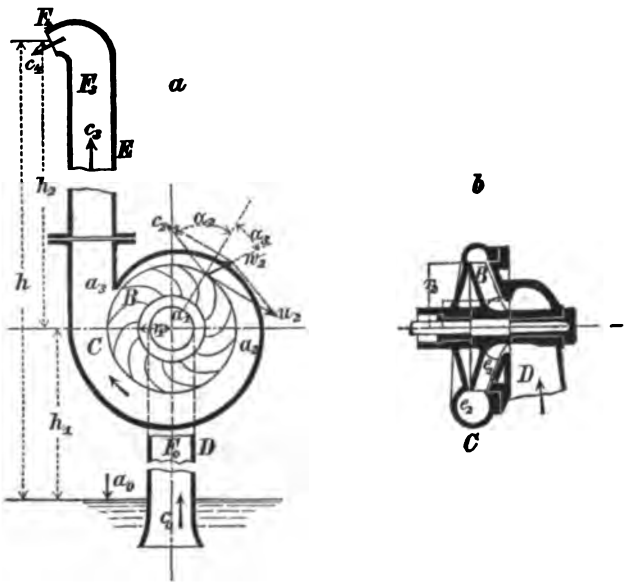
F_0, d_0, l_0 sollen bezeichnen: Querschnitt, Durchmesser und Axenlänge des Saugrohres D, und c_0 die Wassergeschwindigkeit in demselben. Für das Druckrohr E bedeuten F_3, d_3, l_3 und c_3 dieselben Grössen; F_4 sei der Querschnitt der oberen Ausgussöffnung und c_4 die

*) Früher ist auch die Fourneyron-Turbine selbst wiederholt ohne Leitapparat ausgeführt worden; diese unter dem Namen Cadiat-Turbinen bekannten Ausführungen haben sich aber nicht bewährt und sind daher auch oben nicht besonders erwähnt worden. Aus den für die Fourneyron-Turbine gegebenen Formeln gehen sofort die für Cadiat-Turbinen giltigen Sätze hervor, wenn man den Winkel $\alpha = 0$ substituirt.

Ausflussgeschwindigkeit in derselben. Die Laufradaxe liege um h_1 über dem Unterwasser und um h_2 unter der Ausgussöffnung; die gesammte Förderhöhe ist daher $h = h_1 + h_2$.

Ist a_1 der Druck beim Eintritt und a_2 derjenige beim Austritt aus dem Laufrade, sowie a_3 der Druck am Fusse des Steig-

Fig. 74 *a* und *b*.



rohres, so lassen sich zunächst folgende Gleichungen aufstellen. Für den Durchgang des Wassers durch das Saugrohr ist, wenn c die Eintrittsgeschwindigkeit in das Laufrad und ζ' den Widerstandscoefficienten für den Durchgang durch die Einlaufstelle darstellt:

$$a_0 - a_1 - h_1 = (1 + \zeta') \frac{c^2}{2g} + \zeta_r \frac{l_0}{d_0} \frac{c_0^2}{2g},$$

wobei das zweite Glied rechts der Reibungsdruckhöhe im Saugrohre entspricht (vergl. S. 49), die mit h' bezeichnet werden mag. Es sei also:

$$h' = \zeta_r \frac{l_0}{d_0} \frac{c_0^2}{2g}, \tag{244a}$$

welche Grösse unter Umständen auch noch die durch Rohrkrümmungen erzeugten Druckhöhenverluste mit einschliessen kann.

Es folgt demnach:

$$a_0 - a_1 - h_1 = (1 + \zeta')\frac{c^2}{2g} + h'. \tag{244}$$

Für die Bewegung des Wassers im Steig- oder Druckrohre findet sich dagegen die Beziehung:

$$a_3 - h_2 - a_0 = \frac{c_4{}^2 - c_3{}^2}{2g} + \zeta_r \frac{l_3}{d_3}\frac{c_3{}^2}{2g}.$$

Ist F_4 der Ausgussquerschnitt, so folgt c_4 aus $F_4 c_4 = F_3 c_3$, und die vorstehende Gleichung ergiebt, wenn man mit h'' den im Steigrohre vorliegenden Druckhöhenverlust bezeichnet, also

$$h'' = \left[\left(\frac{F_4}{F_3}\right)^2 + \zeta_r \frac{l_3}{d_3}\right]\frac{c_3{}^2}{2g} \tag{245a}$$

einführt:

$$a_3 - h_2 - a_0 = h'' - \frac{c_3{}^2}{2g}. \tag{245}$$

Die Addition der beiden Gleichungen (244) und (245) führt nun auf die Gleichung:

$$2g(a_3 - a_1) = 2g(h + h' + h'') + (1 + \zeta')c^2 - c_3{}^2. \tag{246}$$

Für den Durchgang des Wassers durch das Laufrad gilt für stossfreien Eintritt auch hier, wie bei der Fourneyron-Turbine Gleichung (187) S. 292, nämlich:

$$2g(a_1 - a_2) = (1 + \zeta_2)c_2{}^2 - c_1{}^2 - (u_2{}^2 - u_1{}^2).$$

Da aber bei der Pumpe nach Fig. 74

$$c^2 = c_1{}^2 - u_1{}^2$$

ist, so folgt:

$$2g(a_2 - a_1) = u_2{}^2 + c^2 - (1 + \zeta_2)c_2{}^2,$$

und aus der Verbindung mit Gleichung (246) ergiebt sich:

$$2g(h + h' + h'') = u_2{}^2 - \zeta' c^2 - (1 + \zeta_2)c_2{}^2 + c_3{}^2 - 2g(a_2 - a_3). \tag{247}$$

Hier trifft man nun bei der Weiterbehandlung der Theorie der Centrifugalpumpen auf eine Schwierigkeit, welche in der

Bestimmung der Druckdifferenz $(a_2 - a_3)$ ihren Grund hat. Eine genaue Bestimmung dieser Druckdifferenz ist auf dem Rechnungswege unmöglich, wenigstens bei Zugrundelegung der allgemein gebräuchlichen Construction des Diffusers ohne besondere Leitkanäle.

Allgemein ist man bei Aufstellung der theoretischen Grundlagen bis jetzt von folgender Betrachtung ausgegangen, die auch hier als zulässig angesehen werden soll. Ist w_2 die absolute Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser das Laufrad verlässt und weicht deren Richtung nicht allzusehr von der Richtung der Umfangsgeschwindigkeit u_2 (Fig. 74) ab, ist also der Winkel α_3 nicht zu klein, so kann man annehmen, dass das Wasser im Diffuser nahezu mit der Geschwindigkeit w_2 seine Bewegung beginnt und auf seinem weiteren Wege ganz allmählich in die Geschwindigkeit c_3 am Fusse des Druckrohres übergeht. In diesem Falle besteht die Beziehung:

$$2g\,(a_2 - a_3) = c_3^2 - w_2^2\,. \tag{248a}$$

Benutzt man diese in Gleichung (247), so ergiebt sich:

$$2g\,(h + h' + h'') = u_2^2 + w_2^2 - \zeta' c^2 - (1 + \zeta_2)\,c_2^2\,. \tag{248}$$

Nach Fig. 74 ist aber:

$$w_2^2 = u_2^2 + c_2^2 - 2 u_2 c_2 \sin\alpha_2\,, \tag{249}$$

und daher ergiebt sich auch:

$$2g\,(h + h' + h'') = 2 u_2\,(u_2 - c_2 \sin\alpha_2) - \zeta' c^2 - \zeta_2\, c_2^2\,. \tag{250}$$

Weiterhin ist die zum Betriebe des Laufrades erforderliche hydraulische Arbeit L bei stossfreiem Eintritt nach Gleichung (151) S. 132:

$$L = M[c_1 u_1 \sin\alpha_1 - c_2 u_2 \sin\alpha_2 + u_2^2 - u_1^2]\,.$$

Da aber bei der Pumpe $u_1 = c_1 \sin\alpha_1$ ist, so folgt für diese einfacher:

$$L = M(u_2^2 - c_2 u_2 \sin\alpha_2)\,. \tag{251}$$

Die beim Wasserheben gewonnene Arbeit ist Mgh und wenn man diesen Werth durch L dividirt, ergiebt sich der »hydraulische Maximalwirkungsgrad η_m« der Centrifugalpumpe:

$$\eta_m = \frac{2gh}{2 u_2\,(u_2 - c_2 \sin\alpha_2)}\,. \tag{252}$$

Benutzt man hier Gleichung (250), so findet sich überdies auch:

$$\eta_m = \frac{2gh}{2g(h + h' + h'') + \zeta_1 c^2 + \zeta_2 c_2^2}. \tag{253}$$

Man erkennt aus dieser Formel, dass η_m um so grösser sein wird, sich also um so mehr der Einheit nähern wird, je geringer die Druckhöhenverluste in den Röhren sind, was ohne Weiteres einleuchtet; ausserdem sollen aber die Geschwindigkeiten c und c_2 möglichst klein gewählt werden; bezüglich der Eintrittsgeschwindigkeit c hat man diese Regel immer befolgt, indem man dieselbe im Allgemeinen nur wenig grösser, als die Geschwindigkeit c_0 im Zutrittsrohre angenommen hat; auch die andere Bedingung bezüglich der Geschwindigkeit c_2 ist bis jetzt immer erfüllt worden, wie sich aus dem Folgenden ergeben wird.

Nun tritt aber die Frage nach der vortheilhaftesten Umfangsgeschwindigkeit u_2 des Laufrades heran, ohne deren Beantwortung eine weitere Verfolgung der Aufgabe nicht erfolgen kann.

Die vorstehenden Gleichungen sind nicht geeignet, eine Formel zur Berechnung der Geschwindigkeit u_2 abzuleiten; man müsste denn zu diesem Zwecke den Weg betreten, welchen Ebel in einer elegant geschriebenen Abhandlung eingeschlagen hat*). Derselbe leitet aus der Bedingung, dass c_2 ein Minimum werde, den Satz ab, dass in Gleichung (249) $w_2 = u_2$ sein soll und erhält daher:

$$c_2 = 2u_2 \sin\alpha_2.$$

Daraus wäre zu schliessen, dass der Winkel α_2 möglichst klein sein soll, da c_2 klein vorausgesetzt wird. Durch Substitution in Gleichung (250) findet sich dann für u_2 die von Ebel gegebene Gleichung für u_2; sein Vorschlag, $\alpha_2 = 5^\circ$ zu setzen, führt dann auf Schaufelformen, bei denen die concave Seite nach der Drehrichtung hinweist, wie sie unten als Anordnung zweiter Art noch besprochen werden sollen.

Bei den folgenden Untersuchungen soll von einer anderen Unterlage ausgegangen werden, die zugleich den Unterschied zwischen den älteren und neueren Constructionen der Centrifugalpumpen deutlich hervortreten lässt.

*) Ebel, »Zur Theorie der Centrifugalpumpen«. Zeitschrift des Ver. deutscher Ing. 1887, Bd. 31, p. 456.

Findet beim Betriebe der Pumpen weder in den Röhren noch im Laufrade ein Strömen des Wassers statt, soll aber die Wassersäule auf der Höhe h, der Förderhöhe, erhalten werden, also der Gleichgewichtszustand vorliegen, so findet sich die erforderliche äussere Umfangsgeschwindigkeit des Laufrades, die mit u_0 bezeichnet werden mag, bei der Anordnung Fig. 74 nach Gleichung (224) S. 317 durch die Formel:

$$u_0 = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 [1 - \zeta_0 \sin^2 \alpha_1]}}, \tag{254}$$

in welcher r_1 und r_2 den inneren und äusseren Radhalbmesser bedeuten und nach Früherem bis auf Weiteres $\zeta_0 = 1{,}25$ einzusetzen wäre.

Der Werth u_0 repräsentirt die minimale Umdrehungsgeschwindigkeit des Rades; es ist nun einleuchtend, dass überhaupt eine Wasserförderung nur denkbar ist, wenn die vortheilhafteste Umdrehungsgeschwindigkeit u_2 grösser als die Gleichgewichtsgeschwindigkeit u_0 ist; da man aber allzu grosse Geschwindigkeiten zu vermeiden sucht, so wird man die Regel hinstellen können, dass die Differenz $u_2 - u_0$ klein gewählt wird; bei den ausgeführten Centrifugalpumpen findet sich auch in der That die Betriebsgeschwindigkeit u_2 immer nur wenig grösser als die Gleichgewichtsgeschwindigkeit u_0.

Es dürfte im Allgemeinen genügen, bei der Berechnung neuerer Anlagen die Differenz $u_2 - u_0$ etwa zu 0,5 bis 1,5 m vorauszusetzen und bei der Benutzung von Gleichung (254) zunächst das Glied $\zeta_0 \sin^2 \alpha_1$ zu vernachlässigen und zu schreiben:

$$u_0 = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2}}, \tag{254a}$$

welche Gleichung den Werth u_0 wenig grösser als Gleichung (254) ergiebt. Da die Förderhöhe h jederzeit als gegeben und $r_1 : r_2$ als gewählt anzusehen ist, so ergiebt sich auf dem angegebenen Wege sofort die vortheilhafteste Radgeschwindigkeit.

Daran knüpfen sich aber sogleich weitere wichtige Schlüsse.

Schreibt man die Formel (252) für den Maximalwirkungsgrad η_m in folgender Form:

$$\eta_m = \frac{gh}{u_2(u_2 - c_2 \sin \alpha_2)},$$

so ist sofort ersichtlich, dass η_m um so grösser ausfällt, je kleiner c_2 und u_2 ist, was den bereits gemachten Angaben entspricht, ausserdem soll aber auch $\sin \alpha_2$ und damit der Winkel α_2 so gross wie möglich angenommen werden, eine Regel, die man auch in der That von jeher bei der in Fig. 74 vorgeführten und oben als erste Art bezeichneten Anordnung der Pumpen befolgt hat. Gewöhnlich findet man $\alpha_2 = 60°$ bis $70°$.

Hierzu tritt eine weitere wichtige Erwägung. Schreibt man die Formel (249) für die absolute Austrittsgeschwindigkeit w_2 des Wassers aus dem Rade in folgender Form:

$$w_2^2 = 2u_2(u_2 - c_2 \sin \alpha_2) - (u_2^2 - c_2^2), \tag{249a}$$

so ist ersichtlich, dass auch w_2 um so kleiner ausfällt, je grösser der Winkel α_2 gewählt wird, und das ist ein grosser Vortheil.

Da die ganze oben gegebene Ableitung der Grundformeln unter der Voraussetzung durchgeführt wurde, dass das Wasser im Diffuser allmählich aus der Geschwindigkeit w_2 in die kleine Geschwindigkeit c_3 im Druckrohre übergehe, so wird diese Voraussetzung um so sicherer erfüllt erscheinen, je kleiner die Differenz $w_2 - c_2$ ist; ist es doch auch als eine Grundregel hinzustellen, dass, um die hydraulischen Widerstände möglichst herabzuziehen, alle in den einzelnen Theilen der Pumpe auftretenden Wassergeschwindigkeiten möglichst klein zu halten sind.

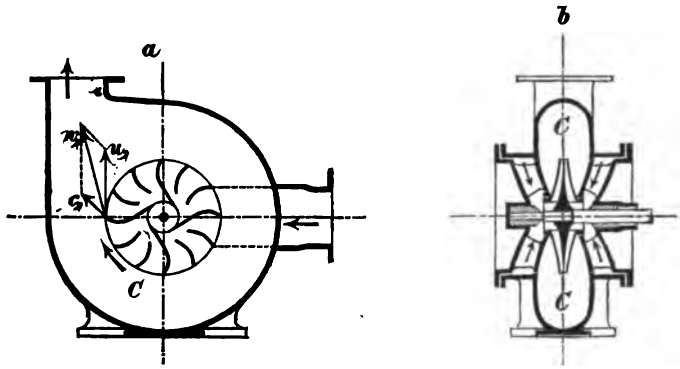
Anordnung zweiter Art.

Schon längst ist der Vorschlag gemacht worden, und auch zur Ausführung gekommen, die Schaufelkrümmung im Laufrade umzukehren, so dass die concave Seite der Schaufel nach der Umdrehungsrichtung des Rades gekehrt ist. Diese Anordnung findet sich in neuerer Zeit insbesondere bei den Sulzer'schen Pumpen; die grosse Centrifugalpumpe dieser Art, welche auf der elektrischen Ausstellung in Frankfurt a. M. (1891) in Betrieb war, machte unter den Ingenieuren wohlverdientes Aufsehen.

In den Veröffentlichungen hat man schon früher darauf hingewiesen, dass die Umkehrung der Schaufelkrümmung auf eine geringere Umdrehungsgeschwindigkeit des Laufrades führe, eine Bemerkung, die richtig ist, aber begreiflicher Weise dahin eingeschränkt werden muss, dass auch hier diese Geschwindigkeit grösser, als die Gleichgewichtsgeschwindigkeit sein muss.

Fig. 75 *a* und *b* zeigt die Skizze einer derartigen Pumpe. Das Laufrad besteht aus zwei Theilen; das Wasser wird von beiden

Fig. 75 *a* und *b*.



Seiten her zugeführt; das Druckrohr ist gemeinschaftlich, wie das übrigens zum Theil schon bei den älteren Constructionen ausgeführt wurde.

Das Laufrad ist hier nicht mit einem eigentlichen Diffuser versehen, d. h. von einem Gehäuse umgeben, welches, sich allmählich erweiternd, das Wasser nach dem Druckrohre hinleitet; das Gehäuse C umgiebt das Rad vielmehr concentrisch.

Gegenüber der ersten Anordnung tritt aber die Verschiedenheit der Schaufelform und der Schaufelwinkel hervor; der Winkel α_2 ist negativ in Rechnung zu stellen. Gestattet man sich die Annahme, dass auch hier im Gehäuse C die Geschwindigkeit w_2 allmählich in die Geschwindigkeit c_3 übergeht, so gelten wieder die oben entwickelten Grundformeln; man erhält aber dann an Stelle der Gleichungen (249) und (252):

$$w_2^2 = u_2^2 + c_2^2 + 2 u_2 c_2 \sin \alpha_2 , \tag{255}$$

$$\eta_m = \frac{2gh}{2 u_2 (u_2 + c_2 \sin \alpha_2)}, \tag{256}$$

während Gleichung (253) unverändert bleibt, so dass die bei derselben angeführten Schlüsse auch hier ihre Gültigkeit haben.

Bei der Beurtheilung kommt aber alles auf die Angaben der vorstehenden beiden Gleichungen an; betrachtet man zunächst u_2 als bekannt, so ersieht man, dass der Winkel α_2 nicht unnöthig gross gewählt wurde; es erscheint sogar $\alpha_2 = 0$ angemessen, wie es schon Rittinger vorschlug, oder doch sehr klein, wie Ebel (a. a. O.) empfohlen hat. Aber auch hier ist zunächst die Bestimmung von u_2 die Hauptfrage.

Die Geschwindigkeit u_0 beim Gleichgewicht findet sich nach den Darlegungen auf S. 197 aus der Formel:

$$2gh = u_0^2\left[1 - \zeta_0 \sin^2 \alpha_2 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 (1 - \zeta_0 \sin^2 \alpha_1)\right].$$

Diese Gleichung führt aber auf grosse Unsicherheiten; das mit $\sin \alpha_2$ versehene Glied hat nur bei sehr enger Theilung, wie sie nicht vorkommt, eine Bedeutung und dürfte daher wohl bei der Annahme $\alpha_2 = 0$ ganz weggelassen werden können; auch das Glied $\zeta_0 \sin^2 \alpha_1$ ist unsicher; bezieht man dasselbe auf diejenigen Schaufeln, welche bis nahe an die Radaxe hingehen, so kann man schon mit Rücksicht auf die Unsicherheit des Werthes ζ_0 wohl $\sin \alpha_1 = 1$ substituiren und hat dann als hinreichende Annäherung:

$$u_0 = \sqrt{\frac{2gh}{1 + (\zeta_0 - 1)\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2}},$$

so dass mit der Wahl von $(u_2 - u_0)$ auch die vortheilhafteste Geschwindigkeit u_2 bekannt ist.

Es ist aber zu bemerken, dass bei der in Fig. 75 angedeuteten Anordnung wahrscheinlich selbst im Gleichgewichtszustande das im Gehäuse C befindliche Wasser durch das umlaufende Rad mit in Rotation versetzt wird, wodurch die Drucke a_2 und a_3 Aenderungen erleiden würden, die sich jeder Berechnung entziehen; hierzu kommt noch, dass nach Gleichung (255) die absolute Austrittsgeschwindigkeit w_2 des Wassers am Laufrade grösser, als die Umfangsgeschwindigkeit u_2 ausfällt.

Da dieselbe gewöhnlich, besonders bei grossen Förderhöhen, sehr gross ist, so entsteht die Frage, selbst bei Ebel's Annahme $w_2 = u_2$, ob die Voraussetzung, auf welcher die vorstehenden, wie alle früher von Anderen entwickelten Theorien der Centrifugalpumpen beruhen, dass nämlich das Wasser nach dem Verlassen des Laufrades wirklich allmählich, d. h. ohne Druckhöhenverlust aus der Geschwindigkeit w_2 in die Geschwindigkeit c_3 übergeht, überhaupt noch als zutreffend angesehen werden kann.

So erscheint es denn wahrscheinlich, dass die oben als »erste Anordnung« bezeichnete Construction den Vorzug verdient, wenigstens vom rein theoretischen Standpunkte aus; volle Entscheidung könnte nur durch gründliche vergleichende Versuche, über die bis jetzt nichts bekannt geworden ist, gewonnen werden.

Zum Schlusse mag noch darauf hingewiesen werden, dass die Theorie dieser Pumpen bei beiden Anordnungen auch unter der speciellen Voraussetzung entwickelt werden könnte, dass die Geschwindigkeit w_2 beim Eintritt des Wassers in den Diffuser vollständig verloren geht; das führt gewissermassen auf einen zweiten Grenzfall.

In diesem Falle ist in Gleichung (248) $w_2 = 0$ zu setzen und zur Berechnung von c_2 ergiebt sich aus Gleichung (248) auch:

$$(1 + \zeta_2)\, c_2^2 = 2g(h + h' + h'') + \zeta' c^2 + u_2^2.$$

Dann liegt aber beim Eintritt in den Diffuser eine plötzliche Geschwindigkeitsänderung vor, sodass die Formel (252) für den Wirkungsgrad durch eine andere ersetzt werden müsste, was hier nicht weiter verfolgt werden soll.

§ 35. Berechnung einer neuen Centrifugalpumpe unter Voraussetzung der ersten Art der Anordnung.

Als gegeben ist anzusehen die Förderhöhe h in Metern und die zu hebende Wassermenge V Cubikmeter in der Secunde. Man wählt dann zuerst die Wassergeschwindigkeiten c_0 und c_3 im Saug- und Druckrohre zu 1 bis 3 m, gewöhnlich setzt man $c_0 = c_3$, und berechnet daraus die Durchmesser d_0 und d_3 sowie die Querschnitte F_0 und F_3.

Da die Rohraxen meist vertical liegen, so ist dann auch $l_0 + l_3$ nahezu mit $h_1 + h_2 = h$ identisch; man wird aber schon mit Rücksicht auf Rohrkrümmungen, wenn man solche nicht besonders in Rechnung stellen will, die Summe der Rohrlängen etwas grösser in Rechnung stellen.

Wählt man den Ausgussquerschnitt F_4 (Fig. 74) (gewöhnlich setzt man $F_4 = F_3$) so ergiebt sich nach den Gleichungen (244a) und (245a) mit $d_0 = d_3$:

$$h' + h'' = \left[\left(\frac{F_4}{F_3}\right)^2 + \zeta_r \frac{l_0 + l_3}{d_0}\right] \frac{c_0^2}{2g}, \tag{258}$$

wobei der Reibungscoefficient ζ_r mit hinreichender Genauigkeit $\zeta_r = 0{,}025$ angenommen werden kann.

Das Halbmesserverhältniss des Laufrades $r_1 : r_2$ wählt man 0,5, bei grösseren Anlagen 0,35 und berechnet nun zunächst die äussere Umfangsgeschwindigkeit u_0 beim Gleichgewichtszustand nach der Näherungsformel (254a).

Die vortheilhafteste Umlaufsgeschwindigkeit u_2 nimmt man etwa 0,5 bis 1,5 grösser als u_0 und berechnet die Umfangsgeschwindigkeit:

$$u_1 = \frac{r_1}{r_2} u_2$$

an der Eintrittsstelle.

Den Winkel α_1 wählt man zu 40° bis 50° und berechnet die Eintrittsgeschwindigkeit c aus der Beziehung:

$$c = u_1 \operatorname{cotg} \alpha_1$$

und c_1 aus

$$c_1 = \frac{u_1}{\sin \alpha_1} .$$

Der Winkel α_2 dagegen wird zu 60° bis 70° anzunehmen sein.

Die Geschwindigkeit c_2 bestimmt sich jetzt aus der Gleichung (250), in welcher nach dem Vorstehenden alle übrigen Grössen als bekannt anzusehen sind. Die Substitution von c_2 in Gleichung (252) giebt dann den hydraulischen Maximalwirkungsgrad.

Da α_1 bekannt ist, so ermittelt sich nun mit $\zeta_0 = 1{,}25$ nach Gleichung (254) jetzt auch der genauere Werth der Umdrehungsgeschwindigkeit u_0 im Gleichgewichtszustande.

Den inneren Radius des Laufrades wählt man zu ungefähr $r_1 = 0{,}5 d_0$ bis $0{,}6 d_0$ und nun, da auch r_2 bekannt ist, die vortheilhafteste minutliche Umdrehungszahl n und die Umdrehungszahl n_0 bei Gleichgewicht bez.:

$$n = \frac{30 u_1}{\pi r_2} \quad \text{und} \quad n_0 = \frac{30 u_0}{\pi r_2} .$$

Ist endlich z_1 die Schaufelzahl am inneren und z_2 die am äusseren Umfange, sowie σ die Schaufeldicke und e_1 und e_2 die Radhöhe an diesen beiden Stellen, so berechnen sich nach früheren Ableitungen die beiden letzteren Werthe aus den Gleichungen:

$$\frac{V}{c_1} = F_1 = (2 r_1 \pi \cos \alpha_1 - z_1 \sigma) e_1$$

und (259)

$$\frac{V}{c_2} = F_2 = (2 r_2 \pi \cos \alpha_2 - z_2 \sigma) e_2 \, .$$

Nach der Grösse des Rades wählt man $z_1 = 6$ bis 12 und setzt auch $z_2 = z_1$, dagegen bei grossen Rädern $z_2 > z_1$ und dann meist $z_2 = 2 z_1$.

Soll die Pumpe in Betrieb gesetzt werden, so muss wenigstens das Saugrohr und das Innere des Laufrades bis zum Fusse des Druckrohres mit Flüssigkeit gefüllt sein.

Ist h_1 die Saughöhe, so berechnet sich bei normalem Gange der Druck a_1 (Wasserstand im luftleeren Piezometerrohre) beim Eintritt in das Laufrad nach Gleichung (244):

$$a_1 = a_0 - h_1 - (1 + \zeta') \frac{c^2}{2g} - h' ,$$

welcher Werth natürlich unter allen Umständen positiv sein muss.

Beispiel. Es sei für eine Förderhöhe von $h = 6$ m und eine Secunden-Wassermenge $V = 0{,}050$ cbm, d. i. 3000 Liter in der Minute, eine Centrifugalpumpe nach der Anordnung Fig. 74 zu berechnen.

Wählt man den Durchmesser der beiden Röhren $d_0 = d_3 = 0{,}150$ m, so ist deren Querschnitt $F_0 = F_3 = 0{,}01767$ qm und die Wassergeschwindigkeit in denselben $c_0 = c_3 = 2{,}83$ m. Setzt man $F_4 = F_3$ und die Summe der Axenlängen der Röhren $l_0 + l_3 = 7$ m, so folgt mit $\zeta_r = 0{,}025$ nach Gleichung (258)

$$h' + h'' = 2{,}167 \frac{c_0^2}{2g} = 0{,}884 \,\mathrm{m}$$

und damit

$$2g(h + h' + h'') = 135 \text{ m, während } 2gh = 117{,}7 \text{ m}$$

ist.

Angenommen, das Verhältniss der Radhalbmesser sei $r_1 : r_2 = 1 : 2$, so ergiebt sich nach Gleichung (254a) näherungsweise die äussere Umdrehungsgeschwindigkeit beim Gleichgewicht $u_0 = 12{,}53$ m, und da die Umfangsgeschwindigkeit bei normalem Gange nach Obigem nur wenig grösser genommen werden soll, so möge $u_2 = 13$ m und damit $u_1 = 6{,}5$ m gesetzt werden.

Wählt man $\alpha_1 = 50^\circ$, so folgt $c = 5{,}45$ m und $c_1 = 8{,}48$ m und dann nach Gleichung (254) der genauere Werth der Drehgeschwindigkeit beim Gleichgewicht $u_0 = 11{,}23$ m.

Es möge nun $r_1 = 0{,}6\, d_0 = 0{,}09$ m und damit $r_2 = 0{,}18$ m angenommen werden, dann folgt die minutliche Umdrehungszahl beim besten Gange bez. beim Gleichgewicht:

$$n = \frac{30}{\pi}\,\frac{u_2}{r_1} = 690, \quad n_0 = \frac{30}{\pi}\,\frac{u_0}{r_2} = 596.$$

Aus Gleichung (250) ergiebt sich:

$$2 u_2 c_2 \sin \alpha_2 + \zeta_2 c_2{}^2 = 2 u_2{}^2 - \zeta' c^2 - 2g\,(h + h' + h'').$$

Wählt man nun $\alpha_2 = 70^\circ$ und setzt man $\zeta_2 = 0{,}1$ und $\zeta' = 0{,}1$, so berechnet sich hieraus:

$$c_2 = 7{,}93 \text{ m}$$

und dann nach Gleichung (252) der hydraulische Maximalwirkungsgrad:

$$\eta_m = 0{,}815.$$

Gleichung (249) giebt die absolute Geschwindigkeit w_2, mit welcher das Wasser das Rad verlässt:

$$w_2 = 6{,}17 \text{ m}$$

und aus $w_2 \cos \alpha_3 = c_2 \cos \alpha_2$ ergiebt sich:

$$\alpha_3 = 64^\circ.$$

Die Kanalquerschnitte bestimmen sich durch die Beziehung $V = Fc = F_1 c_1 = F_2 c_2$:

$$F = 0{,}00917, \quad F_1 = 0{,}00589, \quad F_2 = 0{,}00630 \text{ qm}.$$

Beträgt die Schaufeldicke $\sigma = 0{,}006$ m und liegen am äusseren, wie am inneren Umfange $z_1 = z_2 = 6$ Schaufeln vor, so bestimmen sich die Radhöhen nach Gleichung (259)

$$e_1 = 0{,}018 \quad \text{und} \quad e_2 = 0{,}018 \text{ m}.$$

Die gewonnene Arbeit ist

$$Vh\gamma = 300 \text{ mkg}$$

oder 4 Pferdestärken; die hydraulische Betriebsarbeit ergiebt sich daher, wenn man durch η_m dividirt, zu 4,91 Pferdestärken, wobei dann noch die Reibung in den Lagern in Betracht zu ziehen wäre.

Für den Gleichgewichtszustand berechnet sich die hydraulische Arbeit L_0 zum Betrieb der Pumpe nach Gleichung (159) S. 136:

$$L_0 = \frac{\zeta_0 \gamma}{2g} F_1 u_1^3 \sin^3 \alpha_1 ,$$

wenn man dort $M = 0$, sowie $c = 0$ und $c_1 = 0$ substituirt.

Mit $\zeta_0 = 1{,}25$ ergiebt sich für vorliegendes Beispiel, wobei allerdings die Unsicherheit des Werthes ζ_0 in Betracht fällt:

$$L_0 = 46 \text{ mkg};$$

dieser Arbeitsaufwand ist also keineswegs Null, wie gewöhnlich angenommen wird.

§ 36. Ueber das Verhalten der Centrifugalpumpen bei beliebiger Umfangsgeschwindigkeit. Allgemeiner Fall.

Im Allgemeinen darf man wohl aussprechen, dass die Centrifugalpumpen in ihren verschiedenen praktischen Ausführungen keineswegs in so vollkommener Art den theoretischen Anforderungen entsprechen, wie das bei gut ausgeführten Vollturbinen der Fall ist. Es ist die Frage, ob sich nicht die Anbringung eines wirklichen Leitapparates empfehlen würde, welcher das Wasser nicht gerade radial ins Laufrad einführt; jedenfalls dürfte sich aber unter allen Umständen die Anwendung eines Diffusers mit einzelnen Leitkanälen von richtig berechneten Querschnittsänderungen empfehlen, wie er bis jetzt nur in vereinzelten Fällen, wie von Nagel und Kaemp, in Anwendung gekommen ist*). Die angedeutete vollkommene Anordnung erscheint in erster Linie in solchen Fällen angebracht, in denen bei unveränderlicher Förderhöhe eine gleichbleibende Wassermenge mit der geringsten Betriebsarbeit gehoben werden soll. (Vgl. hierüber die Bemerkungen unten am Schlusse von § 37.)

Eine gute und übersichtliche Darstellung der verschiedenen Pumpenconstructionen findet sich in dem Buche »Die Pumpen« von K. Hartmann und Knoke, Berlin 1897, 2. Aufl., in welchem auch die verschiedenen Arten der theoretischen Behandlung der Centri-

*) A. Linnenbrügge behandelt die Centrifugalpumpe mit Leitapparat und Diffuser in einer vortrefflichen theoretischen Studie »Beitrag zur Theorie der Centrifugalpumpen« in der Zeitschrift des Ver. deutscher Ing., Bd. 14, 1870, p. 5 und p. 97.

fugalpumpen besprochen werden; in letzterer Beziehung seien hier, da die Arbeit von Ebel bereits erwähnt wurde, nur Herrmann's Bearbeitung in der neuen Auflage von Weisbach's Ingenieur- und Maschinenmechanik und die neueren Abhandlungen von Mollier*) und Bartl**) erwähnt.

Eigenthümlicher Weise wird unter allen bekannt gewordenen theoretischen Untersuchungen nur in der Arbeit von Bartl der Unterschied zwischen der normalen Umdrehungsgeschwindigkeit (u_2) und der Gleichgewichtsgeschwindigkeit (u_0), auf welche in unseren oben vorliegenden Entwickelungen ein besonderes Gewicht gelegt worden ist, näher besprochen. Nach den bisher von Anderen gegebenen Formeln für die normale oder beste Umfangsgeschwindigkeit u_2 ist bei der ersten Anordnung (s. oben S. 321) jederzeit $u_2 > u_0$, nicht aber bei der zweiten Anordnung (S. 327); hier kann die sonst gebräuchliche Rechnung $u_2 < u_0$ ergeben; Bartl meint nun, dass für die Einleitung der Wasserhebung zunächst jedenfalls $u_2 > u_0$ sein müsse, dass man aber dann allmählich, wenn die Wasserförderung einmal im Gange sei, mit der Geschwindigkeit u_2 herabgehen könne, bis schliesslich $u_2 < u_0$ vorliege; dass die Umdrehungszahl für das Anlassen der Pumpe grösser ist, als die für normalen Gang, bezeichnet derselbe dann als wenig erwünscht.

In Wirklichkeit dürfte aber doch ein Zurückgehen von u_2 auf einen Werth, der kleiner als u_0 ist, überhaupt nicht statthaft sein; directe Beobachtungen liegen hierüber nicht vor; die wenigen Versuchsresultate, welche dem Verfasser zugänglich waren, z. B. an der Sulzer'schen Centrifugalpumpe in Frankfurt (s. S. 326) ergaben die Werthe u_2 und u_0 beinahe von gleicher Grösse.

Nach Allem dürfte es wohl angemessen erscheinen, die Frage einmal gründlicher auf theoretischem Wege zu untersuchen.

Es mag daher noch erörtert werden, wie bei gleichbleibender Förderhöhe h die von der Pumpe geförderte Wassermenge sich mit der Umfangsgeschwindigkeit u des Laufrades ändert.

Man erhält hier ganz eigenthümliche Resultate, die der Beachtung werth sind und über die im Vorstehenden berührte Frage

*) Rich. Mollier, »Ueber Centrifugalpumpen«. Verh. des Ver. zur Beförderung des Gewerbfleisses, 1895, S. 211.

**) J. Bartl, »Zur Auswahl der zweckmässigsten Schaufelformen für Kreiselpumpen«. Zeitschrift des Ver. deutscher Ing., 1891, S. 1046.

Aufschluss geben, wenn auch die Rechnungen nur angenäherte sind.

Es werde der auf S. 321 unter Zugrundelegung von Fig. 74 angegebene Weg verfolgt.

Aus Gleichung (258) S. 330 folgt für $c_0 = c_3$, wenn man

$$\left(\frac{F_4}{F_3}\right)^2 + \zeta_r \frac{l_0 + l_3}{d_0} = \lambda$$

setzt, nach Gleichung (246) S. 322:

$$2g\,(a_3 - a_1 - h) = (1 + \zeta')\,c^2 + \lambda c_3{}^2 - c_3{}^2$$

oder mit Gleichung (248a)

$$2g\,(a_2 - a_1 - h) = (1 + \zeta')\,c^2 + \lambda c_3{}^2 - w_2{}^2. \qquad (260)$$

Für den Durchgang des Wassers durch das Laufrad findet sich, da hier beim Eintritte wegen der plötzlichen Geschwindigkeitsänderung der Druck a_1 sich in a_1' verwandelt, nach Gleichung (213a) S. 304:

$$2g\,(a_1' - a_2) = (1 + \zeta_2)\,c_2{}^2 - c_1{}^2 - (u_2{}^2 - u_1{}^2).$$

Wird hierzu Gleichung (260) addirt, so ergiebt sich:

$$\begin{aligned}2g\,(a_1' - a_1 - h) = (1 + \zeta_2)\,c_2{}^2 + (1 + \zeta')\,c^2 - c_1{}^2 \\ + \lambda c_2{}^3 - w_2{}^2 - (u_2{}^2 - u_1{}^2).\end{aligned} \qquad (261)$$

Bei stossfreiem Eintritt führt diese Gleichung wegen $a_1' = a_1$ wieder, wie es sein muss, auf Gleichung (248) S. 323.

Nach Gleichung (216) S. 304 ist:

$$2g\,(a_1' - a_1) = (\zeta_0 c_0 + \zeta_1 c_1)\,(c_0 - c_1)$$

nebst

$$c_0 = c \cos(\alpha + \alpha_1) + u_1 \sin \alpha.$$

Da nun aber bei Centrifugalpumpen $\alpha = 0$ ist, so folgt, wenn man, wie früher, sich die Annahme $\zeta_0 = \zeta$ erlaubt:

$$2g(a_1' - a_1) = \zeta_0\,[c^2\cos^2\alpha_1 - c_1{}^2 + 2cu_1 \sin\alpha_1 \cos\alpha_1 + u_1{}^2\sin^2\alpha_1]. \qquad (262)$$

Liegt der Gleichgewichtszustand vor, so ist $c = c_1 = c_2 = c_3 = 0$, aber, was besonders zu beachten ist, auch $w_2 = 0$; dann ergeben die beiden Gleichungen (261) und (262) für die zugehörige

Umfangsgeschwindigkeit den durch Gleichung (254) S. 325 gegebenen Ausdruck.

Findet dagegen wirklich eine Wasserhebung statt, so ist in Gleichung (261)

$$w_2{}^2 = u_2{}^2 + c_2{}^2 - 2 c_2 u_2 \sin \alpha_2$$

zu substituiren.

Beachtet man nun weiter die Beziehungen:

$$F_0 c_0 = F c = F_1 c_1 = F_2 c_2 = F_3 c_3$$

sowie

$$u_1 : u_2 = r_1 : r_2,$$

und setzt man der Einfachheit wegen die beliebig zu wählende Umfangsgeschwindigkeit u statt u_2, so ergiebt sich aus der Verbindung der Gleichungen (261) und (262) zur Berechnung der relativen Austrittsgeschwindigkeit c_2 und der gehobenen Wassermenge $V = F_2 c_2$ die Grundformel:

$$A c_2{}^2 + 2 B c_2 u - C u^2 = - 2 g h, \tag{263}$$

wobei zu setzen ist:

$$A = \zeta_2 + \lambda \left(\frac{F_2}{F_3}\right)^2 - (\zeta_0 \cos^2 \alpha_1 - \zeta')\left(\frac{F_2}{F}\right)^2 + (\zeta_0 - \sin^2 \alpha_1)\left(\frac{F_2}{F_1}\right)^2, \tag{263a}$$

$$B = \sin \alpha_2 - \zeta_0 \frac{r_1}{r_2} \frac{F_2}{F} \sin \alpha_1 \cos \alpha_1, \tag{263 b}$$

$$C = 2 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 (1 - \zeta_0 \sin^2 \alpha_1). \tag{263 c}$$

Gleichung (263) stellt, wenn man sich u als Abscisse und c_2 bez. V als Ordinate aufgetragen denkt, eine Hyperbel dar. Bei den ausgeführten Pumpen sind A und C immer positiv, dagegen kann B positiv oder negativ sein; merkwürdiger Weise spielt hier der Winkel α_2 eine ganz bedeutsame Rolle.

Ist α_2 gross (erste Anordnung, s. oben), so ist B positiv; ist dagegen α_2 klein oder negativ (zweite Anordnung), so ergiebt sich B negativ und dieser Fall giebt zu besonderen Betrachtungen Anlass.

Setzt man in Gleichung (263) B negativ, ändert man also in Gleichung (263b) das Zeichen, so ergiebt sich

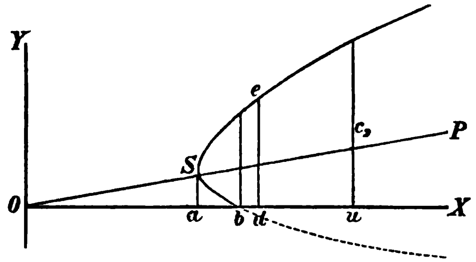
$$A c_2 \left(c_2 - 2 \frac{B}{A} u\right) = C u^2 - 2 g h \tag{264}$$

oder auch

$$\frac{c_2}{u} = \frac{B}{A} + \sqrt{\frac{(AC + B^2)}{A^2} - \frac{2gh}{Au^2}}. \tag{264a}$$

Die betreffende Hyperbel hat den in Fig. 76 angegebenen Verlauf; ihre Hauptaxe OP liegt oberhalb der Abscissenaxe OX.

Fig. 76.



Aus der letzten Gleichung ist ersichtlich, dass für c_2 nur dann reelle Werthe hervortreten, wenn:

$$u > \sqrt{\frac{A}{AC + B^2} \cdot 2gh}.$$

Findet Gleichheit statt, so folgt:

$$c_2 = \frac{B}{A} u = \frac{B}{A} \sqrt{\frac{A}{AC + B^2} 2gh}.$$

In Fig. 76 stellt die Strecke Oa den entsprechenden Werth u und aS den zugehörigen Werth von c_2 dar.

Ist dagegen in Gleichung (264):

$$u = \sqrt{\frac{2gh}{C}}$$

oder:

$$u = \sqrt{\frac{2gh}{2 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 (1 - \zeta_0 \sin^2 \alpha_1)}},$$

so ist

$$c_2 = 0 \quad \text{oder} \quad c_2 = 2\frac{B}{A} u = 2\frac{B}{A} \sqrt{\frac{2gh}{C}}.$$

Dem Punkte b mit $Ob = u$ entsprechen demnach zwei verschiedene Werthe von c_2 und demnach zwei verschiedene Wassermengen $V = F_2 c_2$; dieser Umstand tritt bei allen zwischen Oa und Ob liegenden Werthen von u auf.

Die früher benutzte Formel für die Gleichgewichtsgeschwindigkeit u_2 ergab statt der vorstehenden:

$$u_0 = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 (1 - \zeta_0 \sin^2 \alpha_1)}}.$$

In der Figur mag die Strecke Od den Werth u_0 darstellen.

Daraus ist nun ersichtlich, dass theoretisch genommen in der That die Umdrehungsgeschwindigkeit u unter den Werth $Od = u_0$ herabgehen kann und noch eine Wasserhebung denkbar wäre. Sinkt aber u unter den Werth Ob herab, so würde, mathematisch genommen, zwischen den Punkten a und b noch immer Wasserhebung möglich sein, aber jedem Werthe von u würden zwei verschiedene Wassermengen entsprechen, ein Zeichen, dass zwischen a und b ein eigenthümlicher labiler Zustand vorliegt.

Die beiden Punkte b und d ferner liegen, wie die letzten der vorstehenden Gleichungen ergeben, jederzeit sehr nahe bei einander, so dass, entgegen der Bartl'schen Meinung, der Fall $u < u_0$ sicher in Wirklichkeit nicht vorkommt, und unsere in den früheren Untersuchungen aufgestellte Behauptung, dass bei der Berechnung der Centrifugalpumpen jederzeit u bez. u_2 grösser als u_0 angenommen werden soll, befestigt wird; nur könnte man sich denken, dass es vielleicht gestattet ist, die Differenz $u_2 - u_0$, die oben zu 0,5 bis 1,5 m angegeben wurde, unter Umständen kleiner zu wählen, so dass u_2 nur wenig grösser als u_0 anzunehmen wäre.

Es kommt nämlich bei Pumpen, welchen Fig. 76 entspricht, noch ein besonderer Umstand in Betracht.

Wird die Pumpe angelassen und ist die Geschwindigkeit $Od = u_0$ erreicht, so dass nun die Wasserhebung beginnt, so müsste, theoretisch genommen, die Geschwindigkeit c_2 plötzlich auf einen endlichen Werth springen, welcher durch die Strecke de dargestellt ist.

Wegen der trägen Masse des Wassers wird sich der Uebergang in den Beharrungszustand aber durch tumultuarische Bewegungen zu erkennen geben.

Lässt man umgekehrt eine Centrifugalpumpe vom normalen Bewegungszustande aus ganz allmählich langsamer laufen, so müsste dieselbe in der Nähe von $u = u_0$ plötzlich versagen; das geschieht nun wirklich und wird von den Ingenieuren als das »Abschnappen« der Pumpe bezeichnet.

Nach den in diesem Buche niedergelegten, insbesondere in § 12 S. 133 gegebenen Sätzen liesse sich ganz wohl auch der Wirkungsgrad der Pumpe für eine beliebige Umfangsgeschwindigkeit u ermitteln und durch eine Curve darstellen, doch mag das unterlassen werden. Man stösst dabei auf complicirte Formeln, deren praktische Verwerthung wegen der Unsicherheit in den Abmessungen der Pumpen und in der Wahl der Widerstands- und Correctionscoefficienten doch von zweifelhaftem Nutzen wäre.

Kapitel III.

Die Radialturbine als Ventilator.

Von den Centrifugalventilatoren.

§ 37. Stossfreier Durchgang der Luft. Schaufelwinkel. Betriebsarbeit. Beste Umfangsgeschwindigkeit.

Wird durch eine Centrifugalpumpe Luft statt Wasser gefördert, so heisst sie Centrifugalventilator und es liessen sich dann, wenn man von der Volumenänderung, welche die Luft bei Druckänderungen erleidet, absehen wollte, sogleich die im vorigen Kapitel abgeleiteten Formeln auf den Ventilator übertragen, in gleicher Weise, wie dies schon bei der Behandlung der Axialpumpen und Axialventilatoren (s. S. 227) geschehen ist. Im vorliegenden Falle soll eine solche Uebertragung nicht ohne Weiteres erfolgen, vielmehr die Ableitung der Hauptgleichungen unter allgemeinen Annahmen stattfinden, um unter Umständen umgekehrt Schlüsse zuzulassen auf Verbesserungen, die man etwa bei der Construction der Centrifugalpumpen ins Auge fassen könnte.

Liegt bei einem Ventilator einfach nur der Zweck vor, Luft von einem weiten Raume nach einem zweiten zu fördern, in welchem höherer Druck vorherrscht und ist der letztere (an der Austrittsstelle) der atmosphärische Druck, so ist der Druck an der Eintrittsstelle kleiner als der Atmosphärendruck; in diesem Falle bezeichnet man den Ventilator als Saugventilator.

Herrscht dagegen der Atmosphärendruck an der Einströmungsöffnung, aber an der Austrittsstelle, im Zuflussraume, ein höherer Druck, so spricht man vom Druckventilator.

Für die Berechnung und die Theorie des Ventilators ist es gleichgültig, ob der eine oder andere Fall vorliegt, da man es hier nur mit dem Grade der Druckerhöhung, der Druckdifferenz zu thun hat.

Ein besonderer Fall liegt beim Druckventilator vor, wenn der Druckraum aus einer geschlossenen Leitung besteht, aus welcher man die Luft durch Ausströmungsöffnungen, Düsen, in die freie Atmosphäre zurücktreten lässt. Man spricht dann von einem Blaseventilator, wie er bei Schmelzprocessen in Anwendung kommt und unten noch näherer Betrachtung unterworfen werden soll.

Beim Durchgange der Luft durch den Ventilator finden continuirliche Druckänderungen statt, mit denen gleichzeitige Dichtigkeitsänderungen oder Aenderungen des specifischen Volumens der Luft verbunden sind. Man könnte nun zwar bezüglich der Druck- und Volumenänderung von einer bestimmten Annahme ausgehen, z. B. voraussetzen, dass adiabatische Zustandsänderung anzunehmen sei, wie das auf S. 230 beim Axialventilator vorgeführt wurde, doch lassen sich dann die Reibungs- oder hydraulischen Widerstände nicht in Rechnung stellen, weil hierüber weder experimentelle, noch entsprechende theoretische Untersuchungen vorliegen.

Man ist daher von jeher bei der Behandlung der Gebläse von der Annahme ausgegangen, dass das specifische Volumen der Luft als eine constante Grösse in Rechnung gestellt werden könne und hat dabei die Bewegung der Luft genau wie die einer tropfbaren Flüssigkeit, wie die des Wassers, betrachtet.

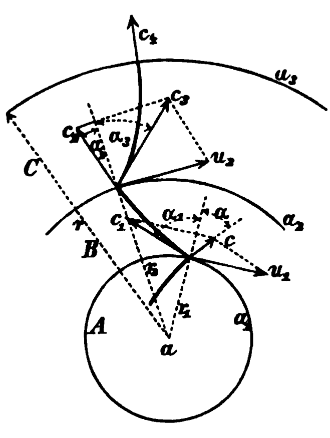
Bei Druckventilatoren kann als höchste Druckdifferenz, wie sie in der Praxis vorkommt, der Werth von 65 mm Wassersäule angenommen werden; beim Blaseventilator 500 mm. Setzt man das specifische Volumen der Luft bei mittlerer Temperatur und atmosphärischem Drucke 0,8187 cbm (s. S. 6), so berechnet sich dann bei adiabatischer Compression das specifische Volumen am Ende beim Druckventilator zu 0,8151 cbm und beim Blaseventilator zu 0,7917 cbm, also selbst im letzten Falle nur wenig kleiner, so dass man bis auf Weiteres auch fernerhin die Unveränderlichkeit des specifischen Volumens voraussetzen darf.

Um die nachfolgenden Gleichungen direct mit denjenigen in Vergleich bringen zu können, welche für Turbinen und Centrifugalpumpen oben gewonnen worden sind, sollen alle Druckhöhen h und Piezometerstände a in Luftsäulen von atmosphärischer Dichte gemessen werden. Bei der praktischen Verwerthung der Formeln hat man dann, wenn die Luftpressungen in Millimeter Wassersäule gegeben oder beobachtet worden sind, einfach nur an die Stelle von h oder a zu substituiren $0{,}8187 \cdot h$ bez. $0{,}8187 \cdot a$.

a) Saug- und Druckventilator.

Hier möge Fig. 77 zu Grunde gelegt werden, nach welcher das Laufrad B aussen von dem Diffuser C umschlossen wird, dagegen im Innern einen Leitapparat A besitzt, wie er bei den Vollturbinen vorliegt, bei den Ventilatoren allerdings in der angegebenen Form nicht in Gebrauch ist, aber wohl in Gebrauch kommen könnte.

Fig. 77.



Zunächst bestimmt sich unter Benutzung der in der Figur angegebenen Bezeichnung der Schaufelwinkel nach den bei der Einführung in die Theorie der Fourneyron-Turbine angegebenen Formeln unter Vernachlässigung der Schaufeldicken die Summe F der normalen Querschnitte im Einlaufapparate nach Gleichung (179) S. 290:

$$F = 2 r_1 e_1 \pi \cos \alpha. \tag{265}$$

Für das Laufrad folgt bei gleicher axialer Radweite e_1 an der Eintrittsstelle, und wenn e_2 die Radweite an der Austrittsstelle ist:

$$F_1 = 2 r_1 e_1 \pi \cos \alpha_1 \quad \text{und} \quad F_2 = 2 r_2 e_2 \pi \cos \alpha_2 .$$

Für den Diffuser folgt an der Eintrittsstelle

$$F_3 = 2 r_2 \pi e_2 \cos \alpha_3 ,$$

während der Gesammtquerschnitt an der Austrittsstelle des Diffusers mit F_4 bezeichnet werden mag; die Schaufelenden sollen daselbst den Kreisumfang senkrecht durchschneiden; ist der Radius dieses Kreises r_3 und e_3 die axiale Weite, so folgt:

$$F_4 = 2 r_3 \pi e_3 .$$

Bei der in Fig. 77 gegebenen Bezeichnung für die einzelnen Geschwindigkeiten ist aber das in der Secunde durchströmende Luftvolumen:

$$V = Fc = F_1 c_1 = F_2 c_2 = F_3 c_3 = F_4 c_4 ,$$

und daraus folgt unter Benutzung vorstehender Gleichungen für die Querschnitte:

$$\frac{c_1}{c} = \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_1}, \quad \frac{c_2}{c} = \frac{r_1 e_1}{r_2 e_2} \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_2},$$
$$\frac{c_3}{c} = \frac{r_1 e_1}{r_2 e_2} \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_3}, \quad \frac{c_4}{c} = \frac{r_1 e_1}{r_3 e_3} \cos \alpha, \tag{266}$$

und überdies:

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{r_1 e_1}{r_2 e_2} \cdot \frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha_2} . \tag{267}$$

Da u_1 und u_2 die Umfangsgeschwindigkeiten des Laufrades an der Ein- und Austrittsstelle sind, so findet sich nach den in Fig. 77 angedeuteten Geschwindigkeitszerlegungen, da stossfreier Durchgang der Luft vorausgesetzt wird:

$$\frac{c_1}{u_1} = \frac{\cos \alpha}{\sin (\alpha + \alpha_1)} \quad \text{und} \quad \frac{c_2}{u_2} = \frac{\cos \alpha_3}{\sin (\alpha_2 + \alpha_3)} . \tag{268}$$

Aus der Division beider Gleichungen folgt wegen $u_2 : u_1 = r_2 : r_1$ auch:

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{r_2}{r_1} \frac{\cos \alpha_3 \sin (\alpha + \alpha_1)}{\cos \alpha \sin (\alpha_2 + \alpha_3)}, \tag{269}$$

und aus der Verbindung mit Gleichung (267) ergiebt sich nach einfacher Reduction:

$$\operatorname{tg} \alpha_2 + \operatorname{tg} \alpha_3 = \frac{e_2}{e_1} \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha_1) , \tag{270}$$

eine Beziehung, welche den erforderlichen Zusammenhang der einzelnen Schaufelwinkel ergiebt.

Es verdient hervorgehoben zu werden, dass diese Gleichung auch gültig ist für eine Fourneyron-Turbine, welche mit einem Diffuser versehen ist, ein Fall, der in § 28 S. 284 nicht behandelt wurde; die Krümmung der Laufradschaufeln (Fig. 77) erscheint dann umgekehrt, so dass $\alpha_2 > \alpha_1$ ist.

Was nun die Treibarbeit L für das Laufrad betrifft, so ist nach Gleichung (151) im ersten Theile S. 132:

$$L = M[c_1 u_1 \sin\alpha_1 - c_2 u_2 \sin\alpha_2 + u_1^2 - u_1^2], \tag{271}$$

eine Gleichung, welche sich in verschiedene Formen bringen lässt.

Aus Fig. 77 erkennt man zunächst die Beziehungen:

$$c_3^2 = c_2^2 + u_2^2 - 2c_2 u_2 \sin\alpha_2,$$
$$c^2 = c_1^2 + u_1^2 - 2c_1 u_1 \sin\alpha_1 .$$

Eliminirt man mit Hülfe derselben die beiden ersten Glieder der rechten Seite der Gleichung (271), so folgt auch:

$$L = \frac{M}{2}[c_3^2 - c^2 + c_1^2 - c_2^2 + u_2^2 - u_1^2]. \tag{271a}$$

Man kann dagegen in Gleichung (271) die Geschwindigkeiten c_1 und c_2 auch durch die Ausdrücke (268) ersetzen; dieselben ergeben:

$$\frac{c_1 \sin\alpha_1}{u_1} = \frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha_1}$$

und:

$$\frac{c_2 \sin\alpha_2}{u_2} = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2}{\operatorname{tg}\alpha_2 + \operatorname{tg}\alpha_3}.$$

Benutzt man diese Formeln unter gleichzeitiger Beachtung der Gleichungen (270) und (271), so folgt weiter auch:

$$L = Mu_1^2 \cdot \frac{\frac{e_1}{e_2}\operatorname{tg}\alpha_3 - \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\alpha}. \tag{271b}$$

Endlich ist noch die beste Umfangsgeschwindigkeit des Laufrades festzustellen.

Es sei a der Druck in dem Raume, von welchem die Luft herbeikommt, beim Druckventilator wäre also a gleich dem Atmosphärendruck; ferner sei a_1 der Druck zwischen Leit- und Laufrad, a_2 derjenige zwischen Laufrad und Diffuser und a_3 der Druck ausserhalb des Diffusers, dann gelten auch hier die oben wiederholt benutzten Gleichungen:

$$2g(a-a_1)=(1+\zeta_1)c^2,$$
$$2g(a_1-a_2)=(1+\zeta_2)c_2^2-c_1^2-(u_2^2-u_1^2),$$
$$2g(a_2-a_3)=(1+\zeta_3)c_4^2-c_3^2.$$

Dabei sind ζ_1, ζ_2 und ζ_3 die Widerstandscoefficienten bez. im Leitrade, Laufrade und Diffuser, aber bezogen auf die Endquerschnitte; sollen dieselben, wie bei den früheren Untersuchungen, auf den kleineren Querschnitt bezogen werden, so hat man in den vorstehenden Gleichungen für das Laufrad zu setzen $\zeta_2 c_1^2$ statt $\zeta_2 c_2^2$ und für den Diffuser $\zeta_3 c_3^2$ statt $\zeta_3 c_4^2$; führt man das aus und ändert man zugleich in allen Gleichungen das Zeichen, so folgt hier:

$$\left.\begin{aligned}2g(a_1-a)&=-(1+\zeta_1)c_2,\\2g(a_2-a_1)&=-c_2^2+(1-\zeta_2)c_1^2+(u_2^2-u_1^2),\\2g(a_3-a_2)&=-c_4^2+(1-\zeta_3)c_3^2.\end{aligned}\right\}\quad(272)$$

Addirt man jetzt diese Gleichungen und bezeichnet man die erzeugte Druckdifferenz (a_3-a) mit h, so folgt:

$$2gh=c_1^2+c_3^2-c^2-c_2^2-c_4^2+(u_2^2-u_1^2)-[\zeta_1 c^2+\zeta_2 c_1^2+\zeta_3 c_3^2].\quad(273)$$

Benutzt man die entsprechenden Glieder der rechten Seite in Gleichung (271a), so ergiebt sich noch ein vierter Ausdruck für die vom Laufrade geforderte Treibarbeit und zwar ist:

$$L=\frac{M}{2}[2gh+c_4^2+\zeta_1 c^2+\zeta_2 c_1^2+\zeta_3 c_3^2].\quad(271\,c)$$

Die Verwendung der Gleichungen (266) führt dann auf den Ausdruck:

$$L=Mgh+\frac{Mc^2\cos^2\alpha}{2}\left[\frac{\zeta_1}{\cos^2\alpha}+\frac{\zeta_2}{\cos^2\alpha_1}+\left(\frac{r_1}{r_2}\frac{e_1}{e_2}\right)^2\cdot\frac{\zeta_3}{\cos^2\alpha_3}+\left(\frac{r_1}{r_3}\frac{e_1}{e_3}\right)^2\right].$$

Führt man zur Vereinfachung die Hülfsgrösse

$$\psi=\frac{\zeta_1}{\cos^2\alpha}+\frac{\zeta_2}{\cos^2\alpha_1}+\left(\frac{r_1}{r_2}\frac{e_1}{e_2}\right)^2\frac{\zeta_3}{\cos^2\alpha_3}+\left(\frac{r_1}{r_3}\frac{e_1}{e_3}\right)^2\quad(274)$$

ein, so hat man für die Betriebsarbeit L auch weiterhin den Ausdruck:

$$L = Mgh + \psi \frac{Mc^2 \cos^2 \alpha}{2}. \tag{271 c}$$

Nach Fig. 77 ist $c \cos \alpha = c_1 \cos \alpha_1$ und mit der ersten der Gleichungen (268) folgt:

$$c \cos \alpha = \frac{u_1 \cos \alpha \cos \alpha_1}{\sin (\alpha + \alpha_1)} = \frac{u_1}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha_1}.$$

Daher ist auch:

$$L = Mgh + \psi \frac{M u_1^2}{2 (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha_1)^2},$$

und aus der Verbindung mit Gleichung (271 b) folgt:

$$u_1 = (\operatorname{tg} + \operatorname{tg} \alpha_1) \sqrt{\frac{2gh}{2 \left(\frac{e_1}{e_2} \operatorname{tg} \alpha_3 - \operatorname{tg} \alpha\right)(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha_1) - \psi}}, \tag{275}$$

wonach sich die Umfangsgeschwindigkeit des Laufrades an der Eintrittsstelle berechnet.

Der pneumatische (hydraulische) Wirkungsgrad η ist:

$$\eta = \frac{Mgh}{L},$$

oder unter Benutzung der Gleichungen (271 b) und (275):

$$\eta = 1 - \frac{\psi}{2 \left(\frac{e_1}{e_2} \operatorname{tg} \alpha_3 - \operatorname{tg} \alpha\right)(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha_1)}. \tag{276}$$

Bei den wirklich ausgeführten Ventilatoren liegen Leitschaufeln nicht vor, die Luft tritt daher radial in das Laufrad ein, es ist demnach $\alpha = 0$, wonach sich mit den vorstehenden Formeln ergiebt:

$$u_1 = \operatorname{tg} \alpha_1 \sqrt{\frac{2gh}{2 \frac{e_1}{e_2} \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_3 - \psi}} \tag{275a}$$

und:

$$\eta = 1 - \frac{\psi}{2 \frac{e_1}{e_2} \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_3}. \tag{276a}$$

Dabei ist natürlich auch in dem Ausdrucke für ψ (Gleichung (274)) $\cos\alpha = 1$ zu substituiren und nach Gleichung (270) ergiebt sich die Beziehung zwischen den einzelnen Schaufelwinkeln:

$$\operatorname{tg}\alpha_2 + \operatorname{tg}\alpha_3 = \frac{e_2}{e_1}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 \operatorname{tg}\alpha_1 . \tag{270 a}$$

Vielfach hat man Ventilatoren ausgeführt, bei denen die Laufradschaufeln radiale ebene Flächen bilden; in diesem Falle, bei welchem $\alpha_1 = 0$ und $\alpha_2 = 0$ ist, sollte man aber die Luft nicht radial in das Laufrad eintreten lassen, wie das allgemein geschieht, weil dann kein stossfreier Eintritt vorliegt, unter welcher Voraussetzung die hier und von Anderen auf anderem Wege entwickelten Formeln nur gültig sind; vielmehr müsste hier ein Leitapparat in Anwendung kommen, durch welchen die Luft unter der durch den Winkel α vorgeschriebenen Richtung in das Laufrad geführt wird.

Unter dieser Voraussetzung erhält man mit $\alpha_1 = 0$ und $\alpha_2 = 0$ aus Gleichung (270):

$$\operatorname{tg}\alpha_3 = \frac{e_2}{e_1}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 \operatorname{tg}\alpha ,$$

und dann nach Gleichung (271 b) die Treibarbeit:

$$L = M(u_2^2 - u_1^2) .$$

In Gleichung (274) ist $\cos\alpha_1 = 1$ einzusetzen und leicht lassen sich dann auch die Gleichungen (275) und (276) mit $\operatorname{tg}\alpha_1 = 0$ ohne Weiteres in die entsprechende Form bringen.

b) Blaseventilator.

Die Skizze eines solchen Ventilators zeigt Fig. 78, bei der für den Lufteintritt in das Laufrad ein besonderer Leitapparat vorausgesetzt worden ist, um die Grundlagen für die Theorie desselben möglichst allgemein vorzuführen.

Das Laufrad ist von einem Diffuser umgeben, durch welchen die Luft mittelst besonderer Kanäle, die in der Figur deutlich hervortreten, unter allmählicher Geschwindigkeitsabnahme nach der Luftleitung D hingeführt wird; aus dieser strömt sie dann durch eine Düse oder durch mehrere Düsen in die freie Atmosphäre. Ist der Querschnitt der Leitung F_4, die Geschwindigkeit der Luft daselbst c_4 und der Druck a_3, so gelten die oben entwickelten Gleichungen (270) bis (276) auch für den vorliegenden Fall; nur die Hülfsgrösse ψ nach Gleichung (274) ist, wie sich leicht verfolgen lässt, durch den Ausdruck:

$$\psi = \frac{\zeta_1}{\cos^2 \alpha} + \frac{\zeta_2}{\cos^2 \alpha_1} + \left(\frac{r_1}{r_2}\frac{e_1}{e_2}\right)^2 \frac{\zeta_3}{\cos^2 \alpha_3} + \frac{F^2}{F_4{}^2 \cos^2 \alpha} \tag{277}$$

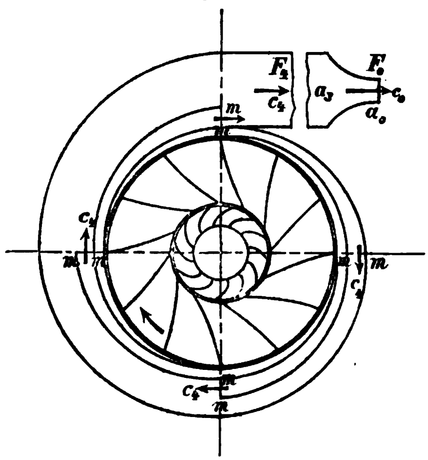
zu ersetzen.

Bezeichnet man die Summe der Düsenquerschnitte mit F_0, die Ausflussgeschwindigkeit der Luft mit c_0 und den Widerstandscoefficienten für die Düse mit ζ_0, so findet sich, wegen $a_3 - a_0 = h$, zur Berechnung von c_0 die Formel:

$$c_0 = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \zeta_0}}. \tag{278}$$

Bei der praktischen Verwerthung der sämmtlichen vorstehenden Formeln stösst man insofern auf grosse Schwierigkeiten, als die verschiedenen unter der Bezeichnung ζ eingeführten Widerstandscoefficienten sehr unsicher bestimmt sind; man kann eigentlich sagen, da sie aus den Versuchsergebnissen mit Wasser herübergenommen worden sind, dass sie unter den hier vorliegenden Verhältnissen überhaupt zur Zeit noch als unbekannt angesehen werden können.

Fig. 78.



Es wäre zweckmässig, die sämmtlichen Widerstände durch einen einzigen Werth in Rechnung zu stellen, der dann auch leichter durch Versuche festgestellt werden könnte.

Diesen Weg, der übrigens bereits oben auf S. 223 angedeutet worden ist, kann man nun in der That einschlagen, wenn man den nach Gleichung (276) berechneten Werth η, der auch bei Ventilatoren als »hydraulischer Wirkungsgrad« bezeichnet werden mag, als gegeben oder als gewählt annimmt. Der angedeutete Weg ist übrigens zuerst von Redtenbacher bei Fourneyron-Turbinen eingeschlagen worden, wie auf S. 294 näher besprochen und oben wiederholt erwähnt worden ist, und bei der Betrachtung der Ventilatoren hat Herrmann in seiner neuen Bearbeitung von Weisbach's »Ingenieur- und Maschinenmechanik« 3. Theil, Abtheilung 2, Braunschweig 1880, ihn gleichfalls verfolgt.

Bestimmt man aus Gleichung (276) die Hülfsgrösse ψ und setzt dieselbe in Gleichung (275) ein, so erhält man für die Umfangsgeschwindigkeit u_1 des Laufrades an der Eintrittsstelle nach einfacher Reduction:

$$u_1 = \sqrt{\frac{(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha_1)}{2\left(\frac{e_1}{e_2}\operatorname{tg}\alpha_3 - \operatorname{tg}\alpha\right)} \cdot \frac{2gh}{\eta}}\,, \tag{279}$$

wonach sich dann nach den oben gegebenen Formeln die übrigen Geschwindigkeitswerthe ermitteln, wenn man sich unter Beachtung von Gleichung (270) die Winkel gewählt denkt. (Vergl. übrigens Gleichung (78) S. 221.)

Beim Blaseventilator kann man (Fig. 78) $F_4 = F$, also $c_4 = c$ wählen und zweckmässiger Weise am Laufrade die axiale Radweite e_2 am äusseren Umfange kleiner, als die Weite e_1 an der Eintrittsstelle annehmen; das Nähere geht wohl am besten aus der Behandlung eines besonderen Beispiels hervor.

Ein Blaseventilator soll bei einer Druckdifferenz von 200 mm Wassersäule in der Secunde ein Luftvolumen $V = 1$ cbm liefern*).

Nach den Bemerkungen auf S. 341 ist zunächst die Druckdifferenz $h = 0{,}8187 \cdot 200 = 164$ m Luftsäule.

Tritt die Luft radial (ohne Leitapparat) in das Laufrad und durchschneiden die Schaufeln den äusseren Radumfang senkrecht, so ist:

$$\alpha = 0 \quad \text{und} \quad \alpha_2 = 0\,,$$

und damit folgt nach Gleichung (270):

$$\frac{e_1}{e_2}\operatorname{tg}\alpha_3 = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 \operatorname{tg}\alpha_1\,, \tag{280}$$

ferner aus Gleichung (279) sehr einfach:

$$u_1 = \frac{r_1}{r_2}\sqrt{\frac{gh}{\eta}}\,.$$

*) Vgl. Herrmann a. a. O.

Es ist aber hier:

$$u_1 = c \operatorname{tg} \alpha_1 , \tag{281}$$

daher:

$$c = \frac{r_1}{r_2} \operatorname{cotg} \alpha_1 \sqrt{\frac{gh}{\eta}} . \tag{282}$$

Nun tritt man zuerst an die Wahl von η.

Rittinger*) setzt auf Grund seiner Versuche $\eta = 0{,}30$, ein Werth, der allerdings sehr klein erscheint und der nach Gleichung (276) und (274) auf viel grössere Werthe der Widerstandcoefficienten ζ führt, als sie oben bei der Behandlung der Turbinen angenommen wurden. Wie weit hierbei die Construction der von Rittinger benutzten Ventilatoren in Betracht kommt, mag unerörtert bleiben; da aber ebenso Herrmann (a. a. O.) von dem Werthe für η Gebrauch macht, so mag auch an dieser Stelle $\eta = 0{,}3$ angenommen werden. Nimmt man nun im vorliegenden Beispiele weiter $\alpha = 65^\circ$ und $c = 10$ m, so ergiebt Gleichung (282) mit $h = 164$ m:

$$\frac{r_2}{r_1} = 3{,}41,$$

und aus Gleichung (281) folgt:

$$u_1 = 21{,}445 \text{ m}.$$

Soll die Luft im Zutrittsrohre vom Durchmesser d bei beiderseitiger Luftzuführung mit der Geschwindigkeit c herbeiströmen, so berechnet sich $d = 0{,}250$ m. Setzt man den inneren Raddurchmesser $d_1 = 1{,}2\, d$, so folgt $r_1 = 0{,}150$ m und $r_2 = 0{,}510$ m.

Mit dem Werthe von u_1 folgt nun die Zahl n der Umdrehungen des Laufrades in der Minute:

$$n = 1365.$$

Die axiale Weite e_1 des Laufrades an der Eintrittsstelle bestimmt sich aus

$$0{,}5 \cdot V = 2 r_1 \pi e_1 c .$$

Es wird $e_1 = 0{,}053$ m zu jeder Seite der mittleren Scheibe, die gesammte Durchflussweite ist daher $2 e_1 = 0{,}106$ m.

Um bei der in Fig. 78 angenommenen Schaufelform und der damit zusammenhängenden Kanalerweiterung im Laufrade Wirbelbildung zu vermeiden, dürfte es sich empfehlen, die axiale gesammte Radweite $2\, e_2$ an der Austrittsstelle kleiner als an der

---

*) Rittinger, »Centrifugalventilatoren und Centrifugalpumpen«. Wien 1858.

Eintrittsstelle auszuführen. Wollte man z. B. die relative Durchgangsgeschwindigkeit c_2 und c_1 gleich gross halten, so wäre nach Gleichung (267):

$$\frac{e_2}{e_1} = \frac{r_1}{r_2} \cos \alpha_1$$

zu setzen.

Weisbach empfiehlt $c_2 = c$, wonach dann bei $\alpha_2 = 0$

$$e_2 : e_1 = r_1 : r_2$$

anzunehmen wäre; in beiden Fällen berechnet sich nach Gleichung (270) leicht der Winkel α_3.

Wählt man noch den Querschnitt F_4 der Windleitung, etwa $F_4 = F$ oder etwas grösser, sowie die Anzahl z_3 der Leitkanäle im Diffuser, so berechnet sich der Austrittsquerschnitt mm (Fig. 78) eines jeden derselben aus $F_4 : z_3$. Die Summe F_0 der Düsenquerschnitte bestimmt sich aus $V = F_0 c_0$, wobei c_0 mit $\zeta_0 = 0,1$ nach Gleichung (278) bestimmt ist.

Da das specifische Gewicht der atmosphärischen Luft im Mittel zu $\gamma = 1,221$ angenommen werden kann, so ist als gewonnene Arbeit anzusehen: $Vh\gamma = 200,24$ mkg und damit folgt mit $\eta = 0,3$ die effective Betriebsarbeit für den vorliegenden Ventilator ohngefähr:

$$N = \frac{Vh\gamma}{75\eta} = 8,9 \text{ Pferdestärken.}$$

Von den älteren Schriften über Centrifugalventilatoren ist die vorhin citirte Schrift von Rittinger noch heute neben den Werken von Herrmann-Weisbach und Redtenbacher als vorzüglich zum Studium zu empfehlen.

Ueber Literatur, die verschiedensten Ventilatorconstructionen und die neueren Versuchsresultate berichtet sehr ausführlich A. von Ihering in seinem Werke »Die Gebläse«, Berlin 1893, im 5. Capitel »Die Schleudergebläse oder Ventilatoren«.

Zum Schlusse mag noch bemerkt werden, dass die unter Annahme von Fig. 78 abgeleiteten Formeln für die Centrifugalventilatoren ohne Weiteres auch gültig sind für die Centrifugalpumpen, wenn man nur diese mit einem besonderen Leitapparat und mit Leitkanälen im Diffuser nach Andeutung der Fig. 78 versieht.

Man hat sich dann den Windkanal als verticales Druckrohr zu denken und in dem Werthe von ψ die Widerstandscoefficienten ζ_1 und ζ_2 durch den Widerstand der Röhrenreibung im Saug- und Druckrohre zu ersetzen.

Kapitel IV.

Die Radial-Dampfturbine.

§ 38. Einfache Fourneyron-Turbine als Dampf- oder Luftturbine.

Bereits oben in den einleitenden Bemerkungen zu den Untersuchungen über die Axial-Dampfturbine von de Laval wurde hervorgehoben (S. 266), dass in neuester Zeit Bestrebungen hervorgetreten sind, auch die Radialturbinen für den Dampfbetrieb in Anwendung zu bringen. Während de Laval ein einziges Laufrad als Axialturbine (S. 279) anwendet und dieses mit enormer Umfangsgeschwindigkeit laufen lässt, ist Parson mit Erfolg bestrebt gewesen, diese Geschwindigkeit und damit die Umdrehungszahl der Turbinenwelle durch Construction sogenannter »Stufenturbinen« herabzuziehen.

Aus dem Laufrade einer mit Leitapparat versehenen Fourneyron-Turbine strömt der Dampf nach einem zweiten Leitrade, welches das Laufrad concentrisch umgiebt und von diesem durch eine zweite Radialturbine, aus dieser wieder durch einen dritten Leitapparat nach einer dritten Turbine u. s. w.

Die gesammte gegebene Druckdifferenz, »das Gefälle«, wird auf solche Weise getheilt und jede einzelne Turbine benutzt nur einen Theil des Gefälles, läuft also mit geringerer Geschwindigkeit um, die um so mehr herabgezogen wird, je mehr einzelne Turbinen, die sämmtlich auf der gleichen Welle sitzen, in Anwendung kommen, je mehr also Stufen gebildet werden. Auf diese Weise hat Parson bis zu 40 Stufen benutzt, auch die Anwendung auf Axialturbinen (Henschel-Jonval-Turbinen) übertragen, diese aber wieder verlassen, um sein Augenmerk den Radialturbinen zuzuwenden.

Es soll nun hier, da viele hervorragende Ingenieure von der weiteren Ausbildung der Dampfturbinen grosse Erwartungen hegen, auf die Theorie derselben näher eingegangen werden, um so mehr, als vollständigere theoretische Untersuchungen über Dampfturbinen und über ihre Berechnung wohl nirgends vorliegen. Die nachfolgende Theorie umfasst auch gleichzeitig, in denselben Formeln, die Luftturbine, deren Anwendung heute nicht ausserhalb der Möglichkeit liegt, sowie nach einfacher Umformung auch alle mit Wasser betriebenen Vollturbinen, welche oben speciell behandelt worden sind.

Als Einführung in die Frage ist es zweckmässig, zuerst von einer einfachen Fourneyron-Turbine mit Dampfbetrieb auszugehen, wenn dieser Fall auch nicht directe Verwendung in der Praxis findet.

Um aber später die allgemeineren Untersuchungen nicht unterbrechen zu müssen, mag zuerst der Zusammenhang zwischen den einzelnen Schaufelwinkeln festgestellt und dabei der Grundriss von Fig. 68 S. 285 benutzt werden.

Ist e, die axiale Radweite, an allen Stellen des Einlaufes und des Laufrades die gleiche, so finden sich unter Vernachlässigung der Schaufeldicke die normalen Durchflussquerschnitte (nach S. 290):

$$F = 2 r_1 e \pi \cos \alpha, \quad F_1 = 2 r_1 e \pi \cos \alpha_1 \quad \text{und} \quad F_2 = 2 r_2 e \pi \cos \alpha_2.$$

Ist nun v_1 das specifische Volumen des Dampfes beim Eintritte in das Laufrad und v_2 dasjenige beim Austritte, und gehen in der Secunde G kg Dampf durch das Rad, so ist auch

$$G v_1 = F c = F_1 c_1 \qquad \text{und} \qquad G v_2 = F_2 c_2.$$

Aus der Verbindung der Gleichungen folgt

$$c \cos \alpha = c_1 \cos \alpha_1$$

und

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{v_2}{v_1} \cdot \frac{r_1 \cos \alpha_1}{r_2 \cos \alpha_2}. \tag{283}$$

Geht man nun auch hier von der Annahme aus, dass beim besten Gange der Dampf ohne Stoss in das Laufrad eintritt, setzt fernerhin den Winkel α_2 gross und $u_2 = c_2 \sin \alpha_2$ voraus, dass der Dampf also das Laufrad in radialer Richtung verlässt, so erhält man, wie auf S. 291, für die gewöhnliche Fourneyron-Turbine:

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{\sin(\alpha + \alpha_1)}{\sin \alpha_2 \cos \alpha}.$$

Die Verbindung mit Gleichung (283) giebt dann für die Dampfturbine nach einfacher Reduction:

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{v_2}{v_1}\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \operatorname{tg}\alpha_2. \tag{284}$$

Die Beziehung zwischen den Schaufelwinkeln ist also auch noch von den Dampfvolumen r_1 und v_2 an der Ein- und Austrittsstelle abhängig.

Nun mag die wichtige Frage beantwortet werden, welche Arbeit L auf das Laufrad in der Secunde übertragen wird. Nach der Ableitung im 1. Theile S. 131 ergab sich das Drehmoment $\mathfrak{M}$ der durch einen rotirenden Kanal strömenden Flüssigkeitsmasse M nach Gleichung (149)

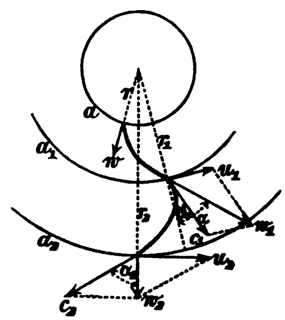
$$\mathfrak{M} = M\left[r_2(\sin\alpha_2 - u_2) - r_1(c_1 \sin\alpha_1 - u_1)\right],$$

und die in der Secunde übertragene Arbeit nach Gleichung (151)

$$L = M\left[u_2 c_2 \sin\alpha_2 - u_1 c_1 \sin\alpha_1 - (u_2^2 - u_1^2)\right]; \tag{285a}$$

dabei wurde dort ausdrücklich hervorgehoben, dass diese Gleichung unter allen Umständen gültig ist, welche Widerstände im Innern des Kanales auch vorliegen mögen und dass sie für jede Art Flüssigkeit (Wasser, Dampf oder Luft) gilt; nur eine Bedingung war zu erfüllen, dass nämlich der Eintritt der Flüssigkeit in den Kanal ohne Stoss stattfinde. Hält man an der letzteren Voraussetzung fest, so gilt die vorstehende Gleichung allgemein auch für die Dampf- und Luftturbine.

Fig. 79.



Führt man im Folgenden eine veränderte Bezeichnung insofern ein, als man an Stelle von c, d. h. für die Geschwindigkeit, mit welcher der Strahl die Einlaufkanäle verlässt und in das Laufrad eintritt, die Bezeichnung w_1 benutzt, so ist nach Fig. 79 auch:

$$w_1^2 = u_1^2 + c_1^2 - 2c_1 u_1 \sin\alpha_1$$

und

$$w_2^2 = u_2^2 + c_2^2 - 2c_2 u_2 \sin\alpha_2.$$

Bestimmt man hieraus die letzten Glieder der rechten Seite beider Gleichungen, und setzt man sie in Gleichung (285a) ein, so ergiebt sich auch:

$$L = \frac{M}{2}[(w_1^2 - w_2^2) + (c_2^2 - c_1^2) - (u_2^2 - u_1^2)], \qquad (285\,b)$$

eine Gleichung, die ebenfalls noch allgemein gültig ist, auf welche nur früher bei der Fourneyron-Turbine nicht besonders hingewiesen wurde.

Es lässt sich aber weiter noch eine dritte Form für die Arbeitsgleichung geben. Strömt eine elastische Flüssigkeit durch einen ruhenden Kanal hindurch, und ist in einem beliebigen Querschnitte desselben p der specifische Druck, v das specifische Volumen und w die Geschwindigkeit, so besteht die Beziehung:

$$d\left(\frac{w^2}{2g}\right) = -v\,dp. \qquad \text{(S. S. 267.)}$$

Die Integration dieser Gleichung erfordert die Kenntniss darüber, wie sich v während der strömenden Bewegung mit p ändert, also die Kenntniss des Verlaufes der Zustandsänderungen der Flüssigkeit. Sieht man zunächst von der Art dieser Beziehung ab und setzt man für die Eintrittsstelle bez. p_1, v_1 und w_1 und für die Austrittsstelle p_2, v_2 und w_2, so folgt aus vorstehender Formel:

$$\frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} = \int_{p_2}^{p_1} v\,dp,$$

oder mit M multiplicirt:

$$Mg\int_{p_2}^{p_1} v\,dp = \frac{M(w_2^2 - w_1^2)}{2}. \qquad (286)$$

Der Ausdruck links repräsentirt also die Arbeit, welche dazu erforderlich ist, die Masse M aus der Geschwindigkeit w_1 in die w_2 zu versetzen.

Die Gleichung gilt der Ableitung gemäss für einen ruhenden Kanal; rotirt aber der Kanal gleichförmig und wird dabei die Arbeit L übertragen, so hat man in vorstehender Gleichung auf der rechten Seite L zu addiren und erhält dann sofort auch:

$$L = \frac{M}{2}\left[(w_1^2 - w_2^2) + 2g\int_{p_2}^{p_1} v\,dp\right], \qquad (285\,c)$$

eine neue Arbeitsgleichung, auf welche früher ebenfalls noch nicht hingewiesen worden ist.

Man nehme nun als untere Integrationsgrenze den Druck p_0 an, der ganz beliebig gewählt werden und auch der Null gleich gesetzt werden kann und setze der Einfachheit wegen:

$$a = \int_{p_0}^{p} v\,dp, \qquad a_1 = \int_{p_0}^{p_1} v\,dp \quad \text{und} \quad a_2 = \int_{p_0}^{p_2} v\,dp. \tag{287}$$

Dann spielen die Werthe a vollständig die Rolle der Piezometerstände; bei Wasser, und bei sehr geringen Druckdifferenzen auch bei Dampf und Luft, kann man das specifische Volumen $v = 1 : \gamma$ constant setzen; die Werthe a erscheinen mit $p_0 = 0$ als Höhen der betreffenden Flüssigkeit von constanter Dichtigkeit, also bei Wasser als Wassersäulen, bei Luft als Luftsäulen, wie sie bei obigen Untersuchungen der Turbinen, Pumpen und Ventilatoren in der That in die Rechnungen eingeführt wurden. Bei Dampf und Luft unter grösseren Druckdifferenzen sollen sie unten noch näher bestimmt werden.

Benutzt man die Gleichung (287) in Gleichung (285c), so folgt:

$$L = \frac{M}{2}\left[w_1^2 - w_2^2 + 2g\,(a_1 - a_2)\right]. \tag{285d}$$

Die Verbindung mit Gleichung (285b) giebt:

$$2g\,(a_1 - a_2) = c_2^2 - c_1^2 - (u_2^2 - u_1^2), \tag{288}$$

was mit Gleichung (187) S. 292 identisch ist, nur dass dort noch auf die Reibungswiderstände in den Laufradkanälen Rücksicht genommen wurde.

Für den Durchgang des Dampfes durch die Leitkanäle sei p bez. a der Druck an der Eintrittsstelle und w die Geschwindigkeit daselbst, es folgt daher nach Gleichung (286) und (287)

$$2g\,(a - a_1) = w_1^2 - w^2. \tag{289}$$

Die Verbindung mit Gleichung (285d) giebt noch

$$L = \frac{M}{2}\left[2g\,(a - a_2) + w^2 - w_2^2\right] \tag{285e}$$

und die Verbindung von Gleichung (288) mit (285d):

$$2g\,(a - a_2) = w_1^2 + c_2^2 - c_1^2 - (u_2^2 - u_1^2) - w^2, \tag{288a}$$

23*

welche Formel mit Gleichung (189) übereinstimmt, nur ist dort w_1 mit c und $a - a_2$ mit h bezeichnet und von vornherein $w = 0$ angenommen worden. Für $u_1 = u_2$ oder $r_1 = r_2$ erscheinen übrigens die entsprechenden Gleichungen, welche bei der Henschel-Jonval-Turbine gegeben wurden.

Benutzt man in vorstehender Gleichung Fig. 79, so ergiebt sich mittelst der Beziehung

$$c_1^2 = w_1^2 + u_1^2 - 2 w_1 u_1 \sin \alpha$$

die Gleichung

$$2g(a - a_2) = 2 w_1 u_1 \sin \alpha + c_2^2 - u_2^2 - w^2.$$

Für den vortheilhaftesten Gang ist aber:

$$\frac{w_1}{u_1} = \frac{\cos \alpha_1}{\sin(\alpha + \alpha_1)} \quad \text{und} \quad c_2 = \frac{u_2}{\sin \alpha_2}$$

und daher nach einigen Reductionen:

$$2g(a - a_2) = \left[\frac{2 \operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha_1} + \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 \operatorname{cotg}^2 \alpha_2\right] u_1^2 - w^2, \quad (288\,\text{b})$$

wobei w, wie erwähnt, die Geschwindigkeit ist, mit welcher der Dampf in den Leitapparat eintritt (Fig. 79); ist r der Radius desselben an der Eintrittsstelle, v das specifische Volumen des Dampfes daselbst, und durchdringen die Leitschaufeln den Eintrittsumfang senkrecht, so folgt, wie auf S. 352:

$$G v = 2 r e \pi w \quad \text{und} \quad G v_1 = 2 r_1 e \pi w_1 \cos \alpha$$

und hieraus:

$$w = \frac{r_1}{r} \frac{v}{v_1} w_1 \cos \alpha$$

oder

$$w = \frac{r_1}{r} \frac{v}{v_1} \cdot \frac{u_1}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha_1}. \quad (290)$$

Bei der einfachen Turbine, insbesondere für den Fall, in welchem die zu entwickelnden Formeln im Folgenden Verwerthung finden sollen, kann man unbedenklich $v = v_1$ setzen und erhält daher aus Gleichung (288b):

$$2g(a - a_2)$$

$$= \left[\frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha_1} + \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 \operatorname{cotg}^2 \alpha_2 - \left(\frac{r_1}{r}\right) \frac{1}{(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha_1)^2}\right] u_1^2, \quad (291)$$

aus welcher Gleichung sich die Umdrehungsgeschwindigkeit u_1 des Laufrades an der Eintrittsstelle berechnet, sobald die Schaufelwinkel und die Radhalbmesser bekannt sind.

Ist p der Dampfdruck vor dem Eintritte in den Leitapparat und p_2 derjenige beim Austritte aus dem Laufrade, so findet sich nach den Gleichungen (170) S. 143 die Differenz $(a - a_2)$ der Piezometerstände

$$a - a_2 = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1}(pv - p_2 v_2)$$

oder mit Gleichung (169) S. 143:

$$2g(a - a_2) = 2g\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}pv\left[1 - \left(\frac{p_2}{p}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}\right] \qquad (291\,\text{a})$$

welcher Ausdruck nun in Gleichung (291) zu benutzen ist.

Für gesättigten Wasserdampf ist hierbei nach der Gleichung der Grenzcurve, welche auf S. 269 angegeben wurde, mit den dort gegebenen Constanten n und D:

$$pv = 17022\,p^{0{,}0607}, \qquad (292)$$

wo p in Kilogrammen, auf ein Quadratcentimeter bezogen, einzusetzen ist, überdies ist $\varkappa = 1{,}135$ und damit $\frac{\varkappa}{\varkappa - 1} = 8{,}4074$ anzunehmen.

Wird die Turbine mit Luft statt mit Dampf betrieben, so ist zu setzen $\varkappa = 1{,}410$ und nach Gleichung (2) S. 5:

$$pv = BT, \qquad (292\,\text{a})$$

wobei für gewöhnliche atmosphärische Luft $B = 29{,}375$ (s. S. 5) zu setzen ist und T die absolute Temperatur der Luft beim Eintritte in den Leitapparat darstellt.

Für sehr geringe Druckdifferenz $(p - p_2)$ findet sich übrigens leicht aus Gleichung (291 a):

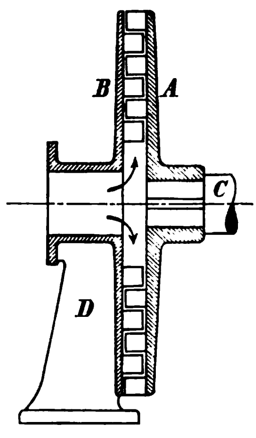
$$2g(a - a_2) = 2gpv\left(1 - \frac{p_2}{p}\right). \qquad (291\,\text{b})$$

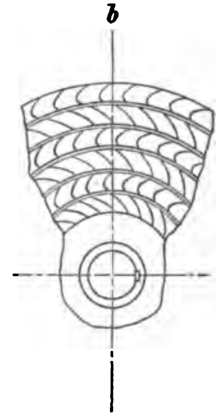
Damit sind für eine einfache mit Dampf oder Luft betriebene Fourneyron-Turbine die Hauptformeln festgestellt.

§ 39. Stufen-Dampfturbine von Parson.

Figur 80 zeigt die Skizze der allgemeinen Anordnung dieser Turbine, über welche schon oben Angaben gemacht wurden.

Fig. 80*a* und *b*.





Mit der Triebwelle C ist die Scheibe A fest verbunden; dieselbe trägt die sämmtlichen Laufräder, während die Leiträder auf einer Scheibe B sitzen, die fest mit dem Gestelle D verbunden ist.

Auf diese Weise tritt der aus jeder Turbine kommende Dampfstrahl in den nächstfolgenden Leitapparat und aus diesem wieder in die nach aussen hin folgende Turbine. Die Umfangsgeschwindigkeiten der einzelnen Laufräder sind natürlich verschieden, da ihre Radien nach aussen hin zunehmen, dagegen haben sämmtliche Laufräder die gleiche Winkelgeschwindigkeit, die im Weiteren mit ε bezeichnet werden mag; für sämmtliche Räder gilt dieselbe Minutenumdrehungszahl n, und zwar ist

$$n = \frac{30}{\pi} \cdot \varepsilon.$$

Die vorhin entwickelten Formeln führen nun leicht auf die Theorie der Stufenturbine. Benutzt man für die erste, im Innern liegende Turbine die Bezeichnung, die vorhin angewendet wurde, so ist die Arbeit L_1, welche durch die Turbine gewonnen wird, nach Gleichung (285e):

$$L_1 = \frac{M}{2}[2g(a - a_2) + w^2 - w_2^2],$$

für die nachfolgende Turbine ergiebt sich:

$$L_2 = \frac{M}{2}[2g(a_2 - a_4) + w_2^2 - w_4^2],$$

für die dritte Turbine:

$$L_3 = \frac{M}{2}[2g(a_4 - a_6) + w_4^2 - w_6^2] \quad \text{u. s. w.}$$

Für die letzte Turbine endlich folgt, wenn m Turbinen oder m Stufen vorhanden sind:

$$L_m = \frac{M}{2}[2g(a_{2(m-1)} - a_{2m}) + w_{2(m-1)}^2 - w_{2m}^2].$$

Addirt man diese Gleichungen, so folgt die gesammte Arbeit L der Stufenturbine bei m Turbinen:

$$L = \frac{M}{2}[2g(a - a_{2m}) + w^2 - w_{2m}^2].$$

Ist D das Gewicht der Dampfmenge in Kilogrammen, welche die Turbine in der Secunde verwerthet, so findet sich wegen $D = Mg$:

$$\frac{L}{D} = a - a_{2m} + \frac{w^2 - w_{2m}^2}{2g}. \tag{293}$$

Der Ausdruck giebt die von der Turbine geleistete Arbeit pro Kilogramm Dampf; dabei ist w die Geschwindigkeit, mit welcher der Dampf in das erste Leitrad eintritt und w_{2m} die absolute Geschwindigkeit, mit welcher der Dampf das letzte, äusserste Laufrad verlässt.

Ist p der Dampfdruck beim Eintritte in das erste Leitrad und p_0 der Druck beim Austritte aus der letzten Turbine, so findet sich unter Benutzung der Gleichung (287) in vorstehender Formel:

$$\frac{L}{D} = \int_{p_0}^{p} v\,dp + \frac{w^2 - w_{2m}^2}{2g}$$

oder auch:

$$\frac{L}{D} = \left[pv - p_0 v_0 + \int_{p_0}^{p} p\, dv \right] + \frac{w^2 - w_{2m}^2}{2g} . \qquad (294)$$

Der erste Klammerausdruck der rechten Seite ist aber nichts anderes, als die Arbeit, welche aus der Gewichtseinheit Dampf bei einer Kolbendampfmaschine gewonnen wird, wenn p der Admissionsdruck, p_0 der Gegendruck ist und vollständige adiabatische Expansion von p auf p_0 vorliegt. Der Ausdruck lässt sich durch ein Indicatordiagramm von der Form der Fläche darstellen, wie sie die Schraffur in Fig. 41 S. 140 andeutet.

Auf diese Weise hat Klein*) unter Vernachlässigung des Werthes w_{2m} in Gleichung (294) die Gesammtarbeit L einer Parson'schen Stufenturbine auf graphischem Wege ermittelt und auf gleichem Wege die Turbine weiteren Betrachtungen unterworfen.

Die graphische Methode giebt aber, abgesehen von ihrem geringeren Genauigkeitsgrade, natürlich nur für einen bestimmt vorgelegten speciellen Fall die Lösung.

Bei der weiteren Verfolgung der Aufgabe muss man nun von gewissen Annahmen ausgehen, deren Zweckmässigkeit sich zum Theil allerdings erst nach weiteren Erfahrungen und Beobachtungen herausstellen wird.

Zunächst möge angenommen werden, dass die Schaufelwinkel α, α_1 und α_2 bei sämmtlichen Turbinen denselben Werth haben; streng genommen müsste allerdings nach Gleichung (284) wenigstens einer der drei Winkel sich von Rad zu Rad ändern, wegen der Veränderlichkeit des Factors: $\left(\frac{v_2}{v_1}\right)\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2$. Da aber dieser Werth bei jeder einzelnen Turbine nur wenig von der Einheit abweicht, so kann man mit hinreichender Genauigkeit von der angegebenen Annahme ausgehen.

Ferner wird man schon der Einfachheit der Construction wegen die radiale Breite der sämmtlichen Einlauf- und Laufradringe gleich gross wählen; bezeichnet man diese Breite mit b, so ist nach der eingeführten Bezeichnung für alle Laufradbreiten:

$$b = r_2 - r_1 = r_4 - r_3 = r_6 - r_5 = \cdots$$

---

*) Ludwig Klein, »Theorie, Construction und Nutzeffect der Dampfturbinen«. Zeitschrift d. Ver. deutscher Ing. 1895, Bd. 39, S. 1189.

und für die radialen Leitradbreiten:

$$b = r_1 - r = r_3 - r_2 = r_5 - r_4 = \cdots .$$

Es seien nun wieder p der Dampfdruck beim Eintritte in das erste Leitrad und p_0 der Druck beim Austritte aus dem letzten Laufrade, v und v_0 das specifische Dampfvolumen des Dampfes an diesen beiden Stellen, sowie v_1 das Volumen desselben beim Eintritte in das erste Laufrad; dann folgt nach den Formeln auf S. 352:

$$Gv_1 = F_1 c_1 = 2 r_1 e \pi c_1 \cos \alpha_1 ,$$
$$Gv_0 = F_{2m} c_{2m} = 2 r_{2m} e \pi c_{2m} \cos \alpha_2 ,$$

und daraus durch Division, wenn man sich, was an dieser Stelle durchaus gestattet ist, v_1 durch v ersetzt denkt und zugleich die Beziehung $p v^\varkappa = p_0 v_0{}^\varkappa$ berücksichtigt:

$$\frac{r_{2m} c_{2m} \cos \alpha_2}{r_1 c_1 \cos \alpha_1} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{\varkappa}} .$$

Nun ist aber:

$$c_1 = \frac{u_1 \cos \alpha_1}{\sin(\alpha + \alpha_1)}, \qquad c_{2m} \sin \alpha_2 = u_{2m};$$

sowie:

$$u_{2m} : u_1 = r_{2m} : r_1 ,$$

daher ergiebt sich:

$$\left(\frac{r_{2m}}{r_1}\right)^2 = \frac{\cos^2 \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2}{\sin(\alpha + \alpha_1)} \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{\varkappa}} . \tag{295}$$

Denkt man sich die Grössen auf der rechten Seite dieser Gleichung gegeben und den Eintrittsradius der ersten, innersten Turbine gewählt, so berechnet sich hieraus der Austrittsradius r_{2m} der letzten, äussersten Turbine. Ist b die radiale Breite aller einzelnen Leit- und Laufräder und liegen im Ganzen m Laufräder oder m Stufen vor, so besteht die Beziehung:

$$b = \frac{r_{2m} - r_1}{2m - 1} . \tag{296}$$

Ist dann b bekannt, so sind nach der Beziehung:

$$b = r_1 - r = r_2 - r_1 = r_3 - r_2 = \cdots\cdots = r_{2m} - r_{2m-1}$$

auch sämmtliche einzelnen Radien bekannt und dann lässt sich für jede einzelne Turbine der Klammerausdruck auf der rechten Seite der Gleichung (291) berechnen.

Bezeichnet man für die innerste, erste Turbine diesen Klammerausdruck mit A_1 und setzt man die Winkelgeschwindigkeit des Laufrades ε und damit $u_1 = \varepsilon r_1$, so ergiebt die angezogene Gleichung:

$$2g(a - a_2) = \varepsilon^2 A_1 r_1^2,$$

und wenn man dann der Reihe nach für die einzelnen Turbinen den genannten Klammerausdruck mit A_3, A_5, ... A_{2m-1} bezeichet, folgt für die 2., 3., ... m^{te} Turbine:

$$2g(a_2 - a_4) = \varepsilon^2 A_3 r_3^2,$$

$$2g(a_4 - a_6) = \varepsilon^2 A_5 r_5^2,$$

$$2g(a_{2(m-1)} - a_{2m}) = \varepsilon^2 A_{2m-1} r_{2m-1}^2.$$

Addirt man diese Gleichungen, so ergiebt sich:

$$2g(a - a_{2m}) = \varepsilon^2 [A_1 r_1^2 + A_3 r_3^2 + \ldots. + A_{2m-1} r_{2m-1}^2],$$

nach welcher Formel sich die Winkelgeschwindigkeit ε der Gesammtturbine berechnen lässt. Diese Berechnung ist sehr umständlich und zeitraubend; es lässt sich jedoch hierbei ein Näherungsweg einschlagen, der für die praktische Verwerthung der Formel durchaus genau genug ist.

Bei der Parson-Turbine ist die Kranzbreite b so klein, dass man für jede einzelne Turbine in dem Klammerausdruck der Gleichung (291) näherungsweise

$$\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 = \left(\frac{r_1}{r}\right)^2 = 1$$

setzen darf; man erhält dann diesen Ausdruck, der mit A bezeichnet werden mag, für alle Turbinen von gleicher Grösse, und zwar folgt:

$$A = \left[\frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha_1} + \operatorname{cotg}^2 \alpha_2 - \frac{1}{(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha_1)^2}\right], \qquad (297)$$

und damit aus der letzten der vorstehenden Formeln:

$$2g(a - a_{2m}) = \varepsilon^2 A [r_1^2 + r_3^2 + \ldots + r_{2m-1}^2],$$

oder:

$$2g(a - a_{2m}) = \varepsilon^2 A \sum [r_{2m-1}^2], \qquad (298)$$

wo unter dem Summenzeichen der Reihe nach $m = 1, 2, 3 \ldots$ bis m zu setzen ist.

Wegen $r_{2m} = r_{2m-1} + b$ ergiebt sich aus Gleichung (296):

$$r_{2m-1} = r_1 - 2b + 2bm$$

und daher:

$$r_{2m-1}^2 = (r_1 - 2b)^2 + 2b(r_1 - 2b)m + 4b^2m^2.$$

Setzt man hier der Reihe nach $m = 1, 2, \ldots m$, und beachtet man, dass die Summe der natürlichen Zahlen

$$\sum(m) = \tfrac{1}{2}m(m+1)$$

und die Summe der Quadratzahlen

$$\sum(m^2) = \tfrac{1}{6}m(m+1)(2m+1)$$

ist, so findet sich nach einigen Umformungen der in Gleichung (298) vorkommende Summenausdruck:

$$\sum(r_{2m-1}^2) = [r_1 + (m-1)b]^2 m + \tfrac{1}{3}b^2(m^2-1)m.$$

Ist nun p der Dampfdruck beim Eintritte in das erste Laufrad und p_0 der Druck beim Austritt aus dem letzten Turbinenrade, so findet sich hier unter Benutzung der Gleichung (296a) und des vorstehenden Ausdrucks endlich die Grundgleichung:

$$2g\frac{\varkappa}{\varkappa-1}pv\left[1-\left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right]$$
$$= \varepsilon^2 Am\left\{(r_1 + (m+1)b)^2 + \tfrac{1}{3}b^2(m^2-1)\right\}. \qquad (299)$$

Daraus berechnet sich die Winkelgeschwindigkeit ε der Stufenturbine, wenn für A die Gleichung (297) benutzt wird. Das Product pv ist nach Gleichung (292) bez. (292a) gegeben.

Ist nach vorstehender Gleichung die Winkelgeschwindigkeit ε bekannt, so kann man jetzt für jedes beliebige einzelne Laufrad den Dampfdruck an der Austrittsstelle berechnen; wird dieser Druck bei der x^{ten} Turbine mit p_x bezeichnet, so hat man in vorstehender Gleichung nur x an Stelle von m und p_x an Stelle von p_0 zu substituiren; es tritt dann p_x als Function von x, d. h. der Nummer des Turbinenlaufrades, hervor.

Nun ist noch die durch die Stufenturbine gewonnene Arbeit L zu berechnen.

Die Geschwindigkeit w, mit welcher der Dampf in den ersten Leitapparat eintritt, berechnet sich mit hinreichender Genauigkeit nach Gleichung (290):

$$w = \frac{u_1}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha_1} = \frac{r_1\,\varepsilon}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha_1}, \tag{300}$$

und die absolute Austrittsgeschwindigkeit w_{2m} am letzten Laufrade folgt (s. Fig. 79):

$$w_{2m} = u_{2m}\operatorname{cotg}\alpha_2 = r_{2m}\,\varepsilon\operatorname{cotg}\alpha_2 .$$

Nach Gleichung (296) ist aber:

$$r_{2m} = r_1 + (2m-1)\,b,$$

daher:

$$w_{2m} = \varepsilon\,[r_1 + (2m-1)b]\operatorname{cotg}\alpha_2 . \tag{301}$$

Unter Benutzung der beiden vorstehenden Formeln (300) und (301) findet sich endlich unter Beachtung von Gleichung (291 a) und (293) für die Gesammtturbine die Arbeit L, welche einem Kilogramm Dampf entspricht:

$$\frac{L}{D} = \frac{\varkappa}{\varkappa-1}\,pv\left[1-\left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right]$$
$$-\frac{\varepsilon^2}{2g}\left[(r_1+(2m-1)b)^2\operatorname{cotg}^2\alpha_2 - \frac{r_1{}^2}{(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha_1)^2}\right] \tag{302}$$

Dabei ist die Winkelgeschwindigkeit ε durch Gleichung (299) bestimmt.

Ermittelt man, wie vorhin angegeben wurde, für die x^{te} Turbine den Druck p_x, so giebt die vorstehende Formel für $m = x$ und $p_0 = p_x$ die gesammte Arbeit der ersten x Turbinen.

Führt man in gleicher Weise die Rechnung für die $(x-1)^{\text{te}}$ Turbine durch, so bestimmt sich die Arbeit, welche die x^{te} Turbine für sich allein liefert und das zugehörige Druckgefälle $(p_{x-1} - p_x)$. Im Allgemeinen liegt aber das Bedürfniss nicht vor, jedes einzelne Turbinenlaufrad für sich zu untersuchen.

Nun ist aber noch der Dampfverbrauch der Turbine und ihre Leistung zu ermitteln.

Das dem Admissionsdrucke p entsprechende specifische Volumen v des trocknen gesättigten Dampfes berechnet sich nach Gleichung (292). Der Druck p_0, unter welchem der Dampf das äusserste Laufrad verlässt, wurde als gegeben betrachtet und da beim Durchgange des Dampfes durch die Turbine adiabatische Zustandsänderung vorausgesetzt wurde, so berechnet sich das entsprechende specifische Volumen v_0 aus der Gleichung:

$$\frac{v_0}{v} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{\varkappa}}, \tag{303}$$

mit $\varkappa = 1{,}135$. Dieser Dampf ist aber nass, weil sich während der adiabatischen Expansion Dampf niederschlägt; v_0 repräsentirt daher das Volumen der Gewichtseinheit von Dampf und Wasser beim Drucke p_0; ist x die specifische Dampfmenge, d. h. das Gewicht des Dampfes in der Gewichtseinheit Mischung, und ist s das specifische Volumen des trocknen gesättigten Dampfes vom Drucke p_0, so besteht mit hinreichender Genauigkeit die Beziehung:

$$v_0 = xs, \tag{304}$$

woraus sich x und die vorhandene Wassermenge $(1 - x)$ berechnet.

Dem äusseren Radhalbmesser r_{2m} entspricht der Austrittsquerschnitt:

$$F_2 = 2 r_{2m} \pi e \cos \alpha_2,$$

wobei e die Laufradhöhe darstellt.

Ist c_{2m} die relative Austritts- und $u_{2m} = \varepsilon r_{2m}$ die Umfangsgeschwindigkeit, so folgt die Beziehung:

$$c_{2m} \sin \alpha_2 = \varepsilon r_{2m},$$

und das Dampfvolumen:

$$D v_0 = F_2 c_{2m},$$

oder mit vorstehenden Werthen das auf die Secunde bezogene Gewicht D des Admissionsdampfes:

$$D = \frac{2 \pi \varepsilon e}{v_0} r_{2m}^2 \operatorname{cotg} \alpha_2. \tag{305}$$

Substituirt man diesen Werth in Gleichung (302), so findet sich die Secundenarbeit L der Turbine in Meterkilogramm und daraus die Arbeit in Pferdestärken.

Die Dampfmenge D_h stündlich ist $D_h = 3600 D$ und $L = 75 N$, wenn N die Arbeit in Pferdestärken ist; daher ergiebt sich die Dampfmenge stündlich pro Pferdestärke:

$$\frac{D_h}{N} = \frac{270\,000}{\left(\frac{L}{D}\right)}. \tag{306}$$

Die gewonnenen Werthe gelten allerdings rein theoretisch, geben aber hinreichenden Einblick in das Wesen der Dampf-Stufenturbine.

Einige Beispiele mögen zu weiterer Erläuterung dienen.

Beispiel 1. Bei einer mit Condensation arbeitenden Parson'schen Dampfturbine sei der Druck des Admissionsdampfes $p = 7$ kg:qcm und der Dampfdruck beim Austritt aus der Turbine $p_0 = 0{,}2$ kg.

Man wähle die Winkel $\alpha = \alpha_2 = 72^\circ$; damit folgt nach Gleichung (284) hinreichend genau $\alpha_1 = 0$, und man erreicht den Vortheil, dass die Schaufeln sämmtlicher Leit- und Laufräder gleiche Form und Grösse erhalten.

Mit dem angegebenen Werthe ergiebt sich aus Gleichung (295) der äusserste Turbinenradius:

$$r_{2m} = 8{,}594\, r_1\,,$$

wobei r_1 der Eintrittsradius für das erste Laufrad ist. Aus Gleichung (296) folgt auch:

$$r_{2m} = r_1 + (2m - 1)b\,.$$

Diesen beiden Gleichungen genügen verschiedene Werthe von r_1, b und m.

Es mögen hier $m = 23$ Stufen oder Turbinen, $r_1 = 0{,}120$ und $b = 0{,}020$ m angenommen werden, dann ist der äussere Turbinenradius $r_{2m} = 1{,}02$ m.

Bei den angenommenen Winkeln ergiebt Gleichung (297) einfach $A = 2$; ferner folgt nach Gleichung (292):

$$pv = 19156 \quad \text{und damit} \quad v = 0{,}2736.$$

Mit $\varkappa = 1{,}135$ folgt:

$$\frac{\varkappa}{\varkappa - 1} pv \left[1 - \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}\right] = 55537\,,$$

dann aus Gleichung (299) die Winkelgeschwindigkeit ε der Turbine:

$$\varepsilon = 248{,}4,$$

und die Minutenumdrehungszahl:

$$n = \frac{30}{\pi} \varepsilon = 2372.$$

Aus Gleichung (302) berechnet sich:

$$\frac{L}{D} = 55195\,,$$

und dann nach Gleichung (306):

$$\frac{D_h}{N} = 4{,}89 \text{ kg}.$$

Das specifische Volumen v_0 des aus der Turbine tretenden Dampf- und Wasserstrahles findet sich nach Gleichung (303) $v_0 = 6{,}2713$ und wegen $s = 7{,}7826$ die specifische Dampfmenge $x = 0{,}806$, ferner die Wassermenge $1 - x = 0{,}194$.

Aus Gleichung (305) berechnet sich, wenn man die Radhöhe $e = 0{,}020$ m annimmt, die Dampfmenge in der Secunde:

$$D = 1{,}6826 \text{ kg}\,,$$

was auf eine Arbeit von $N = 1238$ Pferdestärken führt, welch beide Werthe in Wirklichkeit wohl (hauptsächlich in Folge der zahlreichen Spalten) eine bedeutende Reduction erfahren werden.

Hätte man im vorstehenden Beispiele bei denselben Dampfdrucken und Schaufelwinkeln $m = 31$ statt 23 Turbinen und als radiale Radweite $b = 0{,}015$ statt $0{,}020$ m mit $r_1 = 0{,}120$ angenommen, so hätte sich der äussere Radhalbmesser $r_{2m} = 1{,}135$ ergeben und die Winkelgeschwindigkeit $\varepsilon = 210{,}4$, sowie die Minutenumdrehungszahl $n = 2009$ statt 2372 herausgestellt.

Beispiel 2. Bei einer ohne Condensation arbeitenden Parson'schen Dampfturbine sei der Admissionsdruck $p = 10$ kg und der äussere Druck $p_0 = 1{,}2$ kg.

Die Winkel für die Laufräder sollen gewählt werden $\alpha = 68^{\circ}$, $\alpha_1 = 30^{\circ}$ und $\alpha_2 = 72^{\circ}$, also vom vorigen Falle verschieden; hier werden daher die Leitschaufeln mit den Radschaufeln nicht von gleicher Form sein.

Nach den im vorigen Beispiele citirten Gleichungen berechnet sich nun der Reihe nach:

$$r_{2m} = 3{,}890\, r_1\,,$$

und wenn man $r_1 = 0{,}120$, $b = 0{,}015$ m annimmt und $m = 12$ Stufen oder Turbinen voraussetzt: $r_{2m} = 0{,}465$ m.

Bei den angenommenen Schaufelwinkeln bestimmt sich:

$$A = 1{,}6236\,.$$

Ferner ist:

$$pv = 19575 \quad \text{und} \quad v = 0{,}1957\,,$$

sowie:

$$\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\, pv \left[1 - \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}\right] = 37007\,,$$

und dann die Winkelgeschwindigkeit der Turbine $\varepsilon = 636{,}8$ und die Minutenumdrehungszahl $n = 6080$.

Weiterhin findet sich:

$$\frac{L}{D} = 36567 \quad \text{und} \quad \frac{D_h}{N} = 7{,}38 \text{ kg}.$$

Auf dem im vorigen Beispiele angegebenen Wege bestimmt sich das specifische Volumen der Mischung von Dampf und Wasser beim Austritt $v_0 = 1{,}2673$ und die specifische Dampfmenge $x = 0{,}884$.

Wählt man die Radhöhe $e = 0{,}015$ m, so berechnet sich die Dampfmenge, welche die Turbine in der Secunde verbraucht:

$$D = 3{,}327 \text{ kg}\,,$$

und die Turbinenarbeit:

$$N = 1623 \text{ Pferdestärken.}$$

Die vorstehende Theorie der Dampfturbinen und die ausgeführten Beispiele zeigen, dass die Berechnung einer derartigen Turbine keiner Schwierigkeit unterliegt. Bezüglich der vorhin getroffenen Wahl der Schaufelwinkel und der radialen Breite der Leit- und Laufradkränze können allerdings noch Zweifel bestehen, welche vielleicht gehoben werden könnten durch Berechnung einer Reihe von Einzelfällen bei gleicher Druckdifferenz; Genaueres ist erst von künftigen Versuchen zu erwarten. Die Versuche von Ewing und Kennedy*) stehen noch ganz vereinzelt und in den betreffenden Berichten ist auch die Angabe der Einzeldimensionen der Turbine unterlassen worden*).

Der Process der Stufendampfturbine ist genau derselbe, wie bei den Kolbendampfmaschinen; es treten aber Unterschiede auf, die recht wohl zu der Erwartung berechtigen, dass die Dampfturbinen noch eine weitgehende Verwendung finden werden.

Von hervorragendster Wichtigkeit ist der Umstand, dass die Dampfturbine bei grossen Leistungen einen ganz unvergleichlich geringeren Raum einnimmt, als die Kolbendampfmaschine und dass

*) Engineering 1892, LIV, S. 574 und 1893, LVI, S. 126.

man daher auch im Stande sein wird, die Druckdifferenz zwischen Kessel und Condensator viel vollständiger auszunutzen.

Weiter aber ist sehr bemerkenswerth, dass bei der Turbine der so überaus schädliche Wärmeaustausch zwischen dem Dampf und den Metallwandungen fast gänzlich in Wegfall kommt. Ist im Betriebe der Beharrungszustand eingetreten, so tritt der Dampf beim Durchgange durch die Leit- und Laufräder überall mit Wandflächen von nahezu gleicher Temperatur in Berührung, auch fällt hier der grosse Nachtheil fort, der bei der Kolbendampfmaschine beim Beginn der Admission durch das Mischen des frischen Dampfes mit der im schädlichen Raume zurückgebliebenen Dampf- und Wassermischung von geringerer Temperatur entsteht.

Diesem gegenüber fällt nun freilich für die gewöhnlichen Betriebsverhältnisse der Dampfmaschine bei den Dampfturbinen die noch immer beträchtliche Umdrehungszahl ins Gewicht, wenn dieselbe auch bei der radialen Stufenturbine gegenüber der de Laval-Turbine schon stark herabgezogen erscheint. Die nähere Verfolgung der oben gegebenen Theorie und der berechneten Beispiele zeigt, dass man doch in der Vermehrung der Stufen an eine gewisse Grenze gebunden ist.

Weiter sind die sehr geringen Dimensionen der Dampfkanäle in den Leit- und Laufrädern zu beachten; liegt nicht eine sehr kleine Theilung vor, was auf grosse Schaufelzahl führt, so ist zu befürchten, dass der Dampf beim Durchströmen der Kanäle keineswegs den vorgeschriebenen Ablenkungen folgt; ein ganz besonderer Uebelstand liegt aber bei den Stufenturbinen in dem Vorhandensein der zahlreichen Spalten, die in der Ausführung doch nicht eng genug gehalten werden können. Die oben gegebene Theorie der Stufenturbine leidet an dem Mangel, dass dem Einflusse der Spalten nicht Rechnung getragen werden konnte. Die Arbeit der Turbine und der verbrauchten Dampfmenge dürfte in Wirklichkeit eine wesentlich geringere sein, als oben durch Rechnung gefunden wurde. Die Anzahl der Spalten wächst mit der Stufenzahl und diese wieder mit der Druckdifferenz. Es entsteht daher die Frage, ob sich nicht bei Dampfturbinen die Anwendung hoch überhitzter Wasserdämpfe von geringerem Drucke empfehlen dürfte, eine Frage, die hier nicht weiter verfolgt werden soll; dagegen mag noch in der Kürze die L u f t t u r b i n e besprochen werden, da bei derselben ein verhältnissmässig geringerer Anfangsdruck angewandt werden wird.

Da die oben entwickelten Grundformeln auch sofort für Luftturbinen verwerthbar sind, so mögen die Untersuchungen an einem speciellen Beispiele vorgeführt werden.

Beispiel. Bei einer mit atmosphärischer Luft betriebenen Luftturbine, einer radialen Stufenturbine, sei die Betriebsluft auf $p = 2$ Atmosphären comprimirt, was natürlich das Vorhandensein einer besonderen Compressionspumpe voraussetzt, welche einen Theil der von der Turbine gelieferten Arbeit verzehrt, der hier nicht in Betracht gezogen werden soll. Der Druck der die Turbine verlassenden Luft sei $p_0 = 1$ Atmosphäre und die Temperatur der Betriebsluft t^0 Celsius, daher die absolute Temperatur $T = 273 + t$ (S. 5). Dieser Temperaturwerth mag zunächst unbestimmt gelassen werden, um in den Rechnungen zugleich den Fall einzuschliessen, dass die Turbine mit erhitzter Luft arbeitet, die Turbine daher als ein Theil einer Heissluftmaschine erscheint.

Nach Gleichung (2) S. 5 ist $pv = BT$, wobei p in kg : qm und für gewöhnliche atmosphärische Luft $B = 29,375$ einzusetzen ist.

Bei adiabatischer Expansion gilt die Beziehung:

$$p v^{\varkappa} = p_0 v_0^{\varkappa}$$

mit $\varkappa = 1,410$, wonach sich v_0, das specifische Volumen der aus der Turbine tretenden Luft, bestimmt; die Gleichung $p_0 v_0 = B T_0$ giebt dann auch die absolute Temperatur dieser Luft. Direct berechnet sich übrigens:

$$\frac{v_0}{v} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{\varkappa}} \quad \text{und} \quad \frac{T_0}{T} = \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}.$$

Für das hier angenommene Druckverhältniss $p : p_0 = 2$ berechnet sich aus den angegebenen Formeln mit $p_0 = 10333$ kg:

$$v = 0,0014214\, T$$

und

$$v_0 = 1,6350 v, \qquad T_0 = 0,8175 T.$$

Wählt man für die Schaufelwinkel:

$$\alpha = 72^0, \quad \alpha_2 = 72^0 \quad \text{und} \quad \alpha_1 = 0,$$

so folgt nach Gleichung (295) und (296):

$$r_{2m} = 2,300 \cdot r_1 = r_1 + (2m - 1)\, b.$$

Dieser Formel wird u. A. genügt, wenn man $m = 4$ Stufen voraussetzt und $b = 0,020$, $r = 0,108$ und damit $r_{2m} = 0,248$ m annimmt.

Hieraus folgt mit $A = 2$ aus Gleichung (299):

$$\varepsilon^2 = 1497{,}5\, T$$

und nach Gleichung (302):

$$\frac{L}{D} = 18{,}040\, T,$$

wobei D die Luftmenge in Kilogrammen darstellt und das Verhältniss $L : D$ die Arbeit pro Kilogramm Luft in Meterkilogrammen.

Nimmt man nun beispielsweise an, die Luft trete mit $t = 400^\circ$ oder $T = 673^\circ$ Temperatur in die Turbine, so ergeben die vorstehenden Formeln:

$$v = 0{,}9566, \quad v_0 = 1{,}5640, \quad T_0 = 550^\circ,$$

und die Temperatursenkung beim Durchgange durch die Turbine ist:

$$t - t_0 = T - T_0 = 123^\circ.$$

Die Winkelgeschwindigkeit ε findet sich $\varepsilon = 1003{,}9$ und die Minutenumdrehungszahl $n = 9587$, sowie

$$\frac{L}{D} = 12141.$$

Setzt man eine axiale Radhöhe $e = 10$ mm voraus, so ergiebt Gleichung (305) die Luftmenge in der Secunde $D = 0{,}8061$ kg und daraus folgt die Arbeit in Pferdestärken:

$$N = 130{,}5.$$

Die Resultate der vorstehenden Specialuntersuchung scheinen für die Heissluft-Turbine keine günstigen Aussichten zu eröffnen, jedenfalls liegt hier noch ein weites Feld der Untersuchung offen.

Bei der oben entwickelten Theorie der radialen Stufenturbine wurde ausdrücklich vorausgesetzt, dass der Dampf bez. die Luft über alle Spalten hinweg stossfrei hindurchströme. Bei den früher behandelten Wasser-Vollturbinen konnte man leicht von den für radiale Vollturbinen abgeleiteten Formeln auf die für axiale Turbinen gefundenen Formeln dadurch gelangen, dass man den Eintritts- und Austrittsradius r_1 und r_2 des Laufrades gleich gross annahm; bei Stufenturbinen für Dampf und Luft ist dieser Rechnungsgang unstatthaft.

Parson hat ursprünglich die Dampfturbine als axiale Turbine ausgeführt*); die Laufradschaufeln befanden sich auf dem äusseren

*) Stribeck, »Die Dampfturbine von Parson«. Zeitschr. des Vereins deutscher Ing. Bd. 33, 1889, S. 606.

Mantel eines Cylinders, die Leitradschaufeln auf dem inneren Mantel eines solchen, der den ersteren Cylinder concentrisch umschloss. Die Anordnung hat sich nicht bewährt, Parson ging dann zur Anwendung radialer Räder über und wohl mit Recht. Bei den Stufenturbinen findet beim Durchgange durch das Rad eine Expansion des Dampfes statt und daher werden die relativen Durchflussgeschwindigkeiten von Rad zu Rad zunehmen. Soll nun stossfreier Durchgang stattfinden, so muss auch eine entsprechende Zunahme der Umfangsgeschwindigkeiten der Laufräder vorliegen, und eine solche ist nur, wie obige Darlegungen zeigen, bei radialen Turbinen zu erreichen; bei axialen Stufenturbinen ist die Umfangsgeschwindigkeit aller Laufräder die gleiche und daher werden bei jedem Spaltübertritte plötzliche Geschwindigkeitsänderungen auftreten, deren Einfluss auf den Gang und die Leistung der Turbine sich der Rechnung entzieht.

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.